Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Ciencias (Matemáticas)

Conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de función en profesores de bachillerato en ejercicio

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de

Maestro en Didáctica de las Ciencias (Matemáticas)

Presenta
Luis Jesús Alcalá Tejada

Dirigido por:
Dra. Lilia Patricia Aké Tec

Centro Universitario, Santiago de Querétaro, Querétaro
Fecha de aprobación por el Consejo Universitario
Octubre 2023
México

REPOSITORIO INSTITUCIONAL DGBSDI-UAQ

Dirección General de Bibliotecas y Servicios Digitales de Información

Conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de función en profesores de bachillerato en ejercicio

por

Luis Jesús Alcalá Tejada

se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.

Clave RI: IGMAC-309300

RESUMEN

El tema de esta investigación se centra en el conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de función en profesores de bachillerato en ejercicio. El objetivo principal de este estudio fue determinar las competencias de los profesores de bachillerato en ejercicio con respecto al concepto, las formas de representación y los significados de las funciones matemáticas, utilizando como marco de referencia el modelo MKT (Mathematical Knowledge for Teaching).
Para llevar a cabo esta investigación, se optó por una metodología cualitativa. Se diseñó un cuestionario específico, compuesto por seis tareas con dos ítems cada una, que se aplicó a dos profesores de bachillerato en México: uno considerado experto en la materia y otro novato en la enseñanza de las funciones matemáticas. Este enfoque permitió obtener una comprensión profunda de las percepciones y competencias de los profesores en relación con el tema de estudio.
Los resultados obtenidos revelan hallazgos sorprendentes. El profesor considerado experto presentó una cantidad mayor de dificultades en comparación con el profesor novel, en cuanto a la enseñanza de las funciones y la concepción que tienen de ellas en sus diferentes significados y registros de representación. Este resultado desafía las suposiciones convencionales sobre la relación entre la experiencia y el conocimiento pedagógico.

Palabras clave: función, conocimiento, enseñanza, profesor, bachillerato, MKT.

ABSTRACT

The topic of this research centers on the mathematical knowledge for teaching the concept of function in practicing high school teachers. The main objective of this study was to determine the competencies of practicing high school teachers with respect to the concept, forms of representation and meanings of mathematical functions, using the MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) model as a referential framework.
This research was carried out using a qualitative methodology. A specific questionnaire was designed, composed of six tasks with two items each, which was applied to two high school teachers in Mexico: one considered an expert in the subject and the other a novice in the teaching of mathematical functions. This approach allowed us to obtain an in-depth understanding of the teachers' perceptions and competencies in relation to the topic of study.
The results obtained reveal surprising findings. The teacher considered an expert presented a greater amount of difficulties compared to the novice teacher, in terms of teaching functions and their conception of them in their different meanings and registers of representation. This result challenges conventional assumptions about the relationship between experience and pedagogical knowledge.

Keywords: Function, knowledge, teaching, teacher, high school, MKT.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi sincero agradecimiento a todas las personas e instituciones que han contribuido de manera significativa a la realización de esta tesis de maestría, sin dejar de mencionar mi agradecimiento a Dios, quien ha sido mi fuente de fortaleza y guía a lo largo de este camino.

En primer lugar, quiero agradecer a mi directora de tesis, la Dra. Lilia P. Aké Tec, por su orientación, apoyo y paciencia durante todo el proceso de investigación. Sus conocimientos expertos y su dedicación fueron fundamentales para el desarrollo de este trabajo. Además, quiero agradecer a todos los miembros del sínodo de esta tesis, quienes me brindaron valiosos comentarios y sugerencias que mejoraron la calidad de este estudio. También, a mis profesores de la Maestría en Didáctica de las Ciencias de la Universidad Autónoma de Querétaro, cuyas enseñanzas han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

También, quiero expresar mi agradecimiento a mis compañeros de clase y amigos, quienes me brindaron su apoyo y aliento a lo largo de este desafiante camino. Sus palabras de motivación y discusiones enriquecedoras fueron un factor determinante en mi crecimiento académico y personal.

Asimismo, quiero reconocer el apoyo de mi familia. A mis padres, José Luis y Violeta, por su amor, aliento y sacrificio a lo largo de toda mi educación. Su apoyo inquebrantable y su fe en mí han sido el motor que me ha impulsado a alcanzar mis metas. También quiero agradecer a mis hermanas, Karina, Karla y Kenya por su constante respaldo y por estar siempre dispuestas a escuchar y brindar palabras de aliento.

No puedo pasar por alto agradecer a todas las personas que participaron como voluntarios en mi investigación. Su tiempo y disposición para colaborar fueron de vital importancia para la obtención de los datos necesarios y la realización del análisis correspondiente.

Finalmente, quiero expresar mi gratitud a las instituciones que hicieron posible la realización de este proyecto. Agradezco a la Universidad Autónoma de Querétaro por brindarme la oportunidad de cursar esta maestría y al Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de servicios no. 65, por permitirme llevar a cabo esta investigación en sus instalaciones y por su paciencia y apoyo en este proceso de formación docente, buscando siempre el beneficio de nuestros estudiantes.

A todos ustedes: gracias.

DEDICATORIA

Quiero dedicar este trabajo a mis mejores amigos: Kenya y Andrés, por su amistad y amor incondicional, apoyo constante y comprensión a lo largo de todo este proceso de investigación y redacción de mi tesis.

Su presencia ha sido una fuente de inspiración y motivación en los momentos más desafiantes. Sus palabras de aliento y su paciencia han sido un bálsamo que me ha dado fuerzas para seguir adelante.

Gracias por creer en mí, por escuchar mis ideas y por brindarme su perspectiva única, lo cual ha enriquecido mi trabajo de manera significativa.

Agradezco profundamente el tiempo que hemos compartido juntos y la manera en que han estado presentes en cada paso de este viaje. Su comprensión respecto a mis compromisos académicos han sido un apoyo invaluable que me ha permitido concentrarme en mi investigación.

Además, quiero expresar mi gratitud por su amor incondicional y su capacidad para alegrar mis días, incluso cuando las tensiones y la presión eran altas. Su apoyo emocional y su cariño han sido esenciales para mantener mi equilibrio y bienestar durante este proceso.

Me siento afortunado de tenerlos a mi lado, y agradezco sinceramente todo lo que han hecho y siguen haciendo por mí.

Gracias.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS

RESUMEN

Considerando una de las principales líneas de investigación en la Matemática Educativa: las competencias profesionales del profesorado, el presente trabajo, basado en una metodología cualitativa, indaga en los conocimientos matemáticos y pedagógicos manifestados por profesores de bachillerato en ejercicio en México. Existen un sinfín de investigaciones dirigidas a profesores en formación, pero son escasas las que tienen por objetivo a profesores en ejercicio, quienes, a través de su experiencia en el aula, han sido enriquecidos con otras competencias. Se ha elegido como marco teórico el Modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Mathematical Knowledge for Teachng, MKT) para profundizar en los conocimientos de los profesores respecto a las funciones, principalmente lineales y cuadráticas, las cuales forman parte de un concepto elemental en matemáticas, el de función, mismo que cuenta con diversos significados y representaciones. Para ello y mediante un estudio de casos, se diseñó y aplicó un cuestionario dirigido a dos profesores: uno experto y otro novel. Los resultados evidencian que el profesor experimentado presenta más inconsistencias que el profesor principiante, en cuanto al desarrollo de los elementos del MKT y en la adecuada comprensión de los registros de representación y los significados de las funciones. Se concluye que los años de experiencia, aunados a un exceso de confianza, no contribuyen al desarrollo de los conocimientos matemáticos para la enseñanza del concepto de función. Lo que invita a replantearse la actitud que toman los profesores expertos frente a la enseñanza de las matemáticas.

Palabras clave: Función, conocimiento, profesor de matemáticas, bachillerato.

ABSTRACT

Considering one of the main lines of research in Mathematics Education: the professional competences of teachers, this study, based on a qualitative methodology, investigates the mathematical and pedagogical knowledge expressed by high school teachers in practice in Mexico. There are countless research studies focused on teachers in training, but there are few that target teachers in practice, who, through their classroom experience, have been enriched with other competencies. The Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model has been chosen as a theoretical framework to deepen teachers' knowledge of functions, mainly linear and quadratic, which are part of an elementary concept in mathematics: function. Which has several meanings and representations. For this purpose and by using a case study, a questionnaire was designed and applied to two teachers: one an expert and the other a novice. The results show that the experienced teacher presents more inconsistencies than the novice teacher in the development of the MKT elements and in the appropriate understanding of the representation registers and the meanings of the functions. It is concluded that years of experience, in addition to overconfidence, do not contribute to the development of mathematical knowledge for teaching the concept of function. This invites to reconsider the attitude that expert teachers adopt when teaching mathematics.

Keywords: Function, knowledge, mathematics teacher, high school.

INTRODUCCIÓN GENERAL

El presente trabajo muestra el diseño y aplicación de un cuestionario, dirigido a profesores de matemáticas, quienes ejercen labores en el nivel medio superior o bachillerato, en México.

La mayoría de los profesores de matemáticas en este nivel educativo, no fueron egresados de carreras pedagógicas, normalmente, son ingenieros. Con el paso del tiempo, tras la inercia del sistema educativo, los profesores desarrollan actitudes pedagógicas, ya sea de manera natural o mediante cursos de formación que se ofrecen en el intento de homogeneizar el perfil del profesorado. Por tal motivo, en este trabajo se cuestiona por los conocimientos que tienen los docentes de bachillerato al momento de la enseñanza de las matemáticas.

La literatura en Matemática Educativa sugiere particularizar en un contenido matemático que abone a las investigaciones previas de otros contenidos matemáticos, para intentar generalizar en la matemática en sí. Es por ello que, en este trabajo, se puntualiza en los conocimientos que tienen los profesores respecto al concepto de función, un contenido matemático que implica una adecuada comprensión, debido a la importante trascendencia que tiene en contenidos matemáticos más avanzados. La misma literatura evidencia numerosas investigaciones con profesores en formación, siendo escasas las que indagan por profesores en ejercicio y, considerando lo mencionado en el párrafo anterior, se vuelve conveniente profundizar por los conocimientos respecto al concepto de función de los profesores de bachillerato en ejercicio. Para continuar enriqueciendo las investigaciones en Matemática Educativa, mediante este trabajo se pretende describir los conocimientos encontrados en dos profesores: uno considerado experto y otro, novel. Con el objetivo de apreciar las cualidades y áreas de oportunidad de ambos, al momento de contrastar las respuestas que ofrezcan, al mismo cuestionario; para ello:

En el Capítulo 1 se desarrollan los antecedentes de esta investigación. Se recoge la literatura que enmarca estudios sobre docentes en formación y en ejercicio sobre el concepto de función, destacando la metodología empleada y las conclusiones emitidas.

En el Capítulo 2 se justifica la importancia de la investigación, presentando la fundamentación teórica del planteamiento del problema, los objetivos y la pregunta de investigación.

En el Capítulo 3 se dan a conocer las nociones teóricas que sustentan la investigación. Particularmente, se hace referencia al modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) (Ball et al., 2008); los registros de representación semiótica (Duval, 1993) y el concepto de función y sus significados (Pino-Fan et al., 2019).

En el Capítulo 4 se explicitan las consideraciones metodológicas que se siguieron para obtener los datos de la investigación, enfatizando en el diseño de un cuestionario.

En el Capítulo 5 se analizan los datos obtenidos, caracterizando los conocimientos de los profesores respecto al concepto de función y su enseñanza.

En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones finales, reflexionando en las principales contribuciones del estudio, limitaciones y líneas abiertas de investigación.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

Existen varias investigaciones que abordan el concepto de función, rescatando sus aspectos históricos y epistemológicos (Roque, 2012); las problemáticas en su aprendizaje (Jones, 2006); las diversas formas de comprenderlo (Sfard, 1991); sus significados (Ribeiro y Cury, 2018); las representaciones empleadas al momento de enseñarlo o su fenomenología. Algunas de estos trabajos incluyen el conocimiento de los estudiantes o del profesor sobre la función (Castro et al., 2014). En relación al estudio de los conocimientos docentes sobre la noción de función estos se presentan a continuación:

De la Rosa (2003) presenta los resultados obtenidos de una investigación con cinco profesores de secundaria respecto a la enseñanza de la función. El estudio fue de tipo cualitativo, empleó como marco teórico el Modelo del Conocimiento del Contenido para la Enseñanza de Shulman (1986) y recogió los datos mediante un cuestionario. En las conclusiones plantea que los profesores tienen enraizada la concepción de función como una expresión algebraica, destaca el conocimiento de los profesores sobre la ubicación curricular del concepto de función y argumenta que es preciso que el profesorado cumpla con los programas de estudio y que pueda generar conocimientos necesarios en los estudiantes para abordar temas posteriores.

A su vez, Tasdan y Koyunkaya (2017), también realizaron una investigación de los conocimientos del concepto de función, pero en profesores de matemáticas en formación, empleando el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) de Ball et al. (2008). Los autores observaron y registraron la enseñanza del concepto de función por parte de tres futuros profesores y proporcionaron un listado de indicadores de conocimiento sobre este concepto. Los futuros profesores, que fueron la muestra de este estudio, evidenciaron dificultades para explicar matemáticamente el concepto de función, así como un uso inadecuado del lenguaje formal y una desarticulación entre las propiedades de las funciones. Se le atribuye estas deficiencias a la falta de experiencia de los profesores en formación. Finalmente, consideran importante mejorar el MKT de los docentes en ejercicio y en formación considerando el efecto de la experiencia y las habilidades en la enseñanza.

En el trabajo de Rodríguez-Flores et al. (2018), se aborda al conocimiento del profesor con relación a algunos conceptos de la función; y se consiguió identificar diferentes conocimientos desde la perspectiva del MKT de Ball et al. (2008). Este trabajo es una investigación del tipo cualitativa que está basada en el estudio de casos, seleccionando a un profesor experto. Se identificó el uso de contextos para el planteamiento de tareas, las representaciones icónicas, gráficas, numéricas, verbales y algebraicas de la función, permitiendo al profesor abordar los conceptos de variable dependiente e independiente. Por otra parte, el trabajo destaca la importancia del uso del lenguaje preciso por parte del profesorado para referirse a los conceptos relacionados con la función. Los resultados muestran una riqueza en la estructura conceptual presente en el proceso de la enseñanza, además de una utilización sólida del lenguaje numérico por parte del profesor, utilizando varias representaciones, destacando la conexión entre ellas.

Por su parte, Espinoza-Vásquez (2020) realiza una investigación con un profesor en ejercicio, considerado como experto, abordando un estudio de casos del tipo instrumental con un enfoque interpretativo. Empleando el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de

Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) de Carrillo et al. (2018), realiza un análisis para profundizar en la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Los resultados confirman que el sujeto de investigación es un caso en el que fue posible percibir la integración de distintos conocimientos empleados en el MTSK, puesto que ha entregado evidencia de todos los subdominios del modelo.

En otro estudio, Amaya (2016) aborda las transformaciones de las representaciones de una función, realizando una interpretación de los conocimientos didáctico y matemáticos de futuros profesores. El autor utiliza una metodología mixta, consolidando estrategias y procedimientos de investigación cuantitativos y cualitativos. Se caracterizaron componentes cognitivos, así como procesos y elementos matemáticos que surgen de las contestaciones de los profesores a los diferentes contenidos del cuestionario. Los resultados demostraron la existencia de limitaciones significativas en la generación de representaciones de una función, lo que hace necesario reforzar su percepción.

La exposición de las investigaciones anteriores tiene como objetivo mostrar lo importante que resulta abordar este tema desde diferentes enfoques, considerando distintos conocimientos para nutrir a la formación inicial o su formación durante el servicio docente de los profesores de matemáticas. Estas investigaciones ofrecen elementos sobre el conocimiento del profesor respecto al concepto de función y buscan mostrar lo complejo que puede llegar a ser su análisis cuando se pretende conseguir una imagen de lo que un profesor sabe sobre la función y la injerencia de este conocimiento en la enseñanza del tema.

Algo interesante que revela la investigación de Amaya (2016) es la necesidad de estudiar a la función desde sus múltiples representaciones. La traducción de una representación a otra es un pilar imprescindible en la comprensión de los objetos matemáticos (Dreher y Kuntze, 2015). Por lo que, el proceso de instrucción de las funciones requiere, por parte del profesor, conocimientos en la manipulación y uso de los registros de representación de dicho concepto, para reducir las dificultades en el aprendizaje en los estudiantes. Estudios relacionados con la noción de función y sus diferentes representaciones en el marco de la formación docente se presentan a continuación:

Fabra y Deulofeaut (2000) llevaron a cabo una investigación basada en las producciones de alumnos de bachillerato al analizar la representación gráfica de una función propuesta, mediante condiciones descritas en forma verbal, mediante una circunstancia absolutamente descontextualizada. En otras palabras, se introdujo a las funciones en un lenguaje normal y se indicó realizar su transformación al registro gráfico. Se observó el pensamiento de los alumnos y las metodologías utilizadas, tras una práctica ininterrumpida sobre el gráfico de las funciones.

Por su parte, Romero et al. (2010) realizaron una investigación con dos profesores en formación con el objetivo de describir e interpretar sus competencias al resolver una situación problema de modelación de una función lineal, haciendo uso del registro algebraico, participando en un entorno de aprendizaje que promovía el trabajo colaborativo. Este trabajo analiza las producciones de futuros profesores, en el marco del concepto de función. En sus conclusiones, reportan que los participantes muestran conflictos semióticos y cognitivos, logrando caracterizar la emergencia de tales conflictos.

Al respecto, Amaya y Sgreccia (2014) realizaron un trabajo de investigación donde analizaron los conflictos que presentan los estudiantes de nivel medio al hacer transformaciones entre los registros de las representaciones de una función, utilizando el registro numérico como registro principal. En general, las dificultades detectadas en los alumnos están relacionadas con el reconocimiento de las representaciones, la utilización del pensamiento algebraico para encontrar la variable en la función, el tratamiento de los registros, así como la movilización entre estos registros.

Por otro lado, Amaya De Armas et al. (2021) examinan información sobre los futuros educadores de matemáticas de enseñanza media en una universidad chilena, al ejecutar transformaciones entre los significados y representaciones de las funciones empleando el modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CDM) de Godino (2009). Siendo un trabajo cualitativo, los autores emplearon la técnica análisis de contenido, para estudiar a profesores en formación; los cuales prepararon una clase y expusieron la solución a situaciones problema que involucraban representaciones de funciones. Las conclusiones sugieren la realización de procesos de intervención que lleven a los futuros docentes a realizar una investigación más completa del concepto de función, que permitan interiorizar sus conocimientos y percepciones acerca de las representaciones de las funciones, para reducir las dificultades de aprendizaje en sus futuros estudiantes.

La importancia de los trabajos anteriores, dentro del esquema de esta investigación, es crítica, en vista de que proporcionan conceptos, percepciones e interpretaciones importantes por parte de los profesores de matemáticas, tales creaciones reportan hallazgos significativos en el campo de la investigación matemática, y al tomarlas como antecedentes de lo que se espera encontrar en esta investigación, se planea, entonces, investigar y desarrollar por la movilización entre los registros de representación y el concepto de función introducido por el profesor de matemáticas.

Existen pocos trabajos desde la perspectiva teórica del MKT, que involucren el diseño y aplicación de un instrumento didáctico (cuestionario) a profesores de matemáticas en ejercicio en el Nivel Medio Superior en México, para rescatar los conocimientos puestos en juego respecto a las diversas representaciones del concepto de función. Esta ausencia de investigaciones impulsa la realización de este trabajo, ofreciéndolo como un aporte al desarrollo del modelo en las exploraciones con MKT sobre contenidos particulares.

CAPÍTULO 2. PROBLEMÁTICA

Actualmente, analizar las competencias o el conocimiento profesional del profesorado (Cardeñoso et al., 2001; Scheiner et al., 2019) es uno de los principales problemas en la línea de investigación de formación de profesores de matemáticas. En esta línea de investigación se busca, esencialmente, concentrarse en la naturaleza y los atributos que conforman dicho conocimiento profesional, así como el grado de conocimiento matemático que tienen y deben tener los docentes para tener la facultad de enseñar matemáticas.

El conocimiento profesional del profesor de matemáticas, influye en la actuación del mismo en el aula. Es este conocimiento el que permite no solo enseñar matemáticas, sino también, realizar transposiciones e intervenciones didácticas, responder a las inquietudes de los estudiantes, etc. Es por ello que es de interés, investigar por el conocimiento del profesor de matemáticas que utiliza para enseñar, buscando qué elementos caracteriza su condición y lo hace diferente al resto de profesiones. Para fines de esta investigación, se indagará respecto a la enseñanza del concepto de función.

Se ha elegido un concepto importante, la función, que se comienza a estudiar formalmente en Educación Media Superior, a partir del cuarto semestre y su estudio se extiende a lo largo de los niveles escolares siguientes.

Pregunta de investigación

Al evidenciar la problemática planteada en relación con el conocimiento de los profesores y la enseñanza de la función, se plantea la siguiente pregunta:

P: ¿Qué conocimiento matemático para la enseñanza de la función tienen los profesores de matemáticas? Tomando en cuenta las categorías que, desde el MKT, se ofrecen para el conocimiento del profesor.

Hipótesis

La experiencia de los profesores en ejercicio es una característica que los distingue de los profesores en formación; siendo este un factor importante que incide directamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por lo cual, se postula que:

H: Los profesores en ejercicio cuentan con el conocimiento profesional que establece el MKT; el Conocimiento del Contenido (SMK, por sus siglas en inglés) y el Conocimiento Pedagógico del Contenido (CCK, por sus siglas en inglés).

Objetivo

Los problemas que experimentan los alumnos para comprender una idea matemática tan importante como lo es el concepto de función generan un gran interés en el análisis de los conocimientos del profesor; por esta razón se realiza una propuesta de investigación en la cual se plantea el siguiente objetivo general:

OG: Determinar los conocimientos que tienen los profesores en ejercicio para la enseñanza del concepto de función, de acuerdo con el modelo MKT.

Objetivos específicos

El objetivo general se pretende alcanzar a través de los tres objetivos específicos siguientes:

OE1: Diseñar un instrumento que permita determinar los conocimientos que tienen los profesores para la enseñanza del concepto de función.
OE2: Profundizar en las concepciones matemáticas que tienen los profesores y que emplean para la enseñanza del concepto de función.
OE3: Establecer relaciones entre las caracterizaciones de conocimientos reveladas por los docentes.

Justificación

En la línea de investigación de profesores de matemáticas, surge el interés por investigar por los Conocimientos Profesionales del profesor para una enseñanza idónea del concepto de función. El concepto de función ha sido investigado en numerosos trabajos, en el campo de la Matemática Educativa, abordando aspectos referentes a la comprensión del concepto, su enseñanza, su aprendizaje; algunos otros incluyen aspectos ligados a la historia y epistemología; y algunos más con una perspectiva puramente matemática.

Carlson y Oehrtman (2005) dan cuenta de que: "el concepto de función es central para la matemática previa a la universidad, fundamental para la matemática moderna y esencial en áreas relacionadas a las ciencias" (p. 1). Y en este sentido, las investigaciones previas han sido justificadas por las importantes deficiencias por parte de los estudiantes en el entendimiento de las funciones y por la natural complejidad misma de este concepto.

La comprensión de este concepto es considerado base para el entendimiento de conceptos más avanzados en matemáticas, principalmente en el ámbito del cálculo. Debido a esto, surge el interés de investigar por los procesos de aprendizaje respecto a este concepto, pero desde la parte en la que emana el conocimiento en el aula, es decir, del profesor. Hoy en día, los docentes continúan siendo una de las partes principales en la transmisión de conocimientos, cobrando una destacable injerencia en la adquisición de estos.

En México existen pocas carreras profesionales que forman a profesores de educación media o superior. Por tradición, los puestos docentes de estos niveles han sido ocupados por profesionistas de diversas áreas disciplinares. En el caso de matemáticas, por ejemplo, en su mayoría son ingenieros (Martínez-Sierra et al., 2019). Resulta pertinente destacar que los profesores de matemáticas, al egresar de disciplinas ajenas al área de la educación, carecen de una identidad docente, debido a que durante su formación profesional no cursaron asignaturas que les aportaran herramientas pedagógicas o didácticas (Ibarrola y Martínez, 2018).

Desde sus orígenes, las investigaciones hechas en el área de Matemática Educativa tuvieron como foco de atención el aprendizaje de los estudiantes restando importancia al profesor. El docente no era considerado un factor problemático en los procesos de aprendizaje, como lo era el estudiante; sin embargo, en la actualidad esta situación ha cambiado considerablemente, ya que han aumentado los trabajos que investigan las concepciones y percepciones de los profesores, así como sus conocimientos y competencias (Artigue, 2004).

Considerando la peculiaridad que se presenta en los alumnos respecto a la baja comprensión de las funciones, así como en los profesores de nivel medio superior, respecto a la ausencia de identidad docente que sugiere, entre otros elementos, una falta de precisión de sus conocimientos docentes, resulta conveniente ampliar el objetivo de esta investigación a la comprensión de las competencias del profesor de matemáticas. Resulta relevante analizar el conocimiento de los contenidos matemáticos y/o conocimientos didácticos con los que cuenta o debe contar el profesor, ya que es la persona que principalmente impacta en la experiencia educativa, así como en la concepción de las nociones matemáticas, para fines de esta investigación, la de función.

Poder comprender y dar cuenta del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, incluyendo su naturaleza, características y nivel de conocimiento con el que cuentan para poder enseñar es un aporte interesante para la investigación en Matemática Educativa (Bass, 2007). Lo previo porque pese a las diversas investigaciones realizadas sobre el conocimiento y competencias docentes, no se cuenta con un corpus formativo que caracterice a la formación profesional de los profesores de matemáticas para nivel medio superior.

Una investigación de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2012) pone de manifiesto que "el profesorado es la pieza elemental para un desarrollo positivo de los sistemas de educación, conformando el principal desafío para una educación matemática de calidad" (p. 25). En este sentido, a los profesores de matemáticas se les considera actores fundamentales en la generación y adquisición del conocimiento que tiene lugar en el aula de clases, esto ha motivado a los investigadores de este trabajo y a los investigadores previos, a enfocarse en la comprensión de los contenidos que enseñan los profesores de matemáticas, buscando distinguir el conjunto de conocimientos que los caracteriza del resto de profesionistas.

Dentro de la línea de investigación de las competencias profesionales del profesorado, predomina una notable tendencia por estudiar a profesores en formación, es decir, a futuros profesores. Esto, a raíz de proponer estrategias de mejora en los planes y programas de estudio durante la formación de los profesores y que, de esta manera, puedan solventarse las deficiencias pedagógicas y matemáticas que pudieran presentarse y así conseguir una enseñanza más eficiente a la hora de ejercer su profesión. Sin embargo, es necesario considerar, también, el trabajo empírico que resulta del día a día frente a grupo en el aula de clases, pues es a partir de la práctica en donde se generan concepciones y percepciones con las que los profesores en formación aún no cuentan. Desafortunadamente, no hay mucha información que profundice en el conocimiento con el que cuentan los profesores que ya se encuentran en ejercicio (Hoover, 2014).

Por lo mencionado en el párrafo anterior, se propone para este trabajo puntualizar en el análisis de los conocimientos de profesores en ejercicio para la enseñanza idónea del concepto de función, utilizando los aspectos del Modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), propuesto por Ball et. al (2008); realizando el diseño y aplicación de un instrumento didáctico (cuestionario) para recolectar la información y analizarla.

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

En el presente capítulo se desarrolla la fundamentación teórica que guía este estudio, el cual se relaciona con el conocimiento del profesor, también en este capítulo se desarrollará el posicionamiento sobre la enseñanza de la noción de función.

3.1. Modelos de conocimiento del profesor

El conocimiento del profesor ha sido objeto de estudio en diversas investigaciones desde diferentes referentes teórico. De esta manera, aludimos a los más representativos antes de referir al que ha sido considerado para la presente tesis.

En Sánchez (2011) se describe la importancia de investigar la práctica de los profesores, teniendo como objetivo distinguir los quehaceres diarios en el aula y comprender los factores que influyen en la formación de su desarrollo. En el trabajo se plantea que las investigaciones evidencian la importancia de estudiar el conocimiento profesional del profesor, diferenciando dos tipos de estudio: los que tienen como objetivo determinar el dominio de los conocimientos que el profesor necesita para enseñar y aquellos, del tipo formativo, que buscan la manera de ayudar a adquirir dicho conocimiento.

Shulman (1986; 1987) representa uno de los momentos más significativos en el estudio del conocimiento profesional del profesor, son de los primeros trabajos que subordinan a los estudiantes y su aprendizaje, por el profesor y su enseñanza; poniendo el foco de atención en el conocimiento del contenido, pero también pedagógico, revolucionando las investigaciones previas que se enfocaban en las estrategias de enseñanza, más que en el profesor. De esta forma, los trabajos de Shulman plantean tres dominios de conocimiento que son necesarios para enseñar: 1) conocimiento del contenido, 2) conocimiento didáctico del contenido, y 3) conocimiento curricular.

El conocimiento del contenido a enseñar hace referencia a la "cantidad y organización del conocimiento, como tal, en la mente del profesor" (Shulman, 1987, p.9), esto es, el conocimiento respecto a su disciplina o asignatura y el desglose de la misma. Por su parte, el conocimiento didáctico del contenido hace alusión, más concretamente, al conocimiento que se tiene de la disciplina para lograr su enseñanza, específicamente a las formas de transposición didáctica, haciendo comprensible a los estudiantes el contenido a enseñar. En este dominio se integra la capacidad de comprensión de las particularidades de los estudiantes y su contexto educativo. Finalmente, el conocimiento curricular refiere al conocimiento de los materiales y programas estructurados para enseñar la disciplina, siendo herramientas que le permiten al profesor presentar el contenido.

