

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Didáctica de las Matemáticas

Razonamiento configural de alumnos de Bachillerato al resolver problemas  
geométricos en la modalidad a distancia

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de  
Maestra en Didáctica de las Matemáticas

Presenta

Leticia Rodríguez Rosas

Dirigido por:

Dr. Víctor Larios Osorio

Víctor Larios Osorio

Presidente

Angélica Rosario Jiménez Sánchez

Secretario

Guadalupe Morales Ramírez

Vocal

Luisa Ramírez Granados

Suplente

Patricia Isabel Spíndola Yáñez

Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.

Diciembre 2022

México

## Resumen

En este trabajo se describe una investigación realizada a un grupo de 25 estudiantes de segundo semestre de Bachillerato en la materia de Geometría y Trigonometría para determinar el razonamiento configural que llevan a cabo al resolver problemas geométricos en modalidad a distancia en el período semestral Enero-Julio 2021. Para ello, se diseñaron una serie de problemas geométricos que involucran las aprehensiones propuestas por Duval: perceptiva, operativa, discursiva o secuencial, los cuales fueron aplicados a manera de examen en lápiz y papel al final del semestre. Posteriormente se entrevistó a cada uno de los estudiantes para conocer más acerca del porqué de sus respuestas en el examen.

Se analizaron las respuestas dadas por los estudiantes y se encontró que la aprehensión que más se les dificulta es la discursiva, seguida de la secuencial y operativa y la mayoría de los estudiantes no puede llevar a cabo un proceso de visualización y uso de aprehensiones adecuado, por lo que su razonamiento configural se ve limitado.

**Palabras clave:** Razonamiento configural, Aprehensiones, Visualización, Geometría, Modalidad a distancia, Estudiante de Bachillerato.

## Summary

This paper describes an investigation carried out with 25 second semester high school students' learning Geometry and Trigonometry online in order to evaluate configural reasoning's that they carry out when solving geometric problems at January-July 2021.

To carry out the evaluation, series of geometric problems involving some apprehensions proposed by Duval were designed: perceptual, operative, discursive or sequential, which were applied as an exam ending the semester, in order to recognize different types of apprehension present in their visualization processes, as well as the geometric knowledge they had. Subsequently, each of the students was interviewed to learn more about their answers.

Students' answers were analyzed, and it was found that the most difficult apprehension is discursive, followed by sequential and operative, and most of the students cannot carry out an adequate visualization process and use of apprehensions, so their configural reasoning is limited.

**Keyword:** Configural reasoning, Apprehensions, Visualization, Geometry, Distance Modality, High School Student.

## **Agradecimientos**

El desarrollo de este trabajo no hubiese sido posible sin ayuda de la M. C. Luisa Ramírez Granados, la Dra. Angélica Rosario Jiménez Sánchez, la Dra. Guadalupe Morales Ramírez y la M. C. Patricia Isabel Spíndola Yáñez, a quienes agradezco enormemente su apoyo y colaboración como sinodales, así como su retroalimentación y correcciones para la mejora de este. Quiero agradecer muy especialmente al Dr. Víctor Larios Osorio, primeramente, por haber aceptado ser mi director de tesis, haberme guiado oportunamente y compartirme sus conocimientos, pero, además, por todo el apoyo moral que fue fundamental en la culminación de este proyecto.

# Contenido

Summary .....	3
Agradecimientos .....	4
Capítulo 1 Introducción .....	6
Capítulo 2. Planteamiento del problema .....	8
2.1 Revisión de la Literatura .....	8
2.2 Antecedentes .....	8
2.3 Justificación .....	11
2.4 Descripción del problema .....	13
2.5 Objetivos .....	15
Capítulo 3. Marco Teórico .....	16
3.1 Marco teórico metodológico .....	16
Capítulo 4. Diseño de Investigación .....	23
4.2 Selección de la muestra .....	25
4.3 Instrumentos de recolección de datos .....	26
4.4 Recogida de datos .....	32
Capítulo 5. Análisis de datos .....	33
Actividad 1: Aprehensión perceptiva .....	33
Actividad 2.1: Aprehensión operativa .....	35
Actividad 2.2: Aprehensión operativa .....	36
Actividad 3: Aprehensión discursiva .....	41
Actividad 4.1: Aprehensión secuencial .....	43
Actividad 4.2: Aprehensión secuencial .....	45
Capítulo 6. Comentarios finales y conclusiones .....	50
Referencias bibliográficas .....	58
Anexos .....	60
Anexo 1 .....	60

## Capítulo 1 Introducción

El análisis acerca del razonamiento configural (concepto que será abordado más a detalle en el marco teórico) que estudiantes de Bachillerato en modalidad a distancia llevan a cabo al resolver problemas geométricos, puede ayudar a los docentes a aproximarse a los procesos mentales que llevan a cabo dichos estudiantes a la hora de resolver este tipo de problemas, de tal manera que puedan intervenir y mejorar su manera de enseñar. En este sentido se planteó un proyecto de investigación, el cual tiene como objetivo determinar el razonamiento configural de los estudiantes al momento de resolver problemas geométricos. Una consecuencia de este trabajo es que contribuya al desarrollo y mejora de los procesos mentales y el razonamiento que llevan a cabo los estudiantes a la hora de resolver problemas. Para ello, se diseñaron una serie de problemas geométricos que involucran al menos una de las aprehensiones propuestas por Duval, dichas aprehensiones se tomaron como herramienta para facilitar la determinación del razonamiento configural de los estudiantes, además de permitir conocer los conocimientos geométricos con los que contaban. Los problemas fueron resueltos por los estudiantes en lápiz y papel a modo de examen al final del semestre.

Este trabajo se conforma por seis capítulos, el primero es la introducción, en el segundo capítulo se habla acerca de la problemática existente y se explican las razones acerca del interés del estudio, además de que se mencionan investigaciones relacionadas con el tema de estudio. El tercer capítulo se destina para hablar acerca del marco teórico, en él se plantea la teoría utilizada para el desarrollo del trabajo, además de que se definen los conceptos en los que se basa el estudio, como lo es: la visualización, razonamiento configural y los cuatro tipos de aprehensiones propuestos por Duval. En el cuarto capítulo se describen las actividades desarrolladas y el tipo de aprehensión al que corresponden, se habla acerca del diseño del estudio, se describen las características del grupo de estudio y los instrumentos para la recolección de datos. En el quinto capítulo se presentan los resultados ordenados según el tipo de respuestas de los estudiantes, con el fin

de sintetizar la información; también se realiza el análisis de los datos recolectados y se compara la aprehensión utilizada por los estudiantes contra la aprehensión esperada. En el capítulo seis se muestran los resultados y conclusiones del estudio y se incluye la bibliografía consultada.

## **Capítulo 2. Planteamiento del problema**

### **2.1 Revisión de la Literatura**

En la selección de las fuentes bibliográficas empleadas para la fundamentación de este trabajo, se utilizaron buscadores como Google Académico y CONRICyT, en los cuales se ingresaron palabras clave extraídas del tema desarrollado y se seleccionaron los trabajos con los títulos relacionados más estrechamente con razonamiento configural. De los trabajos seleccionados se realizó una lectura rápida de su resumen y conclusiones y sólo se tomaron en cuenta aquellos que realizaron experimentación y mostraron resultados relacionados con razonamiento configural y/o aprehensiones propuestas por Duval, así como de visualización, ya que esta es uno de los procesos más importantes que se llevan a cabo en el razonamiento configural a la hora de resolver problemas geométricos.

### **2.2 Antecedentes**

A continuación, se mencionan algunos estudios en los que se evidencia cómo el proceso de visualización, el tipo de aprehensión utilizada y el conocimiento geométrico, ayudan en el desarrollo del razonamiento configural durante la resolución de problemas geométricos.

En el primer estudio, Torregrosa y sus colegas (2010) se centraron en analizar únicamente dos de las cuatro aprehensiones utilizadas en este proyecto: la operativa y la discursiva. Ellos presentaron ocho problemas geométricos realizados en lápiz y papel con 55 profesores en formación. Se seleccionaron tres de los ocho problemas en los que era necesario modificar o construir la configuración inicial, para determinar cuáles eran las subconfiguraciones relevantes que resolvían el problema (aprehensión operativa) y qué afirmaciones matemáticas permitían desarrollar la prueba (aprehensión discursiva). Los resultados permitieron identificar tres tipos de desenlace en relación con la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa en la resolución de los problemas: 1) Truncamiento: el razonamiento configural se interrumpe cuando se obtiene la “idea” que resuelve el problema. 2)



Conjetura sin demostración: se da cuando el razonamiento configural permite al estudiante dar una respuesta al problema aceptando las conjeturas mediante percepción simple, sin ser validada y expresando la solución mediante el lenguaje natural. 3) Bucle: En este proceso se llega a una situación de bloqueo que no permite avanzar hacia la solución, así que ocurre un estancamiento del razonamiento producido.

Por su parte, Saorín y sus colegas. (2017) realizaron un estudio parecido al de Torregosa y sus colegas, con el fin de identificar características del modelo razonamiento configural cuando los estudiantes resuelven problemas geométricos en un entorno de lápiz y papel. El estudio se hizo con un grupo de 33 estudiantes de primer grado de Bachillerato, a los cuales se les presentan dos problemas, en el primero de ellos las subconfiguraciones relevantes que debían identificar los estudiantes para la resolución del problema formaban parte de la configuración inicial (aprehensión operativa), mientras que, en el segundo problema, las subconfiguraciones relevantes debían ser construidas (aprehensiones discursiva y secuencial), lo cual lo hacía más complejo. La mayoría de los razonamientos desembocaron en un truncamiento para el primer problema y en todos los truncamientos fueron consideradas las mismas subconfiguraciones relevantes, mientras que predominó la “conjetura sin demostración” en el segundo problema, al fundamentar sus procesos de razonamiento en conjeturas no demostradas desprendidas de la configuración inicial, ya que no identificaron las subconfiguraciones relevantes necesarias para la resolución del problema. Por tanto, los resultados demuestran la influencia que tienen las aprehensiones, así como las características de las configuraciones geométricas iniciales en la identificación de subconfiguraciones relevantes y en el proceso de razonamiento desarrollado.

En estos estudios se aprecia el uso de las aprehensiones empleadas como herramienta para determinar el razonamiento que llevan a cabo los estudiantes al resolver problemas geométricos. Resulta muy interesante ver cómo los

investigadores le sacan provecho a esta herramienta de diversas maneras, tal es el caso de Fernández y sus colegas (2012), quienes desarrollaron un curso con 182 estudiantes para maestro que cursaron la asignatura de “sentido geométrico”; la intención del curso era que los estudiantes utilizaran las aprehensiones discursivas y operativas para reconocer propiedades geométricas. Para evaluar el curso, se les pidió a los estudiantes resolver dos problemas en los que debían probar la congruencia de dos segmentos en una configuración dada de triángulos. Las respuestas permitieron identificar la influencia de las figuras prototípicas en el inicio del razonamiento configural que ponen de manifiesto el papel que juega la percepción visual en la activación de determinados conocimientos de Geometría. La información que proporcionaron los resultados fue vital para determinar cómo es que la visualización y el conocimiento geométrico ayudan en el desarrollo del razonamiento configural durante la resolución de problemas.

Existen otros estudios en los que se combina el uso de las aprehensiones con el uso de las TIC, por ejemplo, Moya (2015) presenta una investigación en la que analiza cómo los estudiantes de quinto semestre de una secundaria peruana articulan las aprehensiones del registro figural al movilizar nociones de Geometría en la construcción del cubo truncado utilizando Cabri 3D. El autor propuso una secuencia de dos actividades acerca de la construcción del cubo truncado, así como algunas preguntas asociadas con las actividades. Como resultado, en la construcción del cubo truncado los estudiantes desarrollaron y articularon las aprehensiones secuencial, perceptiva, operatoria y discursiva. Las actividades permitieron que los estudiantes articularan las diferentes aprehensiones, además de movilizar sus nociones en Geometría y sus habilidades con el uso del software Cabri 3D, mismo que ayudó a la construcción del cubo truncado de una manera dinámica y a la manipulación directa para un mejor análisis.

### **2.3 Justificación**

En México una de las asignaturas curriculares en las que mayores dificultades presentan los estudiantes es matemáticas, principalmente en las zonas socioeconómicas más desfavorecidas. Ruiz (2009) muestra resultados de Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos (EXCALE) que en el año 2005 se realizaron a estudiantes de tercero de secundaria a nivel nacional. Los ejes curriculares evaluados fueron en el área de matemáticas (incluido el eje de Geometría o también conocido como espacio y forma, el cual es el eje en el que se centra este trabajo). El estudio se dividió por los siguientes estratos escolares: telesecundaria, técnica, general y privado; mientras que los niveles de logro escolar se clasificaron como: debajo del básico, básico, intermedio y avanzado. A nivel nacional, se evaluó el 51% de los estudiantes alcanzando un nivel de logro escolar por debajo del básico, el 30% de los estudiantes se ubicó en el nivel básico, el 18% de los estudiantes se ubicó en el nivel intermedio y únicamente el 1% de los estudiantes en el nivel avanzado. El estrato escolar más desfavorecido y que contribuyó mayormente a promediar lo anterior a nivel nacional fueron los estudiantes de telesecundaria, ya que el nivel de logro escolar del 62% de estudiantes, se ubicó debajo del básico, es decir, el 26% en básico, 11% en intermedio y únicamente el 1% en avanzado.

Por otro lado, en los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE (PISA) 2018, que evalúa los conocimientos de alumnos de 15 años en las áreas de matemáticas, lectura y ciencias. México se ubicó por debajo del promedio OCDE, lo más preocupante es que a lo largo de la mayor parte de su participación en PISA desde el año 2000, México se ha mantenido en los niveles más bajos, sobre todo en el área de matemáticas. Además, las pruebas PISA revelan que los países desarrollados obtienen mejores puntajes que los subdesarrollados, de esta manera, los alumnos en mejores condiciones socioeconómicas tienen oportunidad de desarrollar aprendizajes más significativos.

En México, la diferencia en el índice de calidad de los recursos educativos entre escuelas socioeconómicamente en ventaja y en desventaja social es la más alta de toda la OCDE y la tercera más alta de todos los participantes en PISA (detrás de Perú y Costa Rica), reflejando altos niveles de desigualdad en la distribución de recursos educacionales en México (OECD, 2012).

Por otra parte, dada la condición sanitaria mundial vivida con el SARS-CoV-2, los estudiantes tuvieron que migrar de la modalidad de educación presencial a la modalidad virtual o a distancia; por lo que la educación a distancia vino a ser un parteaguas en la forma de la enseñanza y aprendizaje de cualquier área y nivel educativo, incluidas las matemáticas. En este sentido existe una preocupación latente en el posible rezago educativo que podría traer consigo esta situación a mediano y largo plazo, dado que tanto profesores como estudiantes y sus familiares, han tenido que adoptar una forma de enseñanza/aprendizaje, a la cual, y para la cual no estaban acostumbrados ni preparados, principalmente en cuanto a material didáctico se refiere, sobre todo para la educación a distancia. Ante esta situación, se ha incrementado considerablemente la utilización de las tecnologías digitales para el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje.

