



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Ciencias (Estructuras)

ESTUDIO AEROELÁSTICO DE UN EDIFICIO DE GEOMETRÍA ATÍPICA
MEDIANTE EL MÉTODO DE INTERACCIÓN FLUIDO-ESTRUCTURA USANDO
TRANSFERENCIA DE PRESIONES

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
maestro en ciencias (estructuras)

Presenta:

Noé Díaz Briceño

Dirigido por:

Dr. Jaime Moisés Horta Rangel

Dr. Jesús Gerardo Valdés Vázquez
Co-Director

Dr. Jaime Moisés Horta Rangel
Presidente

Dr. Jesús Gerardo Valdés Vázquez
Secretario

Dr. Miguel Ángel Pérez Lara y Hernández
Vocal

Dra. María de la Luz Pérez Rea
Suplente

Dr. Guadalupe Moisés Arroyo Contreras
Suplente

Dr. Manuel Toledano Ayala
Director de la Facultad

Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña
Director de Investigación y Posgrado

Firma

Firma

Firma

Firma

Firma

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Mayo 2019

RESUMEN

Hoy en día, el gran crecimiento de la población urbana promueve la construcción de edificios cada vez más altos y esbeltos. A su vez, el desarrollo de los nuevos materiales permite que las construcciones sean más ligeras. Desde el punto de vista de la ingeniería de viento, esto se vuelve un reto para los diseñadores de tales estructuras pues estas son susceptibles a dichos efectos. Las presiones del viento en las estructuras actualmente son estudiadas desde diversas perspectivas: como presiones estáticas, maquetas a escala reducidas en túnel de viento y modelos matemáticos que aproximan el flujo del fluido alrededor de la estructura, vista tanto como un modelo rígido como flexible. En este trabajo se propone una metodología que resuelve el problema de interacción fluido-estructura al trabajar ambos modelos por separado, siendo el resultado del fluido aplicado a la estructura de forma dinámica de acuerdo con el método de transferencia de presión. Esta metodología es aplicable a cualquier edificio, pero, para efecto de desarrollar la solución, se propone uno con una geometría no considerada dentro de los coeficientes de presiones por los códigos de diseño de estructuras por viento en México. En cuanto al viento, se consideran propiedades presentes en la república mexicana críticas para edificios con las características previamente descritas. Se resuelve primero un modelo de dinámica de fluidos computacional en el cual se obtienen velocidades y presiones del fluido alrededor del edificio de forma dinámica. Las presiones obtenidas se aplican dinámicamente al modelo flexible equivalente mediante un análisis historia-tiempo que se resuelve por medio de métodos de integración directa. Los elementos mecánicos y desplazamientos de la estructura por presiones dinámicas del viento de la estructura en función del tiempo son presentados, además del análisis aerodinámico de la estructura propuesta. Con la finalidad de corroborar la precisión de los resultados obtenidos al aplicar esta metodología, un modelo de edificio ampliamente estudiado por diferentes autores es analizado comparando los resultados obtenidos en este trabajo con los resultados presentados previamente.

(Palabras clave: mecánica de fluidos computacional, interacción fluido-estructura, geometría compleja, edificio, análisis dinámico, aerodinámica, método transferencia de presión)

SUMMARY

Nowadays, the large increase of the urban population promotes the construction of taller and slender buildings. At the same time, the development of new construction materials allows the constructions to be lighter. From the point of view of the wind engineering, this proposes a challenge for the designers of these buildings due to the susceptibility of these structures to those effects. The wind pressures on structures is currently analyzed from different perspectives: static pressures, reduced scale wind tunnel models and mathematical models that approximate the flow of the fluid around the structures, being these a rigid model or a flexible model. On this work, a methodology that solves the fluid-structure interaction problem through solving the fluid model and the solid model separated, by applying the fluid results to the flexible model dynamically according to the load transfer method. This methodology is applicable to any building's geometry, but in order to develop a solution, it was proposed a building with a geometry not considered in the Mexican code for wind pressured structure design. Regarding to the wind conditions, those were selected for a specific region of Mexico with critical characteristics for the mentioned structures. First of all, a computational fluid dynamic model is solved in order to obtain the pressures and velocities of the wind around the building in a dynamic way. The pressures obtained are applied dynamically on an equivalent flexible model through a time-history analysis solved by means of the direct integration method. The state of stress of the elements that compose the structure and the displacements due to the dynamical wind pressures are presented. Also, the aerodynamical analysis of the proposed structure is shown. In order to bear out the precision of the results obtained through this methodology, a building model widely studied by different authors were analyzed through the proposed methodology. The obtained results were compared with the results presented in the literature.

(Key words: computational fluid mechanics, fluid-structure interaction, complex geometry building, dynamic analysis, aerodynamics, load transfer method)

“Mi suerte, mi gran suerte, ha sido el ser asediado, desde niño, por una vocación vehemente. He amado este arte de la construcción que he concebido, tal y como hicieron mis ancestros artesanos, como modo de reducir al mínimo el trabajo humano necesario para lograr un objetivo útil”.

Eugène Freyssinet

Dedico este trabajo a mi abuela Rosalba.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres que cada quien a su modo me apoya con sus características únicas que de alguna forma se conjugaron para ser mi más grande apoyo. Gracias por su sacrificio y reprimendas, sin ustedes definitivamente no estaría aquí.

A mi abuela Rosalba a quien dedico este trabajo. Gracias por todos esos buenos consejos y soporte ilimitado.

A mi hermana, que cada vez nos entendemos mejor, lo cual celebro desmesuradamente.

A mi novia Ilse Sinay Valdez Barrios especialmente por tanto amor y tanta paciencia durante este proceso. Te adoro.

Al Dr. Jaime Moisés Horta Rangel por sus enseñanzas y orientación durante toda la maestría. Espero seguir aprendiendo de usted. Le guardo un enorme respeto.

A los catedráticos que fungieron como mis maestros en las diferentes asignaturas dentro del programa de estudios de la maestría, así como al doctor Jesús Gerardo Valdez Vázquez, aprecio todo su tiempo y dedicación al compartir su conocimiento conmigo.

A mis compañeros de la Maestría en Estructuras y Geotecnia, agradezco todo lo que me enseñaron, fueron mis maestros no oficiales. Agradezco su faceta de amigos también, la cual atesoraré por siempre.

A mis cohabitantes, que logramos a pesar de cualquier situación sobrellevar este largo tiempo juntos.

Al Ing. Roberto Minjarez García y a su esposa, que nos dieron su apoyo a pesar de poco conocernos con el fin de que lográramos superarnos. Gracias por tanta calidez humana.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y a la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ) por el apoyo invaluable brindado en la realización de este proyecto.

TABLA DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCIÓN	11
1.1 HIPÓTESIS Y OBJETIVOS.....	18
2. ANTECEDENTES	19
3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	23
3.1 FUNDAMENTOS DE MÉCANICA DE MEDIO CONTINUO.....	23
3.1.1 CINEMÁTICA.....	23
3.1.2 MOVIMIENTO.....	26
3.1.3 CONSERVACIÓN DE LA MASA.	29
3.1.4 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO.....	31
3.2 ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.	32
3.3 DINÁMICA ESTRUCTURAL.....	34
3.4 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN DIRECTA.	35
3.4.1 MÉTODO B DE NEWMARK.	35
3.4.2 MÉTODO DE HILBERT-HUGHES-TAYLOR.....	36
3.4.3 MÉTODO θ DE WILSON.....	36
3.5 DESCRIPCIÓN DE LOS DOMINIOS.	37
3.5.1 DESCRIPCIÓN LAGRANGIANA.	37
3.5.2 DESCRIPCIÓN EULERIANA.....	40
3.5.3 DESCRIPCIÓN LAGRANGIANA-EULERIANA ARBITRARIA (ALE).....	41
3.6 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.	44
3.6.1 MÉTODO DE RESIDUOS PONDERADOS.	46
3.6.2 FORMULACIÓN ISOPARAMÉTRICA.....	48
3.6.3 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS.....	51
3.6.3.1 ELEMENTOS PLANOS RECTANGULARES.....	51
3.6.3.2 ELEMENTO VIGA.	53
3.6.3.3 ELEMENTO TRI-LINEAL RECTANGULAR SOLIDO.....	55
3.7 CUADRATURA GAUSSIANA.	56
3.9 MODELO TURBULENTO.	59

3.9.1	SIMULACIÓN NUMÉRICA DIRECTA.....	60
3.9.2	NAVIER-STOKES REYNOLDS PROMEDIO.....	60
3.9.3	SIMULACIÓN DE GRANDES TORBELLINOS.....	61
4.	METODOLOGÍA.....	62
4.1	PROPIEDADES DEL SÓLIDO Y DEL FLUIDO.....	65
4.1.1	PROPIEDADES DEL MODELO CAARC.....	65
4.1.2	PROPIEDADES DEL EDIFICIO DE GEOMETRÍA ATÍPICA.....	69
4.2	ANÁLISIS DE DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL	72
4.3	ANÁLISIS AERODINÁMICO	73
4.4	NUMERACIÓN DE NODOS	73
4.5	AGRUPACIÓN DE NODOS EN GRUPOS.....	74
4.6	FUNCIONES DE VARIACIÓN DINÁMICA.....	75
4.7	MODELO FLEXIBLE.....	76
4.8	APLICACIÓN DE CARGAS AL MODELO	76
4.9	REVISIÓN DE LA RESPUESTA AEROELÁSTICA	76
5.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	78
5.1	RESPUESTA AEROELÁSTICA DEL MODELO CAARC	78
5.2	ANÁLISIS AERODINÁMICO DEL EDIFICIO DE GEOMETRÍA ATÍPICA.....	79
5.3	RESPUESTA AEROELÁSTICA DEL EDIFICIO DE GEOMETRÍA ATÍPICA	80
6.	CONCLUSIONES	84
	REFERENCIAS.....	85

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3-1 Puntos de muestra y peso para la cuadratura Gaussiana en el intervalo $\xi \in [-1, 1]$	58
Tabla 4-1 Geometría del edificio con respecto a la altura.	70

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1 Crecimiento de la población urbana en México. Modificado de (Instituto Nacional de Estadística y Geografía, 2017).	11
Figura 1-2 Puente Tacoma Narrows oscilando torsionalmente antes de colapsar (Arioli and Gazzola, 2015).....	12
Figura 1-3 Ensayo en túnel de viento de un edificio kilométrico en China (Sun <i>et al.</i> , 2017).	15
Figura 1-4 Análisis de mecánica de fluido computacional de dos edificios (Hubova <i>et al.</i> , 2017).	16
Figura 3-1 Descripción Lagrangiana del movimiento (modificado de Donea, <i>et al.</i> , 1999).	38
Figura 3-2 Dominios y su transformación uno a uno en función de su configuración (Donea, <i>et al.</i> , 1999).....	41
Figura 3-3 Elementos finitos comunes a) línea b) áreas c) volúmenes (modificado de Alawadhi, 2010).....	45
Figura 3-4 a) Elemento barra de tres nodos (cuadrático) con coordenada natural ξ . b) Tres funciones forma	49
Figura 3-5 Elemento isoperimétrico plano en el espacio ξ - η	52
Figura 3-6 Grados de libertad del elemento tipo “viga”	53

Figura 3-7 Grados de libertad del elemento tipo “brick”	55
Figura 3-8 Cuadratura Gaussiana para calcular el área oscura bajo la curva $\phi = \phi(\xi)$, usando uno, dos y tres puntos muestra (puntos Gauss)	57
Figura 3-9 Esquema de volúmenes finitos en el cual se observa el flujo a través de volúmenes finitos ejemplificando la conservación de la masa.....	59
Figura 4-1 Dimensiones del modelo CAARC	66
Figura 4-2 Modelo CAARC en SAP 2000.....	66
Figura 4-3 Túnel de viento virtual del modelo CAARC	67
Figura 4-4 Perfil de velocidad de viento para el modelo CAARC	68
Figura 4-5 Modelo de elementos finitos de edificio de geometría atípica.....	69
Figura 4-6 Perfil de velocidad de viento para el edificio de geometría atípica.....	71
Figura 4-7 Presiones medias en el modelo de geometría compleja para los 5 segundos considerados	72
Figura 4-8 Modelos con sus nodos numerados.....	73
Figura 4-9 Variación de fuerza nodal tomada del modelo CAARC.....	74
Figura 4-10 Variación de factor de fuerza nodal tomada del modelo CAARC.....	75
Figura 5-1 Desplazamientos del modelo CAARC por presiones dinámicas del viento	77
Figura 5-2 Evolución de los vórtices en la parte posterior de la estructura	78
Figura 5-3 Evolución de los vórtices alrededor de la estructura	79

Figura 5-4 Desplazamientos en el eje longitudinal del edificio de geometría atípica completo en el tiempo 79

Figura 5-5 Desplazamientos en el eje transversal del edificio de geometría atípica completo en el tiempo 80

Figura 5-6 Desplazamientos del edificio de geometría atípica debido a las presiones dinámicas del viento..... 80

Figura 5-7 Momentos en “z” en función del tiempo para el edificio de geometría atípica..... 81

Figura 5-8 Variación del momento de columna en la base del edificio en el tiempo..82

1. INTRODUCCIÓN

En México, la encuesta nacional de hogares realizada en el año 2016 estima que en el país hay 32.9 millones de hogares, de los cuales 21.7 por ciento (7.1 millones) se ubican en zonas rurales y un 78.3 por ciento en localidades urbanas. En términos de población, 28.3 millones (23.2 por ciento) habita en localidades rurales, mientras que en localidades urbanas habitan 94 millones (76.8 por ciento) de un total de 122.3 millones de personas aproximadamente, situación presentada de forma gráfica en la figura 1-1 (Instituto Nacional de Estadística y Geografía, 2017).

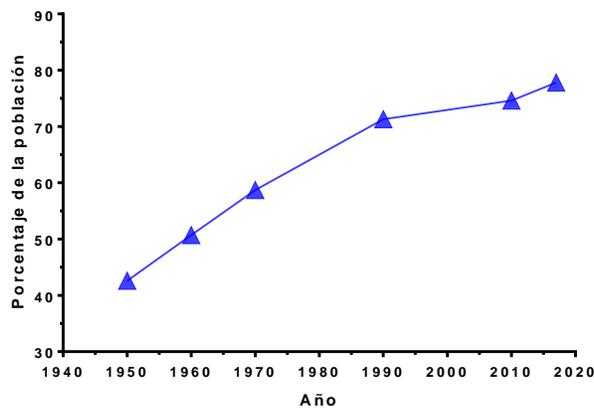


Figura 1-1. Crecimiento de la población urbana en México. Modificado de (Instituto Nacional de Estadística y Geografía, 2017).

De acuerdo con Meng *et al.* (2018), la construcción de edificios altos es la única opción viable para solucionar el rápido poblamiento de zonas urbanas ya que no precisa el uso de grandes extensiones de terreno, sin embargo, esta práctica afecta las condiciones de viento originales de la zona, por lo que es indispensable analizar aspectos tales como la comodidad de los peatones a efectos de viento, la ventilación de la zona urbana y de las construcciones, y las cargas generadas por el viento.

De acuerdo con Dagnew *et al.* (2009), el viento es una de las mayores fuerzas responsables por fallas catastróficas en estructuras y pérdidas humanas. Se dice que cerca del 70 al 80 por ciento de las pérdidas económicas debidas a desastres naturales en el mundo son debidas a vientos de velocidades extremas, y catástrofes naturales relacionadas con agua (Tamura y Kareem, 2014).

El viento es básicamente originado por el gradiente de temperatura de la atmosfera, debido a la variación del calor del sol en la superficie de la tierra. En un sentido más preciso, el viento inicia debido a diferencias de densidad o al gradiente de presión entre puntos de misma elevación (Tamura y Kareem, 2014). Por lo tanto, el viento se comporta de forma dinámica tanto en el tiempo como en el espacio, y su comportamiento puede ser descrito como aleatorio (Boggs y Dragovich, 2006). Diferentes condiciones climáticas pueden resultar en fuertes vientos, como monzones, depresiones frontales, ciclones tropicales, tormentas eléctricas y tornados (Tamura y Kareem, 2014). Las diferentes respuestas debidas a la relación entre las presiones de viento y la estructura son esenciales en el diseño estructural de edificios (Kopp *et al.*, 2012). El efecto generado por las presiones del viento puede conllevar a serias consecuencias, incluso eventos trágicos dependiendo de las condiciones presentadas, tales como el colapso del puente Tacoma Narrows (figura 1-2) que ocurrió en 1940 por presiones de viento de una velocidad de solo 19 m/s (Mendis *et al.*, 2007).



Figura 1-2. Puente Tacoma Narrows oscilando torsionalmente antes de colapsar (Arioli and Gazzola, 2015)

La respuesta dinámica de la estructura bajo presiones de viento depende principalmente de los tres factores siguientes (Sentile *et al.*, 2006):

- Dirección y velocidad del viento.
- Propiedades físicas y aerodinámicas de la estructura.
- El efecto combinado del viento y las propiedades de la estructura.

Además, debe considerarse el entorno que rodea el edificio (Meng *et al.*, 2018). En edificios, la presión del viento aumenta con respecto la altura del edificio es mayor debido al incremento exponencial de la velocidad del viento con la altura (Meng *et al.*, 2018).

El viento se compone de diversos torbellinos de diversa magnitud y características rotatorias, los cuales dan al viento su carácter turbulento. La turbulencia hace que la presión del viento en una estructura sea dinámica y dependa de la magnitud de los remolinos generados. Para grandes torbellinos que tengan un tamaño cercano al de la estructura se presenta una buena correlación de las presiones siempre que el remolino envuelva la estructura, mientras que para grandes torbellinos se observa una correlación nula en las presiones de las distintas partes de la estructura con respecto a su distancia entre sí (Mendis *et al.*, 2007).

Diferentes inestabilidades aerolásticas se presentan en las estructuras bajo presiones de viento debido a su respuesta dinámica. A continuación, se presentan los efectos más importantes en estructuras y una corta explicación de los mismos. Una explicación más detalladas de estos efectos se presenta en Rodrigo (2005):

- *Galope*: Generalmente se presenta en estructuras esbeltas con forma rectangular. Se presenta como oscilaciones de gran amplitud en la dirección transversal a la corriente en frecuencias mucho menores que las presentadas por desprendimiento de vórtices.

- *Desprendimiento de vórtices:* Es el desprendimiento alternado y periódico de torbellinos que ocurren perpendiculares a la corriente. Este fenómeno genera sobre las estructuras vibraciones laterales. Son de particular peligro pues si la frecuencia del desprendimiento de vórtices coincide con las frecuencias propias de la estructura, esto puede generar el fenómeno de resonancia amplificando la deformación en la estructura y poniéndola en peligro de colapso.
- *Flameo:* En este fenómeno se involucran dos grados de libertad: vibraciones laterales (perpendiculares a la corriente) y vibraciones por torsión. Se presenta en estructuras con una misma frecuencia en ambos lados de oscilación, a traslación y torsión.
- *Bataneo:* Se produce por las turbulencias u otras perturbaciones de la corriente que no se producen por el obstáculo que las sufre. Este fenómeno se caracteriza de dos formas: las que se generan por la propia turbulencia de la corriente y por perturbaciones causadas por algún obstáculo próximo situada corriente arriba del obstáculo considerado.

