



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en
Matemáticas Aplicadas

CONTROL DE CAOS POR SINCRONIZACIÓN EN ENSAMBLES NEURONALES
TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestro en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

M. en C. J. Alberto Arenas Prado

Dirigido por:

Dr. Octavio Cornejo Pérez

SINODALES

Dr. Octavio Cornejo Pérez
Presidente

Dra. Rebeca del Rocío Peniche Vera
Secretario

Dr. Gualberto C. Solís Perales
Vocal

Dr. Roberto Augusto Gómez Loenzo
Suplente

Dr. Damián Vargas Vázquez
Suplente

Dr. Gilberto Herrera Ruiz
Director de la Facultad

Dr. Luis Gerardo Hernández Sandoval
Director de Investigación y Postgrado

Octavio Cornejo Pérez
Firma

Rebeca Peniche Vera
Firma

Gualberto C. Solís Perales
Firma

Roberto Augusto Gómez Loenzo
Firma

Damián Vargas Vázquez
Firma

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Agosto de 2010
México

RESUMEN

Los fenómenos de sincronización son procesos de gran importancia que ocurren en la naturaleza y, con frecuencia, son generados como un comportamiento deseable en sistemas de ingeniería. Muchas técnicas han sido desarrolladas para el control de caos por sincronización, sin embargo, los esquemas de observador de estados tienen la ventaja de presentar un buen desempeño y producir la sincronización, aún cuando existan parámetros inciertos o no medibles. Un problema reciente en redes complejas es la sincronización controlada, que consiste en imponer un comportamiento deseado en un miembro de la red y luego inducir el mismo comportamiento en toda la red. En esta tesis se aborda el problema de sincronización en sistemas o ensamblajes neuronales, el cual es un tema fundamental de la investigación moderna en dinámica del cerebro y del sistema nervioso en general, y se plantea la aplicación de técnicas de la teoría de control. Se describe una técnica adaptativa de control robusto, la cual es usada para generar la sincronización robusta en ensamblajes neuronales con diferentes topologías y características. Se modela un ensamblaje mínimo compuesto por una neurona maestra y una neurona esclava con dinámica caótica, y se desarrolla el control de la dinámica del ensamblaje. Se construye un observador de estados en base a un esquema adaptativo para generar la sincronización robusta, el cual está compuesto de una ley de control linealizante y un observador de alta ganancia. Se estudia también la sincronización controlada en un ensamblaje neuronal marcapasos y se aplica el mismo esquema de control, el cual es capaz de generar la dinámica de sincronización entre una neurona maestra y el ensamblaje marcapasos con dinámica caótica y dinámica modulada. Por último, se estudia la dinámica de sincronización en un ensamblaje con topología de red grande ($N = 12$) y matriz de conectividad simétrica. Este observador de estados permite generar estados de sincronización con un buen grado de robustez, lográndose así los objetivos planteados en esta tesis.

(Palabras clave: control de caos, sincronización controlada, ensamblajes neuronales, sincronización neuronal)

SUMMARY

Synchronization phenomena are very important processes which are present in nature and, frequently, generated in engineering systems as a desired behavior. Many techniques have been developed in order to control chaotic dynamics through synchronization, however, the state observer schemes present an efficient performance to generate synchronization, even though there exist uncertain or non-measurable parameters. A recent problem is the controlled synchronization in complex networks, which consists of imposing a desired behavior onto a member in the network and then inducing the same behavior in the whole network. This thesis studies, the synchronization problem in neuronal systems or ensembles, which represents a basic issue of the modern research in brain dynamics and dynamics of the nervous system in general. In addition, the application of control theory techniques is proposed. An adaptive technique of robust control is described. This technique is used to generate the robust synchronization in neuronal ensembles with different topologies and characteristics. A minimal ensemble composed of a master neuron and a slave neuron with chaotic behavior is modeled. The control scheme for the neuronal ensemble is developed. An observer state based on an adaptive scheme to generate the robust synchronization is constructed this, is composed of a linearizing control law and a high gain observer. The controlled synchronization of a pacemaker neuronal ensemble was studied by applying the same control scheme, This scheme is able to generate the synchronization dynamics between a master neuron and the pacemaker neuronal ensemble with chaotic dynamics and modulated dynamics. Finally, the synchronization dynamics of an ensemble with large network topology ($N = 12$) and symmetrical connectivity matrix was studied. The observer state is able to generate synchronization states with a high level of robustness; therefore, the objectives of this thesis work were achieved.

(Keywords: chaos control, controlled synchronization, neuronal ensembles, neuronal synchronization)

Dedico esta tesis

A mi Madre que con su amor y oraciones ha hecho posible que hoy este aquí.

A mi Padre quien me ha enseñado que no existe nada imposible.

A mis hermanas y sobrinas por su amor y motivación.

A mi gran amigo de toda la vida Jose Alberto Monroy Rios por siempre estar a mi lado.

Al angel que llego a mi vida para darle sentido Arely.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer:

A la Facultad de Ingeniería por la ayuda brindada.

Al Dr. Gilberto Herrera Ruiz por todo su apoyo y oportunidades brindadas.

A mis sinodales por sus revisiones y comentarios para mejorar esta tesis.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	III
Summary	V
Dedicatoria	VII
Agradecimientos	IX
Índice general	XII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Hipótesis	2
1.3. Objetivo General	2
1.4. Objetivos Particulares	3
2. REVISIÓN DE LITERATURA	5
2.1. Introducción	5
2.2. Sincronización de dinámica caótica	6
2.3. Aplicaciones de los métodos de sincronización en sistemas biológicos	7
2.4. Sincronización en sistemas neuronales	7
2.5. El ganglio estomatogástrico de la langosta	9
2.6. Modelo Hindmarsh-Rose extendido de neuronas	9
2.7. Modelado del STG como una red compleja	10
2.7.1. Definición y propiedades básicas de una red compleja	10
2.7.2. Sincronización en redes de sistemas dinámicos inciertos	12
2.7.3. El grupo marcapasos pilórico como una red compleja	14
3. METODOLOGÍA	15
3.1. Introducción	15
3.2. El problema de sincronización como un sistema de error de sincronización	16
3.2.1. Linealización por retroalimentación de sistemas no lineales con información completa	17
3.3. Sincronización de sistemas con campos vectoriales inciertos	18
3.4. El modelo neuronal de Hindmarsh-Rose extendido y modelado de un ensamble mínimo	21
3.5. Control de la dinámica caótica de un ensamble mínimo	22

3.5.1.	Planteamiento del problema de sincronización para un ensamble mínimo por retroalimentación de estados	22
3.5.2.	Dinámica interna del sistema de error de sincronización	24
3.5.3.	Construcción del observador de estados	26
3.6.	Dinámica de sincronización en un pequeño ensamble neuronal marcapasos . .	27
3.7.	Dinámica de sincronización en ensambles con topologías de redes grandes . .	32
4.	RESULTADOS	35
4.1.	Ensamble de una neurona maestra y una neurona esclava con dinámica caótica	35
4.2.	Ensamble neuronal marcapasos del CPG pilórico.	37
4.2.1.	Ensamble marcapasos con dinámica caótica	37
4.2.2.	Ensamble neuronal marcapasos con dinámica modulada por forzamiento periódico.	41
4.3.	Ensamble con topología de red grande (N=12).	44
5.	CONCLUSIONES	51
	LITERATURA CITADA	53
	APÉNDICE	57

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Ensamble neuronal marcapasos del circuito pilórico en el STG de la langosta. El ensamble tiene tres neuronas eléctricamente acopladas: la neurona marcapasos principal AB y dos motoneuronas PD. Existen otras entradas modulatorias que vienen del circuito gástrico y ganglios anteriores no mostrados aquí	14
3.1. La red de control del ensamble neuronal marcapasos pilórico. N_0 representan una neurona maestra exterior, AB es la neurona marcapasos principal, PD son las motoneuronas pilóricas dilatadoras y u es la ley de control.	28
3.2. Ensamble de la red con $N=12$ nodos y su conectividad.	34
4.1. Actividad del potencial de acción de la neurona maestra en el ensamble mínimo.	35
4.2. Actividad del potencial de acción de la neurona esclava en el ensamble mínimo.	36
4.3. Actividad de los potenciales de acción en estado asíncrono y en sincronía del ensamble mínimo.	36
4.4. Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona esclava del ensamble mínimo.	37
4.5. La respuesta dinámica de la ley de control para el ensamble mínimo.	37
4.6. Actividad del potencial de acción de la neurona maestra para control del ensamble marcapasos con dinámica caótica.	38
4.7. Actividad del potencial de acción del ensamble marcapasos con dinámica caótica.	38
4.8. Actividad del potencial de acción en estado asíncrono y en sincronía entre la neurona maestra y el ensamble marcapasos.	39
4.9. Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona AB esclava.	39
4.10. Espacio de fase del potencial de acción entre las neuronas PD.	40
4.11. Espacio de fase del potencial de acción la neurona AB y una neurona PD.	40
4.12. La respuesta dinámica de la ley de control para el ensamble marcapasos con dinámica caótica.	41
4.13. Actividad del potencial de acción de la neurona maestra para control del ensamble marcapasos con dinámica modulada.	41
4.14. Actividad del potencial de acción del ensamble marcapasos con dinámica modulada.	42
4.15. Actividad de los potenciales de acción en estado asíncrono y en sincronía entre la neurona maestra y el ensamble marcapasos con dinámica modulada.	42

4.16. Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona AB esclava con dinámica modulada.	43
4.17. Espacio de fase del potencial de acción entre dos neuronas PD con dinámica modulada.	43
4.18. Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona AB y una neurona PD.	44
4.19. La respuesta dinámica de la ley de control para el ensamble marcapasos con dinámica modulada.	44
4.20. Actividad del potencial de acción de la neurona maestra para control del ensamble con $N=12$ nodos.	45
4.21. Actividad del potencial de acción del ensamble con $N=12$ nodos.	45
4.22. Actividad del potencial de acción en estado asíncrono y en sincronía entre la neurona maestra y el ensamble con $N=12$ nodos.	46
4.23. Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona esclava $N1$	46
4.24. Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona esclava $N2$	47
4.25. Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona $N6$	47
4.26. Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona $N12$	48
4.27. Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona esclava $N1$ y la neurona $N6$	48
4.28. La respuesta dinámica de la ley de control para el ensamble con $N=12$ nodos.	49

I. INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

Los fenómenos de sincronización son procesos de gran importancia que ocurren en la naturaleza, y con frecuencia son generados como un comportamiento deseable en sistemas de ingeniería. En términos generales, el concepto de sincronización nos refiere a la forma en la cual los elementos de sistemas acoplados, debido a su dinámica, se comunican y exhiben un mismo comportamiento colectivo (Strogatz, 2003). Algunos ejemplos son: el centelleo sincronizado de luciérnagas, la sincronización de células marcapasos del corazón, y la sincronización producida por el procesamiento de información biológica en ensamblajes neuronales. Otros ejemplos son la sincronización generada en chips de computadoras, en sistemas de comunicación y en sistemas robóticos como un problema de coordinación.

Por otra parte, la cuestión acerca de pronosticar exactamente la evolución en el tiempo de diversos sistemas generó el descubrimiento de la existencia del caos. El concepto de caos usualmente se refiere al problema de si es posible o no hacer predicciones de largo plazo acerca del comportamiento de un sistema. Existen varias definiciones matemáticas del caos, sin embargo, todas ellas expresan la alta sensibilidad a las condiciones iniciales. Un sistema determinístico se dice que es caótico si los requerimientos necesarios de no linealidad y dimensionalidad (de al menos 3) son característicos para tal sistema (Boccaletti, 2000). Durante las últimas décadas ha habido un interés creciente en el estudio de sistemas caóticos, debido a que el caos no puede ser pronosticado pero sí puede ser controlado. El problema del control del caos es de interés para teóricos e ingenieros de control. El interés se origina porque muchas observaciones muestran que el comportamiento caótico es común en la naturaleza; por ejemplo, la dinámica caótica puede ser encontrada en meteorología, en física del plasma, en el corazón y en el cerebro de organismos vivos.

Los resultados experimentales que tratan con el control de sistemas caóticos conducen prácticamente a un número ilimitado de aplicaciones técnicas en ingeniería mecánica y espacial, sistemas eléctricos y electrónicos, sistemas de comunicación e información, etc. Dos aplicaciones de control de caos han sido estudiadas extensamente en los últimos años: la aplicación en sistemas de comunicación como es el caso de encriptación, y la sincronización de dinámicas caóticas para esquemas de comunicación entre ensamblajes biológicos (Boccaletti, 2000; Andrievskii, 2003a; Andrievskii, 2003b).

La aparición del comportamiento colectivo en grandes ensamblajes o redes de elementos oscilatorios acoplados son uno de los problemas más antiguos en el estudio de sistemas dinámicos. Sin embargo, en realidad es un campo desafiante para el entendimiento teórico, como también para aplicaciones en diversas disciplinas, que van desde la física, química, biología y las neurociencias, la ingeniería, hasta las ciencias sociales y administrativas.

El fenómeno básico de la formación de esta estructura es la sincronización, es decir, el régimen de la actividad coherente, el cual es universal en muchos sistemas dinámicos y se puede entender a partir del análisis de los modelos comunes de redes oscilatorias (Osipov, 2007). Por otro lado, el fenómeno de sincronización en redes complejas ha atraído mucha atención debido a la diversidad de sus aplicaciones.

Ensamblados pequeños de neuronas tales como los generadores de patrones centrales son conocidos por expresar oscilaciones regulares de patrones de disparo compuestos por ráfagas de potenciales de acción. Por el contrario, las neuronas individuales del generador central de patrones (CPG) aisladas del resto de la red pueden generar patrones de disparo irregulares. (Szucs, 2000) estudiaron el comportamiento cooperativo en el CPG desarrollando una neurona electrónica analógica que reproduce los patrones de disparo observados en las neuronas pilóricas del CPG de la langosta. Usando una sinapsis artificial sintonizable, ellos conectaron una neurona electrónica bidireccionalmente a las neuronas del CPG. Ellos encontraron que las oscilaciones periódicas de disparo de este ensamble híbrido dependen de la fuerza y signo del acoplamiento eléctrico. Se encontró que las redes híbridas restablecen las características rítmicas del CPG tanto cuando las oscilaciones de las neuronas electrónicas son regulares como cuando son irregulares (Szucs, 2000). Por lo cual se considera que la ingeniería de control puede ser útil en el estudio y aplicaciones en estos sistemas híbridos. Se piensa también que la implementación de los métodos de la ingeniería de control pueden ser útiles en aplicaciones de orientación Biomédica.

1.2. Hipótesis

Un problema reciente en redes complejas es la sincronización controlada que consiste en imponer un comportamiento deseado en un miembro de la red y luego inducir el mismo comportamiento en toda la red. Muchas técnicas han sido desarrolladas para el control de caos por sincronización, sin embargo, los esquemas de observador de estados tienen la ventaja de presentar un buen desempeño y producir la sincronización aún cuando existen parámetros inciertos o no medibles. Por lo tanto, se puede aprovechar el conocimiento previo para diseñar observadores que permitan estimar estados y/o parámetros que no pueden ser medidos en la experimentación, y aplicar estos observadores para generar la sincronización controlada en ensambles neuronales. Se cree que la aplicación de dispositivos de control permitirá el mejor entendimiento del procesamiento de información biológica en ensambles neuronales, la cual se da en forma sincronizada.

1.3. Objetivo General

El objetivo general de esta tesis es controlar la dinámica caótica y regular en ensambles neuronales con diferente topología y características mediante sincronización utilizando técnicas de la teoría de control no lineal.

1.4. Objetivos Particulares

- Generar dinámica de sincronización para control de caos en un ensamble mínimo compuesto de una neurona maestra y una neurona esclava con comportamiento caótico mediante la construcción de un observador de estados.
- Generar la sincronización controlada en un ensamble neuronal marcapasos del CPG pilórico con dinámica caótica y dinámica regular al inducir la dinámica de una neurona maestra mediante un observador de estados.
- Generar la sincronización controlada en un ensamble neuronal con topología de red grande ($N=12$) al inducir la dinámica de una neurona maestra mediante un observador de estados.

II. REVISIÓN DE LITERATURA

En este capítulo se desarrollan los siguientes temas: la sincronización de dinámica caótica donde se mencionan los métodos que han sido propuestos para controlar la dinámica caótica de sistemas, y también el problema básico concerniente al control de dinámicas caóticas dentro de los métodos de retroalimentación. Se describe la aplicación de los métodos de sincronización en sistemas biológicos donde se implementa la técnica por retroalimentación, la cual además tiene una amplia variedad de aplicaciones técnicas y científicas. Se aborda el tema de sincronización en sistemas neuronales en el cual se deja de manifiesto que la sincronización de los patrones de actividad neuronal (potenciales de acción) es un tema fundamental de la investigación moderna en dinámica del cerebro y del sistema nervioso en general, a su vez, se plantea la aplicación de técnicas de la teoría de control la cual puede ser muy útil para el estudio del problema de sincronización en ensamblajes neuronales. Se presenta el ganglio estomastogástrico de la langosta el cual es probablemente el único de los sistemas neuronales en el que casi todas las neuronas se han identificado y se conocen casi todas las relaciones sinápticas entre estas neuronas. Se introduce el Modelo Hindmarsh-Rose extendido de neuronas donde se explica que a lo largo de los años, muchos modelos neuronales han sido desarrolladas para diferentes propósitos. Estos modelos pueden variar desde los biofísicos, como el modelo de Hodgkin y Huxley, hasta los modelos simplificados, todos ellos para el estudio de la dinámica neuronal incluyendo las teorías de sincronización de neuronas. Se presentan algunas definiciones y propiedades básicas de una red compleja donde se enumeran las características más importantes que son comunes a todos los sistemas complejos. Se menciona la sincronización en redes de sistemas dinámicos inciertos donde se presenta la técnica de sincronización de redes dinámicas con nodos idénticos. Por último se presenta el grupo marcapasos pilórico como una red compleja donde el interés es generar la sincronización de la red con una neurona maestra a través de la sincronización controlada.

2.1. Introducción

En la naturaleza existen cientos de situaciones en las que se produce sincronización espontánea. El ritmo de los destellos luminosos de las luciérnagas, los chirridos de los grillos, los aplausos en un concierto o los latidos del corazón son solamente algunos ejemplos de ello. ¿Cómo se produce esta situación en fenómenos tan dispares? Los físicos están trabajando para develar la forma en que la auto-organización genera la aparición espontánea del orden a partir del caos.

Fenómenos similares se dan todo el tiempo en la naturaleza, incluso en dispositivos tan complejos como los seres vivos. Este hecho, como es lógico, ha llamado la atención de

los biólogos. Las luciérnagas macho poseen una especie de oscilador natural interno, que les permite encender y apagar el proceso bioquímico que genera la luz en su abdomen. Su frecuencia depende de la interacción que se produce con los destellos de otros machos que eventualmente se encuentran a su alrededor. Cuando se juntan cientos o miles de estos insectos, todos logran sincronizar sus osciladores internos y emitir los pulsos de luz al mismo tiempo. Esto no es casualidad: la evolución ha fomentado este comportamiento porque el destello sincronizado les permite llamar la atención de las hembras a larga distancia. Simplemente, aquellos capaces de sincronizarse con el resto son los que más posibilidades tienen de enamorar a las hembras y dejar descendencia.

Lo más impresionante de este fenómeno es que desde el punto de vista matemático, resulta de una complejidad tal que todavía no tenemos herramientas lo suficientemente potentes o elaboradas como para simular o predecir el funcionamiento de varios osciladores acoplados. En efecto, a pesar de que las ecuaciones encargadas de describir el comportamiento de un oscilador son sencillas, la interacción entre dos o más de ellos es de una complejidad extraordinaria. En los últimos años, sin embargo, se han producido algunos avances que permiten especular que en un lapso de tiempo razonable (una década), por ejemplo, podremos comprender cabalmente la forma en que se acoplan estos osciladores individuales.

2.2. Sincronización de dinámica caótica

Muchos métodos han sido propuestos para controlar la dinámica caótica de sistemas. Métodos de lazo abierto o sin retroalimentación, y métodos de lazo cerrado o con retroalimentación (Boccaletti 2000; Andrievskii 2003a; Andrievskii, 2003b; Sholl, 2008) han sido desarrollados para producir el comportamiento deseado en sistemas caóticos. Dos problemas básicos concernientes al control de dinámicas caóticas dentro de los métodos de retroalimentación son identificados: la sincronización y supresión del caos. La supresión del caos consiste en la estabilización del sistema alrededor de órbitas regulares o puntos de equilibrio. El problema de la sincronización del caos tiene la característica que el sistema esclavo debe seguir en algún sentido la trayectoria del sistema maestro (Femat y Solís, 1999). Debido a que diversas incertidumbres podrían aparecer en el problema del control del caos, pueden emplearse esquemas adaptativos para lograr la dinámica de sincronización robusta. La sincronización puede lograrse para sistemas caóticos idénticos con condiciones iniciales diferentes (Pecora y Carrol, 1990). Sin embargo, investigaciones recientes han dado por resultado que sistemas no idénticos pueden sincronizarse cuando se desarrollan adecuados esquemas de retroalimentación (Femat et al., 2000).

Desde el punto de vista de la teoría de control geométrico, el problema de sincronización puede ser visto como un problema de estabilización. Para un error de sincronización definido como $x_e = x_{i,M} - x_{i,S}$, donde x_e representa la diferencia entre el estado del sistema maestro y el estado del sistema esclavo, y $x_e \in R^d$, $i = 1, 2, \dots, d$, existe un sistema de error de sincronización cuyas trayectorias convergen exponencialmente a cero bajo una acción de control por retroalimentación; consecuentemente, el sistema esclavo y maestro se acoplan unidireccionalmente. En el siguiente capítulo, el planteamiento del problema de sincronización y sus soluciones usando teoría de control geométrico para los ensambles neuronales propuestos es explicado a detalle.

2.3. Aplicaciones de los métodos de sincronización en sistemas biológicos

Los métodos de sincronización para el control del caos donde se implementa acción por retroalimentación tienen una amplia variedad de aplicaciones técnicas y científicas. Entre las principales aplicaciones técnicas de la sincronización del caos pueden encontrarse una diversidad de esquemas para la comunicación de sistemas. Las aplicaciones científicas están dirigidas al estudio de las propiedades, regularidades y mecanismos del comportamiento de sistemas físicos, químicos y biológicos. Además, muchos resultados interesantes han sido obtenidos cuando los métodos de control son aplicados a sistemas experimentales. Algunos ejemplos de la supresión y sincronización del caos pueden ser encontrados en sistemas biomédicos, medicina, biología y ecología: diseño de marcapasos por retroalimentación, supresión de la actividad epiléptica en redes neuronales, control de la población en plancton y otras especies biológicas.

2.4. Sincronización en sistemas neuronales

La sincronización de los patrones de actividad neuronal (potenciales de acción) es un tema fundamental de la investigación moderna en dinámica del cerebro y del sistema nervioso en general. La evidencia experimental revela que los fenómenos de sincronización son básicos para el procesamiento de información biológica (Gray, 1987; Gray, 1989; Meister et al., 1991; Kreiter, 1996; Elson et al., 1999). Se ha demostrado que grandes ensambles de neuronas cuya funcionalidad está relacionada con la percepción visual sincronizan su actividad oscilatoria cuando se estimulan. Algunas investigaciones consideran que la sincronización de neuronas permiten al cerebro resolver el llamado problema de enlace (binding problem) (Haken, 2002). Estudios recientes sugieren que la sincronización es un mecanismo básico en los procesos cognitivos, y se asocia también con enfermedades como el mal de Parkinson y la epilepsia, y otros procesos fisiológicos (Glass, 2001). Se ha demostrado también que un ensamble mínimo compuesto por dos neuronas biológicas sincroniza su actividad cuando son estimuladas por una fuente de corriente externa (Elson et al., 1999). Sin embargo, los mecanismos totales que subyacen el procesamiento de información no son bien entendidos todavía. Desde un punto de vista teórico, las neuronas se consideran como osciladores no lineales. Algunos estudios teóricos han sido realizados para investigar la dinámica de neuronas individuales y de ensambles neuronales. Los modelos de neuronas más empleados y realísticos son el de Hodgkin-Huxley (Hodgkin y Huxley, 1952) y el de FitzHugh-Nagumo (Haken, 2002). Estos han sido usados en estudios detallados del comportamiento de neuronas bajo estímulos externos (Yu et al., 2001; Parmananda et al., 2002; Wang et al., 1998; Lee et al., 1998; Tanabe et al., 1999); algunos otros estudios consideran el ruido intrínseco como un promotor de la actividad neuronal (Casado, 2003; Casado y Baltanás, 2003). Se piensa que la teoría de control puede ser muy útil para el estudio del problema de sincronización en ensambles neuronales. Las herramientas matemáticas que provee la teoría de control no lineal pueden ser aplicadas convenientemente en modelos matemáticos de Hodgkin-Huxley (Hodgkin, 1952; Koch, 1998), Hindmarsh-Rose (Hindmarsh y Rose, 1984; Pinto et al., 2000), modelo de Butera del complejo preBotzinger (Butera et al., 1999) de pequeños ensambles

neuronales. La clase de sistemas que se abordará en esta tesis se pueden representar en la forma: $\dot{x} = f(x; \pi_1) + g(x; \pi_2)u$, $y_S = x_{1,S}$, en donde $x \in R^n$ es un vector de estados, u es una ley de control, y representa la salida del sistema, π_1 y π_2 son los parámetros del sistema. El problema de sincronización puede estudiarse como un problema de estabilización de un sistema que representa el error entre los sistemas a ser sincronizados (Femat y Alvarez, 1997, Femat et al., 2000). Consideramos dos sistemas no lineales cuyo comportamiento dinámico es caótico, uno para representar el sistema maestro $x_M = f_M(x_M) + g_M(t)$, $y_M = h_M(x_M)$, y otro similar que representa al sistema esclavo $x_S = f_S(x_S) + g_S(t) + Bu$, $y_S = h_S(x_S)$, en donde $g_M(t)$ y $g_S(t)$ son fuerzas de excitación externas. De estos sistemas se puede obtener un sistema dinámico que reproduce el error de la sincronización (Femat et al., 2000), cuyas trayectorias convergen exponencialmente a cero bajo la acción de una ley de control u . La ley de control se obtiene a través de las derivadas de Lie de la salida del sistema del error a lo largo de los campos vectoriales del sistema, de tal manera que dicha ley de control es de tipo linealizante y se puede representar como sigue (Isidori, 1995):

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \left(-L_f^{\rho-1} h(x) + \nu \right) \quad (2.1)$$

en donde $y = h(x)$ es el estado medido del sistema, $L_f h(x)$ representa la derivada de Lie de la función $h(x)$ a lo largo del campo vectorial f , ρ es el grado relativo del sistema, y ν representa la dinámica que se desea inducir al sistema a través del control. Entonces, los sistemas maestro y esclavo se acoplan unidireccionalmente y adquieren un estado dinámico de sincronización bajo la acción del comando de control u . En la práctica, existen estados que no pueden ser medidos con precisión, estados de incertidumbre, y por lo tanto no son accesibles al control. Sin embargo, es posible implementar esquemas adaptivos (Femat et al., 2000) para generar sincronización robusta mediante leyes de control modificadas. El problema de estimar los estados inciertos se resuelve usando observadores de alta ganancia, lo cual permite que las trayectorias del sistema de error de sincronización converjan alrededor del origen, generando la sincronización robusta de los subsistemas maestro y esclavo.

