Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias

ESTUDIO HISTÓRICO-DIDÁCTICO DE LA RAZÓN Y FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA INVERSA EN LIBROS DE TEXTO.

Opción de titulación
Tesis o Publicación de artículos

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestría en Didáctica de las matemáticas y las Ciencias

Presenta:
Nombre del estudiante
Maidy Alejandra Minú Vargas

Dirigido por:
Dra. Diana del Carmen Torres Corrales

Dra. Diana del Carmen Torres Corrales
Presidente

Dr. Alberto Camacho Ríos
Secretario

Dra. Lilia Patricia Aké Tec
Vocal

Dr. Jesús Eduardo Hinojos Ramos
Suplente

Dr. Víctor Larios Osorio
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Agosto del 2023
México

Estudio histórico-didáctico de la razón y función trigonométrica inversa en libros de texto

por

MAIDY ALEJANDRA MINU VARGAS

DEDICATORIA

A mi familia por su amor y su apoyo incondicional

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios por sus bendiciones y por iluminarme para llevar a buen término esta etapa de formación.

Agradezco a la Dra. Diana del Carmen Torres Corrales, mi directora de tesis, por la formación que me brindo en el campo de la investigación, por su disciplina, paciencia y generosidad, especialmente por su constante dedicación y compromiso en la realización de este trabajo.

Agradezco a los miembros del sínodo por su disponibilidad y valiosos aportes a la investigación.

Agradezco a mis profesores de la Maestría en Didáctica de las matemáticas por compartir sus conocimientos y experiencias, especialmente agradezco a la Dra. Lilia Patricia Aké Tec por su formación y seguimiento en los cursos relacionados con la investigación.

Agradezco a mi familia por su esfuerzo, motivación y acompañamiento permanente en mi vida personal y profesional. A mi amiga Sandra Elizabeth Gómez Fiscal por su apoyo aquí en México, por animarme a perseverar y superar las dificultades que se presentaron en el camino.

Agradezco a mis amigos y compañeros de Colombia, especialmente a Karen Tatiana Barreiro por su apoyo y amistad sin importar la distancia.

Agradezco a mi compañero de estudios José Antonio Palacios por su generosidad al compartir sus conocimientos en el transcurso de la maestría.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por hacer posible este sueño de poder realizar mis estudios de maestría gracias a la beca otorgada.

(CVU/Becaria): 1146582

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

INDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE CUADROS

RESUMEN

Las investigaciones en Matemática Educativa han demostrado que mediante el análisis de libros de texto es posible formular estrategias metodológicas significativas para la enseñanza de las matemáticas. Fundamentado en la Teoría Socioepistemológica, se realizó un estudio documental a través de la configuración de un método de análisis histórico-didáctico de libros de texto. En particular se tomaron en cuenta libros en su contexto histórico y contemporáneo para el estudio de la razón y función trigonométrica inversa, con el objetivo de identificar los significados que promueven las tareas de los libros mediante el reconocimiento de las prácticas que permitieron la construcción social de la matemática, y así determinar la transformación didáctica de dicho conocimiento. La metodología consistió en cuatro fases. En la fase uno se establecieron los criterios de inclusión de los libros, en la fase dos se seleccionaron las tareas representativas a analizar, en la fase tres se realizó un análisis individual de las tareas mediante un instrumento de análisis cualitativo y en la fase cuatro se realizó un análisis transversal con el cual se trianguló el análisis individual de los libros.

El análisis histórico-didáctico de libros de texto permitió determinar la transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa, pues se reconoció que, dado las diversas formas de enseñar encontradas, los libros de texto promueven diferentes significados que fueron posibles de identificar mediante el reconocimiento de las prácticas –a nivel de acción y de forma operativa con los usos de la matemática– y las características de los objetos de estudio. Una de las constantes encontradas es que a la función trigonométrica inversa se le da un tratamiento en la enseñanza como razón lo cual está asociado al contexto de significación en que se presenta y en la distinción de las características que permiten conceptualizar tanto a la razón o función trigonométrica inversa. Este fenómeno didáctico encontrado genera una pérdida de significado y es precisamente lo que determinamos como transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa.

Palabras claves: Matemática Educativa, Teoría Socioepistemológica, Estudio documental, Análisis de libros de texto, Trigonometría**,** Función trigonométrica inversa, Razón trigonométrica inversa.

ABSTRACT

Research in Mathematics Education has shown that with the help of textbook analysis, it is possible to formulate methodological strategies for teaching mathematics. Based on the Socioepistemological Theory, a documentary study was done through the configuration of a method for historical-didactic analysis of textbooks. In particular, the books were considered according to their historical and contemporary contexts for the study of inverse trigonometric ratio and function, to identify the meanings promoted by the books' tasks through the recognition of practices that allowed the social construction of mathematics, and to determine the didactic transformation of such knowledge. The methodology consisted of four phases. In phase one, we established the criteria for inclusion and selection for the books; in phase two, the representative tasks to be analyzed were selected; in phase three, an individual analysis of the activities was implemented utilizing an instrument for qualitative analysis; and in phase four, a transversal analysis was executed and triangulated with the individual analysis of the books.

The historical-didactic analysis of textbooks made possible to determine the didactic transformation of the inverse trigonometric ratio and function since it was recognized that, given the different ways of teaching found in the analysis, textbooks promote different meanings that were identified through the recognition of practices -at the level of action and operationally with the uses of mathematical knowledge- and the characteristics of the objects under study. One of the constants found is that the inverse trigonometric function is treated in teaching the same as trigonometrical ratio, which is associated with the context of meaning in which it is presented, and in the distinction of the characteristics that allow conceptualizing both the ratio and inverse trigonometric function. This didactic phenomena generates the loss of meaning and is precisely what we determine as the didactical transformation of the inverse trigonometric ratio and function.

Keywords: Mathematics Education, Socioepistemological Theory, Documentary study, Inverse trigonometric function, Inverse trigonometric ratio.

1. ANTECEDENTES

La motivación inicial de este proyecto está relacionada con la experiencia acumulada como estudiante y docente en el contexto de la educación en Colombia. El estudio de la Trigonometría inicia en grado décimo de educación media (14 y 15 años) como lo indica el Ministerio de Educación Nacional de Colombia en los derechos básicos de aprendizaje (DBA). En esta asignatura se inicia con una breve introducción sobre trigonometría. Posteriormente se da un repaso sobre Geometría plana y semejanza de triángulos para así para así continuar con la resolución de triángulos rectángulos. Más adelante se estudian los teoremas del seno y coseno, los ángulos notables, las identidades trigonométricas y finalmente las gráficas de las funciones trigonométricas y sus propiedades.

La clasificación de las referencias que a continuación se presentan surge de una revisión de las investigaciones realizadas desde la Matemática Educativa pertenecientes a la problemática en la que se centra este estudio. Estas investigaciones están orientadas en dos ejes: (1) Diseños y propuestas didácticas de contenido trigonométrico, (2) Estudios de análisis de libros de texto.

1.1.1 Diseños y propuestas didácticas de contenido trigonométrico

Una primera revisión de la literatura correspondió a estudios que realizan propuestas y diseños didácticos de contenido trigonométrico, identificando estudios de la razón y función trigonométrica considerando estos aportes importantes para el análisis y definición de las razones y funciones trigonométricas inversas, así mismo se muestran investigaciones en las cuales se utilizan el inverso para referirse a un concepto que es recíproco y, finalmente, investigaciones específicas de las razones y funciones trigonométricas inversas.

1.1.2 Estudios de la razón y función trigonométrica

La enseñanza de la Trigonometría escolar generalmente sigue la evolución conceptual: razón, función e identidad trigonométrica. La razón indica una proporción que se mantiene estática de forma indefinida en el tiempo, mientras que la función se refiere a dicha proporción, pero en un momento específico de un fenómeno que cambia a través del tiempo. Por ejemplo, la razón trigonométrica, sin importar el nivel educativo donde se estudie, tiene un tratamiento similar: se dan datos, se identifica la fórmula a utilizar, se sustituyen y operan, y se obtiene un resultado. En la disciplina se han estudiado principalmente la razón y función trigonométrica, que, en algunos casos, al igual que los libros, suele referirse a dichos términos como sinónimos a pesar de que matemáticamente son nociones distintas (Scholz y Montiel, 2018; Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021).

La investigación ha evidenciado que el estudio de la razón trigonométrica descrito anteriormente, promueve un significado lineal: es el caso de división de longitudes utilizado como técnica para obtener un valor faltante que se asocia a lo proporcional. Esto último fue observado en profesores mexicanos del nivel medio superior (forman estudiantes de 15 a 18 años), a pesar del dominio de los conceptos y operaciones propias de la razón trigonométrica (Montiel y Jácome, 2014).

1.1.3 Estudios de la razón y función trigonométrica recíproca

Referente a investigaciones sobre las razones y funciones trigonométricas recíprocas, Montero et al. (2013) elaboraron un diseño didáctico utilizando el software GeoGebra para la comprensión de la relación de proporcionalidad inversa entre una razón trigonométrica y su recíproca. En particular tomaron el caso de la visualización de la secante y cosecante mediante el concepto de plano de inversión para definirlas a partir de las razones seno y coseno, involucrando el concepto de inverso para definir un concepto que es recíproco. Los autores concluyen que GeoGebra permite hacer más sencilla la internalización de los conocimientos por parte de los estudiantes.

En la misma dirección que Montero et al. (2013), Talkokul (2017) menciona que las funciones seno, coseno y tangente no son las más importantes de las funciones, ya que el matemático Aryabhatta, quien introdujo la trigonometría, no lo señala. En su estudio teórico, el autor presenta una demostración matemática donde analiza las fórmulas de la tangente y cotangente a las que hace referencia como inversas, aunque son recíprocas. El autor concluye que las funciones principales de la trigonometría son seno, secante y tangente.

1.2 Estudios de la razón y la función trigonométrica inversa

Por su parte Martínez-Planell y Cruz-Delgado (2013), fundamentándose en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), realizan una investigación con estudiantes universitarios sobre la construcción de las funciones seno, coseno y sus inversas. Los autores señalan que en el proceso de construcción del concepto de función trigonométrica inversa se requiere, en primer lugar, que los estudiantes construyan su propio concepto. Por lo que concluyen que para la comprensión del significado se requiere invertir la definición de función trigonométrica y que, al no hacer la inversión, los estudiantes se quedan con un hecho memorizado, tal como ocurre cuando hay significados limitados acerca del rango.

En otra investigación, Martínez-Planell y Cruz-Delgado (2016) utilizan la teoría APOE para analizar la construcción mental de once estudiantes de ingeniería mediante una descomposición genética que involucra el círculo unitario para el seno, coseno y sus funciones trigonométricas inversas. Los autores encuentran que los estudiantes que no interiorizaron los esquemas de la descomposición genética desde el enfoque de círculo unitario, presentaron mayor dificultad que los que si lo aplicaron. No obstante, identificaron que algunos estudiantes poseen una fuerte base de Trigonometría basada en la concepción del triángulo rectángulo lo cual implica que se deba revisar la descomposición genética considerando las ideas de medición de ángulos y la conexión entre el triángulo rectángulo y el círculo unitario. En sus conclusiones mencionan que, dada las limitaciones de literatura referente al tema, la herramienta de descomposición genética propuesta queda limitada para describir ampliamente las construcciones mentales de los estudiantes.

1.2.1 Síntesis de la primera revisión bibliográfica

Esta revisión de la literatura permitió identificar que la investigación reporta resultados en el ámbito didáctico del nivel superior con el objetivo de promover una mejor comprensión de esta matemática. Por ejemplo, estudios que configuran un diseño y toman datos con estudiantes de ingeniería (Montero et al., 2013; Martínez-Planell y Cruz-Delgado, 2013; 2016), y que diseñan propuestas de enseñanza basados en la revisión de literatura (Talkokul, 2017) con el fin de atender a las dificultades que reconocen en los estudiantes.

También se identifica que el aprendizaje del concepto de función y el estudio de funciones aún presenta dificultades en los estudiantes de nivel superior. Específicamente en la comprensión del concepto de función inversa ya que es común que los estudiantes consideren los conceptos función inversa y función recíproca como el mismo, esta confusión puede generarse no solo en la enseñanza por parte del maestro, sino que también existe esta ambigüedad en los libros de texto o guías educativas donde la noción de recíproca es sinónimo de inversa.

En la enseñanza de las funciones trigonométricas inversas se evidencian dificultades en los estudiantes para desarrollar el proceso de inversión de la definición y el rango que permite la construcción de las funciones trigonométricas inversas dado que las funciones trigonométricas tienen características importantes como por ejemplo su periodicidad y por lo tanto sus inversas no pueden definirse en todo su dominio.

Ésta primera revisión permitió identificar que si bien se han realizado algunos estudios referentes a la razón y a la función trigonométrica inversa aún hay mucho por explorar, dado que son pocos los trabajos orientados en este campo, por tal motivo se decidió realizar una investigación documental que permitiera reconocer y fundamentar las prácticas que acompañan a la razón y función trigonométrica inversa en los libros de textos.

1.3 Estudios de análisis de libros de texto

Dada la naturaleza de la investigación (documental) se hizo necesario realizar una segunda revisión de la literatura donde se encontraron investigaciones de análisis de libros de texto. Inicialmente la revisión se centró en los estudios de análisis de libros de texto para contenido trigonométrico, sin embargo, los estudios encontrados no fueron suficientes por lo tanto fue necesario revisar algunas investigaciones de análisis de libros de texto para contenido matemático en general con el fin de ampliar la compresión que requería el estudio.

1.3.1 Análisis de libros de texto para contenido trigonométrico

1.3.1.1 Estudios de análisis de libros de texto de la razón y función trigonométrica

Respecto al análisis de libros de texto para contenido trigonométrico, el estudio de Montiel (2011) es uno de los referentes principales para la investigación en Teoría Socioepistemológica y en otras teorías. Fundamentado en la Teoría Socioepistemológica la autora realiza un estudio histórico-epistemológico y un estudio didáctico de conocimiento trigonométrico, del cual reconoce que la enseñanza de la Trigonometría no es un asunto trivial, aunque sea un conocimiento con múltiples aplicaciones en las Matemáticas y otras disciplinas como la Astronomía, Arquitectura, Ingeniería, entre otras.

En el estudio histórico-epistemológico, Montiel (2011) identifica que un escenario de la génesis de la relación trigonométrica fue el astronómico, donde el problema macro-no manipulable de cálculo de distancias inaccesibles fue el contexto de origen para identificar la relación no proporcional entre ángulo bisecado/media cuerda en el círculo, lo que actualmente en la escuela equivale a la razón seno del ángulo como cateto opuesto/hipotenusa en el triángulo rectángulo. Así, para fomentar usos y significados trigonométricos propone que la enseñanza se acompañe por prácticas especificas: para la razón trigonométrica señala el estudio de la modelación y construcción de diagramas con los que se reflexione sobre el manejo de la proporcionalidad y la escala en un contexto estático y covariacional. Mientras que, para la función trigonométrica, propone el estudio y la modelación del movimiento, para que se reflexione sobre la variación, lo periódico y acotado de la función.

En una sección del estudio didáctico de Montiel (2011) la autora analiza tres libros de texto del nivel superior con una importante influencia escolar para la enseñanza de la función trigonométrica: “A Course of Pure Mathematics” de Hardy, “Calculus” de Apostol y “Calculus” de Spivack. Identifica que los tres libros dan un tratamiento analítico a la función trigonométrica mediante la demostración de sus propiedades con técnicas matemáticas avanzadas como la derivación, integración, series y ecuaciones diferenciales; y que los tres autores fundamentan su razonamiento en la proporción de la longitud del arco y el área de un sector circular:

“Hardy (1908) hace explícito que para tratar analíticamente a la función trigonométrica es necesario demostrar que un arco puede medirse y en consecuencia asociarle un número llamado longitud, es decir, plantea un fundamento de partida para trabajar con la función” (Montiel, 2011, p. 55).

“En Apostol (1984) [...] las funciones trigonométricas son modeladores de fenómenos periódicos […] y su descripción geométrica no se restringe a estudiar el triángulo rectángulo […]”. (Montiel, 2011, p. 58)

“En Spivac (1991) […] construye el concepto de función partiendo de definir el seno y el coseno de un ángulo dirigido y culminar definiendo $sen\ x$ y $cos\ x$ para cada número x. […] realiza la equivalencia grados a radianes y comienza su construcción analítica […]”. (Montiel, 2011, p. 61)

También Cantoral et al. (2015) realizaron un análisis didáctico de un libro de texto del currículo mexicano sobre el concepto de razón trigonométrica. De la Teoría Socioepistemológica (TS) utilizan el nivel pragmático (acciones y actividades) del modelo de anidación de prácticas para realizar un análisis documental de la actividad matemática. En primer lugar, describen la organización didáctica del libro de texto (exploración, institucionalización, ejercitación y aplicación) y los temas previos/posteriores a la razón trigonométrica. En segundo lugar, muestran ejemplos de tareas del tema matemático de interés y las analizan con el nivel pragmático del modelo de anidación con las preguntas ¿qué, ¿cómo y para qué hace? Los autores señalan que la razón trigonométrica se convierte en una aplicación de la proporcionalidad para calcular un valor faltante porque no se requiere estudiar o elaborar diagramas, sino que de ilustraciones de triángulos rectángulos se identifican datos para elegir la razón adecuada a la situación física y realizar operaciones con apoyo de la calculadora; y concluyen que se transmite un uso aritmético y algebraico con un significado memorístico.

Finalmente, en el análisis de libros de texto para contenido trigonométrico, Torres-Corrales y Montiel (2020) realizaron un análisis didáctico de ocho libros de texto de las nociones trigonométricas asociadas al problema cinemático directo de la Robótica de un programa de Ingeniería Mecatrónica. De la Teoría Socioepistemológica y los resultados de la investigación en Trigonometría configuraron un cuadro de análisis cualitativo para identificar los usos y significados de las nociones trigonométricas en tareas de asignaturas de Matemáticas, Física y de la Ingeniería. Las autoras identificaron que en las asignaturas de

Matemáticas se reproduce el uso aritmético y el uso algebraico asociado al cálculo de valores faltantes para resolver la tarea, mientras que, en las asignaturas de Física y la Ingeniería, además de dichos usos se dan el uso geométrico y el uso cuantitativo, y con los cuales se confronta que las nociones trigonométricas no son una aplicación de la proporcionalidad.

1.3.1.2 Estudios de análisis de libros de texto de la razón y función trigonométrica inversa

Entre las investigaciones basadas en análisis de libros de texto de la razón y función trigonométrica inversa se tiene a Barrera (2014) quien realizó un estudio de análisis de textos en el cual propone un método para determinar las funciones trigonométricas inversas desde el círculo unitario. El autor encuentra que pocos libros explican cómo usar el círculo unitario para definir las seis funciones trigonométricas de las longitudes formadas por la prolongación de triángulos rectángulos y destaca la importancia del uso del círculo en la enseñanza de las funciones trigonométricas inversas. Concluye que sus estudiantes de trigonometría analítica mejoraron sus habilidades e identificó indicios que han superado las concepciones erróneas en torno a la función trigonométrica inversa.

Por otro lado, Mesa y Goldstein (2017), en un análisis de textos universitarios, mediante el modelo de concepciones matemáticas de Balacheff identificaron características de las concepciones de ángulos, funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas. El análisis les permitió identificar la forma de argumentación a favor de la restricción del dominio de la función trigonométrica para definir la función trigonométrica inversa y cómo estos argumentos se conectan a la trigonometría en el triángulo y el círculo. Dados estos argumentos, la restricción del dominio hace referencia al proceso que se realiza para definir un nuevo dominio donde la función es biyectiva. Los autores concluyen que las dos concepciones: el estudio de ángulos estáticos en triángulos y el estudio dinámico a través de círculos unitarios, pueden ayudar a detectar posibles obstáculos cuando se trabaja con problemas que requieren de la función trigonométrica inversa, un valor que está en el rango de una función trigonométrica. Sin embargo, los autores establecen que definir una nueva función puede ser una buena solución, pero elimina la periodicidad de la función original, siendo esta una de las principales razones para preferir una trigonometría de círculo unitario respecto a la trigonometría del triángulo. Por tanto, su argumento se sustenta en la pertinencia de hacer explícitas estas concepciones para comprender las dificultades que surgen al resolver problemas con funciones trigonométricas inversas.

1.3.2 Análisis de libros de texto para contenido matemático en general

En están investigaciones se destaca el estudio de González y Sierra (2004) en donde diseñan y emplean un instrumento de análisis histórico-didáctico de libros de texto para el tema de puntos críticos del currículo español de educación secundaria de los planes de estudio del siglo XX. En sus decisiones metodológicas especifican que la muestra de libros analizada fue de 32 y cómo establecieron las unidades de información que les permitieron hacer una clasificación en categorías, dimensiones y modalidades asociadas. Muestran ejemplos del análisis realizado para cada periodo donde llenan el instrumento de análisis propuesto que da como resultado un perfil del libro, para lo cual marcan para cada unidad de análisis la frecuencia de aparición y la mayor frecuencia les permite deducir el nombre del perfil del libro.

Por su parte, Pino-Fan et al. (2019) realizaron un análisis didáctico de diez libros de texto del currículo chileno sobre el concepto de función. Del Enfoque Ontosemiótico (EOS) utilizan la noción de configuración epistémica y dos categorías de análisis: cuatro criterios para la caracterización de los significados curriculares de la representatividad y seis significados de la noción de función. En sus conclusiones los autores mencionan que los significados pretendidos por el currículo sobre la función no son representativos del significado holístico de referencia porque estos se limitan al significado como relación entre variables, como representación gráfica y como teoría de conjuntos.

Asimismo, Betancur et al. (2021) describieron los resultados del análisis didáctico de tres libros de texto del currículo colombiano de pregrado sobre los conceptos de eigenvalores y eigenvectores en operadores lineales. La finalidad de su estudio fue especificar el desarrollo del análisis teórico (primera componente) del ciclo de investigación de la teoría APOE (acrónimo de acción, proceso, objeto y esquema). Para el análisis de los libros los autores retoman cuatro criterios de un estudio previo (estructura general del texto, presentación y definición de conceptos, ejemplos y ejercicios, y lector modelo), desarrollan seis momentos para su ejecución y muestran en tablas un comparativo de los tres libros.