La práctica común para el modelado de presiones de viento presentado en los códigos de construcción implica el aplicar las cargas estáticamente a través de coeficientes de presión, ignorando el comportamiento dinámico del viento (*Kopp et al.*, 2012), como es el caso del Manual de Diseño de Obras Civiles en Diseño por Viento publicado por la Comisión Federal de Electricidad (CFE) en el año 2008, el cual, considera un análisis dinámico para estructuras con un periodo natural de vibración mayor de 1.0 segundo. Sin embargo, el resultado de este análisis, que, si bien considera las características de turbulencia del viento, la frecuencia natural de vibración de la estructura y el amortiguamiento de la misma, al final solo se obtiene un factor de magnificación dinámica mayor que uno que aumenta la fuerza de las cargas obtenidas mediante los coeficientes estáticos. Por otra parte, los manuales y normativas existentes solo contemplan una serie limitada de geometrías para las

cuales pueden ser aplicados los coeficientes de presión. De acuerdo con Comisión Federal de Electricidad (2008), las estructuras para las cuales el Manual de Obras Civiles no ofrezca una solución, tal es el caso de estructuras en que sus efectos dinámicos sean particularmente sensibles, se deberá consultar a un expertos para tales efectos y los resultados se basarán en prototipos o modelos a escala reducida realizados en un túnel de viento, como el presentado en la figura 1-3 .



Figura 1-3. Ensayo en túnel de viento de un edificio kilométrico en China (Sun *et al.*, 2017)

Adicionalmente como es el caso de Kopp *et al.* (2012) y Zhang and Li (2018), también se realizan análisis de las presiones de viento en la estructura a escala real.

En la actualidad, este tipo de estructuras con problemas aerodinámicos han encontrado una solución numérica con el desarrollo de la mecánica de fluidos computacional, la cual, resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos no compresibles, tratando el sólido (o estructura) como un obstáculo que se atraviesa al fluido, ya que este se considera como un modelo rígido, por lo cual, no presenta desplazamientos ante las presiones del viento. Un ejemplo de este tipo de modelado se muestra en la figura 1-4. Mediante esta técnica, se pueden obtener las presiones en la superficie de la estructura, las velocidades del viento, e incluso, con el desarrollo actual de la técnica, se pueden observar los vórtices generados alrededor de la estructura.

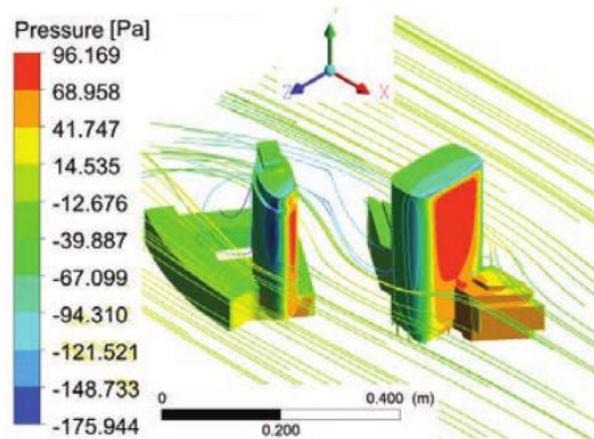


Figura 1-4. Análisis de mecánica de fluido computacional de dos edificios (Hubova *et al.*, 2017)

Este esfuerzo de investigación se enfoca en obtener los estados de esfuerzos y desplazamientos dinámicos de una estructura para la cual, no haya una solución directa por medio del Manual de Obras Civiles de la CFE, para lo cual, el modelo debe ser tomado como flexible y no rígido, como sería desde el punto de vista de la Mecánica de Fluidos Computacional.

Un paso adelante en la solución de estructuras flexibles por efectos de viento con características aerolásticas particulares se presentó con el desarrollo de la Interacción Fluido-Estructura. La interacción fluido-estructura se considera un problema multi-físico, ya que se consideran dos dominios, tanto dominio fluido como sólido, los cuales deben de ser resueltos mediante una solución que acople ambos. A su vez, se debe proponer una condición que rijan el movimiento en la frontera de los dominios (Namkoong *et al.*, 2005), para lo cual se requiere imponer una condición de frontera estructural no lineal para el movimiento del fluido, situación que complica la solución del problema (Valdés-Vázquez, 2007). En adición, este tipo de problemas demandan de gran poder computacional.

Comúnmente, las características de los problemas de interacción fluido-estructura pueden resumirse en tres puntos importantes (Slone *et al.*, 2002):

- El fluido ejerce presión sobre las superficies (frontera) de la estructura.
- La presión del fluido deforma la estructura, la cual, a su vez cambia la dinámica del fluido.
- Este cambio en la dinámica del fluido con respecto a las deformaciones del sólido significa que, para efecto de modelar la malla del fluido por medio de métodos dinámicos, las ecuaciones del fluido deben de adaptarse a tales efectos y a las condiciones de frontera.

La interacción fluido-estructura se presenta en una gran variedad de problemas físicos que van desde problemas de ingeniería, tales como edificios de gran altura y puentes de largos claros , así como las alas de un avión en pleno vuelo, hasta ser pieza clave en el entendimiento de fenómenos biológicos tales como el funcionamiento de un pulmón humano o el flujo de sangre a través de una válvula aórtica (Förster, 2007).

En este trabajo se busca aproximar los resultados que se obtienen con la interacción fluido-estructura mediante el uso de la Mecánica de Fluidos Computacional y el método de transferencia de presión, aplicando los resultados obtenidos dinámicamente a un modelo flexible equivalente al modelo rígido. Por lo tanto, no se resuelven el dominio fluido y el dominio sólido en conjunto, sino de forma independiente uno del otro, ignorando el acoplamiento de las ecuaciones, esto, bajo el fundamento de que, para un edificio de poca altura, los desplazamientos permitidos son relativamente pequeños, de tal manera en que su movimiento no altere de forma significativa el flujo del fluido.

En primera instancia se resuelve un modelo de edificio alto ampliamente estudiado por diferentes autores especializados en temas de ingeniería de viento propuesto por la Comunidad del Consejo Revisor Aeronáutico, conocido como CAARC por sus siglas en inglés con fines comparativos. Posteriormente se presentan los resultados del modelo de edificio con geometría compleja. Ambos modelos analizados bajo la

misma metodología, mas, con diferente geometría y diferentes propiedades de viento.

1.1 HIPÓTESIS Y OBJETIVOS

- **Hipótesis**

Los resultados de un modelo rígido analizado mediante dinámica de fluidos computacional aplicado a un modelo elástico aproxima los resultados de un modelo acoplado de interacción fluido-estructura con desplazamientos moderados.

- **Objetivos:**

- Analizar la caracterización aerodinámica de la estructura propuesta.

- Obtener los estados de esfuerzos y desplazamientos en función del tiempo de los elementos del edificio en función de las presiones dinámicas del viento.

- Comparar los resultados obtenidos mediante la metodología propuesta con los presentados en la literatura para un modelo previamente estudiado (modelo CAARC).

2. ANTECEDENTES

EL comienzo de la Ingeniería de Viento Computacional empieza con Smagorinsky (1963), al ser la primera vez que se desarrolló con éxito la Simulación de Grandes Torbellinos. Las investigaciones de este autor se enfocaban principalmente a la predicción numérica de condiciones climáticas. Las primeras aproximaciones de análisis numéricos de fluidos en los cuales se tomó en consideración el fluido que rodea a un sólido fueron realizados en los años setenta, entre los cuales, se puede nombrar como ejemplo el trabajo de Hirt y Cook (1972) y Frost *et al.* (1974). La Ingeniería de Viento Computacional empezó a avocarse a determinar la velocidad del viento y presiones alrededor de un edificio entre los años 1980 y 2000, con autores como Summers *et al.* (1986), Murakami (1990) y Hunter y Wales, (1992).

En la actualidad, la Ingeniería de viento computacional ha avanzado exponencialmente, de tal manera que es usada diariamente por proyectistas y académicos en todo el mundo (Blocken, 2014). Hubova *et al.* (2017) modelaron por medio de la Mecánica de Fluidos Computacional un edificio de geometría atípica de gran altura, a su vez, probaron en túnel de viento modelos a escala reducida considerando la fachada real (con superficie rugosa) y una fachada lisa. Meng *et al.* (2018) realizaron un análisis de sensibilidad por presiones de viento del modelo CAARC, modelo de edificio usado para calibrar túneles de viento a escala reducida, demostrando mediante mecánica de fluidos computacional la variación de las presiones de viento en el edificio bajo modelos turbulentos, tipo de mallado y efectos de velocidad de aproximación de flujo. A su vez, Lee (2017) realizó una reconstrucción digital de la ciudad de Copenhague mediante simulación de mecánica de fluidos computacional, teniendo en mente realizar el análisis de un edificio específico bajo diferentes capas de edificios de la ciudad en un radio conocido, concluyendo que deben tomarse en consideración todos los edificios en un radio de 200 metros en la simulación, pues tienen injerencia en los resultados.

Un punto importante a considerar en el diseño de edificios altos en áreas urbanas es el de la comodidad de los peatones que caminan alrededor de edificios de gran altura, a su vez de la dispersión de contaminantes y la ventilación de la zona. Dhunny *et al.* (2018) realizaron un análisis de mecánica de fluidos computacional de la zona metropolitana de una ciudad con un gran número de edificios de gran altura con clima tropical. Mediante el análisis del viento en diferentes direcciones generaron mapas de flujo de viento en la zona con la finalidad de lograr los propósitos previamente establecidos.

Aplicaciones de la interacción fluido-estructura en edificios son presentados por autores como Péntek *et al.* (2018), los cuales probaron el modelo de edificio alto CAARC utilizando el método de interacción fluido-estructura para diferentes tipos de amortiguadores de masa añadida utilizando un acoplamiento completo. Otro ejemplo de análisis del modelo CAARC (fundamental en esta investigación) utilizando interacción fluido-estructura, fue realizado por Braun y Awruch (2009), cuyo propósito fue el de estudiar la respuesta aeroelástica del modelo. El modelo CAARC fue probado por los autores para diferentes velocidades de viento y los resultados fueron comparados utilizando un modelo a escala reducida en túnel de viento. Por su parte, Huang *et al.* (2013) propuso una metodología factible para mallas relativamente gruesas, asociadas a número de Reynolds altos, con la finalidad de obtener una metodología con gran capacidad para resolver problemas de interacción fluido-estructura para edificios altos. Huang *et al.* (2013) resolvieron por medio de la metodología propuesta el modelo CAARC y el edificio Taipéi, famoso a nivel mundial por su arquitectura y gran altura. Los resultados para ambos modelos presentaron buena aproximación con respecto a resultados experimentales. Holmes y Tse (2014) realizaron un análisis comparativo de diferentes grupos de investigadores que trabajan con el modelo CAARC, enfocándose principalmente en el momento en la base, producido por las presiones

dinámicas del viento, observando tanto altas como bajas variaciones en los resultados de los autores dependiendo de la velocidad del viento empleada en el análisis. Un modelo a escala reducida del CAARC fue propuesto por Marra *et al.* (2018), en el cual mediante un código en Python se determinó el paso del modelo continuo a un modelo físico simple. El modelo a escala fue probado por los autores en túnel de viento demostrando la eficacia del modelo escalado propuesto por los autores, compuesto por 4 módulos y 12 grados de libertad.

En el caso de estructuras con geometría irregular, Horta-Rangel *et al.* (2016), propuso un edificio de geometría irregular, el cuál analizó por medio de interacción fluido-estructura, corroborando con experimentos en túnel de viento a escala reducida sus resultados con apreciable aceptación. Valdés-Vázquez *et al.* (2012) realizaron el análisis eólico de un monumento histórico de forma similar a una torre, pero completamente irregular obteniendo las presiones en la superficie en función del tiempo, y los desplazamientos mediante un modelo simplificado de interacción-fluido estructura. Mientras que Belver *et al.* (2012) estudiaron una chimenea industrial de 90 metros de altura mediante un análisis de interacción fluido-estructura simplificado. El análisis consistió en el cálculo de las fuerzas en mallas del fluido plana en dos dimensiones basadas en la teoría de la dinámica de fluidos computacional combinada con el modelo estructural propuesto desde el punto de vista mecánico.

Es de fundamental importancia para el desarrollo de cualquier modelo de mecánica de fluidos computacional es la generación de la malla. Yu *et al.* (2018) define la generación de la malla como la fase de pre-proceso necesaria antes de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, siendo esta, una estructura de datos que contiene la información de la localización y topología del dominio discretizado. De acuerdo con Zhang y Yu (2013), se desconoce el tamaño idóneo para la malla, incluso, no existe un consenso para tales efectos, ya que los investigadores mallas basados en sus experiencias. A pesar de esta situación, se han podido llegar a ciertas conclusiones

al respecto. Stephen (2004) concluyó que el uso de mallas estructuradas mejoraba la exactitud del cálculo de flujos de calor y de coeficientes de fricción en flujos hipersónicos. Por su parte, Chao *et al.* (2006) demostraron que mientras más se refine la malla la simulación presentará mejores resultados, sin embargo, una vez se haya llegado a resultados admisibles, el refinamiento de la malla será inútil. Una guía para determinar el tamaño de la malla puede ser encontrada en Zhang y Yu (2013).

3 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En esta sección se presentan los fundamentos teóricos en los cuales se basan las actividades a realizar en este esfuerzo de investigación.

3.1 Fundamentos de mecánica de medios continuos

Este trabajo fundamenta sus ecuaciones particularmente en la mecánica de medios continuos. A continuación, se presentan las teorías implementadas. Explicaciones más detalladas de estas ecuaciones se presentan en (Gurtin, 1981), (Bathe, 1996), (Malvern, 1969), (Abeyaratne, 2012), (Irgens, 2008) y (Batchelor, 2000).

3.1.1 Cinemática

La cinemática se define como el estudio del movimiento y deformación de los cuerpos ignorando las fuerzas responsables de tales acciones. Los cuerpos ocupan regiones del espacio euclidiano E . Un cuerpo se define como un conjunto de puntos materiales, por ejemplo, B , siendo este en un cuerpo ocupando una región específica de E . Comúnmente se identifica a B , como la configuración de referencia. Los puntos $p \in B$ se denominan como puntos materiales. Una parte esencial de la mecánica de medios continuos son los cuerpos deformables. Desde un punto de vista matemático, la deformación de un cuerpo se presenta a través de la función de mapeo f que lleva cada punto material p a un punto:

$$x = f(p) \tag{3.1.1}$$

Es importante tomar en consideración que la función f es inyectiva (uno a uno), por lo cual, un cuerpo material no puede penetrarse a sí mismo. A su vez, no pueden presentarse un proceso de deformaciones que precedan a la configuración de referencia. El desplazamiento está representado por el vector:

$$u(p) = f(p) - p \tag{3.1.2}$$

Si u es constante, f representa translación, para lo cual la ecuación (3.1.2) se transforma en:

$$f(p) = p + u \quad (3.1.3)$$

El tensor:

$$F(p) = \nabla f(p) \quad (3.1.4)$$

Se denomina gradiente de deformación. Para el caso en el que una deformación en la que F es constante se denomina como homogénea. Toda deformación que de acuerdo a lo expuesto anteriormente sea homogénea puede ser representada como:

$$F(p) = f(p) + F(p - q) \quad (3.1.5)$$

Si se tiene una deformación homogénea en función de un punto fijo q (siendo q un punto dado en E), se presentan 2 importantes tipos de deformaciones: rotación en q (siendo q un punto dado en E):

$$f(p) = q + R(p - q) \quad (3.1.6)$$

Siendo R una rotación.

Y estiramiento desde q :

$$f(p) = q + U(p - q) \quad (3.1.7)$$

Siendo U un tensor simétrico y positivo:

$$U = I + (\lambda - 1)e \otimes e \quad (3.1.8)$$

El esfuerzo es la expansión de la deformación f sobre un punto arbitrario $q \in B$, tal que:

$$f(p) = f(q) + F(q)(p - q) + o(p - q) \quad (3.1.9)$$

Sea F el gradiente de deformación. En la vecindad de un punto q y dentro de un error $o(p - q)$ la deformación es homogénea. Por lo tanto:

$$F = RU = VR \quad (3.1.10)$$

Siendo esta la descomposición polar virtual de F , mientras que R es el tensor rotacional y U el tensor de estiramiento derecho, mientras que V el izquierdo para la deformación f . Ya que U y V asocia las raíces cuadradas de $F^T F$ y FF^T , debido a dificultades en el cálculo, se propusieron los tensores de esfuerzos izquierdo y derecho de Cauchy-Green, denotados por, C y B , siendo:

$$C = U^2 = F^T F \quad B = V^2 = FF^T \quad (3.1.11)$$

Para un campo cinemático en el cual el gradiente de desplazamientos ∇u es pequeño, para lo cual:

$$f(p) = p + u(p) \quad (3.1.12)$$

Resulta:

$$F = I + \nabla u \quad (3.1.13)$$

Por lo tanto, el tensor de esfuerzos de Cauchy-Green C y B cumplen:

$$C = I + \nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u \quad (3.1.14)$$

$$B = I + \nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u \quad (3.1.15)$$

En el caso en el que la deformación es dirigida, $C = B = I$ y se cumple:

$$\nabla u + \nabla u^T + \nabla u \nabla u^T = 0 \quad (3.1.16)$$

Sea ∇u constante, debido a que F es el tensor de campo:

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad (3.1.17)$$

Se conoce como esfuerzo infinitesimal. Por lo cual:

$$C = I + 2E + \nabla u^T \nabla u \quad (3.1.18)$$

$$B = I + 2E + \nabla u^T \nabla u \quad (3.1.19)$$

3.1.2 Movimiento

Sea B un cuerpo. El movimiento de B es una función de clase C^3

$$x: B \times R \rightarrow \mathcal{E} \quad (3.1.20)$$

con $x(\cdot, t)$, para cada t fijo, una deformación de B . Por lo tanto, el movimiento es una familia de parámetros suaves uno-a-uno de deformaciones, siendo el tiempo (t) el parámetro de referencia.