Recientemente, se han obtenido resultados experimentales relevantes al generar sincronización en ensamblajes compuestos por neuronas electrónicas y ensamblajes híbridos de neuronas electrónicas y biológicas (Szucs et al., 2000). Sin embargo, los métodos y ventajas de los esquemas por retroalimentación que provee la teoría de control no han sido aplicados. Los esquemas de sincronización para el control del comportamiento caótico por retroalimentación de estados y de observadores de estado pueden ser de gran utilidad en aplicaciones prácticas en esta clase de sistemas. Las neurociencias se encuentran ahora en un estado en que la madurez de la base experimental biológica ha probado ser fecunda para las actividades de un físico o ingeniero que monitorea las actividades de neuronas individuales, cuando estas neuronas participan en el funcionamiento de una red. Szucs et al. (Szucs et al., 2000) estudiaron las propiedades de una red neuronal biológica compuesta por 14 neuronas, las cuales actúan como un sistema de control en la langosta spiny californiana. La red dirige músculos que contraen y dilatan la cámara pilórica mediante un patrón complejo que mueve el alimento procesado desde el estómago al tracto digestivo de la langosta. En este trabajo se simuló el ensamblaje neuronal completo como un simple circuito electrónico. Con esto, se pudo modificar el ensamblaje, removiendo una neurona clave, y luego restableciendo la actividad de la

neurona biológica con el circuito electrónico. La neurona electrónica (NE) fue modelada por tres ecuaciones diferenciales ordinarias que describieron la dinámica observada de la neurona en el circuito pilórico de la langosta. El voltaje producido por la membrana $x(t)$ representa exactamente la forma de onda creada por la neurona biológica. El circuito analógico fue implementado en una tarjeta e instrumentado de tal forma que sus parámetros pudieron ser fácilmente manejados y reproducidos (Szucs et al., 2000).

2.5. El ganglio estomatogástrico de la langosta

El ganglio estomatogástrico de la langosta (STG) es probablemente el único sistema nervioso central en el que casi todas las neuronas se han identificado y casi todas las relaciones sinápticas entre estas neuronas se conocen. Es fácil entender por qué el estudio de este sistema ha contribuido enormemente a la creación y mejora de nuestros conceptos básicos sobre los mecanismos celulares, circuitos sinápticos y en general. Se sabe que el STG sólo contiene alrededor de 30 neuronas y puede ser fácilmente demostrado que, cuando se aísla este sistema, las 30 neuronas producen dos salidas de patrones que son los principales responsables de los comportamientos de movimiento rítmico de la cámara pilórica y los tres procesadores gástricos. La mayoría de las neuronas del STG son motoneuronas, lo que ha simplificado enormemente el procedimiento de identificación. Además se ha establecido todas las relaciones existentes entre la sinápsis de las neuronas. En el STG estas propiedades han sido ampliamente estudiadas, aunque la mayoría de los mecanismos subyacentes de conductancias iónicas están aún por entenderse. La labor realizada durante los últimos 20 años con el sistema nervioso estomatogástrico de los crustáceos ha contribuido a la aparición de nuevos conceptos sobre circuitos y fisiología celular, especialmente los concernientes al funcionamiento de los CPG. Por mucho tiempo, el circuito pilórico se consideraba un oscilador activado por una célula, mientras que el circuito gástrico se pensó que era un ejemplo de una red activada por un oscilador. Ahora se sabe que otros centros (ganglios anteriores) contienen osciladores pilórico y gástrico. Estos aparecen como osciladores maestro controlando principalmente la frecuencia de los ciclos de los CPG pilórico y gástricos. A pesar de que están recibiendo retroalimentación de ellos mismos, el acoplamiento entre estos osciladores está fuertemente polarizada y el motor rítmico de salidas tiene que ser considerado no solo como el resultado de la actividad de un oscilador simple sino como el resultado de la actividad de una cascada de osciladores. El oscilador maestro parece ser el principal responsable de la frecuencia final de salida, mientras que el CPG es incluido en el generador de patrones. Por último, las neuronas estomatogástricas han proporcionado ejemplos de lo complicado que una actividad de integración central puede ser incluso en un sistema pequeño (Moulins, 1986).

2.6. Modelo Hindmarsh-Rose extendido de neuronas

A lo largo de los años, muchos modelos neuronales han sido desarrolladas para diferentes propósitos. Estos modelos pueden variar desde los biofísicos, como el modelo de Hodgkin y Huxley, hasta los modelos simplificados, todos ellos para la comprensión de las teorías de sincronización de un grupo de neuronas. El modelo de la actividad neuronal

Hindmarsh-Rose tiene como objetivo estudiar el comportamiento de ráfagas de picos del potencial de membrana observado en los experimentos realizados con una sola neurona. La variable relevante es el potencial de membrana, $x(t)$. Existen dos variables más, $y(t)$ y $z(t)$, que tienen en cuenta el transporte de iones a través de la membrana dentro de los canales iónicos. El transporte de iones de sodio y potasio se hace a través de los canales iónicos rápidos y su tasa se mide por $y(t)$, que es la variable de adición. El transporte de otros iones se hace a través de los canales lentos, y se tienen en cuenta en $z(t)$, que es la variable de ráfagas de picos. Entonces, el modelo de Hindmarsh-Rose tiene la forma matemática de un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de las variables dimensionales dinámicas $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (Hindmarsh y Rose, 1984).

$$\dot{x} = y + 3x^2 - x^3 - z + I, \quad (2.2)$$

$$\dot{y} = 1 - 5x^2 - y, \quad (2.3)$$

$$\dot{z} = r(-z + s(x - x_0)), \quad (2.4)$$

donde r y s son parámetros que hacen que el modelo exhiba un comportamiento biológico y con ráfagas de picos (de voltaje). Para la descripción más realista del modelo se construyó un modelo de cuatro dimensiones debido a que permite un mejor ajuste del comportamiento de las neuronas electrónicas con las neuronas vivas, además que pueden ajustarse varios detalles de la actividad, por ejemplo, la anchura de las explosiones o ráfagas de picos. El modelo al cual se le nombrará modelo neuronal Hindmarsh-Rose extendido (HRe), es el siguiente (Pinto et al., 1999):

$$\dot{x} = \alpha y + \beta x^2 - \theta x^3 - \theta z + I, \quad (2.5)$$

$$\dot{y} = \varepsilon - \phi x^2 - y - \gamma w, \quad (2.6)$$

$$\dot{z} = \mu(-z + \sigma(x + \zeta)), \quad (2.7)$$

$$\dot{w} = \nu(-\pi w + \pi(y + \lambda)), \quad (2.8)$$

donde $\alpha, \beta, \theta, \varepsilon, \phi, \gamma, \mu, \sigma, \zeta, \nu, \pi, \lambda$ son constantes que incorporan la dinámica basada en la conductancia y la corriente subyacente, $x(t)$ es el voltaje membranal, $y(t)$ representa una corriente rápida en la dinámica de los iones, y $z(t)$ es una corriente lenta ($m \ll 1$). La ecuación para $w(t)$ representa un proceso dinámico más lento aún ($n < m \ll 1$), y se incluye en el modelo neuronal porque reproduce completamente las oscilaciones caóticas observadas en el STG.

2.7. Modelado del STG como una red compleja

2.7.1 Definición y propiedades básicas de una red compleja

A continuación se enumeran las características más importantes que son comunes a todos los sistemas complejos: 1. Están compuestos de muchas partes que interactúan entre sí. De hecho, el adjetivo complejo en este contexto no significa solamente que el sistema sea complicado, si no también que está compuesto de muchas partes, como un complejo industrial. 2. Cada parte tiene su propia estructura interna y está encargada de llevar a cabo

una función específica. 3. Lo que ocurra a una parte del sistema afecta de manera altamente no lineal a todo el sistema. 4. Presentan comportamientos emergentes, de tal manera que el todo no es la simple suma de sus partes.

Como un ejemplo típico de sistema complejo consideremos a la célula. Evidentemente la célula está compuesta de muchas partes y cada una de estas partes se encarga de realizar alguna función específica dentro de la célula. Las partes de la célula responden de forma no lineal ante perturbaciones externas. Por ejemplo, algunas veces una mutación en el ADN no tiene ningún efecto en la célula, mientras que otras veces una sola mutación puede ser fatal. Además, la célula presenta comportamientos emergentes que no pueden explicarse en términos de las propiedades de sus partes individuales. Así, podemos hablar de una célula enferma, pero no podemos decir que un ribosoma o una proteína estén enfermos. La enfermedad es una propiedad que emerge como resultado de la organización colectiva de todos los constituyentes de la célula. Las redes complejas son conjuntos de muchos nodos conectados que interactúan de alguna forma. A los nodos de una red también se les llama vértices o elementos y se representarán por los símbolos v_1, v_2, \dots, v_N , donde N es el número total de nodos en la red. Si un nodo v_i está conectado con otro nodo v_j , esta conexión se representa por una pareja ordenada (v_i, v_j) . La definición matemática de una red es la siguiente:

Definición 2.1. Una red R consiste de un conjunto de nodos $V = v_1, v_2, \dots, v_N$, y un conjunto de parejas ordenadas $\epsilon = (v_i, v_j) \subset V \times V$. Cada pareja ordenada (v_i, v_j) se llama conexión dirigida del nodo v_i al nodo v_j . La red R se llama no dirigida si para cada pareja $(v_i, v_j) \in \epsilon$ también existe la pareja $(v_j, v_i) \in \epsilon$. De lo contrario, la red se denomina dirigida. Se llamarán a todos los nodos que estén conectados directamente a un nodo v_i , los vecinos de v_i . Finalmente, el número k_i de vecinos del nodo v_i se llama conectividad de v_i , y el promedio de estas conectividades, $\langle k \rangle = N^{-1} \sum_{i=1}^N k_i$, es la conectividad de la red.

Aunque la definición formal de una red es útil en el desarrollo matemático de la teoría, para nuestros propósitos basta con considerar que una red es un montón de nodos entre los que existen conexiones. Una red no dirigida puede pensarse como aquella en la que las conexiones entre los nodos siempre son simétricas (si A está conectada con B, entonces B está conectada con A, mientras que en una red dirigida no todas las conexiones son simétricas, es decir, siempre existen conexiones asimétricas (A está conectado con B pero B no está conectado con A)). Nótese que la definición de red que se dió arriba no dice que todos los nodos deben estar conectados unos con otros. Ni siquiera dice que todos los nodos deben tener conexiones. La definición matemática dice que una red es un conjunto de nodos entre los que existen algunas conexiones. Esto quiere decir que en la red pueden existir nodos que no tengan conexiones, es decir, nodos aislados. También pueden existir grupos de nodos que están conectados entre sí pero que no estén conectados con el resto de la red. El estudio general de redes complejas puede dividirse en dos campos diferentes y complementarios: Estructura y Dinámica. En el primer campo de estudio uno está interesado en determinar las propiedades estructurales (o topológicas) de la red, es decir, en las propiedades que determinan cómo están conectados los nodos unos con otros. En una red, los nodos además de estar conectados también interactúan, y las interacciones pueden dar lugar a fenómenos dinámicos muy interesantes. Por lo tanto, además de estudiar las propiedades estructurales de una red también es importante estudiar sus propiedades dinámicas una vez que se sabe de qué manera interactúan los nodos. Las neuronas en el cerebro están conectadas físicamente unas con otras por medio de uniones entre dendritas y axones. A través de dichas uniones las neuronas

se transmiten señales eléctricas que se propagan por todo el cerebro y que dan lugar a una serie de fenómenos dinámicos interesantes, entre los cuales destacan el reconocimiento de imágenes y sonido, la motricidad de los músculos, el lenguaje, el pensamiento y finalmente la conciencia (Aldana, 2006).

2.7.2 Sincronización en redes de sistemas dinámicos inciertos

Durante las últimas décadas el fenómeno de sincronización de sistemas dinámicos ha recibido mucha atención por parte de la comunidad científica. En años más recientes esta atención se ha concentrado en la sincronización de redes compuestas por un gran número de osciladores acoplados (Wu y Chua, 1995; Boccaletti, 2006). En particular, estudios realizados actualmente se han enfocado al problema de sincronización de sistemas caóticos acoplados en diversas topologías complejas, los resultados obtenidos han avanzado significativamente el entendimiento del fenómeno de sincronización en sistemas del mundo-real, como la Internet, el WWW, las redes sociales e inclusive las redes biológicas (Wang, 2002; Barahona et al., 2002; Wang y Chen, 2002, 2003). En la mayor parte de las referencias mencionadas anteriormente, los autores se han enfocado en el estudio de redes formadas por sistemas dinámicos n -dimensionales acoplados en forma lineal y difusiva, es decir, cuando la red alcanza el estado de sincronización el acoplamiento se desvanece por simetría, y en la que todos los nodos son exactamente iguales entre sí. Esto es altamente improbable bajo condiciones reales, donde los nodos dinámicos pueden presentar incertidumbres paramétricas y están expuestos a perturbaciones externas. En tales situaciones, es necesario establecer mecanismos que lleven la red a su estado de sincronización en forma robusta (Barajas, 2006).

La estabilidad del comportamiento sincronizado de la red dinámica puede ser analizado en diferentes maneras, la herramienta más popular en la bibliografía del tema se basa en aproximaciones locales de la dinámica de la red alrededor del estado sincronizado, la llamada Master Stability Function (MSF) (Pecora et al., 2000). Aunque el análisis mediante MSF es sencillo y establece claramente la relación entre la topología de la red y la sincronización de la dinámica de sus nodos, estos resultados son solo validos en una pequeña vecindad del estado sincronizado. Más aún, esta técnica de análisis no puede ser aplicada en presencia de incertidumbres y perturbaciones, debido a que en estas condiciones la linealización de la dinámica no es factible.

A continuación se presenta la técnica de sincronización de redes dinámicas con nodos idénticos:

La ecuación de estados de una red con N nodos idénticos acoplados en forma lineal y difusiva, donde cada nodo es un sistema dinámico n -dimensional tiene la forma

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.9)$$

donde $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}]^T \in \mathbf{R}^n$ son las variables de estado del nodo i ; $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es un campo vectorial conocido que describe la dinámica interna de cada nodo; $c > 0$ es una constante que indica la fuerza de conexión entre los nodos de la red; $\Gamma \in \mathbf{R}^n$ es una matrix

0-1 constante llamada la matriz de acoplamiento, que indica que elementos de cada estado de cada nodo se acoplan; $A = a_{ij} \in R^{N \times N}$ es la matriz de conectividad o adjunta, la cual se construye asignando $a_{ij} = a_{ji} = 1$ si existe una conexión entre los nodos i y j , si no la hay $a_{ij} = a_{ji} = 0$, para $i \neq j$, mientras que los elementos diagonales se definen como

$$a_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} = -k_i, \quad (2.10)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$ con k_i el grado del nodo i .

Con la matriz de conectividad construida de esa manera, una red es definida como conectada, en el sentido de que no tiene nodos o grupos de nodos aislados, si su matriz de conectividad es simétrica e irreducible.

Lema 2.1: (Wu y Chua, 1995) Si la matriz $A = \{a_{ij}\} \in R^{N \times N}$ es irreducible y sus elementos satisfacen la ecuación (10). Entonces,

i) 0 es un eigenvalor de A de multiplicidad 1 y su eigenvector asociado es $(1, 1, 1, \dots, 1) \in R^N$.

ii) Todos los eigenvalores restantes de A son reales, estrictamente negativos y pueden ser ordenados en la forma

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N \quad (2.11)$$

Definición 2.1: (Wang y Chen, 2002a, Wang y Chen, 2002b) Se dice que la red dinámica (1) ha alcanzado (asintóticamente) una sincronización idéntica completa, si

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t), \quad t \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

donde $s(t) \in R^n$ es una trayectoria de referencia, que puede ser un punto de equilibrio, una solución periódica o incluso una trayectoria caótica. Definiendo el error de sincronización como $\xi_i(t) = x_i(t) - s(t)$, se encuentra la ecuación variacional de la red, la cual linealizada alrededor de $s(t)$ y utilizando (9) se tiene

$$\dot{\xi}(t) = Df\xi(t) + c\Gamma \otimes A\xi(t) \quad (2.13)$$

donde $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]^T \in R^{nN \times nN}$; y $Df(s) \in R^{nN \times nN}$ es el Jacobiano de la función $f(\cdot)$ evaluado en $s(t)$.

Asumiendo que la red no tiene nodos aislados, la matriz de conectividad es simétrica, entonces existe una matriz unitaria de la forma $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]$, tal que

$$A\phi_k = \lambda_k\phi_k \quad (2.14)$$

Utilizando ϕ como transformación lineal, la ecuación variacional se puede diagonalizar para obtener

$$\dot{\xi}(t) = (Df(s) + c\lambda_i\Gamma) \xi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.15)$$

Para que el estado sincronizado de la red $s(t)$ sea estable, es necesario que la ecuación variacional (15) sea asintóticamente estable.

2.7.3 El grupo marcapasos pilórico como una red compleja

El grupo marcapasos pilórico es un pequeño grupo de tres neuronas acopladas eléctricamente, como se muestra en la Figura 2.1 . La dinámica intrínseca y el fenómeno de sincronización han sido investigados experimentalmente por Szucs et al. (Szucs, 2001) en este conjunto neuronal mediante un forzamiento sinusoidal. El interés aquí es generar la sincronización de la red con una neurona maestra a través de la sincronización controlada. El conjunto neuronal marcapasos principal, compuesto por tres neuronas puede ser representado como una red dinámica con $N = 3$ neuronas idénticas acopladas linealmente y difusivamente con una descripción de estado dado por

$$\dot{x}_i = F(x_i) + \kappa_c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad (2.16)$$

para $i = 1, 2, 3$, donde x_i son las variables de estado de la i -ésima neurona ó nodo de la red; $F : R^4 \rightarrow R^4$ es el campo vectorial suave que representa la dinámica de la i -ésima neurona , $\Gamma = \text{diag}[1, 0, 0, 0]$ es la matriz de acoplamiento que determina cuales estados en los nodos están conectados, $A = a_{ij}$ la matriz que describe la conectividad entre los nodos, y la constante κ_c es el parámetro que representa la fuerza de acoplamiento (Barajas, 2006).

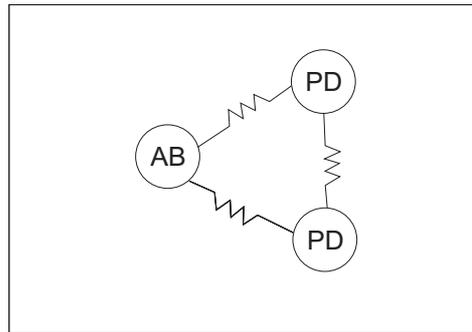


Figura 2.1: Ensamble neuronal marcapasos del circuito pilórico en el STG de la langosta. El ensamble tiene tres neuronas eléctricamente acopladas: la neurona marcapasos principal AB y dos motoneuronas PD. Existen otras entradas modulatorias que vienen del circuito gástrico y ganglios anteriores no mostrados aquí

III. METODOLOGÍA

En este capítulo se desarrollan los siguientes temas: se plantea el problema de sincronización de sistemas neuronales el cual nos conduce a encontrar una ley de control por retroalimentación para estabilizar un sistema de error de sincronización definido. Se explica la linealización por retroalimentación de sistemas no lineales con información completa, donde además se menciona que en las últimas décadas, se han hecho avances significativos en la teoría de control por retroalimentación no lineal. Se describe la técnica de la sincronización de sistemas que señalan que el problema de sincronización puede ser visto como un problema de control. Posteriormente, se describe una técnica adaptativa robusta de estabilización la cual será usada para generar la sincronización robusta de sistemas neuronales. Se detalla el modelo neuronal de Hindmarsh-Rose extendido el cual es descrito por cuatro ecuaciones diferenciales acopladas, el cual es capaz de describir la dinámica neuronal en forma realista. Se modela un ensamble mínimo de dos neuronas, y se desarrolla el control de la dinámica de este ensamble mínimo cuya función es controlar la dinámica caótica de una neurona o sistema esclavo al inducir una dinámica regular de una neurona o sistema maestro. Se plantea el problema de sincronización para un ensamble mínimo por retroalimentación linealizante donde se explica que en la teoría de control no lineal un problema de sincronización puede ser declarado como un problema de estabilización por retroalimentación. Se estudia la dinámica interna del sistema de error de sincronización. Se construye un observador de estados en base a un esquema adaptivo para la sincronización robusta el cual está compuesto de una ley de control de tipo linealizante y un observador de alta ganancia. Se estudia después la dinámica de sincronización en un pequeño ensamble neuronal, el grupo marcapasos principal del CPG pilórico del STG de la langosta. Se modela el ensamble neuronal como una red compleja y se plantea el problema de sincronización de una neurona maestra y el grupo marcapasos pilórico, y por último se estudia la dinámica de sincronización en ensambles con topología de redes grandes ($N=12$) y se presenta la ecuación de estado para la red controlada con 12 neuronas. Esta red no representa un ensamble biológico, sin embargo, los nodos se acoplan lineal y difusivamente tal como en el grupo marcapasos.

3.1. Introducción

En este trabajo de tesis se desarrolla un esquema de control llamado observador de estados para controlar la dinámica caótica de un ensamble neuronal mínimo y del ensamble marcapasos del CPG pilórico. En las siguientes secciones se describen las técnicas matemáticas que se emplean en el problema de control. A continuación se define qué es un observador de estados.

Los observadores de estado son herramientas virtuales que permiten estimar las variables o estados de un sistema en base a mediciones de las señales de salida y señales de control. Estos observadores permiten enviar información estimada acerca del valor que toman dichos estados, permitiendo conocer un aproximado del valor real, además cuentan con muy poco margen de diferencia o error. Se le considera una herramienta virtual, puesto que se desarrolla como software o programa dentro de una computadora.

Existen 2 tipos de observadores de estados: observadores de orden Completo, y observadores de orden Reducido u orden mínimo. Los observadores de orden Completo, son aquellos utilizados para observar o estimar todos los estados de un sistema. Los observadores de orden Reducido, son aquellos utilizados para observar o estimar solo algunos estados de un sistema.

En las siguientes secciones se describen algunos conceptos básicos sobre estabilización por retroalimentación de sistemas no lineales inciertos por medio de estimación de incertidumbre (Femat et al.,2000).

3.2. El problema de sincronización como un sistema de error de sincronización

Considérese el siguiente sistema no lineal cuyo comportamiento dinámico es caótico:

$$\dot{x}_M = F_M(x_M; p_M) + T_M(t; r_M), \quad y_M = C_M x_M, \quad (3.1)$$

donde $x_M \in R^n$ es un vector de estado, $F_M(x_M; p_M)$ es un campo vectorial suave, $T_M(t; r_M)$ es una fuerza excitadora externa, p_M y r_M son un conjunto de parámetros y y_M es la salida del sistema (estado medido). C_M es un vector de longitud adecuada el cual define los canales de salida. Nótese que, sin pérdida de generalidad, puede asumirse que el estado medido está dado por $y_M = x_{1,M}$. Ahora considérese un sistema dinámico caótico del mismo orden que (3.1):

$$\dot{x}_S = F_S(x_S; p_S) + T_S(t; r_S) + Bu, \quad y_S = C_S x_S, \quad (3.2)$$

donde $x_S \in R^n$ denota el vector de estado del sistema esclavo, B es un vector de tamaño conveniente el cual define el canal de control, $u \in R$ es el comando de control, $p_M \neq p_S$ y $r_M \neq r_S$. El vector C_S define el estado medido del sistema esclavo. Nótese que puede asumirse que $C_S = C_M$. El sistema (3.1) es el llamado maestro, mientras que (3.2) representa el sistema esclavo. De acuerdo a Mettin et al. (Mettin et al.,1995), el sistema (3.1) describe la dinámica objetivo, mientras que el sistema (3.2) representa el sistema experimental para ser controlado. El problema de sincronización puede ser enunciado como sigue: dada la señal transmitida y_M y la mínima información previa acerca de la estructura del filtro no lineal, el sistema (3.1), diseñar una ley de control $u(t)$ la cual sincroniza las órbitas del sistema maestro y el sistema esclavo.

Desde el punto de vista de la teoría de control, el problema de sincronización puede ser visto como sigue: defínase $x \in R^n$ tal que $x_i = x_{i,M} - x_{i,S}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Entonces, el siguiente sistema dinámico describe la dinámica del error de sincronización,

$$\dot{x} = \Delta F(x; p_1) + \Delta T(t; r_S) - Bu, \quad y = x_1, \quad (3.3)$$

donde $\Delta F(x; p_1) = F_M(x_M; p_M) - F_S(x_S; p_S)$ es un campo vectorial suave, $\Delta T(t; p_2) = T_M(t; r_M) - T_S(t; r_S)$ es la diferencia entre las fuerzas excitadoras externas. De este modo, el problema de sincronización puede ser visto como la estabilización de (3.3) en el origen. En otras palabras, el problema es encontrar una ley de control de retroalimentación $u = u(t)$ tal que el $\lim x \rightarrow 0$ (lo cual implica que $x_S \rightarrow x_M$) cuando $t \rightarrow \infty$. Mettin et al. (Mettin et al., 1995) aplicaron un enfoque generalizado para resolver el problema de sincronización planteado más arriba, donde se considera la dependencia paramétrica en las fuerzas de control y modelos no detallados del sistema. Un inconveniente del enfoque de Mettin et al., es que conduce a estrategias de control de no retroalimentación, las cuales no garantizan márgenes de estabilidad (Nijmeijer, 1990). El enfoque en este trabajo considera mediciones de estados incompletas y no se tiene un modelo detallado del sistema para garantizar la estabilidad robusta (de hecho, la sincronización robusta). Este enfoque incluye un observador de estados y conduce a un esquema robusto de control por retroalimentación.

3.2.1 Linealización por retroalimentación de sistemas no lineales con información completa

En las últimas décadas, se han hecho avances significativos en la teoría de control por retroalimentación no lineal. La teoría de retroalimentación de estados no lineal esta completamente desarrollada (Isidori, 1995). Ahora se mencionarán algunos conceptos básicos de importancia para la continuación del esquema de control. El grado relativo de un sistema es definido como el número de veces que tiene que ser derivada la salida $y(t)$ antes de que la ley de control u aparezca explícitamente. Para un sistema de una entrada y una salida

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{3.4}$$

el grado relativo está dado por el valor más pequeño de ρ para el cual,

$$L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0,\tag{3.5}$$

donde $L_f h(x)$ representa la derivada de Lie de la función $h(x)$ a lo largo del campo vectorial f .

Considérese ahora el sistema dinámico no lineal (Femat et al., 2000)

$$\dot{x} = f(x; \pi_1) + g(x; \pi_2)u, \quad y = x_1,\tag{3.6}$$

donde $x \in R^n, u \in R, y \in R$ es la salida del sistema y π_1, π_2 son un conjunto de parámetros del sistema. Además, considérese el siguiente cambio invertible de coordenadas.

$$z = \phi(x; \pi),\tag{3.7}$$

tal que el sistema (3.6) pueda ser escrito en la siguiente forma canónica (Isidori, 1989):

$$\dot{z}_i = z_{i+1}, \quad 1 < i \leq \rho - 1,\tag{3.8}$$

$$\dot{z}_\rho = \alpha(z, \nu; \pi_3) + \beta(z, \nu; \pi_4)u,\tag{3.9}$$

$$\dot{\nu} = \varsigma(z, \nu),\tag{3.10}$$

$$y = z_1,\tag{3.11}$$

donde y es la salida del sistema, ρ es el grado relativo del sistema (3.6), $\alpha(x, \nu; \pi_3)$ y $\beta(x, \nu; \pi_4)$ son una funciones no lineales y $\pi \in R^q$, π es un conjunto de parámetros, $\nu \in R^{n-\rho}$ es el vector de estado no observable (dinámica interna). Entonces puede diseñarse el siguiente controlador por retroalimentación:

$$u = -\frac{1}{\beta(z, \nu; \pi_3)} \left[\alpha(z, \nu; \pi_3) + K^T(z - z^*) \right], \quad (3.12)$$

el cual es llamado una ley de control linealizante, donde z^* es el punto de estabilización, $K \in R^\rho$ es elegida de tal manera que el polinomio $P_\rho(S) = S^\rho + K_\rho S^{\rho-1} + \dots + K_2 S + K_1 = 0$ es Hurwitz (esto es, $P_\rho(S)$ tiene todas la raíces en el lado izquierdo del plano complejo). Para la construcción de la forma canonica (3.8-3.11), y la ley de control lienalizante (3.12), las condicones necesarias y suficientes estan dadas en (Isidori, 1995; Nijmeimer et al., 1990). Bajo la ley de control linealizante, el sistema de lazo cerrado formado por los sistemas (3.8-3.11) y (3.12) pueden ser escritos en la siguiente forma

$$\dot{z} = Az, \quad \dot{\nu} = \varsigma(z, \nu, t), \quad (3.13)$$

donde $A \in R^{\rho \times \rho}$ es la matriz compañera ρ -dimensional de los coeficientes $K \in R^\rho$ cuya ecuación característica está dada por el polinomio $P_\rho(S)$. Lo siguiente debe señalarse: (a) si $\rho = n$, el sistema transformado (3.8-3.11) es el llamado sistema no lineal completamente linealizable, y (b) si $\rho < n$ el sistema (3.8-3.11) es llamado un sistema no lineal parcialmente linealizable. Además, si la dinámica del sub-sistema $\dot{\nu} = \varsigma(0, \nu)$ es asintóticamente estable, se dice que el sistema (3.8-3.11) es de fase-mínima. Finalmente, la ley de control (3.12) puede no ser directamente implementada porque requiere información acerca de las funciones no lineales $\alpha(z, \nu; \pi_3)$ y $\beta(x, \nu; \pi_4)$ las cuales pueden ser inciertas. En tal caso, la retroalimentación debe ser modificada. En la siguiente sección, se presenta un esquema de retroalimentación propuesto para resolver esta dificultad.

