



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Doctorado en Ingeniería

**MODELACIÓN NO LINEAL DE VIBRACIONES AUTO-INDUCIDAS EN
PROCESOS DE MAQUINADO**

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Doctor en Ingeniería

Presenta:
Luciano Vela Martínez

Dirigido por:
Dr. Juan Carlos Jáuregui Correa

SINODALES

Dr. Juan Carlos Jáuregui Correa
Presidente

Dr. Gilberto Herrera Ruiz
Secretario

D. Alejandro Lozano Guzmán
Vocal

Dr. Aurelio Domínguez González
Suplente

Dr. Pedro Daniel Alaniz Lumbreras
Suplente

Dr. Oscar González Brambila
Suplente

Dr. Eduardo Rubio Cerda
Suplente


Dr. Gilberto Herrera Ruiz
Director de la Facultad


Firma


Firma


Firma


Firma


Firma


Firma


Firma


Dr. Luis Gerardo Hernández Sandoval
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Octubre de 2008
México

RESUMEN

Las vibraciones auto-inducidas limitan la productividad de los procesos de maquinado de productos metálicos. Se trata de un problema de inestabilidad dinámica que restringe la razón de remoción de material, además de afectar la calidad superficial de las piezas y acelerar el deterioro de las herramientas de corte y los elementos mecánicos de los husillos. El fenómeno presenta un comportamiento altamente no lineal de tipo caótico, caracterizado por bifurcaciones subcríticas Hopf y de período duplicado. Su identificación y control han motivado una gran cantidad de investigaciones, como la desarrollada en este trabajo, con el objetivo de optimizar la productividad de los procesos en condiciones libres de vibración. En esta investigación se presenta un estudio de las vibraciones auto-inducidas en procesos de maquinado usando técnicas de dinámica no lineal, con el objetivo de predecir con mayor precisión las condiciones de estabilidad en términos de las características dinámicas y las condiciones de operación del sistema. El estudio propuesto se basó en un modelo débilmente no lineal con términos cuadráticos y cúbicos para representar comportamientos no lineales de tipo estructural y regenerativos. Se construyó una solución aproximada mediante el método de escalas múltiples y se establecieron condiciones de inestabilidad debido a bifurcaciones subcríticas Hopf, a partir de la forma normal del sistema dinámico. Una contribución importante fue la identificación del efecto de la histéresis en los diagramas de estabilidad convencionales, lo cual puede ser útil para restablecer la estabilidad. El modelo analítico se validó experimentalmente, las señales del proceso de corte se analizaron mediante técnicas de análisis espectral, análisis de ondeletas (wavelets) y análisis fractal (R/S). Los resultados experimentales y teóricos coincidieron satisfactoriamente. El comportamiento no lineal del proceso de corte se identificó exitosamente a partir de la medición de la respuesta dinámica del sistema; el término cúbico se calculó a partir de la dinámica del sistema, y se identificó la naturaleza fractal del fenómeno.

(Palabras clave: vibraciones auto-inducidas, estabilidad dinámica, análisis no lineal, bifurcaciones, caos)

SUMMARY

Self-excited vibrations limit the productivity of machining processes in metallic products. These vibrations originate dynamic instability problems that hinder the rate of removal of material, as well as affect the surface quality of the pieces and accelerate the wear of the cutting tools and the mechanical elements of spindles. This phenomenon presents a highly non-linear chaotic behavior characterized by both subcritical Hopf and doubling period bifurcations. Its identification and control have motivated a large number of studies, such as the present one, with the objective of maximizing productivity processes in free-vibration conditions. This research deals with self-excited vibrations in machining processes using non-linear dynamic techniques with the aim of predicting with more accuracy the stability conditions in terms of dynamic characteristics and operating conditions of the system. This study is based on a weakly non-linear model with square and cubic terms that represent structural and regenerative nonlinearities. An approximate solution was derived using the multiple-scale method; instability conditions were established due to subcritical Hopf bifurcations. A major contribution of this study is the identification of hysteresis in the conventional stability diagrams, which may be useful to reestablish stability. The analytical model was validated experimentally; the signals of the cutting process were analyzed with spectral, wavelet and fractal (R/S) analyses. Experimental and theoretical results matched satisfactorily. The nonlinear behavior in the cutting process was successfully identified by measuring the dynamic response of the system; the cubic term was calculated from the dynamics of the system. In addition, the fractal nature of the phenomenon was established.

(Key words: self-excited vibrations, dynamical stability, nonlinear analysis, bifurcations, chaos)

DEDICATORIAS Y AGRADECIMIENTOS

Dedico este trabajo a la memoria de Antonio R. Vela, inspiración de grandeza, lucha, libertad y justicia. A mi hermano Antonio, de quien guardo mis mejores recuerdos; a mis hermanas Judith y Elpidia. A mis tíos Luciano, Cruz y Francisco. Especialmente a mis padres, Antonio y Ma. del Refugio, por su mejor herencia: el amor a la vida, el trabajo y la escuela.

Este trabajo representa la culminación de uno de mis objetivos de vida más importantes, al cual dediqué mi mejor esfuerzo con la certeza de que lo alcanzaría. Pero el éxito de este proyecto también fue posible gracias a la valiosa contribución de más personas, a quienes quiero expresar mi agradecimiento: Dr. Juan Carlos Jáuregui Correa, por su confianza, motivación y dirección en éste y varios proyectos más; Dr. Oscar González Brambila, por su apoyo incondicional, sus recomendaciones, colaboraciones y revisiones; Dr. Gilberto Herrera Ruiz, por su confianza y la oportunidad de un entorno académico de alto nivel; Dr. Alejandro Lozano Guzmán, por su invitación a la reflexión; Dr. Pedro Daniel Alaníz Lumbreras, Dr. Aurelio Domínguez González, y Dr. Eduardo Rubio Cerda, por sus recomendaciones y revisiones de este trabajo. Al Ing. Víctor J. Lizardi Nieto, por las facilidades otorgadas; al Dr. Eusebio Jr. Ventura Ramos, y al Dr. Mario Rodríguez García por sus comentarios y enseñanzas. A mis compañeros de generación: Adriana, Marcela, Fernando y José. También quiero agradecer el respaldo de mis compañeros en CIATEQ Unidad Aguascalientes: Juan Sergio Ávila Cruz, Víctor Iván de Anda Flores, Francisco Reyes Rodríguez, Fernando Díaz Rodríguez, Luis Ricardo Gallegos Enríquez, Salvador Palacios Naranjo, José Silvestre Azúa Díaz, Gonzalo Ortega Pérez, y Fernando Macías Chávez. La colaboración especial de Francisco Martínez Chávez y Aarón Montoya Salado. Al Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Aguascalientes, por el soporte financiero. Finalmente, quiero agradecer a mi esposa Patricia su invaluable apoyo incondicional, comprensión y paciencia, los cuales fueron fundamentales para conseguir este resultado.

INDICE

	Página
Resumen	i
Summary	ii
Dedicatorias y Agradecimientos	iii
Índice	v
Índice de Cuadros	viii
Índice de Figuras	ix
Nomenclatura	xiv
Capítulo 1: Introducción	1
1.1 Antecedentes	
Motivación	2
Planteamiento del problema	3
Hipótesis	4
Objetivo	4
Justificación	4
Organización del trabajo	5
1.2 Teorías del corte de metales	7
1.2.1 Conceptos básicos	
1.2.2 Mecánica de la formación de la viruta	8
1.2.3 Fuerzas de corte	9
1.2.4 Carácter no lineal de la fuerza de corte	11
1.3 Conceptos de dinámica no lineal y caos	13
1.3.1 Antecedentes	
1.3.2 Características de los sistemas caóticos	14
1.3.3 Conceptos fundamentales de sistemas dinámicos no lineales	17
1.3.4 Bifurcaciones	20
1.3.5 Sistemas lineales	25
1.3.6 Bifurcaciones en sistemas de alto orden	30
1.3.7 Mapas de Poincaré	32
1.3.8 Caos	33
1.3.9 Conceptos de estabilidad dinámica	35

1.4	Soluciones analíticas en sistemas débilmente no lineales	37
1.4.1	Modelos débilmente no lineales	
1.4.2	Método de las perturbaciones	37
1.4.3	Método de escalas múltiples	41
1.4.4	Método del valor promedio	43
1.4.5	Sistemas auto-inducidos	46
1.4.6	Fenómeno de salto	52
1.4.7	Atractores extraños en la ecuación de Duffing	54
Capítulo 2: Revisión de literatura		55
2.1	Análisis de estabilidad en procesos de corte de metales	
2.1.1	Antecedentes	55
2.1.2	Teoría de estabilidad lineal	57
2.1.3	Análisis no lineal y bifurcaciones	65
2.1.4	Mapas discretos	71
2.1.5	Monitoreo de señales y estrategias de control activo	75
2.1.6	Métodos de perturbación	76
Capítulo 3: Metodología de investigación		77
3.1	Análisis de vibraciones auto-inducidas debido al movimiento relativo entre la pieza de trabajo y la herramienta de corte	77
3.1.1	Introducción	
3.1.2	Modelación del movimiento relativo entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo en torneado	78
3.1.3	Análisis de estabilidad	81
3.1.4	Cambio de fase de la función de transferencia estructural	84
3.1.5	Validación del modelo	85
3.2	Análisis de perturbación del modelo débilmente no lineal para predicción de vibraciones auto-inducidas	88
3.2.1	Introducción	
3.2.2	Análisis de perturbación de un modelo débilmente no lineal	89
3.2.3	Construcción de una solución analítica	93
3.2.4	Función de respuesta a la frecuencia	97
3.2.5	Análisis de estabilidad y el fenómeno de salto	97
3.3	Caracterización de no linealidades de tipo estructural a partir de la medición de la respuesta en procesos de manufactura	99
3.3.1	Identificación del parámetro cúbico en modelo débilmente no lineal con excitación regenerativa	

3.4	Identificación experimental de vibraciones auto-inducidas mediante análisis de señales	102
3.4.1	Medición de respuesta dinámica en procesos de maquinado	
3.4.2	Identificación de no linealidad en las vibraciones auto-inducidas	103
3.4.3	Análisis fractal R/S	104
3.4.4	Señales de audio en un proceso de fresado	108
3.4.5	Señales de aceleración en un proceso de torneado	109
3.5	Análisis modal experimental	112
Capítulo 4: Resultados y discusión		113
4.1	Análisis de movimiento relativo con modelo acoplado	113
4.2	Análisis de perturbación de modelo débilmente no lineal	118
4.3	Identificación experimental de vibraciones auto-inducidas	129
4.3.1	Identificación del salto en curva rms	
4.3.2	Identificación de frecuencias de auto-inducción	137
4.3.3	Análisis de ondeletas	137
4.3.4	Estimación del exponente de Hurst con análisis fractal R/S	142
4.3.5	Retratos de fase y secciones de Poincaré.	149
Conclusiones		155
Referencias bibliográficas		159
Apéndice		169
A.1	Definición de coeficientes para la solución aproximada del modelo débilmente no lineal	170
A.2	Teoría básica de vibraciones lineales	171
A.3	Análisis modal experimental en máquinas-herramienta	177
A.4	Analizador de vibraciones	188
A.5	Transformada de ondeletas	194
A.6	Solicitud de patente de un porta-herramientas instrumentado	198
A.7	Portadas de publicaciones	200

INDICE DE CUADROS

Cuadro	Descripción	Página
1.1	Clasificación de puntos fijos en el plano τ - Δ .	30
1.2	Transitorios hacia el caos.	35
3.1	Características dinámicas y condiciones de corte para evaluar la estabilidad en un proceso de torneado.	86, 113
4.1	Características dinámicas de los retratos de fase en condiciones de proceso críticas.	150
A.3-1	Análisis modal a diferentes frecuencias de muestreo.	185

INDICE DE FIGURAS

Figura	Descripción	Página
1.1	Proceso básico del corte de metales en a) torneado y b) fresado.	7
1.2	Análisis de fuerzas en el proceso de corte ortogonal.	10
1.3	a) Diagrama de bifurcación del mapa logístico; b) Naturaleza fractal del comportamiento caótico: autosemejanza.	15
1.4	Atractor de Lorenz para $a = 10$, $b = 28$ y $c = 8/3$; a – c) Presencia de un atractor con dos puntos fijos; d – f) Naturaleza fractal del sistema dinámico: dimensión fraccionaria.	17
1.5	Plano de fase de a) un sistema conservativo y b) un sistema no conservativo.	20
1.6	Bifurcaciones en sistemas de primer orden, a) nodo silla, b) transcítica, c) supercrítica, d) subcrítica, e) imperfecta o catástrofe.	25
1.7	Naturaleza de los ciclos límite: a) estable, b) inestable y c) mitad estable.	26
1.8	Clasificación de puntos fijos en el plano Δ - τ .	30
1.9	Bifurcación subcrítica Hopf. Coexistencia de un punto fijo estable, un ciclo límite inestable y un ciclo límite estable, b) El ciclo límite inestable engulle el punto fijo y lo vuelve inestable.	31
1.10	Mapa de Poincaré.	33
1.11	Efecto de la no linealidad en la solución de la ecuación $\ddot{x} + \omega_n^2 x + \mu x^3 = 0$ con $A = \omega_n = 1$: (—) $\mu = 0$, (-o-) $\mu = 0.1$, (-*-) $\mu = 1$, (... ..) $\mu = 10$.	41
1.12	Ecuación de van der Pol con condiciones iniciales $x(0) = 0.5$ y $x'(0) = 0$, a - d) Espacios de fase y e – h) soluciones numéricas para $\varepsilon = 0, 0.5, 2, 5$.	49
1.13	Fenómeno de salto en la ecuación de Duffing.	52
1.14	Efecto del parámetro μ .	53
1.15	Efecto del amortiguamiento en la ecuación de Duffing.	53
1.16	Atractor extraño en la ecuación de Duffing; a) Comportamiento caótico b) Comportamiento casi periódico.	54
2.1	Mecanismo de regeneración del espesor de viruta.	56
2.2	Curva de lóbulo típica de un sistema de maquinado.	56
2.3	Modelos típicos para el análisis de vibraciones auto-inducidas: a) Torneado con un grado de libertad, b) Torneado con dos grados de libertad, c) Fresado con un grado de libertad, d) Fresado con dos grados de libertad, e) Fresado con dos grados de libertad en inmersión parcial.	60
2.4	Diagrama de estabilidad en un proceso de fresado con inmersión total.	67

2.5	Curva de estabilidad para cortes con inmersión parcial en fresado.	74
3.1	Diagrama de corte en el proceso de torneado, a) acoplamiento de la herramienta de corte y la pieza de trabajo, b) fuerzas dinámicas de un sistema equivalente de masas concentradas.	79
3.2	Modelo de un grado de libertad para el proceso de torneado con rigidez estructural no lineal.	90
3.3	Algoritmo para la estimación del exponente de Hurst: a) Proceso de subdivisión de los datos, b) Ajuste de la curva $\log n - \log RS$.	107
3.4	Esquema de la prueba de impacto para determinar los parámetros modales en un proceso de maquinado (torneado o fresado).	108
3.5	Arreglo experimental para medición del fenómeno de salto con señales de audio en un proceso de fresado.	109
3.6	a) Arreglo experimental para la detección de vibraciones auto-inducidas con señales de aceleración en un proceso de torneado, b) Portaherramientas instrumentado con acelerómetro.	111
4.1	Comparación de la estabilidad de un modelo de un grado de libertad (línea interrumpida) y el modelo acoplado (línea sólida) con una combinación (1, 1).	114
4.2	Efecto de una herramienta de corte con baja rigidez. La línea interrumpida representa la estabilidad del modelo acoplado con la combinación (1, 2), mientras que la línea sólida simboliza la estabilidad del modelo acoplado con combinación (2, 2).	115
4.3	Efecto de la razón de amortiguamiento en la herramienta de corte. La línea interrumpida simboliza la estabilidad del modelo acoplado con la combinación (2, 2). En la línea sólida se representa el efecto cuando $\xi_1 = 0.1$.	116
4.4	Efecto de una alta rigidez en la herramienta de corte. a) La línea interrumpida representa la estabilidad del modelo acoplado con combinación (1, 2), mientras que la línea sólida simboliza la estabilidad del modelo acoplado con (3, 2). b) Acercamiento para apreciar la escasa diferencia entre las curvas de estabilidad.	117
4.5	Diagrama de estabilidad lineal del proceso de torneado.	120
4.6	Diagramas de bifurcación de la amplitud de movimiento con respecto a la profundidad de corte con velocidades de husillo de a) 1800 rpm y 40 mm, b) 2250 rpm y 40 mm, y c) 2250 rpm y 150 mm	121
4.7	a) Límites de estabilidad originados por los eigenvalores con parte real cercana a cero por la izquierda, a un valor de $-5 \times$	123

	10 ⁻¹⁵ . b) Atractores distantes en el sistema debido al término estructural de tipo cuadrático, representados como una serie superior de lóbulos a altas profundidades de corte.	
4.8	Histéresis del sistema en el diagrama de estabilidad: a) La línea sólida representa los límites de estabilidad debido a los eigenvalores con parte real cercana a cero por el lado negativo, a un valor de -5×10^{-15} ; b) La línea interrumpida corresponde a los eigenvalores con parte real cercana a cero por el lado positivo, a un valor de 5×10^{-15} .	124
4.9	a) Mapa de amplitud de la respuesta; b) Proyección del mapa de amplitud; c) Curva de nivel de amplitud.	125
4.10	Función de respuesta a la frecuencia cerca de una bifurcación subcrítica Hopf, en 2250 rpm y 2 mm. Respuesta a) lineal y b) no lineal.	127
4.11	a) Diagrama de estabilidad para el proceso de fresado; b) Localización de las pruebas experimentales a profundidades de corte de 1 (—), 2 (- -) y 5 (-.-) mm.	130
4.12	Señales de audio de pruebas a profundidades de corte de a) 5, b) 2 mm y c) 1 mm, con velocidad de husillo ascendente entre 1500 y 2700 rpm.	132
4.13	Señales de audio de pruebas a profundidades de corte de a) 5, b) 2 mm y c) 1 mm, con velocidad de husillo descendente entre 2700 y 1500 rpm.	133
4.14	Función de respuesta a la frecuencia rms a profundidades de corte de a) 5 mm, b) 2 mm y c) 1 mm, con velocidad de husillo ascendente (línea sólida) y descendente (línea interrumpida).	134
4.15	Histéresis en condiciones de inestabilidad con velocidad de husillo ascendente (línea sólida) y descendente (línea interrumpida). Profundidad de corte de a) 5 mm y b) 2 mm.	135
4.16	Evidencia experimental: a) Pieza de trabajo con seis experimentos de corte; b) Presencia de vibraciones de baja amplitud entre 1800 y 2000 rpm con 2 mm de corte; c) Atascamiento de la herramienta de corte en 5mm y 2100 rpm; d) y e) Vibraciones severas con 5 mm de corte y velocidad descendente.	136
4.17	Análisis espectral de la prueba de corte con 5 mm de profundidad y velocidad ascendente entre 1500 y 2700 rpm.	138
4.18	a) Aproximación A_6 y los detalles b) D_1 , c) D_2 , d) D_3 , ..., g) D_6 de la señal original mediante la ondeleta madre Daubechies D_4 .	140
4.19	Análisis de ondeletas para la prueba de fresado con profundidad de corte de 5 mm y velocidad ascendente, entre 1500 y 2700 rpm; a) Contorno y b) Curva tiempo-frecuencia en tres dimensiones.	141
4.20	Exponente de Hurst para los experimentos de fresado con velocidad ascendente entre 1500 y 2700 rpm y profundidad de corte de a) 5, b) 2, y c) 1 mm.	144

4.21	Histogramas del exponente de Hurst para los experimentos de fresado con velocidad ascendente entre 1500 y 2700 rpm y profundidad de corte de a) 5, b) 2, y c) 1 mm.	145
4.22	Distribución del exponente de Hurst en condiciones de corte específicas: a) 1650 – 1750 rpm, en 1 mm; b) 1850 – 1950 rpm, en 2 mm; c) 2400 – 2500 rpm, en 2 mm; y d) 1750 – 1850 rpm, en 5 mm.	147
4.23	Condiciones de proceso críticas en el diagrama de estabilidad.	149
4.24	Soluciones en el dominio del tiempo y retratos de fase para las condiciones de proceso críticas del Cuadro 4.1.	150
4.25	Mapas de retorno siguiente para los casos A, C y H.	154
A.2-1	Modelo de un sistema mecánico vibratorio de un grado de libertad.	171
A.2-2	Vibraciones libres amortiguadas de la ecuación $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$ con $\omega_n = 10$, $m = 1$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$: a) Movimiento sobre-amortiguado, $\zeta > 1.0$, línea punteada; b) Movimiento sub-amortiguado, $\zeta < 1.0$, línea sólida; c) Movimiento críticamente amortiguado, $\zeta = 1.0$, línea interrumpida.	174
A.2-3	Amplitud adimensional y relación de frecuencias.	176
A.3-1	Esquema de análisis modal mediante la prueba de impacto.	178
A.3-2	a) Magnitud de la función de transferencia de una estructura en vibración y los diferentes modos de vibrar; b) Parte real y c) Parte imaginaria de la función de transferencia.	180
A.3-3	Prueba de impacto en torno CNC HAWK TC-200.	183
A.3-4	Análisis espectral de la prueba de impacto en torno CNC HAWK TC-200.	184
A.3-5	Curva de Nyquist teórica y experimental de la prueba de impacto en torno CNC HAWK TC-200.	184
A.3-6	Caracterización de máquina fresadora convencional marca TOS con un cortador recto de 9.525 mm (3/8") de diámetro y 38 mm (1 1/2") de longitud.	185
A.3-7	Análisis espectral de la prueba de impacto en máquina fresadora convencional TOS.	186
A.3-8	Parte real y parte imaginaria del primer modo de vibrar.	186
A.4-1	Pantalla de inicio de analizador.	188
A.4-2	Menú principal.	189
A.4-3	Análisis modal experimental mediante prueba de impacto: a) Configuración del sistema de adquisición, b) Resultados.	190
A.4-4	Datos de entrada para análisis predictivo, a) torneado, b) fresado.	191
A.4-5	Análisis de estabilidad: a) torneado y b) fresado de inmersión parcial.	192

A.4-6	Monitoreo de vibraciones.	192
A.4-7	Análisis FFT y función de respuesta a la frecuencia.	193
A.4-8	Créditos.	193
A.5-1	Esquema de descomposición jerárquica y reconstrucción de señales mediante la técnica de ondeletas.	196
A.5-2	Transformada de Daubechies de orden 4.	197
A.6-1	Portaherramientas instrumentado para monitoreo de vibraciones auto-inducidas y temperatura en el proceso de torneado.	198
A.6-2	Registro ante el Instituto Mexicano de la Propiedad Industrial.	199

NOMENCLATURA

Modelo acoplado

$\ddot{x}_1(t), \dot{x}_1(t), x_1(t)$: Aceleración (m/s^2), velocidad (m/s), y desplazamiento (m) de la herramienta de corte en el tiempo actual.

$\ddot{x}_2(t), \dot{x}_2(t), x_2(t)$: Aceleración (m/s^2), velocidad (m/s), y desplazamiento (m) de la pieza de trabajo en el tiempo actual.

$\zeta_1, \omega_{n1}, m_1$: Razón de amortiguamiento (%); frecuencia natural (Hz), y masa modal (kg) de la herramienta de corte.

$\zeta_2, \omega_{n2}, m_2$: Razón de amortiguamiento (%); frecuencia natural (Hz), y masa modal (kg) de la pieza de trabajo.

$F_x(t)$: Fuerza en dirección de avance (N).

K_c, K_f : Coeficientes de corte (N/m^2).

b : Profundidad de corte (m).

f_0 : Avance nominal (mm/rev).

$x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)$: Desplazamiento de la herramienta de corte y la pieza de trabajo en una revolución previa (m).

$x(t-\tau) = x_\tau$: Término general para representar el desplazamiento en una revolución previa (m).

$f(t)$: Función de avance dinámico (mm/rev).

$F_c(t), F_f(t)$: Fuerzas de corte y avance (N).

τ : Tiempo de retraso, empleado en una revolución (s).

$[I]$: Matriz identidad.

$[C]$:	Matriz de amortiguamiento.
$[K]$:	Matriz de rigidez.
$\{f(t)\}$:	Vector de avance dinámico.
$\{\hat{f}\}$:	Vector de avance estático.
$\{F(t)\}$:	Vector de fuerza dinámica.
$\{\ddot{x}(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, \{x(t)\}$:	Vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento.
\hat{b} :	Profundidad de corte específica.
$[A]$:	Matriz de acoplamiento.
$\{x(t)\}, \{x_\tau(t)\}$:	Vector de desplazamiento en el tiempo actual y retrasado, respectivamente.
$\{x(s)\}$:	Vector de desplazamiento en el dominio de la frecuencia.
$\{F(s)\}$:	Fuerza dinámica en el dominio de la frecuencia.
$\{f(s)\}$:	Avance dinámico en el dominio de la frecuencia.
$[B(s)]$:	Matriz del sistema.
$[D]$:	Matriz característica.
$\varphi_1(s), \varphi_2(s)$:	Funciones inversas de transferencia de la herramienta de corte y la pieza de trabajo en el dominio de la frecuencia, respectivamente.
b_{cr} :	Profundidad de corte crítica (m).
ω_c :	Frecuencia de auto-inducción (rad/s, Hz).

g_1, g_2 :	Parte real de las funciones inversas de transferencia de la herramienta de corte y la pieza de trabajo, respectivamente.
h_1, h_2 :	Parte imaginaria de las funciones inversas de transferencia de la herramienta de corte y la pieza de trabajo, respectivamente.
ψ :	Cambio de fase de la función de transferencia estructural.
n :	Número entero que representa la periodicidad π de la función tangente.
N :	Número de filos cortantes en un cortador rotatorio.
Ω :	Velocidad de husillo (rpm).
k, ω_n, ζ :	Rigidez teórica (N/m), frecuencia natural (Hz) y razón de amortiguamiento (%).
C, θ :	Coeficiente de corte (N/m ²) y ángulo de corte en proceso de torneado.
E, I, L, A, ρ :	Módulo de Young (N/m ²), momento de inercia de área (m ⁴), longitud (m), área transversal (m ²) y densidad de masa (kg/m ³).
L_1, L_2, D_1, D_2 :	Longitudes y diámetros para calcular diferentes condiciones de características dinámicas de la pieza de trabajo (m).
m :	Masa de la herramienta de corte (kg).

Modelo débilmente no lineal

$A(T_2)$:	Función de amplitud de la solución x_1 .
a, φ :	Amplitud y fase de la respuesta.

$b_{cr,min}$:	Profundidad de corte incondicionalmente estable (m).
C_1, C_2, C_3 :	Coeficientes de solución x_2 .
C_{1R}, C_{11} :	Coeficientes de la solución general $x(t)$.
c_1, c_2, c_3, c_4 :	Coeficientes del sistema dinámico en forma normal.
D_i^j :	Operador derivada.
$\Delta F(x,t)$:	Variación de la fuerza de corte (N).
h_0 :	Espesor nominal de viruta (m).
$h(t)$:	Espesor dinámico de viruta (m).
\hat{K} :	Coeficiente de corte específico.
r, θ :	Amplitud y fase de la respuesta en la forma normal.
T_0, T_2 :	Escalas de tiempo rápida y lenta, respectivamente.
x_1, x_2, x_3 :	Expansión de solución aproximada $x(t)$ en función de T_0 y T_2 .
$x_{1\tau}, x_{2\tau}, x_{3\tau}$:	Términos con retraso de x_1, x_2 , y x_3 , respectivamente.
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:	Coeficientes de los términos regenerativos lineal, cuadrático y cúbico, respectivamente.
β_1, β_2 :	Coeficientes para representar no linealidades estructurales de tipo cuadrático y cúbico, respectivamente.
ε :	Parámetro de escala.
μ, ω, b :	Parámetros normales de un sistema dinámico de dos dimensiones.
$\lambda = \mu \pm j\omega$:	Eigenvalores de un sistema dinámico en forma normal.

Análisis fractal RS

τ :	Longitud o escala de tiempo.
\bar{x} :	Valor medio de una serie de datos $x = x_1, x_2, \dots, x_n$.
Y:	Desviaciones con respecto al valor medio.
Z:	Desviaciones acumuladas.
R:	Rango.
S:	Desviación estándar.
H:	Exponente de Hurst.

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

Las vibraciones auto-inducidas limitan la productividad de los procesos de maquinado de productos metálicos. Se trata de un problema de inestabilidad dinámica que restringe la razón de remoción de material, además de afectar la calidad superficial de las piezas y acelerar el deterioro de las herramientas de corte y los elementos mecánicos de los husillos.

El maquinado es uno de los procesos de manufactura más importantes en la industria metalmecánica, pues representa alrededor del 10% del producto interno bruto de países industrializados, entre ellos México (Inegi, 2007; CNN Expansión, 2008). Por lo tanto, cualquier acción de mejora en la productividad de estos procesos de manufactura representa ahorros significativos para las empresas. La productividad de los procesos de maquinado se puede atender en tres aspectos: reducción de los tiempos de carga y descarga de piezas mediante un buen diseño de herramientas y dispositivos; reducción de los tiempos de maquinado mediante un análisis dinámico de los parámetros de operación, y reducción de los tiempos de inspección con dispositivos y estrategias de control de calidad más eficientes. Esta investigación se centra en el análisis de los parámetros de operación como criterio de optimización dinámica del proceso de maquinado.

La optimización de los parámetros de operación en un proceso de maquinado consiste en maximizar la razón de remoción de material y prolongar la vida útil de las herramientas de corte, sin afectar la calidad superficial de la pieza de trabajo. La razón de remoción de material es la cantidad de material removido por unidad de tiempo, por lo cual depende de la profundidad de corte, el avance y la velocidad. Sin embargo, altas profundidades de corte y altas velocidades generan fuerzas excesivas y altas temperaturas, respectivamente, lo cual acelera

el desgaste de la herramienta de corte. Además, en ciertas condiciones de operación se presenta un fenómeno de vibración auto-inducida, condición dañina que genera superficies onduladas con una rugosidad fuera de especificaciones, la posible ruptura de la herramienta y el deterioro de los sistemas mecánicos.

El compromiso entre las principales variables del proceso ha originado avances tecnológicos en el desarrollo de materiales para herramientas resistentes al calor, geometrías de la herramienta para una mejor formación y fluidez de la viruta, así como el uso de refrigerantes para lubricación y remoción del calor en la zona de corte. Sin embargo, el análisis de la dinámica del proceso de maquinado proporciona un mejor entendimiento del comportamiento del fenómeno físico, con el cual es posible establecer relaciones entre los parámetros de operación que permitan un mejor aprovechamiento de las capacidades estructurales y dinámicas de las máquinas, las herramientas y los materiales. En esta investigación se analiza el problema de las vibraciones auto-inducidas con herramientas de dinámica no lineal, con el objetivo de predecir con mayor precisión las condiciones de máxima remoción de material, libres de vibración auto-inducida.

Motivación

El interés por estudiar el problema de las vibraciones auto-inducidas en el maquinado, nació de la experiencia obtenida en el desarrollo de proyectos de reconstrucción y modernización de máquinas-herramienta. La reconstrucción de maquinaria consiste en reemplazar los sistemas mecánicos originales, tales como actuadores hidráulicos, tornillos de posicionamiento y guías lineales, por sistemas nuevos de mayor precisión y baja fricción como: servomotores, motores a pasos, tornillos de posicionamiento y guías de bolas, además del control de la operación por medio de un PLC, sensores y sistemas CNC. El resultado de estos proyectos ha sido el aumento de productividad mediante un menor tiempo de ciclo y una mayor repetibilidad. Sin embargo, aunque los nuevos sistemas de movimiento y control tienen capacidad de carga suficiente, bajo ciertas condiciones de

operación es común que se presente un fenómeno de vibración, conocido como vibración auto-inducida o *chatter*, cuyo diagnóstico y control es difícil y sus efectos en la calidad son indeseables.

Un comportamiento que causó muchos problemas para el control del proceso y la puesta a punto de las máquinas fue el comportamiento no lineal del fenómeno. Esto es que el fenómeno se presentaba de manera aleatoria y si su presencia era provocada por la variación de un parámetro, no era suficiente regresar el parámetro a su condición estable para su eliminación. Es decir, existía un comportamiento de histéresis en el sistema. Como consecuencia, los tiempos de desarrollo se prolongaron considerablemente, lo cual implicó costos adicionales y una relación complicada con el cliente.

Con la experiencia se sabe que el fenómeno de las vibraciones auto-inducidas está asociado a la capacidad de vibración del sistema; es decir, es un problema de inestabilidad dinámica con características altamente no lineales y de tipo caótico. Por esto es necesario conocer su comportamiento que permita predecir las condiciones dinámicas y de operación que generen un desempeño libre de vibraciones auto-inducidas.

Planteamiento del problema

Análisis del fenómeno de vibraciones auto-inducidas en procesos de maquinado mediante técnicas de dinámica no lineal, que permita la optimización de la estabilidad dinámica del proceso de corte bajo condiciones dinámicas y de operación que garanticen un desempeño libre de vibraciones auto-inducidas.

Hipótesis

Las vibraciones en el maquinado se han definido como un tipo de vibraciones auto-inducidas con comportamientos altamente no lineales, que pueden ser caóticos, y que están caracterizadas por la presencia de ciclos límite y el fenómeno de salto (Nayfeh, 1979). Además, las investigaciones realizadas hasta el momento muestran que el efecto regenerativo del espesor de la viruta y la intermitencia del corte son dos aspectos del proceso que más influyen en la no linealidad del fenómeno (Wiercigroch y Budak, 2001). El efecto regenerativo se representa mediante un retraso en el tiempo sobre la variable principal, mientras que la intermitencia del corte se puede representar con una rigidez no lineal. De acuerdo con la discusión previa, se establece la siguiente hipótesis de esta investigación:

Las vibraciones auto-inducidas en procesos de maquinado se pueden caracterizar mediante un modelo dinámico no lineal de tipo caótico, cuya respuesta dinámica está asociada con los parámetros dinámicos y de operación del proceso de corte.

Objetivo

Desarrollar una metodología analítico-experimental, basada en técnicas de dinámica no lineal, para identificar las condiciones dinámicas y de operación que afectan la estabilidad dinámica de los procesos de maquinado.

Justificación

El estudio de la dinámica del proceso de maquinado bajo un enfoque no lineal proporcionará un mejor conocimiento en la predicción de las condiciones que favorezcan la estabilidad dinámica del sistema. Esto también permitirá tener un mejor control de las variables de los procesos de corte, tales como: tiempos de

ciclo, vida útil de la herramienta, estabilidad dinámica y capacidad real del proceso.

Al final de la investigación se busca contar con herramientas de análisis que permitan reducir los tiempos de análisis dinámico, la optimización de procesos de maquinado y la puesta a punto de máquinas-herramienta ajustadas a procesos específicos.

Así mismo, se promueve la generación de conocimiento y tecnología propia que permitan la creación de productos de valor tecnológico basados en: sistemas de monitoreo y control de vibraciones en línea, sistemas de adquisición de señales, técnicas modernas para el análisis de señales no lineales.

Organización del trabajo

Este trabajo es el resultado documental de la investigación realizada sobre el análisis no lineal del fenómeno de vibraciones auto-inducidas en procesos de maquinado. El documento se organizó en cinco capítulos: Introducción, Revisión de literatura, Metodología de investigación, Resultados y discusión, y Conclusiones; así como una sección de referencias bibliográficas y una sección de Apéndices.

En el primer capítulo se ubica el tema de investigación y se presentan los antecedentes más relevantes, así como la justificación de la investigación, los objetivos y la hipótesis de la investigación. Se establece un marco teórico con los conceptos básicos de la teoría de corte de metales, vibraciones lineales, dinámica no lineal y teoría de caos, haciendo énfasis en los conceptos de bifurcaciones, espacios de fase, ciclos límite y estabilidad, los cuales son fundamentales en esta investigación. También se presentan algunos métodos analíticos para resolver sistemas no lineales con comportamientos de auto-inducción e histéresis en la respuesta, aspectos con los que se conforma el marco teórico de esta

investigación. En el capítulo de Revisión de literatura se discuten los modelos teóricos más influyentes en el análisis predictivo y el control de las vibraciones auto-inducidas en el proceso de corte de metales. En el tercer capítulo se presenta la contribución teórica de esta investigación. Primero se presenta un estudio del movimiento relativo entre pieza de trabajo y herramienta de corte como fuente de inestabilidad en el proceso de torneado; con este modelo es posible tomar en cuenta la dinámica de la herramienta de corte en la estabilidad del proceso de torneado, lo cual es útil cuando la naturaleza vibratoria de la herramienta de corte y la pieza de trabajo es similar, o cuando la herramienta de corte es relativamente flexible como en una operación de torneado interior. Enseguida se presenta el desarrollo de una solución aproximada de un modelo dinámico con términos no lineales de tipo cuadrático y cúbico, mediante el método de escalas múltiples. Este modelo permite evaluar el efecto de la histéresis en los diagramas convencionales de estabilidad. También se presenta la caracterización del término cúbico a partir de la respuesta y las características dinámicas del sistema. Se introduce la técnica de análisis fractal R/S como una herramienta de análisis para encontrar comportamientos no lineales en señales medidas directamente del proceso de corte; finalmente se describe la prueba de impacto como herramienta para la obtención de los parámetros modales de sistemas estructurales. En el cuarto capítulo se discuten los resultados teóricos y experimentales con los cuales se validaron los modelos teóricos presentados en el capítulo anterior. Posteriormente se presentan las conclusiones de esta investigación. La hipótesis planteada al inicio de la investigación quedó demostrada; además, se generó nuevo conocimiento en el análisis predictivo de las vibraciones auto-inducidas en procesos de maquinado, confirmado por dos publicaciones internacionales. Finalmente se listan las referencias consultadas durante la investigación y un apéndice en el cual se presenta información con la cual se sustenta la parte experimental de esta investigación, así como los productos científicos y tecnológicos derivados de esta investigación, como son publicaciones internacionales, una solicitud de patente y un producto tecnológico.

1.2. TEORÍAS DEL CORTE DE METALES

1.2.1. Conceptos básicos

Los procesos de corte de metales son aquéllos con los cuales se da forma final a un producto mediante la remoción de material de una pieza de trabajo con una herramienta de corte, de entre los cuales destacan los procesos de torneado y fresado. El proceso de torneado se caracteriza por una herramienta de corte con un solo filo y movimiento relativo a la pieza de trabajo en rotación; el proceso de fresado se lleva a cabo con una herramienta de corte en rotación con uno o varios filos cortantes y una pieza de trabajo con movimiento relativo a la herramienta de corte. Los procesos descritos se ilustran en la Figura 1.1; aunque existen otros procesos como: taladrado, cepillado, rectificando, entre otros, el principio de operación es similar a los ya descritos, con sus consideraciones particulares.

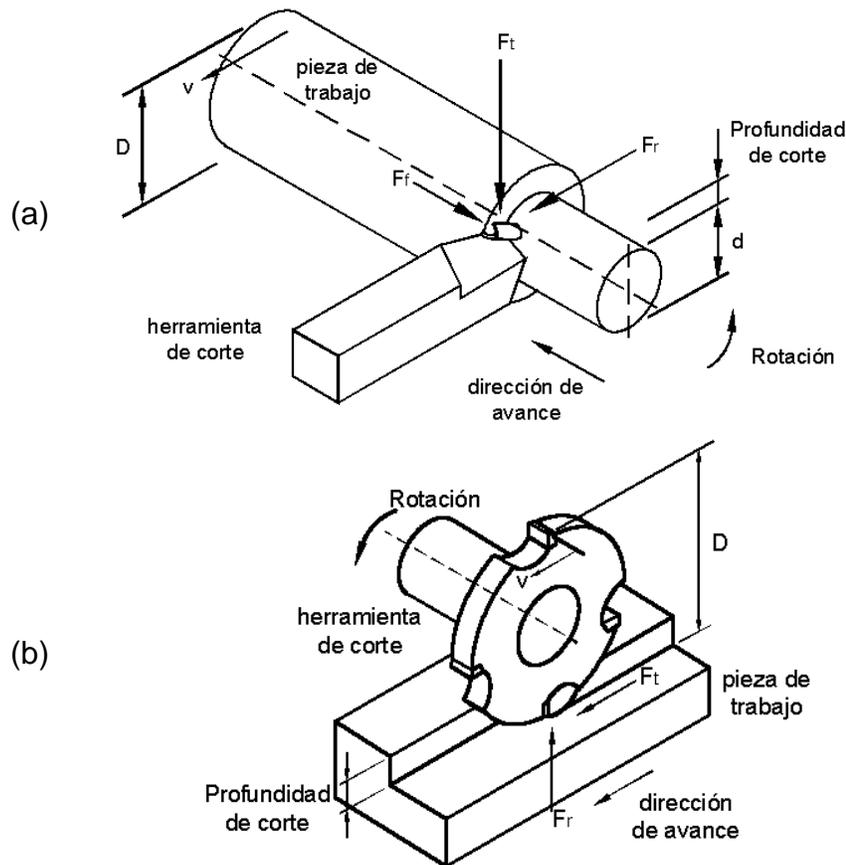


Figura 1.1: Proceso básico del corte de metales en a) torneado y b) fresado.

El avance es el movimiento lateral relativo entre la herramienta y la pieza de trabajo durante la operación de maquinado, el cual define el espesor de la viruta. En torneado, el avance es el desplazamiento de la herramienta de corte por cada revolución de la pieza de trabajo, mientras que en fresado es el desplazamiento del cortador por cada revolución del propio cortador. La velocidad de corte es la velocidad tangencial en la línea de contacto entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo. La profundidad de corte es el ancho de la viruta, el cual se mide en forma perpendicular al avance. La razón de remoción de material es una medida de la rapidez con la cual se remueve material de la pieza de trabajo; generalmente se calcula como el producto de la sección transversal de la viruta y la velocidad. La vida útil de la herramienta es el tiempo que ésta trabaja antes de que se presente un desgaste excesivo o su rotura. Existen dos tipos de desgaste típicos en la herramienta de corte: desgaste de cráter, presentado en la cara de la herramienta debido a altas temperaturas, así como desgaste de flanco, en el lado de contacto con la pieza de trabajo debido a la fricción. La vida útil de la herramienta depende principalmente de la velocidad de corte mediante una relación del tipo $VT^\gamma = C$, donde γ y C son constantes para una combinación específica de herramienta de corte y pieza de trabajo (Chang et al., 1998).

1.2.2. Mecánica de la formación de la viruta

A consecuencia del proceso de deformación plástica del material durante la operación de corte, se generan fuerzas sobre la herramienta de corte que dependen del avance, la profundidad de corte, la velocidad de rotación, el tipo de material de la pieza de trabajo y el ángulo de inclinación de la herramienta, principalmente. Las fuerzas de corte se generan por la acción de deformación plástica del material, la fricción entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo, la velocidad de corte y la forma de la herramienta. Generalmente se identifican tres fuerzas de corte: tangencial (F_t), radial (F_r) y lateral (F_f) o de avance, las

cuales representan, en forma respectiva, un 67%, 6% y 27% de la fuerza total de corte (Amstead et al., 1981).

También se identifican tres zonas de deformación en el proceso de corte: primaria, secundaria y terciaria (Altintas, 2000). La herramienta de corte penetra el material, lo cual produce que el material se cizalle sobre un plano de la zona primaria para formar la viruta. El material parcialmente deformado inicialmente se atasca en la punta de la herramienta, lo cual incrementa la fricción y la fuerza de corte, pero posteriormente fluye sobre la cara de la herramienta, definiendo la zona secundaria; esto es que la zona secundaria se caracteriza por una región de atascamiento y una región de deslizamiento. La zona terciaria es aquella en la que la punta de la herramienta genera una nueva superficie. Las tres zonas mencionadas también son fuente de calor debido al proceso de deformación en la siguiente proporción: 60% en la zona primaria, 30% en la zona secundaria y 10% en la zona terciaria (Amstead et al., 1981).

1.2.3. Fuerzas de corte

Las teorías de corte más reconocidas son: el modelo de corte ortogonal, el modelo de corte oblicuo, la teoría de Merchant (propuesta en 1945) y la teoría del campo de deslizamiento establecida por Lee y Shaeffer en 1955 (Childs, 2000). Estas teorías proporcionan una serie de expresiones para la predicción de la formación de la viruta, las fuerzas de corte, la fricción y el calentamiento en la zona de corte, así como el desgaste de la herramienta en función de las variables del proceso de maquinado

Aunque el proceso de corte generalmente es oblicuo, el modelo ortogonal permite entender el proceso básico de remoción de material y formación de la viruta, el cual supone que el filo cortante es perpendicular a la dirección de avance. La forma de la fuerza de corte generalmente ha sido considerada como

proporcional a la sección no deformada de la viruta definida por el ancho y la profundidad del corte. De acuerdo con el modelo de corte ortogonal, la fuerza de corte presenta una componente tangencial en el sentido del corte, y una componente radial en el sentido de la alimentación del corte. Esto es:

$$F_t = f b \tau \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\text{sen}\varphi \cos(\varphi + \beta - \alpha)} = K_t f b \quad (1.1)$$

$$F_f = f b \tau \frac{\text{sen}(\beta - \alpha)}{\text{sen}\varphi \cos(\varphi + \beta - \alpha)} = K_f f b$$

donde f es la alimentación, b es la profundidad de corte, τ es el esfuerzo de corte del material, α es el ángulo de ataque de la herramienta, β es el ángulo de fricción y φ es el ángulo de corte o cizalladura; como se ilustra en la Figura 1.2. F_t y F_f también son conocidas como fuerzas de corte y fuerzas de empuje, respectivamente. Los factores K_t y K_f son conocidos como coeficientes tangencial y normal de corte específicos, respectivamente.

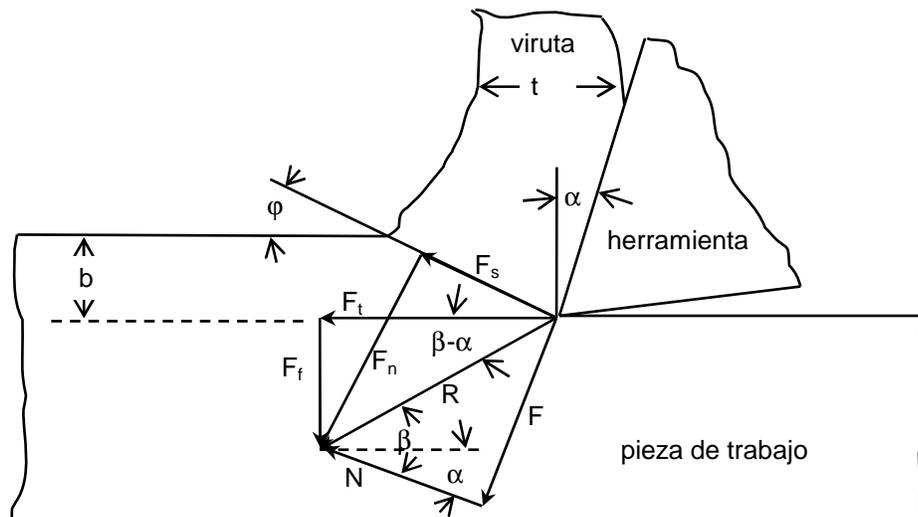


Figura 1.2: Análisis de fuerzas en el proceso de corte ortogonal.

La predicción del ángulo de corte fue introducida por Merchant, así como por Lee y Shaeffer (Childs, 2000), tomando en cuenta sólo la fricción. Merchant

propuso que el espesor de la viruta tomaba su valor al minimizar la energía del corte, dando como resultado que el ángulo de cizalladura estaba dado por: $\phi = \pi/4 - (\beta - \alpha)/2$. Por otro lado, Lee y Shaeffer propusieron la teoría de campos de línea de deslizamiento suponiendo un comportamiento perfectamente plástico del material y que el flujo plástico ocurre cuando el esfuerzo de corte máximo alcanza un valor crítico. Como resultado se encontró que el ángulo de corte estaba dado por: $\phi = \pi/4 - (\beta - \alpha)$. Los modelos de Merchant y Lee y Shaeffer son considerados como una buena aproximación del fenómeno, pero no han sido verificados experimentalmente; de hecho, los resultados experimentales difieren considerablemente de las soluciones teóricas (Childs, 2000).

1.2.4. Carácter no lineal de la fuerza de corte

Resultados experimentales muestran que la fuerza de corte presenta relaciones no lineales con el avance y la profundidad de corte. El carácter no lineal del proceso de corte del metal se debe al involucramiento de procesos complejos de fricción, endurecimiento por deformación y comportamientos de tipo elasto-plástico, viscoelástico y termo mecánico (Wiercigroch y Budak, 2001). Taylor (1907) propuso un modelo no lineal para la fuerza de corte, la cual era proporcional a la profundidad de corte y al avance elevado a una potencia fraccionaria:

$$F = K b f^n \quad (1.2)$$

donde K y n son constantes del material. Un valor típico del exponente es $3/4$, verificado experimentalmente por Tlustý (2000). Tanto el modelo de Merchant como el modelo de Taylor están formulados bajo la consideración de que el proceso de corte es estable en el tiempo; sin embargo, los resultados experimentales muestran que la fuerza de corte presenta un comportamiento dinámico con histéresis, la cual se atribuye a la velocidad de corte, la frecuencia

de segmentación de la viruta y los ángulos de la herramienta. Esto indica que la forma de la fuerza de corte es más compleja y se deben tomar en cuenta otras consideraciones en su formulación (Childs, 2000).

Bajo un enfoque mecanicista (Altintas, 2000; Chang et al., 1998), también se pueden suponer relaciones exponenciales del tipo:

$$F = K b^\alpha f^\beta \quad (1.3)$$

donde $\alpha < 1$ y $\beta < 1$ son coeficientes experimentales que se obtienen en condiciones de corte controladas.

1.3. CONCEPTOS DE DINÁMICA NO LINEAL Y CAOS

1.3.1. Antecedentes

La dinámica trata los sistemas que evolucionan con el tiempo para conocer su comportamiento, el cual puede reducirse al equilibrio, permanecer oscilando en ciclos o mostrar un comportamiento más complejo. Un sistema dinámico es cualquier problema que puede ser representado o modelado por un conjunto de ecuaciones diferenciales, que puede tener o no una solución exacta. Los sistemas dinámicos lineales pueden ser resueltos analíticamente, sin embargo la gran mayoría de los fenómenos físicos son no lineales, para los cuales las herramientas matemáticas son limitadas. Es por esto que los sistemas dinámicos no lineales son analizados desde un punto de vista cualitativo más que cuantitativo, idea introducida por Henri Poincaré a fines del siglo XIX con su método geométrico. Poincaré también pensó en el concepto de caos para describir el comportamiento no periódico de un sistema con alta sensibilidad a las condiciones iniciales y que hacen imposible la predicción del comportamiento en el mediano y largo plazo. Lorenz descubrió, en 1963, mientras estudiaba un modelo convectivo para la predicción del clima, que a pesar del comportamiento irregular e impredecible, el caos presentaba una estructura o un cierto orden; las trayectorias impredecibles de su modelo presentaban una estructura geométrica bien definida, la cual fue bautizada por Ruelle y Taskens en 1971 como un atractor extraño. A partir de 1970 el concepto de caos cobró una gran importancia en la comunidad científica; se realizaron experimentos en fluidos, reacciones químicas, circuitos electrónicos y osciladores mecánicos, entre otros, buscando comportamientos caóticos. Feigenbaum descubrió la existencia de ciertas leyes universales que gobiernan la transición de un comportamiento regular en uno caótico. Mandelbrot desarrolló la teoría fractal, con la cual se muestra el comportamiento de sistemas dinámicos no lineales por medio de gráficas muy atractivas generadas por computadora.

1.3.2. Características de los sistemas caóticos

A lo largo de los años, el estudio de los sistemas caóticos ha llevado a identificar una serie de características que reflejan una estructura importante detrás del comportamiento aleatorio aparente. Estas características se pueden identificar en tres problemas típicos que presentan comportamiento caótico: el problema de los tres cuerpos, el mapa logístico y el atractor de Lorenz (Strogatz, 1994; Hilborn, 1994):

- Alta sensibilidad a las condiciones iniciales.
- Las trayectorias nunca repiten ni se intersectan.
- No linealidad.
- La transición al caos es precedida por niveles infinitos de bifurcación.
- Las bifurcaciones precedentes de la transición al caos son caracterizadas por el número de Feigenbaum: $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.6692016090\dots$
- Dimensión fraccionaria (fractal).
- La curva Lyapunov (curva log-log) de la distancia entre trayectorias contra el tiempo es representada por una línea recta.
- Los puntos iniciales del mapa del primer retorno siempre permanecen por arriba de una línea con ángulo de 45° sobre la horizontal.

Mapa logístico

La transición hacia el caos precedida por niveles infinitos de bifurcación se describe en el mapa logístico, que es una ecuación recursiva utilizada para modelar el crecimiento de una población en cierto hábitat. Considerando que la siguiente generación depende de la población actual se podría advertir un crecimiento sin límite, sin embargo la sobrepoblación y la falta de alimento trabajarían como un freno a este crecimiento. El modelo, propuesto por Robert May en 1976, es el siguiente:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad (1.4)$$

donde r es una razón de crecimiento.

Para razones de crecimiento pequeñas, $r < 1$, la población tiende a desaparecer, $x_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Para $1 < r < 3$ la población crece y después de algunas oscilaciones alcanza un estado estable diferente de cero. Para razones de crecimiento mayores, $3 < r < 4$, la población comienza a oscilar entre una población mayor para una generación y una población menor en la siguiente generación, es decir, la población oscila entre dos tamaños de generación. A medida que r aumenta aún más, la población comienza a oscilar y repetir cada 4, 8, 16, 32, ... generaciones. Se dice que este comportamiento está caracterizado por bifurcaciones y el tipo de oscilaciones son conocidas como ciclos de período duplicado: 2, 4, 8, 16, 32, ... En la Figura 1.3a se muestra un diagrama de bifurcación del comportamiento de doble período, calculado para un valor inicial $x_0 = 0.2$ con 50 iteraciones e incrementos en r de 0.005. El acercamiento de la Figura 1.3b muestra la naturaleza fractal del sistema, esto es, la autosemejanza que se aprecia en el comportamiento macroscópico y el nivel microscópico.

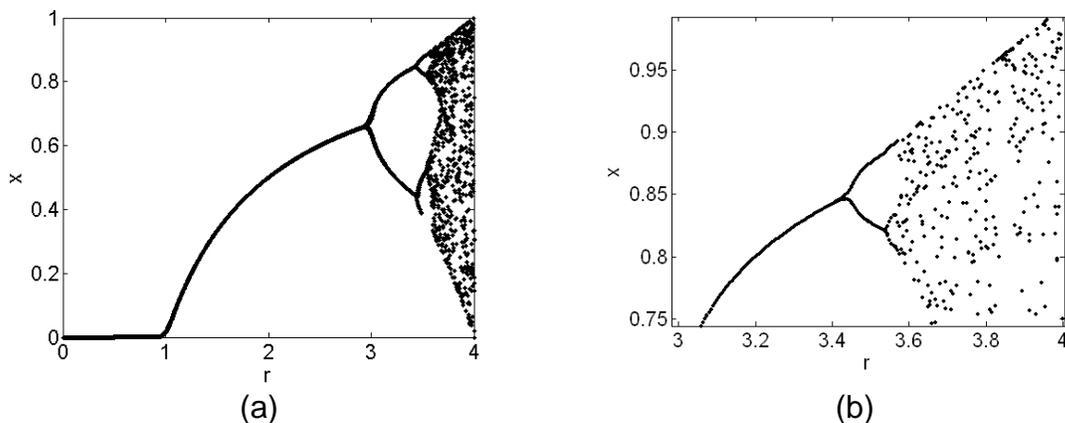


Figura 1.3: a) Diagrama de bifurcación del mapa logístico; b) Naturaleza fractal del comportamiento caótico: autosemejanza.

Atractor de Lorenz

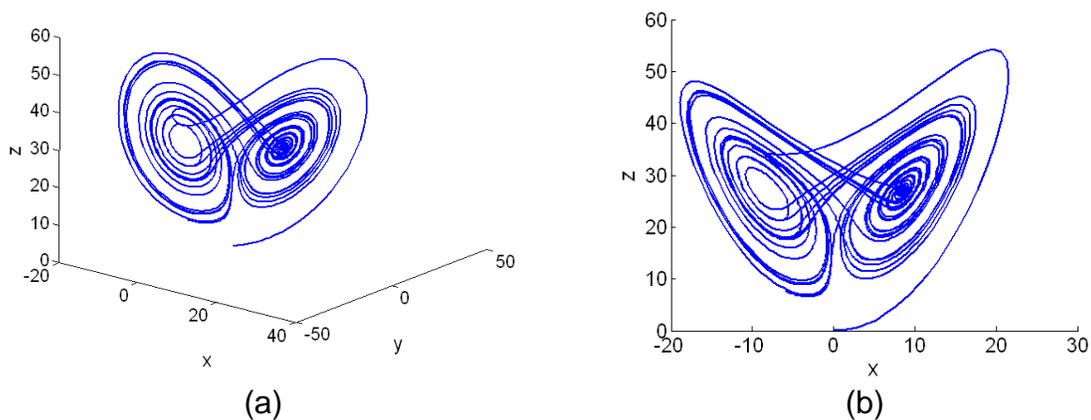
En sus estudios sobre la predicción del clima, Edward Lorenz desarrolló un modelo para describir la turbulencia en la atmósfera superior, sin embargo no

pudo resolver sus ecuaciones. Lorenz trató de simplificar su modelo hasta que llegó a un conjunto de ecuaciones que ya no representaban el problema de la turbulencia pero tampoco se pudo obtener una solución:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= x(b - z) - y \\ \dot{z} &= xy - cz\end{aligned}\tag{1.4}$$

donde a es el número de Prandtl y b es el número de Rayleigh. El sistema presenta un comportamiento caótico para $a = 10$, $b = 28$ y $c = 8/3$, pero el comportamiento es periódico para otros valores de b .

Las ecuaciones de Lorenz se resolvieron de manera aproximada con ayuda de una computadora para encontrar la trayectoria $\{x, y, z\}$ con respecto al tiempo t , dando como resultado el conocido atractor de Lorenz, el cual está caracterizado por dos puntos que atraen la trayectoria, como se muestra en las Figuras 1.4a - c.



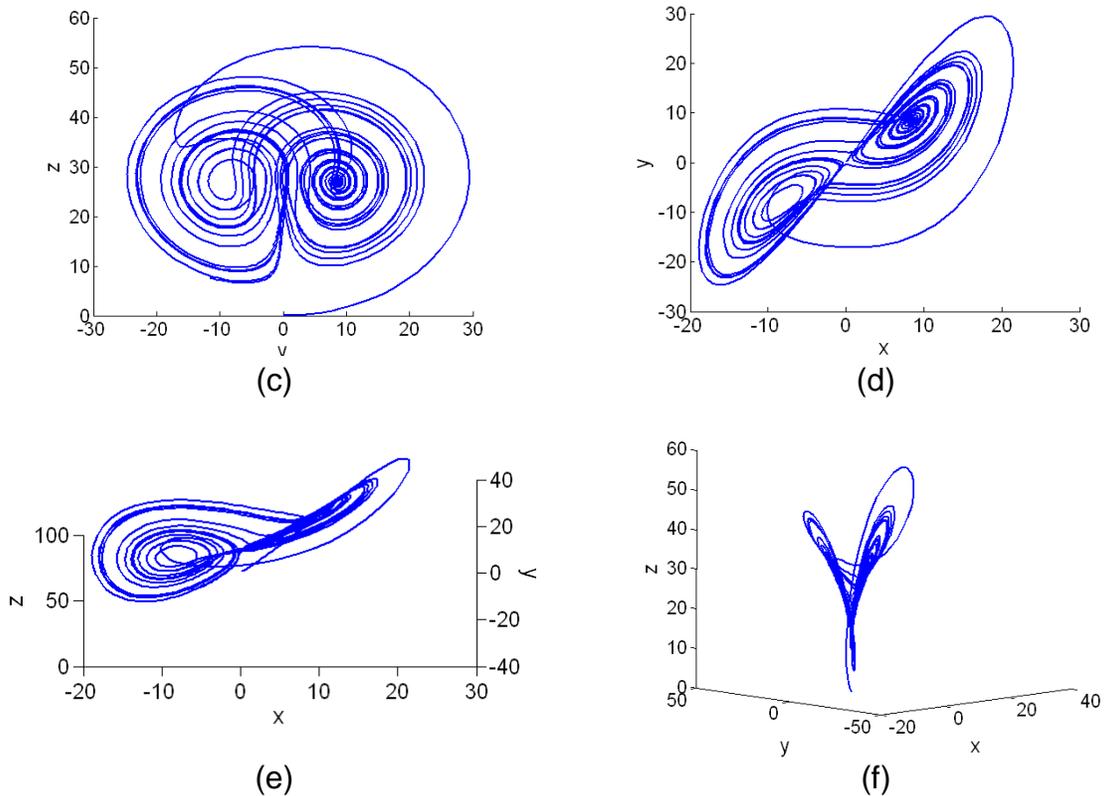


Figura 1.4: Atractor de Lorenz para $a = 10$, $b = 28$ y $c = 8/3$; a – c) Presencia de un atractor con dos puntos fijos; d – f) Naturaleza fractal del sistema dinámico: dimensión fraccionaria.