Sea:

$$x = x(p, t) \quad (3.1.21)$$

el lugar ocupado por el punto material p en el parámetro tiempo t , tenemos la ecuación (3.1.22) para el espacio que ocupa el cuerpo en un instante t .

$$B_1 = x(B, t) \quad (3.1.22)$$

Con la finalidad de simplificar el problema, la práctica común es la de utilizar puntos de referencia en el espacio en función del tiempo, en vez de utilizar puntos materiales de referencia, lo cual lleva al concepto de trayectoria:

$$T = \{(x, t) | x \in B_1, t \in R\} \quad (3.1.23)$$

Para cada t , $x(\cdot, t)$ es una función uno-a-uno de B en B_1 , de tal manera en la que la ecuación (3.1.23) tiene una inversa:

$$p(\cdot, t): B_t \rightarrow B \quad (3.1.23)$$

Por lo tanto:

$$x(p(x, t), t) = x, \quad p(x(p, t), t) = p \quad (3.1.24)$$

Dado $(x, t) \in T$

$$p = p(x, t) \quad (3.1.25)$$

En los puntos materiales que ocupan el espacio x en el tiempo t . La función (3.1.26) se define como mapeo de referencia del movimiento:

$$p: T \rightarrow B \quad (3.1.27)$$

Sea la velocidad:

$$\dot{x}(p, t) = \frac{\partial}{\partial t} x(p, t) \quad (3.1.28)$$

Y la aceleración:

$$\ddot{x}(p, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(p, t) \quad (3.1.29)$$

Si se usa el mapeo de referencia p podemos describir la velocidad $\dot{x}(p, t)$ como una función $v(x, t)$ de los lugares x y tiempo t . Especialmente:

$$v: T \rightarrow V \quad (3.1.30)$$

Se define por:

$$v(x, t) = \dot{x}(p(x, t), t) \quad (3.1.31)$$

La ecuación (3.1.31) se conoce como la descripción espacial de la velocidad, siendo el vector $v(x, t)$ la velocidad del punto material el cual en un tiempo t ocupa un lugar en el espacio x . Con respecto a lo anterior se define el concepto de campo material

como una función con dominio $B \times R$, siendo este un campo espacial con dominio T . El campo x es material, mientras que el campo v es espacial. Se puede pasar de campo material a espacial y viceversa. Se define la descripción espacial Φ_0 de un campo material a $(p, t) \rightarrow \Phi(p, t)$ mediante:

$$\Phi_s(x, t) = \Phi(p(x, t), t), \quad (3.1.32)$$

La descripción material Ω_m de un campo espacial $(x, t) \rightarrow \Omega(x(p, t), t)$ a través de:

$$\Omega_m = \Omega_m(x(p, t), t) \quad (3.1.33)$$

De tal forma que:

$$(\Phi_s)_m = \Phi \quad (3.1.34)$$

$$(\Omega_m)_s = \Omega \quad (3.1.35)$$

Si se define la derivada material en el tiempo $\dot{\Omega}$ de un campo espacial Ω y la transformamos de a la descripción espacial:

$$\dot{\Omega} = ((\Omega_m) \cdot)_s \quad (3.1.36)$$

Sea Φ un campo material suave y Ω un campo espacial suave, entonces:

$$(\dot{\Phi})_s = (\Phi_s) \cdot \equiv \dot{\Phi}_s \quad (3.1.37)$$

$$(\dot{\Omega})_m = (\Omega_m) \cdot \equiv \dot{\Omega}_m \quad (3.1.38)$$

Por definición:

$$(\Phi_s) \cdot = (((\Phi_s)_m) \cdot)_s = (\Phi)_s \cdot \quad (3.1.39)$$

Mediante (37) con $\Omega = v$:

$$(\dot{v})_m = (v_m) \cdot \equiv \ddot{x} \quad (3.1.40)$$

Así \dot{v} es la descripción espacial de la aceleración.

Las siguientes ecuaciones definen la relación entre la derivada del tiempo espacial y material, siendo φ y u campos espaciales suaves con φ escalar y u vectorial.

$$\dot{\varphi} = \varphi' + v \cdot \text{grad } \varphi \quad (3.1.41)$$

$$\dot{u} = u' + (\text{grad } u)v \quad (3.1.42)$$

Por lo tanto:

$$\dot{v} = v' + (\text{grad } v)v \quad (3.1.43)$$

El campo espacial (3.1.44) se denomina gradiente de velocidad:

$$L = \text{grad } v \quad (3.1.44)$$

3.1.3 Conservación de la masa

El que todo cuerpo posea masa es una de sus propiedades más importantes, en este trabajo se considera que la distribución de la masa es continua, propiedad que se conserva a pesar del grado de deformación que pueda tener el cuerpo, la masa será la integral de un campo densidad. Dada cualquier deformación f , hay un campo densidad ρ_f en $f(B)$ de tal manera que la masa $m(P)$ de cualquier parte de P está dada por la siguiente función:

$$m(P) = \int_{f(P)} \rho_f dV \quad (3.1.45)$$

Como anteriormente se mencionó, la masa de una parte no puede alterarse por la deformación de la parte, $m(P)$ es independiente de la deformación f .

Una distribución de masa para B es una familia de campos de densidad suaves, tal que:

$$f(B) \rightarrow R^+ \quad (3.1.46)$$

Se tiene una deformación por cada f para cualquier parte P y todas las deformaciones f y g :

$$\int_{f(P)} \rho_f dV = \int_{g(P)} \rho_g dV = m(P) \quad (3.1.47)$$

La función $\rho_f(x)$ representa la densidad en los lugares $x \in f(B)$ en la deformación f . La ecuación (3.1.47) expresa la conservación de la masa.

Sea f una deformación de B y sea $F = \nabla f$, tenemos:

$$\rho_f(x) \det F(p) = \rho_0(p) \quad (3.1.48)$$

Tal que $x = f(p)$

Para cada parte de P en un tiempo t , tenemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho dV = 0 \quad (3.1.49)$$

Si $F = \nabla x$ es el gradiente de deformación en el movimiento, entonces la ecuación (49) toma la siguiente forma:

$$f(B) \rightarrow \rho(x, t) \det F(p, t) = \rho_0(p) \quad (3.1.50)$$

Tal que $x = x(p, t)$. Por lo tanto ρ es la descripción espacial de $\rho_0 / \det F$, siendo ρ una función suave en T .

El teorema de la conservación local de la masa está en función de las siguientes dos ecuaciones:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v = 0 \quad (3.1.51)$$

$$\rho' + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad (3.1.52)$$

Un movimiento es isocórico si se cumple la siguiente condición:

$$\operatorname{div} v = 0 \quad (3.1.53)$$

Por lo tanto, un movimiento es isocórico si se cumple:

$$\dot{\rho} = 0 \quad (3.1.54)$$

3.1.4 Conservación del momento

Sea x un movimiento de B . Dada una parte P de B , el momento lineal $I(P, t)$ y el momento angular $a(P, t)$ de P en el tiempo t son definidos por:

$$I(P, t) = \int_{P_t} v \rho \, dV \quad (3.1.55)$$

$$a(P, t) = \int_{P_t} r \times v \rho \, dV \quad (3.1.56)$$

Donde $r: \varepsilon \rightarrow V$ es el vector posición.

$$r(x) = x - o \quad (3.1.57)$$

Para cada parte de P y tiempo t , tenemos:

$$I(P, t) = \int_{P_t} \dot{v} \rho \, dV \quad (3.1.58)$$

$$\dot{a}(P, t) = \int_{P_t} r \times \dot{v} \rho \, dV \quad (3.1.59)$$

Desarrollando, tenemos:

$$(r \times v) \cdot = r \times \dot{v} + v \times v \quad (3.1.60)$$

Ya que $v \times v = 0$ tenemos llegamos al siguiente concepto:

Se asume que B es un cuerpo cerrado, de tal manera que $m(B)$ es finito. Entonces, el centro de masa $\alpha(t)$ en el tiempo t es el punto en el espacio definido por:

$$\alpha(t) - o = \frac{1}{m(B)} \int_{B_t} r \rho dV \quad (3.1.61)$$

Desarrollando la ecuación (3.1.60) tenemos:

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{1}{m(B)} \int_{B_t} v \rho dV \quad (3.1.62)$$

Sea $\dot{\alpha}$ el promedio de la velocidad del cuerpo. La ecuación (3.1.61) y la ecuación (3.1.55) implican la siguiente ecuación:

$$I(B, t) \cdot = m(B) \dot{\alpha}(t) \quad (3.1.63)$$

Por lo tanto, el momento lineal de un cuerpo B es el mismo que el de una partícula de masa $m(B)$ ligado al centro de masa de B .

3.2 Ecuaciones de Navier-Stokes

Es práctica común describir la fricción que se genera entre las partículas que conforman un fluido como fuerzas de tipo cortante, actuando de forma que desaceleren el flujo. Pero, ya que se trata de un fluido, no se presentan fuerzas cortantes, y, por lo tanto, no hay fuerzas friccionantes.

$$L = \text{grad } v \quad (3.2.1)$$

Sea v el vector velocidad, y L el tensor que representa el gradiente de la velocidad.

Con la finalidad de modelar un fluido tomando en consideración su viscosidad, se propone el uso de la expresión siguiente:

$$\mathbf{T} = -\pi\mathbf{I} + \mathbf{C}[\mathbf{L}] \quad (3.2.2)$$

Sea \mathbf{I} la matriz identidad, π es la presión y \mathbf{C} representa la función de la respuesta.

Los fluidos que están definidos por la ecuación (3.2.2) son llamados fluidos Newtonianos. Todos los fluidos Newtonianos son también incompresibles, ya que cumplen la siguiente expresión:

$$\text{tr } \mathbf{L} = 0 \quad (3.2.3)$$

Sea $\text{tr } \mathbf{L}$ la traza del gradiente de la velocidad.

Tal y como se describió anteriormente, \mathbf{C} es lineal, así que: $\mathbf{C}[0] = 0$

Si se sustituye en la primera expresión:

$$\mathbf{T} = -\pi\mathbf{I} \quad (3.2.4)$$

Si $\mathbf{L} = 0$, de tal manera que el fluido Newtoniano en reposo se comporte como un fluido ideal. Si el fluido se clasifica como Newtoniano, entonces, su movimiento no está en función de la presión.

Con la finalidad de demostrar que \mathbf{C} es independiente, la siguiente condición debe de cumplirse:

$$\mathbf{C}[\mathbf{L}] = 2\mu\mathbf{D} \quad (3.2.5)$$

Si \mathbf{D} es un tensor simétrico, entonces:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (3.2.6)$$

Sea: μ un escalar constante igual a la viscosidad del fluido

Sea $D_o \in Sym_0$, se determina de la ecuación (3.2.7):

$$C[D_o] = 2\mu D_o \quad (3.2.7)$$

Si realizamos la sustitución en la ecuación (3.2.4), obtenemos:

$$\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (3.2.8)$$

Si se complementa con la ecuación del movimiento:

$$\rho_o [v' + (\text{grad } v)v] = \mu \Delta v - \text{grad } \pi + \mathbf{b} \quad (3.2.9)$$

Sea la condición de incompresibilidad:

$$\text{div } v = 0 \quad (3.2.10)$$

Y sea:

$$2 \text{div } D = \text{div}(\text{grad } v + \text{grad } v^T) = \Delta v + \text{grad } \text{div } v = \Delta v \quad (3.2.11)$$

Si sustituimos $\text{grad } \text{div } v$ por Δ , se obtiene:

$$\rho_o [v' + (\text{grad } v)v] = \mu \Delta v - \text{grad } \pi + \mathbf{b} \quad (3.2.12)$$

$$\text{div } v = 0 \quad (3.2.13)$$

Si definimos $v = \frac{\mu}{\rho_o}$, entonces $\pi_o = \frac{\pi}{\rho_o}$ y $b_o = \frac{b}{\rho_o}$, las ecuaciones de Navier-Stokes pueden expresarse como:

$$v' + (\text{grad } v)v = v \Delta v - \text{grad } \pi_o + b_o \quad (3.2.14)$$

Esta ecuación gobierna el flujo de fluidos tales como el aire y el agua. Aunque, aún no se han comprobado su existencia y unicidad. A pesar de ello, las ecuaciones de Navier-Stokes demuestran ser muy útiles en la práctica, y se emplean con éxito en diversos campos de la física y la ingeniería (Vázquez, 2004).

3.3 Dinámica estructural

La ecuación de momento, el principio de la conservación de la nada y la ley constitutiva de la materia son las ecuaciones gobernantes para el análisis de la dinámica estructural. La ecuación (3.3.1) es básicamente obtenida a través de las ecuaciones gobernantes previamente indicadas, considerando una formulación lagrangiana expresada en el contexto de los elementos finitos (Braun y Awruch, 2009).

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = P(t) \quad (3.3.1)$$

Donde $[M]$, $[C]$ y $[K]$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente. Mientras que $\{u\}$ es el vector desplazamiento, $\{\dot{u}\}$ el vector velocidad, $\{\ddot{u}\}$ el vector aceleración y $P(t)$ son las fuerzas externas en el tiempo.

3.4 Métodos de integración directa

Los métodos de integración directa son utilizados para resolver problemas de valor inicial a través de la integración paso-a-paso en el tiempo. Por lo tanto, los desplazamientos, u_0 y las velocidades \dot{u}_0 se asumen conocidos en el tiempo, $t = 0$.

El periodo de tiempo para el cual los resultados son buscados se dividen en incrementos de tiempo, y el método de integración directa se resuelve aproximando la solución para cada paso de tiempo. Ejemplos de este tipo de análisis son brevemente revisados en este trabajo. Información detallada sobre estos métodos puede ser encontrada en Chopra (2014).

3.4.1 Método β de Newmark

En 1950 N. M. Newmark desarrolló un grupo de métodos paso-tiempo basados en las siguientes ecuaciones:

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u} + \Delta t[\gamma\ddot{u}_{n+1} + (1 - \gamma)\ddot{u}_n] \quad (3.4.1)$$

$$u_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t u_n + \frac{\Delta t^2}{2} [2\beta \ddot{u}_{n+1} + (1 - 2\beta) \ddot{u}_n] \quad (3.4.2)$$

Donde γ y β definen la variación de la aceleración durante un paso de tiempo y determinan las características de estabilidad del método. Usualmente, $\gamma = \frac{1}{2}$, mientras que $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$. Las ecuaciones (3.4.1) y (3.4.2), combinados con la ecuación (3.3.1), al final del paso de tiempo es la base para el cálculo de u_{i+1} , \dot{u}_i y \ddot{u}_{i+1} en el tiempo $i + 1$ de u_i , \dot{u}_i y \ddot{u}_i conocido en el tiempo i .

3.4.2 Método de Hilbert-Hughes-Taylor

Este método implícito puede manejar amortiguamiento numérico sin degradar el grado de precisión. Este método es conveniente debido a que introduce el amortiguamiento proporcional de Rayleigh en el método de Newmark mayormente amortigua justo en los modos medios de vibrar, y afecta levemente los modos más altos y más bajos. Esta limitación puede ser superada mediante la introducción de del algoritmo de amortiguamiento en el método de Newmark mediante la asignación de un valor mayor que 0.5 a γ . El problema de esta solución es la reducción en la exactitud. En el método de Hilbert-Hughes-Taylor la aproximación del método β de Newmark mostrado en las ecuaciones (3.4.1) y (3.4.2), son utilizados.

3.4.3 Método θ de Wilson

La información presentada sobre este método fue tomada de Meruane (2006). En este método una variación lineal de la aceleración es asumida entre un paso de tiempo t y $t + \theta \Delta t$, donde $\theta \geq 1$. Asumiendo $\theta = 1$, el método se reduce a un esquema de aceleración lineal. Pero, con la finalidad de asegurar la condición de estabilidad es necesario usar $\theta \geq 1.37$, por lo que usualmente se propone utilizar $\theta = 1.4$.

Asumiendo que τ representa el incremento de tiempo, donde $0 \leq \tau \leq \theta \Delta t$ entonces:

$$\ddot{u}(t + \tau) = \ddot{u}(t) + \frac{\tau}{\theta\Delta t} (\ddot{u}(t + \theta\Delta t) - \ddot{u}(t)) \quad (3.4.3)$$

De la ecuación (3.4.3), la solución para los desplazamientos, velocidades y aceleraciones pueden ser obtenidas.

$$u(t + \theta\Delta t) = u(t) + \theta\Delta t\dot{u}(t) + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6} (\ddot{u}(t + \theta\Delta t) + 2\ddot{u}(t)) \quad (3.4.4)$$

$$\dot{u}(t + \theta\Delta t) = \frac{3}{\theta\Delta t} (u(t + \theta\Delta t) - u(t)) - 2\dot{u}(t) - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{u}(t) \quad (3.4.5)$$

$$\ddot{u}(t + \theta\Delta t) = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2} (u(t + \theta\Delta t) - u(t)) - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{u}(t) - 2\ddot{u}(t) \quad (3.4.6)$$

3.5 Descripción de los dominios

Se presenta en esta sección las ecuaciones que rigen los dominios sólidos, fluido y la malla móvil en la interface de ambos dominios usado en casos de Interacción Fluido Estructura. La información mostrada en esta sección fue tomada de (*Donea et al.*, 1999).

3.5.1 Descripción lagrangiana

La descripción Lagrangiana propone seguir las partículas materiales del continuo en movimiento. Se introduce una malla computacional que sigue el continuo en su movimiento, al cual, los nodos de la malla están permanentemente conectados a los mismos puntos materiales (figura 3-1).

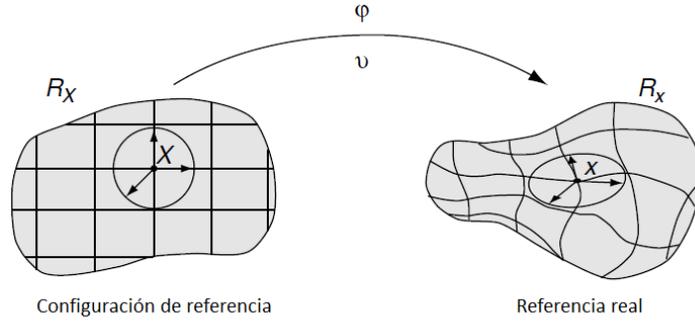


Figura 3-1. Descripción Lagrangiana del movimiento (modificado de Donea, *et al.*, 1999)

Para este efecto, las coordenadas materiales, X , nos permiten identificar la configuración de referencia, R_X . Existe una relación entre las coordenadas materiales, X , y las espaciales, la cual está en función del movimiento de los puntos materiales. Esta relación está definida por la función φ :

$$\varphi: R_X \times [t_0, t_{final}[\rightarrow R_x \times [t_0, t_{final}[\quad (3.5.1)$$

$$(\mathbf{X}, t) \rightarrow \varphi(\mathbf{X}, t) = (x, t) \quad (3.5.2)$$

Lo cual nos permite ligar X y x en el tiempo a través de la ley de movimiento:

$$x = x(\mathbf{X}, t), \quad t = t \quad (3.5.3)$$

Por lo cual, las características particulares de la función φ , en primera instancia indican que: las coordenadas espaciales x depende de las partículas materiales, \mathbf{X} , y el tiempo t . En adición, el tiempo físico está medido a partir de la misma variable t , el mapeo de φ define la configuración en el dominio espacio. Se sugiere representar el gradiente de φ de forma material, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial(\mathbf{X}, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{X}} & v \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5.4)$$

Sea 0^T un vector renglón nulo y v la velocidad material, tal que:

$$v(X, t) = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_x \quad (3.5.5)$$

Sea $|_x$ “mantener la coordenada X fija”.