Más adelante, en Shulman (2005) se hace un refinamiento de los conocimientos, propuestos previamente, que necesita tener el profesor, estructurando la propuesta en siete categorías, las cuales se definen y describen a continuación (Shulman, 2005, p.11):

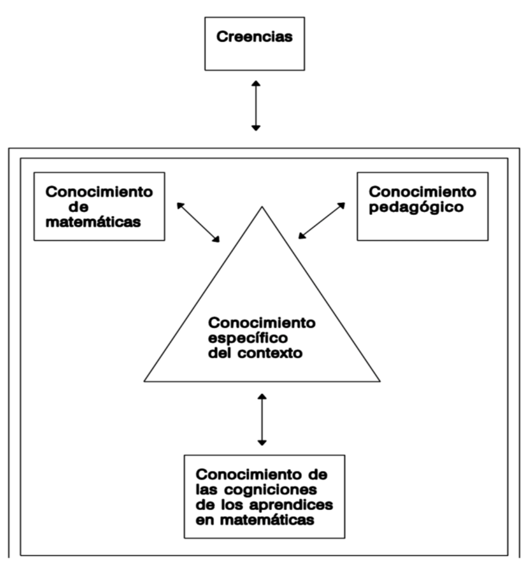
- *Conocimiento del contenido*, es el saber, la comprensión, las habilidades y las disposiciones que deben adquirir los estudiantes. Este conocimiento se apoya en dos bases: la bibliografía y los estudios acumulados en cada una de las disciplinas, y el saber académico histórico y filosófico sobre la naturaleza del conocimiento en estos campos de estudio.

- *Conocimiento didáctico general*, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden en el ámbito de la asignatura.
- *Conocimiento del currículo*, es el especial dominio de los materiales y los programas que sirven como "herramientas para el oficio" del docente.
- *Conocimiento didáctico del contenido (Pedagogical Content Knowledge, PCK)*: es esa especial amalgama entre la asignatura y la pedagogía, que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional.
- *Conocimiento de los alumnos y de sus características*; implica el saber cuáles son los principales errores y dificultades que presentan los estudiantes con los temas abordados, así como la manera en la que aprehenden y dosifican la información.
- *Conocimiento de los contextos educativos*, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas.
- *Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos.*

Esta perspectiva introducida por Shulman sirvió como referente a futuros investigadores, para centrarse en el conocimiento profesional del profesorado y continuar profundizando y categorizando las competencias que debe tener el profesor, sirviendo como base a propuestas posteriores, como la de Fennema y Franke (1992) que caracterizan el conocimiento necesario para la enseñanza, específicamente de las matemáticas. Los autores reestructuran las categorías de conocimiento de Shulman, proponiendo que el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas debe ser interactivo y dinámico. Proponen un modelo que permite describir qué conocimiento necesitan los profesores para enseñar matemáticas. La propuesta considera cuatro componentes: 1) Conocimiento de matemáticas; 2) Conocimiento pedagógico; 3) Conocimiento de las cogniciones de los aprendices en matemáticas; y 4) las Creencias de los Profesores, como se ilustra en la Figura 1:

Figura 1

Conocimiento del profesor.

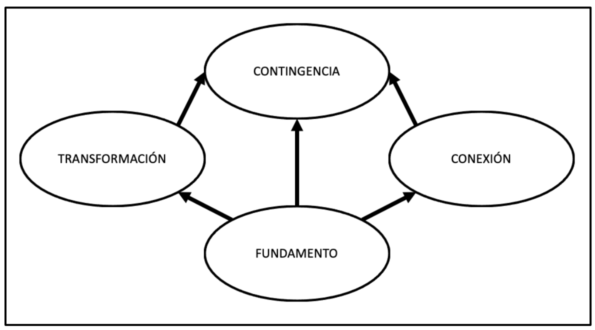


Nota. La figura muestra la relación entre los cuatro componentes del modelo de conocimiento de Fennema y Franke, posicionando en el centro al conocimiento de los contextos específicos. Fuente: traducido de Fennema y Franke (1992).

Por otro lado, el Cuarteto de Conocimiento (The Knowledge Quartet, KQ) es otra propuesta de modelo de conocimiento del profesor de matemáticas que plantean Rowland et al. (2005). El modelo KQ surge con el objetivo de explorar la información sobre conceptos matemáticos, que tienen los docentes de enseñanza básica, y las formas en que esta información es utilizada en la enseñanza. Las dimensiones de conocimiento del KQ son las siguientes: Fundamento, Transformación, Conexión y Contingencia, las cuales se muestran en la figura 2:

Figura 2

Dimensiones de conocimiento del Knowledge Quartet.



Nota. La figura muestra la relación entre las dimensiones del Knowledge Quartet
Fuente: elaboración propia de la investigación.

Se definen y describen a continuación cada una de las categorías (Rojas, 2014, p. 53):

- *Fundamento*, se refiere al conocimiento, las concepciones y las competencias adquiridas antes y durante la formación académica;
- *Transformación,* se refiere a aspectos del conocimiento en la práctica, tal como se pone de manifiesto durante la planificación y la enseñanza. Está estrechamente relacionado con el uso de representaciones adecuadas del contenido, de ejemplos y de demostraciones de procedimientos;
- *Conexión,* se refiere al conocimiento que manifiestan los profesores cuando establecen conexiones entre las distintas partes del contenido matemático, es decir, se combinan algunas decisiones y elecciones respecto del contenido matemático. Incluye la secuenciación del material para la instrucción y la consideración de las demandas cognitivas que cada tema y tarea requieren;
- *Contingencia,* se refiere a las situaciones en las que los profesores responden ante eventos inesperados que emergen durante la instrucción.

Tomando en cuenta que no es suficiente el hecho de que los profesores conozcan únicamente los contenidos matemáticos, Sullivan (2008) propone tres enfoques buscando definir el conocimiento esencial para enseñar: el conocimiento de las matemáticas, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y el conocimiento pedagógico.

Schoenfeld y Kilpatrick (2008), por su parte, realizan una investigación con el propósito de aportar significativamente a los modelos de conocimiento, ya existentes, que un profesor de matemáticas necesita para enseñar esta disciplina. La propuesta recibe el nombre de Proficiencia en la enseñanza de las matemáticas y se compone de siete dimensiones, que de acuerdo con Amaya (2016), se describen a continuación:

- *Dimensión 1*: el profesor debe tener una profunda información sobre las matemáticas que enseña. Además, debe tener varios enfoques para conceptualizar los elementos y objetos de enseñanza: tener la opción de abordarlos, comprender las partes vitales de cada asignatura y establecer asociaciones con diferentes asignaturas de un nivel similar.
- *Dimensión 2*: percibir a los alumnos como sujetos reflexivos. Es decir, ser comprensivo con el proceso de pensamiento de los estudiantes, pues esto ofrece datos sobre la manera en que los alumnos asignan importancia a las matemáticas.
- *Dimensión 3*: asumir a los alumnos como sujetos que aprenden. Esto sugiere, además, estar familiarizado con la teoría de aprendizaje a la que se hace referencia.
- *Dimensión 4*: planificación y ajuste de las condiciones de aprendizaje.
- *Dimensión 5*: establecer normas del aula de clases.
- *Dimensión 6*: construir asociaciones que contribuyan al aprendizaje. El docente debería poder organizar los contenidos, sus presentaciones y hacer que los alumnos se relacionen entre sí y también con los contenidos.
- *Dimensión 7*: reflexionar sobre la propia formación.

Existen otros modelos de conocimiento que logran estructurar diversos componentes teóricos respecto a la enseñanza y el aprendizaje del conocimiento matemático. Por ejemplo, Godino et al. (2007) ofrecen un marco teórico a la Didáctica de las Matemáticas, al que han llamado Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), el cual ofrece recursos para el análisis de los procesos en el aula, propios de las matemáticas.

De acuerdo con el EOS, Godino (2009) propone el Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) para investigar los objetos matemáticos que se manifiestan como resultado de las prácticas realizadas por los profesores. El CDM más tarde es ampliado por Pino-Fan y Godino (2015), en donde se refieren a él como la fusión entre los modelos del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) y el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), del cual ya se ha hablado previamente en los trabajos de Shulman. El MKT se estudiará más tarde con un mayor énfasis, pues este será el marco que sustente esta investigación.

Para Pino-Fan et al. (2010)

> El CDM viene a ser la trama de relaciones que se establecen entre los distintos objetos matemáticos primarios (y los procesos de significación), que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas del profesor, realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones problemáticas para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes. (p. 209)

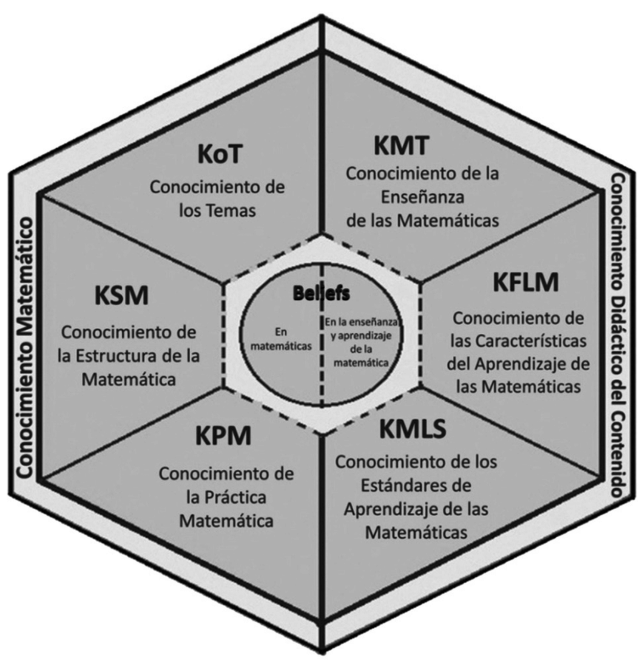
El modelo CDM incluye tres dimensiones, cada una de las cuales se compone por sub-categorías; surgiendo así, la dimensión matemática, la dimensión didáctica y la dimensión didáctico-matemática. Este modelo ofrece un refinamiento de los dominios del MKT, proponiendo las facetas: epistemológica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica (Godino, 2009); cada una con sus respectivos niveles de análisis para su evaluación.

Finalmente, el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher Specialised Knowledge, MTSK) es un modelo propuesto en la Universidad de Huelva, que se deriva del MKT, al considerar que todo conocimiento que posee el profesor de matemáticas es especializado, puesto que ejecuta un tratamiento pedagógico al contenido matemático. Este modelo analiza la información del profesor según una perspectiva global, teniendo en cuenta el ámbito matemático y el ámbito pedagógico.

El MTSK está conformado por dos dominios: el Conocimiento Matemático (Mathematical Knowledge, MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y cada uno de ellos se desglosa en tres subdominios. El MK incluye: el Conocimiento de los Temas, el Conocimiento de la Estructura Matemática y el Conocimiento de la Práctica Matemática. Por su parte, el PCK se desglosa en: el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (Carrillo et. al., 2018). Para una mayor comprensión de los dominios de este modelo, se presenta la siguiente figura:

Figura 3

Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas



Nota. La figura muestra los dominios y subdominios del MTSK
Fuente: Aguilar et al. (2014)

El MTSK es una extensión y refinamiento del MKT, siendo una de las grandes diferencias entre ambos modelos que el MTSK considera, además, las concepciones que ha generado el profesor de matemáticas gracias a su experiencia en el proceso educativo de las matemáticas, a estas concepciones se les denomina creencias y se encuentran en el centro del modelo, delimitadas con líneas punteadas indicando su permeabilidad a cada uno de los subdominios del mismo, es conveniente el estudio de dichas creencias puesto que, forman parte de la estructura cognitiva del profesor.

3.1.1. Conocimiento matemático para la enseñanza

En la Universidad de Michigan, un grupo de investigación liderado por Deborah Ball, dan a conocer otra propuesta de modelo de conocimientos del profesor, el cual se enfoca en el estudio de la naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar (Ball y Bass, 2009).

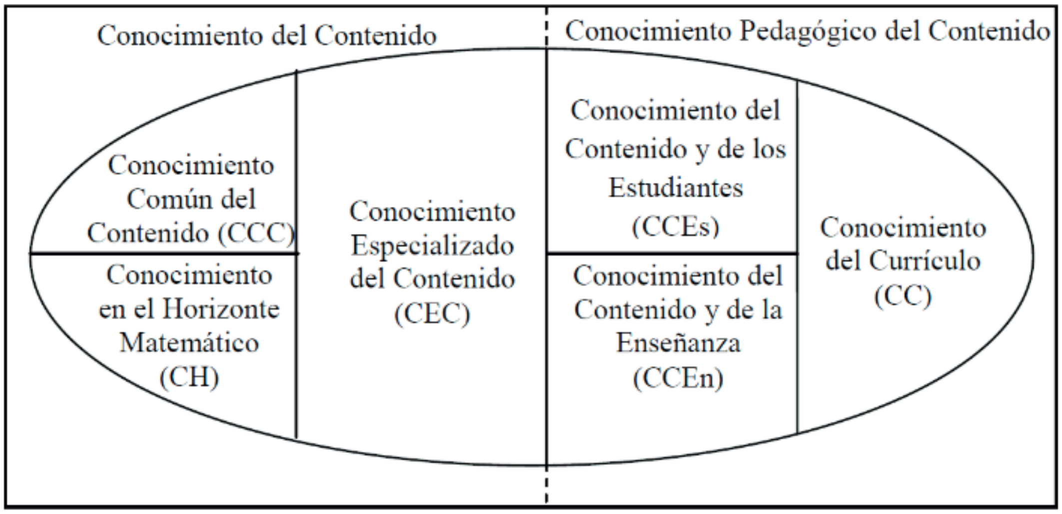
Los aportes realizados por Ball tienen un gran impacto en la Matemática Educativa por la profundidad de cada dominio que conforma su modelo y por el alcance que este tiene cuando se analiza el conocimiento del profesor de matemáticas. Este modelo surge al observar la práctica matemática docente, que incorpora las gestiones que los profesores realizan a partir de los conocimientos específicos y sobre el tema.

Ball y sus colaboradores retoman los aportes de Shulman y, entonces, proponen lo que ellos llaman *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT), entendiéndose como el conocimiento matemático que se exige al enseñar, es decir, es aquel conocimiento que resulta necesario para ejecutar las tareas pertinentes en la enseñanza de las matemáticas (Ball et al., 2008).

Hill et al. (2008) han definido al MKT como "el conocimiento matemático que el profesor utiliza en el aula para instruir a sus alumnos y hacer que estos crezcan matemáticamente" (p. 12). Específicamente, Ball et al. (2008) afirman que el conocimiento de un profesor de matemáticas no es solamente el conocimiento de los temas o el conocimiento pedagógico, como entes separados, sino una articulación entre el conocimiento de los contenidos y la didáctica esencial para la enseñanza. Y es así como proponen que el MKT sea clasificado en dos categorías: 1) conocimiento del contenido, compuesto a su vez por tres subcategorías: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático; y 2) conocimiento pedagógico del contenido, conformado, a su vez, por el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza, y conocimiento del currículo, tal como se puede apreciar en la figura 4:

Figura 4

Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza



Nota. En la figura se muestran los dominios y categorías del conocimiento matemático para la enseñanza se utilizan siglas que se corresponden con el nombre en español.
Fuente: Adaptado de Ball et al. (2008)

Se definen, a continuación, las categorías en que se subdividen cada uno de los dominios del MKT:

- *Conocimiento común del contenido (CCC):* es descrito como el "conocimiento matemático y habilidades que se emplean en situaciones que no son exclusivas de la enseñanza" (Ball et al., 2008, p.399). Esto es, el conocimiento matemático que utilizan las personas en cualquier ámbito profesional, no solo de enseñanza.
- *Conocimiento en el horizonte matemático (CH*): es definido como "el conocimiento que tiene el docente de cómo están relacionados los temas matemáticos incluidos en el currículo" (Ball et al., 2008, p.403), indicándole al profesor cuando avanzar o retroceder. Este dominio propone una correspondencia entre niveles educativos (asociación vertical) y entre los contenidos de un mismo nivel educativo (asociación horizontal).
- *Conocimiento especializado del contenido (CEC)*: es definido como el "conocimiento matemático y habilidad exclusiva para la enseñanza" (Ball et al., 2008, pp.400-401). En otras palabras, es el conocimiento que atiende las adecuaciones realizadas para transformar un contenido disciplinar en un contenido enseñable.
- *Conocimiento del contenido y de los estudiantes (CCEs)*: es definido como el "conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular" (Hill et al., 2008, p.375). Incluye el conocimiento de las dificultades más habituales y los errores comunes que presentan los estudiantes.
- *Conocimiento del contenido y de la enseñanza (CCEn)*: definido como "el conocimiento que combina el conocimiento sobre la enseñanza con el matemático" (Ball et al., 2008, p. 401). Esto implica que el docente construya estrategias para que sus estudiantes alcancen

sus aprendizajes y corrijan sus errores, a partir de analizar los razonamientos y las formas de solución de sus alumnos.
- *Conocimiento del currículo (CC)*: es definido como "el conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza, que permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes" (Ball et al., 2008, p.391). Incluye conocer de materiales didácticos desarrollados para la enseñanza de las asignaturas en un nivel educativo determinado.

Queda manifestado, entonces, que el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas, de acuerdo con el MKT, incluye diversos aspectos a considerar, los cuales se abordarán en este trabajo, para indagar por el conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de función que tienen los profesores de bachillerato.

3.2 Teoría de registros de representación semiótica

Según Duval (2004) el aprendizaje de las matemáticas es un área de oportunidad adecuado para analizar y estudiar actividades cognitivas en las que interviene la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas conlleva que estas actividades cognitivas necesiten además del lenguaje natural o el de imágenes, el empleo de diferentes registros de representación y, por consiguiente, de expresión.

Duval distingue dos tipos de representaciones: 1) mentales, como aquellas representaciones conscientes que pertenecen a un conjunto de imágenes que una persona posee respecto a un objeto o situación y 2) semióticas, definidas como las elaboraciones que están conformadas por el uso de signos que permiten exteriorizar representaciones mentales. En este sentido, el autor enfatiza en que las representaciones utilizadas en la actividad matemática son exclusivamente semióticas.

La teoría de registros de representación semiótica, propuesta por Duval (1993) establece que el uso de representaciones para el pensamiento matemático es esencial para la comprensión de los objetos matemáticos, puesto que no hay otra manera de tener acceso a ellos sino a través de las representaciones. Es por ello que en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas no debe limitarse a únicamente un registro, antes bien, el trabajo debe incluir la capacidad de movilizar la información de un registro a otro (Duval, 2006).

Para que las representaciones sean de utilidad en los procesos matemáticos, estas deben permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

1. La formación, entendida como la identificación de un grupo de signos pertenecientes a una representación. Por ejemplo, una fórmula pertenece al registro algebraico.
2. El tratamiento, entendido como la manipulación de una representación, pero en el mismo registro, haciendo uso de sus propias reglas. Esto es, una transformación interna. Por ejemplo, al transformar $y = -2x + 1$ en $y = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, se está realizando un tratamiento a la función lineal, en su representación algebraica.
3. La conversión, entendida como la movilización de una representación a otra. Esto es, una transformación externa.

Duval (2004) distingue cuatro tipos de representaciones semióticas fundamentales y generales en los objetos matemáticos: lenguaje natural, verbal o coloquial; algebraico; gráfico y numérico, los cuales se describen a continuación:

- Registro en lengua natural: Es la descripción del fenómeno a analizar y se manifiesta de manera oral o escrita.
- Registro algebraico: Es la representación del objeto, usando expresiones algebraicas.
- Registro gráfico: Es la representación del objeto, usando coordenadas cartesianas.
- Registro tabular o numérico: es el análisis de las características numéricas.

Los registros anteriores son utilizados para representar la mayoría de los objetos matemáticos y según Sastre et al. (2008), el concepto de función en particular, no es la excepción, puesto que admite estos mismos registros, entre otros. Para Amaya (2016), los registros más utilizados para representar una función son:

- **Coloquial o de lenguaje materno**: relacionado con la capacidad lingüística necesaria para describir relaciones funcionales.
- **Analítico**: relacionado con los símbolos, sobre todo con el álgebra.
- **Cartesiano**: un conjunto de pares ordenados, siendo el primer elemento los valores de la variable independiente y el segundo, los de la variable dependiente.
- **Gráfico**: es un sistema coordenado donde, mediante un conjunto de pares ordenados de puntos, se pueden realizar representaciones gráficas.
- **Figural**: es un dibujo, un plano o una figura que modela una circunstancia, donde no interviene un sistema coordenado.
- **Tabular**: es una tabla donde se registran en columnas los valores de las variables dependiente e independiente, de tal manera que el número de filas representa las cantidades comprometidas en la relación funcional.
- **Fenomenológico**: es la transposición de los conocimientos a una situación problema, permitiendo contextualizar los elementos matemáticos.

Los registros para representar a la función se corresponden con los establecidos por Duval; adicional, para fines de este trabajo, se utilizará el registro cartesiano, propuesto por Amaya et al. (2021) como un conjunto de parejas ordenadas, en donde el primer componente corresponde al valor que toma la variable independiente y el segundo al valor que toma la variable dependiente. De esta manera, se buscará indagar en los siguientes cinco registros para la representación de la función: 1) en lenguaje materno, 2) algebraico, 3) gráfico, 4) numérico, y 5) cartesiano, considerando que son los más empleados a nivel bachillerato cuando se aborda el concepto de función; explorando en el dominio en cada uno de los registros y en el tránsito entre ellos, por parte de los profesores de esta investigación.

Tradicionalmente, las actividades en el aula, referentes a situaciones funcionales, se distinguen por iniciar con la representación en el registro coloquial y/o algebraico y a partir de ahí, se estudia la conversión a los otros registros, en especial, al numérico y cartesiano, para finalizar con la conversión al registro gráfico.

3.3 El concepto de función

> El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función sea de gran generalidad. (Spivak, 1996, p. 49)

Para poder interpretar las funciones, es necesario partir de una definición formal. Para lo cual, Fregoso (1979) propone la existencia de un conjunto A denominado dominio de la función y, $A \neq \phi$, así como un conjunto B denominado codominio de la función y, $B \neq \phi$. De tal forma que la regla de correspondencia debe cumplir con las siguientes condiciones:

- Los componentes del conjunto A están conectados con los componentes del conjunto B a través de la regla de correspondencia f.
- Ningún componente del conjunto A debe quedar sin su componente relacionado en el conjunto B.
- Ningún componente del conjunto A es prioritario a más de un componente relacionado en el conjunto B.

Por otro lado, Lacasta y Pascual (1998) definen el concepto de función de la siguiente manera:

> Sean E y F dos conjuntos que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional, si para todo $x \in$ E, existe un único $y \in$ F que está relacionado con x en la relación dada.
> Damos el nombre de función a la operación que de esta forma asocia con cada elemento $x \in$ E el elemento $y \in$ F que está relacionado con x en la relación dada; llamamos a y valor de la función para el elemento x, y decimos que la función está determinada por la relación funcional dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan las mismas funciones. (p. 52)

El concepto de función ha sido empleado, desde épocas muy antiguas, algunas veces hasta inconscientemente, es decir, sin saber que se alude a él. En Didáctica de las Matemáticas existe un cierto acuerdo en considerar cinco periodos significativos a lo largo de toda la existencia de las matemáticas:

1) Edad Antigua
2) Edad Media
3) Siglos XV, XVI y XVII
4) Siglo XVIII
5) Siglos XIX y XX

A continuación, se describe un breve recorrido del concepto de función a través de dichos periodos:

Pederson (1974) afirma que, durante la Edad Antigua, las civilizaciones mesopotámicas tuvieron un cierto sentido de la funcionalidad, puesto que matemáticos babilónicos utilizaban tablas compuestas por dos columnas en donde anotaban datos importantes de observaciones astronómicas, trabajando con interpolaciones lineales y geométricas, buscando regularidades. Pero desafortunadamente, los griegos en esta época, siempre se guiaron por la homogeneidad, comparando longitud con longitud, área con área, volumen con volumen, lo que es impedía avanzar hacia el concepto de función (Sierra et al., 1998).

En la Edad Media, con las traducciones de Aristóteles (384-322 a. C.) y Arquímedes (287-212 a. C.), comienza el estudio de cambios generales; surgiendo una fórmula para la tasa de cambio. Más adelante, Nicolás de Oresme (1323-1382) profundizó en los cambios en la velocidad del movimiento a lo largo del tiempo utilizando el método de coordenadas. Dibujaba una línea horizontal en donde cada punto de esta representaba un instante consecutivo de tiempo, y para cada instante dibujaba una cierta línea cuya longitud representaba la velocidad de ese instante. Al usar este tipo de representación, que ahora llamamos representación gráfica de una función en un eje cartesiano, Oresme quería facilitar la comprensión de la naturaleza de los cambios cuantitativos y cualitativos para poder dar una representación de todos ellos.

En los siglos XV, XVI y XVII, el desarrollo del álgebra simbólica de Vieta (1540-1603) y las leyes del movimiento de Galileo (1564-1642) abrieron oportunidades para establecer relaciones funcionales, pero Descartes (1650-1696) fue el primero en trabajar ecuaciones en términos de x e y como una forma de expresar la relación entre dos variables, mediante la cual se puede calcular el valor de una variable para que corresponda al valor de la otra variable, nombrándole explícitamente a esto como una relación funcional. Las funciones cartesianas, o de Descartes, eran principalmente expresiones algebraicas constituidas por las curvas geométricas simples conocidas hasta el momento. Newton (1643–1727) y Leibniz (1646–1716) llegaron a representaciones funcionales de series de potencias infinitas, lo que permitió la representación analítica de la mayoría de las funciones en uso en ese momento (Sierra et al., 1998). Leibniz fue el primer matemático hasta entonces en emplear el concepto de función en 1692. Usó el término para referirse a cualquier cantidad en una curva de un punto a otro, como la longitud de la tangente, normal, subtangente y la ordenada (Struik, 1969).

En el Siglo XVIII, los matemáticos comenzaron a ver el método de análisis de Descartes como la herramienta perfecta para resolver ecuaciones algebraicas. Se enfocaron más en expresar funciones matemáticas usando expresiones algebraicas. Esto fue popularizado por J. Bernoulli (1667-1748), según Boyer (1986) en un artículo de 1718: "llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes" (p. 531).

Euler (1713-1783) convirtió en objeto matemático la noción de función, es decir, se podría estudiar a las funciones mismas, especialmente sus registros de representación, definiría una función como un análisis formado por cantidades variables y constantes o cantidades en cualquier forma de expresión. Más tarde, se le ocurrió una nueva definición de función: "si x es una cantidad, entonces cualquier cantidad que dependa o esté determinada por x de alguna manera se llama función de esa variable" (Euler, 1755).

En los siglos XIX y XX, Cauchy (1789-1857) utilizó las expresiones de variable independiente y variable dependiente en su definición: cuando cantidades que varían se interrelacionan de tal forma que, al dar valor a una, el valor de la otra se puede deducir. De las demás, ordinariamente concebimos estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente, y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable (Cauchy, 1821).

En Boyer (1986), se asume que fue Dirichlet (1805-1859) quien definió en 1837 el concepto de función tal como lo usamos actualmente:

> Si una variable *y* está relacionada con otra variable *x* de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a *x* hay una regla según la cual queda determinado un único valor de *y*, entonces se dice que *y* es una función de la variable independiente *x*. (p. 687).

Con el paso del tiempo, esta definición se ha refinado utilizando elementos de la teoría de conjuntos; y como puede percatarse en los párrafos anteriores, a través de la historia de las matemáticas, se ha concebido a la función desde distintas perspectivas, dependiendo las necesidades de la época; dichas perspectivas, articulándose, dan lugar al concepto general, aunque holístico, del concepto de función, tal y como hoy se conoce.

Distintos autores pretenden proponer una clasificación de la definición de función, intentando concentrar las diversas perspectivas que cada definición propone. Es así como Hitt y Torres (1994) proponen la siguiente clasificación, tras el análisis de libros de texto:

- **Función en términos de variable**. Una función es una asociación entre dos variables, de tal forma que cada valor que toma una, tiene una única correspondencia con el valor que toma la segunda.
- **Función en términos de conjunto de parejas ordenadas**. Una función es una colección de pares ordenados, donde el primer componente no se puede repetir.
- **Función en términos de regla de correspondencia**. Una función es una regla de correspondencia en la que a cada x de un conjunto A, asigna un elemento f(x) determinado unívocamente de otro conjunto B.
- **Función en ambiente logo**. Una función es un procedimiento F con la característica que dos requerimientos cualesquiera de F con los mismos ingresos, producen los mismos egresos.

Más tarde, Azcárate y Deulofeu (1996) propusieron la siguiente clasificación para las definiciones de función, según el aspecto que más destacan de algunos libros de texto analizados por dichos autores.

- **Correspondencia entre valores de variables**. Una función es una relación entre los valores de dos variables, de tal forma que cada valor que asume una de ellas, corresponde a un solo valor de la otra.
- **Correspondencia entre elementos de dos conjuntos**. Una función es una relación entre los elementos de dos conjuntos, con la condición que cada elemento de uno de los conjuntos corresponde a un solo componente del otro conjunto.
- **Dependencia entre dos variables**. Una función es una relación entre *x* e *y*, en donde x es la variable independiente y *y* depende de ella.
- **Conjunto de pares ordenados**. Una función debe incluir un primer término que no se repita y que esté estructurado en un par ordenado, habiendo una colección de estos.

Más recientemente, en Pino-Fan et al. (2019) se propone otra clasificación para las diferentes definiciones del concepto de función, planteando una propuesta que involucra un recorrido histórico-epistemológico de esta noción, tomando como referencia el trabajo de Biehler (2005), surgiendo así:

3.3.1 La función como correspondencia

Se considera que este es el primer significado que tomó el concepto de función y se remonta al surgimiento del conteo. Contar implicaba asociar múltiples objetos con el mismo número para crear una correspondencia. Por lo tanto, se entenderá por correspondencia a la relación entre conjuntos que usan operaciones aritméticas para definirla (Parra, 2015).

Las escalas de medidas de temperatura como los Fahrenheit y los Celsius representan un ejemplo de la función como correspondencia de acuerdo con Esquer y Romero (2021). Como se muestra en la Tabla 1, en la cual se puede percibir que a un componente del conjunto de los °C le corresponde un elemento de conjunto °F y dicha asignación se da por medio de la ecuación $°F = \frac{9}{5}(°C) + 32$.

Tabla 1

Conversión de temperaturas, de Centígrados a Fahrenheit

Temp en ºC	0	45	40	100	50	25
Temp en ºF	32	113	104	212	122	77

Fuente: Elaboración propia.

3.3.2 La función como relación entre magnitudes variables

Esta definición surge del estudio de tablas numéricas obtenidas al cambiar valores de diferentes magnitudes y buscar regularidades, lo que implica un acercamiento a la funcionalidad. Todas las condiciones relacionadas con fenómenos de la naturaleza, en las que interactúan magnitudes variables físicas, como el calor, la luz, la distancia, la velocidad, etc. son situaciones que promueven este significado de la noción de función.