La trayectoria alrededor de cada atractor se encuentra casi en un plano, mientras que los dos planos de cada atractor se encuentran casi en el mismo plano, como se muestra en las Figuras 1.4d - f. Esta característica describe la dimensionalidad fraccionaria o fractal de los sistemas caóticos; en el caso del atractor de Lorenz, su dimensionalidad es ligeramente superior a dos pero sin llegar a tres.

1.3.3. Conceptos fundamentales de sistemas dinámicos no lineales

Clasificación general

Los sistemas de ecuaciones diferenciales se clasifican en lineales y no lineales, en función de la linealidad o no linealidad de sus términos; sistemas homogéneos o no homogéneos en función de la no presencia o presencia de una

fuerza externa, lo cual conduce a sistemas de oscilaciones libres o forzadas, respectivamente. La presencia de términos amortiguadores del movimiento da origen a los sistemas conservativos, para los que no existen términos amortiguadores, y sistemas no conservativos, para los que sí existen los términos amortiguadores (Nayfeh y Mook, 1979).

La mayoría de los fenómenos físicos son modelados por ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales. La linealización de los modelos permite resolver el problema de manera analítica, puesto que se cuenta con más herramientas de solución analíticas para problema lineales; mientras que para problemas no lineales, las herramientas son limitadas y se recurre a técnicas cualitativas. Con la solución linealizada se puede obtener información bastante aceptable para el corto plazo, sin embargo la precisión a largo plazo se pierde.

Espacios de fase

El marco teórico necesario para describir el comportamiento complejo de sistemas dinámicos está conformado principalmente por el concepto de espacio o plano de fase, creado por Poincaré, el cual representa los niveles de energía del sistema mediante trayectorias en el plano $x - \dot{x}$, donde x representa la posición y \dot{x} corresponde a la velocidad del sistema que se mueve a lo largo de la trayectoria. En espacios de fase de dos o más dimensiones, el comportamiento periódico es descrito por ciclos límite.

Puntos fijos

Otro concepto importante para entender la dinámica de sistemas no lineales es el de puntos fijos, también conocidos como puntos de equilibrio, puntos estacionarios, puntos críticos o puntos singulares. Los puntos donde $\dot{x} = 0$ se conocen como puntos fijos que representan soluciones de equilibrio, el cual puede ser estable si perturbaciones suficientemente pequeñas son amortiguadas con el tiempo, mientras que el equilibrio es inestable si estas perturbaciones crecen con el tiempo. Además, si las trayectorias convergen al punto fijo se dice que éste es

un punto fijo estable, nodo o atractor; si las trayectorias divergen se dice que es un punto fijo inestable, repulsor o fuente; y si el punto fijo es estable por un lado pero inestable por otro, se conoce como punto silla.

Sistemas conservativos y no conservativos

El plano de fase de un sistema conservativo está caracterizado por la presencia de puntos silla y puntos fijos. Por otro lado, en un sistema no conservativo las trayectorias evolucionan con el tiempo y se dirigen de manera asintótica a algún estado final, conocido como atractor, debido a la continua pérdida de energía en cada ciclo. Los sistemas no conservativos tienen la característica de que su comportamiento de largo plazo, esto es, cuando $t \rightarrow \infty$, es independiente de las condiciones de arranque. Debido a esta característica, en el análisis de sistemas no conservativos generalmente se ignora el comportamiento transitorio del arranque y se concentra en el análisis en el largo plazo.

En la Figura 1.5 se muestra un plano de fase para (a) un sistema conservativo y (b) un sistema no conservativo. En el sistema conservativo se identifican dos comportamientos importantes: existen trayectorias que oscilan con la misma amplitud, alrededor de un punto fijo estable; mientras que existen algunas trayectorias que convergen por un lado y otras que divergen por el otro lado de un punto silla. El ejemplo clásico es un péndulo libre de fricción y amortiguamiento, el cual permanece oscilando a una amplitud constante alrededor de un punto fijo estable (el punto más bajo) siempre que el ángulo de oscilación no alcance 180° , pues en ese momento la trayectoria del péndulo será aleatoria alrededor del punto silla. Por otro lado, en el sistema no conservativo está presente la fricción y el amortiguamiento. También se presentan los puntos silla, pero los puntos fijos están caracterizados por la presencia de espirales inestables, en vez de las órbitas cerradas del sistema conservativo.

La dimensión de los espacios de fase también es un concepto importante, pues la naturaleza de los puntos fijos depende de este concepto. En espacios de fase unidimensionales los puntos fijos tienen dimensión cero, esto es porque son puntos en un eje. Los espacios de fase bidimensionales se caracterizan por la presencia de puntos silla así como espirales y ciclos límite, cuya dimensión es uno. Para espacios tridimensionales o de mayor orden, los puntos fijos son atractores cuasi-periódicos o atractores caóticos con dimensión fractal, es decir, no entera.

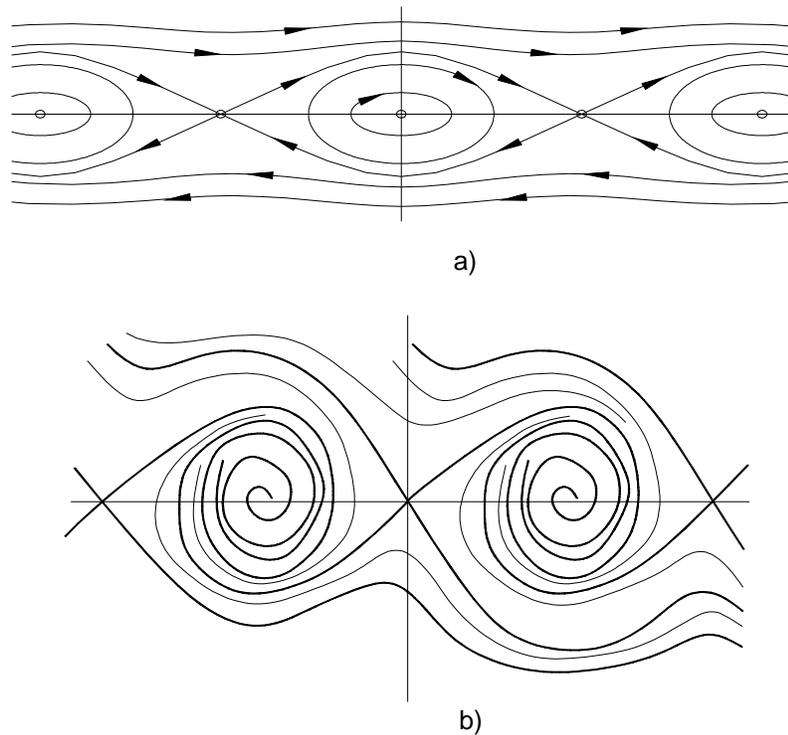


Figura 1.5: Plano de fase de a) un sistema conservativo y b) un sistema no conservativo.

1.3.4. Bifurcaciones

El comportamiento cualitativo de un sistema de primer orden puede cambiar de acuerdo con la variación de sus parámetros. El cambio en el comportamiento del sistema se verá reflejado en la creación o destrucción de sus puntos fijos o en el cambio de su condición de estabilidad. Estos cambios

cualitativos en la dinámica del sistema se conocen como bifurcaciones (Hilborn, 1994; Strogatz, 1994); el parámetro de variación se conoce como parámetro de bifurcación, mientras que el valor del parámetro al cual se presentan los cambios se conoce como punto de bifurcación. Los diagramas de bifurcación son esquemas que permiten analizar los cambios en las características dinámicas de los puntos fijos.

Clasificación de bifurcaciones

Para sistemas de primer orden, los tipos de bifurcaciones que pueden presentarse son: nodo silla, bifurcación transcítica, bifurcación supercrítica, bifurcación subcrítica y bifurcación imperfecta o catástrofe (Strogatz, 1994; Hilborn, 1994), las cuales se describen enseguida.

Nodo silla

Los puntos fijos son creados o destruidos. A medida que el parámetro de bifurcación varía, dos puntos fijos se acercan entre sí, chocan y se aniquilan mutuamente. Un ejemplo de bifurcación tipo nodo silla está dado por el sistema de primer orden:

$$\dot{x} = r + x^2 \quad (1.5)$$

donde r es el parámetro de bifurcación, el cual puede ser positivo, negativo, o cero. Cuando r es negativo, existen dos puntos fijos, uno estable y otro inestable. A medida que r se aproxima a cero los puntos fijos se unen formando un punto mitad-estable el cual se desvanece cuando r toma un valor positivo. Para este caso, la bifurcación ocurrió cuando $r = 0$, ya que el campo de vectores para $r < 0$ y $r > 0$ son cualitativamente diferentes.

Bifurcación transcítica

Se presenta cuando un punto fijo existe para todos los valores del parámetro de bifurcación y nunca puede ser destruido, sin embargo su estabilidad sí puede cambiar con la variación del parámetro. En algunos sistemas se presenta un intercambio de estabildades entre puntos fijos pero éstos no desaparecen. Un sistema que presenta una bifurcación transcítica es de la forma:

$$\dot{x} = r x - x^2 \quad (1.6)$$

Como se puede ver, siempre existe un punto fijo en $x = 0$ para cualquier valor de r . Sin embargo, su estabilidad sí cambia ya que para $r < 0$ es un punto fijo estable, mientras que para $r > 0$ es un fijo inestable. Una diferencia importante entre la bifurcación tipo nodo silla y la bifurcación transcítica es que siempre existen dos puntos fijos, es decir, ninguno desaparece después de la bifurcación en $r = 0$.

Bifurcación supercrítica

Ésta es común en problemas físicos con simetría. A medida que el parámetro de bifurcación es variado, un punto originalmente estable va perdiendo su estabilidad hasta que se vuelve inestable. En ese mismo instante aparecen dos nuevos puntos fijos estables localizados simétricamente. Como ejemplo de bifurcación supercrítica, se tiene el pandeo de una viga, el cual se puede representar por un sistema de la siguiente forma:

$$\dot{x} = r x - x^3 \quad (1.7)$$

El término cúbico es estabilizador, esto es que actúa como una fuerza restauradora que jala a $x(t)$ hacia $x = 0$. Cuando $r < 0$, el origen es el único punto fijo, siendo además estable. Cuando $r = 0$, el origen todavía es estable, pero en menor medida ya que muestra un decaimiento letárgico. Finalmente, cuando $r > 0$,

el origen se ha vuelto inestable, pero han aparecido dos nuevos nodos estables en $x = \pm\sqrt{r}$.

Bifurcación subcrítica

Este tipo de bifurcación es muy interesante puesto que su presencia en sistemas físicos es peligrosa. La estabilidad del punto fijo se pierde a medida que el parámetro de bifurcación es variado y aparecen nuevos puntos fijos simétricos inestables, los cuales nacen por detrás del primer parámetro de bifurcación, a partir del cual se vuelven estables para cualquier parámetro. Un sistema que presenta bifurcaciones subcríticas es de la forma:

$$\dot{x} = rx + x^3 \quad (1.8)$$

Contrario al caso de la bifurcación supercrítica, en este caso el término cúbico del sistema es desestabilizador puesto que los puntos fijos diferentes de cero, en $x = \pm\sqrt{-r}$, son inestables, y sólo para valores menores a la bifurcación ($r < 0$). Así mismo, el origen es estable para $r < 0$ e inestable para $r > 0$, al igual que en el caso supercrítico, pero ahora no existe ninguna fuerza restauradora que se oponga, de hecho el término cúbico ayuda a que las trayectorias tiendan a infinito para cualquier condición inicial diferente de $x_0 \neq 0$.

Esta bifurcación es especialmente interesante en problemas de ingeniería, puesto que presenta las siguientes características:

- En un rango del parámetro de bifurcación coexisten dos estados estables cualitativamente diferentes, la condición inicial determina hacia qué punto fijo la trayectoria se acercará con el tiempo.
- La existencia de dos estados estables diferentes permite la presencia del fenómeno de salto, el cual es una discontinuidad en la respuesta del sistema cuando el parámetro de bifurcación es variado en sentido

creciente y decreciente. Esto significa que la respuesta del sistema carece de reversibilidad y se dice que presenta histéresis.

- El parámetro donde los puntos fijos simétricos se vuelven estables es un nodo silla.

Bifurcación imperfecta o catástrofe

Este tipo de bifurcación es un caso especial de la bifurcación supercrítica, la cual como ya se dijo, se presenta en problemas simétricos. En muchos casos reales la simetría es aproximada y se dice que ésta se rompe por una imperfección, conocida como parámetro de imperfección. Este comportamiento se representa en el siguiente sistema:

$$\dot{x} = h + rx - x^3 \quad (1.9)$$

El efecto del parámetro de imperfección h en el punto de bifurcación es la desconexión del diagrama de bifurcación supercrítica, una rama está compuesta sólo de puntos fijos mientras que la otra contiene puntos fijos estables e inestables. El sistema no presentará un cambio agudo en el punto de bifurcación cuando el parámetro de bifurcación sea variado, a menos que se provoquen grandes perturbaciones.

En la Figura 1.6 se presentan los diagramas de bifurcación en los cuales se identifica el punto de bifurcación en términos del parámetro de bifurcación. Las líneas llenas representan la condición estable, mientras que las líneas interrumpidas representan la condición inestable.

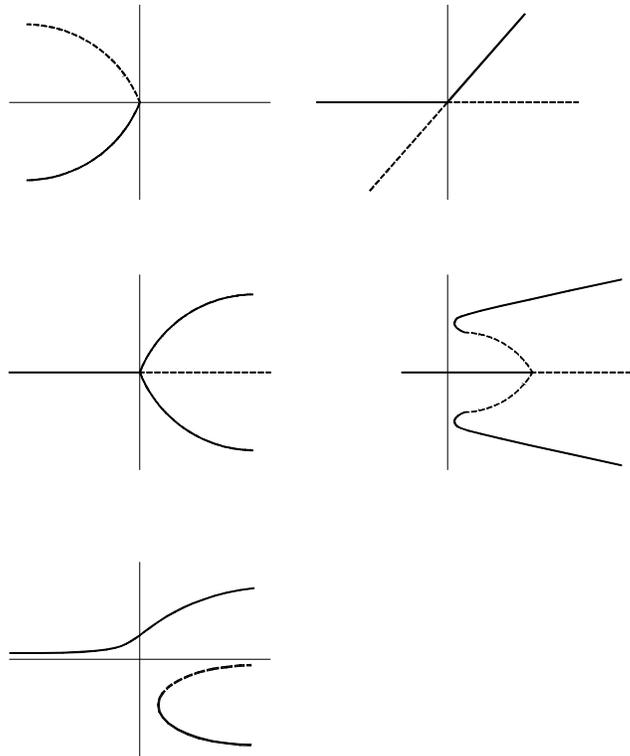


Figura 1.6: Bifurcaciones en sistemas de primer orden, a) nodo silla, b) transcritical, c) supercrítica, d) subcrítica, e) imperfecta o catástrofe.

Ciclos límite

Un ciclo límite es una trayectoria cerrada aislada, lo que significa que las trayectorias vecinas no son cerradas, sino espirales que se acercan o alejan del ciclo límite. Los ciclos límite modelan sistemas oscilatorios auto-inducidos y son fenómenos estrictamente no lineales. Algunos ejemplos son los latidos del corazón, ritmos diarios de la temperatura del cuerpo humano, secreciones hormonales y vibraciones auto-inducidas en puentes, alas de avión y problemas de fricción, entre otros. Si el sistema es perturbado ligeramente, éste siempre regresa al ciclo límite. Si las trayectorias vecinas se acercan al ciclo límite, se dice que éste es estable o atractor, de otro modo el ciclo límite es inestable, y en casos excepcionales es semiestable, como se muestra en la Figura 1.7.

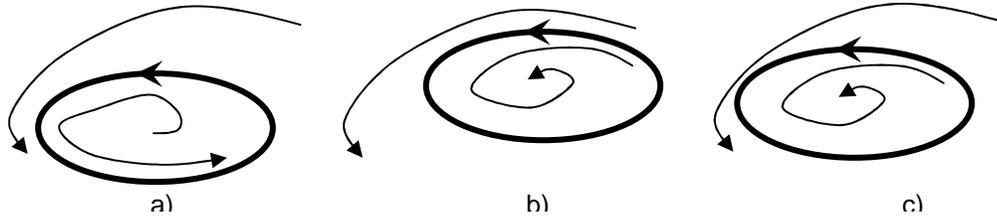


Figura 1.7: Naturaleza de los ciclos límite: a) estable, b) inestable y c) mitad estable.

1.3.5. Sistemas lineales

En esta sección se presenta un análisis de las soluciones para sistemas lineales con el fin de establecer una analogía con las correspondientes para sistemas no lineales en secciones posteriores.

Sea

$$\dot{x} = A x \quad (1.10)$$

un sistema lineal de dimensión n , donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

El comportamiento de un sistema de este tipo está caracterizado por trayectorias de línea recta, las cuales nacen sobre uno de los ejes coordenados y permanecen sobre éste por siempre, también es característico que muestren un crecimiento exponencial o un decaimiento a lo largo del mismo. Esto significa que las trayectorias son de la forma:

$$x(t) = e^{\lambda t} v \quad (1.12)$$

donde $v \neq 0$ es un vector fijo y λ es una razón de crecimiento. Sustituyendo en (1.10) resulta:

$$A v = \lambda v \quad (1.13)$$

lo cual significa que la solución de línea recta existe si $v \neq 0$ es un eigenvector de A con su correspondiente eigenvalor λ .

Ecuación característica

La ecuación característica de (1.10) está dada por:

$$\det (A - \lambda I) = 0 \quad (1.14)$$

de la cual, particularizando para $n = 2$, se obtiene la ecuación cuadrática

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

donde:

$$\tau = \text{traza } A = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\Delta = \det A = \lambda_1 \lambda_2$$

Entonces:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad (1.15)$$

La teoría del álgebra lineal establece que los eigenvectores v_1, v_2, \dots, v_n correspondientes a los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son linealmente independientes

y generan todo el espacio. Esto implica que para alguna condición inicial $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$, la solución general del sistema está dada por:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n \quad (1.16)$$

puesto que es una combinación lineal de soluciones para $\dot{x} = A x$, y satisface la condición inicial $x(0) = x_0$.

Clasificación de puntos fijos

El comportamiento dinámico del sistema está dado por la naturaleza de los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, los cuales se analizarán para el caso particular de $n = 2$.

Caso 1: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Ambas soluciones decaen exponencialmente por lo que el punto fijo es estable. Los eigenvectores definen los manifold de las trayectorias.

Caso 2: $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Una eigensolución decrece y otra crece exponencialmente, por lo que el origen es un punto silla. Su manifold estable corresponde al eigenvector de la eigensolución decreciente, mientras que su manifold inestable corresponde al eigenvector de la eigensolución creciente.

Caso 3: $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. Ambas soluciones crecen exponencialmente, por lo que el punto fijo es inestable.

Caso 4: λ_1, λ_2 complejos. El punto fijo puede ser un centro o una espiral. Un centro se encuentra rodeado por una familia de órbitas cerradas, el cual es neutralmente estable, esto es que las trayectorias no son atraídas ni repelidas por el punto fijo. Una espiral representaría un ligero amortiguamiento o una pérdida de energía en cada ciclo. La forma de los eigenvalores está dada por:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\omega \quad (1.17)$$

donde $\alpha = \frac{\tau}{2}$ y $\omega = \frac{\sqrt{4\Delta - \tau^2}}{2}$. La solución general del sistema es:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

De acuerdo con la fórmula de Euler: $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$, entonces:

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} (\cos \omega t + i \sin \omega t) v_1 + c_2 e^{\alpha t} (\cos \omega t - i \sin \omega t) v_2 \quad (1.18)$$

La ecuación anterior representa una oscilación exponencialmente decreciente si $\alpha = \text{Re}(\lambda) < 0$ y es creciente si $\alpha > 0$. Sus puntos fijos son espirales estables e inestables, respectivamente. Si $\alpha = 0$ las soluciones son periódicas y el punto fijo es un centro.

En un plano τ - Δ , como el de la Figura 1.8, se puede resumir el comportamiento dinámico de los puntos fijos dado por la naturaleza de los eigenvalores λ_1, λ_2 . En este plano se identifican casos frontera, los cuales se presentan a lo largo de curvas o ejes, que pueden ser centros, estrellas, nodos degenerados y puntos fijos no aislados (Strogatz, 1994); éstos son comunes en sistemas mecánicos conservativos (sin fricción). Además, cuando al menos uno de los eigenvalores es cero, el origen no es un punto fijo aislado, sino que existe una línea completa de puntos fijos o un plano de puntos fijos, si $A = 0$.

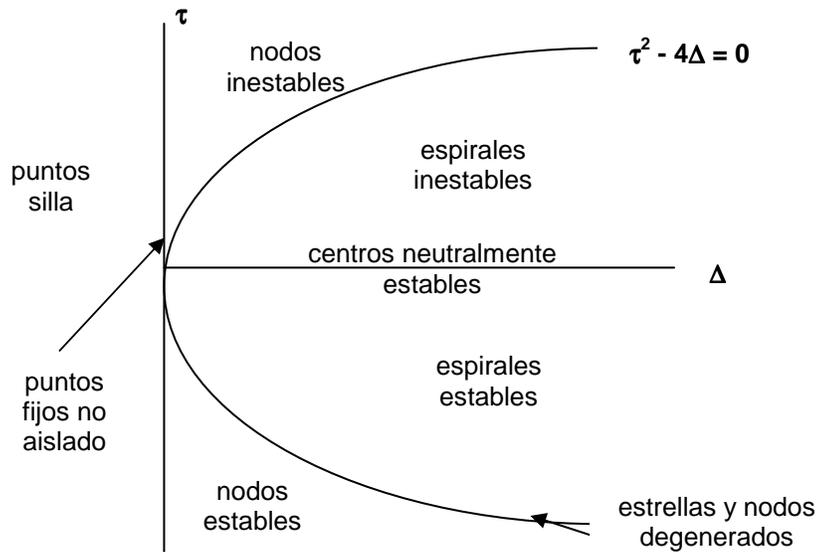


Figura 1.8: Clasificación de puntos fijos en el plano Δ - τ .

En el Cuadro 1.1 se presenta una clasificación general de los puntos fijos en función de los parámetros τ y Δ .

Cuadro 1.1: Clasificación de puntos fijos en el plano τ - Δ

$\Delta < 0$	\rightarrow		Punto silla
		$\tau^2 - 4\Delta > 0$	$\tau > 0 \rightarrow$ Nodos
			$\tau < 0 \rightarrow$ Espirales
$\Delta > 0$		$\tau < 0 \rightarrow$	Punto fijo o nodo estable
		$\tau^2 - 4\Delta < 0$	$\tau > 0 \rightarrow$ Espiral inestable
			$\tau = 0 \rightarrow$ Centro neutralmente estable
$\Delta = 0$	\rightarrow		Línea o plano de puntos fijos

1.3.6. Bifurcaciones en sistemas de alto orden

Los cambios en la estructura topológica de los retratos de fase de sistemas de primer orden, en los que los puntos fijos son creados, destruidos o desestabilizados, también están presentes en sistemas de alto orden, esto es $n \geq$

2, en donde las bifurcaciones se extienden a órbitas cerradas o ciclos límite. En esta sección se extienden los conceptos de bifurcaciones de una dimensión, a dos o superior.

Bifurcaciones Hopf¹

Considérese un sistema en dos dimensiones con un punto fijo estable, lo cual implica que los eigenvalores λ_1, λ_2 se encuentran en el semiplano izquierdo, puesto que $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Existen dos posibilidades, ya sea que λ_1 y λ_2 son ambos reales y negativos o son complejos conjugados. La pérdida de la estabilidad del punto fijo se presentará si uno o ambos eigenvalores pasan al semiplano derecho.

Bifurcación supercrítica Hopf

En términos de flujo en el espacio de fase, se dice que una bifurcación supercrítica Hopf ocurre cuando una espiral estable cambia a una espiral inestable rodeada por un ciclo límite pequeño y casi elíptico.

Bifurcación subcrítica Hopf

El caso subcrítico es considerado potencialmente peligroso en aplicaciones de ingeniería. Después de la bifurcación, las trayectorias saltan a un atractor distante, el cual puede ser un punto fijo, otro ciclo límite, al infinito o un atractor caótico, esto último para tres o más dimensiones.

En un retrato de fase se aprecian dos atractores, un punto estable en el origen y un ciclo límite estable alrededor del primero, y entre éstos existe un ciclo límite inestable. A medida que el parámetro de bifurcación es variado, el ciclo límite inestable se acerca al punto fijo hasta que su amplitud se vuelve cero y engulle al origen, volviéndolo inestable. El ciclo límite estable es el único atractor y las trayectorias que solían permanecer cerca del origen ahora son forzadas a oscilar con amplitudes grandes hacia el ciclo límite estable, como se ilustra en la

¹ Son llamadas así en honor del matemático Eberhard Hopf, quien extendió el análisis de este comportamiento a espacios de estado de mayor orden (Hilborn, 1994).

Figura 1.9. Este caso también se caracteriza por la presencia de histéresis, las grandes oscilaciones que iniciaron en el instante de la bifurcación no pueden reducirse regresando el parámetro al punto de bifurcación, sino que éste debe ir más atrás donde el ciclo límite estable colisiona y se aniquila con el ciclo límite inestable, mediante una bifurcación nodo silla, como se verá más adelante.

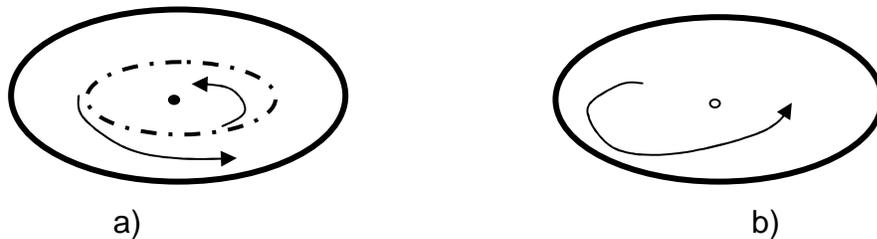


Figura 1.9: Bifurcación subcrítica Hopf. Coexistencia de un punto fijo estable, un ciclo límite inestable y un ciclo límite estable, b) El ciclo límite inestable engulle el punto fijo y lo vuelve inestable.

Bifurcaciones globales

En sistemas bidimensionales existen cuatro formas de crear o destruir ciclos límite: bifurcaciones Hopf, bifurcaciones nodo silla, bifurcaciones de período infinito y bifurcaciones homoclínicas. Las primeras ya fueron discutidas y se caracterizan por presentarse en la vecindad de un punto fijo, sin embargo las otras tres son más difíciles de detectar puesto que se presentan en regiones amplias del espacio de fase, por lo cual son conocidas como bifurcaciones globales.

1.3.7. Mapas de Poincaré

Un mapa de Poincaré es la intersección de órbitas periódicas en el espacio de fase de sistemas dinámicos continuos de dimensión n , por medio de un subespacio de dimensión $n-1$, llamado sección de Poincaré, transversal al flujo del sistema. Por lo tanto, los mapas de Poincaré se pueden considerar como sistemas dinámicos discretos con una dimensión menor al sistema dinámico continuo original. La estabilidad del sistema dinámico original está relacionada de

manera muy estrecha con la estabilidad de los puntos fijos del mapa de Poincaré correspondiente.

Considere un sistema de dimensión n , $\dot{x} = f(x)$. Sea S una superficie de sección de dimensión $n-1$ transversal al flujo de las trayectorias, es decir, todas las trayectorias que inician en S fluyen a través de ésta, como se muestra en la Figura 1.10.

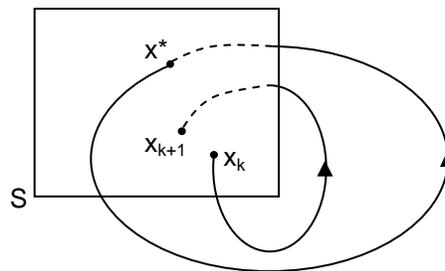


Figura 1.10: Mapa de Poincaré.

El mapa de Poincaré es una función de S en sí misma obtenida de las trayectorias siguientes de una intersección con S , debido a esto los mapas de Poincaré se conocen como mapas del retorno siguiente. Formalmente, sea $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ el conjunto de intersecciones de una trayectoria con la superficie de sección S , entonces el mapa de Poincaré es una función $P: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ tal que:

$$x_{k+1} = P(x_k) \quad (1.19)$$

Suponga que x^* es un punto fijo de P , entonces $P(x^*) = x^*$, lo cual significa que una trayectoria que inicia en x^* regresa a x^* después de un tiempo T y representa una órbita cerrada para el sistema original $\dot{x} = f(x)$. El comportamiento de P cerca del punto fijo refleja la estabilidad de la órbita cerrada.

El uso de los mapas de Poincaré facilitan el análisis de estabilidad del sistema, pues convierten un problema de análisis de órbitas cerradas en un problema de análisis de puntos fijos; el comportamiento de largo plazo del punto fijo indica si éste es estable cuando se estaciona en un valor determinado, o

inestable si toma diferentes valores cada vez que cruza la superficie S . Sin embargo el problema es que es muy difícil encontrar expresiones para la función P .

1.3.8. Caos

El comportamiento caótico en un espacio de fase de tres o más dimensiones se caracteriza por trayectorias que permanecen en una región acotada, las cuales se entrelazan y se ajustan unas a otras sin intersectarse y sin repetirse. La geometría de la región acotada de esas trayectorias se conoce como atractor extraño. Los atractores que pueden ocurrir en sistemas no conservativos en espacios de fase tridimensionales son atractores cuasi-periódicos y atractores caóticos. Una de las conclusiones importantes del teorema de Poincaré-Bendixson (Strogatz, 1994) es que el comportamiento caótico sólo puede estar presente en espacios de fase tridimensionales o de más alto orden.

Una característica propia del comportamiento caótico es la divergencia exponencial de trayectorias próximas, la cual está definida por el exponente de Lyapunov: Si dos trayectorias próximas de un atractor caótico inician con una separación d_0 al tiempo $t = 0$, entonces las trayectorias divergen con el tiempo tal que su separación satisface la siguiente expresión:

$$d(t) = d_0 e^{\lambda t} \quad (1.20)$$

donde λ es el exponente de Lyapunov, el cual es positivo para comportamientos caóticos.

Transiciones hacia el caos

El cambio de un comportamiento regular a caótico, o viceversa, una vez que el transitorio ha desaparecido, se puede describir por cualquiera de los transitorios descritos en el Cuadro 1.2 (Hilborn, 1994; Strogatz, 1994).

Una bifurcación local se presenta cuando existe un ciclo límite para un rango de valores del parámetro de control; para algún cambio en el parámetro de control del sistema, el ciclo límite desaparece y aparece el comportamiento caótico. En el caso de bifurcaciones globales, el comportamiento de largo plazo del sistema es influenciado por puntos fijos inestables o ciclos, así como por uno o varios atractores. Cuando el parámetro de control cambia, las trayectorias transitorias presentan un comportamiento cada vez más complejo en vez de acercarse al atractor. Este comportamiento da lugar a los transitorios caóticos, los cuales pueden durar indefinidamente para mostrar un comportamiento del sistema de tipo caótico.

Cuadro 1.2: Transitorios hacia el caos

Bifurcaciones locales	{	a) Período duplicado	{	i) Tipo I (bifurcación tangente)
		b) Causi-periodicidad		ii) Tipo II (bifurcación Hopf)
		c) Intermittencia		iii) Tipo III (período duplicado)
Bifurcaciones globales	{	a) Transitorios caóticos		
		b) Crisis		

1.3.9. Conceptos de estabilidad dinámica

Uno de los conceptos fundamentales en el análisis de sistemas dinámicos es el de estabilidad. Luenberger (1979) define el término “estabilidad” con respecto a un punto de equilibrio o punto fijo dado, de manera que el punto de equilibrio es estable si cuando la variable de estado se mueve ligeramente del punto de equilibrio, éste tiende a regresar, o al menos no se aleja más. En este

sentido, la estabilidad depende sólo de la naturaleza del sistema cerca del punto de equilibrio. Por lo tanto, un análisis de estabilidad de un sistema no lineal es teóricamente válido y matemáticamente conveniente si se simplifica o aproxima el sistema completo cerca del punto de equilibrio mediante un modelo más sencillo. A menudo, una aproximación lineal es suficiente para revisar las propiedades de estabilidad. Este método se conoce como primer método de Lyapunov, o método indirecto de Lyapunov.

Estabilidad lineal de puntos fijos

Una manera de determinar la estabilidad de los puntos fijos de una manera cuantitativa, es mediante la linealización alrededor de un punto fijo. Sea x^* un punto fijo del sistema $\dot{x} = f(x)$ y sea $\eta(t) = x(t) - x^*$ una perturbación pequeña de x^* . La linealización del sistema alrededor de x^* lleva al siguiente resultado:

$$\dot{\eta}(t) = \eta f'(x^*) + O(\eta^2) \quad (1.21)$$

El resultado es una ecuación lineal en η alrededor de x^* , la cual muestra que $\eta(t)$ crece exponencialmente si $f'(x^*) > 0$ y decae si $f'(x^*) < 0$. Esto significa que la pendiente $f'(x^*)$ en el punto fijo es una medida de su estabilidad, la cual se da para valores negativos de $f'(x^*)$, mientras que la magnitud de $f'(x^*)$ es una medida de cuán estable es el punto fijo. Si $f'(x^*) = 0$, el término $O(\eta^2)$ no puede ser despreciado y se requiere de un análisis no lineal para determinar la estabilidad.

Es importante recordar que el exponente de Lyapunov (Hilborn, 1994) para una región de un espacio de fase unidimensional cerca de un punto fijo es el valor característico λ del punto fijo:

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \quad (1.22)$$

1.4. SOLUCIONES ANALÍTICAS EN SISTEMAS DÉBILMENTE NO LINEALES

1.4.1. Modelos débilmente no lineales

Un sistema oscilatorio de segundo orden débilmente no lineal es aquél que representa una perturbación pequeña de un sistema lineal. Por ejemplo:

$$\ddot{x} + x + \mu h(x, \dot{x}) = 0$$

donde $0 \leq \mu \leq 1$ y $h(x, \dot{x})$ son funciones arbitrarias suaves, representa una perturbación pequeña del sistema lineal $\ddot{x} + x = 0$. La ecuación de van der Pol y la ecuación de Duffing son dos ejemplos típicos de sistemas débilmente no lineales.

Algunos métodos analíticos útiles para predecir el comportamiento dinámico sistemas débilmente no lineales son: el método de las perturbaciones, el método de aproximaciones sucesivas, el método de escalas múltiples y el método del valor promedio, los cuales pueden ser revisados en los textos de Nayfeh (1979), Strogatz (1994) y Thomson (1981). Enseguida se describen de manera general cada uno de estos métodos.

1.4.2. Método de las perturbaciones

El método de las perturbaciones es aplicable a problemas donde un parámetro pequeño μ está asociado con el término no lineal de la ecuación diferencial. La solución se forma en términos de una serie del parámetro de perturbación μ en la vecindad de la solución del problema linealizado. Si la solución del problema linealizado es periódica y μ es pequeño, se espera que la solución perturbada sea periódica también. Una solución periódica representa una trayectoria cerrada en el plano de fase, el período depende de las condiciones iniciales y es una función de la amplitud de la vibración.

Considérese el movimiento de oscilación libre de una masa sobre un resorte no lineal definido por la ecuación:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x + \mu x^3 = 0 \quad (1.23)$$

con condiciones iniciales $x(0) = A$ y $\dot{x}(0) = 0$. Cuando $\mu = 0$, la frecuencia de la oscilación es igual a la del sistema lineal: $\omega_n = \sqrt{k/m}$. Se busca una solución en la forma de una serie infinita de parámetros de perturbación μ como sigue:

$$x = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots \quad (1.24)$$

Puesto que la frecuencia de una oscilación no lineal dependerá de la amplitud de la oscilación así como de μ , se expresa este hecho en términos de una serie en μ :

$$\omega^2 = \omega_n^2 + \mu \alpha_1 + \mu^2 \alpha_2 + \dots \quad (1.25)$$

donde α_i son funciones de la amplitud aún indefinidas, y ω es la frecuencia de las oscilaciones no lineales. Tomando en cuenta sólo los primeros dos términos de (1.24) y (1.25), suficiente para ilustrar el procedimiento, éstos se sustituyen en (1.23) y se obtiene:

$$\ddot{x}_0 + \mu \ddot{x}_1 + (\omega^2 - \mu \alpha_1)(x_0 + \mu x_1) + \mu(x_0^3 + 3\mu x_0^2 x_1 + \dots) = 0 \quad (1.26)$$

Puesto que el parámetro de perturbación μ puede ser seleccionado arbitrariamente, los coeficientes de las diferentes potencias de μ deben ser igualadas a cero. Esto lleva a un sistema de ecuaciones que puede ser resuelto exitosamente:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0 \\
\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \alpha_1 x_0 - x_0^3 \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{1.27}$$

La solución de la primera ecuación sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$, es:

$$x_0 = A \cos \omega t \tag{1.28}$$

la cual se conoce como solución generadora. Sustituyendo ésta en el lado derecho de la segunda ecuación en (1.27) se obtiene:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \alpha_1 A \cos \omega t - A^3 \cos^3 \omega t = \left(\alpha_1 - \frac{3}{4} A^2 \right) A \cos \omega t - \frac{A^3}{4} \cos 3\omega t \tag{1.29}$$

donde se ha aplicado la identidad trigonométrica: $\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t$. Aquí es posible apreciar que el término forzado $\cos \omega t$ puede conducir a un término secular $t \cos \omega t$ en la solución para x_1 (esto significa que hay una condición de resonancia). Tal término viola la estipulación inicial de que el movimiento debe ser periódico. Por lo tanto, es importante imponer la siguiente condición:

$$\left(\alpha_1 - \frac{3}{4} A^2 \right) = 0.$$

Así, α_1 , para la cual se estableció con anterioridad que sería una función de la amplitud A , es evaluada como:

$$\alpha_1 = \frac{3}{4} A^2 \tag{1.30}$$

Una vez eliminado el término forzado $\cos \omega t$ del lado derecho de la ecuación, la solución general para x_1 , es:

$$x_1 = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{A^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t \quad (1.31)$$

donde las frecuencias están relacionadas como sigue:

$$\omega^2 = \omega_n^2 + \frac{3}{4}\mu A^2$$

Imponiendo las condiciones iniciales $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$, las constantes C_1 y C_2 se evalúan como:

$$C_1 = 0 \quad C_2 = -\frac{A^3}{32\omega^2}$$

Así

$$x_1 = \frac{A^3}{32\omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \quad (1.32)$$

De (1.24) se desprende que la solución de (1.23) está dada por:

$$x = A \cos \omega t + \mu \frac{A^3}{32\omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \quad (1.33)$$

$$\text{con } \omega = \omega_n \sqrt{1 + \frac{3\mu A^2}{4\omega_n^2}}$$

la cual es periódica con una frecuencia fundamental ω que aumenta con la amplitud, como se esperaría para un resorte endurecido.

En la Figura 1.11 se muestra el efecto de la no linealidad, μ , en la solución aproximada para la ecuación diferencial (1.23). Para grandes valores de μ la frecuencia de oscilación aumenta, como lo predice la ecuación (1.33). También se ve que para valores pequeños de μ la solución aproxima muy bien a la solución exacta $x = A\cos\omega_n t$ para $\mu = 0$.

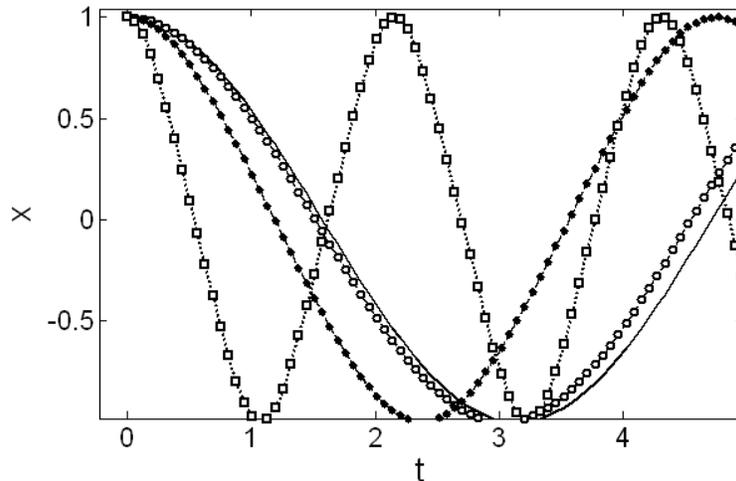


Figura 1.11: Efecto de la no linealidad en la solución de la ecuación $\ddot{x} + \omega_n^2 x + \mu x^3 = 0$ con $A = \omega_n = 1$: (—) $\mu = 0$, (-o-) $\mu = 0.1$, (-*-) $\mu = 1$, (... ..) $\mu = 10$.

Es importante mencionar que el método de las perturbaciones es muy útil en sistemas lineales, sin embargo en sistemas no lineales sólo puede predecir la solución del sistema con buena precisión para un tiempo corto.

1.4.3. Método de escalas múltiples

El método de las perturbaciones se basa en que la serie del tipo (1.24) es una expresión asintótica que converge a la solución para valores grandes de t , pero en realidad una serie del tipo (1.24) no es válida para grandes valores de t , puesto que cuando $t = O(1/\mu)$ se tiene que $\mu t = O(1)$ y la expansión no es asintótica.

El parámetro no lineal μ tiene un efecto sobre la primera aproximación (aproximación cero) del orden $O(\mu)$ en un intervalo finito $0 \leq t \leq T$. El objetivo del método de las escalas múltiples es mejorar la precisión de la primera aproximación tal que su error sea del orden $O(\mu)$ en un intervalo de la forma $0 \leq t \leq L/\mu$.

Método de las dos escalas de tiempo

Se busca una solución aproximada al problema (1.23):

$$\ddot{x} + x + \mu h(x, \dot{x}) = 0$$

de la forma:

$$x(t, \tau, \mu) = \sum_{i=0}^n \mu^i x_i(t, \tau) + O(\mu^{n+1}) \quad (1.34)$$

donde $\tau = \mu t$.

Aquí, τ es referido como el tiempo lento y t como el tiempo rápido. Examinando la solución exacta de un sistema oscilatorio amortiguado se puede ver que la vida media amortiguada es del orden τ , o tiempo lento, mientras que el período de las oscilaciones es del orden t , o tiempo rápido.

Utilizando la regla de la cadena se tiene que:

$$\frac{d}{dt} x = \frac{\partial}{\partial t} x + \mu \frac{\partial}{\partial \tau} x \quad (1.35)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x = \frac{\partial^2}{\partial t^2} x + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} x + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} x$$

Sustituyendo (1.34) y (1.35) en (1.23) y aplicando el teorema fundamental se obtiene una secuencia de ecuaciones diferenciales parciales, las cuales son resueltas de tal manera que se eliminan términos seculares en t , que pueden conducir a resonancia, aunque se permiten términos seculares en τ .

Método de las dos escalas con tiempo deformado

Los términos seculares en τ pueden eliminarse introduciendo el tiempo deformado T y el tiempo lento, definidos por:

$$T = t(\omega_0 + \omega_1\mu + \omega_2\mu^2)$$

$$\tau = \mu t$$

Ahora se busca una solución para (1.23) de la forma:

$$x(T, \tau, \mu) = \sum_{i=0}^n \mu^i x_i(T, \tau) + O(\mu^{n+1}) \quad (1.36)$$

De manera similar, sustituyendo (1.35) y (1.36) en (1.23) y aplicando el teorema fundamental se obtiene una secuencia de ecuaciones diferenciales parciales, las cuales son resueltas para obtener una solución aproximada sin términos seculares en τ , con un error del orden $O(\mu^2)$ para cualquier tiempo.

1.4.4. Método del valor promedio

Considérese el sistema oscilatorio no lineal de un grado de libertad de la forma:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (1.37)$$

donde ε es un parámetro adimensional pequeño y $f(x, \dot{x})$ es una función no lineal general.

Cuando $\varepsilon = 0$, la solución de (1.37) se puede escribir como:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \beta) = a \cos \phi \quad (1.38)$$

donde a y β son constantes. Cuando $\varepsilon \neq 0$, la solución de (1.37) aún se puede expresar en la forma (1.38) pero a y β son funciones de t en vez de ser constantes. Así, (1.38) se puede ver como una transformación de la variables dependiente $x(t)$ en las variables $a(t)$ y $\beta(t)$.

Puesto que (1.37) y (1.38) son dos ecuaciones para tres variables: x , a y β , es posible imponer una condición adicional. Es conveniente requerir que la velocidad tenga la misma forma del caso cuando $\varepsilon = 0$; esto es,

$$\dot{x} = -\omega_0 a \sin \phi \quad (1.39)$$

Para determinar las ecuaciones que describen a $a(t)$ y $\beta(t)$, se deriva (1.38) con respecto a t y se obtiene:

$$\dot{x} = -\omega_0 \dot{a} \sin \phi + \dot{a} \cos \phi - a \dot{\beta} \sin \phi \quad (1.40)$$

Comparando (1.39) y (1.40) se encuentra que:

$$\dot{a} \cos \phi - a \dot{\beta} \sin \phi = 0 \quad (1.41)$$

Derivando (1.39) con respecto a t , se tiene:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 a \cos \phi - \omega_0 \dot{a} \sin \phi - \omega_0 a \dot{\beta} \cos \phi \quad (1.42)$$

Sustituyendo \dot{x} y \ddot{x} en (1.37) se obtiene:

$$\omega_0 \dot{a} \sin \phi + \omega_0 a \dot{\beta} \cos \phi = -\varepsilon f(a \cos \phi, -\omega_0 a \sin \phi) \quad (1.43)$$

Resolviendo (1.41) y (1.43) para \dot{a} y $\dot{\beta}$ se obtiene:

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \phi f(a \cos \phi, -\omega_0 a \sin \phi) \quad (1.44)$$

$$\dot{\beta} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0 a} \cos \phi f(a \cos \phi, -\omega_0 a \sin \phi) \quad (1.45)$$

Las ecuaciones (1.38), (1.44) y (1.45) son exactamente equivalentes a (1.37) puesto que las aproximaciones aún no han sido realizadas.

Para valores pequeños de ε , \dot{a} y $\dot{\beta}$ son pequeños; por lo tanto, a y β varían mucho más lento con t que $\phi = \omega_0 t + \beta$. Esto significa que a y β cambian con más dificultad durante el período de oscilación $2\pi/\omega_0$ de $\sin \phi$ y $\cos \phi$, lo cual permite promediar las variaciones de ϕ en (1.44) y (1.45). Promediando estas ecuaciones sobre el período $2\pi/\omega_0$ y considerando a , β , \dot{a} y $\dot{\beta}$ como constantes durante el proceso de promediado, se obtienen las siguientes ecuaciones que describen las variaciones lentas de a y β :

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin \phi f(a \cos \phi, -\omega_0 a \sin \phi) d\phi \quad (1.46)$$

$$\dot{\beta} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} \cos \phi f(a \cos \phi, -\omega_0 a \sin \phi) d\phi \quad (1.47)$$

1.4.5. Sistemas auto-inducidos

En esta sección se revisa el método iterativo o de aproximaciones sucesivas para el análisis de dos tipos de sistemas dinámicos no lineales, caracterizados por presentar el fenómeno de auto-inducción y el fenómeno de salto, los cuales son de gran importancia en el análisis de las vibraciones en sistemas de maquinado.

El comportamiento de auto-inducción queda representado por la ecuación de van der Pol, la cual contiene un término que gobierna la amplitud del movimiento en función de sí mismo; el fenómeno de salto está representado por la ecuación de Duffing, la cual contiene un ligero amortiguamiento y una no linealidad estructural de tipo cúbico.

Los modelos mencionados son casos especiales del siguiente sistema general de oscilaciones no lineales forzadas:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) + E \quad (1.48)$$

donde ε es un parámetro pequeño, f es una función no lineal y E es una fuerza aplicada externamente conocida como excitación. Existen dos tipos de excitación: una fuente de energía ideal que es ilimitada y no depende del estado del sistema, esto es, $E = E(t)$; y una fuente de energía no ideal que es limitada y depende del estado del sistema, esto es, $E = E(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$.

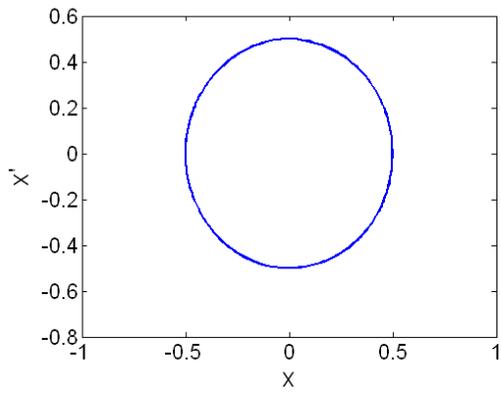
Ecuación de van der Pol

Considérese la ecuación de van der Pol:

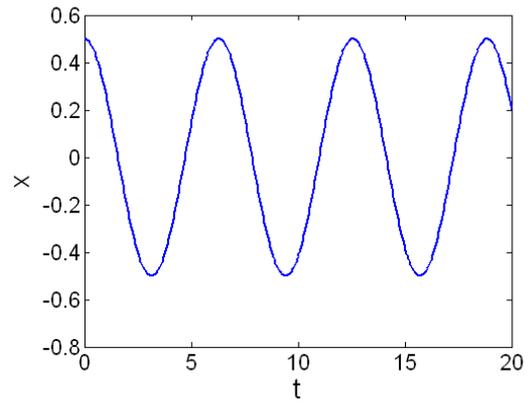
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{1}{3} \dot{x}^3 \right) = 0 \quad (1.49)$$

donde ε es el parámetro que habilita al término amortiguador no lineal. Cuando la amplitud del movimiento es pequeña sucede que $\dot{x} > \frac{1}{3}\dot{x}^3$, por lo cual se tiene un efecto de amortiguamiento negativo y la respuesta aumenta. Cuando la amplitud crece se invierte el signo del término amortiguador y se tiene un efecto positivo del amortiguamiento, entonces el movimiento decrece. Este comportamiento sugiere la presencia de un movimiento intermedio que no crece ni decrece, conocido como ciclo límite.

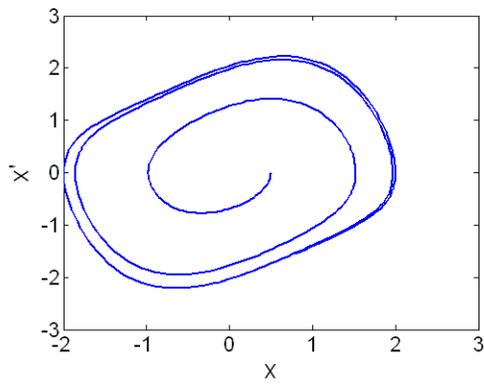
El comportamiento del oscilador de van der Pol en el espacio de fase $x - \dot{x}$ permite ver con mayor claridad el efecto del parámetro no lineal, como se muestra en la Figura 1.12. Si $\varepsilon = 0$, la ecuación de van der Pol se reduce al oscilador lineal armónico $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ y la trayectoria en el espacio de fase es una elipse. Para ε diferente de cero, la órbita se deforma pero sigue siendo cerrada, lo que significa que el sistema es periódico. Las oscilaciones del sistema son muy estables para valores grandes de ε ; pero a medida que ε disminuye, la estabilidad del sistema también se reduce. Cuando ε se hace negativo, el ciclo límite se vuelve inestable. El comportamiento que se aprecia en el ciclo límite para $\varepsilon \gg 1$, en el cual existe un movimiento asintótico lento seguido de una descarga súbita o salto hacia otro punto, se conoce como oscilaciones relajadas. El análisis de la ecuación de van der Pol es complejo, pues depende del valor de ε y de la amplitud $|x|$. Sin embargo, la ecuación de van der Pol satisface el teorema de Lienard y, por tanto, se asegura la existencia de un ciclo límite estable en el espacio de fase.



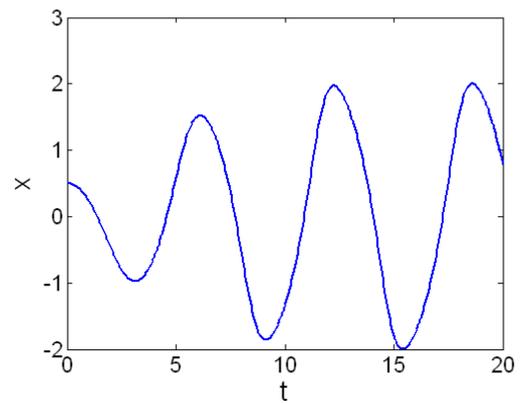
(a)



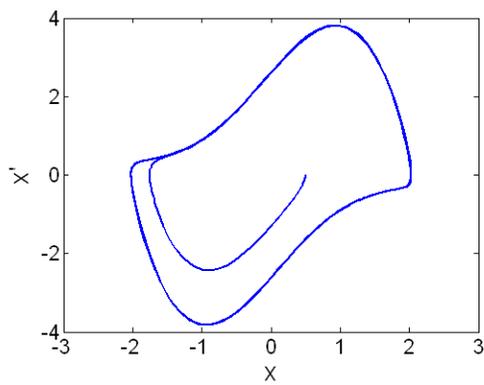
(e)



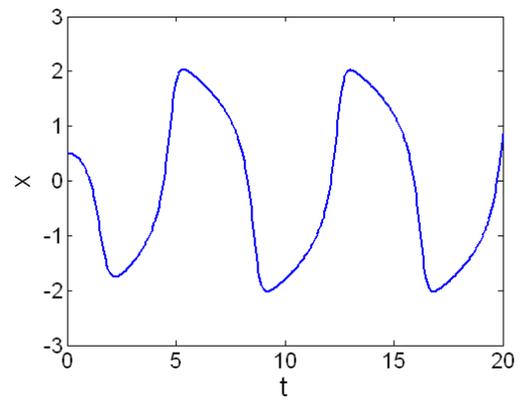
(b)



(f)



(c)



(g)

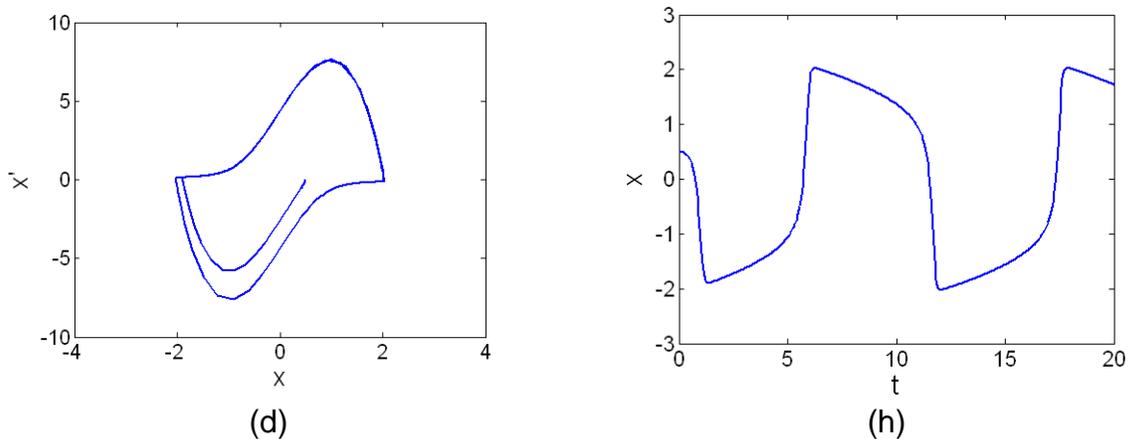


Figura 1.12: Ecuación de van der Pol con condiciones iniciales $x(0) = 0.5$ y $x'(0) = 0$, a - d) Espacios de fase y e - h) soluciones numéricas para $\varepsilon = 0, 0.5, 2, 5$.

Los sistemas modelados por la ecuación de van der Pol también son conocidos como sistemas auto-inducidos, puesto que la fuente del movimiento es el propio sistema. Este efecto se presenta en circuitos electrónicos, sistemas laser, latidos del corazón y sistemas mecánicos con fricción seca.

Ecuación de Duffing

Considérese un sistema de oscilaciones forzadas con un amortiguamiento ligero, una no linealidad de tipo cúbico y una excitación ideal de tipo armónico, dado por la ecuación de Duffing:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2\varepsilon\mu\dot{x} - \varepsilon\alpha x^3 + K \cos \Omega t \quad (1.50)$$

La ecuación de Duffing se caracteriza por presentar el fenómeno de salto, el cual es asociado a la presencia de bifurcaciones subcríticas en el espacio de fase del sistema.

Método de iteraciones para la ecuación de Duffing

La solución armónica del estado estable se puede encontrar por el método de iteraciones o de aproximaciones sucesivas. Se asume una solución y se sustituye en la ecuación diferencial, la cual es integrada para obtener una

solución de mejor precisión. El procedimiento se repite hasta obtener la precisión deseada. Considérese la expresión general de la ecuación de Duffing:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x \pm \mu x^3 = F_0 \cos \omega t \quad (1.51)$$

Sea $x_0 = A \cos \omega t$ la primera aproximación, entonces:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_n^2 A \cos \omega t \mp \mu A^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right) + F_0 \cos \omega t \\ &= (-\omega_n^2 A \mp \frac{3}{4} \mu A^3 + F_0) \cos \omega t \mp \frac{1}{4} \mu A^3 \cos 3\omega t \end{aligned} \quad (1.52)$$

En la integración de la ecuación anterior es necesario establecer en cero las constantes de integración para que la solución sea armónica con período $\tau = 2\pi/\omega$. De esta manera se obtiene la solución mejorada:

$$x_1 = \frac{1}{\omega^2} \left(\omega_n^2 A \pm \frac{3}{4} \mu A^3 - F_0 \right) \cos \omega t \mp \dots \quad (1.53)$$

donde se omite el término armónico más alto, $\cos 3\omega t$.

El procedimiento puede continuar hasta obtener una mejor solución. Sin embargo, Duffing consideró que si las primeras y segundas aproximaciones eran soluciones razonables al problema, entonces los coeficientes de $\cos \omega t$ en x_0 y x_1 no debían diferir de manera importante. Entonces, resolviendo para los coeficientes, se tiene:

$$A = \frac{1}{\omega^2} \left(\omega_n^2 A \pm \frac{3}{4} \mu A^3 - F_0 \right) \quad (1.54)$$

Resolviendo para ω^2 :

$$\omega^2 = \omega_n^2 \pm \frac{3}{4}\mu A^2 - \frac{F_0}{A} \quad (1.55)$$

Aquí se puede ver que si el parámetro no lineal es cero, $\mu = 0$, se obtiene la solución exacta para el sistema lineal:

$$A = \frac{F_0}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

Para $\mu \neq 0$, la frecuencia ω es una función de μ , F_0 y A . Cuando $F_0 = 0$, se obtiene la ecuación de la frecuencia para vibraciones libres:

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 \pm \frac{3}{4}\mu \frac{A^2}{\omega_n^2}$$

De la ecuación anterior se puede ver que la frecuencia de la oscilación aumenta con la amplitud cuando $\mu > 0$, mientras que disminuye para $\mu < 0$.

La relación entre la amplitud A y la frecuencia ω se puede analizar de la siguiente manera. Para ciertos valores constantes de $\mu \neq 0$ y $F_0 \neq 0$, la ecuación (1.54) se puede reorganizar de la siguiente manera:

$$\frac{3}{4}\mu \frac{A^3}{\omega_n^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)A - \frac{F_0}{\omega_n^2} \quad (1.56)$$

Entonces es posible construir una curva de $|A|$ en términos de la relación de frecuencias $\frac{\omega}{\omega_n}$.

1.4.6. Fenómeno de salto

En la relación amplitud-frecuencia de la respuesta del modelo de Duffing, se encuentra que la amplitud sufre un salto repentino cerca de la resonancia, conocido como fenómeno de salto. El fenómeno de salto se detecta cuando se incrementa gradualmente la frecuencia y se registra un incremento en la amplitud; sin embargo, cerca de la resonancia la amplitud decae repentinamente y continúa descendiendo a medida que la frecuencia sigue en aumento. Si se repite este proceso pero ahora partiendo de un valor alto de frecuencia, descendiendo gradualmente, se verificará un comportamiento similar, la amplitud aumenta gradualmente y presenta una nueva caída repentina cerca de la resonancia, sin embargo no existe repetibilidad en las amplitudes. Este comportamiento de histéresis se muestra en la Figura 1.13.

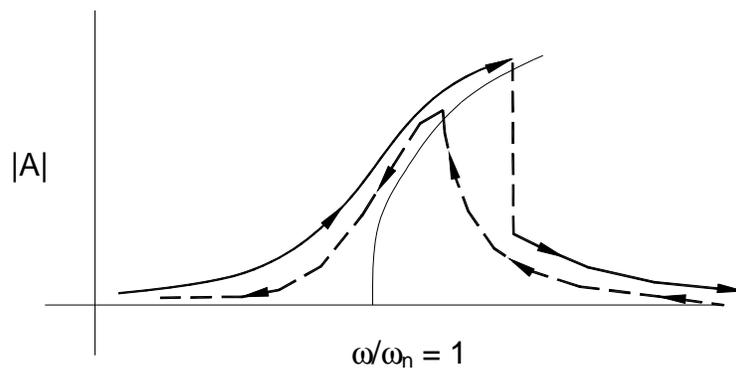


Figura 1.13: Fenómeno de salto en la ecuación de Duffing.