Desde el punto de vista Lagrangiano, los puntos materiales ocupan el mismo espacio que los puntos de la malla. Esta situación particular presenta una serie de ventajas en términos computacionales para problemas en los cuales las características del material cambian en función del tiempo. Sin embargo, la descripción Lagrangiana del movimiento pierde precisión en medida que se presentan grandes deformaciones en el material, por ejemplo, en casos de vórtices en fluidos, en los cuales la malla ligada al material sufre distorsiones.

$$\varphi: R_X \times [t_0, t_{final}] \rightarrow R_x \times [t_0, t_{final}] \quad (3.5.6)$$

$$(\mathbf{X}, t) \rightarrow \varphi(\mathbf{X}, t) = (x, t) \quad (3.5.7)$$

Lo cual nos permite ligar \mathbf{X} y x en el tiempo a través de la ley de movimiento:

$$x = x(\mathbf{X}, t), \quad t = t \quad (3.5.8)$$

Por lo cual, las características particulares de la función φ , en primera instancia indican que: las coordenadas espaciales x depende de las partículas materiales, \mathbf{X} , y el tiempo t . En adición, el tiempo físico está medido a partir de la misma variable t , el mapeo de φ define la configuración en el dominio espacio. Se sugiere representar el gradiente de φ de forma material, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (\mathbf{X}, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & v \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5.9)$$

Sea 0^T un vector renglón nulo y v la velocidad material, tal que:

$$v(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_x \quad (3.5.10)$$

Sea $|_x$ “mantener la coordenada \mathbf{X} fija”.

Desde el punto de vista Lagrangiano, los puntos materiales ocupan el mismo espacio que los puntos de la malla. Esta situación particular presenta una serie de ventajas en términos computacionales para problemas en los cuales las características del material cambian en función del tiempo. Sin embargo, la descripción Lagrangiana del movimiento pierde precisión en medida que se presentan grandes deformaciones en el material, por ejemplo, en casos de vórtices en fluidos, en los cuales la malla ligada al material sufre distorsiones.

3.5.2 Descripción euleriana

En contraste con la formulación Lagrangiana, se propone la formulación Euleriana, en la cual, se satisface la solución para problemas en los cuales la malla ligada al material es fija. Consiste en analizar las cantidades físicas que pasan a través de un punto físico en el espacio. Por lo tanto, la malla está fija, mientras el continuo fluye a través de la malla. Las ecuaciones están formuladas en términos de los espacios coordinados x y el tiempo t . La velocidad v (velocidad discreta) –puede ser calculada mediante la malla está en función de la malla de elementos fijos, pero tiene la particularidad de no referirse a la configuración del continuo y las coordenadas materiales. Por lo tanto:

$$X: v = v(x, t) \quad (3.5.11)$$

En la descripción Euleriana, los puntos de la malla y las partículas materiales no se encuentran en el mismo punto, en contraste con la descripción Lagrangiana. Debido a la falta de simetría presentada debido a los efectos convectivos en los operadores, esta formulación presenta una serie de dificultades, sin embargo, puede ser muy práctica en movimiento de cuerpos complejos.

3.5.3 Descripción lagrangiana-euleriana arbitraria (ALE)

A razón de que se observa que tanto la descripción Lagrangiana, y la descripción Euleriana tiene cada una sus respectivas ventajas, se presentó la necesidad de mezclar ambas formulaciones con la finalidad de aprovechar las características principales de cada una en un solo método. La formulación Lagrangiana-Euleriana Arbitraria (ALE, por sus siglas en inglés) fue propuesta inicialmente en el contexto de diferencias finitas y volumen finito, para posteriormente ser propuesto para elementos finitos.

En la descripción LEA, ni la configuración espacial (R_x), ni la material (R_x), se utiliza como referencia. En cambio, se propone un tercer dominio de referencia R_χ , para lo cual, se introduce la referencia coordenada χ , para identificar los puntos de la malla.

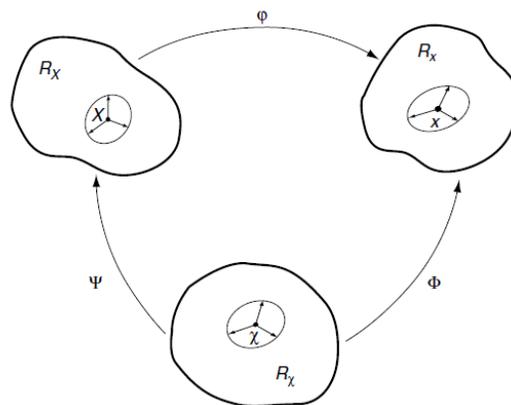


Figura 3-2. Dominios y su transformación uno a uno en función de su configuración (Donea, *et al.*, 1999)

Las funciones de referencia Ψ y Φ mapean el dominio de referencia $R_{\mathcal{X}}$ en el dominio material y espacial respectivamente. Por lo tanto $\varphi = \Phi \circ \Psi^{-1}$, por lo cual, los tres mapeos no son independientes.

El mapeo de Φ del dominio de referencia a el dominio espacial, es el movimiento de la malla en el dominio espacial, el cual se presenta en la siguiente expresión:

$$\Phi: R_{\mathcal{X}} \times [t_o, t_{final}[\rightarrow R_{\mathcal{X}} \times [t_o, t_{final}[\quad (3.5.12)$$

$$(\mathcal{X}, t) \rightarrow \Phi(\mathcal{X}, t) = (x, t) \quad (3.5.13)$$

Su gradiente está expresado por:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\mathcal{X}, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathcal{X}} & \hat{v} \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5.14)$$

Donde la velocidad de la malla es:

$$\hat{v}(\mathcal{X}, t) = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_x \quad (3.5.15)$$

Por las ecuaciones mostradas con anterioridad, se concluye que la velocidad de la malla y del material ha sido definidos mediante la derivación de las ecuaciones del movimiento material y el movimiento de la malla con respecto al tiempo.

La inversa de Ψ se representa por la siguiente expresión:

$$\Psi^{-1}: R_{\mathcal{X}} \times [t_o, t_{final}[\rightarrow R_{\mathcal{X}} \times [t_o, t_{final}[\quad (3.5.16)$$

$$(\mathbf{X}, T) \rightarrow \Psi^{-1}(\mathbf{X}, T) = (\mathcal{X}, t) \quad (3.5.17)$$

Y su gradiente es:

$$\frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial (\mathbf{X}, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}} & w \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5.18)$$

Donde la velocidad w está definida como:

$$w = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \right|_x \quad (3.5.19)$$

Sea w la velocidad de la partícula en el dominio de referencia, ya que mide la variación en el tiempo de las coordenadas de referencia $\boldsymbol{\chi}$ manteniendo la partícula material \mathbf{X} fija.

La relación entre las velocidades v , \hat{v} y w pueden ser obtenidos diferenciando:

$$\varphi = \Phi \circ \Psi^{-1} \quad (3.5.20)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (\mathbf{X}, t)} (\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial (\boldsymbol{\chi}, t)} (\Psi^{-1}(\mathbf{X}, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial (\mathbf{X}, t)} (\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial (\mathbf{X}, t)} (\mathbf{X}, t) \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial (\mathbf{X}, t)} (\mathbf{X}, t) \quad (3.5.21)$$

La cual tiene la representación matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathbf{X}} & v \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}} & \hat{v} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}} & w \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5.22)$$

Desarrollando el producto se obtiene:

$$v = \hat{v} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot w \quad (3.5.23)$$

O

$$c := v - \hat{v} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot w \quad (3.5.24)$$

Siendo c la velocidad convectiva, esta es la velocidad relativa entre el material (flujo del fluido, para el caso de este estudio) y la malla o la velocidad de la partícula vista desde el dominio espacial R_x .

Cabe remarcar que en la formulación LEA, los casos de descripción Lagrangiana y Euleriana pueden ser obtenidos como casos particulares de LEA.

Para efectos de realizar la formulación LEA en la práctica, un algoritmo que permita el desplazamiento de la malla debe ser aportado.

3.6 Método de elementos finitos

En esta sección se presenta una introducción del fundamento de la discretización de los dominios, la cual se puede encontrar de forma más detallada en Segerlind, (1937), Cook (1994) y Alawadhi (2010).

El método de elementos finitos es básicamente un método que nos ayuda a solucionar diversos problemas en diferentes campos del conocimiento, por ejemplo, de la ingeniería. Por lo general, el método de elementos finitos se divide en dos. El primero se refiere a la discretización de los elementos para obtener las diferentes fuerzas que se presentan en el elemento y sus desplazamientos en las intersecciones de los elementos discretos, que son a su vez, producto de las fuerzas respectivas; esta formulación es la solución de un problema típico de un marco estructural y es conocido comúnmente como “análisis matricial de estructuras”. El segundo hace uso de la formulación del elemento continuo y se enfoca principalmente en la solución aproximada de problemas de transferencia de calor, mecánica de fluidos y mecánica de sólidos; esta formulación obtiene resultados para puntos específicos del medio, llamados nodos con respecto a diferentes parámetros buscados. El método de elementos finitos se aplica para los dos tipos de problemas, y hace uso de variado número de conceptos matemáticos con la finalidad de resolver ecuaciones, ya sean estas lineales y no lineales. Este método requiere de

gran capacidad computacional, pues, pueden presentarse problemas en los cuales haya millones de ecuaciones por resolver.

Con la finalidad de llevar a cabo el método de elementos finitos, en primera instancia hay que discretizar el medio en fracciones del mismo. Este modelo final se conoce como modelo discreto. La malla es la distribución del modelo discreto. Se conoce como nodos a las conexiones entre las mallas. Ya que la región se ha discretizado, las ecuaciones que gobiernan los elementos deben ser establecidas en concordancia con las condiciones físicas específicas. Las propiedades del material de la región deben ser conocidas. Se deben de obtener las ecuaciones para cada elemento, las cuales, a su vez, se ensamblan en una ecuación global que gobierna el comportamiento de toda la malla.

Un elemento finito está definido por sus nodos y por su contorno formado por líneas que los unen. Para definir la forma se utilizan funciones de posición conocidas como funciones de forma.

Dependiendo del problema se pueden utilizar diferentes tipos de elementos de acuerdo a su forma, pueden ser: líneas rectas, áreas o volúmenes. En la siguiente imagen se presentan ejemplos de cada uno:

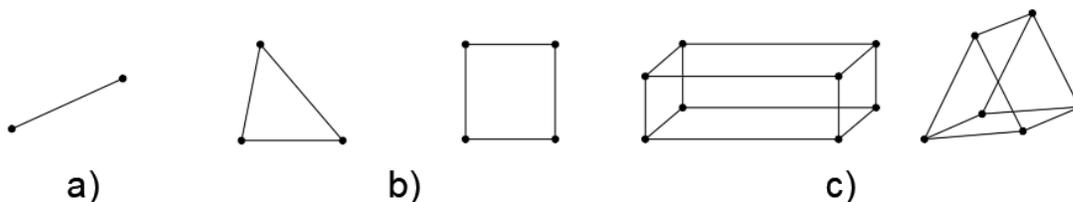


Figura 3-3. Elementos finitos comunes a) línea b) áreas c) volúmenes (modificado de Alawadhi, 2010)

Los elementos línea se utilizan para modelar marcos, los elementos rectangulares se usan para problemas planos como esfuerzos en placas y los elementos volumen se utilizan para modelar cuerpos conformados por volúmenes.

El método de elementos finitos trata problemas gobernados por ecuaciones diferenciales, para lo cual, la mejor solución es analítica. Sin embargo, una solución analítica no siempre es accesible, por lo tanto, se propone el uso de métodos numéricos que puedan aproximar a la solución analítica. Los métodos numéricos para resolver una ecuación diferencial pueden resumirse en 3 grupos:

- Método de diferencias finitas
- Método variacional
- Método de residuos ponderados

En este documento solo será revisado el método de residuos ponderados, ya que se considera el más utilizado por su simplicidad y practicidad para el caso de análisis de esfuerzos en elementos finitos.

3.6.1 Método de residuos ponderados

En el método de variacional se propone una integral de una integral que produce un número. Cada nueva función produce un nuevo número. La función que produzca el número menor tiene la propiedad de satisfacer una ecuación diferencial específica. Como ejemplo, si se toma la ecuación (3.6.1):

$$\Pi = \int_0^H \left[\frac{D}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - Qy \right] dx \quad (3.6.1)$$

Mediante una ecuación $y = f(x)$ es posible resolver numéricamente el valor de Π . El método variacional indica que la solución particular $y = g(x)$, con la cual se obtiene el valor mínimo para Π , es la solución de la ecuación diferencial (3.6.2) con las condiciones iniciales $y(0) = y_0$ y $y(H) = y_H$.

$$D \frac{d^2y}{dx^2} + Q = 0 \quad (3.6.2)$$

En el método de residuos ponderados también involucra una integral. En este método una solución aproximada es sustituida en la ecuación diferencial. Ya que esta solución es solo una aproximación, se genera un error (residuo) ya que la solución no satisface la ecuación. Suponiendo que $y = h(x)$ es una solución aproximada de la ecuación (3.6.2), se obtiene mediante sustitución la ecuación (3.6.3).

$$D \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + Q = R(x) \neq 0 \quad (3.6.3)$$

Ya que $y = h(x)$ no satisface la ecuación, el método de residuos ponderados requiere:

$$\int_0^H W_i(x) R(x) dx = 0 \quad (3.6.4)$$

El residual $R(x)$ es multiplicado por una función de peso $W_i(x)$, con la condición de que la integral del producto sea cero. El número de funciones de peso debe ser igual al número de coeficientes desconocidos en la solución aproximada.

Se han propuesto diferentes métodos de funciones de peso, entre los cuales los más populares son el método de colocación, el método de subdominios, el método de Galerkin y el método de mínimos cuadrados, los cuales serán revisados brevemente:

Método de colocación: Funciones impulso $W_i(x) = \delta(x - X_i)$ se utilizan como las funciones de peso, lo cual es igual a requerir al residuo ser nulo en puntos específicos, de tal manera que el número de puntos es igual al número de coeficientes indeterminados para aproximar la solución.

Método de colocación: A las funciones de peso se les asigna el valor de la unidad ($W_i(x) = 1$) sobre una región específica, lo cual es igual que exigir al residuo de la integral ser nulo en una región del intervalo. El número de puntos es igual al número de coeficientes indeterminados para aproximar la solución.

Método de mínimos cuadrados: Este método utiliza el residuo como la función, pero para obtener un nuevo error definido por la ecuación siguiente:

$$E_r = \int_0^H [R(x)]^2 dx \quad (3.6.5)$$

Este error es minimizado con respecto a los coeficientes desconocidos en la solución aproximada.

Método de Galerkin: El método de Galerkin usa la misma función para $W_i(x)$ que fue usada en la ecuación de aproximación. Este procedimiento es la base del método del elemento finito para problemas en los que se involucra la primera derivada de los términos. Este método presenta los mismos resultados que el método variacional cuando se aplica a ecuaciones diferenciales adjuntas a sí mismas.

En este trabajo, solo el método de Galerkin será revisado.

El método de elementos finitos se puede resumir en 5 pasos:

1. Se discretiza la región, además se enumeran los nodos y se especifican sus coordenadas.
2. Se especifica la ecuación de aproximación. Debe especificarse el orden de la aproximación (lineal o cuadrática). Una ecuación debe ser escrita para cada elemento.
3. Se desarrolla el sistema de ecuaciones. En el caso del método de Galerkin, las funciones de peso se definen para cada valor desconocido del nodo y la integral de residuos de pesos es evaluada, de tal manera que se genera una ecuación para cada valor desconocido del nodo.
4. Se resuelve el sistema de ecuaciones.
5. Se calculan las cantidades de interés.

3.6.2 Formulación isoparamétrica

Como ya se ha explicado con anterioridad, en el método de elementos finitos es necesario evaluar integrales con respecto a la formulación seleccionada. Con la finalidad de facilitar la evaluación de las integrales el continuo es discretizado a través de las funciones de forma con “coordenadas paramétricas”, en lugar de usar el sistema coordenado real (natural). Los desplazamientos son expresados en términos de las coordenadas naturales, pero deben diferenciarse de con respecto de las coordenadas globales x, y y z . Por lo tanto, una matriz de transformación llama Jacobiano $[J]$ debe ser utilizada. En adición, las integraciones deben realizarse de forma numérica y no analítica si los elementos no son rectangulares. El término “isoperimétrico” significa mismo parámetro. Ya que tanto los desplazamientos como las coordenadas pueden ser interpoladas de valores nodales, se presentan las siguientes definiciones:

- El grado de libertad nodal $\{d\}$ define los desplazamientos $[u \ v \ w]$ de un punto en el elemento: tal que, $[u \ v \ w]^T = [N]\{d\}$.
- Las coordenadas nodales $\{c\}$ definen las coordenadas $[x \ y \ z]$ de un punto en el elemento: tal que $[x \ y \ z]^T = [\tilde{N}]\{c\}$.

Las matrices de las funciones de forma $[N]$ y $[\tilde{N}]$ son funciones de ξ, η y ζ . Un elemento es isoperimétrico si $[N]$ y $[\tilde{N}]$ son iguales.

Con la finalidad de representar el método de forma simple se presenta el desarrollo de este método para una barra de tres nodos (el elemento más simple) (figura 3-4). Se utiliza la coordenada ξ , siendo los nodos de los extremos de las barras $\xi = \mp 1$, sin importar la longitud de la barra (L). En adición, ξ está ligado a la barra. La cara está orientada en las coordenadas globales x, y y z .

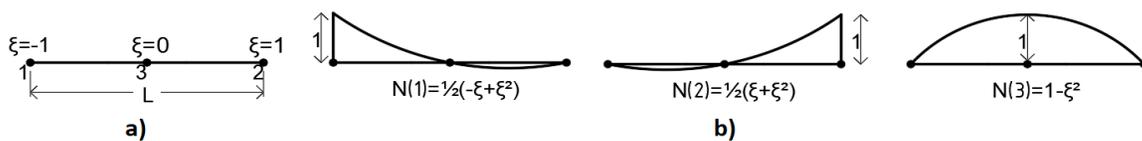


Figura 3-4. a) Elemento barra de tres nodos (cuadrático) con coordenada natural ξ . b) Tres funciones forma.