Sin embargo, no es suficiente con diseñar materiales para educación a distancia; se trata de analizar entre otras cosas, la manera de aprender de los diferentes estudiantes, para que, en base a lo que resulte de dicho análisis, los profesores puedan diseñar, rediseñar o complementar sus materiales didácticos. En la enseñanza de la asignatura de Geometría, que es el área en la que se centra este trabajo, se debe generar interés por examinar y analizar las diferentes formas en que los estudiantes visualizan las figuras que se les presentan en los problemas geométricos, pues juegan un papel fundamental en el tratamiento y solución que le dan de los mismos. Existe una serie de estudios acerca de la incidencia que pueden tener los profesores en el desarrollo cognitivo de sus estudiantes al integrar el uso de elementos visuales, sin embargo, siguen haciendo falta estudios que exploren la necesidad de desarrollar el proceso de visualización como parte de la demanda

cognitiva que deben tener los objetos geométricos en el aprendizaje de los estudiantes. En años pasados no se le dio tanta importancia a la visualización, dado que no se le consideraba necesaria, sin embargo, en la actualidad existe una tendencia cada vez mayor a reconocer la importancia que la visualización tiene en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Marmolejo & Vega, 2012).

El aprendizaje de la Geometría contribuye a desarrollar habilidades en los estudiantes para visualizar, pensar de manera crítica, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar de manera deductiva y argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002). Gamboa & Ballesterro (2009), por su parte, mencionan que la Geometría se puede considerar como un instrumento reflexivo, que le permite a los seres humanos resolver problemas de distinta índole y comprender mejor al mundo, el cual ofrece una inmensa variedad de formas geométricas, no sólo en lo construido por los humanos sino también en la naturaleza

Es así como surge el interés por analizar el razonamiento configural que utilizan estudiantes de un grupo de segundo semestre de bachillerato en modalidad a distancia, al tratar de resolver problemas geométricos que involucran la obtención de áreas.

#### **2.4 Descripción del problema**

Una de las áreas de matemáticas en las que mayores dificultades presentan los estudiantes es en Geometría, tal como lo dicen Barrantes y Blanco (2004): Los estudiantes conciben la Geometría escolar como una materia difícil, si a eso se le suma el hecho de que en las escuelas se le dedica muy poco tiempo para su enseñanza ya que se considera menos importante que otros temas, la enseñanza y aprendizaje de esta materia se complica aún más.

Cabe señalar que una de las mayores dificultades de los estudiantes en Geometría es la visualización, lo que los lleva a un planteamiento de conjeturas y razonamiento equivocado de las figuras y la información que se les presenta, puesto que el

conocimiento que muestran los estudiantes en Geometría es de bajo nivel cognitivo, por ejemplo, no tienen claros conceptos como área y perímetro, desconocen las propiedades de las figuras geométricas, confunden elementos geométricos como el diámetro y el radio, etc.; así como bases poco sólidas en otras materias que sirven de apoyo para la solución de problemas geométricos como lo es el Álgebra.

En los últimos años, se han incrementado las investigaciones centradas en el estudio de diseño de actividades o métodos apoyados en el uso de TIC para la enseñanza y aprendizaje de Geometría. Por ejemplo, en el último estudio mencionado en los antecedentes y realizado por Moya (2015), se hace uso del software educativo Cabri 3D para construir un cubo truncado; los resultados del estudio fueron: la movilización de las nociones de los estudiantes en Geometría y sus habilidades en el uso del software, además de que lograron desarrollar y articular las diferentes aprehensiones mencionadas a lo largo de este trabajo.

Flores y sus colegas (2021) presentaron un trabajo enfocado en el desarrollo de competencias mediante el uso de las TIC, muy específicamente en el uso del software educativo GeoGebra, como estrategia de enseñanza y aprendizaje de matemáticas en estudiantes de Secundaria. Entre los resultados del estudio destacó la importancia de las TIC en la enseñanza de conceptos geométricos y el desarrollo del pensamiento espacial, además de las competencias en uso de las TIC necesarias para la realización de actividades de la vida cotidiana (trabajos escolares, proyectos, trámites del banco, pago o solicitud de servicios, etc.).

Sin embargo, desafortunadamente no todos los estudiantes cuentan con los recursos tecnológicos necesarios que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo, ya sea en Geometría o en cualquier otra área de Matemáticas y/o de su vida diaria, como lo es una tableta o computadora e Internet. Tal es el caso del grupo de estudiantes de segundo semestre del Centro de Estudios Tecnológicos en Aguas Continentales (CETAC No. 23), ubicado en El Marqués, Querétaro, México, quienes han estado realizando sus estudios a distancia desde su ingreso al bachillerato, debido a las condiciones sanitarias por las que atraviesa el mundo.

De todo lo anterior expuesto, surge la necesidad de analizar el razonamiento configural que llevan a cabo los estudiantes de segundo semestre del CETAC No. 23, a la hora de solucionar problemas geométricos. En este trabajo se propone realizar dicho análisis, partiendo del papel de los cuatro tipos de aprehensiones propuestas por Duval (1988, 2006), con la intención de enfocarse en cada manera distinta de observar las figuras geométricas por parte de los estudiantes y así solucionar problemas que involucran el cálculo de áreas y el tratamiento de estas.

### **2.5 Objetivo general**

Determinar el razonamiento configural que desarrollan los alumnos de segundo semestre de bachillerato en modalidad a distancia, cuando resuelven problemas geométricos.

Para alcanzar este objetivo se plantean los siguiente

- Determinar los tipos de aprehensión utilizados por los estudiantes al resolver problemas geométricos que involucran el cálculo de áreas con el propósito de identificar el razonamiento configural que desarrollan los estudiantes.
- Analizar el proceso de visualización que llevan a cabo los estudiantes al tratar de resolver problemas que involucren el cálculo de áreas, esto para identificar el razonamiento configural que desarrollan los estudiantes.

## Capítulo 3. Marco Teórico

### 3.1 Marco teórico metodológico

Clemente y sus colegas (2017) consideran que el razonamiento configural es el “proceso que relaciona la visualización y el conocimiento de Geometría”. Para Duval (1995), la Geometría involucra tres formas de proceso cognitivo que son: la visualización, la construcción, la deducción y el razonamiento.

Según Acuña (2012), la visualización se refiere al uso del sentido de la vista para adquirir información y en base a ella construir ideas, por lo que, en la visualización también se incluye el saber, es decir, además de “ver” se debe “saber”, pues no basta con ver los objetos para conocer todas sus propiedades.

Gran parte de la actividad del aprendizaje de la Geometría se inicia y se concentra en la interacción entre el que mira y lo que se mira, que en particular está expresado en imágenes y signos que es lo que usamos para dar cuerpo a las ideas matemáticas.

La visualización es un razonamiento cognoscitivo y es uno de los procesos más complicados para los estudiantes y en general para el ser humano, Zazkis et al. (1996) describen a la visualización como “el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos”.

Zimmermann y Cunningham (1991) afirman que en la visualización lo que importa es la capacidad de los estudiantes para diseñar diagramas apropiados ya sea a mano o en computadora para representar conceptos matemáticos o problemas y con ayuda de los diagramas poder comprender y resolver problemas.

Hershkowitz y sus colegas (1996) por su parte mencionan “Entendemos por visualización la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra” (pág. 163).



Arcavi (1999) relaciona a la visualización no sólo con la ilustración, sino que además la reconoce como una componente clave en el razonamiento, muy especialmente ligada a lo conceptual y no sólo a lo perceptivo.

Algunas de las definiciones que le da la RAE al concepto “visualizar” son: formar en la mente una imagen visual de un concepto abstracto, imaginar con rasgos visibles algo que no se tiene a la vista; sin embargo, no sería posible imaginar o formar imágenes correctas en la mente sin conocer dichas imágenes o sus características, por ejemplo: si a un niño pequeño que desconoce las figuras geométricas se le pide que imagine un hexágono, podrá imaginar muchas cosas, pero muy difícilmente un hexágono; por otro lado, si a un estudiante de bachillerato se le pide obtener el diámetro de una circunferencia a partir de su área dada y no tiene claros los conceptos de área y de diámetro, muy difícilmente podrá imaginar una manera adecuada de resolver el problema.

Entonces, de acuerdo con la información anterior y la experiencia propia, para este trabajo se ha decidido tomar la siguiente definición de visualización: proceso cognitivo apoyado por el sentido de la vista, conocimientos y/ experiencias previas, así como las aprehensiones utilizadas por los estudiantes para llevar a cabo un razonamiento que permita dar solución a los problemas que se les presentan.

Duval (2006) considera que los procesos de visualización son importantes para resolver problemas geométricos y así considera que parten de cuatro tipos de aprehensión figural, en las cuales se basará el desarrollo de este trabajo: la aprehensión perceptiva, la secuencial, la operativa y la discursiva.

Según Torregosa y Quesada (2007), existen tres tipos de cambios asociados a los procesos de visualización, los cuales a su vez los relaciona con algún tipo de aprehensión: 1) el cambio configural, el cual consiste en una modificación de la configuración inicial, característica que se le atribuye a su vez a la aprehensión operativa; 2) el cambio de anclaje, el cual tiene una fuerte relación con la manera de entender la figura con base en sus propiedades matemáticas y es asociado con

la aprehensión discursiva; 3) por último se encuentra el cambio dimensional, el cual según los autores puede estar presente en cualquier tipo de aprehensión.

Pero a todo esto ¿qué es “aprehensión”?: Según la RAE la definición de ‘aprehensión’ es la “acción y efecto de aprehender”, término definido como la adquisición de conocimiento. Para aprehender o bien adquirir conocimiento es necesario asimilar y comprender la información que se presenta, de tal forma que pueda ser aplicado ese conocimiento en la vida diaria o en la solución de problemas.

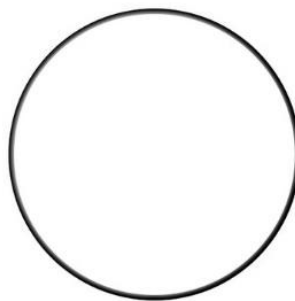
A continuación, se describen las aprehensiones propuestas por Duval:

- ***Aprehensión perceptiva***: Es la primera en ser usada en toda la etapa educativa y también la primera en aparecer en el desarrollo cognitivo del estudiante (Duval, 1998). Este tipo de aprehensión se refiere al reconocimiento y nombramiento de figuras geométricas, en lugares y orientaciones distintas. Para Duval (1994), “la aprehensión perceptiva tiene la función epistemológica de identificación de los objetos en dos o tres dimensiones. Esto es hecho por procesos cognitivos efectuados automáticamente, y así, de forma inconsciente”.

La configuración mostrada en la Figura 1, es un ejemplo donde se aplica la aprehensión perceptiva, ya que dicha configuración puede ser vista como la parte superior de una mesa, como una moneda, como un plato, como la representación (dibujo) de una figura geométrica (objeto mental).

### **Figura 1**

*Ejemplo de aplicación de la aprehensión perceptiva.*

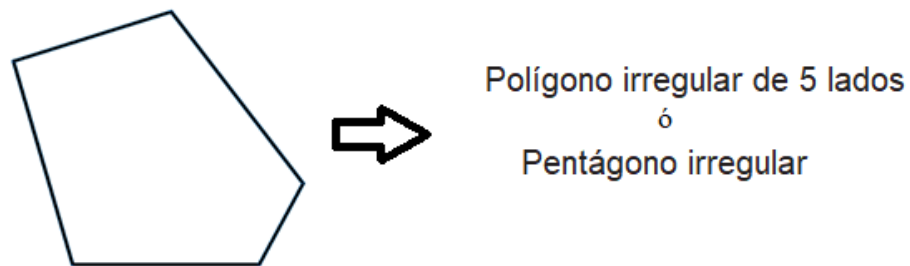


- **Aprehensión discursiva:** Es la habilidad de relacionar la figura con declaraciones, definiciones y atributos matemáticos que no pueden determinarse mediante la aprehensión perceptiva. (Bernabeu et al., 2019).

Para Duval (1994) la aprehensión discursiva es la que explica las propiedades matemáticas de una figura. Por ejemplo, a continuación, se observa una figura, en la que, gracias a su conocimiento y a la aprehensión discursiva, el estudiante es capaz de describir que se trata de un polígono irregular de 5 lados al que también se le nombra pentágono irregular, ya que sus lados no tienen la misma longitud y sus ángulos también son distintos (Figura 2).

**Figura 2.**

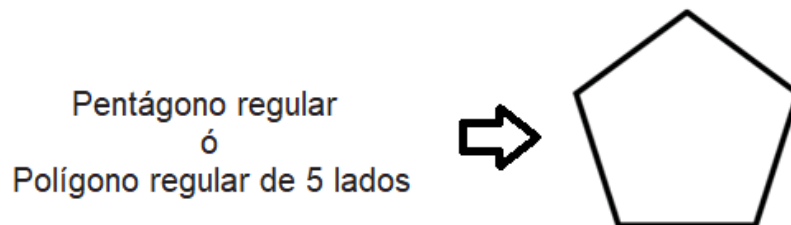
*Ejemplo de aplicación de la aprehensión discursiva.*



Por otro lado, un estudiante que domina este tipo de aprehensión es capaz de realizar el ejercicio de manera inversa, es decir, a partir de la descripción puede identificar la figura de la que se trata, así como sus características, en la Figura 3 se observa claramente un polígono de 5 lados y ángulos iguales.

**Figura 3.**

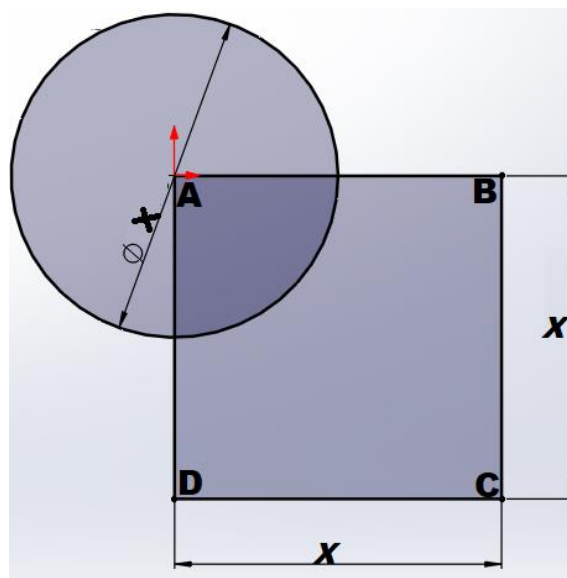
*Ejemplos de aplicación de la aprehensión discursiva.*



- **Aprehensión secuencial:** Este tipo de aprehensión se requiere cuando hay que construir una figura o describir su construcción y trata del orden de construcción de la figura (Duval, 1994). La organización de los trazos no depende en leyes perceptivas, sino en técnicas de construcción de las figuras o en propiedades matemáticas (Duval, 1995).

