UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LAS CIENCIAS

"CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA DESDE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS CON UNA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA APOE"

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Maestro en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias (Matemáticas)

PRESENTA
JOSÉ ANTONIO PALACIOS BRISEÑO

DIRIGIDO POR:
M.D.M. CECILIA HERNÁNDEZ GARCIADIEGO

M.D.M. CECILIA HERNÁNDEZ GARCIADIEGO
PRESIDENTE

DRA. LILIA PATRICIA AKÉ TEC
SECRETARIO

M.M.A. IVÁN GONZÁLEZ GARCÍA
VOCAL

M.D.M. CARMEN SOSA GARZA
SUPLENTE

DR. VICTOR LARIOS OSORIO
SUPLENTE

Centro Universitario, Querétaro, Querétaro.
Diciembre, 2023
México

Construcción del concepto de derivada desde su
representación gráfica en estudiantes universitarios
con una perspectiva de la teoría APOE

por

José Antonio Palacios Briseño

Dedicatoria

Para mis padres y hermano, de los cuales siempre he sentido su apoyo y cariño.

Agradecimientos

A la Maestra Cecilia Hernández Garcíadiego, directora de esta tesis, por el apoyo brindado a lo largo de estos meses y por compartir conmigo su gran conocimiento.

A los profesores Lilia, Iván, Carmen y Víctor, por aceptar ser parte del sínodo y por sus valiosos aportes a este trabajo de tesis.

A las profesoras Luisa y Patricia, por el soporte y acompañamiento en mi formación durante estos dos años.

A mis compañeras Maidy y Miriam, por la amistad y el apoyo a lo largo de la maestría.

A cada una de las personas que hicieron posible la culminación de este trabajo.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada para realizar mis estudios de Maestría.

(CVU/Becario): 1144936

Índice General

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Resumen

El concepto de derivada es uno de los más importantes en el área del cálculo e incluso su importancia se traslada a otras ramas científicas. Esto hace que existan diversas investigaciones del concepto, ya sea analizando la comprensión de los estudiantes o la caracterización de los profesores y su modo de enseñar el concepto en los salones de clases. Aun con esta atención constante al concepto, se sigue reportando que los estudiantes suelen hacer uso de fórmulas y/o reglas de derivación para la resolución de ejercicios, enfocando así su aprendizaje a un tratamiento algorítmico, pero los resultados obtenidos carecen de un significado para ellos. Por ende, se encuentran dificultades para lograr la comprensión de otras representaciones del concepto, como lo puede ser la gráfica. Por lo que se sugiere complementar la enseñanza del concepto con esta representación. Por ello, el presente estudio tiene como objetivo el analizar las estructuras mentales que presentan estudiantes universitarios al construir el concepto de derivada desde su representación gráfica con un enfoque desde la teoría APOE, la cual proporciona estructuras mentales necesarias para la comprensión de un concepto matemático: acción, proceso, objeto y esquema. Para ello, el desarrollo del estudio se realizó con un grupo de dieciséis estudiantes, a los cuales se les aplicó una serie de dos cuestionarios. Uno de ellos fungiendo como cuestionario de diagnóstico y el restante como cuestionario posterior a una intervención dentro del aula. La intervención realizada fue diseñada desde una adaptación del ciclo ACE, el cual es una estrategia pedagógica proporcionada por la teoría APOE, y se hizo uso de herramientas digitales que brindan representaciones gráficas del concepto para complementar su enseñanza y favorecer una comprensión más amplia del mismo. El análisis de las respuestas del cuestionario de diagnóstico brindadas por los estudiantes muestran claras deficiencias en los estudiantes al enfrentar ejercicios conceptuales en un contexto gráfico y una parte de ellos muestra una inclinación por buscar la resolución de los ejercicios desde un aspecto algebraico. Sin embargo, una vez realizada la intervención en el aula se observa una mejoría en la comprensión del concepto evidenciando justificaciones analizando lo gráfico del ejercicio y mostrando de una manera más orgánica la construcción del concepto con las estructuras mentales *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema*. Se espera que la información recabada sea útil para futuras investigaciones como antecedentes y para que profesores en activo incentiven el resolver este tipo de ejercicios conceptuales en las aulas.

Palabras clave: Cálculo diferencial, derivada, aspecto gráfico, Teoría APOE.

Abstract

The concept of derivative is one of the most important in the area of calculus and even its importance is transferred to other scientific branches. This has led to various investigations of the concept, either analyzing the understanding of students or the characterization of teachers and their way of teaching the concept in the classroom. Even with this constant attention to the concept, it is still reported that students usually make use of formulas and derivation rules to solve exercises, thus focusing their learning on an algorithmic treatment, but the results obtained lack meaning for them. Therefore, difficulties are encountered in achieving understanding of other representations of the concept, such as the graphical. Therefore, it is suggested to complement the teaching of the concept with this representation. Therefore, the present study aims to analyze the mental structures presented by university students when constructing the concept of derivative from its graphical representation with an approach from the APOE theory, which provides mental structures necessary for the understanding of a mathematical concept: action, process, object and scheme. For this purpose, the study was carried out with a group of sixteen students, to whom a series of two tests were applied. One of them served as a diagnostic test and the other as a post-intervention test. The intervention was designed from an adaptation of the ACE cycle, which is a pedagogical strategy provided by the APOE theory, and made use of digital tools that provide graphical representations of the concept to complement the teaching of the concept and promote a broader understanding of the concept. The analysis of the answers of the diagnostic test provided by the students shows clear deficiencies in the students when facing conceptual exercises in a graphical context and a part of them shows an inclination to seek the resolution of the exercises from an algebraic aspect. However, once the intervention was carried out in the classroom, an improvement in the understanding of the concept is observed, evidencing justifications by analyzing the graphic aspect of the exercise and showing in a more organic way the construction of the concept with the mental structures action, process, object, and scheme. It is hoped that the information gathered will be useful for future research as background information and also for active teachers to encourage the resolution of this type of conceptual exercises in the classroom.

Key words: Differential calculus, derivative, graphical aspect, APOS theory.

Capítulo 1. Antecedentes

En este capítulo se expresan los antecedentes identificados en relación con las diferentes variables de este trabajo de investigación. La primera variable a analizar es la relacionada con las dificultades que presentan los estudiantes para la comprensión de la derivada y la resolución de problemas relacionados a este concepto. La siguiente variable a revisar es sobre el proceso de construcción mental de un concepto matemático desde el enfoque de la teoría APOE, donde cada una de sus siglas describen las estructuras mentales utilizadas por un sujeto para la construcción de un concepto: Acción, Proceso, Objeto, Esquema. Para fines de este estudio se analizan diversos trabajos de investigación que comparten el impacto de la teoría APOE en la construcción del concepto de derivada, así como de diferentes conceptos matemáticos. Por último, la tercera variable a examinar es la ligada a la enseñanza de diferentes conceptos de las matemáticas, entre ellos el concepto de derivada, a través de las herramientas digitales y sus repercusiones, pues estas herramientas forman parte importante del desarrollo metodológico propuesto desde la teoría APOE.

1.1 Dificultades en la comprensión del concepto de derivada

1.1.1 Estudios a nivel nacional

A nivel nacional se han realizado estudios sobre la comprensión del concepto de derivada, como el realizado por Fuentes-Lara et al. (2021) al analizar un examen colegiado universitario aplicado a 3751 alumnos de primer semestre de ingeniería. Dentro de este trabajo se estudió la actividad cognitiva que es necesaria para la resolución de los reactivos y, al mismo tiempo, se compartieron los resultados obtenidos de la resolución de dicho examen. Los apartados de derivadas y aplicaciones de derivadas son los que presentaron una mayor dificultad para los estudiantes. Estos apartados necesitaban que el estudiante tuviera un sólido dominio del lenguaje algebraico y que contara con la habilidad de pasar de procedimientos algorítmicos para el análisis del concepto a procedimientos geométricos, pero los resultados obtenidos de las respuestas de los estudiantes mostraron grandes deficiencias en estas cuestiones. Los autores han compartido que, aun cuando el alumno conoce algoritmos matemáticos que le permiten ingresar al grado universitario, queda en evidencia que esto no es suficiente al momento de resolver problemas que requieran un mayor grado de análisis que aquellos donde solo se necesita la mecanización para resolverlos.

“El aspecto visual de la derivada, como recurso de apoyo, es un factor que influye en la comprensión de conceptos matemáticos” (Briceño et al., 2018, p. 36). Con base en esto, Briceño et al. (2018) realizaron un estudio sobre el análisis de la comprensión del concepto de derivada desde el punto de vista gráfico. Este estudio fue inferido de una muestra de once estudiantes de una universidad mexicana y su objetivo fue el de analizar cómo los estudiantes comprenden la representación gráfica y analítica del concepto de derivada. Los resultados mostraron que los alumnos se inclinan por una interpretación algebraica de la derivada. Asimismo, los autores han compartido que esta inclinación es la razón por la cual los alumnos también tienen deficientes conocimientos con respecto a conceptos como límites y recta tangente, pues solo se presenta de manera memorística en su comprensión. Esta observación la extrapolaron al concepto de derivada, ya que por parte de los alumnos se aprende a través de la mecanización menospreciando la representación geométrica del concepto.

Siguiendo el estudio del objeto matemático de la derivada en el contexto mexicano, García et al. (2018) realizaron un estudio para analizar el desempeño que presentan los estudiantes del Instituto Politécnico Nacional en tareas de matemáticas. La muestra fue tomada de 225 alumnos recién ingresados a esta institución mexicana. Las tareas relacionadas al concepto de derivada mostraron resultados como el hecho de que el 78 % de alumnos contestó de manera incorrecta el ejercicio relacionado a la interpretación gráfica de la derivada. Asimismo, en el ítem referente a relacionar la derivada como la pendiente de la recta tangente con el signo de la función derivada, el 71 % de los alumnos tuvo respuestas incorrectas. Como reflexiones finales del estudio, García et al. (2018) concluyeron que los alumnos presentan dificultades “en el manejo de la interpretación geométrica de la derivada: como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto” (p. 51).

1.1.2 Estudios a nivel internacional

También se han identificado antecedentes dentro de Latinoamérica, tal y como la investigación realizada por Loayza (2021), que tuvo como objetivo estudiar el papel que juegan la ingeniería y situación didáctica en el aprendizaje de la noción de derivada por parte de los alumnos y, de igual manera, identificar las dificultades y errores presentes en el proceso de aprendizaje del concepto. Este trabajo hizo uso de la Teoría de Situaciones Didácticas como marco teórico para realizar la secuencia didáctica de la investigación y de la ingeniería didáctica como metodología para el estudio de resultados. Para esta investigación fue analizada una muestra intencional de veinte alumnos de cálculo diferencial de la Universidad Nacional del Altiplano en Perú, los cuales presentaron dificultades para el entendimiento del lenguaje matemático y falta de conocimientos relacionados al pensamiento variacional. Loayza (2021) concluyó que estos problemas vienen por una falta de aprehensión de conocimientos en niveles de educación previos.

"El cálculo diferencial ha tenido diversas dificultades en el entendimiento de sus diversos conceptos, en especial en el tema de la derivada" (Saraza-Sosa et al., 2019, p. 42), por ello Saraza-Sosa et al. (2019) realizaron un trabajo de investigación para estudiar el grado de comprensión que manejan los docentes en formación que estudian la Licenciatura en Matemática de la Universidad Francisco de Paula Santander en Colombia. Este trabajo hizo uso de la ingeniería didáctica como referente teórico. El análisis epistémico que esta teoría trae consigo muestra la evolución del concepto de derivada desde lo geométrico hasta su formalización en términos algebraicos. Caso contrario a lo observado en el análisis de tipo documental trabajado con este marco teórico, pues los hallazgos observados muestran que entre los estudiantes predomina el uso de reglas dentro de procedimientos algorítmicos, pero no desarrollan la comprensión de la representación gráfica del concepto. Esto último es similar a los resultados encontrados en las pruebas de conocimiento aplicadas, donde se observa falta de conocimiento del tipo conceptual en los estudiantes y esta falta es la que no les permite desarrollar el pensamiento gráfico-algebraico.

> El cálculo diferencial es una de las ramas que más se relaciona con las aplicaciones de ingeniería, pues con estos conocimientos los ingenieros pueden realizar estudios que dependan de cantidades o magnitudes y logran deducir en un proceso determinado las cantidades máximas o mínimas requeridas. (Gutiérrez et al., 2017, p. 139)

Por ello, Gutiérrez et al. (2017) realizaron un estudio para analizar las dificultades que tienen los estudiantes de ingeniería de la Universidad Militar Nueva Granada en Colombia dentro del proceso de aprendizaje del concepto de derivada mediante un estudio de casos. Este estudio tuvo como resultados que el 61 % de los alumnos mostraban deficiencias en el uso de las reglas de derivación, mientras que el 70 % de ellos tenían dificultades para calcular la derivada a partir del concepto de límite. Gutiérrez et al. (2017) concluyeron que parte de los estudiantes mostraron una mecanización al resolver los ejercicios expuestos, pero no tenían una correcta comprensión del concepto de derivada como la razón de cambio instantáneo.

1.2 Construcción de conceptos matemáticos de acuerdo a la teoría APOE

1.2.1 Estudios a nivel nacional

En México hay investigaciones recientes que cuentan con enfoque teórico desde la teoría APOE. Por ejemplo, el trabajo realizado por Amaro (2020) sobre el análisis de la construcción del concepto de derivada en quince profesores de nivel bachillerato tenía como objetivo analizar la comprensión que tiene este grupo de profesores del concepto de derivada. Este análisis fue trabajado desde el enfoque de la Teoría APOE dando como resultado el nivel de construcción mental que maneja el profesorado. El análisis de los resultados se dividió en dos segmentos. El primer segmento analizó el nivel de construcción que presentan los profesores dentro de un examen diagnóstico y el segundo segmento analizó las respuestas de los mismos profesores después de haber realizado actividades diseñadas desde sus fortalezas y debilidades mostradas en el examen diagnóstico. En el resultado del diagnóstico doce profesores contaron con una *concepción acción* y después de las actividades didácticas para mejorar la comprensión del tema catorce lograron alcanzar este nivel de construcción en el registro gráfico de derivada. Mientras que para la *concepción proceso* en el registro gráfico de derivada pasaron de ser cinco profesores a doce los que contaban con este nivel de construcción.

Durante el mismo año, Guerrero (2020) realizó un trabajo para la reconstrucción del concepto de límite mediante la teoría APOE en una muestra de once profesores universitarios. En este trabajo se implementaron actividades didácticas y se estudia el impacto que estas tienen en los profesores. De acuerdo a Guerrero (2020):

> En las actividades se utiliza la representación analítica, tabular y gráfica del concepto de función, las cuales sirven como recurso para que los profesores construyan o reconstruyan la concepción de aproximación y métrica del límite de una variedad de funciones dadas. (p. 17)

Los resultados resaltaron que seis profesores mostraron una *concepción acción* inicial y posteriormente tres pasaron a una *concepción proceso*. Mientras que, de cinco profesores que mostraban una *concepción proceso* inicial, tres de ellos fueron capaces de mostrar una *concepción objeto* posteriormente. Un dato remarcado en la investigación fue que a algunos profesores se les dificulta la interpretación gráfica. Por lo que, según Guerrero (2020), “es posible que los mismos profesores de matemáticas restrinjan su instrucción a una enseñanza de corte algebraico” (p. 58).

Jiménez et al. (2018) trabajó en un análisis sobre las construcciones mentales relacionadas al concepto de integral definida. Este análisis se llevó a cabo en una muestra de catorce estudiantes de primer semestre de Ingeniería en Sistemas Computacionales que se encontraban cursando la materia de Cálculo en una universidad mexicana. Dicha investigación tuvo como objetivo analizar el nivel de construcción mental relacionado con el concepto de integral que manejan los alumnos desde el enfoque APOE. Los resultados mostraron que aproximadamente el 78 % de los alumnos fue capaz de realizar cada paso en la resolución de problema recordando fórmulas, así mostrando un nivel de *concepción acción*. Mientras que el 35 % de ellos mostró la capacidad de realizar los problemas y explicar la integral de forma generalizada en la *concepción proceso*. Por último, sólo el 7 % de ellos tuvo las aptitudes para construir nuevas integrales a partir de la construcción de acciones y procesos previamente interiorizados y encapsulados mostrando una *concepción objeto*.

1.2.2 Estudios a nivel internacional

Siguiendo con el estudio de conceptos desde la teoría APOE, pero ahora en Argentina, Pereyra y Herrera (2020) realizaron una investigación para estudiar las dificultades que los alumnos presentaban para comprender el concepto de derivada desde la teoría APOE. La recolección de los datos fue llevada a cabo a través de un estudio de casos mediante un enfoque descriptivo y una metodología cualitativa. Esta recolección fue realizada a tres alumnos al finalizar el curso de la asignatura de cálculo mediante un cuestionario único. Este cuestionario mostró las dificultades que presentaban los alumnos para construir el concepto de derivada, pues dos de los tres alumnos tenían noción de la definición, pero aun así presentaban dificultades para entender el concepto de manera clara en su parte analítica y geométrica. En cambio, el tercer alumno ha podido mostrar una *concepción objeto*, pues fue capaz de relacionar gráficamente la función con su derivada. Como conclusión general se compartió lo siguiente por parte de Pereyra y Herrera (2020):

> Estos resultados en general son coincidentes con otras investigaciones de la temática en el sentido de que tienen dificultades para la interpretación del concepto, y que prevalecen procedimientos algorítmicos para la resolución de problemas sencillos, donde sólo es necesario aplicar reglas de derivación. (p. 57)

Finalmente, (Rodríguez et al., 2019) realizó un trabajo de investigación sobre la construcción cognitiva del conjunto solución para un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Por ello propuso una descomposición genética para este concepto desde un contexto geométrico. La descomposición genética juega un papel importante en la teoría APOE porque, de acuerdo a Rodríguez et al. (2019), “describe en detalle las construcciones y los mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante construya un concepto matemático” (p. 74). Esta investigación se ha fundamentado en un estudio de casos con ocho estudiantes de tercer año de la formación inicial de profesorado de matemática en una universidad chilena. Los resultados mostraron que las construcciones manejadas por los alumnos usualmente se ubican dentro de los niveles de concepción acción y proceso, pues solo uno de ellos fue capaz de presentar una *concepción objeto* dentro de los conceptos de sistemas de ecuaciones lineales y sus técnicas de resolución. Por lo que se concluyó que los estudiantes no son capaces de realizar la encapsulación de procesos que le permitan llegar a una *concepción objeto* para comprender de manera más amplia el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

1.3 Enseñanza digital de las matemáticas

1.3.1 Estudios a nivel nacional

En México se han realizado diversas investigaciones acerca de la enseñanza digital de las matemáticas. En una de ellas Rojas (2020) buscó compartir una estrategia metodológica para estudiar la comprensión del concepto de derivada que presentan alumnos de un primer curso de cálculo a nivel licenciatura. Para lograr esto, Rojas (2020) hizo uso de la herramienta digital Desmos, donde se codificó el método de derivación por incrementos y se realizaron animaciones. Para el análisis de la comprensión del concepto por parte de los alumnos se realizó un cuestionario. Uno de los resultados obtenidos de este cuestionario mostró que diecinueve de veinte estudiantes lograron comprender el concepto de derivada de una manera amplia. Sin embargo, en una pregunta relacionada al concepto de límite más de la mitad de estudiantes presentaron problemas para comprender este concepto. Por lo que se concluyó por parte del autor que el uso de Desmos favorece a la comprensión amplia de las matemáticas por su aporte visual y dinámico, pero que existen áreas de oportunidad que se pueden trabajar en un futuro para que el conocimiento por parte de los alumnos sea aún más amplio con la ayuda de la tecnología.

De igual manera, Portillo-Lara et al. (2019) analizó que la mayoría de los conceptos de cálculo se afrontan de manera mecánica por parte de la mayoría de estudiantes y profesores. Por ello realizó un trabajo donde unos de los objetivos fue promover la solución de problemas de optimización con ayuda de la representación geométrica que permite GeoGebra y analizar los beneficios o dificultades que presentan los alumnos para la resolución de estos problemas. Los autores compartieron como parte de los resultados que el software ayuda a comprender de una manera más amplia conceptos relacionados a problemas de optimización. Asimismo, también concluyeron que el uso de herramientas digitales como GeoGebra brindan un grado de confianza al estudiante que se ve reflejado en una mejor comprensión de los conceptos.

"Uno de los problemas que se presenta en la enseñanza del cálculo consiste en que prevalece el trabajo mecánico en las aulas, dejando a un lado la construcción de los conceptos" (Ruiz et al., 2018). Así lo narraron Ruiz et al. (2018) y por ello trabajaron con la tecnología para proporcionar al alumno visualizaciones de situaciones donde está inmerso el concepto de derivada. Para analizar el impacto de la tecnología el estudio fue dividido en dos grupos, el grupo experimental y el grupo control. Así, de esta manera, fueron analizados los resultados que mostraban un mejor desempeño dentro del grupo experimental, pues es mayor el número de reactivos correctos que contestaron en preguntas relacionadas al concepto de derivada. Con esto los autores concluyeron que la ayuda de la tecnología puede llegar a mejorar la visualización y construcción de los conceptos matemáticos.

Por su parte, Gómez-Blancarte et al. (2017) realizó un trabajo para la enseñanza de la función cuadrática con ayuda de la herramienta digital GeoGebra. El objetivo principal de este trabajo fue realizar una propuesta didáctica que permitiera a los estudiantes comprender de una manera más amplia el concepto de función cuadrática. Para ello se realizó un estudio de casos con un grupo de estudiantes del sistema Telebachillerato y uno de los resultados más importantes que arroja este estudio fue que la ayuda que presenta GeoGebra es de gran importancia para los estudiantes en el tratamiento de los registros de manera gráfica. Debido a esto, los autores concluyeron que esta ayuda fue mayor para la comprensión de los alumnos que aquella ayuda que recibieron a través de los libros de texto, pues realizó aportes a las asociaciones que presentaron los estudiantes entre las variables visuales del registro gráfico y las unidades simbólicas algebraicas.

1.3.2 Estudios a nivel internacional

En Latinoamérica también han sido realizadas investigaciones sobre la enseñanza digital de las matemáticas. El trabajo realizado por Ballesteros-Ballesteros et al. (2022) fue muestra de ello. Este trabajo buscó describir los efectos que tiene el uso de la tecnología, en este caso la herramienta gráfica GeoGebra, a través de dispositivos móviles para el proceso de aprendizaje de la función lineal en estudiantes de undécimo grado de educación en Colombia. El estudio fue llevado a cabo con la división de grupos experimentales, los cuales recibieron una intervención con ayuda de la tecnología, y grupos control, los cuales recibieron una intervención con recursos didácticos tradicionales. Esta división tuvo como resultado que los grupos experimentales mostraron un desempeño 17 % más eficiente que los grupos control. Asimismo, los estudiantes de los grupos experimentales presentaron mayor motivación e interés por aprender. Por lo que se concluyó que los dispositivos móviles promueven formas innovadoras de aprender y desarrollan las habilidades de los estudiantes.

Asimismo, un estudio realizado por Ramírez (2020) buscó exponer una experiencia de enseñanza-aprendizaje en la herramienta digital GeoGebra sobre temas relacionados con la integración múltiple. Para llevar a cabo este estudio se hizo uso de esta herramienta digital en clases y actividades de evaluación de un grupo de estudiantes de la carrera de Bachillerato y Licenciatura de la Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica. Los resultados mostraron que se obtiene un grado de aprobación del 75 % en las actividades de evaluación donde se podía utilizar GeoGebra para interpretar las soluciones. Por lo que concluyeron que este porcentaje es satisfactorio y se agregan observaciones que demuestran que la implementación del uso de GeoGebra es de gran ayuda para la enseñanza y aprendizaje de la integración múltiple por la capacidad de hacer visible los problemas al alumno.

La investigación hecha por Pineda et al. (2020) buscó generar una propuesta didáctica para el aprendizaje de la derivada mediante el programa de cálculo Derive con el fin de facilitar a estudiantes el aprendizaje del concepto en cuestión. Pues, de acuerdo a Pineda et al. (2020), “el uso de software educativo matemático es cada vez más necesario para el logro de aprendizajes significativos” (p. 3). Los datos de esta investigación fueron recabados a través de una encuesta a 48 estudiantes de la Universidad Francisco de Paula Santander en Colombia con un enfoque cuantitativo. Unos de los resultados más significativos fue que el 94 % de estudiantes afirmó que el uso del programa Derive le permitió clarificar el concepto de derivada. Por lo que, según Pineda et al. (2020):

> En los aspectos pedagógicos, los hallazgos encontrados señalan que la incorporación de Derive facilita el aprendizaje de derivadas, pues su empleo facilita la apropiación de los conceptos, ya que ayuda a fortalecer los conceptos previos y a consolidar los conocidos. (p. 15-16)

Por último, dentro de la investigación realizada por Gutiérrez (2018) en Colombia se estudió la enseñanza del concepto de límite y derivada con ayuda de la tecnología. Esta investigación tuvo como objetivos el diseño de actividades didácticas dentro de la herramienta digital GeoGebra y la verificación del nivel de impacto que tiene el uso de GeoGebra en los estudiantes al momento de evaluar su nivel de comprensión de los conceptos de límite y derivada con el fin de mejorar los procesos del pensamiento variacional. Como uno de sus resultados se mostró que el uso de la tecnología ha traído consigo una percepción de saber por parte del alumno al momento de analizar conceptos de límites y derivadas. Así también se comentó que el uso de la tecnología dentro de los salones de clases motiva de cierta manera al grupo y agiliza los tiempos de la clase, trayendo con esto mayor tiempo para realizar más ejercicios y/o explicaciones.

Capítulo 2. Planteamiento del problema

2.1 Descripción del problema

El cálculo tiene como una de sus ideas principales el concepto de derivada, el cual es una base fundamental tanto para la comprensión del cálculo como para la de otras ramas científicas, como pueden serlo ecuaciones diferenciales o física. Sin embargo, aún con este vasto uso de la derivada en diferentes ramas de la educación, el proceso de enseñanza de este objeto matemático ha sido una gran problemática para los docentes (Artigue et al., 1995). Al mismo tiempo, el aprendizaje por parte de los alumnos no ha alcanzado el nivel deseado por los currículos escolares (Briceño et al., 2018; González-García et al., 2018; Londoño et al., 2013).

La enseñanza de la derivada es aún un conjunto de mecanizaciones y habilidades memorísticas que no permiten al alumno comprender el concepto tal y como los currículos escolares lo buscan. Estos métodos de resolución le permiten a los estudiantes resolver problemas que no necesiten de un análisis complejo para su resolución, pero esta mecanización y habilidades memorísticas generan dificultades para lograr una comprensión amplia del concepto y de sus métodos de solución (Artigue et al., 1995).

Briceño et al. (2018) comparte que la enseñanza de la derivada desde mecanizaciones algebraicas no permite el uso de otras representaciones para la comprensión del concepto, como puede ser una de ellas la representación gráfica. Es posible que esto ocurra porque los mismos profesores son quienes restringen las instrucciones en la enseñanza del cálculo exclusivamente a métodos algebraicos (Guerrero, 2020).

Debido a estas restricciones por parte de los profesores, el alumno no es capaz de pasar del trabajo algebraico al aspecto gráfico. Las mismas restricciones generan que el alumno presente deficiencias para la comprensión del concepto desde estos dos aspectos, los cuales son necesarios comprender para el completo cumplimiento de los currículos escolares. Un ejemplo de estas deficiencias, que envuelve a ambos aspectos, es el descrito por Asiala et al. (1997) pues señalan que los alumnos no son capaces de relacionar el aspecto algebraico y gráfico de la derivada. Los estudiantes consideran ambos aspectos como problemas ajenos que se resuelven con estrategias diferentes o que no tienen algún tipo de relación entre sí.

Los alumnos presentan deficiencias en conceptos básicos como el de función, recta tangente o límite, los cuales son bases importantes para entender el concepto de derivada. Esto genera que el alumno no pueda comprender la relación de la derivada con la tasa de cambio (González-García et al., 2018). Todo esto genera deficiencias en el posterior estudio del aspecto gráfico del concepto. Estas deficiencias gráficas en la comprensión de la derivada son precedidas de deficiencias previas en conceptos como función o concepto, tal y como se comentó en el párrafo anterior, pues los alumnos no son capaces, en la mayoría de los casos, de analizar funciones presentadas de manera gráfica (González-García et al., 2018). Por lo que el alumno que trae consigo estas deficiencias es incapaz de ver la función derivada como una nueva función y cómo esta función derivada está relacionada con el valor de la pendiente de la recta tangente de la función original (García et al., 2018).

Por lo descrito anteriormente, se puede decir que los alumnos son capaces de resolver ejercicios de derivación de manera algorítmica, pero estas operaciones no tienen un significado para ellos (Briceño et al., 2018). En otras palabras, los alumnos son incapaces de dar una interpretación visual a lo que se realiza de manera algebraica. Sin embargo, estas visualizaciones son necesaria para una construcción completa y satisfactoria del concepto.

Debido a esta problemática, surge este trabajo de investigación, el cual busca analizar la construcción del concepto de derivada realizada por los alumnos y, al mismo tiempo, apoyar a la construcción de este concepto con un enfoque en su aspecto gráfico. Con este apoyo se busca lograr que el alumno cuente con una comprensión amplia del concepto y que, consecuentemente, esta comprensión sea más cercana a lo que buscan los currículos escolares.

2.2 Justificación

Diversas investigaciones han estudiado las dificultades que presentan los alumnos para la comprensión de la derivada en su aspecto analítico y gráfico (Asiala et al., 1997; Baker et al., 2000; Orton, 1983). En algunas de ellas consideran que la ayuda de la visualización dinámica favorece al entendimiento del alumno (Hitt, 2003). Por estas consideraciones se recomienda mayor uso de la geometría para la enseñanza conceptual desde el aspecto visual (Schivo et al., 2014). Mientras que para trabajar el aspecto analítico del concepto González-García et al. (2018) recomienda mejorar el análisis lógico en el alumno para que sea capaz de resolver ejercicios y problemas que cuentan con mayor complejidad.

Por ello se busca lograr que el alumno sea capaz de llevar a cabo la construcción del concepto desde un aspecto gráfico. Esta construcción del concepto tiene como objetivo último ampliar el conocimiento matemático, el cual puede ser visto como la aptitud de un alumno para la resolución de problemas a través de las estructuras mentales que presenta (Dubinsky, 1996). Estas estructuras son las de acción, proceso, objeto y esquema.

El fin último de diferentes trabajos de investigación encargados de analizar las estructuras mentales de un sujeto es conocer el tipo de estructura que maneja un sujeto en la construcción de un concepto matemático (Asiala et al., 1997; Jiménez et al., 2018; Pereyra & Herrera, 2020). Sin embargo, a partir de los resultados encontrados, los autores solo brindan conclusiones y recomendaciones para los docentes con el fin de mejorar sus métodos de enseñanza, pero no hay un seguimiento en los estudiantes participantes de estos estudios para trabajar en la construcción mental del concepto en ellos.

Por estos motivos, se realiza un estudio cognitivo que permita analizar las estructuras mentales que presentan los alumnos y, además de esto, reconstruir el concepto de derivada construyendo y reconstruyendo dichas estructuras en el estudiante.

Con base en lo anteriormente descrito nace la pregunta de investigación:

¿Cuál es el proceso de construcción mental del concepto de derivada en estudiantes universitarios?

2.3 Objetivos de la investigación

2.3.1 Objetivo general

- Analizar las estructuras mentales que presentan estudiantes universitarios de cálculo sobre el concepto de derivada en su representación gráfica

2.3.2 Objetivos específicos

- Caracterizar el nivel de estructura mental inicial que maneja un grupo de estudiantes universitarios de cálculo
- Implementar el ciclo ACE adaptado para promover la construcción del concepto de derivada en su representación gráfica

- Evaluar las estructuras mentales que los estudiantes lograron alcanzar después de la intervención

Capítulo 3. Marco Teórico

3.1 Teorías en la matemática educativa

El desarrollo de las teorías en la matemática educativa parte del intento de conocer cómo las matemáticas pueden ser aprendidas y, al mismo tiempo, qué pueden hacer los programas educativos para que este propósito sea posible. Dubinsky & McDonald (2001) plantean que una teoría no es una portadora de la verdad per se y aunque pueda ser una aproximación a lo que realmente ocurre cuando un individuo está aprendiendo un concepto matemático prefieren tomar otro enfoque respecto a las teorías en la matemática educativa.

Ambos investigadores prefieren anclar su enfoque en estudiar cómo una teoría puede ayudar a entender el proceso de aprendizaje proporcionando explicaciones de fenómenos que el individuo muestra al momento de tratar de comprender los conceptos matemáticos a los que se enfrenta. Tomando como base que las teorías dentro de la matemática educativa se utilizan para "servir como herramientas para el análisis de datos y proveer un lenguaje en común para la comunicación de ideas acerca del aprendizaje más allá del lenguaje superficial" (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 275) se utilizará la teoría APOE como fundamento teórico de esta investigación.