Finalmente, en el análisis de libros de texto para contenido matemático en general, Larios y Jiménez (2022) presentan un análisis de los significados que promueven sobre el concepto de derivada algunos libros de Cálculo para ingeniería. Desde la noción de configuración epistémica del EOS, los autores identificaron que se privilegia un significado parcial de la derivada, como por ejemplo el caso de la pendiente de la recta tangente que a veces se confunde con la recta en sí, presentando así un desarrollo parcial del significado holístico lo cual puede implicar que el estudiante no construya el significado pertinente para ese perfil profesional.

1.3.3 Síntesis de la segunda revisión bibliográfica

Las investigaciones realizadas desde el análisis de libros de texto para el contenido trigonométrico (Montiel, 2011; Cantoral et al., 2015; Torres Corrales y Montiel 2020) se fundamentan en la Teoría Socioepistemológica donde se realizan estudios de corte histórico-epistemológico y didáctico del conocimiento trigonométrico, los cuales identifican los usos y significados que permiten la construcción social de las nociones trigonométricas.

Barrera (2014), y Mesa y Goldstein (2017) tienen como objetivo común promover una mejor comprensión de la razón y función trigonométrica inversa, los cuales coinciden en la necesidad de comprender en primer lugar la noción de razón y función antes de estudiar sus inversas, así como incorporar el estudio del círculo y triángulo rectángulo para formar relaciones entre sus elementos. Adicionalmente, referirse a las nociones trigonométricas (razón y función, razón y función recíproca, razón y función inversa) como sinónimos, a pesar de que matemáticamente son diferentes, se asocia como un síntoma de la carencia de significados que permiten distinguir una noción trigonométrica de otra.

En lo referente al análisis de libros de texto para contenido matemático en general se identifican estudios que se enfocan en los significados que promueven los libros y en la estructura del libro como tal (González y Sierra, 2004). Estudios que realizan análisis de los significados asociados a un concepto matemático (Pino-Fan et al., 2019; Betancur et al., 2021; Larios y Jiménez, 2022).

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1 Descripción de la problemática general

Como fue señalado en el apartado de Antecedentes, en Matemática Educativa se han realizado estudios sobre la construcción de algunas definiciones respecto a la razón y función trigonométrica, tanto de carácter documental como de aplicación. Sin embargo, en cuanto a la razón y función trigonométrica inversa la literatura muestra ausencia de investigación que explique su transformación didáctica, siendo estos conceptos importantes en matemáticas y en los problemas que atienden algunas disciplinas, como la ingeniería, por ejemplo.

El presente estudio se sitúa en la ingeniería por la familiaridad y acceso que se tiene a sus programas en una universidad y la comunicación con colegas de otras universidades. En particular, se identifica una problemática con una revisión inicial de programas de asignaturas de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON, universidad mexicana pública, autónoma): la razón y función trigonométrica inversa están implícitas porque los programas no las declaran, sin embargo, los libros de texto de la bibliografía y sus profesores ejemplifican tareas donde se utiliza esta matemática; en estas tareas se reconoce un significado matemático relacionado a procesos memorísticos que se atribuye al uso de fórmulas.

2.2 Problema de investigación

La orientación del proyecto es una investigación documental acerca de la transformación didáctica de la razón y la función trigonométrica inversa. En particular, centrada en la historia de la enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista didáctico, lo cual requiere de documentos como programas de estudios y libros de texto de distintas épocas, para dar cuenta de los cambios en: su enseñanza (el cómo), de la propia matemática (el qué) y de los significados que se promueven en torno a esta.

La pregunta de investigación es: **¿cuál es la transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa en libros de texto históricos y contemporáneos relacionados con la ingeniería?**

2.3 Justificación

El volumen 45 "Textbook Research in Mathematics Education" de la revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) expone desde un panorama internacional el análisis de libros de texto como objeto de estudio en Matemática Educativa. Las temáticas que se abordan incluyen discusiones metodológicas de cómo realizar el análisis de libros de texto, la comparación entre países respecto a los libros que utilizan y su relación con el rendimiento académico de los estudiantes, el análisis de una muestra de libros de texto respecto a un concepto matemático de interés y la evolución de los libros de texto de matemáticas en un contexto específico. Al respecto, Fan (2013) presenta un marco conceptual sobre los libros de texto de matemáticas y analiza los problemas y métodos contemporáneos para la investigación de libros. El autor identifica la necesidad de ir más allá del análisis y comparación de libros hacia un paradigma de investigación que utilice métodos empíricos y experimentales, de manera que esto permita dar rigor a los estudios sobre libros de texto como investigación científica.

El libro de texto es un instrumento de aprendizaje para el estudiante. Como recurso material transmite conceptos y métodos de las diferentes ciencias, y como recurso didáctico en la enseñanza universitaria es la principal herramienta de trabajo de profesores y estudiantes para el desarrollo de significados (Maturano et al., 2021). En Matemática Educativa el libro de texto es objeto de investigación para estudiar, por ejemplo: el papel del profesorado en el desarrollo e innovación del currículum y la interpretación del currículum oficial que dan las editoriales (Braga-Blanco y Belver-Domínguez, 2016); los significados de conceptos respecto a las estrategias didácticas de enseñanza (Betancur et al., 2021); y para estudiar la transposición didáctica a la que es sometido el conocimiento matemático cuando es llevado a la enseñanza escolarizada (Bravo y Cantoral, 2012).

Generalmente el análisis de libros de texto implica delimitar a una muestra de libros sobre un contenido matemático, a uno o varios niveles educativos y programas de estudios. De aquí que se considera que el análisis didáctico busca comprender el significado en la enseñanza desde diferentes aristas y el análisis histórico-didáctico para comprender la evolución (transformación) de dicho significado en la enseñanza.

Los libros de texto son más que un recurso material que transmite los conceptos y métodos de las diferentes ciencias, constituyen un recurso didáctico potencial para la enseñanza universitaria ya que la mayoría de los docentes utilizan libros de texto como su principal herramienta de trabajo; en consecuencia, las concepciones de los estudiantes acerca del quehacer científico se fundamentan en lo que fomentan estas herramientas (Maturano, Mazzitelli, y Guirado, 2021).

Por ello, con base en lo reportado en los Antecedentes, con la experiencia acumulada como estudiante y profesora de Matemáticas de la autora de esta tesis, se ha decidido realizar este proyecto de investigación considerando que, mediante el análisis de la transformación didáctica en libros de texto a lo largo de la historia, se espera identificar el significado institucional de la razón y función trigonométrica inversa más allá de procesos memorísticos.

2.4 Objetivos

2.4.1 Objetivo general

Identificar los significados que promueven las tareas que se resuelven en libros de texto de ingeniería mediante el reconocimiento de las prácticas que acompañan al trabajo en torno a la razón y función trigonométrica inversa para determinar la transformación didáctica de dicho conocimiento.

2.4.2 Objetivos específicos

- OBE1. Identificar el contexto cultural y situacional de las tareas planteadas en los libros de texto.
- OBE2. Identificar el contexto de significación de la razón o la función trigonométrica inversa de las tareas revisadas en los libros de texto.

- OBE3. Determinar el significado institucional que se promueven en los libros de texto como producto de enseñanza.
- OBE4. Establecer la transformación didáctica del conocimiento matemático en juego.

3. MARCO TEÓRICO

3.1 La Teoría Socioepistemológica

La investigación se realiza desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la cual considera que el conocimiento matemático se construye socialmente por los grupos humanos a través de prácticas. La construcción social del conocimiento matemático tiene validez relativa y contextual, y permite el desarrollo de significados a medida que la matemática es funcional para las personas (Cantoral, 2016).

Las prácticas se estudian y organizan a través de un modelo de anidación. Para el caso de esta investigación se utiliza el nivel pragmático: la práctica a nivel de acción.

> Se analiza la *acción* directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio en su relación con la matemática en juego; desde este momento se pueden ir identificando los *usos del conocimiento*, caracterizados como “las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico” (Cabañas, 2011: 75), “ya sea que el sujeto sea consciente de ello o no, que manipule de manera explícita o implícita, o que utilice representaciones típicamente escolares o propias del contexto” (Rotaeche, 2012: 27); los usos son funcionales porque dan respuesta a la tarea matemática […]. (Torres-Corrales y Montiel, 2020, p. 34)

Mientras que, para analizar la dependencia del contexto, este se estudia en tres niveles: cultural, situacional y de significación.

El contexto cultural da pertenencia a grupos humanos específicos pues se reconoce su dominio en el comportamiento e interacciones sociales de los sujetos o grupos involucrados; mientras que el contexto situacional reconoce la influencia del tiempo, el lugar y las condiciones donde se lleva a cabo la actividad matemática, dichas condiciones las determina el problema que se estudia o pueden ser establecidas mediante un diseño didáctico. El contexto que da forma y sentido a la matemática en juego, lo denominamos contexto de significación. (Torres-Corrales y Montiel, 2020, pp. 32-33).

3.2 El discurso Matemático Escolar

Los fenómenos didácticos mencionados en el apartado de antecedentes están presentes en la investigación de la Matemática Educativa en general, donde se han identificado contratos que condicionan y cambian las relaciones del sistema didáctico en el aula. Una de las nociones de la Teoría Socioepistemológica es el discurso matemático escolar (dME) que permite identificar las reglas (implícitas y explícitas) en el contrato didáctico que ocurren aún con la existencia de rupturas en el mismo, que puestas en uso permiten el desarrollo del significado independientemente del contexto (época, paradigma educativo, región geográfica, etc.) donde se emplea la matemática (Cantoral et al., 2015).

El dME se caracteriza por ir más allá del análisis de los contenidos:

> La estructuración de este discurso no se reduce a la organización de los contenidos matemáticos, ni a su función declarativa en el aula (el discurso escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos (Cantoral et al., 2006, p. 86).

Cantoral et al. (2015) plantean elementos que caracterizan al dME indicando que se relaciona con lo que subyace a lo inmediatamente visible, lo manifiesto, explícito u objetivo, los contenidos y sus concepciones: los planes y programas de estudio, los libros de texto, las explicaciones en el salón de clase, como las ideas de los maestros, de los alumnos y de toda la comunidad académica.

Soto y Cantoral (2014) mencionan que el dME presente en los textos de estudio generan una violencia simbólica, en el sentido de que imponen una única argumentación y que además los significados y procedimientos que nacen de ella giran en torno a los objetos matemáticos, no considerando el papel de los actores (sus prácticas) del sistema didáctico en su construcción.

Referente al dME de la Trigonometría, Montiel y Jácome (2014) reconocen que la causa de estas dificultades no se debe a que "el profesor no domina los conceptos o tiene concepciones erróneas, sino que hay significados de lo trigonométrico que subyacen a su quehacer: significado lineal, significado como división de longitudes, significado como técnica para obtener un valor" (p.1214).

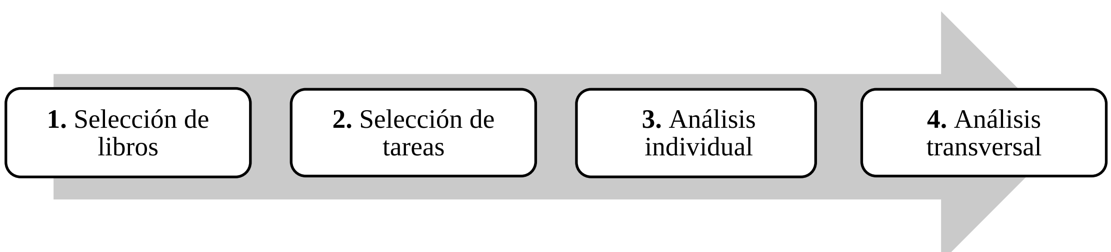
La transformación didáctica parte de la transposición didáctica. La transposición se entiende como el proceso de llevar el conocimiento científico a la escuela para que los estudiantes puedan aprenderlo. Así, producto del dME, cuando el conocimiento está en la escuela tiene una transformación que se identifica por los cambios a lo largo del tiempo de los usos y significados institucionales de la matemática que se promueven por los libros de texto y el actuar del profesor y los estudiantes en el aula.

4. METODOLOGÍA

De los métodos y metodologías de análisis de libros de texto de la revisión bibliográfica del apartado Antecedentes y de estudios de Historia de la Educación Matemática –en particular del Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática (CIHEM) y de la Revista de História da Educação Matemática (Histemat)–, se configura una metodología de análisis histórico-didáctico de libros de texto que consta de cuatro fases. De acuerdo con los intereses de la investigación en la fase uno se establecen los criterios de inclusión de los libros, en la fase dos se seleccionan las tareas representativas a analizar, en la fase tres se realiza un análisis individual de las tareas mediante un instrumento que puede ser retomado de otras investigaciones o diseñado por el investigador –siempre y cuando haya compatibilidad teórica entre los referentes y la investigación–, y en la fase cuatro se realiza un análisis transversal con el cual se triangula el análisis individual de los libros para dar respuesta al objeto de estudio (figura 1).

Figura 1

Metodología de análisis histórico-didáctico de libros de texto



Fuente: elaboración propia.

Con la finalidad de mantener coherencia a lo largo del desarrollo de la investigación, la metodología recibe retroalimentación a medida que se ejecuta, por lo que la realización de una fase permite hacer ajustes en las fases previas y posteriores según se necesite.

4.1 Fase 1. Selección de libros

Dado el objeto de estudio de la presente investigación, la transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa en libros de texto, relacionados con la ingeniería, y con la finalidad de mantener coherencia con las decisiones metodológicas del planteamiento del estudio, la revisión de literatura, la teoría y la metodología, la muestra de libros fue intencional dado el acceso a estos y mediante la triangulación de tres criterios de inclusión que se comentan enseguida.

1) Los libros de texto de contenido trigonométrico que indica la revisión bibliográfica del apartado de Antecedentes (Análisis de libros de texto para contenido trigonométrico) de asignaturas de Matemáticas del nivel superior.
2) Los libros de la bibliografía de las asignaturas de Matemáticas que declaran los programas de estudio de ingeniería del ITSON, universidad donde una de las autoras es profesora.
3) Los libros que recomiendan profesores-investigadores que imparten asignaturas de Matemáticas en ingeniería, en particular los miembros fundadores del grupo latinoamericano Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa (www.grupofime.org.mx), quienes coinciden en tener presente en sus universidades (tres instituciones mexicanas, dos públicas y una privada; y dos universidades públicas de Latinoamérica, Guatemala y Colombia) la problemática de la revisión inicial de las asignaturas de Matemáticas de ITSON: las tareas donde se emplean la razón y función trigonométrica inversa tienen un significado matemático relacionado a procesos memorísticos que se atribuye al uso de fórmulas.

Se procedió a recopilar en formato electrónico los libros señalados en los criterios de inclusión, para posteriormente elegir aquellos que en su contenido incluyen tareas que utilizan la razón y función trigonométrica inversa. Los libros se clasificaron en dos categorías según su contexto: históricos (ocho libros) y contemporáneos (siete libros), los cuales se ubican entre los siglos XIX, XX y XXI (tabla 1).

Tabla 1

Libros de texto de ingeniería seleccionados para el análisis.

Nombre del libro		Año	Autor	Tipo de tarea	Tema	Páginas
Históricos	Plane and Spherical Trigonometry	1875	Chauvenet	Expositiva	Funciones trigonométricas inversas	41
	Elementary Trigonometry	1906	S. R. Knight	Expositiva	Funciones circulares inversas	238
	A Course of Pure Mathematics	1921	Godfrey Harold (Hardy)	Ejemplo	Relación entre el logaritmo y el inverso de las funciones trigonométricas	518 y 519
	Higher Trigonometry	1944	B. N Mukherjee Das B.C	Expositiva	Funciones circulares inversas	21 y 31
	Algebra y funciones elementales	1978	Kalnin	Expositiva	Funciones trigonométricas inversas.	248 y 249
	Cálculo I	1984	Tom Apostol	Expositiva	Funciones trigonométricas inversas	310
	Trigonometric functions (Problem Solving Approach)	1988	Panchishkin y Shavgulidze	Expositiva	Funciones trigonométricas inversas	32
	Cálculo infinitesimal	1992	Michael Spivac	Expositiva	Límites y derivadas de las funciones trigonométricas inversas	439
Contemporáneos	Geometría Plana y del Espacio	2004	Baldor	Ejemplo	Aplicación de los logaritmos	406
	Cálculo I	2010	Ron Larson Bruce Edwards	Ejemplo	Funciones trigonométricas inversas	374
	Cálculo de una variable	2010	James Stewart	Expositiva	Funciones trigonométricas inversas, limites	216
	Cálculo con Trascendentes Tempranas	2011	Denis G. Zill	Expositiva Ejemplo	Funciones trigonométricas inversas y sus propiedades	43
	Cálculo aplicado. Competencias matemáticas a través de Contextos tomo 1	2012	Norma Patricia Salinas y colaboradores	Expositiva	Funciones trigonométricas inversas	428

Fuente: elaboración propia.

4.2 Fase 2. Selección de tareas

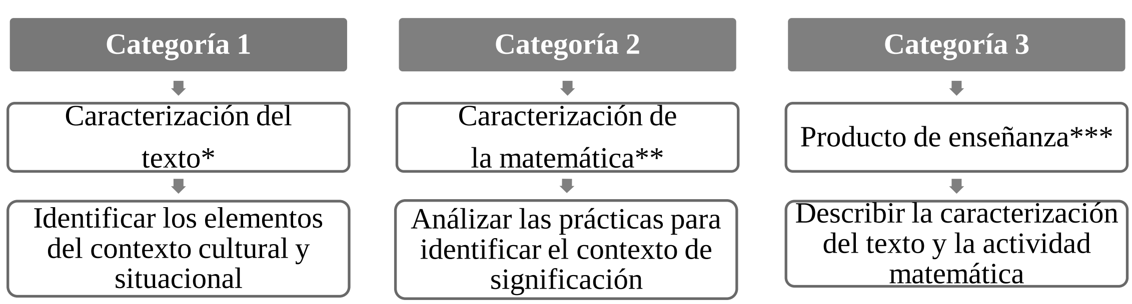
En la tabla 1 se muestra la selección final de tareas de los libros de texto mediante la identificación de conceptos y páginas donde se usa la razón y función trigonométrica inversa. La selección de tareas tuvo como criterio de inclusión una clasificación del tipo de tareas por la actividad matemática que se realiza en los libros: expositivas y de ejemplos de acuerdo con Love y Pimm (1996). Las *tareas expositivas* señalan definiciones y demostraciones que se entienden como formas de evidenciar el significado de la matemática, en ellas los autores expresan la influencia de las teorías de aprendizaje para presentar conceptos. Mientras que las *tareas a modo de ejemplo* desarrollan problemas intramatemáticos y extramatemáticos que se entienden como formas de evidenciar el uso de la matemática, en ellas los autores expresan formas de poner en práctica la matemática de manera que brindan un modelo para ser imitado en los ejercicios y problemas que luego se plantean.

4.3 Fase 3. Análisis individual

El instrumento de análisis de tareas en libros de texto fue construido con base en investigaciones de la Teoría Socioepistemológica y de la Historia de la Educación Matemática. El instrumento consta de tres categorías secuenciales (figura 2) de análisis que recopila elementos teóricos y de contenido trigonométrico: caracterización del texto, caracterización de la matemática y producto de enseñanza.

Figura 2

Categorías del instrumento de análisis histórico-didáctico de libros para el estudio de la razón y función trigonométrica inversa.



Fuente: construido con base en (*Maz-Machado, 2005; *León-Mantero et al., 2019; *Maturano et al., 2021; **Mesa y Goldstein, 2017; **Torres-Corrales y Montiel, 2020; *** Cantoral et al., 2014).

En la categoría 1 se identifican cinco elementos del contexto situacional y cinco elementos del contexto cultural del libro de texto. Los temas previos y temas posteriores reflejan la organización de contenidos propios del libro y cómo estos influyen en la forma de usar la razón o función trigonométrica inversa. Mientras, la estructura didáctica señala el tipo de discurso del libro de acuerdo con la época en que fue escrito, de ahí que se identifique que algunos libros emplean, por ejemplo, gráficas y tablas de valores de senos y cosenos en sus anexos (figura 3).

Figura 3

Categoría 1 del instrumento de análisis histórico-didáctico de tareas en libros de texto para la razón y función trigonométrica inversa.

Caracterización del texto	**Contexto situacional**				
	Título:				
	Autor:				
	Datos numéricos:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas	
	Temas previos:				
	Temas posteriores:				
	Contexto cultural				
	Idioma del libro:				
	Nacionalidad del autor:				
	Influencias del autor:				
	Destinatarios:				
	Estructura didáctica:	Verbal	Simbólica	Ilustrativa	Anexos

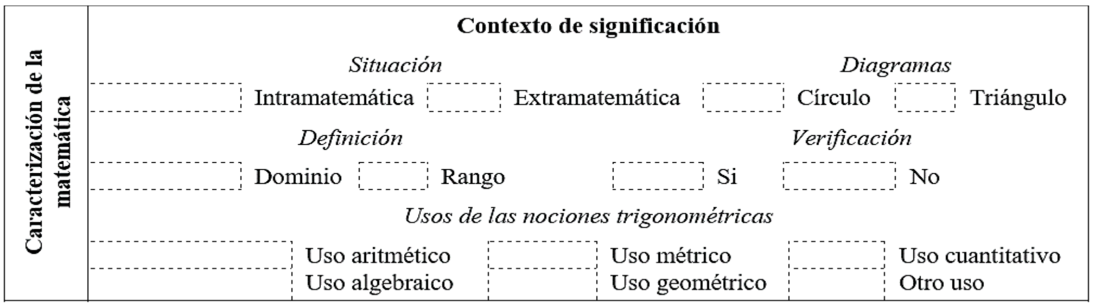
Fuente: construido con base en (Maz-Machado, 2005; León-Mantero et al., 2019; Maturano et al., 2021)

En la categoría 2 se identifica el contexto de significación de cada tarea que propone el libro de texto. Para ello se señalan cinco elementos que permiten analizar las prácticas mediante el uso de la razón o función trigonométrica inversa. La presencia o ausencia de estos elementos no es fundamental, sino el entender en qué condiciones de la tarea se da el uso de la razón y función trigonométrica inversa: ¿es una situación matemática o de aplicación de problemas?, ¿se utilizan diagramas?, si es así, ¿incluyen círculos y triángulos?,

¿se especifica el dominio y rango de la función?, ¿hay un proceso de verificación de lo que se define o de la solución a la que se llega? (figura 4).

Figura 4

Categoría 2 del instrumento de análisis histórico-didáctico de tareas en libros de texto para la razón y función trigonométrica inversa



Fuente: construido con base en Mesa y Goldstein, 2017; Torres-Corrales, 2020; Torres-Corrales y Montiel, 2020.