**Figura 4.**

*Ejemplo de aplicación de la aprehensión secuencial.*



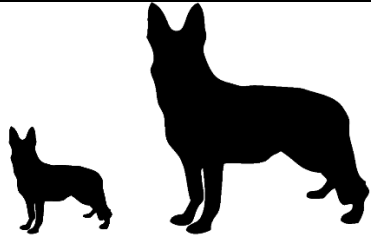

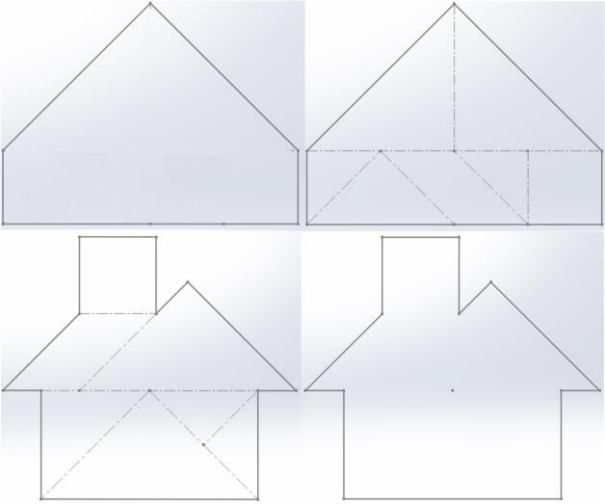
*Nota.* Como se muestra en la figura, un ejemplo de aplicación de la aprehensión secuencial sería que se le pida al estudiante dibujar una circunferencia de radio  $x/2$ , después, dibujar un cuadrado ABCD de tal manera que el vértice A del cuadrado se encuentre en la misma posición que el centro de la circunferencia y que el lado del cuadrado mida lo mismo que el diámetro de la circunferencia; además, el cuadrado debe traslaparse con la circunferencia en el cuarto cuadrante de ésta.

- **Aprehensión operativa:** Modificación de una figura para considerar subconfiguraciones, ya sea agregando o eliminando algunos elementos geométricos, manipulando las partes de una configuración geométrica como un rompecabezas para concentrar la atención sobre ciertas subconfiguraciones

particulares. Duval (1994), muestra tres tipos de modificaciones posibles en las figuras geométricas:

**Tabla 1.**

*Tipos de modificaciones existentes según Duval (1994).*

Modificaciones	Descripción	Representación gráfica (Ejemplos)
Ópticas	Misma forma y orientación pero diferencias de tamaño	
Posicionales	Misma forma y tamaño pero distinta orientación	
Mereológicas	De descomposición y recomposición. Se permite la transformación del contorno global de una figura (Duval, 1995)	

El reconocimiento de subconfiguraciones (aprehensión operativa) en una configuración geométrica es necesaria para desencadenar el razonamiento configural. Sin embargo, no es suficiente la generación de un proceso deductivo, apoyado del conocimiento previo en Geometría y en las aprehensiones discursivas vinculadas a la configuración dada. Lo mismo ocurre en la resolución de cualquier

problema, no basta con el uso de un solo tipo de aprehensión, sino que es necesaria la articulación e integración de dos o más de ellas: “para funcionar como una figura geométrica, un dibujo debe evocar aprehensiones perceptivas y al menos uno de los otros tres tipos de aprehensión” (Duval, 1995, citado en Gagatsis, 2015), la aprehensión perceptiva es la base del desenvolvimiento de las otras (Torregosa y Quesada, 2007).

## **Capítulo 4. Diseño de Investigación**

En este capítulo se describe el tipo de investigación utilizada para este trabajo, también se describe cómo estuvo compuesta la muestra, así como los instrumentos aplicados para la recolección de datos y la manera en cómo fueron clasificados esos datos para poder analizarlos y presentarlos de manera ordenada.

### **4.1 Tipo de Investigación**

El enfoque de esta investigación es de tipo cualitativo y descriptivo, pues el estudio fue realizado en un grupo de estudiantes pequeño, con características específicas, en el que fue de gran ayuda la observación, la interacción y cuestionamiento a los estudiantes tanto verbal como de manera escrita para poder recabar más información.

Diversos autores concuerdan en que el diseño de la investigación cualitativa suele utilizar técnicas flexibles y abiertas, principalmente la observación; además de que el investigador debe de utilizar su propio criterio y creencias para comprender, darle sentido e interpretar lo que observa, y es por estas razones que los resultados podrían ser subjetivos. Por lo tanto, es necesario darle validez y credibilidad a la investigación; para ello se utilizan diversas estrategias como la triangulación, en ella se obtienen datos de la realidad desde distintas perspectivas: la propia, la de los participantes de la investigación y de otras fuentes de información importantes (personas o documentos, etc.) (Dorio et al., 2004).

Bartolomé (1986) propone diversas técnicas para darle científicidad a la investigación cualitativa, algunas de ellas son: observación persistente, triangulación, recogida de material referencial, comprobaciones con los participantes, descripción exhaustiva, recogida abundante de datos, descripciones minuciosas de los informantes, identificación y descripción de las técnicas de análisis y recogida de datos, comprobaciones de los participantes, etc.

En la investigación cualitativa existen varios métodos y su clasificación varía de acuerdo al autor; de entre las diversas opciones, el método que mejor se adecúa a

este trabajo es el “estudio de casos”, Stake (1999) lo define como el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas.

Un caso puede ser un niño, una clase de niños o un evento. El caso de esta investigación es un grupo de estudiantes de un grado y escuela en particular. Además, Stake (1999) habla de tres tipos de estudios de caso: el estudio intrínseco, el estudio instrumental y el estudio de caso múltiple o colectivo. Esta investigación trata acerca de un caso de estudio intrínseco, es decir, el interés se centra directamente en el caso. Para la situación planteada, el grupo de estudiantes de bachillerato representan el caso y el interés se centra en ellos, en su manera de solucionar problemas geométricos.

Jiménez (2012) menciona cinco pasos que deben seguirse para la realización de un estudio de caso, a continuación, se muestran dichos pasos, así como la manera en que fueron aplicados en este trabajo:

- 1) Elegir y definir el caso, así como las personas que pueden ser fuentes importantes de información: Después de evaluar varias opciones de casos (grupos de estudiantes con características distintas), se tomó la decisión de elegir al grupo de estudiantes de segundo semestre de bachillerato que cursan la materia de Geometría y Trigonometría a distancia y son egresados de telesecundarias, pues de acuerdo a la evaluación EXCALE (2005) mencionada en la Justificación, los estudiantes de telesecundaria son el estrato escolar mayormente desfavorecido y con menor nivel académico a nivel nacional.
- 2) Realizar una lista de preguntas que puedan guiar al investigador: Se les realizó a los estudiantes un examen escrito con una serie de problemas acerca de cálculo de áreas de distintas figuras geométricas para examinar los distintos tipos de aprehensiones propuestos por Duval, así como una entrevista individual para ampliar las respuestas.



- 3) Localizar las fuentes de datos, aquí se definen las estrategias a utilizar para la obtención de los datos: Las principales estrategias para la obtención de datos fueron la observación, el examen y la entrevista a los estudiantes.
- 4) Analizar: Análisis realizado en base a las cuatro aprehensiones propuestas por Duval para identificar el razonamiento configural que desarrollan los estudiantes de bachillerato.
- 5) Desarrollar el informe, éste debe de contar con descripciones y explicaciones muy detalladas de manera cronológica.

#### **4.2 Selección de la muestra**

La muestra de este trabajo se conformó por los 25 estudiantes (en su mayoría mujeres), del grupo de segundo semestre de Bachillerato del curso de Geometría y Trigonometría, la razón de la selección de este grupo se menciona en párrafos anteriores. La mayoría de los estudiantes que participaron en este proyecto son egresados de telesecundarias, además de que, a pesar de que el Bachillerato no trabaja regularmente en modalidad a distancia, los estudiantes no habían podido tomar clases presenciales antes y después del estudio, por la situación sanitaria mundial.

Algunas de las características del grupo es que la mayoría son muy callados, hay muy poca, casi nula participación, sobre todo si se trata de que hagan preguntas acerca de lo que no les queda claro; más de la mitad del grupo demuestra poca confianza en sí mismos, ya que, al hacerles preguntas directas, tardan mucho en contestar y contestan dudosos, aunque su respuesta sea correcta; al hacerles preguntas de operaciones básicas vistas en Primaria o Secundaria dudan y comenten errores. Estas características no incluyen a todos los estudiantes, pero sí a la gran mayoría.

### 4.3 Instrumentos de recolección de datos

Para este trabajo se diseñaron una serie de problemas geométricos que involucran al menos una de las aprehensiones propuestas por Duval. Después de estudiar las aprehensiones, se buscaron problemas que cumplieran con las características de cada una de ellas, se modificaron y complementaron según se creyó conveniente, de acuerdo con el nivel académico que exige el curso, así como el que muestran los estudiantes, por lo cual, se propusieron problemas con distinto grado de dificultad para así tener un panorama más amplio acerca de los conocimientos y el razonamiento que llevan a cabo los estudiantes al resolver estos problemas.

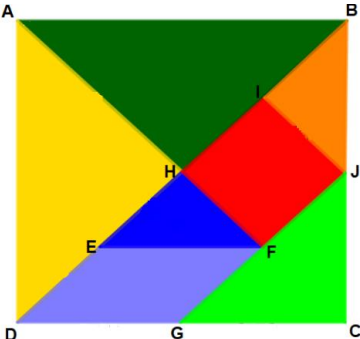
Estas problemas o actividades fueron aplicadas a los estudiantes casi al final del curso a manera de examen y posteriormente se les hizo una pequeña entrevista de manera individual con el fin de conocer la razón de algunas de sus respuestas y poder llevar a cabo un mejor análisis.

A continuación, se desglosan las actividades diseñadas, de acuerdo con el tipo de aprehensión al que corresponden.

#### ***Aprehensión perceptiva. Habilidad para nombrar figuras y reconocer subfiguras.***

Esta primera actividad examina la aprehensión perceptiva de los estudiantes y su capacidad para discriminar, reconocer y nombrar distintas sub-figuras a partir de una figura compleja.

**Actividad 1**



De acuerdo con la figura anterior, escribe el nombre de cada una de las figuras que se indican:

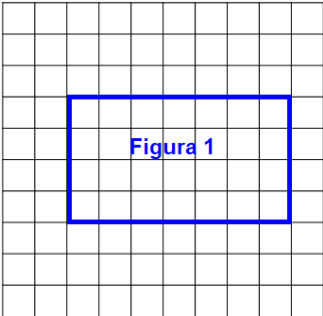
La figura ABCD es un:	La figura BIJ es un:
La figura ADH es un:	La figura ABD es un:
La figura ABH es un:	La figura BCD es un:
La figura DEFG es un:	La figura BJGD es un:
La figura EHF es un:	La figura BJFE es un:
La figura HIJF es un:	

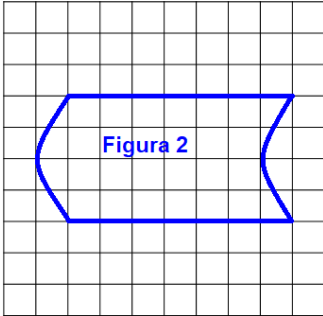
El objetivo de esta actividad es que los estudiantes hagan uso de la aprehensión perceptiva para reconocer las figuras geométricas que se les presentan, sin importar el lugar o la orientación en la que se encuentren. Se espera que los estudiantes logren seguir el orden de lectura de cada una de las figuras e identificar de qué figura se trata sin importar su posición, debería de ser una tarea relativamente sencilla para quienes identifican adecuadamente las propiedades de las figuras, se espera que como mínimo el cuadrado y los triángulos sean identificados correctamente; en el caso del paralelogramo, se piensa que no es una figura tan conocida sin embargo, resulta interesante saber cómo la visualizan los estudiantes para conocer más de ellos y tener elementos que enriquezcan aún más este trabajo.

***Aprehensión operativa. Tareas de reconfiguración***

Las siguientes actividades prueban la habilidad de los estudiantes para modificar una figura geométrica, ya que se les pide realizar una reconfiguración de la figura geométrica inicial en cada actividad, para poder darles solución.

**Actividad 2.1** Observa la figura 1 y la figura 2 y subraya la respuesta correcta

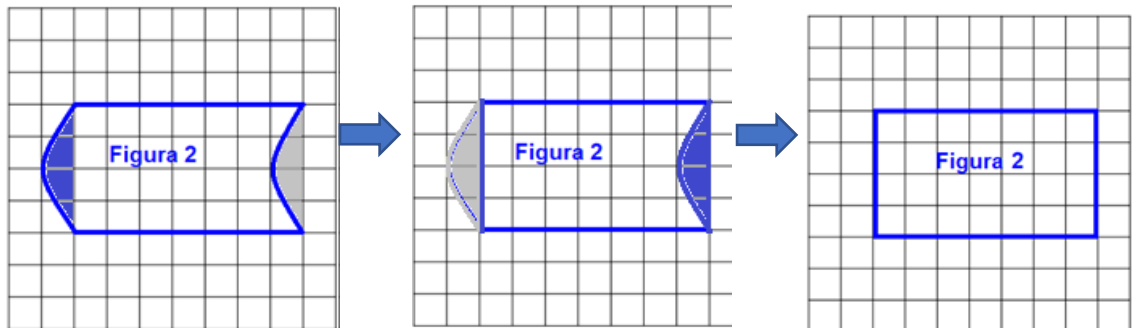




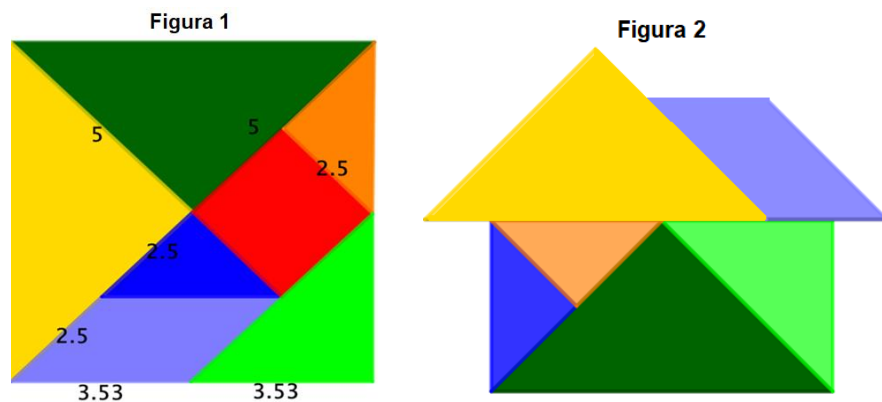
- a) La figura 1 tiene mayor área que la figura 2
- b) La figura 1 tiene la misma área que la figura 2
- c) La figura 1 tiene menos área que la figura 2

¿Cuál de las respuestas anteriores es cierta? ¿Por qué? Explica lo más que puedas.