3.2 Teoría APOE

La teoría APOE es una teoría constructivista desarrollada por Dubinsky (1991) para describir la construcción de un concepto matemático a través de diferentes estructuras mentales que realiza el estudiante al momento de su aprendizaje. Por otra parte, Arnon et al. (2014) señalan esta teoría como un modelo para describir cómo las matemáticas pueden ser aprendidas y Fuentealba et al. (2019) comparten que uno de los objetivos de esta teoría es "describir tanto el camino como la construcción de las estructuras cognitivas realizadas por un individuo durante su proceso de aprendizaje de un concepto" (p. 64). Estas estructuras cognitivas proporcionan la habilidad al ser humano de procesar la información para comprender el mundo y su funcionamiento (Subía & Gordón, 2014). Esta información proviene del ambiente de la psicología cognitivista, en la cual Jean Piaget es un referente. Esta rama de la psicología es descrita como aquella que se interesa por estudiar la forma en cómo aprendemos del mundo y la manera en que este conocimiento aprendido ayuda para la toma de decisiones y la realización de acciones efectivas (Bower & Hilgard 1989).

Pero, por lo descrito por Trigueros (2020), Piaget no se enfoca en el ¿cómo aprendemos?, sino en el ¿cómo se pasa de un estado de conocimiento a otro? Esta pregunta funge como base importante en la teoría APOE para el aprendizaje de los conocimientos matemáticos.

Una descripción más amplia de la teoría APOE es la presentada por Valdivia & Parraguez (2015), pues la describen como la teoría encargada de analizar "cómo se pasa de un estado de conocimiento a otro, planteando un modelo que representa la forma en que se construyen o aprenden los conceptos matemáticos" (p. 149). La construcción y el aprendizaje de estos conceptos tienen como fin el ampliar el conocimiento matemático, concepto el cual Dubinsky (1996) lo define de la siguiente manera:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones. (p. 32-33)

Fuentealba et al. (2019) comentan que la teoría APOE forma parte de las adaptaciones de las ideas de Piaget acerca de la abstracción reflexiva. Este concepto fue introducido por el mismo Piaget para describir la construcción de estructuras lógico-matemáticas que realiza un individuo durante el proceso de aprendizaje (Dubinsky, 2002). Esta abstracción reflexiva está presente en los individuos desde los primeros años de edad y su noción puede ser extendida para describir cómo un individuo puede lograr construcciones mentales acerca de un concepto matemático (Dubinsky, 1991). "Es importante mencionar que el modo para pasar de un estado de construcción a otro, está regido por la Abstracción Reflexiva" (Valdivia & Parraguez, 2015, p. 150).

La abstracción reflexiva es constructiva y aprovecha los elementos nuevos adheridos a las diferentes estructuras mentales para construir nuevas estructuras (Piaget, 1981). Lo que dentro de la teoría APOE puede referirse a pasar de un estado de conocimiento a otro (Valdivia & Parraguez, 2015). La abstracción reflexiva es un antecedente de las estructuras mentales de la teoría APOE (Arnon et al., 2014).

3.3 Estructuras mentales y mecanismos

La teoría APOE se constituye a través de las estructuras mentales **acción**, **proceso**, **objeto** y **esquema**. Arnon et al. (2014) señalan que para lograr la comprensión de un concepto el individuo debe de transitar por estas estructuras, las cuales vienen acompañadas de mecanismos tales como el de *interiorización*, *encapsulación*, *desencapsulación*, *coordinación*, *reversión* y *generalización*. De acuerdo a (Asiala et al., 1996) estos mecanismos ayudan a la construcción de las estructuras mentales.

Es importante recalcar que las estructuras mentales, de acuerdo a Valdivia & Parraguez (2015), "no son necesariamente secuenciales ni jerarquizadas" (p. 149), pues estas pueden tener apariciones simultáneas en la mente del individuo y requerirse entre cada una de ellas (Parraguez & Oktaç, 2012). Sin embargo, la construcción mental de un concepto se presenta a través de las estructuras mentales jerarquizadas teóricamente para analizar la comprensión que un sujeto tiene de un concepto matemático.

La comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales que fueron construidos previamente en términos de acciones. Al mismo tiempo, estas acciones se interiorizan en procesos que posteriormente se encapsulan en objetos. Por último, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas (Arnon et al., 2014). No obstante, los objetos también pueden ser desencapsulados de vuelta a procesos donde fueron formados (Asiala et al., 1996).

Como se ha visto hasta ahora, la teoría APOE hace uso frecuente del término *concepto.* Además, se hará uso del término *concepción* para referirse a la estructura mental que evidencia un sujeto al momento de mostrar su conocimiento acerca de un concepto matemático. El término concepto se puede considerar como un acuerdo comunitario. Por ejemplo, un concepto en específico es aceptado por la comunidad científica. Mientras que el término concepción es de grado intrapersonal. Un ejemplo de esto es la reflexión individual que maneja un sujeto (McDonald et al., 2000).

A partir de esto podemos definir al término descomposición genética como un modelo de desarrollo de las concepciones alineadas con un concepto (Arnon et al., 2014). En la **sección 3.4** se hablará más a fondo del término *descomposición genética*.

3.3.1 Acción

> De acuerdo a la teoría APOE, una acción es la transformación de un objeto matemático realizada por un individuo de acuerdo a algunos algoritmos explícitos y por lo tanto es visto por el individuo como un estímulo externo. (Asiala et al., 1997, p. 400)

Se dice que es un estímulo externo porque el individuo necesita realizar paso a paso y explícitamente la transformación del objeto matemático (Arnon et al., 2014). Otra descripción de esto es la traída por Dubinsky & McDonald (2001), pues afirman que el individuo que maneja una *concepción acción* necesita instrucciones paso a paso de cómo realizar una operación. Arnon et al. (2014) afirman que a pesar de ser la más primitiva de las concepciones mentales, la estructura acción es base para el desarrollo de las estructuras de la teoría APOE.

3.3.2 Proceso

La estructura mental proceso está construida con base en dos mecanismos mentales anteriormente mencionados: interiorización y coordinación. Cada uno de estos mecanismos hacen posible la creación de nuevos procesos mentales (Arnon et al., 2014).

Se dice que el individuo muestra una *concepción proceso* cuando puede realizar acciones de manera reiterada y es capaz de incorporarlas en su consciencia. (Valdivia & Parraguez, 2015). A esto es a lo que se le llama interiorización, pues esta permite al sujeto ser consciente de una acción realizada al reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones (Dubinsky, 1991).

Esta concepción también se caracteriza porque el sujeto que la presenta es capaz de realizar transformaciones a objetos matemáticos sin necesidad de realizar las resoluciones paso a paso, así como invertirlos. Esto es posible gracias a la interiorización.

Por otra parte, el mecanismo de coordinación es base dentro de la *concepción proceso* para la construcción de la estructura objeto, pues dos objetos desencapsulados forman una serie de procesos coordinados que juntos pueden encapsular un nuevo objeto único (Arnon et al., 2014). Los mecanismos de encapsulación y desencapsulación serán vistos más a detalle en la **sección 3.3.3**.

Por último, el mecanismo de reversión, el cual también ocurre durante la estructura proceso, trabaja con la interiorización de procesos que permitan al sujeto no el deshacer procesos y convertirlos en acciones, sino construir nuevos procesos a partir de los ya manejados.

3.3.3 Objeto

La *concepción objeto* en un sujeto puede nacer desde la encapsulación de un proceso, en donde el individuo pueda hacer nuevas transformaciones sobre él. En otras palabras, cuando el individuo puede ver al proceso como un todo, siendo capaz de actuar sobre él (Trigueros, 2005).

Arnon et al. (2014) explican que esta encapsulación ocurre cuando un sujeto aplica una acción a un proceso en particular y Dubinsky et al. (2005) afirma que cuando un individuo ve al proceso como un todo puede actuar sobre él y construir transformaciones. Así es visible que el sujeto ha encapsulado un proceso en un objeto. De igual manera, una vez que el sujeto ha encapsulado un objeto, este puede ser desencapsulado para volver a la *concepción proceso* que presentaba.

Para Trigueros (2020) la reflexión sobre la posibilidad de hacer acciones sobre un proceso como un todo lleva a encapsularlo en un objeto. También afirma que es posible desencapsular el objeto en el o los procesos que le dieron origen.

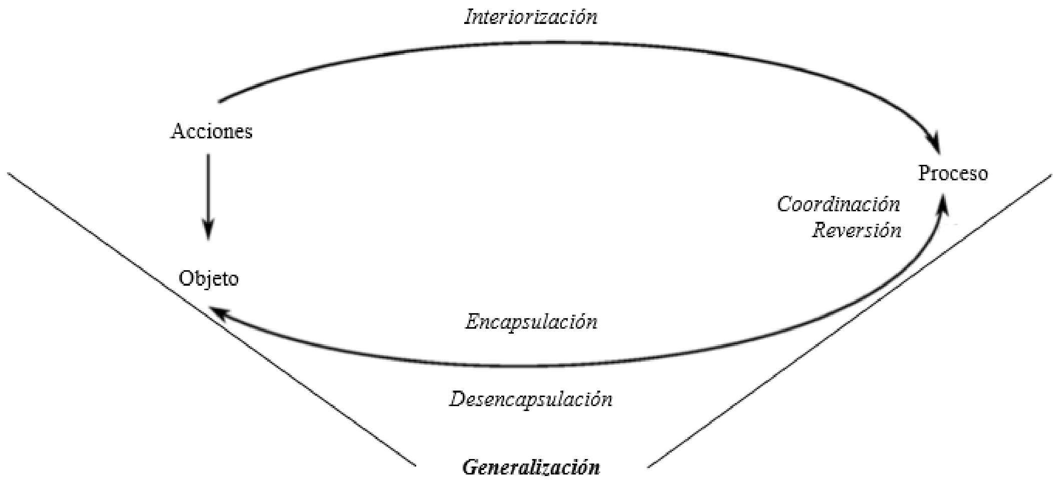
3.3.4 Esquema

La *concepción esquema*, de acuerdo a Trigueros (2005), corresponde a “la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática” (p. 11). La construcción de esta estructura se da a través del mecanismo de generalización de objetos.

Además, de acuerdo a Dubinsky (1991), un esquema es caracterizado por su continua reconstrucción, la cual es determinada por la actividad matemática que está realizando el sujeto en un ejercicio o trabajo determinado. La continua reconstrucción que ocurre en los esquemas se debe a que no son estructuras estáticas, pues en ocasiones un sujeto tendrá que realizar modificaciones en sus esquemas dependiendo de la exigencia conceptual del problema al que se esté enfrentando (Valdivia & Parraguez, 2015). En la **figura 1** podemos visualizar la estructura esquema en relación con las estructuras y mecanismos mentales.

Figura 1

Construcción de la estructura esquema



Fuente: Adaptada de "Mental structures and mechanisms for the construction of mathematical knowledge" por Arnon et al., 2014, *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education,* p. 18.

3.4 Descomposición genética

"Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante necesita construir con el fin de aprender un concepto matemático específico" (Arnon et al., 2014, p. 27). En otras palabras, este elemento puede ser visto como un modelo hipotético que describe las construcciones mentales que realizan los estudiantes para aprender dicho concepto y, a la vez, los mecanismos que acompañan estas construcciones. La descomposición genética de un concepto puede incluir a detalle información de cómo las estructuras y los mecanismos están ligados a una estructura esquema. Dubinsky (2002), en palabras más directas, se refiere a la descomposición genética como la descripción detallada de las matemáticas que están siendo estudiadas y cómo el individuo podría realizar las construcciones necesarias para comprenderlas.

Por último, (Badillo, 2003) se refiere a la descomposición genética de la siguiente manera:

> Es el eje de la aplicación de la teoría APOE en estudios sobre la comprensión de conceptos matemáticos, porque permite en primer lugar, estructurar el concepto matemático, que es objeto de estudio, desde la disciplina matemática; en segundo lugar, es la base para el diseño de la instrucción. (p. 124).

Por lo tanto, se toma este modelo hipotético como base para organizar el contenido del concepto matemático a enseñar, en este caso el concepto de derivada, y las actividades que contribuyan a la construcción mental del concepto por parte del estudiante.

3.4.1 Descomposición genética del concepto de derivada

Se toman como referencia los elementos de la teoría APOE presentada por Dubinsky (1991) y la descomposiciones genéticas presentadas por Asiala et al. (1997) y Gutiérrez & Valdivé (2012) con el fin de generar una descomposición genética adaptada para la realización y posterior análisis del presente trabajo de investigación, el cual busca analizar y construir el conocimiento en la interpretación gráfica del concepto de derivada.

1. Acción de conectar dos puntos sobre una curva para formar una cuerda la cual es una parte de la recta secante que une ambos puntos, junto con la acción de calcular la pendiente de esta recta secante.

2. Interiorización de la acción en el punto **1** y la conversión en un **proceso** único a medida que los cortes de los puntos que forman rectas secantes se acercan más y más.

2a. En el aspecto algebraico se puede observar como el proceso que permite calcular la tasa de variación media como $\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-(a)}$ cuando la diferencia entre los puntos *(a+h)* y *(a)* se hace más y más pequeña.

3. Encapsulación del proceso en el punto **2** como un **objeto** al reproducir la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes *y* además calcular la pendiente de la recta tangente en un punto sobre la gráfica.

3b. En el aspecto algebraico se puede observar como el proceso que permite calcular la tasa de variación instantánea con una variable respecto a otra como $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Interpretación gráfica del objeto f'(x)

4. Encapsulación del proceso en el punto **2** como un **objeto** al interpretar gráficamente la derivada en un punto.

a. Como el valor de la pendiente de la recta tangente
b. Como el límite del cociente incremental

5. Encapsulación del proceso en el punto **2** como un **objeto** al producir una nueva función *f'*, donde el valor de *f'(x)* puede interpretarse como el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en cada punto $(x, f(x))$.

Aplicaciones del objeto matemático f'(x)

6. Generalización de las concepciones mentales de los puntos anteriores para la interpretación gráfica de la relación entre *f* y *f'*

  a. Crecimiento de la función y el signo de su derivado
  b. Bosquejo de una gráfica representativa analizando las relaciones entre *f* y *f'*

Es importante mencionar que esto solo establece un modelo hipotético para la construcción del concepto de derivada, pero en la práctica un sujeto puede presentar estructuras mentales no necesariamente secuenciales.

3.5 Ciclo ACE

"El ciclo de enseñanza ACE es una estrategia pedagógica que consiste en tres componentes: (A) Actividades; (C) Discusión en clase; y (E) Ejercicios" (Arnon et al., 2014, p. 58). Por sus siglas en inglés: Activities, Classroom Discussion, Exercises.

3.5.1 Actividades

Dubinsky (1996) señala que el componente de Actividades se basa en el uso de la computadora para la presentación de conceptos matemáticos. Además, Arnon et al. (2014) comparten que dentro de este primer componente del ciclo los estudiantes deben de trabajar de manera conjunta en tareas diseñadas desde la descomposición genética del concepto para alcanzar las estructuras mentales necesarias para su comprensión. Las actividades deben estar diseñadas para que el estudiante, analizando o realizando por completo las actividades, haga abstracciones reflexivas que le permitan comprender el concepto a través de la construcción o reconstrucción de acciones, procesos, objetos y esquemas (Dubinsky, 1996).

3.5.2 Discusión en el salón de clases

Para la discusión en el salón de clases, es necesario la formación de pequeños equipos junto a un instructor que maneje la discusión. Durante la discusión los estudiantes trabajan a lápiz y papel tareas basadas en las actividades presentadas dentro del primer componente. A medida que el instructor guía la discusión puede llevar a cabo participaciones para ayudar con dudas o dar explicaciones para relacionar lo que los estudiantes piensan y hacen con el concepto matemático (Arnon et al., 2014).

3.5.3 Ejercicios de tarea

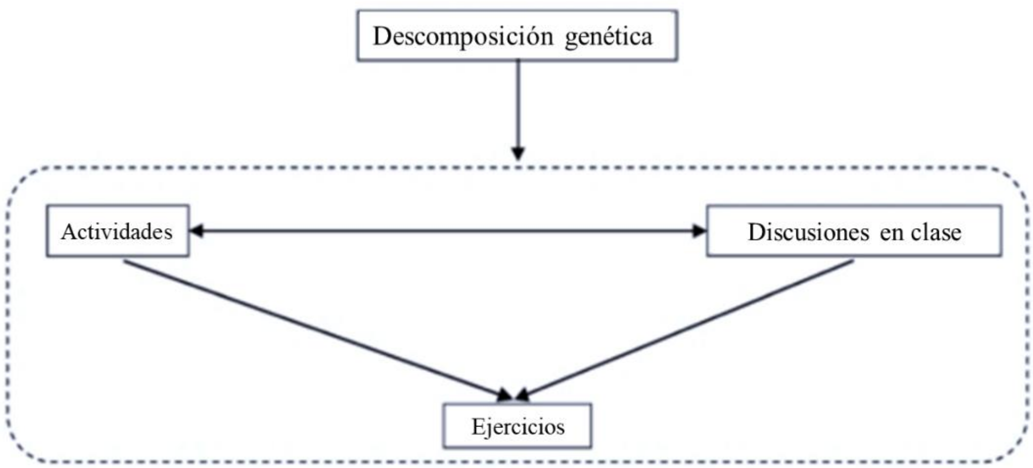
El último componente, el de ejercicios de tarea, radica en la aplicación de problemas que refuercen lo realizado en los componentes de Actividades y Discusión. Se busca que estos ejercicios sirvan para el desarrollo prolongado de las estructuras mentales desde la descomposición genética de cada concepto (Arnon et al., 2014).

3.6 El Ciclo ACE y su relación con el modelo de la descomposición genética

Arnon et al. (2014) comparten que la descomposición genética influye en cada uno de los componentes del Ciclo ACE como se puede ver en la **figura 2**, pues cada uno de ellos deben de ser diseñados y/o evaluados desde la descomposición genética del concepto matemático para el cual se deseen construir ciertas o todas las estructuras mentales.

Figura 2

Relación entre los componentes del ciclo de enseñanza ACE y la descomposición genética



Fuente: Adaptada de "Relation between the ACE Teaching Cycle and a genetic decomposition" por Arnon et al., 2014, *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education,* p. 58.

Además, Arnon et al. (2014) explican que la flecha que va desde la descomposición genética hasta el recuadro que contiene los componentes del Ciclo ACE refleja que la descomposición genética afecta a cada uno de estos componentes, como se comentó anteriormente. Además, comparten la flecha que corre en dos direcciones entre las Actividades y las Discusiones en Clase muestran las Actividades son la base de los temas a dialogar en las Discusiones en clase y, por otro lado, las Discusiones en Clase dan un espacio abierto a los estudiantes para discutir y externar lo aprendido en las Actividades. Por último, ambas flechas que van hacia el componente de Ejercicios dejan claro su principal objetivo: reforzar las concepciones mentales que los estudiantes han construido o han empezado a construir en las Actividades y Discusiones en Clase.

3.6.1 Delimitación del Ciclo ACE

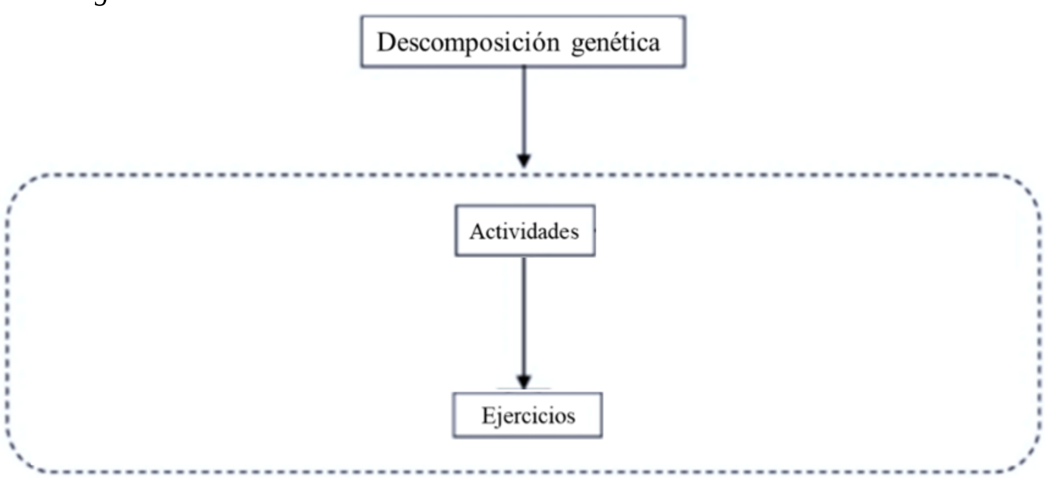
La teoría APOE es un marco teórico que nos muestra al ciclo ACE como una estrategia pedagógica para la enseñanza de las matemáticas (Dubinsky, 1996). Este ciclo ha sido adaptado para la realización de esta investigación en forma de diseño metodológico, utilizando los componentes de Actividades y Ejercicios.

El componente de Actividades se basa en el uso de la tecnología a través de la herramienta digital GeoGebra, la cual será la base para dar explicaciones relacionadas al concepto de derivada. Mientras que el componente Ejercicios será un cuestionario de actividades que permitan analizar las concepciones mentales presentadas por los estudiantes después del análisis realizado con ayuda de applets de GeoGebra presentados.

Por lo tanto, en la **figura 3** se puede observar la relación entre el Ciclo ACE y la descomposición genética específica para esta investigación.

Figura 3

Relación entre los componentes utilizados del ciclo de enseñanza ACE para la presente investigación y la descomposición genética



Fuente: Adaptada de "Relation between the ACE Teaching Cycle and a genetic decompositione" por Arnon et al., 2014, *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*, p. 58.

Capítulo 4. Metodología

4.1 Método

La estructura del estudio realizado constó de dos fases con el objetivo de analizar la transformación de las concepciones presentadas por los estudiantes. La primera fase desarrollada inició con un cuestionario diagnóstico que permitió observar el nivel de estructura mental inicial manejado por los estudiantes. Posteriormente, para la segunda fase se hizo uso del ciclo ACE a través de Actividades y Ejercicios con el fin de trabajar en la construcción de las estructuras mentales referentes al concepto de derivada dentro del salón de clases. Además se realizó un cuestionario posterior a la implementación del ciclo ACE adaptado en clase que ayudó a caracterizar las concepciones mentales que mostraron los estudiantes después de dicha intervención. Esto tenía como objetivo verificar los cambios en la construcción mental del concepto de derivada por parte de los estudiantes.

A continuación, se visualizan las fases utilizadas para el desarrollo metodológico de la investigación.

1. Cuestionario diagnóstico

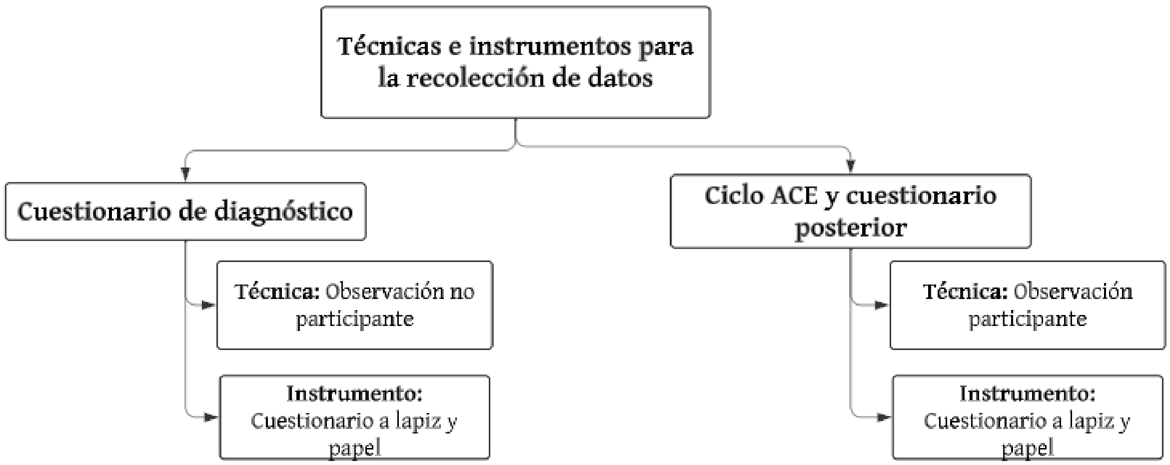
2.1 Ciclo ACE adaptado con cuestionario posterior con el fin de analizar las estructuras mentales **acción, proceso y objeto**

2.2 Ciclo ACE adaptado con cuestionario posterior con el fin de analizar las estructuras mentales **objeto y esquema**

El enfoque para el presente trabajo es de tipo cualitativo, pues se buscaba comprender la perspectiva de los estudiantes respecto a la secuencia de cuestionarios aplicados y profundizar en sus opiniones recabadas como respuestas escritas (Hernández et al., 2010).

Para desarrollar las fases anteriormente mencionadas se definen las técnicas e instrumentos a utilizar para el presente trabajo de investigación, como se puede observar en la **figura 4**.

Figura 4
Técnicas e instrumentos para la recolección de datos



Fuente: Elaboración propia.

4.2 Muestra

La muestra de estudio para el presente trabajo fue un grupo de dieciséis estudiantes de ingeniería de primeros semestres pertenecientes a la Universidad Autónoma de Querétaro Campus Centro Universitario. La muestra fue elegida de manera intencional no aleatoria y la participación de los alumnos dependió de su disponibilidad y decisión propia con la única obligación de ser mayores de edad y haber cursado la materia de Cálculo Diferencial. En este contexto cada uno de los participantes llevó a cabo la firma del consentimiento escrito para el uso de sus respuestas de manera totalmente anónima como se puede observar en **Anexo A**.

4.3 Procedimiento

El trabajo de investigación se dividió en 3 bloques con diferente duración cada uno de ellos, como se muestra a continuación:

Bloque 1. Cuestionario de diagnóstico (Día 1): Aplicación de actividades a través del cuestionario de diagnóstico para verificar el conocimiento que presentaban los alumnos al inicio de este trabajo de investigación. La duración de este bloque fue de 1 hora.

Bloque 2. Ciclo ACE adaptado y cuestionario posterior (Día 2): Implementación de los componentes Actividades y Ejercicios. La duración de este bloque fue de 45 minutos.

Bloque 3. Ciclo ACE adaptado y cuestionario posterior (Día 3): Implementación de los componentes Actividades y Ejercicios. La duración de este bloque fue de 45 minutos.

4.4 Diseño y evaluación de actividades

4.4.1 Cuestionario de diagnóstico

Esta fase tenía como fin el caracterizar el nivel de concepción inicial presentado por los estudiantes analizados. A continuación se muestran cada una de las actividades del instrumento de diagnóstico. El cuestionario de diagnóstico completo puede encontrarse en el **Anexo 1**.

Para la realización de dichas actividades se llevó a cabo el análisis del objeto matemático de derivada identificando sus elementos importantes en el aspecto gráfico. Esto nos ayudó a identificar aquellas tareas, de elaboración propia o utilizados en investigaciones anteriores, que fueran propicios a aplicar en la presente investigación. Las actividades aquí presentadas son tareas cerradas donde cada una busca evaluar una estructura mental en específico, la cual es detallada para cada actividad.

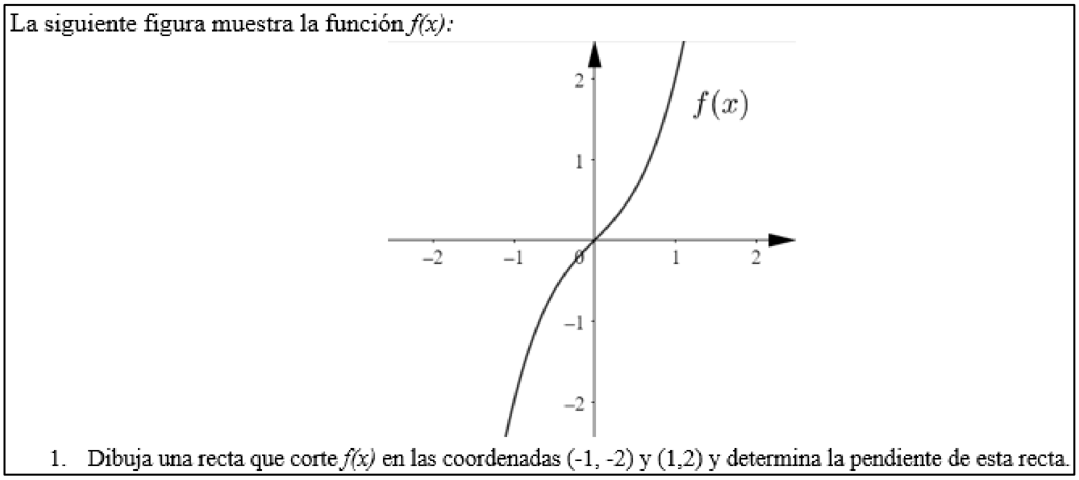
Para el análisis de resultados se establece la estructura mental que busca analizar cada actividad diseñada, como se acaba de comentar, y la respuesta esperada por parte del estudiante. Dicho análisis se realiza con base en la descomposición genética utilizada para este trabajo, la cual es adaptada desde la teoría presentada por Dubinsky (1991) y las descomposiciones genéticas realizadas por Asiala et al. (1997) y Gutiérrez & Valdivé (2012).

4.4.1.1 Actividad 1

La **figura 5** presenta la primera actividad del cuestionario de diagnóstico, la cual fue de elaboración propia.

Figura 5

Actividad 1 del cuestionario de diagnóstico


La siguiente figura muestra la función *f(x)*:

1. Dibuja una recta que corte *f(x)* en las coordenadas (-1, -2) y (1,2) y determina la pendiente de esta recta.

En la **tabla 1** se observa la estructura mental que busca analizar esta actividad, así como la respuesta y práctica esperadas por los estudiantes.

Tabla 1

Evaluación de Actividad 1 del cuestionario de diagnóstico

Estructura mental	**Respuesta matemática esperada**	**Práctica matemática esperada**
Acción	$m = 2$	Dados dos puntos, trazar la recta que los une y calcular la pendiente de esta recta

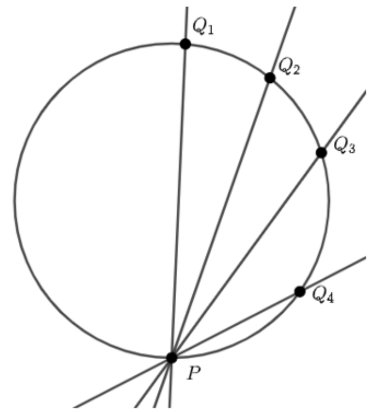
4.4.1.2 Actividad 2

Para la actividad presentada en la **figura 6** se utilizó como referencia la tarea “Task 6” compartida por Orton (1983) dentro de su estudio para analizar el entendimiento de los estudiantes sobre la diferenciación.

Figura 6

Actividad 2 del cuestionario de diagnóstico

Actividad 2. La siguiente figura muestra un círculo y un punto fijo P sobre el círculo. Las líneas PQ son dibujadas del punto P a los puntos Q, las cuales se extienden en ambas direcciones.



De acuerdo a lo observado en la figura, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas rectas secantes diferentes podrían ser dibujadas en adición a las ya dibujadas en la figura?
2. ¿Qué pasa con la recta secante una vez que Qn se acerca más y más a P?

A continuación, dentro de la **tabla 2** se comparten las estructuras mentales que se busca analizar en esta actividad junto a su respuesta y práctica esperada.

Tabla 2

Evaluación de Actividad 2 del cuestionario de diagnóstico

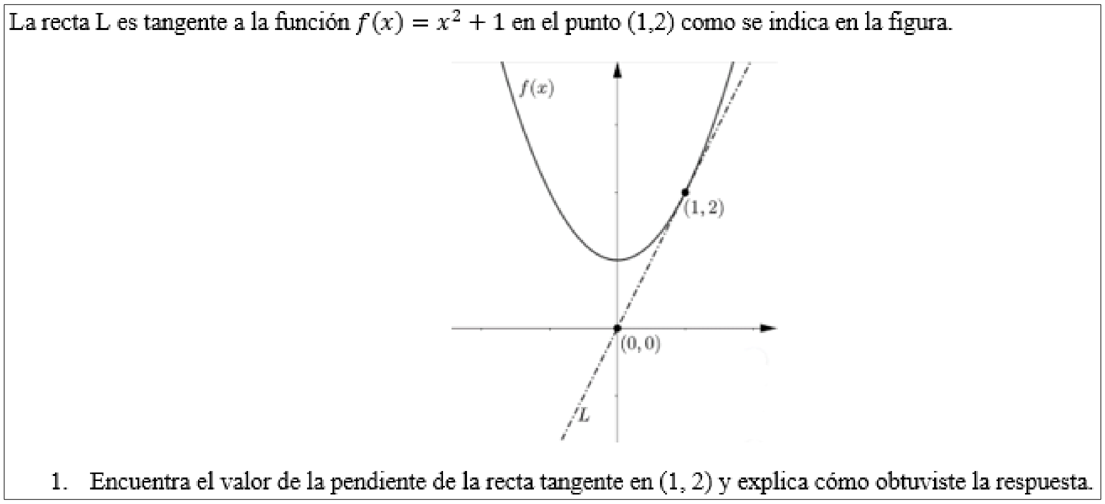
Actividad	Estructura mental (Representación)	Respuesta matemática esperada	Práctica matemática esperada
2.1	Proceso	Infinitas rectas secantes	Comprender que infinitas rectas secantes pueden ser trazadas en el círculo presentado
2.2	Objeto (La recta tangente como la posición límite de las rectas secantes)	La recta secante pasa a ser una recta tangente	Entender la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes formadas por los puntos P y Q_n

4.4.1.3 Actividad 3

La Actividad 3 presentada en la **figura 7** es una adaptación de la tarea "Question 6" analizada por Asiala et al. (1997) desarrollando el entendimiento gráfico del concepto de derivada.