3.3. Sincronización de sistemas con campos vectoriales inciertos

Ya que el problema de sincronización puede ser visto como un problema de control, en lo que sigue, se describe una técnica adaptiva robusta de estabilización la cual será usada para estabilizar el sistema (3.8-3.11) en el origen (Femat et al., 2000). La propuesta de retroalimentación tiene una estructura adaptiva y un compensador dinámico donde unos pocos parámetros de control son requeridos para conseguir la sincronización. El esquema de sincronización esta basado en la teoría de control discutida en la sección anterior. Es preciso señalar que si uno es capaz de estabilizar el sistema (3.8-3.11) sin el conocimiento de $\beta(z, \nu; \pi_4)$ y $\alpha(z, \nu; \pi_3)$, uno puede estabilizar el sistema incierto (3.6). Por lo tanto, la sincronización puede ser conseguida. Ahora asúmase lo siguiente:

A1. La dinámica del error de sincronización (ver 3.6) puede ser transformada en la forma canónica (3.8-3.11), esto es, existe una transformación difeomorfa de coordenadas dada por (3.7).

A2. Únicamente la salida del sistema transformado, $y = z_1$ es medible.

A3. En el sistema (3.3), el campo vectorial $\Delta F(x, t; p)$ y la función no lineal $\Delta T(t; p_2)$ son desconocidos. Consecuentemente, las funciones no lineales $\alpha(z, \nu; \pi_3)$ y $\beta(z, \nu; \pi_4)$ son

inciertas. Sin embargo, una estimación $\beta_E(z)$ de $\beta(z, \nu; \pi_4)$ que satisface $\text{signo}(\beta(z, \nu; \pi_4)) = \text{signo}(\beta_E(z))$ es disponible para retroalimentación.

A4. El sistema (3.3) es de fase-mínima.

Comentarios acerca de los supuestos anteriores:

1. Con relación a la suposición A1, varios sistemas sujetos a sincronización caótica pueden ser transformados en la forma canónica (3.8-3.11).

2. La suposición A2 es realista, porque en la mayoría de los casos sólo un estado es disponible para la retroalimentación a partir del circuito maestro y del circuito esclavo.

3. Con respecto a la suposición A3, puede afirmarse que se trata de una situación general y práctica, porque los términos $\Delta F(x, t; \pi_1)$ y $\Delta T(t; \pi_2)$ involucran las diferencias en el sistema maestro tanto como en el sistema esclavo. La fuente de tales incertidumbres son: (i) los valores desconocidos de los parámetros del modelo o variables en el tiempo; (ii) ya que el sistema maestro y el sistema esclavo son caóticos, sus trayectorias dependen de las condiciones iniciales que suelen ser a menudo desconocidas y (iii) las diferencias estructurales entre los modelos del sistema maestro y el sistema esclavo.

4. En cuanto a la suposición A4, la fase mínima implica que la dinámica cero $\dot{\nu} = \zeta(0, \nu, t)$ converge a un punto dado por el origen. En otras palabras, el sistema de lazo cerrado es internamente estable.

Ya que $\Delta F(x, t; \pi_1)$ y $\Delta T(t; \pi_2)$ son inciertos (suposición A3), (3.7) representa un cambio de coordenadas no lineal incierto, por consiguiente $\alpha(z, \nu; \pi_3)$ y $\beta(z, \nu; \pi_4)$ en el sistema transformado (3.8-3.11) son desconocidas. La idea para tratar con los términos inciertos $\alpha(z, \nu; \pi_3)$ y $\beta(z, \nu; \pi_4)$ es aglutinarlos en una nueva función la cual debe ser interpretada como un nuevo estado observable. Por un estado observable se refiere a que la dinámica de tal estado puede ser reconstruida a partir de mediciones en línea (por ejemplo, $y = z_1$). De acuerdo a la suposición A4, las funciones $\alpha(z, \nu; \pi_3)$ y $\beta(z, \nu; \pi_4)$ son inciertas. Así, se define $\delta(z, \nu; \pi_4) = \beta(z, \nu; \pi_4) - \beta_E(z)$ y $\Theta(z, \nu, u, \pi) = \alpha(z, \nu; \pi_3) + \delta(z, \nu; \pi_4)u$. Una simple manipulación algebraica produce la siguiente expresión para el sistema transformado:

$$\dot{z} = z_{i+1}, \quad 1 < i \leq \rho - 1, \quad (3.14)$$

$$\dot{z}_\rho = \Theta(z, \nu, u; \pi) + \beta_E(z)u \quad (3.15)$$

$$\dot{\nu} = \varsigma(z, \nu), \quad (3.16)$$

donde $\Theta(z, \nu, u, \pi)$ es un término que aglutina las incertidumbres. Ahora, defínase $\eta = \eta(t) \equiv \Theta(z(t), \nu(t), u(t); \pi)$. De esta manera el sistema (3.14-3.16) puede ser reescrito en la siguiente forma extendida:

$$\dot{z} = z_{i+1}, \quad 1 < i \leq \rho - 1, \quad (3.17)$$

$$\dot{z}_\rho = \eta + \beta_E(z)u, \quad (3.18)$$

$$\dot{\eta} = \Xi(z, \eta, u; \pi), \quad (3.19)$$

$$\dot{\nu} = \varsigma(z, \nu), \quad (3.20)$$

donde

$$\begin{aligned} \Xi(z, \nu, \eta, u; \pi) &= \sum_{k=1}^{\rho-1} z_{k+1} \partial \Theta(z, \nu, u; \pi) + [\eta + \beta_E(z)u] \partial_\rho \Theta(z, \nu, u; \pi) \\ &+ \delta(z, \nu; \pi) \dot{u} + \partial_\nu \Theta(z, \nu, u; \pi) \varsigma(z, \nu; \pi), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\partial_k \Theta(z, \nu, u; \pi) = \partial \Theta(z, \nu, u; \pi) / \partial x_k, \quad k = 1, 2, \dots, \rho. \quad (3.22)$$

Puede comprobarse que $\Psi(z, \eta, \nu, u; \pi) = \eta - \Theta(z, \nu, u; \pi)$ es una primera integral del sistema (3.17-3.20) (Aeyels y Sepulchre, 1992). Esto significa que a lo largo de las trayectorias del sistema (3.17-3.20), $d\Psi(z, \eta, \nu, u; \pi) / dt = 0$ para todo $t \geq 0$ y cualquier control diferenciable $u(t)$. Consecuentemente, la representación de estados (3.17-3.20) es dinámicamente equivalente al sistema (3.14-3.16) y consecuentemente al sistema (3.8-3.11), mientras las condiciones iniciales satisfacen $\Psi(z_0, \eta_0, \nu_0, u_0; \pi) = 0$, esto es, el estado aumentado η proporciona la dinámica de las funciones inciertas $\Theta(z, \nu, u; \pi)$ las cuales involucran las diferencias de modelado, los parámetros inciertos y las perturbaciones externas inciertas. Por otra parte, hay dos comentarios importantes concernientes al sistema (3.17-3.20): (a) una interpretación geométrica de la representación de estados (3.17-3.20) es como sigue. Si $z(t)$ es una solución del sistema (3.14-3.16) con condiciones iniciales (z_0, u_0) y $(z(t), \eta(t))$ es una solución de (3.17-3.20) con condiciones iniciales (z_0, η_0, u_0) entonces la igualdad $\Psi(z_0, \eta_0, \nu_0, u_0; \pi) = 0$ y la condición $d\Psi(z, \eta, \nu, u; \pi) / dt = 0$ implican que la solución de (3.17-3.20) es una proyección de la solución de (3.14-3.16). (b) Una característica de (3.17-3.20) es que las incertidumbres han sido aglutinadas en una función incierta $\Theta(z, \nu, u; \pi)$ la cual puede ser estimada por medio de un estado observable pero no medible η . Además, si uno es capaz de estabilizar el sistema (3.17-3.20) sin hacer uso de la restricción $\Psi(z_0, \eta_0, \nu_0, u_0; \pi) = 0$, uno podría ser capaz de estabilizar el sistema (3.8-3.11) y su sistema equivalente (19). Ahora, considérese la siguiente ley de control linealizante para estabilizar el sistema (3.17-3.20):

$$u = \frac{1}{\beta_E(z)} \left(-\eta + K^T(z - z^*) \right), \quad (3.23)$$

donde $K \in R^\rho$ es elegida como en (3.12) y z^* es el punto de estabilización. Si las condiciones iniciales satisfacen $\Psi(z_0, \eta_0, \nu_0, u_0; \pi) = 0$, entonces bajo la ley de control (3.23) los estados (z, η) convergen exponencialmente a cero. La convergencia de z a cero se deduce del hecho de que el sistema de lazo cerrado es de fase mínima. Ya que $\Delta F(x; \pi_1)$ es suave, $\alpha(z, \nu; \pi_3)$ es también suave. Entonces, la dinámica de control está dada por $\dot{u} = \left(-\Xi(z, \nu, \eta, u; \pi) + K^T \dot{z} \right) / \beta_E$. Ya que Ξ es una función suave, u es también una función suave. Consecuentemente, $\Psi(z, \eta, \nu, u; \pi) = \eta - \Theta(z, \nu, u; \pi)$ es una primera integral del sistema de lazo cerrado. Entonces, de (3.17-3.20) el estado aumentado llega a ser: $\eta = K^T z - \beta_E(z) u$ por lo tanto el estado aumentado η está acotado y su dinámica también está acotada. Sin embargo, la ley de control linealizante no es físicamente factible porque requiere mediciones de los estados $z(t)$ y del estado incierto $\eta(t)$. El problema de estimar (z, η) puede ser resuelto mediante el uso de un observador de alta ganancia (Femat et al., 1997). Así, la dinámica de los estados z y η puede ser reconstruido a partir de las mediciones de la salida $y = z_1$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_i &= \hat{z}_{i+1} + L^i \kappa_i^* (z_1 - \hat{z}_1), \quad 1 \leq i \leq \rho - 1, \\ \dot{\hat{z}}_\rho &= \hat{\eta} + \beta_E(z) u + L^\rho \kappa_\rho^* (z_1 - \hat{z}_1), \\ \dot{\hat{\eta}} &= L^{\rho+1} \kappa_{\rho+1}^* (z_1 - \hat{z}_1), \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $\kappa_j, j = 1, 2, \dots, \rho + 1$, son elegidas de tal manera que el polinomio $P_k(s) = s^{\rho+1} + \kappa_{\rho+1} s^{\rho-1} + \dots + \kappa_2 s + \kappa_1 = 0$ es Hurwitz. El parámetro de alta ganancia, L , pueden ser interpretado como la rapidez de estimación de incertidumbres y es el único parámetro a sintonizar.

Así, la ley de control linealizante por retroalimentación con estimación de incertidumbres será

$$u = \frac{1}{\beta_E(z)} \left(-\hat{\eta} + K^T \hat{z} \right), \quad (3.25)$$

Nótese que la ley de control linealizante (3.25) solo utiliza estimaciones de $\Theta(z, \nu, u; \pi)$, por medio de $\hat{\eta}$, \hat{z} y $\beta_E(z)$ los cuales las provee el estimador (3.24). Así, la ley de control por retroalimentación modificada estará dada por el compensador dinámico (3.24) y la ley de control linealizante (3.25). Los controladores (3.24) y (3.25) producen estabilidad práctica, esto es, el sistema (3.17-3.20) converge a una bola B' cuyo radio es del orden de L^{-1} . Esto es, $x \rightarrow B'$ cuando $t \rightarrow \infty$ con $r(B') = O(L^{-1})$. Desde un punto de vista práctico, la declaración anterior implica que el error de sincronización puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando valores grandes del parámetro $L > 0$. De hecho, la sincronización exacta (esto es, error de sincronización cero) no es posible debido a la diferencia en la dinámica presente y la dinámica estimada. Tómese en cuenta que ya que $\Theta(z, \nu, u; \pi)$ y $\delta(z, \nu; \pi)$ son inciertas, la función $\Xi(z, \eta, \nu, u; \pi)$ es en consecuencia desconocida. Por lo tanto, este término no se utiliza en la construcción del observador (3.24). Esta característica produce una parametrización de bajo orden solamente se requiere un parámetro de atenuación para el compensador dinámico de la estrategia adaptativa. Esto es un avance con respecto a reportes previos de esquemas de control.

3.4. El modelo neuronal de Hindmarsh-Rose extendido y modelado de un ensamble mínimo

El modelo neuronal planteado por Hindmarsh y Rose (Hindmarsh y Rose, 1982) es un sistema que describe en forma realista la dinámica neuronal del ensamble bajo estudio. Sin embargo, Pinto et al. (Pinto et al., 2000) presentan un modelo extendido del sistema original de Hindmarsh y Rose, el cual tiene la ventaja de reproducir completamente las oscilaciones caóticas observadas en neuronas del STG de la langosta.

El siguiente sistema no lineal de cuatro ecuaciones diferenciales acopladas representan el modelo neuronal HRe:

$$\dot{x} = ay + bv^2 - cv^3 - dz + I, \quad (3.26)$$

$$\dot{y} = e - fv^2 - y - gw, \quad (3.27)$$

$$\dot{z} = \mu[-z + s(v + h)], \quad (3.28)$$

$$\dot{w} = \nu[-kw + r(y + l)], \quad (3.29)$$

donde $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, r, S, \mu$ y ν son parámetros constantes que incorporan la dinámica subyacente basada en la corriente y la conductancia en esta representación polinómica de la dinámica neural. $x(t)$ es el voltaje de la membrana en el modelo, $y(t)$, $z(t)$ y $w(t)$ representa la dinámica de los canales iónicos.

Para direccionar el problema de sincronización de un ensamble mínimo compuesto por dos neuronas, se redefine el sistema de ecuaciones HRe. Sean $x_{i,M}$, $x_{i,S}$ $i = 1, 2, 3, 4$ y los subíndices M, S se refieren al sistema maestro y al sistema esclavo respectivamente, las cuatro variables x, y, z y w en cada sistema. Considérense dos neuronas HRe modeladas por

las ecuaciones (3.26)-(3.29). Así, el sistema maestro es representado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\dot{x}_{1,M} = a_1 x_{1,M} + b_1 x_{1,M}^2 - c_1 x_{1,M}^3 - d_1 x_{3,M} + I_M, \quad (3.30)$$

$$\dot{x}_{2,M} = e_1 - f_1 x_{1,M}^2 - x_{2,M} - g_1 x_{4,M}, \quad (3.31)$$

$$\dot{x}_{3,M} = \mu_1 [-x_{3,M} + S_1 (x_{1,M} + h_1)], \quad (3.32)$$

$$\dot{x}_{4,M} = \nu [-k_1 x_{4,M} + r_1 (x_{2,M} + l_1)], \quad (3.33)$$

y el sistema esclavo se propone que este definido por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{x}_{1,S} = a_2 x_{2,S} + b_2 x_{1,S}^2 - c_2 x_{1,S}^3 - d_2 x_{3,S} + I_S + u, \quad (3.34)$$

$$\dot{x}_{2,S} = e_2 - f_2 x_{1,S}^2 - x_{2,S} - g_2 x_{4,S}, \quad (3.35)$$

$$\dot{x}_{3,S} = \mu_2 [-x_{3,S} + S_2 (x_{1,S} + h_2)], \quad (3.36)$$

$$\dot{x}_{4,S} = \nu [-k_2 x_{4,S} + r_2 (x_{2,S} + l_2)], \quad (3.37)$$

donde el término u en la Ecuación (3.34) representa una fuerza de sincronización por retroalimentación. Para simular la dinámica del sistema maestro y del sistema esclavo en el ensamble mínimo se consideran los siguientes valores numéricos donde el subíndice 1 representa los parámetros del sistema maestro y el subíndice 2 representa los parámetros del sistema esclavo: $a_1 = 1.05$, $a_2 = 1$, $b_1 = 2.85$, $b_2 = 3$, $c_1 = .95$, $c_2 = 1$, $d_1 = .95$, $d_2 = .99$, $e_1 = 1.05$, $e_2 = 1.01$, $f_1 = 5$, $f_2 = 5.013$, $g_1 = .03$, $g_2 = .028$, $h_1 = 1.6$, $h_2 = 1.60$, $k_1 = .98$, $k_2 = .96$, $l_1 = 1.5$, $l_2 = 1.62$, $r_1 = 2.85$, $r_2 = 3$, $s_1 = 3.85$, $s_2 = 3.97$, $\mu_1 = .002$, $\mu_2 = .0021$, $\nu_1 = .00095$, $\nu_2 = .0009$.

3.5. Control de la dinámica caótica de un ensamble mínimo

El primer ensamble para el cual se desea controlar su comportamiento dinámico consiste en un ensamble compuesto por dos neuronas HRe con acoplamiento unidireccional. Se propone controlar la dinámica caótica de una neurona o sistema esclavo al inducir una dinámica regular de una neurona o sistema maestro. La primera aproximación se logra mediante la construcción de una ley de control por retroalimentación linealizante estándar, y la segunda aproximación se logra por la construcción de un observador de estados ó estimador de incertidumbres.

3.5.1 Planteamiento del problema de sincronización para un ensamble mínimo por retroalimentación de estados

En la teoría de control no lineal un problema de sincronización puede ser declarado como una estabilización por retroalimentación. Se ha establecido previamente que para un error de sincronización definido, $x_e = x_{e,M} - x_{e,S}$ (donde $x \in R^d$, $e = 1, 2, \dots, d$), existe un sistema de error de sincronización cuyas trayectorias convergen exponencialmente a cero bajo una ley de control por retroalimentación u . Por lo tanto, se dice que el sistema maestro y el sistema esclavo acoplados (unidireccionalmente) alcanzan un estado dinámico de sincronización bajo la acción de la ley de control u .

Lemma 3.1. Considérese un sistema de dos neuronas HRe representado por las Ecuaciones (3.30)-(3.37). Estas dos neuronas HRe alcanzan estados dinámicos de sincronización exacta para todo $t > t_0 \geq 0$ bajo la acción de una ley de control por retroalimentación no lineal aún cuando existen diferencias paramétricas para cualquier condición inicial $x_i(0) = x_{i,M}(0) - x_{i,S}(0)$ en el dominio físicamente realizable.

Demostración. Se define el siguiente error de sincronización para el sistema neuronal HRe:

$$\dot{x} = F(x, t) + G(x)u = \Delta f(x) + \Delta I(t) - Bu, \quad y = h(x) = x_1 \quad (3.38)$$

donde

$$\Delta f(x) = (\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3, \Delta f_4)^T \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= (a_1 x_{2,M} - a_2 x_{2,S}) + (b_1 x_{1,M}^2 - b_2 x_{1,S}^2) - (c_1 x_{1,M}^3 - c_2 x_{1,S}^3) \\ &\quad - (d_1 x_{3,M} - d_2 x_{3,S}) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_2 &= (l_1 - l_2) - (f_1 x_{1,M}^2 - f_2 x_{1,S}^2) - (x_{2,M} - x_{2,S}) \\ &\quad - (g_1 x_{4,M} - g_2 x_{4,S}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_3 &= -(\mu_1 x_{3,M} - \mu_2 x_{3,S}) + (\mu_1 S_1 x_{1,M} - \mu_2 S_2 x_{1,S}) \\ &\quad + (\mu_1 S_1 h_1 - \mu_2 S_2 h_2) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_4 &= -(\nu_1 k_1 x_{4,M} - \nu_2 k_2 x_{4,S}) + (\nu_1 r_1 x_{2,M} - \nu_2 r_2 x_{2,S}) \\ &\quad + (\nu_1 r_1 l_1 - \nu_2 r_2 l_2) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \Delta I(t) &= (I_M(t) - I_S(t), 0, 0, 0)^T, \quad B = (1, 0, 0, 0)^T, \\ y &= x_1 = x_{1,M} - x_{1,S}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$\Delta f(x)$ es un campo vectorial suave, $\Delta I(t)$ es la diferencia entre la fuerza excitadora externa y $y \in R$ representa el estado medido del sistema. El grado relativo para el sistema se obtiene de acuerdo a la siguiente condición

$$L_G L_F^{\rho-1} h(x) \neq 0, \quad (3.45)$$

suponemos que $\rho - 1 = 0$, por lo tanto,

$$L_F^0 h(x) = h(x), \quad (3.46)$$

por definición,

$$L_G L_F^0 h(x) = L_G h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} G, \quad (3.47)$$

pero $y = h(x) = x_1$ y $G = -B = (-1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$, por lo tanto,

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} G = (1 \ 0 \ 0 \ 0)(-1 \ 0 \ 0 \ 0)^T = -1, \quad (3.48)$$

de acuerdo a este resultado se concluye que el grado relativo $\rho = 1$.

Considérese ahora la siguiente ley de control estabilizante (Isidori, 1999),

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \left(-L_f^\rho h(x) - c_0 h(x) - c_1 L_f h(x) - \dots - c_{\rho-1} L_f^{\rho-1} h(x) \right) \quad (3.49)$$

donde $L_f h(x)$ significa la derivada de Lie de la función $h(x)$ a lo largo de campo vectorial f , y los parámetros constantes $c_0, c_1, \dots, c_{\rho-1}$, pertenecen al polinomio $p(s) = c_0 + c_1 s + \dots + c_{\rho-1} s^{\rho-1} + s^\rho$ el cual tiene todos sus eigenvalores con parte real negativa. Entonces, el sistema (3.54) es estabilizado por la ley de control $u = [-L_f h(x) - C_0 h(x)]/L_g h(x)$, donde C_0 es una constante real positiva que representa la rapidez de convergencia. Bajo la ley de control dada por:

$$u = (a_1 x_{2,M} - a_2 x_{2,S}) + (b_1 x_{1,M}^2 - b_2 x_{1,S}^2) - (c_1 x_{1,M}^3 - c_2 x_{1,S}^3) - (d_1 x_{3,M} - d_2 x_{3,S}) + (I_M(t) - I_S(t)) + c_0 (x_{1,M} - x_{1,S}), \quad (3.50)$$

el sistema (3.38) se convierte en

$$\dot{x}_1 = -C_0 x_1, \quad (3.51)$$

$$\dot{x}_2 = (l_1 - l_2) - (f_1 x_{1,M}^2 - f_2 x_{1,S}^2) - (x_{2,M} - x_{2,S}) - (g_1 x_{4,M} - g_2 x_{4,S}) \quad (3.52)$$

$$\dot{x}_3 = -(\mu_1 x_{3,M} - \mu_2 x_{3,S}) + (\mu_1 S_1 x_{1,M} - \mu_2 S_2 x_{1,S}) + (\mu_1 S_1 h_1 - \mu_2 S_2 h_2) \quad (3.53)$$

$$\dot{x}_4 = -(\nu_1 k_1 x_{4,M} - \nu_2 k_2 x_{4,S}) + (\nu_1 r_1 x_{2,M} - \nu_2 r_2 x_{2,S}) + (\nu_1 r_1 l_1 - \nu_2 r_2 l_2). \quad (3.54)$$

debido a que el sistema (3.51)-(3.54) es de fase mínima (ver Sección 3.5.2), la ley de control obtenida u dirige las trayectorias del sistema de error de sincronización a converger asintóticamente a cero en un tiempo finito.

3.5.2 Dinámica interna del sistema de error de sincronización

El sistema de error de sincronización (3.51)-(3.54) posee ya una forma canónica. Esto significa que el sistema de lazo cerrado tiene dos subsistemas: el primero, dado por la Ecuación (3.51) es controlable, mientras el segundo, dado por las Ecuaciones (3.52)-(3.54), no es afectado por la fuerza de sincronización unidireccional. Por lo tanto, para asegurar estabilidad asintótica es necesario estudiar la dinámica del subsistema (3.52)-(3.54). Si el subsistema (3.52)-(3.54) es (asintóticamente) estable en el origen, entonces el sistema en lazo cerrado se dice que es de fase mínima y, como consecuencia, la fuerza de sincronización u dirige las trayectorias del sistema (3.38) a cero. Así, se tiene que, para cualquier tiempo $t > t_0 \geq 0$, $x_m \equiv x_s$ y se obtiene Sincronización Exacta (Femat y Solís-Perales, 1999). La dinámica cero puede ser obtenida al sustituir $x_{1,S} = x_{1,M} - x_1$ y al hacer $x_1 = 0$ (Isidori, 1995) en el sistema (3.51)-(3.54), y considerando la dinámica del sistema maestro,

$$\dot{x}_2 = (e_1 - e_2) - [f_1 x_{1,M}^2 - f_2 (x_{1,S})^2] - x_2 - [g_1 x_{4,M} - g_2 (x_{4,M} - x_4)], \quad (3.55)$$

$$\dot{x}_3 = -[(\mu_1 x_{3,M} - \mu_2 (x_{3,M} - x_3)) + [\mu_1 s_1 x_{1,M} - \mu_2 s_2 (x_{1,M} - x_1)] + (\mu_1 s_1 h_1 - \mu_2 s_2 h_2), \quad (3.56)$$

$$\dot{x}_4 = -[\nu_1 k_1 x_{4,M} - \nu_2 k_2 (x_{4,M} - x_4)] + [\nu_1 r_1 x_{2,M} - \nu_2 r_2 (x_{2,M} - x_2)] + (\nu_1 r_1 l_1 - \nu_2 r_2 l_2), \quad (3.57)$$

$$\dot{x}_{i,M} = f_{i,M}(x_{i,M}), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.58)$$

de lo cual al sustituir $x_1 = 0$, ($x_{1,S} = x_{1,M} - x_1$), se obtiene el siguiente sistema:

$$\dot{x}_2 = (e_1 - e_2) - (f_1 - f_2) x_{1,M}^2 - x_2 - [(g_1 - g_2) x_{4,M} + g_2 x_4], \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -(\mu_1 x_{3,M} - \mu_2 (x_{3,M} - x_3)) + [\mu_1 s_1 x_{1,M} - \mu_2 s_2 (x_{1,M} - x_1)] \\ &\quad + (\mu_1 s_1 h_1 - \mu_2 s_2 h_2), \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= -[\nu_1 k_1 x_{4,M} - \nu_2 k_2 (x_{4,M} - x_4)] + [\nu_1 r_1 x_{2,M} - \nu_2 r_2 (x_{2,M} - x_2)] \\ &\quad + (\nu_1 r_1 l_1 - \nu_2 r_2 l_2), \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\dot{x}_{1,M} = a_1 x_{2,M} + b_1 x_{1,M}^2 - c_1 x_{1,M}^3 - d_1 x_{3,M} + I_M, \quad (3.62)$$

$$\dot{x}_{2,M} = e_1 - f_1 x_{1,M}^2 - x_{2,M} - g_1 x_{4,M}, \quad (3.63)$$

$$\dot{x}_{3,M} = \mu_1 [x_{3,M} + s_1 (x_{1,M} + h_1)], \quad (3.64)$$

$$\dot{x}_{4,M} = \nu_1 [-k_1 x_{4,M} + r_1 (x_{2,M} + l_1)]. \quad (3.65)$$

El cálculo de una aproximación lineal para la dinámica cero permite obtener los correspondientes eigenvalores para determinar la estabilidad del sistema. Sea $\dot{x}_z = f_z(x_z, t)$ la dinámica cero del sistema donde x_z es el vector de estado y $f_z(x_z, t)$ es un campo vectorial suave. La aproximación lineal está dada por la ecuación $\dot{x}_z = Ax_z$ donde A es la matriz Jacobiana del mapeo f_z evaluado en $x_z = 0$,

$$A = \frac{\partial f_z}{\partial x} \Big|_{x=x_z}. \quad (3.66)$$

Así, el Jacobiano está dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -g_2 & -2(f_1 - f_2)x_{1,M} & 0 & 0 & -(g_1 - g_2) \\ 0 & -\mu_2 & 0 & (\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2) & 0 & -(\mu_1 - \mu_2) & 0 \\ \nu_2 r_2 & 0 & -\nu_2 k_2 & 0 & (\nu_1 r_1) & 0 & -(\nu_1 k_1 - \nu_2 k_2) \\ 0 & 0 & 0 & (2b_1 x_{1,M}) & a_1 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2f_1 x_{1,M} & -1 & 0 & -g_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 s_1 & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_1 r_1 & 0 & -\nu_1 k_1 \end{pmatrix}$$

y sustituyendo los puntos de equilibrio $x_z = 0$ en la matriz anterior se obtiene,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -g_2 & 0 & 0 & 0 & -(g_1 - g_2) \\ 0 & -\mu_2 & 0 & (\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2) & 0 & -(\mu_1 - \mu_2) & 0 \\ \nu_2 r_2 & 0 & -\nu_2 k_2 & 0 & (\nu_1 r_1) & 0 & -(\nu_1 k_1 - \nu_2 k_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -g_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 s_1 & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_1 r_1 & 0 & -\nu_1 k_1 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de A se obtienen a partir de las raíces de la ecuación característica $|\lambda I - A| = 0$, y están dados por:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[-(1 + k_1\nu_1) \pm \sqrt{(1 - k_1\nu_1)^2 - 4g_1\nu_1r_1} \right], \\
\lambda_{3,4} &= \frac{1}{2} \left[-(1 + k_2\nu_2) \pm \sqrt{(1 - k_2\nu_2)^2 - 4g_2\nu_2r_2} \right], \\
\lambda_{5,6} &= \frac{1}{2} \left[-\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - 4d_1\nu_1s_1} \right], \\
\lambda_7 &= -\mu_2,
\end{aligned}$$

al sustituir los valores siguientes: $a_1 = 1.05$, $a_2 = 1$, $b_1 = 2.85$, $b_2 = 3$, $c_1 = .95$, $c_2 = 1$, $d_1 = .95$, $d_2 = .99$, $e_1 = 1.05$, $e_2 = 1.01$, $f_1 = 5$, $f_2 = 5.013$, $g_1 = .03$, $g_2 = .028$, $h_1 = 1.6$, $h_2 = 1.60$, $k_1 = .98$, $k_2 = .96$, $l_1 = 1.5$, $l_2 = 1.62$, $r_1 = 2.85$, $r_2 = 3$, $s_1 = 3.85$, $s_2 = 3.97$, $\mu_1 = .002$, $\mu_2 = .0021$, $\nu_1 = .00095$, $\nu_2 = .0009$, se obtienen los siguientes valores numéricos de los eigenvalores:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -0,00101231, \\
\lambda_2 &= -0,99991869, \\
\lambda_3 &= -0,00093967, \\
\lambda_4 &= -0,99992433, \\
\lambda_{5,6} &= -0,001 \pm 0,0833486i, \\
\lambda_7 &= -0,0021,
\end{aligned}$$

Por lo tanto, al ser su parte real negativa se concluye que la dinámica cero del sistema (3.51)-(3.54) es estable.