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes lleven a cabo el proceso de visualización y utilicen la aprehensión operativa al agregar, eliminar o mover elementos para poder llegar a la respuesta correcta, por lo que se espera que sean capaces de identificar que la parte izquierda en la figura 2 (azul) es exactamente de la misma forma y tamaño que la parte a la derecha de la figura (gris), de tal manera que, al trasladar la parte izquierda para rellenar la parte de la derecha, se obtiene un rectángulo de iguales dimensiones y por lo tanto de igual área que la figura 1.



**Actividad 2.2** Observa detenidamente las siguientes figuras.



De acuerdo con la información proporcionada en la figura 1, contesta: ¿Cuál es el área de la figura 2? Justifica tu respuesta.

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes lleven a cabo el proceso de visualización y empleen la aprehensión operativa para reconocer que la casa contiene las mismas figuras que el cuadrado grande, con excepción del cuadrado pequeño, y que, apoyados del concepto de área elijan la solución más rápida, la cual sería obtener el área total del cuadrado de la Figura 1 y restarle el cuadrado rojo contenido en la misma figura, ya que el cuadrado rojo es la única figura que no está contenida en la casita de la Figura 2.

### ***Aprehensión discursiva. Tareas de producción de pruebas geométricas***

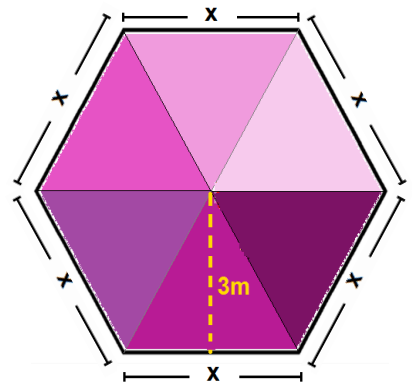
Esta actividad examina la aprehensión discursiva, además de la operativa.

#### ***Actividad 3***

Se le ha pedido a un diseñador de interiores que mande fabricar un tapete. El tapete debe estar conformado por 6 triángulos de altura  $3m$ , cada uno de un color distinto como se muestra en la siguiente imagen.

El área total que tiene que cubrir el tapete es de  $31.14m^2$ .

Ayúdale al diseñador a saber cuánto debe de medir cada uno de los lados del tapete, es decir, ¿cuánto debe de medir  $x$ ? Explica detalladamente los pasos a seguir para poder llegar al resultado.



El objetivo de esta actividad es que los estudiantes lleven a cabo el proceso de visualización y la aprehensión discursiva, de tal manera que logren relacionar las figuras propuestas con sus definiciones y atributos matemáticos, fórmulas, etc.

Que sea capaz de reconocer que el conjunto de triángulos en la manera en que se le presentan forma un hexágono o polígono regular de seis lados. Debe asociar el área que se le da como dato con el área del hexágono, así como la altura de cada triángulo con la apotema del hexágono y, por lo tanto, debe asociar toda esta información con la fórmula del área del hexágono, la cual involucra al perímetro de este y dado que se trata de un polígono regular, sólo es necesario dividir el perímetro entre el número de lados del hexágono para poder conocer la dimensión de cada uno de ellos. Cabe recalcar que para este ejercicio en particular también debe de utilizar la aprehensión operativa y tener cierto dominio en Álgebra para poder llevar a cabo las operaciones necesarias.

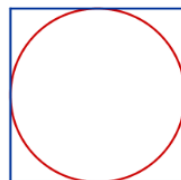
Por otro lado, si en lugar de utilizar la fórmula del área del hexágono utilizan la del triángulo es igualmente válido, en este caso se esperaría que dividan el área proporcionada entre 6 para obtener el área de cada triángulo, ' $x$ ' corresponde a la base de un triángulo y ya se tiene la altura y se conoce el área, por lo que, con ayuda de un poco de Álgebra deberían obtener el valor de  $x$ .

### ***Aprehensión secuencial. Tareas de construcción***

Esta actividad examina la aprehensión secuencial de los estudiantes, además de la operativa y la discursiva, ya que se sigue un orden de pasos y trazos a construir para poder llegar a la solución final del problema.

**Actividad 4.1** ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado circunscrito en una circunferencia de  $3.5\text{cm}$  de diámetro?

Dibuja el cuadrado circunscrito en la circunferencia de diámetro  $3.5\text{cm}$ . Calcula lo que se te pide y justifica tu respuesta con procedimiento y una explicación.



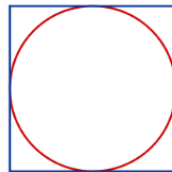
Nota: cuadrado circunscrito en una circunferencia

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes lleven a cabo el proceso de visualización y utilicen la aprehensión secuencial para ser capaces de construir las figuras que se les piden y relacionarlas con los datos proporcionados y fórmulas para realizar los cálculos necesarios, por lo que también son necesarias las aprehensiones discursiva y operativa, además de conocimientos en Álgebra.

Se espera que los estudiantes sean capaces de identificar el diámetro en la circunferencia y que el diámetro de esta es de igual dimensión a cada uno de los lados del cuadrado. Si reconocen que el cuadrado tiene cuatro lados exactamente iguales, deben obtener el perímetro multiplicando la dimensión de un lado por cuatro, sumando la dimensión cuatro veces o elevando la dimensión del lado al cuadrado, según recuerden o prefieran.

**Actividad 4.2** ¿Cuál es el área de un círculo inscrito en un cuadrado  $ABCD$ , que a su vez, este cuadrado se encuentra dentro de un rectángulo  $EFGH$ , de tal manera que el vértice  $A$  del cuadrado coincide con el centro del rectángulo y uno de los lados del cuadrado coincide con la base del rectángulo. Si la base del rectángulo mide  $10\text{cm}$  y su altura mide  $6\text{cm}$ ?

Dibuja cada una de las figuras que se mencionan en el párrafo anterior tal cual se describen, coloca la letra que corresponde a cada vértice de las figuras. Calcula lo que se te pide y justifica tu respuesta con procedimiento y una explicación.



Nota: círculo inscrito en un cuadrado

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes lleven a cabo el proceso de visualización y utilicen la aprehensión secuencial para ser capaces de construir las figuras que se les piden sin importar el orden de construcción y relacionarlas

con los datos proporcionados y fórmulas para realizar los cálculos necesarios, por lo que también son necesarias las aprehensiones discursiva y operativa, además de ciertos conocimientos en Álgebra.

Esta actividad es una de las más completas en cuestión del uso de las aprehensiones, pues el estudiante debe utilizar su percepción, sus conocimientos, debe realizar operaciones y sobre todo seguir una serie de pasos ordenadamente para poder obtener las figuras esperadas en cuanto a posición y dimensiones, y así, poder identificar la información necesaria, que en este caso sería la obtención del radio o diámetro de la circunferencia para poder determinar su área.

#### **4.4 Recogida de datos**

La información fue organizada en una hoja de Excel, se hizo una lista con los nombres de los 25 estudiantes participantes, se escribieron las conclusiones del resultado o datos a los que llegó cada uno y después se clasificó esa información con el fin de poder presentarla de manera clara y resumida: se agruparon los tipos de respuesta, procedimientos y/o justificaciones similares, además de tomar en cuenta la información recolectada de la entrevista, la cual fue clave para conocer mejor los procesos cognitivos que llevaron a cabo los estudiantes al resolver los problemas y así poder clasificar la información de manera más certera.



## Capítulo 5. Análisis de datos

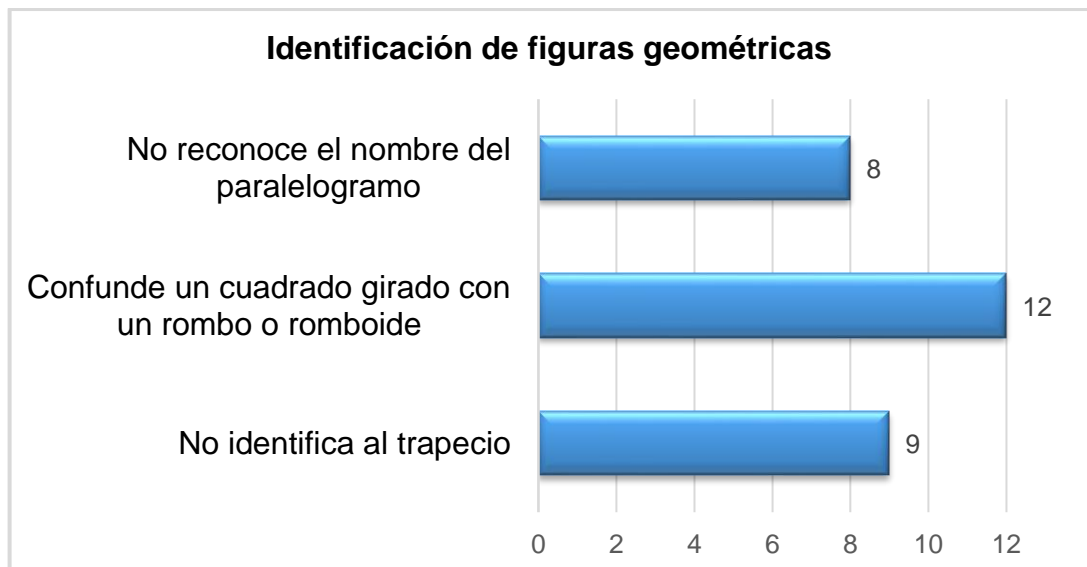
En este capítulo se presenta el análisis de la información recabada en la investigación mediante gráficas de barras, así como ejemplos de respuestas de algunos estudiantes que fueron asociados a las aprehensiones, los cuales sirven de evidencia para mostrar el razonamiento configural que desarrollaron los estudiantes, apoyar la información que se presenta y el análisis realizado a partir de ella.

### Actividad 1: Aprehensión perceptiva

Ninguno de los estudiantes tuvo problemas para distinguir los triángulos, pero varios sí los tuvieron a la hora de tratar de identificar al resto de las figuras (paralelogramo, cuadrado girado, trapecio) (ver Gráfica 1). De los 25 estudiantes, 8 no reconocen al paralelogramo, 12 confunden al cuadrado girado con un rombo o romboide y 9 no identifican al trapecio. La Figura 5 muestra las respuestas de estudiante 1 que comete los tres errores mencionados anteriormente.

#### Gráfica 1.

*Identificación de figuras geométricas por parte de los estudiantes.*



**Figura 5.**

*Respuestas de estudiante 1 a la actividad de aprehensión perceptiva.*

III. De acuerdo a la imagen anterior, escribe el nombre de cada una de las figuras que se indican en la columna de la derecha

1. La figura ABCD es un: Cuadrado ✓
2. La figura ADH es un: Triangulo ✓
3. La figura ABH es un: Triangulo ✓
4. La figura DEFG es un: Trapecio?
5. La figura EHF es un: Triangulo ✓
6. La figura HIJF es un: Romboide ✗
7. La figura JCG es un: Triangulo ✓
8. La figura BIJ es un: Triangulo ✓
9. La figura ABD es un: Triangulo ✓
10. La figura BCD es un: Triangulo ✓
11. La figura BJGD es un: No lo recuerdo
12. La figura BJFE es un: No lo recuerdo

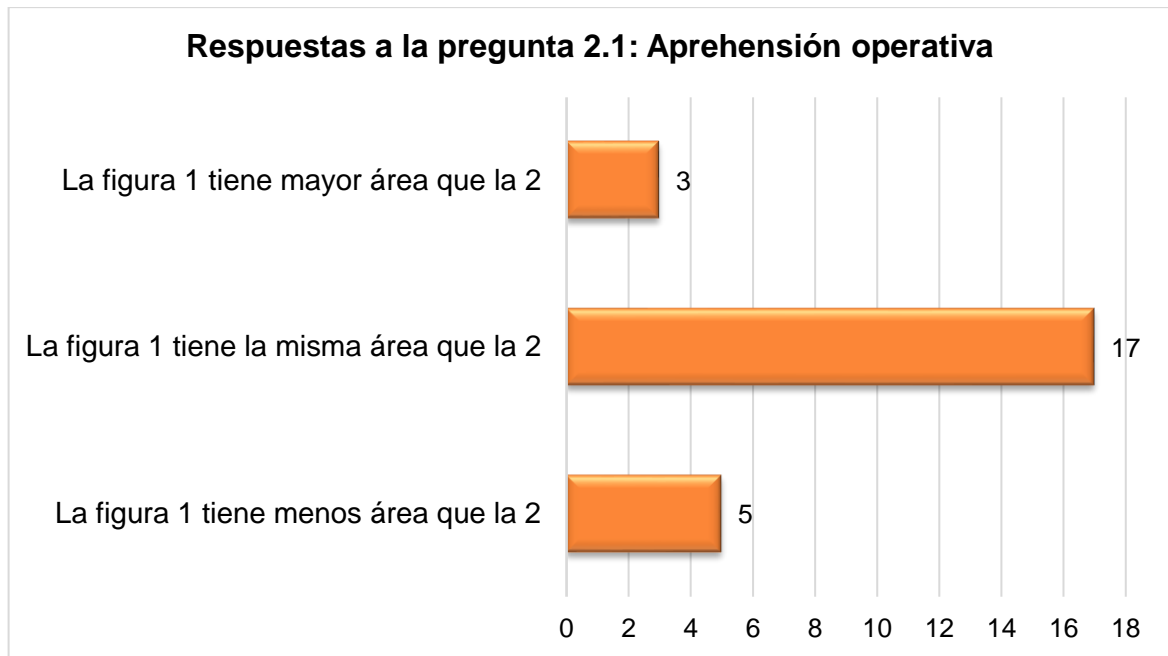
Los estudiantes no tienen problemas en identificar las figuras geométricas más conocidas (triángulo, rectángulo, cuadrado, círculo), en su presentación habitual. Todos identifican al cuadrado más grande, sin embargo, algunos tienen problemas para identificar al cuadrado pequeño, el cual se encuentra girado y lo confunden con un rombo. Con el triángulo no tienen problemas hasta que se les pregunta qué tipo de triángulo es, en este problema no era necesario especificarlo, sin embargo, algunos de los estudiantes sí lo hicieron, pero dieron respuestas incorrectas, ya que confunden las características de un tipo de triángulo con otro o simplemente no saben cuál es cuál. Se puede decir que estos estudiantes utilizan muy bien la aprehensión perceptiva cuando trabajan con figuras y la presentación de estas, bien conocidas.

### Actividad 2.1: Aprehensión operativa

En la Gráfica 2 se muestra el número de estudiantes que contestó cada una de las tres opciones de respuesta para esta pregunta.

#### Gráfica 2.


*Respuestas de los estudiantes al resolver el primer problema en relación con su aprehensión operativa.*



En la Gráfica 2 se observa que 17 de los 25 estudiantes contestaron correctamente la pregunta 2.1 con relación a la aprehensión operativa, pero sólo 8 de ellos justificaron su respuesta. En la Tabla 2 se observa la contestación escrita de 3 de los 8 estudiantes que justificaron el porqué de su respuesta, así como la contestación verbal de otro estudiante durante la entrevista. Las justificaciones que dan los diferentes estudiantes son descritas con frases distintas pero todas correctas, que es lo que se esperaba en esta actividad.