Figura 7

Actividad 3 del cuestionario de diagnóstico



La recta L es tangente a la función $f(x) = x^2 + 1$ en el punto (1,2) como se indica en la figura.

1. Encuentra el valor de la pendiente de la recta tangente en (1, 2) y explica cómo obtuviste la respuesta.

La **tabla 3** muestra la estructura mental a analizar, la representación de dicha estructura y la respuesta esperada por los estudiantes.

Tabla 3

Evaluación de Actividad 3 del cuestionario de diagnóstico

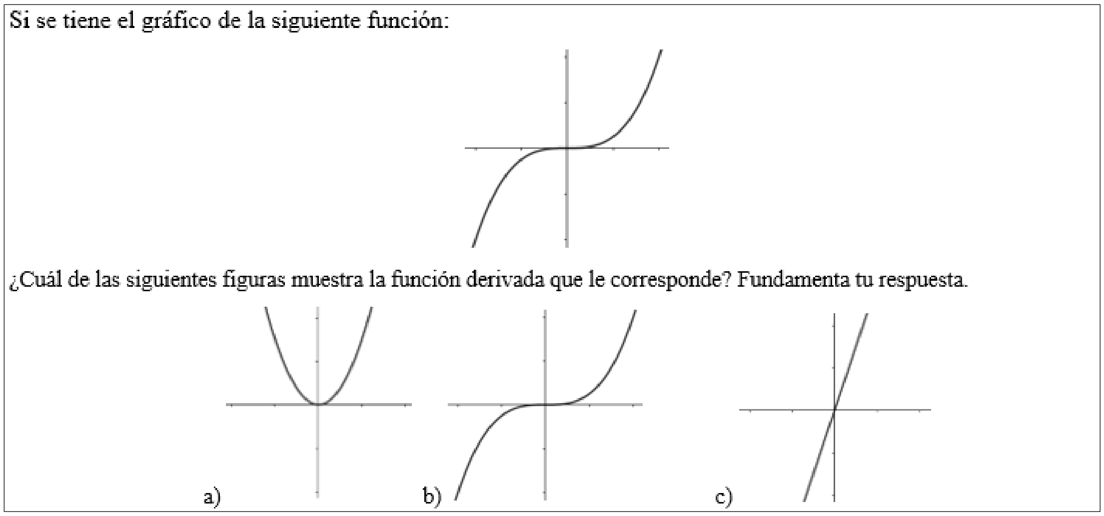
Estructura mental (Representación)	Respuesta matemática esperada	Práctica matemática esperada
Objeto (Cálculo de la pendiente de la recta tangente)	$m = 2$	Calcular la pendiente de la recta tangente analizando los puntos presentados por los que pasa esta recta y utilizando la respectiva fórmula de la pendiente a partir de estos puntos

4.4.1.4 Actividad 4

Para esta actividad se utilizó como referencia el ejercicio compartido por Badillo et al. (2011) dentro de su estudio para analizar los niveles de comprensión de los objetos *f'(a)* y *f'(x)*. Dicha actividad puede observarse en la **figura 8**.

Figura 8

Actividad 4 del cuestionario de diagnóstico



La **tabla 4** presenta la estructura mental y la representación de la estructura a analizar, junto a la respuesta y práctica matemáticas esperadas.

Tabla 4

Evaluación de Actividad 4 del cuestionario de diagnóstico

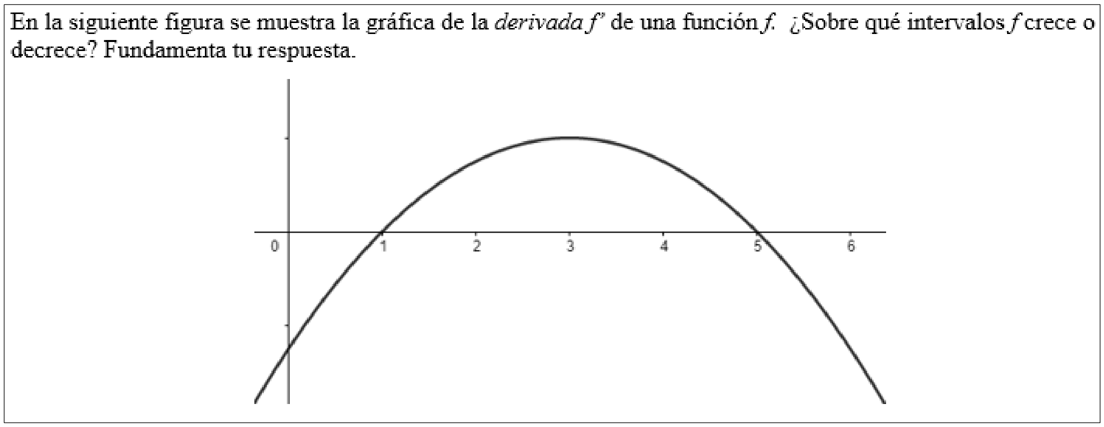
Estructura mental (Representación)	**Respuesta matemática esperada**	**Práctica matemática esperada**
Objeto (La pendiente de la recta tangente como el valor de una nueva función *f'*)	a)	Relacionar el valor de la pendiente de la recta tangente a una función con el valor de la función derivada

4.4.1.5 Actividad 5

La última actividad del cuestionario de diagnóstico es presentada en la **figura 9** y es una adaptación de un ejercicio presentado por Stewart (2012), el cual analiza el entendimiento del lector sobre cómo afecta la derivada la gráfica de la función original.

Figura 9

Actividad 5 del cuestionario de diagnóstico



Dentro de la **tabla 5** se puede observar la estructura mental, su representación, la respuesta matemática esperada y la practica matemática esperada para la presente actividad.

Tabla 5

Evaluación de Actividad 5 del cuestionario de diagnóstico

Estructura mental (Representación)	Respuesta matemática esperada	Práctica matemática esperada
Esquema (Crecimiento de la función y el signo de su derivada)	Decrece en $(-\infty, 1)$ Crece en $(1, 5)$ Decrece en $(5, \infty)$	Determinar los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función a partir de la función derivada

4.4.2 Diseño de Ciclo ACE y cuestionario posterior

Esta fase tenía el propósito de, a través de la herramienta pedagógica del ciclo ACE, ayudar en la construcción del concepto de derivada.

Dentro de la enseñanza matemática, el uso de las herramientas digitales ha venido en auge convirtiéndose en un aliado de docentes, estudiantes e investigadores. Por ello y porque, de acuerdo a Pineda et al. (2020), es evidente que los estudiantes mejoran en la construcción de conceptos matemáticos gracias al uso de estas herramientas digitales.

La herramienta a utilizar para este trabajo de investigación es *GeoGebra*, la cual es un procesador geométrico con una gran utilidad para el proceso de enseñanza-aprendizaje. En la **sección 4.4.2.1** se comparten dos applets en GeoGebra, los cuales tienen como objetivo el permitir al estudiante visualizar situaciones relacionadas al concepto de derivada y se busca que esto le permita una construcción completa del concepto.

Una vez realizada la intervención en el aula que permitió el refuerzo de conocimientos del concepto, se establecen las estructuras mentales que se buscan evaluar en el presente cuestionario, las cuales sufren ligeros cambios a raíz de las observaciones realizadas en el cuestionario de diagnóstico y la intervención en clase. Dichos cambios se justifican para cada actividad en el análisis de resultados de la **sección 5.3**, después de observar los resultados del cuestionario de diagnóstico.

4.4.2.1 Applets utilizados dentro del Ciclo ACE

La realización del applet presentado en la **figura 10** y la **figura 11** se centró en reforzar lo visto en la Actividad 1, Actividad 2 y Actividad 3 del cuestionario de diagnóstico. Dicho applet busca alcanzar los siguientes objetivos de aprendizaje en los estudiantes:

- Cálculo de la pendiente de las rectas secante y tangente
- Comprensión de la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes a una curva
- Interpretación gráfica de la derivada como el valor de la pendiente de la recta tangente a una curva
- Determinación de la derivada como el límite del cociente incremental

Figura 10

Representación geométrica de la recta secante en applet de GeoGebra

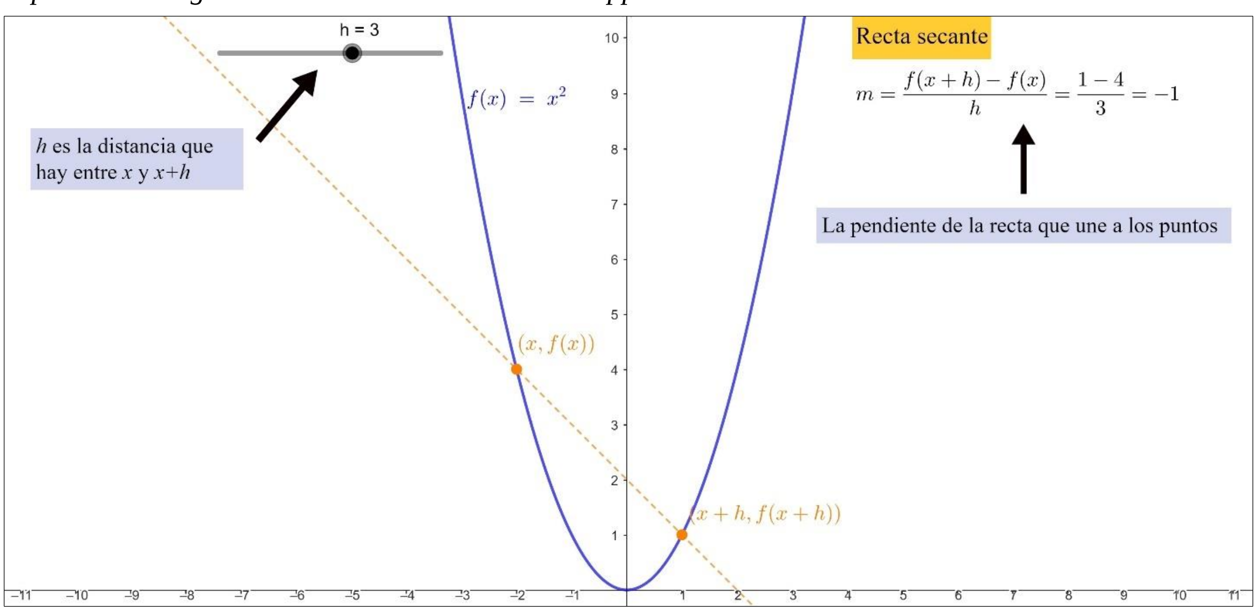
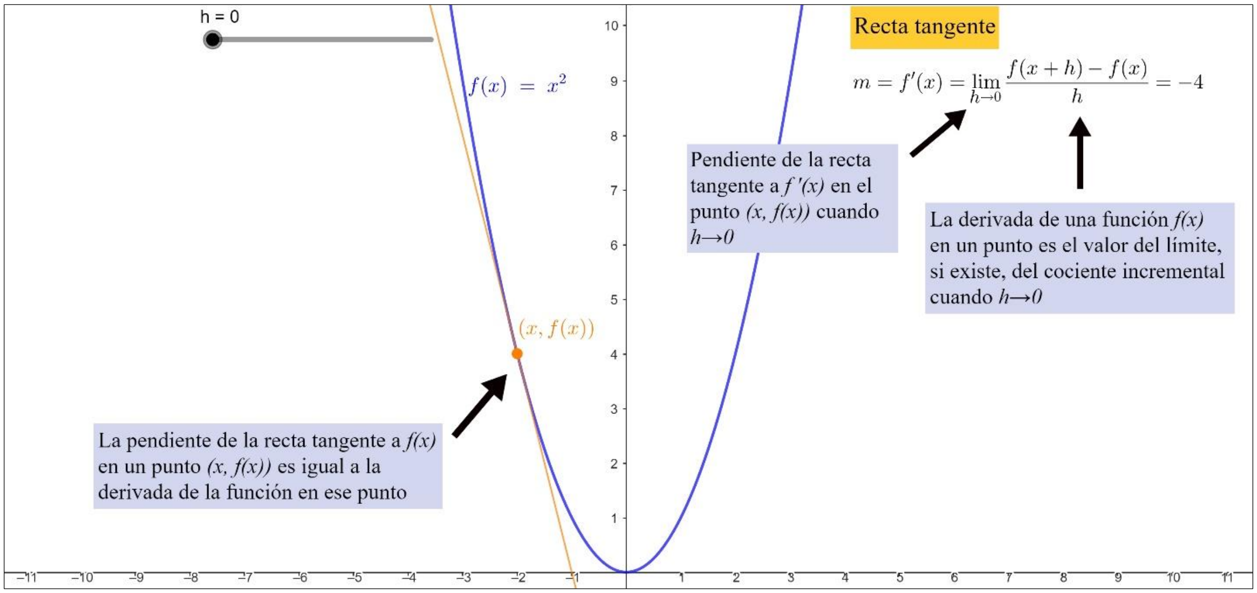


Figura 11

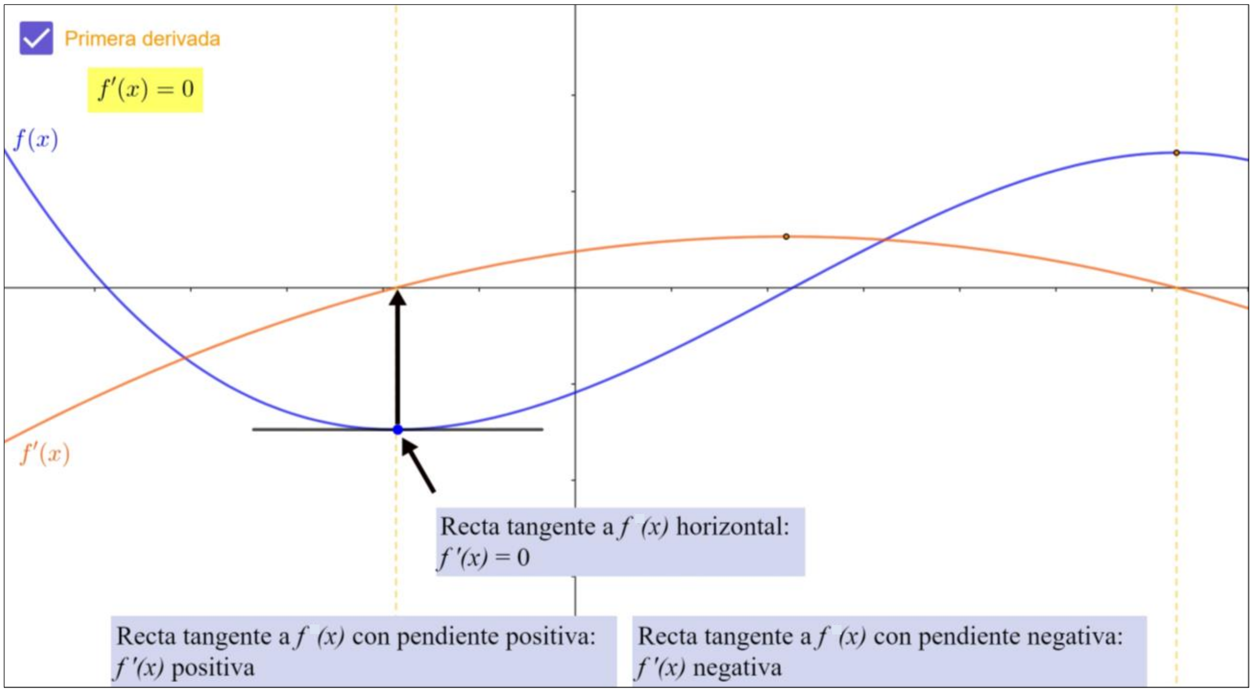
Representación geométrica de la recta tangente en applet de GeoGebra



Para el segundo applet, presentado en la **figura 12**, se trabajó con el objetivo de desarrollar en los estudiantes la competencia que le permita interpretar geométricamente el concepto de derivada estudiando las relaciones entre f y *f'*. De esta manera refuerza lo observado en la Actividad 4 y Actividad 5 y se relacionaba el aspecto gráfico con la definición de la derivada de una función como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Figura 12

Representación geométrica de f y f' en applet de GeoGebra



Esta fase también tiene como objetivo caracterizar el nivel de concepción presentado por los estudiantes posterior al trabajo de intervención con el ciclo ACE. A continuación, se muestran cada una de las actividades del cuestionario posterior a la intervención y lo que se espera como respuesta del estudiante. Este cuestionario se encuentra en el **Anexo 2**.

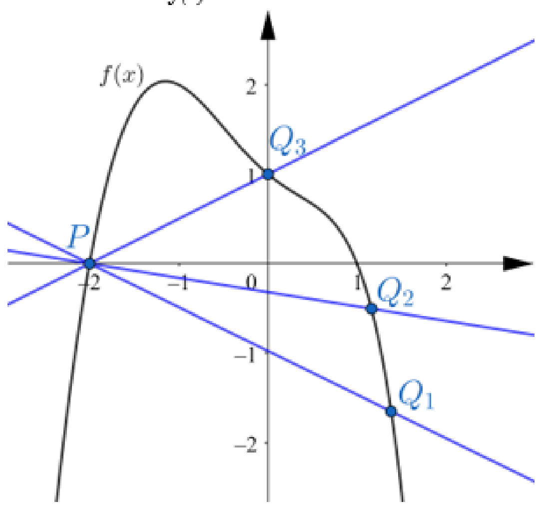
4.4.2.2 Actividad 1

El cuestionario posterior al Ciclo ACE adaptado presentado comienza con la actividad presentada en la **figura 13**.

Figura 13

Actividad 1 del cuestionario posterior a la intervención

La siguiente figura muestra la gráfica de la función $f(x)$.



1. Determina la pendiente de la recta secante que corta a la curva en los puntos P y Q_3.

En la **tabla 6** se observa la estructura mental que busca analizar esta actividad, así como la respuesta y práctica esperadas por los estudiantes.

Tabla 6

Evaluación de Actividad 1 del cuestionario posterior a la intervención

Estructura mental	Respuesta matemática esperada	Práctica matemática esperada
Acción	$m = \frac{1}{2}$	Calcular la pendiente de la recta secante presentada a partir de los puntos mencionados

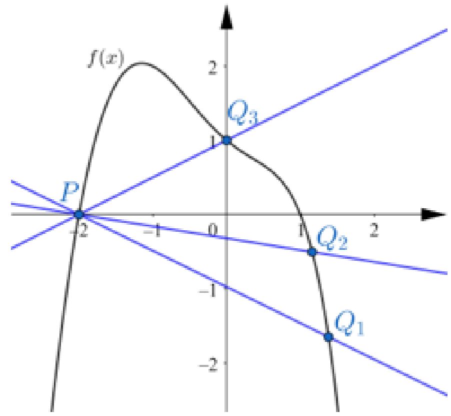
4.4.2.3 Actividad 2

Para la actividad presentada en **Figura 14** se realizó una adaptación de la tarea “Task 6” compartida por Orton (1983).

Figura 14

Actividad 2 del cuestionario posterior a la intervención

Se muestra la figura de la Actividad 1:



1. ¿Cuántas rectas secantes diferentes podrían ser dibujadas en adición a las ya dibujadas en la figura?
2. ¿Qué le sucede a la recta secante una vez que Q se acerca más y más a P?

A continuación, dentro de la **tabla 7** se comparte las estructuras mentales que se buscan analizar en esta actividad junto a su respuesta y práctica esperada.

Tabla 7

Evaluación de Actividad 2 del cuestionario posterior a la intervención

Actividad	Estructura mental (Representación)	Respuesta matemática esperada	Práctica matemática esperada
2.1	Proceso	Infinitas rectas secantes	Comprender que infinitas rectas secantes pueden ser trazadas en la curva presentada
2.2	Objeto (La recta tangente como la posición límite de las rectas secantes)	Las rectas secantes se acercan a la recta tangente	Entender la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes formadas por los puntos P y Q_n

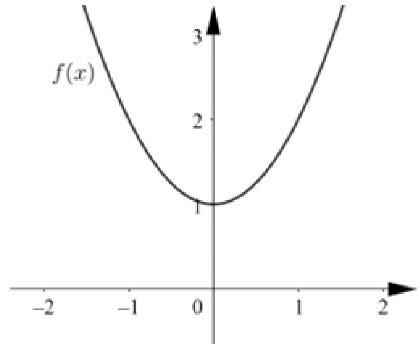
4.4.2.4 Actividad 3

En la **figura 15** se observa la actividad 3, la cual es un ejercicio inspirado en aquellos presentados por Stewart (2012).

Figura 15

Actividad 3 del cuestionario posterior a la intervención

La siguiente figura muestra la gráfica de la curva *f(x)*.



De acuerdo a la figura, estima el valor de $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para $x=0$. Justifica tu respuesta.

La **tabla 8** muestra la estructura mental a analizar, la representación de dicha estructura y la respuesta esperada por los estudiantes.

Tabla 8

Evaluación de Actividad 3 del cuestionario posterior a la intervención

Estructura mental (Representación)	**Respuesta matemática esperada**	**Práctica matemática esperada**
Objeto (Interpretación gráfica de la derivada como el límite del cociente incremental)	$f'(0) = 0$	Comprender el límite del cociente incremental como la derivada en el punto solicitado

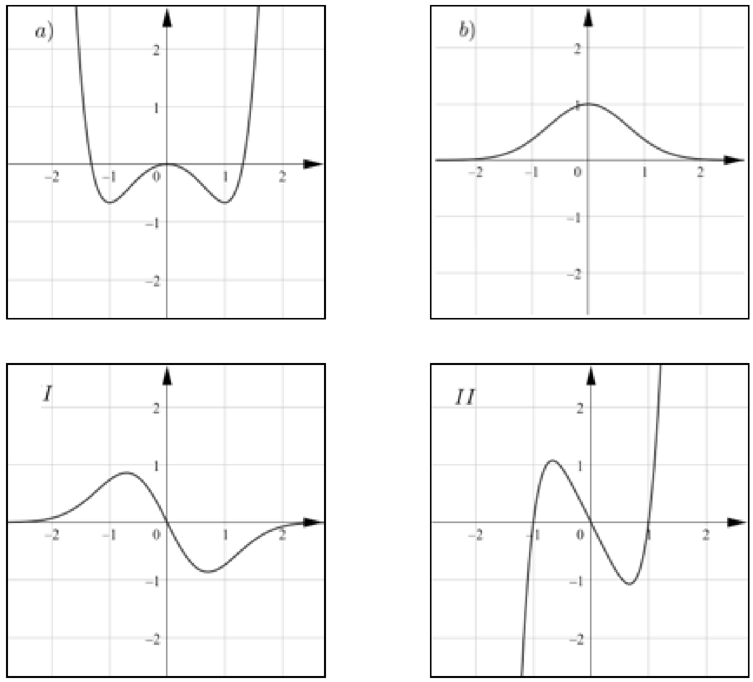
4.4.2.5 Actividad 4

La última actividad del cuestionario de diagnóstico es presentada en la **figura 16** y es una adaptación del ejercicio presentado por Stewart (2012) dentro de la sección "Ejercicios 2.8".

Figura 16

Actividad 4 del cuestionario posterior a la intervención

Relaciona la gráfica de cada función dada en las figuras a) y b) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I y II. Justifica tu respuesta.



La **tabla 9** presenta la estructura mental y la representación de la estructura a analizar, junto a la respuesta y práctica matemáticas esperadas.

Tabla 9

Evaluación de Actividad 4 del cuestionario posterior a la intervención

Estructura mental (Representación)	Respuesta matemática esperada	Práctica matemática esperada
Objeto (La pendiente de la recta tangente como el valor de una nueva función *f’)*	a)-II b)-I	Relacionar cada función con su función derivada

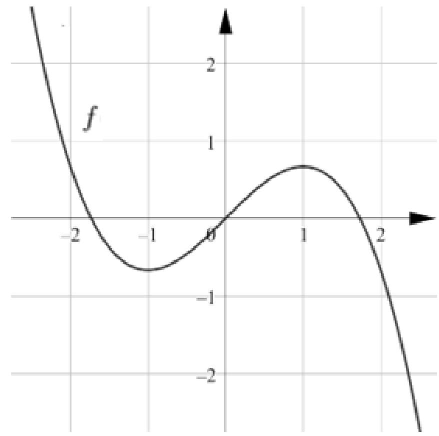
4.4.2.6 Actividad 5

Al igual que la actividad anterior, la presente actividad está basada en los ejercicios presentados por Stewart (2012). Puedes observar esta actividad en la **figura 17**.

Figura 17

Actividad 5 del cuestionario posterior a la intervención

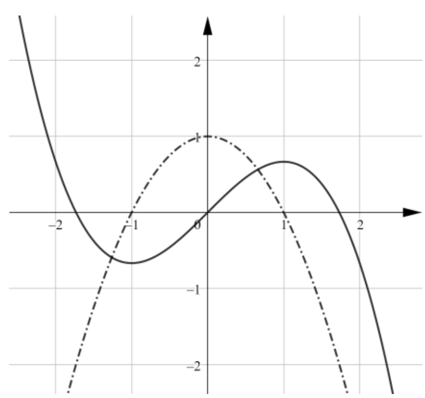
La siguiente figura muestra la gráfica de la función *f*. Utilízala para dibujar un boceto de la gráfica de la función derivada *f*. Justifica tu respuesta.



Dentro de la **tabla 10** se puede observar la estructura mental, su representación, la respuesta matemática esperada y la practica matemática esperada para la presente actividad.

Tabla 10

Evaluación de Actividad 5 del cuestionario posterior a la intervención

Estructura mental (Representación)	**Respuesta matemática esperada**	**Práctica matemática esperada**
Esquema (Bosquejo de una gráfica representativa analizando las relaciones entre *f* y *f’*)	Trazado, completo o parcial, del bosquejo de *f’* 	Bosquejar la función solicitada a través del estudio de la relación entre *f’* y *f*

Capítulo 5. Análisis de resultados

Dentro del presente capítulo se muestra el análisis de las concepciones presentadas por los estudiantes a lo largo del estudio con base en la estructura de la descomposición genética (DG) del concepto de derivada presentada en la **sección 3.4.1**.

Primero se caracterizan las concepciones mentales iniciales que presentan acerca del objeto matemático derivada en su interpretación gráfica en las respuestas dentro del cuestionario de diagnóstico. Posteriormente, se evalúan los resultados en el cuestionario posterior a la intervención para evaluar las estructuras mentales que lograron construir acerca del concepto desde su interpretación gráfica y analizar si existe una mejoría en comparación con el cuestionario de diagnóstico. En ambos cuestionarios se analiza el número de estudiantes que presentan la estructura mental a analizar en cada actividad.

Antes de iniciar con el análisis de resultados es importante recordar lo visto en la **sección 3.3** donde se compartía que el paso por las estructuras mentales no es necesariamente secuencial (Valdivia & Parraguez, 2015). Además, Trigueros (2005) señala que el tipo de estructura mostrada por el estudiante depende en gran parte del problema al que se está enfrentando, ya sea por la demanda cognitiva requerida y/o por la disposición o estado anímico del estudiante al momento de enfrentarlo. Por lo que es posible observar que algunos estudiantes muestran una concepción mayormente estructurada en diferentes actividades del cuestionario aun cuando no mostraron una concepción más básica en actividades anteriores.

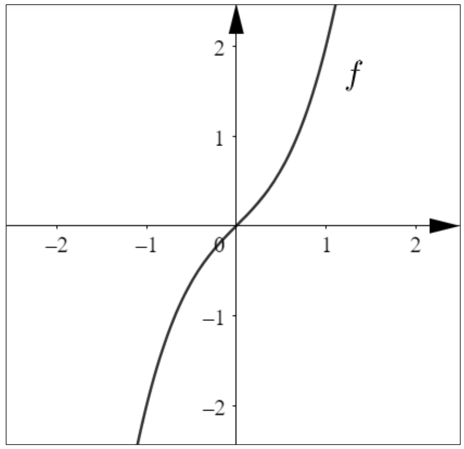
5.1 Análisis de resultados del cuestionario de diagnóstico

5.1.1 Actividad 1

A partir de la gráfica de la función f que se puede observar en la **figura 18**, el estudiante tiene como instrucciones el dibujar la recta que corta la curva en los puntos $(-1,-2)$ y $(1,2)$ y determinar la pendiente de la recta resultante.

Figura 18

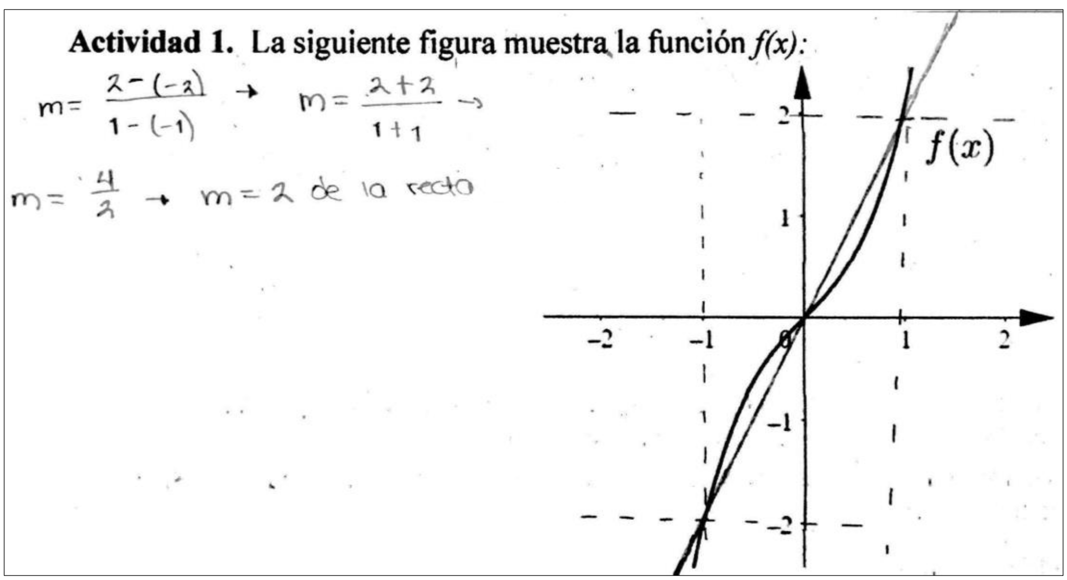
Gráfica de Actividad 1 del cuestionario de diagnóstico



Los resultados obtenidos mostraron que diez de los dieciséis estudiantes lograron dibujar la recta solicitada y calcular la pendiente de esta a través de su fórmula, por lo que muestran una *concepción acción* del concepto de derivada. En la **figura 19** se ejemplifica esto con la respuesta de E8.

Figura 19

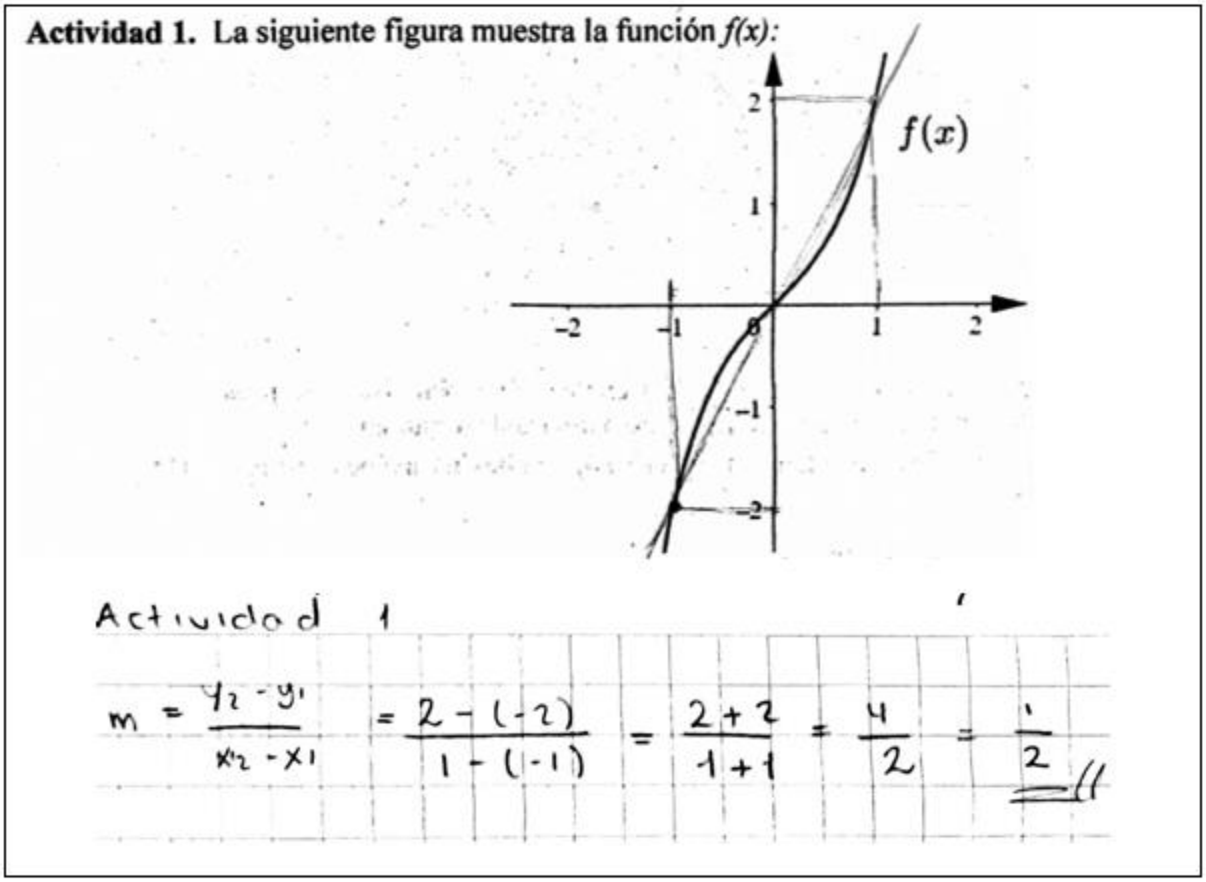
Respuesta de E8 a actividad 1 del cuestionario de diagnóstico



Es importante recalcar que al estudiante E14 se le atribuye una *concepción acción* pues, aunque brindó una respuesta diferente a la esperada, muestra capacidad para trazar la recta solicitada y trabajar correctamente con la fórmula para el cálculo de la pendiente, pero durante el paso final presentó un error aritmético (o distracción) que lo llevó a brindar una respuesta diferente, como se observa en **figura 20**.