Se retoman los usos de las nociones trigonométricas que identifican Torres-Corrales (2020) y Torres-Corrales y Montiel (2020) en un programa de Ingeniería Mecatrónica, cuando el profesor y los estudiantes resuelven problemas de Robótica Industrial, puesto que estos son los más cercanos a nuestro estudio, así como producto de análisis de prácticas de ingeniería al ubicarse en el último año de formación. Se agrega la subcategoría otros usos para incluir usos particulares que se identifiquen mediante el presente análisis histórico-didáctico de libros.

- *Uso aritmético*, cuando se realizan operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división, sobre todo al dividir longitudes que permiten resolver una tarea.
- *Uso algebraico*, cuando se realizan operaciones con símbolos que no pueden entenderse utilizando operaciones básicas, sobre todo al operar con cantidades simbólicas para resolver la tarea.
- *Uso métrico*, cuando se emplea una convención particular para definir y resolver la tarea.

- *Uso geométrico*, cuando se identifican propiedades, se hacen relaciones o se construyen modelos que permiten resolver la tarea.
- *Uso cuantitativo*¸ cuando se identifica que las cantidades que se operan provienen de la Trigonometría (triángulo rectángulo, círculo, gráficas de funciones trigonométricas) y estas permiten resolver la tarea.

Finalmente, en la categoría 3 se retoman los resultados de las categorías 1 y 2 para especificar el producto de enseñanza que promueve el libro. Se hace una síntesis de lo que se identifica en el análisis de la caracterización del texto y de la caracterización de la matemática para interpretar los significados que promueve el libro de texto de la razón o la función trigonométrica inversa (figura 5).

Figura 5

Categoría 3 del instrumento de análisis histórico-didáctico de tareas en libros de texto para la razón y función trigonométrica inversa.

Producto de enseñanza	*Análisis de la caracterización del texto*
	Análisis de la caracterización de la matemática
	Significados que promueve el libro de texto

Fuente: Elaboración propia.

Para identificar los significados que promueve el libro de texto se analizaron las definiciones de los objetos matemáticos (razón y función trigonométrica) y las investigaciones reportadas en los Antecedentes donde se reconocieron usos y características de la razón y la función trigonométrica (tabla 2).

La razón trigonométrica tiene un uso como herramienta que permite estudiar y cuantificar la relación entre un ángulo central, en el círculo, y la cuerda que subtiende; y el uso de la función trigonométrica como herramienta predictiva de comportamientos periódicos y acotados, cuyas variaciones son de la misma naturaleza que dicho comportamiento (Scholz y Montiel, 2018).

La razón también la entendemos como la relación entre la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo, mientras que para la función hablamos de “distancias dirigidas” en un plano cartesiano (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021).

Por lo tanto, nos referimos a un pensamiento geométrico para la construcción de la razón trigonométrica desde el triángulo rectángulo y el círculo unitario y a un pensamiento variacional para trabajar con la función trigonométrica desde el círculo unitario. Lo variacional hace referencia a diferenciar el comportamiento de la función trigonométrica del comportamiento de otras funciones mediante el análisis de cada una de las variaciones y a identificar como va cambiando y como cambian sus cambios. Lo periódico indica que desde la predicción se debe observar qué se repite y cómo se repite, lo que permitirá continuar con el comportamiento de la función. Lo acotado, se origina al analizar el tipo de movimiento en un contexto dinámico; dicho movimiento debe estar unido a condiciones iniciales particulares que genere el uso de lo acotado (Montiel, 2005; Montiel, 2011).

La importancia del contexto contribuye a reconocer la unidad de medida y a hacer el uso correcto en las tareas analizadas, dado esto, podemos reconocer que si hay un uso del ángulo estaremos hablando de razón trigonométrica (ecuaciones e identidades) y de argumento para la función trigonométrica.

Tabla 2

Características de la razón y función trigonométrica inversa

Razón trigonométrica	**Función trigonométrica**
Pensamiento Geométrico	Pensamiento Variacional
Concepción desde el triángulo rectángulo y el círculo unitario	Concepción desde el círculo unitario
Contexto estático-proporcional	Contexto dinámico-periódico

Sen $\boldsymbol{\theta}$	Sen x
Angulo θ Medido en: Grados y Radianes	Argumento Medido en radian-real Existe un dominio y un rango
Sen $\boldsymbol{\theta}$	**Sen x**
Longitud	Distancia

Fuente: construido con base en Montiel, 2005; Mesa y Goldstein, 2017; Scholz y Montiel, 2018; Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021)

4.4 Fase 4. Análisis transversal

El análisis transversal hace referencia a la triangulación del análisis individual de las tareas para sintetizar el producto de enseñanza e identificar la transformación didáctica de la matemática de interés en tanto significado institucional que se promueve.

4.4.1 Validación del análisis

La triangulación de los análisis individuales de las tareas de los libros de texto y el control cruzado con los investigadores para realizar el análisis de las tres categorías genera una confiabilidad en los resultados. En un primer momento fueron revisados por la asesora de tesis, la Dra. Diana del Carmen Torres Corrales, quien es usuaria de la teoría y ha realizado trabajos en la línea de investigación. También algunos ejemplos fueron revisados en el arbitraje de un artículo de investigación aceptado. Posteriormente, revisaron el análisis de cada tarea el Dr. Jesús Eduardo Hinojos Ramos y el Dr. Alberto Camacho Ríos, que son expertos en análisis histórico-epistemológico de obras científicas.

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS

5.1 Análisis de tareas de libros históricos

Figura 6

Tarea 1. Funciones trigonométricas inversas

INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS.

87. If

$$y = \sin x$$

y is an *explicit* function of x, and, since x and y are mutually dependent, x is an *implicit* function of y; but to express x in the form of an explicit function of y, we write*

$$x = \sin^{-1} y$$

which is read, "x equal to the angle (or arc) whose sine is y," and x is called the *inverse function* of y, or of sine x.

In like manner $\tan^{-1} y$ is "the angle or arc whose tangent is y," &c.

88. Many of the formulæ already given may be conveniently expressed with the aid of this notation. Thus, by (16),

$$x = \sec^{-1} \sqrt{(1 + \tan^2 x)}$$

or if we put $y = \tan x$

$$\tan^{-1} y = \sec^{-1} \sqrt{(1 + y^2)}$$

Fuente: adaptada de "Inverse Trigonometric Functions" por Chauvenet, 1875, *Plane and Spherical Trigonometry*, p.41.

Cuadro 1

Análisis de la tarea 1 de funciones trigonométricas inversas de Chauvenet (1875)

Caracterización del texto	**Contexto situacional**			
	Título:	Plane and Spherical Trigonometry		
	Autor:	William Chauvenet		
	Datos numéricos:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas
		1875	XIX	41
	Temas previos:	Relaciones de tres ángulos		

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Temas posteriores: Método elemental de construcción de la tabla trigonométrica</td></tr>
<tr><td>Contexto cultural
Idioma del libro: Inglés
Nacionalidad del autor: Estadounidense
Influencias del autor: Bessel, Gauss
Destinatarios: Académicos y estudiantes de educación superior
Estructura didáctica: Verbal [x] Simbólica [x] Ilustrativa [ ] Anexos [ ]</td></tr>
<tr><td>Caracterización de la matemática</td><td>Contexto de significación
Situación: [x] Intramatemática [ ] Extramatemática
Diagramas: [ ] Círculo [ ] Triángulo
Restricciones: [ ] Dominio [ ] Rango
Verificación: [x] Si [ ] No
Usos de las nociones trigonométricas
[ ] Uso aritmético [x] Uso métrico [ ] Uso cuantitativo
[x] Uso algebraico [ ] Uso geométrico [ ] Otro uso</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Producto de enseñanza</td><td>Análisis de la caracterización del texto
En el texto se definen las razones arcoseno y arcotangente de forma verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (emplea un lenguaje simbólico para expresar el valor del ángulo x).</td></tr>
<tr><td>Análisis de la caracterización de la matemática
La tarea presentada en es de tipo expositiva en un contexto intramatemático. El autor define las funciones arcoseno y arcotangente, sin embargo, al hacer nombrar a “x” como el ángulo o arco se reconoce un uso de la razón trigonométrica inversa.

En la explicación se identifica un uso métrico ya que se da la definición de las razones arcoseno y arcotangente, pero no de dónde provienen o cómo se construyen.

Se identifica un uso algebraico al sustituir $\sec^2 x$ por $\sqrt{1+\tan^2 x}$ para definir el valor del ángulo como $x = \sec^{-1}x(1+\tan^2 x)$,
Así mismo $y = \tan x$ entonces $x = \tan^{-1} y$
Por lo tanto, la ecuación anterior la expresa como $\tan^{-1} y = \sec^{-1}(\sqrt{1+y^2})$.

Nota: En el texto habla de función trigonométrica inversa, sin embargo, al tratarse de ecuaciones e identidades trigonométricas identificamos un uso de la razón trigonométrica.</td></tr>
<tr><td>Significados que promueve el libro de texto
Arcoseno y arcotangente como razones trigonométricas inversas.</td></tr>
</table>

Figura 7

Tarea 2. Funciones circulares inversas de seno y tangente

Inverse Circular Functions.

244. If $\sin\theta = s$, we know that θ may be *any* angle whose sine is s. It is often convenient to express this statement *inversely* by writing $\theta = \sin^{-1} s$.

In this *inverse notation* θ stands alone on one side of the equation, and may be regarded as an angle whose value is only known through the medium of its sine. Similarly, $\tan^{-1}\sqrt{3}$ indicates in a concise form any one of the angles whose tangent is $\sqrt{3}$. But all these angles are given by the formula $n\pi + \frac{\pi}{3}$. Thus

$$\theta = \tan^{-1}\sqrt{3} \quad \text{and} \quad \theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$$

are equivalent statements expressed in different forms.

245. Expressions of the form $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} a$, $\tan^{-1} b$ are called **Inverse Circular Functions.**

It must be remembered that these expressions denote angles, and that -1 *is not an algebraical index*; that is,

$$\sin^{-1} x \textit{ is not the same as } (\sin x)^{-1} \textit{ or } \frac{1}{\sin x}.$$

Fuente: adaptada de "Inverse Circular Functions" por Sinclair y Knight, 1875, *Elementary Trigonometry*, p. 238.

Cuadro 2

Análisis de la tarea 2 de funciones circulares inversas de Sinclair y Knight (1906)

Caracterización del texto		**Contexto situacional**		
	Título:	Elementary Trigonometry		
	Autor:	Henry Sinclair Hall y Samuel Ratcliffe Knight		
	Datos numéricos:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas
		1906	XIX	238
	Temas previos:	Solución general de ecuaciones		
	Temas posteriores:	Solución de ecuaciones expresadas en notación inversa		
		Contexto cultural		
	Idioma del libro:	Inglés		

<table>
<tr><td></td><td>Nacionalidad del autor: Brasileño y británico
Influencias del autor:
Destinatarios: Académicos
Estructura didáctica: Verbal: x | Simbólica: x | Ilustrativa: | Anexos: x</td></tr>
<tr><td>Caracterización de la matemática</td><td>Contexto de significación
Situación: [x] Intramatemática [ ] Extramatemática
Diagramas: [ ] Círculo [ ] Triángulo
Restricciones: [ ] Dominio [ ] Rango
Verificación: [x] Si [ ] No
Usos de las nociones trigonométricas
[ ] Uso aritmético [x] Uso métrico [ ] Uso cuantitativo
[ ] Uso algebraico [ ] Uso geométrico [ ] Otro uso</td></tr>
<tr><td>Producto de enseñanza</td><td>Análisis de la caracterización del texto
En el texto se definen las razones arcoseno y arcotangente de forma verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (emplea un lenguaje simbólico para expresar el valor del ángulo θ).

El libro de texto presenta anexos para el tema de funciones trigonométricas, un apartado donde se encuentran las tablas de logaritmos y las tablas de logaritmos de las funciones trigonométricas, también se encuentra en los anexos las respuestas a los ejercicios que se plantean sobre las funciones trigonométricas inversas.</td></tr>
<tr><td></td><td>Análisis de la caracterización de la matemática
La tarea analizada es de tipo expositiva, se desarrolla en un contexto matemático en el que explica la razón arcoseno como la expresión inversa $\theta = \mathrm{sen}^{-1}\mathrm{s}$ de la notación sen θ= s, donde el valor del ángulo se puede conocer a través de su seno. La tarea se puede verificar mediante el ejemplo presentado para calcular el ángulo dado $\tan^{-1}\sqrt{3}$.

Se presenta un uso métrico al emplear una convención particular para definir y resolver la tarea $\tan^{-1}\sqrt{3} = \theta$ ya que el valor de θ seidentifica partiendo de la definición de la razón tangente, pues por definición se sabe que del valor de θ puede ser cualquiera de los valores cuya tangente sea $\sqrt{3}$, así mismo, al definir la ecuación que representa los valores que satisfacen que su tangente sea $\sqrt{3}$ donde los valores equivalentes a θ están expresados por la ecuación θ= $n\pi + \frac{\pi}{3}$.

La tarea hace énfasis en el lenguaje correcto para las razones trigonométricas inversas donde el símbolo -1 que acompaña al seno ($sen^{-1}x$) no hace referencia a una propiedad de la ley de los exponentes como si ocurre cuando se define las funciones trigonométricas recíprocas $(\mathrm{sen}\ \mathrm{x})^{-1} = \frac{1}{\mathrm{sen}\ \mathrm{x}}$.

Nota: En el texto considera la función trigonométrica inversa, sin embargo, al hablarse de ángulo y no del argumento los conceptos que se identifican son la razón arcoseno y la razón arcotangente.</td></tr>
<tr><td></td><td>Significados que promueve el libro de texto
Arcoseno y arcotangente como razones circulares inversas.
Arcotangente como una razón de valores múltiples.</td></tr>
</table>

Figura 8

Tarea 3. Relación entre el logaritmo y las funciones trigonométricas inversas

231. The connection between the logarithmic and the inverse trigonometrical functions. We found in Ch. VI that the integral of a rational or algebraical function $\phi(x, \alpha, \beta, \dots)$, where α, β, $\dots$ are constants, often assumes different forms according to the values of α, β, $\dots$; sometimes it can be expressed by means of logarithms, and sometimes by means of inverse trigonometrical functions. Thus, for example,

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{x}{\sqrt{\alpha}} \tag{1}$$

if $\alpha > 0$, but

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{-\alpha}} \log \left| \frac{x-\sqrt{-\alpha}}{x+\sqrt{-\alpha}} \right| \tag{2}$$

if $\alpha < 0$. These facts suggest the existence of some functional connection between the logarithmic and the inverse circular functions. That there is such a

[X : 231] EXPONENTIAL, AND CIRCULAR FUNCTIONS 519

connection may also be inferred from the facts that we have expressed the circular functions of ζ in terms of $\exp i\zeta$, and that the logarithm is the inverse of the exponential function.

Let us consider more particularly the equation

$$\int \frac{dx}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \log \left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha} \right),$$

which holds when α is real and $(x-\alpha)/(x+\alpha)$ is positive. If we could write $i\alpha$ instead of α in this equation, we should be led to the formula

$$\arctan \left(\frac{x}{\alpha} \right) = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{x-i\alpha}{x+i\alpha} \right) + C, \tag{3}$$

where C is a constant, and the question is suggested whether, now that we have defined the logarithm of a complex number, this equation will not be found to be actually true.

Now (§ 221)

$$\operatorname{Log}(x \pm i\alpha) = \tfrac{1}{2}\log(x^2+\alpha^2) \pm i(\phi + 2k\pi),$$

where k is an integer and ϕ is the numerically least angle such that $\cos\phi = x/\sqrt{x^2+\alpha^2}$ and $\sin\phi = \alpha/\sqrt{x^2+\alpha^2}$. Thus

$$\frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{x-i\alpha}{x+i\alpha} \right) = -\phi - l\pi,$$

where l is an integer, and this does in fact differ by a constant from any value of $\arctan(x/\alpha)$.

The standard formula connecting the logarithmic and inverse circular functions is

$$\arctan x = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1+ix}{1-ix} \right), \tag{4}$$

where x is real. It is most easily verified by putting $x = \tan y$, when the right-hand side reduces to

$$\frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{\cos y + i \sin y}{\cos y - i \sin y} \right) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}(\exp 2iy) = y + k\pi,$$

Fuente: adaptada de “The connection between the logarithmic and the inverse trigonometrical functions” por Sinclair y Knight, 1921, *A Course of Pure Mathematics*, p. 518-519.

Cuadro 3

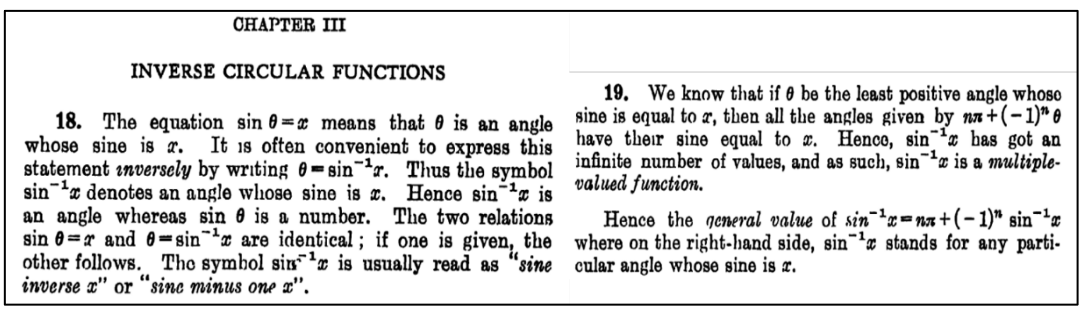
Análisis de la tarea 3 de la relación entre el logaritmo y las funciones trigonométricas inversas de Hardy (1921)

Caracterización del texto	**Contexto situacional**				
	Título:	A Course of Pure Mathematics			
	Autor:	Godfrey Harold (Hardy)			
	Datos numéricos:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas	
		1921	XIX	518 y 519	
	Temas previos:	Las funciones hiperbólicas generalizadas.			
	Temas posteriores:	La serie de potencias para exp z.			
	Contexto cultural				
	Idioma del libro:	Inglés			
	Nacionalidad del autor:	Británico			
	Influencias del autor:	Augustus Edward Hough Love y E. T. Whittaker			
	Destinatarios:	Académicos y estudiantes Nivel superior			
	Estructura didáctica:	Verbal	Simbólica	Ilustrativa	Anexos
		x	x		x
Caracterización de la matemática	**Contexto de significación**				
	Situación	x Intramatemática	Extramatemática		
	Diagramas	Círculo	Triángulo		
	Restricciones	Dominio	Rango		
	Verificación	x Si	No		
	Usos de las nociones trigonométricas	Uso aritmético	x Uso métrico	Uso cuantitativo	
		Uso algebraico	Uso geométrico	Otro uso	
Producto de enseñanza	*Análisis de la caracterización del texto* La tarea presentada es a modo de ejemplo. El autor explica la relación que existe entre el logaritmo y función trigonométrica inversa arcotangente utilizando una estructura didáctica de forma verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar las funciones). En el apartado de anexos presenta apéndices con información complementaria a los temas.				
	Análisis de la caracterización de la matemática La tarea presentada es a modo de ejemplo en un contexto matemático. En el ejemplo presentado, el autor hace uso de la definición de la integral de una función racional o algebraica, la cual puede				

	expresarse de diferentes maneras dependiendo de sus constantes, algunas veces como logaritmo y otras veces como funciones trigonométricas inversas. En el ejemplo vemos que el autor hace un uso ***métrico*** al utilizar la definición de derivada de la función arcotangente para calcular la integral de la función planteada, la definición de la función inversa de la función exponencial (la función logaritmo), así mismo se identifica un uso ***algebraico*** al sustituir α por un iα obteniendo la ecuación $\arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1-\alpha i}{1+\alpha i}\right) + c$, luego, por definición de logaritmo de un número complejo es posible llegar a la fórmula estándar que conecta al logaritmo con la función trigonométrica inversa: $\arctan(x) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1-xi}{1+xi}\right)$ donde x es real. La tarea se verifica al sustituir el valor de x por *tan y* pues se sabe por definición de función inversa, que si:$\arctan(x) = y$ entonces $x = \tan y$ y $\tan y = \frac{\text{sen x}}{\text{sen y}}$, por lo tanto, aplicando nuevamente un uso ***algebraico*** y las propiedades de los logaritmos se obtiene la ecuación: $\frac{1}{2i}\log\left(\frac{\cos y + i\,\text{sen}\,y}{\cos y - i\,\text{sen}\,y}\right) = \log(\exp 2iy) = y + k\pi$ Concluyendo que arctan x = y
	Significados que promueve el libro de texto La función arcotangente como la integral de una función racional o algebraica. La función arcotangente como logaritmo de una función.

Figura 9

Tarea 4. Función circular inversa del seno



CHAPTER III

INVERSE CIRCULAR FUNCTIONS

18. The equation $\sin\theta = x$ means that θ is an angle whose sine is x. It is often convenient to express this statement *inversely* by writing $\theta = \sin^{-1}x$. Thus the symbol $\sin^{-1}x$ denotes an angle whose sine is x. Hence $\sin^{-1}x$ is an angle whereas $\sin\theta$ is a number. The two relations $\sin\theta = x$ and $\theta = \sin^{-1}x$ are identical; if one is given, the other follows. The symbol $\sin^{-1}x$ is usually read as "*sine inverse x*" or "*sine minus one x*".

19. We know that if θ be the least positive angle whose sine is equal to x, then all the angles given by $n\pi + (-1)^n\theta$ have their sine equal to x. Hence, $\sin^{-1}x$ has got an infinite number of values, and as such, $\sin^{-1}x$ is a *multiple-valued function*.

Hence the *general value* of $\sin^{-1}x = n\pi + (-1)^n \sin^{-1}x$ where on the right-hand side, $\sin^{-1}x$ stands for any particular angle whose sine is x.

Fuente: adaptada de "Inverse Circular Functions" por Mukherjee y Das, 1944, *Higher Trigonometry*, p.21.