## Tabla 2.

Contestación de algunos estudiantes como justificación a su respuesta en la actividad 2.1.

<b>Justificaciones sobre la aprehensión operativa respecto a la actividad 2.1</b>	
<p>Estudiante 1: <i>“Lo que falta en la izquierda lo completa lo de la derecha”.</i></p> <p>Estudiante 5: <i>“La parte sombreada 1 se pasa a donde está el 2 porque la pieza encaja y entonces tenemos un rectángulo congruente al de la figura 1”.</i></p> <p>Estudiante 13: <i>“Porque, aunque tiene 2 lados irregulares la figura 2, porque de este lado que le hacen falta cuadros se compensa con el otro lado y se obtiene misma área”.</i></p>	 <p><b>Figura 6.</b> Interpretación de estudiante 5 a problema de aprehensión operativa.</p>
<p>Se le preguntó a estudiante 2 quien no justificó su respuesta en el examen escrito, pero seleccionó la opción correcta el porqué de su respuesta y contestó:</p>	
<p>Estudiante 2: <i>“Me imaginé que era como un alambre y entonces lo jalo hacia acá de ambos lados para enderezarlo y se forma un rectángulo igual al de la figura 1”.</i></p>	

## Actividad 2.2: Aprehensión operativa

Únicamente hubo dos resultados correctos: uno por el método corto, el cual era el que se esperaba que siguieran todos ya que el estudiante obtiene el área del cuadrado grande y el área del cuadrado pequeño y a la primera le resta la segunda

para obtener el área de la casa (ver Figura 7); el otro resultado correcto lo realizó el estudiante por el método largo (ver Figura 8).

### Figura 7.

*Respuesta de estudiante 5 al resolver el segundo problema en relación con su comprensión operativa por el método corto.*

¿Cuál es el área de la figura 2?  
= 43.5936

$3.53 + 3.53 = 7.06$   
 $A = 7.06 \times 7.06 = 49.8436$   
 $49.8436 - 6.25 = 43.5936$

Ad.  $2.5 \times 2.5 = 6.25$

→ Nos dan los datos de la figura 1 y nos piden el área de la figura 2 y ambas casi tienen las mismas figuras solo en la 2 le falta el cuadrado, entonces sacamos el área de la figura 1 sumamos  $3.53 + 3.53 = 7.06$  que nos da un lado después lo multiplicamos por si mismo Ahora sacamos el cuadrado pequeño y al resultado de la figura 1 le restamos el área del cuadrado pequeño y nos dara el área de la figura 2.

La mayoría de los estudiantes intentaron obtener el área de la casa por el camino más largo, es decir, al tratar de calcular el área de cada una de las figuras que la conforman por separado, para después sumarlas.

En la Figura 8 se observa el procedimiento seguido por un estudiante mediante el método largo: este estudiante identificó las figuras individuales contenidas en el cuadrado más grande, sin embargo, no visualizó que el área ocupada por ese cuadrado es exactamente la misma que el área de la suma de cada figura y de esa forma poder obtener el área de la casa más fácilmente. También se observa que la aproximación de la altura del triángulo que estudiante 1 identificó con el número 3 y tanto de la base como de la altura del triángulo que identificó con el número 6 son incorrectas.

**Figura 8.**

Respuesta de estudiante 1 al resolver el segundo problema en relación con su comprensión operativa por el método largo.

VI. Observa detenidamente las siguientes figuras. De acuerdo con la información proporcionada en la figura 1, contesta: ¿Cuál es el área de la figura 2? Justifica tu respuesta con procedimiento y una explicación. 41.75

Primera obtuve el área de las 6 figuras que tiene y lo sume.

VI=

$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_1 = \frac{7.06 \cdot 3.53}{2} = \frac{24.92}{2} = 12.46$$

$A_2 =$  Lo mismo  $= 12.46$

$$A_3 = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_3 = \frac{3.53 \cdot 2.35}{2} = \frac{8.29}{2} = 4.14$$

$$A_4 = \frac{2.35 \cdot 1.76}{2} = \frac{4.136}{2} = 2.06$$

$A_5 = b \cdot h$

$$A_5 = 3.53 \cdot 1.76 = 6.23$$

$$A_6 = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_6 = \frac{3.53 \cdot 2.49}{2} = \frac{8.81}{2}$$

$$A_6 = 4.40$$

Área total = 41.75

$$\begin{array}{r} 12.46 \\ 12.46 \\ + 4.14 \\ + 2.06 \\ + 4.40 \\ \hline 41.75 \end{array}$$

Dos estudiantes realizaron una subconfiguración de la figura de la casa, dividiéndola en tres figuras básicas, pero no obtuvieron correctamente algunas dimensiones. Un estudiante realizó correctamente su procedimiento y sustitución de valores, pero falló al realizar operaciones básicas. Cuatro estudiantes realizaron el procedimiento correcto, pero aproximaron la altura de manera visual. Nueve estudiantes utilizaron adecuadamente las fórmulas para la obtención de área de las figuras, sin embargo, utilizaron únicamente las medidas proporcionadas en el problema, es decir, tomaron uno de los lados de cada triángulo como la altura de estos. Un alumno hizo uso de las fórmulas de obtención de área de cada figura correctamente, pero no supo determinar la altura de los triángulos y decidió omitir ese valor, así que sólo dividió la base entre 2. Dos estudiantes tuvieron idea de cómo resolver el problema, pero aproximaron las dimensiones de las figuras visualmente, no utilizan ninguno de los valores que se les proporcionaron. Tres estudiantes confunden al área con el perímetro e intentan sumar los lados de algunas figuras, aunque se hubiese pedido el perímetro de la figura, sus resultados son incorrectos. Sólo un estudiante no intentó resolver el problema (ver Gráfica 3).

De acuerdo con los resultados de los dos problemas propuestos en relación con la aprehensión operativa que utilizan los estudiantes, se puede observar que la mayoría utiliza correctamente este tipo de aprehensión en actividades sencillas y de manera individual, pero tienen problemas a la hora de hacer sub-configuraciones de varias figuras al mismo tiempo, además de no tener claro el concepto de área, lo cual es vital para poder responder correctamente a los problemas propuestos.

En la Gráfica 3 se muestra la clasificación que se dio a las diversas formas en las que los estudiantes trataron de resolver el problema.

### Gráfica 3.

Respuestas de los estudiantes al resolver el segundo problema en relación con su *aprehensión operativa*.



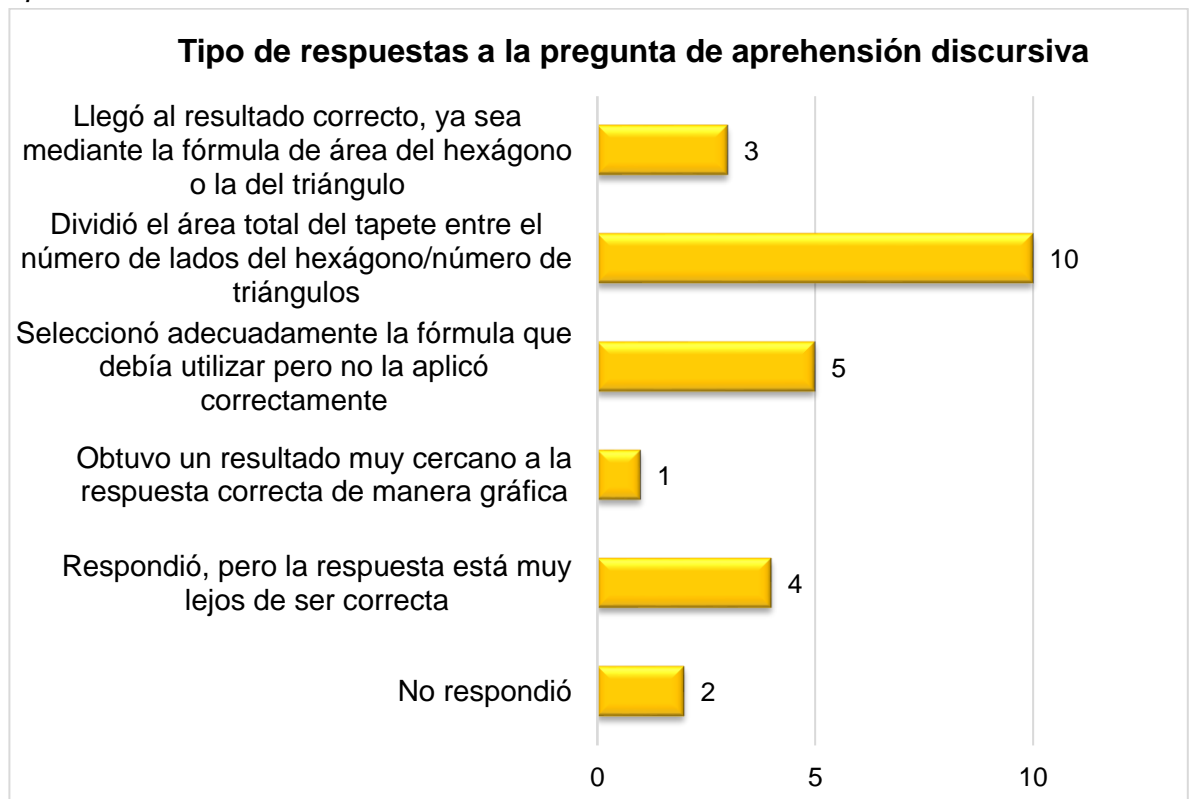


### Actividad 3: Aprehensión discursiva

La Gráfica 4 muestra el tipo de respuestas que se dieron en esta actividad. De los 25 estudiantes evaluados, únicamente tres contestaron correctamente. Diez estudiantes confundieron al perímetro con el área y se limitaron a dividir el área total del hexágono como si se tratara del perímetro, entre el número de lados de este, para obtener la dimensión de cada lado. Cinco estudiantes seleccionaron la fórmula correcta a utilizar, ya sea la del área del hexágono o la del triángulo, pero tuvieron dificultades para concluir el ejercicio ya que no supieron despejar adecuadamente. Un estudiante obtuvo un resultado cercano al correcto mediante el método gráfico, partiendo de las dimensiones proporcionadas dibujó la figura y midió cada uno de los lados. Cuatro estudiantes respondieron la actividad, pero su procedimiento fue totalmente incorrecto. Por último, dos estudiantes no contestaron el ejercicio.

#### Gráfica 4.

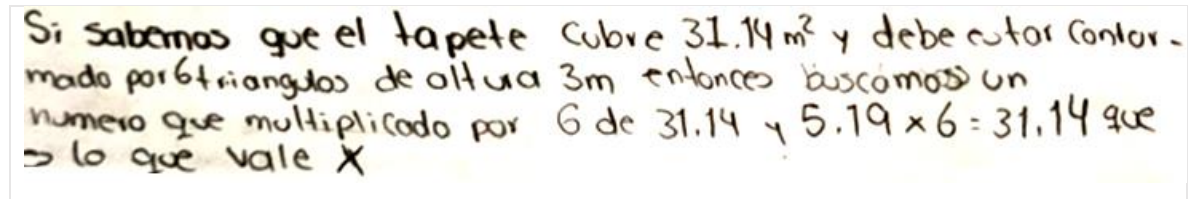
*Tipos de respuestas de los estudiantes al resolver el problema en relación con su aprehensión discursiva.*



La Figura 9 muestra la respuesta de estudiante 3 en esta actividad: dividió el área total entre el número de triángulos que conforman al hexágono.

**Figura 9.**

*Respuesta de estudiante 3 al resolver el segundo problema en relación con su aprehensión operativa.*



Si sabemos que el tapete cubre  $31.14 \text{ m}^2$  y debe estar conformado por 6 triángulos de altura 3m entonces buscamos un número que multiplicado por 6 de  $31.14$  y  $5.19 \times 6 = 31.14$  que es lo que vale X

En entrevista se le preguntó lo siguiente:

-Investigador: “¿Por qué dividiste el área total entre seis?”  
-Estudiante 3: No responde  
-Investigador: “Señala en la figura lo que representa  $31.14$  metros cuadrados”  
-Estudiante 3: Señala el contorno del hexágono  
-Investigador: “¿Pensaste que lo que se te estaba dando era el perímetro”  
-Estudiante 3: “Sí”

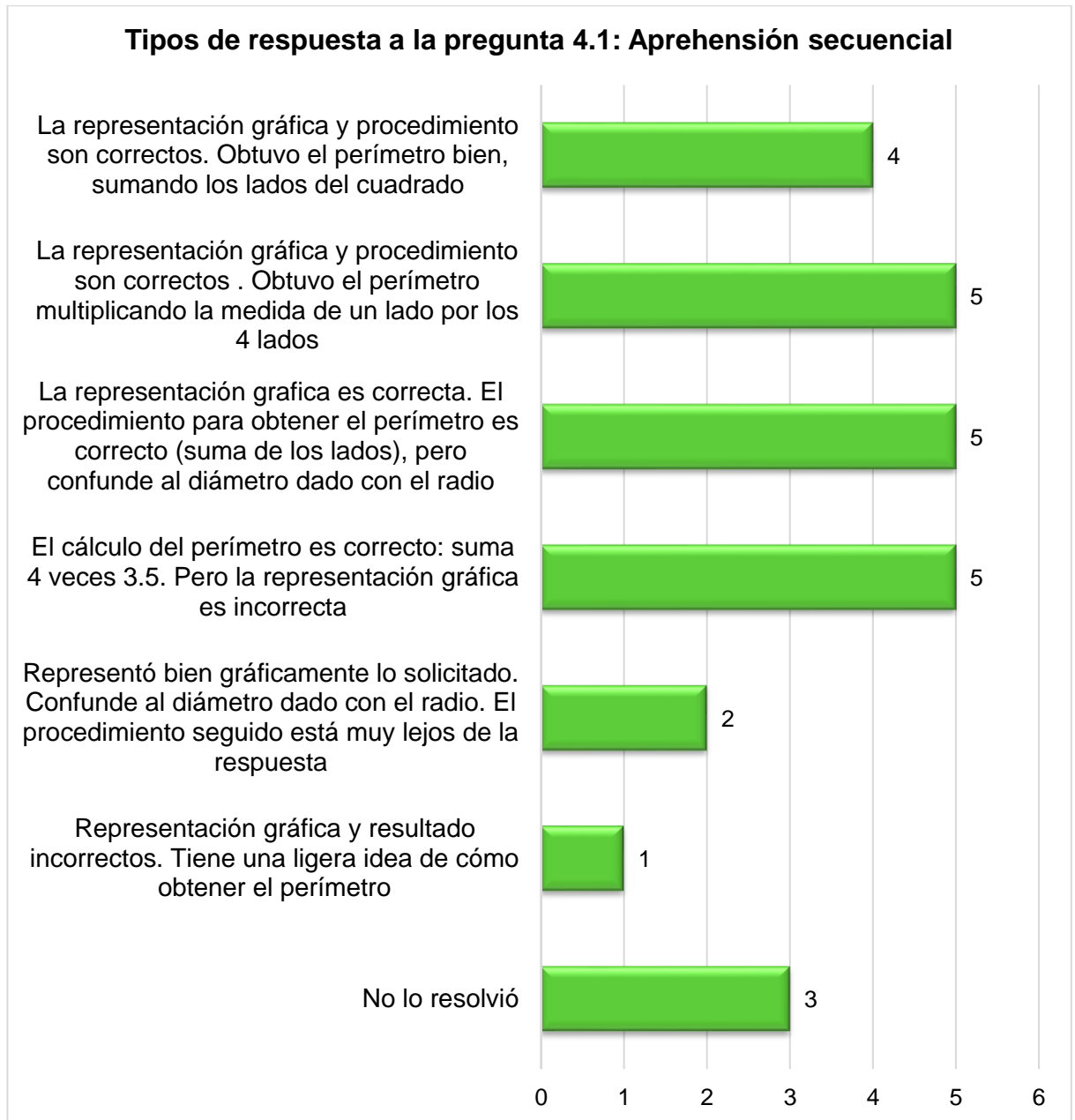
De acuerdo con los resultados, este problema es en el que más dificultades tuvieron los estudiantes. La mayoría realizó un procedimiento incorrecto, varios de los estudiantes únicamente dividieron el área que se les dio entre el número de lados del hexágono, al preguntarles el por qué lo habían realizado así, respondieron que creyeron que lo que se les estaba dando era el perímetro del hexágono y sólo era cuestión de dividir entre el número sus lados para obtener lo que se pedía; otros dijeron que no entendieron lo que se tenía que hacer. Por lo que se puede ver que la mayoría de los estudiantes no cuenta con la habilidad de relacionar las figuras con declaraciones, definiciones y atributos matemáticos que no pueden determinarse únicamente mediante la aprehensión perceptiva.