Figura 20

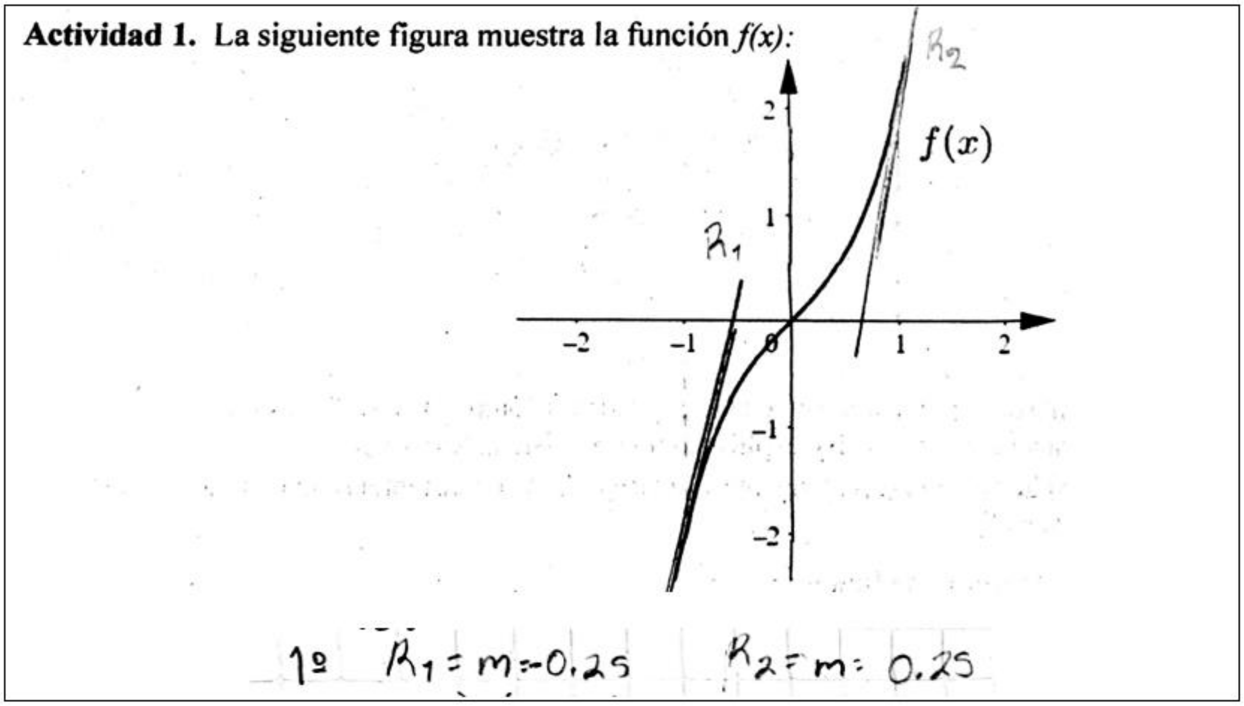
Respuesta de E14 a actividad 1 del cuestionario de diagnóstico



Por otra parte, en la respuesta proporcionada por E5 se puede observar que el estudiante traza dos rectas tangentes en los puntos mencionados en las instrucciones con la misma inclinación pero en los cálculos determina valores de sus pendientes distintas, como se ve en la **figura 21**. Esto deja en evidencia los débiles conocimientos del estudiante respecto al concepto de pendiente.

Figura 21

Respuesta de E5 a actividad 1 del cuestionario de diagnóstico



A continuación, se presenta la **tabla 11** en la cual se puede observar la categorización de respuestas presentadas por los estudiantes en la actividad 1.

Tabla 11
Análisis de respuestas a Actividad 1 del cuestionario de diagnóstico

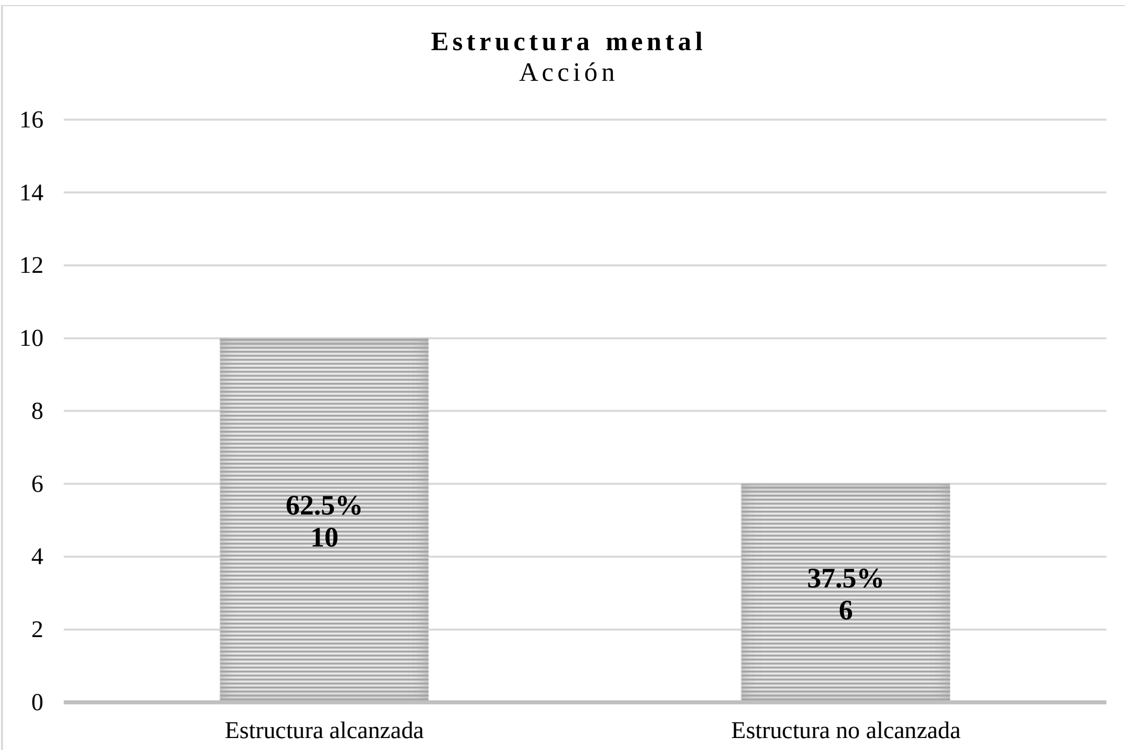
Estudiantes	Respuesta matemática observada	Práctica matemática observada	Estructura mental alcanzada
E2, E4, E6, E8, E9, E10, E11, E13, E16	$m = 2$	El estudiante conecta los puntos solicitados formando la recta y calcula su pendiente según el punto **1** de la DG	Acción
E14	$m = \frac{1}{2}$	El estudiante conecta los puntos solicitados formando la recta y muestra un procedimiento correcto al calcular la pendiente de la recta, pero en el paso final presenta un error aritmético que lo lleva a brindar un cálculo incorrecto	Acción
E5	$m_1 = -0.25$ $m_2 = 0.25$	El estudiante muestra confusión en los términos y traza dos rectas tangentes, una en cada punto mencionado en las instrucciones, y a partir de esto aproxima incorrectamente la pendiente de ambas rectas	No presenta la estructura mental evaluada
E7, E12, E15	Sin respuesta	El estudiante conecta los puntos solicitados formando la recta, pero no	No presenta la estructura mental evaluada

		inicia el cálculo de la pendiente de la recta dibujada	
E1, E3	Sin respuesta	El estudiante no conecta los puntos solicitados ni presenta el cálculo de la pendiente de la recta solicitada a dibujar	No presenta la estructura mental evaluada

Por otra parte, en la **figura 22** se presenta un resumen del desempeño presentado por los estudiantes dentro de la actividad 1.

Figura 22

Desempeño observado dentro de la Actividad 1 del cuestionario de diagnóstico

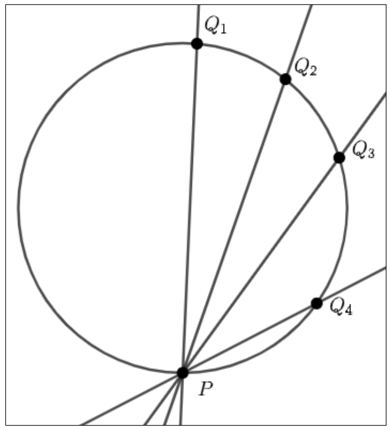


5.1.2 Actividad 2

La **figura 23** muestra un círculo y un punto fijo P sobre el círculo. Las líneas PQ son dibujadas del punto P a los puntos Q, las cuales se extienden en ambas direcciones. Después de analizar dicha figura el estudiante debe responder las siguientes preguntas.

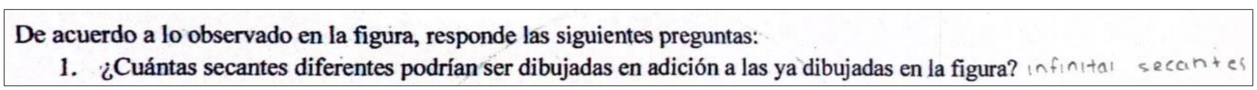
1. ¿Cuántas rectas secantes diferentes podrían ser dibujadas en adición a las ya dibujadas en la figura?
2. ¿Qué pasa con la recta secante una vez que Q_n se acerca más y más a P?

Figura 23
Gráfica de Actividad 2 del cuestionario de diagnóstico



Para la pregunta 1 se observó que diez de los dieciséis estudiantes interiorizan la acción del trazado de rectas, ya sea que lo hayan expuesto o no en la actividad anterior, y aquí lo canalizan como la estructura proceso que le permite ver que infinitas rectas secantes se pueden trazar a lo largo del círculo, lo cual podemos visualizar con la respuesta de E14 en la **figura 24**. De esta manera, estos diez estudiantes muestran una *concepción proceso*.

Figura 24
Respuesta de E14 a pregunta 1 de actividad 2 del cuestionario de diagnóstico

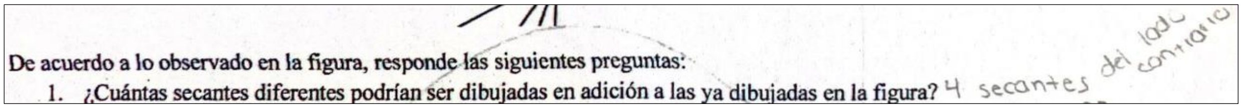

De acuerdo a lo observado en la figura, responde las siguientes preguntas:
1. ¿Cuántas secantes diferentes podrían ser dibujadas en adición a las ya dibujadas en la figura? infinitas secantes

E3, E5 y E15 no expusieron una estructura mental acción en sus respuestas de la actividad 1, pero si mostraron una *concepción proceso* para la presente actividad. Esto viene a ejemplificar lo comentado al inicio del capítulo, donde se compartía que las estructuras no son necesariamente secuenciales y que los estudiantes pueden mostrar concepciones más abstractas para algunas actividades aun cuando no presentan estructuras más básicas en otras.

Otras respuestas observadas llevaron a suponer que los estudiantes fundamentaron su respuesta al observar una simetría en las rectas brindadas, pues E7 imagina una recta vertical que pasa por P y así, con base en esto, afirma que se pueden dibujar cuatro rectas secantes más del lado contrario respecto a la recta imaginada, como se observa en la **figura 25**.

Figura 25

Respuesta de E7 a pregunta 1 de actividad 2 del cuestionario de diagnóstico



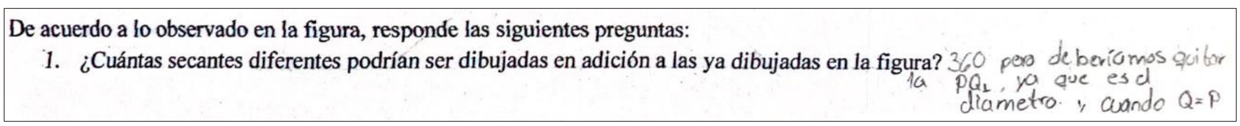
De acuerdo a lo observado en la figura, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas secantes diferentes podrían ser dibujadas en adición a las ya dibujadas en la figura? 4 secantes del lado contrario

Por otra parte, se puede suponer que otros dos estudiantes tomaron como base para su respuesta los grados o el ángulo que forman un círculo. Por ejemplo, por la respuesta de E8 se conjetura que determina que cada recta secante representa un grado del círculo, por lo que resta las cuatro rectas ya trazadas y da como respuesta 356 rectas, resta que no realiza E9 y da como respuesta 360 aunque afirma que debería restar PQ_1 justificando que es el diámetro del círculo y cuando $P = Q_n$, lo cual podemos observar en la **figura 26**.

Figura 26

Respuesta de E9 a pregunta 1 de actividad 2 del cuestionario de diagnóstico



De acuerdo a lo observado en la figura, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas secantes diferentes podrían ser dibujadas en adición a las ya dibujadas en la figura? 360 pero deberíamos quitar la PQ_1, ya que es el diametro y cuando Q=P

En la **tabla 12** se resume el análisis de las respuestas brindadas por la totalidad de los estudiantes para la pregunta 1 de la Actividad 2.

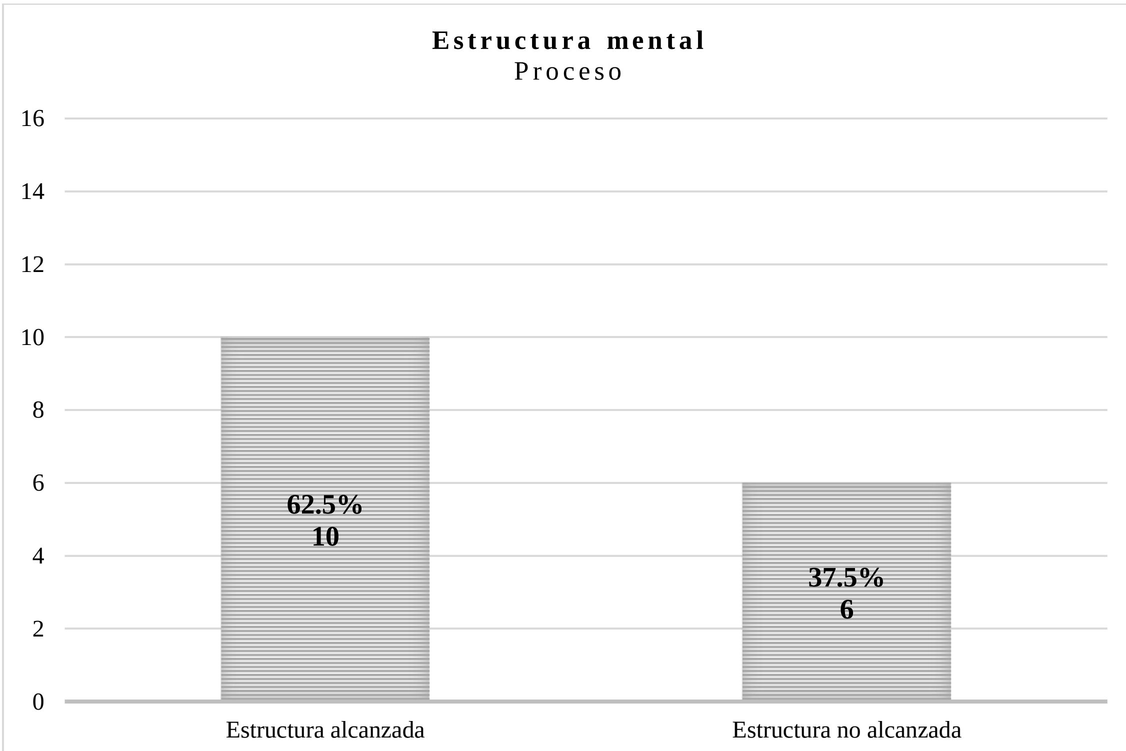
Tabla 12

Análisis de respuestas a la pregunta 1 de Actividad 2 del cuestionario de diagnóstico

Estudiantes	Respuesta matemática observada	Práctica matemática observada	Estructura mental alcanzada
E2, E3, E4, E5, E6, E10, E13, E14, E15, E16	Infinitas rectas pueden ser trazadas	El estudiante tiene la capacidad de observar que infinitas rectas secantes se pueden trazar a lo largo del círculo presentado según el punto **2** de la DG	Proceso
E7, E12	4 y 3 respectivamente	El estudiante da como respuesta un número finito de rectas fundamentando su respuesta al observar una simetría en las rectas brindadas	No presenta la estructura mental evaluada
E8, E9	356 y 360 respectivamente	El estudiante brinda como respuesta un número finito de rectas a partir de los grados con los que cuenta un círculo	No presenta la estructura mental evaluada
E1, E11	Sin respuesta	El estudiante no presentó respuesta alguna	No presenta la estructura mental evaluada

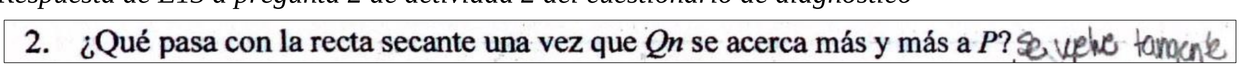
Dentro de la **figura 27** se puede resumir el desempeño presentado por los estudiantes al momento de dar respuesta a la pregunta 1 de la Actividad 2.

Figura 27
Desempeño observado dentro de la pregunta 1 de la Actividad 2 del cuestionario de diagnóstico



Para la pregunta 2, las respuestas recabadas mostraron que solamente E13 y E15 manejan una *concepción objeto* en esta pregunta al encapsular el proceso de comprender que infinitas rectas secantes pueden cortar en dos puntos cada vez más y más cercanos de una curva hasta acercarse a una recta tangente, lo cual se observa con la respuesta de E13 en **figura 28**. La representación de la estructura objeto que estos estudiantes manejan es la de comprender la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes.

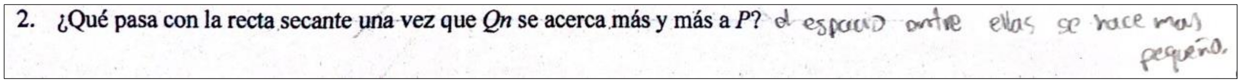
Figura 28
Respuesta de E13 a pregunta 2 de actividad 2 del cuestionario de diagnóstico


2. ¿Qué pasa con la recta secante una vez que *Qn* se acerca más y más a *P*? se vuelve tangente

Por otra parte, otros de los estudiantes, quienes no mostraron la concepción analizada en la a afirmaban que los puntos que forman rectas secantes se acercan más y más haciendo el espacio entre estos puntos más pequeño, pero no somos capaces de observar qué produce en la recta generada. Esto se ejemplifica en la respuesta de E2 en la **figura 29**.

Figura 29

Respuesta de E2 a pregunta 2 de actividad 2 del cuestionario de diagnóstico


2. ¿Qué pasa con la recta secante una vez que Qn se acerca más y más a P? el espacio entre ellas se hace mas pequeño.

A continuación, dentro de la **tabla 13**, se puede observar el análisis de las respuestas presentadas en la segunda pregunta de la actividad 2.

Tabla 13

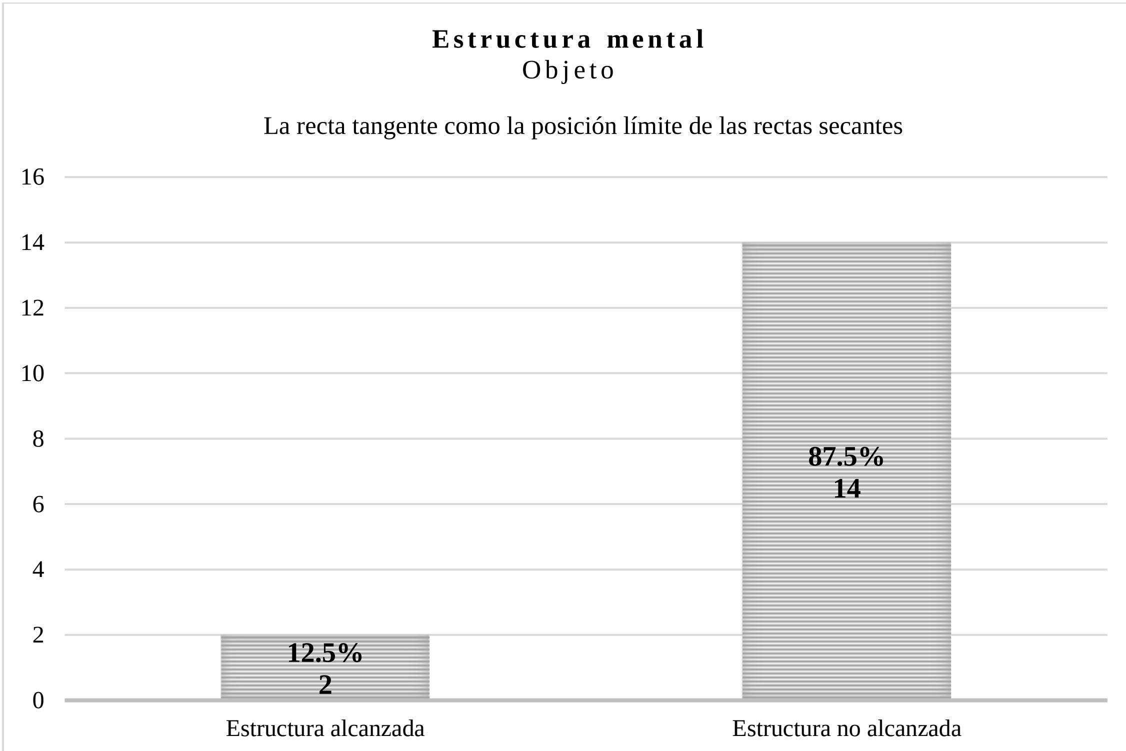
Análisis de respuestas a la pregunta 2 de Actividad 2 del cuestionario de diagnóstico

Estudiantes	**Respuesta matemática observada**	**Práctica matemática observada**	**Estructura mental alcanzada (Representación)**
E13, E15	La recta secante se convierte en una recta tangente	El estudiante comprende que una vez que la recta secante a una curva corta en puntos más y más cercanos hasta que la distancia entre estos sea infinitesimalmente pequeña se produce la recta tangente según el punto **3** de la DG	Objeto (La recta tangente como la posición límite de las rectas secantes)
E2, E14	El espacio entre los puntos disminuye	El estudiante afirma que los puntos que forman rectas secantes pueden cortarse cada vez más y más cerca, pero no es capaz de observar la transformación que esto genera en la recta cuando llega a la posición límite de las rectas secantes	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E4, E11, E16	La pendiente de la recta disminuye	El estudiante comparte que la pendiente de la recta disminuye, pero se enfoca solamente en el punto P presentado en el ejercicio y en la pendiente que este punto forma junto a puntos cada vez más y más cercanos sin ser capaz de generalizar esta idea a la respuesta esperada	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E5, E7, E10, E12	La pendiente de la recta aumenta	El estudiante, igual que en el caso anterior, se enfoca en el punto P presentado, pero observando la recta secante que se forma cuando Q corta en puntos más y más cercanos a Q_1	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E1, E6, E8, E9	La magnitud de la recta disminuye	El estudiante afirma que la magnitud de la recta disminuye, incluso E6 comparte que la recta se convierte en un punto	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E3	Sin respuesta	El estudiante no presentó respuesta alguna	No presenta la estructura mental en la representación evaluada

Por su parte, la **figura 30** nos muestra el rendimiento presentado por los estudiantes al contestar la pregunta 2 de la actividad 2.

Figura 30

Desempeño observado dentro de la pregunta 2 de la Actividad 2 del cuestionario de diagnóstico

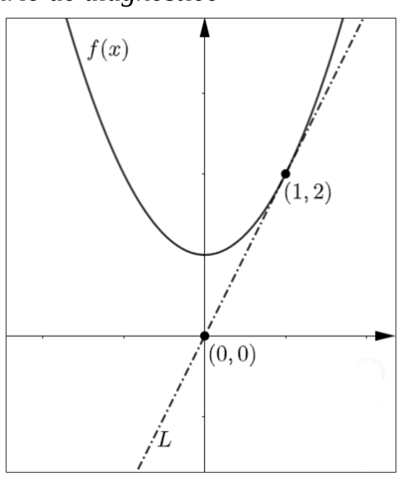


5.1.3 Actividad 3

Para esta actividad se le muestra al estudiante la recta L que es tangente a la función $f(x) = x^2 + 1$ en el punto $(1, 2)$ como se indica en la **figura 31** y se le solicita encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto señalado junto con la justificación de su respuesta.

Figura 31

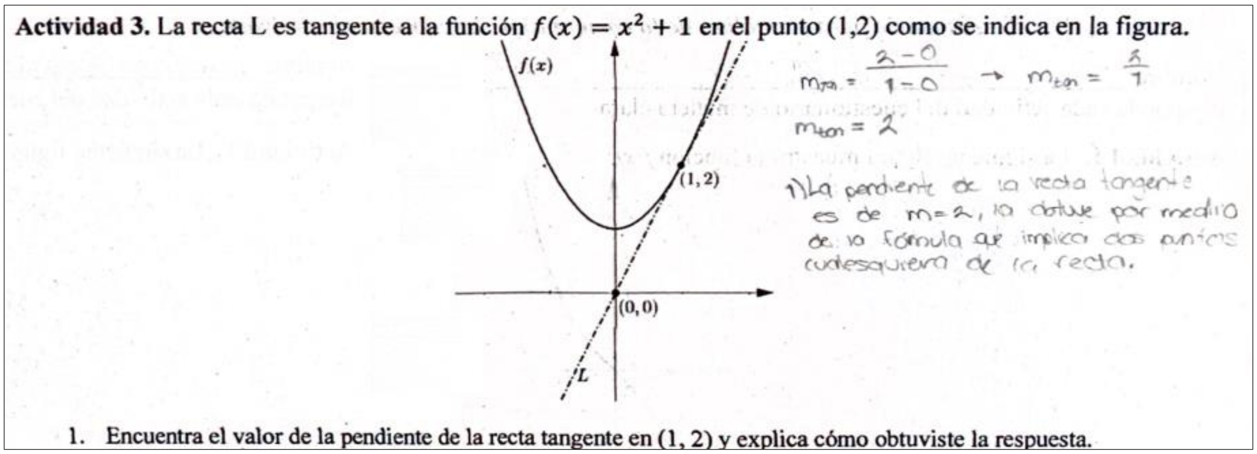
Gráfica de Actividad 3 del cuestionario de diagnóstico



Aun cuando se habían visto deficiencias en las estructuras mentales presentadas en las actividades anteriores, para esta actividad los dieciséis estudiantes muestran una *concepción objeto* a través de diferentes representaciones.

Siete estudiantes mostraron la práctica matemática esperada calculando la pendiente de la recta tangente haciendo uso de los puntos marcados en la figura mostrando una representación la concepción objeto en su representación de calcular la pendiente de la recta tangente, dentro de la **figura 32** podemos observar prueba de ello con la respuesta de E8.

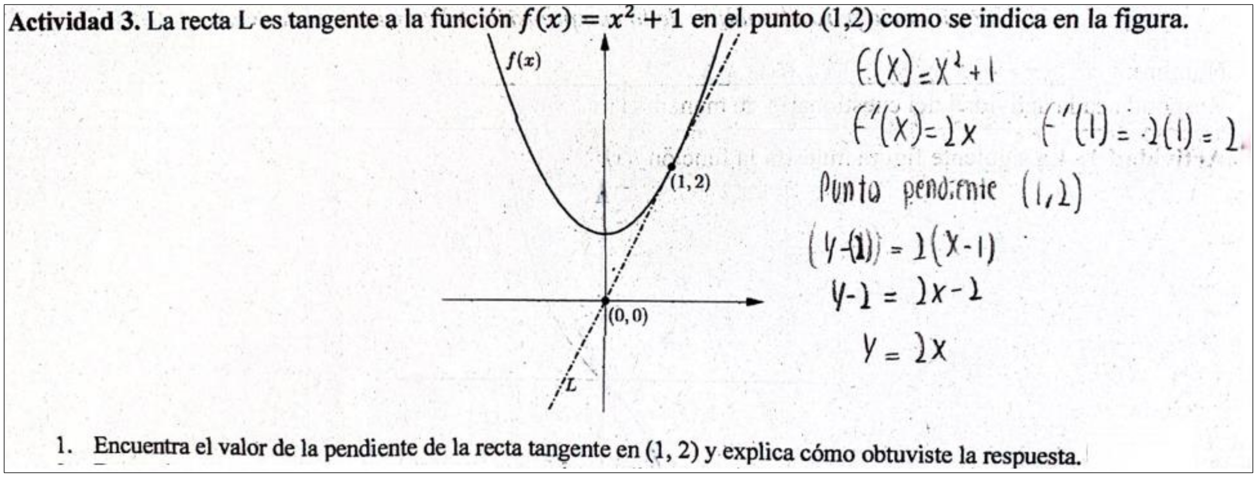
Figura 32
Respuesta de E8 a actividad 3 del cuestionario de diagnóstico



Mientras que ocho estudiantes fueron más allá de solo proporcionar la pendiente de la recta tangente, pues afirman que este valor representa el valor de la derivada. El método que cuatro de estos ochos estudiantes utilizaron para conocer el valor de la pendiente de la recta tangente fue el de derivar con ayuda de reglas de derivación la función expresada simbólicamente como $x^2 + 1$ presentada en las instrucciones y analizar el valor de $f'(1)$, lo cual se observa en la **figura 33** con la respuesta de E16.

Figura 33

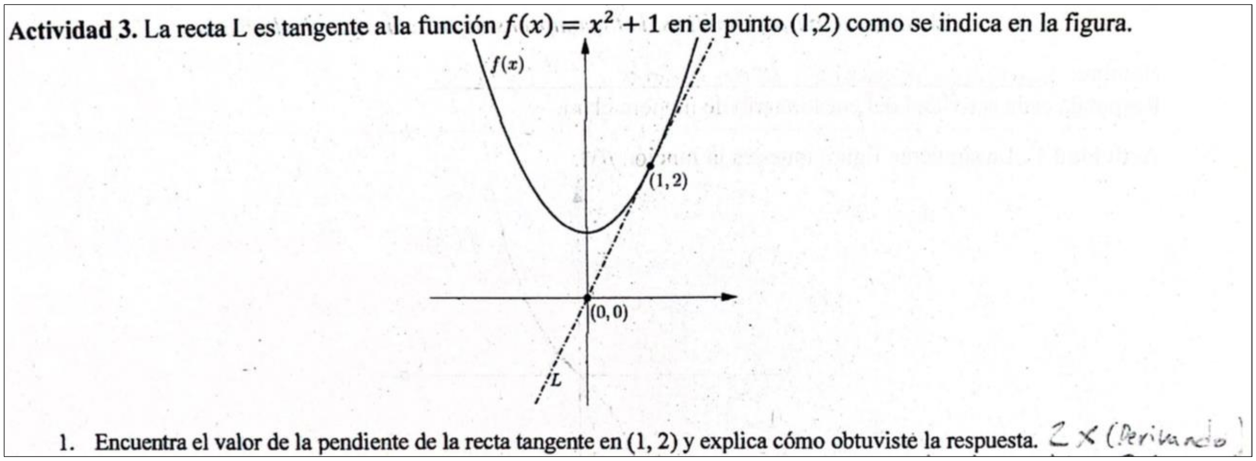
Respuesta de E16 a actividad 3 del cuestionario de diagnóstico



Los cuatro estudiantes restantes calcularon la pendiente de la recta tangente a través de su fórmula, donde E11 y E12 explícitamente afirman que el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto cuenta con una relación con el valor de la derivada evaluada en el mismo punto, mientras E1 y E2 implícitamente describen esta relación en las ecuaciones utilizadas. Por lo que la representación de la estructura mental objeto que estos estudiantes manejan es la de interpretar gráficamente la derivada en un punto como el valor de la pendiente de la recta tangente y el cálculo de su pendiente.

Por su último, en la **figura 34** se observa a E15 compartir como respuesta la función derivada sin realizar ninguna serie de pasos y sin analizar su valor para $x = 1$, por lo que demuestra un cierto conocimiento de la relación entre la función derivada y una recta tangente. Por esto mencionado, solo se le atribuye la *concepción objeto* en su representación que le permite interpretar gráficamente la derivada en un punto como el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto, pero no la representación del cálculo de la pendiente de la recta tangente.