Por otro lado, en la curva de amplitud se aprecia un estiramiento hacia uno u otro lado, lo cual depende del signo del parámetro μ , como se muestra en la Figura 1.14.

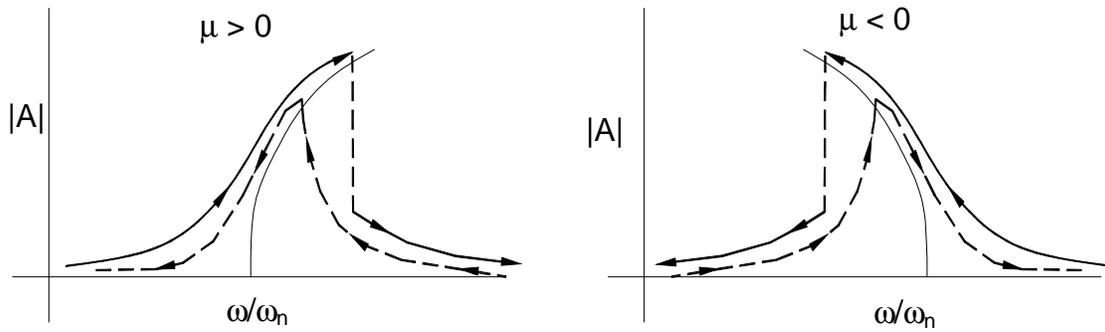


Figura 1.14: Efecto del parámetro μ .

Efecto del amortiguamiento

En ausencia de amortiguamiento, las curvas de amplitud-frecuencia se aproximan asintóticamente a un eje imaginario de la curva que parte de $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$, el cual es curvo para el caso no lineal y es una línea vertical en el caso lineal. Cuando la cantidad de amortiguamiento presente es pequeña, el comportamiento del sistema no difiere considerablemente del sistema no amortiguado. Sin embargo, el extremo superior de la curva, en vez de continuar su acercamiento asintótico al eje, cruzará a éste y formará una curva continua. El fenómeno de salto sigue presente pero la presencia del amortiguamiento tiende a reducir el tamaño de la zona inestable, como se ilustra en la Figura 1.15.

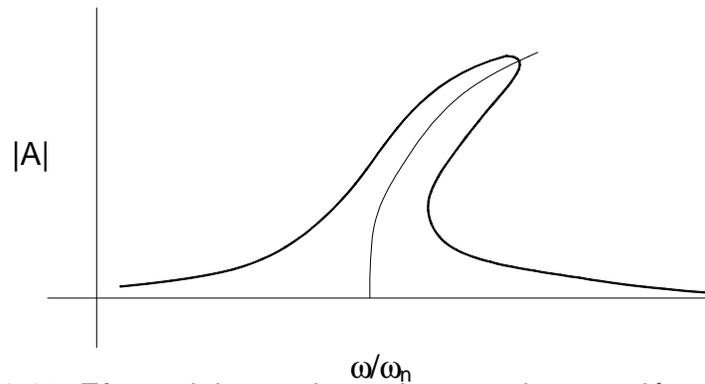


Figura 1.15: Efecto del amortiguamiento en la ecuación de Duffing.

1.4.7. Atractores extraños en la ecuación de Duffing

La ecuación de Duffing presenta un comportamiento de tipo caótico, gobernado principalmente por la amplitud de la excitación. Para valores pequeños de la excitación, la solución se estabiliza alrededor de un punto fijo; sin embargo, a medida que la amplitud de la fuerza de excitación aumenta, la solución oscila alrededor de dos puntos fijos inestables de manera que aparece un atractor extraño en el espacio de fase del sistema. Este comportamiento se muestra en la Figura 1.16, el retrato de fase de la Figura 1.16a corresponde a la ecuación $\ddot{x} + 0.25\dot{x} - x + x^3 = 0.4\cos t$ con condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$.

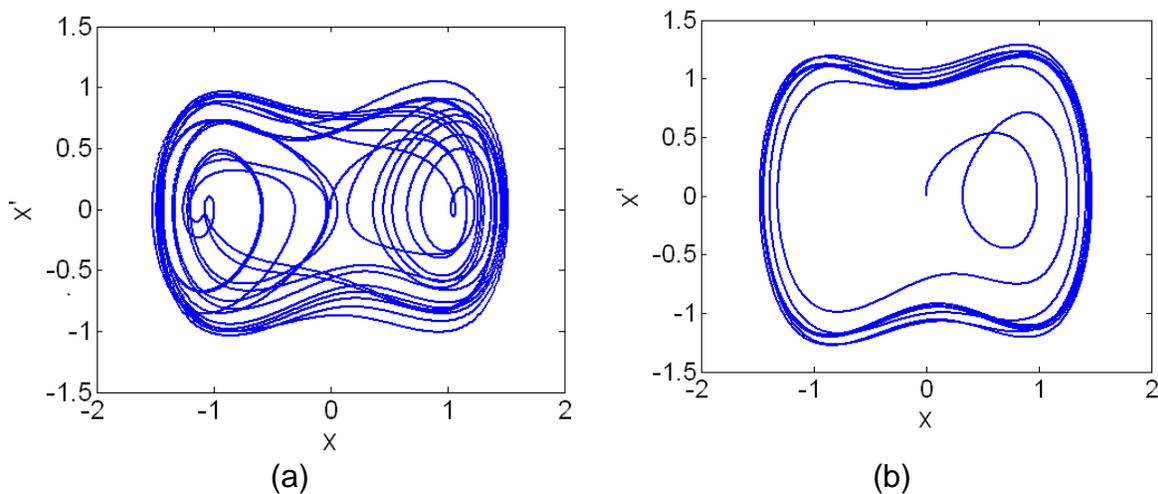


Figura 1.16: Atractor extraño en la ecuación de Duffing; a) Comportamiento caótico b) Comportamiento casi periódico.

El parámetro no lineal μ tiene un efecto similar. Si $\mu \ll 1$, sólo existe un punto fijo estable en el espacio de fase. Para valores de $\mu > 1$ aparecen los dos puntos fijos nuevamente pero la solución presenta oscilaciones casi periódicas alrededor del atractor extraño, como se muestra en la Figura 1.16b para la ecuación $\ddot{x} + 0.25\dot{x} - x + 1.5x^3 = 0.4\cos t$ con condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$. Por lo tanto, el aumento de rigidez tiende a estabilizar el sistema.

CAPÍTULO 2: REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD EN PROCESOS DE CORTE DE METALES

2.1.1. Antecedentes.

Taylor (1907) identificó un tipo de vibración auto-inducida como una limitante de la productividad en procesos de corte. Sin embargo, las explicaciones teóricas sobre la generación de este tipo de vibraciones se presentaron posteriormente; tales como amortiguamiento negativo (Arnold, 1946), regeneración del espesor de viruta (Tobias y Fishwick, 1958), dinámica estructural (Tlusty y Polacek, 1963; Merrit, 1965), así como fricción seca y acoplamiento modal (Wu y Liu, 1985 a, b). Actualmente, la teoría de regeneración del espesor de viruta se considera la explicación más completa, donde el término desestabilizador se introduce en la fuerza de corte como una función del paso previo de corte y el paso actual. La teoría de regeneración del espesor de viruta establece que la aparición de la inestabilidad es provocada por la excitación de uno de los modos de vibrar del sistema, de manera que se genera una superficie ondulada en la pieza de corte. Esta superficie ondulada se convierte en una fuente de inestabilidad para los pasos de corte sucesivos, puesto que representa una variación en el espesor de la viruta, tal como se ilustra en la Figura 2.1.

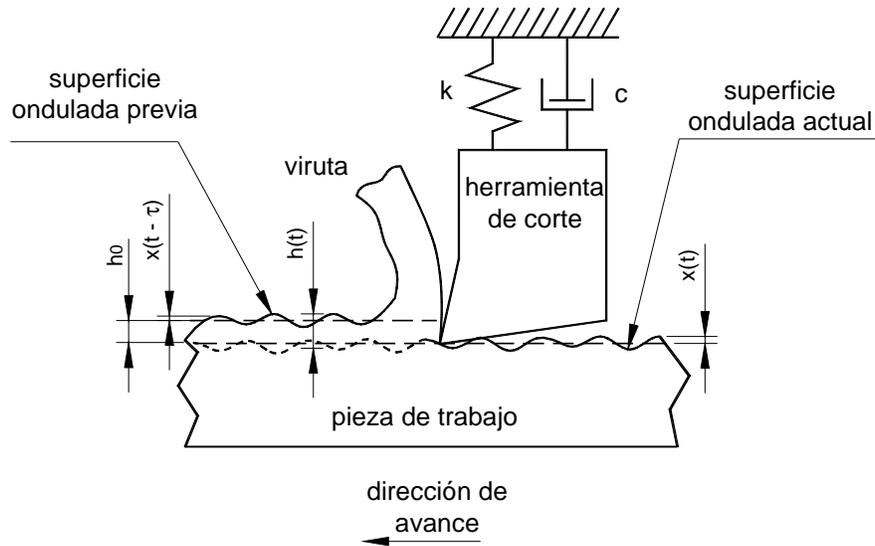


Figura 2.1: Mecanismo de regeneración del espesor de viruta.

Merrit (1965) clasificó este tipo de vibraciones como un tipo de vibraciones auto-inducidas y presentó los diagramas de estabilidad como una técnica de análisis predictivo. En estos diagramas se representó la zona de estabilidad por medio de una serie de lóbulos, cuyo borde representaba las condiciones de estabilidad crítica en términos de los parámetros de proceso, tales como profundidad de corte y velocidad de husillo. Como se muestra en la Figura 2.2, la zona por debajo de los lóbulos representa un proceso estable, mientras que la región por encima de éstos significa que el proceso es inestable.

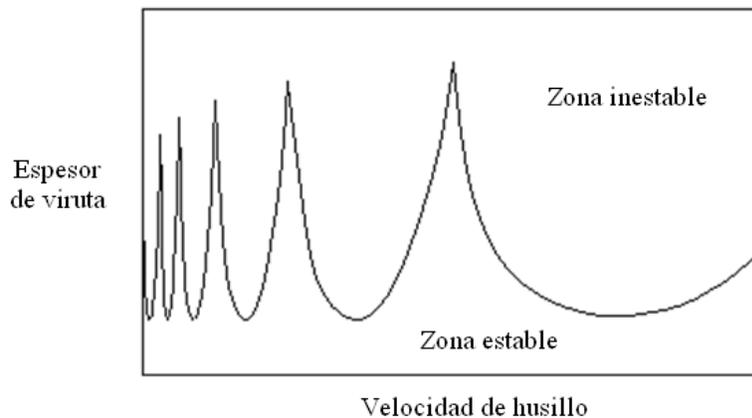


Figura 2.2: Curva de lóbulo típica de un sistema de maquinado.

Recientemente, Altintas y sus colaboradores (1995; 1998 a, b; 2000) desarrollaron varios modelos para análisis predictivo en procesos como: torneado, fresado y taladrado, basados en la teoría de regeneración y análisis modal experimental. Altintas et al. (1999) también propusieron un modelo teórico para incrementar la estabilidad dinámica mediante cortadores de paso variable; como resultado del cambio de frecuencia de la herramienta de corte se obtuvo una zona de mayor estabilidad alrededor de un rango de velocidad deseado.

2.1.2. Teoría de estabilidad lineal.

El análisis lineal se desarrolló a partir de la ecuación de movimiento de una herramienta con características dinámicas de masa m , rigidez k , y amortiguamiento c , la cual penetra la pieza de trabajo con una profundidad y un ancho de corte, lo que a su vez genera la fuerza externa F . El proceso de corte genera una oscilación de la herramienta definida por la función $x(t)$ de tal manera que la ecuación de movimiento está dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (2.1)$$

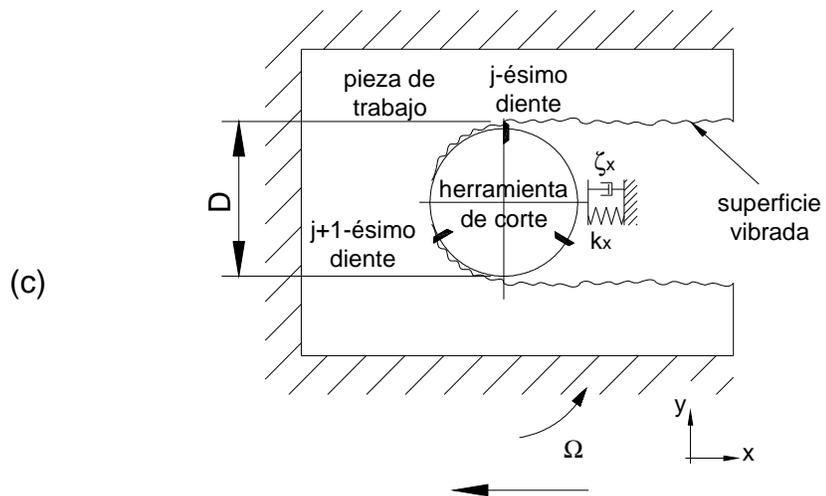
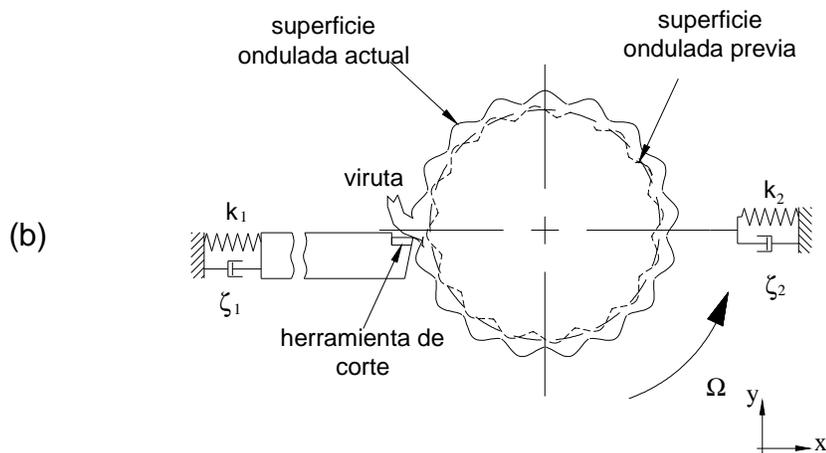
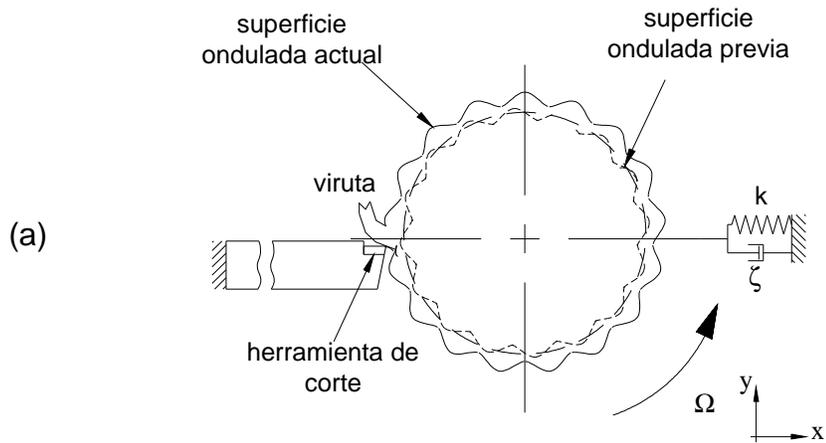
El modelo anterior está basado en el esquema de la Figura 2.3a. En términos de las características dinámicas del sistema, la forma general del modelo anterior es la siguiente:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{1}{m}\Delta F \quad (2.2)$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural angular del sistema oscilatorio, $\zeta = c/2m\omega_n$ es la razón de amortiguamiento y ΔF es la variación de la fuerza de corte, la cual está dada por:

$$\Delta F = K b h(t) \quad (2.3)$$

donde K es el coeficiente de corte del material, b es la profundidad de corte y $h(t)$ es el espesor dinámico de la viruta.



dirección de avance

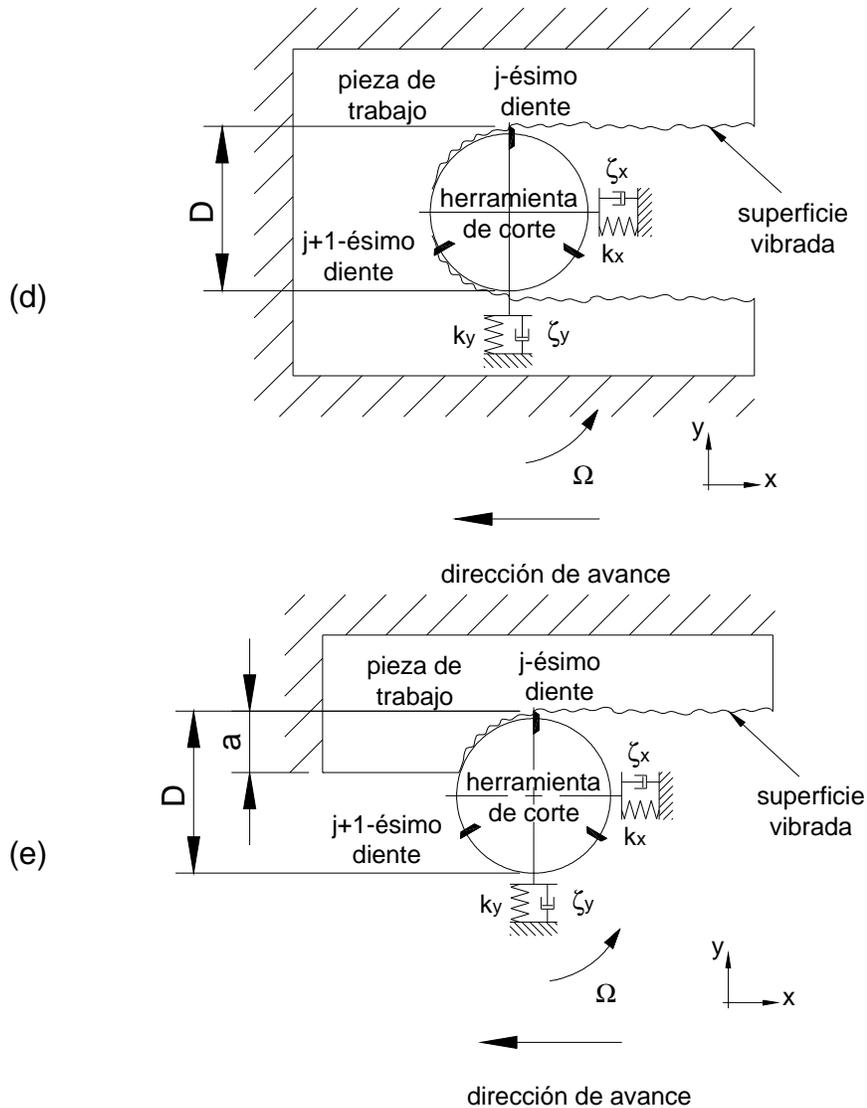


Figura 2.3: Modelos típicos para el análisis de vibraciones auto-inducidas: a) Torneado con un grado de libertad, b) Torneado con dos grados de libertad, c) Fresado con un grado de libertad, d) Fresado con dos grados de libertad, e) Fresado con dos grados de libertad en inmersión parcial.

Con base en la teoría de regeneración, propuesta por Tobias y Fishwick (1958), se considera que el espesor dinámico de la viruta depende de la ondulación previa y la vibración actual de manera que éste se representa por la siguiente ecuación:

$$h(t) = h_0 + x(t) - x(t - \tau) \quad (2.4)$$

donde h_0 es el espesor nominal, $x(t)$ es el desplazamiento de la herramienta en el paso actual de corte, mientras que $x(t - \tau)$ es el desplazamiento en el paso previo y τ es el retraso en el tiempo correspondiente al tiempo que tarda la pieza en dar una revolución, de acuerdo con la velocidad del husillo.

Como resultado, el proceso de corte queda representado por una ecuación diferencial con retraso en el tiempo, cuya solución analítica no fue posible determinar con las técnicas de análisis lineal conocidas en ese tiempo. Es por esto que se prefirió conocer las condiciones de estabilidad de la ecuación diferencial sin necesidad de resolverla analíticamente, dando origen al análisis predictivo.

El análisis de estabilidad consiste en tomar la ecuación diferencial en el dominio del tiempo y llevarla al dominio de la frecuencia mediante una transformada de Laplace. Para el caso de la ecuación (2.2), considerando las ecuaciones (2.3) y (2.4) se obtiene:

$$\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)X(s) = K \frac{\omega_n^2}{k} b(1 - e^{-s\tau})h(s) \quad (2.5)$$

donde $X(s)$ y $h(s)$ son las transformaciones de $x(t)$ y $h(t)$ al dominio de la frecuencia, respectivamente.

Posteriormente se construye la función de transferencia del sistema como la razón de la respuesta y la excitación, en el dominio de la frecuencia. Esto es:

$$\frac{X(s)}{h(s)} = K \frac{\omega_n^2}{k} b \frac{(1 - e^{-s\tau})}{\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)} \quad (2.6)$$

El comportamiento dinámico del modelo (2.2) se puede conocer mediante el análisis de la solución de la ecuación característica en (2.6), esto es, de la naturaleza de sus eigenvalores, que en general son números complejos de la forma $s = \sigma \pm j\omega$. Si la parte real del eigenvalor es positiva, la solución tendrá un término creciente exponencialmente y el sistema será inestable. Una parte real negativa del eigenvalor implica un término decreciente con el cual se suprime la vibración en el tiempo y el sistema será estable. Cuando la parte real es cero, es decir que el eigenvalor es un número puramente imaginario, $s = \pm j\omega$, el sistema será críticamente estable. Por lo tanto, la curva de estabilidad del sistema se obtiene al proponer como solución de la ecuación característica de (2.6) un eigenvalor puramente imaginario, dando como resultado que el sistema se desempeñará en condiciones libres de vibración auto-inducida siempre que la profundidad de corte sea menor que la profundidad de corte crítica, definida por:

$$a_{cr} = -\frac{1}{2KG} \quad (2.7)$$

donde G es la parte real de la función de transferencia del sistema en términos de los parámetros modales ζ , ω_n y k , dada por:

$$G = \frac{1-r^2}{k \left[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2 \right]} \quad (2.8)$$

donde $r = \frac{\omega_c}{\omega_n}$ es la razón de frecuencia de auto-inducción a la frecuencia natural.

Además, la velocidad del husillo asociada a la profundidad de corte crítica se calcula como sigue:

$$\Omega_c = \frac{2\pi\omega_c}{\varepsilon + 2n\pi} \quad (2.9)$$

donde n es un número entero que representa la multiplicidad de las funciones trigonométricas, y genera las múltiples soluciones del sistema representadas por los lóbulos de estabilidad; mientras que ε es el cambio de fase del sistema, dado por:

$$\varepsilon = 3\pi + 2 \tan^{-1} \frac{\sin \omega_c \tau}{\cos \omega_c \tau - 1}$$

Extendiendo el análisis de un grado de libertad a dos grados de libertad para abordar el problema de vibraciones en operaciones de fresado, Budak y Altintas (1995) propusieron el siguiente modelo, basado en el esquema de la Figura 2.3c:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 2\zeta_x \omega_{n,x} \dot{x}(t) + \omega_{n,x}^2 x(t) &= \frac{1}{m_x} \sum_{j=0}^{N-1} F_{xj} = \frac{1}{m_x} F_x(t) \\ \ddot{y}(t) + 2\zeta_y \omega_{n,y} \dot{y}(t) + \omega_{n,y}^2 y(t) &= \frac{1}{m_y} \sum_{j=0}^{N-1} F_{yj} = \frac{1}{m_y} F_y(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde $\omega_{n,x}$, ζ_x , m_x , and $\omega_{n,y}$, ζ_y , m_y , representan los parámetros modales en las direcciones X y Y, respectivamente; F_{xj} y F_{yj} son las componentes de la fuerza de corte aplicadas por el j -ésimo diente, las cuales son obtenidas de proyectar la fuerza de corte F en esas direcciones; mientras que N es el número de dientes del cortador.

La fuerza de corte se considera proporcional a la profundidad de corte b y al espesor instantáneo de la viruta h , cuyas componentes tangencial y radial están dadas por:

$$F_t = K_t b h \quad y \quad F_r = K_r F_t$$

donde K_t es la resistencia específica del material en dirección tangencial, obtenida experimentalmente, mientras que K_r es una constante de proporcionalidad que representa la resistencia específica en dirección radial. Además, el espesor dinámico de la viruta está dado por:

$$h(\phi_j) = [s_t \text{ sen } \phi_j + (v_{0j} - v_j)] g(\phi_j) \quad (2.11)$$

Aquí, el término $s_t \text{ sen } \phi_j$ es el espesor estático de la viruta, atribuido al movimiento de cuerpo rígido de la herramienta en función de la razón de alimentación por diente s_t , mientras que v_{0j} y v_j son las componentes dinámicas causadas por la vibración de la herramienta en el corte presente y previo, respectivamente. La función g es una función escalón unitaria que determina si el diente está o no en contacto con la pieza de trabajo y ϕ_j es el ángulo de inmersión instantáneo del j -ésimo cortador durante el corte.

Tomando en cuenta lo anterior, la fuerza de corte se expresa de la siguiente forma:

$$F(t) = \frac{1}{2} a K_t \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [A(t)] e^{-jr\omega_s \tau} dt e^{-jr\omega_s \tau} \{ x(t) - x(t - \tau), y(t) - y(t - \tau) \} \quad (2.12)$$

donde la frecuencia de paso del cortador es $\omega_s = N\Omega$, los términos periódicos $A(t)$ son dependientes de la dirección y del tiempo, $\{ x(t) - x(t - \tau), y(t) - y(t - \tau) \}$ es la carga dinámica de la viruta debido al efecto de la vibración del corte presente y previo, mientras que $\tau = 2\pi/N\Omega$ es el período del diente para una velocidad Ω del husillo.

Los términos periódicos de $A(t)$ se calculan como una serie de Fourier:

$$[A(t)] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} [A_p] e^{jp\omega t}, \text{ donde } [A_p] = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [A(t)] e^{-jp\omega t} dt, \text{ donde } p \text{ es el número de}$$

armónicos de la frecuencia del paso del cortador, ω_s . Sumando las contribuciones de todos los dientes a la fuerza de corte, la matriz $A(t)$ se puede representar por coeficientes de fuerza direccionales:

$$[A(t)] = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\alpha_{xx} = \sum_{j=0}^{N-1} -g_j [\sin 2\varphi_j + K_r (1 - \cos 2\varphi_j)]$$

$$\alpha_{xy} = \sum_{j=0}^{N-1} -g_j [(1 + \cos 2\varphi_j) + K_r \sin 2\varphi_j]$$

(2.13)

$$\alpha_{yx} = \sum_{j=0}^{N-1} g_j [(1 - \cos 2\varphi_j) - K_r \sin 2\varphi_j]$$

$$\alpha_{yy} = \sum_{j=0}^{N-1} g_j [\sin 2\varphi_j - K_r (1 + \cos 2\varphi_j)]$$

Aquí, $g_j(\varphi_j) = 1$ es la función escalón, y $\varphi_j = \Omega\tau$.

La precisión de la matriz $A(t)$ depende del número de armónicos de la frecuencia del paso del cortador, p , que sean considerados. A su vez, esto

depende de las condiciones de inmersión y el número de dientes en contacto. El caso más simple corresponde a una inmersión total y no se considera el traslape de los dientes en contacto, de manera que no se incluyen armónicos en el análisis y sólo se calcula A_0 . Por lo tanto, los coeficientes α se simplifican de la siguiente manera:

$$\alpha_{xx} = \frac{1}{2} [\cos 2\varphi - K_r (2\varphi - \sin 2\varphi)]_{\varphi_{st}}^{\varphi_{ex}}$$

$$\alpha_{xy} = \frac{1}{2} [-\sin 2\varphi - 2\varphi + K_r \cos 2\varphi]_{\varphi_{st}}^{\varphi_{ex}}$$

$$\alpha_{yx} = \frac{1}{2} [-\sin 2\varphi + 2\varphi + K_r \cos 2\varphi]_{\varphi_{st}}^{\varphi_{ex}}$$

$$\alpha_{xx} = \frac{1}{2} [-\cos 2\varphi - K_r (2\varphi + \sin 2\varphi)]_{\varphi_{st}}^{\varphi_{ex}}$$

donde φ_{st} y φ_{ex} son los ángulos de entrada y salida del j -ésimo diente de la herramienta.

El análisis de estabilidad del modelo de Budak y Altintas se obtiene de la ecuación característica de la expresión para $F(t)$ en términos de la vibración en el dominio de la frecuencia mediante funciones armónicas, de lo cual se obtiene que el espesor de viruta crítico está dado por:

$$b_{cr} = -\frac{2\pi\Lambda_R}{NK_t} (1 + \kappa^2) \quad (2.14)$$

donde $\kappa = \frac{\Lambda_R}{\Lambda_I}$ es la razón de la parte real e imaginaria del eigenvalor de la ecuación característica:

$$\Lambda = -\frac{NK_t b_{cr}}{4\pi} (1 - e^{j\omega_c \tau}) \quad (2.15)$$

mientras que la frecuencia de vibración auto-inducida se obtiene de:

$$\omega_c = \frac{\pi - 2 \tan^{-1} \kappa + 2n\pi}{\tau}$$

donde n es nuevamente un número entero que da origen a los múltiples lóbulos de estabilidad. En este caso, el cambio de fase está dado por:

$$\varepsilon = \cos^{-1} \left(\frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa^2} \right) \quad (2.16)$$

En la Figura 2.4 se muestra un diagrama de estabilidad para un proceso de fresado obtenido con las ecuaciones (2.14) y (2.15) con los siguientes parámetros: $k = 1.3 \times 10^8$ N/m, $\omega_n = 335$ Hz, $\zeta = 0.73\%$, $K_t = 600 \times 10^6$ N/m², $K_r = 0.3$ y $N = 4$.

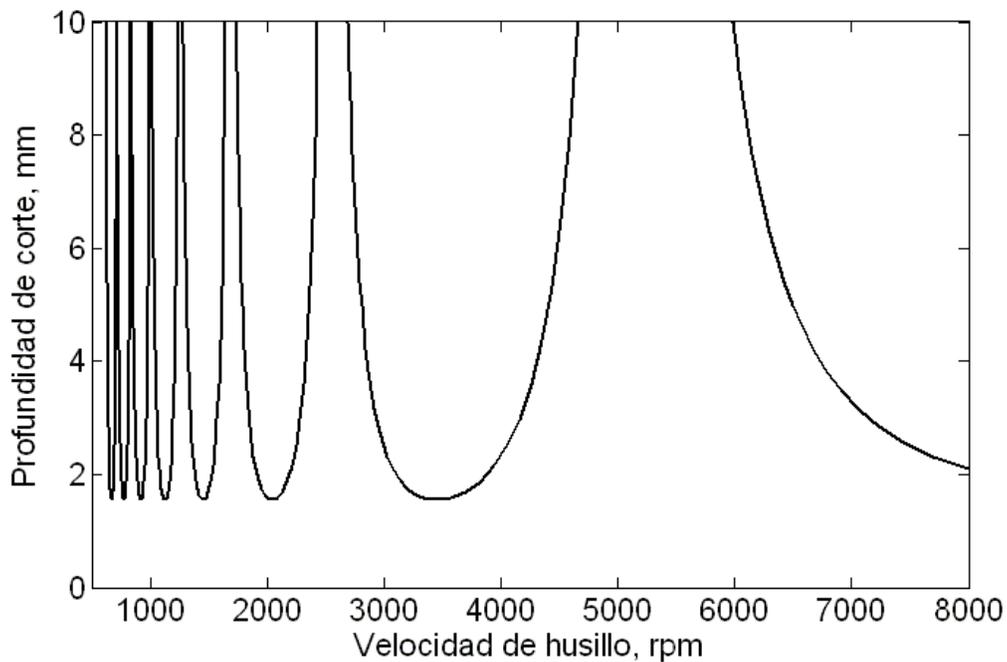


Figura 2.4: Diagrama de estabilidad en un proceso de fresado con inmersión total.

2.1.3. Análisis no lineal y bifurcaciones.

Aunque los primeros investigadores reconocieron la naturaleza no lineal de las vibraciones auto-inducidas, fueron Hanna y Tobias (1974) quienes propusieron un modelo no lineal de un grado de libertad con términos cuadráticos y cúbicos relacionados con la rigidez estructural y la fuerza de corte, también basado en la teoría de regeneración:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \omega_n^2(x + \beta_2x^2 + \beta_3x^3) = -\omega_n^2(x - x(t - \tau) + \alpha_2(x - x(t - \tau))^2 + \alpha_3(x - x(t - \tau))^3) \quad (2.17)$$

donde ζ es el amortiguamiento viscoso, ω_n es la frecuencia natural fundamental del sistema. Los coeficientes no lineales que representan tanto el corte, α_j , como la rigidez estructural, β_j , se obtuvieron experimentalmente.

Empleando el método de balance armónico, estos autores encontraron una solución que, aunque limitada en su construcción, permitió predecir comportamientos no lineales como ciclos límite y el fenómeno de salto, los cuales ya habían sido identificados experimentalmente. Este estudio detonó un fuerte interés de matemáticos y científicos por analizar la dinámica global del fenómeno, por lo que se extendió el uso de técnicas de dinámica no lineal y teoría de bifurcaciones. Pratt (1997) analizó el modelo de Hanna y Tobias con técnicas de análisis no lineal, como: método de escalas múltiples, balance armónico y teoría de Floquet; sus resultados confirmaron la existencia de bifurcaciones subcríticas tipo Hopf, atribuidas a la no linealidad estructural de tipo cúbico. Aronson (1998) situó el análisis de las vibraciones en procesos de maquinado en el campo de acción de la teoría del caos, puesto que el problema reunía características como: impredecibilidad, complejidad y una fuerte dependencia de las condiciones iniciales.

Recientemente, Wiercigroch y Budak (2001) identificaron varias fuentes de no linealidad, tales como: rigidez estructural, fricción variable, efecto termo mecánico, corte intermitente y pérdida de contacto. Kalmár-Nagy et al. (1999, 2001) emplearon la teoría de manifold central y mostraron la existencia de bifurcaciones subcríticas en las vibraciones regenerativas de máquinas-herramienta, así como la presencia de histéresis en el proceso de corte. Los autores emplearon un modelo no lineal de vibración forzada de un grado de libertad, con exponente fraccionario en la alimentación.

Moon y Kalmár-Nagy (2001) analizaron el efecto viscoelástico del material, considerado como un sólido con retraso en su elasticidad. El comportamiento irreversible de la fuerza de corte está dado por:

$$\Delta F + q_0 \tau \Delta \dot{F} = k_1 \Delta h + q_1 \tau \Delta \dot{h} \quad (2.18)$$

donde: $\Delta h = h(x) - h_0 = x(t) - x(t - \tau)$. Sustituyendo en el modelo general lineal de un grado de libertad, resulta:

$$q_0 \tau \ddot{x} + (1 + 2\zeta q_0 \omega_n) \dot{x}(t) + \left(2\zeta \omega_n + q_0 \tau \omega_n^2 + \frac{q_1 \tau}{m} \right) \dot{x}(t) + \left(\omega_n^2 + \frac{k_1}{m} \right) x(t) - \frac{k_1}{m} x(t - \tau) - \frac{q_1 \tau}{m} \dot{x}(t - \tau) = 0 \quad (2.19)$$

Moon y Kalmár-Nagy encontraron una curva de estabilidad del modelo viscoelástico diferente de las curvas de lóbulo clásicas. La nueva curva de estabilidad presentaba una alta estabilidad para velocidades bajas, lo cual concuerda con los resultados experimentales, pero descendía drásticamente a medida que la velocidad aumentaba, lo cual no es congruente con los resultados experimentales.

Wiercigroch y Krivtsov (2001) analizaron el efecto de la fricción durante el proceso de corte en la generación de las vibraciones auto-inducidas. Estos investigadores usaron un modelo matemático general basado en el efecto de la fricción; la fuerza de corte era una función de la profundidad de corte, la velocidad relativa, las constantes de proceso y la función escalón, para considerar la separación entre la herramienta y la pieza de trabajo. Como resultado, se obtuvo un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden de dos grados de libertad para corte ortogonal:

$$\ddot{x} + 2\xi_x \dot{x} + x = f_x(y, \dot{x}, \dot{y}) \quad (2.20)$$

$$\ddot{y} + 2\xi_y \sqrt{\alpha} \dot{y} + \alpha y = f_y(y, \dot{x}, \dot{y})$$

donde:

$$\xi_x = \frac{k_x}{2m\omega_{0x}}, \quad \xi_y = \frac{k_y}{2m\omega_{0y}}, \quad \alpha = \frac{c_y}{c_x}, \quad \omega_{0x}^2 = \frac{c_x}{m}, \quad \omega_{0y}^2 = \frac{c_y}{m},$$

$$f_x(y, \dot{x}, \dot{y}) = q_0(h_0 - y) \left(H(v_r) \frac{1}{1 + \mu_0} + \text{sgn}(v_r) \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} \right) \left(c_1 (\text{abs}(v_r) - 1)^2 + 1 \right) H(h),$$

$$f_y(y, \dot{x}, \dot{y}) = \left(c_2 (v_f - 1)^2 + 1 \right) \left(c_3 (h_0 - y - 1)^2 + 1 \right) H(f_x) \text{sgn}(v_f) f_x(y, \dot{x}, \dot{y})$$

Con técnicas de análisis no lineal, como diagramas de bifurcación y mapas de Poincaré, se mostró que las vibraciones auto-inducidas eran favorecidas por la fricción seca, mientras que la fricción viscosa prevenía su aparición. La discontinuidad de las fuerzas de fricción seca resultó ser un factor altamente no lineal esencial en la generación de las vibraciones, lo que se reflejó en la presencia de atractores multidimensionales.

Stépán et al. (2003; 2005 a, b) presentaron nuevos resultados en el análisis de vibraciones auto-inducidas usando la ley exponencial de la fuerza de corte, conocida como regla de los tres cuartos para el espesor de viruta, propuesta por Tlusty (2000):

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \frac{1}{m}Kb(h_0 + x(t - \tau) - x(t))^{3/4} \quad (2.21)$$

El análisis de estabilidad del modelo de Stépán se basó en la solución de su ecuación característica por medio de la transformada de Laplace, en donde el término exponencial se aproximó a un polinomio de tipo cúbico mediante series de Taylor con respecto a h . Como resultado, se obtuvo un diagrama de estabilidad con las siguientes ecuaciones

$$b_{cr} = -\frac{4}{3} \frac{k\sqrt[4]{h_0}}{K} \frac{\omega_n^2 - \omega_c^2}{1 - \cos \omega_c \tau} \quad (2.22)$$

y

$$\omega_c \tau = 2 \left(n\pi + \tan^{-1} \left(\frac{1 - r^2}{2\zeta r} \right) \right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

donde $r = \frac{\omega_c}{\omega_n}$, $\tau = \frac{2\pi}{\Omega}$ y ω_c es la frecuencia de auto-inducción a la cual se pierde la inestabilidad. Aunque estos resultados presentaron una buena aproximación al fenómeno, no se presentó una validación experimental de los coeficientes no lineales obtenidos de la expansión de Taylor.

Estos autores también analizaron el fresado de alta velocidad con uno y dos grados de libertad (Figura 2.4c-e) y encontraron bifurcaciones de período duplicado, o *flip*², como una fuente de inestabilidad adicional a las bifurcaciones subcríticas Hopf, identificadas previamente (Pratt, 1997). El tiempo de contacto

² Se conoce así debido al comportamiento oscilatorio a un lado y otro de un punto de bifurcación.

entre el diente de la herramienta y la pieza se consideró como una excitación paramétrica. Se asumió que este tiempo era muy corto de manera que la posición de la herramienta y el espesor de la viruta no cambiaban durante el tiempo de contacto. Debido a esto, el modelo se compuso de un movimiento vibratorio libre y un movimiento vibratorio forzado, en el que la fuerza de corte no cambiaba durante el tiempo de contacto. Esto es:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0, \quad t \in [t_j - \tau, t_j - \rho\tau) \quad (2.24)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \frac{1}{m}\Delta F_x, \quad t \in [t_j - \rho\tau, t_j)$$

donde $t_j - \rho\tau$ es el tiempo inicial del j -ésimo contacto entre la herramienta y la pieza de trabajo ($j = 1, 2, \dots$), mientras que $\rho\tau$ es el tiempo de contacto, donde $\rho \ll 1$.

Del análisis de estabilidad se obtuvieron expresiones analíticas para encontrar condiciones de estabilidad críticas debido a bifurcaciones subcríticas de período duplicado y bifurcaciones Hopf, cuando el espesor crítico está dado por:

$$b_{cr,j} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_n\tau} \frac{\cosh \zeta\omega_d\tau + \cos \omega_d\tau}{\text{sen } \omega_d\tau} \quad (2.25)$$

y

$$b_{cr,j} = -2 \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_n\tau} \frac{\text{senh } \zeta\omega_d\tau}{\text{sen } \omega_d\tau}, \quad (2.26)$$

respectivamente, donde: $\omega_n\tau = \frac{2\pi}{z\tilde{\Omega}}$, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

Con el estudio de la dinámica global de ambos procesos, Stépán mostró la relativa facilidad para la presencia de oscilaciones de tipo caótico con grandes

espesores de corte, debido a la pérdida de contacto entre la herramienta y la pieza de trabajo. Aunque los resultados de Stépán concuerdan con datos experimentales, no se tomó en cuenta la rigidez estructural.

Ganguli (2005) empleó la matriz de transformación de Floquet y encontró que la frecuencia de una bifurcación subcrítica Hopf era cercana a una frecuencia modal, mientras que la frecuencia de una bifurcación de período duplicado era un armónico múltiplo de la mitad de la frecuencia de paso de los dientes cortantes.

Con el objetivo de investigar la complejidad dinámica del proceso de maquinado, Mann et al. (2005) presentaron un análisis del efecto de la asimetría estructural y la influencia de la regeneración no lineal en un modelo de fuerzas de corte discontinuas a través de dos técnicas de modelación: un modelo de marco fijo formado por una masa puntual y fuerzas restauradoras y de amortiguamiento que no giran con la herramienta, y un modelo rotatorio que incluyó la asimetría estructural bajo el supuesto de que las fuerzas restauradoras y de amortiguamiento giraban con la herramienta. Los resultados confirmaron la existencia de un comportamiento inestable de período duplicado, además de la bifurcación subcrítica Hopf ya conocida; también se encontró la presencia de histéresis en los diagramas de bifurcación, lo cual demostró la coexistencia de atractores periódicos y cuasiperiódicos. Nayfeh (1979) y Pratt (1997) identificaron las vibraciones auto-inducidas como finitas con comportamiento no lineal caracterizado por la presencia de ciclos límite y el fenómeno de salto.

2.1.4. Mapas discretos.

Para modelos más complejos, tales como inmersión parcial o corte intermitente, también han surgido nuevas técnicas de solución. Como ejemplo de estas técnicas se pueden mencionar el método de particiones D (Faasen et al., 2003), el método de semi-discretización (Inspurger y Stépán, 2002, 2004), aproximación de orden cero (Gradisek et al., 2005), y el análisis de elementos

finitos de tiempo (Bayly et al., 2002). Estos métodos mostraron mayor exactitud cuando la pérdida de contacto entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo tenía un efecto dominante, como se representa en la Figura 2.3e. Otro resultado importante fue reportado por Davies et al. (2002) en el análisis de fresado con baja inmersión radial. Para razones de inmersión bajas, se encontraron nuevas regiones estables dentro de las zonas inestables obtenidas de un análisis lineal (Budak y Altintas, 1998 a, b; Altintas, 2000). Estos resultados también se obtuvieron con el método de semi-discretización, mencionado previamente, y se atribuyó la presencia de las nuevas inestabilidades a bifurcaciones de período duplicado causadas por la intermitencia del corte. Bayly et al. (2003) y Mann et al. (2004) mejoraron el análisis de fresado con baja inmersión mediante una solución aproximada basada en el método de elementos finitos de tiempo; las condiciones de inestabilidad se identificaron con secciones de Poincaré a partir de datos experimentales.

Una de las particularidades de los métodos de Davies et al., del método de semi-discretización de Insperger y Stépán, y del método de elementos finitos de Bayly et al., es la construcción de mapas discretos a partir del modelo en ecuaciones diferenciales con retraso, y la formulación propuesta. Por lo tanto, es posible identificar las bifurcaciones de período duplicado, además de las bifurcaciones tipo Hopf que sólo se presentan en sistemas continuos. Como resultado, las curvas de estabilidad presentan geometrías más complejas y una cantidad mayor de lóbulos, sobre todo a bajas inmersiones de la herramienta de corte, como se muestra en la Figura 2.5, donde se presenta la solución del modelo no lineal con el método de semi-discretización (Insperger y Stépán, 2002, 2004). En este análisis se tomaron en cuenta las condiciones dinámicas utilizadas en el análisis lineal presentado en la Figura 2.3: $k = 1.3 \times 10^8$ N/m, $\omega_n = 335$ Hz, $\zeta = 0.73\%$, $K_t = 600 \times 10^6$ N/m², $K_r = 0.3$; aunque en este caso se agregaron condiciones de intermitencia del corte con una relación $a/D = 0.2$ y dos filos cortantes, $N = 2$.

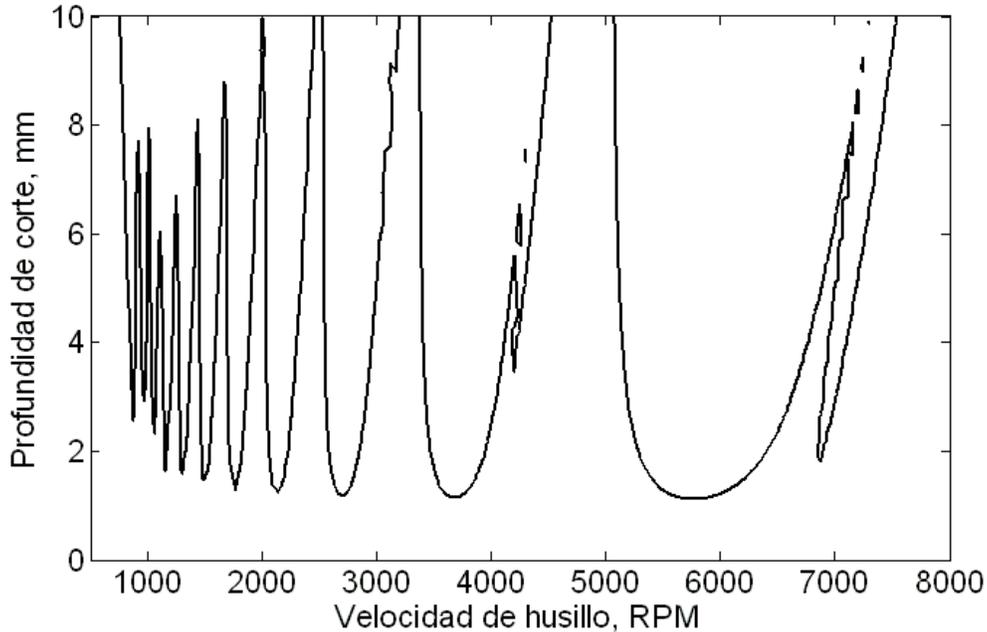


Figura 2.5: Curva de estabilidad para cortes con inmersión parcial en fresado.

Las técnicas de análisis mencionadas también permitieron establecer condiciones para aumentar la estabilidad mediante sintonía periódica de la velocidad en torneado (Insperger y Stépán, 2004), o cambiando el sentido de rotación de la herramienta de corte en fresado de alta velocidad (Insperger et al., 2003; Mann et al., 2003). Recientemente, Szalai y Stépán (2006) emplearon una función característica para determinar que las zonas de inestabilidad debido a bifurcaciones de período duplicado eran lóbulos cerrados distribuidos en el diagrama de estabilidad para torneado interrumpido.

2.1.5. Monitoreo de señales y estrategias de control activo.

Desde 1975 se han empleado esquemas de control de vibraciones de tipo pasivo en procesos de maquinado, las cuales consisten en la incorporación de elementos amortiguadores y absorbedores de masa. Por otro lado, desde 1997 destacan las estrategias de monitoreo para evitar o mejorar las condiciones de inestabilidad dinámica del sistema, así como los sistemas de control activo de vibraciones basados en pares de actuador-sensor, cuyo propósito es absorber o

suprimir la amplitud de la vibración y mejorar la estabilidad dinámica del sistema mediante un control retroalimentado.

Pratt (1997), Ganguli (2005) y Sims et al. (2003, 2005) presentaron estrategias de control activo con el objetivo de incrementar la estabilidad de los procesos de maquinado, por medio de pares de actuador y sensor que funcionaron como absorbedores o compensadores de vibración. La herramienta de corte se somete a una excitación externa que suprime la vibración intrínseca del proceso de corte; como resultado, el amortiguamiento del sistema se incrementa y las curvas de estabilidad suben con respecto a la profundidad de corte. Brecher (2005) reportó la triplicación de la profundidad de corte en pruebas experimentales, utilizando un actuador electro-hidráulico en un esquema de control activo.

Las técnicas de análisis que se han empleado con mayor frecuencia son: análisis espectral (FFT) de señales medidas con acelerómetros (Altintas, 2000), la varianza estadística de señales de audio a una razón de una muestra por cada revolución (1/rev) de la herramienta de corte (Schmitz, 2003), y secciones de Poincaré experimentales (Bayly et al., 2003). La identificación de las frecuencias de auto-inducción con análisis espectral se basa en la presencia de nuevas frecuencias en el espectro, adicionales a la frecuencia natural y la frecuencia de paso del diente del cortador que están presentes en un proceso estable. La varianza estadística utiliza la naturaleza síncrona y asíncrona de un corte estable e inestable, respectivamente, con respecto a la velocidad del husillo. Bayly et al. (2003) construyó las secciones de Poincaré experimentales con las señales de un sensor de desplazamientos colocado en el soporte de la pieza de trabajo en un proceso de fresado; las señales de desplazamiento se tomaron a razón de una muestra por cada revolución (1/rev) de la herramienta de corte, el muestreo periódico se obtuvo con un tacómetro laser que detectaba una transición de color blanco-negro en el portaherramientas. El proceso se determinó estable si la

posición del muestreo 1/rev se aproximaba a un valor constante, de otro modo el proceso era inestable.

2.1.6. Métodos de perturbación.

De la discusión anterior queda claro que las vibraciones auto-inducidas representan un problema de vibraciones no lineales con comportamiento caótico. Existen dos fuentes de inestabilidad identificadas claramente: bifurcaciones subcríticas tipo Hopf, típicas de sistemas autónomos, y bifurcaciones de período duplicado, características de sistemas dependientes del tiempo, o series de tiempo. Aunque se han identificado múltiples fuentes de alta no linealidad y se han propuesto modelos muy complejos que han mostrado una buena aproximación al fenómeno físico, no se ha presentado un modelo unificador ni se ha propuesto una solución exacta, debido a la complejidad del problema. Recientemente se han presentado estudios basados en métodos de perturbación para construir soluciones aproximadas de modelos no lineales, tales como Hwang et al. (1997), Warminski et al. (2003), así como Wahi y Chatterjee (2005). En estos trabajos se empleó el método de escalas múltiples y se obtuvieron resultados teóricos similares a datos experimentales. Sin embargo, es importante resaltar que en estos trabajos tampoco se consideraron no linealidades de tipo estructural.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1. ANÁLISIS DE VIBRACIONES AUTO-INDUCIDAS DEBIDO AL MOVIMIENTO RELATIVO ENTRE LA PIEZA DE TRABAJO Y LA HERRAMIENTA DE CORTE.

3.1.1. Introducción

De acuerdo con la revisión del capítulo anterior, la teoría de regeneración del espesor de viruta y, por consiguiente, los modelos en ecuaciones diferenciales con retraso en el tiempo, son hasta hoy en día la explicación más convincente del origen de las vibraciones auto-inducidas en procesos de maquinado. A partir de esta teoría se ha desarrollado un marco teórico para el análisis de vibraciones auto-inducidas en procesos de torneado, fresado y taladrado, entre otros (Budak y Altintas, 1995 a, b; Altintas, 2000). Experimentalmente, las vibraciones auto-inducidas mostraron un comportamiento no lineal con presencia de ciclos límite y el fenómeno de salto, o histéresis en la respuesta. Hanna y Tobias (1974) propusieron un modelo no lineal con retraso en el tiempo y no linealidades de tipo estructural y de corte, en forma de funciones polinomiales de tipo cúbico. Este trabajo detonó un fuerte interés entre científicos y matemáticos, quienes abordaron el problema con técnicas de dinámica no lineal y teoría de caos. Se propusieron modelos basados en mecanismos generadores como: fricción, viscoelasticidad, intermitencia del corte, entre otros. Como resultado, se obtuvo una mejor aproximación al fenómeno y se comprobaron comportamientos no lineales y de tipo caótico de manera experimental. Además, se asoció la pérdida de estabilidad dinámica a dos tipos de bifurcaciones subcríticas: Hopf y de doble período, o *flip*. Sin embargo, tanto en formulaciones lineales como no lineales, generalmente el movimiento relativo entre la pieza de trabajo y la herramienta de corte se ha ignorado, siendo que en realidad existe una interacción entre ambos

elementos durante el proceso de corte. Incluso se plantea que bajo ciertas condiciones, el movimiento relativo tiene una influencia mayor en la aparición de vibraciones auto-inducidas que el propio mecanismo de regeneración.

En esta sección se presenta un modelo de dos grados de libertad para predicción de las vibraciones auto-inducidas en el proceso de torneado, basado en el movimiento relativo entre la pieza de trabajo y la herramienta de corte. Se realizó un análisis de estabilidad lineal del modelo en el dominio de la frecuencia y se desarrolló un método para construir diagramas de estabilidad. Se analizó el efecto de las características dinámicas de la pieza de trabajo en los diagramas de estabilidad del sistema. Con este enfoque, se espera una interpretación más completa del fenómeno puesto que se considera el efecto de las características dinámicas de la herramienta de corte.

3.1.2. Modelación del movimiento relativo entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo en torneado

El movimiento relativo entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo no ha sido explorado de manera extensa, debido al supuesto general de que la herramienta de corte, en el caso del torneado, y la pieza de trabajo, en el caso de fresado, presentan una rigidez suficiente. Como consecuencia, se obtienen modelos de un grado de libertad o modelos de múltiples grados de libertad desacoplados, cuyo proceso de solución es menos complicado. Sin embargo, el movimiento relativo llega a tener un efecto dominante en la aparición de las vibraciones auto-inducidas en algunos casos especiales, como en el maquinado de paredes delgadas (Budak et al., 1998a y b); cuando las características dinámicas de ambos, la pieza de trabajo y la herramienta de corte, son similares (Bravo et al., 2005); o cuando la deformación de la pieza de trabajo debido a la fuerza de corte es alta (Chen y Tsao, 2006).

El modelo dinámico propuesto en este trabajo se desarrolló bajo la consideración de que la interacción entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo se podían representar como un sistema de masas concentradas, donde ambas masas están propensas a vibrar debido al proceso de corte. Las vibraciones auto-inducidas aparecen cuando se presenta movimiento relativo o movimiento fuera de fase entre ambas masas. Como consecuencia, el espesor de la viruta cambia y se genera una superficie ondulada; de esta manera, el sistema se excitará en pasos de corte sucesivos dando origen al efecto regenerativo, como se muestra en la Figura 3.1a. El modelo resultante es un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado con retraso en el tiempo, donde la fuerza de corte es una función del movimiento relativo entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo. En este modelo, sólo se tomaron en cuenta vibraciones en la dirección de avance.

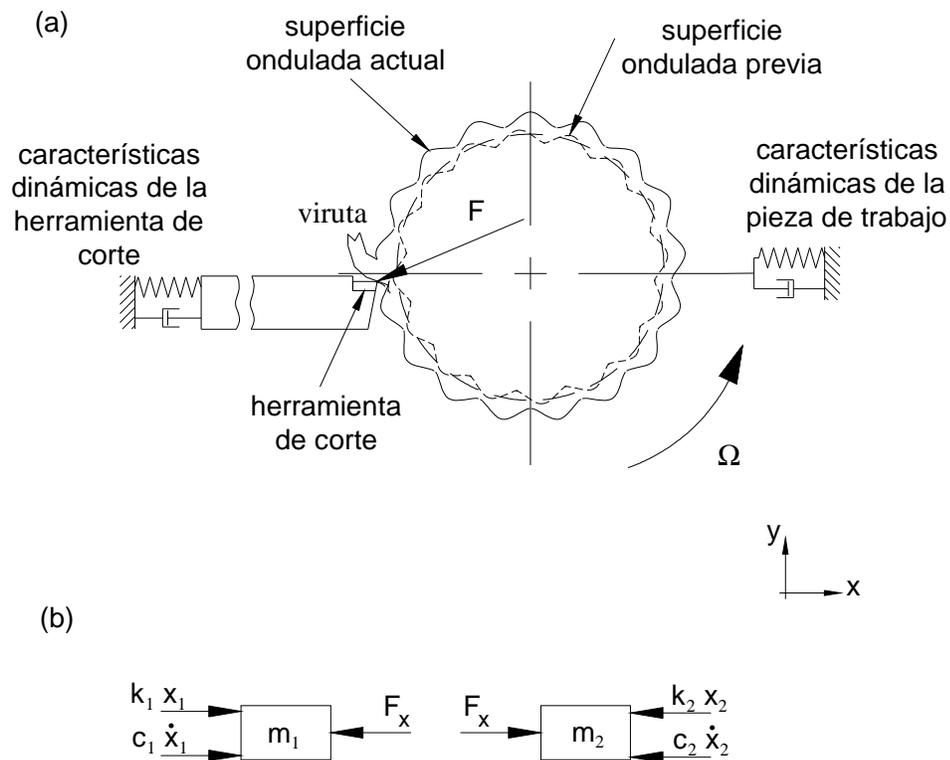


Figura 3.1: Diagrama de corte en el proceso de torneado, a) acoplamiento de la herramienta de corte y la pieza de trabajo, b) fuerzas dinámicas de un sistema equivalente de masas concentradas.

De las ecuaciones de equilibrio aplicadas en el esquema de la Figura 3.1b, se obtiene que:

$$\ddot{x}_1(t) + 2\zeta_1\omega_{n1}\dot{x}_1(t) + \omega_{n1}^2x_1(t) = -\frac{1}{m_1}F_x(t) \quad (3.1)$$

$$\ddot{x}_2(t) + 2\zeta_2\omega_{n2}\dot{x}_2(t) + \omega_{n2}^2x_2(t) = \frac{1}{m_2}F_x(t)$$

donde $\zeta_1, \omega_{n1}, m_1$ y $\zeta_2, \omega_{n2}, m_2$ representan la razón de amortiguamiento, la frecuencia natural angular y la masa modal de la herramienta de corte y la pieza de trabajo, respectivamente; mientras que $F_x(t)$ es la proyección de la fuerza de corte en la dirección de avance.

Con base en el modelo de corte ortogonal, la fuerza de corte es proporcional a la sección de viruta no deformada (Altintas, 2000). Entonces, las fuerzas dinámicas de corte y avance se expresan de la siguiente manera:

$$F_c(t) = K_c b f(t) \quad (3.2)$$

$$F_f(t) = K_f F_c(t) \quad (3.3)$$

Aquí, $f(t) = f_0 + (x_1(t) - x_2(t)) - (x_1(t - \tau) - x_2(t - \tau))$ es el avance dinámico en función del movimiento relativo actual: $(x_1(t) - x_2(t))$, y el movimiento relativo en la revolución previa: $(x_1(t - \tau) - x_2(t - \tau))$, donde τ es el retraso en el tiempo. Además, f_0 es el avance nominal, K_c y K_f son los coeficientes de corte, que se obtienen experimentalmente, y b es la profundidad de corte axial.