### Actividad 4.1: Aprehensión secuencial

En la Gráfica 5 se puede observar que 9 de los 25 estudiantes, responde correctamente al problema.

#### Gráfica 5.

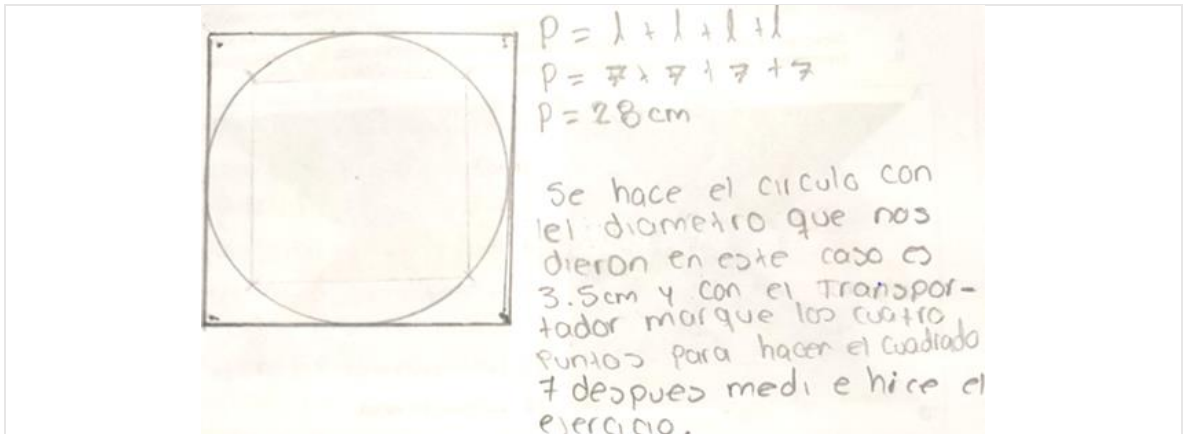
*Tipos de respuestas de los estudiantes al resolver el primer problema en relación con su aprehensión secuencial.*



Cinco estudiantes realizan tanto la representación gráfica como el procedimiento correctamente, pero confunden al radio con el diámetro (ver Figura 10).

**Figura 10.**

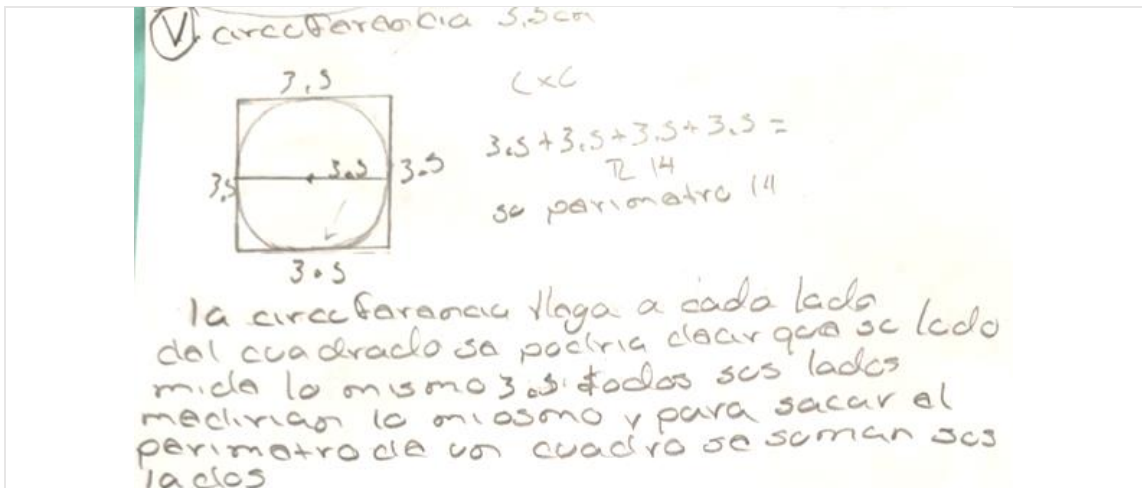
*Procedimiento de estudiante 4, en el cual confunde al diámetro con el radio.*



Cinco estudiantes más calculan el perímetro correctamente, pero su representación gráfica es incorrecta. De los 19 estudiantes descritos en las líneas anteriores, 14 utilizan el procedimiento más largo (ver Figura 11) para la obtención del perímetro, es decir, suman los lados del cuadrado.

**Figura 11.**

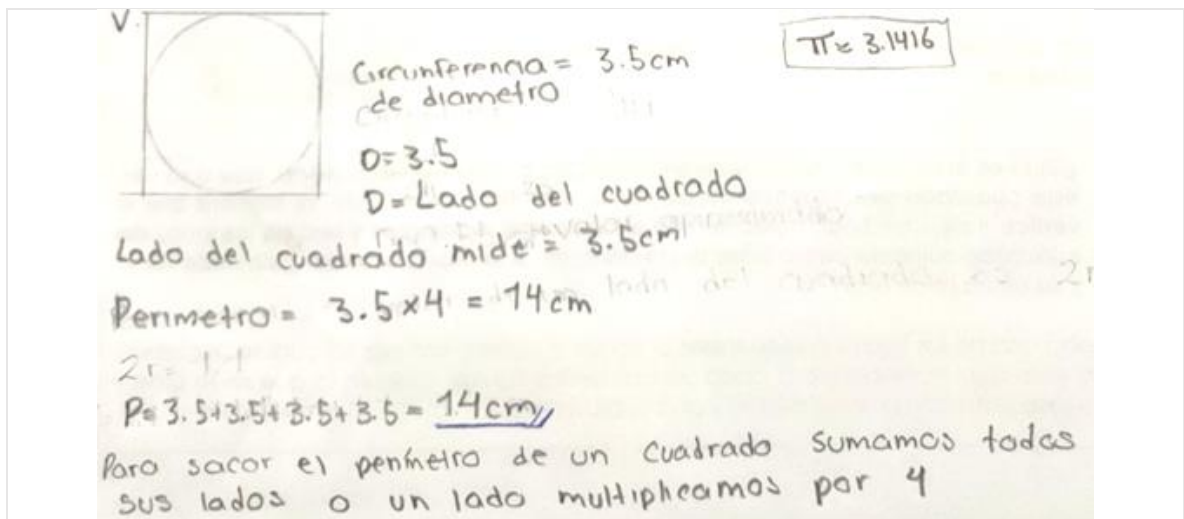
*Procedimiento largo de estudiante 8 al resolver problema de aprehensión secuencial.*



Mientras que los otros cinco estudiantes obtienen el perímetro al multiplicar lado por lado (ver Figura 12).

### Figura 12.

*Procedimiento corto de problema de aprehensión secuencial resuelto por estudiante 5.*



Hay dos estudiantes más que representan apropiadamente lo que se les pide de manera gráfica; sin embargo, sus cálculos se encuentran muy lejos de la respuesta. Un estudiante tiene una ligera idea de cómo obtener el perímetro, pero no logra hacerlo y su representación gráfica no es correcta. Por último, tres estudiantes no resuelven el problema.

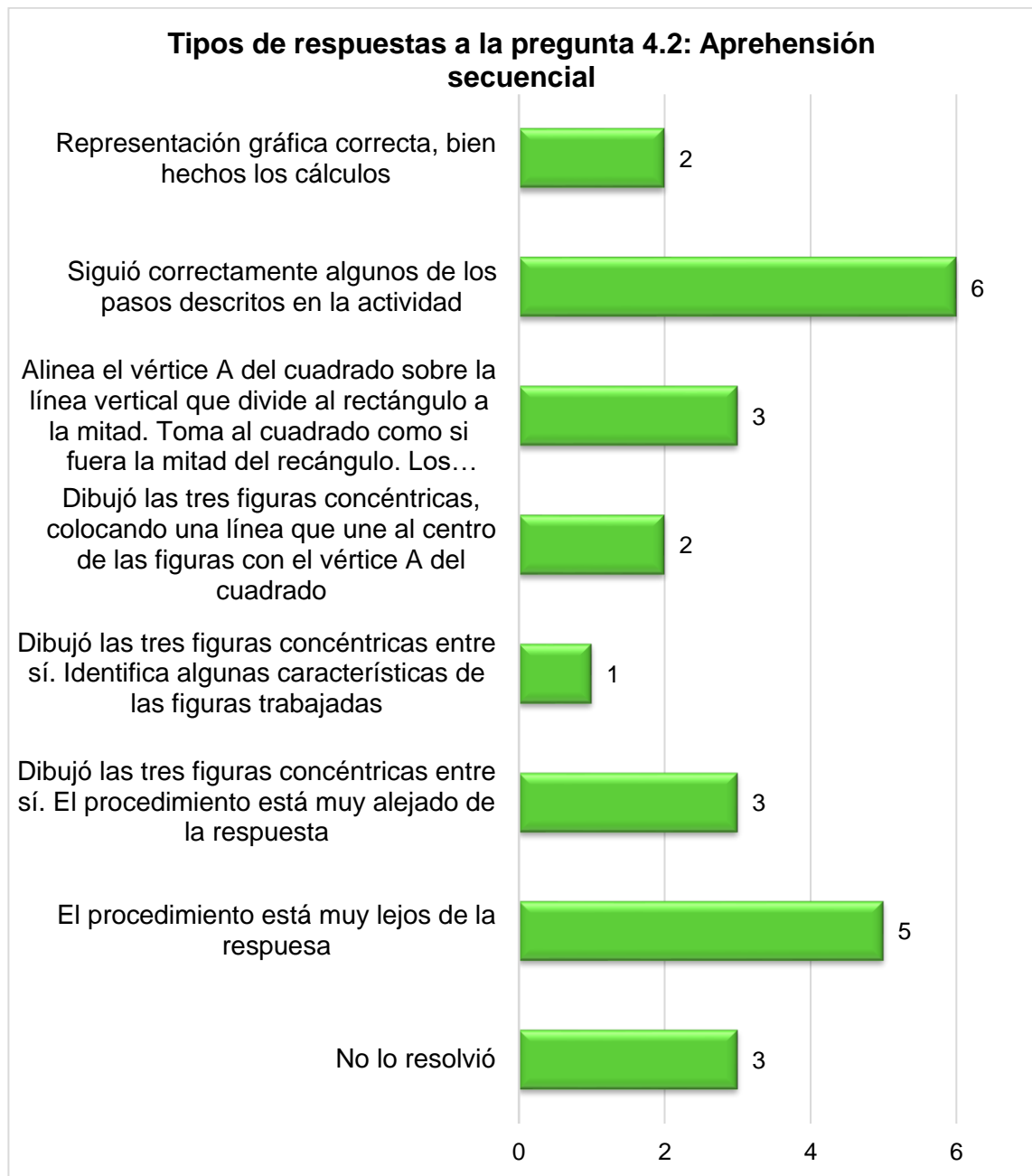
### Actividad 4.2: Aprehensión secuencial

Únicamente dos estudiantes contestaron correctamente a este problema. Seis estudiantes siguieron correctamente algunos de los pasos descritos en el problema. Tres estudiantes alinearon al vértice A con la línea que parte al rectángulo a la mitad verticalmente, tomaron al cuadrado como si fuese la mitad del rectángulo y sus cálculos se alejan mucho de la respuesta correcta. Seis estudiantes dibujaron las tres figuras que se piden, concéntricas entre sí; dos de ellos colocaron una línea que va del centro de las figuras al vértice A del cuadrado; esos mismos dos estudiantes y otro más, identifican algunas características de las figuras trabajadas,

pero el procedimiento de los otros tres se encuentra muy alejado de la respuesta. Los procedimientos realizados por otros cinco estudiantes también se encuentran muy alejados de la respuesta. Mientras que tres estudiantes ni siquiera lo intentaron resolver (ver Gráfica 6).

**Gráfica 6.**

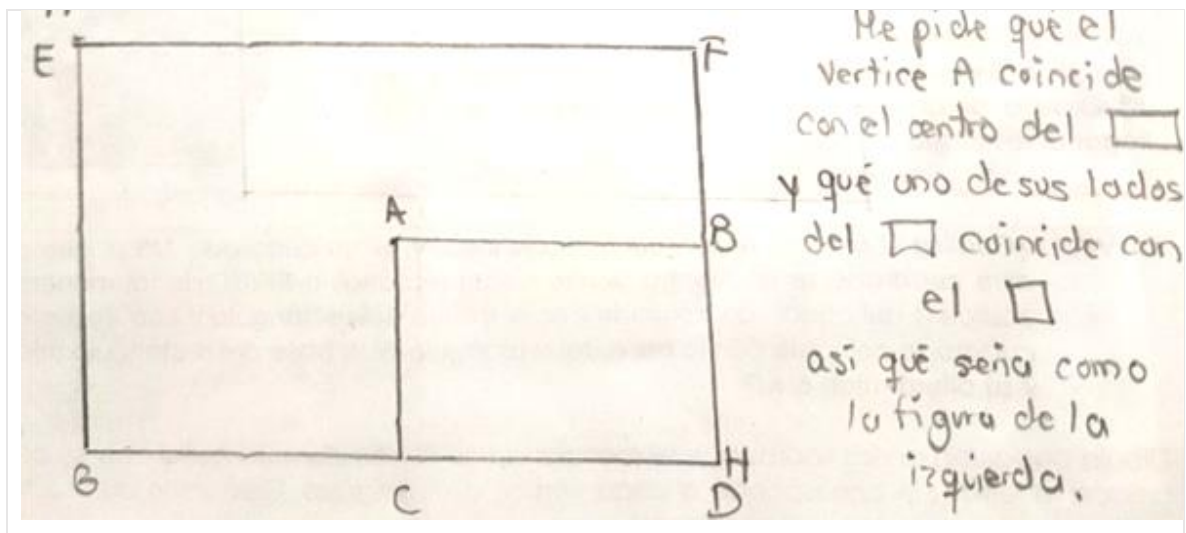
*Tipos de respuestas al resolver el segundo problema de aprehensión secuencial.*



En la Figura 13 se observa que estudiante 2, pudo seguir algunos de los pasos del problema correctamente; sin embargo, no realizó ni un solo cálculo de lo que se solicitaba.