3.5.3 Construcción del observador de estados

Un esquema adaptivo para la sincronización robusta es realizado mediante el uso de una ley de control por retroalimentación modificada. El sistema del error de sincronización (3.38) puede ser representado en la siguiente forma extendida

$$\dot{z}_1 = \eta + \beta_E(z) u, \quad (3.67)$$

$$\dot{\eta} = \Gamma(z_1, \eta, \nu, u), \quad (3.68)$$

$$\dot{\nu} = \zeta(z_1, \nu), \quad (3.69)$$

$$y = z_1, \quad (3.70)$$

donde el cambio de coordenadas invertible $x = (z_1, \nu)$ ha sido desarrollado; $\eta = \Delta f_1(z_1, \nu) + \Delta I_1(t)$, representa un estado aumentado el cual aglutina los términos inciertos contenidos en Δf_1 , ν es el vector de estado para la dinámica interna y $\beta_E(z) = -1$. Para estabilizar el sistema de error de sincronización, considérese el controlador no lineal (3.50) y obsérvese que puede ser escrito de la siguiente forma linealizante

$$u = [\eta + kz_1] \quad (3.71)$$

donde $k \in R_+$ representa un valor para la ganancia de control. Sin embargo, debido a que la ley de control (3.71) depende del estado incierto η , no se puede implementar en la práctica. El problema de estimar (z_1, η) es resuelto usando un observador de alta ganancia,

$$\dot{\hat{z}}_1 = \hat{\eta} + \beta_E(z)u + L_0 k_1^* (z_1 - \hat{z}_1) \quad (3.72)$$

$$\dot{\hat{\eta}} = L_0^2 k_2^* (z_1 - \hat{z}_1) \quad (3.73)$$

donde $(\hat{z}_1, \hat{\eta})$ son los valores estimados de (z_1, η) ; L_0 es el único parámetro de atenuación, y representa un parámetro de estimación de alta ganancia que puede ser interpretada como la razón de estimación de incertidumbres. Los parámetros $\kappa_{1,2}$ son elegidos para el polinomio $P(s) = s^2 + \kappa_2 s + \kappa_1 = 0$ con todos sus eigenvalores en el lado izquierdo del plano complejo.

La ley de control linealizante con estimación de incertidumbres que, junto con el compensador dinámico (3.72)-(3.73), estabiliza el error de sincronización en el origen y, consecuentemente, sincroniza el sistema neuronal HRe se convierte en

$$u = [\hat{\eta} + \kappa \hat{z}_1] \quad (3.74)$$

Cabe mencionar que la ley de control produce Sincronización Práctica Completa (Femat y Solís, 1999), esto es, las trayectorias del sistema del error de sincronización convergen alrededor del origen dentro de una bola de radio L_0^{-1} .

Una vez que se obtiene la ley de control modificada, puede ser implementada en el sistema (3.30)-(3.37). Entonces, se obtiene el siguiente sistema extendido de ecuaciones diferenciales que garantiza la sincronización robusta de las neuronas HRe,

$$\dot{x}_{1,M} = a_1 x_{2,M} + b_1 x_{1,M}^2 - c_1 x_{1,M}^3 - d_1 x_{3,M} + I_{exm}, \quad (3.75)$$

$$\dot{x}_{2,M} = e_1 - f_1 x_{1,M}^2 - x_{2,M} - g_1 x_{4,M}, \quad (3.76)$$

$$\dot{x}_{3,M} = \mu_1 (-x_{3,M} + s_1 (x_{1,M} + h_1)), \quad (3.77)$$

$$\dot{x}_{4,M} = \nu_1 (-k_1 x_{4,M} + r_1 (x_{2,M} + l_1)), \quad (3.78)$$

$$\dot{x}_{1,S} = a_2 x_{2,S} + b_2 x_{1,S}^2 - c_2 x_{1,S}^3 - d_2 x_{3,S} + I_S + (\hat{\eta} + k \hat{z}_1), \quad (3.79)$$

$$\dot{x}_{2,S} = e_2 - f_2 x_{1,S}^2 - x_{2,S} - g_2 x_{4,S}, \quad (3.80)$$

$$\dot{x}_{3,S} = \mu_2 (-x_{3,S} + s_2 (x_{1,S} + h_2)), \quad (3.81)$$

$$\dot{x}_{4,S} = \nu_2 (-k_2 x_{4,S} + r_2 (x_{2,S} + l_2)), \quad (3.82)$$

$$\dot{\hat{z}}_1 = \hat{\eta} - u + L_0 k_1^* [(x_{1,M} - x_{1,S}) - \hat{z}_1], \quad (3.83)$$

$$\dot{\hat{\eta}} = L_0^2 k_2^* [(x_{1,M} - x_{1,S}) - \hat{z}_1]. \quad (3.84)$$

3.6. Dinámica de sincronización en un pequeño ensamble neuronal marcapasos

El primer paso es redefinir el sistema de ecuaciones (3.26) - (3.29) para poder plantear el problema de la sincronización de una neurona maestra y el grupo marcapasos

pilórico. Sean x_{i1} , x_{i2} , x_{i3} y x_{i4} las cuatro variables de estado x , y , z , w del sistema (3.26)-(3.29), respectivamente. Entonces, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x}_{i1} = \alpha_i x_{i2} + \beta_i x_{i1}^2 - \theta_i x_{i1}^3 - \delta_i x_{i3} + I_i, \quad (3.85)$$

$$\dot{x}_{i2} = \varepsilon_i - \phi_i x_{i1}^2 - x_{i2} - \gamma_i x_{i4}, \quad (3.86)$$

$$\dot{x}_{i3} = \mu_i(-x_{i3} + \sigma_i(x_{i1} + \zeta_i)), \quad (3.87)$$

$$\dot{x}_{i4} = \nu_i(-\pi_i x_{i4} + \rho_i(x_{i2} + \lambda_i)), \quad (3.88)$$

describe la dinámica neuronal de la i -ésima neurona HRe. Para inducir la dinámica deseada en el ensamble marcapasos se propone un acoplamiento unidireccional entre una neurona maestra y la neurona principal AB del grupo marcapasos como se muestra en la Figura 3.1.

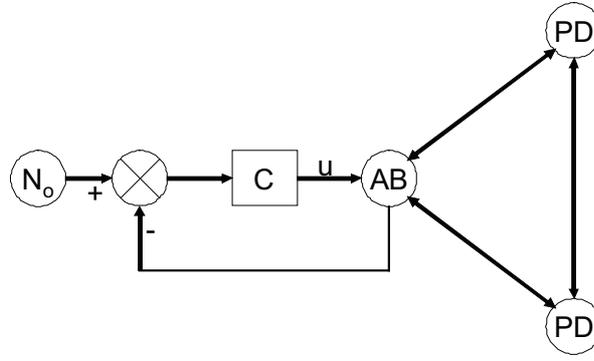


Figura 3.1: La red de control del ensamble neuronal marcapasos pilórico. N_0 representan una neurona maestra exterior, AB es la neurona marcapasos principal, PD son las motoneuronas pilóricas dilatadoras y u es la ley de control.

Entonces, la neurona AB representa el sistema esclavo, la cual a su vez está acoplada bidireccionalmente a las neuronas PD. La ecuación de estado para la red controlada se propone como se muestra a continuación,

$$\dot{x}_0 = F(x_0), \quad (3.89)$$

$$\dot{x}_1 = F(x_1) + \kappa_c \sum_{j=1}^3 a_{1j} \Gamma x_j + Bu, \quad (3.90)$$

$$\dot{x}_i = F(x_i) + \kappa_c \sum_{j=1}^3 a_{ij} \Gamma x_j \text{ para } i = 2, 3, \quad (3.91)$$

donde x_0 es el vector de estado de la neurona maestra, x_1 representa el vector de estado de la neurona AB, y x_2 , x_3 son los vectores de estado de las neuronas PD, $B = (1, 0, 0, 0)^T$ es el vector de entrada de control a la neurona controlada y u representa la acción de control aplicada para inducir el comportamiento de la neurona maestra. La dinámica de sincronización en la red se puede conseguir estabilizando un sistema dinámico que representa la dinámica de error entre la neurona de referencia (sistema maestro) y la neurona controlada (sistema

esclavo). La dinámica de sincronización en el grupo marcapasos pilórico se obtiene ya que los nodos no controlados están vinculados al nodo controlado y por medio de la fuerza de acoplamiento. A partir de las ecuaciones (3.89) - (3.91) se define el siguiente sistema de error de sincronización entre la neurona maestra y la neurona marcapasos AB esclava, $\chi = x_0 - x_1$, con variables de estado dadas como

$$\begin{aligned}\chi_1 &= x_{01} - x_{11}, \\ \chi_2 &= x_{02} - x_{12}, \\ \chi_3 &= x_{03} - x_{13}, \\ \chi_4 &= x_{04} - x_{14}.\end{aligned}\tag{3.92}$$

Por lo tanto, la dinámica del error de sincronización está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_1 &= \alpha_1\chi_2 + \beta_1\chi_1^2 - \theta_1\chi_1^3 - \delta_1\chi_3 + \Delta I + \varphi_1(x_0, \chi, x_i) - u, \\ \dot{\chi}_2 &= \Delta\varepsilon - \phi\chi_1^2 - \chi_2 - \gamma_1\chi_4 + \varphi_2(x_0, \chi), \\ \dot{\chi}_3 &= \mu_1(-\chi_3 + \sigma_1(\chi_1 - \zeta_1)) + \varphi_3(x_0, \chi), \\ \dot{\chi}_4 &= \nu_1(-\pi_1\chi_4 + \rho_1(\chi_2 - \lambda_1)) + \varphi_4(x_0, \chi), \\ \dot{x}_i &= F(x_i) + \kappa_c \sum_{j=1}^3 a_{ij}\Gamma x_j, \quad \text{para } i = 2, 3, \\ y &= h(\chi_1) = \chi_1 = x_{01} - x_{11},\end{aligned}\tag{3.93}$$

donde φ_l ($l = 1, 2, 3, 4$) son funciones que se dan en términos de los parámetros del sistema maestro y el sistema esclavo, y en términos de las variables de estado de los nodos de la red; $y \in R$ representa el estado medido o la salida del sistema. Nótese que en esta nueva representación el problema se reduce a estabilizar el sistema de error en el origen. Es importante destacar que en el sistema de error la influencia de los nodos no controlados de la red se consideran como una perturbación de entrada al nodo controlado; por lo tanto, el comando de control tiene que compensar las perturbaciones de este tipo a fin de estabilizar el sistema de error. Se ha demostrado que el subsistema dado por los nodos no controlados no afecta al diseño del comando de control; esto se debe al hecho de que su dinámica es considerada como incierta (Solís-Perales et al., 2003).

A fin de determinar un control no lineal estabilizante es necesaria la condición de grado relativo. Para el sistema de error (3.93) la condición de grado relativo está dada por la siguiente ecuación,

$$L_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{F}}^0 h(\chi_1) = L_{\mathcal{B}}h(\chi_1) = -1,\tag{3.94}$$

donde $\mathcal{B} = [-1, 0, 0, 0]^T$ es el vector de entrada de control, y \mathcal{F} es el campo vectorial del sistema dinámico dado por la diferencia entre el sistema maestro y el sistema esclavo ($\dot{\chi} = \dot{x}_0 - \dot{x}_1$) sin considerar el subsistema dinámico de los nodos no controlados. De estas ecuaciones es fácil ver que el grado relativo es $\rho = 1$. Además,

$$L_{\mathcal{F}}h(\chi_1) = \alpha_1\chi_2 + \beta_1\chi_1^2 - \theta_1\chi_1^3 - \delta_1\chi_3 + \Delta I_1 + \varphi_1(x_0, \chi, x_i).\tag{3.95}$$

Sin pérdida de generalidad, se propone una transformación difeomorfa dada por $z = \Phi(\chi) = [\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4]^T$ la cual es una transformación invertible ya que la matriz Jacobiana es invertible en cualquier punto χ^o del dominio; por lo tanto, el sistema transformado es dado

por

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= L_{\mathcal{F}}h(\Phi^{-1}(z)) + L_{\mathcal{B}}h(\Phi^{-1}(z))u, \\
\dot{z}_2 &= \Delta\varepsilon - \phi_1 z_1^2 - z_2 - \gamma_1 z_4 + \varphi_2(x_0, z), \\
\dot{z}_3 &= \mu_1(-z_3 + \sigma_1(z_1 + \theta_1)) + \varphi_3(x_0, z), \\
\dot{z}_4 &= \nu_1(-\pi_1 z_4 + \rho_1(z_2 + \lambda_1)) + \varphi_4(x_0, z), \\
y &= z_1.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

A partir del sistema transformado se propone un controlador estabilizante de la siguiente manera

$$u = \frac{1}{L_{\mathcal{B}}h(\Phi^{-1}(z))} \left(-L_{\mathcal{F}}h(\Phi^{-1}(z)) - k(z_1 - z^*) \right), \tag{3.97}$$

donde $z^* = 0$ es el punto de estabilización. Nótese que el controlador requiere la función $L_{\mathcal{F}}h(\Phi^{-1}(z))$, la cual contiene las desviaciones de los estados enlazados de la red. En otras palabras, tal función representa una fuente de incertidumbre en el sentido de que el controlador requiere de los estados que entran en el nodo controlado. Para hacer frente a esta dificultad, se define un nuevo estado η el cual agrupa a todos los términos inciertos en el sistema (3.96) (Femat y Álvarez-Ramírez, 1997; Femat et al.2000). Además, $L_{\mathcal{B}}h(\Phi^{-1}) = L_{\mathcal{B}}h(\chi_1) = -1$ como puede verse en la ecuación (3.94). Entonces, el sistema transformado está dado de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \eta - u, \\
\dot{z}_2 &= \Delta\varepsilon - \phi_1 z_1^2 - z_2 - \gamma_1 z_4 + \varphi_2(x_0, z), \\
\dot{z}_3 &= \mu_1(-z_3 + \sigma_1(z_1 + \theta_1)) + \varphi_3(x_0, z), \\
\dot{z}_4 &= \nu_1(-\pi_1 z_4 + \rho_1(z_2 + \lambda_1)) + \varphi_4(x_0, z), \\
\dot{\eta} &= \Xi(z, \eta, u), \\
y &= z_1,
\end{aligned} \tag{3.98}$$

en esta nueva forma el controlador estabilizante será

$$u = \eta + k(z_1 - z^*). \tag{3.99}$$

Este controlador requiere del nuevo estado para poder compensarlo, sin embargo, tal controlador no puede ser físicamente implementado ya que el nuevo estado η es incierto. En este punto nuevamente se puede proponer un estimador de estados para obtener un valor estimado de una variable no medible, de la misma manera en que se construyó para controlar la dinámica en un ensamble mínimo maestro esclavo. El problema de la estimación de η es resuelto usando un observador de alta ganancia, el cual es capaz de reconstruir la dinámica de η a partir de las mediciones de la salida $y = z_1$, como sigue (Femat et al., 2000),

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_1 &= \hat{\eta} - u + L_0 \kappa_1 (z_1 - \hat{z}_1), \\
\dot{\hat{\eta}} &= L_0^2 \kappa_2 (z_1 - \hat{z}_1),
\end{aligned} \tag{3.100}$$

donde $(\hat{z}_1, \hat{\eta})$ son los valores estimados de (z_1, η) ; L_0 es el único parámetro a sintonizar, y representa el parámetro de estimación de alta ganancia que puede interpretarse como la rapidez de estimación de incertidumbres. Los parámetros κ_1 y κ_2 son elegidos para que el polinomio $P(s) = s^2 + \kappa_2 s + \kappa_1 = 0$ tenga todos sus valores propios en el plano complejo izquierdo. Por lo tanto, la ley de control resultante con estimación de incertidumbres se da como sigue

$$u = [\hat{\eta} + k\hat{z}_1]. \tag{3.101}$$

Este nuevo controlador estabiliza el sistema de error de sincronización en el origen, y en consecuencia, sincroniza la neurona maestra externa y la neurona marcapasos AB. En otras palabras, el controlador contrarresta las desviaciones del estado en la neurona controlada e impone la nueva dinámica en el nodo controlado, y como consecuencia la sincronización de la red es obtenida vía el nodo controlado y la fuerza de acoplamiento.

Una vez que el controlador (3.100)-(3.101) ha sido diseñado, puede ser implementado en el sistema (3.89)-(3.91) considerando que solo los estados x_{01} en la neurona maestra y x_{11} en la neurona controlada son medibles. Para corroborar la propuesta en esta sección el siguiente sistema se considera como la red controlada

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{01} &= \alpha_0 x_{02} + \beta_0 x_{01}^2 - \theta_0 x_{01}^3 - \delta_0 x_{03} + I_0 \\
\dot{x}_{02} &= \varepsilon_0 - \phi_0 x_{01}^2 - x_{02} - \gamma_0 x_{04} \\
\dot{x}_{03} &= \mu_0(-x_{03} + \sigma_0(x_{01} + \zeta_0)) && \text{neurona Maestra} \\
\dot{x}_{04} &= \nu_0(-\pi_0 x_{04} + \rho_0(x_{02} + \lambda_0)) \\
\\
\dot{x}_{11} &= \alpha_1 x_{12} + \beta_1 x_{11}^2 - \theta_1 x_{11}^3 - \delta_1 x_{13} + I_1 + \kappa_c[(x_{21} - x_{11}) + (x_{31} - x_{11})] + (\hat{\eta} + k\hat{z}_1), \\
\dot{x}_{12} &= \varepsilon_1 - \phi_1 x_{11}^2 - x_{12} - \gamma_1 x_{14} \\
\dot{x}_{13} &= \mu_1(-x_{13} + \sigma_1(x_{11} + \zeta_1)) && \text{neurona controlada AB} \\
\dot{x}_{14} &= \nu_1(-\pi_1 x_{14} + \rho_1(x_{12} + \lambda_1)) \\
\\
\dot{x}_{21} &= \alpha_2 x_{22} + \beta_2 x_{21}^2 - \theta_2 x_{21}^3 - \delta_2 x_{23} + I_2 + \kappa_c[(x_{11} - x_{21}) + (x_{31} - x_{21})], \\
\dot{x}_{22} &= \varepsilon_2 - \phi_2 x_{21}^2 - x_{22} - \gamma_2 x_{24} \\
\dot{x}_{23} &= \mu_2(-x_{23} + \sigma_2(x_{21} + \theta_2)) && \text{neurona PD} \\
\dot{x}_{24} &= \nu_2(-\pi_2 x_{24} + \rho_2(x_{22} + \lambda_2)) \\
\\
\dot{x}_{31} &= \alpha_3 x_{32} + \beta_3 x_{31}^2 - \theta_3 x_{31}^3 - \delta_3 x_{33} + I_3 + \kappa_c[(x_{11} - x_{31}) + (x_{21} - x_{31})], \\
\dot{x}_{32} &= \varepsilon_3 - \phi_3 x_{31}^2 - x_{32} - \gamma_3 x_{34} \\
\dot{x}_{33} &= \mu_3(-x_{33} + \sigma_3(x_{31} + \zeta_3)) && \text{neurona PD} \\
\dot{x}_{34} &= \nu_3(-\pi_3 x_{34} + \rho_3(x_{32} + \lambda_3)), \\
\\
\dot{\hat{z}}_1 &= \hat{\eta} - u + L_0 \kappa_1((x_{01} - x_{11}) - \hat{z}_1) \\
\dot{\hat{\eta}} &= L_0^2 \kappa_2((x_{01} - x_{11}) - \hat{z}_1) && \text{compensador dinámico}
\end{aligned}$$

Una NE puede proveer la dinámica de la neurona maestra ya que los sistemas híbridos con neuronas biológicas y neuronas electrónicas han demostrado ser un poderoso mecanismo para entender los modos de operación de los CPG (Szűcs et al., 2001; Pinto et al., 2000; Szűcs et al, 2000). Por otra parte, ya que el controlador no lineal depende de las mediciones de los estados de potencial de acción x_{01} y x_{11} , el controlador puede ser implementado mediante el uso de circuitos analógicos o dispositivos digitales tales como procesadores de señales digitales. Las simulaciones numéricas son llevadas a cabo considerando la siguiente configu-

ración experimental: el ensamble neuronal marcapasos es aislado del resto de la red mediante el uso de técnicas farmacológicas, pero aún puede recibir modulación de la red gástrica. Si las entradas de activación de ganglios anteriores son mantenidas intactas, entonces entradas sinápticas muy intensas que llegan de la red del saco cardiaco pueden aparecer repentinamente. Sin embargo, estos episodios cardiacos no son frecuentes, lo que permite obtener largas secciones de actividad neuronal ininterrumpida. La modulación gástrica y/o de ganglios anteriores puede ser modelada como una corriente de forzamiento periódico que entra a las neuronas marcapasos (Szucs et al.,2000).

3.7. Dinámica de sincronización en ensambles con topologías de redes grandes

Resulta de interés estudiar la sincronización robusta en topologías de redes grandes para corroborar si esta técnica puede controlar tales redes.