Figura 34
Respuesta de E15 a actividad 3 del cuestionario de diagnóstico



La **tabla 14** nos muestra la categorización de las respuestas presentadas por los estudiantes para la actividad 3.

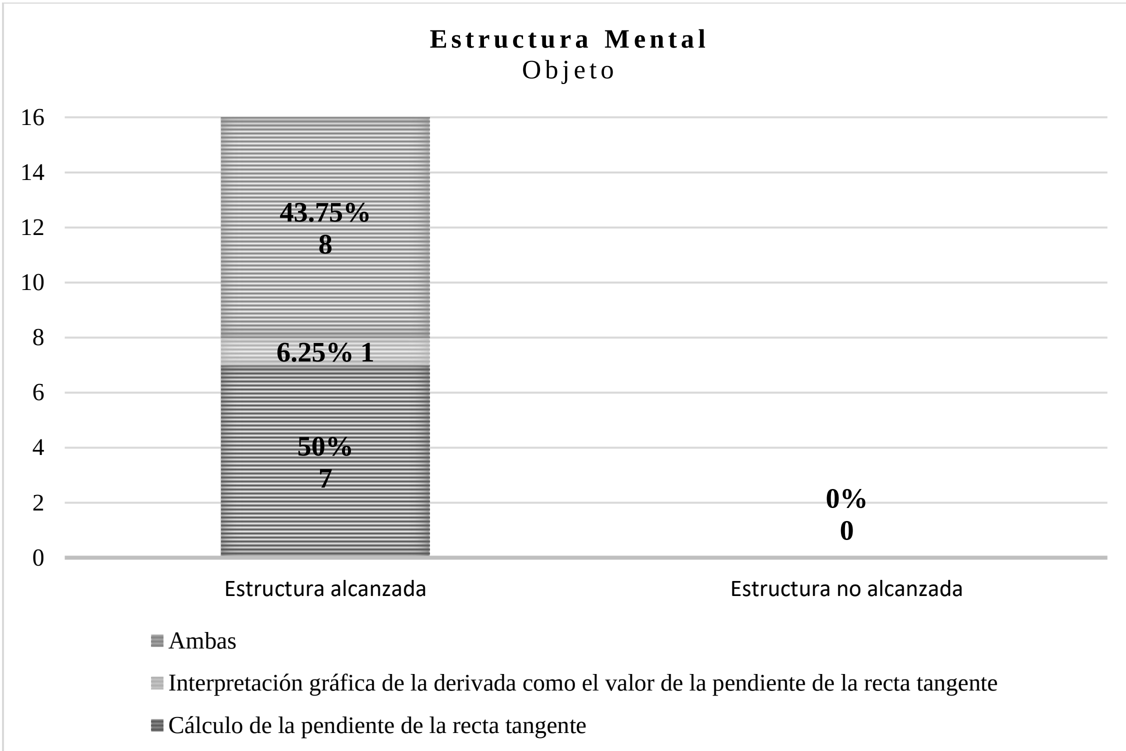
Tabla 14
Análisis de respuestas a Actividad 3 del cuestionario de diagnóstico

Estudiantes	Respuesta matemática observada	Práctica matemática observada	Estructura mental alcanzada (Representación)
E2, E6, E8, E9, E10, E13, E14	$m = 2$	El estudiante demuestra la capacidad de calcular la pendiente de la recta tangente presentada el punto **3** de la DG	Objeto (Cálculo de la pendiente de la recta tangente)
E1, E3, E4, E5, E7, E11, E12, E16	$m = 2$	El estudiante, aparte de proporcionar la pendiente de la recta tangente, afirma que este es el valor de la derivada según los puntos **3** y **4a** de la DG	Objeto (Interpretación gráfica de la derivada como el valor de la pendiente de la recta tangente y el cálculo de la pendiente de la recta tangente)
E15	$f'(x) = 2x$	El estudiante comenta que la pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada según el punto **4a** de la DG sin realizar pasos que lo lleven a tal conclusión.	Objeto (Interpretación gráfica de la derivada como el valor de la pendiente de la recta tangente)

Dentro de la **figura 35** se puede observar el desempeño presentado por los estudiantes y, además, la representación de la estructura mental evidenciada por aquellos que alcanzaron la estructura mental analizada.

Figura 35

Desempeño observado dentro de la Actividad 3 del cuestionario de diagnóstico

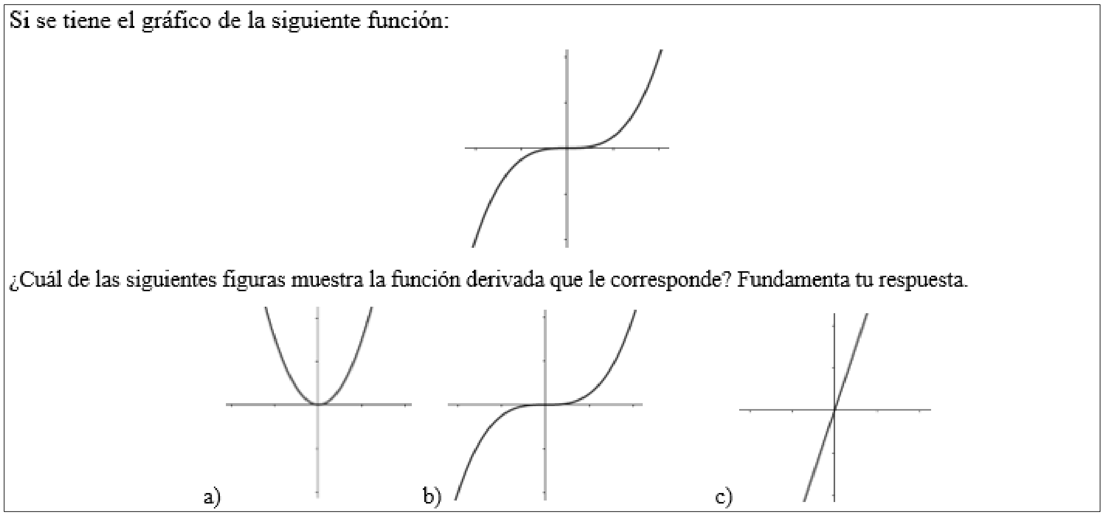


5.1.4 Actividad 4

Se le presenta al estudiante el gráfico de la **figura 36** y se le solicita determinar la función derivada que le corresponde de una de las opciones y que fundamente su respuesta.

Figura 36

Actividad 4 del cuestionario de diagnóstico

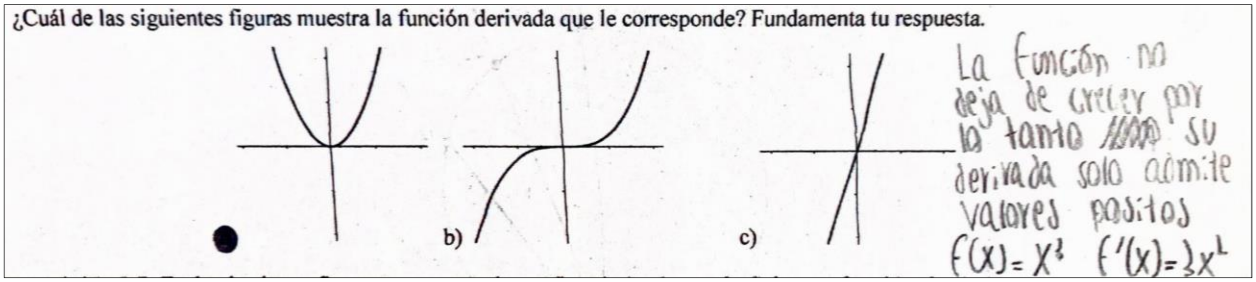


Las respuestas obtenidas de la actividad 4 nos mostraron que E13, E15 y E16 no solamente interpretan gráficamente la derivada como el valor de la pendiente de la recta tangente, lo cual expusieron correctamente en la actividad 3, sino que generalizan las estructuras mentales y observan el valor de esta pendiente de la recta tangente en uno o varios puntos como el valor de una nueva función en los mismos, lo cual era la respuesta esperada. Así, estos tres estudiantes muestran la estructura mental esquema en su representación de comprender el crecimiento de la función presentada en uno o varios intervalos del dominio expuesto y relacionarla con el signo del valor de la función derivada.

En la **figura 37** se visualiza a E16 justificando correctamente su respuesta de manera parcial, pues hace bien afirmando que la función es siempre creciente, pero cae en un error al generalizar que esto significa que la función derivada solo admite valores positivos. Incluso se puede visualizar que en la gráfica de la respuesta correcta la derivada toca el eje *x* en el origen. Además, nombra a la función presentada como $f(x) = x^3$ y a su respuesta como $f'(x) = 3x^2$ tratando de justificar su respuesta también con reglas de derivación desde el supuesto de conocer el grado de las funciones presentadas. Aun con estos comentarios se observa en el estudiante un conocimiento que puede tener notables mejoras, pero al que se le puede atribuir una *concepción objeto* para la presente actividad de diagnóstico en la representación de comprender el crecimiento de la función presentada y relacionarla con el signo del valor de la función derivada.

Figura 37

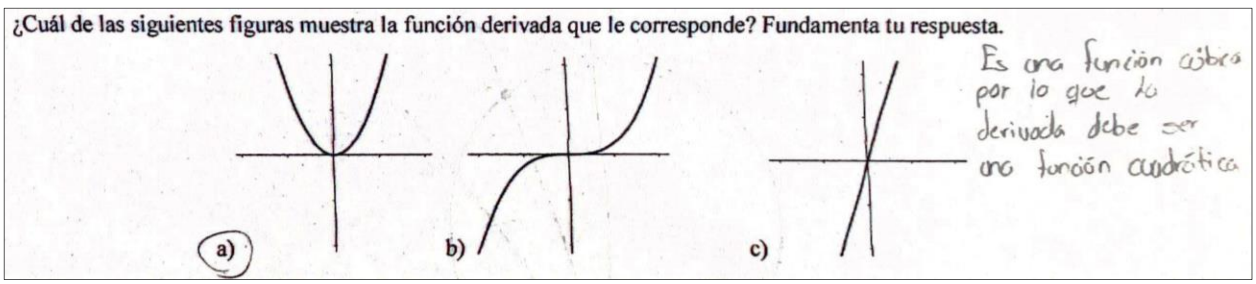
Respuesta de E16 a actividad 4 del cuestionario de diagnóstico



Mientras que en la **figura 38** se puede observar cómo el estudiante busca justificar su respuesta a través del análisis del grado de la función y relacionar dicha característica con los grados de una función para lograr determinar su respuesta.

Figura 38

Respuesta de E9 a actividad 4 del cuestionario de diagnóstico



Complementando lo detallado anteriormente, se presenta en la tabla **15** el resumen de las respuestas brindadas para la presente actividad.

Tabla 15

Análisis de respuestas a Actividad 4 del cuestionario de diagnóstico

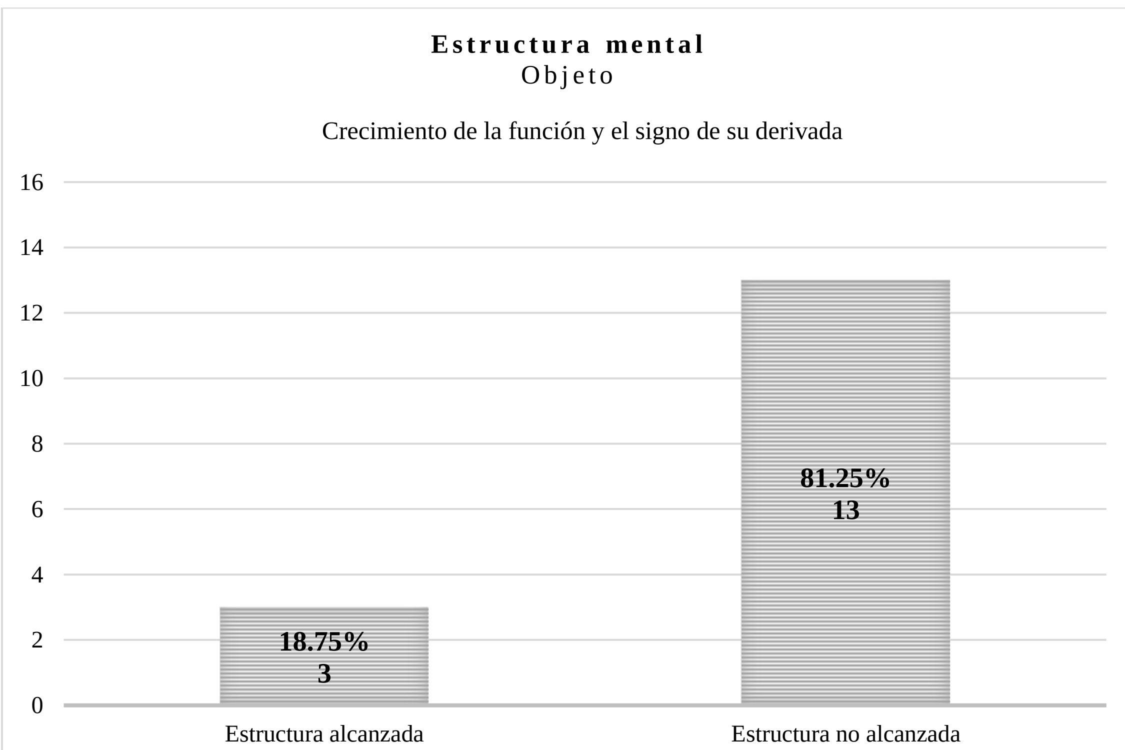
Estudiantes	Respuesta matemática observada	Práctica matemática observada	Estructura mental alcanzada
E13, E15, E16	a)	El estudiante observando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y relacionándola con el signo del valor de la derivada de acuerdo al punto **6a** de la DG selecciona correctamente su respuesta	Esquema (Crecimiento de la función y el signo de su derivada)
E2, E3, E6, E9, E10, E11	a)	El estudiante brinda su respuesta a partir del supuesto de conocer el grado de la función presentada, pero no generaliza en la relación del valor de la pendiente con el valor de la función derivada	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E4, E12, E14	a)	El estudiante justifica su respuesta a partir del “cambio de concavidad” y “cambio de	No presenta la estructura mental en la

		exponente", pero no profundiza en su explicación	representación evaluada
E5	$a)$	El estudiante no presenta una justificación de su respuesta	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E1	$b)$	El estudiante analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función presentada, afirmando que es siempre creciente y extrapola incorrectamente este comportamiento a la función derivada	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E7, E8	$c)$	El estudiante no presenta una justificación	No presenta la estructura mental en la representación evaluada

Mientras que se puede ver el desempeño dentro de la actividad 4 en la **figura 39**.

Figura 39

Desempeño observado dentro de la Actividad 4 del cuestionario de diagnóstico

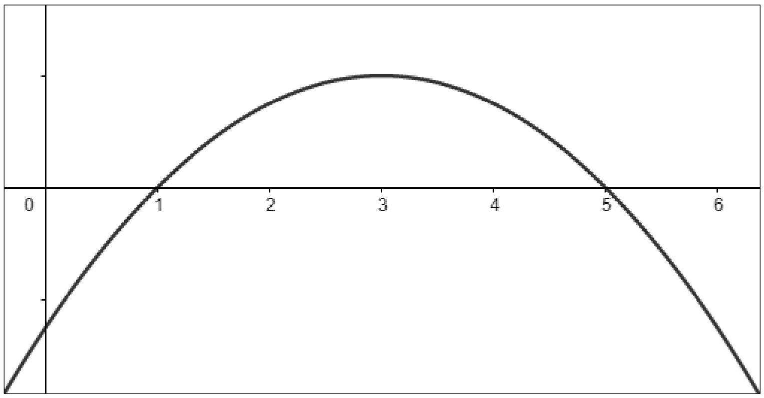


5.1.5 Actividad 5

En la **figura 40** se muestra al estudiante la gráfica de la *derivada f’* de una función *f* y se le solicita afirmar sobre qué intervalos *f* crece o decrece fundamentando su respuesta.

Figura 40

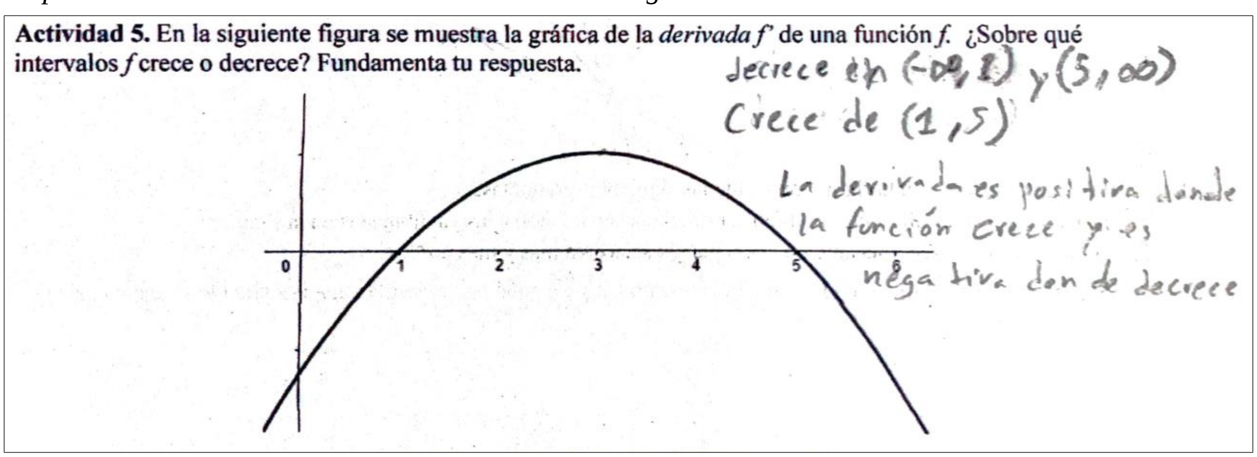
Gráfica de Actividad 5 del cuestionario de diagnóstico



Para la última actividad era necesario que los estudiantes se apoyaran del proceso y los objetos trabajados en las actividades anteriores y así, a través de la generalización, poder estudiar el valor de la función derivada *f’* y relacionarlo con los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*. Solo cuatro de los dieciséis estudiantes pudieron justificar correctamente en qué intervalos decrece y crece la función al analizar su relación con la función *f’* presentada, como se ejemplifica con la respuesta de E15 en la **figura 41**.

Figura 41

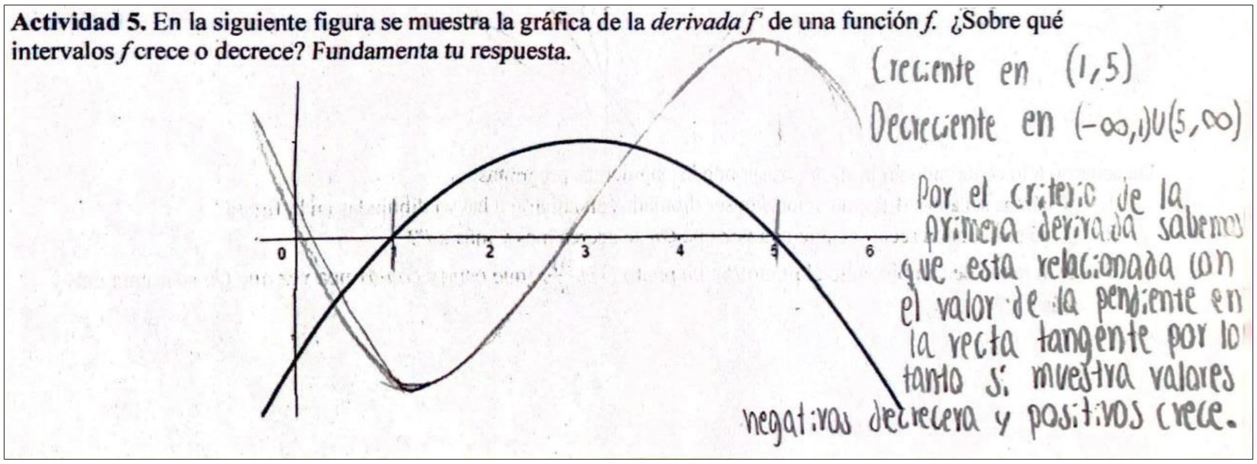
Respuesta de E15 a actividad 5 del cuestionario de diagnóstico



Incluso de esos cuatro estudiantes, E16 introduce correctamente el término “criterio de la primera derivada” que le permite brindar la respuesta esperada junto a su correcta justificación y presenta un bosquejo de la gráfica de *f* bastante acertado ,como se observa en la **figura 42**.

Figura 42

Respuesta de E16 a actividad 5 del cuestionario de diagnóstico



Por lo tanto, la representación de la estructura mental esquema presentada por los estudiantes es la del crecimiento de la función y su relación con el signo del valor de su derivada. E15 y E16 ya habían mostrado esta representación en la actividad anterior. Además, por el bosquejo realizado, E16 presenta la representación de la estructura esquema que le permite realizar un bosquejo de una gráfica analizando las relaciones entre *f* y *f'*.

Por otra parte, otros nueve estudiantes no analizaron la relación entre las funciones *f* y *f'* y se limitaron a describir los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f'* presentada en la actividad intuyendo el comportamiento de la función donde su dominio es todos los números reales como se presenta en **figura 43** y **figura 44** con las respuestas E4 y E11 respectivamente.

Figura 43

Respuesta de E4 a actividad 5 del cuestionario de diagnóstico

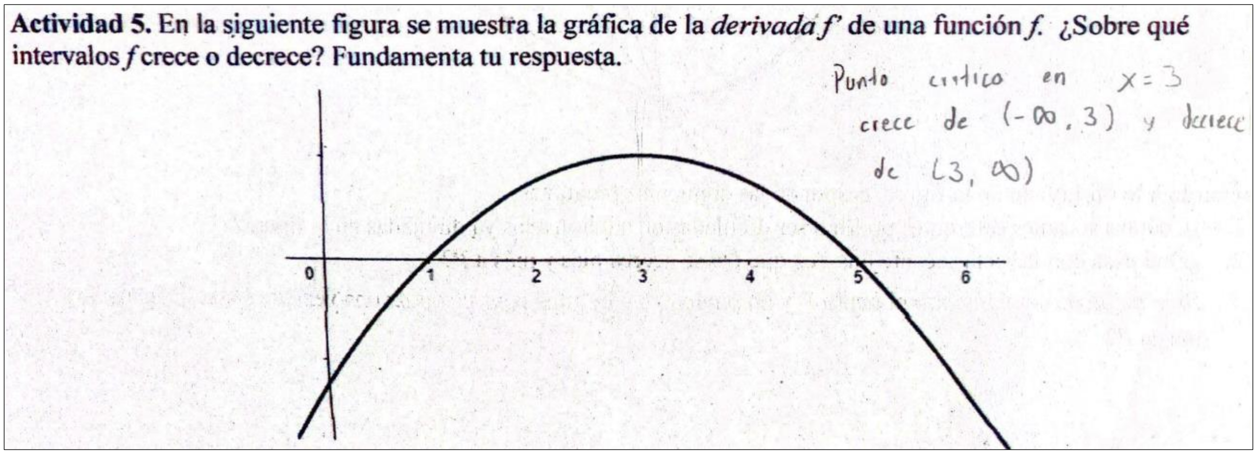
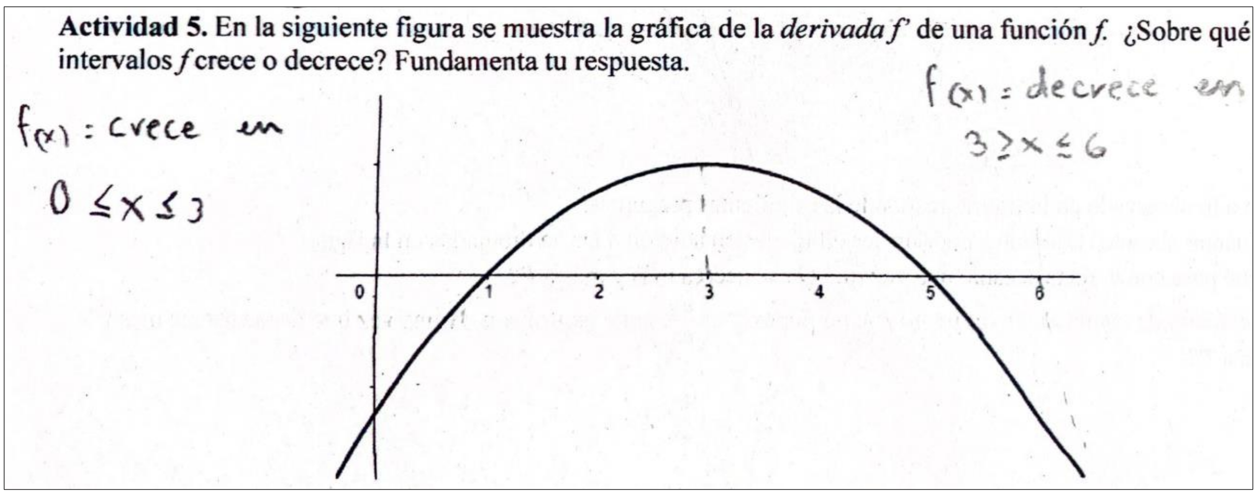


Figura 44

Respuesta de E11 a actividad 5 del cuestionario de diagnóstico



En la **tabla 16** se detallan las respuestas brindadas para la actividad 5 del cuestionario de diagnóstico.

Tabla 16

Análisis de respuestas a Actividad 5 del cuestionario de diagnóstico

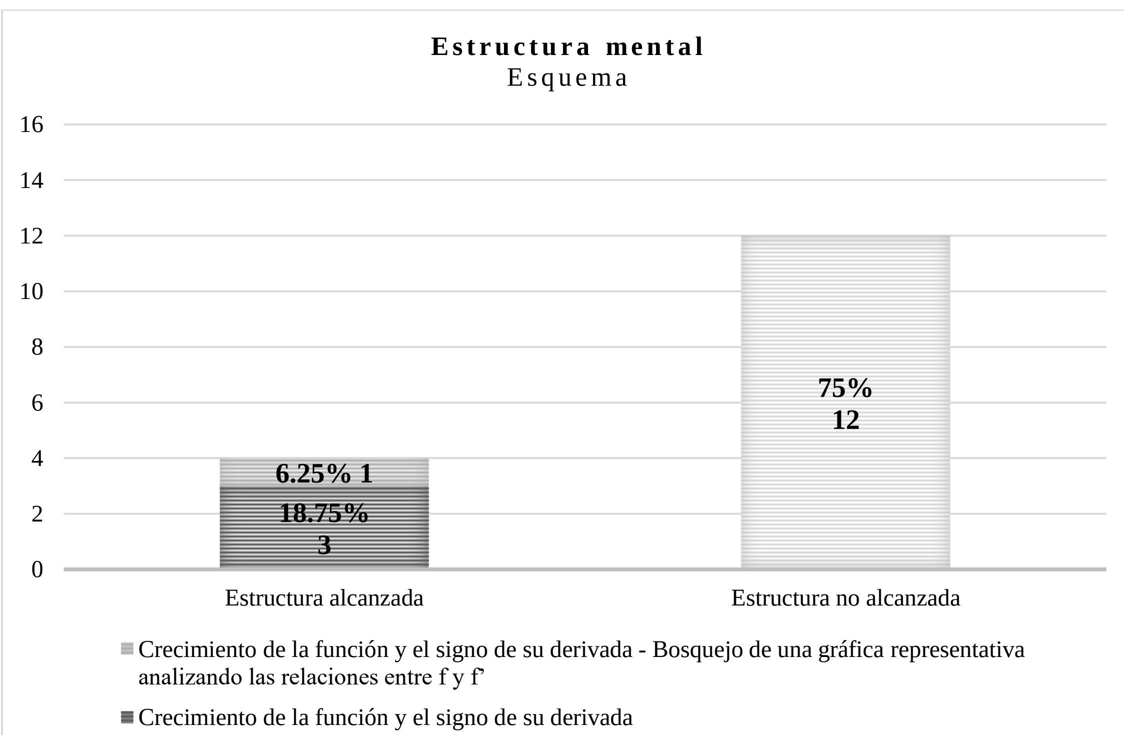
Estudiantes	Respuesta matemática observada	Práctica matemática observada	Estructura mental alcanzada (Representación)
E1, E3, E15	Decrece en $(-\infty, 1)$ Crece en $(1, 5)$ Decrece en $(5, \infty)$	El estudiante determina correctamente la el crecimiento y decrecimiento de la función *f* a partir del análisis de la función *f'* presentada según el punto **6a** de la DG	Esquema (Crecimiento de la función y el signo de su derivada)
E16	Decrece en $(-\infty, 1)$ Crece en $(1, 5)$	El estudiante no solo analiza correctamente la relación entre el	Esquema

	Decrece en $(5,\infty)$	crecimiento y decrecimiento de la función *f* y el signo del valor de la función derivada *f'* de acuerdo a **6a** de la DG, sino que realiza un bosquejo de la gráfica de la función *f*	(Crecimiento de la función y el signo de su derivada y Bosquejo de una gráfica representativa analizando las relaciones entre *f* y *f'*)
E4, E6, E7, E8, E9, E10, E12, E13, E14	Crece en $(-\infty,3)$ Decrece en $(3,\infty)$	El estudiante no analiza la relación entre *f* y *f'* dando como respuesta los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f'* presentada	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E11	Crece en $(0,3)$ Decrece en $(3,6)$	El estudiante no analiza la relación entre *f* y *f'* dando como respuesta el crecimiento y decrecimiento de la función derivada en parte del intervalo observado en la figura	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E2, E5	Decrece en $(-\infty,0)$ Crece en $(0,3)$ Decrece en $(3,\infty)$	El estudiante muestra una idea de la relación entre las funciones, pero toma como referencia en el cambio de crecimiento y decrecimiento el máximo local observado y no los cortes en el eje *x*	No presenta la estructura mental en la representación evaluada

El desempeño presentado en la presente actividad se muestra en la **figura 45**, así como las representaciones de la estructura mental presentadas por los estudiantes que alcanzaron la estructura mental a analizar.

Figura 45

Desempeño observado dentro de la Actividad 5 del cuestionario de diagnóstico



5.2 Discusión de resultados del cuestionario de diagnóstico

En los resultados del cuestionario de diagnóstico se pudo apreciar que las estructuras mentales que predominan en la mayor parte de los estudiantes analizados son las estructuras acción y proceso, pues se observa una dificultad de encapsular el proceso necesario para llegar a una construcción mental de la *concepción objeto*, lo cual coincide con los estudios realizados por Amaro (2020), Pereyra & Herrera (2020) y Rodríguez et al. (2019). Los resultados obtenidos para este cuestionario se pueden deber a que predomina el aspecto algebraico en la enseñanza del cálculo, tal y como lo comenta Guerrero (2020).

Sin embargo, la actividad donde se observó un mejor desempeño por parte de los estudiantes fue la actividad 3, la cual evalúa la estructura mental objeto. Dentro de dicha actividad se observó el uso de mecanizaciones algorítmicas, pero también que un alto porcentaje de los estudiantes interpretaron gráficamente de manera correcta la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, lo cual va en contra de lo expuesto por García et al. (2018). Esto se puede deber a que los estudiantes analizados eran recién ingresados a la universidad, mientras que los estudiantes de la presente investigación ya se encuentran cursando las diferentes clases de cálculo universitario.

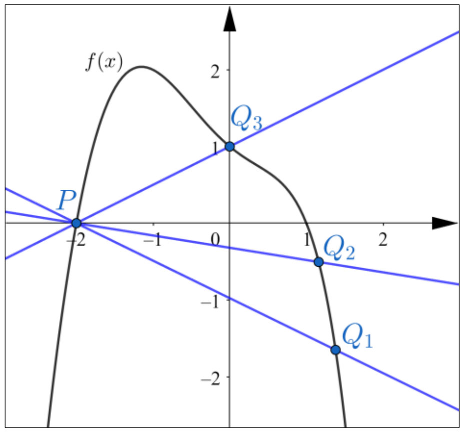
5.3 Análisis de resultados del cuestionario posterior a la intervención

5.3.1 Actividad 1

Se le presenta al estudiante la **figura 46** y se le solicita determinar la pendiente de la recta secante ya graficada que corta a la curva en los puntos P y Q_3 omitiendo la instrucción de trazar dicha recta, ya que trece de los dieciséis estudiantes mostraron la capacidad de realizar esto en el cuestionario de diagnóstico. Por ello, durante la intervención, se reforzó el trazado de rectas para aquellos que no evidenciaron poder realizar esta instrucción en dicho cuestionario.

Figura 46

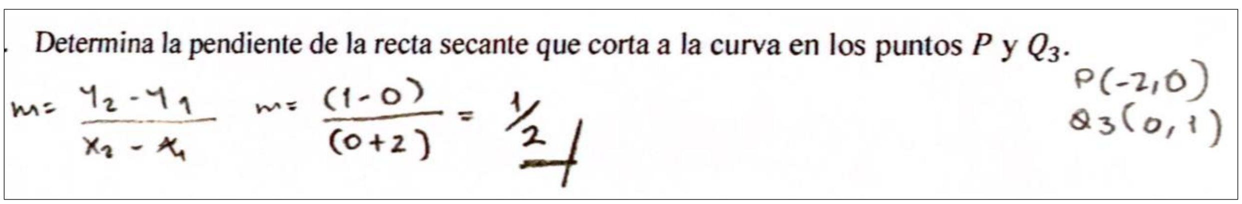
Gráfica de Actividad 1 y Actividad 2 del cuestionario posterior a la intervención



Para la presente actividad se observó que catorce de los dieciséis estudiantes lograron determinar correctamente las coordenadas de los puntos mencionados en las instrucciones y calcular la pendiente de la recta secante solicitada a través de su fórmula sin problema alguno, por lo que estos catorce estudiantes muestran una *concepción acción* del concepto de derivada en su representación gráfica ejemplificando su respuesta en la **figura 47**.