**Figura 13.**

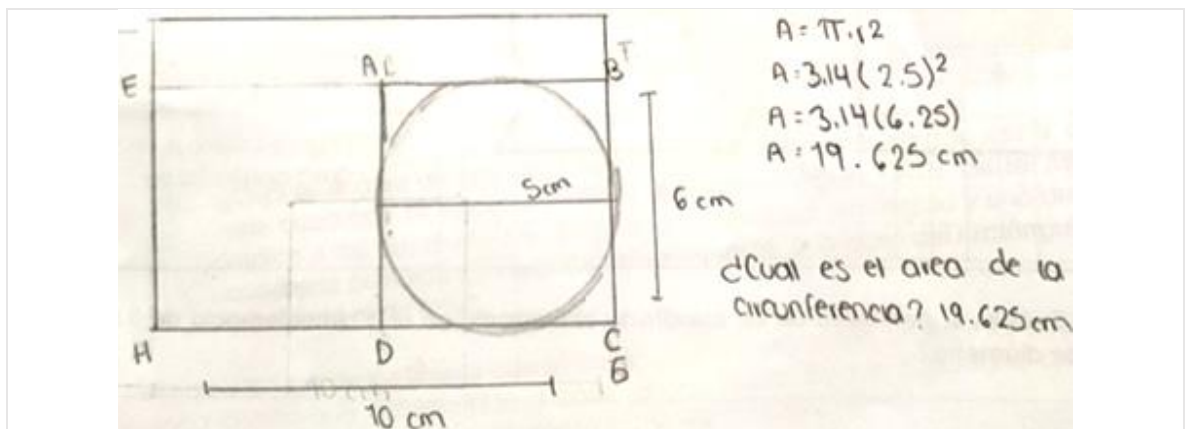
*Procedimiento de estudiante 2 a la segunda pregunta en relación con la aprehensión secuencial.*



En la Figura 14 y Figura 15 se observa que tanto estudiante 8 como estudiante 24 respectivamente, alinean el vértice "A" con la mitad del rectángulo.

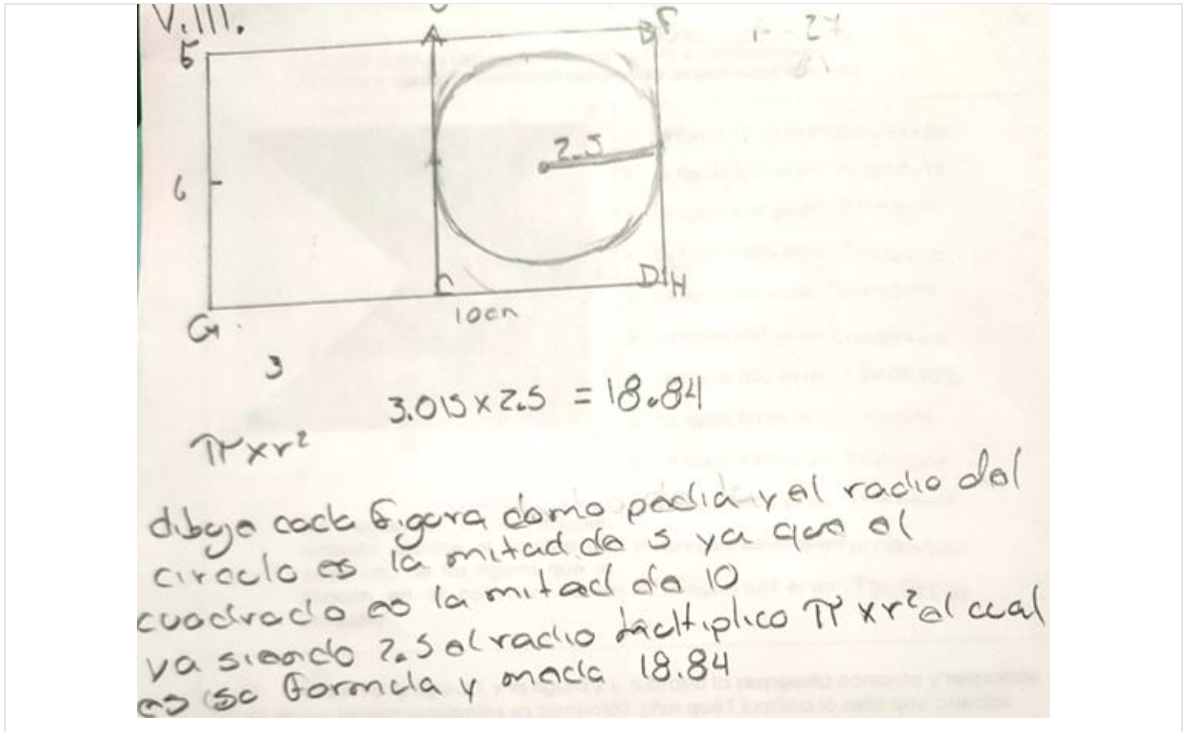
**Figura 14.**

*Procedimiento de estudiante 24 a la segunda pregunta en relación con la aprehensión secuencial.*



**Figura 15.**

*Procedimiento de estudiante 8 a la segunda pregunta en relación con la aprehensión secuencial.*



Para conocer la razón por la cual lo realizaron de esa forma, en entrevista se le preguntó a estudiante 8:

- Investigador: “¿Por qué dibujaste así el cuadrado, en esa posición?”
- Estudiante 8: “Porque así lo pedía, dice que el vértice A coincide con el centro del rectángulo y uno de sus lados con la base
- Investigador: “¿Cuál es el centro del rectángulo?”
- Estudiante 8: “Este” Señala la línea vertical que divide al rectángulo en dos partes iguales

En el primer problema propuesto para determinar la aprehensión secuencial, la mayoría de los estudiantes realizó la representación gráfica correctamente; sin embargo, la mayoría falló en la realización de los cálculos, incluso algunos utilizaron el diámetro dado de la circunferencia en lugar del radio; al preguntarles por qué

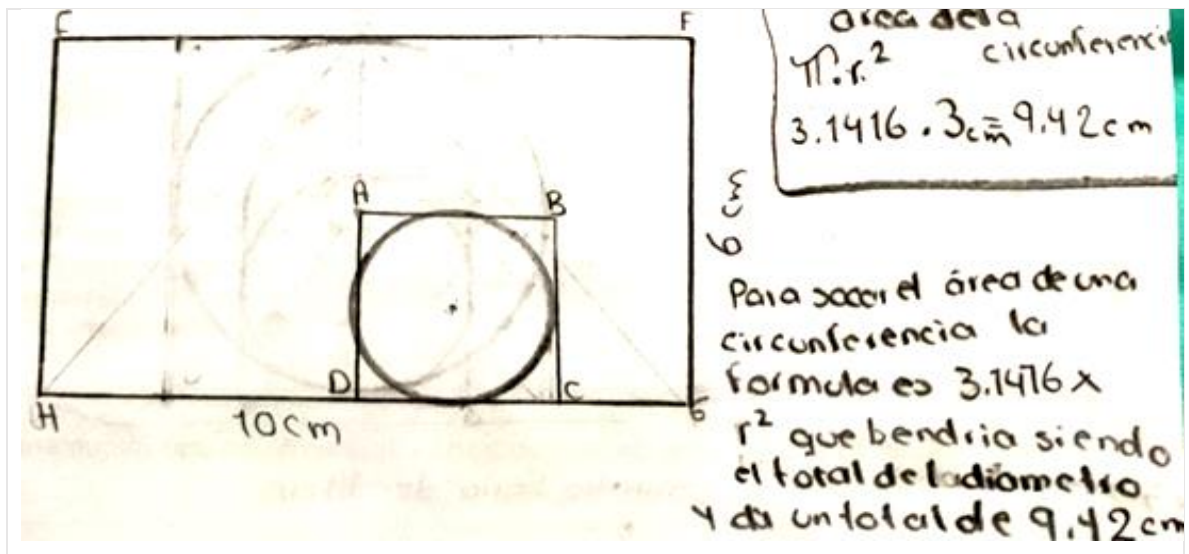


habían utilizado el diámetro y no el radio contestaron que se confundieron y pensaban que el diámetro era la mitad de la circunferencia, cabe mencionar que el primer ejercicio era el más sencillo de representar gráficamente.

El segundo problema propuesto tuvo un grado de dificultad mucho mayor al primero y la mayoría de los estudiantes no logró resolverlo; sin embargo, sí intentaron representar gráficamente lo que se pedía, aunque al final, sólo 2 lo resolvieron correctamente y otros 6 siguieron adecuadamente algunos de los pasos de la secuencia. La mayoría de los estudiantes no realizó bien los cálculos o simplemente no los realizó. Un estudiante que resolvió correctamente el problema, antes de devolver su examen, preguntó a la profesora a qué se refería el texto “el vértice A del cuadrado coincide con el centro del rectángulo” y regresó a su lugar a corregirlo (Figura 16). Al comparar las evaluaciones de los estudiantes, se puede observar que hubo distintas interpretaciones a dicho texto; algunos unieron el centro con el vértice A del cuadrado mediante una línea; otros, hicieron coincidir uno de los lados del cuadrado con la mitad del rectángulo, pero no con su centro; mientras que otros no supieron qué hacer.

**Figura 16.**

*Procedimiento de estudiante 3 a la segunda pregunta en relación con la aprehensión secuencial.*



## Capítulo 6. Comentarios finales y conclusiones

Primeramente, me gustaría hacer una comparativa de este trabajo en relación con las investigaciones descritas en la sección de antecedentes (ver Tabla 3). La idea es poder ver la información de manera sintetizada, con la intención de ver las similitudes y diferencias entre los diferentes estudios que se han llevado a cabo a lo largo de los últimos años en relación con el razonamiento configural, así como de la visualización en el área de Geometría.

En la tabla se puede observar que algunos autores participan en más de uno de los tres primeros estudios, hasta el momento no existen muchos autores que hayan desarrollado estos temas y si observamos, quienes lo han hecho se han enfocado en identificar, analizar, describir, pero hace falta el siguiente paso, que desde mi perspectiva es proponer materiales que ayuden a mejorar el razonamiento configural de los estudiantes (lo cual aplica también para este trabajo). Lo ideal para este trabajo en particular, es que se le pueda dar continuidad principalmente con los estudiantes más vulnerables académicamente hablando. Se puede ver que los tres primeros estudios trabajan con las aprehensiones operativa y discursiva, además de la perceptiva, la cual toman como implícita; a diferencia del presente estudio en el que se trabaja además con la aprehensión secuencial y considero que es igual de importante que el resto y el uso de las cuatro aprehensiones en los ejercicios y problemas que se propongan, puede contribuir positivamente al razonamiento configural y proceso de visualización de los estudiantes.

**Tabla 3.**

*Comparativa del presente estudio con estudios anteriores similares.*

Nombre del trabajo	Autores	Muestra	Aprehensiones utilizadas	Objetivo del trabajo
1. Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. (Año 2010)	*Germán Torregrosa *Humberto Quesada *María del Carmen Penalva	55 profesores en formación	Discursiva Operativa	Identificar en las respuestas de los alumnos, a partir de los análisis realizados a la luz del modelo "razonamiento configural", las posibles causas que expliquen la

				ausencia o interrupción de la coordinación de procesos.
<b>2.</b> Razonamiento configural y desarrollo del discurso en la resolución de problemas empíricos en contexto geométrico. (Año 2017)	*Antonio Saorín *Germán Torregrosa *Humberto Quesada	33 alumnos de 1° de Bachillerato	Perceptiva Operativa Discursiva	Identificar relaciones entre los procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas geométricos, desde la perspectiva del razonamiento configural, y el modo como los estudiantes desarrollan sus discursos para comunicar la solución.
<b>3.</b> Visualización y Razonamiento Configural. (Año 2017)	*Francisco Clemente *Salvador Llinares *Torregrosa	182 alumnos para maestro	Discursiva Operativa	Que los estudiantes reconozcan propiedades geométricas mediante aprehensiones discursivas y operativas.
<b>4.</b> Razonamiento configural de alumnos de Bachillerato al resolver problemas geométricos en la modalidad a distancia. (Año 2022)	*Leticia Rodríguez *Víctor Larios	25 alumnos de 2° de Bachillerato	Perceptiva Operativa Discursiva Secuencial	Determinar el razonamiento configural que llevan a cabo los alumnos en modalidad a distancia a la hora de solucionar problemas geométricos.

En el primer estudio descrito en la tabla, el cual corresponde a Torregrosa y sus colegas (2010), los resultados demuestran la importancia de identificar las figuras prototípicas desde la configuración inicial, para de esa forma poder activar determinados conocimientos de Geometría, los cuales favorecen al anclaje visual y discursivo a la hora de resolver los problemas. Estos resultados recalcan la importancia de la relación entre la visualización y el conocimiento geométrico en el desarrollo del razonamiento configural durante la solución de problemas” Torregrosa y sus colegas (2010).

En el estudio de Saorín y sus colegas (2019), los resultados muestran de igual manera, la influencia de la configuración inicial en el desenlace del razonamiento configural, además de poner de manifiesto que el truncamiento del razonamiento

configural se produce cuando se establecen las relaciones en registro algebraico, necesarias y suficientes para dar solución al problema, pues es el momento en el que el alumno sabe cómo resolverlo. De hecho, Saorín y sus colegas (2017) aseguran que el análisis de problemas empíricos bajo el marco del razonamiento configural permite identificar el momento en el que el estudiante es consciente de que sabe cómo resolver el problema, ese es el momento en el que se da el truncamiento del razonamiento configural, lo cual se hace evidente cuando los estudiantes dejan de realizar la conversión entre registros (geométrico-algebraico) y la coordinación entre aprehensiones que permiten conformar las relaciones que dan la solución al problema (truncamiento).

En el estudio de Clemente y sus colegas (2017), los resultados que se obtuvieron muestran la importancia que tienen las figuras iniciales que acompañan a los problemas, así como las modificaciones posteriores a esas mismas figuras en el desarrollo de las aprehensiones operativa y discursiva, las cuales constituyen a su vez el vínculo entre los procesos de razonamiento y visualización al resolver problemas geométricos.