Por ejemplo, cuando un objeto es lanzado hacia arriba con una velocidad de $25\frac{m}{s}$, partiendo del suelo, haciendo uso de la fórmula $x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$ y considerando la aceleración debida a la gravedad de $9.8\frac{m}{s^2}$; la ecuación que expresa la altura del objeto en términos del tiempo es $h_0 = 25t - \frac{49}{10}t^2$, en la que se ha usado el término h_0 en lugar de x_f. Con lo anterior se evidencia que al cambiar (naturalmente) la magnitud del tiempo, la posición del objeto también lo hace.

Tabla 2

Relación entre tiempo y altura

Tiempo (s)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
Altura (m)	0	11.275	20.1	26.475	30.4	31.875	30.9	27.475	21.6

Fuente: Elaboración propia.

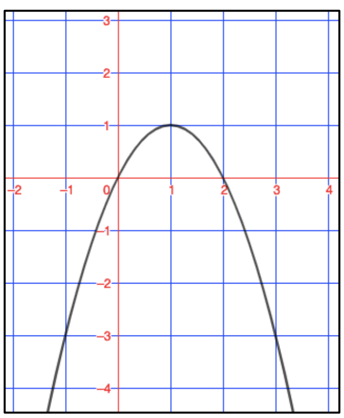
3.3.3 La función como representación gráfica

Es una condición en el plano cartesiano, compuesta de puntos que representan de forma visual una relación entre valores numéricos entre los ejes.

Por ejemplo, la gráfica de una función cuadrática, se obtiene mediante una lista de pares ordenados (x, y), relacionados por medio de una expresión algebraica, como puede ser $y = 2x - x^2$; también, suelen haber ocasiones en las que no es posible asignar una expresión matemática a determinadas gráficas y, aun así, dichas gráficas representan una función. Un ejemplo de esto último lo podemos observar en la relación del valor del dólar (USD) con respecto al peso (MXN).

Figura 6

Gráfica de la función f(x)=2x-x²



Fuente: elaboración propia

Figura 5

Gráfica del dólar (USD) vs. el peso (MXN)

Fuente: Investing.com (2021)
https://mx.investing.com/currencies/usd-mxn-chart

3.3.4 La función como expresión analítica

Según Euler (citado por Dhombres et al., 1987), "una función se obtiene mediante una clase de operaciones aritméticas, las potencias y raíces" (p. 194). A esto, adjuntó las funciones trascendentes elementales: exponenciales, logarítmicas y trigonométricas; surgiendo una primera clasificación de las funciones: funciones algebraicas y funciones trascendentes.

El siguiente ejemplo, tomado de Esquer y Romero (2021) evidencia este significado de la función:

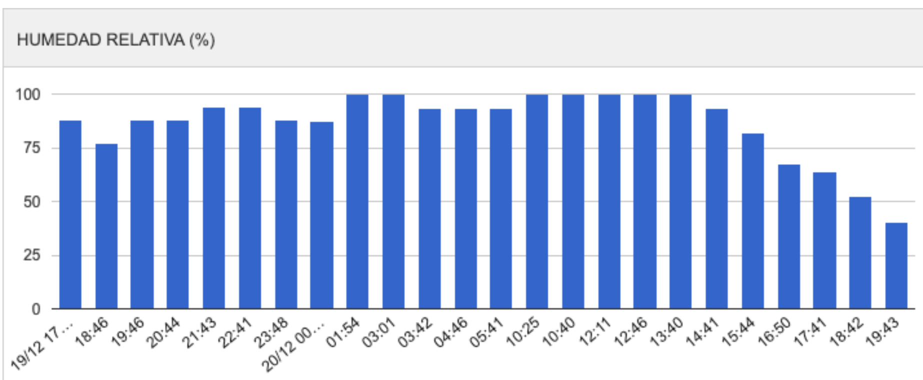
Un sistema de cómputo tiene 10 años de uso y su valor actual es de \$23000, pero hace cuatro años valía \$41400. Considere que el valor del sistema varía linealmente con el tiempo y determine: la ecuación particular que relaciona el valor del sistema con el tiempo transcurrido.
Respuesta: $V(t) = -4600t + 6900$, al cumplir $V(10) = 23000$ y $V(6) = 41400$. (p. 42)

3.3.5 La función como correspondencia arbitraria

La función como correspondencia arbitraria "es una relación abstracta entre dos conjuntos, sin conocer la forma en la que se lleva a cabo la asignación entre sus elementos" (Esquer y Romero, 2021, p. 43). Por ejemplo, en los estudios meteorológicos, a cada hora del día le corresponde un porcentaje de humedad y esta asignación se lleva a cabo sin ninguna operación matemática.

Figura 7

Gráfica en tiempo real de humedad relativa en Guanajuato



Fuente: Meteored.mx (2021)
https://www.meteored.mx/guanajuato/historico

Es necesario asumir que una correspondencia arbitraria no es forzosamente graficable. Dirichlet en 1829, propuso una función que no estaba regida por una expresión analítica, ni tenía una gráfica para representarla; siendo el primer prototipo que ilustraba la noción de función como una correspondencia arbitraria abstracta y también fue un ejemplo de una función que era discontinúa por naturaleza. Esta función es igual a uno para cada punto irracional del intervalo [0,1] y cero para cada punto racional del mismo intervalo, en el que hay infinidad de puntos racionales e irracionales, lo que complica la obtención de una gráfica.

3.3.6 La función a partir de la Teoría de Conjuntos

Es una relación de una variable que cumple las siguientes propiedades: un subconjunto R del producto cruz de X con Y ($R \subseteq X \times Y$) es una función de X a Y si para cada elemento que pertenece a X ($\forall x \in X$) existe exactamente una y que pertenece a Y ($\exists!\, y \in Y$), tal que la pareja (x, y) está en R (Hamilton, 1982).

Un ejemplo de la implementación de esta definición sería determinar si para los conjuntos $X = \{1,2,3,4\}$ y $Y = \{w, x, y, x\}$, la relación $R = \{(1, w), (2, x), (2, z), (3, y), (4, x)\}$ podría ser considerada como función, una vez analizado el dominio y el rango.

Para el presente trabajo, se considerarán las seis definiciones de la propuesta de Pino-Fan y colaboradores: 1) La función como correspondencia, 2) La función como correspondencia entre magnitudes variables, 3) La función como representación gráfica, 4) La función como expresión analítica, 5) La función como correspondencia arbitraria y 6) La función a partir de la teoría de conjuntos. La cual, es una propuesta más completa y que, además, integra y se corresponde con las clasificaciones de Hitt y Torres (1994) y de Azcárate y Deulofeu (1996).

De esta manera, para los fines de esta investigación, se indagó por los conocimientos manifestados por los profesores en estos seis significados de la función.

Por otro lado, las funciones tienen diferentes clasificaciones según su naturaleza. De acuerdo a Jiménez et al. (2013), una en particular es la siguiente: 1) funciones inyectivas, 2) funciones suprayectivas y 3) funciones biyectivas. De acuerdo con los autores, una función es inyectiva cuando todos los componentes del dominio tienen distinta imagen; una función es suprayectiva cuando cualquier elemento del codominio representa la imagen del algún componente del dominio; una función es biyectiva cuando es inyectiva y suprayectiva.

Otra clasificación de las funciones es de acuerdo con su representación en el registro algebraico; pudiendo encontrar, funciones polinomiales, racionales, radicales, seccionadas y trascendentes; estas últimas contemplan a las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Según Hernández (s.f.):

> A una función se le llama polinomial (o polinomio) si se puede escribir de la forma
> $$y(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
> Donde n es el grado de la función, n es un entero no negativo y todos los números $a_0, a_1, \dots, a_n$ son números reales a los que se les llama coeficientes del polinomio.
> Las funciones polinomiales están definidas para todos los reales, es decir, el dominio de la función polinomial es $\mathbb{R}$. (p. 23).

Manfredi (2007) ofrece una definición para las funciones polinomiales, estipulando que son aquellas cuyo dominio son todos los números reales y cuya expresión analítica es un polinomio de diferentes grados enteros y positivos. Dependiendo el grado, la función recibe un nombre diferente; cuando el grado es cero, es una función constante; cuando el grado es uno, es una función lineal; cuando el grado es dos, es una función cuadrática; cuando el grado es tres, es una función cúbica; cuando el grado es superior a tres, recibe simplemente, el nombre de función polinomial.

Para fines de esta investigación, el objetivo se enfocó en el estudio de las funciones polinomiales, principalmente la lineal y cuadrática, considerando que son de las más utilizadas en el contexto escolar; a continuación, se definen:

> Una función lineal se escribe de la forma $y = f(x) = mx$, siendo las variables x e y directamente proporcionales, con constante de proporcionalidad m. Al graficarla en el

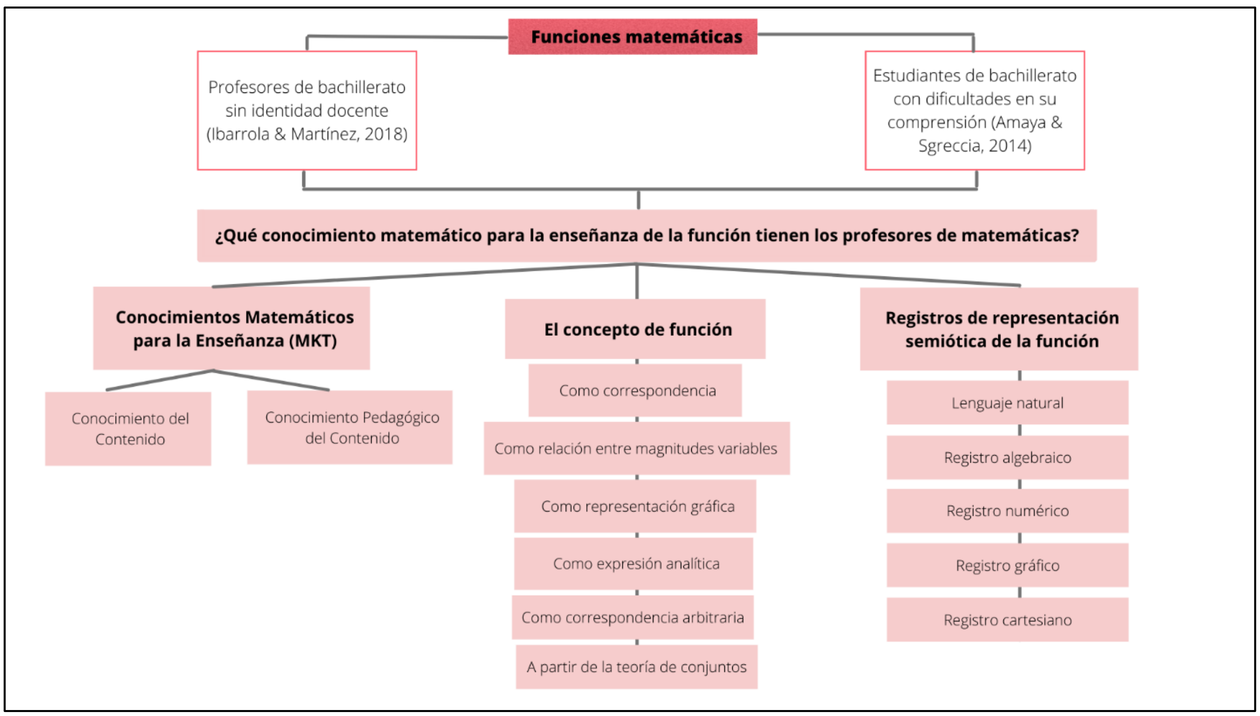
plano y unir los puntos, se obtiene una recta que pasa por el origen (0,0) y la constante de proporcionalidad recibe el nombre de pendiente. (Elgueta et al., 2014, p. 135)

La función cuadrática es definida como:
Llamaremos función cuadrática a toda función del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. A la gráfica de la función se le llama parábola. A a y b se les llama coeficientes numéricos de x^2 y x, respectivamente. A c se le llama término independiente. (Saiz et al., 2014, p. 99)

Para cerrar este capítulo, parece conveniente retomar que los fundamentos del trabajo se corresponden con lo que se presenta en la figura 8:

Figura 8

Elementos teóricos asociados al trabajo de tesis



CAPÍTULO 4. ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabajo se desarrolló mediante una metodología cualitativa (Leatham, 2019), puesto que se trabajó con datos descriptivos para el análisis de las respuestas de dos profesores, uno novel y uno experto (o experimentado). El diseño metodológico utilizado fue el estudio de casos (Stake, 1988) para la profundización del análisis. Como técnica de recolección de datos se utilizó el diseño de un cuestionario sobre conocimientos didácticos y matemáticos. Asimismo, como instrumento para el registro de los datos se contempló el registro en papel de las respuestas al cuestionario de actividades sobre representaciones de funciones.

4.1. Muestra y contexto

Resulta interesante realizar una comparativa entre los conocimientos manifestados por un profesor experto y uno novel, por lo que, para esta investigación, se realizó un muestreo no probabilístico por conveniencia, seleccionando intencionalmente a dos profesores que hayan impartido la asignatura de cálculo diferencial. Ambos ejercen su labor docente como profesor novel y experto, respectivamente, en el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de servicios no. 65, (CBTis 65) en Irapuato, Guanajuato, México. Esta institución forma parte de la Dirección General de Estudios Tecnológicos e Industriales (DGETI), siendo ésta el subsistema de Nivel Medio Superior con mayor número de estudiantes de la Secretaría de Educación Pública de México (SEP) y fue la sede de aplicación de la presente investigación. Para la recolección de datos de estos profesores se recogieron su consentimiento informado y participación voluntaria.

Uno de los profesores fue seleccionado por cumplir con las características que refieren a profesor experto, según Schempp et al. (1998): "aquel docente que a través de la experiencia y el continuo aprendizaje ha alcanzado un respetable y reconocible nivel de experiencia pedagógica" (pp 11-12). Se referirá a él, de aquí en adelante, como profesor experto.

El otro profesor que forma parte del estudio, de acuerdo con Schempp et al. (1998), es considerado profesor novel, por carecer de la experiencia del profesor experto, por lo que, es un profesor que va iniciando en la docencia y, por lo general, los recursos con los que cuenta, son los que obtuvo de su formación académica. De aquí en adelante se referirá a él como profesor novel.

Ambos profesores son ingenieros y han participado en cursos de actualización docente, los cuales son ofertados cada semestre, por parte de la Coordinación Sectorial de Fortalecimiento Académico (COSFAC), quien forma parte de la SEP y, algunos de ellos, han sido en colaboración con el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV), procurando la profesionalización docente de los maestros de matemáticas de la institución. A su vez, han participado en cursos pedagógicos, algunos asistidos por el Centro de Actualización Permanente (CAP).

4.2. Instrumento de recolección de datos

Se diseñó un cuestionario en el que se tomaron en cuenta tres componentes: el significado de la función, sus registros de representación y los dominios del MKT, de tal manera que se creó una especie de amalgama que permitiera profundizar en los saberes de los profesores respecto a estos tres componentes.

Así surgió la primera versión del cuestionario. Constituida originalmente por 12 tareas, buscando abarcar cada uno de los significados de la función; al ser seis los que se tomaron en consideración en esta investigación, resultó conveniente proponer dos tareas para cada tipo de significado. Sin embargo, para el significado de *la función como expresión analítica* se pensaron en tres tareas debido a la gran utilidad y trascendencia que tiene este significado en el aula de clases. Finalmente, se consideraron 13 tareas.

Posteriormente, el objetivo fue diseñar las tareas, de tal forma que permitieran poner de manifiesto no solo el significado de la función, sino también cada uno de los seis registros de representación. Con estas dos condicionantes en mente, se procedió a elaborar las tareas. De las 13 tareas, 12 son de elaboración propia de la investigación y una fue adaptada de Azcarate y Deulofeu (1996). Una vez con las tareas explícitas, el siguiente objetivo consistió en adecuarlas para elaborar situaciones, que permitieran ahondar en cada uno de los dominios del MKT y, al mismo tiempo, que fuera posible poner de manifiesto las tres actividades cognitivas fundamentales asociadas a toda representación, según Duval (2006): formación, tratamiento y conversión. Para cumplir con este propósito, fue necesario tener en mente las posibles respuestas que los profesores pudieran ofrecer a cada una de las tareas.

Cuidando la extensión del cuestionario y considerando el tiempo disponible para la aplicación y el necesario para la revisión de las respuestas, se decidió que cada tarea estuviera conformada por dos preguntas o ítems. Y el objetivo fue que cada uno, procurara profundizar en un dominio diferente del MKT. Finalmente, se obtuvo un cuestionario en su versión inicial, compuesto de 13 tareas, que representan 26 preguntas (Anexo 1).

4.2.1 Análisis preliminar del instrumento

A continuación, se describe la finalidad de cada tarea que conformó la versión inicial del cuestionario:

TAREA 1

El significado que se busca poner de manifiesto en esta tarea es el de *la función como correspondencia*. Como puede verse en la figura 9, la situación plantea las indicaciones de un profesor que solicita llenar una tabla relacionando las medidas de ciertos ángulos en radianes y en grados sexagesimales, mediante la fórmula de conversión entre los dos sistemas de unidades; por lo que, partiendo de la expresión analítica y buscando la manipulación numérica, se pretende realizar una *conversión* del registro algebraico al tabular o numérico. El ítem a) busca exponer los conocimientos del profesor respecto a con qué contenidos más avanzados del currículo escolar está relacionada esta tarea, esto es el subdominio CH. El ítem b) cuestiona por el objetivo que tiene la tarea, buscando profundizar en el subdominio CC. Las respuestas esperadas que se tuvieron en mente a la hora de diseñar la tarea y las preguntas se encuentran en la tabla 3.

Figura 9

Tarea 1 del cuestionario

Tarea 1

Un profesor solicita a los estudiantes completar la siguiente tabla, convirtiendo la medida de los ángulos dados en el sistema sexagesimal al cíclico.

$$rad = \left(\frac{\pi}{180}\right)(Grados)$$

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	180º	270º	360º
Radianes									

a) ¿Con cuáles contenidos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema?

b) De acuerdo con el currículo escolar, ¿cuál es el objetivo de la tarea?

Tabla 3

Respuestas esperadas a los ítems de la tarea 1 del cuestionario

Ítem	Respuesta esperada
a)	Partiendo de esta tarea se puede introducir al concepto de función como correspondencia, el cual sirve como referente para el estudio de contenidos matemáticos más avanzados del currículo escolar como las razones y funciones trigonométricas y todo lo que ello engloba: límites, derivadas e integrales, con sus respectivas aplicaciones.
b)	De acuerdo al currículo escolar del bachillerato tecnológico, esta es una tarea que los estudiantes pudieron abordar en el segundo semestre, cuando cursaron la materia de “geometría y trigonometría”. El objetivo de la tarea, al abordarla en la asignatura de cálculo diferencial, es que los estudiantes comprendan que las unidades de los ángulos se corresponden en dos sistemas, para este caso, el sexagesimal y cíclico.

TAREA 2

Esta tarea fue adaptada de Azcarate y Deulofeu (1996). El significado que se pretende poner de manifiesto en esta es el de *la función como correspondencia*. Como puede verse en la figura 10, el contexto es una reunión en donde todos los asistentes se saludan de mano y se busca encontrar una correspondencia entre el número de personas y la cantidad de apretones de mano que habrá. Por lo que, el ítem a) consiste en determinar una expresión algebraica que permita calcular el número de apretones de mano que se generan en función de la cantidad de asistentes, lo cual permitirá exponer el subdominio CCC. El ítem b) pregunta por las posibles dificultades a las que se enfrentarían los estudiantes para dar solución a la situación expuesta en la tarea; esto es propio del subdominio CCEs. Como puede apreciarse, el objetivo de esta tarea es realizar una *conversión* entre los registros: lengua natural, algebraico y numérico. En la tabla 4 se muestran las respuestas esperadas que se tuvieron en mente a la hora del diseño de esta tarea.

Figura 10

Tarea 2 del cuestionario

Tarea 2
Fuente: Azcarate & Deulofeu (1996)

Al acabar una reunión a la que asisten un cierto número de personas, todos se dan la mano.

Personas	5	7			n
Apretones de mano			6	45	

a) Llamando n al número de personas, escriba una expresión en n que dé el número de apretones de mano.
b) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta la tarea

Tabla 4

Respuestas esperadas a los ítems de la tarea 2 del cuestionario

Ítem	Respuesta esperada
a)	El problema puede interpretarse con ayuda de geometría, considerando a cada persona de la reunión como el vértice de un polígono cualquiera, en donde la línea que une dos vértices, será un apretón de mano. De tal forma que el número de apretones será igual a la suma de las diagonales y lados de dicho polígono. La fórmula para el cálculo de las diagonales de un polígono con n lados es $n = \frac{n(n-3)}{2}$ y si sumamos n, tendremos la función $A_m(n) = \frac{n(n-1)}{2}$, en donde $A_m(n)$ es el número de apretones de mano en función del número de personas n.
b)	Las posibles dificultades que podrían enfrentar los estudiantes son: 1) Interpretar la tarea con ayuda de geometría. Una de las principales dificultades de los estudiantes es articular los conocimientos adquiridos previamente, en este caso en la asignatura de geometría y trigonometría, para dar solución a una tarea que aparentemente está en otro contexto. 2) Dificultad al recordar la fórmula para el cálculo de las diagonales. 3) Asimilar que el número de apretones de mano es igual a la suma de las diagonales más el número de lados. Ante el hecho de que los estudiantes recuerden la fórmula de las diagonales, pueden considerar que esa, tal cual, es la expresión matemática que solicita el problema. 4) Duplicar los apretones de mano, al no considerar que cuando la persona A le da la mano a la persona B, ya está incluido el apretón de mano de la persona B a la persona A.

TAREA 3

El significado que se busca poner de manifiesto en esta tarea es el de *la función como relación entre magnitudes variables*. Como puede verse en la figura 11, la situación plantea la solicitud a los estudiantes de calcular la velocidad en diferentes instantes dadas las características de una función con respecto al tiempo. El objetivo es movilizar la conversión entre los registros lenguaje natural, algebraico y numérico. El ítem a) pretende profundizar en el subdominio CEC al cuestionar por los contenidos matemáticos que necesitan los estudiantes para ofrecer una solución a la tarea. El ítem b) pretende ahondar en el subdominio CCEs al solicitar describir posibles dificultades que podrían presentar los estudiantes para dar una solución correcta a la tarea. En la tabla 5 se muestran las respuestas esperadas que se tuvieron en mente a la hora del diseño de esta tarea.

Figura 11

Tarea 3 del cuestionario

Tarea 3

La velocidad de una partícula se encuentra en función del tiempo y puede calcularse mediante una expresión lineal en donde la aceleración es la pendiente y la velocidad inicial, la ordenada al origen. Si una partícula tiene una aceleración de $a = 3\frac{m}{s^2}$ y una $V_i = 2\frac{m}{s}$, se solicita a los estudiantes calcular la velocidad en los diferentes instantes que se muestran en la tabla:

Tiempo (s)	0	1	2	3	5	10	12	15	20
Velocidad (m/s)									

a) ¿Qué contenidos matemáticos deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta?
b) Describa las posibles dificultades a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta la tarea

Tabla 5

Respuestas esperadas a los ítems de la tarea 3 del cuestionario

Ítem	Respuesta esperada
a)	Para dar solución a la tarea, los alumnos deben considerar el concepto de línea recta, de pendiente y de ordenada al origen, para construir la ecuación ordinaria de una recta y, entonces, construir la función lineal que ofrezca la solución a la actividad, la cual es: $V(t) = at + V_i$
b)	Las posibles dificultades que podrían enfrentar los estudiantes son: 1) Dificultad al recordar qué es pendiente y qué es ordenada al origen. 2) No articular los conocimientos adquiridos en la asignatura de geometría analítica con el contexto de la tarea para dar solución a ella. 3) Una vez encontrada la función de la velocidad, una dificultad podría ser un mal reemplazo de los valores de la variable independiente e incluso, una mala ejecución de las operaciones aritméticas para la obtención de la velocidad.

TAREA 4

El significado que se busca poner de manifiesto en esta tarea es el de *la función como relación entre magnitudes variables*. Como puede verse en la figura 12, la situación plantea la solicitud a los estudiantes de encontrar la gráfica de la relación temperatura-tiempo de una función, así como su punto máximo. Dada la expresión analítica, se pretende movilizar la *conversión* entre el registro algebraico, numérico y gráfico. El ítem a) cuestiona por la forma en que explicaría la solución de la tarea a los estudiantes, algo propio del subdominio CCEn. El ítem b) se enfoca en el subdominio CC buscando por los conocimientos referentes a la relación transversal de esta tarea con otras asignaturas. En la tabla 6 se muestran las respuestas esperadas que se tuvieron en mente a la hora del diseño de esta tarea.

Figura 12

Tarea 4 del cuestionario

Tarea 4

La temperatura T (en ºC) de un cuerpo varía con respecto al tiempo t (en horas) transcurrido desde que ha sido sometida a calor y se rige bajo la expresión $T(t) = 16t - 3.2t^2$ con $0 \leq t < 5$. Se solicita representar gráficamente la relación Temperatura-tiempo y encontrar la temperatura máxima que alcanza la pieza.

a) ¿Cómo explicaría a los alumnos la resolución de la tarea?
b) De acuerdo con el currículo escolar del bachillerato tecnológico, ¿cuál es la relación transversal de esta tarea con otras asignaturas?

Tabla 6

Respuestas esperadas a los ítems de la tarea 4 del cuestionario

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Respuesta esperada</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Aunque hay diferentes formas de explicar la resolución de la tarea, se espera que se puedan considerar algunos de los componentes que se mencionan a continuación:
En primer lugar, se trabaja con la noción de dependencia. Para este caso, es importante hacer hincapié en que la temperatura del cuerpo va a depender del tiempo en que dicho cuerpo ha estado sometido al calor.
Posteriormente, se trabaja con la expresión algebraica de la temperatura. Se analizan sus propiedades, como lo son: es una función cuadrática, lo que en el registro gráfico representa una parábola; la constante del término cuadrático es negativa, lo que indica que es una parábola cóncava, en donde hay un punto máximo, el cual es, justamente, una de las solicitudes de la tarea.
A continuación, se hace énfasis en el dominio de la función, el tiempo al que se sometió el cuerpo al calor es $[0,5)$, lo que permite convertir la función al registro numérico mediante una tabla como la siguiente:
<table>
<tr><td>x (tiempo)</td><td>y (Temperatura)</td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>(0,0)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>12.8</td><td>(1,12.8)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>19.2</td><td>(2,19.2)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>19.2</td><td>(3,19.2)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>12.8</td><td>(4,12.8)</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>(5,0)</td></tr>
</table>
Si el tiempo es la variable independiente, sus valores deben ubicarse en el eje de las abscisas y, por consiguiente, la temperatura en el eje de las ordenadas y, entonces, se ubican los pares ordenados obtenidos.
Se determina el vértice (h,k) de la parábola con las fórmulas $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{4ac-b^2}{4a}$, con $a=-3.2, b=16, c=0$. Obteniendo $V=(2.5,20)$
Se traza la parábola que pase por los pares ordenados ubicados en el plano cartesiano y se da por terminada la tarea al explicitar que el vértice proporciona la temperatura máxima, para este caso 20ºC, cuando han transcurrido 2.5 horas.</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>De acuerdo al currículo escolar para el bachillerato tecnológico, la tarea propuesta se articula con la asignatura de física para determinar el comportamiento de las variables que intervienen en un fenómeno físico a través de métodos gráficos y analíticos. En este caso, mediante la representación en el registro gráfico de la función cuadrática, se pudo interpretar la relación entre la temperatura de un cuerpo y el tiempo en que este había sido sometido a calor.</td></tr>
</table>

TAREA 5

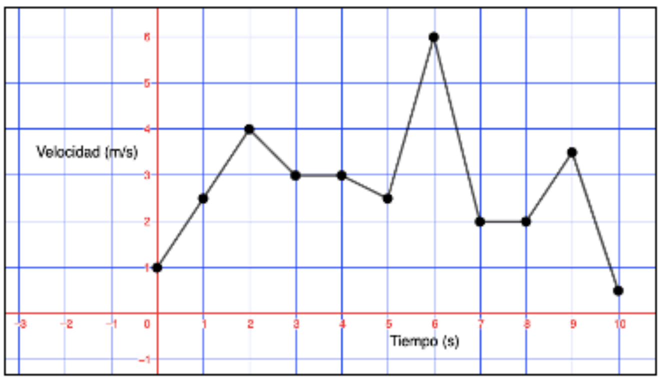
El significado que se busca poner de manifiesto en esta tarea es el de *la función como representación gráfica*. Como puede verse en la figura 13, la situación plantea a un profesor que solicita a sus estudiantes analizar la gráfica de la velocidad de una partícula. El ítem a) pretende poner de manifiesto el subdominio CCEn al cuestionar por la forma de explicitar cómo calcular la velocidad en un punto de la gráfica que no resulta tan evidente. El ítem b) busca indagar en el subdominio CEC al cuestionar por los contenidos matemáticos que necesitan los estudiantes para ofrecer una solución por sí solos al ítem a). Con esta tarea se pretende movilizar la *formación* en el registro gráfico, al identificar una función mediante una gráfica. En la tabla 7 se muestran las respuestas esperadas que se tuvieron en mente a la hora del diseño de esta tarea.

Figura 13

Tarea 5 del cuestionario

Tarea 5

Un profesor solicita a sus estudiantes analizar la siguiente gráfica que representa la velocidad de una partícula en diferentes instantes.



a) ¿Qué estrategia utilizaría para explicar cómo calcular la velocidad en el segundo 5.3?
b) ¿Qué contenidos matemáticos deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta el ítem a)?

Tabla 7

Respuestas esperadas a los ítems de la tarea 5 del cuestionario

Ítem	Respuesta esperada
a)	Aunque hay diferentes formas de explicar la solicitud de la tarea, se espera poder considerar algunos de los componentes que se mencionan a continuación: Durante todo el tiempo en que la partícula estuvo en movimiento, se generaron desplazamientos con comportamientos lineales. En el segundo 5, $v = 2.5\frac{m}{s}$ y en el segundo 6, $v = 6\frac{m}{s}$. Esto marca el inicio y término de una recta que pasa por los puntos $A(5, 2.5)$ y $B(6,6)$. Si se busca la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B, se obtiene una función lineal que determina el comportamiento entre el segundo 5 y 6, la cual es $v(t) = 3.5t - 15$. Finalmente, $v(5.3) = 3.55\frac{m}{s}$

b)	Para que los estudiantes puedan dar una respuesta correcta a la situación planteada, ellos deben considerar: el concepto de línea recta y cómo determinar su ecuación cuando se conocen dos puntos de la misma. También, deben ser capaces de encontrar pares ordenados dada una gráfica, así como convertir la ecuación de una recta en una función lineal con variables dependiente e independiente y tener clara la relación de dependencia entre dichas variables.