Cuadro 4

Análisis de la tarea 4 de la función circular inversa del seno de Mukherjee y Das (1944)

Caracterización del texto	**Contexto situacional**				
	Título:	Higher Trigonometry			
	Autor:	B. N Mukherjee y B.C. Das. M SC			
	Datos numéricos:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas	
		1944	XIX	21	
	Temas previos:	Ángulos submúltiplos			
	Temas posteriores:	Propiedades de los triángulos			
	Contexto cultural				
	Idioma del libro:	Inglés			
	Nacionalidad del autor:	Indio			
	Influencias del autor:	Prof. B. B. Mandal, M. Sc. del Scottish Church College, Prof. G. D. Bhar, M. Sc. de Presidency College			
	Destinatarios:	Estudiantes universitarios			
	Estructura didáctica:	Verbal	Simbólica	Ilustrativa	Anexos
		X	x		x
Caracterización de la matemática	**Contexto de significación**				
	Situación		*Diagramas*		
	[x] Intramatemática	[ ] Extramatemática	[ ] Círculo	[ ] Triángulo	
	Restricciones		*Verificación*		
	[ ] Dominio	[ ] Rango	[ ] Si	[x] No	
	Usos de las nociones trigonométricas				
	[ ] Uso aritmético	[x] Uso métrico	[ ] Uso cuantitativo		
	[ ] Uso algebraico	[ ] Uso geométrico	[ ] Otro uso		
Producto de enseñanza	*Análisis de la caracterización del texto* En el texto se define la razón arcoseno de forma verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (emplea un lenguaje simbólico para expresar el valor del ángulo la ecuación trigonométrica (razón trigonométrica) que representa el valor de θ. Se presenta en los Anexos las respuestas de los ejercicios que se plantean sobre las funciones trigonométricas.				

	Análisis de la caracterización de la matemática La tarea es de tipo expositiva en un contexto matemático. El autor presenta la introducción de las funciones circulares inversas, sin embargo, se identifica un tratamiento del arcoseno como razón y no como función ya que por definición de ecuación a un número le corresponde otro número lo que no ocurre con la función donde existe un dominio y un rango. Así, el autor hace un uso del ángulo, por lo tanto, no se reconoce una función trigonométrica inversa en la definición. Se identifica uso ***métrico*** al emplear una convención particular para definir y resolver la tarea de la razón arcoseno mediante la ecuación ($\mathrm{sen}^{-1}x = n\pi + (-1)^n\ \mathrm{sen}^{-1}x$).
	Significados que promueve el libro de texto Arcoseno como razón trigonométrica inversa de valores múltiples.

Figura 10

Tarea 5. Las Razones arcoseno y arcocosecante

20. **From the definition, it at once follows that**

$$\theta = \sin^{-1} \sin\theta, \text{ and } x = \sin \sin^{-1} x.$$

For if $\sin\theta = x$, **then** $\theta = \sin^{-1} x = \sin^{-1} \sin\theta$,

Let $\operatorname{cosec}^{-1} x = \theta$; **then** $\operatorname{cosec}\theta = x$.

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1}{x}.$$

Hence $\theta = \sin^{-1}\frac{1}{x}$, **and therefore** $\operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}\frac{1}{x}$.

In the same way, we have, $\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x} = \sin^{-1} x$.

The other relations follow similarly.

Fuente: adaptada de "Inverse Circular Functions" por Mukherjee y Das, 1944, *Higher Trigonometry*, p. 31.

Cuadro 5

Análisis de la tarea 5 de las razones arcoseno y arcocosecante de Mukherjee y Das (1944)

Caracterización del texto

Contexto situacional

Título:	Higher Trigonometry
Autor:	B. N Mukherjee y B.C. Das. M SC

Datos numéricos:

Año	Siglo	Páginas seleccionadas
1944	XIX	22

Temas previos:	Ángulos submúltiplos
Temas posteriores:	Propiedades de los triángulos

Contexto cultural

Idioma del libro:	Inglés
Nacionalidad del autor:	Indio
Influencias del autor:	Prof. B. B. Mandal, M. Sc. del Scottish Church College, Prof. G. D. Bhar, M. Sc. de Presidency College y al Prof. B. N. Pal, M. A. de St. Xavier's College.
Destinatarios:	Estudiantes universitarios

Estructura didáctica:

Verbal	Simbólica	Ilustrativa	Anexos
x	x		x

Caracterización de la matemática

Contexto de significación

Situación

x	Intramatemática
	Extramatemática

Diagramas

	Círculo
	Triángulo

Restricciones

	Dominio
	Rango

Verificación

x	Si
	No

Usos de las nociones trigonométricas

	Uso aritmético	x	Uso métrico		Uso cuantitativo
x	Uso algebraico		Uso geométrico	x	Otro uso

Producto de enseñanza

Análisis de la caracterización del texto

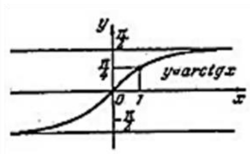
El texto presenta una estructura didáctica verbal y simbólica para expresar las relaciones seno, arcoseno, cosecante y arcocosecante.

Presenta en sus Anexos las respuestas de los ejercicios que se plantean sobre las funciones trigonométricas.

	Análisis de la caracterización de la matemática La tarea es de tipo expositiva, está dada en un contexto matemático. El autor explica la relación que existe entre la razón seno y su inversa al expresar que el valor del ángulo como $\theta = \text{sen}^{-1}\text{x} = \text{sen}^{-1}\text{sen}\theta$, donde $\theta = \text{senx}$ en el cual se identifica un uso ***métrico*** dado que utiliza la definición, pero no explica de dónde proviene. Así mismo se reconoce un uso de la razón arcoseno como ***operador inverso*** de la razón seno. Se presenta un uso ***algebraico*** al despejar en la identidad trigonométrica (sen θ·cosec θ=1) para expresar la razón recíproca del seno (cosecante), donde $\text{cosec}\ \theta = \text{x}$ de esta manera $\text{sen}\theta = \frac{1}{\text{cosec}\ \theta} = \frac{1}{\text{x}}$
	Significados que promueve el libro de texto La razón sen^{-1} x como operador inverso de la razón sen θ. La razón $cosec^{-1}x$=θ , como arcoseno del inverso multiplicativo de x donde $\text{cosec}\ \theta = \text{x}$

Figura 11

Tarea 6. La razón y función arcotangente



CAPITULO XI

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

DEFINICIÓN. La función inversa a la tangente se llama *arco tangente.*
Si $y = \text{tg}\, x$ es la función directa, tendremos que $x = \text{arc tg}\, y$ es la función inversa.
Esta notación hay que entenderla así: "x es un ángulo tal, medido en radianes, tomado en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, cuya tangente es igual al número y". Trasladando las designaciones del argumento y de la función, escribimos la función inversa en la forma $y = \text{arc tg}\, x$. En esta notación el argumento x (tangente) es un número real cualquiera; la función y (ángulo en radianes) es un número cualquiera del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
La propiedad de que las operaciones «tg» y «arc tg» sean inversas se escribe del siguiente modo

$\text{tg}(\text{arc tg}\, x) = x$ (x es un número real cualquiera),

$$\text{arc tg}(\text{tg}\, x) = x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

De este modo

$$\text{tg}(\text{arc tg}\, 2) = 2, \quad \text{tg}[\text{arc tg}(-\pi)] = -\pi;$$

$$\text{arc tg}\left(\text{tg}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}, \text{ pero } \text{arc tg}\left(\text{tg}\frac{3}{4}\pi\right) \neq \frac{3\pi}{4},$$

puesto que el ángulo $\frac{3}{4}\pi$ sale de los límites del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Por eso hay que escribir:
$\text{arc tg}\left(\text{tg}\frac{3}{4}\pi\right) = \text{arc tg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Observación. El conjunto de todos los ángulos (arcos), cuyas tangentes son iguales al número dado x, se designan por $\text{Arc tg}\, x$. De aquí se deduce que la función $y = \text{Arc tg}\, x$ es de valuación multiple:

$\text{Arc tg}\, 1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$,

$\text{Arc tg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + \pi k$,

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

248

Curva de la función $y = \text{arc tg}\, x$

En la fig. 97 se muestra la gráfica de la función $y = \text{arc tg}\, x$. Esta curva coincide con la curva de la función $x = \text{tg}\, y$, cuando el argumento y varía en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Propiedades de la función arc tg x:
1) el argumento x puede ser un número real cualquiera, es decir, la función está definida en todo el eje numérico;
2) el conjunto de valores de la función (y) forma el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
3) la función arc tg x es impar, puesto que $\text{arc tg}(-x) = -\text{arc tg}\, x$; la gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas;
4) la función arc tg x crece en todo su campo de definición; cuando x, al crecer, recorre el eje numérico (eje de abscisas) de izquierda a derecha, los valores de la función aumentan sucesivamente;

Fig. 97.

5) la función arco tangente no tiene valores máximo ni mínimo, si se la considera en todo el eje numérico ($-\infty < x < +\infty$).

249

Fuente: adaptada de "Funciones trigonométricas inversas" por Kalnin y Avgustovich,1978, *Algebra y funciones elementales*, p. 248-249.

Cuadro 6

Análisis de la tarea 6 de la transición de la razón arcotangente a la función arcotangente de Kalnin y Avgustovich (1978)

<table>
<tr><td rowspan="15">Caracterización del texto</td><td colspan="5">Contexto situacional</td></tr>
<tr><td>Título:</td><td colspan="4">Algebra y funciones elementales</td></tr>
<tr><td>Autor:</td><td colspan="4">Kalnin, Robert Avgustovich</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Datos numéricos:</td><td>Año</td><td>Siglo</td><td colspan="2">Páginas seleccionadas</td></tr>
<tr><td>1978</td><td>XIX</td><td colspan="2">248 y 249</td></tr>
<tr><td>Temas previos:</td><td colspan="4">Función directa e inversa</td></tr>
<tr><td>Temas posteriores:</td><td colspan="4">Algunas identidades que se relacionan con las funciones trigonométricas inversas.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contexto cultural</td></tr>
<tr><td>Idioma del libro:</td><td colspan="4">Traducido del ruso al español</td></tr>
<tr><td>Nacionalidad del autor:</td><td colspan="4">Ruso</td></tr>
<tr><td>Influencias del autor:</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Destinatarios:</td><td colspan="4">Instituciones educativas secundarias especializadas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estructura didáctica:</td><td>Verbal</td><td>Simbólica</td><td>Ilustrativa</td><td>Anexos</td></tr>
<tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td rowspan="10">Caracterización de la</td><td colspan="5">Contexto de significación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situación</td><td colspan="3">Diagramas</td></tr>
<tr><td>x Intramatemática</td><td>☐ Extramatemática</td><td>☐ Círculo</td><td colspan="2">☐ Triángulo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Restricciones</td><td colspan="3">Verificación</td></tr>
<tr><td>☐ Dominio</td><td>☐ Rango</td><td>x Si</td><td colspan="2">☐ No</td></tr>
<tr><td colspan="5">Usos de las nociones trigonométricas</td></tr>
<tr><td></td><td>Uso aritmético</td><td>x</td><td>Uso métrico</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Uso cuantitativo</td></tr>
<tr><td></td><td>Uso algebraico</td><td></td><td>Uso geométrico</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="5">Otro uso</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Producto de enseñanza</td><td colspan="5">Análisis de la caracterización del texto
El autor define la función arcotangente de forma verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar el dominio y rango) e ilustrativa (presenta gráficas en el plano cartesiano).

El libro se agrega un Anexo titulado: suplemento fórmulas fundamentales de consulta, en el que se encuentran las tablas de logaritmos, tablas de logaritmos de las funciones trigonométricas y fórmulas de las identidades trigonométricas.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de la caracterización de la matemática
La tarea es de carácter expositiva, sin embargo, el autor se auxilia de algunos ejemplos para reforzar la explicación lo cual permite su verificación.

El autor presenta la transición de la razón trigonométrica inversa a la función trigonométrica inversa. En la información presentada de la página 248 se define la razón trigonométrica inversa pues se habla</td></tr>
</table>

	de x como un ángulo. En esta parte de la tarea se identifica un uso ***métrico*** ya que hace uso de las definiciones para expresar que $\mathrm{arct}(\tan) = \mathrm{x}$. En la segunda parte de la tarea correspondiente a la información de la página 249, se define la función arcotangente dada en un contexto matemático y es posible verificar la explicación en la gráfica. Se realiza una restricción del dominio de la función tangente para definir su inversa. La Tarea presenta un uso ***gráfico*** al representar la gráfica en el plano cartesiano de la función arcotangente para identificar sus propiedades. En la gráfica se observa que el dominio de la función arcotangente corresponde al rango de la función tangente y su rango es el dominio de la función tangente. También son explícitas de manera verbal cuatro propiedades de la función arcotangente, las cuales permiten ver claramente la transición de la razón a la función ya que hace énfasis en que el valor de x se extiende a todos los números reales. La tarea explica la propiedad de las funciones de ser inversas mediante la composición de las funciones arcotangente y tangente donde arctg tiene un uso como operador de composición de funciones de tg que arroja como resultando el argumento de la función. mediante los ejemplos presentados con diferentes argumentos el autor explica cómo calcular el valor del argumento xmediante la definición de composición de funciones, in embargo, con un contraejemplo enseña que no se cumple en todos los casos debido a que el rango de la función arcotangente solo está definida en el intervalo -π/2 a π/2 . Finalmente, el autor define la función arcotangente como una función de valuación múltiple ya que el valor de *y* puede ser expresado por $\mathrm{arc\,tg\,x} + \pi\mathrm{k}$.
	Significados que promueve el libro de texto La razón arcotangente como razón inversa de la tangente. La función arcotangente como la función inversa de la tangente restringida en el intervalo -π/2 a π/2. La función arcotangente como operador inverso de la función tangente restringida que devuelve el valor del argumento de la función tangente. La función arcotangente como una función de valuación múltiple. La función arcotangente como función impar. La función arcotangente como función creciente.

Figura 12

Tarea 7. La definición de la función arcoseno

6.21 Inversas de las funciones trigonométricas

El proceso de inversión se puede aplicar a las funciones trigonométricas. Se empezará por la función seno. Para determinar una inversa única se ha de

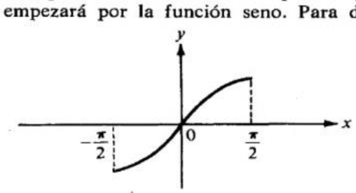


FIGURA 6.9 $y = \text{sen}\, x$.

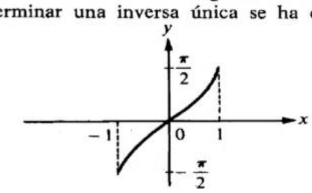


FIGURA 6.10 $y = \text{arcsen}\, x$.

considerar un intervalo en el que el seno sea monótono. Hay, evidentemente, muchos de estos intervalos, por ejemplo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$, $[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi]$, etc., y se puede escoger uno cualquiera de ellos. Se acostumbra tomar $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ y definir una nueva función f como sigue:

$$f(x) = \text{sen}\, x \qquad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

La función f así definida es creciente en sentido estricto y toma todos los valores entre -1 y $+1$ exactamente una vez en el intervalo$[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. (véase figura 6.9). Por tanto, hay una única función g definida en $[-1, 1]$ que asigna a cada número y de $[-1, 1]$ el número x de $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ para el cual $y = \text{sen}\, x$. Esta función se denomina *inversa del seno* o *arco seno* y su valor en y se designa por arc sen y. Así

$$u = \text{arcsen}\, v \quad \text{implica} \quad v = \text{sen}\, u \qquad \text{y} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

La gráfica de arco seno se ha dibujado en la figura 6.10. Obsérvese que el arco seno no está definido fuera del intervalo $[-1, 1]$.

Fuente*:* Adaptada de "Inversas de las funciones trigonométricas" por Apostol, 1984, *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*, p. 310.

Cuadro 7

Análisis de la tarea 7 de la definición de la función arcoseno de Apostol (1984)

Caracterización del texto	**Contexto situacional**			
	Título:	Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal		
	Autor:	Tom Apostol		
	Datos numéricos:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas
		1984	XIX	310
	Temas previos:	Derivadas de funciones inversas		
	Temas posteriores:	Integrales por fracciones simples		

	Contexto cultural
Idioma del libro:	Traducido al español
Nacionalidad del autor:	Estadunidense
Influencias del autor:	H. Bohnenblust, A. Erdélyi, F. Fuller, K. Hoffman, G. Springer, H. Zuckerman, B. Gordon, G. Springer, W. Ziemer
Destinatarios:	Nivel superior

Estructura didáctica:	Verbal	Simbólica	Ilustrativa	Anexos
	x	x	X	x

Caracterización de la matemática

Contexto de significación

Situación			*Diagramas*		
x	Intramatemática		Extramatemática		Círculo
	Triángulo				

Restricciones				*Verificación*			
x	Dominio	x	Rango	x	Si		No

Usos de las nociones trigonométricas

	Uso aritmético		Uso métrico	x	Uso cuantitativo
	Uso algebraico		Uso geométrico	x	Otro uso

Producto de enseñanza

Análisis de la caracterización del texto

El autor define la función arcoseno de forma verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar el dominio y rango) e ilustrativa (presenta gráficas en el plano cartesiano). En el Anexo se encuentran las respuestas de los ejercicios de práctica que el estudiante puede encontrar en el tema de funciones trigonométricas inversas.

Análisis de la caracterización de la matemática

La tarea es de tipo expositiva en un contexto matemático. En la explicación del concepto el autor emplea representaciones algebraicas para definir las funciones $f(x) = sen\ x$ e $y = arcsen\ x$, y utiliza el plano cartesiano para verificar gráficamente la función trigonométrica $sen\ x$ y la función trigonométrica inversa $arcsen\ x$, señalando su dominio y rango respectivos.

De aquí se reconoce que la función trigonométrica inversa de $sen\ x$ tiene un uso como un ***operador de composición de funciones*** del tipo $f(g(x))$, donde f es la función trigonométrica o la función trigonométrica inversa, mientras que g es cualquier otra función; y en este caso $g(x) = x$.

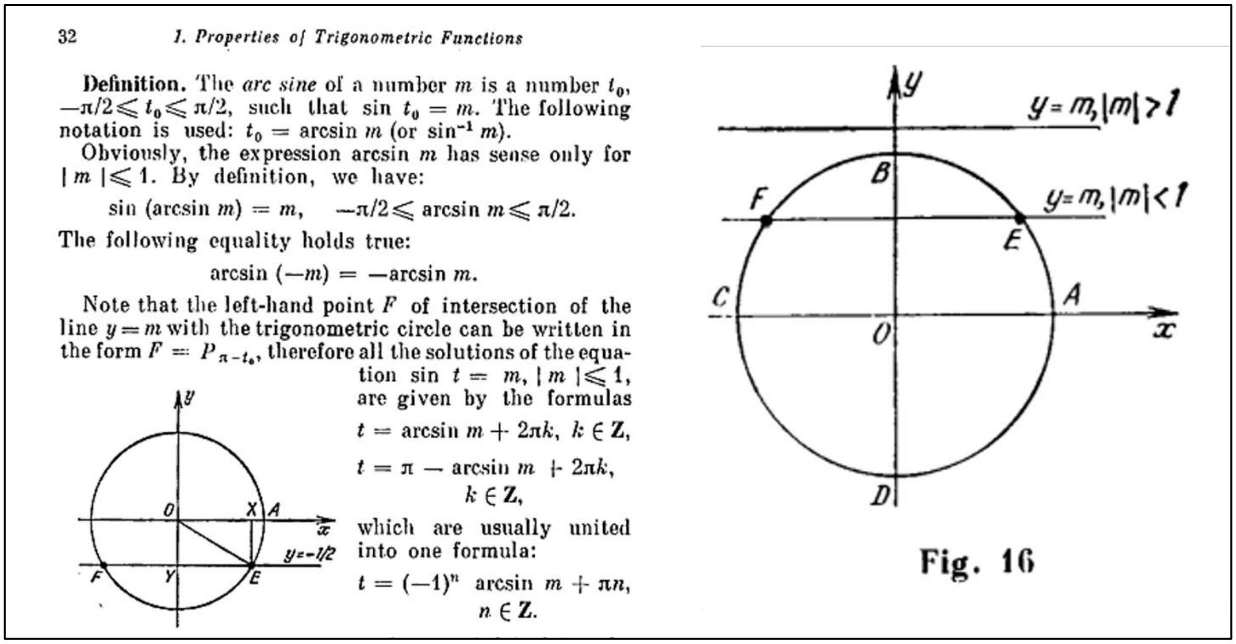
Se identifica un uso ***gráfico***, puesto que se construye la función arcoseno en el plano cartesiano con el giro de 90° que se le realiza sobre la función seno restringida. También se reconoce un uso ***cuantitativo*** ya que se define la función arcoseno mediante las propiedades que provienen de las gráficas de la función seno restringida y de la función arcoseno.

Significados que promueve el libro de texto

La función $u = arcsen\ v$ es el operador inverso para la función $v = sen\ u$, entendiendo a $u = g(x)$ y $v = f(g(x))$.

Figura 13

Tarea 8. La función arcoseno



32 *1. Properties of Trigonometric Functions*

Definition. The *arc sine* of a number m is a number t_0, $-\pi/2 \leqslant t_0 \leqslant \pi/2$, such that $\sin t_0 = m$. The following notation is used: $t_0 = \arcsin m$ (or $\sin^{-1} m$).

Obviously, the expression $\arcsin m$ has sense only for $|m| \leqslant 1$. By definition, we have:

$$\sin(\arcsin m) = m, \quad -\pi/2 \leqslant \arcsin m \leqslant \pi/2.$$

The following equality holds true:

$$\arcsin(-m) = -\arcsin m.$$

Note that the left-hand point F of intersection of the line $y = m$ with the trigonometric circle can be written in the form $F = P_{\pi - t_0}$, therefore all the solutions of the equation $\sin t = m$, $|m| \leqslant 1$, are given by the formulas

$$t = \arcsin m + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z},$$

$$t = \pi - \arcsin m + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z},$$

which are usually united into one formula:

$$t = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Fig. 16

Fuente*:* Adaptada de "Properties of Trigonometrics Functions" por Panchishkin y Shavgulidze, 1988, *Trigonometric functions (Problem Solving Approach),* p.32.

Cuadro 8

Análisis de la tarea 8 de la función arcoseno de Panchishkin y Shavgulidze (1988)

Caracterización del texto		**Contexto situacional**		
	Título:	Trigonometric functions (Problem Solving Approach)		
	Autor:	Panchishkin y Shavgulidze		
	Datos numéricos:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas
		1988	XIX	32
	Temas previos:	Resolución de las ecuaciones trigonométricas más sencillas.		
	Temas posteriores:	Transformaciones idénticas de las funciones trigonométricas		
		Contexto cultural		
	Idioma del libro:	Traducido del ruso al inglés		
	Nacionalidad del autor:	Rusos		
	Influencias del autor:	A, N. Kolmogorov, N.Ya. Vilenkin, A.G. Mordkovich, V.K. Smyshlyaev.		