A continuación se presenta la ecuación de estado para una red controlada con 12 neuronas. Esta red no representa un ensamble biológico, pero se considera que los nodos estan acoplados lineal y difusivamente como en el ensamble marcapasos. El procedimiento a seguir en este sistema es igual al empleado en el ensamble neuronal marcapasos del CPG pilórico. La red controlada se propone como se muestra a continuación

$$\dot{x}_0 = F(x_0), \quad (3.102)$$

$$\dot{x}_1 = F(x_1) + \kappa_c \sum_{j=1}^{12} a_{1j} \Gamma x_j + Bu, \quad (3.103)$$

$$\dot{x}_i = F(x_i) + \kappa_c \sum_{j=1}^{12} a_{ij} \Gamma x_j, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, 12. \quad (3.104)$$

donde x_0 es el vector de estado de la neurona maestra, x_1 es el vector de estados de la neurona esclava y x_i para $i = 2, \dots, 12$ son los vectores de estado de los nodos restantes de la red, $B = (1, 0, 0, 0)^T$ es el vector de entrada de control a la neurona controlada y u representa la acción de control aplicada para inducir el comportamiento de la neurona maestra. A partir de las ecuaciones (3.102)-(3.109) se define el siguiente sistema de error de sincronización entre la neurona maestra y la neurona esclava, $\chi = x_0 - x_1$, con variables de estado dadas como

$$\begin{aligned} \chi_1 &= x_{01} - x_{11}, \\ \chi_2 &= x_{02} - x_{12}, \\ \chi_3 &= x_{03} - x_{13}, \\ \chi_4 &= x_{04} - x_{14}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Por lo tanto, la dinámica del error de sincronización está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 &= \alpha_1 \chi_2 + \beta_1 \chi_1^2 - \theta_1 \chi_1^3 - \delta_1 \chi_3 + \Delta I + \varphi_1(x_0, \chi, x_i) - u, \\ \dot{\chi}_2 &= \Delta \varepsilon - \phi \chi_1^2 - \chi_2 - \gamma_1 \chi_4 + \varphi_2(x_0, \chi), \\ \dot{\chi}_3 &= \mu_1 (-\chi_3 + \sigma_1 (\chi_1 - \zeta_1)) + \varphi_3(x_0, \chi), \\ \dot{\chi}_4 &= \nu_1 (-\pi_1 \chi_4 + \rho_1 (\chi_2 - \lambda_1)) + \varphi_4(x_0, \chi), \\ \dot{x}_i &= F(x_i) + \kappa_c \sum_{j=1}^{12} a_{ij} \Gamma x_j, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, 12 \\ y &= h(\chi_1) = \chi_1 = x_{01} - x_{11}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

donde φ_l ($l = 1, 2, 3, 4$) son funciones que se dan en términos de los parámetros del sistema maestro y el sistema esclavo, y en términos de las variables de estado de los nodos de la red; $y \in R$ representa el estado medido o la salida del sistema. El grado relativo para este sistema es $\rho = 1$. Se propone la siguiente transformación $z = \Phi(\chi) = [\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4]^T$ y el sistema quedará dado por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= L_{\mathcal{F}}h(\Phi^{-1}(z)) + L_{\mathcal{B}}h(\Phi^{-1}(z))u, \\ \dot{z}_2 &= \Delta\varepsilon - \phi_1 z_1^2 - z_2 - \gamma_1 z_4 + \varphi_2(x_0, z), \\ \dot{z}_3 &= \mu_1(-z_3 + \sigma_1(z_1 + \theta_1)) + \varphi_3(x_0, z), \\ \dot{z}_4 &= \nu_1(-\pi_1 z_4 + \rho_1(z_2 + \lambda_1)) + \varphi_4(x_0, z), \\ y &= z_1.\end{aligned}\tag{3.107}$$

donde $\mathcal{B} = [-1, 0, 0, 0]^T$ es el vector de entrada de control, y \mathcal{F} es el campo vectorial del sistema dinámico dado por la diferencia entre el sistema maestro y el sistema esclavo ($\dot{\chi} = \dot{x}_0 - \dot{x}_1$). Además,

$$L_{\mathcal{F}}h(\chi_1) = \alpha_1 \chi_2 + \beta_1 \chi_1^2 - \theta_1 \chi_1^3 - \delta_1 \chi_3 + \Delta I_1 + \varphi_1(x_0, \chi, x_i).\tag{3.108}$$

y

$$L_{\mathcal{B}}h(\Phi^{-1}) = L_{\mathcal{B}}h(\chi_1) = -1.\tag{3.109}$$

A partir del sistema transformado se propone de nuevo un controlador estabilizante de la siguiente manera

$$u = \frac{1}{L_{\mathcal{B}}h(\Phi^{-1}(z))} \left(-L_{\mathcal{F}}h(\Phi^{-1}(z)) - k(z_1 - z^*) \right).\tag{3.110}$$

El controlador requiere la función $L_{\mathcal{F}}h(\Phi^{-1}(z))$, la cual contiene las desviaciones de los estados enlazados de la red. En otras palabras, tal función representa una fuente de incertidumbre. Para hacer frente a esta dificultad, se define un nuevo estado η el cual agrupa a todos los términos inciertos. Entonces, el sistema transformado está dado por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \eta - u, \\ \dot{z}_2 &= \Delta\varepsilon - \phi_1 z_1^2 - z_2 - \gamma_1 z_4 + \varphi_2(x_0, z), \\ \dot{z}_3 &= \mu_1(-z_3 + \sigma_1(z_1 + \theta_1)) + \varphi_3(x_0, z), \\ \dot{z}_4 &= \nu_1(-\pi_1 z_4 + \rho_1(z_2 + \lambda_1)) + \varphi_4(x_0, z), \\ \dot{\eta} &= \Xi(z, \eta, u), \\ y &= z_1,\end{aligned}\tag{3.111}$$

en esta nueva forma el controlador estabilizante será

$$u = (\eta + k z_1).\tag{3.112}$$

El problema de la estimación de η es resuelto usando un observador de alta ganancia, el cual es capaz de reconstruir la dinámica de η a partir de las mediciones de la salida $y = z_1$, como sigue (Femat y Álvarez-Ramírez, 2000),

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}_1 &= \hat{\eta} - u + L_0 \kappa_1 (z_1 - \hat{z}_1), \\ \dot{\hat{\eta}} &= L_0^2 \kappa_2 (z_1 - \hat{z}_1),\end{aligned}\tag{3.113}$$

por lo tanto, la ley de control resulta ser igual a la propuesta en la Sección 3.6

$$u = [\hat{\eta} + k\hat{z}_1]. \quad (3.114)$$

Una vez que el controlador ha sido diseñado se puede implementar en el sistema considerado resultando la siguiente red controlada

$$\dot{x}_0 = F(x_0), \quad (3.115)$$

$$\dot{x}_1 = F(x_1) + \kappa_c \sum_{j=1}^{12} a_{1j} \Gamma x_j + (\hat{\eta} + k\hat{z}_1), \quad (3.116)$$

$$\dot{x}_i = F(x_i) + \kappa_c \sum_{j=1}^{12} a_{ij} \Gamma x_j \text{ para } i = 2, 3, \dots, 12 \quad (3.117)$$

$$\dot{\hat{z}}_1 = \hat{\eta} - u + L_0 \kappa_1 ((x_{01} - x_{11}) - \hat{z}_1), \quad (3.118)$$

$$\dot{\hat{\eta}} = L_0^2 \kappa_2 ((x_{01} - x_{11}) - \hat{z}_1). \quad (3.119)$$

Cabe mencionar que solo se estudian matrices de conectividad simétricas. En la Figura 3.2 se muestra el diagrama del ensamble de 12 neuronas conectadas todas lineal y difusivamente.

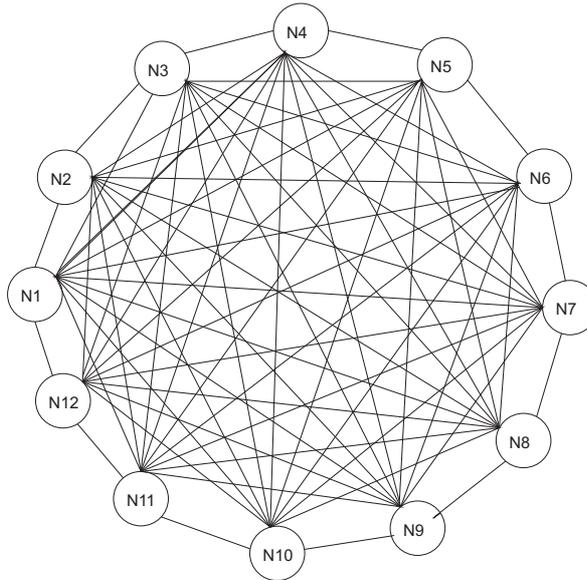


Figura 3.2: Ensamble de la red con N=12 nodos y su conectividad.

La matriz de conectividad para la red con N=12 nodos que se muestra en la Figura 3.2, es como se presenta a continuación:

$$A_{12 \times 12} = \begin{pmatrix} -11 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -11 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -11 \end{pmatrix}.$$

IV. RESULTADOS

4.1. Ensamble de una neurona maestra y una neurona esclava con dinámica caótica

La solución numérica de los sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas se realizó utilizando Mathematica versión 6.

A continuación se presentan los resultados obtenidos para la sincronización de un ensamble mínimo compuesto de una neurona maestra y una neurona esclava. La Figura 4.1 muestra la gráfica de la dinámica regular de la neurona maestra antes de aplicar la ley de control.

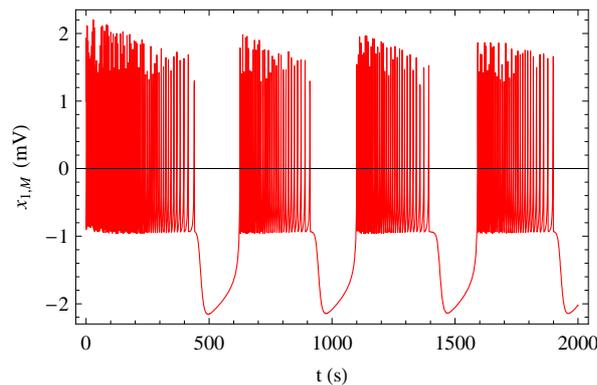


Figura 4.1: Actividad del potencial de acción de la neurona maestra en el ensamble mínimo.

En la Figura 4.2 se muestra la gráfica del comportamiento caótico de la neurona esclava antes de implementar la ley de control.

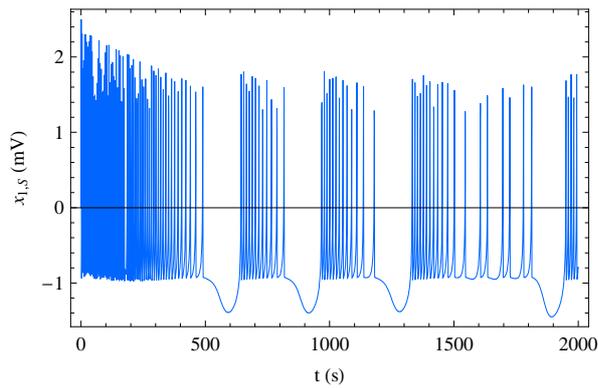


Figura 4.2: Actividad del potencial de acción de la neurona esclava en el ensamble mínimo.

En la Figura 4.3 se muestra la gráfica donde se aplica la ley de control, se observa claramente la transición del estado asíncrono entre la neurona maestra y la neurona esclava a un estado de sincronización robusta al implementar la ley de control u observador de estados a los 2000 segundos.

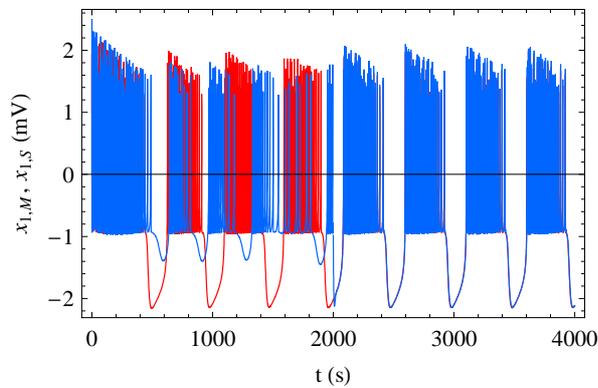


Figura 4.3: Actividad de los potenciales de acción en estado asíncrono y en sincronía del ensamble mínimo.

En la Figura 4.4 se muestra la gráfica del espacio de fase del potencial de acción entre la neurona esclava y la neurona maestra, como se aprecia en la gráfica, existe una sincronización robusta entre la neurona esclava y la neurona maestra ya que las órbitas se encuentran muy cerca de una recta con inclinación a 45° , lo cual indica un alto grado de sincronización.

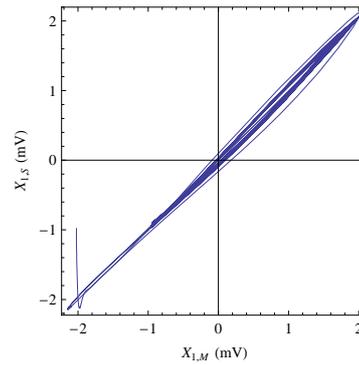


Figura 4.4: Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona esclava del ensamble mínimo.

En la Figura 4.5 se muestra la respuesta dinámica de la ley de control la cual es capaz de inducir la dinámica de sincronización en el ensamble del sistema maestro-esclavo.

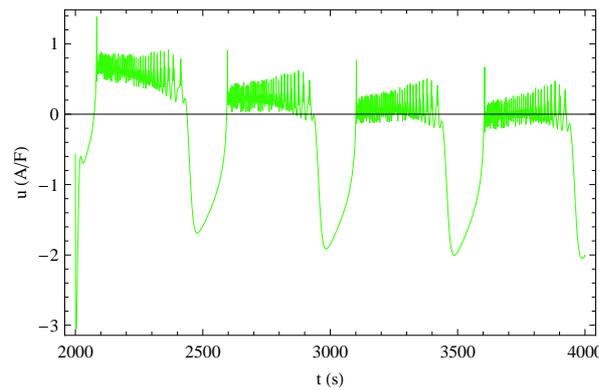


Figura 4.5: La respuesta dinámica de la ley de control para el ensamble mínimo.

4.2. Ensamble neuronal marcapasos del CPG pilórico.

En esta sección se presentan los resultados del ensamble neuronal marcapasos con dinámica caótica y con dinámica modulada por forzamiento periódico.

4.2.1 Ensamble marcapasos con dinámica caótica

En la Figura 4.13 se muestra la dinámica con secuencias de picos regular de la neurona maestra antes de aplicar la acción de control.

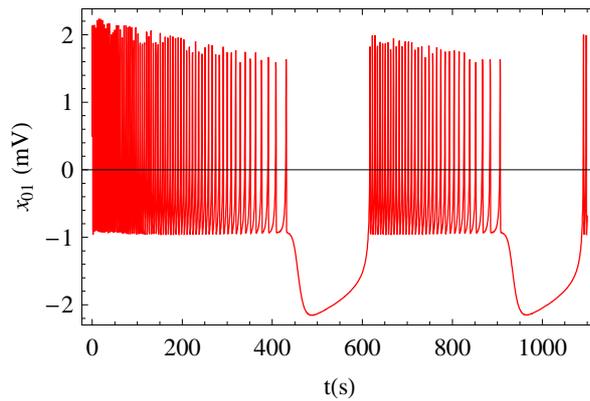


Figura 4.6: Actividad del potencial de acción de la neurona maestra para control del ensemble marcapasos con dinámica caótica.

En la Figura 4.7 se muestra la dinámica caótica del ensemble marcapasos compuesto de la neurona marcapasos AB esclava y dos neuronas PD acopladas a la neurona esclava antes de aplicar la acción de control. Los potenciales de acción se encuentran en sincronía por la elección de los parámetros dinámicos de las neuronas del ensemble y por la fuerza de acoplamiento.

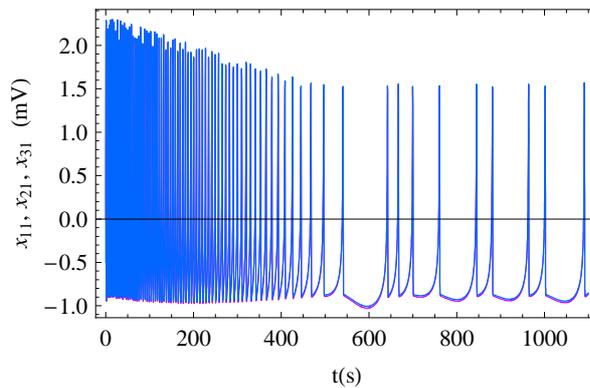


Figura 4.7: Actividad del potencial de acción del ensemble marcapasos con dinámica caótica.

En la Figura 4.8 se muestra la transición de un estado asíncrono de la dinámica entre la neurona maestra y el ensemble marcapasos a un estado de sincronización robusta después de aplicar la acción de control al tiempo de 1100 segundos.

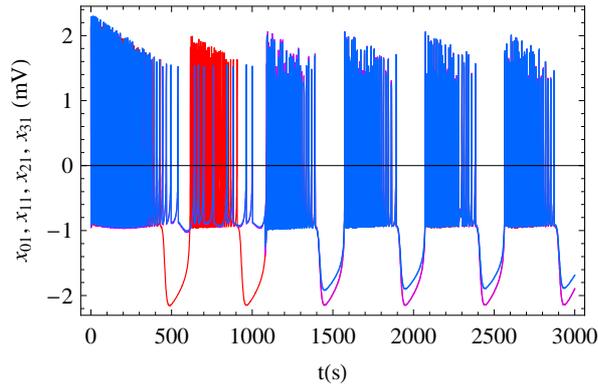


Figura 4.8: Actividad del potencial de acción en estado asíncrono y en sincronía entre la neurona maestra y el ensamble marcapasos.

En la Figura 4.9 se presenta el espacio de fase entre la neurona maestra y la neurona marcapasos AB esclava. Se puede observar en la gráfica una sincronización robusta entre la neurona maestra y la neurona esclava. Prácticamente, se observa una línea recta lo cual indica un alto grado de sincronización.

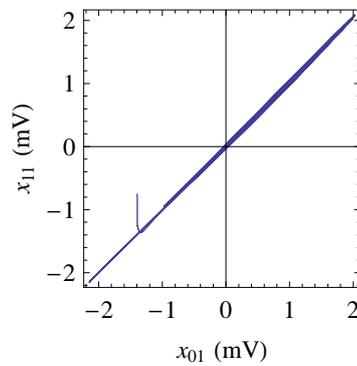


Figura 4.9: Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona AB esclava.

En la Figura 4.10 se presenta el espacio de fase entre las dos neuronas pilóricas PD, las cuales están acopladas a la neurona esclava AB. La gráfica muestra una sincronización exacta entre estas dos neuronas debido a que ambas poseen los mismos parámetros dinámicos. El espacio de fase de los potenciales de acción muestra una línea recta a 45° .

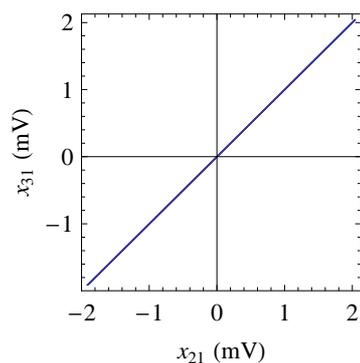


Figura 4.10: Espacio de fase del potencial de acción entre las neuronas PD.

En la Figura 4.11 se presenta el espacio de fase entre la neurona marcapasos AB esclava y una neurona PD. Se puede observar que se logra la sincronización aunque comienza a disminuir ligeramente la robustez.

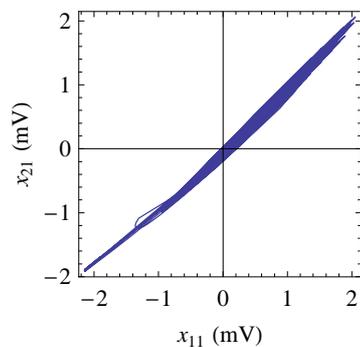


Figura 4.11: Espacio de fase del potencial de acción la neurona AB y una neurona PD.

En la Figura 4.12 se visualiza la respuesta dinámica de la ley de control que se implementa para generar la sincronización robusta entre la neurona maestra y el ensamble marcapasos con dinámica caótica.

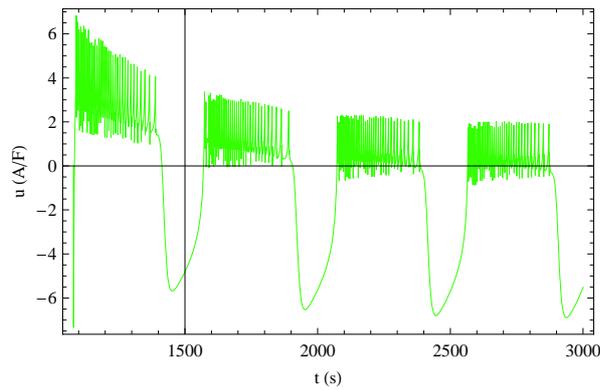


Figura 4.12: La respuesta dinámica de la ley de control para el ensamble marcapasos con dinámica caótica.

4.2.2 Ensamble neuronal marcapasos con dinámica modulada por forzamiento periódico.

En la Figura 4.13 se muestra la dinámica de la neurona maestra antes de aplicar la ley de control.

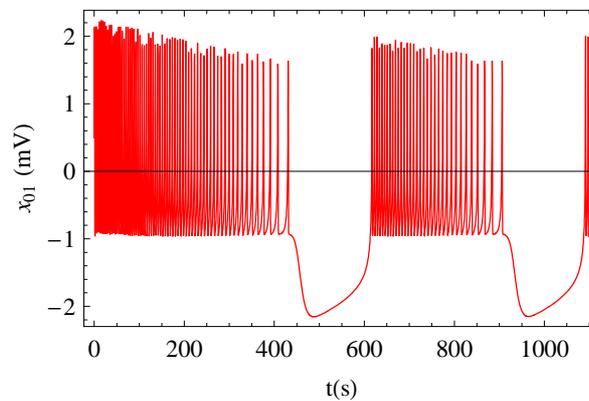


Figura 4.13: Actividad del potencial de acción de la neurona maestra para control del ensamble marcapasos con dinámica modulada.

En la Figura 4.14 se muestra la dinámica de la neurona AB y las dos neuronas PD antes de aplicar el controlador. En esta sección, la fuerza periódica fue modelada como una corriente senoidal $I_1(t) = A_1 \text{Sen}(2\pi f_1 t)$ con $A_1 = 2$ y $f_1 = 0.2$ para la neurona AB, y $I_2(t) = I_3(t) = A_2 \text{Sen}(2\pi f_2 t)$ con $A_2 = 1$ y $f_2 = 0.2$ para las neuronas PD.

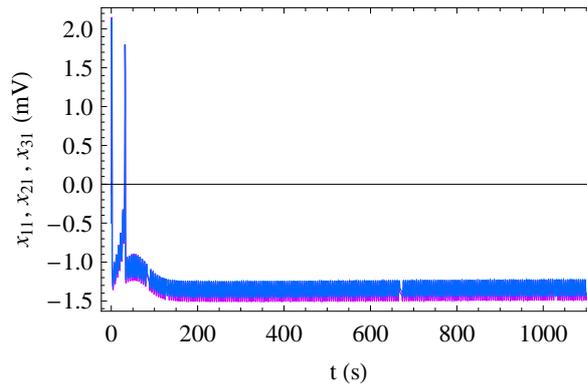


Figura 4.14: Actividad del potencial de acción del ensemble marcapasos con dinámica modulada.

En la Figura 4.15 se muestra el acoplamiento que experimenta el ensemble marcapasos con la neurona maestra al implementar la ley de control, se observa robustez en la sincronización. La acción de control se aplica al tiempo de 1100 s.

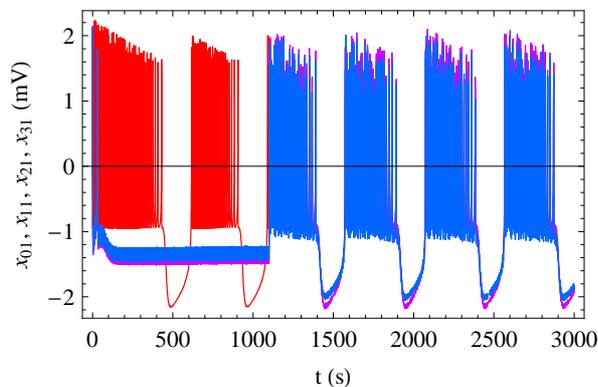


Figura 4.15: Actividad de los potenciales de acción en estado asíncrono y en sincronía entre la neurona maestra y el ensemble marcapasos con dinámica modulada.

En la Figura 4.16 se muestra el espacio de fase entre la neurona maestra y la neurona marcapasos AB. Como se observa en la gráfica, existe un buen grado de robustez en la sincronización.

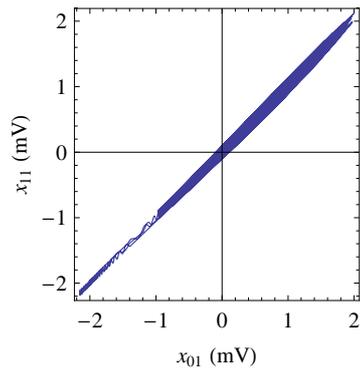


Figura 4.16: Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona AB esclava con dinámica modulada.

En la Figura 4.17 se muestra el espacio de fase entre las dos neuronas PD del ensamble marcapasos. En la gráfica se observa sincronización exacta entre las dos neuronas, esto debido a que tienen los mismos parámetros dinámicos.

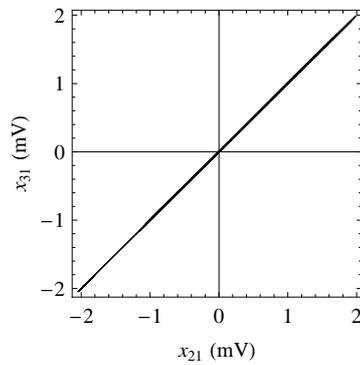


Figura 4.17: Espacio de fase del potencial de acción entre dos neuronas PD con dinámica modulada.

En la Figura 4.18 se muestra el espacio de fase entre una neurona PD y la neurona AB. Se observa una sincronización robusta pero con una exactitud menor.

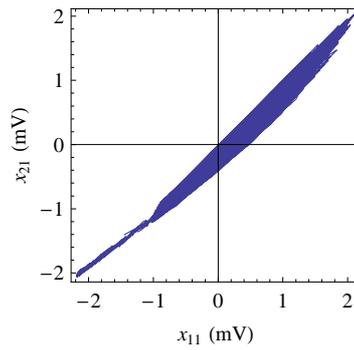


Figura 4.18: Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona AB y una neurona PD.

En la Figura 4.19 se muestra la respuesta dinámica de la ley de control implementada para generar sincronización robusta entre la neurona maestra y el ensamble marcapasos pilórico con forzamiento periódico.

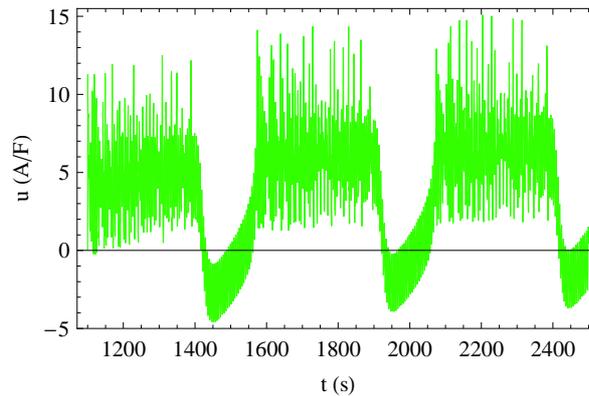


Figura 4.19: La respuesta dinámica de la ley de control para el ensamble marcapasos con dinámica modulada.

4.3. Ensamble con topología de red grande (N=12).

En esta sección se presentan los resultados del ensamble neuronal con 12 nodos.

En la Figura 4.20 se muestra la dinámica de la neurona maestra antes de implementar la ley de control.

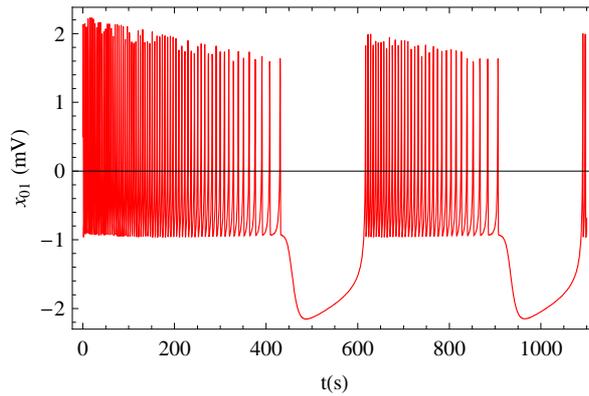


Figura 4.20: Actividad del potencial de acción de la neurona maestra para control del ensamble con $N=12$ nodos.

En la Figura 4.21 se muestra la dinámica de las 12 neuronas acopladas lineal y difusivamente antes de implementar la acción de control. Las trayectorias de los potenciales de acción tienden a un estado estable debido a que las neuronas no tienen forzamiento.

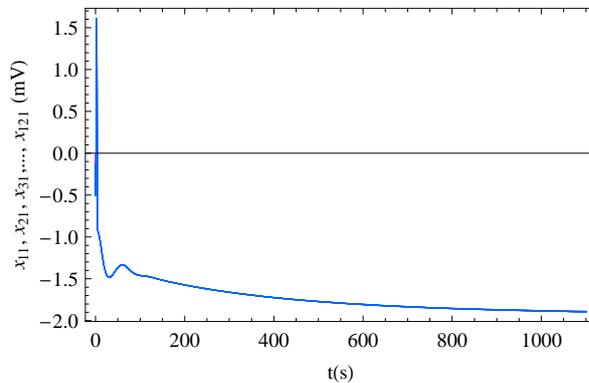


Figura 4.21: Actividad del potencial de acción del ensamble con $N=12$ nodos.

En la Figura 4.22 se muestra la sincronización robusta generada entre la neurona maestra y el ensamble de neuronas después de aplicar la ley de control. Se puede ver que este controlador puede emplearse en topologías de red de hasta doce neuronas mostrando un buen grado de sincronización entre las neuronas.

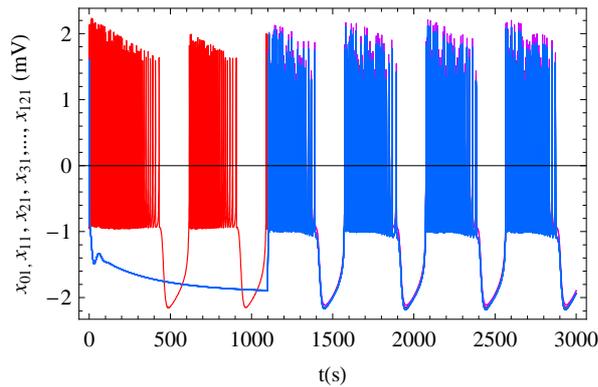


Figura 4.22: Actividad del potencial de acción en estado asíncrono y en sincronía entre la neurona maestra y el ensamble con $N=12$ nodos.

En la Figura 4.23 se muestra el espacio de fase entre la neurona maestra y la neurona esclava. Se observa que disminuye la robustez de la sincronización en comparación con los ensambles pequeños.

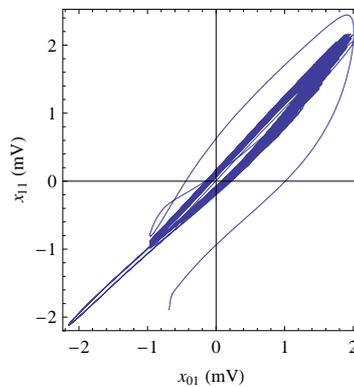


Figura 4.23: Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona esclava $N1$.