TAREA 6

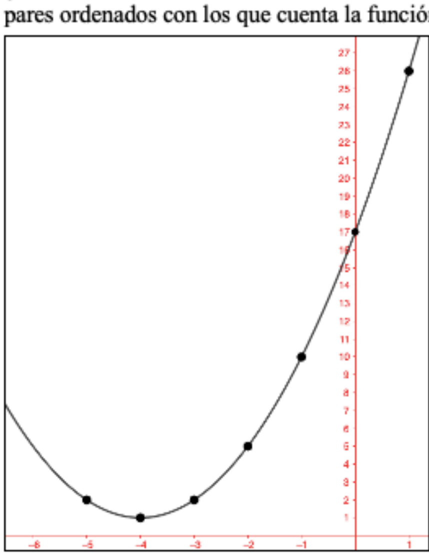
El significado que se busca poner de manifiesto en esta tarea es el de *la función como representación gráfica*. Como puede verse en la figura 14, la situación plantea la solicitud de un profesor a sus estudiantes de determinar pares ordenados dada una gráfica y se expone el caso de un estudiante que pregunta si hay un número finito de pares ordenados que representen dicha función. Con esta tarea se pretende movilizar la *conversión* entre los registros gráfico y cartesiano. El ítem a) ahonda en el CCEn al cuestionar por una estrategia para explicitar la duda del estudiante, mientras que el ítem b) pretende profundizar en el CEC al preguntar por contenidos matemáticos que pueden estudiarse aprovechando esta situación. En la tabla 8 se muestran las respuestas esperadas que se tuvieron en mente a la hora del diseño de esta tarea.

Figura 14

Tarea 6 del cuestionario

Tarea 6

Un profesor solicita a los estudiantes determinar pares ordenados de la función representada en la gráfica, de acuerdo con la tabla dada. Al terminar, un estudiante pregunta si estos son los únicos pares ordenados con los que cuenta la función.



abscisa	ordenada	(x,y)
-5		(,)
-4		(,)
-3		(,)
-2		(,)
-1		(,)
0		(,)
1		(,)

a) ¿Qué recurso utilizaría para resolver la inquietud del estudiante?
b) ¿Qué contenidos matemáticos pueden abordarse mediante el estudio de esta situación?

Tabla 8

Respuestas esperadas a los ítems de la tarea 6 del cuestionario

Ítem	Respuesta esperada
a)	Aunque para dar solución a la inquietud del estudiante, pueden existir diferentes formas de abordarla, se espera que se consideren los siguientes recursos: El concepto de función incluye una correspondencia entre dos conjuntos, llamados dominio y rango. A cada valor del dominio le corresponde un único valor del rango. El dominio de la función en cuestión incluye a todos los números reales, lo que representa un conjunto infinito de posibles valores que puede tomar la variable independiente; lo que lleva a comprender que el rango, aunque no incluye a todos los números reales, también es un conjunto infinito, pues la cardinalidad de dicho conjunto es imposible de contar. Esto implica que la cantidad de pares ordenados que se pueden obtener, es infinita. Haciendo uso de recursos tecnológicos, el software GeoGebra, cuenta con una herramienta dinámica en la que se permite mover un punto a lo largo de la gráfica de una función y en cada desplazamiento el software reporta las coordenadas que el punto tiene en dicha posición. Esto permite vislumbrar que las funciones están conformadas por una infinidad de puntos o pares ordenados.
b)	Los contenidos matemáticos que pueden abordarse mediante la situación planteada corresponden al estudio de las propiedades de la función. En este caso, la función cuadrática es una función no inyectiva y no suprayectiva. Esto es, no hay una relación biunívoca entre las variables de la función y además, el rango no son todos los números reales. La cardinalidad de los conjuntos es otro contenido matemático que se pudiera emplear para hacer hincapié en que los conjuntos dominio y rango son incontables y por lo tanto su cardinalidad es infinita.

TAREA 7

El significado que se busca poner de manifiesto en esta tarea es el de *la función como expresión analítica*. Como puede verse en la figura 15, la situación plantea la solicitud de un profesor a sus estudiantes de encontrar una expresión matemática que aborde la relación funcional entre dos variables, de tal forma que, precisamente, el ítem a) solicita determinar dicha expresión para profundizar en el subdominio CCC. El ítem b) busca indagar en el subdominio CEC al cuestionar por los contenidos matemáticos que necesitan los estudiantes para ofrecer una solución a la tarea. Dadas las características de la función de manera textual, con esta situación se pretende movilizar la *conversión* entre el registro lengua natural al algebraico. En la tabla 9 se muestran las respuestas esperadas que se tuvieron en cuenta a la hora del diseño de esta tarea.

Figura 15

Tarea 7 del cuestionario

Tarea 7

Un profesor solicita a sus estudiantes encontrar una expresión matemática que relacione linealmente el peso P (en kilogramos) con la edad t (en años) de un bebé que al nacer pesó 3.5 kg y que tres años después pesó 10.5 kg.

a) Encuentre la expresión matemática
b) ¿Qué contenidos matemáticos deben utilizar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?

Tabla 9

Respuestas esperadas a los ítems de la tarea 7 del cuestionario

Ítem	Respuesta esperada
a)	La ecuación de la recta que pasa por dos puntos, en este caso $A(0,3.5)$ y $B(3,10.5)$, permite expresar una funcionalidad lineal entre las variables, resultando así $P(t) = \frac{7}{3}t + 3.5$, donde P es el peso y t los años transcurridos.
b)	Para dar solución a la tarea, los alumnos deben considerar contenidos matemáticos como el concepto de línea recta, cómo encontrar su ecuación cuando se conocen dos puntos y deben de saber interpretar la ecuación de la recta como una función lineal entre dos variables.

TAREA 8

El significado que se busca poner de manifiesto en esta tarea es el de *la función como expresión analítica*. Como puede verse en la figura 16, se plantea una situación en donde un estudiante obtuvo ciertos datos al manipular numéricamente una expresión algebraica y mediante el ítem a) se busca indagar por el subdominio CCEs al cuestionar por el posible razonamiento que pudo haber tenido el estudiante para llegar a esa conclusión. El ítem b) pregunta por estrategias para orientar a los estudiantes que han cometido errores en la tarea, característica propia del subdominio CCEn. Con esta tarea se busca movilizar la *conversión* entre los registros algebraico y numérico. En la tabla 10 se muestran las respuestas esperadas que se tuvieron en cuenta a la hora del diseño de esta tarea.

Figura 16

Tarea 8 del cuestionario

Tarea 8

Al representar numéricamente a la función $f(x) = x^2 + 5$, un alumno obtuvo los siguientes datos:

x	Operaciones	f(x)
-3	$-3^2+5 = -9+5 = -4$	-4
-2	$-2^2+5 = -4+5 = 1$	1
-1	$-1^2+5 = -1+5 = 4$	4
0	$0^2+5 = 0+5 = 5$	5
1	$1^2+5 = 1+5 = 6$	6
2	$2^2+5 = 4+5 = 9$	9
3	$3^2+5 = 9+5 = 14$	14

a) Si el alumno estuviera en un error, describa el posible razonamiento que lo condujo a ello
b) ¿Qué estrategias utilizaría usted como profesor para orientar a aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea a la tarea?

Tabla 10

Respuestas esperadas a los ítems de la tarea 8 del cuestionario

Ítem	Respuesta esperada
a)	El alumno está en un error que se originó debido a que no está contemplando el signo de los valores negativos de la variable x al momento de encontrar su cuadrado. El estudiante debe comprender que $(-x)^2 \neq -x^2$. Como puede observarse en el desarrollo del cuadrado $(-x)^2 = (-x)(-x)$, cuando se busca el cuadrado de un número negativo, el resultado será siempre positivo. En el caso de las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$, el signo del coeficiente a es independiente al valor que se le asigne a x. Por lo que si $x < 0$, habrá que hacer la distinción entre el signo del coeficiente a y el signo del valor de x, así como respetar la jerarquía de operaciones: primero se calculan las potencias y enseguida los productos.
b)	Aunque para dar solución a la tarea, pueden existir diferentes formas de abordarla, se espera que se consideren algunos de los siguientes puntos: Además de la aclaración y explicación del porqué el procedimiento es incorrecto, se pueden proponer actividades paralelas de refuerzo, como son algunos ejercicios algebraicos que incluyan determinar cuadrados de número negativos, en donde el procedimiento incluya expresar las potencias como multiplicaciones, para que los estudiantes comprendan el motivo por el cual las potencias con bases negativas y exponentes pares darán resultados con signos positivos, mientras que las potencias con bases negativas y exponentes impares ofrecerán resultados negativos.

TAREA 9

El significado que se busca poner de manifiesto en esta tarea es el de *la función como expresión analítica*. Como puede verse en la figura 17, se parte de la asimilación de saberes previos y se plantea la solicitud de un profesor a sus estudiantes de construir una expresión algebraica que represente una relación funcional entre dos magnitudes. Al preguntar por las posibles dificultades que pudieran tener los estudiantes, en el ítem a) se pretende indagar en el subdominio CCEs, mientas que al cuestionar por los contenidos matemáticos que necesitan los estudiantes para dar una solución correcta a la tarea, en el ítem b) se pretende profundizar en el CEC. Con esta tarea se pretende conseguir un *tratamiento* en el mismo registro algebraico. En la tabla 11 se muestran las respuestas esperadas que se tuvieron en cuenta a la hora del diseño de esta tarea.

Figura 17

Tarea 9 del cuestionario

> **Tarea 9**
>
> Se sabe que el área de un cuadrado es $A = l^2$ y que su perímetro es $P = 4l$. Se podría decir que ambas fórmulas están en función de la longitud del lado l. Se solicita a los estudiantes encontrar una expresión algebraica para calcular el área en función del perímetro.
>
> a) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta la tarea.
> b) ¿Qué contenidos matemáticos deben utilizar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?

Tabla 11

Respuestas esperadas a los ítems de la tarea 9 del cuestionario

Ítem	Respuesta esperada
a)	La principal dificultad a la que se enfrentarían los estudiantes es al tratamiento algebraico de la tarea. Dadas dos funciones con variables independientes iguales, unirlas mediante una sola expresión, que represente una función de otra variable independiente, implica un reto. Así, el estudiante se enfrentaría a la necesidad de igualar las funciones, mediante el despeje en ambos casos de la variable l y posteriormente, despejar la variable A. Surgiendo, finalmente, la expresión funcional $A(P) = \frac{P^2}{16}$
b)	Para dar una solución correcta a la tarea, los estudiantes deben considerar contenidos algebraicos como el despeje de fórmulas, sistema de ecuaciones 2×2 y una adecuada interpretación de los conceptos métricos de área y perímetro.

TAREA 10

El significado que se busca poner de manifiesto en esta tarea es el de *la función como correspondencia arbitraria*. Como puede verse en la figura 18, se plantea la afirmación de un profesor referente a un gráfico que representa una función, aun sin existir una representación algebraica. Esta tarea aborda la situación sanitaria actual en la que nos encontramos, como resultado de los contagios debidos a COVID-19, por lo que, sin duda, resulta ser gran referente al significado en cuestión de la función. El ítem a) pregunta por los argumentos con los que explicaría a los estudiantes que el gráfico es una función, lo cual resulta ser una característica del subdominio CCEn. El ítem b), referente al subdominio CH, cuestiona por los contenidos más avanzados del currículo escolar que se relacionan con el estudio de esta tarea. En la tabla 12 se muestran las respuestas esperadas que se tuvieron en cuenta a la hora del diseño de esta tarea.

Figura 18

Tarea 10 del cuestionario

Tarea 10

En agosto 11 del 2021, el diario mexicano El Financiero, presentó el número de casos confirmados de COVID-19, para concientizar ante la llegada de la tercera ola de contagios de la pandemia.

Aunque es imposible obtener una expresión algebraica para calcular el número de casos según el tiempo, un profesor comenta a sus estudiantes que este gráfico representa una función.

a) ¿Bajo qué argumentos explicaría usted a los alumnos que el gráfico representa una función?
b) ¿Con cuáles contenidos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en esta situación?

Tabla 12

Respuestas esperadas a los ítems de la tarea 10 del cuestionario

Ítem	Respuesta esperada
a)	Aunque existen diversos argumentos que pueden argumentar la respuesta a la tarea, se espera que se consideren los siguientes componentes: Una función es una correspondencia entre dos conjuntos, llamados dominio y rango. A cada valor del dominio le corresponde un único valor del rango. Dicha correspondencia, no siempre puede representarse como una expresión analítica, en donde haya un procedimiento matemático para obtener el valor de una variable, dado el valor de la otra. Es decir, en algunas ocasiones las variables simplemente se relacionan, sin dejar saber el cómo lo hacen y esa relación cumple con las características de una función, pues cada valor del dominio tiene un único valor del rango. A este tipo de funciones se les conoce como arbitrarias, esto es, una función cualquiera, en la que no hace falta conocer su registro algebraico.
b)	De acuerdo al currículo escolar de la asignatura de cálculo diferencial, los contenidos matemáticos que pueden estudiarse, tras abordar esta tarea, son relacionados a las propiedades de las funciones, por ejemplo, los intervalos donde la función es creciente y decreciente, límites y continuidad, así como máximos y mínimos globales y locales. También, en el currículo de matemáticas del bachillerato tecnológico, más tarde, esta tarea puede ser estudiada en estadística descriptiva, en la asignatura de probabilidad y estadística, cuando se abordan contenidos matemáticos relacionados a cómo presentar datos estadísticos.

TAREA 11

El significado que se busca poner de manifiesto en esta tarea es el de *la función como correspondencia arbitraria*. Como puede verse en la figura 19, en esta tarea se pregunta por la propiedad de una función arbitraria y aunque ninguno de los dos ítems solicita responder el cuestionamiento, en el ítem a) se pide analizar el objetivo que tendría el abordar esta pregunta en el aula, de acuerdo con el currículo escolar, una característica propia del CC. El ítem b), referente al subdominio CH, cuestiona por los contenidos más avanzados del currículo escolar que se relacionan con el estudio de esta tarea. Con esta tarea se pretende un *tratamiento* de la función en el registro algebraico. En la tabla 13 se muestran las respuestas esperadas que se tuvieron en cuenta a la hora del diseño de esta tarea.

Figura 19

Tarea 11 del cuestionario

Tarea 11

¿La función $h(t) = f(1 + t^2)$ es par o impar?, donde f es una función arbitraria.

a) De acuerdo con el currículo escolar, ¿cuál es el objetivo de la tarea?
b) ¿Con cuáles contenidos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema?

Tabla 13

Respuestas esperadas a los ítems de la tarea 11 del cuestionario

Ítem	Respuesta esperada
a)	El objetivo de la tarea es el análisis de una de las propiedades de las funciones: la simetría reflectiva a través del eje de las ordenadas, lo cual es de gran ayuda cuando se busca la representación gráfica de la función. A continuación, se ofrece la solución: Para que la función $h(t)$ sea par, debe cumplirse que $h(t) = h(-t)$ Siendo $g(t) = 1 + t^2$ entonces, $h(t) = f\big(g(t)\big)$ Por lo tanto, dada la condición para que una función sea par, $f\big(g(t)\big) = f\big(g(-t)\big)$ Al evaluar $g(-t)$ se obtiene $1 + (-t)^2 = 1 + t^2 = g(t)$ Por lo tanto, se cumple que $f\big(g(-t)\big) = f\big(g(t)\big)$ Y con ello, se demuestra que $h(-t) = h(t)$ Por lo que la función es par, sin importar, cómo sea $f(t)$. Por lo que la función es par, sin importar cómo sea $f(t)$.
b)	Determinar si una función es par o impar abona de manera significativa cuando se busca la representación de las funciones en el registro gráfico. Una función par presenta simetría respecto al eje de las ordenadas, mientras que una función impar presenta una simetría rotacional con respecto al origen. También, de acuerdo al currículo de matemáticas, más tarde este concepto es usado en las Series de Fourier.

TAREA 12

El significado que se busca poner de manifiesto en esta tarea es el de *la función a partir de la teoría de conjuntos*. Como puede verse en la figura 20, se plantea una situación donde un profesor solicita a sus estudiantes *convertir* una función expresada algebraicamente al registro cartesiano. El álgebra que se utiliza en esta tarea es un álgebra superior, por lo que el ítem a) cuestiona por el nivel educativo para el que es pertinente esta tarea, de acuerdo con el currículo escolar, buscando profundizar en el subdominio CC. El ítem b) solicita dar solución a la tarea, buscando indagar en el subdominio CCC. En la tabla 14 se muestran las respuestas esperadas que se tuvieron en cuenta a la hora del diseño de esta tarea.

Figura 20

Tarea 12 del cuestionario

Tarea 12

Un profesor, solicita a sus estudiantes determinar la siguiente función como par ordenado $F = \{(x, y) \in A \times B : y = x + 1\}$, si $A = \{x : 3 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{x - 2 : 5 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}\}$

a) De acuerdo al currículo escolar, ¿para qué nivel educativo considera pertinente este problema?
b) Encuentra los pares ordenados de la función

Tabla 14

Respuestas esperadas a los ítems de la tarea 12 del cuestionario

Ítem	Respuesta esperada
a)	El currículo escolar de la asignatura de cálculo diferencial para el bachillerato tecnológico, no incluye el estudio de la función a partir de la teoría de conjuntos. Por lo que la tarea planteada representa una situación para ser abordada en niveles superiores, en donde se tienen competencias de la notación conjuntista y su relación con las funciones.
b)	Aunque los procedimientos pueden variar, se espera la consideración de los siguientes componentes: $\mathrm{A} = \{3,4,5\}$ $\mathrm{B} = \{3,4,5,6,7\}$ Si $\mathrm{x} = 3$, $\mathrm{y} = 4$ Si $\mathrm{x} = 4$, $\mathrm{y} = 5$ Si $\mathrm{x} = 5$, $\mathrm{y} = 6$ $\mathrm{F} = \{(3,4); (4,5); (5,6)\}$

TAREA 13

El significado que se busca poner de manifiesto en esta tarea es el de *la función a partir de la teoría de conjuntos*. Como puede verse en la figura 21, la tarea describe una situación donde se tiene una especie de sucesión, en la que cada término se va obteniendo mediante un *tratamiento* algebraico, buscando la *conversión* entre registros lengua natural, numérico, sagital y algebraico. En el ítem a) se cuestiona por la pertinencia de la tarea como una introducción al concepto de función, característica del subdominio CCEn. En el ítem b) se asume que la tarea es propia de un nivel educativo inferior al bachillerato y se pregunta por la manera de adaptar la situación para abordarla a nivel bachillerato, cuando se estudia formalmente la noción de función; intentando profundizar en el subdominio CH. En la tabla 15 se muestran las respuestas esperadas que se tuvieron en cuenta a la hora del diseño de esta tarea.

Figura 21

Tarea 13 del cuestionario

Tarea 13

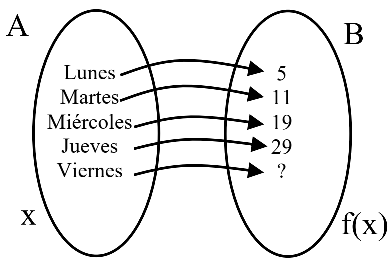
Un profesor de secundaria propone la siguiente situación:
El lunes, Juan tenía $5 pesos, después de ahorrar cierta cantidad de lo que sus padres le dan para gastar en la escuela, el martes ya tiene $11 pesos. Para el miércoles, cuenta con $19 y el día siguiente, dispone de $29. ¿Cuánto dinero logró juntar el viernes?

a) ¿Considera que la tarea es apropiada para iniciar el estudio del concepto de función?
b) ¿Cómo adaptaría la situación para, más tarde, abordar el concepto de función a nivel bachillerato?

Tabla 15

Respuestas esperadas a los ítems de la tarea 13 del cuestionario

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Respuesta esperada</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>La situación es adecuada para ser abordada en el estudio de las funciones, puesto que una sucesión representa una función que varía con respecto a la posición de los términos. En este caso, se tienen dos conjuntos que representan los días de la semana y la cantidad ahorrada, respectivamente. Si a cada uno de los días de la semana se le asigna un valor numérico, dependiendo la posición que ocupen, se puede calcular una expresión que permita encontrar la cantidad ahorrada, de la siguiente forma:
A={días de la semana}
B={1,2,3,4,5}



Considerando que lunes es el día 1 (analizarlo desde el punto de vista de una sucesión):
<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>11</td></tr>
<tr><td>3</td><td>19</td></tr>
<tr><td>4</td><td>29</td></tr>
<tr><td>5</td><td>41</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>De acuerdo con el problema, la tarea fue propuesta por un profesor de secundaria, sin embargo, con base en el currículo escolar de la asignatura de cálculo diferencial, la tarea es adecuada para ser abordada, también, en el nivel bachillerato, debido a que es un buen referente para introducir a los estudiantes al concepto de función, mediante el estudio de las sucesiones. Dándole continuidad al problema de aprendizaje al que alude la tarea, se podría complementar con la solicitud:
a) Encuentra una expresión matemática que permita determinar el dinero en función a la posición del día en cuestión.
Lo cual permitiría conducir a los estudiantes, a la conversión al registro algebraico. Obteniendo la expresión $f(x) = (x+1)^2 + x$</td></tr>
</table>

RESUMEN

De acuerdo con el análisis previo, el cuestionario integraba elementos de los diferentes dominios del conocimiento del profesor según el MKT y también promovía los diferentes significados. Estas relaciones pueden apreciarse, a manera de síntesis, en la figura 22.

Figura 22

Distribución de registros de representación y dominios del MKT en las tareas de la versión preeliminar *del cuestionario*

Tarea	Ítem	Dominio del conocimiento					
		CCC	CEC	CH	CCEs	CCEn	CC
1	a			x			x
	b						x
2	a	x					
	b				x		
3	a		x				
	b				x		
4	a					x	
	b						x
5	a					x	
	b		x				
6	a					x	
	b		x				
7	a	x					
	b		x				
8	a				x		
	b					x	
9	a				x		
	b		x				
10	a					x	
	b			x			
11	a						x
	b			x			
12	a						x
	b	x					
13	a					x	
	b			x			

Tarea	Significado de la función	Representaciones movilizadas					
		Natural	Algebraico	Gráfico	Numérico	Sagital	Cartesiano
1	Como correspondencia		x		x		
2	Como correspondencia	x	x		x		
3	Como relación entre magnitudes variables	x	x		x		
4	Como relación entre magnitudes variables		x	x	x		
5	Como representación gráfica			x			
6	Como representación gráfica			x			x
7	Como expresión analítica	x	x				
8	Como expresión analítica		x		x		
9	Como expresión analítica		x				
10	Como correspondencia arbitraria			x			
11	Como correspondencia arbitraria		x				
12	A partir de la teoría de conjuntos		x				x
13	A partir de la teoría de conjuntos	x	x		x	x	

4.2.2. Versión final del Instrumento de recolección de datos

Una vez diseñada cada una de las tareas, el cuestionario fue sometido a evaluación por especialistas en funciones matemáticas, mediante una triangulación de expertos, quienes emitieron observaciones referentes a la correspondencia, pertinencia y formulación de las tareas del cuestionario y su articulación con los significados y registros de representación de funciones con los dominios del MKT (la guía de evaluación se encuentra en el Anexo 2).

El cuestionario utilizado en la investigación se constituyó de 6 tareas (Anexo 3), procurando cuidar la extensión de dicho instrumento. Estas tareas enlazan el conocimiento matemático para la enseñanza del profesor, los registros de representación y los significados de la función. De acuerdo con las observaciones y comentarios de los especialistas, después de la triangulación de expertos, las tareas seleccionadas para formar parte de la nueva versión del cuestionario fueron las tareas: 2, 4, 6, 8, 10 y 12, esto debido a los destacables comentarios que estas tareas recibieron, pudiendo considerarlas como las más significativas para el objetivo de esta investigación. De esta manera, la tarea 2 en la versión inicial, se convirtió en la tarea 1 de la segunda versión; la 4, en la 2; la 6, en la 3; la 12, en la 4; la 8, en la 5 y la 10, en la 6.

Para cuidar la homogeneidad en la distribución de los ítems respecto a los registros de representación de la función y los subdominios del MKT, se modificaron algunos ítems, de la versión inicial, de la siguiente forma:

1. El ítem 4a): *¿Cómo explicaría a los alumnos la resolución de la tarea?,* que profundizaba en el CCEn, se reestructuró para indagar, en su lugar, en el CCC, bajo la solicitud: *Encuentre la representación gráfica de la función y determine la temperatura máxima en el intervalo dado.*

2. El ítem 8b): *¿Qué estrategias utilizaría usted como profesor para orientar a aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea a la tarea?*; que indagaba en el CCEn, se reestructuró para profundizar, en su lugar, en el CC, bajo la siguiente pregunta: *¿qué estrategia o estrategias propondría en el currículo para evitar la ocurrencia de errores como este?*

3. El ítem 12a): *De acuerdo al currículo escolar, ¿para qué nivel educativo considera pertinente este problema?*, que indagaba en el CC, se reestructuró para profundizar, en su lugar, en el CH, mediante la pregunta: *¿Considera que esta tarea es pertinente para el nivel medio superior? Justifique su respuesta*.

4. El ítem 12b): *Encuentre los pares ordenados de la función*, que indagaba en el CCC, se reestructuró para profundizar en el CEC, bajo la pregunta: *¿Qué contenido o contenidos matemáticos deberían utilizar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?*

5. Para incluir una propuesta adicional de la representación en lenguaje natural, la tarea 8, que originalmente era: *Al representar numéricamente a la función* $f(x) = x^2 + 5$*, un alumno obtuvo los siguientes datos: [...], s*e modificó de la siguiente manera:

   Para cada valor x *de la función* f*, hay un único valor* y*. Ambos valores se corresponden elevando al cuadrado los valores* x*, y agregando 5 al resultado de la potencia. Al representar numéricamente esta función, un alumno obtuvo los siguientes datos, en donde se muestra un error común en los estudiantes: [...]*

Adicional a estas modificaciones y después de considerar y analizar las observaciones de los expertos, se pudo notar que el registro de representación de la función, nombrado *sagital*, desapareció tras modificar la pertinencia de la tarea 13, que era la única que lo contemplaba. Por tal motivo, se optó por dejar de considerar el registro sagital, para la presente investigación. Resultando así, solo cinco registros de representación de la función, en los cuales se movilizan las tareas propuestas en la nueva versión del cuestionario:

1. Lenguaje natural
2. Registro algebraico
3. Registro numérico
4. Registro gráfico
5. Registro cartesiano

El alcance que tiene cada una de las tareas de la nueva versión del cuestionario, en cuanto a los componentes teóricos contemplados, se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 16

Distribución de registros de representación y dominios del MKT en las tareas de la versión final del cuestionario

		Registros de representación					**Dominios del conocimiento**					
Tarea original	Tarea final	Lenguaje natural	Algebraico	Numérico	Gráfico	Cartesiano	CCC	CEC	CH	CCEn	CCEs	CC
2	1	X	X	X			X				X	
4	2		X	X	X		X					X
6	3				X	X		X		X		
12	4		X			X		X	X			
8	5	X	X	X							X	X
10	6				X				X	X		

Como puede observarse, la nueva versión del cuestionario tiene una distribución homogénea de los registros de representación de la función y de los dominios del conocimiento. A continuación, se presentan los significados de la función que se busca movilizar con cada una de estas seis tareas:

Tabla 17

Significado de la función que aborda cada tarea del cuestionario

Tarea	**Significado de la función**
1	La función como correspondencia
2	La función como relación entre magnitudes variables
3	La función como representación gráfica
4	La función a partir de la teoría de conjuntos
5	La función como expresión analítica
6	La función como correspondencia arbitraria

De esta manera, la segunda versión del cuestionario, resultó ser la versión final, mismo que constituyó el instrumento de recolección de datos para la presente investigación. Se adjunta el instrumento al final de este trabajo, así como las respuestas esperadas para cada tarea, de acuerdo con las modificaciones realizadas y mencionadas previamente.

4.3. Procedimiento para la recolección de datos

Como se mencionó en el apartado 4.1, los profesores participantes laboran en CBTis 65, así que, por conveniencia, se ha determinado que esta institución fuera la sede de aplicación del cuestionario. Debido a la carga laboral que tienen los profesores, se planificó que la aplicación del instrumento fuera en una sola sesión y tuviera una duración de dos horas como máximo. En este tiempo se pensó, además de la aplicación del cuestionario, en dar una presentación y breve introducción del trabajo de investigación en cuestión, así como una concientización de la importancia que tendrán sus respuestas para la Matemática Educativa.

La sala de lectura del CBTis 65 fue la locación en la que se llevó a cabo la aplicación del cuestionario. Este es un espacio en donde se llevan a cabo las juntas y reuniones de los profesores de la institución, tiene una amplia distribución de espacio, puede albergar hasta 30 personas. Cuenta con una excelente iluminación y está adaptada con aire acondicionado para la comodidad de los asistentes, además, se encuentra ubicada en un lugar apartado de las aulas de clase, lo que permite una excelente concentración.

El cuestionario se aplicó en físico, por lo que fue necesario llevar por lo menos dos impresiones o copias del mismo, uno para cada profesor informante y alguno extra, en caso de que sea necesario. Se les proporcionó, también, bolígrafo, lápiz, borrador y sacapuntas a cada uno para que puedan responder cómodamente. Adicional, se les entregó una hoja de respuestas en donde se les solicitó concentrar cada una de sus contestaciones y, adicional, tuvieron una hoja en blanco, para el borrador de sus respuestas, si así lo deseaban.

4.4. Indicadores de análisis

Para evaluar y categorizar las respuestas otorgadas por los profesores dentro de los dominios del MKT, así como para destacar la presencia de saberes respecto a la representación y significado de la noción de función, se proponen las siguientes guías de observación, diseñadas, a partir de esta investigación, a través de indicadores, que permitieron determinar la presencia de las categorías buscadas. La tabla 18 presenta los indicadores empleados para el modelo MKT, la tabla 19 muestra aquellos que se usaron para los significados de la función y finalmente, la tabla 20 presenta los indicadores de análisis referentes a los registros de representación de la función.