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Destinatarios:</td><td colspan="4">Estudiantes de secundaria y estudiantes preuniversitarios. También para los niños en edad escolar que estudian en la facultad matemática mecánica de la Universidad Estatal de Moscú.</td></tr>
<tr><td>Estructura didáctica:</td><td>Verbal
x</td><td>Simbólica
x</td><td>Ilustrativa
x</td><td>Anexos
x</td></tr>
<tr><td>Caracterización de la matemática</td><td colspan="5">
Contexto de significación
Situación: [x] Intramatemática [ ] Extramatemática
Diagramas: [x] Círculo [x] Triángulo
Restricciones: [x] Dominio [x] Rango
Verificación: [x] Si [ ] No
Usos de las nociones trigonométricas
[ ] Uso aritmético [ ] Uso métrico [x] Uso cuantitativo
[ ] Uso algebraico [ ] Uso geométrico [x] Otro uso
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Producto de enseñanza</td><td colspan="5">
Análisis de la caracterización del texto
El autor define la función arcoseno de forma verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar las ecuaciones trigonométricas, el dominio y rango de la función arcoseno) e ilustrativa (presenta gráficas en el círculo unitario y el triángulo rectángulo).

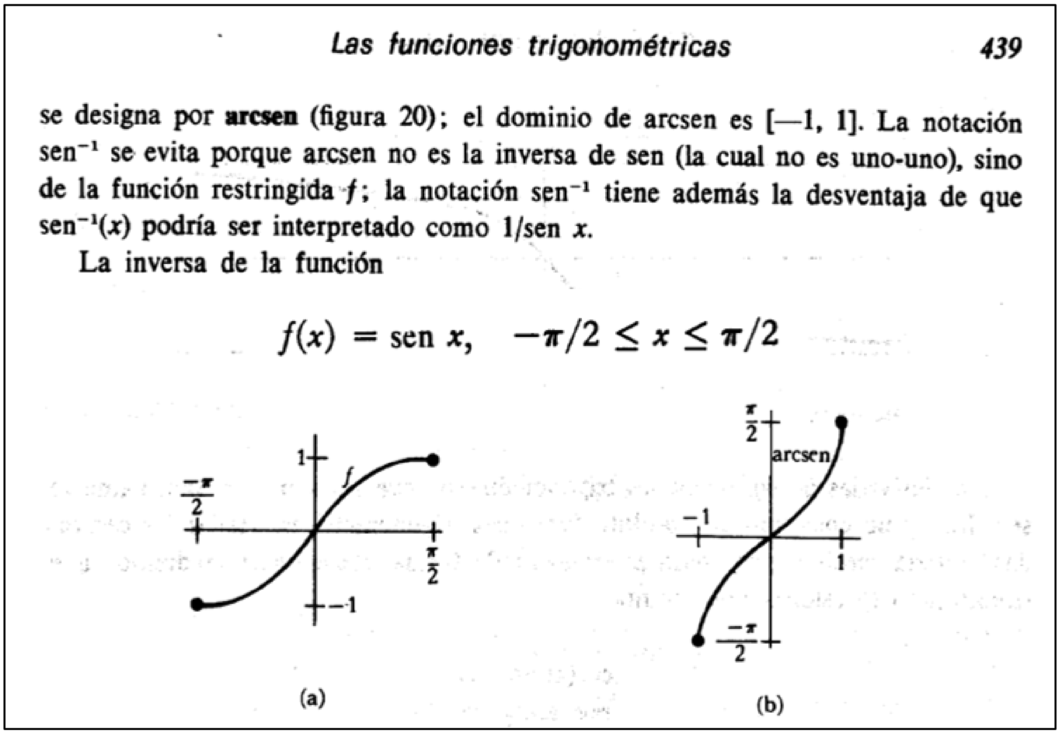
En el apartado de Anexos es posible verificar las respuestas de los problemas planteados en el capítulo.
</td></tr>
<tr><td colspan="5">
Análisis de la caracterización de la matemática
La tarea es de tipo expositiva, se desarrolla en un contexto matemático. El autor explica la definición de la función arcoseno mediante la restricción del dominio y rango de la función seno, la información puede verificarse en las gráficas.

En la definición la función arcoseno tiene un uso como operador de composición de funciones y como operador inverso:
$$\text{sen}\ (\text{arcsen}\ \text{m}) = \text{m}$$
$-\frac{\pi}{2} \leq \text{arcsen m} \leq \frac{\pi}{2}$, donde $\text{f(x)} = \text{senx}$ y $\text{g (x)} = \text{arc sen x}$ por lo tanto al ser funciones inversas su composición es y=x.

Se reconoce un uso cuantitativo al identificar propiedades que provienen del rectángulo y el círculo unitario al igual que un uso gráfico ya que al expresar el valor del argumento t donde sen t =m tal que es posible encontrar todos los números reales t de manera que la ordenada del punto correspondiente P sea igual a m. Para ello traza una recta y=m y se hallan los puntos de intersección con el círculo trigonométrico. Concluyendo que el punto de intersección se puede escribir de la forma F= $P_{\pi-t_0}$,dado esto t es igual a $(-1)^n + \text{arcsen m} + \pi\text{n}, \text{n} \in \mathbb{Z}$.
</td></tr>
<tr><td colspan="5">
Significados que promueve el libro de texto
Arcoseno como función inversa del seno siendo su composición la función f(x)=x.
Para sen t= m se define arcoseno de m como la ecuación: Arcsen $\text{m} = \text{arcsen m} + \pi\text{n} - \text{t}, \text{n} \in \mathbb{Z}. \text{sen t} = \text{m}$
Arcoseno como función de valuación múltiple.
</td></tr>
</table>

Figura 14

Tarea 9. La función arcoseno



Las funciones trigonométricas 439

se designa por **arcsen** (figura 20); el dominio de arcsen es [—1, 1]. La notación sen^{-1} se evita porque arcsen no es la inversa de sen (la cual no es uno-uno), sino de la función restringida f; la notación sen^{-1} tiene además la desventaja de que $\text{sen}^{-1}(x)$ podría ser interpretado como $1/\text{sen}\ x$.

La inversa de la función

$$f(x) = \text{sen}\ x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$$

Fuente: adaptada de "Las Funciones Trigonométricas" por Spivac, 1992, *Cálculo infinitesimal segunda edición,* p. 439.

Cuadro 9

Análisis de la tarea 9 de la función arcoseno de Spivac (1992)

Caracterización del texto	**Contexto situacional**			
	Título:	Cálculo infinitesimal segunda edición		
	Autor:	Michael Spivac		
	Datos numéricos:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas
		1992	XIX	439
	Temas previos:	Funciones trigonométricas		
	Temas posteriores:	Derivadas e integrales de las funciones trigonométricas		

<table>
<tr><td></td><td>

Contexto cultural

<table>
<tr><td>Idioma del libro:</td><td colspan="4">Español</td></tr>
<tr><td>Nacionalidad del autor:</td><td colspan="4">Estadunidense.</td></tr>
<tr><td>Influencias del autor:</td><td colspan="4">John Milnor, Anthony Phillips, Roberts Wells</td></tr>
<tr><td>Destinatarios:</td><td colspan="4">Estudiantes de Cálculo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estructura didáctica:</td><td>Verbal</td><td>Simbólica</td><td>Ilustrativa</td><td>Anexos</td></tr>
<tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr>
</table>

</td></tr>
<tr><td>**Caracterización de la matemática**</td><td>

Contexto de significación

<table>
<tr><td colspan="4">*Situación*</td><td colspan="4">*Diagramas*</td></tr>
<tr><td>x</td><td>Intramatemática</td><td></td><td>Extramatemática</td><td></td><td>Círculo</td><td></td><td>Triángulo</td></tr>
<tr><td colspan="4">*Restricciones*</td><td colspan="4">*Verificación*</td></tr>
<tr><td>x</td><td>Dominio</td><td>x</td><td>Rango</td><td>x</td><td>Si</td><td></td><td>No</td></tr>
<tr><td colspan="8">*Usos de las nociones trigonométricas*</td></tr>
<tr><td></td><td>Uso aritmético</td><td></td><td>Uso métrico</td><td>x</td><td>Uso cuantitativo</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td>Uso algebraico</td><td></td><td>Uso geométrico</td><td></td><td>Otro uso</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

</td></tr>
<tr><td>**Producto de enseñanza**</td><td>

Análisis de la caracterización del texto

El autor define la función arcoseno de forma verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar la función, su dominio y rango) e ilustrativa (presenta gráficas en el plano cartesiano).

El apartado de las funciones trigonométricas inversas es reducido ya que contienen solamente las definiciones y sus propiedades, las cuales sirven como insumos para el cálculo de derivadas e integrales.

Análisis de la caracterización de la matemática

La tarea es de tipo expositiva, dada en un contexto matemático. Se realiza una restricción del dominio para definir la función arcoseno como la función inversa de la función restringida f, restricción que se hace necesaria porque como lo aclara el autor la función seno no es uno a uno. Se evidencia un uso ***cuantitativo*** al identificar propiedades que provienen de las gráficas del seno y arcoseno, así mismo, se puede verificar la información dada en las gráficas de las funciones. También se identifica un uso ***gráfico*** al construir la gráfica de la función arcoseno haciendo una rotación de 90° sobre la función seno restringida donde se observa que el dominio de la función seno restringida es el rango de la función arcoseno.

Significados que promueve el libro de texto

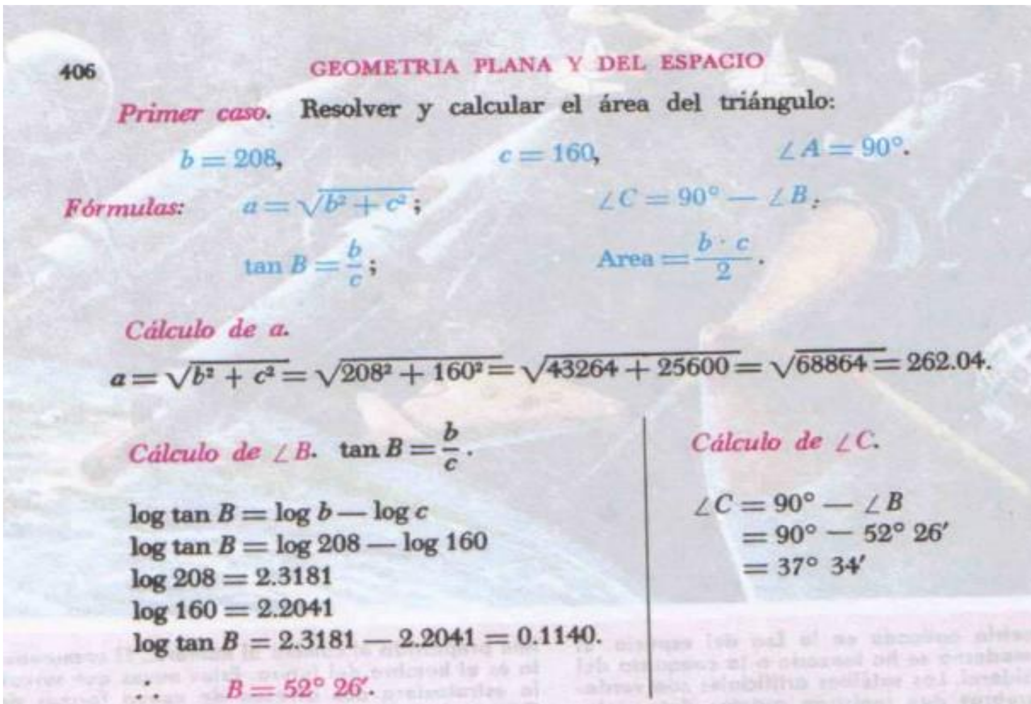
Arcoseno como función inversa de la función restringida f(x)= sen x, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

</td></tr>
</table>

5.2 Análisis de tareas de libros contemporáneos

Figura 15

Tarea 10. La razón arcotangente implícita



406 GEOMETRIA PLANA Y DEL ESPACIO

Primer caso. **Resolver y calcular el área del triángulo:**

$b = 208$, $c = 160$, $\angle A = 90°$.

Fórmulas: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; $\angle C = 90° - \angle B$;

$\tan B = \frac{b}{c}$; $\text{Area} = \frac{b \cdot c}{2}$.

Cálculo de a.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{208^2 + 160^2} = \sqrt{43264 + 25600} = \sqrt{68864} = 262.04.$$

Cálculo de $\angle B$. $\tan B = \frac{b}{c}$.

$\log \tan B = \log b - \log c$
$\log \tan B = \log 208 - \log 160$
$\log 208 = 2.3181$
$\log 160 = 2.2041$
$\log \tan B = 2.3181 - 2.2041 = 0.1140.$
$\therefore \quad B = 52° \, 26'.$

Cálculo de $\angle C$.

$\angle C = 90° - \angle B$
$= 90° - 52° \, 26'$
$= 37° \, 34'$

Fuente*:* Adaptada de "Aplicación de los logaritmos" por Baldor, 2004, *Geometría Plana y del espacio y Trigonometría,* p. 406

Cuadro 10

Análisis de la tarea 10 de la razón arcotangente implicita de Baldor (2004)

Caracterización del texto	**Contexto situacional**			
	Título:	Geometría Plana y del espacio y Trigonometría		
	Autor:	José Antonio Baldor		
	Datos numéricos:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas
		2004	XIX	406
	Temas previos:	Logaritmo de las funciones trigonométricas		
	Temas posteriores:	Aplicación de los logaritmos para la ley de Tangentes		
	Contexto cultural			

<table>
<tr><td rowspan="5"></td><td>Idioma del libro:</td><td colspan="4">Español</td></tr>
<tr><td>Nacionalidad del autor:</td><td colspan="4">Cubano</td></tr>
<tr><td>Influencias del autor:</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Destinatarios:</td><td colspan="4">Estudiantes de ciclo secundario</td></tr>
<tr><td>Estructura didáctica:</td><td>Verbal
x</td><td>Simbólica
x</td><td>Ilustrativa
</td><td>Anexos
x</td></tr>
<tr><td>Caracterización de la matemática</td><td colspan="5">Contexto de significación

Situación: [x] Intramatemática [ ] Extramatemática
Diagramas: [ ] Círculo [ ] Triángulo

Restricciones: [ ] Dominio [ ] Rango
Verificación: [x] Si [ ] No

Usos de las nociones trigonométricas
[x] Uso aritmético [ ] Uso métrico [x] Uso cuantitativo
[x] Uso algebraico [ ] Uso geométrico [ ] Otro uso</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Producto de enseñanza</td><td colspan="5">Análisis de la caracterización del texto
El autor emplea un lenguaje verbal (utiliza el lenguaje natural), simbólico (hace uso de símbolos para expresar el teorema de Pitágoras, las operaciones con logaritmos y las razones trigonométricas).

En los Anexos se incluyen las tablas de logaritmos de las funciones trigonométricas.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de la caracterización de la matemática
La tarea es a modo de ejemplo, desarrollada en un contexto matemático. Los resultados presentados se pueden verificar ya sea en las tablas de logaritmos de las funciones trigonométricas o haciendo uso de la calculadora.

La tarea plantea la resolución de un triángulo, en ésta se identifica un uso algebraico al aplicar la formula del teorema de Pitágoras, también se evidencia un uso aritmético al realizar operaciones básicas y al dividir longitudes para encontrar la razón que expresa la tangente del ángulo B.

Se presenta uso cuantitativo puesto que dado el $\measuredangle$ A= 90° este corresponde a un triángulo rectángulo y por lo tanto las cantidades que se operan provienen de este último.

El autor hace uso de las propiedades de las operaciones con logaritmos para encontrar el valor de log tan B y dado ese valor busca el valor del ángulo (arctan $(\frac{b}{c})$ en la tabla de logaritmos de las funciones trigonométricas dispuestas en el libro.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Significados que promueve el libro de texto
Arcotangente como razón inversa implícita de la tangente del ángulo.</td></tr>
</table>

Figura 16

Tarea 11. Ejemplos de evaluación de razones trigonometricas inversas

EJEMPLO 1 Evaluación de las funciones trigonométricas inversas

Evaluar cada una de las funciones.

a) $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ *b*) $\arccos 0$ *c*) $\arctan \sqrt{3}$ *d*) $\operatorname{arcsen}(0.3)$

Solución

a) Por definición, $y = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ implica que $\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}$. En el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ el valor correcto de y es $-\pi/6$.

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

b) Por definición $y = \arccos 0$ implica que $\cos y = 0$. En el intervalo $[0, \pi]$ se tiene $y = \pi/2$.

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

c) Por definición, $y = \arctan \sqrt{3}$ implica que $\tan y = \sqrt{3}$. En el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, se tiene $y = \pi/3$.

$$\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

d) Al utilizar la calculadora en modo *radianes* se obtiene

$$\operatorname{arcsen}(0.3) \approx 0.305.$$

NOTA Al evaluar funciones trigonométricas inversas es importante recordar que los *ángulos están medidos en radianes.*

Fuente*:* Adaptada de "Evaluación de las funciones trigonométricas inversas" por Larson y Edwards, 2010, *Cálculo I de una Variable novena edición*, p. 374.

Cuadro 11

Análisis de la tarea 11 de ejemplos de evaluación de razones trigonometricas inversas de Larson y Edwards de (2010)

Caracterización del texto	**Contexto situacional**			
	Título:	Cálculo I de una Variable novena edición		
	Autor:	Ron Larson y Bruce H. Edwards		
	Datos numéricos:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas
		2010	XIX	374
	Temas previos:	Funciones logarítmicas y exponenciales		
	Temas posteriores:	Funciones trigonométricas inversas: derivación.		
	Contexto cultural			
	Idioma del libro:	Español		
	Nacionalidad del autor:	Estadounidenses		

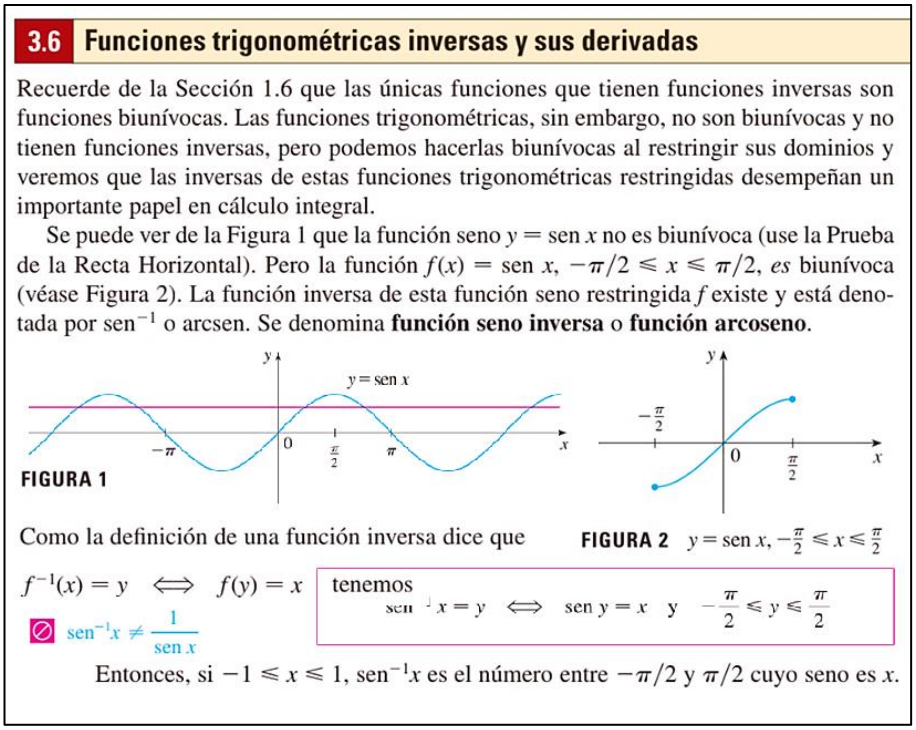
	Influencias del autor:	Robert Hostetler
	Destinatarios:	Estudiantes de secundaria y hasta el segundo año de la universidad.
	Estructura didáctica:	Verbal: x · Simbólica: x · Ilustrativa: · Anexos: x

Caracterización de la matemática	**Contexto de significación**					
	Situación			*Diagramas*		
	x	Intramatemática		Extramatemática		Círculo		Triángulo
	Restricciones			*Verificación*		
		Dominio		Rango	x	Si		No
	Usos de las nociones trigonométricas					
		Uso aritmético	x	Uso métrico	x	Uso cuantitativo
		Uso algebraico		Uso geométrico		Otro uso

Producto de enseñanza	*Análisis de la caracterización del texto* Aunque el título de la tarea es Evaluación de las Funciones Trigonométricas Inversas, al hablarse de ángulos medidos en radianes se identifica por definición que se trata de razones y no de funciones. El autor explica cómo calcular los valores de las razones arcoseno, arcocoseno y arcotangente de forma verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar el dominio y rango). En los Anexos se encuentra un apartado titulado Apéndice A de teoremas seleccionados y otro con la solución de los ejercicios de práctica con numeración impar.
	Análisis de la caracterización de la matemática La tarea es a modo de ejemplo, las situaciones planteadas están dadas en un contexto matemático. La tarea se puede verificar con el uso de la calculadora. Se identifica un uso ***cuantitativo*** al calcular cantidades que provienen implícitamente del triángulo rectángulo o del círculo unitario. Se identifica un uso ***métrico*** al utilizar la definición de razones trigonométricas inversas para calcular el valor del ángulo.
	Significados que promueve el libro de texto Arcoseno como razón inversa del seno. Arcocoseno como razón inversa de coseno. Arcotangente como razón inversa de la tangente.

Figura 17

Tarea 12. La función seno inverso



3.6 Funciones trigonométricas inversas y sus derivadas

Recuerde de la Sección 1.6 que las únicas funciones que tienen funciones inversas son funciones biunívocas. Las funciones trigonométricas, sin embargo, no son biunívocas y no tienen funciones inversas, pero podemos hacerlas biunívocas al restringir sus dominios y veremos que las inversas de estas funciones trigonométricas restringidas desempeñan un importante papel en cálculo integral.