Expresando el modelo (3.1) notación matricial, resulta:

$$[I]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (3.4)$$

donde [I] es la matriz identidad, [C], [K] y [A] son las matrices de amortiguamiento, rigidez y del sistema, respectivamente:

$$[C] = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_{n1} & 0 \\ 0 & 2\zeta_2\omega_{n2} \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{n2}^2 \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} -m_2 & m_2 \\ m_1 & -m_1 \end{bmatrix},$$

Además:

$$\begin{aligned} \{F(t)\} &= \hat{b} \{f(t)\}, \\ \{f(t)\} &= \{\hat{f}\} + [A](\{x(t)\} - \{x_\tau(t)\}), \\ \{\hat{f}\} &= f_0 \begin{Bmatrix} -m_2 \\ m_1 \end{Bmatrix} \\ \{x(t)\} &= \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}, \\ \{x_\tau(t)\} &= \begin{Bmatrix} x_1(t - \tau) \\ x_2(t - \tau) \end{Bmatrix}, \\ \hat{b} &= \frac{K_f K_c}{m_1 m_2} b, \end{aligned}$$

3.1.3. Análisis de estabilidad

Llevando la ecuación (3.1-4) al dominio de la frecuencia, se obtiene:

$$(s^2 [I] + s[C] + [K])\{x(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.5)$$

donde $x(s)$ y $F(s)$ son los vectores de desplazamientos y de fuerzas en el dominio de la frecuencia, obtenidos mediante la transformada de Laplace con condiciones

iniciales establecidas en cero. Entonces, la solución de la ecuación (3.5) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\{x(s)\} = (s^2[I] + s[C] + [K])^{-1} \{F(s)\} = [B(s)]^{-1} \{F(s)\} \quad (3.6)$$

donde:

$$[B(s)]^{-1} = \frac{1}{\varphi_1(s)\varphi_2(s)} \begin{bmatrix} \varphi_2(s) & 0 \\ 0 & \varphi_1(s) \end{bmatrix},$$

$$\varphi_1(s) = s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2,$$

$$\varphi_2(s) = s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2}s + \omega_{n2}^2.$$

De las ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.6), se obtiene la siguiente expresión para el espesor dinámico de viruta en el dominio de la frecuencia:

$$\{f(s)\} = \frac{1}{s} [I - \hat{b}(1 - e^{-s\tau})][A][B(s)]^{-1} \{f\} = \frac{1}{s} [D]^{-1} \{f\} = \frac{\text{adj}[D]}{\det[D]} \frac{1}{s} \{f\} \quad (3.7)$$

donde:

$$[D] = \frac{1}{\varphi_1(s)\varphi_2(s)} \begin{bmatrix} (\varphi_1(s) + m_2\hat{b}(1 - e^{-s\tau}))\varphi_2(s) & -m_2\hat{b}(1 - e^{-s\tau})\varphi_1(s) \\ -m_1\hat{b}(1 - e^{-s\tau})\varphi_2(s) & (\varphi_2(s) + m_1\hat{b}(1 - e^{-s\tau}))\varphi_1(s) \end{bmatrix}.$$

Así, la estabilidad dinámica del modelo se obtiene de la ecuación característica del espesor dinámico de viruta en el dominio de la frecuencia, $f(s)$, la cual se encuentra cuando el determinante de la matriz $[D]$ es cero:

$$\det [I - \hat{b}(1 - e^{-s\tau})][A][B(s)]^{-1} = 0 \quad (3.8)$$

Expandiendo la ecuación característica (3.8), ésta se puede expresar en términos de los parámetros dinámicos como sigue:

$$\varphi_1(s)\varphi_2(s) + K_f K_c \frac{b}{m_1 m_2} (1 - e^{-s\tau})(m_1 \varphi_1(s) + m_2 \varphi_2(s)) = 0 \quad (3.9)$$

Aquí es importante mencionar que $\varphi_1(s)$ y $\varphi_2(s)$ son el inverso de las funciones de transferencia de la herramienta de corte y la pieza de trabajo, respectivamente. Si la herramienta de corte es suficientemente rígida y su frecuencia natural está lejos de la frecuencia natural de la pieza de trabajo, su función de transferencia es casi cero alrededor de la frecuencia de auto-inducción de la pieza de trabajo. Entonces, la ecuación (3.9) se puede simplificar de la siguiente manera:

$$1 + K_f K_c \frac{b}{m_2 \varphi_2(s)} (1 - e^{-s\tau}) = 0$$

la cual es similar a la ecuación característica del modelo de un grado de libertad presentado por Altintas (2000). Por lo tanto, el modelo propuesto es adecuado para analizar el problema tradicional de un grado de libertad o el problema de acoplamiento entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo.

Del criterio de estabilidad para sistemas lineales, las raíces de la ecuación característica deben ser puramente imaginarias para predecir la estabilidad crítica. De esta manera, el sistema se desempeñará en condiciones libres de auto-inducción siempre que la profundidad de corte sea menor que la profundidad de corte crítica, dada por:

$$b_{cr} = -\frac{m_1 m_2}{K_f K_c} \frac{\varphi_1(j\omega_c)\varphi_2(j\omega_c)}{(1 - e^{-j\omega_c\tau})(m_1 \varphi_1(j\omega_c) + m_2 \varphi_2(j\omega_c))} \quad (3.10)$$

donde ω_c es la frecuencia de auto-inducción y b_{cr} es la profundidad de corte crítica para un maquinado libre de vibración.

Despreciando la parte imaginaria de la ecuación (3.10), dado que la profundidad de corte debe ser un valor real, se obtiene que:

$$b_{cr} = -\frac{m_1 m_2 (1 - \cos \omega_c \tau) (m_1 g_2 [g_1^2 + h_1^2] + m_2 g_1 [g_2^2 + h_2^2]) + \sin \omega_c \tau (m_1 h_2 [g_1^2 + h_1^2] + m_2 h_1 [g_2^2 + h_2^2])}{K_f K_c 2(1 - \cos \omega_c \tau) [(m_1 g_1 + m_2 g_2)^2 + (m_1 h_1 + m_2 h_2)^2]} \quad (3.11)$$

donde g_1 , g_2 , h_1 y h_2 son las partes real e imaginaria de $\varphi_1(j\omega_c)$ y $\varphi_2(j\omega_c)$, respectivamente.

3.1.4. Cambio de fase de la función de transferencia estructural

Recordando que la parte imaginaria de la ecuación (3.10) debe ser cero, se deriva la siguiente ecuación:

$$\frac{\sin \omega_c \tau}{1 - \cos \omega_c \tau} = \frac{m_1 h_2 (g_1^2 + h_1^2) + m_2 h_1 (g_2^2 + h_2^2)}{m_1 g_2 (g_1^2 + h_1^2) + m_2 g_1 (g_2^2 + h_2^2)} \quad (3.12)$$

la cual representa el cambio de fase de la función de transferencia estructural, ψ , siguiendo la analogía de Altintas (2000). Usando identidades trigonométricas de medio ángulo, el cambio de fase se puede re-escribir de la siguiente forma:

$$\tan \psi = -\frac{\sin \omega_c \tau}{1 - \cos \omega_c \tau} = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\omega_c \tau}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\omega_c \tau}{2} - \frac{\pi}{2} - n\pi\right) \quad (3.13)$$

Es importante destacar que la ecuación (3.13) tiene soluciones múltiples debido al valor entero n , que representa la periodicidad π de la función tangente. Esta propiedad permite la construcción de los lóbulos múltiples en el diagrama de

estabilidad. En contraparte, analistas lineales como Tobias y Fishwick (1958), Tulsty y Polacek (1963), y Altintas (2000), se apoyaron en la hipótesis de un número supuesto de ondas generadas en la superficie para considerar los lóbulos múltiples en el diagrama de estabilidad. Por lo tanto, esta hipótesis se valida teóricamente por la propiedad de la ecuación (3.13).

La velocidad del husillo se puede calcular con las ecuaciones (3.12) y (3.13), en términos de la modulación debido al acoplamiento entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo, así como del cambio de fase estructural, de la siguiente manera:

$$\Omega = \frac{60\omega_c}{2\psi + (2n + 1)\pi} \quad (3.14)$$

donde el período de una revolución se calcula como: $\tau = 60/\Omega$, con Ω como la velocidad del husillo en revoluciones por minuto.

Finalmente, las ecuaciones (3.11) y (3.14) definen los límites de estabilidad del problema de acoplamiento entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo en el proceso de torneado. Las características dinámicas de ambos, la herramienta de corte y la pieza de trabajo, se deben identificar para obtener los diagramas de estabilidad del proceso e identificar las condiciones de corte óptimas.

3.1.5. Validación del modelo

Se investigó el acoplamiento entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo en torneado, por medio de un análisis de estabilidad lineal de un modelo acoplado de dos grados de libertad, para evaluar la influencia del movimiento relativo entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo como mecanismo de

generación de auto-inducción. Se desarrolló un método para predecir las vibraciones auto-inducidas en términos de las características dinámicas y los parámetros de corte del proceso de torneado. Los resultados numéricos del modelo desarrollado se compararon con los obtenidos por Chen y Tsao (2006) para un proceso de torneado sin contrapunto. Para esto se utilizaron diferentes combinaciones de condiciones dinámicas, tanto en la herramienta de corte como en la pieza de trabajo, las cuales se describen en el Cuadro 3.1 y los resultados se discuten en el siguiente capítulo.

Cuadro 3.1: Características dinámicas y condiciones de corte para evaluar la estabilidad en un proceso de torneado.

	Herramienta de corte			Pieza de trabajo			
Parámetros físicos (Chen y Tsao, 2006)	m = 50 kg			E = 180 x 10 ⁹ N/m ²			
	c = 2 x 10 ³ kg/s			ρ = 7600 kg/m ³			
	C = 2000 x 10 ⁶ N/m ² , θ = 70°			L ₁ = 0.500 m		D ₁ = 0.120 m	
	f ₀ = 0.1 mm/rev, K _f = 684 x 10 ⁶ N/m ²			L ₂ = 0.250 m		D ₂ = 0.070 m	
Características dinámicas	Condición No. 1	Condición No. 2	Condición No. 3	Condición No. 1 (L ₁ , D ₁)	Condición No. 2 (L ₁ , D ₂)	Condición No. 3 (L ₂ , D ₁)	Condición No. 4 (L ₂ , D ₂)
K x 10 ⁶ , N/m	20	7.465	385	43.972	5.092	351.778	40.732
ω _n , Hz	100.66	185	140	326.71	190.58	1306.82	762.31
ζ	0.032	0.032	0.032	0.025	0.025	0.025	0.025

La dinámica de la herramienta de corte está caracterizada por una masa, m, y un coeficiente de amortiguamiento viscoso, c. La frecuencia natural de la herramienta de corte para la condición No. 1 se calculó como la raíz cuadrada de su relación rigidez-masa, mientras que la razón de amortiguamiento se obtuvo del coeficiente de amortiguamiento viscoso, c, mediante la relación $\zeta = c / (2m\omega_n)$. Las otras condiciones de la herramienta de corte (No. 2 y No. 3) se calcularon asumiendo un portaherramientas esbelto y grueso, respectivamente, manteniendo la razón de amortiguamiento constante. Por otro lado, las características dinámicas para las condiciones de la pieza de trabajo se calcularon considerando la pieza de trabajo como una viga en voladizo de acero. Recordando que la rigidez y la frecuencia natural de una viga en voladizo se calculan por: $k = \frac{3EI}{L^3}$ y

$\omega_n = \frac{3.1516}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$, respectivamente, donde E es el módulo de Young, I es el

momento de inercia de la sección, L es la longitud entre el extremo libre y el extremo fijo, ρ es la densidad de masa, y A es el área de la sección transversal de la viga. Además, se tomaron en cuenta las posibles combinaciones de longitudes y diámetros indicados; la razón de amortiguamiento para las condiciones de la pieza de trabajo se estableció en 0.025, considerando que este valor varía entre 0.01 y 0.05 en máquinas-herramienta (Altintas, 2000). El coeficiente de corte en la dirección de avance, K_f , se calculó como la proyección del coeficiente de corte, C, y el ángulo de corte, θ .

3.2. ANÁLISIS DE PERTURBACIÓN DEL MODELO DÉBILMENTE NO LINEAL PARA PREDICCIÓN DE VIBRACIONES AUTO-INDUCIDAS.

3.2.1. Introducción

Como se ha discutido en capítulos anteriores, las vibraciones auto-inducidas en procesos de corte presentan comportamientos altamente no lineales y de tipo caótico. Se han identificado dos fuentes de inestabilidad básicas: bifurcaciones subcríticas Hopf asociadas a ciclos límite y fenómeno de salto, presentes en sistemas continuos; así como bifurcaciones de período duplicado en sistemas discretos, las cuales representan una ruta a comportamientos caóticos. En investigaciones recientes se han utilizado técnicas de dinámica no lineal y teoría de caos (Pratt, 1997; Kalmár-Nagy et al., 2001; Moon y Kalmár-Nagy, 2001; Mann et al., 2004), cuyos resultados han proporcionado un mejor entendimiento del fenómeno. Se han identificado diversas fuentes de la no linealidad (Wiercigroch y Budak, 2001), tales como: rigidez estructural, fricción variable, efecto termo mecánico, corte intermitente y pérdida de contacto. Sin embargo, no se ha propuesto un modelo unificador o una solución exacta debido a la complejidad del problema. Esto ha motivado el uso de métodos de perturbación para encontrar soluciones aproximadas de modelos no lineales, cuyos resultados teóricos concuerdan con datos experimentales, como en Pratt (1997), Hwang et al. (1997), Warminski et al. (2003), Wahi y Chatterjee (2005), entre otros. Estos estudios se enfocaron en el análisis de bifurcaciones subcríticas Hopf pero no se consideró la no linealidad de tipo estructural; salvo en Pratt (1997), quien analizó el modelo de Hanna y Tobias (1974) y atribuyó la presencia de bifurcaciones subcríticas al término no lineal de tipo cúbico.

En este capítulo se presenta el desarrollo de una solución aproximada para un modelo débilmente no lineal de un grado de libertad con términos cuadráticos y cúbicos, tanto en los términos de rigidez estructural como

regenerativos, propuesto para el análisis del proceso de torneado. El modelo propuesto tiene como propósito identificar el efecto de la rigidez no lineal en las vibraciones auto-inducidas durante el proceso de corte. La solución se construyó usando un método de perturbación conocido como método de escalas múltiples, de manera que se obtuvieron ecuaciones explícitas para la amplitud y la fase de la respuesta. El sistema dinámico se representó en una forma normal, de la cual se establecieron las condiciones de inestabilidad debido a bifurcaciones subcríticas Hopf, en términos de los eigenvalores del sistema. Se analizó el efecto de los términos estructurales en la estabilidad del sistema mediante diagramas de bifurcación y espacios de fase. Una contribución importante de este análisis es la representación de la histéresis del sistema en las curvas de estabilidad, a través de nuevos lóbulos que representan la recuperación de la estabilidad.

3.2.2. Análisis de perturbación de un modelo débilmente no lineal

El proceso de torneado se puede representar mediante un modelo de un grado de libertad, como se muestra en la Figura 3.2. Si se representa la no linealidad de tipo estructural mediante términos polinomiales de tipo cuadrático y cúbico, como lo propusieron Hanna y Tobias (1974), se obtiene un modelo débilmente no lineal (Nayfeh y Mook, 1979) de la siguiente forma:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) + \beta_1x(t)^2 + \beta_2x(t)^3 = \frac{1}{m}\Delta F(x,t) \quad (3.15)$$

donde ζ es la razón de amortiguamiento, ω_n es la frecuencia natural angular, y m es la masa modal del sistema, los cuales se pueden obtener de un análisis modal experimental (Altintas, 2000). Adicionalmente, los términos β_1 y β_2 representan las no linealidades estructurales.

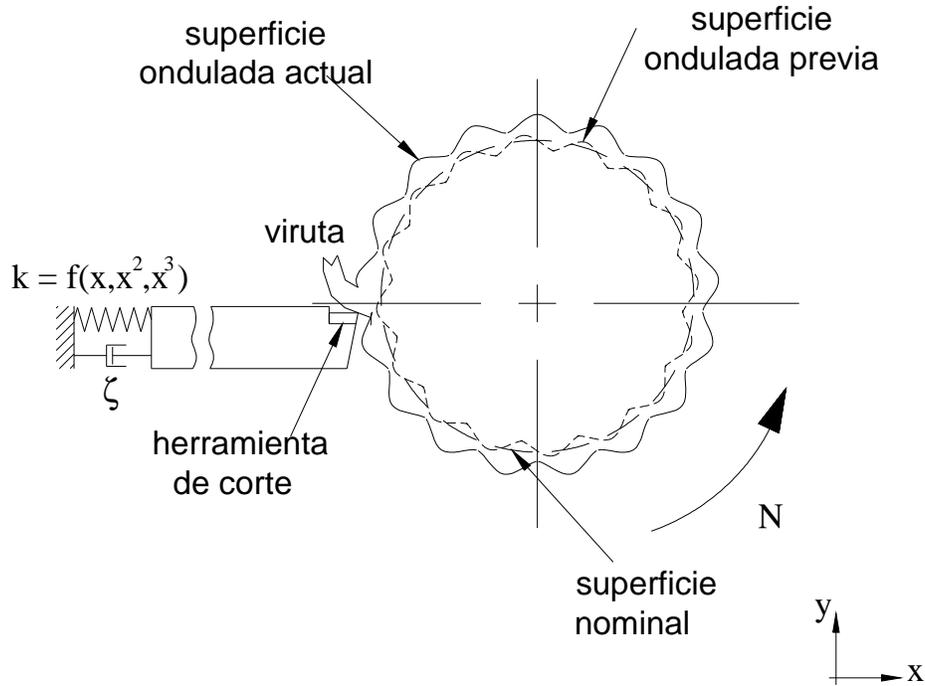


Figura 3.2: Modelo de un grado de libertad para el proceso de torneado con rigidez estructural no lineal.

Por otro lado, la fuerza de corte se considera como una función exponencial que obedece a la regla de 3/4 (Tlusty, 2000):

$$F(x, t) = \frac{K}{m} b h(t)^{3/4} = \frac{K}{m} w (h_0 + x(t - \tau) - x(t))^{3/4} \quad (3.16)$$

donde b es la profundidad de corte, $h(t)$ es el espesor dinámico de viruta en términos del espesor nominal h_0 , la oscilación actual, $x(t)$, y la oscilación previa, $x(t - \tau)$, con un retraso o tiempo empleado en una revolución del husillo, τ . Entonces, la variación de la fuerza de corte, $\Delta F(x, t)$, se puede aproximar mediante una serie de Taylor de tercer grado con respecto a la variación del espesor de la viruta, como sigue:

$$\frac{K}{m} b (h(t)^{3/4} - h_0^{3/4}) = \frac{K}{m} b h_0^{3/4} [\alpha_1 (x_\tau - x) + \alpha_2 (x_\tau - x)^2 + \alpha_3 (x_\tau - x)^3 + \dots] \quad (3.17)$$

donde:

$$\alpha_1 = \frac{3}{4h_0}, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{32h_0^2}, \quad \alpha_3 = \frac{5}{128h_0^3}, \quad x_\tau = x(t - \tau), \text{ y } x = x(t).$$

Sustituyendo la expansión de la función del espesor dinámico de viruta (3.17) en la ecuación (3.15), se obtiene la siguiente expresión:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x + \beta_1x^2 + \beta_2x^3 = -\frac{K}{m}bh_0^{3/4}[\alpha_1(x - x_\tau) - \alpha_2(x - x_\tau)^2 + \alpha_3(x - x_\tau)^3 + \dots] \quad (3.18)$$

Empleando el método de escalas múltiples en osciladores débilmente no lineales, como lo proponen Pratt (1997) y Nayfeh y Mook (1979), x se expresa como una expansión de tercer orden de la siguiente manera:

$$x = \varepsilon x_1(T_0, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_2) + \varepsilon^3 x_3(T_0, T_2) + \dots \quad (3.19)$$

donde $T_0 = t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, y ε es un parámetro pequeño que representa la escala de tiempo.

Por consistencia con la expansión de la ecuación (3.19), la profundidad de corte también se afecta por un esquema de perturbación como sigue:

$$b = b_{cr}(1 + \varepsilon^2) \quad (3.20)$$

donde b_{cr} es la profundidad de corte crítica que precede a la aparición de las vibraciones auto-inducidas. El parámetro ε también se puede utilizar para expresar perturbaciones pequeñas en el proceso, ya sea variaciones en las propiedades mecánicas del material o variaciones en la profundidad de corte.

Para expresar la ecuación (3.18) en función del esquema de escalas múltiples, se calculan la primera y segunda derivadas de x:

$$\dot{x} = \varepsilon D_0 x_1 + \varepsilon^2 D_0 x_2 + \varepsilon^3 (D_2 x_1 + D_0 x_3) + \dots \quad (3.21)$$

$$\ddot{x} = \varepsilon D_0^2 x_1 + \varepsilon^2 D_0^2 x_2 + \varepsilon^3 (D_0^2 x_3 + 2D_2 D_0 x_1) + \dots \quad (3.22)$$

donde el operador D se define como: $D_i^j = \frac{\partial^j}{\partial T_i^j}$.

Sustituyendo las ecuaciones (3.19) – (3.22) en la ecuación (3.18) y despreciando términos de alto orden, se obtiene la siguiente ecuación diferencial expandida:

$$\begin{aligned} & \varepsilon D_0^2 x_1 + \varepsilon^2 D_0^2 x_2 + \varepsilon^3 (D_0^2 x_3 + 2D_2 D_0 x_1) \\ & + 2\zeta\omega_n (\varepsilon D_0 x_1 + \varepsilon^2 D_0 x_2 + \varepsilon^3 (D_2 x_1 + D_0 x_3)) \\ & + \omega_n^2 (\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3) + \beta_1 (\varepsilon^2 x_1^2 + 2\varepsilon^3 x_1 x_2) + \beta_2 \varepsilon^3 x_1^3 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$= \frac{K}{m} h_0^{3/4} b_{cr} (1 + \varepsilon^2) [-\alpha_1 \{ \varepsilon (x_1 - x_{1\tau}) + \varepsilon^2 (x_2 - x_{2\tau}) + \varepsilon^3 (x_3 - x_{3\tau}) \} \\ + \alpha_2 \{ \varepsilon^2 (x_1 - x_{1\tau})^2 + 2\varepsilon^3 (x_1 - x_{1\tau})(x_2 - x_{2\tau}) \} \\ - \alpha_3 \varepsilon^3 (x_1 - x_{1\tau})^3]$$

Separando potencias de orden similar para ε en la ecuación (3.23), se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales con retraso en el tiempo:

Orden ε :

$$D_0^2 x_1 + 2\zeta\omega_n D_0 x_1 + \omega_n^2 x_1 + \alpha_1 \hat{K}(x_1 - x_{1\tau}) = 0 \quad (3.24)$$

Orden ε^2 :

$$D_0^2 x_2 + 2\zeta\omega_n D_0 x_2 + \omega_n^2 x_2 + \alpha_1 \hat{K}(x_2 - x_{2\tau}) = \alpha_2 \hat{K}(x_1 - x_{1\tau})^2 - \beta_1 x_1^2 \quad (3.25)$$

Orden ε^3 :

$$\begin{aligned} & D_0^2 x_3 + 2\zeta\omega_n D_0 x_3 + \omega_n^2 x_3 + \alpha_1 \hat{K}(x_3 - x_{3\tau}) \\ & = -2D_2 D_0 x_1 - 2\zeta\omega_n D_2 x_1 + \hat{K}(2\alpha_2(x_1 - x_{1\tau})(x_2 - x_{2\tau}) - \alpha_3(x_1 - x_{1\tau})^3) \\ & \quad - \alpha_1 \hat{K}(x_1 - x_{1\tau}) - 2\beta_1 x_1 x_2 - \beta_2 x_1^3 \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde: $\hat{K} = \frac{K}{m} b_{cr} h_0^{3/4}$.

Una vez que se aplicó el método de perturbación, se puede construir una solución aproximada resolviendo el conjunto de ecuaciones diferenciales (3.24) – (3.26). La solución aproximada permitirá predecir la amplitud de la respuesta; así mismo, se podrá evaluar el efecto de los parámetros no lineales en las condiciones de estabilidad del sistema.

3.2.3. Construcción de una solución analítica.

Como primera aproximación, una solución general para la ecuación (3.24) se puede expresar de la siguiente manera:

$$x_1 = A(T_2)e^{j\omega_c T_0} + \bar{A}(T_2)e^{-j\omega_c T_0} \quad (3.27)$$

y

$$x_{1\tau} = A(T_2)e^{j\omega_c(T_0-\tau)} + \bar{A}(T_2)e^{-j\omega_c(T_0-\tau)} \quad (3.28)$$

donde A es una función de amplitud de la respuesta, mientras que ω_c es la frecuencia de auto-inducción cuando se pierde la estabilidad.

Mediante la sustitución de las ecuaciones (3.27) y (3.28) en la ecuación (3.25), se construyen condiciones de solubilidad de manera que es posible encontrar soluciones sucesivas para las ecuaciones (3.25) y (3.26).

Una solución particular para la ecuación diferencial no homogénea (3.25) se puede expresar de la siguiente manera

$$x_2 = C_1 e^{2j\omega_c T_0} + C_2 e^{-2j\omega_c T_0} + C_3 \quad (3.29)$$

De manera similar al caso anterior:

$$x_2 - x_{2\tau} = C_1 e^{2j\omega_c T_0} (1 - e^{-2j\omega_c \tau}) + C_2 e^{-2j\omega_c T_0} (1 - e^{2j\omega_c \tau}) + C_3 \quad (3.30)$$

donde C_1 , C_2 , y C_3 son funciones de T_2 , las cuales se pueden obtener al sustituir la ecuación (3.29) en la ecuación (3.25) e igualando términos semejantes. Entonces:

$$C_1 = \frac{\alpha_2 \hat{K} (1 - e^{-j\omega_c \tau})^2 - \beta_1}{\omega_n^2 - 4\omega_c^2 + \alpha_1 \hat{K} (1 - e^{-2j\omega_c \tau}) + j4\zeta \omega_n \omega_c} A^2 \quad (3.31)$$

$$C_2 = \frac{\alpha_2 \hat{K} (1 - e^{j\omega_c \tau})^2 - \beta_1}{\omega_n^2 - 4\omega_c^2 + \alpha_1 \hat{K} (1 - e^{2j\omega_c \tau}) - j4\zeta \omega_n \omega_c} \bar{A}^2 = \bar{C}_1 \quad (3.32)$$

y

$$C_3 = 2 \frac{\alpha_2 \hat{K} (1 - e^{-j\omega_c \tau})(1 - e^{j\omega_c \tau}) - \beta_1}{\omega_n^2 + \alpha_1 \hat{K}} A \bar{A} \quad (3.33)$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (3.27), (3.28) y (3.29) en la ecuación (3.26) y eliminando términos seculares de la forma $e^{j\omega_c T_0}$ que conduzcan a soluciones inestables, se obtiene la siguiente condición de solubilidad:

$$\begin{aligned}
& -2(\zeta\omega_n + j\omega_c)\dot{A} \\
& + \hat{K} \left(2\alpha_2 \left\{ C_1 \bar{A} (1 - e^{j\omega_c \tau}) (1 - e^{-2j\omega_c \tau}) + C_3 A (1 - e^{-j\omega_c \tau}) \right\} - 3\alpha_3 A^2 \bar{A} (1 - e^{-j\omega_c \tau})^2 (1 - e^{j\omega_c \tau}) - \alpha_1 A (1 - e^{-j\omega_c \tau}) \right) \\
& - 2\beta_1 (C_1 \bar{A} + C_3 A) - 3\beta_2 A^2 \bar{A} = 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Por conveniencia del proceso de solución, se introduce la siguiente transformación polar:

$$A = \frac{1}{2} a e^{j\varphi} \tag{3.35}$$

donde a y φ son funciones reales de T_2 . Entonces la ecuación (3.34) se convierte en una función compleja donde sus partes real e imaginaria se pueden expresar como sigue:

$$\zeta\omega_n a' - \omega_c a\varphi' = c_1 a^3 - c_2 a \tag{3.36}$$

y

$$\omega_c a' + \zeta\omega_n a\varphi' = c_3 a^3 - c_4 a \tag{3.37}$$

donde los coeficientes c_{1-4} se definen en el Apéndice A.1.

Resolviendo las ecuaciones (3.36) y (3.37) para a' y $a\varphi'$, el sistema dinámico se puede expresar en la siguiente forma normal:

$$a' = \frac{(\zeta\omega_n c_1 + \omega_c c_3) a^3 - (\zeta\omega_n c_2 + \omega_c c_4) a}{\zeta^2 \omega_n^2 + \omega_c^2} \tag{3.38}$$

$$a\varphi' = \frac{(\zeta\omega_n c_3 - \omega_c c_1) a^3 - (\zeta\omega_n c_4 - \omega_c c_2) a}{\zeta^2 \omega_n^2 + \omega_c^2} \tag{3.39}$$

Las expresiones analíticas para la amplitud y la fase de la vibración del sistema se pueden obtener de la integración de las ecuaciones (3.38) y (3.39). Puesto que la ecuación (3.38) es una de tipo Bernoulli, se puede resolver empleando la transformación: $a(t)^{1-n} = u(t)$. De esta manera, la ecuación diferencial no lineal se reduce a una ecuación diferencial lineal para $u(t)$ con una solución exacta en forma de ecuación integral. Una vez obtenida la solución del problema lineal, la solución de la ecuación (3.38) se obtiene empleando nuevamente la transformación propuesta, de lo cual se obtiene que

$$a = \left(\frac{\zeta \omega_n c_2 + \omega_c c_4}{\zeta \omega_n c_1 + \omega_c c_3} \right)^{1/2} \quad (3.40)$$

Ahora, la ecuación (3.39) se puede integrar empleando la ecuación (3.40) y recordando que a y φ son funciones reales de T_2 . Entonces:

$$\varphi = \frac{1}{\zeta^2 \omega_n^2 + \omega_c^2} \left[(\zeta \omega_n c_3 - \omega_c c_1) a^2 - (\zeta \omega_n c_4 - \omega_c c_2) \right] \varepsilon^2 t \quad (3.41)$$

De la ecuación (3.41) se puede ver que la fase depende de la amplitud de la vibración, lo cual es característico de sistemas no lineales. Por lo tanto, la solución analítica propuesta en la ecuación (3.19) se puede construir usando las ecuaciones ya descritas, la cual debe ser válida para valores pequeños de ε :

$$\begin{aligned} x(t) = & \varepsilon a \cos(\omega_c t + \varphi) \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^2 a^2 \left[\frac{1}{\gamma^2 + \delta^2} (C_{IR} \cos 2(\omega_c t + \varphi) - C_{II} \sin 2(\omega_c t + \varphi)) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega_n^2 + \alpha_1 \hat{K}} (2\alpha_2 \hat{K} (1 - \cos \omega_c \tau) - \beta_1) \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde los coeficientes C_{IR} y C_{II} también se definen en el Apéndice A.1.

3.2.4. Función de respuesta a la frecuencia

La función de respuesta a la frecuencia es la amplitud de la respuesta en términos de las características dinámicas del sistema, con respecto a la frecuencia del mismo. Por lo tanto, la amplitud de la respuesta del sistema dinámico en estado estable se puede obtener de las ecuaciones (3.38) y (3.39) cuando $a' = \varphi' = 0$, lo cual corresponde a los puntos fijos del sistema dinámico. Esto es:

$$a_2 = \left(\frac{\zeta \omega_n c_4 - \omega_c c_2}{\zeta \omega_n c_3 - \omega_c c_1} \right)^{1/2} \quad (3.43)$$

Además, resolviendo las ecuaciones (3.38) y (3.39) se puede obtener una nueva ecuación para la respuesta:

$$a_3 = \left(\frac{(\zeta \omega_n + \omega_c) c_2 \pm (\zeta \omega_n - \omega_c) c_4}{(\zeta \omega_n + \omega_c) c_1 \pm (\zeta \omega_n - \omega_c) c_3} \right)^{1/2} \quad (3.44)$$

Puesto que las ecuaciones (3.40), (3.43) y (3.44) representan soluciones válidas para la amplitud de la respuesta, se espera la presencia de histéresis en la función de respuesta a la frecuencia.

3.2.5. Análisis de estabilidad y el fenómeno de salto

La estabilidad del sistema dinámico en dos dimensiones, definido por las ecuaciones (3.38) y (3.39), se puede determinar a partir de la naturaleza de los eigenvalores de su Jacobiano (Strogatz, 2004). Si un sistema dinámico general se representa en la siguiente forma normal:

$$r' = \mu r \pm r^3 \quad (3.45)$$

$$\theta' = \omega + br^2 \quad (3.46)$$

donde r y θ representan la amplitud y la fase de la respuesta, respectivamente. Los eigenvalores del Jacobiano del sistema están dados por $\lambda = \mu \pm j\omega$. Aquí, μ controla la estabilidad del punto fijo en el origen, mientras que ω proporciona la frecuencia de oscilaciones infinitesimales. Entonces, el sistema es estable siempre que $\text{Re}(\lambda) < 0$ para ambos eigenvalores, los cuales pueden ser reales y negativos o complejos conjugados con parte real negativa. Puesto que el modelo original de la ecuación (3.18) es autónomo, existen dos posibilidades para la pérdida de estabilidad: bifurcaciones subcríticas (Hopf), cuando el par de eigenvalores complejos cruza el eje imaginario del plano complejo hacia la derecha; o bifurcaciones tipo nodo silla, cuando un eigenvalor real y negativo cruza el eje imaginario en cero (Strogatz, 1994; Guckenheimer y Holmes, 1983). Previo a la bifurcación, cuando $\mu < 0$, las trayectorias permanecen entre un ciclo límite inestable y un punto fijo estable en el origen, ambos rodeados por un ciclo límite de gran amplitud. A medida que el parámetro de bifurcación μ tiende a cero, el ciclo límite inestable encoge hasta reducir su amplitud de manera que el origen se vuelve inestable y las trayectorias saltan hacia el ciclo límite estable de gran amplitud. Puesto que el origen ahora es inestable, las oscilaciones de gran amplitud no se pueden eliminar con sólo disminuir el parámetro μ a cero, sino que ahora es necesario llevar el parámetro de bifurcación por debajo de cero. Este comportamiento refleja la presencia de histéresis en el sistema, también conocido como fenómeno de salto, típico de problemas de ingeniería que involucran fricción (Nayfeh y Mook, 1979) y rigidez o excitación variable (González-Brambila, 2006).

3.3. CARACTERIZACIÓN DE NO LINEALIDADES DE TIPO ESTRUCTURAL A PARTIR DE LA MEDICIÓN DE LA RESPUESTA EN PROCESOS DE MAQUINADO.

3.3.1. Identificación del parámetro cúbico en modelo débilmente no lineal con excitación regenerativa

Del análisis de perturbación realizado al modelo dinámico con no linealidades de tipo estructural y regenerativo de la Ecuación (3.15), se obtuvo una solución aproximada de la forma:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \varepsilon a \cos(\omega_c t + \varphi) \\
 & + \frac{1}{2} \varepsilon^2 a^2 \left[\frac{1}{\gamma^2 + \delta^2} (C_{IR} \cos 2(\omega_c t + \varphi) - C_{II} \sin 2(\omega_c t + \varphi)) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\omega_n^2 + \alpha_1 \hat{K}} (2\alpha_2 \hat{K} (1 - \cos \omega_c \tau) - \beta_1) \right] \quad (3.42) \text{ Rep.}
 \end{aligned}$$

donde ε es un parámetro pequeño, a es la amplitud de la respuesta y los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \delta, \gamma, \varphi, \omega_n, \omega_c, \tau$, y \hat{K} ya fueron definidos en su momento. A su vez, la amplitud de la respuesta se obtuvo del análisis de puntos fijos de la forma normal del sistema dinámico, dada por las ecuaciones (3.38) y (3.39). Esto es:

$$a = \left(\frac{\zeta \omega_n c_2 + \omega_c c_4}{\zeta \omega_n c_1 + \omega_c c_3} \right)^{1/2} \quad (3.40) \text{ Rep.}$$

$$a_2 = \left(\frac{\zeta \omega_n c_4 - \omega_c c_2}{\zeta \omega_n c_3 - \omega_c c_1} \right)^{1/2} \quad (3.43) \text{ Rep.}$$

donde los coeficientes c_{1-4} se definieron en el Apéndice A.1 como expresiones analíticas que dependen de los parámetros dinámicos y de proceso del sistema, entre ellos de los parámetros de rigidez no lineal β_1 y β_2 .

De los resultados obtenidos en el análisis de perturbación, se encontró que el comportamiento no lineal de histéresis en la respuesta dinámica está influido principalmente por el parámetro cúbico β_2 . Si se considera que la amplitud del sistema se puede obtener de manera experimental, entonces es posible encontrar el valor del parámetro no lineal β_2 a partir de las funciones de respuesta a la frecuencia (3.40) y (3.43). Esto es, se puede encontrar una expresión analítica para el parámetro cúbico β_2 en términos de la amplitud de la respuesta y los coeficientes c_{2-4} , definidos en el Apéndice A.1, los cuales son independientes de β_2 y además $\beta_1 = 0$.

De la ecuación (3.38) se obtiene la siguiente expresión analítica para β_2 :

$$\beta_{12} = \frac{8}{3} \left[\frac{\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)}{\gamma^2 + \delta^2} (\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau) \{ \delta \sin \omega_c \tau (1 + 2 \cos \omega_c \tau) + \gamma (1 + \cos \omega_c \tau) (1 - 2 \cos \omega_c \tau) \}) \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)}{\omega_n^2 + \alpha_1 \hat{K}} \alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau) - \frac{3}{4} \alpha_3 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)^2 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\omega_c}{\zeta \omega_n} c_4 + c_2 \right) + \frac{\omega_c}{\zeta \omega_n} c_3 \right] \quad (3.47)$$

Así mismo, de la ecuación (3.43) se obtiene:

$$\beta_{22} = \frac{8}{3} \left[\frac{\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)}{\gamma^2 + \delta^2} (\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau) \{ \delta \sin \omega_c \tau (1 + 2 \cos \omega_c \tau) + \gamma (1 + \cos \omega_c \tau) (1 - 2 \cos \omega_c \tau) \}) \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)}{\omega_n^2 + \alpha_1 \hat{K}} \alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau) - \frac{3}{4} \alpha_3 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)^2 + \frac{1}{a^2} \left(\zeta \frac{\omega_n}{\omega_c} c_4 - c_2 \right) - \zeta \frac{\omega_n}{\omega_c} c_3 \right] \quad (3.48)$$

Las ecuaciones (3.47) y (3.48) muestran que es factible encontrar el valor del parámetro no lineal del término cúbico a partir de las características dinámicas, los parámetros de proceso y la respuesta del sistema. Esto significa que es necesario medir la respuesta de forma experimental durante el proceso de corte.

Debido a que los términos no lineales tienen efecto en condiciones de inestabilidad, la medición de la respuesta se deberá hacer en tales condiciones, es decir, alrededor de la frecuencia natural del sistema. Esto sugiere que se debe construir una curva de respuesta a la frecuencia de manera experimental; la frecuencia de excitación se debe variar alrededor de la frecuencia natural y se debe registrar la amplitud de la respuesta correspondiente.

3.4. IDENTIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE VIBRACIONES AUTO-INDUCIDAS MEDIANTE ANÁLISIS DE SEÑALES

3.4.1. Medición de respuesta dinámica en procesos de maquinado

La experimentación y monitoreo de señales durante el maquinado es parte esencial en el análisis de vibraciones auto-inducidas, ya sea para implementar estrategias de control (Pratt, 1997; Ganguli, 2005; Sims et al., 2005) o para validar modelos analíticos propuestos. Algunos de los problemas más importantes en el monitoreo de señales es la selección del transductor adecuado y el método de análisis.

Puesto que las características físicas que indican la presencia vibraciones auto-inducidas son grandes amplitudes de las fuerzas de corte y de vibración, se han utilizado transductores de fuerza o dinamómetros, así como transductores de desplazamiento, velocidad o aceleración como dispositivos de medición. Un método alternativo para la estimación indirecta de la fuerza de corte es la medición del consumo de la corriente eléctrica para el control de la potencia y el torque del motor del husillo. Estas técnicas son muy prácticas puesto que requieren de un mínimo de instrumentación; sin embargo, requieren de un conocimiento profundo del proceso para establecer niveles o umbrales de referencia como indicadores de la presencia del fenómeno, de manera que su generalización a otros procesos es limitada. Los dinamómetros también son muy útiles pero presentan limitaciones significativas, tales como: flexibilización del sistema de maquinado por un incremento en la longitud libre de la herramienta de corte, dependencia de la sensibilidad o ancho de banda del sensor de los requerimientos del corte, y dificultades para su montaje en los husillos. Por otro lado, los acelerómetros tienen una mayor aceptación debido a su gran variedad, bajo costo y mayor contenido de información en su señal, con respecto a transductores de desplazamiento y velocidad. Su mayor desventaja es la orientación correcta

durante su montaje y, al igual que los dinamómetros, su dificultad para colocarse en dispositivos giratorios. Una técnica de medición de vibraciones que resuelve parte de las desventajas mencionadas es el uso de micrófonos unidireccionales para medir la presión acústica generada por las vibraciones del proceso de corte (Delio et al., 1992; Schmitz, 2003). Este método toma en cuenta que el sonido emitido por el proceso de corte es proporcional a los desplazamientos de la herramienta de corte (Smith, 1987). La desventaja principal del uso de micrófonos es su susceptibilidad al ruido ambiental; sin embargo, su uso es práctico y efectivo como técnica de monitoreo, siempre que se tomen en consideración aspectos de posición, orientación, razón de muestreo y análisis (Delio et al., 2004).

Existen equipos comerciales para análisis y monitoreo de vibraciones auto-inducidas que utilizan técnicas basadas en análisis espectral de señales obtenidas con transductores de desplazamiento, aceleración o micrófonos unidireccionales, tales como *Cut Pro* (Cut Pro, 2007) y *Harmonizer* (Metalmax, 2007), entre otros. En el Apéndice A.4 de este documento se describe el desarrollo de un analizador de vibraciones auto-inducidas, desarrollado en CIATEQ, con módulos de análisis predictivo, análisis modal experimental, monitoreo de vibraciones con el uso de acelerómetros y micrófono, y análisis no lineal basado en el modelo de Duffing para vibraciones auto-inducidas.

3.4.2. Identificación de no linealidad en las vibraciones auto-inducidas.

Las vibraciones auto-inducidas son señales complejas con componentes armónicos lineales y no lineales; es por ello que los métodos de análisis espectral no son suficientes para mostrar comportamientos transitorios y no lineales. Esto ha motivado el uso de técnicas modernas basadas en análisis no lineal como la transformada de ondeletas o *wavelets* (Yoon y Chin, 2005; González-Brambila et al., 2006), y recientemente el uso de técnicas de análisis fractal, como el análisis R/S (Vela-Martínez et al., 2008c). Como resultado, se obtiene una mayor

sensibilidad con la identificación de comportamientos transitorios y no lineales por medio de varios parámetros.

3.4.3. Análisis fractal R/S.

El análisis R/S es un método estadístico del análisis fractal, empleado para detectar la presencia de correlaciones de rango largo en datos históricos o secuencias de tiempo. El método, propuesto por Hurst (1965), está orientado a descubrir la presencia o ausencia de estructuras de correlación en series de tiempo. El objetivo es estimar un exponente de escalamiento fractal, conocido como exponente de Hurst, sobre un cierto rango de escalas de tiempo. Este análisis compara la correlación en series de tiempo medida a diferentes escalas de tiempo. Si existe correlación, entonces la dinámica de escalas de tiempo corto están relacionadas con aquéllas escalas de tiempo más largo. Las técnicas modernas para estimar el exponente de Hurst están basadas en matemáticas fractales aplicadas a una gran diversidad de datos, incluyendo modelado de presas (Feder, 1988), mercados y datos financieros (Peters, 1996; Qian y Rasheed, 2004; Alvarez-Ramirez, 2002; Alvarez-Ramirez et al. 2002), entre otros.

La importancia de detectar correlaciones en series de tiempo radica en el hecho de que éstas pueden indicar la presencia de mecanismos determinísticos que controlen la dinámica de procesos básicamente estocásticos.

Estimación del exponente de Hurst

Dada una serie de datos, el análisis R/S se basa en dos factores: el rango R , el cual es la diferencia entre los valores mínimo y máximo acumulados, y la desviación estándar S , sobre una longitud de datos dentro del registro completo. Hurst (1965) encontró que la relación R/S de una gran cantidad de fenómenos físicos, obedecía a la siguiente relación empírica:

$$\frac{R}{S} = \left(\frac{1}{2}\tau\right)^H \quad (3.49)$$

donde τ es la longitud de tiempo (*span time*) o escala de tiempo, y H es el exponente de Hurst. Enseguida se describe el algoritmo básico para estimar el exponente de Hurst de una serie en el tiempo $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ con una escala de tiempo $\tau \leq n$ (Qian y Rasheed, 2004), el cual también se ilustra en la Figura 3.3a:

a) Calcular el valor medio de los datos

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \quad (3.50)$$

b) Calcular las desviaciones para un conjunto de datos con tamaño $\tau \leq n$, con respecto a la media

$$Y_j = X_j - \bar{x} \quad j=1,2,\dots,\tau \quad (3.51)$$

c) Calcular las desviaciones acumuladas

$$Z_\tau = \sum_{j=1}^{\tau} Y_j \quad (3.52)$$

d) Calcular el rango R

$$R_\tau = \max \{Z_\tau\} - \min \{Z_\tau\} \quad (3.53)$$

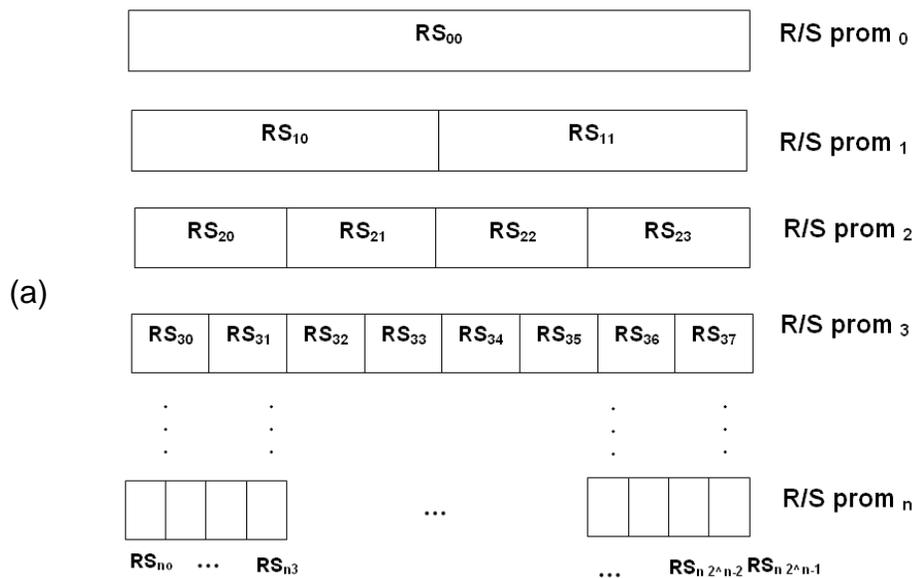
e) Calcular la desviación estándar S:

$$S_\tau = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} [X_j - u]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.54)$$

donde u es el valor medio de X_1 a X_τ .

f) Calcular el rango re-escalado $(R/S)_j$ de la serie como in promedio de la razón R/S para múltiples regiones. La escala de tiempo τ se separa en regiones mediante un proceso de biparticiones subsecuente. La razón R/S se calcula primero para el conjunto completo de datos dentro de la escala de tiempo τ , al cual se conoce como RS_0 . Posteriormente, el conjunto de datos se divide a la mitad y se calcula la razón R/S para cada una de las mitades, llamadas regiones; esos dos valores se promedian para obtener la razón RS_1 . Este proceso continúa dividiendo cada una de las regiones previas y calculando las razones correspondientes RS_2, RS_3 , etc. para cada nivel de división. El proceso se detiene cuando las regiones son demasiado pequeñas, de manera que se deben evitar tamaños de datos menores a diez.

g) Estimar el exponente de Hurst. Con el proceso descrito en el inciso anterior se crea un vector de puntos $(\log x, \log y)$, donde $\log x$ es el logaritmo del tamaño de la región de datos y $\log y$ es el logaritmo del valor RS_j , siendo irrelevante la base del logaritmo usado. Entonces, el exponente de Hurst es la pendiente de la línea ajustada, como se ilustra en la Figura 3.3b, la cual se puede obtener mediante un ajuste de mínimos cuadrados.



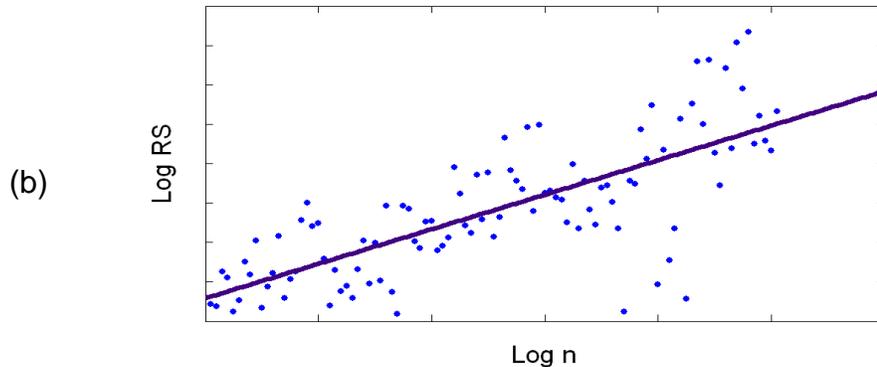


Figura 3.3: Algoritmo para la estimación del exponente de Hurst: a) Proceso de subdivisión de los datos, b) Ajuste de la curva log x- log y.

Con el objetivo de obtener mayor detalle en el análisis presentado en esta investigación, el algoritmo básico descrito arriba se modifica de la siguiente manera. El registro completo de datos se divide en cajas de tamaño m , tal que $\tau \leq m \leq n$; el análisis comienza con los primeros datos originales y se estima el exponente de Hurst correspondiente; posteriormente, la caja se desplaza a lo largo de la serie sobre una escala de tiempo, sin traslape. Este proceso se repite dentro del registro completo de datos, de esta manera se obtiene un exponente de Hurst para cada caja de datos.

Los valores del exponente de Hurst varían entre 0 y 1, y su valor es una medida de la predecibilidad de la serie. Un valor de 0.5 indica ausencia de correlación entre algún dato y otro dato, ya sea futuro o precedente, por lo tanto el comportamiento es completamente impredecible y se puede asociar con un proceso completamente aleatorio. Un valor del exponente de Hurst entre 0.5 y 1 indica un comportamiento persistente o de autocorrelación positiva, donde la serie muestra tendencia, lo cual significa que si hay un incremento en los pasos previo y actual, probablemente habrá un incremento del paso actual al siguiente. Lo mismo aplica para datos decrecientes. Un valor del exponente de Hurst entre 0 y 0.5 corresponde a una serie con comportamiento anti-persistente o de correlación negativa; es decir, un incremento será seguido por un decremento y viceversa. En el límite, cuando H se aproxima a cero, el comportamiento es totalmente predecible y parece periódico.

3.4.4. Señales de audio de un proceso de fresado

Se realizaron pruebas de fresado con una máquina fresadora CNC modelo 1259C Arrow marca CINCINNATI con motor de 12 kW, un cortador recto de 4 filos de 12.7 mm x 25.4 mm, y un bloque de Aluminio 6061 de 50.8 mm x 203.2 mm x 304.8 mm sujetado por una prensa sobre la mesa de trabajo. Primero se obtuvieron experimentalmente los parámetros modales del sistema con una prueba de impacto, como se ilustra en la Figura 3.4. Para esto se empleó un acelerómetro compacto biaxial ADXL311 de Analog Devices, colocado en la punta de la herramienta de corte, y un martillo instrumentado 9724 marca Kistler con el cual se golpeó el extremo de la herramienta de corte, en la dirección del acelerómetro. Ambas señales se pasaron por un filtro anti-alias y se muestrearon a una razón de 16 384 muestras por segundo con una tarjeta de adquisición 200 ks/s DAQ6024E de National Instruments, la cual se conectó a una computadora portátil 3.3 GHz Satellite A75 marca Toshiba.

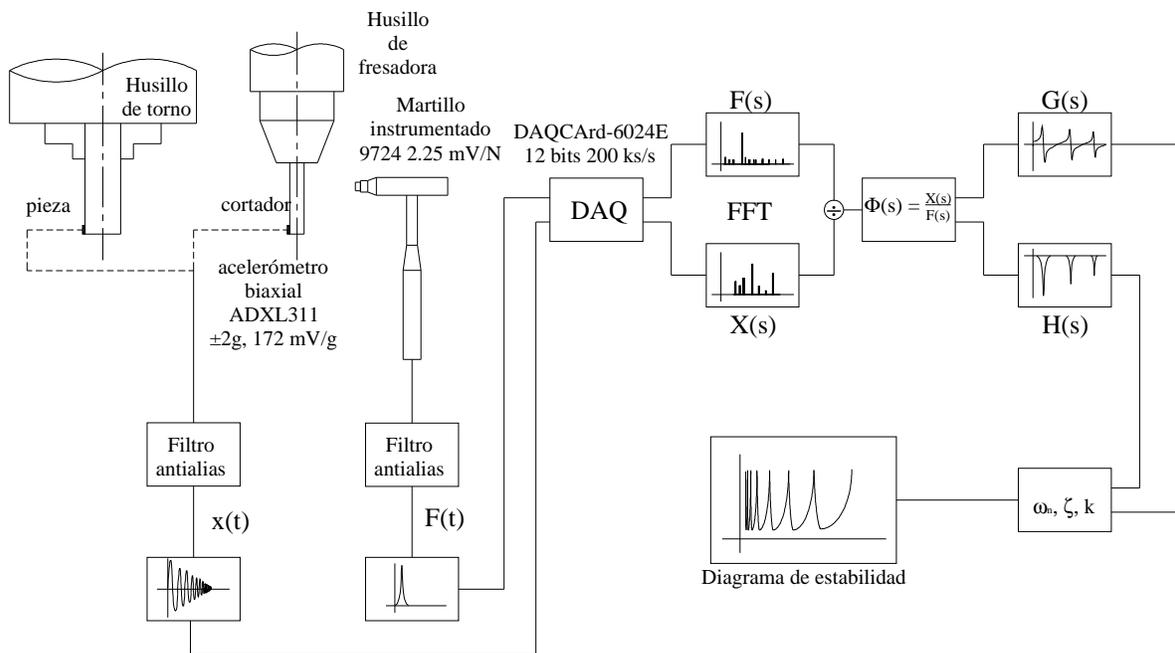


Figura 3.4: Esquema de la prueba de impacto para determinar los parámetros modales en un proceso de maquinado (torneado o fresado).

Con el objetivo de detectar el comportamiento de histéresis en la función de respuesta a la frecuencia, también conocido como fenómeno de salto, se realizó un total de 6 experimentos a profundidades de corte de 1, 2 y 5 mm, barriendo la velocidad del husillo hacia delante y hacia atrás, entre 1 500 y 2 700 rpm, con pasos de 100 rpm, como se indica en la Figura 3.5. Cada velocidad de husillo se mantuvo constante durante 25 mm con un avance de 300 mm/min. Se registraron señales de audio en cada proceso de corte, las cuales se muestrearon a una razón de 5 000 muestras por segundo y se grabaron como sonido por medio de un micrófono unidireccional DM-20SL conectado a la entrada de audio de la computadora portátil.

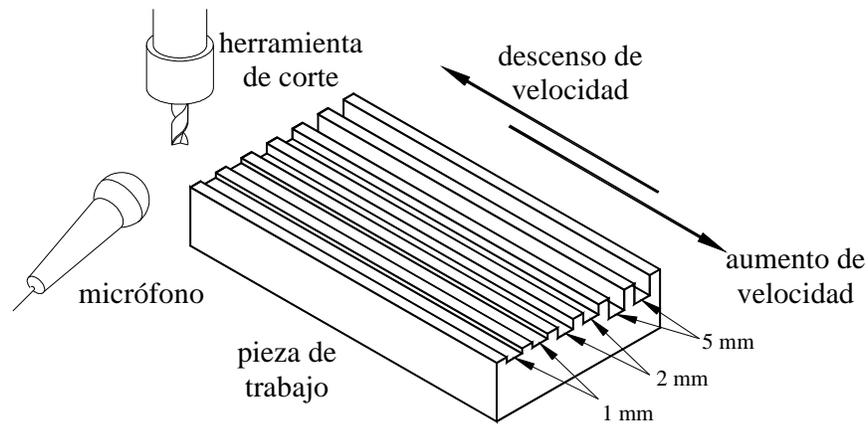


Figura 3.5: Arreglo experimental para medición del fenómeno de salto con señales de audio en un proceso de fresado.

Es importante mencionar que el rango de velocidad se seleccionó una vez que se construyó el diagrama de estabilidad a partir de los parámetros modales obtenidos con la prueba de impacto, lo cual se discute en el siguiente capítulo.

3.4.5. Señales de aceleración en un proceso de torneado

Se realizaron pruebas con barras de acero inoxidable AISI 304 $\phi 19.05$ mm por 130 mm de longitud montada en un centro de torneado CNC HAWK modelo

TC-200 11 kW@5000 RPM, de CINCINNATI MILACRON. Se utilizó un inserto de carburo VNMG 332 IC 3028 marca ISCAR sobre un portaherramientas MVJNL 16-3D marca tmx-PAFANA. Primero se obtuvieron los parámetros modales con el mismo procedimiento descrito en la Sección 3.4.4, pero en este caso el acelerómetro se colocó en el extremo contrario a la sujeción de la barra de acero, donde también se dio el impacto con el martillo instrumentado, como se ilustra en la misma Figura 3.4.

Posterior a la prueba de impacto, se realizó un análisis de estabilidad del proceso para identificar las velocidades y profundidades críticas del proceso. Con esta información disponible se planeó realizar un total de 10 experimentos, en 10 barras distintas, con una misma profundidad de corte de 2 mm y velocidades del husillo entre 450 y 900 rpm, con pasos de 50 rpm, como se indica en el Cuadro 3.1.

Cuadro 3.2: Condiciones de velocidad en experimentos de torneado a una profundidad de corte constante de 2 mm y avance de 0.15 mm/rev

Experimento	Velocidad de husillo, rpm	Frecuencia de excitación, Hz
1	450	7.5
2	500	8.33
3	550	9.17
4	600	10
5	650	10.83
6	700	11.67
7	750	12.5
8	800	13.33
9	850	14.17
10	900	15

Cada velocidad de husillo se mantuvo constante durante 7 mm con un avance de 0.15 mm/rev. Se registraron señales de aceleración en cada proceso de corte mediante un acelerómetro ADXL311 marca Analog Devices, las cuales se muestrearon a una razón de 10 000 muestras por segundo mediante una tarjeta de adquisición 200 ks/s DAQ6024E de National Instruments, conectada a una computadora portátil 3.3 GHz Satellite A75 marca Toshiba. En la Figura 3.6 se

muestra un arreglo del experimento descrito, donde se aprecia la barra de acero sujeta al husillo del torno y el portaherramientas instrumentado con el acelerómetro.

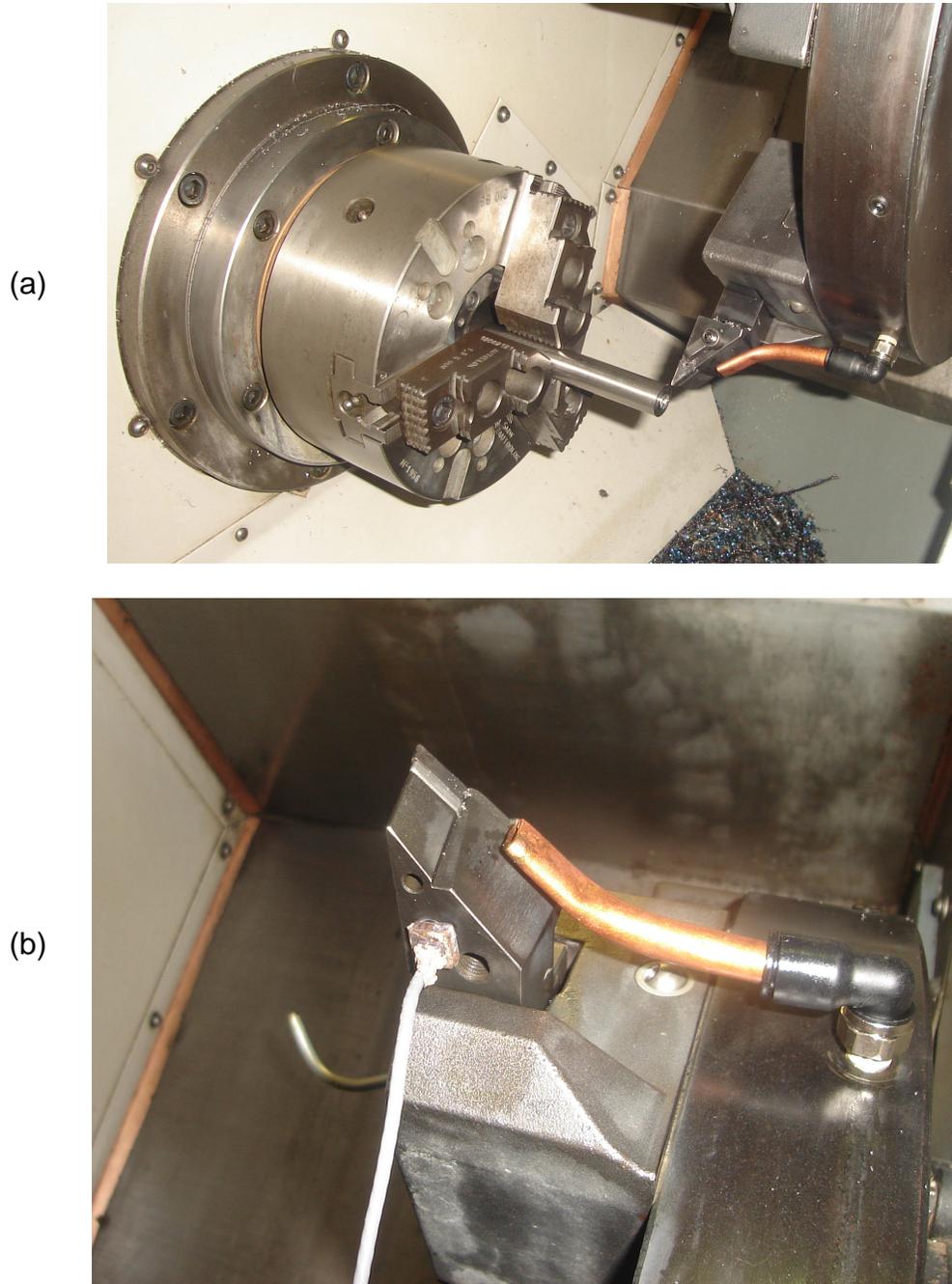


Figura 3.6: a) Arreglo experimental para la detección de vibraciones auto-inducidas con señales de aceleración en un proceso de torneado, b) Portaherramientas instrumentado con acelerómetro.