Tabla 18

Categorías e indicadores de análisis para el Modelo MKT

Categoría	Indicadores
Conocimiento común del contenido (CCC)	CCC.1 Es capaz de resolver correctamente una tarea solicitada. CCC.2 Usa términos y notación matemática formal. CCC.3 Comprende el concepto, propiedad, regla, procedimiento o método que se le está presentando.
Conocimiento especializado del contenido (CEC)	CEC.1 Es capaz de determinar qué contenidos matemáticos deben poner en práctica los alumnos para dar solución a una tarea. CEC.2 Determina cuáles son las propiedades de un concepto matemático, involucrados en el estudio de una situación. CEC.3 Reconoce varias maneras de resolver un problema matemático y argumenta cuál es la mejor.
Conocimiento en el horizonte	CH.1 Es capaz de argumentar con qué conceptos más avanzados del currículo escolar se relaciona el contenido involucrado en el desarrollo de la tarea, aunque en la asignatura en cuestión no se aborde, porque no lo incluye el programa.

matemático (CH)	CH.2 Identifica problemas de aprendizaje que pertenecen a niveles educativos más avanzados de donde imparte clase. CH.3 Contextualiza los contenidos matemáticos para encontrarles una aplicación en la vida cotidiana.
Conocimiento del contenido y los estudiantes (CCEs)	CCEs.1 Prevé e identifica los posibles errores y dificultades que han llevado a los estudiantes a responder de manera incorrecta. CCEs.2 Interpreta el pensamiento matemático que expresan los estudiantes ante la solución a una tarea. CCEs.3 Prevé posibles errores o dificultades en sus estudiantes ante un concepto matemático.
Conocimiento del contenido y la enseñanza (CCEn)	CCEn.1 Identifica estrategias alternativas para orientar a los estudiantes que no han comprendido el concepto o que han dado una solución equivocada a la tarea. CCEn.2 Es capaz de proponer ejemplos, ejercicios, tareas o analogías para que los estudiantes corrijan sus errores o practiquen la tarea. CCEn.3 Identifica recursos tecnológicos y herramientas digitales que complementen, refuercen o expliciten el concepto matemático
Conocimiento del currículo (CC)	CC.1 Identifica cuál es el objetivo de la tarea propuesta de acuerdo con el currículo escolar. CC.2 Identifica los contenidos y asignaturas del curriculo escolar del bachillerato tecnológico. CC.3 Identifica qué contenidos de la asignatura pertenecen al currículo escolar del bachillerato tecnológico.

Tabla 19

Categorías e indicadores para los significados de la función

Categoría	Indicadores
La función como correspondencia (FC)	FC.1 Identifica a la función como correspondencia entre dos conjuntos de elementos. FC.2 Identifica a la función como correspondencia entre dos conjuntos numéricos. FC.3 Reconoce que las magnitudes tienen correspondencia en diferentes sistemas de unidades.
La función como relación entre magnitudes variables (FRMV)	FRMV.1 Identifica a la función como una relación entre dos variables. FRMV.2 Interpreta la relación entre las variables, encontrando una dependencia entre ellas. FRMV.3 Sabe que, si una variable cambia, la otra también lo hará.
La función como representación gráfica (FRG)	FRG.1 Reconoce a la función como un lugar geométrico en el plano cartesiano.

	FRG.2 Determina que la gráfica corresponde a una función mediante la relación unívoca entre las coordenadas X y Y de cada uno de los puntos que conforman la función. FRG.3 Reconoce diferentes maneras de nombrar a la función, de acuerdo con la forma que toma el lugar geométrico.
La función como expresión analítica (FEA)	FEA.1 Nombra *f(x)* o y a la función y x a la variable independiente, manifestando la relación entre ambas variables. FEA.2 Identifica a la función como una expresión matemática compuesta de operaciones aritméticas y algebraicas. FEA.3 Reconoce diferentes maneras de nombrar a la función, de acuerdo con la presentación de las variables x y y.
La función como correspondencia arbitraria (FCA)	FCA.1 Reconoce a la función como una asociación, no siempre conocida, entre dos conjuntos de elementos, números o variables. FCA.2 Asume la gráfica de una función como una correspondencia, a veces desconocida, entre las coordenadas X y Y.
La función a partir de la teoría de conjuntos (FTC)	FTC.1 Reconoce a la función como el producto cruz de X con Y ($R \subseteq X \times Y$) en la que para todo elemento que pertenece a X ($\forall x \in X$) existe exactamente una y que pertenece a Y ($\exists!\, y \in Y$). FTC.2 Distingue o emplea la forma enumerativa, explícita o por extensión para describir un conjunto. Por ejemplo: N={1,2,3,4,5,…}. FTC.3 Distingue o emplea la forma descriptiva, implícita o por comprensión para describir un conjunto. Por ejemplo: X={x:x es un entero positivo menor que 5}.

Tabla 20

Categorías e indicadores de análisis de los registros de representación de la función

Categoría	Indicadores
Registro en lengua natural (RLN)	RLN.1 Representa a la función mediante la descripción textual o lingüística de los otros registros. RLN.2 Utiliza este registro para describir las características de la función. RLN.3 Reconoce la relación funcional en un problema verbal.

Registro algebraico (RA)	RA.1 Representa a la función como una relación entre dos variables, en la que hay operaciones aritméticas implicadas. RA.2 Ejecuta tratamientos internos del registro, realizando despejes, factorizaciones o simplificaciones algebraicas. RA.3 Utiliza este registro cuando se refiere a la función como expresión analítica.
Registro gráfico (RG)	RG.1 Representa a la función como una gráfica entre dos variables con relación unívoca. RG.2 Considera propiedades gráficas de la función como: inyectividad, suprayectividad, biyectividad, continuidad, creciente, decreciente, dominio y rango. RG.3 Utiliza este registro cuando se refiere a la función como representación gráfica.
Registro numérico o tabular (RN)	RN.1 Representa a la función como una tabla de valores numéricos en donde incluye valores arbitrarios para *x* y, casi siempre, realiza operaciones para encontrar el valor de *y*. RN.2 Realiza un tratamiento interno al tener que calcular el valor *y* que le corresponde a cada *x*; a veces, no siempre en una tabla. RN.3 Utiliza este registro para, posteriormente, graficar o ubicar los elementos en diagramas sagitales o pares ordenados.
Registro cartesiano (RC)	RC1. Representa a la función como una familia de pares ordenados del tipo (*x*,*y*) en donde puede observarse una relación entre las coordenadas. RC2. Utiliza este registro cuando se refiere a la función como representación gráfica. RC3. Utiliza este registro cuando se refiere a la función a partir de la teoría de conjuntos.

Capítulo 5. Resultados y discusión

A continuación, se presentan los resultados obtenidos tras la aplicación del cuestionario. En esta sección se analizaron los datos obtenidos bajo la perspectiva de las tres categorías que enmarcan el contenido teórico de la presente investigación: el modelo MKT, los registros de representación y los significados del concepto de función. Con ayuda de las categorías e indicadores de análisis que aparecen en las tablas 18-20 y de las respuestas esperadas que se adjuntan al final de este trabajo (Anexo 4), las respuestas que proporcionaron los profesores fueron clasificadas como *cumplen, cumplen parcialmente* y *no cumplen* de acuerdo con el alcance que hayan tenido en realción con el objetivo buscado en cada una.

Como puede apreciarse en la tabla 21, el cuestionario se distribuye de acuerdo con el siguiente razonamiento: cada uno de los seis subdominios del MKT se duplica a lo largo de todo el cuestionario; considera cinco registros de representación para las funciones, los cuales se movilizan en diferentes tareas y cada una de éstas se corresponde con un significado de la función.

Tabla 21

Tareas del cuestionario y su correspondencia con los subdominios del MKT, los registros de representación de las funciones y los significados de la función.

Subdominios del MKT						Registros de representación					Significados de la función					
CCC	**CEC**	**CH**	**CCEs**	**CCEn**	**CC**	**RLN**	**RA**	**RN**	**RG**	**RC**	**FCO**	**FMV**	**FEA**	**FRG**	**FCA**	**FTC**
T1a			T1b			T1	T1	T1			T1					
T2a					T2b		T2	T2	T2			T2				
	T3b			T3a					T3	T3				T3		
	T4b	T4a					T4			T4						T4
			T5a		T5b	T5	T5	T5					T5			
		T6b		T6a					T6						T6	

Nota. CCC = conocimiento común del contenido. CEC = conocimiento especializado del contenido. CH = conocimiento en el horizonte matemático. CCEs = conocimiento del contenido y los estudiantes. CCEn = conocimiento del contenido y la enseñanza. CC = conocimiento del currículo. RLN = registro en lengua natural. RA = registro algebraico. RN = registro numérico. RG = registro gráfico. RC = registro cartesiano. T = tarea. FCO = función como correspondencia arbitraria. FMV = función como magnitudes variables. FEA = función como expresión analítica. FRG = función como representación gráfica. FCA = función como correspondencia arbitraria. FTC = función a partir de la teoría de conjuntos.

5.1 Tarea 1

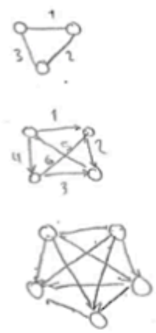
En esta tarea, cuyo objetivo es establecer una relación entre el número de saludos dado el número de personas, se pone de manifiesto el conocimiento común del contenido (CCC) y el conocimiento del contenido y los estudiantes (CCEs), en los ítems 1a y 1b, respectivamente. En el caso del ítem 1a, que solicita encontrar una relación matemática para representar la situación dada, ambos profesores encontraron la expresión para el número de apretones dado n personas; además, completaron la tabla correctamente**.**

En el caso del **profesor experto** utilizó figuras para representar a los apretones de manos, en donde los vértices son las personas y las aristas representan a los apretones de manos. Posteriormente, una vez determinada la expresión, el profesor experto utiliza la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, para poder realizar el proceso inverso, es decir, determinar el número de personas conociendo la cantidad de apretones de manos y completar la tabla (CCC.1, CCC.2 y CCC.3). Mientras que **el profesor novel** planteó un arreglo tabular considerando a 4 personas A, B, C, D, que se daban apretones de manos mutuamente (4×3=12), pero en esta situación y como se puede apreciar en la tabla que propuso el profesor novel, el apretón de manos entre AB se repite dos veces, por esta razón se divide entre dos (12÷2=6). Este profesor, posteriormente, propone la expresión para el cálculo de los apretones teniendo n personas, luego, trabajó con el método de factorización para poder resolver la ecuación cuadrática y determinar el número de personas que se necesitan para contar 105 apretones de manos, y así completar la tabla (CCC.1, CCC.2 y CCC.3).

Cabe destacar que, aunque bajo razonamientos diferentes, ambos profesores lograron encontrar la expresión que permite calcular el número de saludos en función del número de personas, por lo tanto, las respuestas de ambos **cumplen** con el objetivo buscado**,** desde la perspectiva del MKT para este ítem. Nótese que las expresiones que plantean los docentes utilizan dos letras (variables) para denotarlas. Estas formas de solución del ítem 1a que realizaron ambos profesores se pueden apreciar en la Figura 23.

Figura 23

Transcripción de la respuesta del profesor experto y novel para la tarea 1a



$$\frac{n(n-1)}{2} = s$$

s: saludos

Suma de Gauss

Para 5 personas:

$$\frac{5(4)}{2} = 10$$

Para 105 saludos:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 105$$

$$n(n-1) = 210$$

$$n^2 - n - 210 = 0$$

$$a = 1; b = 1; c = -210$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-240)}}{2(1)}$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 840}}{2}$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{841}}{2}$$

$$n = \frac{1 \pm 29}{2}$$

$$n_1 = 15 \; ; n_2 = -14$$

Profesor experto

Personas	2	3	4	5	15
Apretones de mano	1	3	6	10	105

n	CD	BD	AB
	AB	BC	AC
	AC	BC	AD
	AD	BD	CD
	(n-1)		

La expresión que termina el número de apretones de mano, con n personas es:

$$A = \frac{n(n-1)}{2}$$

Si $n = 5$,

$$A = \frac{5(5-1)}{2} = \frac{5(4)}{2} = 10$$

Si $A = 105$,

$$105 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$105 = n^2 - n$$

$$n^2 - n - 210 = 0$$

$$(n + 14)(n - 15) = 0$$

$n = -14$ se descarta

$n = 15$

Profesor novel

Personas	2	3	4	5	15
Apretones de mano	1	3	6	10	105

Para su resolución, este ítem moviliza los registros en lenguaje natural o verbal (RLN), algebraico (RA) y numérico (RN). El **profesor experto** pasa del ***registro verbal*** del problema a un ***registro figural*** de los apretones utilizando figuras (triángulo, cuadrado, pentágono) en las que cuenta sus lados y diagonales. Como se ha mencionado antes, el profesor experto interpreta a los vértices como las personas y a las aristas como a los apretones de manos. Esto le permite al profesor experto referir a la expresión $s = n(n-1)/2$ utilizando ***registro algebraico***. Dicha expresión anterior no tiene una notación correcta, ya que no está expresada en términos de una variable, por ejemplo: $f(n) = n(n-1)/2$.

Por otro lado, el **profesor novel**, a partir del ***registro verbal*** de la tarea, planteó un ***registro tabular*** considerando a 4 personas A, B, C, D, que se daban apretones de manos mutuamente, esto condujo al profesor novel a plantear la expresión en el ***registro algebraico*** que probó para los datos faltantes de la tabla. De manera similar a lo planteado por el profesor experto, el profesor novel no plantea una expresión en términos de una variable, el registro algebraico no se utiliza de forma correcta. Así, mientras que el profesor experto utilizó un registro figural y algebraico, el profesor novel utilizó un registro tabular y algebraico. Las respuestas de ambos docentes se considerarán parcialmente correctas, desde la perspectiva de los registros de representación, por no utilizar de forma correcta el registro algebraico, mientras que, en lo concerniente al registro verbal y numérico, ambos evidencian un uso apropiado de estos registros.

Respecto a la tarea 1b, la cual solicita describir las posibles dificultades a las que los estudiantes podrían verse enfrentados al resolver la tarea, y así indagar por el conocimiento del contenido y los estudiantes (CCEs), **el profesor novel** describe claramente tres posibles conflictos (CCEs.1, CCEs.2 y CCEs.3), en los que involucra conceptos algebraicos, geométricos y algunos otros correspondientes a cálculo diferencial; dicho razonamiento corresponde con el de las respuestas esperadas, por tanto, su respuesta **cumple** con el objetivo buscado. Llama la atención que el profesor novel refiere a la identificación de la variable dependiente e independiente, aunque la solución que él proporcionó está en términos de dos variables en la que la dependencia está implícita.

Por otro lado, la posible dificultad que propone **el profesor experto** no es lo suficientemente clara, como puede apreciarse en la Figura 24. La interpretación es la siguiente: el profesor refiere a distancia numérica entre la cantidad de saludos al incrementar el número de personas, es decir, si por 3 personas hay 3 saludos y por 4 personas hay 6 saludos, entonces, a lo que el profesor llama distancia numérica es, en realidad, la diferencia entre los saludos, la cual, para estos casos, sería de 6-3=3. Por otro lado, la confusión a la cual el docente alude en el siguiente nivel de sucesión es que esta diferencia no se mantiene constante, es decir, para 5 personas hay 10 apretones de manos, la diferencia respecto a los apretones que hay cuando se tienen 4 personas es de 10-6=4 y no de 3, como posiblemente pudiera ser el razonamiento de los estudiantes. La situación que describe el profesor experto alude al caso particular de cuando el estudiante analice las diferencias entre los valores de la variable dependiente y pese a que es una posible dificultad que presentarían los estudiantes a la hora de resolver esta tarea, la forma en que el profesor la describe la convierte en una información ambigua que se ha etiquetado como **cumple parcialmente** con el objetivo buscado.

Estas formas de solución del ítem 1b que realizaron ambos profesores se pueden apreciar en la Figura 24.

Figura 24

Transcripción de la respuesta del profesor experto y novel para la tarea 1b

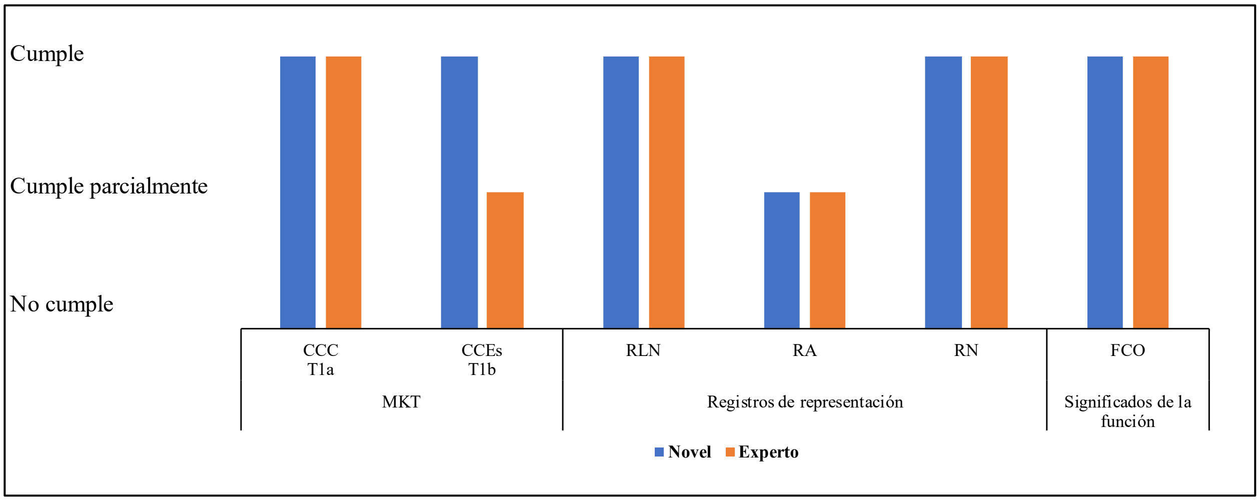
Encontrar la relación entre cantidad de gente y saludos implica que en un inicio quieran relacionar distancia numérica entre cantidad de saludos al incrementar el número de personas, lo cual sería correcto pero la posibilidad de considerar el siguiente nivel de sucesión sería la causa de confusión.	Profesor experto
-Se puede presentar dificultad en la labor algebraica: en los despejes y ecuaciones. -Dificultad para relacionar conceptos geométricos en la resolución de problemas algebraicos. -También se ha presentado dificultad en la identificación de las variables dependiente e independiente.	Profesor novel

El significado de la función implicado en esta tarea es el de **la función como correspondencia**. En este sentido, se asocia al determinado número de personas un número posible de apretones de manos. La solución proporcionada por los docentes evidencia este significado cuando asumen que existe una relación entre el número de personas de la reunión y la cantidad de apretones de mano que se producen cuando estos se saludan. Para el análisis de esta relación, como se ha mencionado antes, en el caso del profesor experto, éste hace uso de figuras geométricas para relacionar las diagonales de las mismas con la cantidad de saludos que habría dependiendo la cantidad de personas (FC.2), mientras que el profesor novel emplea una tabla (FC.1). Es importante mencionar que la expresión algebraica que ambos profesores manifiestan no se corresponde con una relación funcional de dependencia, si no que utilizan dos variables para denotar la expresión en donde las literales que utilizan (S y A, para saludos y apretones respectivamente) evidencian la correspondencia. Se concluye, entonces, que **ambos** ofrecieron respuestas que **cumplen** con el objetivo buscado, desde la perspectiva de los significados de la función.

En resumen, como puede apreciarse en la figura 25, para esta tarea, el profesor novel ofreció una respuesta que cumple con el objetivo desde el punto de vista del MKT y de los significados de la función, no así con los registros de representación, donde **cumplió parcialmente** al no utilizar adecuadamente el registro algebraico. El profesor experto, por su parte, presentó la misma dificultad y también, inconsistencias en el conocimiento del contenido y los estudiantes, al no ofrecer una respuesta lo suficientemente clara para la investigación.

Figura 25

Grado de corrección de las respuestas de los profesores para la tarea 1



Nota. CCC = conocimiento común del contenido. CCEs = conocimiento del contenido y los estudiantes. RLN = registro en lengua natural. RA = registro algebraico. RN = registro numérico. FCO = función como correspondencia.

5.2 Tarea 2

Esta tarea es referente a la variación de la temperatura de un cuerpo respecto al tiempo. El ítem a y b indagan por el conocimiento común del contenido (CCC) y por el conocimiento del currículo (CC), respectivamente. En ese sentido y con respecto al ítem 2a, que solicita encontrar la representación gráfica de la relación funcional descrita en la tarea, así como el punto máximo de dicha relación, el **profesor novel** comienza su interpretación indicando quiénes son las constantes a y b de la función cuadrática $f(t) = at^2 + bt$, en donde, por definición, el profesor sabe (CCC.3) que para encontrar el valor t que produce un máximo, se utiliza la fórmula $t_{máx} = -b/2a$, la cual se corresponde con la fórmula para encontrar la abscisa del vértice de una parábola cóncava hacia abajo, obteniendo así, que el valor buscado es t=2.5, produciendo una temperatura de 20ºC, la cual obtiene al evaluar el valor de t en la función dada.

Como puede apreciarse en la figura 26, adicionalmente, el profesor novel comparte otra manera de resolver la tarea (CEC.3), haciendo uso de derivadas, particularmente, el criterio de la primera derivada, por lo que, en sus cálculos se observa cómo una vez derivada la función dada, la iguala a cero para encontrar el valor t que es raíz de la ecuación obtenida, el cual coincide con el previamente detectado. Finalmente, considerando el valor máximo que ofrece la función, procede a evaluar la función con valores para t iguales a los números enteros de la restricción que menciona el problema $(0 \leq t \leq 5)$ y que permitan apreciar una representación gráfica óptima, misma que coincide con la gráfica que se esperaba (CCC.1). Obsérvese cómo en la tabulación del profesor novel, sí utiliza, en esta ocasión, una nomenclatura correcta para las variables independiente y dependiente, en este caso, t y T(t), respectivamente (CCC.2). Por tales motivos, la respuesta del profesor novel, para este ítem, **cumple** con el objetivo buscado.

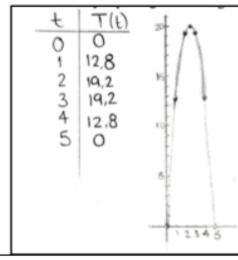
Por su parte, el **profesor experto**, utiliza únicamente un método para dar respuesta a la tarea, en este caso, recurre a derivar la función y encontrar el valor t que cumple con la ecuación que obtiene al igualar la derivada a cero. Sin embargo, como puede apreciarse en la figura 26, la función con la que trabaja el profesor no es la que se menciona en la descripción de la tarea 2, pues él utiliza la función $T = 16t - t^2$ para encontrar el valor máximo, obteniendo, como consecuencia, un valor incorrecto que no es el que se esperaba (t=8). Llama la atención que el profesor experto se percató que el valor t que obtuvo, como supuesto valor que provoca el máximo en la función, no pertenecía al dominio de esta función en particular (en la descripción de la tarea se hace hincapié en que $0 \leq t \leq 5$), pues en su respuesta aclara que t=8 se encuentra fuera de rango. Con esto, una vez más, la atención se concentra en la manera en que se refiere a la restricción $0 \leq t < 5$, que hace referencia al *dominio* al considerar a la variable independiente t, mientras que *rango* de una función se refiere a los valores del codominio que puede tomar la variable independiente. Finalmente, la gráfica que ofrece el profesor experto es incorrecta, pues no se corresponde con la gráfica que se esperaba, por tal motivo, su respuesta **no cumplió** con el objetivo buscado.

Figura 26

Transcripción de la respuesta del profesor experto y novel para la tarea 2a

$$T(t) = 16t - 3.2t^2$$
$$a = -3.2$$
$$b = 16$$
Por fórmula:
$$t_{max} = -\frac{b}{2a}$$
$$= -\frac{16}{2(3.2)} = 2.5$$
$$T_{max} = T(t_{max})$$
$$= 16(2.5) - 3.2(2.5)^2$$
$$= 20$$
La temperatura máxima que alcanza la pieza es de 20ºC (cuando transcurren 2.5 horas).

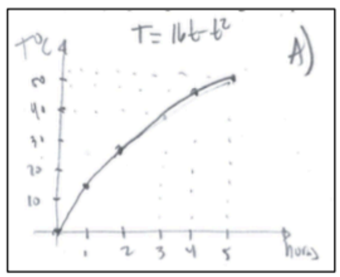
Por derivada (criterio de la primera derivada):
$$T = 16t - 3.2t^2$$
$$T' = 16 - 6.4t$$
$$0 = 16 - 6.4t$$
$$t = \frac{16}{2.4} = 2.5$$
$$= 16(2.5) - 3.2(2.5)^2$$
$$= 20$$



Profesor Novel

$$T = 16t - t^2$$
$$16t - 2t = 0$$
$$16 = 2t$$
$$t = 8$$
Temperatura máxima en 8 horas (fuera de rango)

T	t	
15	1	$16(1) - 1^2 = 16 - 1$
28	2	$16(2) - 2^2 = 32 - 4$
39	3	$16(3) - 3^2 = 48 - 9$
48	4	$16(4) - 4^2 = 64 - 16$
55	5	$16(5) - 5^2 = 80 - 25$
64	8	$16(8) - 8^2 = 128 - 64$
63	9	$16(9) - 9^2 = 144 - 81$



Profeor Experto

En cuanto a los registros de representación, ambos profesores utilizaron los registros que se esperaba poder movilizar en esta tarea, que son: registro algebraico (RA), numérico (RN) y gráfico (RG). Como puede apreciarse en la figura anterior, el **profesor novel** hace un mayor uso del ***registro algebraico***, al incluir en su respuesta dos formas diferentes de obtener el valor t que maximiza la función (RA.2); luego, realizó un análisis ***tabular y numérico***, y a pesar de que omitió las operaciones aritméticas (RT.1) que siguió para obtener los resultados, estos son correctos, mismos que, posteriormente, representó ***gráficamente*** para cumplir con la solicitud de la tarea (RG.1). En el manejo del registro tabular, indirectamente utilizó una nomenclatura funcional correcta (RA.1) para referirse a las variables independiente y dependiente, en este caso, t y T(t), respectivamente; aunque no fue así, cuando trabajó con la derivada de la función, por tal motivo a su respuesta se le asignará la etiqueta de **cumple parcialmente** con el objetivo buscado en el registro algebraico y **cumple** en el uso de los registros numérico y gráfico.

El **profesor experto**, partió del registro ***algebraico***, en donde no utiliza una nomenclatura funcional adecuada que permita vislumbrar quién es la variable independiente, pues se refiere únicamente a T y a t, y pese a que no utilizó la función correcta, hizo un buen uso de este registro al encontrar un valor t que satisfaga la ecuación propuesta (RA.2); por tal motivo su respuesta **cumple parcialmente** con el objetivo buscado en el uso de este registro. Posteriormente, llega al registro ***tabular***, en donde, a comparación del profesor experto, es explícito en las operaciones aritméticas que utilizó para conseguir los resultados (RT.1 y RT.2), pues en su respuesta se ve cómo procedió numéricamente. Por último, llega al registro ***gráfico***, mismo que acompaña con una nomenclatura no funcional, sin embargo, el tratamiento que hace en este registro es correcto (RG.1) y por tales motivos se considerará correcta la respuesta otorgada bajo la perspectiva de estos dos registros.

En lo que respecta al ítem b, que consiste en reflexionar si la situación planteada tiene una relación trasversal con contenidos matemáticos de otras asignaturas y de esta manera poder profundizar en el conocimiento del currículo (CC), la propuesta del **profesor novel**, corresponde totalmente al currículo del bachillerato tecnológico (CC.2 y CC.3), mencionando asignaturas como álgebra, geometría analítica y cálculo, pertenecientes al área de matemáticas. Asimismo, ofrece una relación con contenidos de otras disciplinas como física, evidenciando los contenidos con los cuales hay una relación, como puede apreciarse en la figura 27. Por lo tanto, la respuesta a este ítem **cumple** con el objetivo buscado.

En cambio, **el profesor experto** menciona la relación que tiene la tarea únicamente con otras asignaturas distintas a la disciplina de matemáticas, sin embargo, solo algunas de ellas pertenecen al currículo escolar del bachillerato tecnológico (CC.3), en este caso, física y química. Las otras asignaturas propuestas no son parte del currículo escolar para este nivel educativo, por lo tanto, su respuesta **cumple parcialmente** con el objetivo buscado.

Estas formas de solución del ítem 2b que realizaron ambos profesores se pueden apreciar en la Figura 27.

Figura 27

Transcripción de la respuesta del profesor experto y novel para la tarea 2b

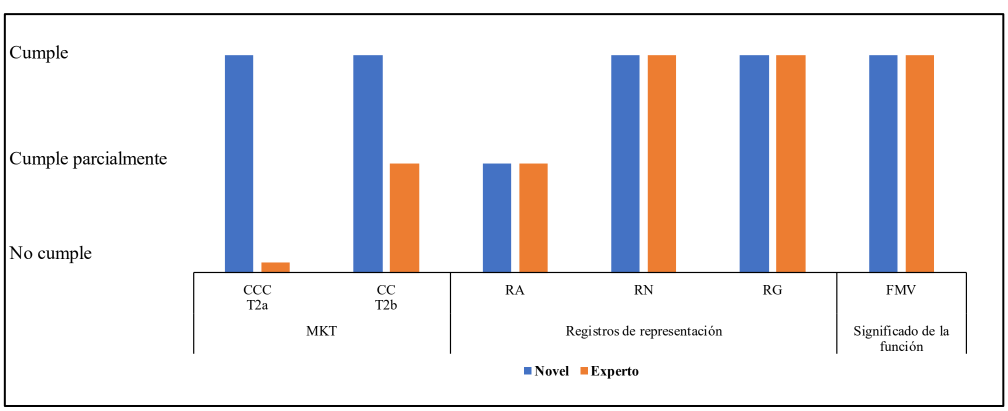
Sí existe relación transversal con otras asignaturas, no solo de matemáticas. -Química: comportamiento de variación de cuerpos -Física: cambios de volumen y físicos -Resistencia de materiales: Deformación Propiedad de los materiales: propiedades estructurales de los materiales.	Profesor Experto
Tiene relación propiamente con los contenidos de las demás matemáticas (principalmente con álgebra) en el tema de evaluación de expresiones algebraicas. También con la materia de geometría analítica, con el caso de la parábola; en cálculo con optimización de funciones y en física con temperatura y calor, en cinética y transferencia de calor.	Profesor Novel

La tarea 2 implica una función bajo el significado de magnitudes variables (FMV), donde a través de las respuestas que ofrecen los profesores, se evidencia una adecuada comprensión de este significado, al asumir que la temperatura es una magnitud que varía con respecto al tiempo cuando éste ha sido sometido al calor (FMV.1 y FMV.2), los valores que toman las variables, según cada profesor, fueron colocados en una tabla, indicando la relación entre dichas magnitudes físicas, en las que, si varía una, se modifica la otra (FMV.3). **Ambas** respuestas son **cumplen** y son satisfactorias, desde el punto de vista de este análisis.