En la Figura 4.24 se muestra el espacio de fase entre la neurona maestra y la neurona $N2$ (ver Figura 3.2). En esta segunda gráfica se observa que en ensambles grandes la ley de control pierde robustez al generar la sincronización.

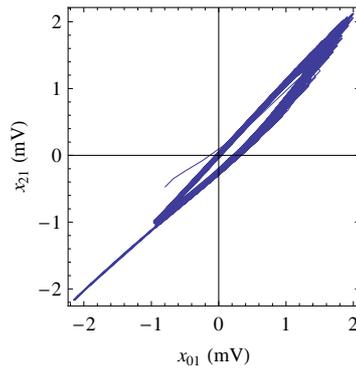


Figura 4.24: Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona esclava $N2$.

En la Figura 4.25 se muestra el espacio de fase entre la neurona maestra y la neurona $N6$ (ver Figura 3.2). Aún se genera sincronización con un buen grado de robustez.

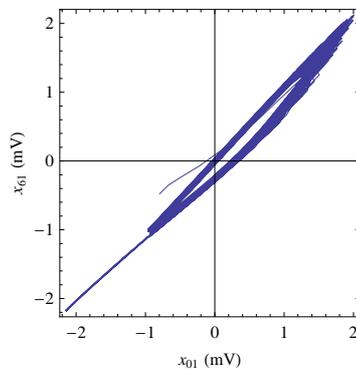


Figura 4.25: Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona $N6$.

En la Figura 4.26 se muestra el espacio de fase entre la neurona esclava y la neurona $N12$ (ver Figura 3.2), se observa sincronización robusta, pero se puede ver claramente que a medida que la topología se hace más compleja la exactitud va disminuyendo.

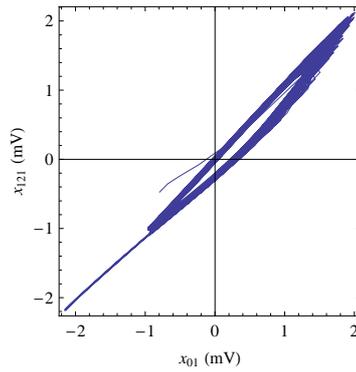


Figura 4.26: Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona maestra y la neurona $N12$.

En la Figura 4.27 se muestra el espacio de fase entre la neurona esclava y la neurona $N6$ (ver Figura 3.2), se observa claramente una sincronización robusta.

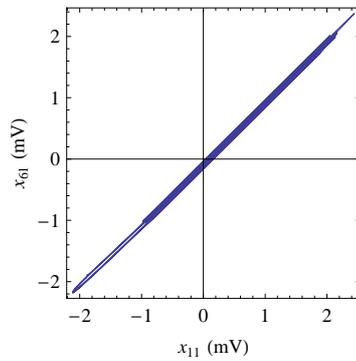


Figura 4.27: Espacio de fase del potencial de acción entre la neurona esclava $N1$ y la neurona $N6$.

En la Figura 4.28 se muestra la respuesta dinámica de la ley de control implementada para el estado de sincronización robusta para el ensamble compuesto de 12 neuronas.

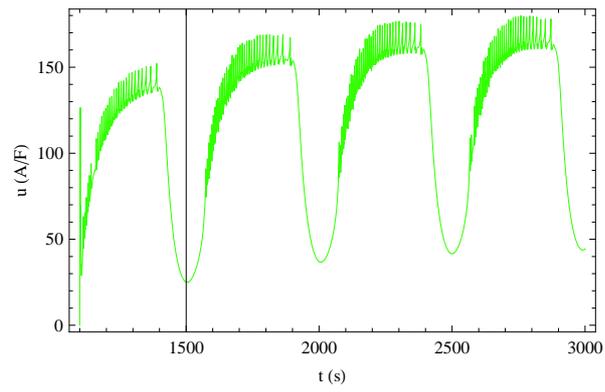


Figura 4.28: La respuesta dinámica de la ley de control para el ensamble con $N=12$ nodos.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió y se generó dinámica de sincronización en diversos ensambles neuronales. Las técnicas para el control de la dinámica neuronal, la cual puede ser caótica o regular, corresponde a la teoría de control no lineal, en específico se construyó un observador de estados. Este observador de estados permite generar estados de sincronización con un buen grado de robustez, lográndose así los objetivos planteados en esta tesis.

En la primera sección de resultados de esta tesis se estudió la dinámica de sincronización en un ensamble mínimo compuesto por una neurona maestra y una neurona esclava. Se consideró que en este sistema maestro-esclavo de neuronas HRe existe un acoplamiento unidireccional en el cual se logró conseguir estados de sincronización a pesar de discrepancias paramétricas. Debido a que la dinámica de la activación e inactivación de los canales iónicos no son físicamente medibles se desarrolló un esquema de control adaptivo robusto para generar la dinámica de sincronización de las neuronas HRe en el ensamble maestro-esclavo. Una ley de control por retroalimentación modificada compuesta de un compensador dinámico y una ley de control linealizante con estimación de incertidumbres ha sido implementada. El esquema adaptivo conduce a estados dinámicos de sincronización robusta de los potenciales de acción como se muestra en la Figura 6. Las variables que representan las actividades de los canales iónicos también adquieren estados de sincronización. El compensador dinámico permite reconstruir la dinámica de los estados inciertos (z_1, η) a partir de las mediciones de los potenciales de acción y requiere solamente un parámetro a sintonizar, L_0 .

En la segunda sección de resultados se estudió la sincronización controlada de un ensamble neuronal pequeño. El ensamble corresponde al grupo principal marcapasos del CPG pilórico en el STG de la langosta, el cual ha sido muy estudiado previamente en preparaciones biológicas. El grupo marcapasos pilórico de neuronas ha sido modelado como una red compleja con entradas modulatorias modeladas como una corriente de forzamiento periódico. Los resultados presentados aquí consideran que existe un acoplamiento unidireccional entre la neurona maestra externa y la neurona marcapasos AB del grupo neuronal marcapasos pilórico. Tal acoplamiento permite inducir la dinámica deseada de la neurona maestra en el ensamble neuronal marcapasos vía control de una de las neuronas en la red. La dinámica de la neurona maestra puede ser provisto por una EN ya que los sistemas híbridos con EN y biológicas han permitido un mejor entendimiento del rol de las propiedades intrínsecas y sinápticas de neuronas en la generación de ritmos o procesamiento de información. El algoritmo de control usado consistió en un controlador de tipo linealizante y un compensador dinámico. Tal controlador es capaz de inducir el comportamiento deseado en la neurona controlada. Por medio de esta neurona se genera el comportamiento síncrono de la red. Cabe mencionar que las interacciones entre la neurona controlada y el resto de las neuronas en el ensamble son consideradas como perturbaciones inciertas que entran a la neurona controlada. Tales

fuentes de incertidumbre son compensadas por el controlador vía el compensador dinámico, el cual reconstruye la dinámica de las funciones inciertas a partir de las mediciones de los potenciales de acción. Los resultados además demuestran que ensambles de neuronas que han perdido sincronía o que permiten comportamiento caótico, pueden restablecer una actividad sincronizada deseada vía la sincronización controlada. Existe una relación entre el compensador de alta ganancia y la fuerza de acoplamiento; esto es porque el error de sincronización depende de la ganancia de control y la sincronización de la red depende de la fuerza de acoplamiento. La sincronización controlada podría proveer un método útil de estudio de los fenómenos de sincronización y procesamiento de información en ensambles neuronales tales como el grupo marcapasos del CPG pilórico, aunque deben ser consideradas las propiedades naturales tales como el ruido intrínseco.

Finalmente, en la tercera sección de resultados se estudió una red con topología grande ($N=12$) y con matriz de conectividad simétrica. Las simulaciones numéricas sugieren que el esquema de control aplicado a redes pequeñas también se puede aplicar a redes grandes siempre y cuando los nodos sean acoplados lineal y difusivamente, es decir, cuando la red alcanza el estado de sincronización (exacta) el acoplamiento se desvanece por simetría. Observando el espacio de fases puede concluirse que a pesar de que el controlador también tiene un buen desempeño en redes grandes la robustez de la sincronización va disminuyendo conforme el número de nodos va creciendo.

Como trabajo futuro se considera aplicar el observador a otros sistemas caóticos para la sincronización, así como en ensambles con matrices de conectividad asimétricas.

LITERATURA CITADA

Aeyels, D., and R. Sepulchre. 1992. Stability for dynamical systems with first integrals: a topological criterion. *Syst. Contr. Lett.* 19:461-465.

Aldana, M. 2008. *Redes complejas*. Memorias de la XV escuela de verano en física UNAM. México, D.F.

Andrievskii, B. L., and A. L. Fradkov. 2003. Control of chaos: Methods and applications I. *Aut. Rem. Control.* 64:673-683.

Andrievskii, B. L., and A. L. Fradkov. 2003. Control of chaos: Methods and applications II. *Aut. Rem. Control.* 64:673-681.

Barahona, M., and L. M. Pecora. 2002. Synchronization in small-world systems. *Phys. Rev. Lett.* 89:5-14

Barajas, J. G. 2006. Sincronización en redes de sistemas dinámicos inciertos. Congreso Nacional de Control Automático, UNAM, D.F., México.

Boccaletti, S., C. Grebogi, Y.C.Lai, H. Mancini, D. Maza. 2000. The control of chaos: Theory and applications. *Phys. Rep.* 329:103-112.

Boccaletti, S. 2008. *The Synchronized dynamics of complex systems*. Elsevier, Oxford, UK.
Boccaletti, S., V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez and D. U. Hwang. 2006. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics reports.* 424:175:188.

Butera, R., J. Rinzel and J. Smith. 1999. Models of respiratory rhythm generation in the Pre-Bötzinger complex I. Bursting Pacemaker neurons. *J. Neurophysiol.* 81:382-392.

Butera, R., J. Rinzel and J. Smith. 1999. Models of respiratory rhythm generation in the Pre-Bötzinger complex II. Populations of coupled pacemaker neurons. *J. Neurophysiol.* 81:398-405.

Casado, J. M. 2003. Synchronization of two Hodgkin-Huxley neurons due to internal noise. *Phys. Lett. A.* 310:400-410.

Casado, J. M., and J. P. Baltanás. 2003. Phase switching in a system of two noisy Hodgkin-Huxley neurons coupled by a diffusive interaction. *Phys. Rev. E.* 68:456-458.

- Elson, R. C., A. I. Selverston, R. Huerta, N. F. Rulkov, M. I. Rabinovich and H. D. Abarbanel. 1999. Synchronous behavior of two coupled biological neurons. *Phys. Rev. Lett.* 87:5692-5705.
- Femat, R., J. Alvarez-Ramírez and G. Fernández-Anaya. 2000. Adaptive synchronization of high-order chaotic systems: a feedback with low-order parametrization. *Physica D.* 139:231-245.
- Femat, R., and J. Alvarez-Ramírez. 1997. Synchronization of a class of strictly different chaotic oscillators. *Phys. Lett. A.* 236:307-323.
- Femat, R., and G. Solís-Perales. 1999. On the chaos synchronization phenomena. *Phys- Lett. A.* 262:50-63.
- Glass, L. 2001. *Nature.* 410:277-293.
- Gray, P., Konig, A. K. Engel and W. Singer. 1989. Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit intercolumnar synchronization which reflects global stimulus properties. *Nature.* 338:334-349.
- Gray, C. M., and W. Singer. 1987. Stimulus-specific neuronal oscillations in the cat visual cortex: a cortical functional unit. *Soc. Neurosci.* 404:3-14.
- Haken, H. 2002. *Brain dynamics, Synchronization and activity patterns in pulse-coupled neural nets with delays and noise.* Springer-Verlag, Berlin.
- Hindmarsh, J. L., and R. M. Rose. 1984. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Soc. London.* 221:87-98.
- Hodgkin, A. L., and A. F. Huxley. 1952. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* 117:500-513.
- Isidori, A. 1995. *Nonlinear Control Systems.* Springer-Verlag, London, UK.
- Koch, C. 1998. *Biophysics of computation: Information processing in single Neurons.* Oxford University Press, New York.
- Kreiter, A. K., and W. Singer. 1996. Stimulus-dependent synchronization of neuronal responses in the visual cortex of the awake macaque monkey. *J. Neurosci.* 16: 2381-2396.
- Lee, S., A. Neiman, A. Kim. 1999. Coherence resonance in a Hodgkin-Huxley neurons. *Phys. Rev. E.* 57:3292-3304.
- Meister, M., R. O. L. Wong, D. A. Baylor, C. J. Shatz. 1991. Synchronous bursts of action potentials in ganglion cells of the developing mammalian retina. *Science* 252:939-947.
- Metz, H. R., and A. Scheeling. 1995. *Phys. Rev. E.* 51:4065-4078

- Nijmeijer, H., and A. J. Van der Schaft. 1990. Nonlinear dynamical control systems. Springer, Berlin.
- Osipov, G. V., J. Kurths and C. Zhou, 2007. Synchronization in oscillatory networks. Springer, Berlin.
- Parmananda, P., C. H. Mena and G. Baier. 2002. Resonant forcing of a silent Hodgkin-Huxley neuron. *Phys. Rev. E.* 66:47202-47215.
- Pecora, L. M., T. L. Carrol. 1990. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* 64:821-845.
- Pecora, L., T. Carrol, G. Johnson, D. Mar and S. K. Fink. 2000. Synchronization stability in coupled oscillator arrays: solution for arbitrary configurations. *International Journal of bifurcation and chaos.* 10:273-285.
- Pinto, R. D., P. Varona, A. R. Volkovskii, A. Szûcs, H. D. I. Abarbanel and M. I. Rabinovich. 2000. Synchronous behavior of two coupled electronic neurons. *Phys. Rev. E.* 62:2644-2659.
- Selverston, A. I., and M. Maurice. 1986. The crustacean stomatogastric: a model for the study of central nervous systems. Springer, Berlin.
- Shöll, E., and H. G. Schuster, 2008. Handbook of chaos control. Wiley-VCH, Weinheim, Germany.
- Strogatz, S. 2003. Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order. New York.
- Solís-Perales, G., V. Ayala, W. Klienmann. 2003. *Chaos* 13:495-504.
- Szûcs, A., P. Varona , A. R. Volkovskii, H. D. I. Abarbanel, M. I. Rabinovich and A. I. Selverston. 2000. *Comp. Neuroscience.* 11:563-572.
- Tanabe, S., S. Sato, A. Kim. 1999. Response of ensemble of noisy neuron to a single input, *Phy. Rev. E.* 60:7235-7248.
- Wang, X. J. 2002. Pacemaker neurons for the theta rhythm and their synchronization in the septohippocampal reciprocal loop. *J. Neurophysiol.* 87:889-897.
- Wang, X. F., and G. Chen. 2003. Complex networks: Small-world, scale free and beyond, *IEEE Circuits and systems magazine.* 12:6-14.
- Wang, X.F., and G. Chen. 2002. Synchronization in scale-free dynamical networks: Robustness and fragility, *IEEE Trans. circuits and systems magazine.* 6:54-67.
- Wang, X. F. 2002. Synchronization in small-world dynamical networks. *International Journal of bifurcation and chaos.* 12:885-899.

Wang, X. F., and G. Chen. 2002. Synchronization in small-world dynamical networks. *International Journal of Bifurcation and chaos*. 12:187-197.

Wu, C. W., and L. O. Chua. 1995. Synchronization on an array of linearly coupled dynamical systems. *IEEE Trans. circuits and systems magazine*. 42:430-443.

Yu, Y., W. Wang, J. Wang, J. Wang, F. Liu. 2001. Resonance-enhanced signal and transduction in the Hodgkin-Huxley neuronal systems, *Phys. Rev. E*. 63:21907-21923.

APÉNDICE

PROGRAMA 1. PROGRAMA PARA EL ENSAMBLE MÍNIMO DE UNA NEURONA MAESTRA Y UNA NEURONA ESCLAVA CON DINÁMICA CAÓTICA

Sistema neuronal de Hindmarsh-Rose, Sincronización mediante observador de estados. Neurona esclava con dinámica caótica.

```
Clear(a1, a2, b1, b2, c1, c2, d1, d2, e1, e2, f1, f2, g1, g2, h1, h2, k1, k2, l1, l2, r1,
r2, s1, mu1, mu2, nu1, nu2, kap1, kap2, k0)
```

Parametros

```
a1 = 1,05; a2 = 1; b1 = 2,85; b2 = 3,0; c1 = ,95; c2 = 1.; d1 = ,95; d2 = ,99; e1 =
1,05; e2 = 1,01; f1 = 5; f2 = 5,0128; g1 = ,03; g2 = ,0278; h1 = 1,6; h2 = 1,605; k1 =
,96; k2 = ,9573; l1 = 1,5; l2 = 1,619; r1 = 2,85; r2 = 3.; s1 = 3,85; s2 = 3,966; mu1 =
,002; mu2 = ,0021; nu1 = ,0009; nu2 = ,0009;
```

Corriente externa

```
Iexm=2.92;Iexs=3.1;
```

Dinámica neuronal individual

Neurona maestra

```
hrm = NDSolve[x1m'[t] = a1 * x2m[t] + b1 * x1m[t]^2 - c1 * x1m[t]^3
-d1*x3m[t] + Iexm, x2m'[t] = e1 - f1*x1m[t]^2 - x2m[t] - g1*x4m[t], x3m'[t] =
mu1 * (-x3m[t] + s1 * (x1m[t] + h1)),
x4m'[t] = nu1 * (-k1 * x4m[t] + r1 * (x2m[t] + l1)),
x1m[0] == (1 + 0), x2m[0] == x3m[0] == x4m[0] = 0
x1m, x2m, x3m, x4m, t, 0, 2000, MaxSteps -> Infinity]
x1m -> InterpolatingFunction[0., 2000., <>],
x2m -> InterpolatingFunction[0., 2000., <>],
x3m -> InterpolatingFunction[0., 2000., <>],
x4m -> InterpolatingFunction[0., 2000., <>]
ghrm = Plot[Evaluate[x1m[t]/.hrm], t, 0, 2000, PlotStyle ->
Hue[1], PlotRange -> All, Frame -> True, FrameLabel -> "t(s)", "x1, M,
x1, S(mV)"]
```

Neurona esclava

```
hrs = NDSolve[x1s'[t] = a2 * x2s[t]
+b2 * x1s[t]^2 - c2 * x1s[t]^3 - d2 * x3s[t] + Iexs,
x2s'[t] = e2 - f2 * x1s[t]^2 - x2s[t] - g2 * x4s[t],
x3s'[t] = mu2 * (-x3s[t] + s2 * (x1s[t] + h2)),
x4s'[t] = nu2 * (-k2 * x4s[t] + r2 * (x2s[t] + l2)), x1s[0] == (0 + 0), x2s[0] == 0
x3s[0] == x4s[0] = 0, x1s, x2s, x3s, x4s,
t, 0, 3000, MaxSteps -> Infinity]
```

```

x1s → InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x2s → InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x3s → InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x4s → InterpolatingFunction[0., 3000., <>]

ghrs = Plot[Evaluate[x1s[t]/.hrs],
t, 0, 2000, PlotStyle → Hue[0,6],
PlotRange → All, Frame → True, FrameLabel → "t(s)", "x1, M, x1, S(mV)"]
gr1 = Show[ghrm, ghrs]

```

```

Condiciones finalesent = 1000
x1m[2000], x2m[2000], x3m[2000], x4m[2000]/.hrm
x1s[2000], x2s[2000], x3s[2000], x4s[2000]/.hrs
-2,02246, -19,0955, 2,50731, -13,1047
-0,792045, -2,36317, 3,09279, -5,09431
ParametrodecontrolL0(tuningparameter)L0 = 15;
Leydecontrolu1(PD)
u1 = etg[t] + k0 * z1g[t]etg[t] + k0z1g[t]
parametros del observador
k0 = 1; kap1 = 400; kap2 = 40;

```

Sincronizacion del sistema HR (lazo cerrado, observador de estados):

```

hr1 = NDSolve[x1m'[t] =
a1 * x2m[t] + b1 * x1m[t]^2 - c1 * x1m[t]^3 - d1 * x3m[t] + Iexm,
x2m'[t] = e1 - f1 * x1m[t]^2 - x2m[t] - g1 * x4m[t],
x3m'[t] = mu1 * (-x3m[t] + s1 * (x1m[t] + h1)),
x4m'[t] = nu1 * (-k1 * x4m[t] + r1 * (x2m[t] + l1)),
x1s'[t] = a2*x2s[t]+b2*x1s[t]^2-c2*x1s[t]^3-d2*x3s[t]+Iexs+etg[t]+k0*z1g[t],
x2s'[t] = e2 - f2 * x1s[t]^2 - x2s[t] - g2 * x4s[t],
x3s'[t] = mu2 * (-x3s[t] + s2 * (x1s[t] + h2)),
x4s'[t] = nu2 * (-k2 * x4s[t] + r2 * (x2s[t] + l2)),
z1g'[t] = -k0 * z1g[t] + L0 * kap1 * ((x1m[t] - x1s[t]) - z1g[t]),
etg'[t] = L0^2 * kap2 * ((x1m[t] - x1s[t]) - z1g[t]),
x1m[2000] = -2,0224624607445922',
x2m[2000] = -19,095482126919357',
x3m[2000] = 2,507307552065356',
x4m[2000] = -13,104728711011164',
x1s[2000] = -0,981633773518187',
x2s[2000] = -3,6725205240641996',
x3s[2000] = 3,2986253481053858',
x4s[2000] = -4,802898697039813',
z1g[2000] = 0, etg[2000] = 0,
x1m, x2m, x3m, x4m, x1s, x2s, x3s, x4s, z1g, etg,
t, 2000, 4000, MaxSteps → Infinity]
x1m → InterpolatingFunction[2000., 4000., <>],

```

```

x2m → InterpolatingFunction[2000., 4000., <>],
x3m → InterpolatingFunction[2000., 4000., <>],
x4m → InterpolatingFunction[2000., 4000., <>],
x1s → InterpolatingFunction[2000., 4000., <>],
x2s → InterpolatingFunction[2000., 4000., <>],
x3s → InterpolatingFunction[2000., 4000., <>],
x4s → InterpolatingFunction[2000., 4000., <>],
z1g → InterpolatingFunction[2000., 4000., <>],
etg → InterpolatingFunction[2000., 4000., <>]

```

```
Show[gr1, gr2]
```

Espacio de fase x1m Vs x1s (voltajes)

```

hr3 = ParametricPlot[Evaluate[x1m[t], x1s[t]/.hr1],
t, 2000, 2300, Frame → True, FrameLabel → "X1, M(mV)", "X1, S
(mV)", PlotRange → All]

```

```

hr3a = ParametricPlot[Evaluate[x1m[t], x1s[t]/.hr1],
t, 2300, 3000, Frame → True, FrameLabel → "X1, M(mV)", "X1, S
(mV)"
, PlotRange → All]

```

```
Show[hr3, hr3a]
```

```

Plot[Evaluate[(etg[t] + k0 * z1g[t])/.hr1],
t, 2000, 4000, PlotStyle → Hue[3], FrameLabel → "t(s)", "u
(A/F)", Frame → True]

```

**PROGRAMA 2: PROGRAMA PARA EL ENSAMBLE MARCAPASOS
CON DINÁMICA CAÓTICA**

Ensamble grupo marcapasos, Sincronizacion natural.

Clear[a2, a3, a4, b2, b3, b4, c2, c3, c4, d2, d3, d4, e2, e3, e4, f2, f3, f4,
g2, g3, g4, h2, h3, h4, k2, k3, k4, l2, l3, l4, r2, r3, r4, s2, s3, s4, mu2, mu3,
mu4, nu2, nu3, nu4]

Parametros dinamicos a2 = 1; b2 = 3; c2 = 1; d2 = ,99; e2 = 1,01; f2 =
5,013; g2 = ,028; h2 = 1,60;

k2 = ,96; l2 = 1,62; r2 = 3; s2 = 3,97; mu2 = ,0021; nu2 = ,0009;

a3 = ,95; a4 = ,95; b3 = 3,1; b4 = 3,1; c3 = 1,05; c4 = 1,05; d3 = 1; d4 = 1; e3 =
,95;

e4 = ,95; f3 = 4,9; f4 = 4,9; g3 = ,0285; g4 = ,0285; h3 = 1,5; h4 = 1,5; k3 =
1; k4 = 1;

l3 = 1,55; l4 = 1,55; r3 = 3,15; r4 = 3,15; s3 = 4,15; s4 = 4,15; mu3 =
,0019; mu4 = ,0019;

nu3 = ,00086; nu4 = ,00086;

Corriente externa

Iexs=2.8;

Dinamica neuronal individual

mp0 = NDSolve[x1s'[t] =
a2 * x2s[t] + b2 * x1s[t]² - c2 * x1s[t]³ - d2 * x3s[t] + Iexs,
x2s'[t] = e2 - f2 * x1s[t]² - x2s[t] - g2 * x4s[t],
x3s'[t] = mu2 * (-x3s[t] + s2 * (x1s[t] + h2)),
x4s'[t] = nu2 * (-k2 * x4s[t] + r2 * (x2s[t] + l2)),
x1s[0] = (0 + 0), x2s[0] = x3s[0] = x4s[0] = 0,
x1s, x2s, x3s, x4s,
t, 0, 5000, *MaxSteps* → *Infinity*]
x1s → *InterpolatingFunction*[0., 5000., <>],
x2s → *InterpolatingFunction*[0., 5000., <>],
x3s → *InterpolatingFunction*[0., 5000., <>],
x4s → *InterpolatingFunction*[0., 5000., <>]

Ipd1=Ipd2=2.8;

matriz de conectividad, elementos

ca11 = ca22 = ca33 = -20;

ca12 = ca13 = ca21 = ca23 = ca31 = ca32 = 10;

Sincronizacion individual del ensamble marcapasos: *mp1 = NDSolve*[x1s'[t] =
a2 * x2s[t] + b2 * x1s[t]² - c2 * x1s[t]³ - d2 * x3s[t]

+ Iexs + (ca11 * x1s[t] + ca12 * x21[t] + ca13 * x31[t]),

x2s'[t] = e2 - f2 * x1s[t]² - x2s[t] - g2 * x4s[t],

x3s'[t] = mu2 * (-x3s[t] + s2 * (x1s[t] + h2)),

x4s'[t] = nu2 * (-k2 * x4s[t] + r2 * (x2s[t] + l2)),

x21'[t] = a3 * x22[t] + b3 * x21[t]² - c3 * x21[t]³ - d3 * x23[t] + (ca21 * x1s[t] +
ca22 * x21[t] + ca23 * x31[t]) + Ipd1,

x22'[t] = e3 - f3 * x21[t]² - x22[t] - g3 * x24[t],

```

x23'[t] = mu3 * (-x23[t] + s3 * (x21[t] + h3)),
x24'[t] = nu3 * (-k3 * x24[t] + r3 * (x22[t] + l3)),
x31'[t] = a4 * x32[t] + b4 * x31[t]^2 - c4 * x31[t]^3 - d4 * x33[t] + (ca31 * x1s[t] +
ca32 * x21[t] + ca33 * x31[t]) + Ipd2,
x32'[t] = e4 - f4 * x31[t]^2 - x32[t] - g4 * x34[t],
x33'[t] = mu4 * (-x33[t] + s4 * (x31[t] + h4)),
x34'[t] = nu4 * (-k4 * x34[t] + r4 * (x32[t] + l4)),
x1s[0] == (0 + 0), x2s[0] == x3s[0] == x4s[0] == 0, x21[0] == (-,5 + 0),
x22[0] == x23[0] == x24[0] == 0, x31[0] == (-,5 + 0), x32[0] == x33[0] ==
x34[0] == 0,

```

```

x1s, x2s, x3s, x4s, x21, x22, x23, x24, x31, x32, x33, x34,
t, 0, 3000, MaxSteps -> Infinity]

```

```

x1s -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x2s -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x3s -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x4s -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x21 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x22 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x23 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x24 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x31 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x32 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x33 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x34 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>]