3.5. ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL

Para la validación experimental de los modelos predictivos de vibraciones auto-inducidas, es necesario caracterizar la naturaleza vibratoria del sistema dinámico, compuesto por la máquina-herramienta, la herramienta de corte y la pieza de trabajo (Altintas, 2000). De acuerdo con los modelos dinámicos que se han planteado para el análisis de las vibraciones auto-inducidas, la respuesta dinámica del sistema queda definida por los parámetros modales, tales como: masa, razón de amortiguamiento y rigidez. En esta investigación se empleó una técnica de análisis modal experimental, conocida como prueba de impacto, para la obtención de los parámetros modales de un sistema de maquinado, con los cuales se caracterizaron los modelos predictivos utilizados en esta investigación

La prueba de impacto consiste en excitar la estructura mediante un martillo instrumentado y medir la respuesta de la vibración, ya sea con un transductor de desplazamientos o aceleraciones. Ambas señales, la excitación y la respuesta, se transforman del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia mediante un proceso de conversión análogo-digital. Posteriormente se calcula la función de transferencia estructural como la razón de la respuesta y la excitación en el dominio de la frecuencia, a partir de las cual se pueden obtener los parámetros modales de cada modo de vibrar mediante funciones de análisis espectral.

En el Apéndice A.3 de este documento se describe con más detalle el algoritmo para la obtención de los parámetros modales de un sistema estructural, con un enfoque hacia el análisis modal experimental de máquinas-herramienta. Este mismo algoritmo se implementó para desarrollar un analizador de vibraciones, utilizado para analizar los resultados experimentales de esta investigación. El analizador de vibraciones se describe en el Apéndice A.4.

CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. ANÁLISIS DE MOVIMIENTO RELATIVO CON MODELO ACOPLADO

En esta Sección se presentan los resultados del modelo acoplado desarrollado en la Sección 3.1 Se analizó el efecto de diferentes condiciones dinámicas en la herramienta de corte y la pieza de trabajo, sobre la estabilidad del proceso de torneado. Las curvas de estabilidad se construyeron con el modelo convencional de un grado de libertad (Chen y Tsao, 2006) y el modelo acoplado con las ecuaciones (3.11) y (3.14). Las condiciones dinámicas evaluadas están descritas en el Cuadro 3.1, el cual se repite en esta Sección para fines prácticos.

Cuadro 3.1 (*Rep.*): Características dinámicas y condiciones de corte para evaluar la estabilidad en un proceso de torneado.

	Herramienta de corte			Pieza de trabajo			
Parámetros físicos (Chen y Tsao, 2006)	m = 50 kg			E = 180 x 10 ⁹ N/m ²			
	c = 2 x 10 ³ kg/s			ρ = 7600 kg/m ³			
	C = 2000 x 10 ⁶ N/m ² , θ = 70°			L ₁ = 0.500 m		D ₁ = 0.120 m	
	f ₀ = 0.1 mm/rev, K _f = 684 x 10 ⁶ N/m ²			L ₂ = 0.250 m		D ₂ = 0.070 m	
Características dinámicas	Condición No. 1	Condición No. 2	Condición No. 3	Condición No. 1 (L ₁ , D ₁)	Condición No. 2 (L ₁ , D ₂)	Condición No. 3 (L ₂ , D ₁)	Condición No. 4 (L ₂ , D ₂)
K x 10 ⁶ , N/m	20	7.465	385	43.972	5.092	351.778	40.732
ω _n , Hz	100.66	185	140	326.71	190.58	1306.82	762.31
ζ	0.032	0.032	0.032	0.025	0.025	0.025	0.025

El efecto del acoplamiento entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo en la estabilidad de un proceso de torneado se muestra en la Figura 4.1. Se presenta una comparación entre diagramas de estabilidad utilizando la herramienta de corte y la pieza de trabajo, ambas en las condiciones No. 1 respectivas (En lo subsiguiente la combinación de condiciones dinámicas se denotará como (m, n), donde m es la condición de la herramienta y n es la condición de la pieza). La línea sólida representa la estabilidad del caso acoplado en términos del movimiento relativo entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo; mientras que la línea interrumpida representa la estabilidad de un modelo

de un grado de libertad en el cual se ignoraron las vibraciones en la herramienta de corte.

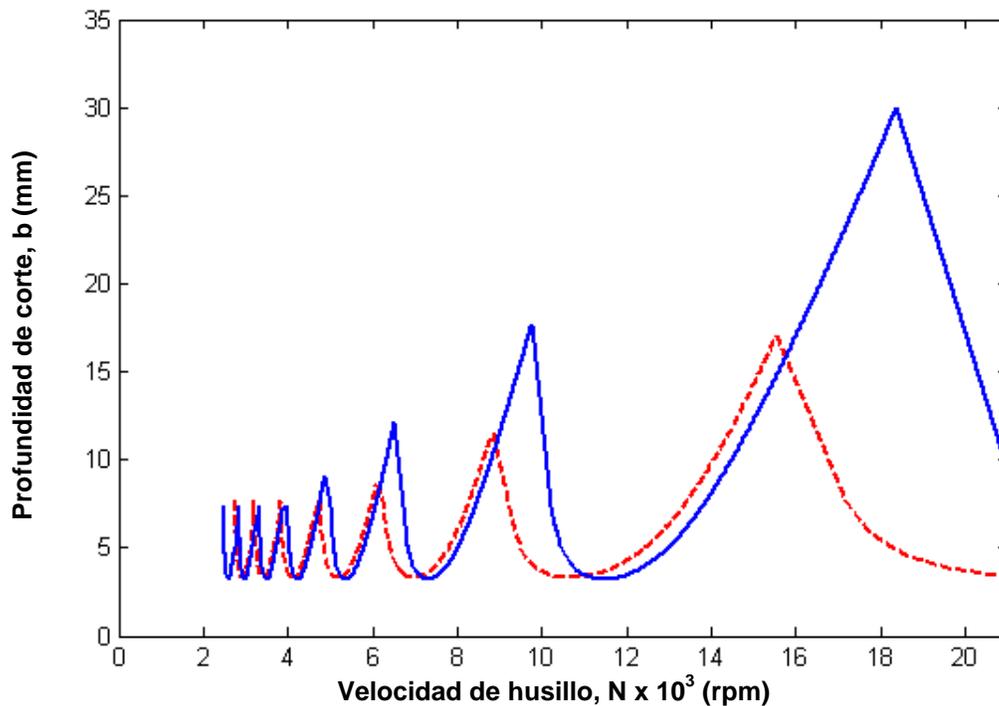


Figura 4.1: Comparación de la estabilidad de un modelo de un grado de libertad (línea interrumpida) y el modelo acoplado (línea sólida) con una combinación (1, 1).

Los resultados muestran una buena correspondencia en la predicción de la profundidad de corte incondicionalmente estable, en el fondo de cada lóbulo. Los límites de estabilidad de ambos modelos también se asemejan a bajas velocidades de husillo. Sin embargo, el modelo acoplado predice una región estable más grande en la parte izquierda de cada lóbulo, a medida que la velocidad aumenta; mientras que en la parte derecha de cada lóbulo se predice un límite de estabilidad ligeramente más bajo. Este comportamiento se explica por el hecho de que la flexibilidad de la herramienta de corte simula un proceso de corte con mayor amortiguamiento, de manera que las vibraciones auto-inducidas se eliminan para cortes profundos.

El efecto de diferentes condiciones dinámicas de la herramienta de corte se muestra en la Figura 4.2. La estabilidad de la herramienta de corte en la condición

No. 1 con la pieza de trabajo en la condición No. 2 (línea interrumpida) se compara con la correspondiente a una herramienta de corte más flexible en la condición No.2 y la misma pieza de trabajo en la condición No. 2 (línea sólida). Como se puede ver, una herramienta de corte flexible reduce los límites de estabilidad, principalmente en la parte derecha de cada lóbulo de estabilidad, y sobre todo para cortes profundos.

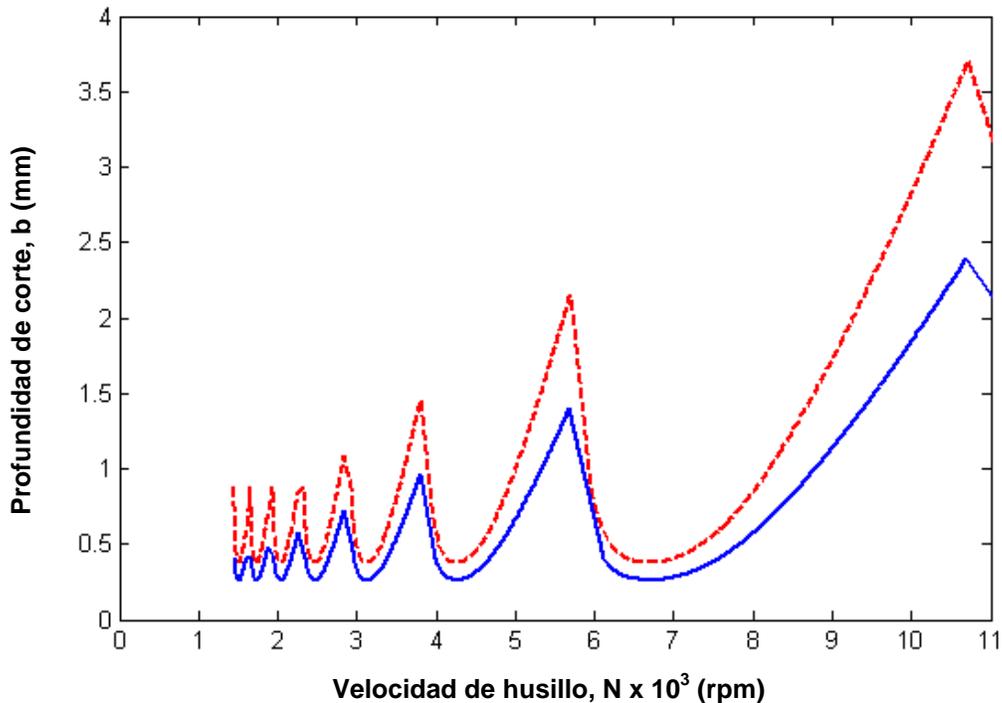


Figura 4.2: Efecto de una herramienta de corte con baja rigidez. La línea interrumpida representa la estabilidad del modelo acoplado con la combinación (1, 2), mientras que la línea sólida simboliza la estabilidad del modelo acoplado con combinación (2, 2).

El efecto de la razón de amortiguamiento en la herramienta de corte es tal que un aumento en ésta mejora notablemente la estabilidad del sistema. Este efecto se vuelve más evidente cuando la flexibilidad de la herramienta de corte es baja; de otro modo, la mejora no es significativa, como se muestra en la Figura 4.3. Aquí se comparó la estabilidad de una herramienta de corte flexible en la condición No. 2 (línea interrumpida) y la pieza de trabajo también en la condición No. 2, con la estabilidad de un problema en condiciones similares, excepto por una razón de amortiguamiento más alta en la herramienta de corte (línea sólida).

La profundidad de corte incondicionalmente inestable aumentó significativamente, así como la parte derecha de cada lóbulo. Este resultado se puede ser útil en el diseño de absorbedores de vibración pasivos, con los cuales se aumenta la razón de amortiguamiento en las herramientas de corte.

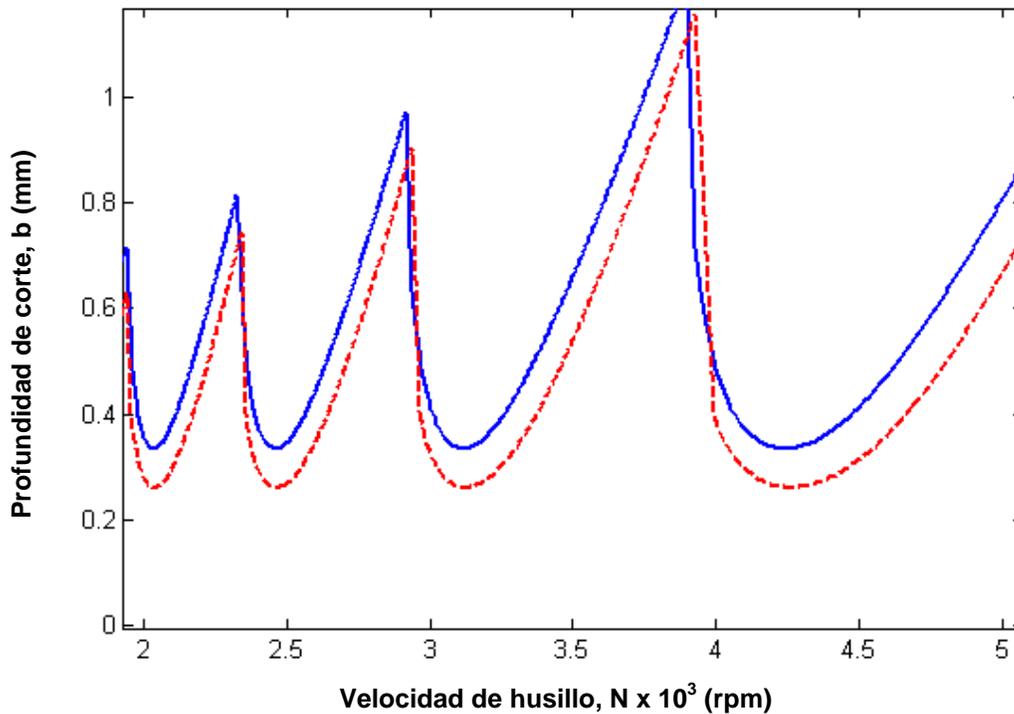


Figura 4.3: Efecto de la razón de amortiguamiento en la herramienta de corte. La línea interrumpida simboliza la estabilidad del modelo acoplado con la combinación (2, 2). En la línea sólida se representa el efecto cuando $\xi_1 = 0.1$.

Por otro lado, también se analizó el efecto de alta rigidez en la herramienta de corte. En este caso, la estabilidad de la herramienta de corte en la condición No. 1 y la pieza de trabajo en la condición No. 2, representada por la línea interrumpida, se comparó con la estabilidad de una herramienta de corte más rígida en la condición No. 3 y la misma pieza de trabajo, representada por la línea sólida. De las Figuras 4.4a y 4.4b, se aprecia que la mejora en estabilidad no es significativa aunque se utilice una herramienta de corte más rígida.

Se recomienda la validación experimental de este modelo, puesto que es interesante confirmar la región de mayor estabilidad en la parte izquierda de cada lóbulo, así como el efecto de las características dinámicas en la herramienta de

corte. El modelo propuesto es apto para analizar las vibraciones auto-inducidas en la dirección de avance en el proceso de torneado; sin embargo, los criterios de modelación empleados en el desarrollo de la solución se pueden extender a la dirección de corte para obtener un modelo más completo que incluya el acoplamiento modal.

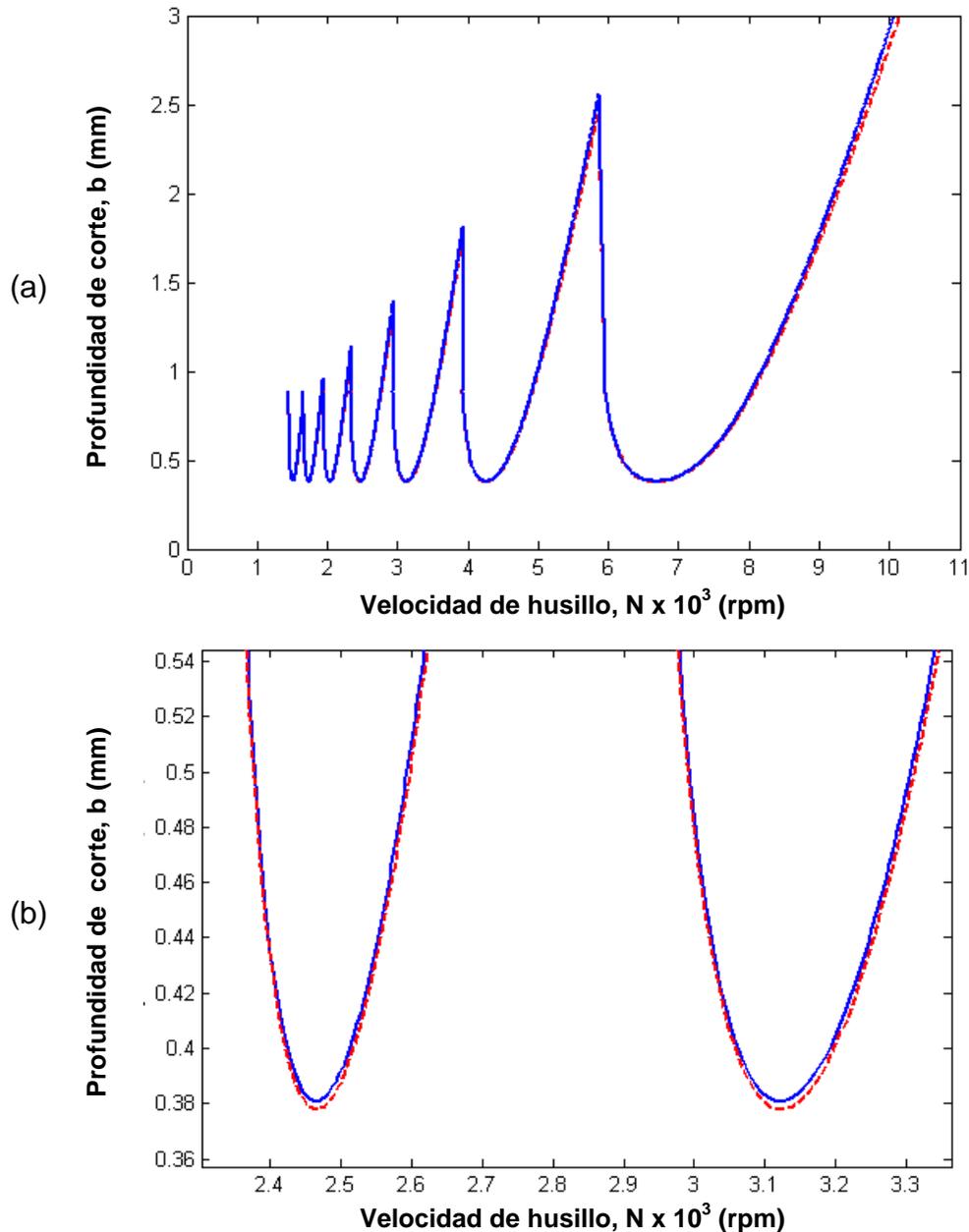


Figura 4.4: Efecto de una alta rigidez en la herramienta de corte. a) La línea interrumpida representa la estabilidad del modelo acoplado con combinación (1, 2), mientras que la línea sólida simboliza la estabilidad del modelo acoplado con (3, 2). b) Acercamiento para apreciar la escasa diferencia entre las curvas de estabilidad.

4.2. ANÁLISIS DE PERTURBACIÓN DE MODELO DÉBILMENTE NO LINEAL

Se utilizó el método de escalas múltiples para construir una solución aproximada de un oscilador débilmente no lineal con término cuadráticos y cúbicos tanto en la rigidez estructural como en la función de fuerza de corte regenerativa. Este modelo se empleó para representar el fenómeno de las vibraciones auto-inducidas en el proceso de maquinado. Se analizó la pérdida de estabilidad del sistema debido a bifurcaciones subcríticas Hopf mediante el estudio de los eigenvalores del modelo en su forma normal. Además, se investigaron comportamientos no lineales tales como ciclos límite y el fenómeno de salto, por medio de la solución aproximada en el dominio del tiempo, la función de respuesta a la frecuencia, diagramas de bifurcación y espacios de fase.

En el análisis numérico del modelo, se tomaron los siguientes parámetros del trabajo de Hanna y Tobias (1974): $\omega_n = 173.25$ Hz, $\zeta = 0.033$, $\beta_1 = 18\ 870 \omega_n^2$ 1/m-s², $\beta_2 = 410 \times 10^6 \omega_n^2$ 1/(m-s)², y $k = 327.893 \times 10^6$ N/m. Por otro lado, los términos no lineales regenerativos para la fuerza de corte, α_{1-3} , se determinaron numéricamente de acuerdo con la expansión de la ecuación (3.17). Aquí es importante destacar que el signo del término regenerativo de tipo cúbico, α_3 , es positivo; en contraste con el signo negativo empleado por Hanna y Tobias (1974). Además, se consideraron los siguientes parámetros de corte: $K = 1000 \times 10^6$ N/m² y $h_0 = 0.1 \times 10^{-3}$ m/rev.

Como una primera aproximación al análisis de estabilidad del sistema, se determinaron las condiciones de estabilidad lineal. Las ecuaciones (3.27) y (3.28) se sustituyeron en la ecuación (3.24) para obtener una ecuación compleja de primer orden. Separando sus partes real e imaginaria, se derivaron dos ecuaciones con las cuales se construyeron los lóbulos de estabilidad en términos de la profundidad de corte crítica y la velocidad del husillo. Como resultado, se

construyó el diagrama de estabilidad de la Figura 4.5 con las siguientes ecuaciones:

$$\tau = \frac{2}{\omega_c} \left[n\pi + \tan^{-1} \left(\frac{\omega_n^2 - \omega_c^2}{2\zeta\omega_n\omega_c} \right) \right] \quad (4.1)$$

y

$$b_{cr} = \frac{m}{Kh_0^{3/4}} \frac{\omega_c^2 - \omega_n^2}{\alpha_1(1 - \cos \omega_c \tau)} \quad (4.2)$$

donde $\tau = 60 / (2\pi\Omega)$ es el retraso en el tiempo en función de la velocidad del husillo, Ω ; mientras que n es un número entero que representa la multiplicidad π de la función tangente, la cual se asocia con las soluciones múltiples del sistema, dado origen a múltiples lóbulos de estabilidad.

Con un análisis más profundo de las ecuaciones (4.1) y (4.2) se encuentran las condiciones de un proceso incondicionalmente estable, de manera que la profundidad de corte mínima se obtiene cuando $\omega_c \tau = 3\pi/2$, con la siguiente ecuación:

$$b_{cr, \min} = \frac{2\zeta\omega_n\omega_c}{\alpha_1 Kh_0^{3/4} / m} \quad (4.3)$$

Por consiguiente, las condiciones mínimas de estabilidad se determinan de la dinámica del sistema y los coeficientes de corte. Con los parámetros establecidos al inicio de esta sección, la profundidad de corte incondicionalmente estable es 2.89 mm, como se aprecia en la Figura 4.5. Además, puesto que el criterio empleado para construir el diagrama de estabilidad linealizado es que el sistema tiene raíces puramente imaginarias, la pérdida de estabilidad se atribuye a bifurcaciones subcríticas Hopf, como se confirmará más adelante.

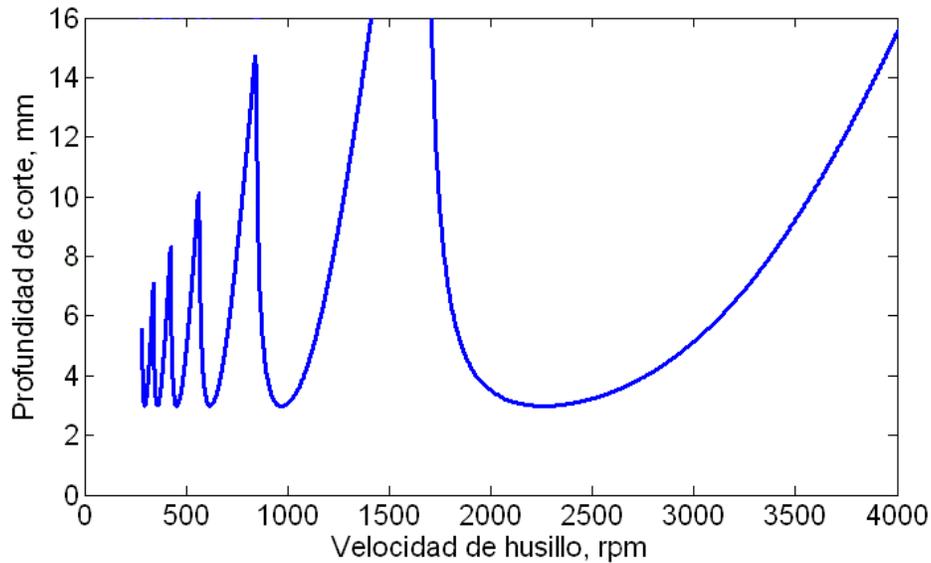


Figura 4.5: Diagrama de estabilidad lineal del proceso de torneado.

En la Figura 4.6 se muestran diagramas de bifurcación de la Ecuación (3.40), bajo condiciones de estabilidad limitada en a) 1800 rpm y b) 2250 rpm. El proceso a 1800 rpm muestra una amplitud creciente hacia un atractor distante localizado a una profundidad de corte de 25.5 mm y una amplitud de movimiento de 1.91 mm; una vez que se alcanza este punto, la amplitud cae drásticamente aún cuando la profundidad de corte sigue aumentando. Es importante destacar que este comportamiento es sólo teórico, puesto que esas amplitudes de movimiento son físicamente inalcanzables sin que haya pérdida de contacto entre la pieza de trabajo y la herramienta de corte; sin embargo, se verifica la presencia de dicho atractor distante. El proceso a 2250 rpm se comporta de manera diferente. Aunque la amplitud del movimiento no es mayor de 0.16 mm, con una profundidad de corte de 20.5 mm, esto causa una superficie altamente rugosa en la pieza de trabajo. Una vez que la amplitud alcanza un valor máximo, ésta decrece hasta un valor mínimo de 0.05 mm con una profundidad de corte de 65 mm, para posteriormente crecer exponencialmente a medida que la profundidad de corte aumenta, como se muestra en la Figura 4.6c. Otra vez, esta condición es físicamente inalcanzable, pero confirma la presencia de un ciclo límite inestable en la región. Amplitudes de movimiento menores a 0.05 mm son tolerables para un buen acabado superficial, lo cual corresponde a valores de profundidad de

corte menores a 3 mm alrededor de la parte más baja de los lóbulos de estabilidad.

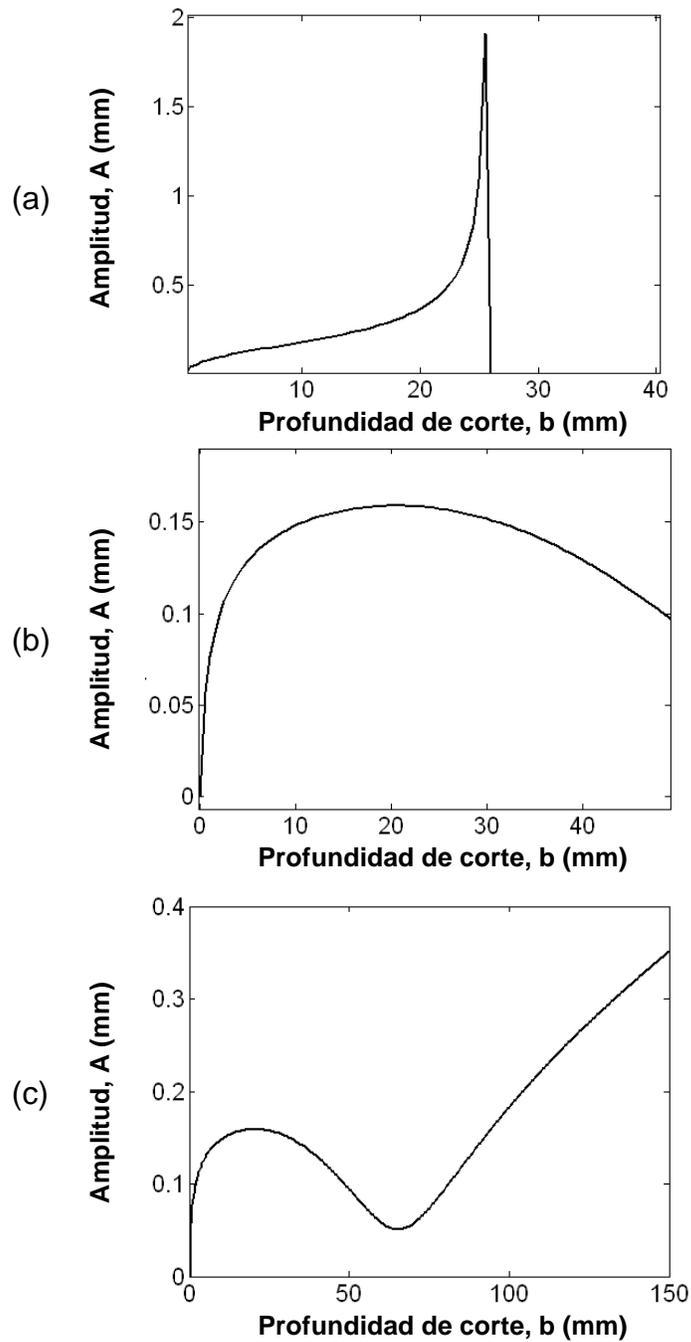


Figura 4.6: Diagramas de bifurcación de la amplitud de movimiento con respecto a la profundidad de corte con velocidades de husillo de a) 1800 rpm y 40 mm, b) 2250 rpm y 40 mm, y c) 2250 rpm y 150 mm.

El análisis de los eigenvalores del sistema en la forma normal de las Ecuaciones (3.38) y (3.39) permite encontrar los límites de estabilidad debido a bifurcaciones subcríticas Hopf. Los eigenvalores se calcularon para rangos de profundidad de corte y velocidad de husillo desde 0 a 16 mm y desde 0 a 4000 rpm, respectivamente. La Figura 4.7a muestra un contorno de eigenvalores con parte real cercana a cero por el lado izquierdo, a un valor de -5×10^{-15} , donde se aprecia buena semejanza con el diagrama de estabilidad de la Figura 4.5, excepto por el hecho de que los lóbulos de los eigenvalores no se cruzan en la parte superior para cerrar la frontera de estabilidad. Si se extiende el análisis de eigenvalores para profundidades de corte tan altas como 100 mm, aparece una nueva serie de lóbulos en la parte superior, como se muestra en la Figura 4.7b. La serie inferior de lóbulos está dominada por el término cúbico estructural, de manera que un valor muy alto de β_2 aumenta la rigidez del sistema y, por consecuencia, la profundidad de corte incondicionalmente estable. Por otro lado, la serie superior de lóbulos depende del término cuadrático β_1 , y representa los atractores distantes que aparecen en los diagramas de bifurcación de las Figuras 4.6a y 4.6c. Esto confirma que el sistema presenta una bifurcación a 1800 rpm y 20 mm, y otra a 2250 rpm y 60 mm. Si el valor del término cuadrático aumenta, los atractores distantes tienden a acercarse a la serie inferior de lóbulos al grado de que para valores muy altos del parámetro β_1 , los atractores distantes distorsionan los lóbulos de estabilidad; mientras que valores muy bajos del término cuadrático no afectan significativamente los lóbulos inferiores de estabilidad. Por lo tanto, sólo el término cúbico es capaz de representar el comportamiento no lineal con buena aproximación

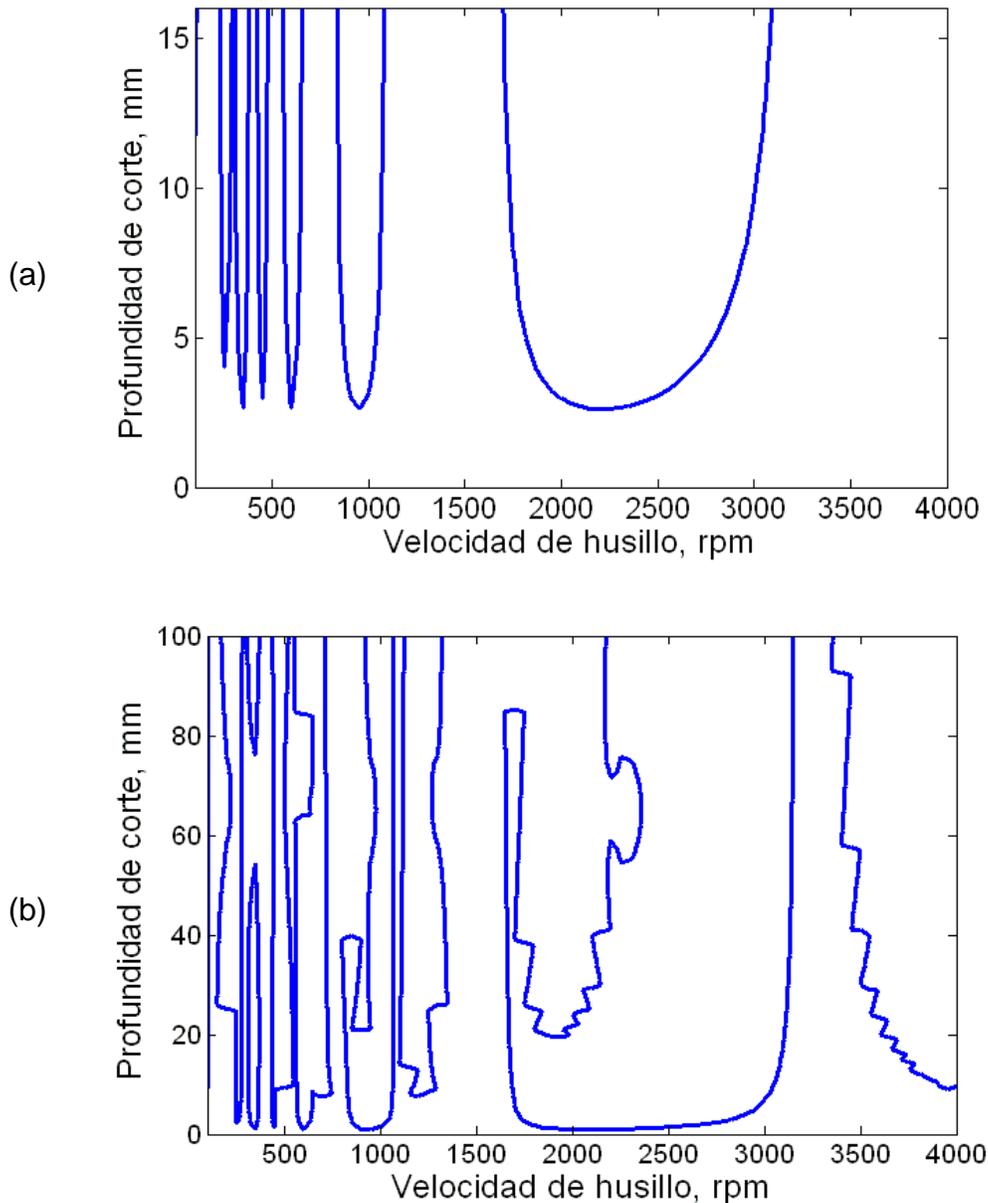


Figura 4.7: a) Límites de estabilidad originados por los eigenvalores con parte real cercana a cero por la izquierda, a un valor de -5×10^{-15} . b) Atractores distantes en el sistema debido al término estructural de tipo cuadrático, representados como una serie superior de lóbulos a altas profundidades de corte.

Uno de los resultados más interesantes de este análisis se exhibe en las Figuras 4.8 y 4.9. En la Figura 4.8 se muestra una línea interrumpida sobrepuesta al diagrama de la Figura 4.7a, la cual representa los eigenvalores con parte real cercana a cero del lado positivo, a un valor de 5×10^{-15} . Esto significa que una vez que la estabilidad se pierde y la parte real de los eigenvalores se vuelve

positiva, la profundidad de corte deberá ser reducida hasta un valor inferior a aquél que causó la inestabilidad. Este hecho confirma nuevamente la condición subcrítica y la histéresis de la bifurcación. Como se puede apreciar, el rango de histéresis es más amplio a bajas profundidades de corte, lo cual es confirmado experimentalmente más adelante. Este resultado puede ser utilizado para establecer una técnica de restauración de la estabilidad en procesos de maquinado.

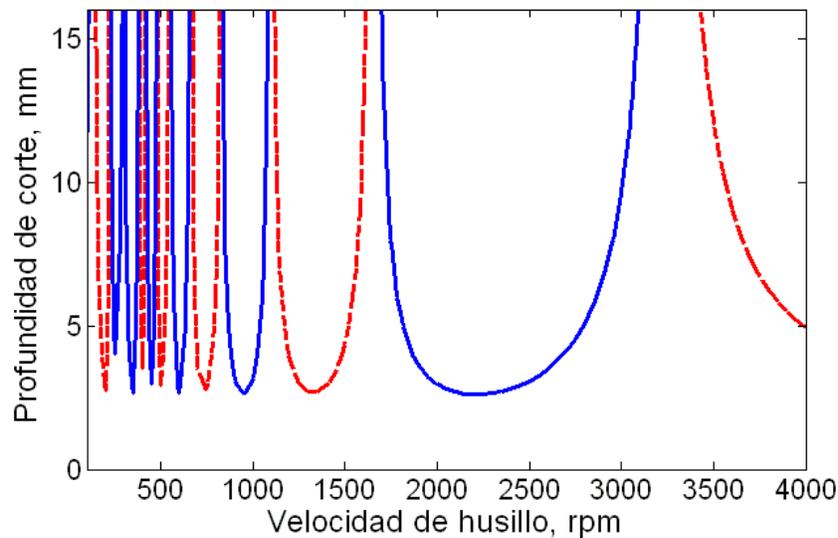


Figura 4.8: Histéresis del sistema en el diagrama de estabilidad: a) La línea sólida representa los límites de estabilidad debido a los eigenvalores con parte real cercana a cero por el lado negativo, a un valor de -5×10^{-15} ; b) La línea interrumpida corresponde a los eigenvalores con parte real cercana a cero por el lado positivo, a un valor de 5×10^{-15} .

Por otro lado, dado que la amplitud de la respuesta también se puede predecir con la Ecuación (3.42), se construyó un mapa de amplitudes para rangos de profundidad de corte y velocidad de husillo desde 0 a 16 mm y 0 a 4000 rpm, respectivamente. Posteriormente se seleccionó un nivel de amplitud similar a la presentada en el punto de estabilidad crítica, en 2250 rpm y 2.89 mm. El resultado se muestra en la Figura 4.9, donde se presenta una superficie de amplitud de la respuesta del sistema. En las Figuras 4.9a y b se aprecia que los niveles de amplitud presentan un comportamiento lobular en tres dimensiones, por lo que la Figura 4.9c muestra un contorno de la superficie tridimensional con una amplitud

similar a la que presenta la condición de estabilidad crítica del modelo linealizado , en 2250 rpm y 2.89 mm. Es importante destacar la semejanza notoria con la Figura 4.8, lo cual confirma nuevamente la existencia de histéresis en la amplitud de la respuesta y su efecto en el diagrama de estabilidad del sistema.

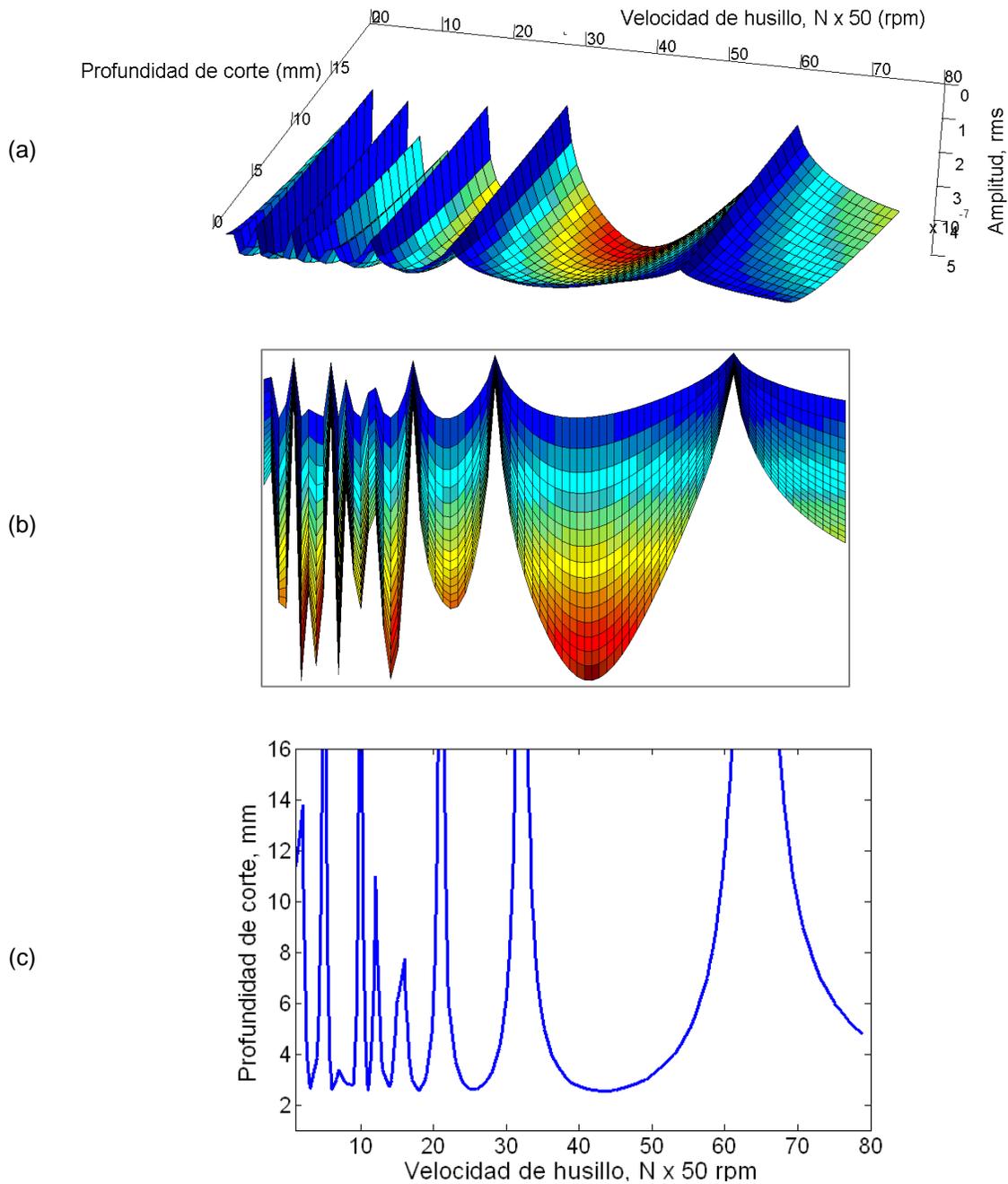


Figura 4.9: a) Mapa de amplitud de la respuesta; b) Proyección del mapa de amplitud; c) Curva de nivel de amplitud.

Por otro lado, el fenómeno de salto en la función de respuesta a la frecuencia, cerca de una bifurcación subcrítica Hopf, queda establecido claramente con las Ecuaciones (3.40), (3.43) y (3.44). Para esto, se analiza la amplitud del movimiento en 2250 rpm y 2 mm, cerca de una bifurcación subcrítica Hopf en la parte inferior del lóbulo de estabilidad. Primero se calculan las amplitudes de la respuesta con las ecuaciones ya descritas en ausencia de no linealidades estructurales, es decir, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, y con la razón de frecuencias $r = \omega_c/\omega_n$ desde 1 a 1.5. En la Figura 4.10a se aprecia que las tres funciones de respuesta coinciden perfectamente en cada punto; también se observa simetría alrededor de un pico resonante en $r = 1.33$. Sin embargo, cuando se consideran no linealidades estructurales, la Ecuación (3.44) genera dos funciones de respuesta, las cuales reflejan la histéresis que se representa en la Figura 4.10b. La línea sólida, en color azul y marcas de signo positivo, representa la amplitud de la respuesta cuando la razón de frecuencias es barrida hacia delante, es decir, de 1 a 1.5; mientras que la línea interrumpida, en color negro y con marcas de asterisco, corresponde a la amplitud de la respuesta cuando la razón de frecuencias es barrida hacia atrás, es decir, de 1.5 a 1. En el primer caso, la amplitud del movimiento aumenta lentamente a medida que la frecuencia aumenta; repentinamente, la amplitud del movimiento aumenta y posteriormente decae drásticamente en $r = 1.28$ para disminuir gradualmente mientras que el parámetro de bifurcación, r , sigue aumentando. Contrariamente, si el parámetro de bifurcación se barre hacia atrás, la amplitud del movimiento aumenta lentamente para saltar de manera súbita a una amplitud de alto valor en $r = 1.24$, entonces decae lentamente del mismo modo que el parámetro de bifurcación. Esta ausencia de reversibilidad en la respuesta significa la coexistencia de dos soluciones estables en un rango crítico de frecuencias, y es atribuida a la no linealidad estructural dada por el parámetro cúbico. Además, esto confirma también que para la eliminación de vibraciones de gran amplitud, alrededor de una bifurcación subcrítica Hopf, el parámetro de bifurcación debe disminuir a un valor inferior del cual provocó la bifurcación.

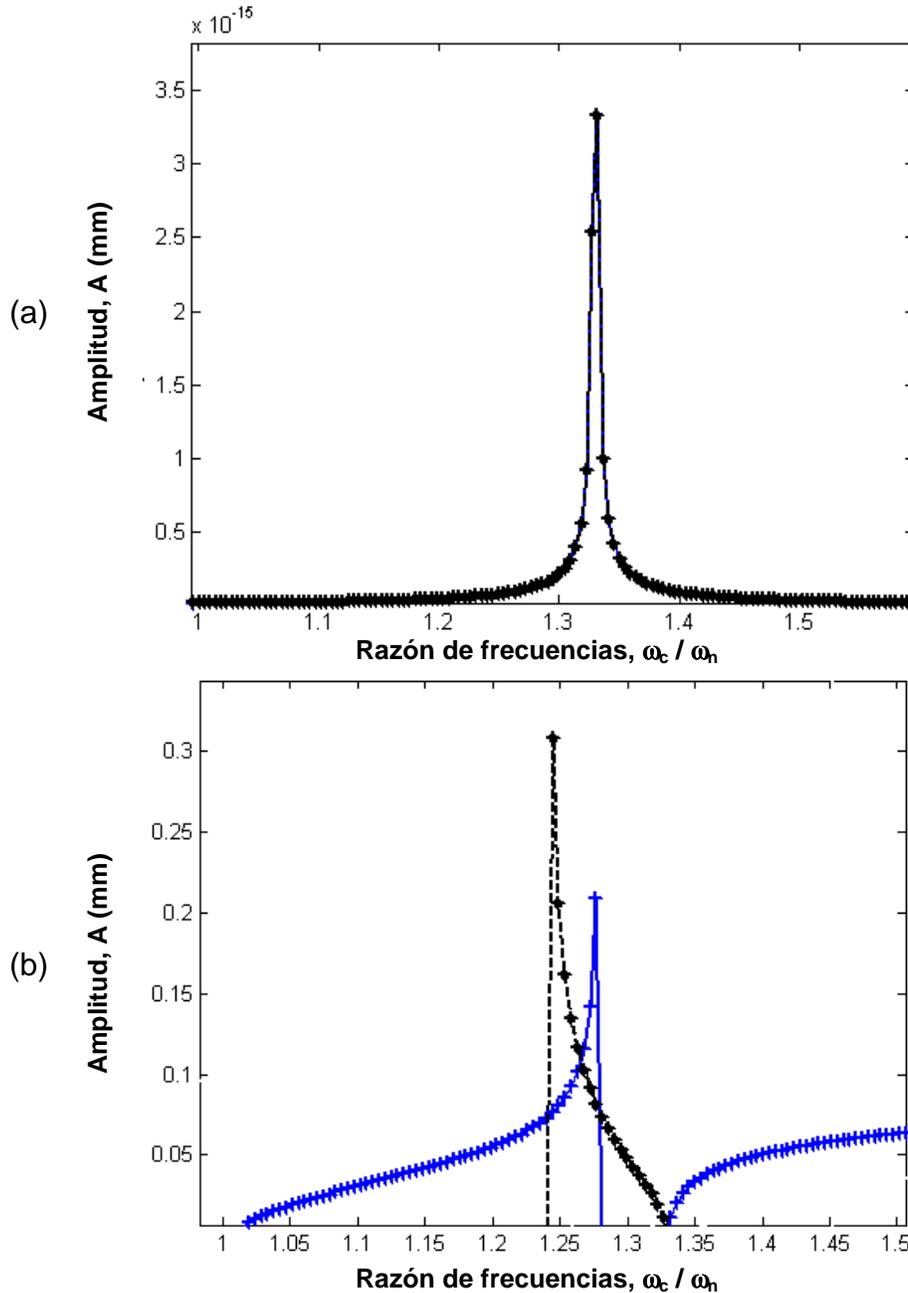


Figura 4.10: Función de respuesta a la frecuencia cerca de una bifurcación subcrítica Hopf, en 2250 rpm y 2 mm. Respuesta a) lineal y b) no lineal.

Finalmente, es importante destacar que el comportamiento no lineal de histéresis sólo se pudo detectar con valores altos de los términos estructurales no lineales. De acuerdo con los resultados obtenidos, el comportamiento no lineal está dominado por el término cúbico, puesto que éste presenta pocas variaciones para diferentes valores del término cuadrático. Sin embargo, valores muy altos de

éste último produce resultados inesperados. Este análisis se aplicó al estudio del proceso de torneado con un grado de libertad; sin embargo, el modelo se puede extender al proceso de fresado de inmersión completa con un grado de libertad, despreciando la intermitencia del corte. Para esto es necesario caracterizar las no linealidades de tipo estructural de la dinámica del sistema.

4.3. IDENTIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE VIBRACIONES AUTO- INDUCIDAS

4.3.1. Identificación del salto en curva rms

El experimento descrito en la Sección 3.4.4 se realizó con una máquina fresadora CNC modelo 1259C Arrow marca CINCINNATI con motor de 12 kW, un cortador recto de 4 filos de $\phi 12.7$ mm x 25.4 mm, y un bloque de Aluminio 6061 de 50.8 mm x 203.2 mm x 304.8 mm. Los parámetros modales estimados experimentalmente con la prueba de impacto fueron³: $k = 1.3 \times 10^8$ N/m, $\zeta = 0.73\%$, y $\omega_n = 335$ Hz. Con estos datos, se construyó el diagrama de estabilidad por medio del modelo lineal de dos grados de libertad para fresado de inmersión total, bajo la consideración de que la dinámica en ambas direcciones de la máquina era similar. Además, se utilizaron los siguientes coeficientes de corte para aluminio: $K_t = 600 \times 10^6$ N/m² y $K_r = 0.3$ (Altintas, 2000). En la Figura 4.11a se muestra el diagrama de estabilidad correspondiente, mientras que en la Figura 4.11b se muestra un acercamiento a la zona de trabajo y se indican los experimentos que fueron planeados para detectar el comportamiento no lineal y de histéresis de las vibraciones auto-inducidas en maquinado.

Las pruebas experimentales se establecieron a profundidades de corte de 1 mm, 2 mm y 5 mm, las cuales se indican con líneas sólida, interrumpida y punteada, respectivamente. El sentido de la flecha indica que se hizo una prueba barriendo la velocidad entre 1500 y 2700 rpm con incrementos de 100 rpm, y otra prueba variando la velocidad entre 2700 y 1500 rpm con decrementos de 100 rpm. De acuerdo con la Figura 4.11b, la prueba a 1 mm representa un proceso incondicionalmente estable. La prueba a 2 mm inicia en una condición inestable para estabilizarse momentáneamente y volver a perder la estabilidad entre 1 850 y 2150 rpm; después de esto, la prueba permanece en un régimen estable. Asimismo, la prueba a 5 mm empieza en una condición inestable, pero el proceso

³ En el Apéndice A.3 de este documento se describe la prueba de impacto como técnica de análisis modal experimental para obtener los parámetros modales de un sistema de máquina-herramienta.

alcanza la estabilidad entre 1600 y 1800 rpm; después, ésta se pierde entre 1800 y 2300 rpm y se vuelve a alcanzar entre 2300 y 2700 rpm. Al final de la prueba, la estabilidad se pierde nuevamente justo en 2700 rpm.

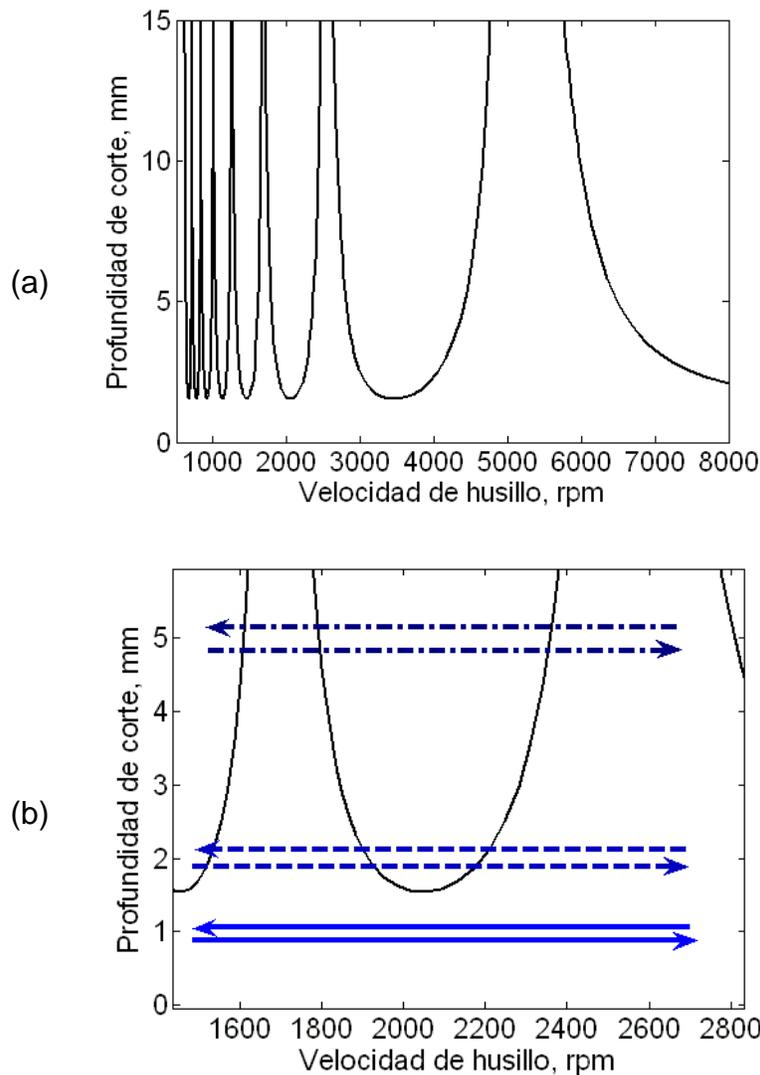


Figura 4.11: a) Diagrama de estabilidad para el proceso de fresado; b) Localización de las pruebas experimentales a profundidades de corte de 1 (—), 2 (- - -) y 5 (-.-.-) mm.

En las Figuras 4.12 y 4.13 se muestran los registros de sonido durante las pruebas a 1, 2 y 5 mm de profundidad de corte, con velocidad de husillo creciente y decreciente, entre 1500 y 2700 rpm, respectivamente. El tamaño de los registros

fue diferente para cada prueba, las señales de baja amplitud en los extremos de los registros corresponden a señales de sonido en ausencia de corte. Se pueden apreciar cambios drásticos en la amplitud de las señales, los cuales corresponden con los cambios de velocidad del husillo. Además, se identifica la presencia de histéresis en la función de respuesta a la frecuencia, principalmente en la prueba a 5 mm, donde la amplitud de las señales resultó más grande a velocidad de husillo descendente, contrario a los resultados de la prueba a velocidad ascendente.

Posteriormente se construyó la curva de respuesta a la frecuencia correspondiente a cada experimento, mediante la amplitud media cuadrática de la señal (rms, por sus siglas en inglés) en bloques de 512 datos. Las curvas correspondientes a la misma profundidad de corte se superpusieron para reflejar la histéresis de la respuesta en condiciones de inestabilidad, como se muestra en la Figura 4.14 para a) 5mm, b) 2mm y c) 1mm de profundidad de corte, respectivamente. Las líneas sólidas (color azul) corresponden al barrido ascendente de velocidad, mientras que las líneas interrumpidas (color rojo) representan el barrido descendente de velocidad.

Los resultados experimentales de la Figura 4.14 concuerdan con las predicciones de la curva de estabilidad en la Figura 4.11 en la siguiente forma. Primero se aprecia que la amplitud de las vibraciones aumentó con la profundidad del corte. El corte a 1 mm de profundidad, Figura 4.14c, muestra una amplitud de la señal muy baja pero en general sí se aprecia el mismo patrón de vibraciones, principalmente en los extremos del recorrido. Los picos que se presentan a lo largo de la curva se deben a los cambios de velocidad del husillo. En el corte a 2 mm de profundidad, Figura 4.14b, se aprecia claramente el arranque en condiciones inestables con una amplitud considerablemente alta; la siguiente zona de inestabilidad está definida entre 1900 y 2200 rpm, como se esperaba, aunque también se aprecian otras dos condiciones de histéresis muy marcadas alrededor de 1600 y 2600 rpm, respectivamente.

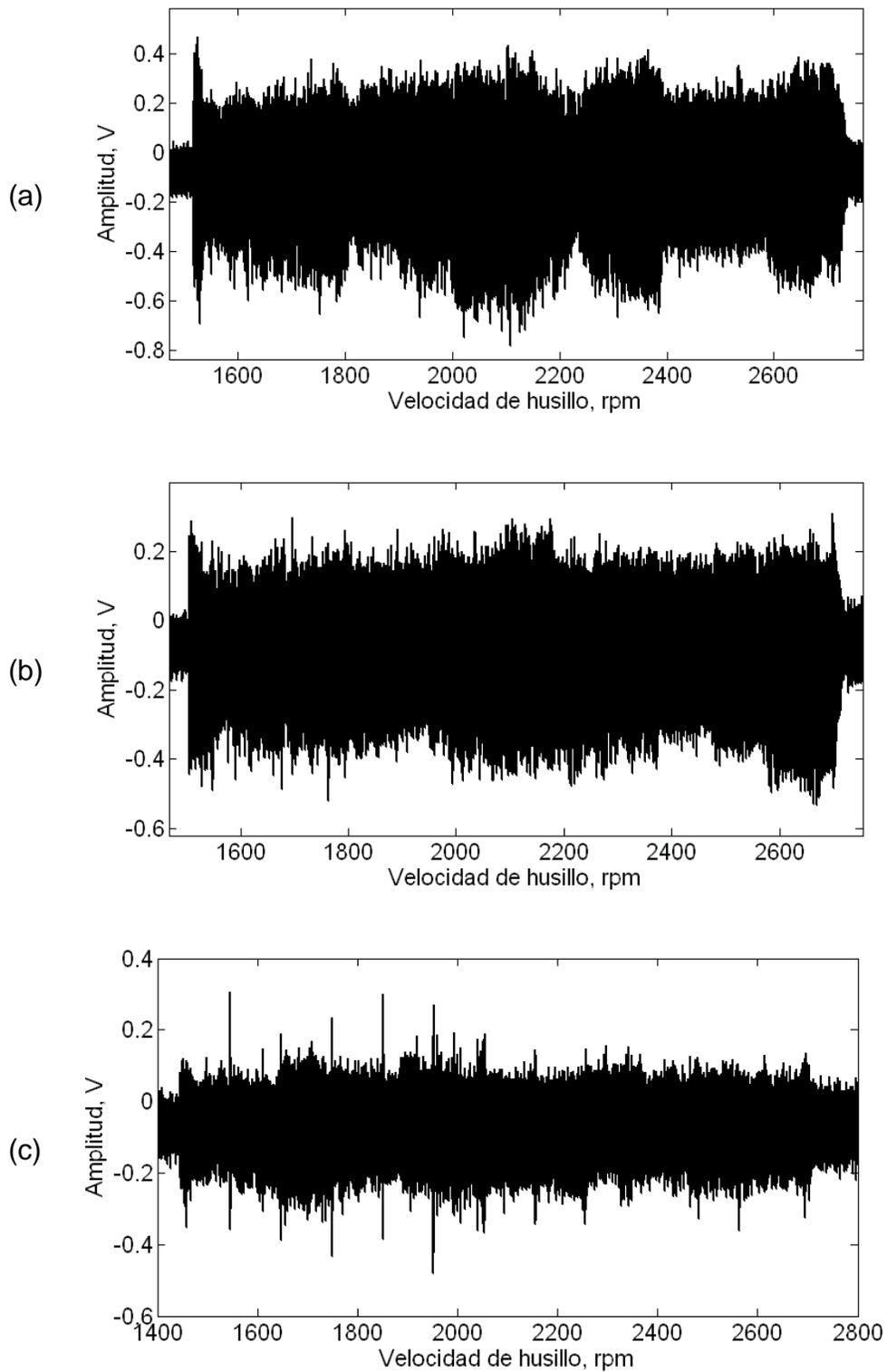


Figure 4.12: Señales de audio de pruebas a profundidades de corte de a) 5, b) 2 mm y c) 1 mm, con velocidad de husillo ascendente entre 1500 y 2700 rpm.