En resumen, como puede apreciarse en la Figura 28, en la tarea 2 el profesor experto presentó dificultades en el conocimiento común del contenido y del currículo, ofreciendo respuestas distintas a las que se esperaban. Por su parte, el profesor novel ofreció respuestas lo suficientemente sustanciosas que revelan las competencias con las que cuenta este profesor. Sin embargo, nuevamente, ambos tuvieron dificultades en el registro algebraico para representar y tratar a la función que presenta esta tarea.

Figura 28

Grado de corrección de las respuestas de los profesores para la tarea 2



Nota. CCC = conocimiento común del contenido. CC = conocimiento del currículo. RA = registro algebraico. RN = registro numérico. RG = registro gráfico. FMV = función como magnitudes variables.

5.3 Tarea 3

La tarea 3, referente a la interpretación de los pares ordenados de una gráfica, indaga, respectivamente, en sus ítems a y b, en el conocimiento del contenido y la enseñanza (CCEn) y en el conocimiento especializado del contenido (CEC). La tarea plantea la situación donde un estudiante pregunta a su profesor si los pares ordenados visibles en la gráfica mostrada son los únicos con los que cuenta la función, entonces, el ítem a, solicita reflexionar en una explicación o estrategia para poder responder la inquietud del estudiante. En este sentido, como puede apreciarse en la Figura 29, **el profesor experto** propone hablarles a los estudiantes de los pares de coordenadas rectangulares haciendo énfasis en que por cada “x” existe una “y” (CCEn.1), de tal forma que, si hay infinitos elementos en x, también hay infinitos elementos en y. En esta parte, el profesor no especifica hablar únicamente de las funciones cuadráticas, puesto que el postulado que hace no se cumple para todo tipo de función, las logarítmicas, raíces cuadradas y las racionales, por ejemplo, tienen restricciones en su dominio y solo las “x” que formen parte de él, tendrán una imagen. Sin embargo, dado el contexto de la tarea, donde se presenta una función cuadrática, se asume que el profesor tiene noción de esto y es por eso que la respuesta del profesor experto sería considerada correcta en relación al MKT. Sin embargo, enseguida, el profesor experto continúa argumentando que en las funciones ax^n con n par, para cada valor de “x” se encontrarán dos puntos en “y”, lo cual rompe completamente con la definición de función. Recordemos la que ofreció Dirichlet (1805-1859), mencionado previamente en el capítulo 3 de este trabajo, en la que dice que, en una función, siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y. Se asume que el profesor confundió el eje de las ordenadas con el eje de las abscisas. Pensemos, por ejemplo, en la función x al cuadrado, para x=2 y para x=-2 se tendrá la misma imagen y visualmente se pueden apreciar como dos puntos en el eje y.

De lo mencionado anteriormente se desprende la posibilidad de considerar que la respuesta del **profesor experto no cumplió** con el objetivo buscado, en un primer momento desde el punto de vista del ***MKT***, que en esta ocasión indagaba por el conocimiento del contenido y la enseñanza, pues la concepción de la noción de función que tiene afecta, al menos en este caso, a la forma en que el contenido se enseña. También, la respuesta se considera **sin cumplir** con el objetivo buscado bajo la perspectiva del ***significado*** de la función que, en esta tarea, hace referencia al significado como representación gráfica (FRG), pues las interpretaciones que se solicitan, parten de un gráfico que representa una relación funcional. Asimismo, para esta tarea, el significado que se le ha dado a la función se corresponde con el ***registro gráfico*** (RG), por lo que es imposible hacer distinción entre el significado y el registro, así que, si el profesor presenta dificultades en un aspecto, automáticamente las presenta en el otro. Otro registro de representación para la función en esta tarea es el ***registro cartesiano*** (RC) y, como puede observarse en la respuesta del profesor experto, alude a la posibilidad de puntos en donde el valor de y se duplica, creando pares ordenados del estilo: (x, y_1) y (x, y_2). Con lo anterior, se concluye que el profesor experto, para la tarea 3a, dio una respuesta **que no cumple** con el objetivo buscado en cuanto al MKT, los registros de representación y el significado de la función.

Por otro lado, como puede observarse en la Figura 29, **el profesor novel** propone como estrategias para indicar la existencia de infinitos pares ordenados en una función, retomar el concepto de la función, así como la representación gráfica de la misma (CCEn.1). El profesor hace hincapié en que una función está compuesta por una cantidad infinita de puntos (RG.2), llamados pares ordenados, con estructura (x,y), los cuales, menciona, que sirven de referencia para trazar el gráfico (RG.3 y FRG.1). Es importante mencionar que el profesor novel distingue a la función de su representación gráfica, lo cual es adecuado. En matemáticas se trabaja con formas abstractas que se vuelven concretar al hacer uso de sus representaciones. Las estrategias que utilizaría el profesor novel **cumplen** con lo esperado y por tanto su respuesta es considerada satisfactoria, en el MKT, los registros de representación y el significado de la función.

Figura 29

Transcripción de la respuesta del profesor experto y novel para la tarea 3a

Análisis de continuidad de una función. Hablar sobre pares de coordenadas rectangulares, por cada "x" existe una "y"; por lo que a valores infinitos de "x" corresponden valores de "y", en este caso particular al ser cuadrática, o fuera cuarta, o sexta, etc. la función, por cada valor de "x" se encuentran dos puntos en "y", representados tanto en gráfica como en tabulación, de manera repetida al ser de naturaleza cuadrática.	Profesor Experto
Retomaría el concepto de función y como ésta puede ser representada de manera gráfica, que un gráfico está constituido por una cantidad infinita de puntos, y que mientras estos puntos estén sobre la línea, pertenecen a la función en cuestión. Cualquier punto sobre la gráfica representa un par ordenado (x,y). Es importante hacerle saber que los puntos que se trazan sirven de referencia para dibujar el gráfico.	Profesor Novel

Por su parte, el ítem 3b, que pregunta por las propiedades de la función que pueden abordarse mediante el estudio de la situación descrita, profundiza en el conocimiento especializado del contenido (CEC). Como puede apreciarse en la Figura 30, las propiedades de la función que **el profesor experto** menciona en su respuesta, pese a que no son exclusivas de la representación gráfica de una función cuadrática, son propiedades genéricas de las funciones, hace referencia al dominio y rango de las funciones reales, así como a los máximos y mínimos que, sin duda es un elemento importante a considerar en las funciones polinomiales. Lo anterior, permite identificar su CEC en esta tarea (CEC.1 y CEC.2). De la misma forma, **el profesor novel** ofrece como respuesta, el estudio de las propiedades de la función, él sí puntualiza en aquellas que son representadas en el registro gráfico (CEC.1 y CEC.2); además, se identificó la presencia del CEC en este profesor, en la tarea 2a. Entonces, se concluye con que, en la tarea 3b, ambos profesores **cumplen** con lo esperado en relación al MKT.

Figura 30

Transcripción de la respuesta del profesor experto y novel para la tarea 3b

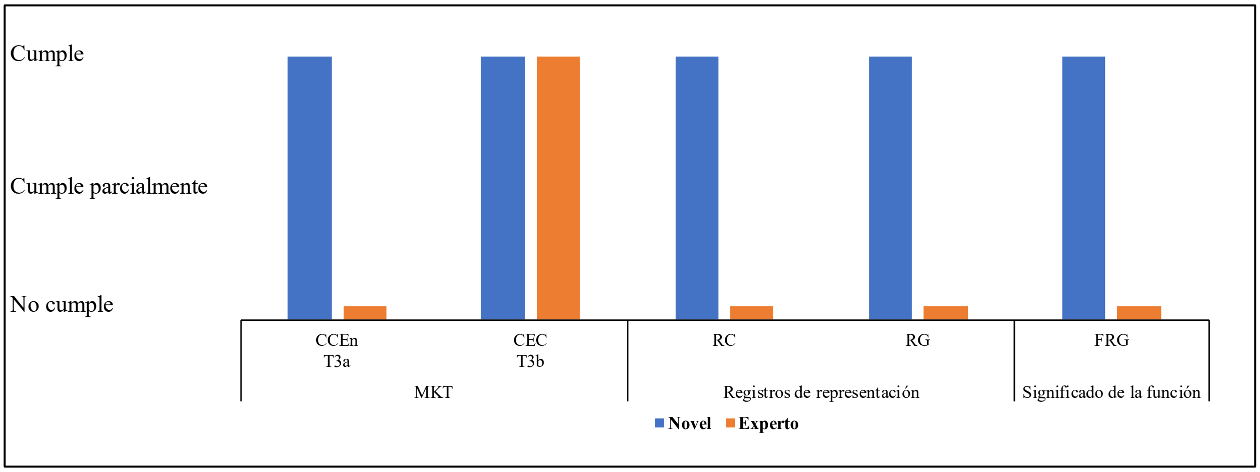
Al ser cuadrática, hablar de parábolas y sus elementos partiendo de sus formas físicas, encontrar ecuaciones usando método de completar cuadrados para repasar álgebra. -Dominio y rango de una función -Máximos y mínimos -Hablar de funciones reales -Conceptos básicos de tabulaciones -Concepto físico de funciones	Profesor Experto
Se pueden utilizar los conceptos (propiedades) en el gráfico de: -Intersección con el eje de las "y". -Que la función es creciente/decreciente por intervalos. -La simetría que el gráfico presenta. -Que no tiene ceros relativos (intercepciones con el eje "x").	Profesor Novel

Cabe mencionar que ninguno de los dos profesores utilizó la representación tabular que se proponía en la tarea, misma que podría servir de apoyo para justificar sus respuestas. Aunque no era requisito hacerlo, pues no se daba esa indicación, es interesante que ninguno la haya utilizado para profundizar sus respuestas al abordar las situaciones planteadas.

En resumen, en la Figura 31, se pueden apreciar las dificultades que mostró el profesor experto en la tarea 3, al dar una respuesta que incluye elementos contrarios a la definición de función, lo que provocó que se le considerara sin cumplir con el objetivo esperado y se cuestione su conocimiento del contenido y la enseñanza, el uso adecuado del registro gráfico y cartesiano y su concepción de la función como una representación gráfica. Todo lo contrario, al profesor novel, quien mostró un desarrollo adecuado del conocimiento especializado del contenido (CEC) y del conocimiento del contenido y la enseñanza (CCEn), proporcionando elementos adecuados que permiten justificar un buen manejo de los registros y significado de la función presentada en esta tarea.

Figura 31

Grado de corrección de las respuestas de los profesores para la tarea 3



Nota. CCEn = conocimiento del contenido y la enseñanza. CEC = conocimiento especializado del contenido. RC = registro cartesiano. RG = registro gráfico. FRG = función como representación gráfica.

5.4 Tarea 4

La tarea 4 es referente a una situación específica en la que un profesor solicita a sus estudiantes encontrar los pares ordenados que forman parte de una función dada, expresada en el registro algebraico, mediante un lenguaje formal. A través de sus ítems a y b, se indaga por el conocimiento en el horizonte matemático (CH) y por el especializado del contenido (CEC), respectivamente.

En lo referente al primer ítem, que solicita reflexionar si dicha tarea es pertinente para abordarla en el nivel medio superior, como puede apreciarse en la Figura 32, **el profesor experto** argumenta que no la considera adecuada para el nivel bachillerato, justifica que los pares ordenados que se estudian en este nivel educativo son directos, es decir, ya se proporcionan cuando se estudia este concepto, con una estructura simple, o bien, podrían calcularse, ya sea mediante operaciones aritméticas básicas o mediante un gráfico (CH.1). Continúa diciendo que el estudio de las funciones en este nivel educativo llega hasta máximos y mínimos y sus aplicaciones, por lo que presentarle a los estudiantes ejercicios como el de la tarea, podría ser confuso, así que él sugiere que esta tarea se aborde en el siguiente nivel educativo. Esta respuesta coincide con la esperada y permite apreciar su conocimiento en el horizonte matemático, **cumple** con el objetivo esperado.

Por su parte, **el profesor novel** considera que la tarea sí es pertinente para el nivel educativo en cuestión, argumenta que es necesario contextualizar la parte conceptual antes de abordar esta actividad, refiriéndose a profundizar en el lenguaje formal que utiliza la función de esta tarea y sugiere que podría implicar un reto atractivo para aquellos estudiantes que comienzan a dominar el tema. Su respuesta es válida, sin embargo, es un hecho que la tarea no es apropiada para bachillerato, por la complejidad del lenguaje que se emplea y porque el significado de esta función, que es el de la teoría de conjuntos, no es un significado usual en el nivel educativo medio, pero que podría incorporarse de una manera congruente, para fortalecer este significado en los estudiantes. La respuesta del profesor novel **cumple parcialmente** con lo esperado, porque finaliza su respuesta proponiendo la tarea para alumnos que ya tienen nociones del concepto de función.

Las diferencias en las respuestas del profesor novel y el profesor experto se deben a que este último lleva mayor tiempo trabajando con estudiantes y está consciente de las dificultades y capacidades de los estudiantes de ese nivel educativo respecto al concepto de función.

Figura 32

Transcripción de la respuesta del profesor experto y novel para la tarea 4a

No lo creo pertinente; en este nivel (bachillerato) se plantean ejercicios con pares ordenados más directos, ya sea obteniéndolos de tabulación o de la misma gráfica; más aunque el análisis de funciones llega hasta máximos y mínimos y sus aplicaciones, al presentar este tipo de ejercicios sería confuso para ellos; en sí, el planteamiento de un ejercicio para obtener funciones es complejo para ellos; el entender conceptos de pertenencia en números naturales o intervalos de números de la variable para determinar valores de funciones estaría en el siguiente nivel	Profesor Experto
Sí. Aunque es necesario contextualizar la parte conceptual. Puede ser un reto interesante para alumnos que comienzan a dominar el tema.	Profesor Novel

El ítem b, en el que se pregunta por los contenidos matemáticos que deberían conocer y utilizar los estudiantes para dar una respuesta correcta a la tarea y de esta manera profundizar en el conocimiento especializado del contenido (CEC) que tienen los profesores, generó como respuesta del **profesor experto**, cuatro contenidos matemáticos y del **profesor novel**, otros cuatro, como puede apreciarse en la Figura 33, los cuales corresponden a propiedades de las funciones que se abordan cuando se estudia este concepto (CEC.2) y que son requisito indispensable para poder comprender la función a la que se refiere la tarea 4, por lo tanto, se percibe la presencia del CEC en ambos profesores, **cumpliendo** con el objetivo.

Figura 33

Transcripción de la respuesta del profesor experto y novel para la tarea 4b

Conjuntos, intervalos, análisis de funciones, solución de ecuaciones	Profesor Experto
El concepto de función, producto cartesiano de conjuntos, funciones y relaciones, formas para representar una relación (o función).	Profesor Novel

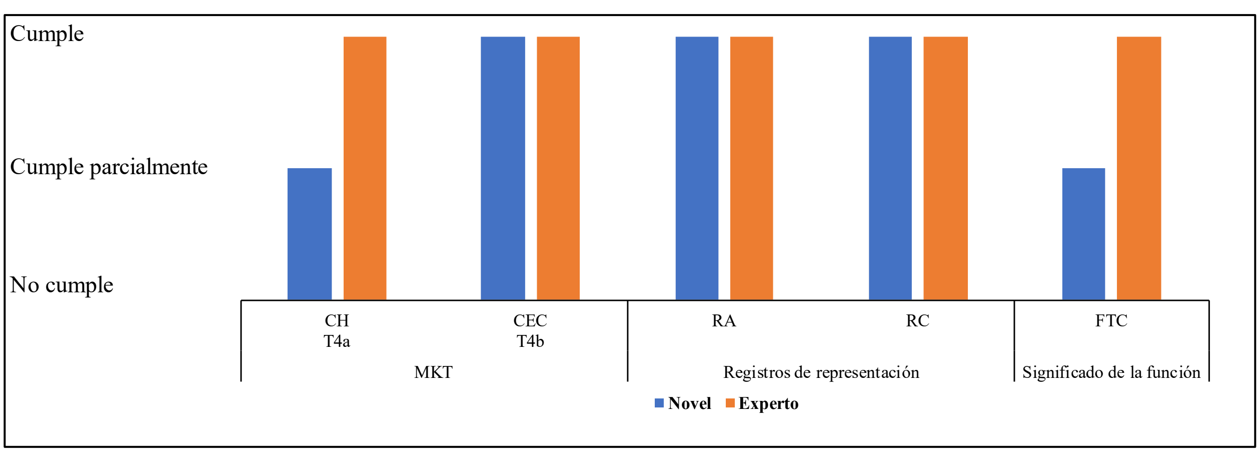
Los registros de representación que se esperaba que pudieran movilizarse mediante el estudio de la tarea 4 son el algebraico (RA) y cartesiano (RC). El primero para poder comprender el tipo de función y su naturaleza y el segundo, para poder proporcionar la respuesta a la solicitud de dicha tarea. En las respuestas de **ambos profesores** puede apreciarse una adecuada comprensión de la función descrita, por lo que, en esta ocasión, presentan un buen dominio del registro algebraico (RA.1). Ocurre lo mismo con el registro cartesiano, pues en sus respuestas se aprecia la consideración de este registro en ambos profesores; el profesor experto lo contempla en su respuesta al ítem 4a y el novel en el 4b (RC.1). Por tales motivos, se deduce que sus respuestas son **cumplen** con lo esperado desde el punto de vista de los registros de representación de la función para esta tarea.

Como se ha mencionado, el significado de la función en la tarea 4, es el visto a partir de la teoría de conjuntos. Un significado que no es muy usual en el nivel medio superior, por la complejidad del lenguaje tan formal que se utiliza y que involucra notaciones y contenidos más avanzados del currículo escolar de bachillerato. El profesor experto se da cuenta de ello, pues no considera pertinente el estudio de esta tarea en este nivel educativo, por lo tanto, se deduce que la concepción del significado de esta función es notable en el profesor experto (FTC.1). No ocurre lo mismo con el profesor novel, quien, pese a que ofrece una estrategia para abordar la tarea en este nivel educativo, sí la considera pertinente, volviéndose cuestionable la concepción del significado de la función a partir de la teoría de conjuntos con la que cuente el profesor. Por tales motivos, bajo la perspectiva de los significados de la función, la respuesta del **profesor experto cumple** con el objetivo esperado y la del **profesor novel cumple parcialmente.**

En resumen, para la tarea 4, el profesor novel mostró dificultades en la concepción de la función descrita, vista desde la teoría de conjuntos y, como consecuencia, considera pertinente el estudio de esta tarea en el nivel medio superior, volviéndose cuestionable su conocimiento en el horizonte matemático. Lo contrario al profesor experto, quien evidenció su conocimiento en el horizonte matemático, al concebir de buena manera el significado de la función, así como su conocimiento especializado del contenido y un buen uso de los registros algebraico y cartesiano. Lo anterior se puede apreciar en la Figura 34:

Figura 34

Grado de corrección de las respuestas de los profesores para la tarea 4



Nota. CH = conocimiento en el horizonte matemático. CEC = conocimiento especializado del contenido. RA = registro algebraico. RC = registro cartesiano. FTC = función a partir de la teoría de conjuntos.

5.5 Tarea 5

La tarea 5 es referente a una situación que describe el procedimiento que realizó un estudiante, en el que cometió un error a la hora de encontrar la imagen de ciertos valores para x. Con esto, se indaga, respectivamente, en sus ítems a y b, en el conocimiento del contenido y los estudiantes (CCEs) y en el conocimiento del currículo (CC).

En el ítem a, que pregunta por el posible razonamiento que siguió el estudiante y que lo llevó a cometer un error, el profesor experto, después de escribir la función que se describe en el texto de la tarea, como puede apreciarse en la Figura 35, menciona que el estudiante consideró que el exponente de la función cuadrática solo afecta al coeficiente, lo que, sin duda, es un error muy común en los estudiantes (CCEs.2). Estos suelen "separar" el signo de su coeficiente, trabajar solo a éste y, finalmente adherir el signo que tenía en un principio porque asocian el uso de paréntesis para el cambio de signo, al no estar presente en el álgebra, entonces, el estudiante no incorpora la regla de los signos. Esta tendencia ocurre, principalmente, para los números o términos que son negativos. El profesor novel, por su parte, es más detallado en su respuesta. Él argumenta que el estudiante hizo una incorrecta evaluación de la función con los valores negativos de x (CCEs.2). Menciona que el estudiante realizó un proceso textualmente en donde omitió el uso de paréntesis para agrupar el número negativo que debía ser elevado al cuadrado. Lo anterior permite conocer el conocimiento que **ambos profesores** tienen en cuanto al contenido y los estudiantes, así que las respuestas de ambos **cumplen** satisfactoriamente con lo esperado.

Figura 35

Transcripción de la respuesta del profesor experto y novel para la tarea 5a

$f(x) = x^2 + 5$ Considera que el exponente afecta solo al coeficiente.	Profesor Experto
Hizo una incorrecta evaluación. Describió el proceso de manera literal, sin tomar en cuenta algunas consideraciones matemáticas (como el uso de paréntesis).	Profesor Novel

En el ítem b, que cuestiona por las estrategias que los profesores propondrían en el currículo para evitar el error mostrado en dicha tarea y de esta manera indagar por el conocimiento del currículo (CC) con el que cuentan, el profesor novel, como puede apreciarse en la Figura 35, propone retomar el estudio de algunas propiedades de la función, como la representación gráfica de la función cuadrática, que propicia una parábola y que, de esta manera, los estudiantes verifiquen si los puntos obtenidos en la tabulación corresponden a una o no. Esta estrategia implica reforzar los contenidos vistos en la asignatura, procurando darle mayor tiempo de estudio a las propiedades físicas de las funciones. Otra estrategia que propone el profesor novel es incluir el uso de herramientas tecnológicas de la información y comunicación (TICs) que coadyuven a la comprensión de, principalmente, el gráfico de las funciones, lo que representa una propuesta de mejora en el currículo de la asignatura. Y finalmente, sugiere el uso de paréntesis para agrupar variables cuando éstas se van a evaluar; propuesta que podría ser significativa en la asignatura de álgebra (CC.2), que es previa al estudio formal de las funciones. Por tales motivos, la respuesta del **profesor novel cumple** con el objetivo esperado, ya que permite vislumbrar su conocimiento en el currículo.

Por su parte, el **profesor experto**, como puede apreciarse en la misma figura 36, ofrece una única estrategia de mejora en el currículo, la cual consiste en modificar la concepción que se tiene en el uso de los paréntesis, argumenta que los estudiantes los perciben únicamente como una multiplicación y no como una forma de agrupación. Esta propuesta al currículo incide directamente en la asignatura de álgebra (CC.2) y, por lo tanto, el profesor tiene buenas nociones del conocimiento del currículo, así que su respuesta **cumple** con lo esperado.

Figura 36

Transcripción de la respuesta del profesor experto y novel para la tarea 5b

El uso correcto de signos de agrupación. Reducir en lo posible el uso de paréntesis desde aritmética para representar y realizar multiplicaciones, porque esto al llegar a álgebra complica este tipo de sustituciones numéricas en las variables. El paréntesis es agrupación y si así se les hace saber desde el comienzo de su uso, este tipo de sustituciones no los confundiría.	Profesor Experto
-Retomaría el tema de gráfico de funciones. En el caso particular $f(x) = x^2 + 5$ Que representa una parábola y hacer la relación con los datos obtenidos por el alumno en la tabla. Que el alumno verifique si el gráfico corresponde a la propuesta de la parábola. -Sugerir al alumno usar un software graficador y grafique la función, y por otro lado que grafique su tabla, que compare. -Sugerir el uso de paréntesis al momento de evaluar variables.	Profesor Novel

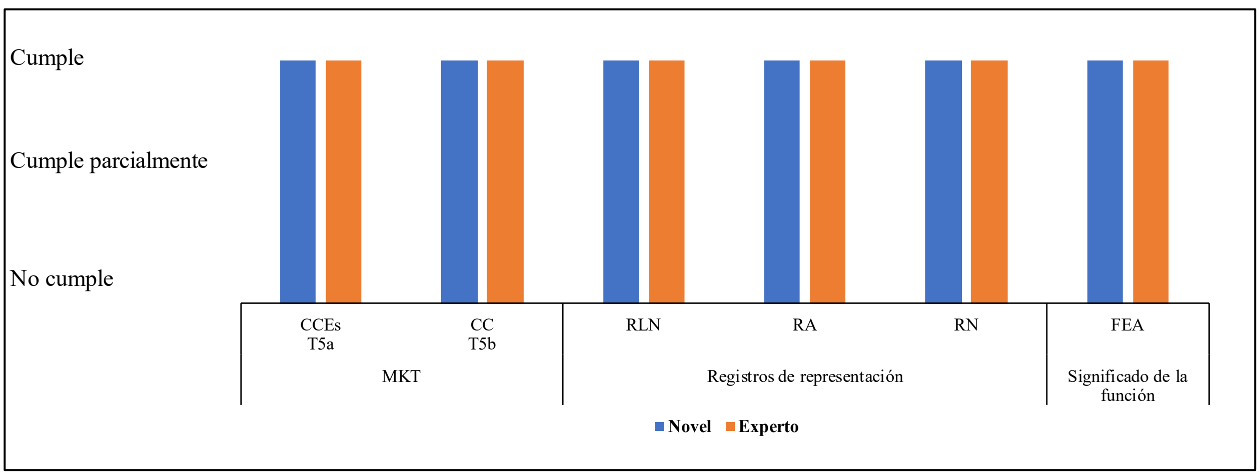
Los registros de representación que se pensaron para movilizarse en los profesores mediante el estudio de esta tarea, fueron los registros en lengua natural o verbal (RLN), algebraico (RA) y numérico (RN). **Ambos profesores** fueron capaces de iniciar interpretando la relación funcional que se describe ***verbalmente*** en la tarea (RLN.1) y pudieron realizar la conversión de dicha función al registro ***algebraico***, escribiendo la expresión algebraica que representa a dicha función (RA.1 y RA.2). El profesor experto lo hizo como parte de su respuesta al ítem 5a y el profesor novel, en el ítem 5b. Ambos utilizan, en esta ocasión, una nomenclatura funcional correcta, refiriéndose a una expresión en términos de una sola variable. Y, finalmente, tras el conocimiento de la representación algebraica de la función, pudieron comprender e interpretar el razonamiento que siguió el estudiante al evaluar la función y, de esta manera, utilizaron adecuadamente el registro tabular o ***numérico***. Por tales motivos, la respuesta de ambos profesores, desde la perspectiva de los registros de representación, **cumple** con el objetivo.

El significado de la función involucrado en la tarea 5 es el de la función como expresión analítica (FEA) y como puede apreciarse en las respuestas que ofrecieron los profesores, ambos fueron capaces de interpretar la función que se describía en el texto de la tarea y convertirla a una expresión algebraica, para que, partiendo de ahí, pudieran interpretar el resto de la situación. Entonces, los profesores asumen a la función como una expresión matemática que contiene operaciones aritméticas, en este caso, potencias y sumas (FEA.2) y es por ello que puede apreciarse una adecuada concepción del significado que tiene esta función; así que la respuesta de **ambos cumple** con lo buscado desde el punto de vista de esta categoría.

En resumen, y como puede apreciarse en la Figura 37, la tarea 5 es hasta el momento, la tarea en donde con mayor precisión pueden apreciarse los conocimientos de los profesores en cuanto al contenido y los estudiantes y del currículo. Así como un manejo excelente de los registros en lengua natural, algebraico y numérico para representar a una misma función y una apropiada interpretación del significado de la función como expresión analítica.

Figura 37

Grado de corrección de las respuestas de los profesores para la tarea 5



Nota. CCEs = conocimiento del contenido y los estudiantes. CC = conocimiento del currículo. RLN = registro en lenguaje natural. RA = registro algebraico. RN = registro numérico o tabular. FEA = función como expresión analítica

5.6 Tarea 6

Esta tarea es referente al análisis de un gráfico que representa una problemática real y vigente en el momento de escritura de este trabajo, que refiere sobre los casos de contagio que han ocurrido a lo largo del tiempo, del virus SARS-CoV-2, desde que se declaró como pandemia. Con el gráfico se pretende indagar por el conocimiento del contenido y la enseñanza (CCEn) y por el conocimiento en el horizonte matemático (CH), en los ítems a y b, respectivamente, de esta tarea.

El ítem a, que pregunta por los argumentos que los profesores podría utilizar para explicar que un gráfico representa una función, permite percibir, en la respuesta del profesor experto, la relación funcional entre dos variables y su representación en gráficas que, a su vez, permiten percibir el comportamiento de dichas variables; como puede apreciarse en la Figura 37, el profesor experto argumenta que esta relación se da dependiendo la conexión que hay entre sus variables, percibiendo, entonces, el gráfico como una relación entre dos variables que tienen correlación, la cual está formada por términos algebraicos. Esta percepción que tiene el profesor experto de la función, implica que toda función tiene una representación en el registro algebraico y como se ha hecho hincapié en la descripción del significado de la función como correspondencia arbitraria, ésta no siempre tiene una representación, más allá del único registro en el que se presenta y, por tal motivo, la respuesta del **profesor experto cumple parcialmente** con lo buscado en cuanto a ***significado*** de la función.

Adicionalmente, puede apreciarse en la misma Figura 38 que la respuesta del profesor experto no sugiere un argumento o argumentos para explicar que el gráfico representa una función, su respuesta está canalizada a intentar explicar una propiedad de las funciones sin mencionar alguna estrategia de enseñanza que conduzca a comprobar o asumir que el gráfico efectivamente sea una función. Por su parte, **el profesor novel**, menciona en su respuesta una de las estrategias didácticas más utilizadas y compartidas por los profesores para explicitar cuándo un gráfico representa una función (CCEn.1); se trata de la construcción de una línea recta perpendicular al eje de las abscisas y observar las intersecciones de esta recta con el gráfico que se está analizando y si, en todo momento del dominio, esta recta intersecta al gráfico en solamente un punto, entonces, el gráfico representa una función. La respuesta del profesor novel es una estrategia en la enseñanza del concepto de función que facilita la comprensión de esta noción, por lo que se puede apreciar su conocimiento en la enseñanza de este contenido y, por tanto, su respuesta es considerada **correcta**, desde el punto de vista del ***MKT***; no así con el **profesor experto**, cuya respuesta **cumple parcialmente** con el objetivo, pues aunque no menciona un argumento para evidenciar a los estudiantes la relación funcional que hay en el gráfico, justifica su respuesta, a partir de la correlación entre las dos variables.