```

```

grx1b=Show[grx1,grx1a]

```

Condiciones finales $ent = t_0$

```

x1s[1080], x2s[1080], x3s[1080], x4s[1080],
x21[1080], x22[1080],
x23[1080], x24[1080], x31[1080], x32[1080],
x33[1080], x34[1080]/.mp1
-0,758934, -1,97883, 3,25096, -2,00392, -0,746181, -1,87122, 3,03477,
-1,92231, -0,746181, -1,87122, 3,03477, -1,92231

```

Ensamble grupo marcapasos, Sincronizacion robusta (observador de estados).

```

Clear[a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3, b4, c1, c2, c3, c4, d1, d2,
d3, d4, e1, e2, e3, e4, f1, f2,
f3, f4, g1, g2, g3, g4, h1, h2, h3, h4, k1, k2, k3, k4, l1, l2,
l3, l4, r1, r2, r3, r4, s1, s2, s3,
s4, mu1, mu2, mu3, mu4, nu1, nu2, nu3, nu4]

```

```

Parametros dinamicos (parametros de PD identicos) a1 = 1,05; a2 = 1; b1 =
2,85; b2 = 3; c1 = ,95; c2 = 1; d1 = ,95; d2 = ,99; e1 = 1,05;
e2 = 1,01; f1 = 5; f2 = 5,013;
g1 = ,03; g2 = ,028; h1 = 1,6; h2 = 1,60; k1 = ,98; k2 = ,96; l1 = 1,5; l2 = 1,62;

```

$r1 = 2,85; r2 = 3; s1 = 3,85; s2 = 3,97;$
 $mu1 = ,002; mu2 = ,0021; nu1 = ,00095; nu2 = ,0009;$
matriz de conectividad, elementos
 $ca11 = ca22 = ca33 = -20; ca12 = ca13 = ca21 = ca23 = ca31 = ca32 = 10;$
Corriente externa
 $Iexm = 2,9; Iexs = 2,8; Ipd1 = Ipd2 = 2,8;$
Parametros
 $kap1, kap2, kkap1 = 1; kap2 = 2; k = 1;$
Parametro de control L0 (tuning parameter) L0=22;
Dinamica individual neurona maestra
 $mpx0 = NDSolve[x1m'[t] = a1 * x2m[t] + b1 * x1m[t]^2 - c1 * x1m[t]^3 - d1 * x3m[t] + Iexm, x2m'[t] = e1 - f1 * x1m[t]^2 - x2m[t] - g1 * x4m[t], x3m'[t] = mu1 * (-x3m[t] + s1 * (x1m[t] + h1)), x4m'[t] = nu1 * (-k1 * x4m[t] + r1 * (x2m[t] + l1)), x1m[0] = (,5 + 0), x2m[0] = x3m[0] = x4m[0] = 0, x1m, x2m, x3m, x4m, t, 0, 3000, MaxSteps \to Infinity]$
 $x1m \to InterpolatingFunction[0., 3000., \langle \rangle],$
 $x2m \to InterpolatingFunction[0., 3000., \langle \rangle],$
 $x3m \to InterpolatingFunction[0., 3000., \langle \rangle],$
 $x4m \to InterpolatingFunction[0., 3000., \langle \rangle]$
 $x1m[1080], x2m[1080], x3m[1080], x4m[1080]/.mpx0$
 $-1,39628, -8,73965, 1,93293, -11,3172$
 $mp1 = NDSolve[x1m'[t] = a1 * x2m[t] + b1 * x1m[t]^2 - c1 * x1m[t]^3 - d1 * x3m[t] + Iexm, x2m'[t] = e1 - f1 * x1m[t]^2 - x2m[t] - g1 * x4m[t], x3m'[t] = mu1 * (-x3m[t] + s1 * (x1m[t] + h1)), x4m'[t] = nu1 * (-k1 * x4m[t] + r1 * (x2m[t] + l1)), x1s'[t] = a2 * x2s[t] + b2 * x1s[t]^2 - c2 * x1s[t]^3 - d2 * x3s[t] + Iexs + (etg[t] + k * z1g[t]) + (ca11 * x1s[t] + ca12 * x21[t] + ca13 * x31[t]), x2s'[t] = e2 - f2 * x1s[t]^2 - x2s[t] - g2 * x4s[t], x3s'[t] = mu2 * (-x3s[t] + s2 * (x1s[t] + h2)), x4s'[t] = nu2 * (-k2 * x4s[t] + r2 * (x2s[t] + l2)), z1g'[t] = -k * z1g[t] + L0 * kap1 * ((x1m[t] - x1s[t]) - z1g[t]), etg'[t] = (L0^2) * kap2 * ((x1m[t] - x1s[t]) - z1g[t]), x21'[t] = a3 * x22[t] + b3 * x21[t]^2 - c3 * x21[t]^3 - d3 * x23[t] + (ca21 * x1s[t] + ca22 * x21[t] + ca23 * x31[t]) + Ipd1, x22'[t] = e3 - f3 * x21[t]^2 - x22[t] - g3 * x24[t], x23'[t] = mu3 * (-x23[t] + s3 * (x21[t] + h3)), x24'[t] = nu3 * (-k3 * x24[t] + r3 * (x22[t] + l3)), x31'[t] = a4 * x32[t] + b4 * x31[t]^2 - c4 * x31[t]^3 - d4 * x33[t] + (ca31 * x1s[t] + ca32 * x21[t] + ca33 * x31[t]) + Ipd2, x32'[t] = e4 - f4 * x31[t]^2 - x32[t] - g4 * x34[t], x33'[t] = mu4 * (-x33[t] + s4 * (x31[t] + h4)), x34'[t] = nu4 * (-k4 * x34[t] + r4 * (x32[t] + l4)), x1m[1080] == (-1,3962811693050234'),$

```

x2m[1080] == (-8,739643993177587'),
x3m[1080] == (1,9329323667594824'),
x4m[1080] == (-11,317218567541671'),
x1s[1080] == (-0,758186823120902'),
x2s[1080] == (-1,973613337264864'),
x3s[1080] == (3,251040842753659'),
x4s[1080] == (-2,0036935298797562'),
z1g[1080] == 0,01, etg[1080] == 0,01,
x21[1080] == (-0,745451500144503'),
x22[1080] == (-1,866331799818712'),
x23[1080] == (3,0348413327239263'),
x24[1080] == (-1,9220977569722857'),
x31[1080] == (-0,745451500144503'),
x32[1080] == (-1,866331799818712'),
x33[1080] == (3,0348413327239263'),
x34[1080] == (-1,9220977569722801'),
x1m, x2m, x3m, x4m, x1s, x2s, x3s, x4s, z1g, etg,
x21, x22, x23, x24, x31, x32, x33, x34,
t, 1080, 3000, MaxSteps → Infinity]
x1m → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x2m → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x3m → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x4m → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x1s → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x2s → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x3s → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x4s → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
z1g → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
etg → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x21 → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x22 → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x23 → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x24 → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x31 → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x32 → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x33 → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>],
x34 → InterpolatingFunction[1080., 3000., <>]

```

Espacio de fase x1m Vs x1s (voltajes) *Show[GraphicsArray[hr5a, hr7, hr6]]*

Show[grx0x1, gr4x]

*Plot[Evaluate[(etg[t] + k * z1g[t])/mp1], t, 1100, 2500, PlotStyle → Hue[3],
FrameLabel → "t(s)", "u(A/F)", Frame → True]*

PROGRAMA 3. PROGRAMA PARA EL CONTROL DEL ENSAMBLE NEURONAL MARCAPASOS CON DINÁMICA MODULADA

Ensamble grupo marcapasos, Sincronizacion natural.

Clear[a2, a3, a4, b2, b3, b4, c2, c3, c4, d2, d3, d4, e2, e3, e4, f2, f3, f4, g2, g3, g4, h2, h3, h4, k2, k3, k4, l2, l3, l4, r2, r3, r4, s2, s3, s4, mu2, mu3, mu4, nu2, nu3, nu4]

Parametros dinamicos a2 = 1; b2 = 3; c2 = 1; d2 = ,99; e2 = 1,01; f2 = 5,013; g2 = ,028; h2 = 1,60;

k2 = ,96; l2 = 1,62; r2 = 3; s2 = 3,97; mu2 = ,0021; nu2 = ,0009;

a3 = ,95; a4 = ,95; b3 = 3,1; b4 = 3,1; c3 = 1,05; c4 = 1,05; d3 = 1;

d4 = 1; e3 = ,95; e4 = ,95; f3 = 4,9; f4 = 4,9; g3 = ,0285; g4 = ,0285; h3 = 1,5;

h4 = 1,5; k3 = 1; k4 = 1; l3 = 1,55; l4 = 1,55; r3 = 3,15; r4 = 3,15; s3 = 4,15; s4 = 4,15;

mu3 = ,0019; mu4 = ,0019; nu3 = ,00086; nu4 = ,00086;

Corriente externa Iexs=1*2*Sin[2*Pi*.2*t];

Dinamica neuronal individual

mp0 = NDSolve[x1s'[t] = a2 * x2s[t] + b2 * x1s[t]² - c2 * x1s[t]³ - d2 * x3s[t] + Iexs, x2s'[t] = e2 - f2 * x1s[t]² - x2s[t] - g2 * x4s[t], x3s'[t] = mu2 * (-x3s[t] + s2 * (x1s[t] + h2)), x4s'[t] = nu2 * (-k2 * x4s[t] + r2 * (x2s[t] + l2)), x1s[0] == (0 + 0), x2s[0] == x3s[0] == x4s[0] == 0, x1s, x2s, x3s, x4s,

t, 0, 5000, *MaxSteps* → *Infinity*]

x1s → *InterpolatingFunction*[0., 5000., <>],

x2s → *InterpolatingFunction*[0., 5000., <>],

x3s → *InterpolatingFunction*[0., 5000., <>],

x4s → *InterpolatingFunction*[0., 5000., <>]

Comportamiento similar al de Szucs et al.

Ipd1=Ipd2=1*1*Sin[2*Pi*.2*t];

matriz de conectividad, elementos

ca11=ca22=ca33=-20; ca12=ca13=ca21=ca23=ca31=ca32=10;

Sincronizacion individual del ensamble marcapasos:

mp1 = NDSolve[x1s'[t] = a2 * x2s[t] + b2 * x1s[t]² - c2 * x1s[t]³ - d2 * x3s[t] + Iexs + (ca11 * x1s[t] + ca12 * x21[t] + ca13 * x31[t]),

x2s'[t] = e2 - f2 * x1s[t]² - x2s[t] - g2 * x4s[t],

x3s'[t] = mu2 * (-x3s[t] + s2 * (x1s[t] + h2)),

x4s'[t] = nu2 * (-k2 * x4s[t] + r2 * (x2s[t] + l2)),

x21'[t] = a3 * x22[t] + b3 * x21[t]² - c3 * x21[t]³ - d3 * x23[t] + (ca21 * x1s[t] + ca22 * x21[t] + ca23 * x31[t]) + Ipd1,

x22'[t] = e3 - f3 * x21[t]² - x22[t] - g3 * x24[t],

x23'[t] = mu3 * (-x23[t] + s3 * (x21[t] + h3)),

x24'[t] = nu3 * (-k3 * x24[t] + r3 * (x22[t] + l3)),

x31'[t] = a4 * x32[t] + b4 * x31[t]² - c4 * x31[t]³ - d4 * x33[t] + (ca31 * x1s[t] + ca32 * x21[t] + ca33 * x31[t]) + Ipd2,

```

x32'[t] = e4 - f4 * x31[t]^2 - x32[t] - g4 * x34[t],
x33'[t] = mu4 * (-x33[t] + s4 * (x31[t] + h4)),
x34'[t] = nu4 * (-k4 * x34[t] + r4 * (x32[t] + l4)),
x1s[0] == (0 + 0), x2s[0] == x3s[0] == x4s[0] == 0,
x21[0] == (-,5 + 0), x22[0] == x23[0] == x24[0] == 0,
x31[0] == (-,5 + 0), x32[0] == x33[0] == x34[0] == 0,
x1s, x2s, x3s, x4s, x21, x22, x23, x24, x31, x32, x33, x34,
t, 0, 3000, MaxSteps -> Infinity]
x1s -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x2s -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x3s -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x4s -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x21 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x22 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x23 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x24 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x31 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x32 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x33 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x34 -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>]

```

grx1c=Show[grx1]

Espacio de fase x1m Vs x1s (voltajes) Condiciones finales en t=t₀

```

x1s[1100], x2s[1100], x3s[1100], x4s[1100], x21[1100], x22[1100],
x23[1100], x24[1100], x31[1100], x32[1100], x33[1100], x34[1100]/.mp1
-1,44559, -9,15409, 0,84316, -12,3957, -1,40453, -8,32042, 0,617254,
-11,4819, -1,40453, -8,32042, 0,617254, -11,4819

```

Ensamble grupo marcapasos, Sincronizacion robusta (observador de estados).

```

Clear[a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3, b4, c1, c2, c3, c4, d1, d2, d3, d4, e1,
e2, e3, e4, f1, f2, f3, f4, g1, g2, g3, g4, h1, h2, h3, h4, k1, k2, k3, k4, l1,
l2, l3, l4, r1, r2, r3, r4, s1, s2, s3, s4, mu1, mu2, mu3, mu4, nu1, nu2, nu3, nu4]

```

Parametros dinamicos (parametros de PD identicos) a1 = 1,05; a2 = 1; b1 = 2,85; b2 = 3; c1 = ,95; c2 = 1; d1 = ,95; d2 = ,99; e1 = 1,05; e2 = 1,01;

f1 = 5; f2 = 5,013; g1 = ,03; g2 = ,028; h1 = 1,6; h2 = 1,60; k1 = ,98; k2 = ,96; l1 = 1,5; l2 = 1,62;

r1 = 2,85; r2 = 3; s1 = 3,85; s2 = 3,97; mu1 = ,002; mu2 = ,0021; nu1 = ,00095; nu2 = ,0009;

a3 = ,95; a4 = ,95; b3 = 3,1; b4 = 3,1; c3 = 1,05; c4 = 1,05; d3 = 1; d4 = 1; e3 = ,95; e4 = ,95; f3 = 4,9;

f4 = 4,9; g3 = ,0285; g4 = ,0285; h3 = 1,5; h4 = 1,5; k3 = 1; k4 = 1; l3 = 1,55; l4 = 1,55; r3 = 3,15; r4 = 3,15;

s3 = 4,15; s4 = 4,15; mu3 = ,0019; mu4 = ,0019; nu3 = ,00086; nu4 = ,00086;

matriz de conectividad, elementos

ca11=ca22=ca33=-20; ca12=ca13=ca21=ca23=ca31=ca32=10;

Corriente externa

$I_{exm}=2.9;$
 Parametros $kap1, kap2, k$ $kap1=1; kap2=2; k=1;$
 Parametro de control $L0$ (tuning parameter) $L0=22;$

Dinamica individual neurona maestra

```

mpx0 = NDSolve[x1m'[t] =
a1 * x2m[t] + b1 * x1m[t]^2 - c1 * x1m[t]^3 - d1 * x3m[t] + Iexm,
x2m'[t] = e1 - f1 * x1m[t]^2 - x2m[t] - g1 * x4m[t],
x3m'[t] = mu1 * (-x3m[t] + s1 * (x1m[t] + h1)),
x4m'[t] = nu1 * (-k1 * x4m[t] + r1 * (x2m[t] + l1)),
x1m[0] == (.5 + 0), x2m[0] == x3m[0] == x4m[0] == 0,
x1m, x2m, x3m, x4m,
t, 0, 3000, MaxSteps -> Infinity]
x1m -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x2m -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x3m -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>],
x4m -> InterpolatingFunction[0., 3000., <>]

```

```

x1m[1100], x2m[1100], x3m[1100], x4m[1100]/.mpx04
-0.685886, -2.28866, 2.00652, -11.2621

```

```

grx0 = Plot[Evaluate[x1m[t]/.mpx0],
t, 0, 1100,
PlotStyle -> Hue[1],
Frame -> True,
FrameLabel -> "t(s)",
"x01, x11, x21, x31(mV)",
PlotRange -> All]

```

```
grx0x1 = Show[grx0, grx1c]
```

Sincronizacion del ensamble marcapasos (lazo cerrado, observador de estados):

```

mp1 = NDSolve[x1m'[t] =
a1 * x2m[t] + b1 * x1m[t]^2 - c1 * x1m[t]^3 - d1 * x3m[t] + Iexm,
x2m'[t] = e1 - f1 * x1m[t]^2 - x2m[t] - g1 * x4m[t],
x3m'[t] = mu1 * (-x3m[t] + s1 * (x1m[t] + h1)),
x4m'[t] = nu1 * (-k1 * x4m[t] + r1 * (x2m[t] + l1)),
x1s'[t] = a2 * x2s[t] + b2 * x1s[t]^2 - c2 * x1s[t]^3 - d2 * x3s[t] + Iexs
+(etg[t] + k * z1g[t]) + (ca11 * x1s[t] + ca12 * x21[t] + ca13 * x31[t]),
x2s'[t] = e2 - f2 * x1s[t]^2 - x2s[t] - g2 * x4s[t],
x3s'[t] = mu2 * (-x3s[t] + s2 * (x1s[t] + h2)),
x4s'[t] = nu2 * (-k2 * x4s[t] + r2 * (x2s[t] + l2)),
z1g'[t] = -k * z1g[t] + L0 * kap1 * ((x1m[t] - x1s[t]) - z1g[t]),
etg'[t] = (L0^2) * kap2 * ((x1m[t] - x1s[t]) - z1g[t]),
x21'[t] = a3 * x22[t] + b3 * x21[t]^2 - c3 * x21[t]^3 - d3 * x23[t]
+(ca21 * x1s[t] + ca22 * x21[t] + ca23 * x31[t]) + Ipd1,
x22'[t] = e3 - f3 * x21[t]^2 - x22[t] - g3 * x24[t],

```

$x23'[t] = mu3 * (-x23[t] + s3 * (x21[t] + h3)),$
 $x24'[t] = nu3 * (-k3 * x24[t] + r3 * (x22[t] + l3)),$
 $x31'[t] = a4 * x32[t] + b4 * x31[t]^2 - c4 * x31[t]^3$
 $-d4 * x33[t] + (ca31 * x1s[t] + ca32 * x21[t] + ca33 * x31[t]) + Ipd2,$
 $x32'[t] = e4 - f4 * x31[t]^2 - x32[t] - g4 * x34[t],$
 $x33'[t] = mu4 * (-x33[t] + s4 * (x31[t] + h4)),$
 $x34'[t] = nu4 * (-k4 * x34[t] + r4 * (x32[t] + l4)),$
 $x1m[1100] == (-0,685883929123858'),$
 $x2m[1100] == (-2,2886474082286496'),$
 $x3m[1100] == (2,00651888691125'),$
 $x4m[1100] == (-11,262085049478394'),$
 $x1s[1100] == (-1,4456),$
 $x2s[1100] == (-9,154),$
 $x3s[1100] == (0,84316),$
 $x4s[1100] == (-12,3957),$
 $z1g[1100] == 0,01,$
 $etg[1100] == 0,01,$
 $x21[1100] == (-1,404),$
 $x22[1100] == (-8,32),$
 $x23[1100] == (0,617),$
 $x24[1100] == (-11,482),$
 $x31[1100] == (-1,4045),$
 $x32[1100] == (-8,3204),$
 $x33[1100] == (0,6172),$
 $x34[1100] == (-11,482),$
 $x1m, x2m, x3m, x4m, x1s, x2s, x3s, x4s, z1g,$
 $etg, x21, x22, x23, x24, x31, x32, x33, x34,$
 $t, 1100, 3000, MaxSteps \rightarrow Infinity]$
 $x1m \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x2m \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x3m \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x4m \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x1s \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x2s \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x3s \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x4s \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $z1g \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $etg \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x21 \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x22 \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x23 \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x24 \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x31 \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x32 \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$
 $x33 \rightarrow InterpolatingFunction[1100., 3000., <>],$

$x_{34} \rightarrow \text{InterpolatingFunction}[1100., 3000., \langle \rangle]$

Espacio de fase x1m Vs x1s (voltajes)

`Show[GraphicsArray[hr5c, hr7b, hr6b]]`

`Show[grx0x1, gr4xa]`

Ley de control modificada

`Plot[Evaluate[(etg[t] + k * z1g[t])/.mp1],`
`t, 1100, 2500,`

`PlotStyle \rightarrow Hue[3],`

`FrameLabel \rightarrow "t(s)", "ü (A/F)"`

`,Frame \rightarrow True]`

PROGRAMA 4. PROGRAMA PARA EL CONTROL DEL ENSAMBLE CON TOPOLOGÍA DE RED GRANDE (N=12)

Ensamble grupo marcapasos, Sincronizacion natural.

Clear[*a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8, a9, a10, a11, a12, a13,*
b2, b3, b4, b5, b6, b7,
b8, b9, b10, b11, b12, b13, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9,
c10, c11, c12, c13, d2,
d3, d4, d5, d6, d7, d8, d9, d10, d11, d12, d13, e2, e3, e4,
e5, e6, e7, e8, e9, e10,
e11, e12, e13, f2, f3, f4, f5, f6, f7, f8, f9, f10, f11, f12,
f13, g2, g3, g4, g5,
g6, g7, g8, g9, g10, g11, g12, g13, h2, h3, h4, h5, h6, h7,
h8, h9, h10, h11,
h12, h13, k2, k3, k4, k5, k6, k7, k8, k9, k10, k11, k12, k13, l2,
l3, l4, l5, l6,
l7, l8, l9, l10, l11, l12, l13, r2, r3, r4, r5, r6, r7, r8, r9, r10,
r11, r12, r13,
s2, s3, s4, s5, s6, s7, s8, s9, s10, s11, s12, s13, mu2, mu3, mu4,
mu5, mu6, mu7,
mu8, mu9, mu10, mu11, mu12, mu13, nu2, nu3, nu4, nu5, nu6,
nu7, nu8, nu9, nu10,
nu11, nu12, nu13]

Parametros dinamicos

a2 = 1; b2 = 3; c2 = 1; d2 = ,99; e2 = 1,01; f2 = 5,013;
g2 = ,028; h2 = 1,60; k2 = ,96;
l2 = 1,62; r2 = 3; s2 = 3,97; mu2 = ,0021; nu2 = ,0009;
a3 = ,95; a4 = ,95; a5 = 0,975; a6 = 1,025; a7 = 1,035;
a8 = 0,98; a9 = 0,98; a10 = 0,98;
a11 = 0,98; a11 = 0,98; a12 = 0,98; a13 = 0,98; b3 = 3,1;
b4 = 3,1; b5 = 3,15; b6 = 3,175;
b7 = 3,2; b8 = 3; b9 = 3; b10 = 3; b11 = 3; b12 = 3; b13 = 3;
c3 = 1,05; c4 = 1,05; c5 = 1,075;
c6 = 1,1; c7 = 1,125; c8 = 0,99; c9 = 0,99; c10 = 0,99;
c11 = 0,99; c11 = 0,99; c12 = 0,99;
c13 = 0,99; d3 = 1; d4 = 1; d5 = 1,025; d6 = 1,05; d7 = 1,075;
d8 = 0,97; d9 = 0,98; d10 = 0,97;
d11 = 0,98; d12 = 0,97; d13 = 0,97; e3 = ,95; e4 = ,95;
e5 = 0,975; e6 = 1; e7 = 1,025; e8 = 0,93;
e9 = 0,93; e10 = 0,93; e11 = 0,93; e12 = 0,93; e13 = 0,93;
f3 = 4,9; f4 = 4,9; f5 = 5,025; f6 = 5,05;
f7 = 5,075; f8 = 4,85; f9 = 4,85; f10 = 4,85; f11 = 4,85;
f12 = 4,85; f13 = 4,85; g3 = ,0285; g4 = ,0285;
g5 = 5,025; g6 = 5,05; g7 = 5,075; g8 = 4,85; g9 = 4,85;
g10 = 4,85; g11 = 4,85; g12 = 4,85; g13 = 4,85;
h3 = 1,5; h4 = 1,5; h5 = 5,025; h6 = 5,05; h7 = 5,075;

$h8 = 4,85; h9 = 4,85; h10 = 4,85; h11 = 4,85;$
 $h12 = 4,85; h13 = 4,85; k3 = 1; k4 = 1; k5 = 5,025;$
 $k6 = 5,05; k7 = 5,075; k8 = 4,85; k9 = 4,85; k10 = 4,85;$
 $k11 = 4,85; k12 = 4,85; k13 = 4,85; l3 = 1,55; l4 = 1,55;$
 $l5 = 5,025; l6 = 5,05; l7 = 5,075; l8 = 4,85;$
 $l9 = 4,85; l10 = 4,85; l11 = 4,85; l12 = 4,85;$
 $l13 = 4,85; r3 = 3,15; r4 = 3,15; r5 = 3,175; r6 = 3,2;$
 $r7 = 3,225; r8 = 3,125; r9 = 3,125; r10 = 3,125; r11 = 3,125;$
 $r12 = 3,125; r13 = 3,125; s3 = 4,15;$
 $s4 = 4,15; s5 = 4,175; s6 = 4,2; s7 = 4,225; s8 = 4,125;$
 $s9 = 4,125; s10 = 4,125; s11 = 4,125;$
 $s12 = 4,125; s13 = 4,125; mu3 = ,0019; mu4 = ,0019;$
 $mu5 = ,0020; mu6 = 0,0021; mu7 = 0,0022;$
 $mu8 = 0,0018; mu9 = 0,0018; mu10 = 0,0018;$
 $mu11 = 0,0018; mu12 = 0,0018; mu13 = 0,0018;$
 $nu2 = 0,00086; nu3 = ,00086; nu4 = 0,00087;$
 $nu5 = 0,00088; nu6 = 0,00089; nu7 = 0,0009;$
 $nu8 = 0,00085; nu9 = 0,00085; nu10 = 0,00085;$
 $nu11 = 0,00085; nu12 = 0,00085; nu13 = 0,00085;$
 $kc = 100;$

Corriente externa

Iexs=0;

Sincronizacion individual del ensamble marcapasos:

$mp1 = NDSolve[x1s'[t] ==$
 $a2 * x2s[t] + b2 * x1s[t]^2 - c2 * x1s[t]^3 - d2 * x3s[t] + Iexs + (kc * (-11 * x1s[t] +$
 $x21[t] + x31[t] +$
 $x41[t] + x51[t] + x61[t] + x71[t] + x81[t] + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t])),$
 $x2s'[t] == e2 - f2 * x1s[t]^2 - x2s[t] - g2 * x4s[t],$
 $x3s'[t] == mu2 * (-x3s[t] + s2 * (x1s[t] + h2)),$
 $x4s'[t] == nu2 * (-k2 * x4s[t] + r2 * (x2s[t] + l2)),$
 $x21'[t] == a3 * x22[t] + b3 * x21[t]^2 - c3 * x21[t]^3 - d3 * x23[t] +$
 $(kc * ((-11 * x21[t]) + x31[t] + x41[t] + x1s[t] + x51[t] + x61[t]$
 $+ x71[t] + x81[t] + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t])),$
 $x22'[t] == e3 - f3 * x21[t]^2 - x22[t] - g3 * x24[t],$
 $x23'[t] == mu3 * (-x23[t] + s3 * (x21[t] + h3)),$
 $x24'[t] == nu3 * (-k3 * x24[t] + r3 * (x22[t] + l3)),$
 $x31'[t] == a4 * x32[t] + b4 * x31[t]^2 - c4 * x31[t]^3 - d4 * x33[t] +$
 $(kc * ((-11 * x31[t]) + x21[t] + x41[t] + x1s[t] + x51[t] + x61[t] +$
 $x71[t] + x81[t] + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t])),$
 $x32'[t] == e4 - f4 * x31[t]^2 - x32[t] - g4 * x34[t],$
 $x33'[t] == mu4 * (-x33[t] + s4 * (x31[t] + h4)),$
 $x34'[t] == nu4 * (-k4 * x34[t] + r4 * (x32[t] + l4)),$
 $x41'[t] == a5 * x42[t] + b5 * x41[t]^2 - c5 * x41[t]^3 - d5 * x43[t] +$
 $(kc * ((-11 * x41[t]) + x1s[t] + x21[t] + x31[t] + x51[t] + x61[t] +$
 $x71[t] + x81[t] + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t])),$

$$\begin{aligned}
x42'[t] &== e5 - f5 * x41[t]^2 - x42[t] - g5 * x44[t], \\
x43'[t] &== mu5 * (-x43[t] + s5 * (x41[t] + h5)), \\
x44'[t] &== nu5 * (-k5 * x44[t] + r5 * (x42[t] + l5)), \\
x51'[t] &== a6 * x52[t] + b6 * x51[t]^2 - c6 * x51[t]^3 - d6 * x53[t] \\
&+ (kc * ((-11 * x51[t]) + x1s[t] + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] \\
&+ x71[t] + x81[t] + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t])), \\
x52'[t] &== e6 - f6 * x51[t]^2 - x52[t] - g6 * x54[t], \\
x53'[t] &== mu6 * (-x53[t] + s6 * (x51[t] + h6)), \\
x54'[t] &== nu6 * (-k6 * x54[t] + r6 * (x52[t] + l6)), \\
x61'[t] &== a7 * x62[t] + b7 * x61[t]^2 - c7 * x61[t]^3 - d7 * x63[t] \\
&+ (kc * ((-11 * x61[t]) + x1s[t] + x21[t] + x31[t] + x51[t] + x41[t] \\
&+ x71[t] + x81[t] + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t])), \\
x62'[t] &== e7 - f7 * x61[t]^2 - x62[t] - g7 * x64[t], \\
x63'[t] &== mu7 * (-x63[t] + s7 * (x61[t] + h7)), \\
x64'[t] &== nu7 * (-k7 * x64[t] + r7 * (x62[t] + l7)), \\
x71'[t] &== a8 * x72[t] + b8 * x71[t]^2 - c8 * x71[t]^3 - d8 * x73[t] \\
&+ (kc * ((-11 * x71[t]) + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] + x81[t] \\
&+ x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t] + x1s[t] + x51[t])), \\
x72'[t] &== e8 - f8 * x71[t]^2 - x72[t] - g8 * x74[t], \\
x73'[t] &== mu8 * (-x73[t] + s8 * (x71[t] + h8)), \\
x74'[t] &== nu8 * (-k8 * x74[t] + r8 * (x72[t] + l8)), \\
x81'[t] &== a9 * x82[t] + b9 * x81[t]^2 - c9 * x81[t]^3 - d9 * x83[t] \\
&+ (kc * ((-11 * x81[t]) + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] + x71[t] \\
&+ x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t] + x51[t] + x1s[t])), \\
x82'[t] &== e9 - f9 * x81[t]^2 - x82[t] - g9 * x84[t], \\
x83'[t] &== mu9 * (-x83[t] + s9 * (x81[t] + h9)), \\
x84'[t] &== nu9 * (-k9 * x84[t] + r9 * (x82[t] + l9)), \\
x91'[t] &== a10 * x92[t] + b10 * x91[t]^2 - c10 * x91[t]^3 - d10 * x93[t] \\
&+ (kc * ((-11 * x91[t]) + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] + x71[t] + x81[t] \\
&+ x101[t] + x111[t] + x121[t] + x51[t] + x1s[t])), \\
x92'[t] &== e10 - f10 * x91[t]^2 - x92[t] - g10 * x94[t], \\
x93'[t] &== mu10 * (-x93[t] + s10 * (x91[t] + h10)), \\
x94'[t] &== nu10 * (-k10 * x84[t] + r10 * (x92[t] + l10)), \\
x101'[t] &== a11 * x102[t] + b11 * x101[t]^2 - c11 * x101[t]^3 - d11 * x103[t] \\
&+ (kc * ((-11 * x101[t]) + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] + x71[t] + x91[t] \\
&+ x81[t] + x111[t] + x121[t] + x51[t] + x1s[t])), \\
x102'[t] &== e11 - f11 * x101[t]^2 - x102[t] - g11 * x104[t], \\
x103'[t] &== mu11 * (-x103[t] + s11 * (x101[t] + h11)), \\
x104'[t] &== nu11 * (-k11 * x104[t] + r11 * (x102[t] + l11)), \\
x111'[t] &== a12 * x112[t] + b12 * x111[t]^2 - c12 * x111[t]^3 - d12 * x113[t] + \\
&(kc * ((-11 * x111[t]) + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] + x71[t] + x91[t] \\
&+ x81[t] + x101[t] + x121[t] + x51[t] + x1s[t])), \\
x112'[t] &== e12 - f12 * x111[t]^2 - x112[t] - g12 * x114[t], \\
x113'[t] &== mu12 * (-x113[t] + s12 * (x111[t] + h12)), \\
x114'[t] &== nu12 * (-k12 * x114[t] + r12 * (x112[t] + l12)),
\end{aligned}$$

```

x121'[t] == a13 * x122[t] + b13 * x121[t]^2 - c13 * x121[t]^3 - d13 * x123[t]
+ (kc * ((-11 * x121[t]) + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] + x71[t] + x91[t]
+ x81[t] + x111[t] + x101[t] + x51[t] + x1s[t])),
x122'[t] == e13 - f13 * x121[t]^2 - x122[t] - g13 * x124[t],
x123'[t] == mu13 * (-x123[t] + s13 * (x121[t] + h13)),
x124'[t] == nu13 * (-k13 * x124[t] + r13 * (x122[t] + l13)),
x1s[0] == (0 + 0), x2s[0] == x3s[0] == x4s[0] == 0,
x21[0] == (-,5 + 0), x22[0] == x23[0] == x24[0] == 0,
x31[0] == (-,5 + 0), x32[0] == x33[0] == x34[0] == 0,
x41[0] == (-,5 + 0), x42[0] == x43[0] == x44[0] == 0,
x51[0] == (-,5 + 0), x52[0] == x53[0] == x54[0] == 0,
x61[0] == (-,5 + 0), x62[0] == x63[0] == x64[0] == 0,
x71[0] == (-,5 + 0), x72[0] == x73[0] == x74[0] == 0,
x81[0] == (-,5 + 0), x82[0] == x83[0] == x84[0] == 0,
x91[0] == (-,5 + 0), x92[0] == x93[0] == x94[0] == 0,
x101[0] == (-,5 + 0), x102[0] == x103[0] == x104[0] == 0,
x111[0] == (-,5 + 0), x112[0] == x113[0] == x114[0] == 0,
x121[0] == (-,5 + 0), x122[0] == x123[0] == x124[0] == 0,
x1s, x2s, x3s, x4s, x21, x22, x23, x24,
x31, x32, x33, x34, x41, x42, x43, x44, x51,
x52, x53, x54, x61, x62, x63, x64, x71, x72, x73,
x74, x81, x82, x83, x84, x91, x92, x93,
x94, x101, x102, x103, x104, x111, x112,
x113, x114, x121, x122, x123, x124,
t, 0, 3000, MaxSteps -> Infinity]

```

```

grx1b = Show[grx1, grx1a]

```

Condiciones finales en t=t₀

```

x1s[1100], x2s[1100], x3s[1100], x4s[1100], x21[1100],
x22[1100], x23[1100], x24[1100], x31[1100], x32[1100],
x33[1100], x34[1100], x41[1100], x42[1100], x43[1100],
x44[1100], x51[1100], x52[1100], x53[1100], x54[1100],
x61[1100], x62[1100], x63[1100], x64[1100], x71[1100],
x72[1100], x73[1100], x74[1100], x81[1100], x82[1100],
x83[1100], x84[1100], x91[1100], x92[1100], x93[1100],
x94[1100], x101[1100], x102[1100], x103[1100], x104[1100],
x111[1100], x112[1100], x113[1100], x114[1100], x121[1100],
x122[1100], x123[1100], x124[1100]/.mp1

```

Ensamble grupo marcapasos, Sincronizacion robusta (observador de estados).

```

Clear[a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8, a9, a10,
a11, a12, a13, b1, b2,
b3, b4, b5, b6, b7, b8, b9, b10, b11, b12, b13,
c1, c2, c3, c4, c5, c6,
c7, c8, c9, c10, c11, c12, c13, d1, d2, d3, d4,
d5, d6, d7, d8, d9, d10,

```

d11, d12, d13, e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9,
e10, e11, e12, e13, f1,
f2, f3, f4, f5, f6, f7, f8, f9, f10, f11, f12, f13,
g1, g2, g3, g4, g5, g6, g7,
g8, g9, g10, g11, g12, g13, h1, h2, h3, h4, h5, h5,
h6, h7, h8, h9, h10, h11,
h12, h13, k1, k2, k3, k4, k5, k6, k7, k8, k9, k10,
k11, k12, k13, l1, l2, l3, l4,
l5, l6, l7, l8, l9, l10, l11, l12, l13, r1, r2, r3,
r4, r5, r6, r7, r8, r9, r10, r11,
r12, r13, s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7, s8, s9, s10,
s11, s12, s13, mu1, mu2, mu3, mu4,
mu5, mu6, mu7, mu8, mu9, mu10, mu11, mu12, mu13,
nu1, nu2, nu3, nu4, nu5, nu6,
nu7, nu8, nu9, nu10, nu11, nu12, nu13]

Parametros dinamicos (parametros de PD identicos)

a1 = 1,05; a2 = 1; b1 = 2,85; b2 = 3; c1 = 0,95; c2 = 1;
d1 = 0,95; d2 = ,99; e1 = 1,05;
e2 = 1,01; f1 = 5; f2 = 5,013; g1 = 0,03; g2 = ,028;
h1 = 1,6; h2 = 1,60; k1 = 0,98;
k2 = ,96; l1 = 1,5; l2 = 1,62; r1 = 2,85; r2 = 3;
s1 = 3,85; s2 = 3,97; mu1 = 0,002;
mu2 = ,0021; nu1 = 0,00095; nu2 = ,0009;
a3 = ,95; a4 = ,95; a5 = 0,975; a6 = 1,025; a7 = 1,035;
a8 = 0,98; a9 = 0,98; a10 = 0,98;
a11 = 0,98; a11 = 0,98; a12 = 0,98; a13 = 0,98;
b3 = 3,1; b4 = 3,1; b5 = 3,15; b6 = 3,175;
b7 = 3,2; b8 = 3; b9 = 3; b10 = 3; b11 = 3; b12 = 3;
b13 = 3; c3 = 1,05; c4 = 1,05; c5 = 1,075;
c6 = 1,1; c7 = 1,125; c8 = 0,99; c9 = 0,99; c10 = 0,99;
c11 = 0,99; c11 = 0,99; c12 = 0,99;
c13 = 0,99; d3 = 1; d4 = 1; d5 = 1,025; d6 = 1,05;
d7 = 1,075; d8 = 0,97; d9 = 0,98; d10 = 0,97;
d11 = 0,98; d12 = 0,97; d13 = 0,97; e3 = ,95; e4 = ,95;
e5 = 0,975; e6 = 1; e7 = 1,025; e8 = 0,93;
e9 = 0,93; e10 = 0,93; e11 = 0,93; e12 = 0,93; e13 = 0,93;
f3 = 4,9; f4 = 4,9; f5 = 5,025; f6 = 5,05;
f7 = 5,075; f8 = 4,85; f9 = 4,85; f10 = 4,85;
f11 = 4,85; f12 = 4,85; f13 = 4,85; g3 = ,0285; g4 = ,0285;
g5 = 5,025; g6 = 5,05; g7 = 5,075; g8 = 4,85; g9 = 4,85;
g10 = 4,85; g11 = 4,85; g12 = 4,85; g13 = 4,85;
h3 = 1,5; h4 = 1,5; h5 = 5,025; h6 = 5,05; h7 = 5,075;
h8 = 4,85; h9 = 4,85; h10 = 4,85; h11 = 4,85;
h12 = 4,85; h13 = 4,85; k3 = 1; k4 = 1; k5 = 5,025;
k6 = 5,05; k7 = 5,075; k8 = 4,85; k9 = 4,85; k10 = 4,85;

$k11 = 4,85; k12 = 4,85; k13 = 4,85; l3 = 1,55; l4 = 1,55;$
 $l5 = 5,025; l6 = 5,05; l7 = 5,075; l8 = 4,85;$
 $l9 = 4,85; l10 = 4,85; l11 = 4,85; l12 = 4,85;$
 $l13 = 4,85; r3 = 3,15; r4 = 3,15; r5 = 3,175; r6 = 3,2;$
 $r7 = 3,225; r8 = 3,125; r9 = 3,125; r10 = 3,125;$
 $r11 = 3,125; r12 = 3,125; r13 = 3,125; s3 = 4,15;$
 $s4 = 4,15; s5 = 4,175; s6 = 4,2; s7 = 4,225; s8 = 4,125;$
 $s9 = 4,125; s10 = 4,125; s11 = 4,125; s12 = 4,125;$
 $s13 = 4,125; mu3 = ,0019; mu4 = ,0019; mu5 = ,0020;$
 $mu6 = 0,0021; mu7 = 0,0022; mu8 = 0,0018;$
 $mu9 = 0,0018; mu10 = 0,0018; mu11 = 0,0018;$
 $mu12 = 0,0018; mu13 = 0,0018; nu2 = 0,00086; nu3 = ,00086;$
 $nu4 = 0,00087; nu5 = 0,00088; nu6 = 0,00089; nu7 = 0,0009;$
 $nu8 = 0,00085; nu9 = 0,00085; nu10 = 0,00085;$
 $nu11 = 0,00085; nu12 = 0,00085; nu13 = 0,00085; kc = 100;$

Corriente externa

$Iexm = 2,9; Iexs = 0;$

Parametros kap1, kap2, k

$kap1 = 1; kap2 = 2; k = 1;$

Parametro de control L0 (tuning parameter)

$L0 = 22;$

Dinamica individual neurona maestra

$mpx0 = NDSolve[x1m'[t] == a1 * x2m[t] + b1 * x1m[t]^2 - c1 * x1m[t]^3 - d1 * x3m[t] + Iexm,$

$x2m'[t] == e1 - f1 * x1m[t]^2 - x2m[t] - g1 * x4m[t],$

$x3m'[t] == mu1 * (-x3m[t] + s1 * (x1m[t] + h1)),$

$x4m'[t] == nu1 * (-k1 * x4m[t] + r1 * (x2m[t] + l1)),$

$x1m[0] == (.5 + 0), x2m[0] == x3m[0] == x4m[0] == 0,$

$x1m, x2m, x3m, x4m,$

$t, 0, 3000, MaxSteps \rightarrow Infinity]$

$x1m \rightarrow InterpolatingFunction[0., 3000., <>],$

$x2m \rightarrow InterpolatingFunction[0., 3000., <>],$

$x3m \rightarrow InterpolatingFunction[0., 3000., <>],$

$x4m \rightarrow InterpolatingFunction[0., 3000., <>]$

$x1m[1100], x2m[1100], x3m[1100], x4m[1100]/.mpx0$

$-0,685886, -2,28866, 2,00652, -11,2621$

$grx0x1 = Show[grx0, grx1b]$

Sincronizacion del ensamble marcapasos (lazo cerrado, observador de estados):

$mp2 = NDSolve[x1m'[t] ==$

$a1 * x2m[t] + b1 * x1m[t]^2 - c1 * x1m[t]^3 - d1 * x3m[t] + Iexm, x2m'[t] == e1 - f1 * x1m[t]^2 - x2m[t] - g1 * x4m[t], x3m'[t] == mu1 * (-x3m[t] + s1 * (x1m[t] + h1)),$

$x4m'[t] == nu1 * (-k1 * x4m[t] + r1 * (x2m[t] + l1)),$

$x1s'[t] == a2 * x2s[t] + b2 * x1s[t]^2 - c2 * x1s[t]^3 - d2 * x3s[t] + Iexs$

$+(etg[t] + k * z1g[t]) + (kc * (-11 * x1s[t] + x21[t] + x31[t] + x41[t]$

$$\begin{aligned}
& +x51[t] + x61[t] + x71[t] + x81[t] + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t]), \\
x2s'[t] & == e2 - f2 * x1s[t]^2 - x2s[t] - g2 * x4s[t], \\
x3s'[t] & == mu2 * (-x3s[t] + s2 * (x1s[t] + h2)), \\
x4s'[t] & == nu2 * (-k2 * x4s[t] + r2 * (x2s[t] + l2)), \\
z1g'[t] & == -k * z1g[t] + L0 * kap1 * ((x1m[t] - x1s[t]) - z1g[t]), \\
etg'[t] & == (L0^2) * kap2 * ((x1m[t] - x1s[t]) - z1g[t]), \\
x21'[t] & == a3 * x22[t] + b3 * x21[t]^2 - c3 * x21[t]^3 - d3 * x23[t] \\
& + (kc * ((-11 * x21[t]) + x31[t] + x41[t] + x1s[t] + x51[t] + x61[t] \\
& + x71[t] + x81[t] + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t])), \\
x22'[t] & == e3 - f3 * x21[t]^2 - x22[t] - g3 * x24[t], \\
x23'[t] & == mu3 * (-x23[t] + s3 * (x21[t] + h3)), \\
x24'[t] & == nu3 * (-k3 * x24[t] + r3 * (x22[t] + l3)), \\
x31'[t] & == a4 * x32[t] + b4 * x31[t]^2 - c4 * x31[t]^3 - d4 * x33[t] \\
& + (kc * ((-11 * x31[t]) + x21[t] + x41[t] + x1s[t] + x51[t] + x61[t] \\
& + x71[t] + x81[t] + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t])), \\
x32'[t] & == e4 - f4 * x31[t]^2 - x32[t] - g4 * x34[t], \\
x33'[t] & == mu4 * (-x33[t] + s4 * (x31[t] + h4)), \\
x34'[t] & == nu4 * (-k4 * x34[t] + r4 * (x32[t] + l4)), \\
x41'[t] & == a5 * x42[t] + b5 * x41[t]^2 - c5 * x41[t]^3 - d5 * x43[t] \\
& + (kc * ((-11 * x41[t]) + x1s[t] + x21[t] + x31[t] + x51[t] + x61[t] \\
& + x71[t] + x81[t] + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t])), \\
x42'[t] & == e5 - f5 * x41[t]^2 - x42[t] - g5 * x44[t], \\
x43'[t] & == mu5 * (-x43[t] + s5 * (x41[t] + h5)), \\
x44'[t] & == nu5 * (-k5 * x44[t] + r5 * (x42[t] + l5)), \\
x51'[t] & == a6 * x52[t] + b6 * x51[t]^2 - c6 * x51[t]^3 - d6 * x53[t] + \\
& (kc * ((-11 * x51[t]) + x1s[t] + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] \\
& + x71[t] + x81[t] + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t])), \\
x52'[t] & == e6 - f6 * x51[t]^2 - x52[t] - g6 * x54[t], \\
x53'[t] & == mu6 * (-x53[t] + s6 * (x51[t] + h6)), \\
x54'[t] & == nu6 * (-k6 * x54[t] + r6 * (x52[t] + l6)), \\
x61'[t] & == a7 * x62[t] + b7 * x61[t]^2 - c7 * x61[t]^3 - d7 * x63[t] + \\
& (kc * ((-11 * x61[t]) + x1s[t] + x21[t] + x31[t] + x51[t] + x41[t] + \\
& + x71[t] + x81[t] + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t])), \\
x62'[t] & == e7 - f7 * x61[t]^2 - x62[t] - g7 * x64[t], \\
x63'[t] & == mu7 * (-x63[t] + s7 * (x61[t] + h7)), \\
x64'[t] & == nu7 * (-k7 * x64[t] + r7 * (x62[t] + l7)), \\
x71'[t] & == a8 * x72[t] + b8 * x71[t]^2 - c8 * x71[t]^3 - d8 * x73[t] + \\
& (kc * ((-11 * x71[t]) + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] + x81[t] \\
& + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t] + x1s[t] + x51[t])), \\
x72'[t] & == e8 - f8 * x71[t]^2 - x72[t] - g8 * x74[t], \\
x73'[t] & == mu8 * (-x73[t] + s8 * (x71[t] + h8)), \\
x74'[t] & == nu8 * (-k8 * x74[t] + r8 * (x72[t] + l8)), \\
x81'[t] & == a9 * x82[t] + b9 * x81[t]^2 - c9 * x81[t]^3 - d9 * x83[t] + \\
& (kc * ((-11 * x81[t]) + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] + x71[t] \\
& + x91[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t] + x51[t] + x1s[t])),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x82'[t] &== e9 - f9 * x81[t]^2 - x82[t] - g9 * x84[t], \\
x83'[t] &== mu9 * (-x83[t] + s9 * (x81[t] + h9)), \\
x84'[t] &== nu9 * (-k9 * x84[t] + r9 * (x82[t] + l9)), \\
x91'[t] &== a10 * x92[t] + b10 * x91[t]^2 - c10 * x91[t]^3 - d10 * x93[t] \\
&+ (kc * ((-11 * x91[t]) + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] + x71[t] \\
&+ x81[t] + x101[t] + x111[t] + x121[t] + x51[t] + x1s[t])), \\
x92'[t] &== e10 - f10 * x91[t]^2 - x92[t] - g10 * x94[t], \\
x93'[t] &== mu10 * (-x93[t] + s10 * (x91[t] + h10)), \\
x94'[t] &== nu10 * (-k10 * x84[t] + r10 * (x92[t] + l10)), \\
x101'[t] &== a11 * x102[t] + b11 * x101[t]^2 - c11 * x101[t]^3 - d11 * x103[t] \\
&+ (kc * ((-11 * x101[t]) + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] + x71[t] + x91[t] \\
&+ x81[t] + x111[t] + x121[t] + x51[t] + x1s[t])), \\
x102'[t] &== e11 - f11 * x101[t]^2 - x102[t] - g11 * x104[t], \\
x103'[t] &== mu11 * (-x103[t] + s11 * (x101[t] + h11)), \\
x104'[t] &== nu11 * (-k11 * x104[t] + r11 * (x102[t] + l11)), \\
x111'[t] &== a12 * x112[t] + b12 * x111[t]^2 - c12 * x111[t]^3 - d12 * x113[t] \\
&+ (kc * ((-11 * x111[t]) + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] + x71[t] + x91[t] \\
&+ x81[t] + x101[t] + x121[t] + x51[t] + x1s[t])), \\
x112'[t] &== e12 - f12 * x111[t]^2 - x112[t] - g12 * x114[t], \\
x113'[t] &== mu12 * (-x113[t] + s12 * (x111[t] + h12)), \\
x114'[t] &== nu12 * (-k12 * x114[t] + r12 * (x112[t] + l12)), \\
x121'[t] &== a13 * x122[t] + b13 * x121[t]^2 - c13 * x121[t]^3 - d13 * x123[t] \\
&+ (kc * ((-11 * x121[t]) + x21[t] + x31[t] + x41[t] + x61[t] + x71[t] + x91[t] \\
&+ x81[t] + x111[t] + x101[t] + x51[t] + x1s[t])), \\
x122'[t] &== e13 - f13 * x121[t]^2 - x122[t] - g13 * x124[t], \\
x123'[t] &== mu13 * (-x123[t] + s13 * (x121[t] + h13)), \\
x124'[t] &== nu13 * (-k13 * x124[t] + r13 * (x122[t] + l13)), 4 \\
x1m[1100] &== (-0,6858857272286466'), x2m[1100] == (-2,2886574530342925'), \\
x3m[1100] &== (2,0065188191207395'), \\
x4m[1100] &== (-11,262085328970798'), x1s[1100] == (-1,8906648820860927'), \\
x2s[1100] &== (-16,24541811291616'), \\
x3s[1100] &== (-0,7471910535929615'), x4s[1100] == (-23,681104003873447'), \\
x21[1100] &== (-1,888831778656252'), \\
x22[1100] &== (-15,846658530371121'), x23[1100] == (-1,095068051071875'), \\
x24[1100] &== (-23,999954749008417'), \\
x31[1100] &== (-1,888827919838669'), x32[1100] == (-15,841679806975332'), \\
x33[1100] &== (-1,0950574017257215'), \\
x34[1100] &== (-24,172188368275794'), x41[1100] == (-1,893503559239713'), \\
x42[1100] &== (-7,979143303519629'), \\
x43[1100] &== (11,943543034794173'), x44[1100] == (-1,8033984059272017'), \\
x51[1100] &== (-1,8941415633423353'), \\
x52[1100] &== (-7,997884243613207'), x53[1100] == (12,251570937364246'), \\
x54[1100] &== (-1,8059744004042892'), \\
x61[1100] &== (-1,8945214195389999'), x62[1100] == (-8,015562914471289'), \\
x63[1100] &== (12,549297051924137'),
\end{aligned}$$

$x64[1100] == (-1,8077807801482293')$, $x71[1100] == (-1,8928459450906325')$,
 $x72[1100] == (-7,741809151596932')$,
 $x73[1100] == (10,841606168974023')$, $x74[1100] == (-1,7948281930366834')$,
 $x81[1100] == (-1,8929347933667118')$,
 $x82[1100] == (-7,742226693404726')$, $x83[1100] == (10,841348278606274')$,
 $x84[1100] == (-1,795078449658441')$,
 $x91[1100] == (-1,8928462472504037')$, $x92[1100] == (-7,74218669821814')$,
 $x93[1100] == (10,841605388686057')$,
 $x94[1100] == (-1,794751462892218')$, $x101[1100] == (-1,8929347933667058')$,
 $x102[1100] == (-7,74222669340471')$,
 $x103[1100] == (10,841348278606278')$, $x104[1100] == (-1,7950784496584413')$,
 $x111[1100] == (-1,8928459450906334')$,
 $x112[1100] == (-7,741809151596949')$, $x113[1100] == (10,841606168974021')$,
 $x114[1100] == (-1,7948281930366834')$,
 $x121[1100] == (-1,8928459450906354')$, $x122[1100] == (-7,741809151596958')$,
 $x123[1100] == (10,841606168974021')$,
 $x124[1100] == (-1,7948281930366832')$, $z1g[1100] == (0,01)$,
 $etg[1100] == (0,01)$,
 $x1m, x2m, x3m, x4m, x1s, x2s, x3s, x4s, z1g, etg$,
 $x21, x22, x23, x24, x31, x32, x33, x34, x41, x42, x43$,
 $x44, x51, x52, x53, x54, x61, x62, x63, x64, x71, x72, x73$,
 $x74, x81, x82, x83, x84, x91, x92, x93, x94, x101, x102, x103$,
 $x104, x111, x112, x113, x114, x121, x122, x123, x124$,
 $t, 1100, 3000, MaxSteps \rightarrow Infinity]$

Show[grx0x1, gr4x]

Espacio de fase x1m Vs x1s (voltajes)

$hr3b = ParametricPlot[Evaluate[x1m[t], x1s[t]/.mp2],$

$t, 1110, 3000, Frame \rightarrow True,$

$FrameLabel \rightarrow "x01(mV)", "x11(mV)",$

$PlotRange \rightarrow All]$

$hr3c = Show[hr3a, hr3b]$

$hr4 = ParametricPlot[Evaluate[x1m[t], x21[t]/.mp2],$

$t, 1105, 3000, Frame \rightarrow True,$

$FrameLabel \rightarrow "x01(mV)", "x21(mV)", PlotRange \rightarrow All]$

$hr4a = ParametricPlot[Evaluate[x1m[t], x61[t]/.mp2],$

$t, 1105, 3000, Frame \rightarrow True,$

$FrameLabel \rightarrow "x01(mV)", "x61(mV)", PlotRange \rightarrow All]$

$hr5 = ParametricPlot[Evaluate[x1m[t], x121[t]/.mp2],$

$t, 1105, 3000, Frame \rightarrow True,$

$FrameLabel \rightarrow "x01(mV)", "x121(mV)", PlotRange \rightarrow All]$

$hr6 = ParametricPlot[Evaluate[x1s[t], x61[t]/.mp2],$

$t, 1100, 3000, Frame \rightarrow True,$

$FrameLabel \rightarrow "x11(mV)", "x61(mV)", PlotRange \rightarrow All]$

$Plot[Evaluate[(etg[t] + k * z1g[t])/.mp2],$

```
t, 1100, 2500, PlotStyle → Hue[3],  
FrameLabel → "t(s)", "u(A/F)", Frame → True]
```