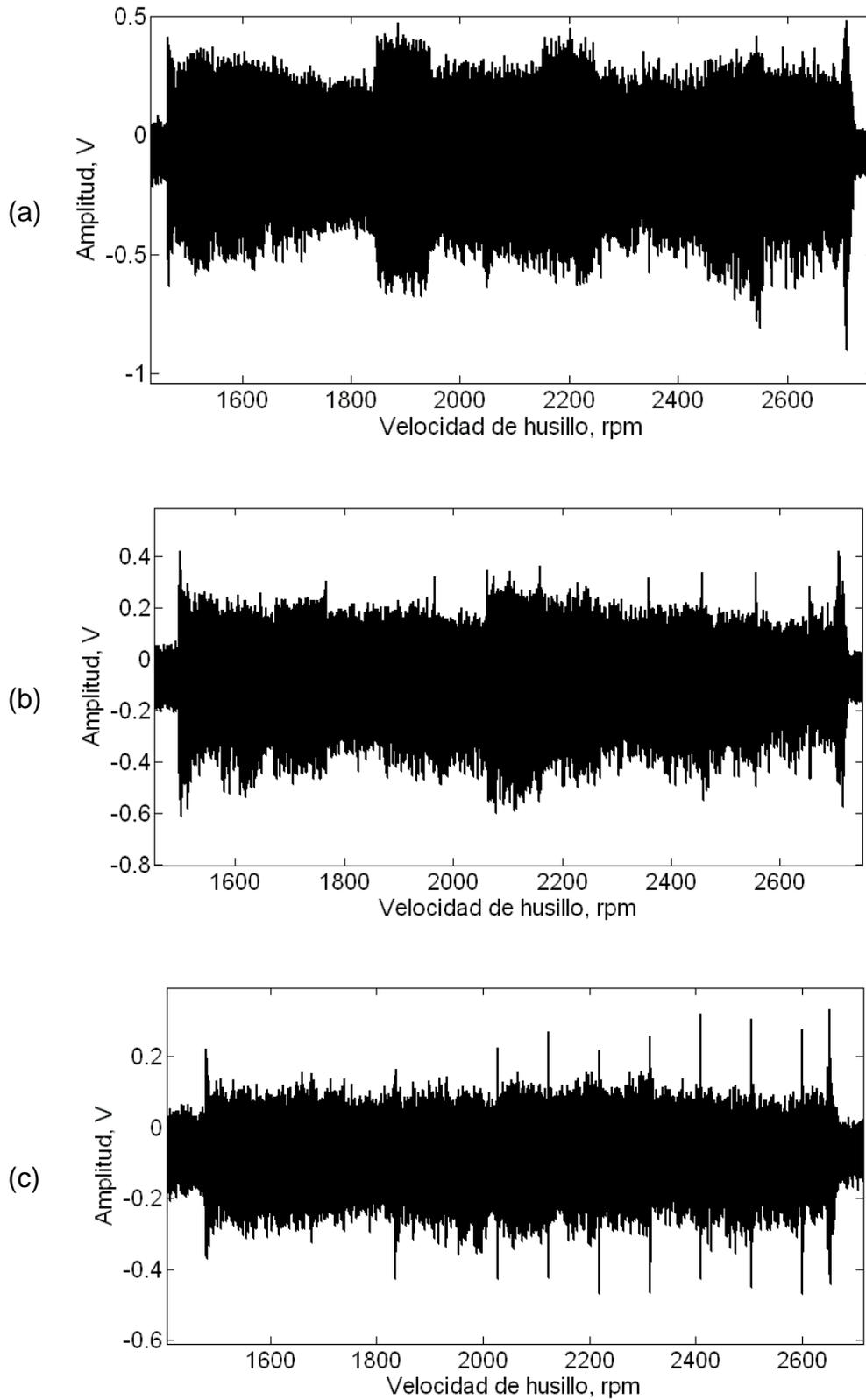


Figura 4.13: Señales de audio de pruebas a profundidades de corte de a) 5, b) 2 mm y c) 1 mm, con velocidad de husillo descendente entre 2700 y 1500 rpm.

Es interesante observar que la amplitud de la vibración es mayor en el recorrido descendente, lo cual representa una suavización de la rigidez del sistema. Finalmente, en la Figura 4.14a se muestran los resultados en el corte con 5 mm; se identifican cuatro zonas de histéresis, lo cual coincide con los cuatro puntos de inestabilidad de la curva mostrada en la Figura 4.11b, pero el fenómeno de salto con endurecimiento de la rigidez se muestra claramente en los cuatro puntos de inestabilidad, aunque es más claro el que se presenta entre 2200 y 2400 rpm, en condiciones de inestabilidad severa.

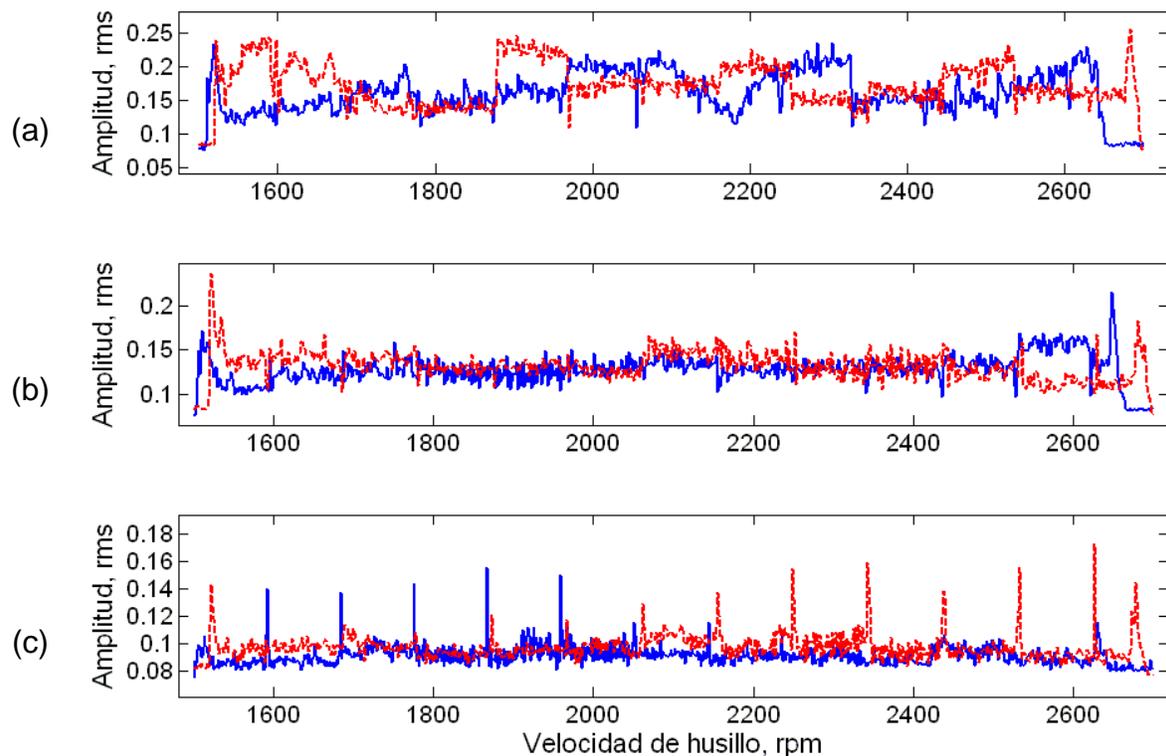


Figura 4.14: Función de respuesta a la frecuencia rms a profundidades de corte de a) 5 mm, b) 2 mm y c) 1 mm, con velocidad de husillo ascendente (línea sólida) y descendente (línea interrumpida).

En la Figura 4.15 se muestra con más detalle el comportamiento de histéresis en las condiciones de pérdida de estabilidad para las pruebas experimentales con 2 mm y 5 mm de profundidad de corte. La curva de amplitud rms se construyó con bloques de 3072 datos.

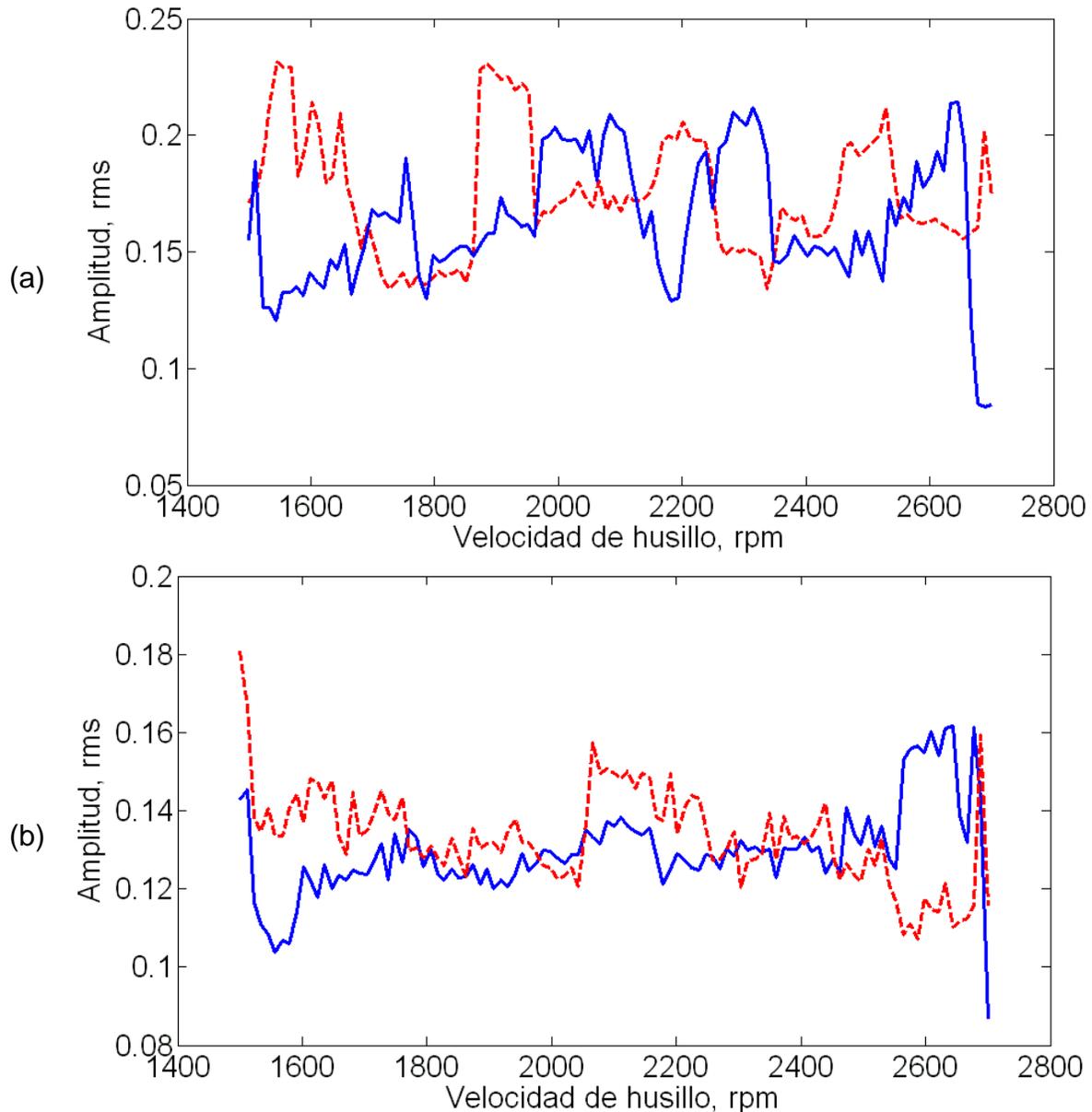


Figura 4.15: Histéresis en condiciones de inestabilidad con velocidad de husillo ascendente (línea sólida) y descendente (línea interrumpida). Profundidad de corte de a) 5 mm y b) 2 mm.

En la Figura 4.16a se presenta la pieza de trabajo con seis detalles a diferentes condiciones de corte. En profundidades de 1 mm se aprecia un acabado superficial bueno, tanto en velocidad ascendente como en velocidad descendente. En la profundidad de 2 mm se aprecia una rugosidad ligera entre 1800 y 2000 rpm (Figura 4.16b). En la Figura 4.16c se aprecian huellas importantes de vibración en las paredes de la ranura casi en toda su longitud,

correspondientes a un corte de 5 mm con velocidad ascendente; incluso se aprecia una zona de atascamiento de la herramienta correspondiente a una velocidad entre 2000 y 2100 rpm. Las condiciones más severas se presentan en el corte a 5 mm con velocidad descendente, desde el inicio del corte (Figura 4.16d) y a lo largo del mismo (Figura 4.16e). Esta evidencia experimental también coincide con las amplitudes de vibración registradas en la Figura 4.13a.

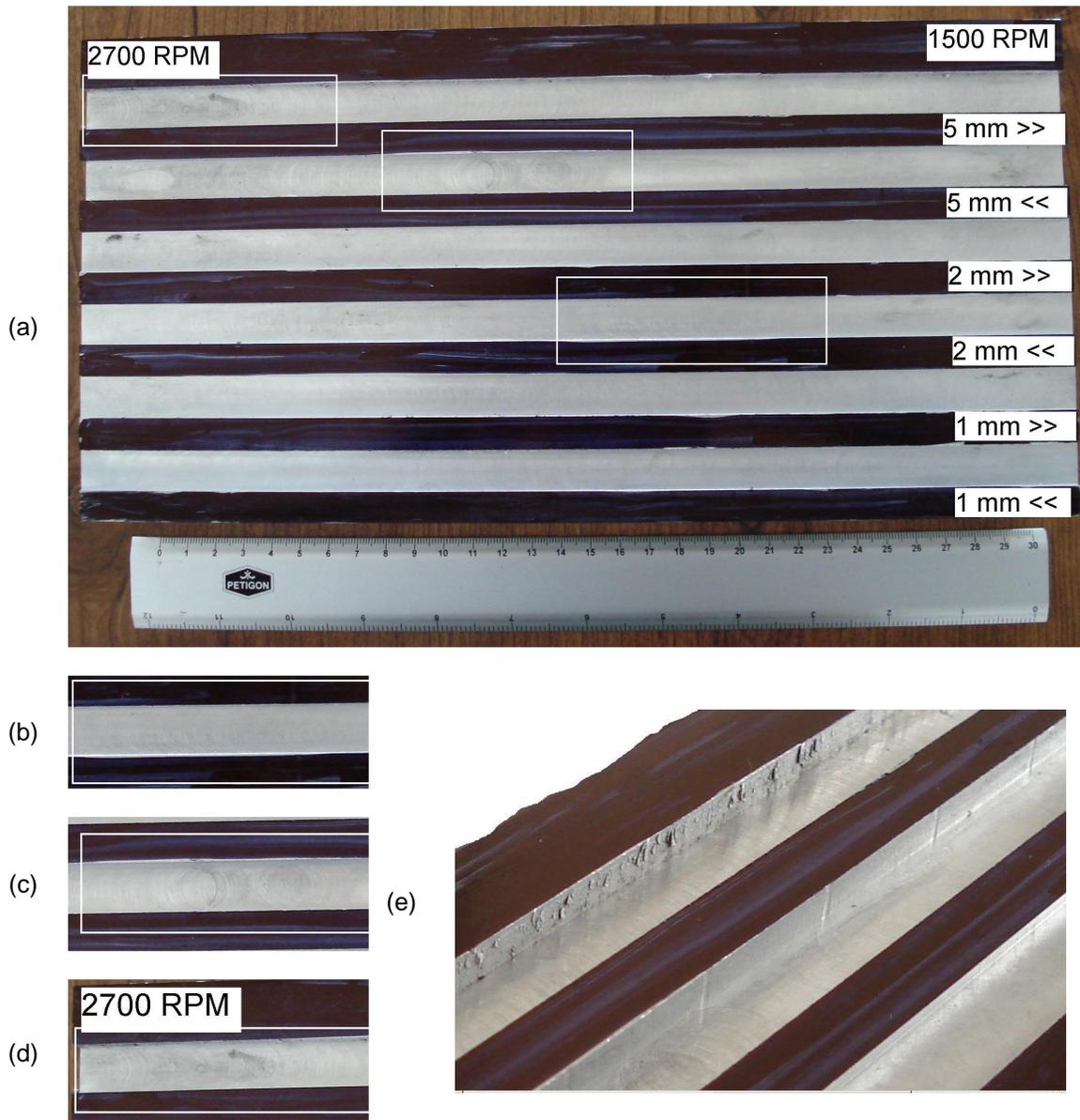


Figura 4.16: Evidencia experimental: a) Pieza de trabajo con seis experimentos de corte; b) Presencia de vibraciones de baja amplitud entre 1800 y 2000 rpm con 2 mm de corte; c) Atascamiento de la herramienta de corte en 5mm y 2100 rpm; d) y e) Vibraciones severas con 5 mm de corte y velocidad descendente.

4.3.2. Identificación de frecuencias de auto-inducción

Un análisis más detallado de los resultados obtenidos alrededor de la inestabilidad del corte con 5 mm permite entender parte de la naturaleza del fenómeno. La velocidad de 2000 rpm en el husillo representa una frecuencia de 33.33 Hz, por lo que la frecuencia de la herramienta es de 133.33 Hz, cuatro veces mayor por el número de filos cortantes. Esto significa que es posible que el tercer armónico de la frecuencia de la herramienta sea quien excita al sistema con una frecuencia de 400 Hz, que es un 16% más que la frecuencia natural. Sin embargo, en la Figura 4.11b se aprecia que el rango inestable se encuentra entre 1800 y 2300 rpm, para los cuales el tercer armónico de la herramienta tiene una frecuencia de 360 y 460 Hz, respectivamente. En el primer caso es claro que el sistema está en una condición cercana a la resonancia, mientras que en el segundo caso la frecuencia de excitación está muy alejada de la frecuencia natural. Considerando que la vibración puede ser causada por el segundo armónico combinado con la frecuencia del husillo, resulta una frecuencia de 345 Hz, muy cercana a la frecuencia natural. Esto explica la presencia de mayor energía de la vibración en estas condiciones. Por el contrario, el tercer armónico de la frecuencia de la herramienta a 2200 rpm es de 440 Hz, mientras que la combinación del segundo armónico con la frecuencia del husillo es de 330 Hz. En el primer caso, la frecuencia está muy alejada de la condición de resonancia, y en el segundo caso, el sistema no alcanza la condición resonante. Esto explica la presencia de vibraciones de baja amplitud en estas condiciones, reflejado en la curva 4.14a.

4.3.3. Análisis de ondeletas

El análisis de las señales obtenidas en los experimentos anteriores requiere de herramientas más sofisticadas que el análisis espectral, puesto que las condiciones de operación cambian con el tiempo, lo cual no es posible detectar

con el análisis espectral, a menos que se haga un estudio paso a paso a lo largo de la serie original; pero además, los comportamientos transitorios y no lineales no serían recuperados de manera confiable por lo que ya se ha discutido anteriormente. Como ejemplo, la prueba de corte con 5 mm de profundidad y velocidad ascendente entre 1500 y 2700 rpm (Figura 4.12a) presenta las componentes de frecuencia de la Figura 4.17, de donde es difícil interpretar en qué momento se presentan éstas o a qué condiciones de operación corresponden.

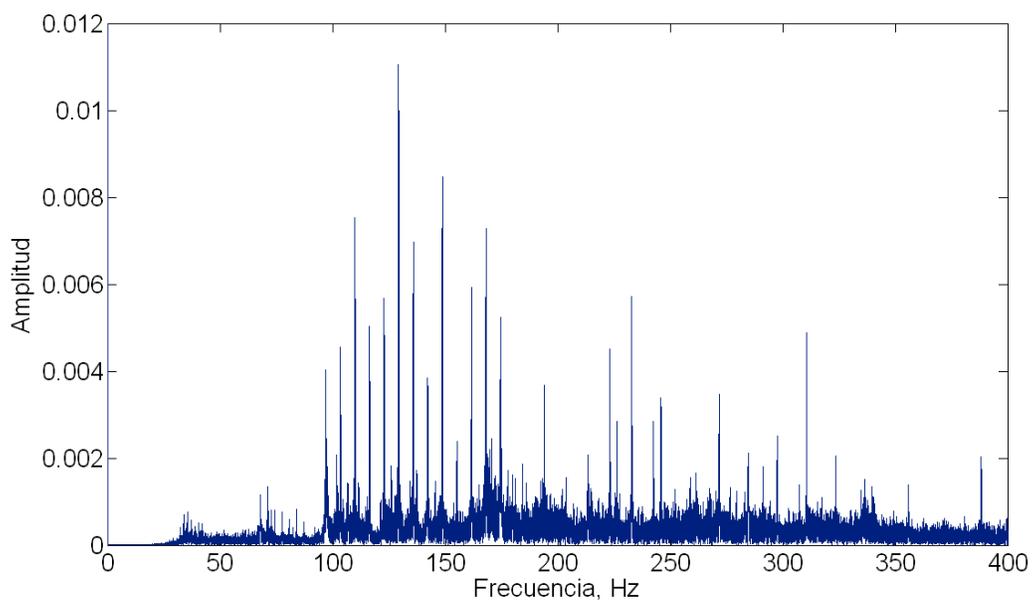


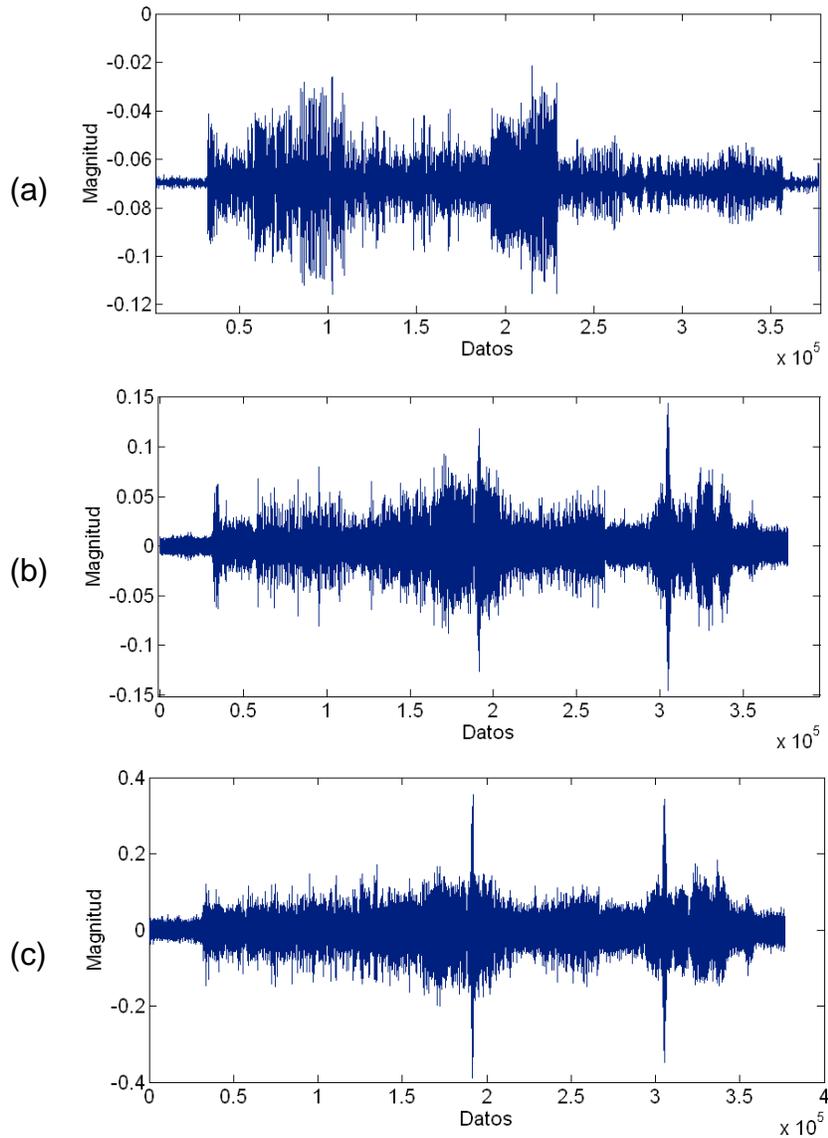
Figura 4.17: Análisis espectral de la prueba de corte con 5 mm de profundidad y velocidad ascendente entre 1500 y 2700 rpm.

En cambio, el proceso de descomposición jerárquica que implica el análisis de ondeletas permite encontrar información más detallada⁴. La señal de audio para el corte con 5 mm y velocidad ascendente se analizó mediante la ondeleta madre de Daubechies D4 con una descomposición jerárquica de 6 niveles.

En la Figura 4.18 se muestra la aproximación A_6 y los detalles D_1 , D_2 , D_3 , ..., D_6 . En el eje X se muestra el número de datos del registro original muestreado

⁴ En el Apéndice A.5 se presenta una descripción general de la transformada de ondeletas y sus ventajas con respecto al análisis espectral mediante FFT.

a una razón de 5000 muestras por segundo, mientras que en el eje Y se representa la magnitud de la señal capturada con el micrófono. Cada detalle muestra una naturaleza diferente, dada por su magnitud y escala, pero se demuestra que es posible reconstruir la señal original A_0 a partir de la suma de la aproximación A_6 y los detalles $D_1, D_2, D_3, \dots, D_6$.



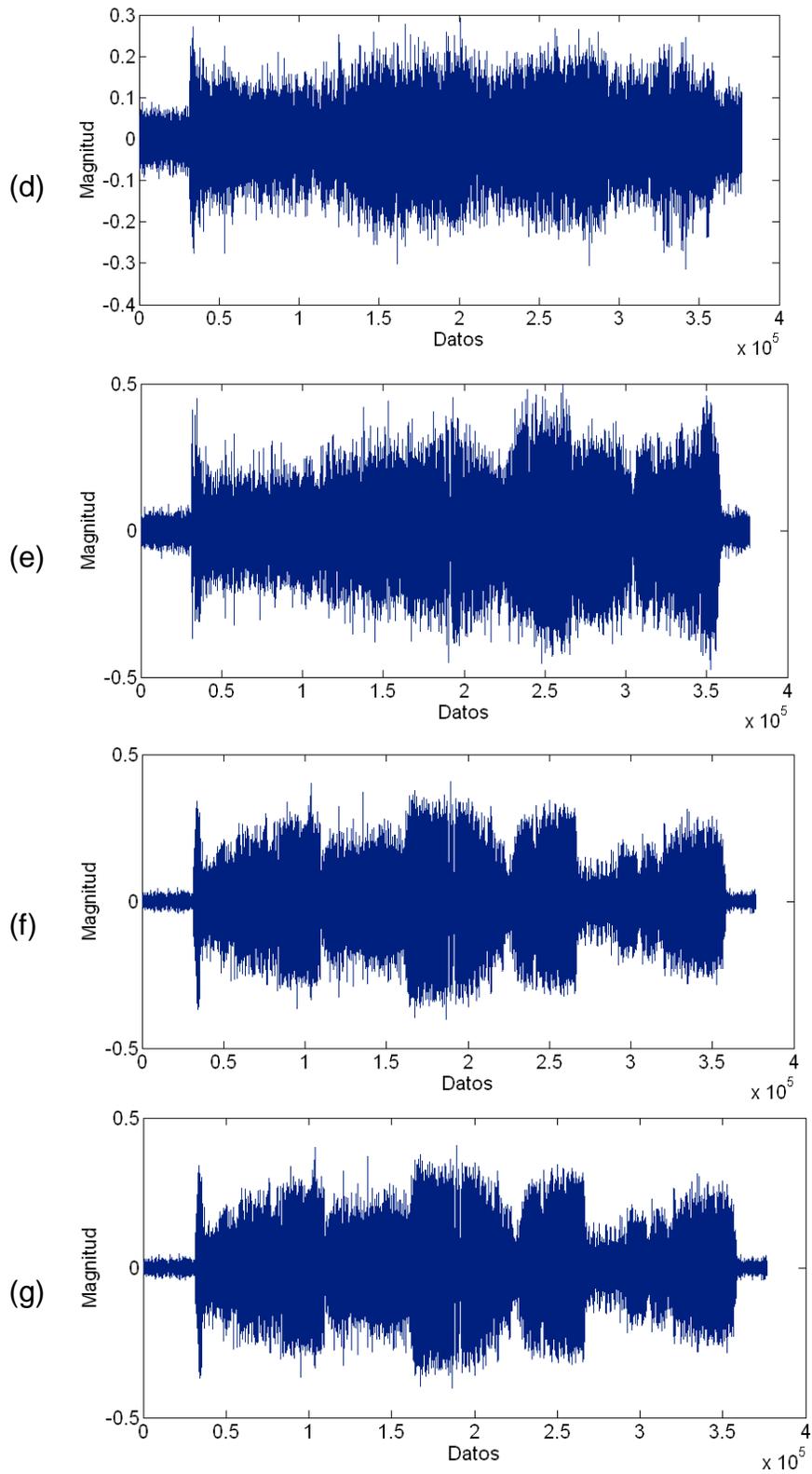


Figura 4.18: a) Aproximación A_6 y los detalles b) D_1 , c) D_2 , d) D_3 , ..., g) D_6 de la señal original mediante la ondeleta madre Daubechies D4.

Los coeficientes de escala y posición, a y b , obtenidos en la descomposición jerárquica de la señal original, se pueden representar gráficamente mediante las curvas tiempo-frecuencia de la Figura 4.19. La Figura 4.19a muestra un contorno de la distribución de energía de la señal por bandas de frecuencia mediante la ondeleta madre Paul, mientras que en la Figura 4.19b se representa la misma información en tres dimensiones. Estas curvas se construyeron con AutoSignal versión 1.7 (SeaSolve Software Inc., 1999-2003). Como se puede apreciar, las frecuencias de mayor energía corresponden a la frecuencia del paso de la herramienta, la cual varía entre 100 y 180 Hz (recordando que la herramienta de corte cuenta con cuatro filos).

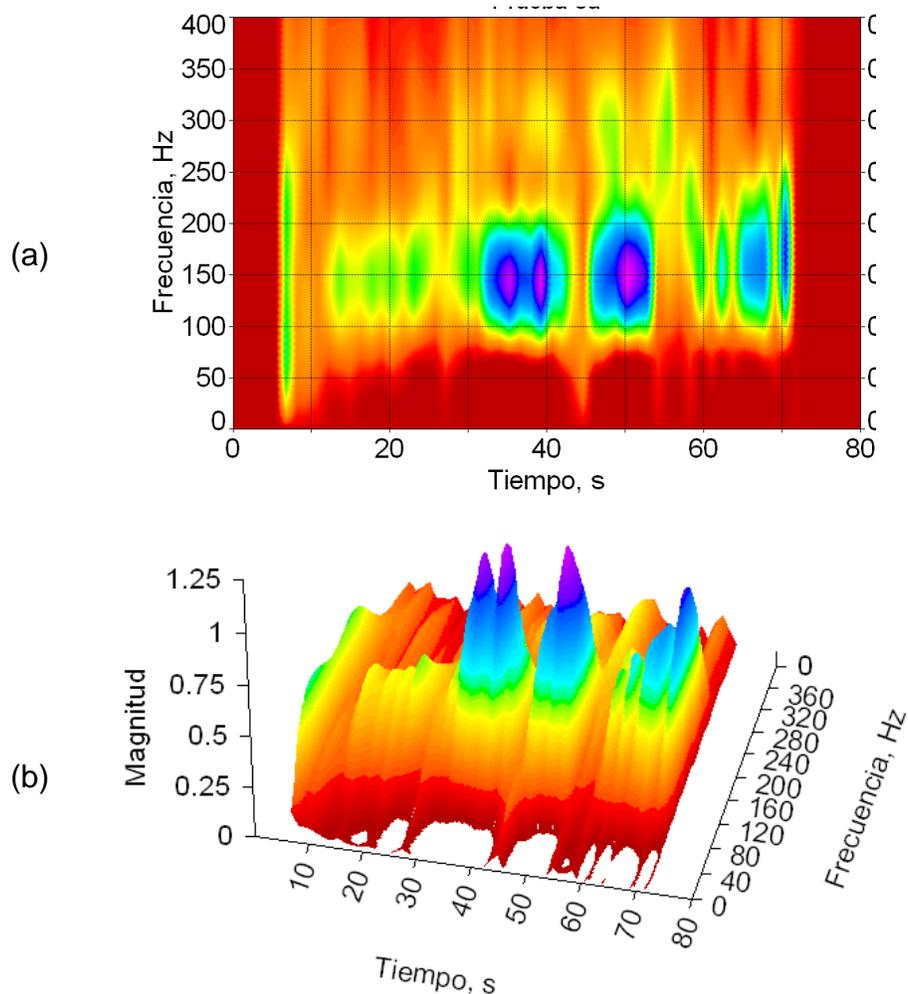


Figura 4.19: Análisis de ondeletas para la prueba de fresado con profundidad de corte de 5 mm y velocidad ascendente, entre 1500 y 2700 rpm; a) Contorno y b) Curva tiempo-frecuencia en tres dimensiones.

Los resultados del análisis de ondeletas coinciden con los resultados mostrados en las Figuras 4.11 y 4.14. Las zonas de mayor energía se presentan cuando las condiciones de proceso coinciden con el borde de estabilidad crítica de la Figura 4.11 y con las amplitudes de vibración más altas de la Figura 4.12. La información adicional del análisis de ondeletas es la identificación de la frecuencia que excita al sistema en tales condiciones.

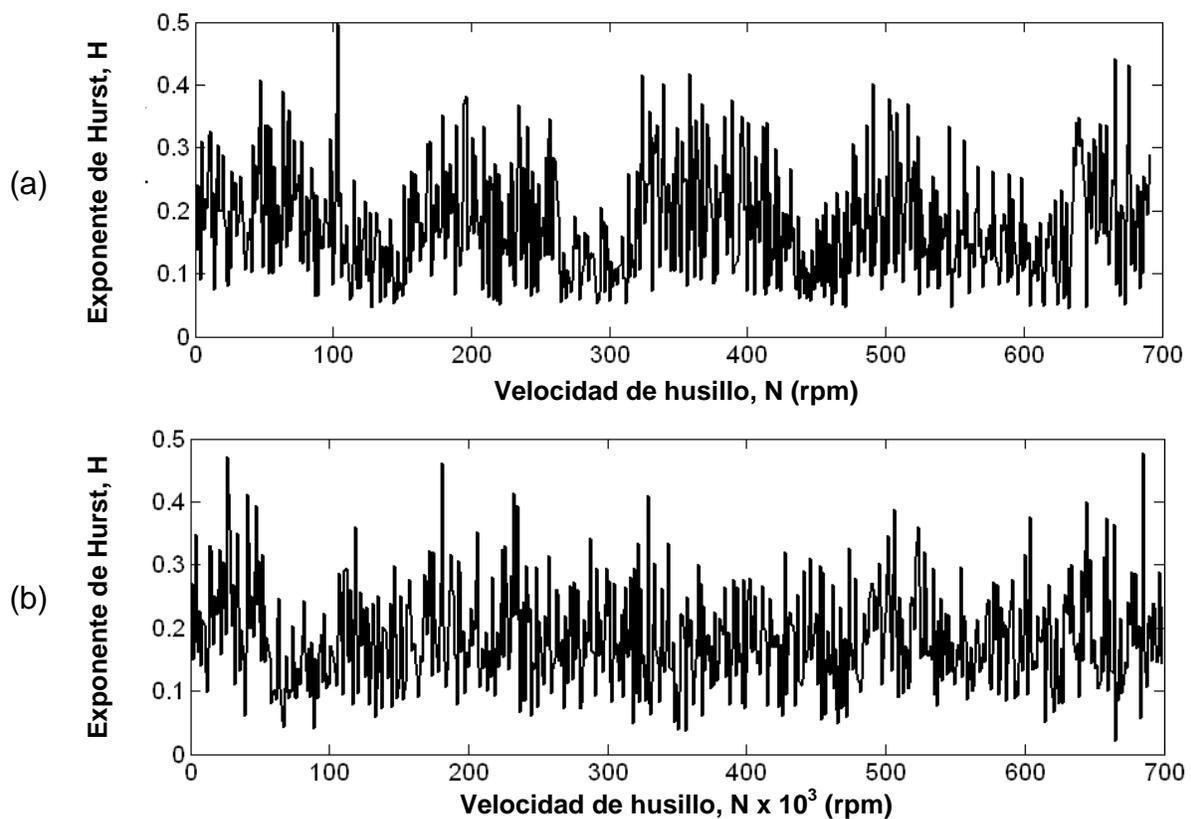
Un resultado interesante es el que se muestra entre 40 y 50 segundos, donde se aprecia una zona de baja energía correspondiente a una velocidad de 2200 rpm. Este resultado también se aprecia en los registros de sonido y las curvas rms de las Figuras 4.12a y 4.14a, respectivamente, y significa que aparentemente existe una zona estable entre la zona inestable señalada en el análisis de estabilidad lineal de la Figura 4.11.

De acuerdo con los resultados obtenidos, los índices de correlación que se obtienen en el proceso de descomposición jerárquica de la señal original, son indicadores del comportamiento dinámico de la señal original. Esto significa que el análisis es efectivo para la detección de las vibraciones auto-inducidas, aunque su procesamiento es relativamente lento si se pretende usar como herramienta de monitoreo en línea.

4.3.4. Estimación del exponente de Hurst con análisis fractal RS

Alternativo a los análisis anteriores, se realizó un análisis R/S con base en el algoritmo descrito en la Sección 3.4.3, para detectar la naturaleza fractal de las frecuencias auto-inducidas. Para ello se tomaron las señales registradas con audio, pero sólo de los experimentos con velocidad ascendente, presentadas en la Sección 4.3.1.

El número de datos registrados fue de 536000, 354000 y 358000, para profundidades de corte de 1, 2 y 5 mm, respectivamente. Se seleccionó una escala de tiempo (*span time*) de 500 muestras con 3 niveles de división, de manera que el tamaño de las regiones fue de 500, 250 y 125, respectivamente. Se obtuvo un total de 700 valores de H para cada serie de tiempo, distribuidas de acuerdo con la Figura 4.20. En estos resultados se muestra la dinámica del exponente de Hurst a lo largo de las tres series de tiempo, cuyos valores varían entre 0 y 0.5 para los tres registros; la velocidad del husillo en el eje horizontal se puede calcular como $N = 1500 + 1.71b$, donde b es el número de caja dentro del conjunto completo de datos, el cual varía entre 1 y 700; de acuerdo a las condiciones del experimento, se generaron 54 valores de H para cada velocidad constante.



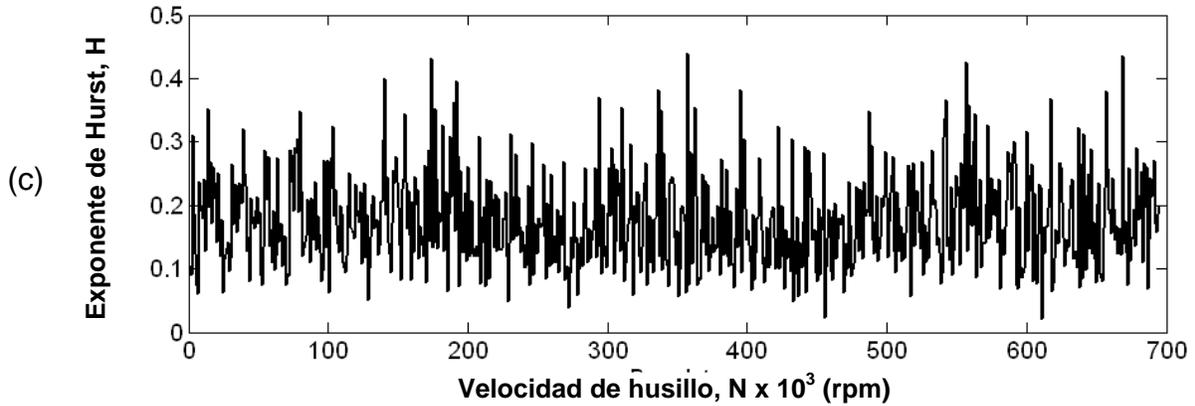
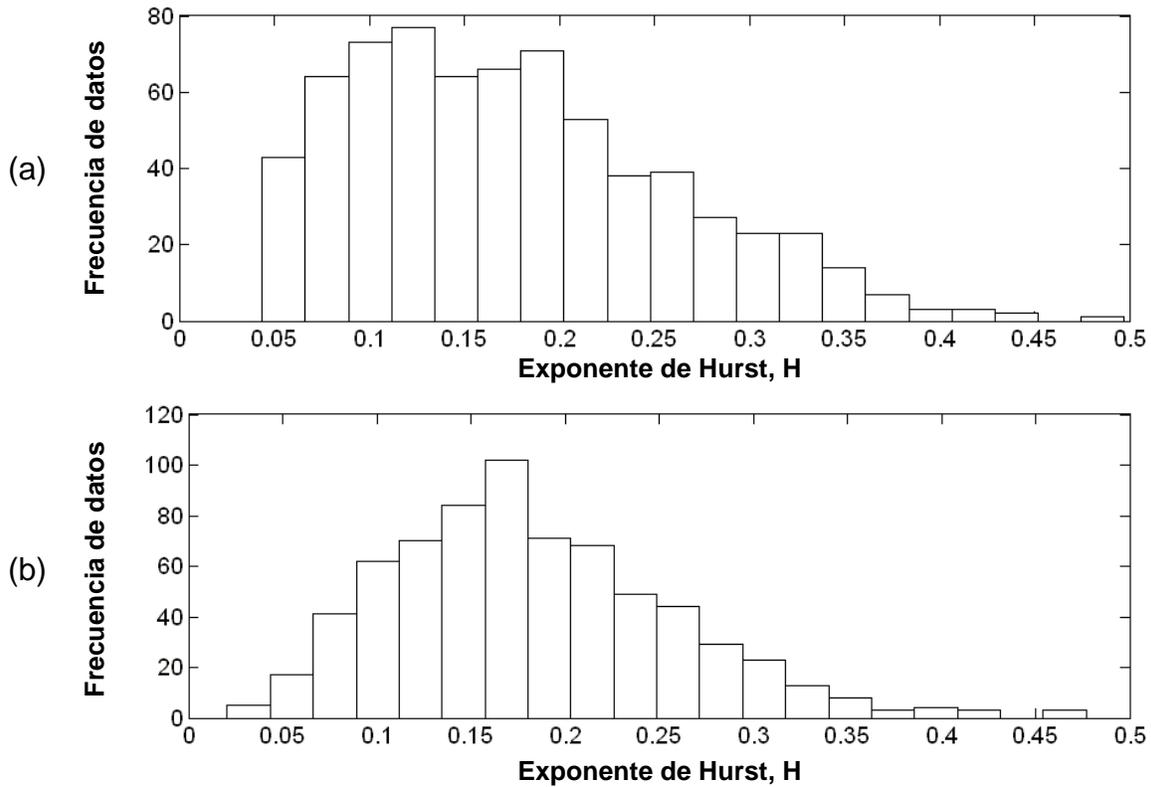


Figura 4.20: Exponente de Hurst para los experimentos de fresado con velocidad ascendente entre 1500 y 2700 rpm y profundidad de corte de a) 5, b) 2, y c) 1 mm.

La Figura 4.21 muestra la distribución del exponente de Hurst para las tres series de tiempo por medio de histogramas; el eje horizontal muestra 20 categorías del exponente de Hurst con valores entre 0 y 0.5, mientras que el eje vertical indica el número de veces que el valor de Hurst cae en esta categoría.



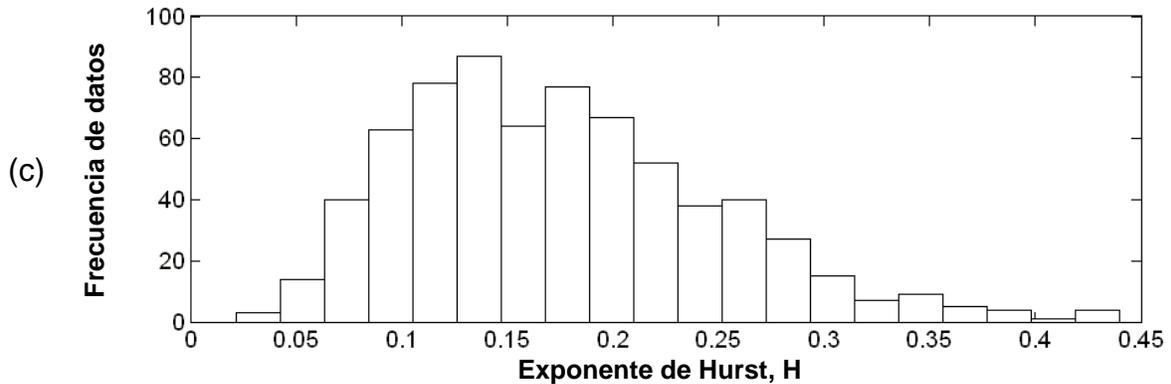


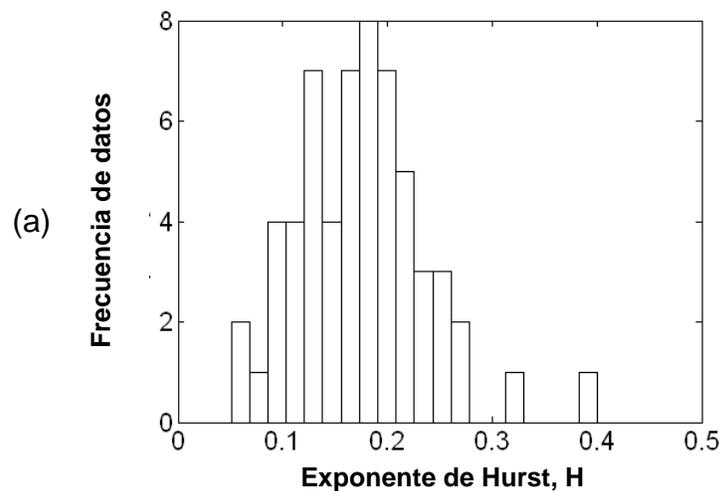
Figura 4.21: Histogramas del exponente de Hurst para los experimentos de fresado con velocidad ascendente entre 1500 y 2700 rpm y profundidad de corte de a) 5, b) 2, y c) 1 mm.

A primera vista no se detecta una diferencia significativa entre las series de tiempo, puesto que las tres series presentan un valor promedio de H alrededor de 0.20. Sin embargo, del análisis de estabilidad se sabe que las series de tiempo representan regímenes lineales y no lineales, alternadamente, al menos a profundidades de corte de 2 y 5 mm; por lo que es necesario un análisis más detallado de las series de tiempo.

De la Figura 4.21, se puede ver que el exponente de Hurst para la muestra experimental de 1 mm de profundidad (Figura 4.21c), varía entre 0.05 y 0.30, con un valor promedio de 0.18. La muestra experimental de 2 mm de profundidad presenta un valor promedio similar de 0.18; sin embargo, se presentan valores de H tan altos como 0.40, alrededor de velocidades de husillo de 1500, 1800, 1900 y 2600 rpm, las cuales representan transiciones a la inestabilidad, de acuerdo con la Figura 4.11. La muestra experimental de 5 mm de profundidad muestra cinco zonas con valores altos de H en 1500, 1800, 2100, 2400 y 2700 rpm, las cuales también corresponden a transiciones a la inestabilidad. Es importante destacar que a la velocidad del husillo de 2000 rpm, donde se alcanzan las peores condiciones de inestabilidad, el exponente de Hurst varía entre 0.05 y 0.15. Esto pareciera indicar que las vibraciones en estas condiciones tienden a ser periódicas y predecibles, aún cuando este comportamiento es indeseable durante el maquinado. Más bien se puede decir

que el exponente de Hurst detecta cambios importantes en la dinámica del sistema por medio de un valor alto de H ; sin embargo, una vez que las condiciones dinámicas permanecen invariantes, ya sea en una condición estable o inestable, el exponente de Hurst desciende.

En la Figura 4.22 se presenta un análisis más detallado del comportamiento del exponente de Hurst en condiciones estables y transiciones de estable a inestable, por medio de histogramas. Se investigaron las siguientes condiciones: a) 1650 – 1750 rpm, en 1 mm; b) 1850 – 1950 rpm, en 2 mm; c) 2400 – 2500 rpm, en 2 mm; y d) 1750 – 1850 rpm, en 5 mm. De acuerdo con los resultados, la mayoría de las señales en condiciones de corte estables (Figuras 4.21 a y c) muestran exponente de Hurst entre 0.18 y 0.30; mientras que transiciones de estable a inestable (Figuras 4.21 b y d) muestran valores adicionales de H más altos, entre 0.30 y 0.45.



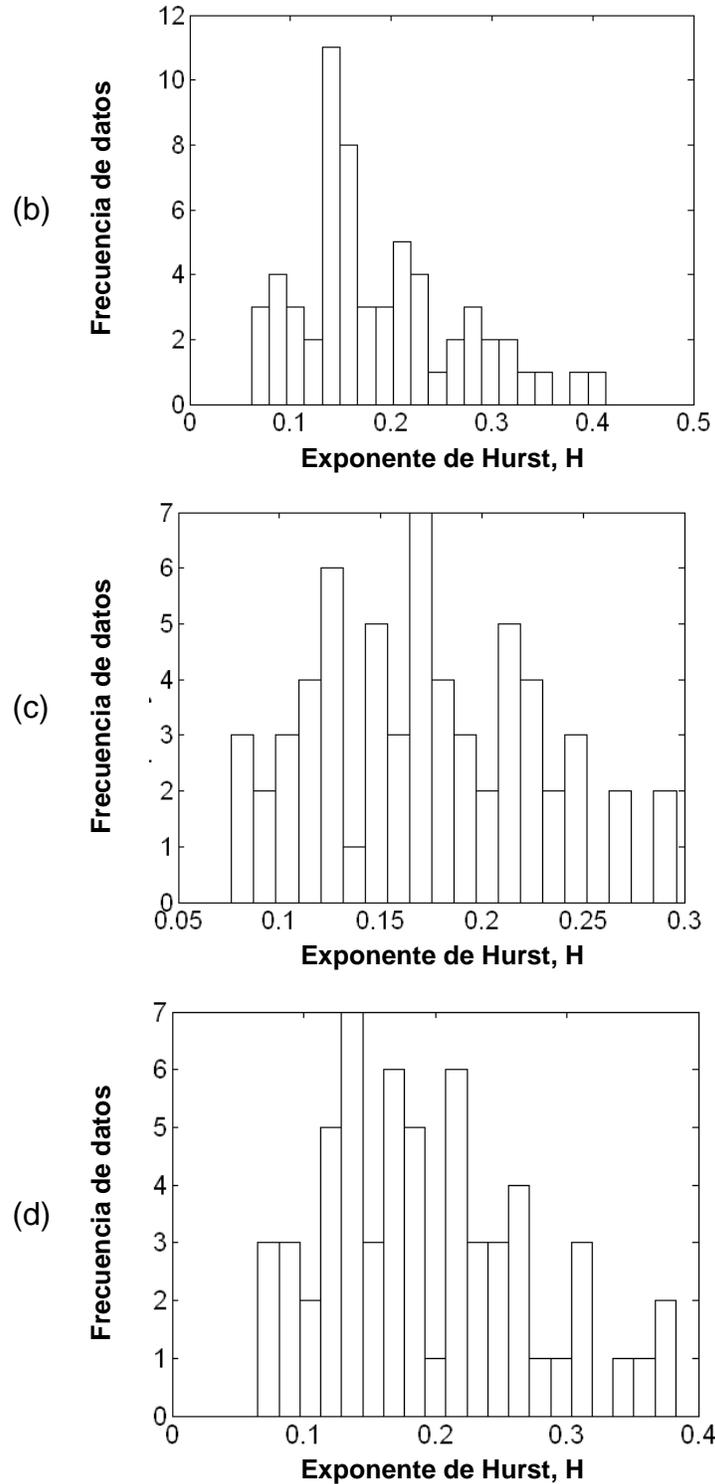


Figura 4.22: Distribución del exponente de Hurst en condiciones de corte específicas: a) 1650 – 1750 rpm, en 1 mm; b) 1850 – 1950 rpm, en 2 mm; c) 2400 – 2500 rpm, en 2 mm; y d) 1750 – 1850 rpm, en 5 mm.

Se observa un comportamiento anti-persistente en las tres profundidades de corte, puesto que todos los valores de H son menores a 0.5. Además, estos resultados concuerdan con los resultados experimentales del análisis rms y los teóricos del análisis predictivo, presentados previamente, puesto que una condición de vibración severa tiende a un comportamiento aleatorio impredecible (por lo tanto, no correlacionado) con un valor de H cercano a 0.5; mientras que un proceso estable muestra un comportamiento altamente predecible (regular) con un valor de H cercano a 0, tendiendo a un comportamiento cíclico. A partir de estos resultados, se puede establecer que un proceso de maquinado se vuelve inestable cuando el exponente de Hurst alcanza un valor de 0.30.

En la primera parte de este análisis se usaron series de tiempo extremadamente largas; sin embargo, en la segunda parte se demuestra que es posible obtener resultados precisos con tamaños de muestra entre 1000 y 5000 datos, una escala de tiempo del 10% y cuatro niveles de división. Por lo tanto, el método descrito en esta sección se puede utilizar como una técnica efectiva para predecir las vibraciones auto-inducidas durante el corte, con la ventaja adicional de que las señales de audio tomadas durante el corte son suficientes para obtener información confiable de la naturaleza del proceso.

4.3.5. Retratos de fase y secciones de Poincaré.

En esta sección se presentan los conceptos teóricos de retratos de fase y mapas de Poincaré para la identificación experimental de las vibraciones auto-inducidas en procesos de maquinado. Los retratos de fase describen el comportamiento complejo de sistemas dinámicos mediante trayectorias en el plano $x-\dot{x}$, donde x representa la posición y \dot{x} corresponde a la velocidad del sistema que se mueve a lo largo de la trayectoria. De esta manera, la naturaleza de los ciclos límite o comportamientos espirales reflejan la estabilidad del sistema dinámico.

Así mismo, los mapas o secciones de Poincaré representan el comportamiento de una trayectoria que cruza una superficie perpendicular al flujo de la misma después de un tiempo, por lo cual, el comportamiento de un punto fijo a través de dicha superficie también puede reflejar la naturaleza dinámica del sistema.

El diagrama de estabilidad de la Figura 4.23 representa un proceso de torneado con las siguientes características dinámicas y de proceso: $\omega_n = 173.25$ Hz, $\zeta = 0.033$, $\beta_1 = 18\,870\omega_n^2$ 1/m-s², $\beta_2 = 410 \times 10^6\omega_n^2$ 1/(m-s)², $k = 327.893 \times 10^6$ N/m, $K = 1000 \times 10^6$ N/m² y $h_0 = 0.1 \times 10^{-3}$ m/rev.

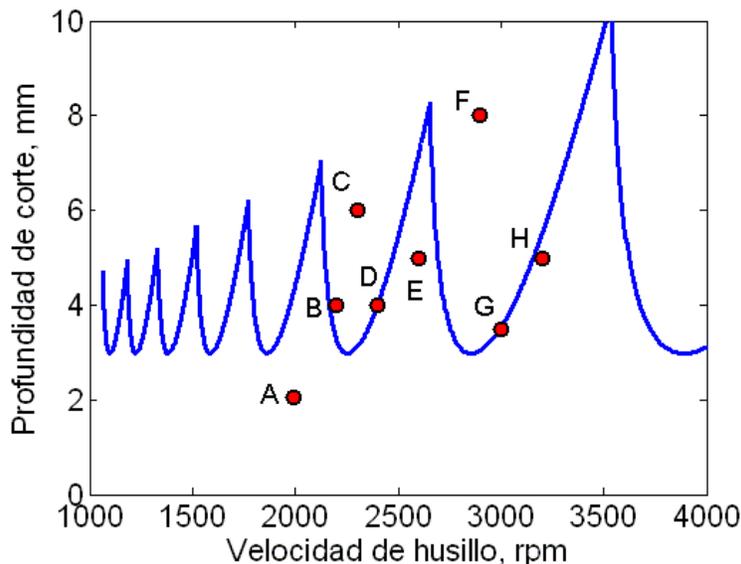
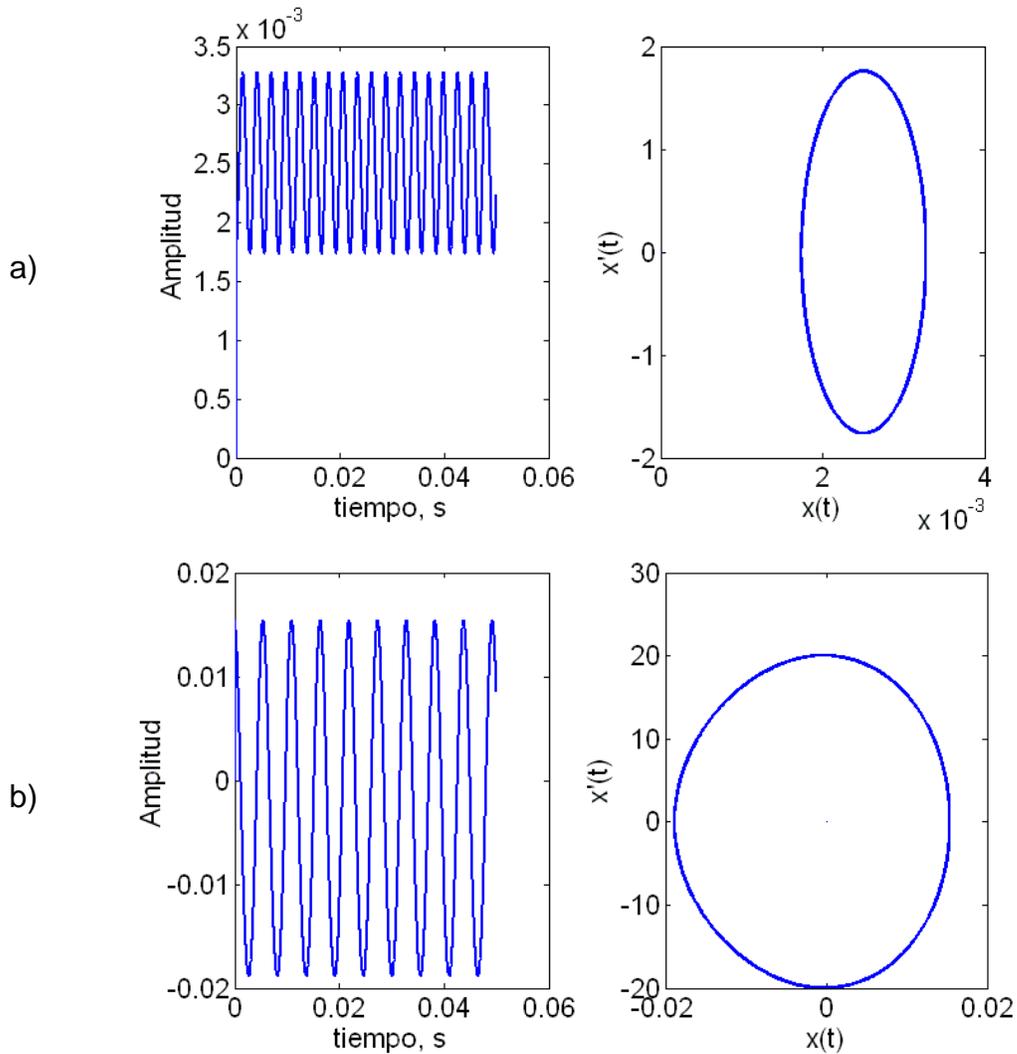


Figura 4.23: Condiciones de proceso críticas en el diagrama de estabilidad.

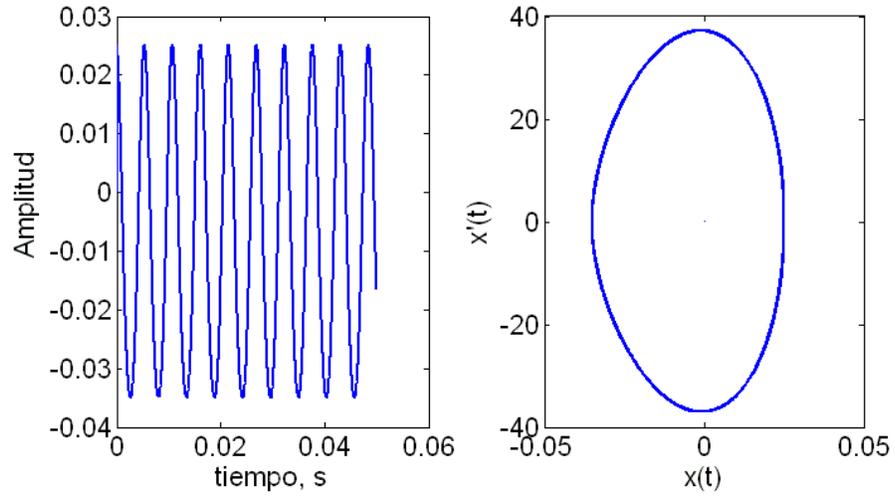
De acuerdo con los límites de estabilidad obtenidos en la Figura 4.23, se identifican las condiciones de proceso particulares descritas en el Cuadro 4.1. En la Figura 4.24 se muestran la solución en el dominio del tiempo y su correspondiente retrato de fase para cada condición de proceso y se analizan sus resultados.