Se puede ver de la Figura 1 que la función seno $y = \operatorname{sen} x$ no es biunívoca (use la Prueba de la Recta Horizontal). Pero la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, *es* biunívoca (véase Figura 2). La función inversa de esta función seno restringida f existe y está denotada por sen^{-1} o arcsen. Se denomina **función seno inversa** o **función arcoseno**.

FIGURA 1

FIGURA 2 $y = \operatorname{sen} x, -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Como la definición de una función inversa dice que

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

tenemos

$$\boxed{\operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

$\oslash$ $\operatorname{sen}^{-1} x \neq \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Entonces, si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\operatorname{sen}^{-1} x$ es el número entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

Fuente*:* Adaptada de "Funciones trigonométricas y sus derivadas" por Stewart, 2010, *Cálculo de una variable. Conceptos y contextos.*, p. 374.

Cuadro12

Análisis de la tarea 12 de la definición de la función seno inversa de Stewart (2010)

Caracterización del texto	**Contexto situacional**			
	Título:	Cálculo de una variable. Conceptos y contextos.		
	Autor:	James Stewart		
	Datos numéricos:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas
		2010	XX	216
	Temas previos:	Derivación implícita		
	Temas posteriores:	Derivación de funciones logarítmicas.		
	Contexto cultural			
	Idioma del libro:	Español		

Nacionalidad del autor:	Traducido al español
Influencias del autor:	George Polya, Colegas y estudiantes de la universidad de Toronto, artículos científicos, usuarios y revisores.
Destinatarios:	Nivel medio superior y nivel superior.
Estructura didáctica:	Verbal: X; Simbólica: x; Ilustrativa: x; Anexos: x

Caracterización de la matemática

Contexto de significación

Situación

x	Intramatemática
	Extramatemática

Diagramas

	Círculo
	Triángulo

Restricciones

x	Dominio
x	Rango

Verificación

x	Si
	No

Usos de las nociones trigonométricas

	Uso aritmético		Uso métrico	x	Uso cuantitativo
	Uso algebraico		Uso geométrico	x	Otro uso

Producto de enseñanza

Análisis de la caracterización del texto

A diferencia de ediciones previas, la cuarta edición presenta las funciones trigonométricas inversas en una sola sección (tema 3.6).

El autor estructura la forma de presentar los temas a partir de la resolución de problemas que propone George Polya, la cual se explica al final del Capítulo 1.

La tarea analizada es de tipo expositiva, se identifica una estructura didáctica de tipo verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar expresiones y operaciones), ilustrativa (incluye gráficas de las funciones seno y arcoseno) y Anexos (el autor los llama apéndices y en ellos presenta fórmulas de Trigonometría que ubica en las últimas páginas del libro).

Análisis de la caracterización de la matemática

La explicación del autor define la función trigonométrica inversa arcoseno, para ello retoma el tema previo de funciones inversas y sus características con la finalidad de hacer más comprensible la explicación y de ampliar la información mostrada en la sección 1.6.

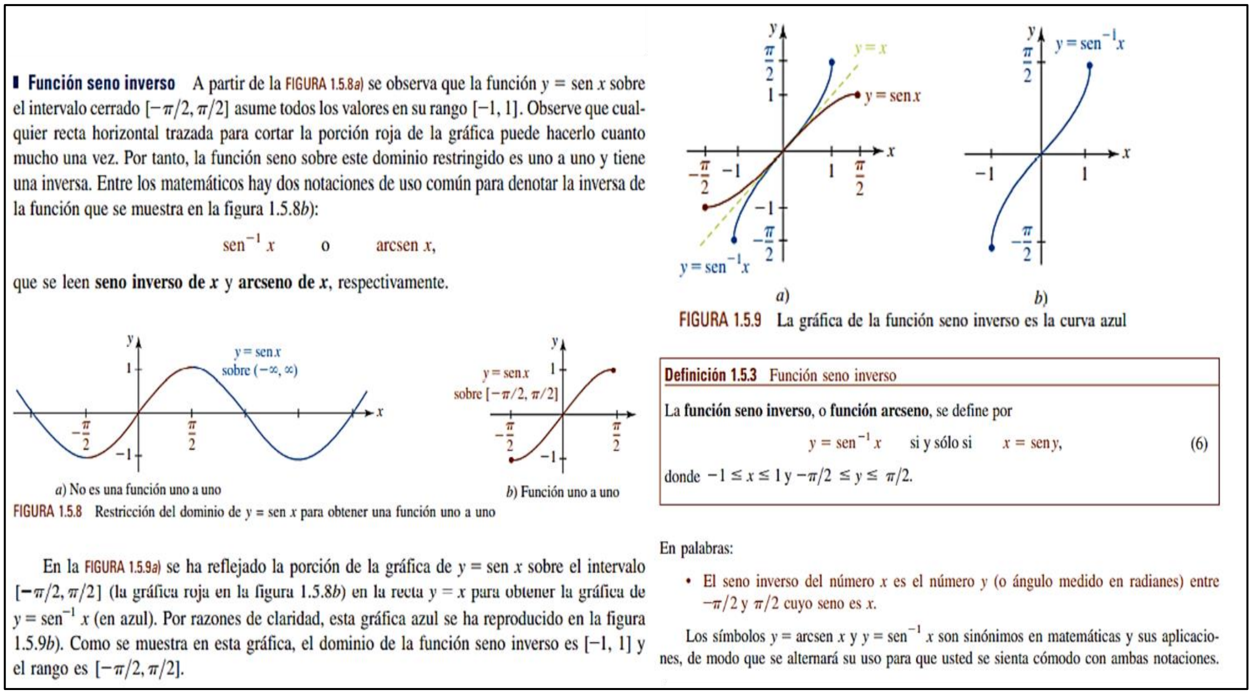
El autor da una definición de una función biunívoca (biyectiva) mediante la gráfica de la función y=sen x (figura 1), donde se identifica un uso ***cuantitativo*** al identificar propiedades de la función seno así mismo también hay un uso ***gráfico*** al construir una línea horizontal para visualizar en que parte del dominio la función seno es biunívoca y poder definir la función $f(x) = \text{sen}x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ (figura 2). La tarea puede verificarse al aplicar el método de la recta horizontal.

Significados que promueve el libro de texto

El arcoseno es una función inversa del seno, y=sen, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, por lo tanto, x=arcsen y; donde x es el argumento de la función trigonométrica, mientras que en la función inversa y es el argumento.

Figura 18

Tarea 13. La función seno inverso



Función seno inverso A partir de la FIGURA 1.5.8a) se observa que la función $y = \text{sen}\, x$ sobre el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$ asume todos los valores en su rango $[-1, 1]$. Observe que cualquier recta horizontal trazada para cortar la porción roja de la gráfica puede hacerlo cuanto mucho una vez. Por tanto, la función seno sobre este dominio restringido es uno a uno y tiene una inversa. Entre los matemáticos hay dos notaciones de uso común para denotar la inversa de la función que se muestra en la figura 1.5.8b):

$$\text{sen}^{-1} x \qquad \text{o} \qquad \text{arcsen}\, x,$$

que se leen **seno inverso de x** y **arcseno de x**, respectivamente.

a) No es una función uno a uno

b) Función uno a uno

FIGURA 1.5.8 Restricción del dominio de $y = \text{sen}\, x$ para obtener una función uno a uno

En la FIGURA 1.5.9a) se ha reflejado la porción de la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ sobre el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (la gráfica roja en la figura 1.5.8b) en la recta $y = x$ para obtener la gráfica de $y = \text{sen}^{-1} x$ (en azul). Por razones de claridad, esta gráfica azul se ha reproducido en la figura 1.5.9b). Como se muestra en esta gráfica, el dominio de la función seno inverso es $[-1, 1]$ y el rango es $[-\pi/2, \pi/2]$.

a) b)

FIGURA 1.5.9 La gráfica de la función seno inverso es la curva azul

Definición 1.5.3 Función seno inverso

La **función seno inverso**, o **función arcseno**, se define por

$$y = \text{sen}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \text{sen}\, y, \tag{6}$$

donde $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

En palabras:

- El seno inverso del número x es el número y (o ángulo medido en radianes) entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

Los símbolos $y = \text{arcsen}\, x$ y $y = \text{sen}^{-1} x$ son sinónimos en matemáticas y sus aplicaciones, de modo que se alternará su uso para que usted se sienta cómodo con ambas notaciones.

Fuente: Adaptada de "Función seno inverso" por Zill y Wright, 2011, *Cálculo con Trascendentes Tempranas cuarta edición*, p. 43.

Cuadro 13

Análisis de la tarea13 de la función seno inverso de Zill y Warren (2011)

Caracterización del texto	**Contexto situacional**			
	Título:	Cálculo con Trascendentes Tempranas cuarta edición		
	Autor:	Denis G. Zill y Warren S. Wright		
	Datos numéricos:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas
		2011	XX	43
	Temas previos:	Funciones polinomiales y racionales		
	Temas posteriores:	Funciones exponencial y logarítmica		
	Contexto cultural			
	Idioma del libro:	Traducido al español		

<table>
<tr><td rowspan="5"></td><td>Nacionalidad del autor:</td><td colspan="4">Estadounidenses</td></tr>
<tr><td>Influencias del autor:</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Destinatarios:</td><td colspan="4">Estudiantes de Cálculo I</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estructura didáctica:</td><td>Verbal</td><td>Simbólica</td><td>Ilustrativa</td><td>Anexos</td></tr>
<tr><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td>Caracterización de la matemática</td><td colspan="5">Contexto de significación
Situación: [x] Intramatemática [ ] Extramatemática
Diagramas: [ ] Círculo [ ] Triángulo
Restricciones: [x] Dominio [x] Rango
Verificación: [x] Si [ ] No
Usos de las nociones trigonométricas
[ ] Uso aritmético [ ] Uso métrico [x] Uso cuantitativo
[ ] Uso algebraico [ ] Uso geométrico [x] Otro uso</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Producto de enseñanza</td><td colspan="5">Análisis de la caracterización del texto
El autor define la función arcoseno de forma verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar el dominio y rango) e ilustrativa (presenta gráficas en el plano cartesiano).

En los Anexos del libro se encuentra un apartado titulado “Revisión de trigonometría” donde se encuentra un resumen de los conceptos y formulas trigonométricas, así como también un apartado con las respuestas a los problemas de aplicación planteados.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de la caracterización de la matemática
La tarea es de tipo expositiva en un contexto matemático, los autores explican la definición de la función arcoseno. La tarea se puede verificar ya que mediante el método de la línea horizontal es posible comprobar que la función de color rojo es uno a uno, de ahí que la tarea también presenta una restricción de dominio ya que la función seno no es uno a uno y por lo tanto no tiene inversa.

Se identifica un uso gráfico al construir la gráfica de la función arcoseno reflejando la gráfica de la función f(x)= sen x, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ sobre la recta y = x dada la definición de la gráfica de una función inversa, pues se sabe que las gráficas de f(x) y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante y su composición es la función identidad y=x , así mismo se reconoce un uso cuantitativo al identificar propiedades que provienen de la gráfica dela función seno, como por ejemplo los valores del dominio y rango donde la función es uno a uno y con ello definir el dominio y rango de la función arcoseno $[-1,1]$ y su rango $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Significados que promueve el libro de texto
Función arcoseno como función inversa de f(x)= sen x,$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.</td></tr>
</table>

Figura 19

Tarea 14. Ejemplo de la aplicación de la razón arcotangente

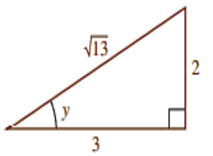


FIGURA 1.5.16 Triángulo en el ejemplo 10

EJEMPLO 10 Evaluación de composiciones de funciones

Sin usar calculadora, encuentre $\cos(\arctan\frac{2}{3})$.

Solución Si se hace $y = \arctan\frac{2}{3}$, entonces $\tan y = \frac{2}{3}$. Al usar el triángulo rectángulo en la FIGURA 1.5.16 como ayuda, se ve que

$$\cos\left(\arctan\frac{2}{3}\right) = \cos y = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Fuente: Adaptada de "Evaluación de composición de funciones" por Zill y Wright, 2011, *Cálculo con Trascendentes Tempranas cuarta edición*, p. 43.

Cuadro 14

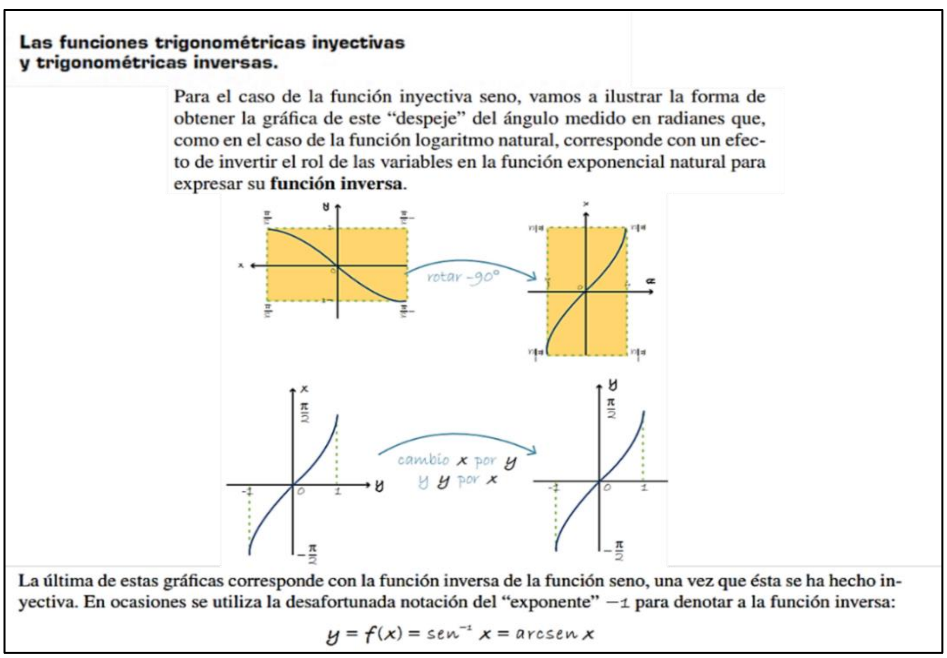
Análisis de la tarea 14 de la aplicación de la arcotangente de Zill y Wright (2011)

Caracterización del texto	**Contexto situacional**				
	Título:	Cálculo con Trascendentes Tempranas cuarta edición			
	Autor:	Denis G. Zill y Warren S. Wright			
	Datos numéricos:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas	
		2011	XX	43	
	Temas previos:	Funciones polinomiales y racionales			
	Temas posteriores:	Funciones exponencial y logarítmica			
	Contexto cultural				
	Idioma del libro:	Traducido al español			
	Nacionalidad del autor:	Estadunidenses			
	Influencias del autor:				
	Destinatarios:	Estudiantes de Cálculo I			
	Estructura didáctica:	Verbal	Simbólica	Ilustrativa	Anexos
		x	X	x	x
Caracterización de la matemática	**Contexto de significación**				
	Situación		*Diagramas*		
	x	Intramatemática		Extramatemática	
		Círculo	x	Triángulo	
	Restricciones		*Verificación*		
		Dominio		Rango	
	X	Si		No	
	Usos de las nociones trigonométricas				
	x	Uso aritmético		Uso métrico	
	x	Uso cuantitativo			

	Uso algebraico · Uso geométrico · Otro uso
Producto de enseñanza	*Análisis de la caracterización del texto* El autor explica un ejemplo de la composición de funciones (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar el dominio y rango) e ilustrativa (presenta gráfica del triángulo rectángulo).
	Análisis de la caracterización de la matemática La tarea es a modo de ejemplo, y consiste en calcular el coseno de arctan $\frac{2}{3}$. Se desarrolla en un contexto matemático, el tema que contiene al ejemplo son las funciones trigonométricas inversas, sin embargo, aunque el título del ejemplo es evaluación de composición de funciones por el uso que se hace del triángulo rectángulo y al tomar la tangente como una división de longitudes se puede interpretar a arctan $\frac{2}{3}$ como ángulo y no como un número real. Se reconoce un uso ***cuantitativo*** al identificar propiedades que provienen del triángulo rectángulo y un uso ***aritmético*** al operar con la formula del teorema de Pitágoras para el cálculo de la tangente de $\frac{2}{3}$ y cos y = $\frac{3}{\sqrt{13}}$.
	Significados que promueve el libro de texto Arcotangente como razón inversa de la tangente.

Figura 20

Tarea 15. La definición de la función arcoseno


Las funciones trigonométricas inyectivas y trigonométricas inversas.

Para el caso de la función inyectiva seno, vamos a ilustrar la forma de obtener la gráfica de este "despeje" del ángulo medido en radianes que, como en el caso de la función logaritmo natural, corresponde con un efecto de invertir el rol de las variables en la función exponencial natural para expresar su **función inversa**.

La última de estas gráficas corresponde con la función inversa de la función seno, una vez que ésta se ha hecho inyectiva. En ocasiones se utiliza la desafortunada notación del "exponente" −1 para denotar a la función inversa:

$$y = f(x) = sen^{-1}\, x = arcsen\, x$$

Fuente: Adaptada de "Las funciones trigonométricas inyectivas y trigonométricas inversas" por Salinas et al., 2012, *Cálculo aplicado. Competencias Matemáticas a través de Contextos tomo 1,* p. 428.

Cuadro 15

Análisis de la Tarea 15 de la definición de la función arcoseno de Salinas et al. (2014)

Caracterización del texto	**Contexto situacional**	
	Título:	Cálculo aplicado. Competencias Matemáticas a través de Contextos tomo 1
	Autor:	Norma Patricia Salinas y colaboradores
	Datos numéricos:	Año: 2012; Siglo: XX; Páginas seleccionadas: 428
	Temas previos:	Las funciones trigonométricas
	Temas posteriores:	Las funciones hiperbólicas
	Contexto cultural	
	Idioma del libro:	Español
	Nacionalidad del autor:	Mexicana
	Influencias del autor:	
	Destinatarios:	Estudiantes de Cálculo
	Estructura didáctica:	Verbal: x; Simbólica: X; Ilustrativa: x; Anexos:
Caracterización de la matemática	**Contexto de significación**	
	Situación	x Intramatemática; Extramatemática
	Diagramas	Círculo; Triángulo
	Restricciones	x Dominio; x Rango
	Verificación	X Si; No
	Usos de las nociones trigonométricas	Uso aritmético; Uso algebraico; Uso métrico; Uso geométrico; x Uso cuantitativo; x Otro uso
Producto de enseñanza	*Análisis de la caracterización del texto*	Los autores explican el proceso para construir la gráfica de la función arcoseno de forma verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar el dominio y rango) e ilustrativa (presenta gráficas en el plano cartesiano).
	Análisis de la caracterización de la matemática	La tarea es de tipo expositiva, se puede verificar al observar en la gráfica que la función restringida es uno a uno, la situación está dada en un contexto matemático, en la gráfica se evidencia restricción del dominio y rango para definir la función arcoseno. Se presenta un uso ***gráfico*** al girar la gráfica de la función seno restringida en -90°, también se evidencia un uso ***cuantitativo*** al identificar la relación entre dominio y rango al momento de invertir el rol de las variables para construir la gráfica del arcoseno, propiedades que provienen de las gráficas de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ y $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x)$. Sin embargo, aunque la tarea está dada en el contexto de las funciones trigonométricas inversas se emplea el uso del concepto del ángulo, en realidad está hablando del argumento de la función seno en los reales (en múltiplos de Pi), ya no hay un ángulo en sentido estricto.
	Significados que promueve el libro de texto	

	Arcoseno como función inversa de la función f(x)= sen x, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

6. DISCUSIÓN

Este apartado presenta el desarrollo de la cuarta fase de la metodología que consistió en el análisis transversal de los resultados mediante la triangulación del análisis individual correspondiente al análisis de la categoría (3): el producto de enseñanza que está compuesta por el análisis de la categoría (1) caracterización del texto en su contexto situacional y cultural, análisis de la categoría (2) caracterización de la matemática y los significados que promueve el libro de texto. Esto permitió identificar la transformación didáctica de la matemática de interés en tanto significado institucional.

6.1 Análisis de la caracterización del texto

La categoría de análisis 1, caracterización del texto, incluye la identificación del contexto situacional y el contexto cultural. Como se mencionó en el marco teórico, en el contexto situacional se reconoce "…la influencia del tiempo, el lugar y las condiciones donde se lleva a cabo la actividad matemática" (Torres-Corrales y Montiel, 2020: 32-33). En particular para el análisis de las tareas de los libros de texto relacionados con la ingeniería se establecieron cinco elementos a identificar: título del libro, nombre del autor, datos numéricos (año, siglo y paginas seleccionadas de la tarea) lo cual permite ubicar el libro de texto en la historia y en un contexto cultural dado, así como los temas previos y temas posteriores ya que es importante identificar si el libro de texto ofrece los conocimientos previos que serán necesarios para la comprensión de la razón y función trigonométrica inversa, así mismo la importancia de los temas posteriores radica en que dichos temas presentan la aplicación de los conceptos para reforzar las tareas expositivas y a modo de ejemplo promoviendo una mayor comprensión. En la tabla 3 se muestra un recuento del análisis para la categoría de contexto situacional.