Empezamos con un campo sumido en términos de la coordenada natural ξ , para ambas coordenadas x y desplazamientos axiales u .

$$x = [1 \ \xi \ \xi^2] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (3.6.6)$$

$$u = [1 \ \xi \ \xi^2] \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (3.6.7)$$

Donde a_i son coordenadas generalizadas. Se puede determinar la función forma mediante diferentes métodos, por ejemplo, por inspección a través de la observación de la gráfica de las funciones y sus magnitudes para determinado punto. Por ejemplo: para $N(1)$ y $N(2)$ la magnitud es $1/2$ en el punto $\xi=0$. A través del método seleccionado se obtiene:

$$x = [N][x_1 \ x_2 \ x_3]^T \quad (3.6.8)$$

$$u = [N][u_1 \ u_2 \ u_3]^T \quad (3.6.9)$$

Donde:

$$[N] = \left[\frac{1}{2}(-\xi + \xi^2) \quad \frac{1}{2}(-\xi + \xi^2) \quad 1 - \xi^2 \right] \quad (3.6.10)$$

La construcción de la matriz de rigideces del elemento requiere conocer la relación esfuerzo-deformación. El esfuerzo axial es:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \left(\frac{d}{dx} [N] \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (3.6.11)$$

Sea $\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi}$

La regla de la cadena para $\frac{d}{dx}$ es necesaria porque $[N]$ se expresa en términos de ξ en vez de en términos de x . Sin embargo, $\frac{d\xi}{dx}$ no está disponible. Inicialmente se calcula su inversa, $\frac{dx}{d\xi}$, desde la ecuación (3.6.9). Sea $J = \frac{dx}{d\xi}$. Entonces:

$$J = \frac{d}{d\xi} [N] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (3.6.12)$$

J Es llamado Jacobiano, el cual puede considerarse como un factor de escala que describe la longitud física dx asociada con la longitud de referencia $d\xi$, por lo tanto, $dx = Jd\xi$. La matriz de rigidez del elemento es:

$$[k] = \int_0^L [B]^T AE [B] dx = \int_{-1}^1 [B]^T AE [B] J d\xi \quad (3.6.13)$$

Donde de las ecuaciones (3.6.1.6) y (3.6.1.7), se obtiene:

$$[B] = \frac{1}{J} \frac{d}{d\xi} [N] = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.6.14)$$

Se ha mostrado este ejemplo con la finalidad de aclarar algunos conceptos asociados con la formulación isoperimétrica, sine embargo, en este trabajo no se utiliza el elemento barra como se ha descrito, para lo cual, en las siguientes paginas se presentan las características de los elementos utilizados.

3.6.3 Elementos finitos utilizados

En este trabajo de se utilizó el elemento finito tipo viga (beam) para modelar los marcos del modelo de geometría atípica flexible con configuración lagrangiana, y elementos planos rectangulares para modelar las losas de entrepiso del mismo modelo. Para el modelo CAARC se utilizaron elementos cúbicos (brick). En esta sección se presenta una explicación breve de los elementos finitos utilizados.

3.6.3.1 Elemento plano rectangular

Este elemento se compone de cuatro nodos. Para elementos rectangulares con longitudes de lados $2a$ y $2b$, con $x = 0$ y $y = 0$ en el centro del elemento (como el presentado en la figura 3-5), las coordenadas isoperimétricas ξ y η pueden ser consideradas como coordenadas cartesianas adimensionales $\xi = x/a$ y $\eta = y/b$. Las coordenadas de este elemento son:

$$N(1) = [-1, -1] \quad N(2) = [1, -1] \quad N(3) = [1, 1] \quad N(4) = [-1, 1]$$

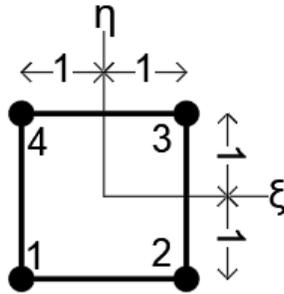


Figura 3-5. Elemento isoperimétrico plano en el espacio ξ - η .

Las funciones de forma individuales son:

$$N(1) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \tag{3.6.15}$$

$$N(2) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \tag{3.6.16}$$

$$N(3) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \tag{3.6.17}$$

$$N(4) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \tag{3.6.18}$$

La matriz de rigidez característica de cada elemento es:

$$[k] = \int \int [B]^T k [B] t \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T k [B] t J \, d\xi \, d\eta \tag{3.6.19}$$

Donde k es la propiedad del material y t es el espesor del elemento. Sea $[B]$:

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{1,\eta} & N_{1,\eta} & N_{1,\eta} \end{bmatrix} \quad (3.6.20)$$

3.6.3.2 Elemento viga

Este elemento consiste en dos nodos y seis grados de libertad por nodo, tres traslacionales y tres rotacionales. El elemento en cuestión se presenta gráficamente en la figura 3-6.

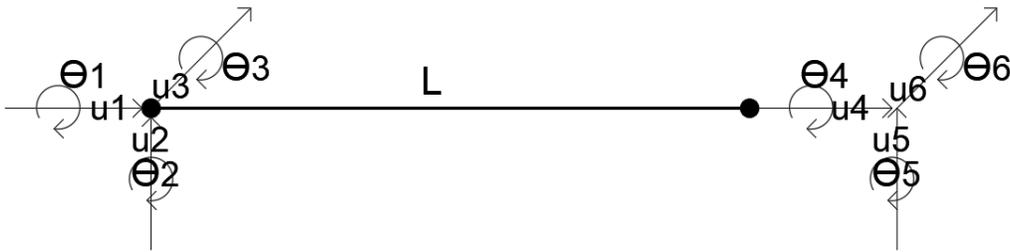


Figura 3-6. Grados de libertad del elemento tipo "viga".

Con la finalidad de obtener las funciones de forma de este elemento se presenta el siguiente algoritmo:

$$\sum_E \{ \varphi \in \zeta(P_E, R) \mid \varphi_K(N_j) = N_j(a_k) = \delta_{j,k} \Big|_{j,k=1}^6, \varphi_1'(N_m) = N_m(a_1) = \delta_{m,1} \Big|_{m,1=1}^6 \} \quad (3.6.21)$$

Donde:

$$P_E = \{ P: E \rightarrow R \mid P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, P'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 \} \quad (3.6.22)$$

Con la finalidad de evaluar estos algoritmos se considera que la viga en la figura 10 se encuentre orientada longitudinalmente en su eje x . Si se consideran las

coordenadas de los nodos de la figure en $[-1,0,0]$ para el primer nodo (de izquierda a derecha), y el segundo nodo en $[1,0,0]$

Evaluando los algoritmos se obtiene las funciones de forma:

$$N(1, u1) = \frac{x_2 - x}{L} \quad (3.6.23)$$

$$N(1, u2) = -\frac{(3x_1 - x_2)x_2^2}{L^3} + \frac{6x_1x_2}{L^3}x - \frac{3(x_1 + x_2)}{L^3}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 \quad (3.6.24)$$

$$N(1, u3) = -\frac{x_1x_2^2}{L^2} + \frac{2(x_1 + 0.5x_2)x_2}{L^2}x - \frac{x_1 + 2x_2}{L^2}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \quad (3.6.25)$$

$$N(1, \theta1) = \frac{x - x_1}{L} \quad (3.6.26)$$

$$N(1, \theta2) = -\frac{x_1^2(x_1 - 3x_2)x_2^2}{L^3} - \frac{6x_1x_2}{L^3}x - \frac{3(x_1 + x_2)}{L^3}x^2 - \frac{2}{L^3}x^3 \quad (3.6.27)$$

$$N(1, \theta3) = -\frac{x_1^2x_2}{L^2} + \frac{x_1(x_1 + 2x_2)}{L^2}x - \frac{2(x_1 + 0.5x_2)}{L^2}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \quad (3.6.28)$$

$$N(2, u1) = \frac{x_2 - x}{L} \quad (3.6.29)$$

$$N(2, u2) = -\frac{(3x_1 - x_2)x_2^2}{L^3} + \frac{6x_1x_2}{L^3}x - \frac{3(x_1 + x_2)}{L^3}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 \quad (3.6.30)$$

$$N(2, u3) = -\frac{x_1^2x_2}{L^2} + \frac{2(x_1 + 0.5x_2)x_2}{L^2}x - \frac{(x_1 + 2x_2)}{L^2}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \quad (3.6.31)$$

$$N(2, \theta1) = \frac{x - x_1}{L} \quad (3.6.32)$$

$$N(2, \theta 2) = -\frac{x_1^2(x_1 - 3x_2)}{L^3} - \frac{6x_1x_2}{L^3}x + \frac{3(x_1 + x_2)}{L^3}x^2 - \frac{2}{L^3}x^3 \quad (3.6.33)$$

$$N(2, \theta 3) = -\frac{x_1^2x_2}{L^2} + \frac{x_1(x_1 + 2x_2)}{L^2}x - \frac{2(x_1 + 0.5x_2)}{L^2}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \quad (3.6.34)$$

3.6.3.3 Elemento tri-lineal rectangular solido

Este elemento consta de ocho nodos con tres grados de libertad constando de un total de veinticuatro nodos. Este elemento se conoce como tipo "brick". Tal elemento tiene la configuración presentada en la figura 3-7.

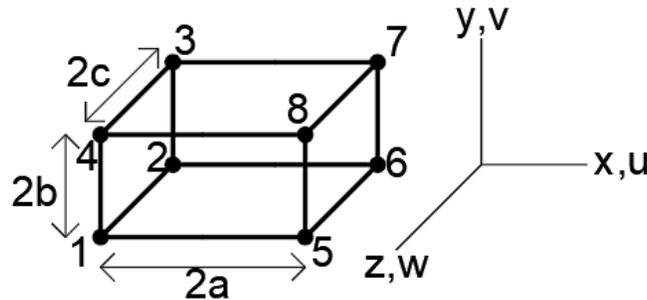


Figura 3-7. Grados de libertad del elemento tipo "brick".

Sus desplazamientos en x son:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7zx + a_8xyz \quad (3.6.35)$$

Sus desplazamientos en v y w son similares. El campo de desplazamientos $\{u\} = [N]\{d\}$ es igual a:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N(1) & 0 & 0 & N(2) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N(1) & 0 & 0 & N(2) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N(1) & 0 & 0 & N(2) & \dots \end{bmatrix} \quad (3.6.36)$$

Donde cada $N(i)$ tiene la forma:

$$\frac{(a \mp x)(b \mp y)(c \mp z)}{8abc} \quad (3.6.37)$$

Las ocho funciones en dominio parametrizado se presentan a continuación:

$$N(1)(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{8} [(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \theta)] \quad (3.6.38)$$

$$N(2)(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{8} [(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \theta)] \quad (3.6.39)$$

$$N(3)(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{8} [(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \theta)] \quad (3.6.40)$$

$$N(4)(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{8} [(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \theta)] \quad (3.6.41)$$

$$N(5)(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{8} [(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \theta)] \quad (3.6.42)$$

$$N(6)(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{8} [(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \theta)] \quad (3.6.43)$$

$$N(7)(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{8} [(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \theta)] \quad (3.6.44)$$

$$N(8)(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{8} [(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \theta)] \quad (3.6.45)$$

La matriz de rigidez de este elemento es:

$$[k]_{24 \times 24} = \int_{-c}^c \int_{-b}^b \int_{-a}^a [B]^T [E] [B] dx dy dz \quad (3.6.46)$$

3.7 Cuadratura Gaussiana

Este método tiene como finalidad evaluar una integral de forma numérica, simplificando el problema de resolver las integrales de forma analítica. Se propone transformar los límites de la integral a ∓ 1 . Desarrollando para un sistema de una dimensión se tiene:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f dx \rightarrow I = \int_{-1}^1 \Phi d\xi \quad (3.7.1)$$

Donde Φ incorpora el Jacobiano de la transformación:

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \quad (3.7.2)$$

Con la finalidad de simplificar la integral, se evalúa Φ en su punto medio $\xi = 0$ y se multiplica por la longitud del intervalo y se multiplica por la longitud del intervalo. Se aproxima el área sombreada (Figura 12) a través de un área rectangular de altura igual a Φ y largo igual a 2 ($I = 2\Phi$).

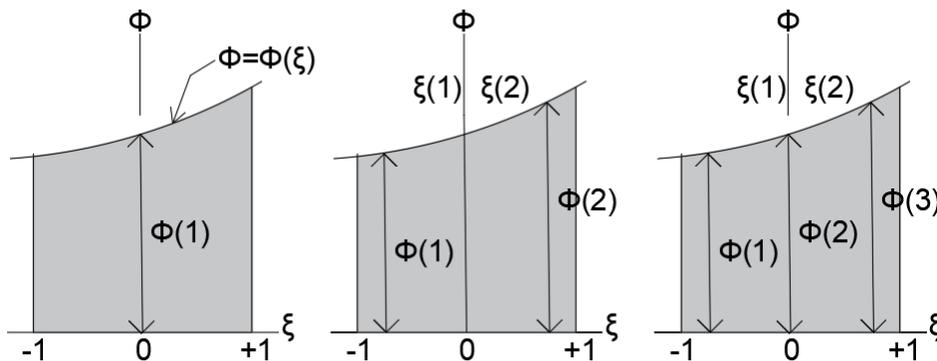


Figura 3-8. Cuadratura Gaussiana para calcular el área oscura bajo la curva $\Phi = \Phi(\xi)$, usando uno, dos y tres puntos muestra (puntos Gauss).

La ecuación (3.7.1) se transforma en:

$$I = \int_{-1}^1 \Phi d\xi \approx W_1 \Phi_1 + W_2 \Phi_2 + \dots + W_n \Phi_n \quad (3.7.3)$$

Con la finalidad de aproximar I , se evalúa $\phi = \phi(\xi)$ para cada ubicación de ξ para obtener las ordenadas de ϕ , Se multiplica cada ϕ por un peso aproximado W y se adiciona.

Puntos de muestra se localizan simétricamente con respecto al centro del intervalo de la integración. Los puntos simétricos tienen el mismo valor. Estos puntos se conocen coeficientes Gauss-Legendre. Ejemplos de estos valores se presentan en la siguiente tabla:

Orden (n)	Ubicación ξ del punto de muestra	Factor de peso W
1	0	2
2	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
3	$\mp 1/\sqrt{0.6}$	$\frac{5}{9}$
	0	$\frac{8}{9}$
4	∓ 0.86113	0.34785
	∓ 0.33998	0.65214

Tabla 3.-1. Puntos de muestra y peso para la cuadratura Gaussiana en el intervalo $\xi \mp 1$.

3.8 Método de volúmenes finitos

La información presentada en esta sección fue resumida de Moukalled *et al.* (2016).

El método de volúmenes finitos se basa en las ecuaciones diferenciales parciales que representan las leyes de conservación aplicadas a volúmenes diferenciales, transformando tales ecuaciones en ecuaciones algebraicas. El proceso de este método es similar al utilizado en el método de elementos finitos previamente

explicado en este documento, con la excepción de que en este método la discretización se realiza con elementos no sobrepuestos o volúmenes finitos.

Este método es particularmente factible para análisis del flujo fluidos, ya que algunos de los términos de la ecuación de conservación son convertidos en las caras del flujo y evaluados en las caras de los volúmenes finitos, con una configuración análoga a la de la figura 3-9, permitiendo que el flujo que entra a un volumen es idéntico al flujo que sale, por lo que este método es altamente conservativo.

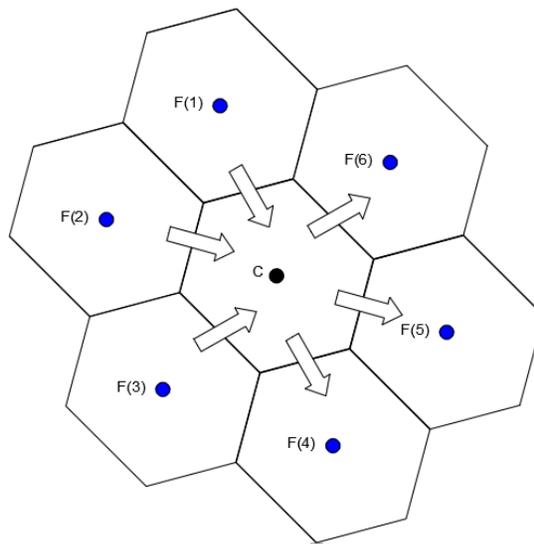


Figura 3-9. Esquema de volúmenes finitos en el cual se observa el flujo a través de volúmenes finitos ejemplificando la conservación de la masa.

Otra propiedad que hace del método de volúmenes finitos apropiado para análisis de flujo de fluidos, es el hecho de que las variables desconocidas son evaluadas en el centroide de los volúmenes, no en la frontera de los elementos, de tal manera en la que puede fácilmente adaptarse a geometrías complejas, caso común en análisis de dinámica de fluidos computacional.

La discretización es llevada a cabo directamente en el espacio físico, así que no es necesario la transformación entre el espacio físico y el sistema coordenado computacional.

3.9 Modelo turbulento

En los análisis de dinámica de fluidos realizados por ingenieros en todo el mundo, la mayoría se consideran como turbulentos. Por esta razón, la dinámica de fluidos computacional se enfoca particularmente en el estudio de este flujo.

Como regla general, el tamaño del dominio computacional debe ser al menos un orden de magnitud general más grande que la escala que caracteriza la energía de turbulencia. Por el contrario, el tamaño de la malla, ya sea de elementos finitos o volúmenes finitos debe ser tan fina que pueda simular las escalas más pequeñas.

Con la finalidad de simular el flujo turbulento se han propuesto diferentes métodos. A continuación, se resumen las características de los 3 principales métodos utilizados. Una presentación más detallada de estos métodos es presentada en (Zhiyin, 2015):

3.9.1 Simulación Numérica Directa

Simulación Numérica Directa, o DNS por sus siglas en inglés, es un método en el cual las ecuaciones de Navier-Stokes son resueltas numéricamente de forma directa usando una malla muy fina con la finalidad de capturar todas las escalas que pudieran presentarse en la simulación del flujo, considerando los torbellinos más grandes y los más pequeños. Este método demanda de gran poder computacional, por lo que generalmente es utilizado para problemas que utilizan un bajo número de Reynolds, y en geometrías simples.

3.9.2 Navier-Stokes Reynolds promedio

Navier-Stokes Reynolds promedio, o RANS por sus siglas en inglés, es un método propuesto en el caso en que el mayor interés del estudio del flujo sea el estado estable del flujo del fluido, por lo tanto, no se analiza el flujo instantáneo detalladamente. Por lo tanto, este método supone una gran reducción en la necesidad de capacidad computacional y tiempo de análisis.

Básicamente, este método resuelve cantidades promedio, mientras que el efecto de todas las escalas del movimiento instantáneo turbulento es modelado por un modelo turbulento.

La simplicidad de este método le valió ser ampliamente utilizado en el campo de la dinámica de fluidos computacional durante décadas. Sin embargo, este método tiene complicaciones al trabajar modelos transitorios, presentando fallas importantes en muchos casos.