Figura 38

Transcripción de la respuesta del profesor experto y novel para la tarea 6a

Como su nombre lo dice, las funciones están en función de variables y estas son datos representados en ejes dentro de las gráficas para visualizar el comportamiento de las cosas dependiendo de las variables a considerar. Son funciones, porque funcionan dependiendo de la correlación que tienen sus componentes dentro de ellas, estos componentes están formados por variables, exponentes, signos y coeficientes que trabajan para la función dependiendo de las variaciones que existen en el comportamiento del tema a trabajar.	Profesor Experto
Realizaría la prueba de la línea vertical, y sugeriría extraer algunos puntos de interés del gráfico y ver la relación entre las variables.	Profesor Novel

En el ítem b, que pregunta por contenidos matemáticos más avanzados del currículo escolar que se podrían relacionar con la situación mostrada en dicha tarea, se obtuvo como respuesta, por parte del **profesor experto**, cinco contenidos matemáticos; de los cuales, cuatro representan contenidos del programa de estudios de la asignatura de cálculo diferencial y solo uno es un contenido matemático que se aborda más adelante. En particular, el profesor experto alude al análisis de gráficas en la asignatura de estadística, la cual, de acuerdo con el currículo escolar vigente, se cursa en el último semestre del bachillerato tecnológico. Por su parte, **el profesor novel** menciona únicamente dos contenidos matemáticos, los cuales se abordan en el transcurso del currículo de la asignatura de cálculo diferencial. Y en el horizonte matemático refiere a la asignatura de estadística sin puntualizar con cuáles contenidos matemáticos de esta asignatura tiene relación la tarea 6. Por tales motivos, en lo que respecta al ***MKT***, la respuesta del **profesor experto cumple** con lo esperado y la del **profesor novel**, **cumple parcialmente.**

Estas formas de solución del ítem 6b que realizaron ambos profesores se pueden apreciar en la Figura 39.

Figura 39

Transcripción de la respuesta del profesor experto y novel para la tarea 6b

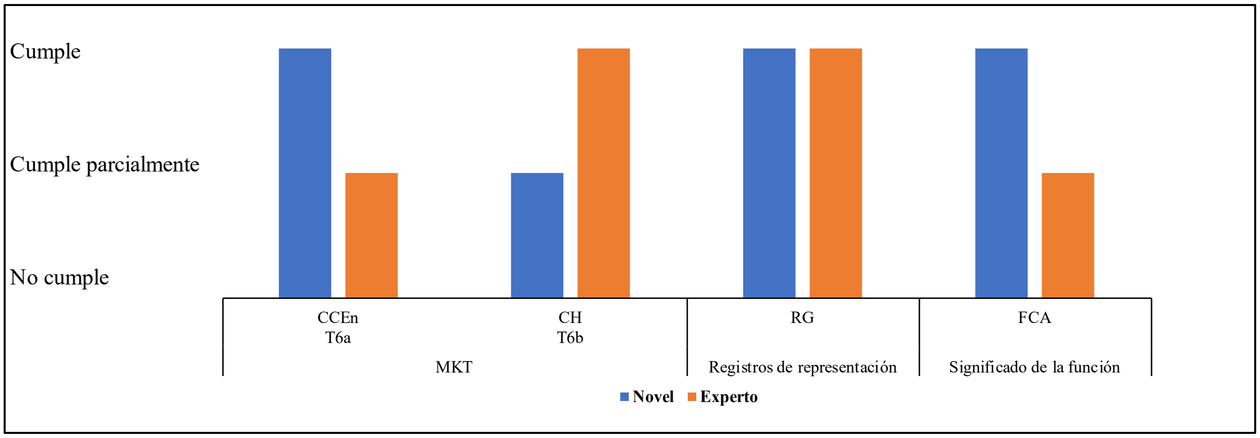
-Máximos y mínimos -Análisis de funciones -Dominio y rango -Análisis físico de funciones y su comportamiento -Análisis de gráficas en estadística	Profesor Experto
La función como representación de un cambio, intervalos donde la función (gráfico) es creciente, decreciente o constante. En la parte transversal, los contenidos de biología (o ciencias de la salud), sociología y ética. Análisis de datos y estadística.	Profesor Novel

En cuanto a los registros de representación, en la tarea 6 se pretendía movilizar el ***registro gráfico*** que, por lo general, se aborda conjuntamente con el significado de la función como correspondencia arbitraria, en la que, como su nombre lo indica, hay una relación arbitraria en las variables, que en varias ocasiones puede ser desconocida y solo se asume que hay una correlación entre ellas. Este registro se hizo presente (indirectamente) en el primer ítem cuando se pregunta por una estrategia o argumento que permita mostrar la relación funcional de una infinidad de puntos en el plano cartesiano y en el segundo ítem, en la capacidad de concebir a estos puntos, como algo más que una función y de interpretar el conjunto de ellos desde la perspectiva matemática de otra asignatura. Como se observa en la respuesta de ambos profesores, los dos tienen presente el registro gráfico de la función cuando resuelven los ítems, mencionando propiedades o contenidos de las funciones (RG.1), que involucran esta manera de representarlas y, por lo tanto, la respuesta de **ambos cumple** con el objetivo, desde la perspectiva de los registros de representación. Cabe mencionar que en todo momento, **el profesor novel** evita indicar que la función debe de tener una representación en otro registro, asumiéndola únicamente en el registro en que se presenta (FCA.1), lo cual permite concretar la concepción que tiene de la función como una correspondencia arbitraria (FCA.2), por lo que, además, su respuesta **cumple** con lo esperado desde el punto de vista de los ***significados de la función***.

En resumen, para la tarea 6, como puede apreciarse en la Figura 40, el profesor experto presentó dificultades al momento de evidenciar el conocimiento del contenido y la enseñanza y de asumir a la función como una correspondencia arbitraria en la que no siempre se conoce la manera en que las variables están relacionándose, pues en su respuesta, él afirma que la relación entre las variables se estipula siempre mediante términos algebraicos. Por su parte, el profesor novel únicamente presentó dificultades con el conocimiento en el horizonte matemático, al no puntualizar con cuáles contenidos matemáticos de la asignatura de estadística tiene relación la tarea 6.

Figura 40

Grado de corrección de las respuestas de los profesores para la tarea 6

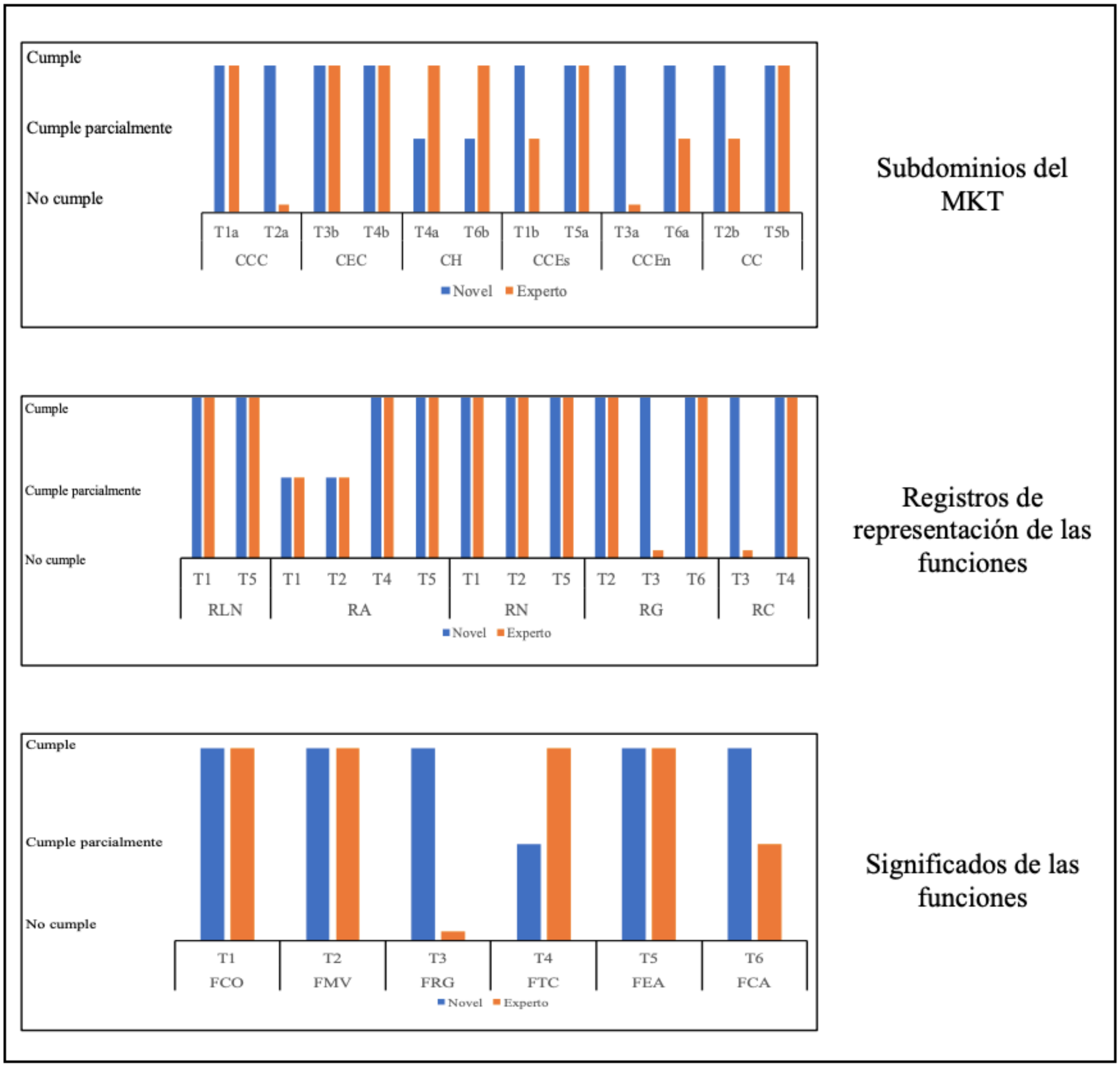


Nota. CCEn = conocimiento del contenido y la enseñanza. CH = conocimiento en el horizonte matemático. RG = registro gráfico. FCA = función como correspondencia arbitraria.

Se muestra a continuación, a manera de resumen, la Figura 41 que contiene el grado de corrección global de las respuestas de los profesores, en cada una de las tres categorías de estudio de la presente investigación:

Figura 41

Grado de corrección global de las respuestas de los profesores en las tres categorías



Nota. CCC = conocimiento común del contenido. CEC = conocimiento especializado del contenido. CH = conocimiento en el horizonte matemático. CCEs = conocimento del contenido y los estudiantes. CCEn = conocimiento del contenido y la enseñanza. CC = conocimiento del currículo. RLN = registro en lengua natural. RA = registro algebraico. RN = registro numérico. RG = registro gráfico. RC = registro cartesiano. FCO = función como correspondencia arbitraria. FMV = función como magnitudes variables. FEA = función como expresión analítica. FRG = función como representación gráfica. FCA = función como correspondencia arbitraria. FTC = función a partir de la teoría de conjuntos. T = tarea

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

A continuación, se muestran las conclusiones que se han generado tras el análisis de los resultados y su presentación en el capítulo anterior; dichas conclusiones se presentan de dos maneras: (1) conclusiones sobre el planteamiento del problema, donde se menciona el logro de los objetivos y la contestación a la pregunta de investigación, y (2) conclusiones sobre el estudio, indicando las líneas de continuidad del trabajo, así como las limitaciones y los aportes generados a la Matemática Educativa.

6.1 Conclusiones sobre el planteamiento del problema

El objetivo principal de este estudio fue determinar los conocimientos que tienen los profesores en ejercicio para la enseñanza del concepto de función, de acuerdo con el modelo MKT; y para lograrlo se diseñó y aplicó un cuestionario a dos profesores en ejercicio considerados experto y novel. A lo largo de este trabajo, se ha explorado el impacto que tiene el profesor en la enseñanza de contenidos matemáticos, evidenciando algunas de las limitantes que, por naturaleza, tienen los profesores de bachillerato en México. A partir de estos hallazgos, se pueden extraer varias conclusiones que permiten responder a la pregunta y a los objetivos de investigación planteados.

La pregunta de investigación para este trabajo fue: ¿qué conocimiento matemático para la enseñanza de la función tienen los profesores de matemáticas?, y en la hipótesis se consideró que los profesores de matemáticas de bachillerato en ejercicio contaban con los conocimientos que indica el MKT. Tras hacer la comparativa entre profesor experto y novel, se puede concluir que los profesores de matemáticas en ejercicio en el nivel bachillerato, ponen de manifiesto parcialmente los subdominios del modelo MKT y lo evidencian con diferentes matices. En algunos casos, estos pueden presentarse más desarrollados en cierto perfil de profesor, que en otros (ver figura 40), lo cual es naturalmente normal debido a diversos factores como la experiencia, la formación inicial, las capacitaciones y actualizaciones en la práctica docente, incluso, también influyen las reformas educativas a las que les ha tocado hacer frente, pues aunque éstas tienen como objetivo potencializar el aprendizaje en los alumnos, los cambios generados en los planes y programas de estudio, así como en el currículo de la materia, obliga a suprimir contenidos, priorizando algunos por encima de otros.

El subdominio del MKT que resultó más privilegiado, entendiéndose esto como aquel subdominio donde ambos profesores mostraron evidencia sólida de dicho conocimiento, fue el conocimiento especializado del contenido (CEC).

Con la experiencia, los profesores de bachillerato aprenden y dominan cuáles de los contenidos matemáticos, que durante su formación adquirieron, son los que se ponen en juego cuando abordan y enseñan un contenido en particular, en este caso, la noción de función; son capaces de discernir entre su amplio bagaje de conocimientos matemáticos, cuáles son los contenidos matemáticos necesarios para hacer frente a una tarea en particular y cómo es que éstos deben de organizarse para estudiar, tal vez, otro concepto matemático cognitivamente más avanzado. Lo anterior, justifica porqué los profesores en este estudio presentaron una fuerte evidencia de contar con un gran desarrollo del CEC.

El conocimiento del contenido y los estudiantes (CCEs), el conocimiento del currículo (CC) y el conocimiento común del contenido (CCC) fueron los subdominios en donde el profesor experto mostró medianamente deficiencias. Como se ha mencionado, el profesor experto ha tenido la oportunidad de impartir clases en instituciones de educación superior, participando en la formación de ingenieros, por lo tanto, no es de sorprenderse que a la hora de preguntar por relaciones transversales de un contenido matemático con otros, asuma relaciones con asignaturas de niveles superiores al bachillerato. En un intento por evidenciar sus saberes al respecto, posiblemente, sobreestimó sus conocimientos, sin revisar detenidamente la solicitud y es por ello que su desempeño en cuanto al CC se vio afectado.

Por otro lado, y con relación al CCEs, algunos estudios (Hill et al, 2007; Llinares y Krainer, 2006) han encontrado que los profesores expertos pueden tener dificultades para identificar los errores de los estudiantes, ya que frecuentemente tienden a asumir que los estudiantes tienen un conocimiento similar al suyo en la materia. Además, los profesores expertos pueden tener una mayor dificultad para adaptar su enseñanza a los estudiantes que tienen un nivel de conocimiento más bajo o que tienen dificultades de aprendizaje. Hill et al. (2008) encontraron que los profesores expertos pueden tener dificultades para identificar y abordar errores conceptuales de los estudiantes, lo que puede limitar la calidad de la enseñanza; en particular, los autores encontraron que los profesores expertos tienden a centrarse en la enseñanza de procedimientos matemáticos, en lugar de enfocarse en la comprensión profunda de los conceptos matemáticos subyacentes. Este estudio sugiere que los profesores expertos pueden tener dificultades para identificar y abordar errores conceptuales de los estudiantes, lo que puede limitar la calidad de su enseñanza, a pesar de su amplio conocimiento matemático.

En cuanto al CCC, el error del profesor experto fue trabajar con una función distinta a la que se solicitaba y utilizar un lenguaje inapropiado para referirse a los valores del dominio. Esta situación pudo darse por una interpretación errónea de la información proporcionada, en donde, posiblemente, pudieron influir otros factores como una poca concentración, distracción, equivocación, desorientación sobre la actividad, etc. Se invita a recordar la cantidad de factores que influyen a la hora de responder correctamente una tarea de aprendizaje y no por eso se considera que el profesor experto carezca del conocimiento suficiente para responder apropiadamente esta tarea. En este trabajo, estas dificultades se apuntan más a considerar despistes por parte del participante.

Los componentes del MKT menos desarrollados en los profesores, resultaron ser el conocimiento del contenido y la enseñanza (CCEn) y el conocimiento en el horizonte matemático (CH). Para el primero, el profesor experto, nuevamente, tuvo limitaciones significativas que apuntan a una mala interpretación de la información proporcionada. Es posible que el profesor haya sobreestimado su conocimiento en el tema de las funciones debido a su experiencia previa en la enseñanza de este concepto, repercutiendo en que no haya revisado detenidamente la tarea y haya pasado por alto algunos datos significativos para poderla resolver correctamente. Esto, es algo que ocurre comúnmente en los profesores expertos, pues dada su experiencia, tienden a sobrevalorar sus conocimientos, cayendo en un exceso de confianza, que si bien, en muchas ocasiones resulta ser un factor en beneficio para la enseñanza, en muchas otras ocasiones puede conducirlos a cometer errores de los cuales ni siquiera son conscientes.

En cuanto al CH, el profesor novel presenta deficiencias importantes. Este componente del MKT se encarga de indagar por los conocimientos que tienen los profesores respecto a la importancia de comprender eficientemente determinados contenidos matemáticos para poder aplicarlos, en futuros contenidos matemáticos, ya sea dentro del mismo nivel educativo, bachillerato en este caso, o superiores. El desarrollo efectivo de este subdominio permite deducir la finalidad de cada uno de los contenidos matemáticos, su pertenencia a cierto nivel educativo y su impacto en la posterioridad. Ambos profesores tienen nociones del para qué podría servir o aplicarse ciertas propiedades de la función en contenidos matemáticos de otras asignaturas posteriores en el área, sin embargo, el profesor novel evidencia una sutil comprensión, sin profundizar en situaciones concretas.

No obstante, es importante señalar que estas dificultades observadas, principalmente en el profesor experto, son más bien excepciones y no la regla en los profesores de matemáticas de nivel bachillerato, y que en general, estos tienen una gran efectividad en la enseñanza de las matemáticas, gracias a su experiencia, sea mucha o sea poca, lo cual es algo que enriquece sus conocimientos, a comparación de, por ejemplo, profesores en formación, que carecen de experiencia docente. Sin embargo, algunos estudios como los de Zehetmeier y Krainer (2021) sostienen que los profesores con años de experiencia presentan dificultades para conservar y aplicar los conocimientos que adquirieron durante su formación complementaria.

En cuanto a los objetivos de esta investigación, el objetivo general fue: determinar los conocimientos que tienen los profesores en ejercicio para la enseñanza del concepto de función. De acuerdo con el modelo MKT y tras el análisis de sus respuestas al cuestionario aplicado y como se evidencia en los párrafos anteriores, puede afirmarse que se cumplió con el objetivo, ya que se pudieron determinar los conocimientos que tienen los profesores participantes en este estudio.

Esta caracterización de conocimientos se enriqueció con el análisis de los registros de representación de las funciones y, como puede notarse en el capítulo anterior, los profesores mostraron dificultades en el registro gráfico, cartesiano y algebraico. Las inconsistencias en el registro cartesiano pueden ser extensiones de una distracción por parte del profesor debido a un exceso de confianza en los conocimientos con los que cuenta. En este sentido, un área de oportunidad que tiene esta investigación es el poder profundizar en las respuestas de los profesores, mediante grabaciones de audio que complementen sus soluciones. Por otro lado, Díaz et al. (2015) mencionan que el registro gráfico se ha jerarquizado por debajo del registro algebraico, al no ser estudiado lo suficiente (o en la misma medida) en el aula, sin alcanzar a comprender todas las posibilidades que esta forma de representación tiene consigo. Al no enseñarlo con la misma frecuencia que otros registros, se pone en tela de juicio la posibilidad de que el profesor experto haya tenido dificultades en este estudio, en este registro, debido a conocimientos no tan sólidos por no evocar a este registro con tanta frecuencia. Esto también podría explicar los resultados obtenidos con el registro cartesiano.

También, este estudio indagó por la comprensión de los profesores respecto a los significados de la función; evidenciando inconsistencias en el significado de la función como representación gráfica (FRG), a partir de la teoría de conjuntos (FTC) y de la función como correspondencia arbitraria (FCA). Estos dos últimos significados de la función son los menos usados en el nivel bachillerato, pese a que en diversos ejercicios y explicaciones se encuentran implícitos, por lo tanto, no es de sorprenderse que los profesores en este estudio no hayan evidenciado sólidamente una adecuada comprensión de estos significados. En cuanto a las dificultades del significado de la función como representación gráfica, se asume que son consecuencia de la misma sobrestimación de conocimientos o factores que intervienen en el momento de resolver una evaluación, de los que se ha venido refiriendo a lo largo de este capítulo, pues las dificultades, al menos en este significado, son nuevamente correspondientes al profesor experto.

Como objetivos específicos se tuvo: diseñar un instrumento que permitiera determinar los conocimientos que tienen los profesores para la enseñanza del concepto de función; lo cual fue algo que logró realizarse, con el apoyo de expertos en el área, que participaron en la actividad de triangulación, para poder conseguir un instrumento con mayor objetividad. Otro objetivo específico fue: profundizar en las concepciones matemáticas que tienen los profesores y que emplean para la enseñanza del concepto de función; lo que pudo lograrse tras la interpretación de los resultados obtenidos y que se aborda y justifica en los párrafos anteriores. Finalmente, otro objetivo específico fue: establecer relaciones entre las caracterizaciones de conocimientos reveladas por los docentes; actividad que pudo realizarse tras la comparativa constante entre los perfiles de ambos profesores, a lo largo de este trabajo.

6.2 Conclusiones sobre el estudio

El presente trabajo aporta de manera activa no solo a la investigación en Matemática Educativa, sino también (y directamente) a la docencia. Para la formación de profesores es importante considerar los hallazgos encontrados en trabajos como éste, para generar estrategias que permitan atender las dificultades encontradas y proporcionar rutas formativas que permitan a los docentes enriquecer su conocimiento matemático para la enseñanza. Para la formación de profesores en ejercicio, este trabajo es importante porque muestra una ferviente necesidad de atención a los profesores que están formando estudiantes de bachillerato, tal y como lo plantean Sosa y Ribeiro (2014). De esta manera, estos resultados contribuyen a contar con un estatus inicial de los conocimientos que los docentes en servicio poseen que permitiría focalizar programas formativos para el desarrollo de aspectos del conocimiento matemático para la enseñanza en los profesores en servicio.

Si bien es cierto, en un bachillerato tecnológico es ideal contar con profesores que tengan experiencia laboral en áreas ajenas a la docencia para que ésta pueda aportar significativamente a las asignaturas de componente profesional (se les llama así a las asignaturas de especialidad que cursan los estudiantes de un bachillerato tecnológico y que no son de tronco común), no se debe descuidar a las disciplinas comunes para todo tipo de bachillerato, preparatoria o nivel medio superior, como lo es, matemáticas; y recordar que los formadores en este nivel, provienen de instituciones ajenas a la docencia, por lo tanto, la gran mayoría no contará con herramientas pedagógicas para hacer frente a una enseñanza efectiva.

La repercusión que tiene este trabajo directamente en la docencia va desde el poder utilizar el cuestionario diseñado para los fines de esta investigación y generar una autoevaluación o una adaptación para poder aplicarlo a los estudiantes de cálculo diferencial, hasta motivar a profesores expertos y novatos a continuar enriqueciendo su conocimiento matemático para la enseñanza no únicamente en cursos de formación docente, también en cursos de contenidos matemáticos que permitan reforzar sus conocimientos y volver a cuestionarse ¿qué es lo que estoy enseñando?, ¿qué es lo que quiero que mis estudiantes aprendan?, ¿cómo voy a lograr que lo aprendan?, etc. Y también, este trabajo representa una invitación a los docentes en ejercicio para buscar nuevas estrategias de enseñanza, ya que en muchas ocasiones los profesores adoptan una única estrategia que en algún momento funcionó y no advierten la necesidad de renovar o innovar con nuevas prácticas por temor a lo desconocido (Pepin et al., 2013); en lo aquí mostrado, se evidencia la importancia de tener lo suficientemente desarrollado el conocimiento pedagógico del contenido y cómo los años de experiencia no siempre son sinónimo de una enseñanza efectiva.

Por lo mencionado anteriormente, este trabajo pone en contexto de lo que se vive en la gran mayoría de los bachilleratos en México, al no existir un currículo de formación homogéneo, los docentes cuentan con una limitada identidad docente, pero también la repercusión que esto tiene en la enseñanza de conceptos matemáticos. Esto sugiere cuestionarse sobre el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes de bachillerato y qué tan interiorizadas están, ¿estaremos enseñando el conocimiento matemático necesario para que los estudiantes puedan ingresar a una licenciatura en ingeniería?, ¿es el necesario para que puedan continuar sus estudios en una licenciatura en matemáticas básicas o aplicadas?

Como se observó en el estudio, el profesor experto presentó dificultades en el conocimiento común del contenido, que es aquel que le permite a cualquier persona (profesor o no) resolver la tarea planteada. Posiblemente, haya sido un despiste por parte del profesor. De esta manera, una de las limitaciones del estudio es que estos resultados no se generalizan, es decir, no se concluye que todos los profesores de bachillerato presentan estas inconsistencias en conocimiento común del contenido, al contrario, se espera que los profesores de matemáticas de este nivel educativo, mostraran una gran fortaleza en este componente relativo a los contenidos matemáticos; pero, ¿realmente será así?

Con esto, no se concluye que todos los profesores expertos vayan a mostrar estas dificultades en estos aspectos, pero sería interesante indagar por la actitud que toman los profesores con este perfil, frente a la enseñanza de las matemáticas. Si bien es cierto que hay numerosos trabajos que concluyen que los profesores expertos son privilegiados frente a los novatos, principalmente por éstos carecer de experiencia, no hay muchos trabajos que hayan indagado por la actitud que toman los profesores expertos al sentirse seguros, cómodos y confiados de su trabajo, de su posición y de sus conocimientos y, posiblemente, esto sea un desencadenante que produce inconsistencias en la enseñanza de las matemáticas. Según Rodríguez-Santos et al. (2020), la empatía que genera el docente con el grupo es un factor clave para el logro de los objetivos de aprendizaje.

Este trabajo deja una línea de investigación abierta para seguir profundizando en los componentes del MKT que se mostraron limitados, así como caracterizar cómo es la influencia de los años de experiencia en la propia práctica de enseñanza. En este sentido, este trabajo marca la pauta para continuar indagando, también, por la actitud y la propia percepción que toman los profesores considerados expertos al momento de la enseñanza, puesto que, de encontrarse que la gran mayoría de profesores expertos sobreestiman sus conocimientos mediante un exceso de confianza, podría representar un área de oportunidad interesante para abordarse desde la

Matemática Educativa, con apoyo de otras disciplinas referentes al comportamiento humano y así, concientizar a los profesores la importancia de abordar su práctica docente con la empatía suficiente para poder conocer: a sus estudiantes, a la enseñanza del contenido y a sus propias limitantes y generar, de esta manera, una apertura y disposición para seguir aprendiendo, siempre en beneficio de los estudiantes y de las matemáticas.

Finalmente, esta investigación es un parteaguas para seguir explorando los conocimientos que tienen los profesores de bachillerato en ejercicio, respecto al concepto de función, sus registros de representación y sus significados, y conseguir una recopilación de los principales hallazgos, para poder proponer estrategias de formación docente. La cual debe tener por objetivo no solamente el lograr profundizar teóricamente en las funciones, sino metodologías de enseñanza que permitan que los estudiantes aprendan de una manera óptima y permanente el concepto de función, así como un adecuado tratamiento entre cada uno de los registros de representación, haciendo uso de los distintos significados que tiene esta noción.

REFERENCIAS

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M. y Rojas, N. (2014). El conocimiento especializado del profesor de Matemáticas: MTSK. En CIBEM (Eds.). *Actas de las VII CIBEM* (pp. 5063-5069).

Amaya, T. y Sgreccia, N. (2014). Dificultades de los estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función. *Revista Epsilon, 31*(3), 21-38. https://core.ac.uk/download/pdf/334428202.pdf

Amaya, T. (2016). *Evaluación de los Conocimientos Didáctico-Matemáticos de futuros profesores de matemáticas al hacer transformaciones de las representaciones de una función.* [Tesis doctoral, Universidad Nacional de Educación a Distancia]. Archivo digital. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_TAmaya.pdf

Amaya, T., Castellanos, G. y Pino-Fan, L. (2021). Competencias de los profesores de matemáticas en formación a la hora de transformar las representaciones de una función. *Uniciencia*, *35* (2), 1-15. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.12

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en Educación Matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de las matemáticas para afrontarlo? *Educación Matemática*, *16*(3), 5-28. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516302

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas*. Editorial Síntesis.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Ball, D. L. y Bass, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. http://www.fachportal-paedagogik.de/fis_bildung/suche/fis_set.html?FId=889839

Bass, H. (2007). Matemáticas, matemáticos y educación matemática. *La Gaceta*, *10*(3), 689-706. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=653

Biehler, R. (2005). Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: The Concept of Function as an Example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose (eds.). *Meaning in Mathematics Education*, 61-81.

Boyer, C. (1986). *Historia de las matemáticas*. Alianza Universidad.

Cardeñoso, J. M., Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Carlson, M. y Oehrtman, M. (2005). *Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function*. Research Sampler.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castro, A., Mengual, E., Monserrat, P., Albarracín, L. y Gorgorio, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: Inicio de una línea de investigación, *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). SEIEM.

Cauchy, A., (1821). *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique.*

De la Rosa, A. (2003). Errores e inconsistencias en la enseñanza del concepto de función en el docente: el grado de visualización. *Mosaicos Matemáticos*, *11*, 121-133.

Dreher, A. y Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 88*(1), 89–114. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9577-8

Dhombres, J., Dahan-Dalmedico, A., Bkouche, R., Houzel C. y Guillemot, M. (1987). *Mathématique au fil des âges*. Paris: Gauthier-Villars.

Díaz, M., Haye, E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 41*, 20-38.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, *irem de Strasbourg*, *5*, 37-65.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. (M. Vega, Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1).

Elgueta, J., Muñoz, G. y Santis, M. (2014). *Texto del estudiante. Matemática 1° Medio*. Chile: SM Chile S.A.