Tabla 3

Síntesis de la caracterización del texto: contexto situacional

	Libros	No Tarea	Tipo de tarea	Tema previo	Tema	Tema Posterior
Libros históricos	Plane and Spherical Trigonometry (1875)	1	Expositiva	Relaciones de tres ángulos	*Funciones trigonométricas inversas*	Método elemental de construcción de la tabla trigonométrica
	Elementary Trigonometry (1906)	2	Expositiva	Solución general de ecuaciones	*Funciones circulares inversas*	Solución de ecuaciones expresadas en notación inversa
	A Course of Pure Mathematics (1921)	3	Ejemplo	Las funciones hiperbólicas generalizadas	*Relación entre el logaritmo y las funciones trigonométricas inversas*	La serie de potencias para exp z
	Trigonometría Superior (1944)	4	Expositiva	Ángulos submúltiplos	*Funciones circulares inversas*	Propiedades de los triángulos
	Trigonometría Superior (1944)	5	Expositiva	Ángulos submúltiplos	*Funciones circulares inversas*	Propiedades de los triángulos
	Algebra y funciones elementales (1978)	6	Expositiva	Función directa e inversa	*Funciones trigonométricas inversas*	Algunas identidades que se relacionan con las funciones trigonométricas inversas
	Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal (1984)	7	Expositiva	Derivadas de funciones inversas	*Inversa de las funciones trigonométricas*	Integrales por fracciones simples
	Trigonometric functions (Problem Solving Approach) (1988)	8	Expositiva	Resolución de las ecuaciones trigonométricas más sencillas	*Propiedades de las funciones trigonométricas*	Transformaciones idénticas de las funciones trigonométricas
	Cálculo infinitesimal segunda edición (1992)	9	Expositiva	Las funciones trigonométricas	*Límites y derivadas de las funciones trigonométricas inversas*	Derivadas e integrales de las funciones trigonométricas

Libros contemporáneos	Geometría Plana y del espacio y Trigonometría (2004)	10	Ejemplo	Logaritmos de las funciones trigonométricas	*Aplicación de los logaritmos*	Aplicación de los logaritmos para la ley de Tangentes
	Cálculo I de una Variable novena edición (2010)	11	Ejemplo	Funciones logarítmicas y exponenciales	*Funciones trigonométricas inversas*	Funciones trigonométricas inversas: derivación
	Cálculo de una variable. Conceptos y contextos. (2010)	12	Expositiva	Derivación implícita	*Funciones trigonométricas y sus derivadas*	Derivación de funciones logarítmicas
	Cálculo con Trascendentes Tempranas cuarta edición (2011)	13	Expositiva	Funciones polinomiales y racionales	*Funciones trigonométricas inversas*	Funciones exponencial y logarítmica
	Cálculo con Trascendentes Tempranas cuarta edición (2011)	14	Ejemplo	Funciones polinomiales y racionales	*Funciones trigonométricas inversas*	Funciones exponencial y logarítmica
	Cálculo aplicado. Competencias matemáticas a través de Contextos tomo 1	15	Expositiva	Las funciones trigonométricas	*Las funciones trigonométricas inyectivas y sus inversas*	Las funciones hiperbólicas

A la razón trigonométrica inversa la antecede los temas relacionados con ángulos submúltiplos y la procede temas como las propiedades de los triángulos, ecuaciones trigonométricas, así mismo la razón trigonométrica inversa implícita se sitúa entre el cálculo de logaritmos y la aplicación de logaritmos de las funciones trigonométricas inversas. Sin embargo, encontramos que no resulta fácil al lector identificar la razón trigonométrica inversa ya que dado el tratamiento que hace el autor es posible que este concepto esté inmerso en el tema de función generando así una confusión al usuario del libro de texto. Dicho tratamiento fue posible de identificar teniendo en cuenta las características de la razón y de la función trigonométrica inversa (tabla 2) recordando que la razón se da en un contexto estático-proporcional y la función en un contexto dinámico-periódico así como en la razón hay un uso del ángulo, que puede medirse tanto en grados como en radianes mientras que para la función se habla de la existencia del argumento de la función expresado en radianes que corresponde no a un ángulo sino a un número real, también por la trascendencia de la razón (geométrico) a la función (variacional). Otro factor que se identifica es que algunas de las traducciones que realizan de los libros tratan como sinónimos indistintos los términos de razón y función lo que hace que el lector no distinga un concepto del otro.

El tema de funciones trigonométricas inversas se encuentra en el capítulo de funciones, teniendo como tema anterior ya sea las funciones logarítmicas, exponenciales o las funciones trigonométricas y como tema posterior las funciones hiperbólicas. Así mismo es común encontrar el tema de función trigonométrica en los capítulos de derivadas e integrales de funciones donde se inicia con un repaso del tema de funciones trigonométricas inversas y como temas posteriores derivadas e integrales de las funciones trigonométricas inversas.

Estas constantes se reconocen en la mayoría de las tareas analizadas lo que permite ver que no hay una articulación de los conceptos trigonométricos con otros temas tal como se mencionaba en el capítulo de planteamiento del problema, esta estructura resulta aparentemente fácil al lector porque puede ubicar los conceptos rápidamente sin embargo no garantiza una comprensión del concepto.

El contexto cultural "da pertenencia a grupos humanos específicos pues se reconoce su dominio en el comportamiento e interacciones sociales de los sujetos o grupos involucrados" (Torres-Corrales y Montiel, 2020: 32-33). En particular para el análisis de las tareas de los libros de texto relacionados con la ingeniería se establecieron cinco elementos a identificar: idioma del libro, nacionalidad del autor, influencias del autor, destinatarios y estructura didáctica (verbal, simbólica, ilustrativa y anexos). Lo cual permitió identificar el contexto en que se da la tarea, como influye el idioma del libro para el aprendizaje dado que no es lo mismo para un usuario cuya lengua es español comprender plenamente lo que transmite un autor en inglés o cualquier otro idioma ya que las traducciones realizadas por medios digitales no son del todo confiables y pueden traducir la palabra recíproca como inversa o viceversa.

Se consideró como elemento de esta categoría de análisis las influencias del autor ya que determina el estilo y la forma de ver y enseñar la matemática por parte del autor, sin embargo, son muy pocos los libros en los cuales se expone esta influencia, como por ejemplo James Stewart donde menciona que estructura la forma de presentar los temas a partir de la resolución de problemas que propone George Polya, la cual se explica al final del Capítulo 1 y permite identificar un estilo de aprendizaje en el libro de texto. Algunos libros mencionan las personas que contribuyeron en la revisión, o los asesores de tesis sin embargo no hay información de estos personajes en la web lo cual hace difícil identificar esta influencia.

El elemento destinatarios, fue posible identificarlo en la información bibliográfica del libro dada por las editoriales y en el prólogo donde el autor menciona a quien van dirigidos, por lo tanto, hay un contexto y un grado de dificultad que puede variar dependiendo de la población, convirtiéndose en un factor importante al momento de planear una clase o como elección de recurso para el aprendizaje autónomo.

Por último, la estructura didáctica del libro de texto es sumamente importante porque permite identificar los recursos utilizados por el autor para la transmisión del conocimiento y si facilita o no la comprensión de los conceptos, lo cual está muy influenciado por la época, el uso de nuevas tecnologías, las teorías y los estilos de aprendizajes para la enseñanza utilizados por los autores a lo largo del tiempo. En la tabla 4 se muestra un recuento del análisis para la categoría de contexto cultural.

Tabla 4

Síntesis de la caracterización del texto: contexto cultural

<table>
<tr><th></th><th colspan="7">Estructura didáctica</th></tr>
<tr><th rowspan="4">Libros históricos</th><th>Libros</th><th>No Tarea</th><th>Tipo de tarea</th><th>Verbal</th><th>Simbólica</th><th>Ilustrativa</th><th>Anexos</th></tr>
<tr><td>Plane and Spherical Trigonometry (1875)</td><td>1</td><td>Expositiva</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Elementary Trigonometry (1906)</td><td>2</td><td>Expositiva</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td>A Course of Pure Mathematics (1921)</td><td>3</td><td>Ejemplo</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td>x</td></tr>
</table>

	Trigonometría Superior (1944)	4	Expositiva	x	x		x
	Trigonometría Superior (1944)	5	Expositiva	x	x		x
	Algebra y funciones elementales (1978)	6	Expositiva	x	x	x	x
	Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal (1984)	7	Expositiva	x	x	x	x
	Trigonometric functions (Problem Solving Approach) (1988)	8	Expositiva	x	x	x	x
	Cálculo infinitesimal segunda edición (1992)	9	Expositiva	x	x	x	
Libros contemporáneos	Geometría Plana y del espacio y Trigonometría (2004)	10	Ejemplo	x	x		x
	Cálculo I de una Variable novena edición (2010)	11	Ejemplo	x	x		x
	Cálculo de una variable. Conceptos y contextos. (2010)	12	Expositiva	x	x	x	x
	Cálculo con Trascendentes Tempranas cuarta edición (2011)	13	Expositiva	x	x	x	x
	Cálculo con Trascendentes Tempranas cuarta edición (2011)	14	Ejemplo	x	x	x	x
	Cálculo aplicado. Competencias matemáticas a través de Contextos tomo 1	15	Expositiva	x	x	x	x

Fuente: elaboración propia.

En los libros de textos históricos se observó que las primeras cinco tareas analizadas comprendidas entre los años 1875 a 1944 presentan una estructura didáctica verbal y simbólica para definir la razón y función trigonométrica inversa, mientras que las otras cuatro tareas comprendidas entre los años de 1978 a 1992 presentan una estructura didáctica verbal, simbólica e ilustrativa. Dado que los libros están ordenados cronológicamente se puede identificar que, por la época, los libros de texto presentaban ausencia o poco uso de ilustraciones para complementar las definiciones y exposiciones. Por su parte, las tareas analizadas en los libros de texto contemporáneos más recientes presentan una estructura didáctica verbal, simbólica e ilustrativa donde se reconoce una evolución del libro del texto en cuanto a las técnicas de aprendizaje para facilitar la comprensión como, por ejemplo, el uso de colores para resaltar algunas definiciones o conceptos importantes, el uso de softwares para representar gráficos que facilitan la comprensión de la exposición que realiza el autor y la implementación de notas para recordar.

En cuanto a la estructura didáctica verbal se identifica una mayor rigurosidad en el discurso en los libros de texto históricos para las definiciones porque algunas explicaciones están fundamentadas en demostraciones que permiten identificar las características y el origen de los conceptos comparado con algunos de los libros contemporáneos donde las definiciones son mucho más cortas y con poca profundización.

Referente a los Anexos la mayoría de los libros de texto hacen uso de esta herramienta. En los libros de texto históricos se encontró que en la mayoría de los libros los Anexos corresponden a las tablas de logaritmos de las razones trigonométricas para el hallar el del valor del ángulo (razón trigonométrica inversa implícita). En los libros de texto contemporáneos varios de los Anexos contienen fórmulas de las razones y funciones trigonométricas con sus respectivas gráficas.

6.2 Análisis de la Caracterización de la matemática

La categoría de análisis 2, caracterización de la matemática, incluye la identificación del contexto de significación "…el contexto que da forma y sentido a la matemática en juego" (Torres-Corrales y Montiel, 2020: 32-33). En particular para el análisis de las tareas de los libros de texto relacionados con la ingeniería se establecieron cinco elementos a identificar: situación (Intramatemática o Extramatemática), diagramas (círculo y triángulo), definición de dominio y rango, verificación de la solución, y usos de las nociones trigonométricas.

En la tabla 5 se muestra un recuento del análisis para la categoría de contexto situacional referente a la razón trigonométrica inversa; entre paréntesis se hace un conteo de la presencia de cada uno de los elementos de esta categoría de análisis con el fin de entender en qué condiciones de las tareas se da el uso de la razón trigonométrica inversa.

Tabla 5

Síntesis de la actividad matemática de la razón trigonométrica inversa: contexto de significación

	Situación	Usos	Diagramas	Verificación
Libros históricos	(5) Intramatemática (0) Extramatemática	(0) Aritmético (2) Algebraico (0) Cuantitativo (5) Métrico (0) Gráfico (1) Operador Inverso	(0) Triángulo rectángulo (0) Círculo unitario	(3) Si (2) No
Libros contemporáneos	(3) Intramatemática (0) Extramatemática	(2) Aritmético (1) Algebraico (3) Cuantitativo (2) Métrico (2) Gráfico (1) Operador Inverso	(2) Triángulo rectángulo (0) Círculo unitario	(3) Si (0) No

Fuente: elaboración propia.

Las situaciones analizadas fueron todas de carácter Intramatemático, esto no quiere decir que los libros de textos analizados no contengan situaciones Extramatematicas, sino que para esta investigación las tareas analizadas fueron de tipo Expositiva y a Modo de ejemplo, y ninguna de las tareas de esta clasificación presentaron una situación matematizable para la razón y función trigonométrica inversa.

Las tareas que presentaron situaciones Extramatematicas son las de A modo de ejercicios que están planteadas para que se resuelvan de manera autónoma, sin embargo se decidió no analizarlas dado que las tareas A modo de ejercicios no presentan una transmisión del conocimiento sino una técnica de destreza, la cual es posible evaluar su pertinencia y si promueven o no la comprensión pero, para ello es necesario conocer en primera instancia las bases que fundamentan la enseñanza de la función y razón trigonométrica inversa, que es justamente uno de los resultados esperados de éste estudio.

En algunos capítulos los autores introducen el tema mediante una situación Extramatemática lo cual permite una construcción del concepto por parte del estudiante mediante la identificación de las características del objeto matemático, lo que sería apropiado para el tema de las razones y funciones trigonométricas inversas y su aplicación en otras áreas del conocimiento porque no solamente motiva al estudiante sino que le permite conocer la génesis, en donde está inmersa, cómo se construye y finalmente cómo aplicarla.

Los usos métrico, aritmético, algebraico, cuantitativo, métrico y gráfico identificados por Torres-Corrales (2020) y Torres-Corrales y Montiel (2020) asociados a la actividad matemática para las nociones trigonométricas también estuvieron presentes en las tareas analizadas para esta investigación, como también se encontró la presencia de dos usos más: el uso como operador inverso y el uso como operador de composición de funciones.

Los usos que se reconocieron para la razón trigonométrica inversa en los libros de texto históricos fueron: el uso algebraico, métrico y un nuevo uso como operador inverso donde la razón trigonométrica inversa es el operador inverso de la función trigonométrica que da como resultado el valor del ángulo. Estos usos permiten encontrar una relación en la situación y el contexto de la tarea. Si observamos los resultados podemos ver que no hay uso de diagramas por tal manera no se identifica un uso gráfico o cuantitativo, no porque no estén inmersos en la practicas que acompañan a la razón trigonométrica sino por el contexto en el que está dada la tarea, vemos una estructura didáctica verbal, donde se hace uso de símbolos que operan entre sí, uso algebraico, y el lenguaje natural para explicar el concepto de razón trigonométrica inversa.

Dado que las tareas analizadas fueron situaciones Intramatemáticas y con ausencia de diagramas se puede deducir la razón por la cual predomina el uso métrico en las primeras cinco tareas analizadas de libros de años, las cuales se definen o se solucionan partiendo de convenciones particulares.

En las tareas analizadas de la razón trigonométrica inversa correspondientes a los libros de texto contemporáneos se reconoce una mayor cantidad de usos como el aritmético, métrico, cuantitativo, gráfico y operador inverso. Tal como se mencionaba anteriormente el libro de texto contemporáneo presentan un cambio en cuanto a su estructura didáctica y a la forma de presentar las tareas, especialmente el uso de diagramas los cuales permiten reconocer un uso gráfico y cuantitativo que facilitan la comprensión dado que hay una construcción que permite identificar de dónde provienen las propiedades de la razón trigonométrica inversa.

En algunas tareas analizadas se emplea el triángulo rectángulo para definir las razones trigonométricas inversas, por lo tanto, se identifica un contexto estático-proporcional de las tareas propio de su contexto de génesis que menciona Montiel (2011). También, todas las tareas de la razón trigonométrica se pueden verificar mediante el uso de diagramas, métodos gráficos y el uso de la calculadora, lo cual permite que el usuario retroalimente los conocimientos encontrados en el libro de texto.

En la tabla 6 se muestra un recuento del análisis para la categoría de contexto de significación referente a la función trigonométrica inversa; se hace un conteo de la presencia de cada uno de los elementos de esta categoría de análisis con el fin de entender en qué condiciones de las tareas se da el uso de la función trigonométrica inversa.

Tabla 6

Síntesis de la actividad matemática de la función trigonométrica inversa: contexto de significación

Fuente: elaboración propia

	Tipo de situación	Usos	Concepción	Verificación	Restricción del dominio y rango
Libros históricos	(5) Intramatemática (0) Extramatemática	(0) Aritmético (1) Algebraico (3) Cuantitativo (4) Métrico (4) Gráfico (2) Operador Inverso (2) Operador de composición de funciones	(1) Triángulo rectángulo (1) Círculo unitario	(5) Si (0) No	(4) Dominio (4) Rango
Libros contemporáneos	Intramatemática (3) Extramatemática (0)	(0) Aritmético (0) Algebraico (3) Cuantitativo (0) Métrico (3) Gráfico (0) Operador Inverso (0) Operador de composición de funciones	(1) Triángulo rectángulo (0) Círculo unitario	(3) Si (0) No	(3) Dominio (3) Rango

Fuente: elaboración propia

Una de las características destacadas cuando el concepto de razón trigonométrica inversa transciende al concepto de función trigonométrica inversa es que, ya no se habla del ángulo de la función en sentido estricto, sino del argumento de la función. Esta característica está implícita en las definiciones encontradas en la mayoría de los libros de texto, pues son pocos los autores que hacen uso explícito de las nociones, dado que utilizan el termino ángulo para definir la función en lugar del argumento. El concepto de ángulo cambia en la función trigonométrica, su argumento es un número real y no un ángulo en grados. Dado lo anterior, se reconoce una transformación didáctica del concepto de ángulo puesto que la manera en que se comunica este conocimiento promueve un significado y usos del ángulo distintos al conocimiento de origen.

Algunos libros de texto realizan un cambio en el lenguaje, pero no de significado. Este factor no es coherente para el desarrollo del pensamiento funcional, dado que como señala la investigación Montiel y Buendía (2013) para abordar este tipo de pensamiento se necesita de un contexto dinámico, pues no hay un cambio en la notación y en las características que diferencian la razón de la función trigonométrica inversa, al no darse esta transición, no se fomenta un cambio de significado para este conocimiento matemático. Esta investigación identificó que no hay una concepción de funcionalidad en los estudiantes acerca de las nociones trigonométricas, lo mismo ocurre con los libros de texto ya que se mantiene la razón trigonométrica y sus unidades de medida como el instrumento de resolución para todo lo que se relacione con el seno, el coseno, la tangente y sus recíprocas, indistintamente si se trata de una razón o de una función.

La mayoría de los libros analizados definen las razones trigonométricas inversas desde el triángulo rectángulo y continúan con el triángulo rectángulo para definir las funciones trigonométricas inversas lo que obstaculiza la distinción entre los objetos matemáticos al tratarse dentro del mismo contexto.

Para la función trigonométrica inversa se identifica que tanto en los libros históricos como contemporáneos predominan los usos: métrico, gráfico y cuantitativo en las tareas, lo cual favorece el reconocimiento de las propiedades de las funciones trigonométricas y la verificación de las definiciones. Así mismo se encontró que un uso de las funciones trigonométricas como Operador de composición de funciones del tipo $f(g(x))$, donde f es la función trigonométrica o la función trigonométrica inversa, mientras que g es cualquier otra función.

Si bien, es complicado para el estudiante comprender el paso de la razón a la función trigonométrica inversa por factores como la notación o por qué los conceptos se dan por separado, son pocas las tareas que presentan dicha transición. En el presente análisis se encontró solamente una tarea (figura 11) donde el autor presenta cómo transciende el concepto de la razón para definir la función trigonométrica inversa permitiendo que sea posible identificar las diferencias entre las características de estos objetos matemáticos (tabla 2).

Las funciones trigonométricas inversas refuerzan el concepto de dominio y rango trabajado en funciones anteriores dado que las funciones trigonométricas, por su naturaleza periódica, no son biunívocas lo que hace que definir una función inversa no sea posible para la función original y sea necesario aplicar el concepto de dominio y rango para definir la nueva función para cual si existe su inversa.

De las nueve tareas cuyo tema son las funciones trigonométricas inversas solamente la tarea 7 (figura 11) presenta como definir el nuevo dominio, aclarando que no solamente existe un intervalo donde la función trigonométrica es biunívoca sino infinitos intervalos y aunque solo se acostumbra a tomar uno como aparece en la mayoría de los libros se puede elegir cualquiera de ellos, esta característica es muy importante porque el dominio y rango de las funciones pasa de ser un hecho memorístico dado hacia uno que se construye mediante las propiedades de las funciones trigonométricas.

Otra constante identificada en la mayoría de las tareas analizadas es que definen a la función inversa como la función inversa de la función trigonométrica, más no de la función trigonométrica restringida, lo cual no hace visible que el proceso de inversión elimina a la función original de su periodicidad, promoviendo así una definición errónea de las funciones trigonométricas inversas.

En cuanto a las verificaciones dadas en los libros de texto históricos comparadas con los libros de texto contemporáneos, se identifican métodos más ilustrativos como el método de la línea horizontal y la rotación de las gráficas de las funciones facilitando la comprensión referente a la construcción de la función trigonométrica inversa.

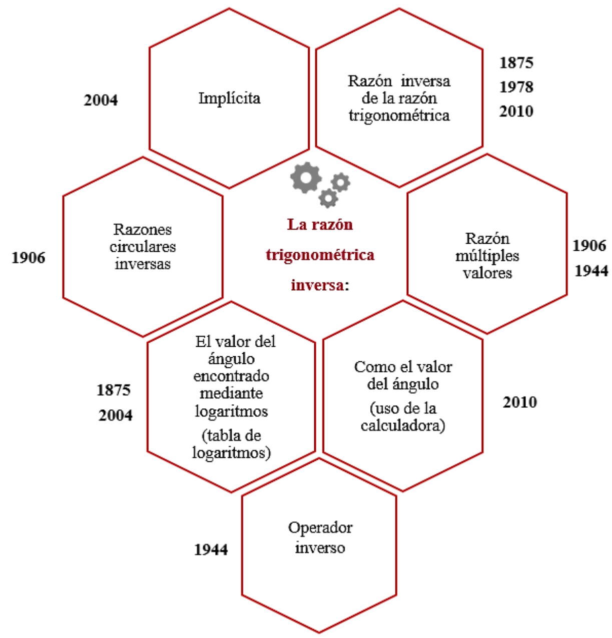
6.3 Significados que promueve el libro de texto

Dado el análisis de los resultados de las categorías 1 y 2, fue posible identificar los significados que promueve el libro de texto en torno a la razón y la función trigonométrica inversa de las tareas analizadas.

Conforme al reconocimiento de las prácticas se identificaron lo significados relacionados con la razón trigonométrica inversa (figura 21). Se encontró que en algunos libros de texto históricos la razón trigonométrica inversa está implícita en el cálculo de ángulos, ya sea mediante el método de logaritmos o con la calculadora, lo que permitió reconocer una transformación didáctica en cuanto a la definición de los conceptos y sus características.

Figura 21

Transformación didáctica de la razón trigonométrica inversa en cuanto al significado que se promueve en los libros de texto.