3.9.3 Simulación de Grandes Torbellinos

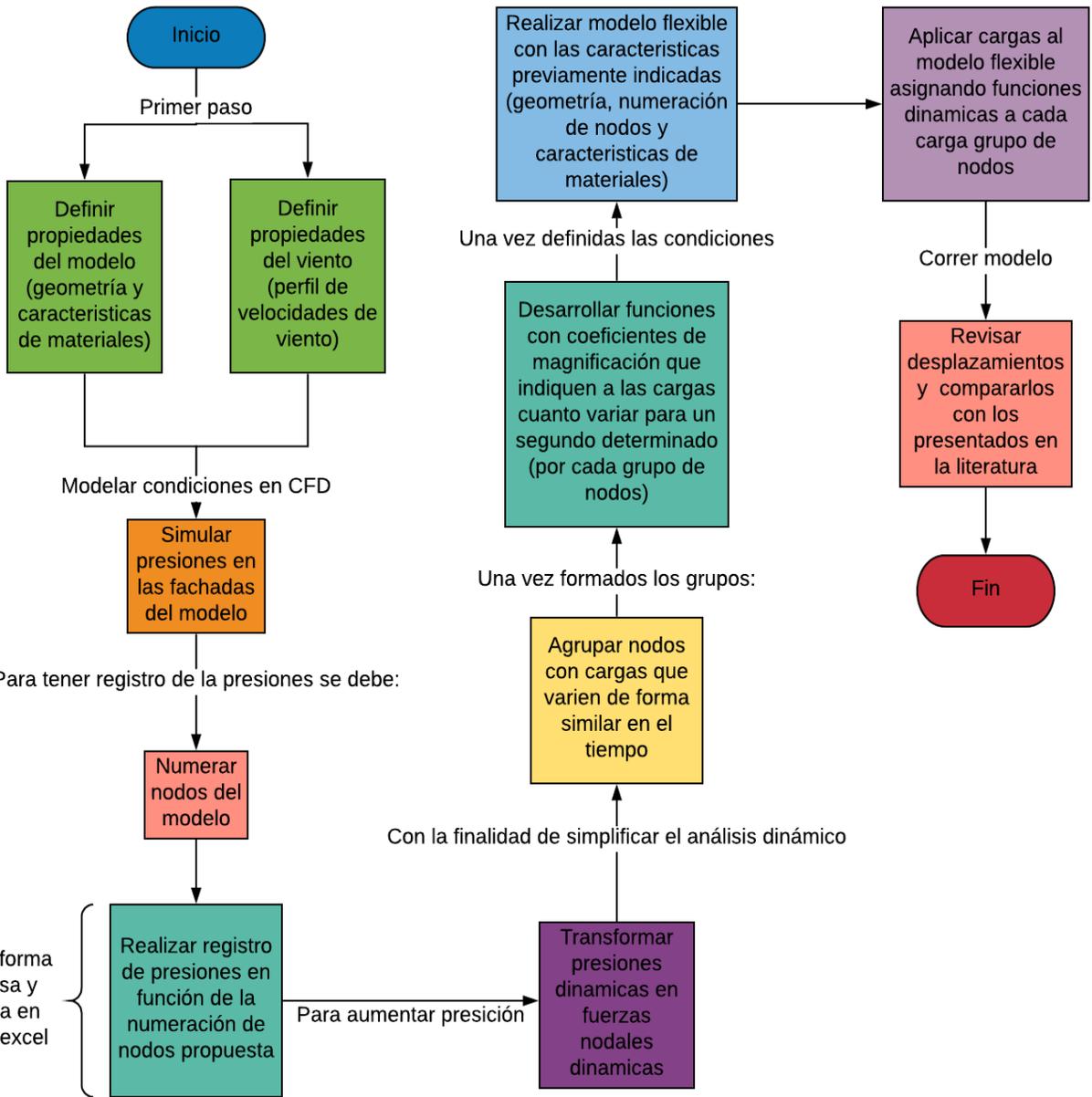
Este método fue propuesto en por Smagorinsky (1963). Se le conoce como LES por sus siglas en inglés. En este método, los movimientos de gran escala (grandes remolinos) de flujo turbulento son calculados directamente y los de pequeña escala son modelados. De esta manera, se reduce significativamente el tiempo de análisis computacional con respecto a al método DNS. Se ha demostrado que el método LES es más preciso que el método RANS, ya que LES analiza de forma detallada los efectos de gran escala, los cuales, tienen la mayor parte de la transferencia de momento, siendo la captura de esta información superior a la presentada por RANS. Por lo tanto, el método LES es en la actualidad a herramienta numérica más viable para la simulación de flujos turbulentos.

4. METODOLOGÍA

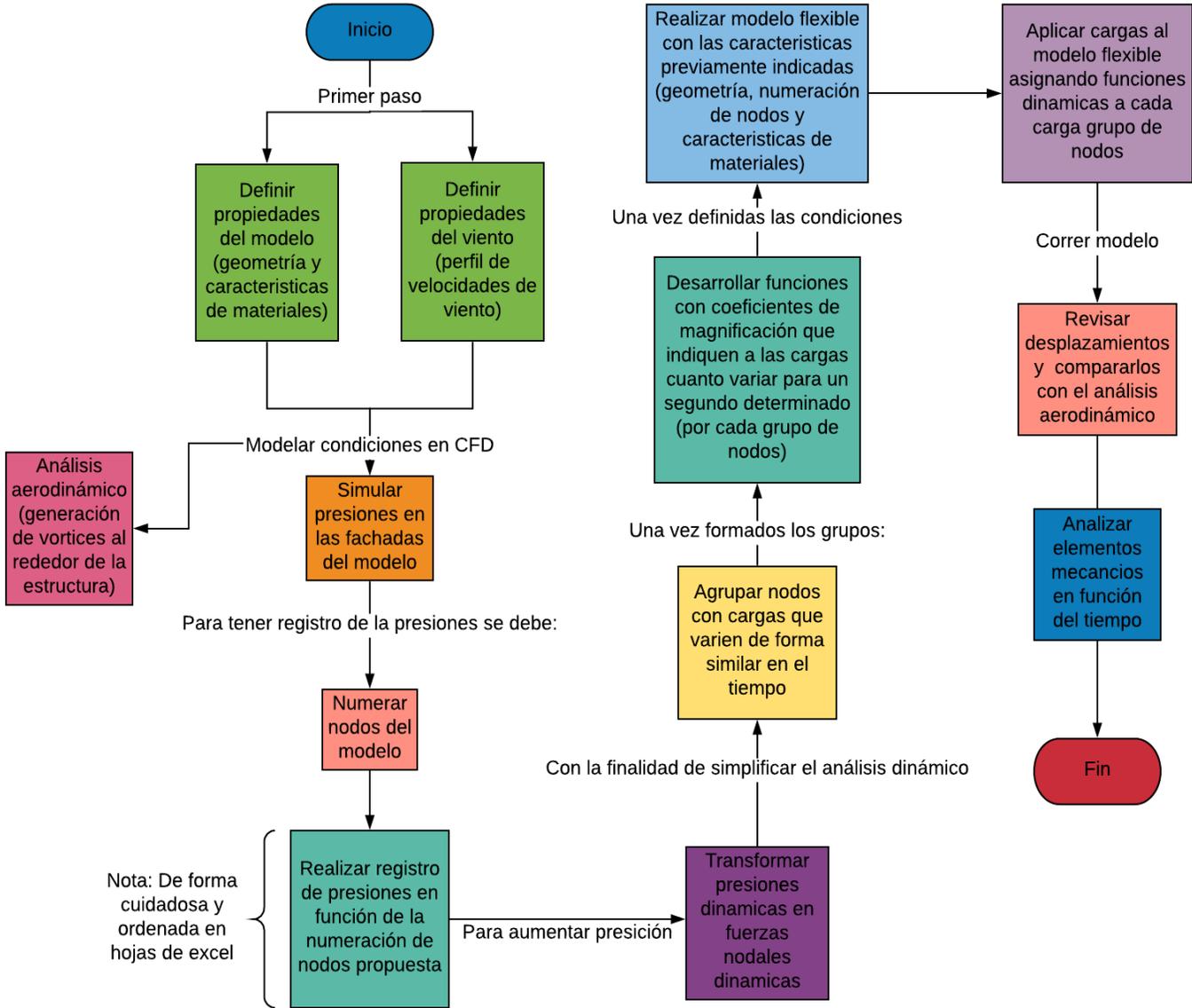
En este trabajo, una metodología para analizar la respuesta aeroelástica de estructuras relativamente altas y esbeltas ha sido propuesta. Con la finalidad de desarrollar la solución para observar sus capacidades para modelar tales efectos, dos modelos han sido escogidos. El primero es un modelo de edificio alto y esbelto ampliamente estudiado por diversos investigadores en temas de aerodinámica y efectos aeroelásticos propuesto por la Comunidad del Consejo Revisor Aeronáutico, conocido mundialmente como “CAARC” por sus siglas en inglés, el cual, fue seleccionado debido a que sus características son fácilmente reproducibles, de tal manera en la que esta metodología pueda ser comparada con estudios previos. El segundo modelo es un edificio de características geométricas poco habituales, de tal manera que el reglamento competente en México no contempla coeficientes de presión para dicha estructura, ya que los prototipos propuestos no están ni cerca de semejarse a la geometría propuesta, haciendo necesario un análisis exhaustivo de la estructura, corroborando así la aplicabilidad del método sin restricción alguna por parte de la geometría.

A continuación, se presentan dos diagramas de flujo en los cuales se detallan las actividades realizadas para el análisis de los dos modelos propuestos. Ambos modelos tienen diferencias con respecto a su análisis, por ello la necesidad de presentar dos diagramas de flujo. El primero hace referencia al modelo CAARC, y no presenta análisis aerodinámico como en el caso del edificio de geometría atípica (referenciado en el diagrama como EGA), ni análisis de elementos mecánicos, el cual se presenta en el edificio atípico también. En el modelo CAARC se propuso sea comparado con resultados presentes en la literatura, situación no llevada a cabo en el edificio de geometría atípica, para el cual la única opción sería realizar un análisis del modelo en túnel de viento a escala reducida, el cual no está a disposición de este trabajo.

METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS AEROELÁSTICO DEL MODELO CAARC



METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS AEROELÁSTICO DEL MODELO EGA



4.1 Propiedades del sólido y del fluido

Se determina la geometría de la estructura, estructuración y las propiedades de los materiales que la componen:

- Módulo de elasticidad
- Peso volumétrico
- Geometría de las secciones

A su vez, se determinan las condiciones del viento:

- Velocidad del viento
- Perfil de velocidad del viento
- Dimensiones del túnel de viento virtual
- Número de Reynolds
- Densidad del aire

Ya que son dos los modelos analizados, esta sección se divide en dos partes.

4.1.1 Propiedades del modelo CAARC

El modelo de edificio alto propuesto por la Comunidad del Consejo Revisor Aeronáutico, conocido como CAARC por sus siglas en inglés, fue propuesto por primera vez en 1970 (Braun y Awruch, 2009). El propósito original del modelo CAARC fue el de llevar a cabo experimentos en túnel de viento de escala reducida. Con el paso del tiempo, el modelo CAARC se convirtió en un referente para la calibración de túneles de viento en todo el mundo. Dos modelos CAARC fueron propuestos, uno es simple y se utiliza como modelo Benchmark, se conoce como “Edificio B”, y otro es más complejo y se conoce como “Edificio A”. Para los propósitos de este trabajo, solo el modelo B fue analizado. Las dimensiones del modelo se presentan en la figura 4-1, la cual indica que el edificio tiene una altura de 180 metros, la sección transversal del modelo es rectangular, con 45 metros de ancho por 30 metros de largo. Con respecto a sus propiedades dinámicas, la masa

y la rigidez se propusieron constantes en todo el modelo. La densidad de la estructura es igual a 160 kg/m^3 , con un módulo de elasticidad de $2.861e8 \text{ N/m}^2$ y frecuencia fundamental de 0.2 Hz (5 s), tal y como lo propusieron Braun y Awruch (2009). El modelo CAARC puede ser simplificado como una viga en voladizo.

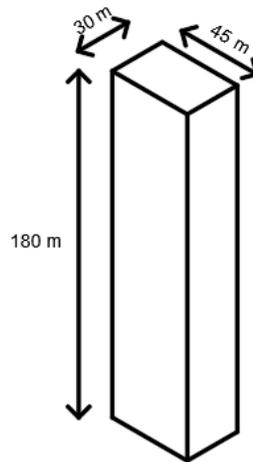


Figura 4-1. Dimensiones del modelo CAARC.

Para este trabajo, el modelo CAARC fue modelado con elementos finitos tipo bloque sólido con las propiedades mecánicas previamente descritas en el software de análisis y diseño estructural SAP 2000 (figura 4-2).

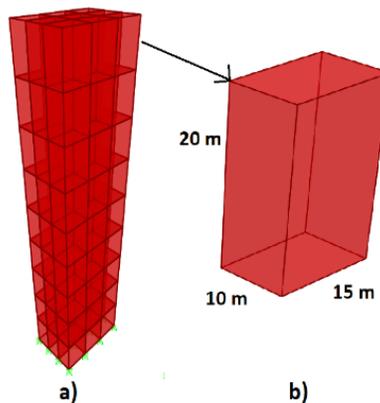


Figura 4-2. Modelo CAARC en SAP 2000.

Las dimensiones del túnel virtual (espacio ocupado por la malla de volúmenes finitos del fluido) con respecto al modelo CAARC se presentan en la figura 4-3.

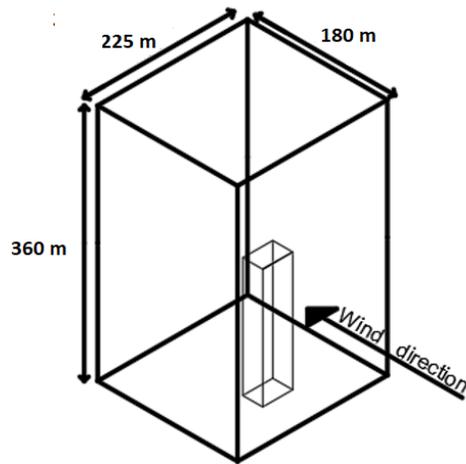


Figura 4-3. Túnel de viento virtual del modelo CAARC.

Como puede observarse en la figura 4-3, la dirección del viento está indicada. Las dimensiones del túnel de viento corresponden a los siguientes parámetros:

- Ancho: cinco veces el ancho del edificio.
- Largo: dos veces el largo del edificio al frente y cuatro veces el largo del edificio en la parte posterior.
- Altura: dos veces la altura del edificio.

Las propiedades del viento que fueron utilizadas en el modelo CAARC son las mismas a las propuestas por Braun y Awruch (2009), de tal manera en que los resultados obtenidos en este trabajo pudieran ser comparados con los resultados publicados por los autores. A pesar de que Braun y Awruch realizaron varios análisis para diferentes velocidades del viento, solo el análisis con un factor de reducción de la velocidad del viento 4 (36 m/s en el punto más alto del edificio) fue llevado a cabo en este trabajo.

El perfil de velocidad para este análisis se presenta en la figura 4-4.

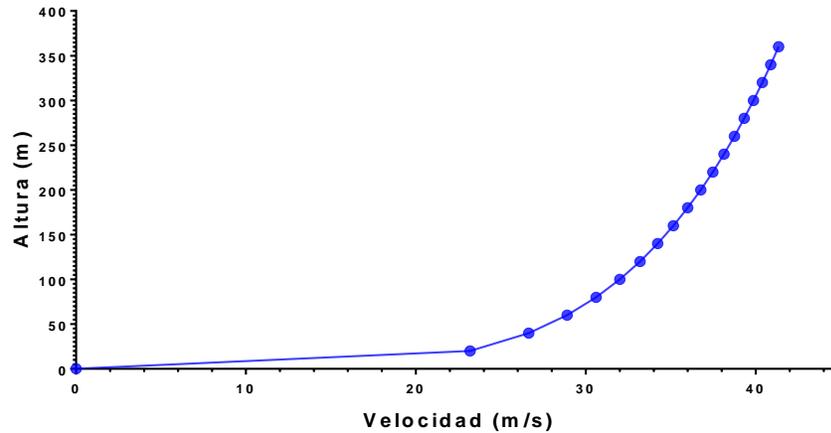


Figura 4-4. Perfil de velocidad de viento para el modelo CAARC.

Como se observa en la figura 4-4, la altura del túnel de viento es la altura del perfil de velocidad del viento. La densidad del aire (ρ) es 1.20 kg/m^3 y la viscosidad cinemática (ν) para el aire es $15.11e-6 \text{ m}^2/\text{s}$. Estos parámetros se consideran constantes en todo el túnel de viento virtual. El número de Reynolds es calculado mediante la velocidad de referencia (36 m/s) con el uso de la siguiente ecuación:

$$Re = \frac{v_{ref} * B}{\nu} = 1.07e8 \quad (4.1.1.1)$$

Donde Re es el número de Reynolds, B es el ancho del modelo edificio, y v_{ref} denota la velocidad de referencia.

Es importante notar que la gran altura del modelo CAARC puede presentar grandes desplazamientos, por lo que puede no ser apropiado para un análisis de interacción fluido-estructura desacoplado como el que se presenta en este trabajo; por esta razón, se tomó una velocidad de viento baja, con la finalidad de que los desplazamientos presentados sean moderados, y así no modifiquen la dinámica del fluido de forma importante.

El tiempo de análisis propuesto para este modelo fue de 100 segundos, de tal manera en la que pudiera haber una muestra representativa de datos para su

posterior comparación con los resultados presentados en la literatura, sin embargo, el análisis de la respuesta aeroelástica solo se presentan del segundo 25 al segundo 100, ya que en los primeros 24 segundos gradualmente la velocidad de entrada incrementa hasta estabilizarse. Esto permite evadir efectos de choque en la fase temprana de la simulación, lo cual presenta efectos negativos en el análisis.

4.1.2 Propiedades del edificio de geometría atípica

El edificio propuesto para este trabajo está compuesto por marcos de acero y tiene 15 pisos con 4 metros de altura por piso. Los marcos soportan losas de concreto de 0.12 m de espesor como sistema de piso. La geometría del edificio está en desacuerdo con las geometrías reguladas por el código mexicano de diseño estructuras bajo presiones de viento presentado por Comisión Federal de Electricidad (2008), de tal manera en la que un análisis exhaustivo de presiones de viento fuera necesario. El edificio está cubierto por vidrio en sus fachadas, por lo que el viento no puede entrar en la estructura.

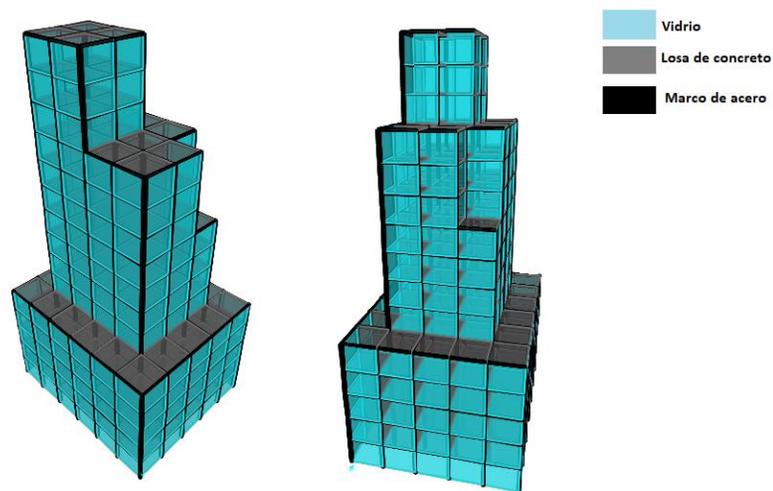


Figura 4-5. Modelo de elementos finitos de edificio de geometría atípica.