Figura 47

Respuesta de E6 a actividad 1 del cuestionario posterior a la intervención



Determina la pendiente de la recta secante que corta a la curva en los puntos P y Q_3.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\quad m = \frac{(1-0)}{(0+2)} = 1/2$

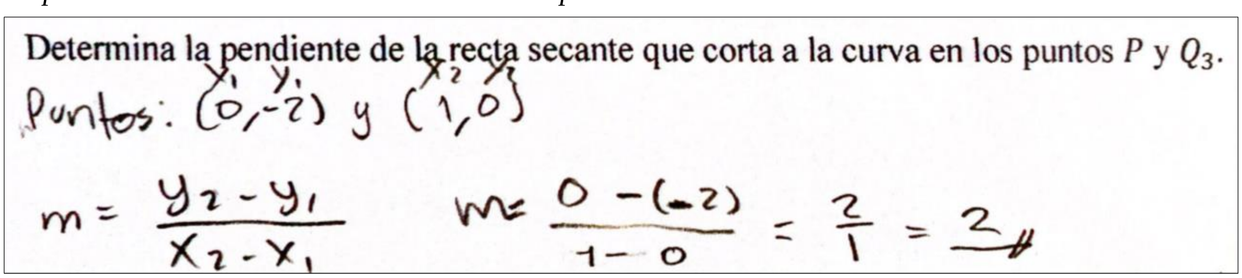
$P(-2,0)$

$Q_3(0,1)$

Sin embargo, a estos estudiantes se les une E2, ya que, aunque determinó incorrectamente las coordenadas de los puntos, mostró la capacidad de conocer la fórmula de la pendiente y trabajar correctamente con ella, como se observa en la **figura 48**.

Figura 48

Respuesta de E2 a actividad 1 del cuestionario posterior a la intervención



Determina la pendiente de la recta secante que corta a la curva en los puntos P y Q_3.

Puntos: $(\overset{x_1}{0}, \overset{y_1}{-2})$ y $(\overset{x_2}{1}, \overset{y_2}{0})$

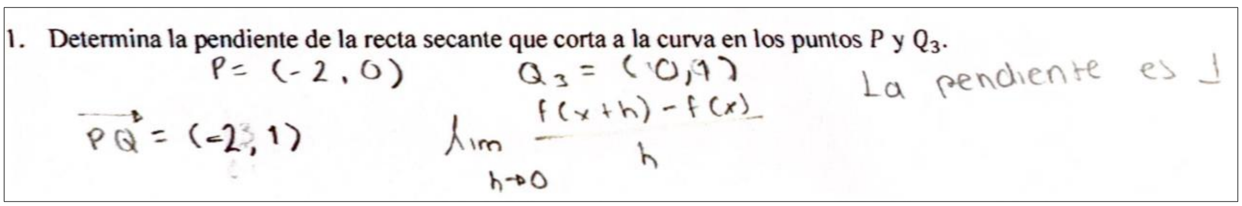
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\quad m = \frac{0 - (-2)}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2$

Por esto se podría decir que el estudiante maneja una *concepción acción* del concepto de derivada al saber calcular la pendiente, pero podría manejar estructuras deficientes en otros conceptos matemáticos que no le permiten determinar correctamente las coordenadas de un punto. Por todo esto mencionado, se comparte como resultado que quince de los dieciséis estudiantes tuvieron una *concepción acción* dentro de esta actividad.

Solo E7 muestra una respuesta incorrecta observable en la **figura 49**, pues, aunque determinó correctamente las coordenadas de los puntos mencionados en las instrucciones, afirmó que el valor de la pendiente es 1 sin más justificación que transcribir el límite del cociente incremental.

Figura 49

Respuesta de E7 a actividad 1 del cuestionario posterior a la intervención



1. Determina la pendiente de la recta secante que corta a la curva en los puntos P y Q_3.

$P = (-2, 0)$ $Q_3 = (0, 1)$ La pendiente es 1

$\overrightarrow{PQ} = (2, 1)$ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Mientras que la **tabla 17** presenta la categorización de la totalidad de las respuestas analizadas.

Tabla 17

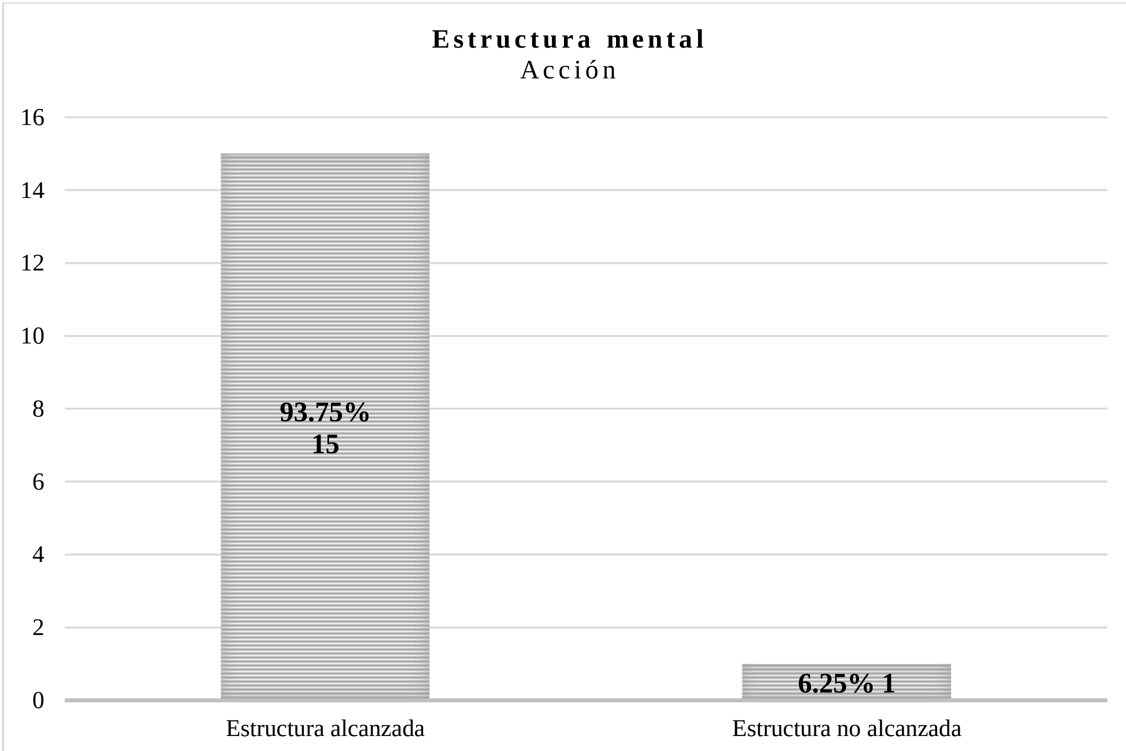
Análisis de respuestas a Actividad 1 del cuestionario posterior a la intervención

Estudiantes	**Respuesta matemática observada**	**Práctica matemática observada**	**Estructura mental alcanzada**
E1, E3, E4, E5. E6, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16	$m = \frac{1}{2}$	El estudiante calcula la pendiente de la recta secante según el punto **1** de la DG	Acción
E2	$m = 2$	El estudiante presenta errores para determinar correctamente las coordenadas de los puntos mencionados, pero es capaz de calcular la pendiente correctamente	Acción
E7	$m = 1$	El estudiante determina las coordenadas de los puntos mencionados, pero no es capaz de calcular la pendiente correctamente	No presenta la estructura mental evaluada

Por otra parte, en la **figura 50** se presenta un resumen del desempeño presentado por los estudiantes dentro de la actividad 1.

Figura 50

Desempeño observado dentro de la Actividad 1 del cuestionario posterior a la intervención



5.3.2 Actividad 2

Para la actividad 2 el estudiante debe analizar de nueva cuenta la **figura 46** de la actividad 1 y contestar las siguientes preguntas.

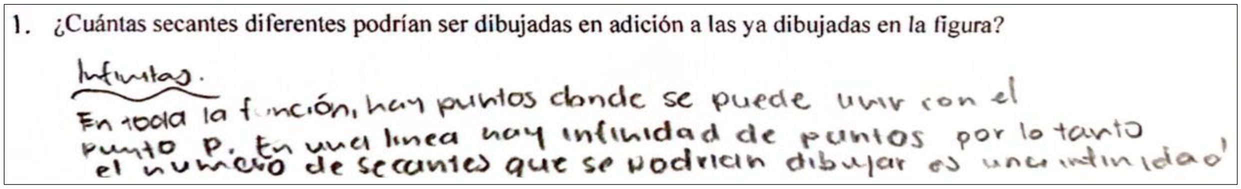
1. ¿Cuántas rectas secantes diferentes podrían ser dibujadas en adición a las ya dibujadas en la figura?
2. ¿Qué le sucede a la recta secante una vez que Q se acerca más y más a P?

Se mantiene a grandes rasgos la misma estructura que la actividad 2 del cuestionario de diagnóstico, pues lo observado en los resultados de la actividad en dicho cuestionario llevó a reforzar dentro de las intervenciones las estructuras mentales relacionadas esperando una mejora en las respuestas de los estudiantes para el presente cuestionario.

Para la pregunta 1 se obtuvo que quince de los dieciséis estudiantes mostraron una *concepción proceso* desarrollada a través de la interiorización de la acción del trazado de rectas secantes que quedó evidenciada en la actividad 1 y así observan que pueden ser trazadas infinitas rectas secantes a lo largo del dominio de la función, donde vemos un ejemplo de esta en la **figura 51** con la respuesta de E6.

Figura 51

Respuesta de E6 a pregunta 1 de actividad 2 del cuestionario posterior a la intervención



1. ¿Cuántas secantes diferentes podrían ser dibujadas en adición a las ya dibujadas en la figura?

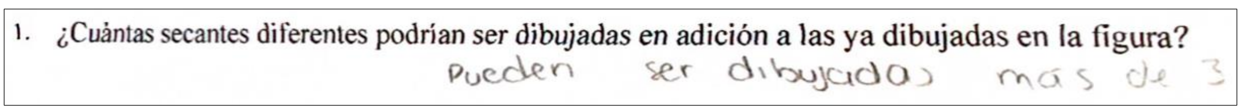
Infinitas.

En toda la función, hay puntos donde se puede unir con el punto P. En una linea hay infinidad de puntos por lo tanto el número de secantes que se podrian dibujar es una infinidad

Además, de nueva cuenta el estudiante que mostró deficiencias fue E7, como se observa en la **figura 52**, pues da como respuesta que pueden ser trazadas más de tres rectas, las cuales son aquellas que se encuentran en la gráfica, sin poder desarrollar la estructura mental proceso que le permita observar que pueden ser trazadas infinitas rectas secantes en todo el dominio de la función.

Figura 52

Respuesta de E7 a pregunta 1 de actividad 2 del cuestionario posterior a la intervención



1. ¿Cuántas secantes diferentes podrían ser dibujadas en adición a las ya dibujadas en la figura?

Pueden ser dibujadas más de 3

A continuación, en la **tabla 18** se presenta un resumen de las respuestas obtenidas por parte de los estudiantes para la pregunta 1 de la actividad 2.

Tabla 18

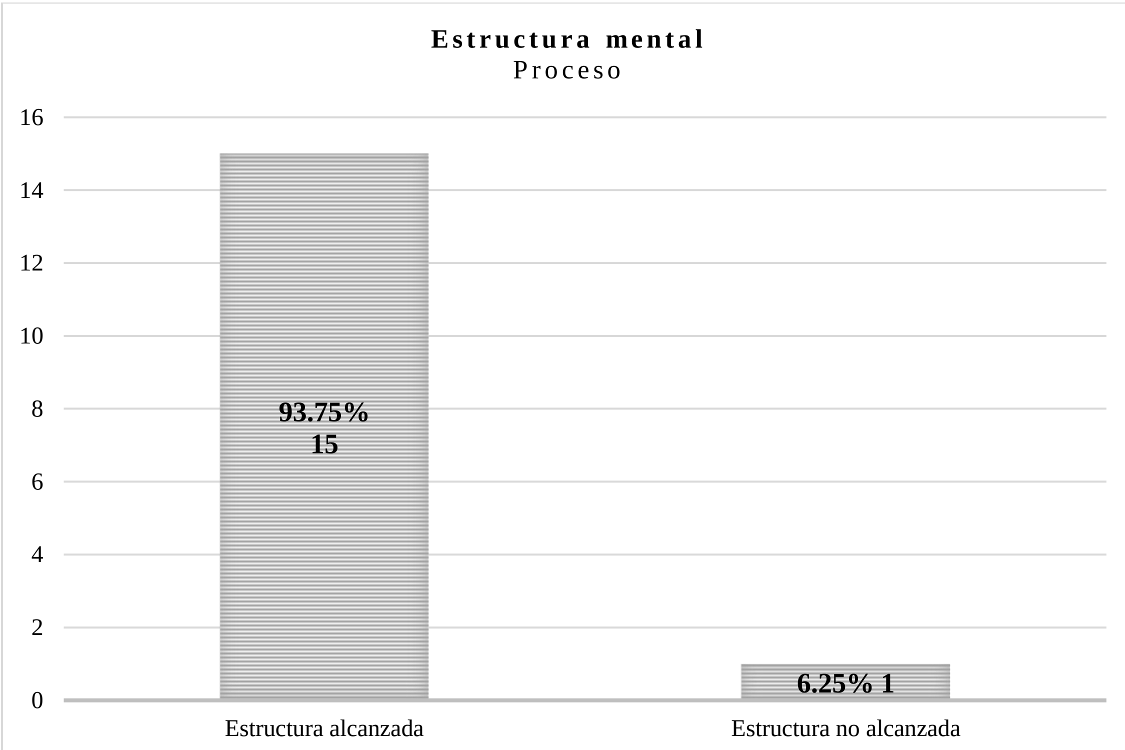
Análisis de respuestas a la pregunta 1 de Actividad 2 del cuestionario posterior a la intervención

Estudiantes	**Respuesta matemática observada**	**Práctica matemática observada**	**Estructura mental alcanzada**
E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E9, E10, E13, E14, E15, E16,	Infinitas rectas pueden ser trazadas	El estudiante observa que infinitas rectas secantes se pueden trazar a lo largo de la función presentada según el punto **2** de la DG	Proceso
E7	Más de tres rectas pueden ser trazadas	El estudiante observa el número de rectas de la figura y, a partir de ellas, brinda como respuesta un número finito de rectas mayor a la cantidad de las rectas presentadas	No presenta la estructura mental evaluada

También se evaluó el desempeño de los estudiantes, lo cual queda en evidencia en la **figura 53**.

Figura 53

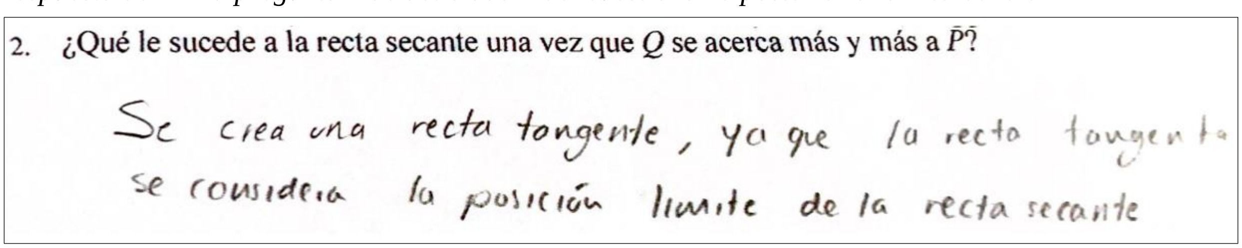
Desempeño observado dentro de pregunta 1 de la Actividad 2 del cuestionario posterior a la intervención



Para la segunda pregunta se observó que catorce de los dieciséis estudiantes encapsularon el proceso de comprender que infinitas rectas secantes pueden cortar en dos puntos cada vez más y más cercanos de una función comprendiendo que así se forma la recta tangente y mostrando una *concepción objeto* como se ejemplifica en la respuesta de E14 en la **figura 54**. La encapsulación de dicho proceso quedó en evidencia en las respuestas de la pregunta anterior.

Figura 54

Respuesta de E14 a pregunta 2 de actividad 2 del cuestionario posterior a la intervención

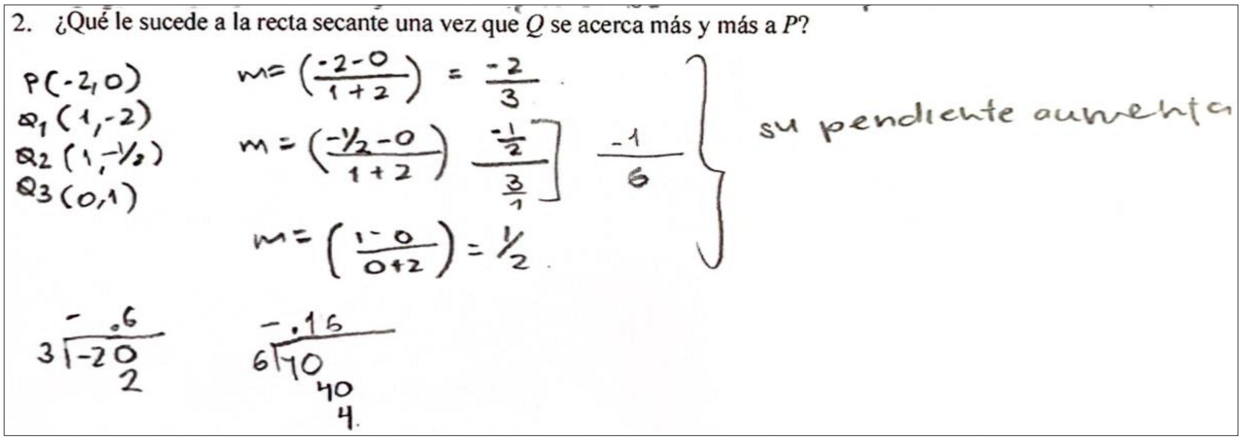

2. ¿Qué le sucede a la recta secante una vez que Q se acerca más y más a $\bar{P}$?

Se crea una recta tangente, ya que la recta tangente se considera la posición límite de la recta secante

Sin embargo, aun cuando E6 mostró la *concepción proceso* en dicha pregunta, fue el único de los quince estudiantes que no fue capaz de desarrollar la estructura proceso para pasar a una *concepción objeto* que le permita comprender la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes, pues él se enfocó, si bien en el punto *P* presentado, exclusivamente en el valor de la pendiente de la recta tangente que va aumentando a medida que corta con puntos *Q* cada vez más y más cercanos para este caso en específico sin poder argumentar que cuando los puntos de esta rectas secantes llegan a su posición límite surge una recta tangente. La respuesta de E6 se observa en la **figura 55**.

Figura 55

Respuesta de E6 a pregunta 2 de actividad 2 del cuestionario posterior a la intervención



2. ¿Qué le sucede a la recta secante una vez que Q se acerca más y más a P?

$P(-2,0)$
$Q_1(1,-2)$
$Q_2(1,-\frac{1}{2})$
$Q_3(0,1)$

$m = \left(\frac{-2-0}{1+2}\right) = \frac{-2}{3}$

$m = \left(\frac{-\frac{1}{2}-0}{1+2}\right) \quad \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{3}{1}} \quad \frac{-1}{6}$

$m = \left(\frac{1-0}{0+2}\right) = \frac{1}{2}$

su pendiente aumenta

El resto de respuesta son categorizadas en la **tabla 19** que se muestra a continuación.

Tabla 19

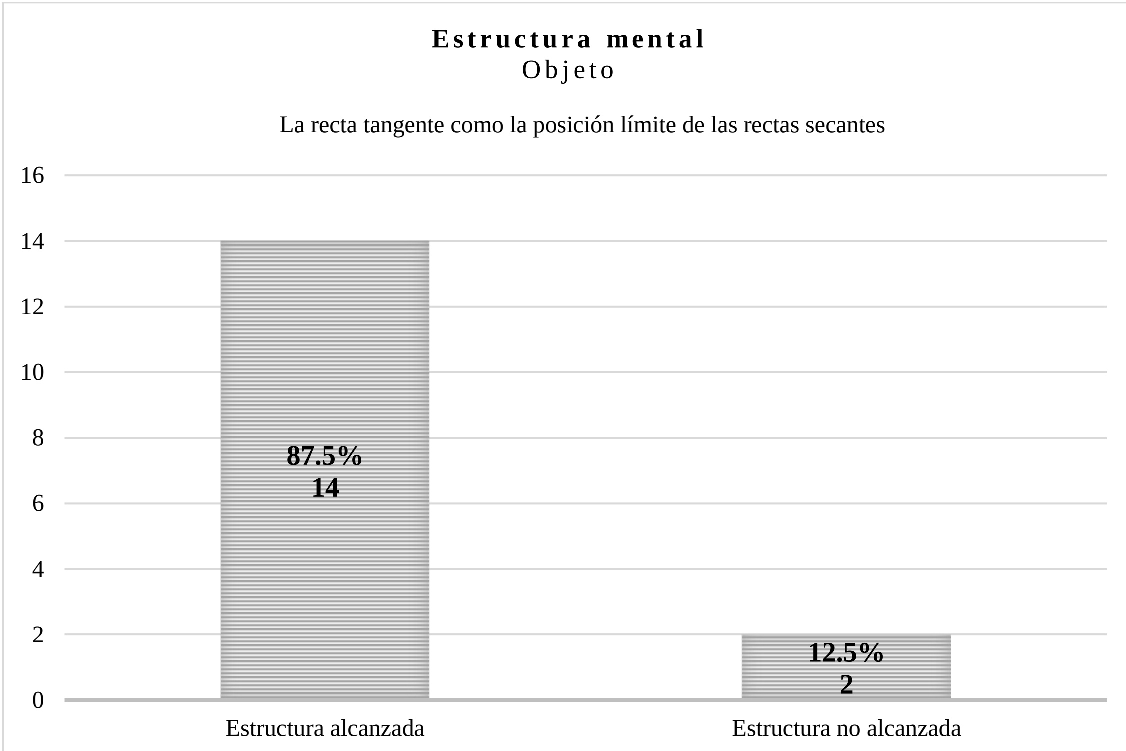
Análisis de respuestas a la pregunta 2 de Actividad 2 del cuestionario posterior a la intervención

Estudiantes	Respuesta matemática observada	Práctica matemática observada	Estructura mental alcanzada
E1, E2, E3, E4, E5, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16	La recta secante se convierte en una recta tangente	El estudiante comprende que las rectas secantes pueden cortar dos puntos cada vez más y más cercanos de una curva hasta que se produce una recta tangente de acuerdo al punto **3** de la DG	Objeto (La recta tangente como la posición límite de las rectas secantes)
E6, E7	La pendiente de la recta aumenta	El estudiante se enfoca en el punto *P* presentado, pero analiza el valor de la pendiente que se forma con puntos *Q* cada vez más y más cercanos para este caso en específico	No presenta la estructura mental en la representación evaluada

Mientras que el desempeño evidenciado por los estudiantes se muestra en la siguiente **figura 56**.

Figura 56

Desempeño observado dentro de pregunta 2 de la Actividad 2 del cuestionario posterior a la intervención



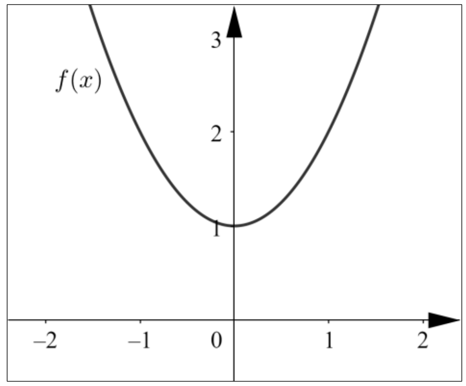
5.3.3 Actividad 3

La **figura 57** muestra la gráfica a analizar para estimar el valor de $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para $x = 0$ justificando su respuesta.

Para esta actividad se hace énfasis en analizar la capacidad del estudiante para entender el límite del cociente incremental como la derivada, pues durante el cuestionario de diagnóstico algunos estudiantes fueron más allá de calcular la pendiente de la recta tangente y relacionaron el valor de la pendiente de la recta tangente a la función como el valor de la derivada. Por lo que esta actividad busca exigir mayor demanda cognitiva que aquella del cuestionario de diagnóstico, habiendo ya reforzado las estructuras mentales necesarias a lo largo de las intervenciones.

Figura 57

Gráfica de Actividad 3 del cuestionario posterior a la intervención

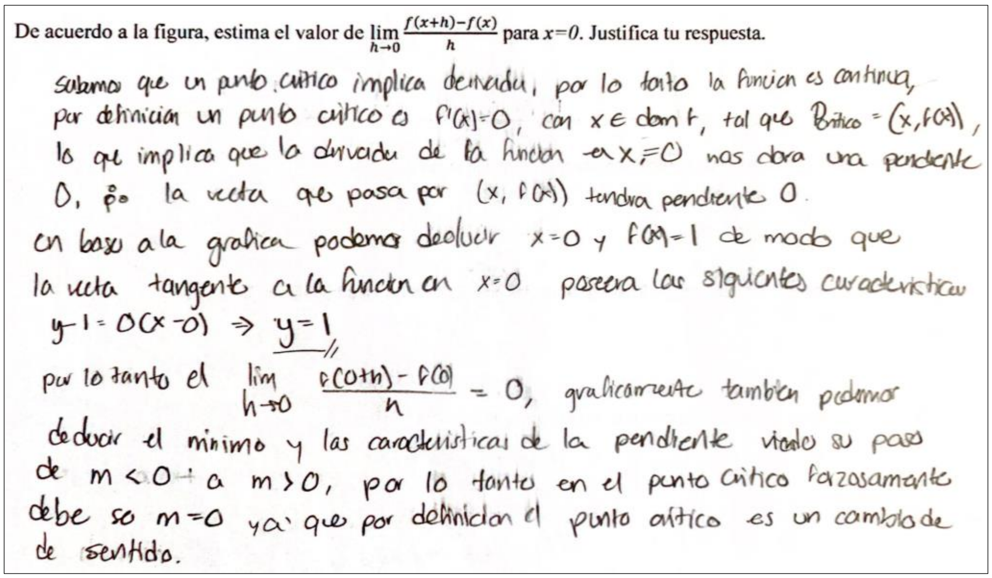


Las respuestas brindadas por los estudiantes mostraron que solo siete de ellos tienen una *concepción objeto* interpretando gráficamente la derivada como el límite del cociente incremental. Estos estudiantes, a excepción de E6, evidenciaron encapsular correctamente el proceso de que infinitas rectas tangentes pueden ser trazadas a lo largo del dominio de una función en la pregunta 1 de la actividad 2. De los siete estudiantes mencionados, cinco de ellos fueron capaces de determinar el límite del cociente incremental a partir de suponer una función *f* y trabajar con reglas de derivación que los lleve a conocer la derivada y analizarla para $x = 0$. Mientras que los dos estudiantes restantes, E13 y E16, se basan en el análisis del mínimo local observado en la figura y es observado en sus respuestas una encapsulación de la representación de la estructura objeto que permite ver la pendiente de la recta tangente como el valor de la función derivada.

En la **figura 58** podemos observar la justificación de E13, en la cual profundiza más ella partiendo de ideas, si bien correctas para el ejercicio en cuestión, erróneas en su generalización. Por ejemplo, inicia afirmando que un punto crítico implica *derivada*, donde suponemos que el estudiante se refería al término *derivabilidad*, y que esto a su vez significa que la función es continua en ese punto. Esto es correcto para la curva presentada, pero generalizar dicha idea es incorrecto, pues existen funciones que pueden no ser derivables en uno o varios de sus puntos críticos y aun así son continuas en esos puntos. Por otra parte, afirma que un punto crítico implica que $f'(x) = 0$ en ese punto, pero esto no es del todo correcto, pues un punto crítico en $x = a$ también puede implicar que $f'(a)$ no exista. Por otra parte, afirma que un punto crítico, si bien implica que la pendiente de la recta tangente es 0 en este punto, también implica un cambio de sentido, de donde se conjetura que se refiere específicamente a que una función decrece en el intervalo (a, c) y crece en el intervalo (c, b) o viceversa tomando el punto crítico como $x = c$. Sin embargo, al analizar la respuesta dejando de lado las generalizaciones, realizadas consciente o inconscientemente por el estudiante, se puede observar un conocimiento que le permite relacionar el valor de la función derivada con el de la pendiente de la recta tangente y por último con el límite del cociente incremental. Por esta razón se le atribuye la estructura mental objeto evaluada.

Figura 58

Respuesta de E13 a actividad 3 del cuestionario posterior a la intervención



De acuerdo a la figura, estima el valor de $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para $x=0$. Justifica tu respuesta.

sabemos que un punto crítico implica derivada, por lo tanto la funcion es continua, por definicion un punto critico es $f'(x)=0$, con $x \in$ dom f, tal que $P_{crítico}=(x, f(x))$, lo que implica que la derivada de la funcion en $x=0$ nos dara una pendiente 0, ∴ la recta que pasa por $(x, f(x))$ tendra pendiente 0.

en base a la grafica podemos deducir $x=0$ y $f(0)=1$ de modo que la recta tangente a la funcion en $x=0$ poseera las siguientes caracteristicas

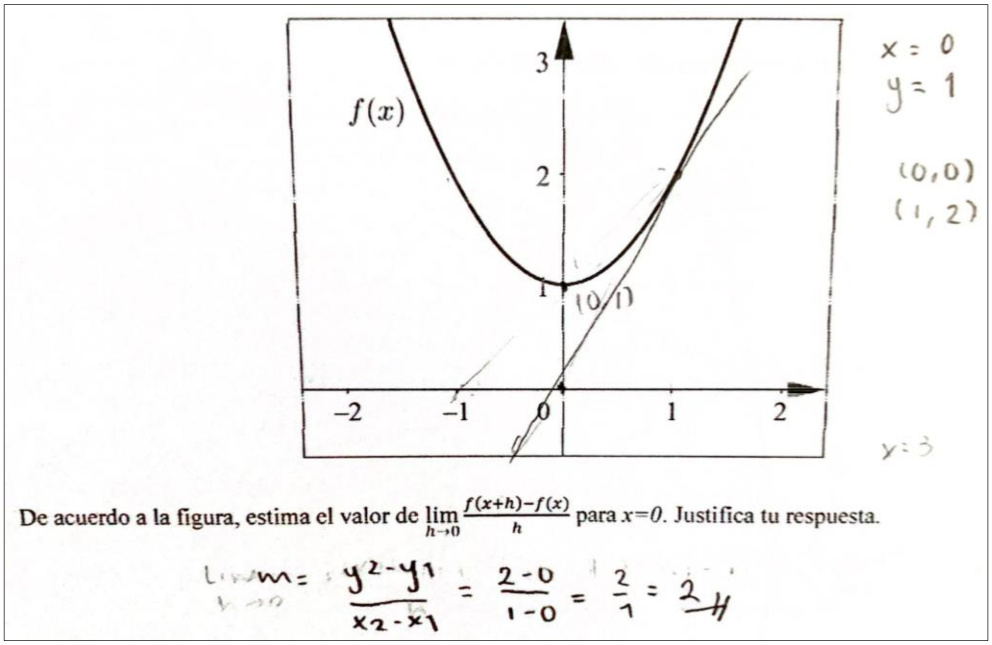
$y-1=0(x-0) \Rightarrow y=1$

por lo tanto el $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=0$, graficamente tambien podemos deducir el minimo y las caracteristicas de la pendiente viendo su paso de $m<0$ a $m>0$, por lo tanto en el punto critico forzosamente debe ser $m=0$ ya que por definicion el punto critico es un cambio de de sentido.

Se pueden observar otro tipo de respuestas, como la brindada por E10 en la **figura 59**, donde el estudiante determina una recta tangente a la curva en el punto arbitrario $(1, 2)$ y que a su vez pasa por el origen. Dicha fundamentación lo ayudaría a encontrar la respuesta solicitada, pero para $x = 1$, lo cual no es lo solicitado en la actividad.

Figura 59

Respuesta de E10 a actividad 3 del cuestionario posterior a la intervención



Al igual que la actividad 2 del presente cuestionario, esta mantiene en esencia el análisis de la estructura mental de la actividad con el mismo número del cuestionario de diagnóstico, pero con una estructura diferente para el presente cuestionario. En la **tabla 20** se puede observar la categorización de respuestas.