Cuadro 4.1: Características dinámicas de los retratos de fase en condiciones de proceso críticas.

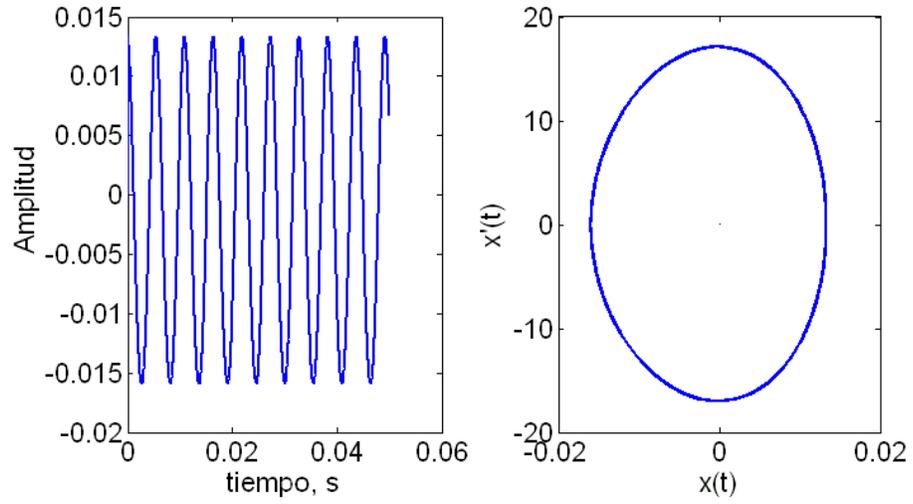
Caso No.	N (rpm)	b (mm)	Rango de desplazamiento relativo		Rango de velocidad relativa		Frecuencia (Hz)
A	2000	2	1.75	3.28	-1.76	1.76	357.14
B	2200	4	-18.8	15.4	-20	20	182.48
C	2300	6	-34.9	25.2	-37	37	186.57
D	2400	4	-15.9	13.3	-16.95	17.11	179.86
E	2600	5	8.5	17.8	-10.29	10.29	347.22
F	2900	8	-39.2	27.9	-42.59	42.59	189.39
G	3000	3.5	-24.3	18.7	-25.3	25.59	186.57
H	3200	5	13.9	15.6	-15.2	15.2	352.11



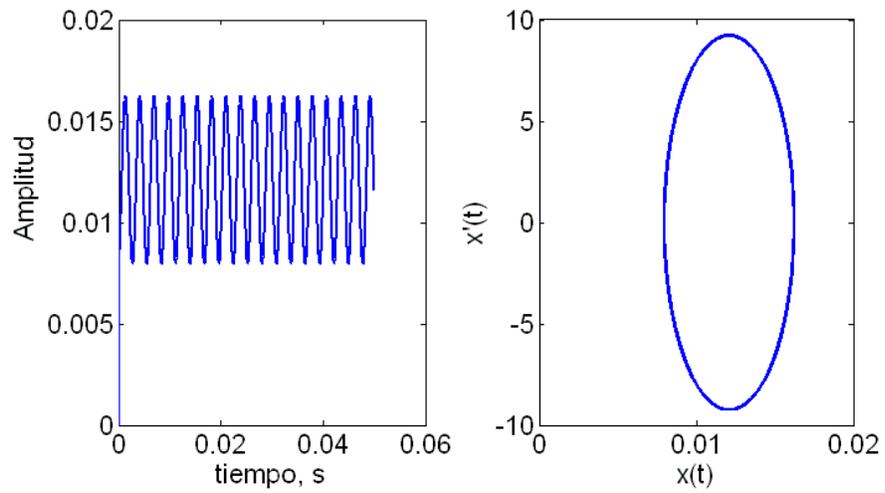
c)



d)



e)



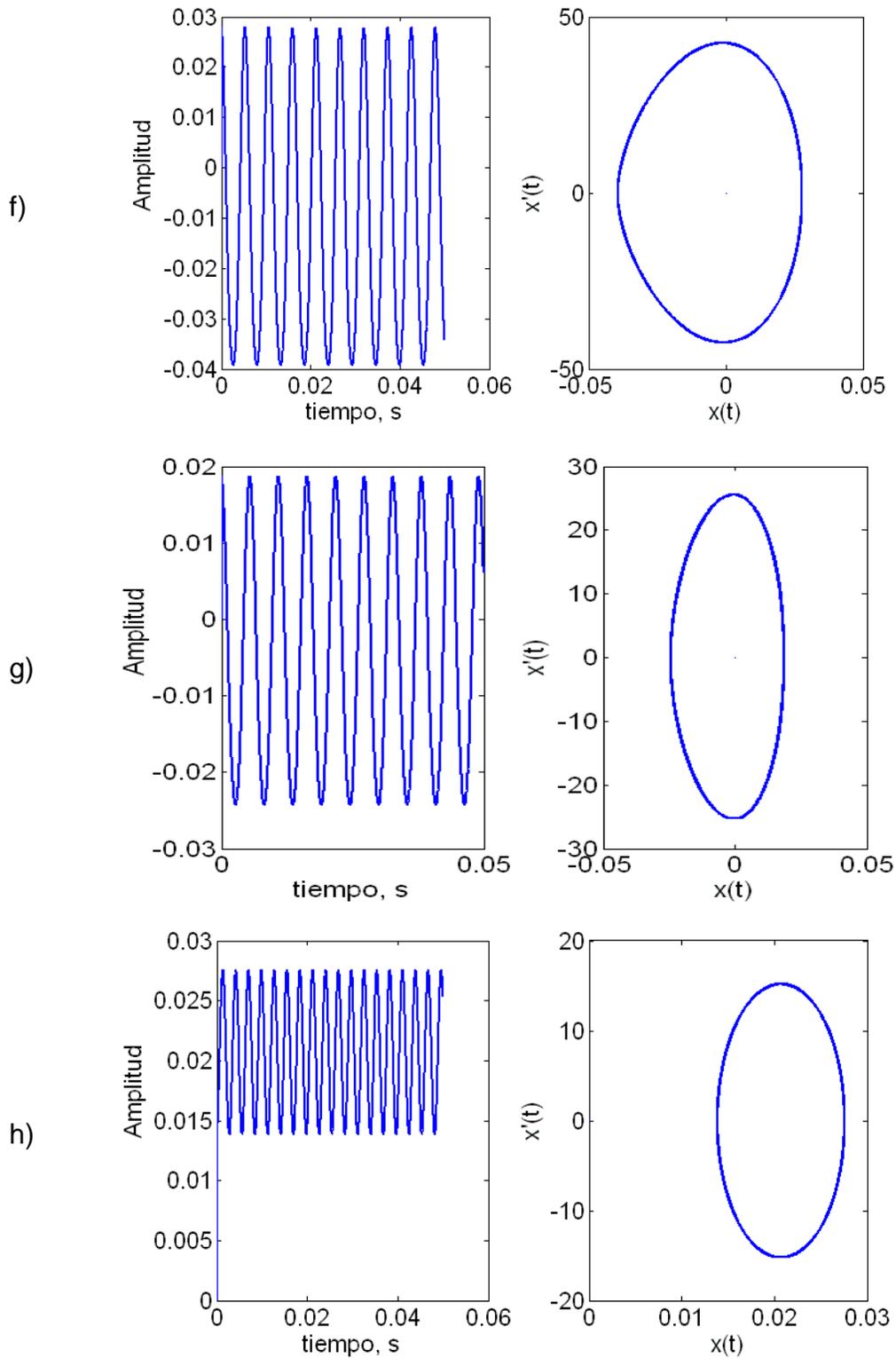
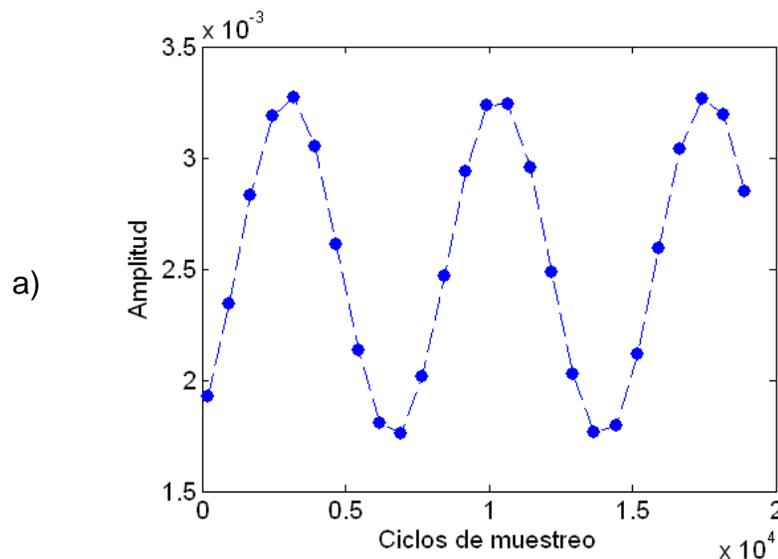


Figura 4.24: Soluciones en el dominio del tiempo y retratos de fase para las condiciones de proceso críticas del Cuadro 4.1.

De acuerdo con los resultados mostrados en la Figura 4.24 y el Cuadro 4.1, procesos estables, como A, E, y H se caracterizan por una frecuencia de oscilación alrededor de 350 Hz, además de que la amplitud del movimiento es siempre positiva; lo cual indica que se genera una superficie con una rugosidad alrededor de la superficie nominal. Por otro lado, los procesos inestables presentan una frecuencia de oscilación alrededor de 180 Hz, la cual es cercana a la frecuencia natural y por lo tanto indica la presencia de auto-inducción; los desplazamientos oscilan entre valores negativos y positivos con una magnitud mayor que en procesos estables, lo cual significa que la rugosidad superficial resultante estará fuera de especificaciones. Las condiciones más severas de vibración se presentan en las condiciones C y F, las cuales se encuentran en zonas altamente inestables y se refleja por grandes amplitudes de desplazamiento y velocidad.

Ahora, las condiciones anteriores se analizan por medio de un mapa de retorno siguiente, el cual es una extensión en el tiempo de la sección de Poincaré. La frecuencia de muestreo de la señal de desplazamientos es la frecuencia de excitación, la cual corresponde a la velocidad del husillo. Los resultados se muestran en la Figura 4.25, donde cada punto indica la posición de un punto fijo en cada período de rotación del husillo, para condiciones dinámicas particulares.



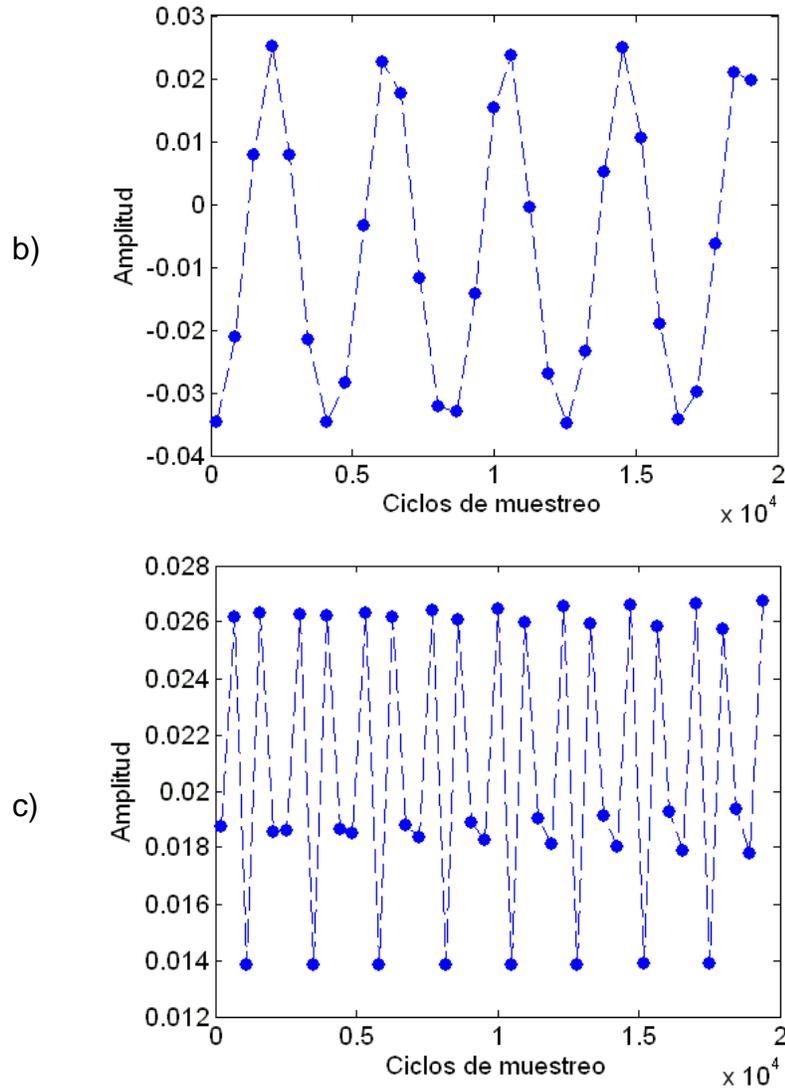


Figura 4.25: Mapas de retorno siguiente para los casos A, C y H.

Como se aprecia en la Figura 4.25, el proceso estable de la condición A, el punto fijo oscila en un ciclo límite estable regular; mientras que en el proceso inestable en C, el punto fijo oscila en un ciclo límite cuya amplitud presenta variaciones relativamente significativas. El caso H muestra un resultado interesante puesto que muestra un punto fijo que oscila con diferentes frecuencias. Esto indica que en esta zona de la curva de estabilidad existe una naturaleza dinámica caracterizada por movimientos de alta amplitud, tanto de desplazamientos como de velocidad.

CONCLUSIONES

Una primera hipótesis que se planteó al inicio de la investigación fue que la inestabilidad del proceso de maquinado tenía su origen en el movimiento relativo entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo, más que por el efecto regenerativo. Bajo esta consideración, se desarrolló un nuevo modelo analítico para la predicción de vibraciones auto-inducidas en torneado, en términos del acoplamiento entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo. En esta formulación se tomaron en cuenta las características dinámicas de la herramienta de corte y la pieza de trabajo, con el objetivo de obtener una mejor aproximación al comportamiento del fenómeno físico. Las predicciones analíticas del modelo propuesto se compararon con soluciones numéricas reportadas en la literatura. El modelo acoplado predijo una región de estabilidad mayor que la reportada por un modelo de un grado de libertad, en el cual se ignoraron las vibraciones de la herramienta de corte. Se analizó el efecto de diferentes características dinámicas sobre la estabilidad del sistema, tanto en la herramienta de corte como en la pieza de trabajo. De este análisis se encontró que la estabilidad disminuyó significativamente cuando ambas partes, la herramienta de corte y la pieza de trabajo, presentaban características dinámicas similares. Además, la estabilidad aumentó notablemente con una alta razón de amortiguamiento en la herramienta de corte, fundamentalmente cuando la herramienta de corte era de baja rigidez; de otro modo, la mejora no era significativa. Sin embargo, una herramienta de corte muy rígida no mejoró la estabilidad de manera significativa. Por lo tanto, este método es útil para predecir los límites de estabilidad con mayor precisión cuando las características dinámicas de la herramienta de corte y la pieza de trabajo son similares, o cuando se emplean herramientas de corte esbeltas. Además, este método también puede ser útil en el diseño de absorbedores de vibración pasivos, mediante la simulación del efecto de la razón de amortiguamiento en la estabilidad del proceso de torneado.

El análisis de movimiento relativo permitió encontrar un modelo acoplado en el cual se tomaron en cuenta las características dinámicas de la herramienta de corte y la pieza de trabajo. Este análisis demostró la influencia del movimiento relativo de ambos cuerpos en la estabilidad del sistema, aunque se confirmó al efecto regenerativo del espesor de la viruta como la fuente primaria de la inestabilidad, descartando así la hipótesis propuesta en un inicio.

Con el objetivo de demostrar la hipótesis fundamental de esta investigación, y con base en la revisión literaria, se seleccionó el modelo de Duffing cuyo comportamiento dinámico era afín al reportado experimentalmente, pero con términos adicionales que incluían términos cuadráticos y cúbicos para la rigidez estructural y las fuerzas de corte regenerativas. El modelo se resolvió con el método de escalas múltiples y se confirmó que las vibraciones auto-inducidas estaban caracterizadas por comportamientos no lineales como ciclos límite y el fenómeno de salto, éste último representado por la histéresis en la amplitud de la respuesta. Con el análisis de perturbación se construyó una solución aproximada del sistema y se establecieron condiciones de inestabilidad debido a bifurcaciones subcríticas Hopf, a partir del análisis de los eigenvalores del sistema dinámico en su forma normal. Una contribución importante de este análisis es la representación de la histéresis del sistema en las curvas de estabilidad convencionales, por medio de nuevas curvas intermedias, lo cual puede ser útil para establecer técnicas de restauración de la estabilidad. Del análisis de los términos no lineales, se encontró que el término cúbico representó mejor el comportamiento no lineal del sistema, mientras que el término cuadrático generó resultados inesperados. Por lo tanto, se concluye que el modelo débilmente no lineal con un término cúbico, es apropiado para representar vibraciones auto-inducidas en procesos de maquinado. El modelo propuesto se limita al análisis del proceso de torneado continuo de un grado de libertad; sin embargo, este análisis se puede extender al proceso de fresado con la caracterización de las no linealidades estructurales.

Los experimentos realizados fueron planeados para confirmar el fenómeno de salto alrededor de la frecuencia natural, o alguno de sus armónicos, del sistema dinámico. También se confirmó la efectividad de señales de audio tomadas durante el proceso de maquinado para captar información confiable sobre la naturaleza no lineal del fenómeno físico, lo cual valida su uso como una herramienta práctica para implantar una estrategia de monitoreo y control de vibraciones. Además, la medición de la respuesta dinámica alrededor de una condición de alta inestabilidad permitió caracterizar el término cúbico, con base en la solución aproximada que se construyó mediante el análisis de perturbación del modelo propuesto.

En el análisis de las señales se emplearon técnicas convencionales, como análisis espectral (FFT), y técnicas no convencionales, como la transformada de ondeletas (wavelets) y análisis R/S. El análisis de ondeletas permitió detectar las condiciones de inestabilidad mediante diagramas tiempo-frecuencia. Este análisis coincidió con las predicciones del análisis lineal pero permitió detectar zonas de estabilidad dentro de regiones aparentemente inestables. El análisis R/S se mostró como una técnica efectiva para detectar el comportamiento no lineal de las vibraciones en maquinado, con lo cual se confirmó la naturaleza fractal de las vibraciones auto-inducidas. La naturaleza no lineal de las vibraciones se identificó mediante el exponente de Hurst de las señales. El análisis R/S coincidió perfectamente con los resultados experimentales y teóricos; debido a su relativa facilidad de implementación, se puede considerar como una técnica efectiva para monitoreo de señales y detección de comportamientos de inestabilidad dinámica.

Finalmente, la hipótesis de la investigación quedó demostrada. El análisis no lineal del problema de las vibraciones auto-inducidas en procesos de maquinado permitió evaluar el efecto de la histéresis de la respuesta dinámica en los diagramas de estabilidad convencionales. Además, el análisis de perturbación permitió construir una solución aproximada con la cual fue posible caracterizar la rigidez no lineal mediante el término cúbico del modelo débilmente no lineal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]. Agilent Technologies, 2000, The fundamentals of signal analysis, Application Note 243, USA.
- [2]. Agilent Technologies, 2000, The fundamentals of modal testing, Application Note 243-3, USA.
- [3]. Altintas, Y. and E. Budak. 1995. Analytical prediction of stability lobes in milling. CIRP Annals 44 (1): 357-362.
- [4]. Altintas, Y., S. Engin, and E. Budak. 1999. Analytical stability prediction and design of variable pitch cutters. Transactions of the ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering 121: 173-178.
- [5]. Altintas, Y. 2000. Manufacturing automation, metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design. Cambridge University Press (1st Ed.), New York.
- [6]. Alvarez-Ramirez, J. 2002. Characteristic time scales in the American dollar–Mexican peso exchange currency market. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 309 (1 – 2): 157 – 170.
- [7]. Alvarez-Ramirez, J., M. Cisneros, C. Ibarra-Valdez, and A. Soriano. 2002. Multifractal Hurst analysis of crude oil prices. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 313 (3 – 4): 651 – 670.
- [8]. Amstead, B. H., F. Ostwald, and M. L. Begeman. 1981. Procesos de manufactura versión SI. CECSA, México.
- [9]. Arnold, R. N. 1946. The mechanism of tool vibration in the cutting of steel, in: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 154: 261-284.
- [10]. Aronson, R. 1998. Chaotic Systems and Manufacturing. Manufacturing Engineering 121 (3): 38-43
- [11]. Arruda Santiatgo de, D. F. and R. Pederiva. 2004. Application of wavelet transform to detect faults in rotating machinery. ABCM Symposium Series in Mechatronics 1 616-624.
- [12]. Astakhov, V. P. 1998. Metal Cutting Mechanics (1st Ed.), CRC Press LLC, USA.

- [13]. Bayly, P. V., B. P. Mann, G. Stépán, and T. Insperger. 2002. Effects of radial immersion and cutting direction on chatter instability in end-milling. In: Proceedings of IMECE2002, ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition. New Orleans, 17-22 Nov., IMECE2002-39116.
- [14]. Bayly, P. V., J. E. Halley, B. P. Mann, and M. A. Davies. 2003. Stability of interrupted cutting by temporal finite element analysis. *Journal of Manufacturing Science and Engineering Trans. of the ASME* 125 (2): 220 – 225.
- [15]. Bravo, U., O. Altuzarra, L. N. López de Lacalle, J. A. Sánchez, and F. J. Campa. 2005. Stability limits of milling considering the flexibility of the workpiece and the machine. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 45 (15):1669-1680.
- [16]. Brecher, C., A. Schulz, and M. Week. 2005. Electrohydraulic Active Damping System. *CIRP Annals* 54 (1): 389 – 392.
- [17]. Budak, E. and Y. Altintas. 1998. Analytical prediction of chatter stability in milling-Part I: General formulation. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 120: 22 – 30.
- [18]. Budak, E. and Y. Altintas. 1998. Analytical prediction of chatter stability in milling-Part II: Application of the general formulation to common milling systems. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 120: 31 – 36.
- [19]. Chang, T-C, R. A. Wysk and H-P Wang. 1998. *Computer-Aided Manufacturing*, Second Edition, Prentice Hall Inc. New Jersey.
- [20]. Chen, C. K., and Y. M. Tsao. 2006. A stability analysis of regenerative chatter in turning process without using tailstock. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 29: 648-654.
- [21]. Childs, T. H. C., K. Maekawa, T. Obikawa, and Y. Yamane. 2000. *Metal Machining Theory and Applications* (1st Ed.), Arnold, London.
- [22]. Cloud, G. L. 1995. *Optical Methods of Engineering Analysis*, Cambridge University Press.

- [23]. CNN Expansión.com 2008. PIB nominal de México sube a 10.9%, <http://www.cnnexpansion.com/economia//2008/08/27/pib-nominal-de-mexico-suba-a-10-9>
- [24]. Cohen, L. 1995. Time-Frequency Analysis, Prentice-Hall Inc. New Jersey.
- [25]. Collin M. 2006. Acceleration, Velocity and Displacement Spectra – Omega Arithmetic, Prosig Signal Processing Tutorials.
- [26]. Cut Pro, 2007. Manufacturing Automation Laboratories Inc. University of British Columbia, Vancouver, <http://www.malinc.com>
- [27]. Delio T., J. Tlusty, and S. Smith. 1992. Use of audio signals for chatter detection and control. *Journal of Sound and Vibration* 114: 146 – 157.
- [28]. Delio, T. and D. Dilley. 2004. Machine tool vibration monitoring using audio signal analysis. 1st Annual Manufacturing Technology Summit, Dearborn, MI.
- [29]. Ewins, D. J. 2001. *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, Research Studies Press.
- [30]. Faassen, R. P. H., N. Wouw van de, J. A. J. Oosterling, and H. Nijmeijer. 2003. Prediction of regenerative chatter by modeling and analysis of high-speed milling. *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 43 (14): 1437 – 1446.
- [31]. Feder, J. 1988. *Fractals*. Plenum Press, New York and London.
- [32]. Fofana, M. S. 2002a. Effect of regenerative process on the sample stability of a multiple delay differential equation. *Chaos, Solitons & Fractals* 14 (2): 301 – 309.
- [33]. Fofana, M. S. 2002b. Sufficient conditions for the stability of single and multiple regenerative chatter, *Chaos, Solitons & Fractals* 14 (2): 335 – 347.
- [34]. Fofana, M. S. 2002c. Aspects of stable and unstable machining by Hopf bifurcation, *Applied Mathematical Modelling* 26 (10): 953 – 973.
- [35]. Fofana, M. S. 2003. Delay dynamical systems and applications to nonlinear machine-tool chatter, *Chaos, Solitons & Fractals* 17 (4): 731 – 747.
- [36]. Fofana, M. S. and P. B. Ryba. 2004. Parametric stability of non-linear time delay equations, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 39 (1): 79 – 91.

- [37]. Ganguli, A. 2005. Chatter reduction through active vibration damping, Ph. D. Dissertation, Université Libre de Bruxelles.
- [38]. González-Brambila, O., E. Rubio, J. C. Jáuregui, and G. Herrera-Ruiz. 2006. Chattering detection in cylindrical grinding processes using wavelet transform. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 46 (15): 1934 – 1938.
- [39]. Gradisek, J., M. Kalveram, T. Insperger, K. Weiner, G. Stépán, E. Govekar, and I. Grabec. 2005. On stability prediction for milling, *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 45 (7-8): 769-781.
- [40]. Guckenheimer, J. 1983. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. In: P. Holmes (Ed.) Springer, New York.
- [41]. Hanna, N. H., and S. A. Tobias. 1974. A theory of nonlinear regenerative chatter. *Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry* 96: 247 – 255.
- [42]. Hilborn, R. C. 1994. *Chaos and Nonlinear Dynamics. An Introduction for Scientists and Engineers.* Oxford University Press, New York.
- [43]. Hurst, H. E., R. P. Black, and Y. M. Simaika. 1965. *Long-Term Storage: An Experimental Study.* Constable, London.
- [44]. Hwang, C. C., R. F. Fung, and J. S. Lin. 1997. Strong-nonlinear dynamics of cutting processes. *Journal of Sound and Vibration* 203 (3): 363 – 372.
- [45]. Inegi, 2007. Banco de Información Económica BIE, <http://dgcnesyp.inegi.org.mx/bdie.html>
- [46]. Inman, D. J. 2001. *Engineering Vibration (2nd Ed.).* Prentice Hall, USA.
- [47]. Insperger, T. and G. Stépán. 2000. Stability of high-speed milling, in: *Proceedings of the Symposium on Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics*, Orlando, 119 – 123.
- [48]. Insperger, T. and G. Stépán. 2002. Semi-discretization method for delayed systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 55 (5): 503 – 518.
- [49]. Insperger, T., T. L. Schmitz, T. J. Burns, and G. Stépán. 2003. Comparison of analytical and numerical simulations for variable spindle speed turning. In:

- Proceedings of IMECE'03, 2003 ASME International Mechanical Engineering Congress, Washington, 16 – 21 Nov., IMECE2003-41809.
- [50]. Insperger, T., B. P. Mann, G. Stépán, and P. V. Bayly. 2003. Stability of up-milling and down-milling, Part 1: Alternative analytical methods, *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 43 (1): 25 – 34.
- [51]. Insperger, T., G. Stépán, P. V. Bayly, and B. P. Mann. 2003. Multiple chatter frequencies in milling processes. *Journal of Sound and Vibration* 262 (2): 333 – 345.
- [52]. Insperger, T. and G. Stépán. 2004a. Stability analysis of turning with periodic spindle speed modulation via semidiscretization. *Journal of Vibration and Control* 10: 1835 – 1855.
- [53]. Insperger, T. and G. Stépán. 2004b. Updated semi-discretization method for periodic delayed-differential equations with discrete delay. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (1): 117 – 141.
- [54]. Insperger, T., G. Stépán, F. Hartung, and J. Turi. 2005. State dependent regenerative delay in milling processes. In: *Proceedings of IDETC/CIE 2005, ASME 2005 International Design Eng. Technical Conf. & Computers and Information in Eng. Conf.*, Long Beach, 24-28 Sept., DETC2005-85282.
- [55]. Kalmár-Nagy, T., J. R. Pratt, M. A. Davies, and M. D. Kennedy. 1999. Experimental and analytical investigation of the subcritical instability in metal cutting. In: *Proceedings of DETC'99, 17th ASME Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Las Vegas, 12-15 Sept. DETC99/VIB-8060.
- [56]. Kalmár-Nagy, T., G. Stépán, and F. C. Moon. 2001. Subcritical Hopf bifurcation in the delay equation model for machine tool vibrations. *Nonlinear Dynamics* 26: 121 – 142.
- [57]. Luenberger, D. 1979. *Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models, & Applications*, John Wiley & Sons, USA.
- [58]. Mann, B. P., T. Insperger, P. V. Bayly, and G. Stépán. 2003. Stability of up-milling and down-milling, Part 2: Experimental verification, *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 43 (1): 35 – 40.

- [59]. Mann, B. P., P. V. Bayly, M. A. Davies, and J. E. Halley. 2004. Limit cycles, bifurcations, and accuracy of the milling process. *Journal of Sound and Vibration* 277: 31 – 48.
- [60]. Mann, B. P., K. A. Young, T. L. Schmitz, and D. N. Dilley. 2005. Simultaneous stability and surface location error predictions in milling. *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering* 127 (3): 446 – 453.
- [61]. Mann, B. P., N. K. Garg, K. A. Young, and A. M. Helvey. 2005. Milling bifurcations from structural asymmetry and nonlinear regeneration. *Nonlinear Dynamics*, 42: 319 – 337.
- [62]. Matlab, 1984-2004. Matlab Help version 7.0 (R14). The Mathworks Inc.
- [63]. Merrit, H. E. 1965. Theory of self-excited machine-tool chatter. *Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry* 87 (4): 447 – 454.
- [64]. Metalmax, 2007. High Performance Machining Specialists, Manufacturing Laboratories, Inc. Las Vegas, <http://www.mfg-labs.com>
- [65]. Moon, F. C., and T. Kalmár-Nagy. 2001. Nonlinear models for complex dynamics in cutting materials. *Phil. Trans. Royal Society London* 359: 695 – 711.
- [66]. Nayfeh, A. H., and D. T. Mook. 1995. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, USA.
- [67]. National Instruments. 2006. Signal processing tutorial, NI developer zone, USA.
- [68]. National Instruments. 2006. The fundamentals of FFT-Based signal analysis and measurement in LabVIEW and LabWindows/CVI, Document version 4, USA.
- [69]. Peters, E. E. 1996. *Chaos and Order in the Capital Markets*, Second Edition, John Wiley and Sons.
- [70]. Pratt, J. R. and A. H. Nayfeh. 1997. Vibration control for chatter suppression. Ph. D. Dissertation. Virginia Polytechnic Institute and State University.
- [71]. Qian, B., and K. Rasheed. 2004. Hurst Exponent and Financial Market Predictability, in: M. H. Hamza (Ed.) *Financial and Engineering Applications*. MIT Cambridge USA.

- [72]. Schmitz, T. L. 2003. Chatter recognition by a statistical evaluation of the synchronously sampled audio signal. *Journal of Sound and Vibration* 262 (3): 721 – 730.
- [73]. Shabana, A. 1998. *Dynamics of multibody systems* (2nd Ed.) Cambridge University Press, USA.
- [74]. Shearer, J. 1997. *Dynamic modeling and control of engineering systems* (2nd Ed.) Prentice Hall, USA.
- [75]. Sims, N. D. and Y. Zhang. 2003. Active Damping for Chatter Reduction in High Speed Machining. *AMAS Workshop on Smart Materials and Structures, Jadwisin*, 195 – 212.
- [76]. Sims, N. D., P. V. Bayly, and K. A. Young. 2005. Piezoelectric Sensors and Actuators for Milling Tool Stability Lobes. *Journal of Sound and Vibration*, 281 (3 – 5): 743 – 762.
- [77]. Smith K. S. 1987. *Automatic Selection of the Optimum Spindle Speed in High Speed Milling*. Ph. D. Dissertation, University of Florida, Gainesville.
- [78]. Smith, J. O. 2007. *Introduction to Digital Filters with Audio Applications*. W3K Publishing, USA.
- [79]. Stépán, G. and T. Kalmár-Nagy. 1997. Nonlinear regenerative machine tool vibrations. In: *Proceedings of the 17th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, ASME Design Engineering Technical Conferences, Sacramento, DETC 97/VIB-4021*.
- [80]. Stépán, G., R. Szalai, and T. Insperger. 2003. Nonlinear dynamics of high-speed milling subjected to regenerative effect. In: G. Radons (Ed.) *Nonlinear Dynamics of Production Systems*, Wiley-VCH, New York.
- [81]. Stépán, G., R. Szalai, B. P. Mann, P. V. Bayly, T. Insperger, J. Gradisek, and E. Govekar. 2005. Nonlinear dynamics of high-speed milling – Analyses, numerics and experiments. *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 127: 197-203.
- [82]. Stépán, G., T. Insperger, and R. Szalai. 2005. Delay, parametric excitation, and the nonlinear dynamics of cutting processes. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 15 (9): 2783 – 2798.

- [83]. Strogatz, S. H. 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering (5th Ed.)*, Perseus Books, USA.
- [84]. Szalai, R., and G. Stépán. 2006. Lobes and lenses in the stability chart of interrupted turning. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Transactions of the ASME* 1 (3): 205 – 211.
- [85]. Taylor, F. 1907. On the art of cutting metals, *Transactions of the ASME* 28: 31 – 350.
- [86]. Thomson, W. 1981. *Theory of vibration with applications (2ndEd.)*, Prentice Hall.
- [87]. Tlusty, J. and M. Polacek. 1963. The stability of machine tools against self excited vibrations in machining. *International Research in Production Engineering. ASME*: 465 – 474.
- [88]. Tlusty, J. 2000. *Manufacturing processes and equipment*. Prentice Hall, New Jersey.
- [89]. Tobias, S. A., and W. Fishwick. 1958. *A theory of regenerative chatter*. The Engineer-London.
- [90]. Vela-Martínez, L., J. C. Jáuregui-Correa, E. Rubio-Cerda, G. Herrera-Ruiz, and A. Lozano-Guzmán. 2008. Analysis of compliance between the cutting tool and the workpiece on the stability of a turning process. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 48 (9): 1054 – 1062.
- [91]. Vela-Martínez, L., J. C. Jáuregui-Correa, O. González-Brambila, G. Herrera-Ruiz, and A. Lozano-Guzmán. 2008. Instability conditions due to structural nonlinearities in regenerative chatter. *Nonlinear Dynamics* DOI: 10.1007/s11071-008-9411-x
- [92]. Vela-Martínez, L., J. C. Jáuregui-Correa, and J. Álvarez-Ramírez. 2008. Chatter dynamics identification by the fractal R/S analysis. En prensa, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*.
- [93]. Wahi, P. and A. Chatterjee 2005. Regenerative tool chatter near a codimension 2 Hopf point using multiple scales. *Nonlinear Dynamics* 40 (4): 323-338.

- [94]. Warminski, J., G. Litak, M. P. Cartmell, R. Khanin, and M. Wiercigroch. 2003. Approximate analytical solutions for primary chatter in the non-linear metal cutting model. *Journal of Sound and Vibration* 259 (4): 917 – 933.
- [95]. Wiercigroch, M. and E. Budak. 2001. Sources of nonlinearities, chatter generation and suppression in metal cutting. *Phil. Trans. Royal Society London* 359: 663-693.
- [96]. Wiercigroch, M. and A. M. Krivtsov. 2001. Frictional chatter in orthogonal metal cutting. *Phil. Trans. Royal Society London* 359: 713-738.
- [97]. Wu, D. W., and C. R. Liu. 1985a. An analytical model of cutting dynamics. Part 1: Model building. *Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry* 107: 107 – 111.
- [98]. Wu, D. W., and C. R. Liu. 1985b. An analytical model of cutting dynamics. Part 2: Verification. *Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry* 107: 112 – 118.
- [99]. Yoon, M. C. and D. H. Chin. 2005. Cutting force monitoring in the endmilling operation for chatter detection. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 219 (6): 455 – 465.

APÉNDICE

**A.1: DEFINICIÓN DE COEFICIENTES PARA LA SOLUCIÓN APROXIMADA
DEL MODELO DÉBILMENTE NO LINEAL**

A.2: TEORÍA BÁSICA DE VIBRACIONES LINEALES

A.3: ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL EN MÁQUINAS-HERRAMIENTA

A.4: ANALIZADOR DE VIBRACIONES

A.5: TRANSFORMADA DE ONDELETAS

**A.6: SOLICITUD DE PATENTE DE UN PORTAHERRAMIENTAS
INSTRUMENTADO ANTE EL INSTITUTO MEXICANO DE LA PROPIEDAD
INDUSTRIAL**

A.7: PORTADAS DE PUBLICACIONES

APENDICE A.1: DEFINICIÓN DE COEFICIENTES PARA LA SOLUCIÓN APROXIMADA DEL MODELO DÉBILMENTE NO LINEAL

Definición de coeficientes para las ecuaciones (3.2-22), (3.2-23) y (3.2-28):

$$\gamma = \omega_n^2 - 4\omega_c^2 + \alpha_1 \hat{K}(1 - \cos 2\omega_c \tau) \quad (\text{A.1-1})$$

$$\delta = 4\zeta\omega_n\omega_c + \alpha_1 \hat{K} \sin 2\omega_c \tau \quad (\text{A.1-2})$$

$$\begin{aligned} c_1 = & \frac{\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)}{\gamma^2 + \delta^2} \\ & \left(\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)(\delta \sin \omega_c \tau(1 + 2 \cos \omega_c \tau) + \gamma(1 + \cos \omega_c \tau)(1 - 2 \cos \omega_c \tau)) + \frac{1}{2} \beta_1 (\delta \sin \omega_c \tau - \gamma(1 + \cos \omega_c \tau)) \right) \\ & + \frac{\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)}{\omega_n^2 + \alpha_1 \hat{K}} \left(\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau) - \frac{1}{2} \beta_1 \right) - \frac{3}{4} \alpha_3 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)^2 \\ & - \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\gamma^2 + \delta^2} \left(\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)(\delta \sin \omega_c \tau - \gamma \cos \omega_c \tau) - \frac{1}{2} \beta_1 \gamma \right) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\omega_n^2 + \alpha_1 \hat{K}} \left(2\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau) - \beta_1 \right) - \frac{3}{8} \beta_2 \end{aligned} \quad (\text{A.1-3})$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \alpha_1 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau) \quad (\text{A.1-4})$$

$$\begin{aligned} c_3 = & \frac{\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)}{\gamma^2 + \delta^2} \\ & \left(\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)(\gamma \sin \omega_c \tau(1 + 2 \cos \omega_c \tau) - \delta(1 + \cos \omega_c \tau)(1 - 2 \cos \omega_c \tau)) + \frac{1}{2} \beta_1 (\gamma \sin \omega_c \tau + \delta(1 + \cos \omega_c \tau)) \right) \\ & + \frac{\alpha_2 \hat{K} \sin \omega_c \tau}{\omega_n^2 + \alpha_1 \hat{K}} \left(\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau) - \frac{1}{2} \beta_1 \right) - \frac{3}{4} \alpha_3 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau) \sin \omega_c \tau \\ & - \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\gamma^2 + \delta^2} \left(\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)(\delta \cos \omega_c \tau + \gamma \sin \omega_c \tau) + \frac{1}{2} \beta_1 \delta \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1-5})$$

$$c_4 = \frac{1}{2} \alpha_1 \hat{K} \sin \omega_c \tau \quad (\text{A.1-6})$$

$$C_{\text{IR}} = 2\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)(\delta \sin \omega_c \tau - \gamma \cos \omega_c \tau) - \beta_1 \gamma \quad (\text{A.1-7})$$

$$C_{\text{II}} = 2\alpha_2 \hat{K}(1 - \cos \omega_c \tau)(\delta \cos \omega_c \tau + \gamma \sin \omega_c \tau) + \beta_1 \delta \quad (\text{A.1-8})$$

APÉNDICE A.2: TEORÍA BÁSICA DE VIBRACIONES LINEALES

Considérese el caso más simple de un sistema estructural con un grado de libertad, el cual está caracterizado por una distribución de masa, m , una rigidez, k , y un amortiguamiento viscoso, c , como se ilustra en la Figura A.2-1.

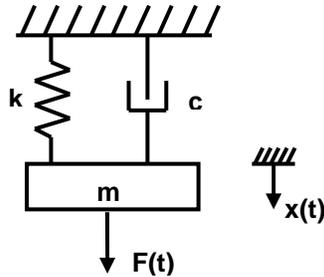


Figura A.2-1: Modelo de un sistema mecánico vibratorio de un grado de libertad.

Cuando no existe una fuerza externa $F(t)$, el movimiento resultante se conoce como de vibraciones libres amortiguadas. Cuando se aplica una fuerza externa $F(t)$ al sistema, el movimiento se conoce como de vibraciones forzadas, el cual es descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{1}{m}F(t) \quad (\text{A.2-1})$$

donde: $\omega_n = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del sistema a la cual oscila libremente, el factor de amortiguamiento se define por: $\zeta = c/2m\omega_n$, cuyo valor en sistemas mecánicos se encuentra por debajo de 0.05. La frecuencia natural amortiguada del sistema mecánico está dada por: $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

Las vibraciones libres se presentan cuando el sistema está en reposo y se aplica una desviación del equilibrio, dada por una condición inicial $x(0)$, el sistema experimenta un movimiento cuya amplitud decae con el tiempo debido a la constante de amortiguamiento del sistema. En sistemas mecánicos la frecuencia de las vibraciones está determinada principalmente por la rigidez y la masa del sistema, la influencia del amortiguamiento viscoso se considera ligera puesto que la constante de amortiguamiento es muy pequeña.

Vibraciones libres amortiguadas

Para el caso de un sistema de vibraciones libres, $F(t) = 0$, el cual es desplazado estáticamente de su condición de reposo a una condición inicial $x(0) = x_0$, la solución de la ecuación homogénea equivalente de (A.2-1) está dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(c/2m)t} (Ae^{\sqrt{(c/2m)^2 - k/m}t} + Be^{-\sqrt{(c/2m)^2 - k/m}t}) \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} (Ae^{\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}t} + Be^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}t}) \end{aligned} \quad (\text{A.2-2})$$

El primer término de la ecuación (A.2-2) representa un movimiento con decrecimiento exponencial, pero la naturaleza del movimiento oscilatorio depende del signo del radical de los términos entre paréntesis, de los cuales uno de ellos es creciente y el otro es decreciente exponencialmente. En los sistemas mecánicos que nos ocupan en este estudio, el signo del radical generalmente es positivo, sin embargo vale la pena revisar la naturaleza de los movimientos en otros casos.

Efecto de la cantidad de amortiguamiento

Cuando el término de amortiguamiento $(c/2m)^2$ es mayor que k/m los exponentes de la ecuación (A.2-2) son números reales y no es posible un movimiento oscilatorio. El movimiento resultante es una función decreciente exponencialmente de tipo aperiódico, el cual se conoce como sobreamortiguado. Para condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, la solución general (A.2-2) se puede expresar como sigue:

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})t} + \frac{-\dot{x}_0 - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})t} \quad (\text{A.2-3})$$

Cuando el término de amortiguamiento $(c/2m)^2$ es menor que k/m los exponentes de la ecuación (A.2-2) son los números imaginarios $\pm i\sqrt{k/m - (c/2m)^2}$. Tomando en cuenta la ecuación de Euler para números imaginarios, se tiene que:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[A \left(\cos \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + i \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right) + B \left(\cos \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - i \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right) \right], \quad (\text{A.2-4})$$

la cual representa un movimiento periódico conocido como subamortiguado. La ecuación (A.2-4) también se puede expresar en términos de condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, como sigue:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta^2 \omega_n x_0}{\omega_d} \text{sen} \omega_d t + x_0 \cos \omega_d t \right) \quad (\text{A.2-5})$$

El período del movimiento oscilatorio (A.2-5) está dado por $\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$, mientras que la frecuencia de la vibración amortiguada está dada por la frecuencia natural amortiguada del sistema: $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

Un movimiento crítico entre los dos anteriores se presenta cuando el radical en (A.2-2) es cero, el cual se conoce como movimiento críticamente amortiguado, para el cual la solución se reduce como sigue:

$$x(t) = (A + B)e^{-\zeta\omega_n t} = Ce^{-\zeta\omega_n t},$$

lo cual no es posible resolver para satisfacer las dos condiciones iniciales del movimiento. La solución para condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ se obtiene de la solución (A.2-5) del movimiento subamortiguado bajo la consideración de que $\zeta \rightarrow 1$. Esto es:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [(\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t + x_0] \quad (\text{A.2-6})$$

El valor de c para el cual el radical de (A.2-2) es cero, es conocido como amortiguamiento crítico y está dado por: $c_c = 2m\omega_n$. La razón de amortiguamiento también se puede expresar como:

$\zeta = \frac{c}{c_c}$. En la Figura A.2-2 se muestra el comportamiento de un sistema vibratorio en función de la cantidad de amortiguamiento viscoso.

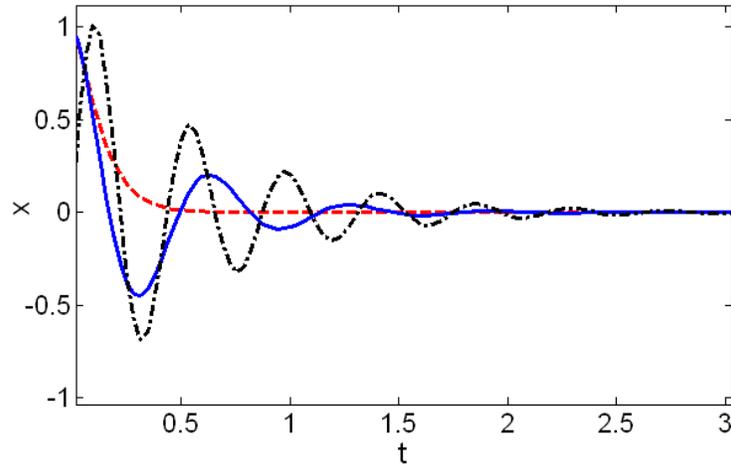


Figura A.2-2: Vibraciones libres amortiguadas de la ecuación $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$ con $\omega_n = 10$, $m = 1$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$: a) Movimiento sobre-amortiguado, $\zeta > 1.0$, línea interrumpida; b) Movimiento sub-amortiguado, $\zeta < 1.0$, línea punteada; c) Movimiento críticamente amortiguado, $\zeta = 1.0$, línea sólida.

Vibraciones forzadas

El movimiento de vibraciones forzadas depende de la naturaleza de la fuerza de excitación $F(t)$. Cuando se trata de una fuerza constante, $F(t) = F_0$, el sistema experimenta un movimiento de vibración transitorio para estabilizarse posteriormente en una deflexión estática $x_{st} = F_0/k$. Cuando la fuerza de excitación es de tipo armónica, representada por una función senoidal, cosenoidal o una combinación de ambas, el sistema presenta un movimiento vibratorio forzado con la misma frecuencia de la excitación pero con un retraso de fase.

Excitaciones armónicas

Las excitaciones puramente armónicas no son muy frecuentes en la práctica, como las excitaciones periódicas o de otro tipo, sin embargo la comprensión del comportamiento de un sistema excitado armónicamente es esencial para entender la respuesta del sistema a otros tipos de excitación más generales.

Considerado un sistema oscilatorio de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso y una fuerza de excitación de tipo armónico, la ecuación del movimiento está dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (A.2-7)$$

La solución de (A.2-7) está formada de dos partes: una función complementaria derivada de la solución de la ecuación homogénea o del problema de vibraciones libres amortiguadas, y la integral particular que es una oscilación de estado estable de la misma frecuencia de la excitación, la cual es asumida como una función periódica con retraso de fase:

$$x(t) = X \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (\text{A.2-8})$$

donde X es la amplitud de la oscilación y ϕ es la fase del desplazamiento con respecto a la fuerza de excitación. La amplitud y fase del movimiento se encuentran al sustituir (A.2-8) en (A.2-9), las que representadas en términos de las características dinámicas del sistema, resulta:

$$\frac{Xk}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

y

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

(A.2-9)

Las ecuaciones (A.2-9) muestran que la amplitud adimensional Xk/F_0 y la fase ϕ son funciones solamente de la razón de frecuencias ω/ω_n y el factor de amortiguamiento ζ . Cuando se grafican la amplitud adimensional y la fase se puede ver la gran influencia que tiene el factor de amortiguamiento cerca de la resonancia, esto es, cuando $\omega = \omega_n$.

La solución general del problema de vibraciones forzadas armónicamente, incluyendo el término transitorio, está dada por:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{\text{sen}(\omega t - \phi)}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} + X_1 e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi_1\right) \quad (\text{A.2-10})$$

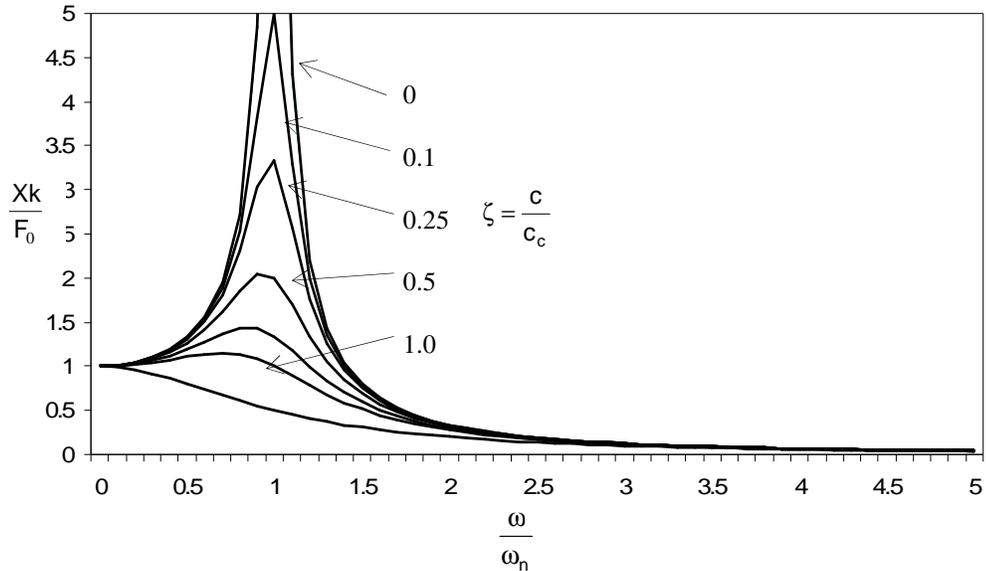


Figura A.2-3: Amplitud adimensional y relación de frecuencias.

Excitaciones periódicas

Cualquier fuerza periódica puede resolverse en una serie de componentes armónicas, mediante análisis de Fourier, de la siguiente forma:

$$F(t) = \sum_n F_n \text{sen}(n\omega_1 t - \phi_n)$$

Si se aplica una fuerza de este tipo a un sistema de un grado de libertad, la respuesta de estado estable es la superposición de las componentes armónicas, cada una de las cuales tiene la forma:

$$x_n(t) = \frac{F_n \text{sen}(\omega_n t - \psi_n)}{\sqrt{(k - m\omega_n^2)^2 + (c\omega_n)^2}} \quad (\text{A.2-11})$$

La respuesta de estado estable está dada por la serie:

$$x(t) = \sum_n x_n(t) \quad (\text{A.2-12})$$

A esta solución aún debe agregarse la vibración libre, la cual generalmente decae debido al amortiguamiento.

APÉNDICE A.3: ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL EN MÁQUINAS-HERRAMIENTA

Análisis modal experimental

La naturaleza vibratoria de las estructuras depende de su geometría, de los materiales empleados y las condiciones de sujeción, entre otros. Existen modelos analíticos para determinar la respuesta dinámica de estructuras en función de sus parámetros modales, definidos por su distribución de masa, rigidez y amortiguamiento estructurales; sin embargo, generalmente estos modelos se limitan a cuerpos con pocos grados de libertad o con geometrías sencillas. Para el análisis de geometrías complejas se recurre a modelos numéricos o métodos experimentales, o una combinación de ambos. En esta sección se presenta el uso del análisis modal experimental para la obtención de los parámetros modales de sistemas de maquinado, compuestos de máquina-herramienta, herramienta de corte y pieza de trabajo (Altintas, 2000).

El principio básico del análisis modal experimental es excitar una estructura y medir la respuesta de la vibración, ya sea con un transductor de desplazamientos o aceleraciones. La medición tradicional de la excitación estructural se realiza mediante un martillo instrumentado, un generador de vibraciones, o un excitador magnético sin contacto (Ewins, 2000); actualmente existen métodos basados en tecnologías más complejas como sistemas laser, holografía, interferometría óptica, vibrometría laser-Doppler (Cloud, 1995), entre otros.

Prueba de impacto

En la Figura A.3-1 se muestra el esquema de análisis modal basado en la prueba de impacto mediante un martillo instrumentado con un transductor de fuerza piezoeléctrico, o celda de carga, y un acelerómetro biaxial compacto de bajo consumo de energía. El acelerómetro se coloca en la punta de la herramienta de corte o en la punta de la pieza de trabajo, según sea el caso a analizar, orientado con la dirección de medición de interés, sobre la cual actuará el martillo para excitar la estructura. Una vez efectuado el impacto, las señales de la respuesta y la excitación son capturadas mediante una tarjeta de adquisición de datos a una razón de muestreo específica y un tamaño de datos conveniente para evitar la presencia de alias y errores residuales. Posteriormente, las señales son acondicionadas de acuerdo a la sensibilidad de los transductores y son procesadas para realizar el análisis modal. Posteriormente, la potencia del espectro de aceleraciones se integra dos veces en el dominio de la frecuencia para obtener el correspondiente a los desplazamientos. A partir de las potencias espectrales de ambas señales se calcula la función de transferencia como la razón entre la respuesta y la excitación. Finalmente, mediante un análisis de la función de transferencia se obtienen los parámetros modales para cada modo de vibrar. La calidad de la

prueba se evalúa por medio de dos criterios: la función de coherencia, calculada a partir de las energías espectrales de las señales, y la curva de Nyquist, las cuales se describen en párrafos subsiguientes.

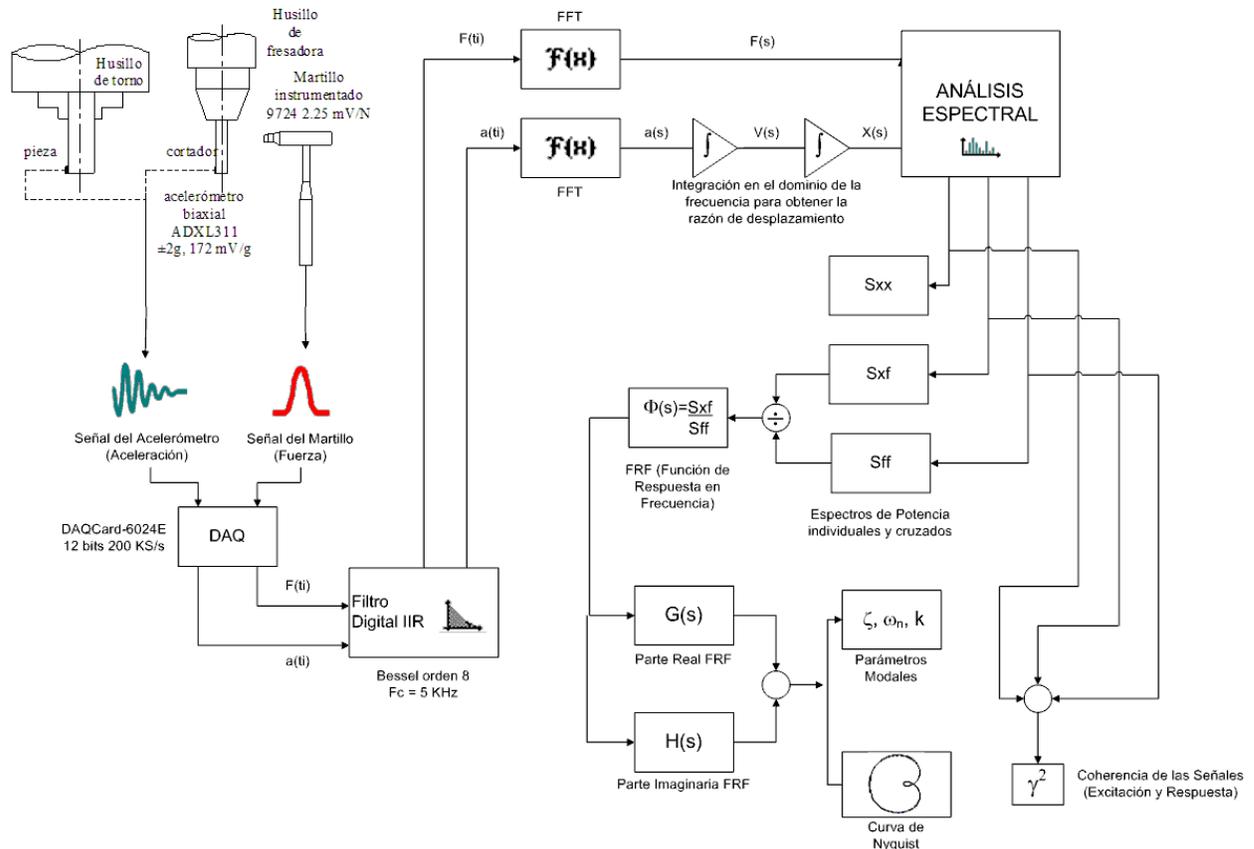


Figura A.3-1: Esquema de análisis modal mediante la prueba de impacto.

Muestreo

Generalmente, el análisis de señales se realiza en el dominio de la frecuencia, para lo cual es necesario transformar una señal análoga, en el dominio del tiempo, a información digital, en el dominio de la frecuencia, mediante un muestreo y una transformación discreta de Fourier. El proceso de muestreo se hace por medio de un convertidor análogo-digital A/D y su calidad depende de la selección adecuada de la frecuencia de muestreo y el número de datos. La señal continua de la respuesta y la excitación se muestrea en el dominio del tiempo para formar un conjunto finito de valores discretos igualmente espaciados por un intervalo de tiempo, que es el inverso de la frecuencia de muestreo. Posteriormente se obtienen las transformadas discretas de Fourier de los vectores de respuesta y la excitación.

Integración

La respuesta que interesa en un análisis modal es la correspondiente a los desplazamientos originados por la excitación. Cuando se utiliza un acelerómetro como transductor,

ya sea por las ventajas de bajo costo, tamaño reducido y la posibilidad de disponer de mayor información del fenómeno, es necesario integrar la señal de la aceleración para obtener la correspondiente a los desplazamientos. Esta operación se puede hacer ya sea en el dominio del tiempo mediante esquemas de integración numérica o el uso de filtros análogos pasa-bajas (National Instruments, 2006a), o en el dominio de la frecuencia (Agilent Technologies, 2000b). En el esquema propuesto en la Figura A.3-1 se utiliza esta última técnica en la cual se asume que la frecuencia es constante; sin embargo, los resultados pueden considerarse válidos desde un punto de vista práctico.

Prevención de alias y errores residuales

En el análisis de señales se presentan dos problemas frecuentes: presencia de alias y errores residuales. La presencia de alias se caracteriza por el traslape de componentes espectrales de manera que altas frecuencias pueden aparecer como bajas frecuencias si la razón de muestreo es muy lenta. De acuerdo con el teorema de Nyquist (Inman, 2001), el problema de alias se evita con un muestreo a intervalos de tiempo iguales y con una razón de muestreo de al menos dos veces la frecuencia más alta presente en la señal análoga. Sin embargo, en presencia de ruido se recomienda una razón de muestreo de al menos 10 a 20 veces la frecuencia más alta para una mejor representación de la señal análoga. En la práctica, también es recomendable usar un filtro análogo anti-alias pasa-bajas previo al muestreo.

Por otro lado, los errores residuales se presentan debido a un truncamiento de la señal durante el período de muestreo (Inman, 2001). Este problema se evita con funciones de ventana, también conocidas como filtros FIR (*finite impulse response*, por sus siglas en inglés). La señal análoga original se multiplica por una función ponderada, según el tipo de ventana seleccionado, que fuerza a la señal a ser cero fuera del período de muestreo. En el caso de señales transitorias como en la prueba de impacto, se recomienda usar la función de Fuerza para eliminar los rebotes después de la señal de impulso, mientras que para la señal de respuesta transitoria se recomienda una función exponencial para asegurar el amortiguamiento de la señal en el bloque de muestreo (Agilent Technologies, 2000a; National Instruments, 2006b).