Espinoza-Vásquez, G. (2020). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media superior sobre el concepto de función* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaiso]. Archivo digital.

Esquer, R. y Romero, C. (2021). Construcción de función como relación entre magnitudes variables: diseño de una enseñanza desde la teoría APOE. *Revista SahuarUS, 5*(1), 35-49.

Euler, L. (1755). *Institutiones Calculi Differentialis*. Petropolis.

Fabra, M. y J. Deulofeu (2000). Construcción de gráficos de funciones: continuidad y prototipos, *Relime, 3*(2), 207-230.

Fennema, E., Franke, L. M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147–164). New York, NY: Macmillan.

Fregoso A. (1979). *Los elementos del lenguaje de la matemática: Parte II. Funciones*. Editorial Trillas. México

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 20, 13-31.

Hamilton, A. (1982). Numbers, sets and axioms: the apparatus of mathematics. *Cambridge University Press*.

Hernández, A. (s.f.). *"Cálculo Diferencial" Guía del maestro*. [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Querétaro]. Archivo digital.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts? In F. K. Lester Jr. (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (Vol. 1, pp. 111-155). Information Age Publishing.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L. y Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430-511. https://doi.org/10.1080/07370000802177235

Hitt, F., Torres, A. (1994). *Visualizando las funciones con la PC*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Hoover, M. (2014). Mounting Progress on Understanding Mathematics Teacher Content Knowledge. In J. J. Lo, K. R. Leatham, L. R. Van Zoest, S. Link. (Eds.). *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 83- 90). Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-95

Ibarrola, M. y Martínez, M. (2018). Conformación de una identidad docente entre profesionistas universitarios contratados por asignatura en el nivel medio superior. *Sinéctica*, *51*(00008). https://doi.org/10.31391/s2007-7033(2018)0051-008

Jiménez E., Cepeda, H., Tolano K., Amavizca L., Portela T. y Reyes L. (2011). Desarrollo de un software para la generación, validación y clasificación de funciones: una contribución a la enseñanza de las matemáticas. *IGIP*.

Jiménez, E., Luna, M., Cepeda, M., Amavizca, L., Tolano, H., Reyes, L., López, S. y Peraza, R., (2013). Desarrollo de un objeto de aprendizaje para la enseñanza de las matemáticas: el caso de las funciones. *Eleventh LACCEI Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology*.

Jones, M. (2006). Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. *Undergraduate Math Journal*, *7*(2), 1-20.

Lacasta E. y Pascual J. (1998): *Las funciones en los gráficos cartesianos.* Editorial Síntesis.

Leatham, K. R. (Ed.). (2019). *Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education*. Switzerland: Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-030-23505-5

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (Student) Teachers and Teacher Educators as Learners. In *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. https://doi.org/10.1163/9789087901127_016

Manfredi, V. (2007). Funciones matemáticas, ¿para qué se utilizan?: la realidad de las funciones lineales. *Revista argentina de psicopedagogía*, (61), 9.

Martínez-Sierra, G., Valle-Zequeida, M., García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2019). "Las matemáticas son para ser aplicadas": Creencias matemáticas de profesores mexicanos de bachillerato. *Educación Matemática, 31*(1). https://doi.org/10.24844/em3101.04

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO] (2012). *Challenges in basic mathematics education*. http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776e.pdf

Parra, Y. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función*. [Tesis de maestría, Universidad de los Lagos].

Pederson, O. (1974). Logistics and theory of function. *Archive International d'histoire des sciences, 24*(94), 29-50.

Pepin, B., Gueudet, G. y Trouche, L. (2013). Re-sourcing teacher work and interaction : new perspectives on resource design, use and teacher collaboration. *ZDM : The International Journal on Mathematics Education*, *45*(7), 929-943. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0534-2

Pino-Fan, L. Godino, J. y Font, V. (2010). *Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada*. Trabajo presentado en la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores e Monterrey, Monterrey, Nuevo León, México. 206-213.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico – matemático del profesor. *Paradigma*, *36*(1), 87– 109.

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y. y Castro, W. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 11*(23), 201-220. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Prada, R., Hernández, C.A. y Jaimes, L.A. (2017). Representaciones semióticas alrededor del concepto de función en estudiantes de ingeniería. Góndola, Enseñ Aprend Cienc, 12(2), 14-31. https://doi.org/10.14483/23464712.10491

Ribeiro, A. y Cury, H. (2018). *Álgebra para a formaçao do profesor: Explorando os conceitos de equaçao e de funçao*. Autêntica.

Rodríguez-Flores A., Picardo-Alfaro, M., Espinoza-González, J. y Rojas-González, N. (2018). El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. *UNICIENCIA*, *32*(1), 89-107. https://doi.org/10.15359/ru.32-1.6

Rodríguez-Santos, E., Moya-Martínez, M. y Rodríguez-Gámez, M. (2020). Importancia de la empatía docente-estudiante como estrategia para el desarrollo académico. *Dominio de las Ciencias, 6*(3), 23-50. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7467931

Romero, J., Rojas, P. y Bonilla, M. (2010). Modificación de un conflicto semiótico en un ambiente de trabajo colaborativo. *Paradigma, 31*(1), 161-182. http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/454

Roque, T. (2012). *História da matemática – Uma visao crítica, desfrezando mitos e lendas*. Zahar.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos.* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/35199

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255–281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Saiz, O. y Blumenthal, V. (2014). *Texto del estudiante. Matemática 3° Medio*. Chile: Ediciones Cal y Canto.

Sastre, P., Rey, G. y Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *16*, 141-155. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1167

Scheiner, T., Montes, M.A., Godino, J.D, Carrillo, J. y Pino-Fan, L.R. (2019) What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering altenartive views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(1), 153-172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Schempp, P. Tan, S. Manross, D. y Fincher, M. (1998). *Differences in novice and competent teachers'knowledge. Teachers and teaching, 4*(1), 9-20. https://doi.org/10.1080/1354060980040102

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA, 5*(4), 129-145. https://documat.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3653702

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: foundations of the New Reform Harvard. *Educational Review*, *57*(1), 1-22. https://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Revista de currículo y formación del profesorado*, *9*(2), 1-30. https://recyt.fecyt.es/index.php/profesorado/article/view/42675

Sierra, M., González, M. y López, C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula*, *10*, 89-104. https://doi.org/10.14201/3540

Sosa, L. y Ribeiro, C. (2014). La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: una necesidad para la profesionalización docente. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, *1*(1), 1-15. https://www.pag.org.mx/index.php/PAG/article/view/48

Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal*. Editorial Reverté.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudios de casos*. Morata

Struik, D. (Ed.). (1969). *A source book in Mathematics*. Harvard University Press.

Sullivan, P. (2008). Knowledge for Teaching Mathematics. In P. Sullivan, T. Wood, (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education*. *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development,* (pp. 1-9). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Tasdan, B. y Koyunkaya, M. (2017). Examination of pre-service mathematics teacher's knowledge of teaching function concept. *Acta Didactica Napocensia*, *10*(3), 1-18. https://eric.ed.gov/?id=EJ1160576

Zehetmeier, S., y Krainer, K. (2011). Ways of promoting the sustainability of mathematics teachers' professional development. *ZDM*, *43*(6), 875–887. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0358-x

ANEXOS

Anexo 1 Cuestionario versión inicial (compuesto por 13 tareas)

Tarea 1

Un profesor solicita a los estudiantes completar la siguiente tabla, convirtiendo la medida de los ángulos dados en el sistema sexagesimal al cíclico.

$$rad = \left(\frac{\pi}{180}\right)(Grados)$$

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	180º	270º	360º
Radianes									

a) ¿Con cuáles contenidos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema?
b) De acuerdo con el currículo escolar, ¿cuál es el objetivo de la tarea?

Tarea 2
Fuente: Azcarate & Deulofeu (1996)

Al acabar una reunión a la que asisten un cierto número de personas, todos se dan la mano.

Personas	5	7			n
Apretones de mano			6	45	

a) Llamando n al número de personas, escriba una expresión en n que dé el número de apretones de mano.
b) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta la tarea.

Tarea 3

La velocidad de una partícula se encuentra en función del tiempo y puede calcularse mediante una expresión lineal en donde la aceleración es la pendiente y la velocidad inicial, la ordenada al origen. Si una partícula tiene una aceleración de $a = 3\frac{m}{s^2}$ y una $V_i = 2\frac{m}{s}$, se solicita a los estudiantes calcular la velocidad en los diferentes instantes que se muestran en la tabla:

Tiempo (s)	0	1	2	3	5	10	12	15	20
Velocidad (m/s)									

a) ¿Qué contenidos matemáticos deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta?
b) Describa las posibles dificultades a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta la tarea

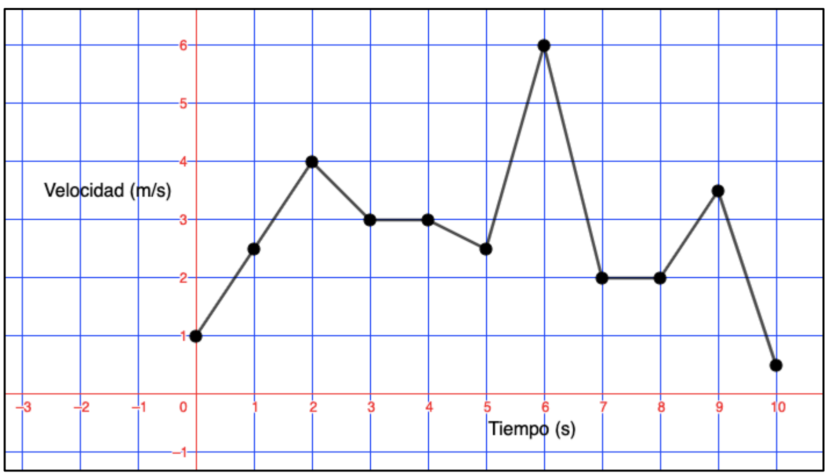
Tarea 4

La temperatura T (en ºC) de un cuerpo varía con respecto al tiempo t (en horas) transcurrido desde que ha sido sometida a calor y se rige bajo la expresión $T(t) = 16t - 3.2t^2$ con $0 \leq t < 5$. Se solicita representar gráficamente la relación Temperatura-tiempo y encontrar la temperatura máxima que alcanza la pieza.

a) ¿Cómo explicaría a los alumnos la resolución de la tarea?
b) De acuerdo con el currículo escolar del bachillerato tecnológico, ¿cuál es la relación transversal de esta tarea con otras asignaturas?

Tarea 5

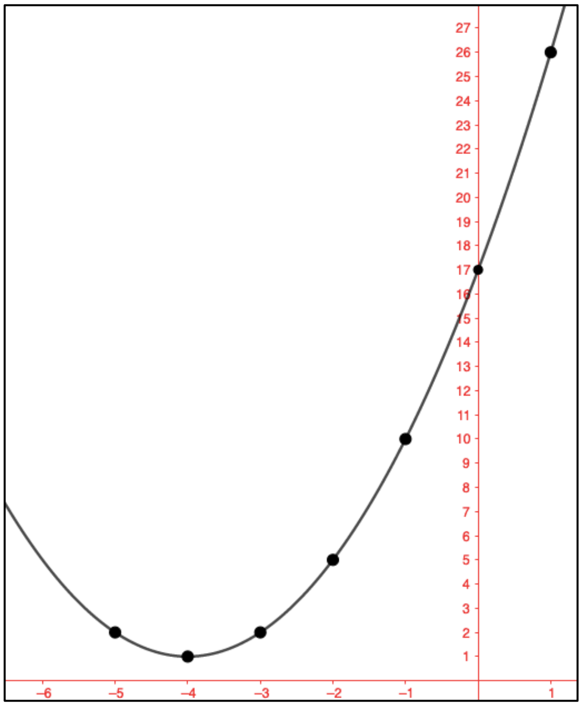
Un profesor solicita a sus estudiantes analizar la siguiente gráfica que representa la velocidad de una partícula en diferentes instantes.



a) ¿Qué estrategia utilizaría para explicar cómo calcular la velocidad en el segundo 5.3?
b) ¿Qué contenidos matemáticos deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta el ítem a)?

Tarea 6

Un profesor solicita a los estudiantes determinar pares ordenados de la función representada en la gráfica, de acuerdo con la tabla dada. Al terminar, un estudiante pregunta si estos son los únicos pares ordenados con los que cuenta la función.



abscisa	ordenada	(x,y)
-5		(,)
-4		(,)
-3		(,)
-2		(,)
-1		(,)
0		(,)
1		(,)

a) ¿Qué recurso utilizaría para resolver la inquietud del estudiante?
b) ¿Qué contenidos matemáticos pueden abordarse mediante el estudio de esta situación?

Tarea 7

Un profesor solicita a sus estudiantes encontrar una expresión matemática que relacione linealmente el peso P (en kilogramos) con la edad t (en años) de un bebé que al nacer pesó 3.5 kg y que tres años después pesó 10.5 kg.

a) Encuentre la expresión matemática
b) ¿Qué contenidos matemáticos deben utilizar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?

Tarea 8

Al representar numéricamente a la función $f(x) = x^2 + 5$, un alumno obtuvo los siguientes datos:

x	Operaciones	f(x)
-3	$-3^2+5 = -9+5 = -4$	-4
-2	$-2^2+5 = -4+5 = 1$	1
-1	$-1^2+5 = -1+5 = 4$	4
0	$0^2+5 = 0+5 = 5$	5
1	$1^2+5 = 1+5 = 6$	6
2	$2^2+5 = 4+5 = 9$	9
3	$3^2+5 = 9+5 = 14$	14

a) Si el alumno estuviera en un error, describa el posible razonamiento que lo condujo a ello
b) ¿Qué estrategias utilizaría usted como profesor para orientar a aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea a la tarea?

Tarea 9

Se sabe que el área de un cuadrado es $A = l^2$ y que su perímetro es $P = 4l$. Se podría decir que ambas fórmulas están en función de la longitud del lado l. Se solicita a los estudiantes encontrar una expresión algebraica para calcular el área en función del perímetro.

a) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta la tarea.
b) ¿Qué contenidos matemáticos deben utilizar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?

Tarea 10

En agosto 11 del 2021, el diario mexicano El Financiero, presentó el número de casos confirmados de COVID-19, para concientizar ante la llegada de la tercera ola de contagios de la pandemia.

Aunque es imposible obtener una expresión algebraica para calcular el número de casos según el tiempo, un profesor comenta a sus estudiantes que este gráfico representa una función.

a) ¿Bajo qué argumentos explicaría usted a los alumnos que el gráfico representa una función?
b) ¿Con cuáles contenidos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en esta tarea?

Tarea 11

¿La función $h(t) = f(1 + t^2)$ es par o impar?, donde f es una función arbitraria.

a) De acuerdo con el currículo escolar, ¿cuál es el objetivo de la tarea?
b) ¿Con cuáles contenidos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema?

Tarea 12

Un profesor, solicita a sus estudiantes determinar la siguiente función como par ordenado $F = \{(x, y) \in A \times B : y = x + 1\}$, si $A = \{x : 3 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{x - 2: 5 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}\}$

a) De acuerdo al currículo escolar, ¿para qué nivel educativo considera pertinente este problema?
b) Encuentra los pares ordenados de la función

Tarea 13

Un profesor de secundaria propone la siguiente situación:
El lunes, Juan tenía $5 pesos, después de ahorrar cierta cantidad de lo que sus padres le dan para gastar en la escuela, el martes ya tiene $11 pesos. Para el miércoles, cuenta con $19 y el día siguiente, dispone de $29. ¿Cuánto dinero logró juntar el viernes?

a) ¿Considera que la tarea es apropiada para iniciar el estudio del concepto de función?
b) ¿Cómo adaptaría la situación para, más tarde, abordar el concepto de función a nivel bachillerato?

Anexo 2 Guía de evaluación del cuestionario para triangulación de expertos

Considerar 5 como la totalidad de la correspondencia, pertinencia y formulación; y 1 como la deficiencia en dichos criterios.

	5	4	3	2	1
Correspondencia					
La tarea planteada pertenece al significado de la función					
La tarea planteada pertenece a los registros de representación					
El ítem a pertenece al dominio del conocimiento indicado					
El ítem b pertenece al dominio del conocimiento indicado					
Pertinencia					
La tarea es coherente con el significado de la función					
La tarea es coherente con el registro de representación					
El ítem a es coherente con el dominio del conocimiento					
El ítem b es coherente con el dominio del conocimiento					
Formulación					
La tarea es clara, sólida y sin ambigüedades					
El ítem a es claro, sólido y sin ambigüedades					
El ítem b es claro, sólido y sin ambigüedades					

Anexo 3 Versión final del cuestionario (compuesto por 6 tareas)

Tarea 1. Al acabar una reunión a la que asisten un cierto número de personas, todos se despiden con un apretón de mano. En la siguiente tabla se puede interpretar que si hay dos personas solo se puede tener un apretón de manos; si hay tres personas se tendría 3 apretones de manos; si hay cuatro personas habría 6 apretones de manos. Asimismo, en la tabla no se específica cuántos apretones de manos habría si se tuvieran 5 personas, y tampoco cuántas personas hubo en la reunión si se dieron 105 apretones de manos.

Personas	2	3	4	5	
Apretones de mano	1	3	6		105

a) Llamando n al número de personas, escriba una expresión que permite calcular el número de apretones de manos dado cualquier número de personas. Enseguida, complete la tabla.

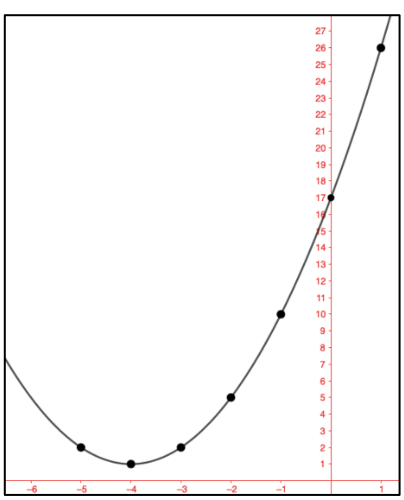
b) Describa la o las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta la tarea.

Tarea 2. La temperatura T (en ºC) de un cuerpo varía con respecto al tiempo t (en horas) transcurrido desde que ha sido sometida a calor y se rige bajo la expresión $T(t) = 16t - 3.2t^2$ con $0 \leq t < 5$. Se solicita representar gráficamente la relación Temperatura-tiempo y encontrar la temperatura máxima que alcanza la pieza.

a) Encuentre la representación gráfica de la función y determine la temperatura máxima en el intervalo dado.

b) De acuerdo con el currículo escolar del bachillerato tecnológico, ¿considera que esta tarea tiene una relación trasversal con contenidos matemáticos de otras asignaturas?, de ser así, ¿cuál es esa relación de contenidos y a qué asignatura o asignaturas pertenecen?

Tarea 3. Un profesor solicita a los estudiantes determinar pares ordenados de la función representada en la gráfica, de acuerdo con la tabla dada. Al terminar, un estudiante pregunta si estos son los únicos pares ordenados con los que cuenta la función.



abscisa	ordenada	(x,y)
-5		(,)
-4		(,)
-3		(,)
-2		(,)
-1		(,)
0		(,)
1		(,)

a) ¿Qué explicación o estrategia utilizaría para resolver la inquietud del estudiante?

b) ¿Qué propiedad o propiedades de la función pueden abordarse mediante el estudio de esta situación?

Tarea 4. Un profesor solicita a sus estudiantes determinar la siguiente función como conjunto de pares ordenados: $F = \{(x, y) \in A \times B : y = x + 1\}$, si $A = \{x : 3 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{x - 2: 5 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}\}$

a) ¿Considera que esta tarea es pertinente para el nivel medio superior? Justifique su respuesta.

b) ¿Qué contenido o contenidos matemáticos deberían utilizar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?

Tarea 5. Para cada valor x de la función f, hay un único valor y. Ambos valores se corresponden elevando al cuadrado los valores x, y agregando 5 al resultado de dicha potencia. Al representar numéricamente esta función, un alumno obtuvo los siguientes datos, en donde se muestra un error común en los estudiantes:

x	Operaciones	f(x)
-3	$-3^2+5 = -9+5 = -4$	-4
-2	$-2^2+5 = -4+5 = 1$	1
-1	$-1^2+5 = -1+5 = 4$	4
0	$0^2+5 = 0+5 = 5$	5
1	$1^2+5 = 1+5 = 6$	6
2	$2^2+5 = 4+5 = 9$	9
3	$3^2+5 = 9+5 = 14$	14

a) Describa el posible razonamiento del alumno que lo condujo a ello.

b) ¿Qué estrategia o estrategias propondría en el currículo para evitar la ocurrencia de errores como este?

Tarea 6. En agosto 11 del 2021, el diario mexicano El Financiero, presentó el número de casos confirmados de COVID-19 en cada una de las semanas desde que inició la pandemia, esto con la finalidad de concientizar ante la llegada de la tercera ola de contagios.

Aunque es imposible obtener una expresión algebraica para calcular el número de casos confirmados según el tiempo, un profesor comenta a sus estudiantes que este gráfico representa una función.

a) ¿Qué argumento o argumentos daría usted a los alumnos para explicar/mostrar/convencerlos de que el gráfico de la tarea representa una función?

b) ¿Con cuál o cuáles contenidos matemáticos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en esta situación?

Anexo 4 Respuestas esperadas a las preguntas del cuestionario

Tarea	Respuesta Esperada
1a	El problema puede interpretarse con ayuda de geometría, considerando a cada persona de la reunión como el vértice de un polígono cualquiera, en donde la línea que une dos vértices, será un apretón de mano. De tal forma que el número de apretones será igual a la suma de las diagonales y lados de dicho polígono. La fórmula para el cálculo de las diagonales de un polígono con n lados es $n = \frac{n(n-3)}{2}$ y si sumamos n, tendremos la función $A_m(n) = \frac{n(n-1)}{2}$, en donde $A_m(n)$ es el número de apretones de mano en función del número de personas n. La cual, resulta ser también la Suma de Gauss. También se puede resolver por combinatoria, es decir, combinaciones de n elementos tomados de dos en dos (sin repetición). Otra forma de resolverlo sería analizando una tabla de correspondencia como se presenta en la tarea con suficientes valores para apreciar que el número de apretones de manos está vinculado (pero no es igual) a la suma de los primeros n números naturales, con esta forma de resolución no se tendría que recordar la fórmula del cálculo de diagonales, por ejemplo. La tabla se completa con 10 apretones de mano para 5 personas y 15 personas para 105 saludos.
1b	Las posibles dificultades que podrían enfrentar los estudiantes son: 1) Interpretar la tarea con ayuda de geometría. Una de las principales dificultades de los estudiantes es articular los conocimientos adquiridos previamente, en este caso en la asignatura de geometría y trigonometría, para dar solución a una tarea que aparentemente está en otro contexto. 2) Dificultad al recordar la fórmula para el cálculo de las diagonales. 3) Asimilar que el número de apretones de mano es igual a la suma de las diagonales más el número de lados. Ante el hecho de que los estudiantes recuerden la fórmula de las diagonales, pueden considerar que esa, tal cual, es la expresión matemática que solicita el problema. 4) Duplicar los apretones de mano, al no considerar que cuando la persona A le da la mano a la persona B, ya está incluido el apretón de mano de la persona B a la persona A. 5) El tratamiento algebraico de la fórmula, es decir, dificultades en los despejes, sustituciones y realización de operaciones.

<table>
<tr><th>Tarea</th><th>Respuesta Esperada</th></tr>
<tr><td>2a</td><td>Aunque hay diferentes formas de solucionar la tarea, se espera que se puedan considerar algunos de los componentes que se mencionan a continuación:
En primer lugar, se trabaja con la noción de dependencia. Para este caso, es importante hacer hincapié en que la temperatura del cuerpo va a depender del tiempo en que dicho cuerpo ha estado sometido al calor.
Posteriormente, se trabaja con la expresión algebraica de la temperatura. Se analizan sus propiedades, como lo son: es una función cuadrática, lo que en el registro gráfico representa una parábola; la constante del término cuadrático es negativa, lo que indica que es una parábola cóncava, en donde hay un punto máximo, el cual es, justamente, una de las solicitudes de la tarea.
A continuación, se hace énfasis en el dominio de la función, el tiempo al que se sometió el cuerpo al calor es $[0,5)$, lo que permite convertir la función al registro numérico mediante una tabla como la siguiente:
<table>
<tr><th>x (tiempo)</th><th>y (Temperatura)</th><th></th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>(0,0)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>12.8</td><td>(1,12.8)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>19.2</td><td>(2,19.2)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>19.2</td><td>(3,19.2)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>12.8</td><td>(4,12.8)</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>(5,0)</td></tr>
</table>
Si el tiempo es la variable independiente, sus valores deben ubicarse en el eje de las abscisas y, por consiguiente, la temperatura en el eje de las ordenadas y, entonces, se ubican los pares ordenados obtenidos.
Se determina el vértice (h, k) de la parábola con las fórmulas $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$, con $a = -3.2, b = 16, c = 0$. Obteniendo $V = (2.5, 20)$
Se traza la parábola que pase por los pares ordenados ubicados en el plano cartesiano y se da por terminada la tarea al explicitar que el vértice proporciona la temperatura máxima, para este caso 20ºC, cuando han transcurrido 2.5 horas.</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>De acuerdo con el currículo escolar para el bachillerato tecnológico, la tarea propuesta se tiene relación con la asignatura de geometría analítica, ya que al considerar una función cuadrática como una parábola, se pueden estudiar sus propiedades y así facilitar la resolución de esta tarea. Asimismo, se relaciona con la asignatura de física I para determinar el comportamiento de las variables que intervienen en un fenómeno físico a través de métodos gráficos y analíticos. En este caso, mediante la representación en el registro gráfico de la función cuadrática, se pudo interpretar la relación entre la temperatura de un cuerpo y el tiempo en que este había sido sometido a calor.</td></tr>
</table>

Tarea	Respuesta Esperada
3a	Aunque para dar solución a la inquietud del estudiante, pueden existir diferentes formas de abordarla, se espera que se consideren los siguientes recursos: El concepto de función incluye una correspondencia entre dos conjuntos, llamados dominio y rango. A cada valor del dominio le corresponde un único valor del rango. El dominio de la función en cuestión incluye a todos los números reales, lo que representa un conjunto infinito de posibles valores que puede tomar la variable independiente; lo que lleva a comprender que el rango, aunque no incluye a todos los números reales, también es un conjunto infinito, pues la cardinalidad de dicho conjunto es imposible de contar. Esto implica que la cantidad de pares ordenados que se pueden obtener, es infinita. Haciendo uso de recursos tecnológicos, el software GeoGebra, cuenta con una herramienta dinámica en la que se permite mover un punto a lo largo de la gráfica de una función y en cada desplazamiento el software reporta las coordenadas que el punto tiene en dicha posición. Esto permite vislumbrar que las funciones están conformadas por una infinidad de puntos o pares ordenados.
3b	Los contenidos matemáticos que pueden abordarse mediante la situación planteada corresponden al estudio de las propiedades de la función. En este caso, la función cuadrática es una función no inyectiva y no suprayectiva. Esto es, no hay una relación biunívoca entre las variables de la función y además, el rango no son todos los números reales. La cardinalidad de los conjuntos es otro contenido matemático que se pudiera emplear para hacer hincapié en que los conjuntos dominio y rango son incontables y por lo tanto su cardinalidad es infinita. También puede estudiarse cuándo una función es creciente y cuándo no, así como las raíces de la función y su intersección con el eje de las ordenadas.
4a	El currículo escolar de la asignatura de cálculo diferencial para el bachillerato tecnológico, no incluye el estudio de la función a partir de la teoría de conjuntos. Por lo que la tarea planteada representa una situación para ser abordada en niveles superiores, en donde se tienen competencias y conocimientos de la notación conjuntista y su relación con las funciones.
4b	Para dar una solución correcta a la tarea, los estudiantes deberían conocer la nomenclatura de las funciones, incluyendo la simbología, para poder comprender las características que definen a esta función en particular. También, deben saber intervalos y desigualdades, así como conjuntos de números y su producto cartesiano.
5a	El alumno está en un error que se originó debido a que no está contemplando el signo de los valores negativos de la variable x al momento de encontrar su cuadrado. El estudiante debe comprender que $(-x)^2 \neq -x^2$. Como puede observarse en el desarrollo del cuadrado $(-x)^2 = (-x)(-x)$, cuando se busca el cuadrado de un número negativo, el resultado será siempre positivo. En el caso de las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$, el signo del coeficiente a es independiente al valor que se le asigne a x. Por lo que si $x < 0$, habrá que hacer la distinción entre el signo del coeficiente a y el signo del valor de x, así como respetar la jerarquía de operaciones: primero se calculan las potencias y enseguida los productos.

Tarea	Respuesta Esperada
5b	Una propuesta podría ser incluir en el currículo de la asignatura un apartado que involucre actividades paralelas de refuerzo, por ejemplo: algunos ejercicios algebraicos que incluyan determinar cuadrados de número negativos, en donde el procedimiento incluya expresar las potencias como multiplicaciones, para que los estudiantes comprendan el motivo por el cual las potencias con bases negativas y exponentes pares darán resultados con signos positivos, mientras que las potencias con bases negativas y exponentes impares ofrecerán resultados negativos. Si no es posible modificar el currículo de la asignatura con esta propuesta, sería conveniente involucrar un refuerzo de operaciones algebraicas en la asignatura de álgebra para evitar este tipo de errores en futuras asignaturas.
6a	Aunque existen diversos argumentos que pueden argumentar la respuesta a la tarea, se espera que se consideren los siguientes componentes: Una función es una correspondencia entre dos conjuntos, llamados dominio y rango. A cada valor del dominio le corresponde un único valor del rango. Dicha correspondencia, no siempre puede representarse como una expresión analítica, en donde haya un procedimiento matemático para obtener el valor de una variable, dado el valor de la otra. Es decir, en algunas ocasiones las variables simplemente se relacionan, sin dejar saber el cómo lo hacen y esa relación cumple con las características de una función, pues cada valor del dominio tiene un único valor del rango. A este tipo de funciones se les conoce como arbitrarias, esto es, una función cualquiera, en la que no hace falta conocer su registro algebraico.
6b	En el currículo de matemáticas del bachillerato tecnológico, más tarde, esta tarea puede ser estudiada en la asignatura de probabilidad y estadística (6º semestre), particularmente en estadística descriptiva, cuando se abordan contenidos matemáticos relacionados a cómo presentar y tratar datos estadísticos. También, en la materia de cálculo integral (5º semestre) podría estudiarse el comportamiento de la función para ejemplificar, por ejemplo, el área que hay bajo la curva de la función arbitraria.