Fuente: elaboración propia

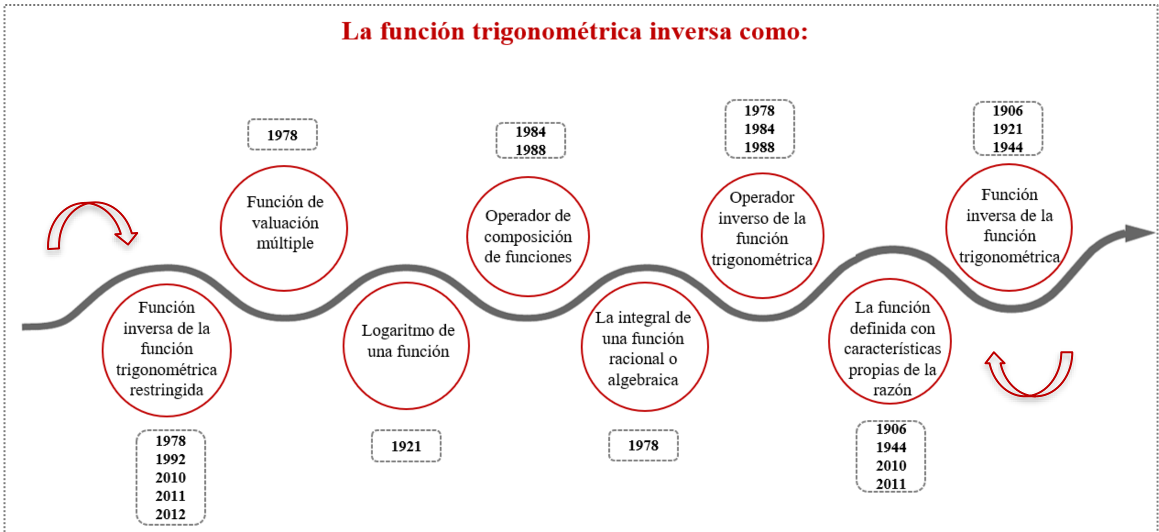
Otros libros, por el contrario, se limitan al uso de lenguaje verbal y simbólico para definir la razón trigonométrica inversa como algo preestablecido, sin construcción alguna de la noción. Se identificó el uso de otros términos como la razón circular inversa para referirse a la razón trigonométrica inversa, donde se deduce un contexto implícito del círculo unitario.

El expresar la razón trigonométrica inversa simbólicamente mediante una ecuación se promueve un significado como razón de valores múltiples. Finalmente, se identificó un nuevo uso de la razón trigonométrica inversa como operador inverso de la razón trigonométrica que arroja el valor del ángulo mediante la calculadora.

Entre los significados asociados a la función trigonométrica inversa (figura 22) se encontró un significado de la función trigonométrica inversa como una función de valuación múltiple dado que puede definir infinitos intervalos donde la función trigonométrica es biunívoca.

Figura 22

Transformación didáctica de la función trigonométrica inversa en cuanto al significado que se promueve en los libros de texto.



Fuente: elaboración propia

Se presenta un significado de la función trigonométrica inversa como el logaritmo de una función y a su vez como la integral de una función racional o algebraica lo que permite ver su aplicación en el Cálculo.

Los libros contemporáneos promueven un significado de la función trigonométrica inversa restringida mediante la restricción del dominio y rango de las funciones trigonométricas, lo cual es importante porque presenta una característica de la función trigonométrica como es su periodicidad, que es fundamental tener en cuenta al momento de realizar el proceso de inversión para definir una función inversa.

Un significado importante que se deduce del uso de la función trigonométrica inversa es como operador inverso de la función trigonométrica directa, lo cual no solamente promueve el uso de la calculadora sino la comprensión de la composición de funciones que es importante para definir una función trigonométrica inversa y para las funciones en general.

Se observa en los resultados como influyen las características que están explicitas en el texto para lograr identificar si el tratamiento que se da es propio de la función o de la razón trigonométrica inversa. Todos estos significados representan un aprendizaje que está unido con cada una de las características de la función, por lo tanto, la forma en la que se transmite el conocimiento puede generar una mayor o menor comprensión de la noción de función.

Dados los resultados anteriores se reconoce que la mayoría de los libros de texto promueven prioritariamente aspectos conceptuales y metodológicos orientados al tratamiento algebraico, lo que implica el empleo de símbolos para operar sin necesidad de comprender los usos de la razón y función trigonométrica inversa. Este aspecto genera implicaciones en cuanto a la comprensión y construcción de los objetos matemáticos por parte del estudiante dado que los usos geométrico y gráfico hacen explícitas las propiedades de los objetos matemáticos y al alejarse de estos, el significado construido por parte de los estudiantes no se fortalece, pues sus procesos se limitan únicamente a lo memorístico, tal como ocurre con la definición de dominio y rango de la función.

7. CONCLUSIONES

En este apartado, se presentan en primer lugar las conclusiones sobre la pregunta y los objetivos del presente estudio histórico-didáctico de la razón y función trigonométrica en libros de texto. Posteriormente, los aportes teóricos a la línea de investigación, los aportes metodológicos al análisis de libros de texto en Matemática Educativa, la validación de los resultados y las limitaciones metodológicas. Finalmente, se incluyen algunas prospectivas de la investigación.

7.1 Conclusiones sobre la pregunta y los objetivos de la investigación

La pregunta planteada en esta investigación fue la siguiente:

¿Cuál es la transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa en libros de texto históricos y contemporáneos relacionados con la ingeniería?

Dado este interrogante se concluye con base en el análisis de los resultados y los fenómenos reportados en el discurso Matemático Escolar que, los cambios que presentan los libros de texto en su forma de comunicar el conocimiento mediante el dME determinan la *Transformación Didáctica* de la razón y función trigonométrica inversa. Aunque el propósito de los autores de promover la comprensión de las definiciones en los libros de texto es el mismo, la forma en la que se presenta esta matemática es diferente. Los resultados evidencian distintos significados (figuras 21 y 22) que se promueven en los libros de texto los cuales se han identificado mediante el reconocimiento de las prácticas asociadas que hacen referencia a la serie de actividades, usos de la matemática explícitos en el cuadro de análisis de texto y otros usos que se identificaron asociados a la razón y función trigonométrica inversa (gráfico, como operador de composición de funciones y como operador inverso, gráfico), de igual manera las características de cada uno de los objetos matemáticos (tabla 2) que se utilizan al momento de comunicar la tarea. Dicha transformación didáctica genera una pérdida del significado como, por ejemplo, la función trigonométrica inversa como la inversa de la función trigonométrica cuando en realidad es la inversa de la nueva función trigonométrica restringida.

Al analizar los libros de texto se evidencian cambios en la estructura didáctica, que se generan por el uso de las nuevas tecnologías que a lo largo del tiempo que buscan hacer más visual la información, mejorando la calidad del libro de texto, así como la construcción de las gráficas. De igual manera el discurso ya no es tan riguroso en los libros de texto contemporáneo como en los libros históricos, la ausencia de demostraciones, el uso o no de gráficas, el tratar el termino reciproco como sinónimo de inverso, el no diferenciar las características de la razón de las de la función, entre otras aspectos mencionados anteriormente determina una forma de transmitir el conocimiento y que es diferente en cada uno de los libros de texto, lo que arrojo como resultados diversos significados asociados entrono a la razón y función trigonométrica inversa y es justamente todos estos cambios en el significado lo que determina la transformación didáctica.

Para dar respuesta a la pregunta de investigación se formuló el objetivo general y los objetivos específicos que hacen referencia a cada uno de los procesos que contribuyeron a determinar la transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa.

Objetivo general: *Identificar los significados que promueven las tareas que se resuelven en libros de texto de ingeniería mediante el reconocimiento de las prácticas que acompañan al trabajo en torno a la razón y función trigonométrica inversa para determinar la transformación didáctica de dicho conocimiento*.

En cada una de las tareas analizadas se identificó un conjunto de actividades mediante el desarrollo de los primeros dos objetivos específicos. El primero consistió en identificar el contexto cultural y situacional de las tareas planteadas en los libros de texto que se logró con el análisis de la caracterización del texto. La segunda categoría de análisis que hace referencia a la caracterización de la matemática permitió identificar el contexto de significación de la razón y función trigonométrica inversa mediante las prácticas explicitas en los elementos que la conforman: si realiza o no diagramas, si hace no restricción del rango o dominio y especialmente los usos de las nociones trigonométricas (aritmético, algebraico, métrico, gráfico, cuantitativo, operador de composición de funciones y operador inverso). El análisis del producto de enseñanza permitió identificar los *significados* en torno a la razón y función trigonométrica inversa para finalmente determinar la transformación didáctica dando cumplimiento así al tercer y cuarto objetivo específico.

Las siguientes son algunas de las conclusiones derivadas de los productos obtenidos en los objetivos de la investigación:

Se concluye que cada una de las actividades que conforman las prácticas están dadas en un contexto que puede o no favorecer el aprendizaje, de allí la importancia de las características de los objetos matemáticos. Los contextos de la trigonometría del triángulo y del círculo unitario fueron dos de los escenarios encontrados en algunas tareas en los que se desarrollaron las prácticas, cuya pertinencia en la actividad matemática depende del significado que se quiere promover. Por ejemplo, Montiel (2005) hace mención que el uso del triángulo rectángulo se asocia con las prácticas relativas a la razón trigonométrica por su contexto estático-proporcional; pero, si lo que se pretende es una comprensión de la noción ángulo negativo, sería más conveniente una trigonometría enfocada en el círculo unitario. Por otro lado, si lo que se quiere promover es el paso de la razón a la función, pasar de una concepción geométrica a una funcional, es conveniente una trigonometría centrada en el círculo por la importancia de la función circular para comprender las funciones trigonométricas, así como el proceso de pasar del grado al radian, sin embargo, para efectos de la investigación se delimitó al reconocimiento de las prácticas mas no su análisis.

La estructura didáctica presentada en los libros juega un papel importante en la tarea, pues esta contribuye a un buen desarrollo de las actividades. Se identificó la necesidad de un uso correcto del lenguaje técnico, dado que el no utilizar los términos o los símbolos correctos, promueven significados distintos al objetivo de la tarea al no hacer explicitas las características de los conceptos y objetos matemáticos, tal como se identificó en algunas tareas con la definición de la función trigonométrica inversa cuyas prácticas estaban asociadas más al trabajo en torno a la razón trigonométrica inversa, fenómeno reportado por Soto y Cantoral (2014) referente al dME, haciendo alusión a que se identifica una violencia simbólica, en el sentido de que imponen una única argumentación válida, con significados y procedimientos que nacen de ella en torno a los objetos matemáticos, no considerando el papel y las prácticas de los actores del sistema didáctico en su construcción.

El uso de diagramas propicia una mejor visualización de lo que quiere enseñar el libro de texto, aspecto que con el paso del tiempo se ha enriquecido mediante el uso de la tecnología digital ya que en los libros más antiguos existe una ausencia de diagramas o deficiencia en la calidad de las imágenes. Los libros contemporáneos adhieren nuevas técnicas de aprendizaje gracias a mejoría en la calidad y diseño de los diagramas que se hace posible mediante a través de la implementación de software, por ejemplo GeoGebra, fomentando una retroalimentación más robusta de los procesos de aprendizaje, aunque este elemento no puede estar separado de un buen uso del lenguaje, aspecto que se reconoció en algunos libros de texto históricos los cuales presentan mayor rigurosidad en el discurso y en el uso de demostraciones para reforzar la explicación, característica que con el paso del tiempo se ha ido simplificando, como se hace evidente en los libros de texto contemporáneos.

En los métodos utilizados en las tareas A modo de ejemplo, se identifica que algunos autores son más formales en las instrucciones, lo que permite ver paso a paso el desarrollo del algoritmo para resolver el problema, como también el uso de explicaciones breves para acompañar la parte simbólica, mientras que otros solamente se enfocan en las respuestas, lo que no permite evidenciar un orden lógico en el desarrollo de la tarea. Así mismo algunas tareas A modo de ejemplo presentan herramientas gráficas que permiten verificar la información, mientras que en algunos ejemplos no se hace explicita la forma en la que puede verificarse el resultado de la tarea. Lo que genera una transformación didáctica en cuanto al significado que reconoce el estudiante, dada la variedad de algoritmos y métodos utilizados para la solución de los problemas.

El uso de gráficas para definir las nociones trigonométricas promueve usos como el gráfico y el cuantitativo, que complementan las actividades de las prácticas cuyos usos de las nociones comúnmente se reducían al uso métrico (para las definiciones) o el aritmético y algebraico (para las aplicaciones). En cuanto a los usos planteados en el instrumento de análisis, todos se lograron identificar en las diferentes tareas, con el descubrimiento de dos nuevos usos para las nociones trigonométricas: el de operador de composición de funciones y el de operador inverso, los cuales permitieron encontrar nuevos significados que se promueven los libros de texto.

Los usos de las nociones trigonométricas permiten comprender las características de la matemática y el significado que generan, independientemente del contexto situacional y cultural, por ello es crucial la permanencia de los usos para que sin importar el tipo de tarea que se resuelva, se identifique cuando se trata de la razón o de la función trigonométrica inversa.

Por otro lado, a medida que se estudian objetos de la trigonometría avanzados en complejidad: razón-función-razón inversa-función inversa, también se da un mayor nivel de abstracción, lo que favorece un aprendizaje que prioriza los procesos operativos y algebraicos porque algunos de los usos de la nociones trigonométricas no tienen aplicaciones visibles físicamente, tal como se identificó en el estudio de Torres-Corrales (2020) de la Ingeniería Mecatrónica: la cinemática directa (relación mano-base) de un brazo robot es visible físicamente, la cual es explicada matemáticamente mediante una matriz de transformación lineal en coordenadas homogéneas y en cuya matriz de rotación se encuentra la noción de razón trigonométrica; pero la cinemática inversa de un brazo robot no es visible físicamente, solo se matematiza mediante la matriz de cambio de coordenadas.

7.2 Aporte teórico y metodológicos de la investigación

El estudio documental realizado permite inferir que el dME genera una transformación didáctica y dicha transformación produce una pérdida de significados. Por lo tanto, esta investigación realiza el aporte de un nuevo constructo teórico como lo es la ***Transformación Didáctica*** fenómeno que se puede estudiar desde el escenario de “la *componente didáctica* que se encarga de explicar la difusión del conocimiento a través del discurso matemático escolar y examina los efectos e implicaciones didácticas” (Montiel, 2005, p.101).

El trabajo realizado hace un seguimiento a la línea de investigación de los trabajos de Montiel y Torres-Corrales relacionados con el estudio de las nociones trigonométricas desde la Teoría Socioepistemológica, este estudio es pionero dado que no se han realizado trabajos donde se analice la transformación didáctica ya que los estudios existentes en esta línea de investigación son de corte histórico-epistemológico, didáctico y cognitivo en aula de clases, pero no de la parte histórica-didáctica en los libros de texto.

El diseño de la metodología contribuye a la literatura de la disciplina, porque se presenta un método con su respectiva herramienta teórica-metodológica para realizar el análisis histórico-didáctico de libros de texto de contenidos matemáticos concretos, que puede ser retomada para estudiar otros contenidos matemáticos en la Teoría Socioepistemológica o desde otras teorías, dado que las fases de la metodología pueden desarrollarse para analizar libros de texto sin importar el contenido a analizar y de igual manera los elementos contenidos en el instrumento metodológico pueden ser modificados según la naturaleza de los objetos matemáticos a analizar y desde la teoría que se aborde.

7.3 Limitaciones metodológicas

Una primera limitación es la cantidad de libros y tareas que se analizaron dado que existe una mayor cantidad de libros que pueden contener tareas que permitan el reconocimiento de otras prácticas asociadas a la enseñanza de la razón función trigonométrica inversa.

Otra limitante identificada es que, para efectos de esta investigación, se tuvieron en cuenta dos de los tres tipos de tarea reportados en la literatura: las tareas Expositivas y A modo de ejemplo excluyendo el tipo de tareas A modo de ejercicios, que si bien no presentan un proceso de enseñanza de los conceptos pueden contener elementos importantes para la aplicación de la razón y función trigonométrica inversa en la ingeniería.

La investigación podría ampliarse en estudiar cómo se desarrolla el tema en clases regular mediante el método etnográfico, así se podría confrontar y ampliar lo encontrado en la transformación didáctica de los libros de texto.

7.4 Prospectivas de la investigación

Con base en los resultados de la investigación fue posible determinar la transformación didáctica mediante el reconocimiento de las prácticas –a nivel de acción y de forma operativa con los usos de la matemática reportados– y los significados asociados a la razón y función trigonométrica, elementos que se consideran esenciales en la planeación y formulación de las actividades entorno a este conocimiento presentando así fundamentos para que en otras investigaciones sea posible desarrollar propuestas didácticas que lleven a la construcción de significados más allá de procesos memorísticos.

Los resultados obtenidos en la investigación pretenden ser objeto de reflexión para docentes y estudiantes en cuanto al uso del libro de texto, pues, aunque es la herramienta de enseñanza y aprendizaje más utilizado, el presente estudio obtiene como resultado que la transformación didáctica identificada genera la perdida de significados asociados al objeto de estudio. Por lo tanto, los contenidos en el currículo deben ser objeto de análisis para los docentes y estudiantes, tanto en el aprendizaje grupal como en el aprendizaje autónomo. Los docentes deben cimentar su labor de enseñar en la crítica reflexiva para problematizar los contenidos de los planes de estudio y todo aquello que está involucrado en el aprendizaje, lo que hace patente la necesidad de adaptar tanto los contenidos del currículo como los contenidos de los libros de texto al contexto de aprendizaje adecuado para lograr promover los significados pertinentes respecto a un objeto de enseñanza especifico.

8. REFERENCIAS

Apostol, T. (1984). *Calculo I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal.* Segunda edición. Reverté.

Baldor, J. (2004). *Geometría Plana y del Espacio.* Publicaciones Cultural, S.A de C.V. México.

Betancur, S., Roa, S. y Ballesteros, S. (2021). Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: el análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *24*(3), 245-276. https://doi.org/10.12802/relime.21.2431

Barrera, A. (2014). Unit Circles and Inverse Trigonometric. A method to determine all the inverse trigonometric functions directly from the unit circle. *The Mathematics Teacher*, *108*(2), 114-119. https://doi.org/10.5951/mathteacher.108.2.0114

Braga-Blanco, G. y Belver-Domínguez, J. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, *27*(1), 199-218. http://dx.doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688

Bravo, A. y Cantoral, R. (2012). Los Libros de Texto de Cálculo y el Fenómeno de la Transposición Didáctica. *Educación Matemática*, *24*(2), 91-122. http://funes.uniandes.edu.co/13244/1/Bravo2012Los.pdf

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (número especial)*, 83-102. https://www.redalyc.org/pdf/335/33509905.pdf

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116. https://revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/149

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 9-28. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.123

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Chauvenet, W. (1875) *Plane and Spherical Trigonometry*. J. B. Lippinoott and CO.

Das, B. y Mukherjee, B. (1944). *Higher Trigonometry.* Booksellers and Publishers.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, 45(5), 765-777. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6

González, M. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza* *de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *22*(3), 389-408. https://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v22n3/02124521v22n3p389.pdf

Hall, H. y Knight, S. (1906). *Elementary trigonometry*. Macmillan and Company.

Hardy, G. (1921). *Course of pure mathematics*. Courier Dover Publications.

Kalnin, R. (1978). *Algebra y funciones elementales*. Editorial Latinoamericana.

Larios, V. y Jiménez, A. (2022). Significados parciales de la derivada en libros universitarios en la formación de ingenieros. *Praxis y Saber*, *13*(33), e12274. https://doi.org/10.19053/22160159.v13.n33.2022.1227

Larson, R. y Eduwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable.* Novena edición. MGrawHill Educación.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y López-Esteban, C. (2019). La enseñanza del cálculo diferencial e integral en España: un análisis de los libros de texto del siglo XVII. En G. Schubring, J. Bello y H. Vacca (edits.), *V Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática* (pp. 345-357). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. http://funes.uniandes.edu.co/22503/

Love, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on texts. *In International handbook of mathematics education* (pp. 371-409). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_11

Montero, J., Wettel, L. y Prieto, J. (2013). El estudio de la secante y cosecante de un ángulo por medio de la inversión: una propuesta de interpretación geométrica con GeoGebra. En Parra, H., Noguera, A. y Serres, Y. (Eds.), *VIII Congreso Venezolano de Educación Matemática* (pp. 97-105)http://funes.uniandes.edu.co/18706/1/Montero2013El.p

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional].https://cutt.ly/gOVTZHE

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico. *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas* (pp. 169 - 205). México D. F. Díaz de Santos.

Occelli, M. y Valeiras, B. (2013). Los libros de texto de ciencias como objeto de investigación: una revisión bibliográfica. *Enseñanza de las ciencias Revista de investigación y experiencias didácticas*, *31*(2), 133-152. https://cutt.ly/cOVT0AL

Panchishin, A. y Shaudulidze, E. (1988). *Trigonometric functions (Problem Solving Approach).* Mir Publishers Moscow.

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y. y Castro-Gordillo, W. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, *11*(23), 201-220. https://doi.org/doi:10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Salinas, N., Rodríguez, J., Garza, J., Pulido, R., Santos, F. y Escobedo, J. (2012). *Cálculo aplicado. Competencias Matemáticas a través de Contextos tomo 1*. Cengage Learning

Latinoamérica.

Scholz, O. y Montiel, G. (2018). Transición del contexto geométrico al variacional, el caso de la Trigonometría. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *3*, 2-24. http://funes.uniandes.edu.co/15762/1/Scholz2018Transicion.pdf

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática 28*(50), 1525-1544. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal*. segunda edición. Editorial Reverté.

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable. Conceptos y contextos. Cuarta edición*. Cengage Learning.

Talkokul, E. (2017). Research on the Trigonometry as a Main Function of Sine, Secant, Tangent and Formula of Tan and Cot are Inverse. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, *50*, 147-152. https://ijmttjournal.org/2017/Volume-50/number-3/IJMTT-V50P523.pdf

Torres-Corrales, D. y Montiel, G. (2020). La desarticulación matemática en Ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la Matemática Educativa. *Nóesis. Revista de Ciencias Sociales y Humanidades*, *29*(58-1), 24-55. https://doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Torres-Corrales, D. y Montiel-Espinosa, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en Ingeniería. *Revista Educación* Matemática, *33*(3), 202-232. https://doi.org/10.24844/EM3303.08

Torres-Corrales, D. (2020). Usos y significados de nociones trigonométricas en el problema cinemático directo de la Robótica [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados]. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34180.27524

Zill, D. y Warren, W. (2011). *Cálculo con Trascendentes Tempranas.* Cuarta edición. MGrawHill Educación.