Tabla 20

Análisis de respuestas a Actividad 3 del cuestionario posterior a la intervención

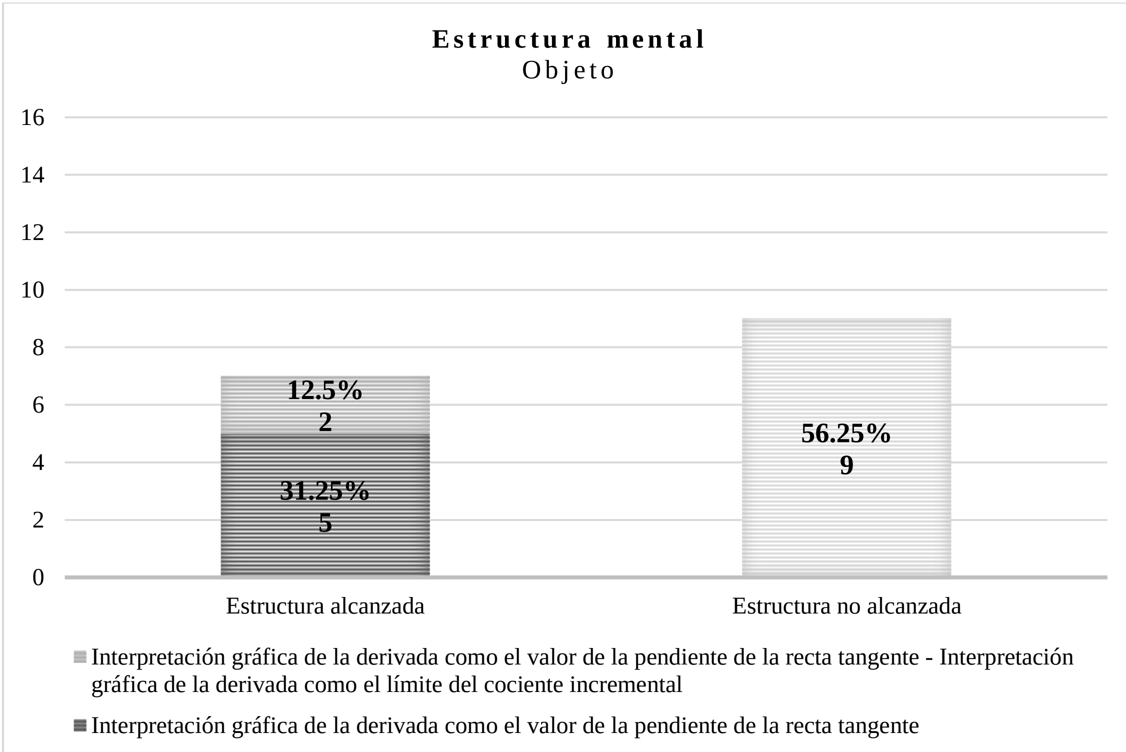
Estudiantes	**Respuesta matemática observada**	**Práctica matemática observada**	**Estructura mental alcanzada**
E13, E16	$f'(0) = 0$	El estudiante determina correctamente el valor del límite del cociente incremental para x=0 según el punto **4b**, relacionando el valor de la derivada con el valor de la pendiente de la recta tangente, de acuerdo al punto **4a** de la DG, y al mismo tiempo con el límite del cociente incremental	Objeto (Interpretación gráfica de la derivada como el límite del cociente incremental y el valor de la pendiente de la recta tangente)
E3, E4, E5, E8, E14	$f'(0) = 0$	El estudiante es capaz de determinar el límite del cociente incremental para $x = 0$ según el punto **4b** de la DG, a partir de suponer una función f y trabajar con reglas de derivación que lo lleven a conocer la derivada y analizar *f'(x)* para $x = 0$	Objeto (Interpretación gráfica de la derivada como el límite del cociente incremental)

E2, E10	$f'(0) = 2$	El estudiante brinda su respuesta a partir de la determinación de los puntos $(0, 0)$ y $(1, 2)$, cuando incluso el primero de ellos se encuentra fuera de la curva presentada. Por ello, el estudiante encuentra de manera inconsciente el valor de $f'(1) = 2$	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E6, E7, E15	$f'(0) = 1$	El estudiante sin ampliar en su justificación afirma que el límite del cociente incremental solicitado es 1	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E9	$f'(0) = 0$	El estudiante brinda la respuesta esperada, pero trabajando de manera errónea el límite del cociente incremental llegando a una indeterminación $\frac{0}{0}$ y afirmando con ello que la respuesta es 0	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E12	$f'(0) = indefinida$	El estudiante, al igual que el caso anterior, trabaja de manera errónea el límite del cociente incremental llegando a una indeterminación $\frac{0}{0}$, pero este estudiante finaliza afirmando que el valor para ese límite está indefinido	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E11	$f'(x) = 2x$	El estudiante deduce la función que representa la curva afirmando que esta es $x^2 + 1$ y trabajando algorítmicamente deduce que la derivada de la función es $2x$ sin analizar para el caso solicitado que le permitieran conocer el límite del cociente incremental en $x = 0$ y afirmando que $f'(x) = 2x$ representa la recta tangente a la función en el punto (1,2)	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E1	Sin respuesta	El estudiante no presentó respuesta alguna	No presenta la estructura mental en la representación evaluada

El desempeño general presentado por los estudiantes puede verse en la **figura 60**, la cual también caracteriza la representación de la estructura mental presentada por los estudiantes que mostraron una respuesta correcta.

Figura 60

Desempeño observado dentro de la Actividad 3 del cuestionario posterior a la intervención



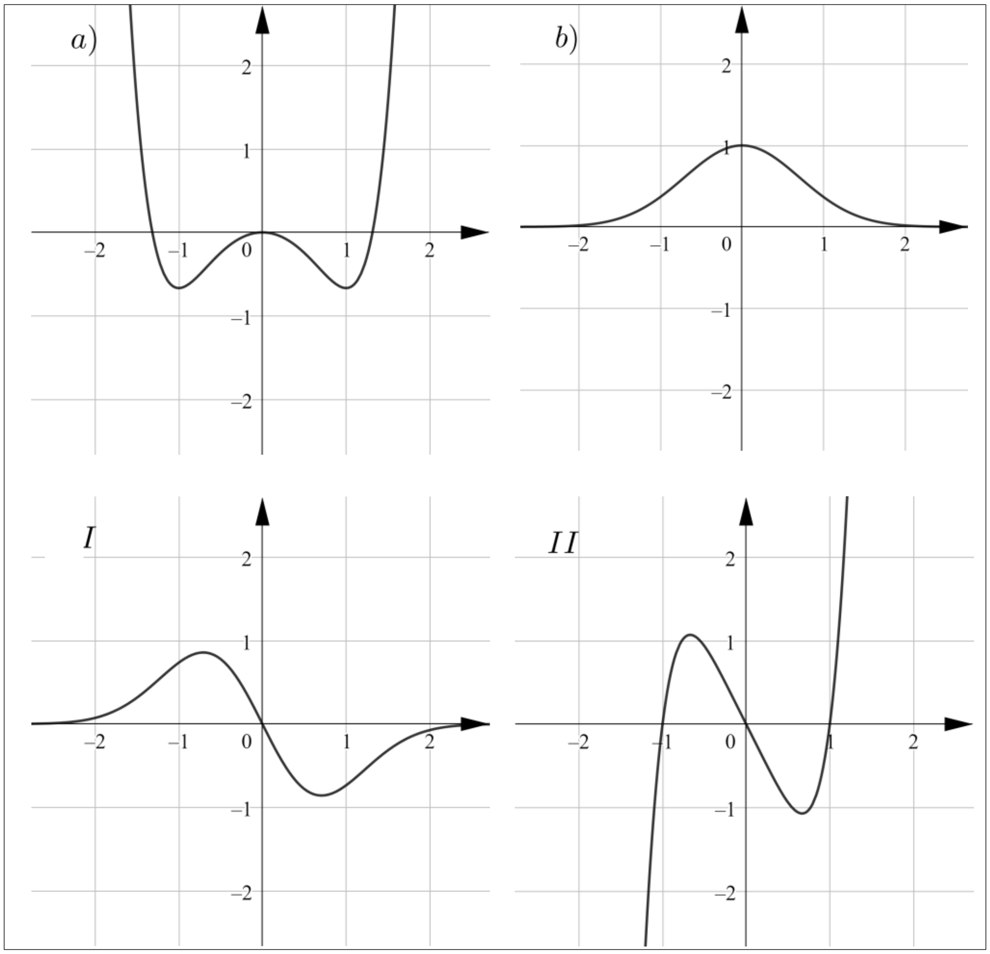
5.3.4 Actividad 4

El estudiante tiene como instrucción el analizar la gráfica de la **figura 61** y relacionar cada función dada en las figuras a) y b) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I y II justificando su respuesta.

Al igual que la actividad 2 del presente cuestionario, esta mantiene en esencia el análisis de la estructura mental de la actividad con el mismo número del cuestionario de diagnóstico, pero con una estructura diferente para el presente cuestionario.

Figura 61

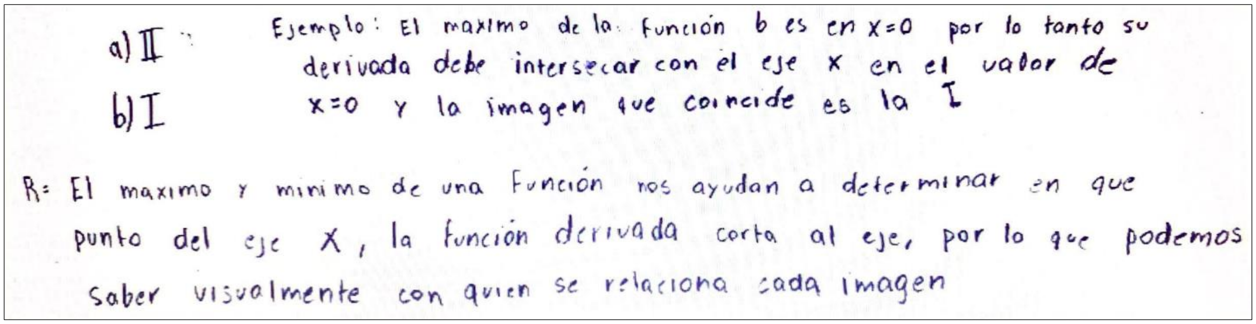
Gráfica de Actividad 4 del cuestionario posterior a la intervención



Los resultados obtenidos para la presente actividad nos muestran que once de los dieciséis estudiantes relacionaron cada función con su función derivada justificando correctamente su elección. Siete de estos once estudiantes analizaron los máximos y mínimos locales de las funciones presentadas afirmando que para esos puntos del dominio el valor de *f'(x)* es igual a 0 o compartiendo que en estos puntos la función derivada corta al eje *x*, como se observa en la **figura 62** con la respuesta de E3.

Figura 62

Respuesta de E3 a actividad 4 del cuestionario posterior a la intervención



a) II

b) I

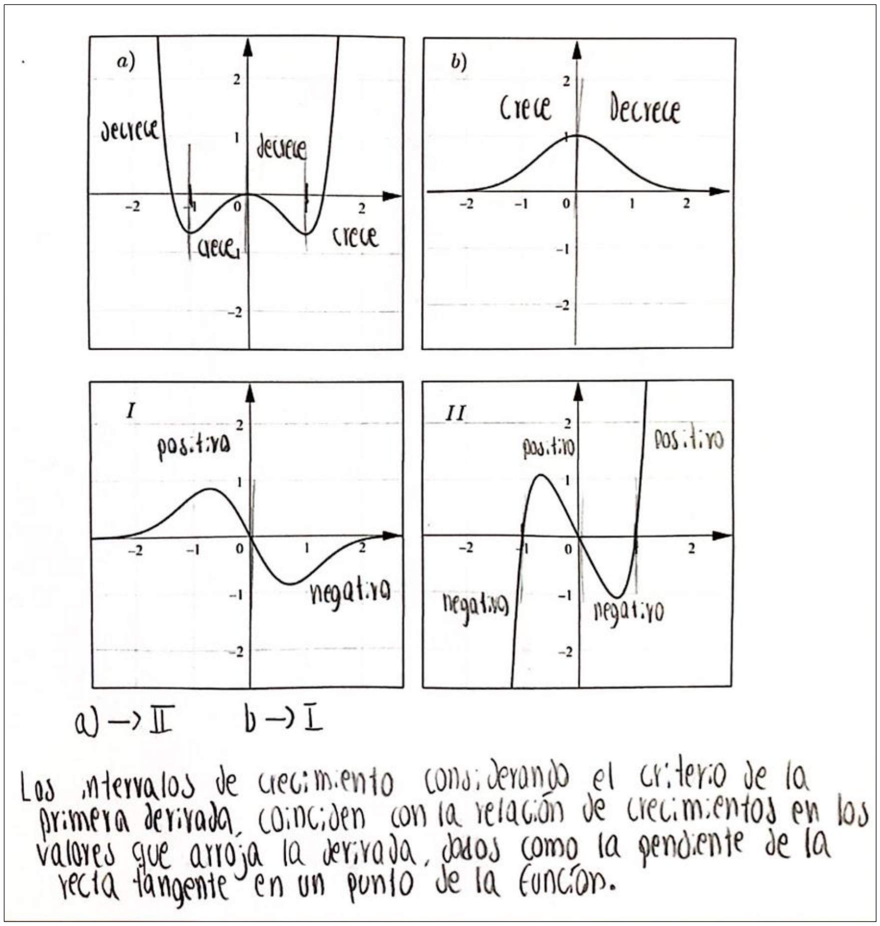
Ejemplo: El maximo de la función b es en x=0 por lo tanto su derivada debe intersecar con el eje x en el valor de x=0 y la imagen que coincide es la I

R: El maximo y minimo de una Función nos ayudan a determinar en que punto del eje X, la función derivada corta al eje, por lo que podemos saber visualmente con quien se relaciona cada imagen

Los cuatro restantes justificaron su respuesta a partir del análisis del crecimiento y decrecimiento de las funciones en diferentes intervalos y relacionaron dichos intervalos con el signo del valor de la función derivada correctamente, lo cual queda en evidencia con la respuesta de E en la **figura 63**. Esto permite asegurar que los estudiantes muestran una *concepción esquema*, aun cuando el objetivo de esta actividad era el análisis de la estructura mental objeto, al interpretar gráficamente la relación entre las funciones y sus funciones derivadas.

Figura 63

Respuesta de E16 a actividad 4 del cuestionario posterior a la intervención



En la **tabla 21** se resumen las respuestas proporcionadas por los estudiantes para la presente actividad.

Tabla 21

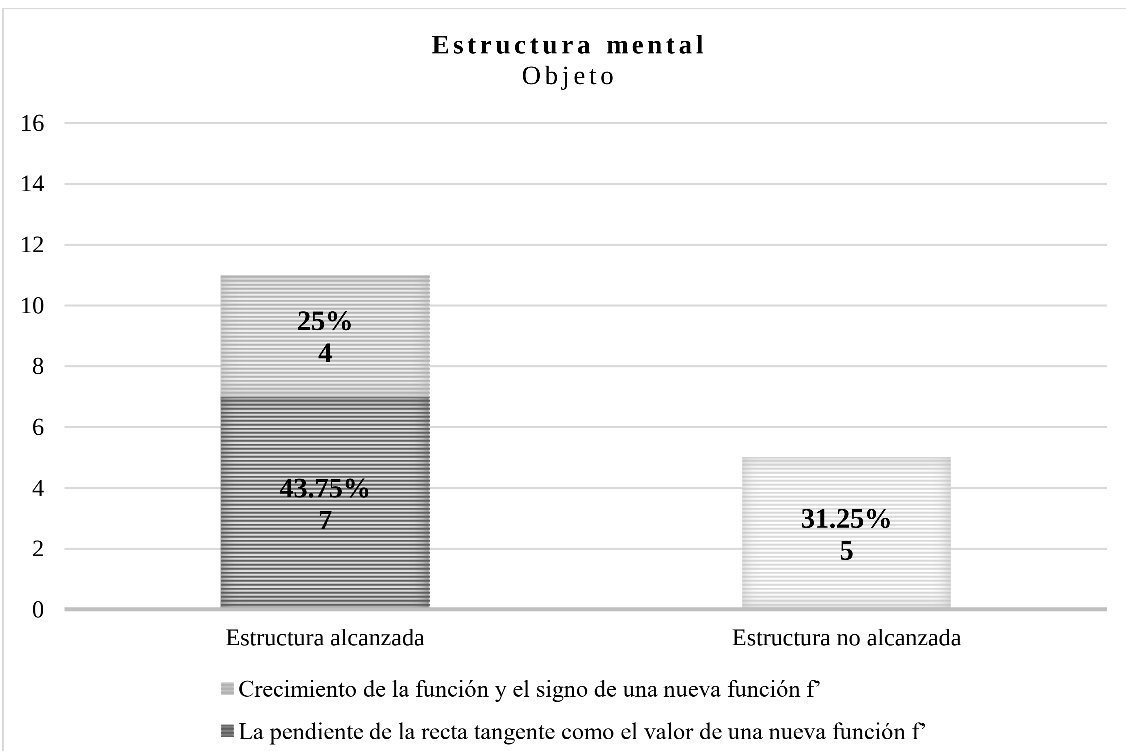
Análisis de respuestas a Actividad 4 del cuestionario posterior a la intervención

Estudiantes	**Respuesta matemática observada**	**Práctica matemática observada**	**Estructura mental alcanzada**
E1, E2, E3, E4, E6, E9, E10	a)-II b)-I	El estudiante comprende el valor de la pendiente de las rectas secantes con el de una nueva función *f'* analizando puntos críticos de la *f* según el punto **5** de la DG	Objeto (El valor de la pendiente de la recta tangente como el valor de una nueva función *f'*)
E13, E14, E15, E16	a)-II b)-I	El estudiante analiza el crecimiento y decrecimiento de las funciones presentadas y los relacionado con el signo de una nueva función *f'* según el punto **6a** de la DG	Esquema (Crecimiento de la función y el signo de una nueva función *f'*)

E5, E7, E11, E12	a)-II b)-I	El estudiante brinda su respuesta a partir de los mínimos y máximos locales de la función afirmando erróneamente que en los valores de x en los que se tiene un mínimo o máximo la función corta la función derivada en lugar de cortar al eje x	No presenta la estructura mental en la representación evaluada
E8	a)-II b)-I	El estudiante da una respuesta basándose en los grados de una función polinómica aun cuando la función en b) no es de este tipo	No presenta la estructura mental en la representación evaluada

Mientras que en la **figura 64** podemos observar el desempeño presentado y las representaciones de las estructuras mentales utilizadas por los estudiantes que alcanzaron la estructura mental.

Figura 64
Desempeño observado dentro de la Actividad 4 del cuestionario posterior a la intervención



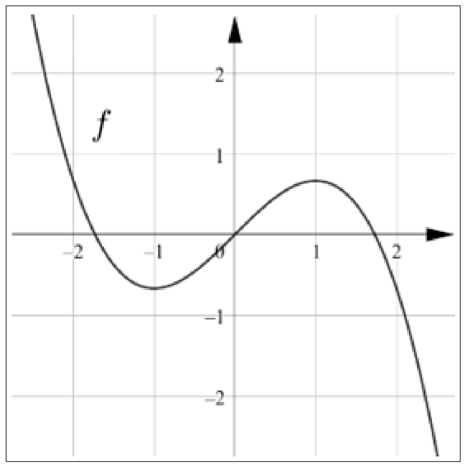
5.3.5 Actividad 5

El estudiante debe analizar la **figura 65** que muestra la gráfica de la función f y utilizarla para dibujar un boceto de la gráfica de la función derivada f' justificando su respuesta.

Para esta actividad se espera que el estudiante, al momento de interpretar gráficamente las relaciones entre una función y su derivada, sea capaz de realizar este estudio sin importar cuál de las dos curvas se le presente. Por ejemplo, en el cuestionario de diagnóstico se le presentó la función derivada y a partir de ella tenía que compartir el crecimiento y decrecimiento de la función original. Para este caso tiene que realizar un bosquejo de la función derivada a partir de la función original presentada habiendo ya sido participe de las intervenciones realizadas con ayuda del ciclo ACE.

Figura 65

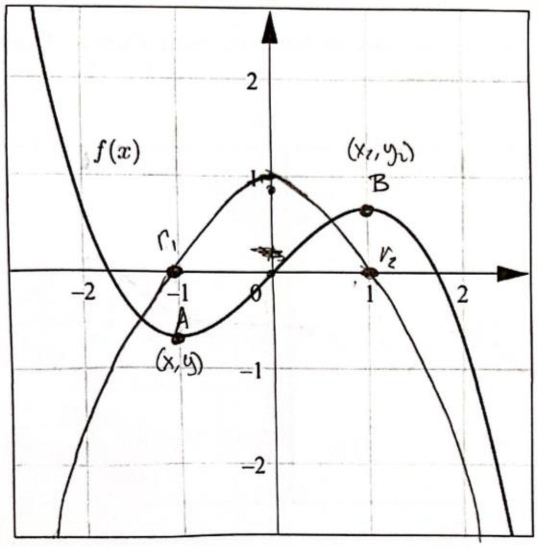
Gráfica de Actividad 5 del cuestionario posterior a la intervención



Al igual que para la última actividad del cuestionario de diagnóstico, para la presente actividad era necesario que los estudiantes se ayudaran del proceso y los objetos trabajados en las actividades anteriores junto sus respectivos mecanismos mentales. Esto trajo como resultado que catorce de los dieciséis estudiantes lograran bosquejar la función *f'* solicitada analizando su relación con la función *f*, mostrando así la *concepción esquema* esperada en su representación del bosquejo de una gráfica representativa analizando las relaciones entre *f* y *f'*. Sin embargo, estos catorce estudiantes muestran justificaciones diferentes, como por ejemplo la respuesta de E13 mostrada en la **figura 66** donde justifica su respuesta a través de la relación entre el crecimiento y decrecimiento de *f* y el signo de *f'* o aquella brindada por E5 en la **figura 67** donde fundamenta su respuesta analizando puntos críticos y la relación de estos con el valor de *f'*.

Figura 66

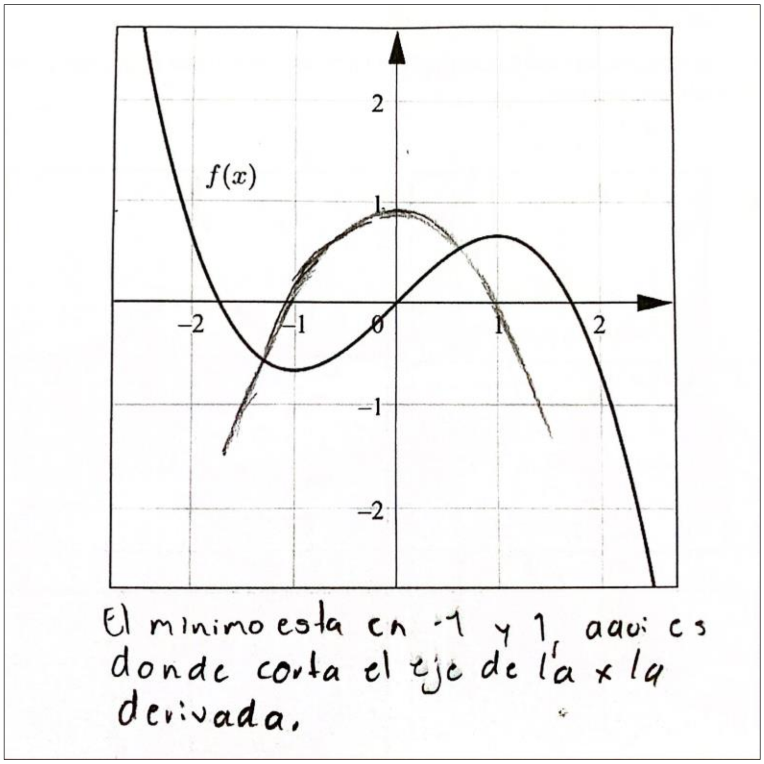
Respuesta de E13 a actividad 5 del cuestionario posterior a la intervención



observamos maximos y minimo relativos en A y B con (x, y) y (x_2, y_2) respectivamente, por lo que por definicion $f'(x)$ y $f'(x_2) = 0$ lo que significa que son raices de $f'(x)$ cortando al eje x. en r_1 y r_2 respectivamente.
Observamos un punto de concavidad en $x=0$ que es donde cambia de dirección por lo tanto $f''(0)=0$ lo que genera un punto critico en $x=0$ para $f''(x)$, y finalmente por la pendiente observamos que la funcion decrece para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ por lo que $f'(x) < 0$ de $(-\infty, -1)$ y de $(1, \infty)$ lo que implica que se encuentran por debajo del eje x.
Y por el contrario crece de $(-1, 1)$ que es donde $f'(x) > 0$ y se encuentra por encima del eje x.

Figura 67

Respuesta de E5 a actividad 5 del cuestionario posterior a la intervención



En la **tabla 22** se puede observar la categorización de las respuestas brindadas por los estudiantes.

Tabla 22

Análisis de respuestas a Actividad 5 del cuestionario posterior a la intervención

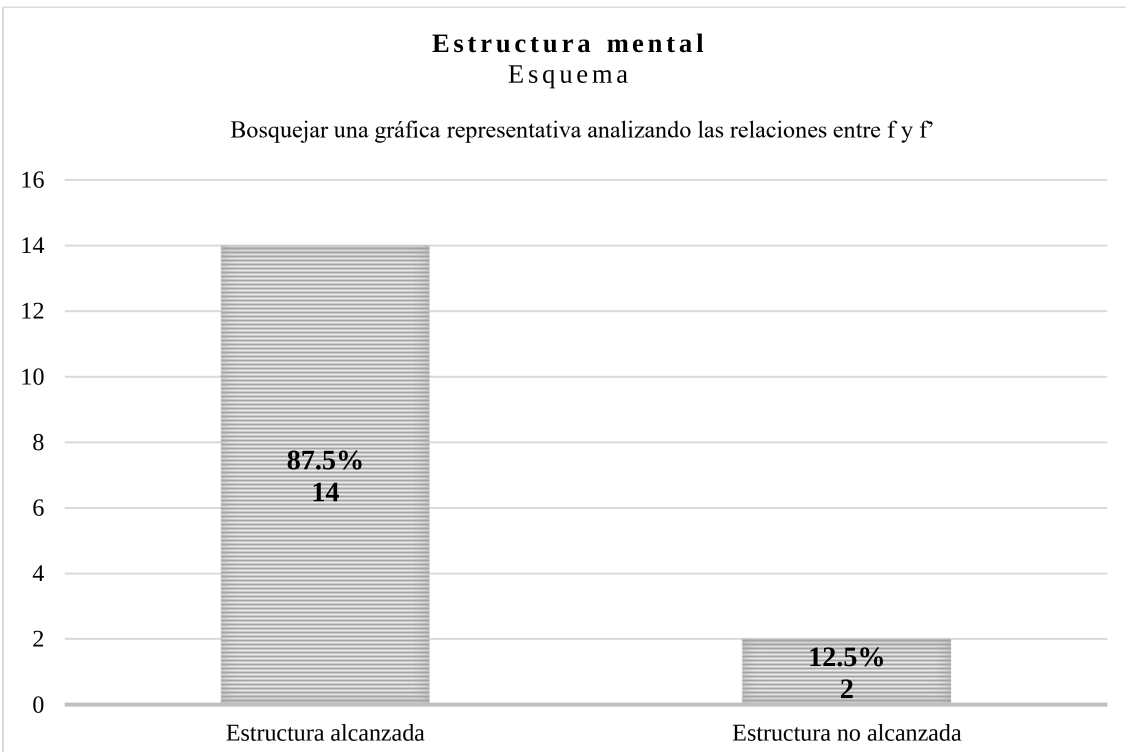
Estudiantes	Respuesta matemática observada	Práctica matemática observada	Estructura mental alcanzada (Representación)
E1, E13, E15, E16	Gráfica semejante a *f'* esperada	El estudiante es capaz de bosquejar una función semejante a la solicitada según el punto **6b** y justifica su respuesta a través del análisis de la relación entre el crecimiento y decrecimiento de *f* y el signo de *f'*	Esquema (Bosquejo de una gráfica representativa analizando las relaciones entre *f* y *f'*)
E3, E4, E5, E9, E10, E11, E12, E14,	Gráfica semejante a *f'* esperada	El estudiante es capaz de bosquejar una función semejante a la solicitada según el punto **6b** y justifica su respuesta solamente a través del análisis de la relación de los puntos críticos y el signo del valor de *f'*	
E2, E6, E11	Gráfica semejante a *f'* esperada	El estudiante es capaz de bosquejar una función semejante a la solicitada	

		según el punto **6b**, pero omite dar una justificación	
E7, E8	Gráfica erróneamente bosquejada	El estudiante analiza diversos puntos de *f* y determina de manera incorrecta los valores de *f'*	Sin estructura mental

A continuación, en la **figura 68**, se puede observar el desempeño mostrado por los estudiantes en esta última actividad.

Figura 68

Desempeño observado dentro de la Actividad 5 del cuestionario posterior a la intervención



5.4 Discusión de resultados del cuestionario posterior a la intervención

Estos resultados en general difieren con las investigaciones de Amaro (2020), Pereyra & Herrera (2020) y Rodríguez et al. (2019) mencionadas en la **sección 5.2** debido a que dentro de las respuestas del presente cuestionario se observó que gran parte de los estudiantes fueron capaces no solo de mostrar una *concepción acción* y *proceso*, sino que también desarrollaron dichas concepciones y construyeron la estructura mental objeto y esquema.

La ayuda de la enseñanza digital empleada en el ciclo ACE puede fungir como factor de la mejoría en la construcción del concepto de la derivada en su representación gráfica, por lo que se coincide con las conclusiones realizadas por Ballesteros-Ballesteros et al. (2022), Rojas (2020) y Ruiz et al. (2018) dentro de sus investigaciones, en las cuales se afirma que con el uso de la tecnología dentro de las aulas se puede ampliar la comprensión visual y dinámica de los diferentes conceptos matemáticos.

5.5 Comparación de resultados entre ambos cuestionarios

A continuación se analizan las respuestas que proporcionaron los estudiantes a cada una de las actividades y se compararan los resultados obtenidos en ambos cuestionarios.

Para realizar dicha comparación es importante primero poder analizar el desempeño de los dieciséis estudiantes con ayuda de la **tabla 23**, la cual muestra el número de estudiantes que alcanzaron la estructura mental esperada para cada actividad del cuestionario de diagnóstico.

Tabla 23
Frecuencia y porcentaje de estructura mental alcanzada por actividad del cuestionario diagnóstico

Actividad	Estructura mental	Representación esperada	Frecuencia	%
1	Acción	Trazado de la recta secante y el cálculo de su pendiente	10	62.5
2.1	Proceso	Los puntos que forman rectas secantes se acercan más y más	10	62.5
2.2	Objeto	La recta tangente como la posición límite de las rectas secantes	2	12.5
3	Objeto	Cálculo de la pendiente de la recta tangente	16	100
4	Objeto	La pendiente de la recta tangente como el valor de una nueva función *f’*	3	18.75
5	Esquema	Crecimiento de la función y el signo de su derivada	4	25

Por otra parte, la caracterización del nivel de estructura mental inicial manejado por los estudiantes trae como resultado las siguientes observaciones importantes:

- En la actividad 1 se puede percatar que solamente un poco más de la mitad de los estudiantes analizados son capaces de calcular la pendiente de una recta secante. Al estar analizando respuestas de estudiantes universitarios, incluso con el curso de cálculo diferencial ya cursado, se esperaba que la mayoría de los dieciséis estudiantes fueran capaces de realizar este cálculo.

- Dentro de la actividad 3 la totalidad de los estudiantes muestran una *concepción objeto* con diferentes justificaciones. Por ejemplo, aun cuando siete de los dieciséis estudiantes muestran la práctica esperada calculando la pendiente de la recta tangente haciendo uso de los puntos presentados en la actividad, otros ocho estudiantes no siguen dicha práctica y hacen uso de reglas de derivación para trabajar la función explícitamente presentada en las instrucciones y así relacionar el valor de la derivada analizada en el x en cuestión con la pendiente de la recta tangente. Mientras el estudiante restante compartió como respuesta la función derivada sin realizar ninguna serie de pasos y sin analizar su valor para el x en cuestión. Esto nos permite ver que, a pesar de que la actividad mostraba el calcular la pendiente de la recta tangente con los puntos presentados como el camino a seguir, el uso de mecanizaciones algorítmicas predomina en la mente de una gran parte de los estudiantes.
- Las respuestas obtenidas en la actividad 4 nos dejan ver que, aun cuando se esperaba que los estudiantes comprendieran la pendiente de la recta tangente como el valor de una nueva función f' analizando uno o varios puntos del dominio presentado en la gráfica y así seleccionar correctamente su respuesta, fueron más allá de solo analizar los puntos y trabajaron el crecimiento y decrecimiento de la función en diferentes intervalos y lo relacionaron con el signo del valor de la función derivada. Por esto se observa que los estudiantes pueden mostrar justificaciones más abstractas a las esperadas dependiendo de su capacidad para afrontar una mayor demanda cognitiva a la afrontada en uno u otro ejercicio.
- Solamente un estudiante de los dieciséis analizados alcanza la estructura mental en cada una de las actividades del cuestionario diagnóstico, dejando en evidencia la amplia construcción del concepto de derivada en su representación gráfica.

Después de realizar la intervención con ayuda del ciclo ACE generado se evalúan las estructuras mentales que el grupo de estudiantes logró construir, las cuales se pueden observar en la **tabla 24**.