Función de transferencia estructural

La función de transferencia estructural, o función de respuesta a la frecuencia, es una función compleja que se calcula como la razón entre la respuesta y la excitación en el dominio de la frecuencia:

$$\Phi(s) = \frac{P_{xf}(s)}{P_{ff}(s)} \quad (\text{A.3-1})$$

donde $P_{xf}(s) = X(s) \cdot \bar{F}(s)/n$ es la energía espectral cruzada de la señal de respuesta, $X(s)$, y la energía espectral de la excitación $F(s)$; mientras que $P_{ff}(s) = F(s) \cdot \bar{F}(s)/n$ es la energía espectral de la excitación. Así mismo, $P_{xx}(s) = X(s) \cdot \bar{X}(s)/n$ es la energía espectral de la respuesta que se usará más adelante para el cálculo de la función de coherencia.

Generalmente, la forma de la función de transferencia en amplitud-frecuencia es una curva con varios picos a diferentes frecuencias, conocidas como frecuencias resonantes o frecuencias naturales. Los picos representan los diferentes modos de vibrar o grados de libertad de la estructura, como se muestra en la Figura A.3-2a. Para modelos de un grado de libertad, la función de transferencia sólo mostrará un pico.

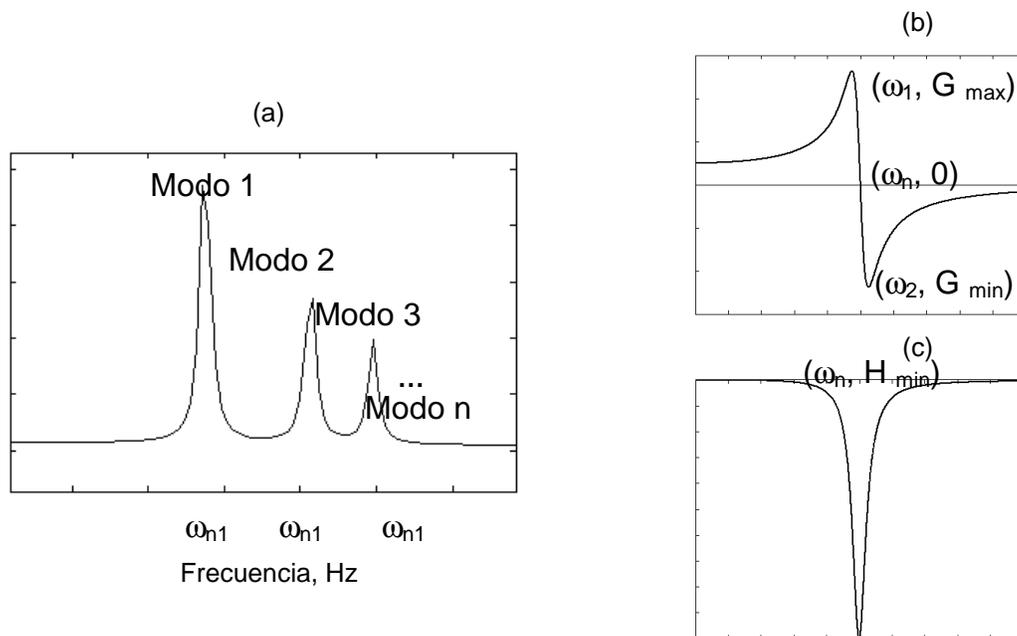


Figura A.3-2: a) Magnitud de la función de transferencia de una estructura en vibración y los diferentes modos de vibrar, b) Parte real y c) Parte imaginaria de la función de transferencia.

Obtención de parámetros modales

Cada pico de la función de transferencia está caracterizado por un conjunto de parámetros modales. Una manera de obtener esta información es aplicando el método de ajuste de un grado de libertad, que consiste en analizar cada pico bajo el principio de linealidad y superposición (Inman, 2001). Esto es, se asume que en la vecindad de cada pico resonante, la

función de transferencia sólo es dominada por ese modo. Los parámetros modales se obtienen analíticamente de la función de transferencia de la ecuación (A.3-1), la cual se separa en su parte real e imaginaria. La parte real es una función que crece exponencialmente y presenta un pico máximo a una frecuencia ω_1 para luego caer drásticamente hasta valer cero en la frecuencia natural ω_n , y continuar decreciendo hasta un pico mínimo a una frecuencia ω_2 ; posteriormente la función vuelve a crecer asintóticamente a cero. Por otro lado, la parte imaginaria es una función que inicia en cero y decrece drásticamente hasta un pico mínimo en la frecuencia natural para luego crecer asintóticamente a cero; tal como se describe en la Figura A.3-2b y A.3-2c para ambas partes, real e imaginaria. Una vez identificada la frecuencia natural en la función de transferencia, la razón de amortiguamiento y la rigidez estructural se calculan con las siguientes ecuaciones respectivas (Altintas, 2000):

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} \quad (\text{A.3-2})$$

y

$$k = \frac{1}{2\zeta \|H_{\min}\|} \quad (\text{A.3-3})$$

Coherencia y curva de Nyquist

La coherencia es una función que mide la calidad de la medición de la función de respuesta a la frecuencia. Es decir, es una medida de la correlación entre la energía de la respuesta y la energía de la excitación (National Instruments, 2006b), y se calcula a partir de las energías espectrales de las señales:

$$\gamma^2 = \frac{|P_{xf}(s)|^2}{P_{xx}(s)P_{ff}(s)} \quad (\text{A.3-4})$$

Esta función se puede utilizar para identificar la presencia de ruido excesivo u otra señal que está afectando la respuesta. El valor de la coherencia siempre estará entre 0 y 1, siendo cero la correspondiente a la medición de ruido puro, mientras que el valor de 1 es cuando la respuesta y la excitación no están contaminadas con ruido. Generalmente, la coherencia tiene un valor de 1 cerca de las frecuencias naturales de la estructura. Una coherencia menor a 0.75 es un indicativo de una medición pobre (Inman, 2001).

Otro criterio para evaluar la confiabilidad de las mediciones es la curva de Nyquist. La curva de Nyquist es la representación gráfica de la parte real contra la parte imaginaria de la

función de transferencia, la cual debe ser lo más cercano a un círculo (Agilent Technologies, 2000b).

Modelación de respuestas transitorias

La respuesta transitoria de un sistema oscilatorio de un grado de libertad con amortiguamiento presente, debido a una excitación súbita no periódica de corta duración, que se conoce como fuerza impulsiva, está dada por (Thomson, 1981):

$$x(t) = \frac{2F_0\xi}{k\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \quad (\text{A.3-5})$$

donde F_0 es la magnitud de la fuerza impulsiva, k es la rigidez modal, ω_n es la frecuencia natural, ξ es la duración del impulso, y ζ es la razón de amortiguamiento. Puesto que la respuesta experimental es medida con un acelerómetro, es necesario tener el modelo correspondiente a las aceleraciones derivando dos veces la ecuación (A.3-5). Esto es:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{2F_0\xi}{k\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \omega_n^3 e^{-\zeta\omega_n t} \left[\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right] \quad (\text{A.3-6})$$

Las ecuaciones (A.3-5) y (A.3-6) se pueden usar para validar los resultados obtenidos experimentalmente. La discretización de la respuesta transitoria de un modelo de un grado de libertad, así como de la fuerza impulsiva correspondiente, se emplean para realizar un análisis espectral teórico y calcular una función de transferencia de referencia.

Prueba de impacto en centro de torneado CNC HAWK TC-200.

El experimento se realizó en una barra de acero AISI 1018 de 50 mm de diámetro y 150 mm de longitud, montada en el cabezal de un centro de torneado CNC HAWK TC-200 11 kW@5000 RPM, de CINCINNATI MILACRON. La excitación de la pieza se realizó mediante un martillo instrumentado modelo 9724 marca Kistler, con un transductor piezoeléctrico de 2.276 mV/N. La medición de la respuesta se realizó con un acelerómetro biaxial modelo ADXL311 marca Analog Devices, con una sensibilidad de 174 mV/g. El acelerómetro se colocó en la punta de la pieza de trabajo, orientado de tal manera que la dirección del eje X coincidiera con la dirección del impacto, como se muestra en la Figura A.3-3. Los resultados reportados fueron los siguientes: frecuencia natural, $\omega_n = 250$ Hz; razón de amortiguamiento, $\zeta = 7.58\%$; y rigidez estructural, $k = 2\ 912\ 685.27$ N/m. El muestreo se hizo a una razón de 100 kHz y se analizaron 8 096 puntos.

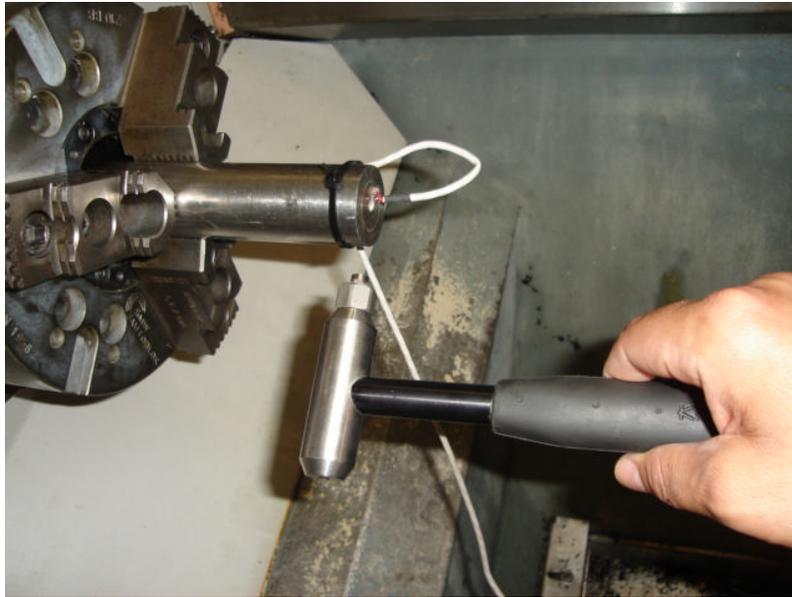


Figura A.3-3: Prueba de impacto en torno CNC HAWK TC-200

En la Figura A.3-4 se muestra el análisis espectral de la prueba descrita en el párrafo anterior. La frecuencia natural se aprecia claramente en las partes real e imaginaria de la función de transferencia. En el espectro de magnitudes de la respuesta también se identifica una energía alta alrededor de la frecuencia natural. Además, en la Figura A.3-5 se muestra la comparación de la curva de Nyquist, tanto teórica como experimental. Por un lado, la señal de coherencia es cercana a la unidad alrededor de la frecuencia de 250 Hz, mientras que las curvas de Nyquist muestran una similitud importante tanto en la forma como en el tamaño. Por lo tanto, existe una buena calidad en la adquisición y análisis de las señales, de manera que los resultados de la prueba son confiables.

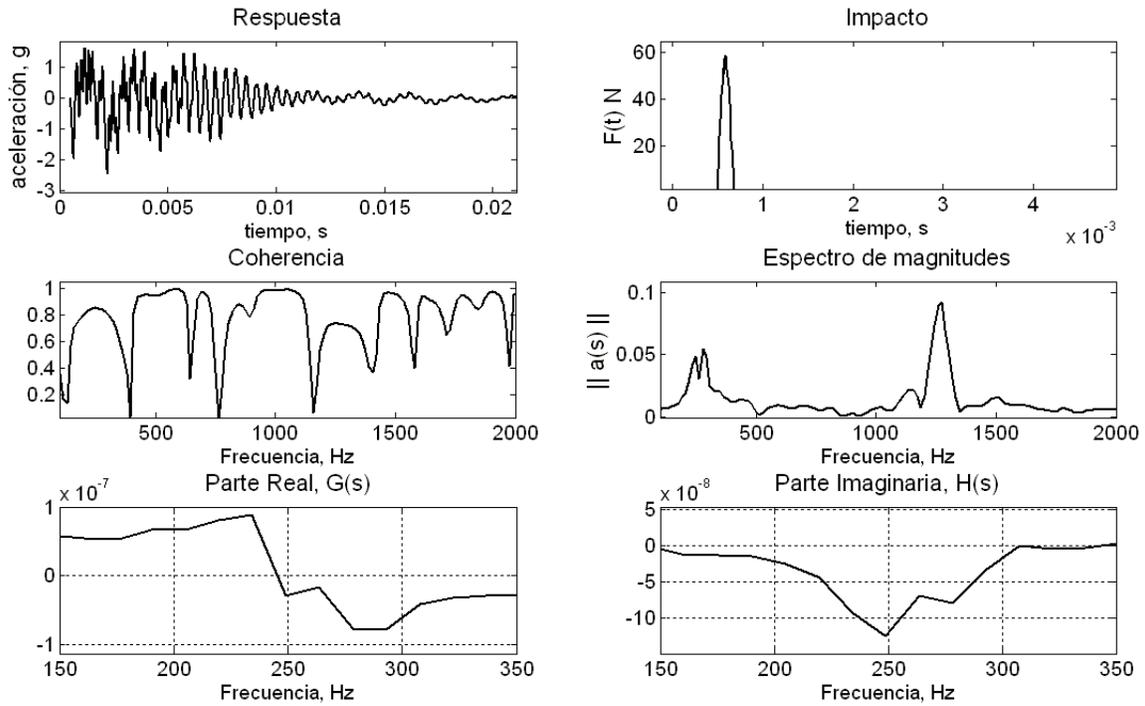


Figura A.3-4: Análisis espectral de la prueba de impacto en torno CNC HAWK TC-200.

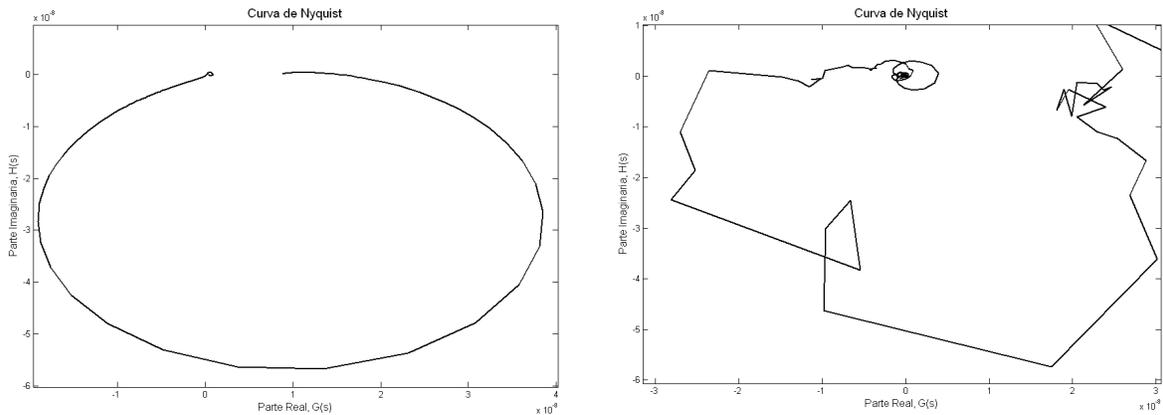


Figura A.3-5: Curva de Nyquist teórica y experimental de la prueba de impacto en torno CNC HAWK TC-200.

Prueba de impacto en máquina fresadora convencional TOS.

Se realizó una prueba de impacto en una máquina fresadora convencional marca TOS con un cortador recto de 9.525 mm (3/8") de diámetro y 38 mm (1 1/2") de longitud, de 4 filos cortantes, montado sobre el husillo vertical de la máquina mediante una boquilla de expansión de 3/8" marca Jacobs. La excitación de la herramienta de corte se realizó mediante el martillo instrumentado descrito en la sección anterior, así como la medición de la respuesta. Las señales de ambos instrumentos se adquirieron con una tarjeta de adquisición de datos DAQCard-6024E 12 bits 200 ks/s, de National Instruments, conectada a una computadora portátil Pentium 4 a 3.33 GHz marca

Toshiba Satellite. El acelerómetro se colocó en la punta de la herramienta, orientado de tal manera que la dirección del eje X coincidiera con la dirección del impacto, como se muestra en la Figura A.3-6. En el Cuadro A.3-1 se muestran los resultados obtenidos a diferentes condiciones de muestreo, para analizar el efecto de la presencia de alias en los resultados. También se muestran los resultados de la aplicación de funciones de ventanas exponencial y de fuerza en la respuesta y excitación, respectivamente, para reducir los errores residuales.



Figura A.3-6: Caracterización dinámica de máquina fresadora convencional marca TOS con un cortador recto de 9.525 mm (3/8”) de diámetro y 38 mm (1 ½”) de longitud.

Cuadro A.3-1: Análisis modal a diferentes frecuencias de muestreo

Experi Mento	Condiciones de muestreo		Filtros de ventana		Parámetros modales		
	Frecuencia, kHz	Datos			ζ , %	ω_n , Hz	K, N/m
1	60	4 096			13.88	263.7	25 104 244
2	60	4 096	•	•	13.88	263.7	28 741 000
4	80	16 384			10.47	209.97	30 782 400
5	80	16 384	•	•	9.30	209.97	39 057 900

NOTA: • → Aplicación de filtro

Los resultados del análisis espectral del experimento No. 1 se muestran en las Figuras A.3-7 y A.3-8. En la Figura A.3-7 se aprecian las señales de respuesta y excitación en el dominio del tiempo, tal como son adquiridos en el proceso de muestreo; también se muestra la coherencia de las señales, el espectro de magnitudes de la respuesta, así como las partes real e imaginaria de la

función de transferencia en un rango de 0 a 2 000 Hz. En la Figura A.3-8 se muestra con mayor detalle las partes real e imaginaria de la función de transferencia alrededor del primer modo de vibrar, caracterizado en el Cuadro A.3-1.

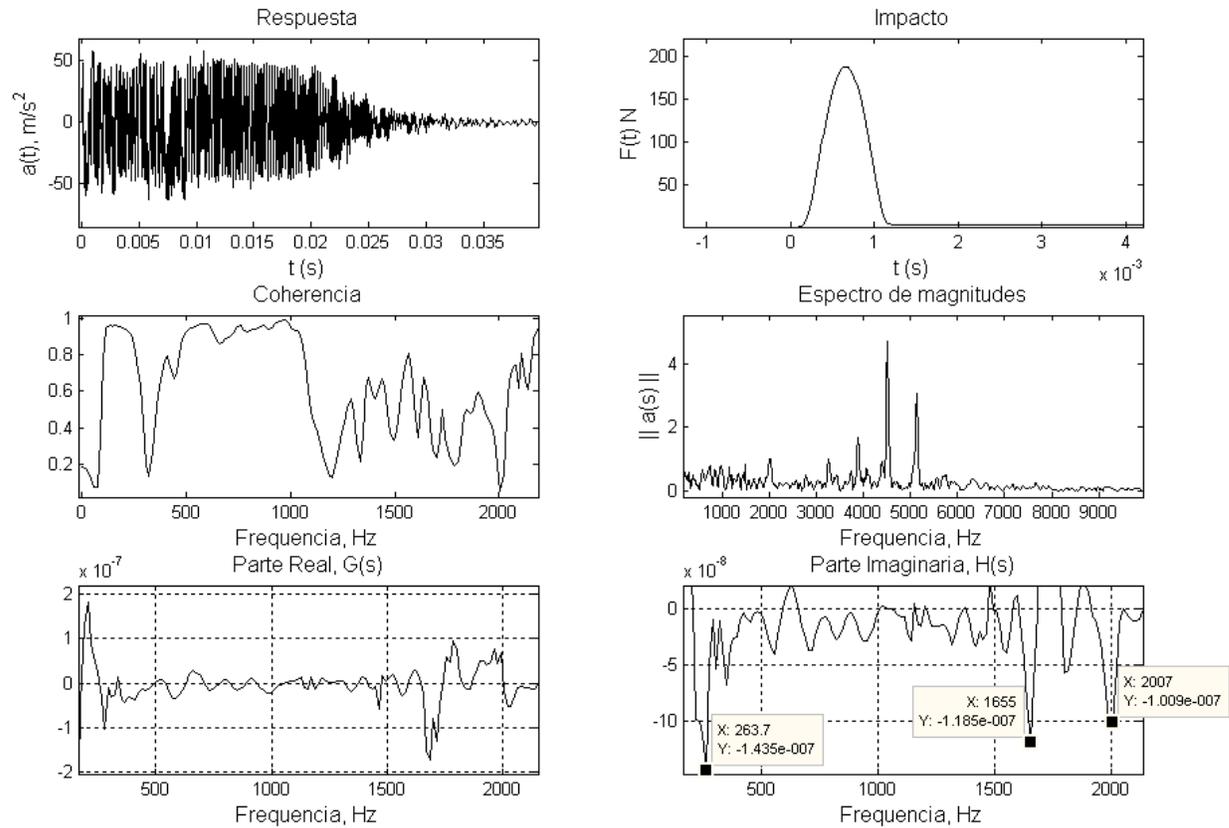


Figura A.3-7: Análisis espectral de una prueba de impacto en máquina fresadora convencional TOS.

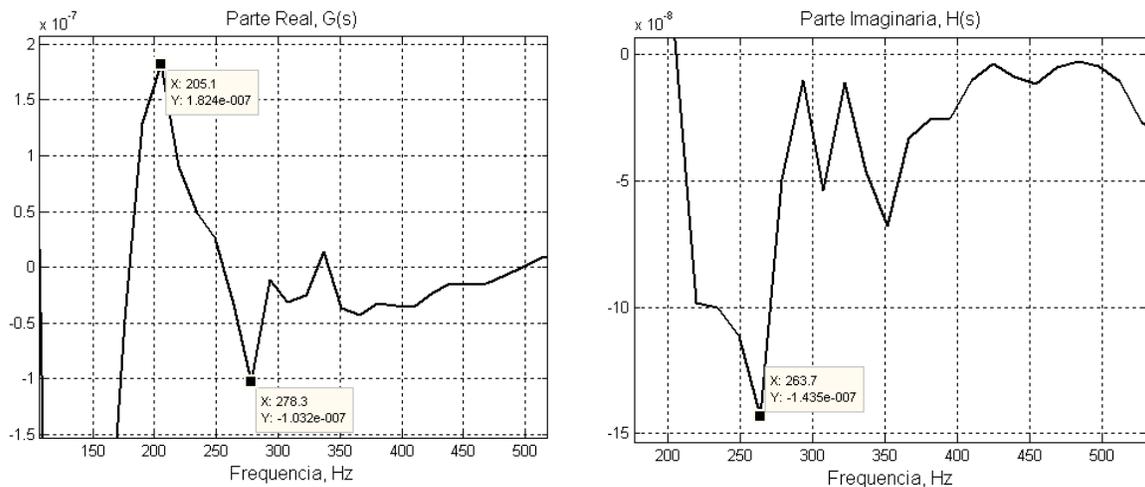


Figura A.3-8: Parte real y parte imaginaria del primer modo de vibrar.

El espectro de magnitudes muestra unas frecuencias de alta energía entre 3.5 y 5.5 kHz; sin embargo, en el análisis de vibraciones auto-inducidas, que es el propósito de este desarrollo, se buscan frecuencias naturales inferiores a 2.5 kHz. La señal de coherencia muestra la probabilidad de que existan frecuencias naturales entre 100 y 300 Hz, así como entre 0.5 y 1 kHz.

De acuerdo con los resultados del Cuadro A.3-I, las funciones de ventana no alteran significativamente la obtención de los parámetros modales, bajo condiciones de muestreo similares. Sin embargo, la razón de muestreo sí influye de manera significativa en los resultados. Puesto que la razón de amortiguamiento en máquinas-herramienta generalmente es inferior a 5%, aunque en algunos casos puede llegar hasta un 10% (Altintas, 2000), las razones de muestreo altas pueden considerarse más confiables, lo cual significa que las lecturas a baja frecuencia presentan alias en las señales. Por lo tanto, se confirma que en ausencia de filtros anti-alias, es necesario muestrear a diez o veinte veces la frecuencia más alta buscada, que en el caso de máquinas-herramienta es de 5 kHz. Por otro lado, los valores de rigidez estructural presentan mayor variación con respecto a las condiciones de muestreo, incluso la magnitud es muy alta. La falta de definición de la curva de Nyquist indica que es necesario aplicar un filtro anti-alias antes del muestreo de las señales.

APENDICE A.4: ANALIZADOR DE VIBRACIONES

La validación experimental de los modelos predictivos requiere de la caracterización dinámica de estructuras reales, por lo cual se desarrolló un analizador de vibraciones en Matlab con el objetivo de contar con una herramienta de adquisición y análisis de señales con aplicaciones específicas. Como resultado, se obtuvo una aplicación con diferentes módulos, tales como: análisis modal mediante prueba de impacto, análisis predictivo de vibraciones auto-inducidas para procesos de fresado y de torneado, ya sea con modelos lineales y no lineales, monitoreo de vibraciones con transductores de aceleración o sonido, e integración de señales con filtros.

Los equipos empleados durante el desarrollo de la aplicación fueron los siguientes:

- Martillo instrumentado modelo 9724 con un transductor piezoeléctrico de 2.276 mV/N, marca Kistler
- Acelerómetro biaxial modelo ADXL311 marca Analog Devices
- Tarjeta de adquisición de datos DAQCard-6024E 12 bits 200 ks/s, marca National Instruments
- Micrófono unidireccional
- Computadora portátil Pentium 4 a 3.33 GHz marca Toshiba Satellite

En las siguientes figuras se describen los módulos y las capacidades del analizador, el cual corre con la versión Matlab R2007b versión 7.5, de The MathWorks, Inc.



Figura A.4-1: Pantalla de inicio

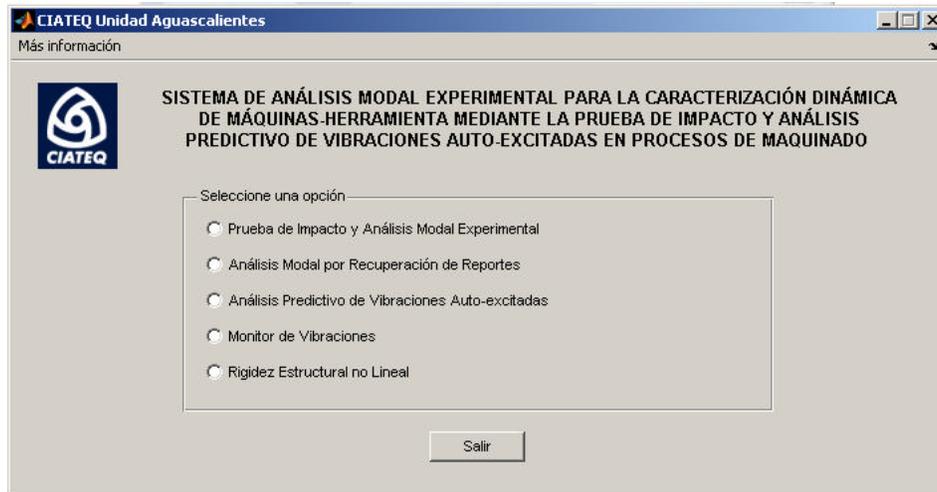
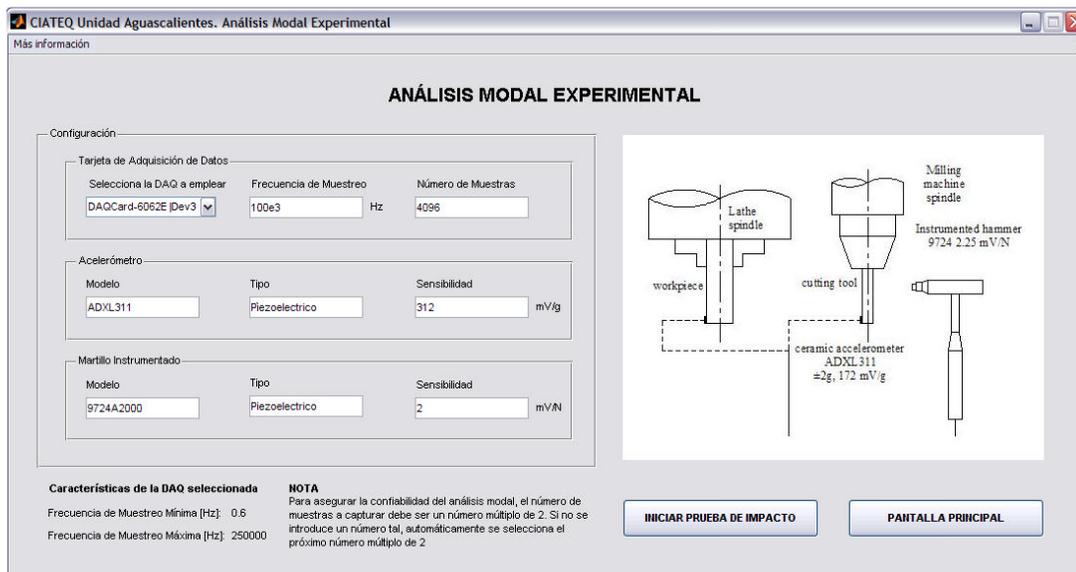


Figura A.4-2: Menú principal

(a)



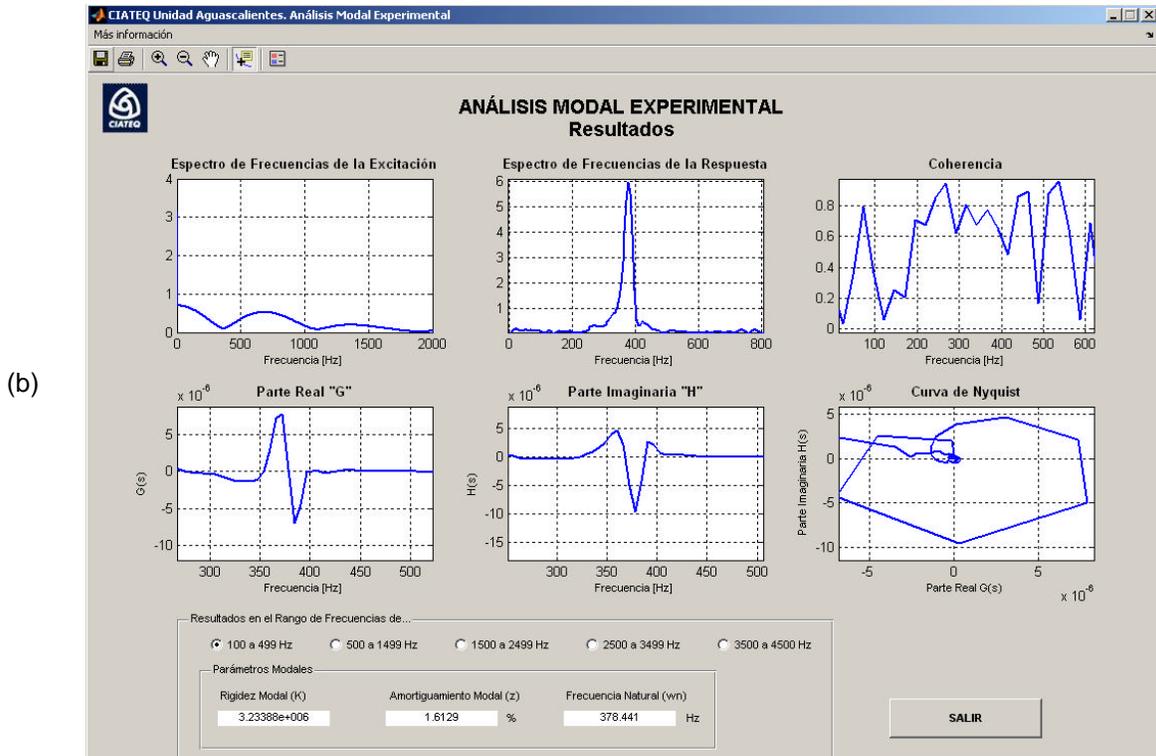
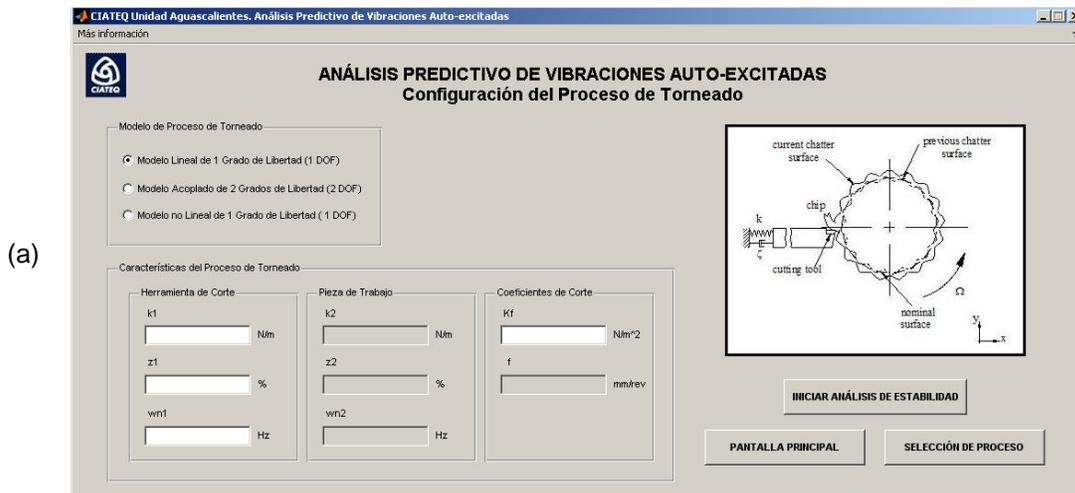


Figura A.4-3: Análisis modal experimental mediante prueba de impacto, a) Configuración y b) Resultados



(b)

CIATEQ Unidad Aguascalientes. Análisis Predictivo de Vibraciones Auto-excitadas

Más información

ANÁLISIS PREDICTIVO DE VIBRACIONES AUTO-EXCITADAS

Configuración del Proceso de Fresado

Modelo de Proceso de Fresado

Modelo No Lineal de 1 Grado de Libertad (1 DOF) Modelo Lineal de 2 Grados de Libertad (2 DOF)

Modelo No Lineal de 2 Grados de Libertad (2 DOF)

Características del Proceso de Fresado

Pieza de Trabajo		Coeficientes de Corte	
kx	N/m	Kf	N/m ²
ky	N/m	Kr	N/m ²
zx	%		
zy	%		
wrx	Hz		
wry	Hz		

Características Específicas del Proceso de Fresado

Tipo de Corte: "n" (número de dientes): aD:

INICIAR ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

PANTALLA PRINCIPAL **SELECCIÓN DE PROCESO**

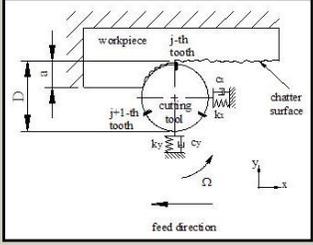
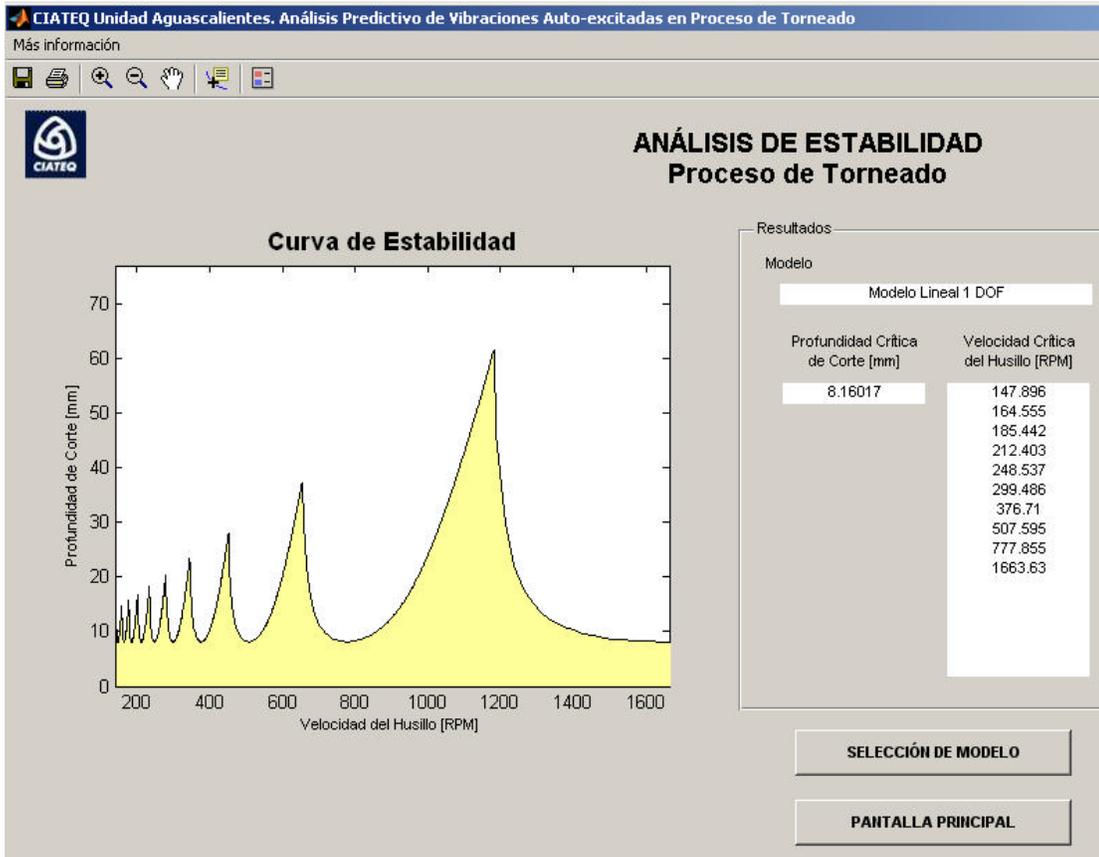
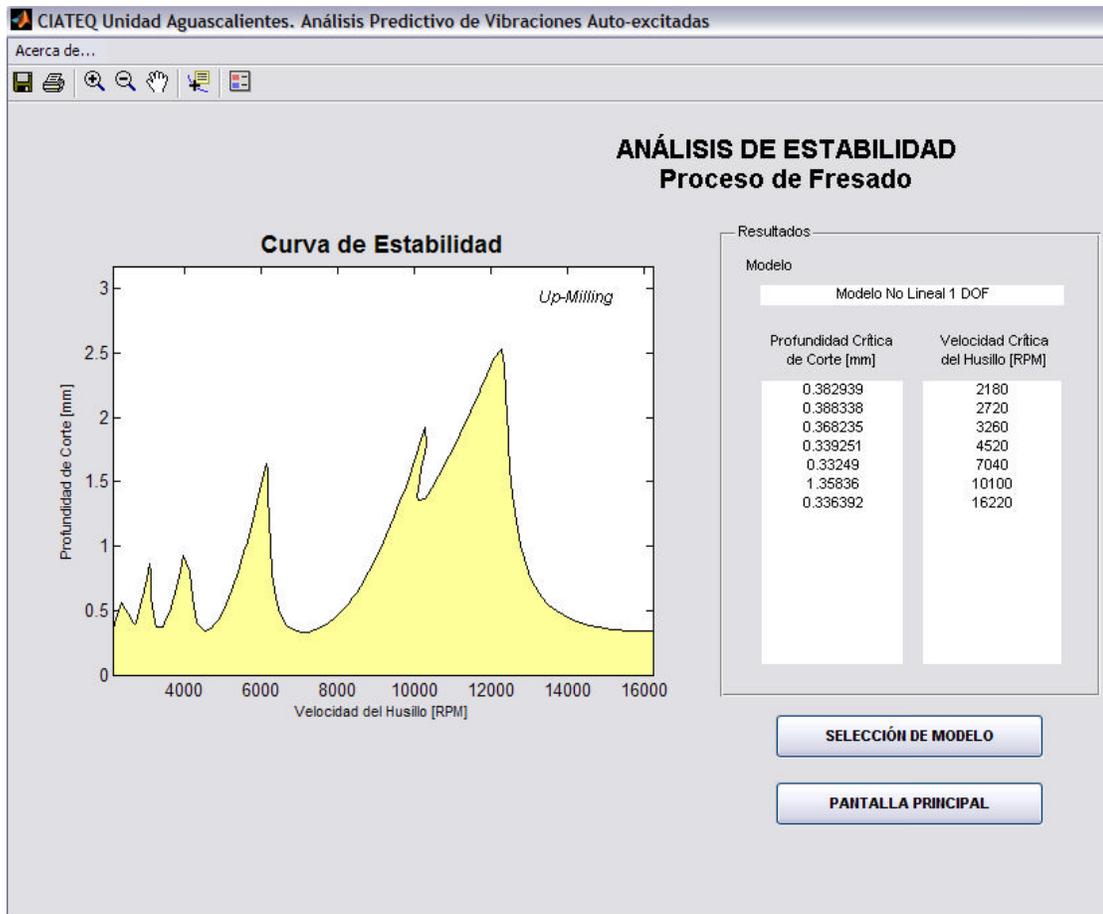


Figura A.4-4: Datos de entrada para análisis predictivo, a) torneado, b) fresado

(a)





(b)

Figura A.4-5: Análisis de estabilidad para a) torneado y b) fresado

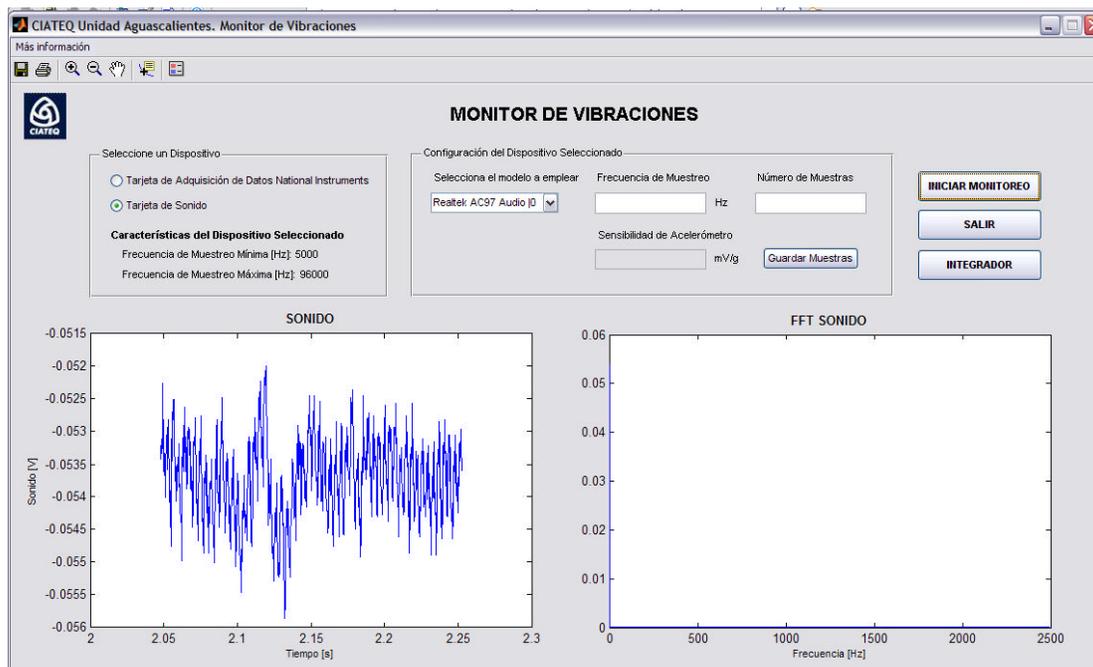


Figura A.4-6: Monitoreo de vibraciones

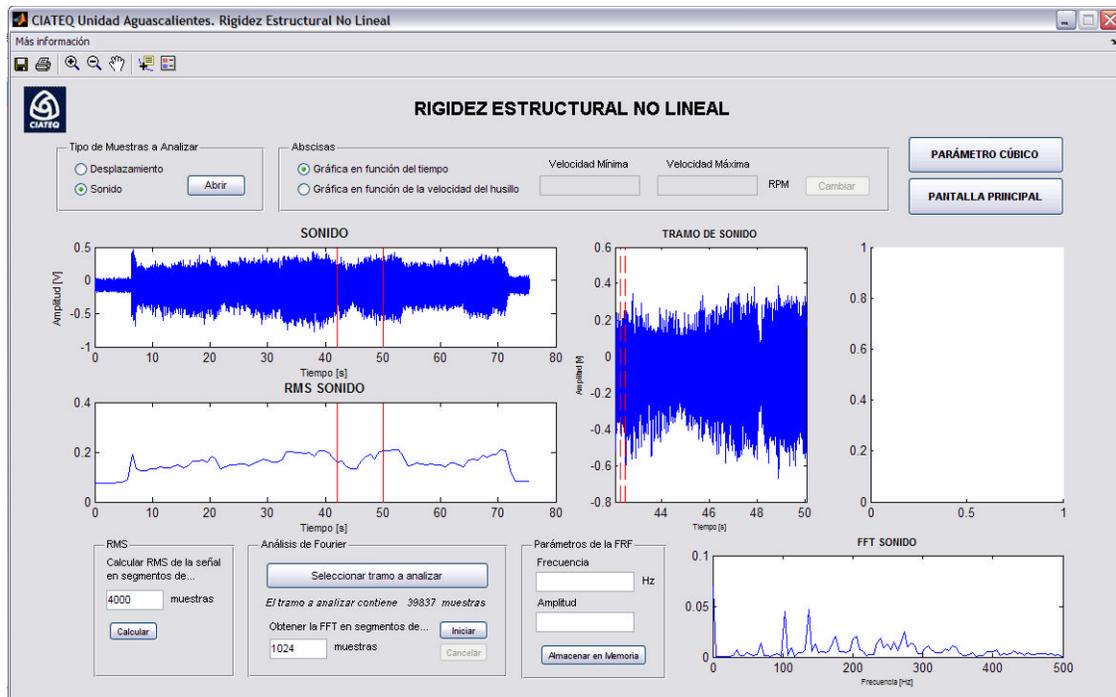


Figura A.4-7: Análisis FFT y función de respuesta a la frecuencia



Figura A.4-8: Créditos

APÉNDICE A.5: TRANSFORMADA DE ONDELETAS

Análisis espectral mediante FFT

La transformada de Fourier de una función $f(t)$ en el dominio del tiempo está dada por:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi jst} dt \quad (\text{A.5-1})$$

donde $s = 1/t$ es la frecuencia. Si se toma en cuenta la relación de Euler, $e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j \sin\theta$, se puede ver que la transformada de Fourier ajusta la función original a una suma de senos y cosenos con diferentes frecuencias.

La transformada directa de Fourier es un algoritmo empleado en tratamiento de señales y campos afines para analizar las frecuencias presentes en una señal muestreada, resolver ecuaciones diferenciales y realizar otras operaciones.

Dada una serie en el tiempo $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, la transformada directa de Fourier (DFT) se define como:

$$X_k = \sum_{i=0}^{n-1} x_i e^{-\frac{2\pi j}{n} ik} \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (\text{A.5-2})$$

donde e es la base del logaritmo natural y j es la unidad imaginaria: $j^2 = -1$. El algoritmo de la ecuación anterior implica realizar un número de operaciones aritméticas proporcional al cuadrado del número de datos. Una transformada rápida de Fourier, FFT, es un algoritmo que calcula el mismo resultado pero con un número menor de operaciones.

Una de las aplicaciones más comunes de la transformada directa de Fourier es la identificación de las componentes de frecuencia en una señal en el dominio del tiempo. La señal original se transforma al dominio de la frecuencia por medio de la ecuación (A.5-2) y se obtiene la señal transformada en el dominio de la frecuencia, donde la frecuencia está dada por:

$$f_k = \frac{1}{\Delta t n} k \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (\text{A.5-3})$$

La curva $|X_k|$ muestra el contenido de frecuencias de la señal original.

Transformada de ondeletas (wavelets)

La transformada de ondeletas de una señal x en el dominio del tiempo está dada por:

$$W(a,b) = \int x(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad a > 0, b \in \mathfrak{R} \quad (\text{A.5-4})$$

donde ψ es la transformada de ondeletas, la cual puede ser continua o discreta, mientras que los índices a y b representan la escala y la posición, respectivamente. La ecuación (A.5-4) significa que la señal original x se puede descomponer en una familia de ondeletas base, mientras que los coeficientes ponderados, $W(a, b)$, representan las amplitudes en una escala a y una posición b . El factor de escala a se relaciona de manera inversa con la frecuencia angular ω , y por consiguiente, con la frecuencia de la señal (de Arruda y Pederiva, 2004). De esta manera, la transformada de ondeletas describe la información de la señal original en varias ventanas de tiempo y bandas de frecuencia. Así, la cantidad $|W(a, b)|^2$ representa la energía de la señal en el plano tiempo-escala o tiempo-frecuencia.

Aproximaciones y detalles

La transformada de ondeletas representa una señal en términos de versiones trasladadas y dilatadas de una onda finita, denominada ondeleta madre. De esta definición surgen dos factores importantes: posición y escala. El análisis de ondeletas consiste en descomponer una señal en un conjunto jerárquico de aproximaciones y detalles. La selección del nivel de jerarquía adecuado depende la señal y de la experiencia. Generalmente el nivel se selecciona con base en la frecuencia de corte pasa-baja deseada. La transformada de ondeletas ofrece un análisis multiescalas, con lo cual se puede obtener mayor detalle en alguna parte específica de la señal.

En cada nivel j , se construye la aproximación A_j y la desviación de la señal o detalle D_j . La señal original se puede considerar como la aproximación al nivel 0, denotado por A_0 . Los términos aproximación y detalle se justifican por el hecho de que A_1 es la aproximación de A_0 tomando en cuenta las bajas frecuencias de A_0 , mientras que el detalle D_1 corresponde a la corrección de altas frecuencias. El proceso descrito se representa en la Figura A.5-1, donde se aprecia que la señal original pasa por dos filtros complementarios, un filtro pasa-bajas que define la aproximación, un filtro pasa-altas que describe el detalle de la señal (Matlab Help versión 7.0).

De manera intuitiva, la descomposición de ondeletas consiste en calcular un índice de correlación entre la señal y la ondeleta localizada en la posición b y escala a . Si el índice es grande, la correlación es fuerte, de otro modo ésta es débil. Un valor pequeño de la escala a permite realizar un análisis local, de otro modo se obtiene un análisis global. Una de las fortalezas del análisis de ondeletas es la combinación de ambos.

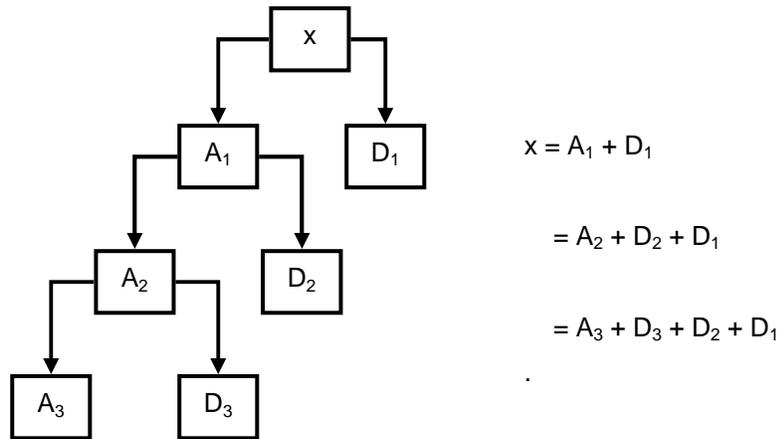


Figura A.5-1: Esquema de descomposición jerárquica y reconstrucción de señales mediante la técnica de ondeletas.

El detalle al nivel j de la señal s se obtiene como sigue:

$$D_j = \sum_k W(j,k)\psi_{j,k}(t) \quad (\text{A.5-5})$$

Para un nivel $J > j$, existen dos clases de detalles: los detalles finos asociados a los índices $j \leq J$ correspondientes a las escalas $a = 2^j \leq 2^J$, así como los detalles gruesos para índices $j > J$. Estos últimos detalles definen la aproximación del nivel j :

$$A_J = \sum_{j>J} D_j \quad (\text{A.5-6})$$

Además, la señal original x se puede reconstruir como sigue:

$$x = A_J + \sum_{j \leq J} D_j \quad (\text{A.5-7})$$

Transformada de Daubechies D4

Existen varias familias de transformadas, tales como: Haar, Daubechies, Coiflets, Symlets, Mortem, Mexican hat, Meyer, entre otras. La selección de ésta depende de varios criterios relacionados con el tipo de señal original y el tipo de resultados buscados; entre los principales están: rapidez de convergencia, simetría, regularidad, ortogonalidad y bi-ortogonalidad. La transformada discreta se utiliza en la codificación, mientras que la continua se utiliza en el análisis de señales.

En este trabajo se seleccionó la transformada discreta de Daubechies D4, la cual se usa ampliamente en problemas con señales fractales y discontinuas. Esta transformada es de orden $N = 4$ con 2 momentos de desvanecimiento y soporte $[0, N - 1]$, la cual se muestra en la Figura A.5-2.

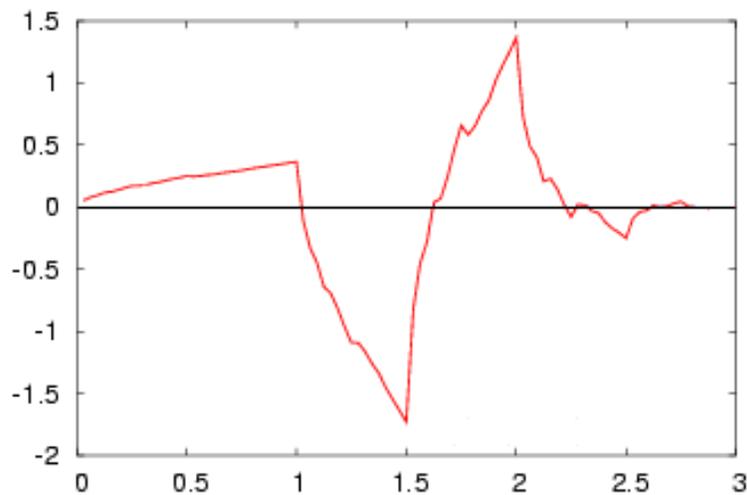


Figura A.5-2: Transformada de Daubechies de orden 4.

APÉNDICE A.6: SOLICITUD DE PATENTE DE UN PORTAHERRAMIENTAS INSTRUMENTADO ANTE EL INSTITUTO MEXICANO DE LA PROPIEDAD INDUSTRIAL

Título:

PORTAHERRAMIENTAS INSTRUMENTADO PARA MONITOREO DE VIBRACIONES AUTO-EXCITADAS Y LA TEMPERATURA DURANTE EL TORNEADO

Resumen:

La invención se refiere a un portaherramientas usado en una máquina-herramienta de torneado, ya sea de control numérico continuo, CNC, o convencional. El portaherramientas está instrumentado con un acelerómetro tipo MEMS y un transductor de temperatura de estado sólido, encapsulados en el cuerpo del portaherramientas de tal manera que las vibraciones del proceso de corte son medidas directamente por el acelerómetro, tanto en la dirección de avance como de corte. El acelerómetro está conectado a un circuito electrónico compuesto de filtros, amplificadores, un microcontrolador, circuitería, un visualizador de cristal líquido, un teclado y un transductor de sonido, colocados en el interior de una caja de montaje. El circuito electrónico procesa las señales del acelerómetro y calcula los parámetros modales y las condiciones de estabilidad dinámica en función de las variables del proceso, tales como: velocidad de husillo, coeficientes de corte, y avance, proporcionados previamente mediante el teclado. La velocidad del husillo también se puede medir mediante un transductor, el cual se conecta al circuito electrónico. La profundidad de corte crítica, previa a las vibraciones auto-excitadas, se despliega en el visualizador para la velocidad de husillo establecida. En caso de que aparezcan vibraciones auto-excitadas durante el torneado, el circuito electrónico activa una alarma audible a través del transductor de sonido. La señal del transductor de temperatura de estado sólido también se procesa mediante el circuito electrónico y se calcula la temperatura en la zona de corte, la cual se muestra de manera permanente en el visualizador de cristal líquido.

Solicitud: MX/a/208/011130

Inventores: Juan Carlos Jáuregui Correa y Luciano Vela Martínez

Fecha de solicitud: 11 de agosto de 2008

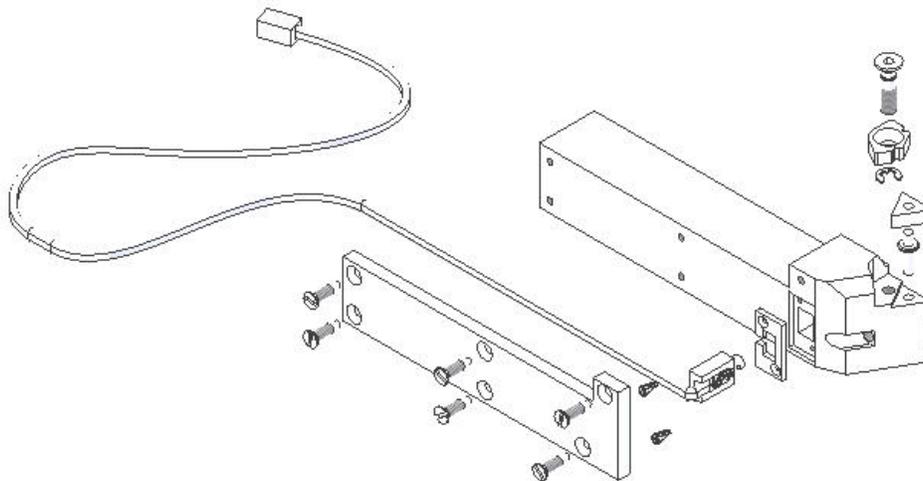


Figura A.6-1: Portaherramientas instrumentado para monitoreo de vibraciones auto-excitadas y temperatura en el proceso de torneado.



OFICINA REGIONAL DEL SUJO

Solicitud Expediente: MX/2008/21138
Fecha: 11/08/2008 Hora: 13:18
Folio: MX/E/2008/85638 88718



Solicitud de Patente
 Solicitud de Registro de Modelo de Utilidad
 Solicitud de Registro de Diseño Industrial

Modelo Industrial Diseño Industrial

Uso exclusivo Delegaciones y Subdelegaciones de la Secretaría de Economía y Oficinas Regionales del IMPI

Sello: 1234

Folio de entrada: 1316

Fecha y hora de recepción

Área de Destino de las consideraciones generales al invento

I DATOS DEL (DE LOS) SOLICITANTE(S)

El solicitante es el inventor El solicitante es el causahabiente

1) Nombre (s): CATEG, A. C.

2) Nacionalidad (es): MEXICANA

3) Domicilio: calle, número, colonia y código postal:
CALZADA DEL RETABLO 150, COL. FOVISSSTE, C. P. 76100

Población, Estado y País: QUERÉTARO, QRO., MEXICO

4) Teléfono (clave): 442 2110600 5) Fax (clave): 442 2112000

II DATOS DEL (DE LOS) INVENTOR(ES)

6) Nombre (s): JUAN CARLOS ANTONIO JAUREGUI CORREA Y LUCIANO VELA MARTINEZ

7) Nacionalidad (es): MEXICANA

8) Domicilio: calle, número, colonia y código postal:
CIRCUITO AGUASCALIENTES NORTE # 125, PARQUE INDUSTRIAL DEL VALLE DE AGUASCALIENTES, C. P. 20355

Población, Estado y País: AGUASCALIENTES, AGS., MEXICO

9) Teléfono (clave): 449 8731060 10) Fax (clave): 449 9731070

III DATOS DEL (DE LOS) APODERADO (S)

11) Nombre (s): FERNANDO CUREL NAVARRO 12) R.G.P.:

13) Domicilio: calle, número, colonia y código postal:
CIRCUITO ALAMOS # 41, COL. ALAMOS 2ª SECCION, CP 76160

Población, Estado y País: QUERÉTARO, QRO., MEXICO 14) Teléfono (clave): 442 2112000 15) Fax (clave): 442 2112000

16) Personas Autorizadas para otorgar y recibir notificaciones:
ALBERTO ZENTENO ANCIRA

17) Denominación o Título de la invención:
PORTAHERRAMIENTAS INSTRUMENTADO PARA MONITOREO DE VIBRACIONES AUTO-EXITADAS Y LA TEMPERATURA DURANTE EL TORNEADO.

18) Fecha de divulgación previa

19) Clasificación Internacional: uso exclusivo del IMPI

20) Divisivo de la solicitud

21) Fecha de presentación

22) Prioridad Reclamada:

Número	Figura jurídica	Fecha de presentación	No. de serie
Falso	Di	Me	Año

Lista de verificación (sus ítemos)

No. Hojas	Descripción	No. Hojas	Descripción
	Comprobante de pago de la tarifa		Documento de cesión de derechos
	Descripción y reivindicación (es) de la invención		Constancia de depósito de material biológico
	Dibujo (s) en su caso		Documento (s) comprobatorio(s) de divulgación previa
	Resumen de la descripción de la invención		Documento (s) de prioridad
	Documento que acredite la personalidad del apoderado		Traducción
			TOTAL DE HOJAS

Observaciones:

Se protesta de decir verdad, manifestando que los datos asentados en esta solicitud son ciertos.

FERNANDO CUREL NAVARRO QUERÉTARO, QRO. A T DE AGOSTO DE 2008
Nombre y firma del solicitante o su apoderado Lugar y fecha

Figura A.6-2: Registro ante el Instituto Mexicano de la Propiedad Industrial.