Las dimensiones de los pisos se presentan a continuación (Tabla 4-1):

Piso	Altura (m)	Largo (m)	Ancho (m)	Área (m ²)
Primero al quinto	0-20	25	30	750
Sexto al noveno	20-36	15	20	300
Decimo al octavo	36-48	15	20	285
Treceavo al catorceavo	48-60	10	10	100

Tabla 4-1. Geometría del edificio con respecto a la altura

El edificio es relativamente alto y esbelto, ya que las estructuras con tal geometría son sensibles a los efectos de viento debido a los vórtices generados a su alrededor (Belver *et al.*, 2012).

Para el efecto de modelar la estructura como modelo flexible, dos tipos diferentes de elementos finitos fueron utilizados:

- Elementos viga de 12 grados de libertad (seis grados de libertad por nodo) utilizados para modelar los marcos.
- Elementos placa (shell) con 24 grados de libertad (seis grados de libertad por nodo) usados para modelar las losas de azotea y entrepiso y el vidrio en las fachadas.

Para el modelo de la estructura se realizó un pre-dimensionamiento de los elementos, con la finalidad de que los desplazamientos máximos de la estructura no fueran exagerados, ya que grandes deformaciones por parte del fluido podrían alterar el flujo del fluido, situación no considerada en este análisis. El perfil comercial IR 12x22 se propuso para las trabes, mientras que para las columnas se propone HSS 16x16x1/2. Ambos perfiles están propuestos de acero estructural grado 50, por lo que tiene un esfuerzo de fluencia de 3515 kg/cm^2 , un módulo de elasticidad de

2038901.9 kg/cm^2 , y peso volumétrico igual a 7,849 kg/m^3 . El concreto del sistema de entrepiso, por su parte, tiene por características módulo de elasticidad de 253456 kg/cm^2 , fuerza a la compresión simple ($f'c$) igual a 280 kg/cm^2 y peso volumétrico de 2,400 kg/m^3 .

Las características del viento fueron seleccionadas para ser tan críticas como fueran posibles para la estructura. Las características del viento de la ciudad portuaria de “Puerto Vallarta” fueron escogidas debido a las altas velocidades de viento regionales presentadas en el área (160 km/h) (Comisión Federal de Electricidad, 2008), y su baja posición con respecto al nivel del mar (15 metros), haciendo de esta región crítica en términos de diseño por presiones de viento para edificios.

El perfil de velocidades de viento (Figura 4.1.6) utilizado para este análisis parte de la velocidad de diseño calculada por medio de la ecuación propuesta por Comisión Federal de Electricidad (2008).

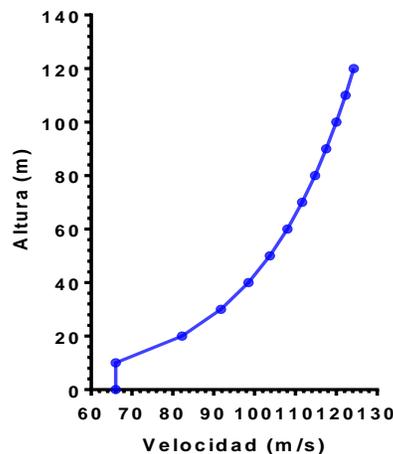


Figura 4-6. Perfil de velocidad de viento para el edificio de geometría atípica.

El número de Reynolds para este modelo es calculado de la misma manera que se calculó para el modelo CAARC. $Re = 2.18e8$ para el modelo de geometría atípica.

Las dimensiones del túnel de viento virtual utilizadas en este análisis están en función de las relaciones de las dimensiones de la estructura presentadas en la

sección 4.1.1. Por lo tanto, las dimensiones utilizadas son las siguientes: ancho: 125 m, largo 210 m y alto 120 m.

El tiempo propuesto para este análisis fue de 5 segundos, ya que solo se espera identificar la respuesta aerolasticas del modelo, y se observó que con este corto tiempo era suficiente para tal propósito.

4.2 Análisis de dinámica de fluidos computacional

Para el modelado del túnel de viento virtual, se utilizó el programa Robot Structural Analysis Professional para obtener las presiones en las fachadas del edificio. Una descripción de este programa y su validación es presentada en (Autodesk, 2015). La malla es generada automáticamente por el programa, siendo esta la óptima. Se solicitó en el software las condiciones de viento descritas por los perfiles de velocidad de viento previamente presentados.

Las presiones obtenidas por medio de la dinámica de fluidos computacional se presentan en el modelo como contornos coloreados en las fachadas de los modelos, que representan la presión media en un área específica para un tiempo específico.

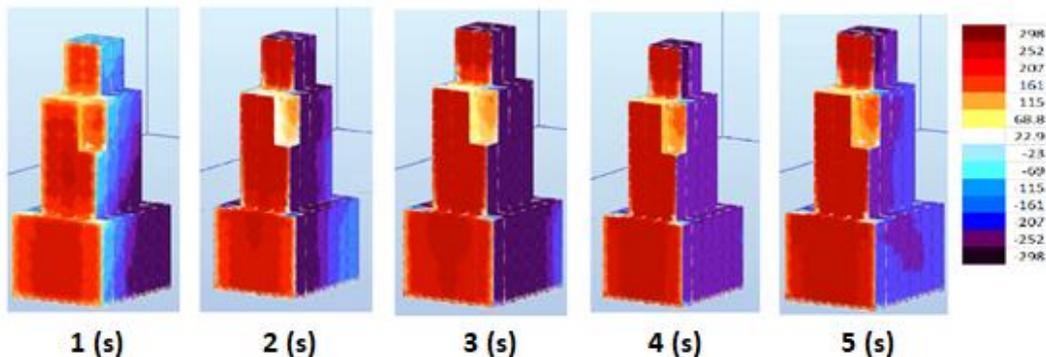


Figura 4-7. Presiones medias en el modelo de geometría compleja para los 5 segundos considerados.

Como puede observarse en la figura 4-7, cada color representa presión en kg/m². Conforme el tiempo pasa, cada área experimenta variaciones en el color de los contornos de presión media.

Con la finalidad de aplicar estas presiones al modelo flexible equivalente, se propone una metodología que garantiza la correcta aplicación de las presiones, la cual será explicada en las secciones 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 de este capítulo.

4.3 Análisis aerodinámico

Mediante el programa “Flow Design”, la estructura propuesta se modeló como solido rígido y se observaron los vórtices generados alrededor de la misma. Una descripción de este programa y su validación es presentada en (Autodesk, 2013). Con la observación de las líneas de corriente se define donde se generan los vórtices con la finalidad de identificar posibles fenómenos aeroelásticos que deben de reflejarse en la dinámica del modelo flexible para garantizar un correcto estudio aeroelástico. Este análisis se llevó acabo solo para el edificio de geometría compleja, ya que este, debido a su geometría tan particular se esperaba que también tuviera características aerodinámicas particulares.

4.4 Numeración de nodos

Con la finalidad de aplicar las fuerzas de forma más apegada a los contornos mostrados en la sección 4.3 de este documento, después de varios experimentos, se llegó a la determinación de que aplicar las fuerzas como presiones en las fachadas de los modelos carecía de precisión aceptable. Transformar las presiones a fuerzas nodales equivalentes resultó ser la opción más adecuada.

Para llevar un correcto registro de las presiones los nodos fueron enumerados en un orden conveniente para los dos modelos propuestos:

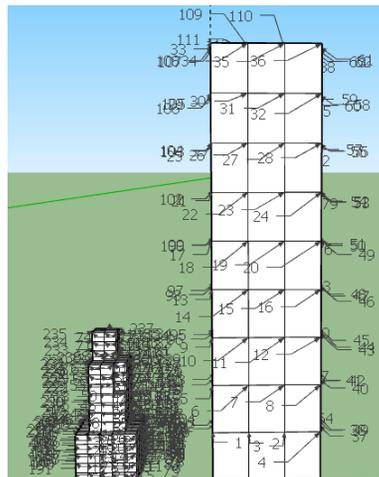


Figura 4-8. Modelos con sus nodos numerados.

La numeración se llevó acabo en el programa Sketch Up, en el cual se dibujaron en 3 dimensiones ambos modelos como volúmenes. Se trazaron en sus fachadas

cuadraturas que representan la malla de elementos finitos, destacando los nodos que conforman las mallas de los modelos para así poder consultar la numeración y ubicación de cada nodo para el correcto registro de su presión.

4.5 Agrupación de nodos en grupos

Al observar la variación de los contornos de presión en las fachadas de los modelos, se puede observar que diferentes grupos de nodos presentan iguales contornos la mayor parte del tiempo o todo el tiempo, para lo cual se propuso el juntar los nodos que presentaran estas similitudes en su variación en grupos. Esta simple acción, permite que el análisis se realice con mayor eficiencia. Generalmente los nodos que se encuentren unos al lado de los otros presentaban esta condición, por lo tanto, esta actividad puede ser menos laboriosa de lo que podría parecer en un principio.

4.6 Funciones de variación dinámica

Se generaron funciones que indiquen cuanto deben variar las presiones para un tiempo determinado del análisis para determinado número de nodos y en función de los contornos de presión media. Con la finalidad de ejemplificar estas funciones, en la figura 4-9 se presenta la variación de una fuerza nodal tomada al azar de las formuladas para el modelo CAARC.

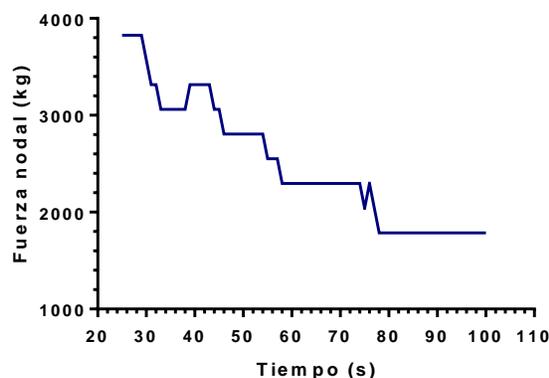


Figura 4-9. Variación de fuerza nodal tomada del modelo CAARC.

Para efecto de poder variar la fuerza nodal en el tiempo, se propuso un factor de variación dinámica o factor de fuerza, el cual simplemente multiplicó la carga para determinado tiempo de tal manera que correspondiera con la gráfica anteriormente presentada. Para tal efecto al segundo 25 (que es el segundo 0 del análisis), se le asignó la carga inicial en el nodo con el factor 1, y posteriormente el factor fue variando de acuerdo a las necesidades, como se presenta en la figura 4-10.

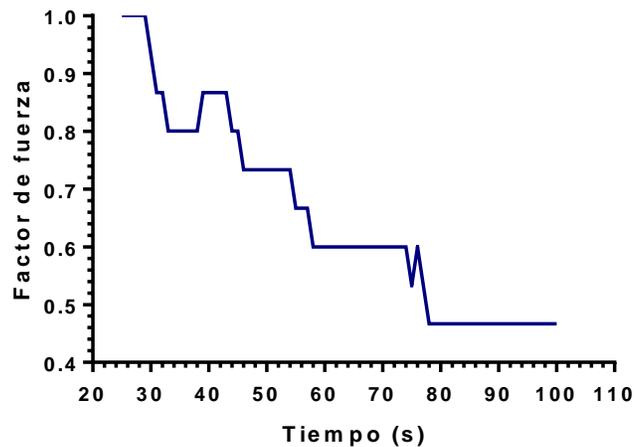


Figura 4-10. Variación de factor de fuerza nodal tomada del modelo CAARC.

Al observar la figura anterior, observamos que el factor de fuerza varía de entre 0.45 y 1, y que la fuerza en este grupo va decreciendo conforme pasa el tiempo.

4.7 Modelo flexible

Los modelos se aplicaron en el programa SAP 2000 con la geometría y propiedades previamente presentadas.

Ambos modelos están empotrados en su base, considerando el suelo como un medio infinitamente rígido.

4.8 Aplicación cargas al modelo

Las fuerzas nodales se aplicaron estáticamente a los nodos correspondientes, y sus respectivos historiales de carga se les asignaron a los grupos de nodos propuestos.

4.9 Revisión de la respuesta aeroelástica

Ambos modelos se corrieron, y se determinó su respuesta aeroelástica (desplazamientos y elementos mecánicos según corresponda). Cabe mencionar que solo se presentaron a modo de graficas los desplazamientos en el eje transversal y longitudinal de ambos modelos en una dirección de viento, tal y como se indica al principio de este capítulo. Los desplazamientos del modelo CAARC se compararon con los presentados por Braun and Awruch (2009).

En adición, para el edificio de geometría atípica se revisó la variación de los elementos mecánicos en función del tiempo de la estructura.

5. Resultados y discusión

En esta sección se presentan las respuestas aeroelásticas de los dos modelos analizados. En adición, se presenta el análisis aerodinámico del edificio de geometría atípica.

5.1 Respuesta aeroelástica del modelo CAARC

En la figura 5-1 se presentan los desplazamientos en el nodo central más alto del modelo CAARC en las dos principales direcciones.

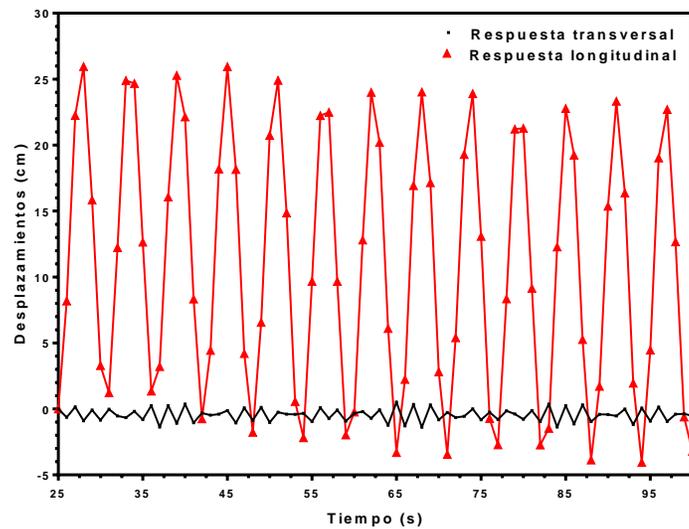


Figura 5-1. Desplazamientos del modelo CAARC por presiones dinámicas del viento.

Los resultados obtenidos tienen una buena aproximación con los resultados presentados por Braun and Awruch (2009), ya que la forma de las gráficas son muy similares, aunque, la amplitud obtenida en este trabajo es menor a la presentada por los mencionados autores para los desplazamientos en el eje longitudinal. El máximo desplazamiento presentado en el artículo presentado por los autores fluctúa entre 40 y 42 centímetros, mientras que la amplitud máxima presentada en este estudio se encuentra entre 28 y 26 cm. Estas diferencias son poco relevantes si se considera que la altura del edificio modelado es de 180 metros, y que el método

utilizado por Braun y Awruch (2009) para realizar este estudio fue completamente acoplado. Con respecto a los desplazamientos en el eje transversal, estos tienen buena aproximación tanto en longitud como en la forma de las gráficas. Cabe mencionar que este análisis se llevó a cabo en cuestión de minutos, y no demanda de gran capacidad computacional. Esto representa una seria ventaja con respecto a análisis interacción fluido-estructura completamente acoplados, los cuales generalmente requieren de gran capacidad computacional y pueden tardar horas en su procesamiento.

5.2 Análisis aerodinámico del edificio de geometría atípica

Se observan los vórtices generados alrededor del edificio de geometría atípica en función del tiempo en las figuras 5-2 y 5-3.

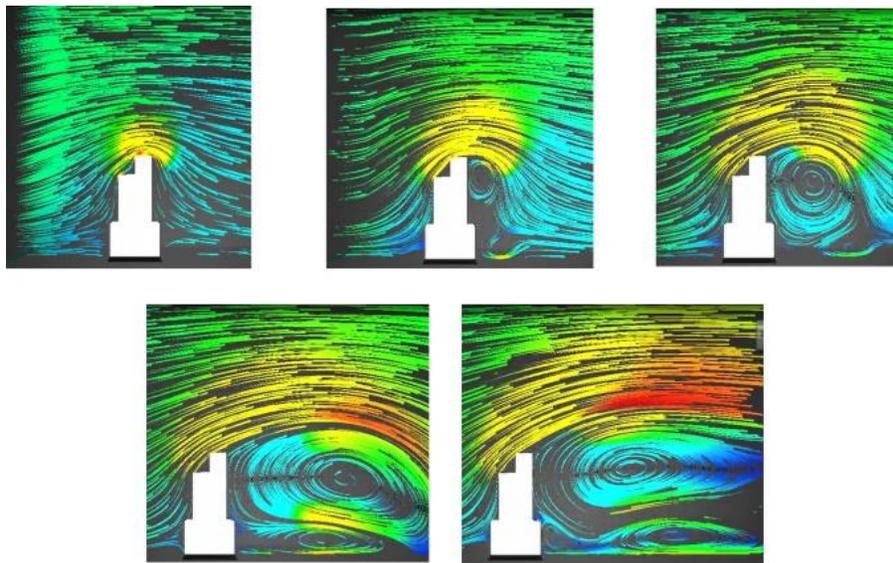


Figura 5-2. Evolución de los vórtices en la parte posterior de la estructura.

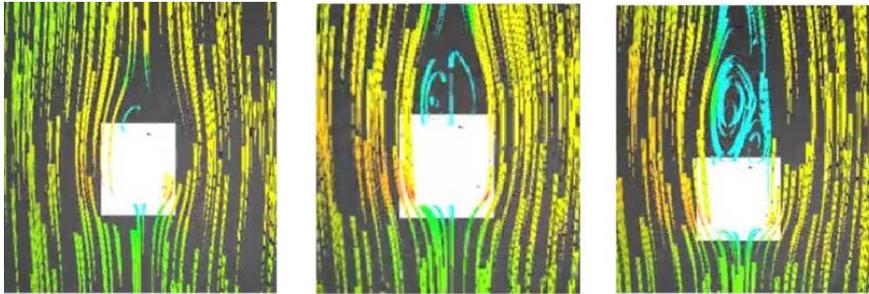


Figura 5-3. Evolución de los vórtices alrededor de la estructura.

De acuerdo a las líneas de corriente presentadas en las figuras 5-2 y 5-3, la parte frontal de la estructura obstaculiza el flujo del viento ejerciendo efectos de presión, a la vez que por el efecto de la presión empuja las líneas hacia arriba y por efecto de la presión su velocidad aumenta generando vórtices en la parte posterior de la estructura. Los vórtices actúan como remolinos que ejercen efectos de succión hacia su centro, por lo tanto, la parte posterior de la estructura se encuentra en succión lateral. Al sortear la estructura, las líneas de corriente presentan succión lateral. Tales efectos son reconocidos como “desprendimiento de vórtices”, los cuales generan vibraciones en el eje transversal de la estructura.

5.3 Respuesta aeroelástica del edificio de geometría atípica

Los desplazamientos en la estructura total se presentan en las siguientes figuras. Los desplazamientos fueron amplificados para que pudieran apreciarse mejor.