Tabla 24

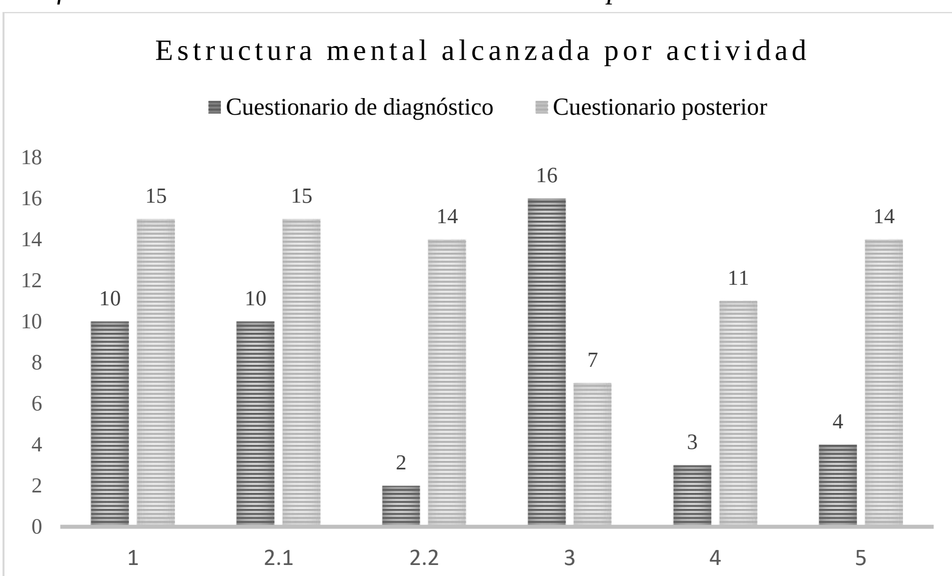
Frecuencia y porcentaje de estructura mental alcanzada por actividad del cuestionario posterior la intervención

Actividad	Estructura mental	Representación esperada	Frecuencia	%
1	Acción	Trazado de la recta secante y el cálculo de su pendiente	15	93.75

2.1	Proceso	Los puntos que forman rectas secantes se acercan más y más	15	93.75
2.2	Objeto	La recta tangente como la posición límite de las rectas secantes	14	87.5
3	Objeto	Interpretación gráfica de la derivada como el límite del cociente incremental	7	43.75
4	Objeto	La pendiente de la recta tangente como el valor de una nueva función *f'*	11	68.75
5	Esquema	Bosquejo de una gráfica representativa analizando las relaciones entre *f* y *f'*	14	87.5

Esto permite observar mejoras en la mayoría de las actividades del cuestionario posterior a esta intervención en comparación con el cuestionario de diagnóstico como se puede observar en la **figura 69**.

Figura 69
Comparativo de frecuencias de la estructura mental alcanzada por actividad en ambos cuestionarios



Las respuestas analizadas dentro del cuestionario posterior a la intervención y su comparación con los resultados obtenidos en el cuestionario de diagnóstico traen las siguientes comparaciones importantes:

- Los resultados de la actividad 1 del cuestionario posterior a la intervención nos muestran una gran mejoría en el desempeño observado, pasando de ser diez a quince estudiantes quienes expusieron una *concepción acción* al contar con la capacidad de comprender el trazado de una recta secante y calcular su pendiente.

- Los mismos quince estudiantes que mostraron una *concepción acción* en la actividad 1 muestran una *concepción proceso* en la pregunta 1 de la actividad 2, exponiendo la habilidad de comprender que infinitas rectas secantes pueden ser trazadas a lo largo de la curva mostrada. Es una mejora evidente en comparación con los diez estudiantes que mostraron dicha habilidad en el cuestionario de diagnóstico.
- El hecho de que los mismos quince estudiantes mostraran una *concepción acción* y una *concepción proceso* en el cuestionario posterior a la intervención genera una base idónea para la construcción de la estructura mental objeto en sus diferentes representaciones. Por ejemplo, para la segunda pregunta de la actividad 2 solamente un estudiante de los quince anteriormente mencionados no mostró una *concepción objeto* al no exponer la capacidad de comprender la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes. Sin embargo, se observa una gran mejoría en comparación con el cuestionario de diagnóstico, pues pasan de ser solamente dos a catorce estudiantes quienes comprenden la definición de la recta tangente en su interpretación gráfica y muestran así la *concepción objeto* en esta representación evaluada.
- Los resultados anteriores, en los cuales se observa una evidente mejoría, difieren con los estudiados en la actividad 3, pues durante el cuestionario de diagnóstico los dieciséis estudiantes alcanzaron la estructura mental objeto en comparación con los siete estudiantes que la alcanzan en este cuestionario posterior, estos estudiantes mencionados forman parte de los quince que muestran una estructura acción y proceso en actividades anteriores. Una posible razón para que esta disminución del desempeño ocurriera en el cuestionario posterior es el cambio en la demanda cognitiva para la actividad 3 en comparación con aquella del mismo número del cuestionario anterior. En el cuestionario de diagnóstico una gran parte de los estudiantes fue capaz de calcular la pendiente de la recta tangente como se esperaba y otra gran parte fue más allá y relacionó este valor con el valor de la derivada. Por esta razón, durante la intervención se reforzó la comprensión de la relación de la derivada con la pendiente de la recta tangente y se añadió su relación con el límite del cociente incremental. Sin embargo, los resultados muestran que aun cuando una gran parte de los estudiantes comprende el valor de la derivada como la pendiente de la recta tangente,

como dejaron en evidencia en el cuestionario de diagnóstico, solamente dos de ellos tuvo la capacidad de extrapolar esta relación con el límite del cociente incremental, mientras que los cinco restantes interpretaron directamente el valor de la derivada como el límite del cociente incremental.

- De los quince estudiantes que expusieron tener una buena base construida desde las estructuras mentales acción y proceso, once de ellos alcanzan la estructura mental objeto dentro de la actividad 4 del cuestionario posterior a la intervención. La justificación de siete de ellos viene desde el análisis de puntos críticos de las funciones presentadas y la relación que encuentran con los valores de las funciones derivadas, la cual era la justificación esperada. Por otra parte, los cuatro estudiantes restantes observan en qué intervalos las funciones crecen y decrecen y lo relacionan con el valor del signo de la función derivada evidenciando así una estructura mental esquema. Por ello se observa que los estudiantes muestran diferentes estructuras mentales, pero queda en evidencia que sus resultados son mejores a los del cuestionario de diagnóstico donde solo tres estudiantes mostraron la estructura mental objeto evaluada en la actividad 4.
- De igual manera, de ese grupo de quince estudiantes que mostraron una estructura mental acción y proceso, solamente uno de ellos no fue capaz de bosquejar correctamente la gráfica solicitada durante la actividad 5 del cuestionario posterior a la intervención. Además, aun cuando para esta actividad se aumentó la demanda cognitiva para su resolución en comparación con el mismo número de actividad del cuestionario de diagnóstico, se observó una mejora en el desempeño presentado por los estudiantes, pues pasaron de ser cuatro a catorce estudiantes quienes muestran una estructura mental esquema en la actividad señalada. Esto difiere con la comparación de los resultados de ambos cuestionarios para la actividad 3, ya que al subir la demanda cognitiva en el cuestionario posterior el desempeño se vio afectado de manera considerable.
- Cinco estudiantes de los dieciséis que formaron parte del estudio alcanzaron la estructura mental evaluada en todas las actividades del cuestionario dejando así plasmado que hubo una alza en el número de estudiantes que dejan en evidencia la amplia construcción del concepto en su representación gráfica, pues dentro del cuestionario de diagnóstico solo un estudiante logró dicha construcción.

Capítulo 6. Conclusiones

Para el presente capítulo se categoriza una serie de conclusiones importantes observadas a lo largo del trabajo de investigación.

6.1 Conclusiones sobre los resultados de los cuestionarios

A lo largo de la investigación se ha caracterizado el conocimiento sobre el concepto de derivada en estudiantes universitarios. Dicha caracterización fue lograda con ayuda de los cuestionarios aplicados, los cuales fueron diseñados desde la descomposición genética formada para el presente trabajo de investigación.

Con los resultados del cuestionario de diagnóstico se ha exhibido cómo los algoritmos algebraicos son insuficientes para enfrentar ejercicios conceptuales que van más allá de la utilización de reglas y/o fórmulas para resolverlos, pues para ello es necesario comprender la representación gráfica del concepto. Esto se fundamenta con las respuestas presentadas por los estudiantes para la actividad 1, en la cual la práctica matemática se caracteriza por el uso de fórmulas, y para la actividad 3 y la actividad 4, las cuales son actividades donde algunos de los estudiantes evidenciaron necesitar de una expresión simbólica que represente a la función presentada gráficamente para llegar a una respuesta. En estas actividades se observó un mejor desempeño en contraste con aquellas en donde las respuestas de los estudiantes mostraban prácticas matemáticas apegadas al contexto gráfico y ajenas al aspecto algorítmico, como lo fueron la actividad 2 y actividad 5. Resultados como estos solo evidencian que sigue vigente el tratamiento algorítmico que se le da al concepto de derivada en los salones de clases.

La práctica de la utilización de fórmulas mejora en aquellas actividades donde podría ser necesario su uso como lo puede ser la actividad 1, mientras que la determinación de una expresión simbólica para una curva como práctica matemática evidenciada por los estudiantes es mínima para la actividad 3 y no se presenta en las respuestas para las actividades restantes en el cuestionario posterior a la intervención dentro del aula. En lugar de esto las respuestas presentadas por los estudiantes muestran la construcción del concepto de derivada de manera más orgánica relacionando conocimientos necesarios con el aspecto gráfico de las actividades. Esto se sustenta en que la mayoría de los estudiantes presentan prácticas matemáticas idóneas para aquellas actividades en las que, de acuerdo a la descomposición genética utilizada, se requiere una mayor demanda cognitiva. Por ejemplo, los estudiantes evidenciaron ser capaces de no solo relacionar una función con su función derivada en un contexto gráfico, sino también de ser capaces de bosquejar una gráfica representativa analizando las relaciones entre f y f', ya sea a partir de la observación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento o de los puntos críticos de f. Todo esto sin necesidad alguna de realizar una práctica matemática relacionada a un algoritmo algebraico.

6.2 Conclusiones sobre el planteamiento del problema

El concepto de derivada ha sido ampliamente investigado, ya sea analizando la comprensión presentada por los estudiantes o estudiando el conocimiento presentando por profesores que enseñan el concepto dentro de las aulas. En una gran cantidad de las investigaciones concluyen que los estudiantes son buenos memorizando definiciones y formulas, lo cual es una gran base con la cual trabajar para así poder a pasar a otro tipo de representación fuera de las memorizaciones. Esto queda en evidencia en el presente trabajo, pues una gran parte de los estudiantes que buscaron resolver las actividades en las cuales veían oportunidad de realizar algoritmos demostraron un buen desempeño. La problemática radica cuando el estudiante debe establecer una relación entre los enfoques algorítmicos y gráficos, lo cual también se pudo observar en las débiles justificaciones o en la falta de las mismas en las respuestas mayormente en el cuestionario de diagnóstico.

Por esto, y por todo lo mencionado anteriormente en el presente trabajo, nació la pregunta de investigación: *¿Cuál es el proceso de construcción mental del concepto de derivada en estudiantes universitarios?* Respecto a esta pregunta, es importante recalcar que analizar la construcción y/o la reconstrucción de las estructuras mentales que presentan estudiantes universitarios al enfrentar ejercicios en un contexto gráfico brindó información importante para caracterizar estas estructuras. Esto fundamentado desde poder determinar si los estudiantes alcanzaron los niveles de concepción deseados y analizando cada una de sus justificaciones. A partir del análisis de los resultados, y enfocados solamente en el cuestionario posterior a la intervención para resumir los hallazgos, se observa que quince (93.75 %) de los estudiantes mostraron una *concepción acción* en la actividad 1. Además, esos mismos quince estudiantes mostraron una *concepción proceso* en la pregunta 1 de la actividad 2, mientras que catorce (87.5 %) de ellos alcanzaron la *concepción objeto* en al menos una de las actividades que analizaban esta estructura mental. De igual manera, el mismo porcentaje de estudiantes (87.5 %) evidenció la *concepción esquema*.

De manera general se observó que 5 de los 18 estudiante lograron la construcción completa del concepto evidenciando conocimiento en las 5 actividades relacionadas a algunos de los puntos mencionados, mientras que 12 de los 13 restantes mostraron una construcción parcial. Por lo que es importante recordar a grandes rasgos el proceso de construcción del concepto que nace desde la descomposición genética determinada para esta investigación: 1) Trazado de una recta secante y el cálculo de su pendiente, 2) Observar que puntos por los cuales se trazan rectas secantes puede estar más y más cerca, 3) La recta tangente como la posición límite de las rectas secantes, 4) Interpretación gráfica de la derivada, 5) El valor de la pendiente de la recta tangente como el valor de una nueva función *f'* **y** 6) Relación entre *f* y *f'*.

6.3 Aportes relacionados a la docencia

Es relevante mencionar que se espera que el presente trabajo escrito sea útil para que se promocione dentro del profesorado el análisis general del concepto de derivada presentando a los estudiantes las representaciones en las que suelen presentarse un cierto grupo de conceptos matemáticos: la algorítmica y la gráfica. En otras palabras, un trabajo de este tipo busca incrementar el uso de las representaciones visuales en los salones del aula para una enseñanza integra de las matemáticas.

Asimismo, se entiende que este trabajo de investigación puede ser de gran ayuda para la didáctica, pues podría ayudar a mejorar la capacidad de anticipación en profesores al momento de trabajar en clases con el enfoque gráfico del concepto de derivada. Esta anticipación puede estar ligada al uso de la tecnología dentro de las aulas como se muestra en el presente trabajo, el cual crea como producto los applets de *GeoGebra* presentados en el escrito. Es importante recordar que el objetivo de estos era permitir al estudiante visualizar el concepto de derivada desde su representación gráfica y mejorar en ciertos aspectos la construcción de dicho concepto en los estudiantes.

Una recomendación nacida de esto es la de realizar una secuencia con ejercicios conceptuales sobre el concepto en su representación gráfica guiada en donde la resolución sea a la par del uso de representaciones visuales con ayuda de la tecnología de manera personal para cada estudiante y con mínima intervención del docente.

6.4 Líneas de investigación abiertas, limitaciones y estudios futuros

Respecto a la investigación, es importante recordar que en gran parte de los trabajos realizados desde la teoría APOE no hay un seguimiento en los estudiantes participantes una vez analizadas las estructuras mentales que presentan en un único cuestionario dentro de la investigación. Por ello, este trabajo contribuye a las líneas de investigación de diferentes conceptos matemáticos relacionadas a la teoría APOE mostrando cómo se desarrolla el conocimiento de un concepto con una intervención desarrollada a partir del ciclo ACE proporcionado por la misma teoría.

Una de las limitaciones del estudio estuvo relacionado al tiempo para la aplicaciones de los cuestionarios y la intervención en el aula, por lo que no fue posible realizar en cada una de sus etapas, omitiendo aquella ligada a las discusiones en clase. Por lo que la implementación completa del ciclo puede ser un aspecto de mejora para futuras investigaciones.

Por último, el presente trabajo deja la puerta abierta para refinar la descomposición genética presentada y añadir en esta puntos que describan la estructura esquema en futuros estudios. Así, de esta manera no solo analizar las estructuras acción, proceso y objeto con ayuda de ejercicios conceptuales, sino exigir del estudiante el poder enfrentarse con problemas de aplicación relacionados al concepto de derivada que puedan estudiar la estructura mental esquema, tal y como los que suelen presentarse en clases universitarias de cálculo. Además, en futuras investigaciones se pueden incluir actividades con gráficas de funciones que no sean derivables en todo su dominio con el fin de que el conocimiento sea aún más amplio por parte de los estudiantes universitarios respecto al concepto de derivada.

Referencias bibliográficas

Amaro, G. (2020). *Análisis de la construcción de derivada en profesores de matemáticas de nivel medio superior basado en la Teoría APOE.* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP. https://repositorioinstitucional.buap.mx/handle/20.500.12371/11585

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. In *APOS Theory*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6_4

Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97–140). Grupo Editorial Iberoamérica. https://repositorio.uniandes.edu.co/handle/1992/40560

Asiala, M., Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II: Issues in Mathematics Education* (p. 32). American Mathematical Society.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399–431. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8

Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia: "la derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física." *TDX (Tesis Doctorals En Xarxa)*, 126.

Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *29*(2), 191–206.

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557–578.

Ballesteros-Ballesteros, V., López Torres, C. A., Torres Rodríguez, M. R., & Lozano-Forero, S. (2022). La integración de dispositivos móviles en el aula para la enseñanza del álgebra: el caso de la función lineal. *Educación y Humanismo*, *24*(42). https://doi.org/10.17081/EDUHUM.24.42.4044

Bower, G., & Hilgard, E. (1989). *Teorías del aprendizaje* (2nd.). Trillas.

Briceño, E., Hernández, J., & Espino, A. (2018). Análisis de la comprensión de la derivada desde el enfoque gráfico en estudiantes de nivel superior. *El Cálculo y Su Enseñanza, Enseñanza de Las Ciencias y La Matemática*, *10*, 31–47.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In *Epistemological Foundations of Mathematical Experience* (pp. 160–202). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3178-3_9

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, *8*(3), 24–41.

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–126). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, & A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 275–282). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concepto of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 335–359. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Fuentealba, C., Badillo, E., & Sánchez-Matamoros, G. (2019). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *37*(2), 63–84. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2518

Fuentes-Lara, M., Aguilar-Salinas, W., & Justo-López, A. (2021). Examen colegiado de cálculo diferencial. *Perfiles Educativos*, *43*(172), 124–141.

García, M., López, A., & Díaz, A. (2018). Análisis del Desempeño de Estudiantes en Tareas Matemáticas. Estudio Exploratorio en el Instituto Politécnico Nacional de México. *Formación Universitaria*, *11*(5), 41–54. https://doi.org/10.4067/S0718-50062018000500041

Gómez-Blancarte, A., Guirette, R., & Morales-Colorado, F. (2017). Propuesta para el tratamiento de interpretación global de la función cuadrática mediante el uso del software GeoGebra. *Educacion Matematica*, *29*(3), 189–224. https://doi.org/10.24844/EM2903.07

González-García, A., Muñiz-Rodríguez, L., & Rodríguez-Muñiz, L. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta*, *47*(4), 449–462. https://doi.org/10.17811/RIFIE.47.4.2018.449-462

Guerrero, J. (2020). *La reconstrucción del concepto de límite en un grupo de profesores del nivel medio superior utilizando la teoría APOE.* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP.

Gutiérrez, L. (2018). Enseñanza de la derivada y el límite apoyada con TIC. *Revista Internacional de Aprendizaje En Ciencia, Matemáticas y Tecnología*, *5*(2), 57–62.

Gutiérrez, L., Buitrago, M., & Ariza, L. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova*, *15*(20), 137–153. https://doi.org/10.21830/19006586.170

Gutiérrez, L., & Valdivé, C. (2012). Una descomposición genética del concepto derivada. *Gestión y Gerencia*, *6*(3), 104–122.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación* (Vol. 5). McGraw-Hill.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas Del Nivel Medio Superior*. México.

Jiménez, M., Ruiz, E., & Montiel, A. (2018). Análisis de la conceptualización de la integral definida por medio de la teoría APOE. *Pistas Educativas*, *30*(140), 695–711.

Loayza, F. (2021). Ingeniería y situación didáctica para el aprendizaje de la derivada en estudiantes de ingenierías de la Universidad Nacional del Altiplano. *Revista De Investigaciones De La Escuela De Posgrado De La UNA PUNO*, *10*(2), 2228–2240.

Londoño, N., Kakes, A., & Decena, V. (2013). Algunas dificultades en la resolución de problemas con derivadas. In R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 935–942). Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

McDonald, M., Mathews, D., & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. In *CBMS issues in mathematics education* (Vol. 7, pp. 77–102). American Mathematical Society.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235–250. https://doi.org/10.1007/BF00410540

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2012). Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial. *Paradígma*, *33*(1), 103–134.

Pereyra, N., & Herrera, C. (2020). Dificultades en la comprensión del concepto derivada de una función. *Revista Electrónica de Investigación En Educación En Ciencias*, *15*(2), 48–58.

Piaget, J. (1981). La teoría de Piaget. *Journal for the Study of Education and Development*, *4*(2), 13–54.

Pineda, W., Hernández, C., Rodrigo, W., & Castro, A. (2020). Propuesta didáctica para el aprendizaje de la derivada con Derive. *Praxis & Saber*, *11*(26). https://doi.org/10.19053/22160159.V11.N26.2020.9845

Portillo-Lara, H., Ávila-Sandoval, M., Cruz-Quiñones, M., & López-Ruvalcaba, C. (2019). GeoGebra y Problemas de Optimización. *Cultura Científica y Tecnológica*, *16*(1), 5–11. https://doi.org/10.20983/CULCYT.2019.1.2.1

Ramírez, B. (2020). GeoGebra en 2D y 3D como recurso didáctico en un curso de integración múltiple: una experiencia de enseñanza-aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *21*(1), 1–17. https://doi.org/10.18845/RDMEI.V21I1.5341

Rodríguez, M., Mena, A., Mena, J., Vásquez, P., & Del Valle, M. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *37*(1), 71–92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194

Rojas, E. (2020). La comprensión de conceptos fundamentales del cálculo mediante Desmos. Una intervención. *RIDE. Revista Iberoamericana Para La Investigación y El Desarrollo Educativo*, *10*(20). https://doi.org/10.23913/RIDE.V10I20.672

Ruiz, E., Gutiérrez, J., & Garay, L. (2018). Visualizando problemas de la derivada con aplicaciones en dispositivos móviles. *Innovación Educativa*, *18*(76), 39–67.

Saraza-Sosa, D., Prada-Núñez, R., & Vera-Gutiérrez, C. (2019). Comprensión de la derivada apoyada en la ingeniería didáctica como método de investigación. *Eco Matemático*, *10*(1), 42–56. https://doi.org/10.22463/17948231.2542

Schivo, M. E., Sgreccia, N., & Caligaris, M. (2014). Derivada y aplicaciones: La tecnología en el aula. In P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 27, pp. 2075–2083). Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (7th ed.). Cengage Learning.

Subía, A., & Gordón, J. (2014). Esbozo crítico sobre las estructuras cognitivas: Génesis del pensamiento científico. *Sophia: Colección de Filosofía de La Educación*, *16*(1), 71–82.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Educación Matemática. *Educación Matemática*, *17*(1), 146–176.

Trigueros, M. (2020). *Dra. María Trigueros*. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. https://www.youtube.com/watch?v=32eiqnh4edk

Valdivia, C., & Parraguez, M. (2015). Un modelo cognitivo para la comprensión profunda de la regla de la cadena. *Paradígma*, *36*(2), 146–176.

Anexo A. Carta de consentimiento informado por parte del alumno

Santiago de Querétaro, Querétaro a ____ de ____________ de 20___

Yo, ____, alumno mayor de edad del curso de Cálculo Diferencial dentro del plantel ______________________ de la Universidad Autónoma de Querétaro, acepto de manera voluntaria fungir como sujeto de estudio en el proyecto de investigación denominado "Construcción del concepto de derivada desde su representación gráfica en estudiantes universitarios con una perspectiva de la teoría APOE". Esta aceptación voluntaria se da luego de haber conocido y comprendido la información y condiciones sobre dicho proyecto:

- Mi participación como alumno no repercutirá en mis actividades ni evaluaciones programadas en el curso.
- No habrá ninguna sanción para mí en caso de no aceptar la invitación.
- Puedo retirarme del proyecto si lo considero conveniente a mis intereses, aun cuando el investigador responsable no lo solicite, informando mis razones. Además, si así lo deseo, puedo recuperar toda la información obtenida de mi participación.
- No haré ningún gasto, ni recibiré remuneración económica o académica alguna por la participación en el estudio.
- Se guardará estricta confidencialidad sobre los datos e información obtenidos producto de mi participación.
- Si en los resultados de mi participación como alumno se hiciera evidente algún problema relacionado con mi proceso de enseñanza-aprendizaje, se me brindará orientación al respecto.
- Puedo solicitar en el transcurso del estudio información actualizada sobre el mismo al investigador responsable.

Para verificar cualquier duda sobre tus derechos como participante puedes contactar al Ing. José Antonio Palacios Briseño, responsable de la investigación, a través del teléfono 867-120-7583 y/o el correo electrónico jpalacios10@alumnos.uaq.mx.

____ _____ / _____ / _____

Nombre y firma del participante Fecha

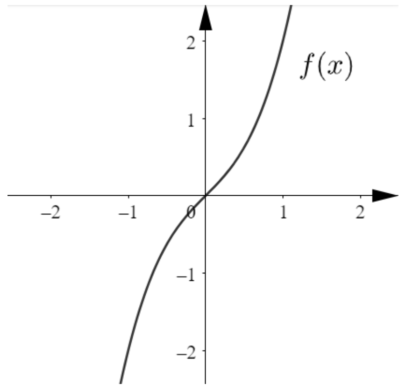
Anexo 1. Cuestionario de diagnostico

Cuestionario para el análisis de la comprensión del concepto de derivada

Nombre: ____

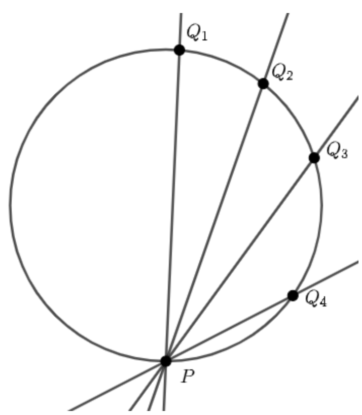
Responda cada actividad del cuestionario de manera clara.

Actividad 1. La siguiente figura muestra la función *f(x):*



1. Dibuja una recta que corte *f(x)* en las coordenadas (-1, -2) y (1,2) y determina la pendiente de esta recta.

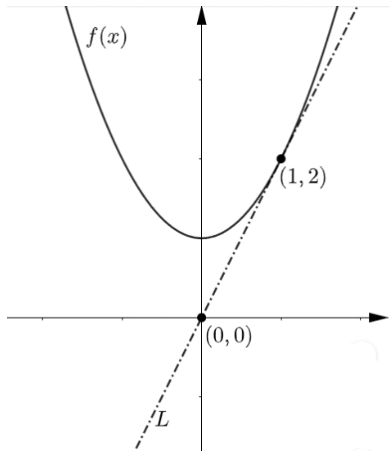
Actividad 2. La siguiente figura muestra un círculo y un punto fijo *P* sobre el círculo. Las líneas *PQ* son dibujadas del punto *P* a los puntos *Q*, las cuales se extienden en ambas direcciones.



De acuerdo a lo observado en la figura, responde las siguientes preguntas:

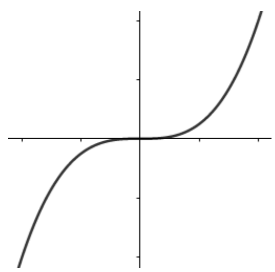
3. ¿Cuántas secantes diferentes podrían ser dibujadas en adición a las ya dibujadas en la figura?
4. ¿Qué pasa con la recta secante una vez que *Qn* se acerca más y más a *P*?

Actividad 3. La recta L es tangente a la función $f(x) = x^2 + 1$ en el punto (1,2) como se indica en la figura.

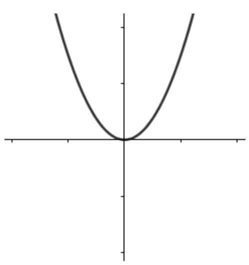


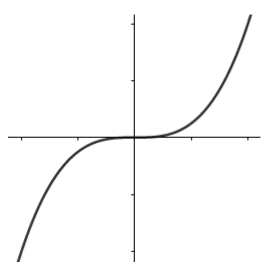
1. Encuentra el valor de la pendiente de la recta tangente en (1, 2) y explica cómo obtuviste la respuesta.

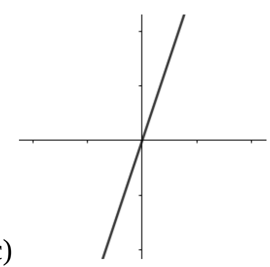
Actividad 4. Si se tiene el gráfico de la siguiente función:



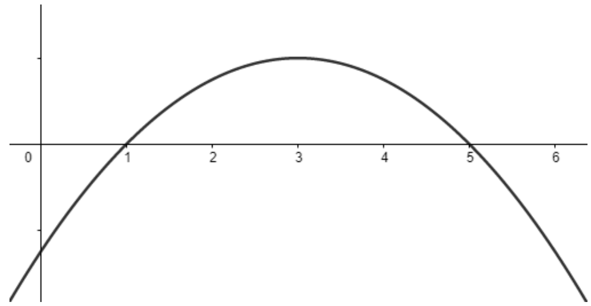
¿Cuál de las siguientes figuras muestra la función derivada que le corresponde? Fundamenta tu respuesta.

a) 

b) 

c) 

Actividad 5. En la siguiente figura se muestra la gráfica de la *derivada f'* de una función *f*. ¿Sobre qué intervalos *f* crece o decrece? Fundamenta tu respuesta.



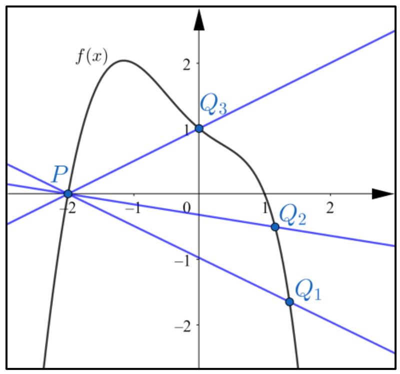
Anexo 2. Cuestionario posterior al Ciclo ACE

Cuestionario para el análisis de la comprensión del concepto de derivada

Nombre: ____

Responda cada actividad del cuestionario de manera clara.

Actividad 1. La siguiente figura muestra la gráfica de la función *f(x)*.

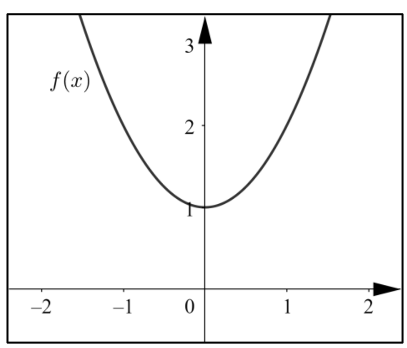


1. Determina la pendiente de la recta secante que corta a la curva en los puntos P y Q_3.

Actividad 2. Se muestra la figura de la Actividad 1

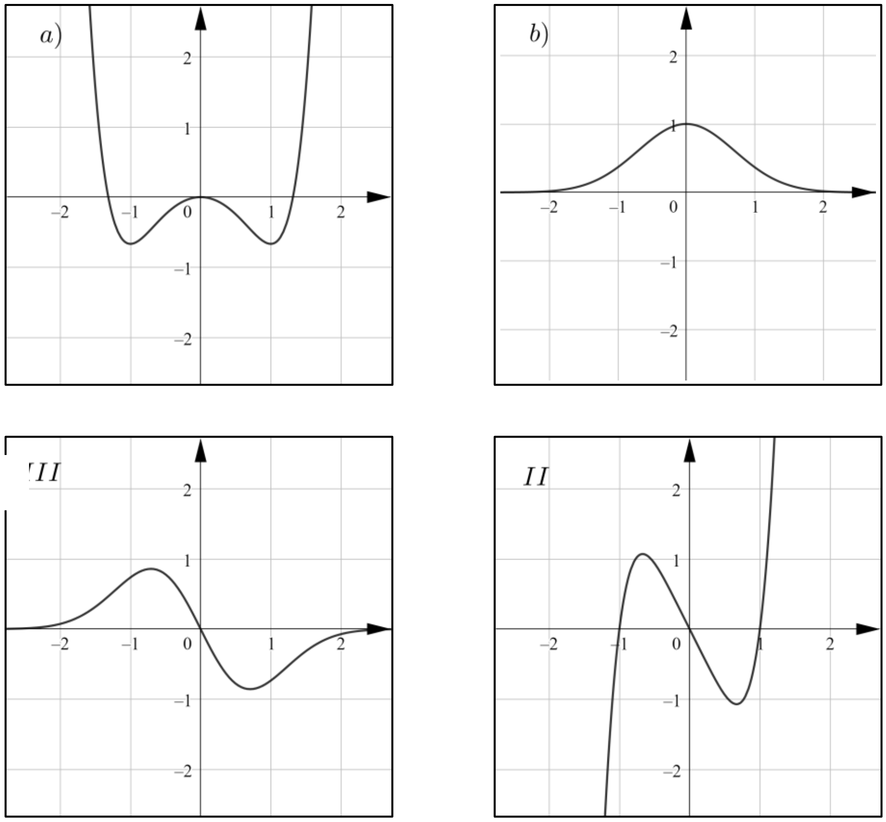
1. ¿Cuántas rectas secantes diferentes podrían ser dibujadas en adición a las ya dibujadas en la figura?
2. ¿Qué le sucede a la recta secante una vez que *Q* se acerca más y más a *P*?

Actividad 3. La siguiente figura muestra la gráfica de la curva *f(x)*. Nota: *(0, f(0))* es un mínimo local de la función.



De acuerdo a la figura, estima el valor de $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para *x=0*. Justifica tu respuesta.

Actividad 4. Relaciona la gráfica de cada función dada en las figuras a) y b) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I y II. Justifica tu respuesta.



Actividad 5. La siguiente figura muestra la gráfica de la función *f*. Utilizala para dibujar un boceto de la gráfica de la función derivada *f*. Justifica tu respuesta.