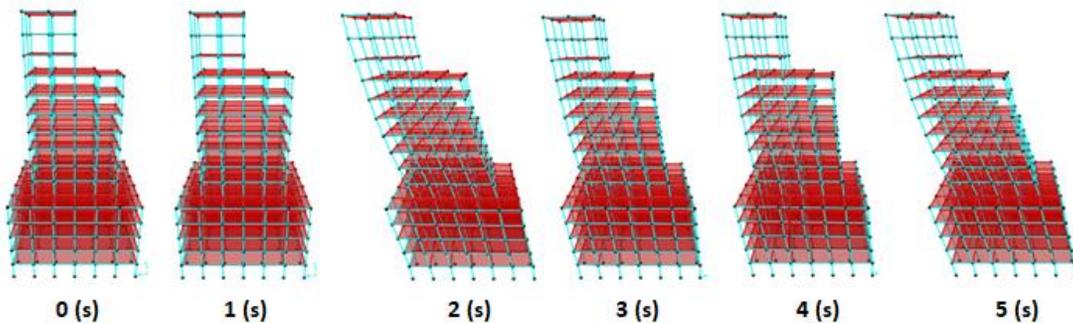


Figura 5-4. Desplazamientos en el eje longitudinal del edificio de geometría atípica completo en el tiempo.

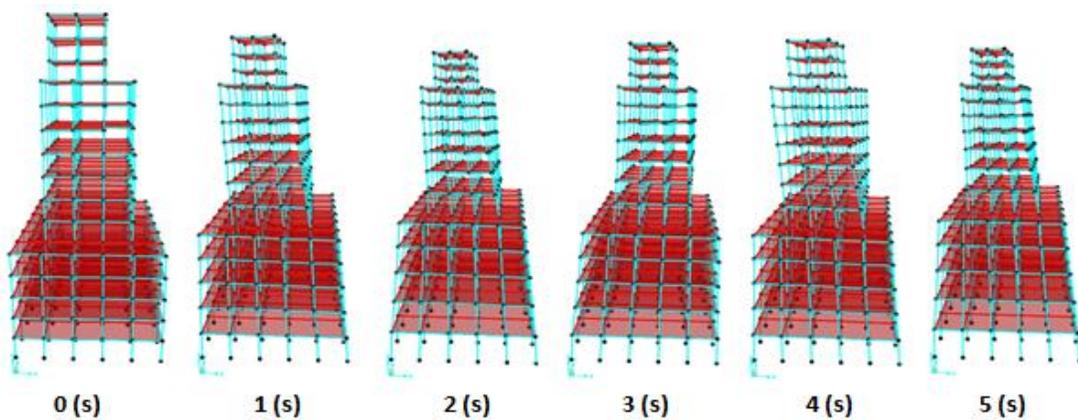


Figura 5-5. Desplazamientos en el eje transversal del edificio de geometría atípica completo en el tiempo.

Para un mejor entendimiento de las 2 figuras anteriores, en la siguiente figura se observan las gráficas de los desplazamientos en el nodo central del ultimo entrepiso del edificio para ambas direcciones principales.

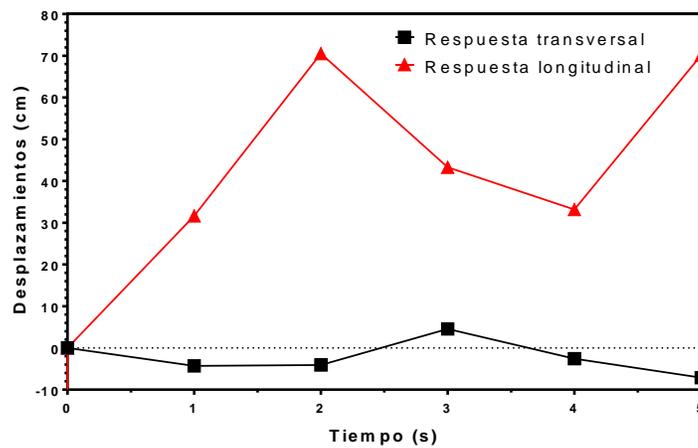


Figura 5-6. Desplazamientos en el edificio de geometría atípica debido a las presiones dinámicas del viento.

Como puede ser observado en las figuras anteriores, los desplazamientos longitudinales son los mayores, y presentan desplazamientos hacia delante y hacia atrás. Los desplazamientos en el eje transversal son mucho menores. Un aspecto importante sobre los desplazamientos en el eje transversal es que el movimiento del edificio cruza el eje neutro en un movimiento de un lado al otro, esto significa

que se presenta el fenómeno aeroelástico conocido como “desprendimiento de vórtices”. Este fenómeno es usual en estructuras altas y esbeltas bajo presiones de viento. Esto concuerda con los vórtices observados en el análisis aerodinámico presentado previamente en este capítulo.

El efecto combinado de ambos desplazamientos presenta torsiones en el edificio, esto debido a la combinación de desplazamientos en ambos sentidos actuando a la vez.

Los elementos mecánicos en función del tiempo fueron obtenidos para el edificio de geometría atípica. En la siguiente figura se presenta un ejemplo.

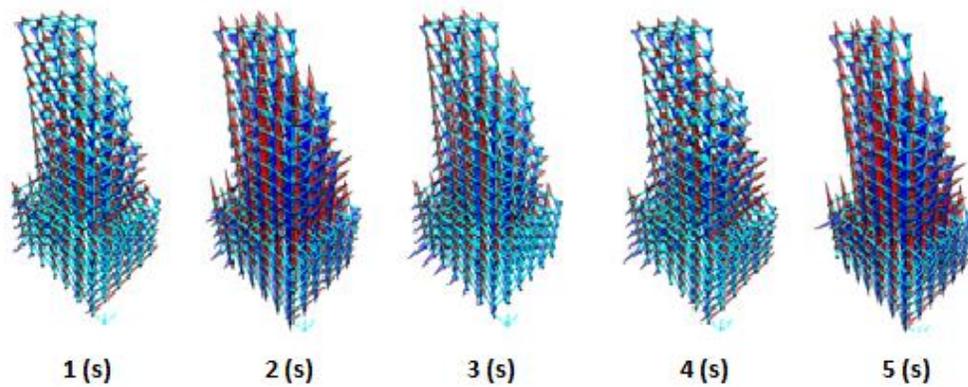


Figura 5-7. Momentos en “z” en función del tiempo para el edificio de geometría atípica.

Con la finalidad de observar la variación de los elementos mecánicos debidos a la presión dinámica del viento en el modelo, una columna en la base del edificio fue escogida para observar la variación de momentos “y”, pero, cualquier otro elemento mecánico pudo haber sido presentado. Se escogió una columna ya que estos elementos absorben la mayor cantidad de presión lateral, en este caso generada por las presiones dinámicas del viento.

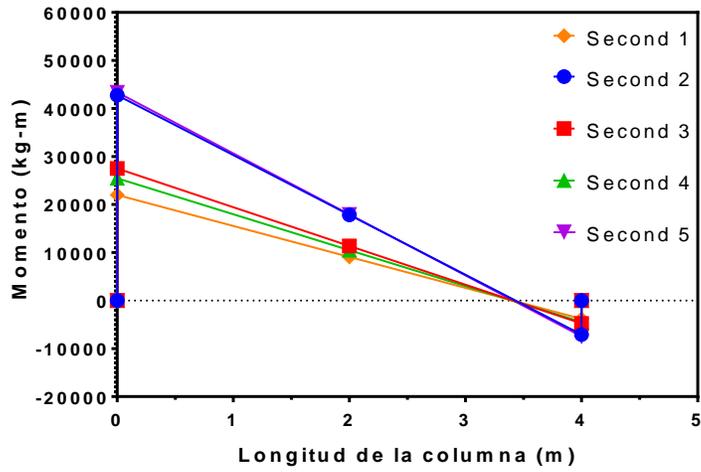


Figura 5-8. Variación del momento de columna en la base del edificio en el tiempo.

Como se observa en la figura 5-8, el momento puede variar considerablemente de un segundo al otro, y como se observa en los desplazamientos, los momentos pueden aproximarse al momento presentado en un segundo anterior.

6. Conclusiones

La metodología propuesta en este trabajo ha demostrado su precisión, incluso para un edificio alto si se compara con los resultados presentados en la literatura para un modelo completamente acoplado. Esta metodología no presenta restricción alguna con respecto a la geometría del modelo, ya que se presentó un análisis para un edificio con una geometría completamente irregular, y los resultados obtenidos para este modelo fueron los esperados con respecto al análisis aerodinámico. En adición, todos los aspectos estructurales necesarios para un diseño estructural pueden ser analizados mediante esta metodología (elementos mecánicos y desplazamientos en función del tiempo). Por lo tanto, este método cubre todos los aspectos para simular las condiciones reales de un edificio de altura baja o media bajo presiones de viento, situación no del todo cubierta por la norma oficial mexicana. Además, el tiempo de análisis es relativamente corto si se compara con un análisis completamente acoplado.

Para futuros trabajos con respecto al presentado en este documento, se sugiere realizar un análisis en túnel de viento a escala reducida del edificio de geometría atípica para corroborar los resultados obtenidos en términos de desplazamientos.

REFERENCIAS

Abeyaratne, R. 2012. Continuum Mechanics.

Alawadhi, E. M. 2010. Finite Element Simulations Using ANSYS. First edit. CRC Press, Boca Raton, Florida.

Arioli, G., and F. Gazzola. 2015. A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the Tacoma Narrows Bridge. *Appl. Math. Model.* 39:901–912. doi:10.1016/j.apm.2014.06.022.

Autodesk. 2013. Flow Design Preliminary Validation Brief. 11. Available from: http://d2cw6w4qme40ds.cloudfront.net/uploads/reports/files/000/000/014/original/Flow_Design_Wind_Tunnel_Validation_Brief.pdf?1402064063

Autodesk. 2015. Autodesk Robot Structural Analysis Professional wind simulator validation brief. Available from: <https://bimandbeam.typepad.com/files/robot-structural-analysis-professional-wind-simulator-validation-brief.pdf?fbclid=IwAR0ampV8aOs2xhNYqCnnQ06WXOc4Hb6YjAnkb43FvsFZfyClSjor0oePS5o>

Batchelor, G. K. 2000. An Introduction to Fluid Dynamics. First edit. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.

Bathe, K.-J. 1996. Finite Element Procedures. First edit. (S. & Schuster, editor.). Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle, New Jersey.

Belver, A. V., A. L. Ibán, and C. E. Lavín Martín. 2012. Coupling between structural and fluid dynamic problems applied to vortex shedding in a 90m steel chimney. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 100:30–37. doi:10.1016/j.jweia.2011.10.007.

Blocken, B. 2014. Journal of Wind Engineering 50 years of Computational Wind Engineering : Past , present and future \$. *Jnl. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 129:69–102. doi:10.1016/j.jweia.2014.03.008.

Boggs, D., and J. Dragovich. 2006. The Nature of Wind Loads and Dynamic Response. *ACI. SP 240*:15–44.

Braun, A. L., and A. M. Awruch. 2009. Aerodynamic and aeroelastic analyses on the CAARC standard tall building model using numerical simulation. *Comput. Struct.* 87:564–581. doi:10.1016/j.compstruc.2009.02.002.

Chao, Y., Y. Jianjun, and L. Junzhe. 2006. Scheme effect and grid dependency in CFD computations of heat transfer.pdf. 125–130.

Chopra, A. K. 2014. *Dinámica de Estructuras*. Cuarta edi. Pearson, Naucalpan de

Jauarez, EstadodeMéxico.675f722688a5f48ede980711e9db7786/Dinamica+de+Es
tructuras+4Ed+-+Anil+K.+Chopra.pdf

Comisión Federal de Electricidad. 2008. Diseño por viento. In: Manual de Diseño de
Obras Civiles. Comisió Federal de Electricidad, México, D.F. p. 360.

Cook, R. D. 1994. Finite Element Modeling For Stress Analysis. First edit. John Wiley
& Sons, Inc., Madison, Wisconsin.

Dagnew, A. K., G. T. Bitsuamalk, and R. Merrick. 2009. Computational evaluation of
wind pressures on tall buildings. 11th Am. Conf. Wind Eng. Juan, Puerto Rico. 1–
17.

Dhunny, A. Z., N. Samkhaniani, M. R. Lollchund, and S. D. D. V. Rughooputh. 2018.
Investigation of multi-level wind flow characteristics and pedestrian comfort in a
tropical city. Urban Clim. 24:185–204. doi:10.1016/j.uclim.2018.03.002.

Donea, J., A. Huerta, J. Ponthot, and A. Rodr. 1999. Arbitrary Lagrangian – Eulerian
Methods. Encycl. Comput. Mech. 1–25. doi:10.1002/0470091355.ecm009.

Förster, C. 2007. Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite
elements. University of Stuttgart.

Frost, W., J. R. Maus, and G. H. Fitch. 1974. A boundary-layer analysis of
atmospheric motion over a semi-elliptical surface obstruction. 7:165–184.

Gurtin, E. M. 1981. An Introduction to Continuum Mechanics. First Edit. Academic
Press, Inc., Pittsburg, Pennsylvania.

Hirt, C. W., and J. L. Cook. 1972. Calculating Three-Dimensional Flows Around
Structures and Over Rough Terrain. J. Comput. Phys. 340:324–340.

Holmes, J. D., and T. K. T. Tse. 2014. International high-frequency base balance
benchmark study. doi:10.12989/was.2014.18.4.457.

Huang, S., R. Li, and Q. . Li. 2013. Numerical simulation on fluid-structure interaction
of wind around super-tall building at high reynolds number conditions. Struct. Eng.
Mech. 46:197–212. doi:10.12989/sem.2013.46.2.197.

Hubova, O., M. Macak, L. Konecna, and G. Ciglan. 2017. External Pressure
Coefficients on the Atypical High-Rise Building - Computing Simulation and
Measurements in Wind Tunnel. Procedia Eng. 190:488–495.
doi:10.1016/j.proeng.2017.05.368.

Hunter, L. J., and N. S. Wales. 1992. An investigation of three-dimensional
characteristics of low regimes within the urban canyon. Atmos. Environ. 26:425–432.

Instituto Nacional de Estadística y Geografía. 2017. Encuesta Nacional De Los Hogares 2016. 14.

Irgens, F. 2008. Continuum mechanics. Springer.

Kopp, G. A., M. J. Morrison, and D. J. Henderson. 2012. Full-scale testing of low-rise, residential buildings with realistic wind loads. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 104–106:25–39. doi:10.1016/j.jweia.2012.01.004.

Lara-López, J. 2016. Análisis dinámico por viento de un edificio de geometría irregular bajo un modelo acoplado fluido-estructura. Universidad Autónoma de Querétaro.

Lee, D. S. H. 2017. Impacts of surrounding building layers in CFD wind simulations. *Energy Procedia.* 122:50–55. doi:10.1016/j.egypro.2017.07.313.

Malvern, L. E. 1969. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. First edit. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Marra, A. M., G. Bartoli, R. Scotta, and G. Frison. 2018. Full-aeroelastic model of CAARC building : iterative design procedure and wind tunnel tests. *Inven.* 2018.

Mendis, P., T. Ngo, N. Haritos, A. Hira, and J. Cheung. 2007. Wind Loading on Tall Buildings.

Meng, F. Q., B. J. He, J. Zhu, D. X. Zhao, A. Darko, and Z. Q. Zhao. 2018. Sensitivity analysis of wind pressure coefficients on CAARC standard tall buildings in CFD simulations. *J. Build. Eng.* 16:146–158. doi:10.1016/j.jobbe.2018.01.004.

Meruane, V. 2006. Dinámica Estructural. 130.

Moukalled, F., L. Mangani, and M. Darwish. 2016. The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics - An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab. Available from: <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-84939129919&partnerID=tZOtx3y1>

Murakami, S. 1990. NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOWFIELD AROUND CUBIC MODEL CURRENT STATUS AND APPLICATIONS OF k- ϵ MODEL AND LES. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 33:139–152.

Namkoong, K., H. G. Choi, and J. Y. Yoo. 2005. Computation of dynamic fluid-structure interaction in two-dimensional laminar flows using combined formulation. *J. Fluids Struct.* 20:51–69. doi:10.1016/j.jfluidstructs.2004.06.008.

Péntek, M., A. Winterstein, M. Vogl, P. Kupás, K. U. Bletzinger, and R. Wüchner. 2018. A multiply-partitioned methodology for fully-coupled computational wind-structure interaction simulation considering the inclusion of arbitrary added mass

dampers. J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 177:117–135.
doi:10.1016/j.jweia.2018.03.010.

Rodrigo, G. A. 2005. Fenómenos de galope en obstáculos de sección no rectangular. 154.

Segerlind, L. J. 1937. Applied Finite Element Analysis. Second Edi. John Wiley & Sons, Inc., East Lansing, Michigan.

Sentile C, Noa M, Fernández V, Domínguez M, F. J. 2006. Fundamento estadístico del efecto aleatorio del viento para el cálculo de estructuras delgadas. Ing. Mec. 9:13–19.

Smagorinsky, J. 1963. General Circulation Experiments With The Primitive Equations. Mon. Weather Rev. 91:66.

Stephen, A. J. 2004. A Structured-Grid Quality Measure for Simulated Hypersonic Flows. In: 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and EXHIBIT. NASA Langley Research Center Hampton, Reno, Nevada. p. 23681–2199.

Summers, D. M., T. Hanson, and C. Wilson. 1986. Validation of a Computer Simulation of Wind Flow Over a Building Model. 21:97–111.

Sun, X., H. Liu, N. Su, and Y. Wu. 2017. Investigation on wind tunnel tests of the Kilometer skyscraper. Eng. Struct. 148:340–356.
doi:10.1016/j.engstruct.2017.06.052.

Tamura, Y., and A. Kareem. 2014. Advanced Structural Wind Engineering. First edit. (A. K. Yukio Tamura, editor.). Springer, Kanagawa.

Valdés-Vázquez, J. G., G. I. Villalpando-Granados, and A. Hernandez-Martinez. 2012. Ingeniería eólica en monumentos del bicentenario - Análisis por elementos finitos. Soc. Mex. Ing. Estructural. 52:1–12.

Vázquez, J. L. 2004. La ecuación de Navier-Stokes Un reto físico-matemático para el siglo XXI. Monogr. la Real Acad. Ciencias Zaragoza. 26:31–56. Available from: <http://www.unizar.es/acz/05Publicaciones/Monografias/MonografiasPublicadas/Monografia26/031Vazquez.pdf>

Yu, F., H. Zhang, Y. Li, J. Xiao, A. Class, and T. Jordan. 2018. Voxelization-based high-efficiency mesh generation method for parallel CFD code GASFLOW-MPI. Ann. Nucl. Energy. 117:277–289. doi:10.1016/j.anucene.2018.03.045.

Zhang, H. R., and Y. Yu. 2013. A guidance to grid size design for CFD numerical simulation of hypersonic flows. 67:178–187. doi:10.1016/j.proeng.2013.12.017.

Zhang, J. W., and Q. S. Li. 2018. Field measurements of wind pressures on a 600 m

high skyscraper during a landfall typhoon and comparison with wind tunnel test. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 175:391–407. doi:10.1016/j.jweia.2018.02.012.

Zhiyin, Y. 2015. Large-eddy simulation : Past , present and the future. *Chinese J. Aeronaut.* 28:11–24.