En el actual estudio queda comprobada la influencia que tienen las figuras iniciales que acompañan a cada uno de los problemas en el desarrollo de cada una de las aprehensiones, así como los conocimientos que muestran los estudiantes en Geometría y materias de apoyo como lo es Álgebra, los cuales son imprescindibles en el proceso de visualización y que a su vez favorecen el razonamiento configural. En los párrafos siguientes se hace un análisis más detallado, con la finalidad de evidenciar lo mencionado anteriormente.

En los resultados del presente estudio se puede apreciar que el tipo de aprehensión que más se les dificulta a los estudiantes es la discursiva, seguida de la secuencial y operativa, aunque también dependiendo del grado de dificultad de cada problema y por supuesto, los conocimientos con los que cuentan los estudiantes al momento de tratar de solucionar los problemas; por ejemplo, en la Actividad 2.1 se les

presentan dos figuras con el fin de que hagan uso de su aprehensión operativa y realicen una reconfiguración de las figuras para determinar si la primera figura tiene igual, mayor o menor área que la segunda, 17 de los 25 estudiantes contestaron correctamente, lo cual pareciera ser un buen número. Sin embargo, en la Actividad 2.2 el grado de dificultad incrementa, ya que los estudiantes deben nuevamente hacer uso de su aprehensión operativa y realizar una reconfiguración para obtener el área de la figura en forma de casa, la cual está conformada por un conjunto de figuras más simples, que a su vez también forman parte del conjunto de figuras contenidas en el cuadrado, figura en la que se encuentra la información necesaria para llegar al resultado; sin embargo, sólo dos estudiantes llegan al resultado correcto y sólo uno de estos lo hace mediante el método esperado. Aquí nos podemos dar cuenta de que los estudiantes tienen problemas principalmente cuando se trata de figuras con una configuración compleja, las cuales es necesario descomponer en figuras más simples y conocidas para su tratamiento, es decir, visualizar sub-configuraciones a partir de la figura compleja. También presentan dificultades para hacer reconfiguraciones a partir de una configuración inicial dada; para llegar al resultado correcto primeramente los estudiantes debían tener más que claro el concepto de área y después, ser capaces de manipular las partes de la configuración de las figuras (como un rompecabezas), tal como lo describe Duval (1994) en la definición que le da al concepto de aprehensión operativa.

En la aprehensión perceptiva no tienen mayores dificultades, al parecer la mayoría cuenta con los conocimientos previos necesarios para poder desarrollar las actividades que se les presentan en este trabajo; el problema es cuando se les presentan figuras poco utilizadas o en un acomodo distinto al que están acostumbrados, como fue el caso del cuadrado girado, los trapecios y el paralelogramo, lo cual demuestra que la enseñanza que recibieron previamente en Geometría estuvo basada en presentar figuras típicas, dejando de lado que las figuras geométricas presentaran rigidez.

Para determinar la aprehensión secuencial de los estudiantes también se les plantearon dos problemas de distinto grado de dificultad, en el primero (ver en página 30) se les pregunta el perímetro de un cuadrado circunscrito en una circunferencia con determinado radio, cabe mencionar que se les dibujó cómo es un cuadrado circunscrito en una circunferencia, 14 de los 25 estudiantes calcularon correctamente el perímetro, aunque 5 de esos 14 realizaron una mala representación gráfica, a pesar de haberseles proporcionado esa información, otros 5 más realizaron todo correctamente, pero fallaron al confundir el radio con el diámetro, únicamente 6 estudiantes no tuvieron mucha idea de qué hacer. El segundo problema para evaluar la aprehensión secuencial subió el nivel de dificultad, en este se les pedía dibujar un círculo inscrito (se les proporcionó esa información), dentro de un cuadrado, que a su vez debería estar contenido en un rectángulo con ciertas características y dimensiones (ver en página 31); desafortunadamente sólo 2 de los 25 estudiantes llegaron al resultado correcto, otros 6 estudiantes siguieron correctamente algunos de los pasos pero de ahí en fuera la gran mayoría no supieron cómo resolverlo y se observó que se angustiaron al ver la cantidad de instrucciones para un solo problema, a pesar de que se les dijo realizaran cada instrucción paso a paso, sin tratar de comprender toda la información al mismo tiempo. Con los resultados de este problema principalmente y retomando la definición que se le dio al concepto de visualización para este trabajo (página 17) queda más que claro que los estudiantes no llevan a cabo un proceso de visualización adecuado, lo que conlleva a concluir que no cuentan con los conocimientos mínimos necesarios para la resolución de los problemas aquí planteados.

Para determinar la aprehensión discursiva llevada a cabo por los estudiantes, se les planteó la Actividad 3, en esta actividad se les presentó un hexágono regular conformado por 6 triángulos, se les proporcionó el área total del hexágono y su apotema, la cual coincide con una de las alturas de cada triángulo, se les pidió obtener la dimensión de cada uno de los lados del tapete. La idea era que ellos fueran capaces de relacionar los datos que se les proporcionaron con lo que ya

conocen de área, perímetro, las figuras presentadas y un poco de Álgebra para poder resolver el problema; incluso, en este problema en particular tuvieron la opción de resolverlo a partir de las fórmulas de área y perímetro del hexágono (las cuales les fueron proporcionadas) o mediante la fórmula de área del triángulo; sin embargo, sólo tres estudiantes supieron darle solución al problema, la gran mayoría no estuvo ni cerca de la solución, además de que, muchos confundieron área con perímetro según lo observado en las respuestas y confirmado en la entrevista que se les realizó a cada uno.

En general, en los resultados dados por la mayoría de los estudiantes se aprecia:

- Falta de análisis. La mayoría se limita a utilizar únicamente los datos que se les proporcionan y cuando se les pide calcular algo en base a un dato que no se les ha dado (a pesar de ellos poder determinarlo) entran en conflicto. Los estudiantes esperaban que la profesora les diera exactamente los datos a sustituir en las fórmulas.
- Se presentan problemas para la comprensión de lectura.
- Falta de motivación o de interés. A pesar de abrir un espacio para dudas con el examen ya en sus manos, los estudiantes no mostraron interés en participar. La mayoría de ellos muestran mucha inseguridad en sí mismos, su nivel académico es sumamente bajo, pues muestran conocimientos débiles y faltos de solidez en Geometría, no tienen claras las definiciones de los conceptos y desconocen las propiedades de las figuras que se les presentan. Es por eso por lo que algunas veces utilizan correctamente algunos conceptos, pero en otros problemas pareciera que los hayan olvidado. Y si a todo eso se le suma el hecho de que no cuentan con el nivel de conocimientos necesarios en Álgebra para poder dar solución a los problemas que se les presentan, están acostumbrados a una enseñanza en la que ellos sólo sustituyen datos, copian y pegan información y generalmente no cuentan con una guía en casa que les apoye con sus tareas, todo lo contrario, muchos de ellos deben trabajar ya sea en casa o fuera de ella para ayudar a sus padres y hermanos; además, se

sabe que la gran mayoría de su enseñanza previa ha sido de manera virtual y asincrónica. Estos estudiantes tienen muchas razones para no sentirse motivados.

Como consecuencia de todo lo anterior, estos estudiantes no pueden llevar a cabo un proceso de visualización y uso de aprehensiones adecuado, y si recordamos que la definición de razonamiento configural en la que se basa este trabajo es la tomada de Clemente y sus colegas (2017), en donde se define al razonamiento configural como el proceso que relaciona la visualización y el conocimiento de Geometría, queda más que comprobado que el razonamiento configural llevado a cabo por los estudiantes a excepción de unos cuantos, está sumamente limitado y no están preparados para subir al siguiente nivel, lo cual es realmente preocupante.

Para evitar o disminuir todos esos problemas que presentan los estudiantes, convendría ponerles ejercicios más completos, es decir, ejercicios que de ser posible incluyan las cuatro aprehensiones en las que se basa esta investigación, trabajar con figuras más complejas, las cuales se puedan descomponer en unas más simples y que no siempre se encuentren en la misma posición, acostumbrarlos a obtener datos a partir de la información que se les da y no proporcionarles únicamente la fórmula y los datos de sustitución directa. Además de realizar exámenes de ubicación al final e inicio de cada ciclo escolar para saber de dónde partir.

Todo lo anterior hace parecer a la propuesta algo sencilla y sin embargo se sabe de sobra que no lo es, por lo que habría que comenzar de menos a más, con figuras y pasos sencillos al principio y poco a poco subir el nivel de dificultad, pero siempre asegurándose de que el paso anterior haya quedado lo más claro posible. Es por eso por lo que valdría la pena darle continuación a este trabajo de investigación y a partir de los resultados y conclusiones obtenidas proponer ejercicios que ayuden a fortalecer en los estudiantes sus conocimientos y a disminuir el rezago académico que presentan, lo cual es probable que no ocurra como se espera a la primera, sin embargo, la idea es poder mejorar y actualizar el material según los resultados que



se vayan obteniendo. Además, no hay muchas investigaciones respecto a razonamiento configural y el uso de aprehensiones y sin embargo, de acuerdo a los resultados obtenidos tanto en esta como en las distintas investigaciones mencionadas en ella, considero que son una muy buena propuesta para seguir trabajando sobre estos temas y darle continuidad y seguimiento puntual a cualquiera de los estudios presentados, con el fin de poder llegar a una etapa de investigación más avanzada, con más pruebas y mejores instrumentos de investigación.

Cabe mencionar que a lo largo del semestre se les proporcionó a los estudiantes la teoría necesaria para la solución de estos problemas, sin embargo, considero que hicieron falta más ejercicios tan completos y complejos como los últimos tres ejercicios aplicados en el examen (Ver Anexo I), pero aplicados de manera presencial, bajo supervisión y con un espacio destinado para dudas, pues queda la sensación de que el nivel de aprendizaje habría sido más favorable; es así que en este trabajo queda la inquietud acerca de qué tan distintos hubieran sido los resultados si los estudiantes hubieran cursado la materia de manera presencial y no a distancia, por lo que es otra incógnita que podría responderse en investigaciones futuras. Aunque lo ideal es que los profesores de Geometría trabajen de manera presencial, en este caso en particular no fue posible, por lo que, en situaciones como esta, en las que no hay más opción que la virtualidad y trabajo a distancia, la recomendación para los profesores es que se mantengan en constante comunicación con sus estudiantes, dándoles seguimiento y retroalimentación constante.

## Referencias bibliográficas

- Acuña, C. M. (2012). La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación. Barcelona, España: Gedisa.
- Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME, Cuernavaca, México* (pp. 55-80). Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University.
- Barrantes, M. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la Geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias* 22(2), 241-250.
- Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2019). Experimento de enseñanza como una aproximación metodológica a la investigación en Educación Matemática. *Unipluriversidad*, 19(2), 103–123. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.07>
- Clemente, F., Llinares, S. y Torregrosa, G. (2017). Visualización y razonamiento configural. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 497–516. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a24>
- Dewey, J. (1993). *Cómo pensamos*. Barcelona: Paidós.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (pp. 37–51). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, Raymond. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Fernández, T., Díaz, J. y Cajaraville, J. A. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Bolema: Boletim de*

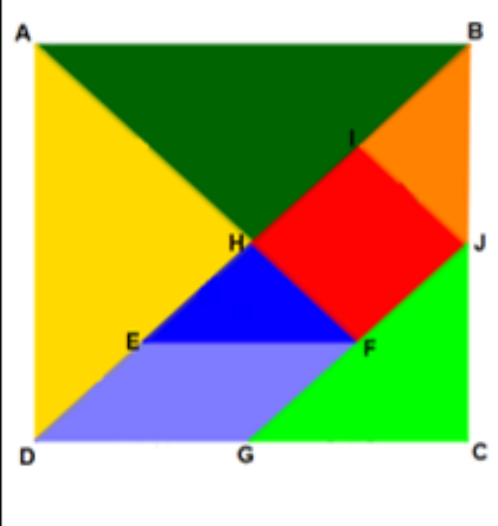
*Educação Matemática*, 26(42a), 39–64. <https://doi.org/10.1590/s0103-636x2012000100004>

- Gagatsis, A. (2015). Explorando el rol de las figuras geométricas en el pensamiento geométrico. In B. D'Amore y M.I. Fandiño Pinilla (Eds) *Didáctica de la Matemática - Una mirada internacional, empírica y teórica* (pp. 231- 248). Chia: Universidad de la Sabana.
- Hershkowitz, R.; Parzysz, B. & Van Dermolen, J. (1996). Space and shape. In Bishop & others (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Part 1, pp.161-204). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Prior, J., y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 16(3), 339–368. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1633>
- Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017). Razonamiento Configural Extendido : coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas geométricos empíricos. En Red de Educación Matemática de América Central y el Caribe (edit.), *II Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (págs. 1-8). México: Comité Interamericano de Educación Matemática.
- Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva, M. C. (2010). Razonamiento Configural Como Coordinación De Procesos De Visualización. *Enseñanza de Las Ciencias*, 28(3), 327–340.
- Zazkis, R.; Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analitic strategies: a student's understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematic Education* 27-(4), 435-457.
- Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.) (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (MAA Notes no. 19). (Mathematical Ass. Of America: Washington, USA).

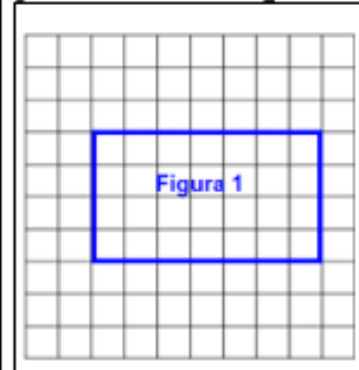
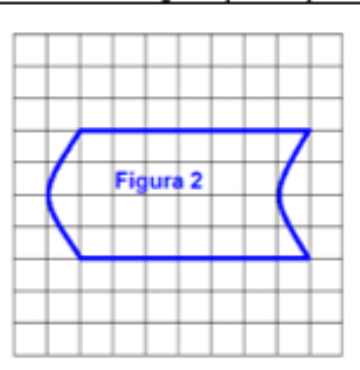
## Anexos

### Anexo 1

- I. Describe o dibuja una circunferencia inscrita en un cuadrado
- II. Describe o dibuja un cuadrado circunscrito en una circunferencia

 <p>III. De acuerdo con la imagen anterior, escribe el nombre de cada una de las figuras que se indican en la columna de la derecha</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. La figura ABCD es un: CUADRADO</li> <li>2. La figura ADH es un: TRIÁNGULO</li> <li>3. La figura ABH es un: TRIÁNGULO</li> <li>4. La figura DEFG es un: PARALELOGRAMO</li> <li>5. La figura EHF es un: TRIÁNGULO</li> <li>6. La figura HIJF es un: CUADRADO</li> <li>7. La figura JCG es un: T</li> <li>8. La figura BIJ es un:</li> <li>9. La figura ABD es un:</li> <li>10. La figura BCD es un:</li> <li>11. La figura BJGD es un: TRAPECIO</li> <li>12. La figura BJFE es un:</li> </ol>
---	---

- IV. Observa la figura 1 y la figura 2 y subraya la respuesta correcta y responde ¿Cuál de los incisos siguientes es correcto? ¿Por qué? Explica lo más que puedas

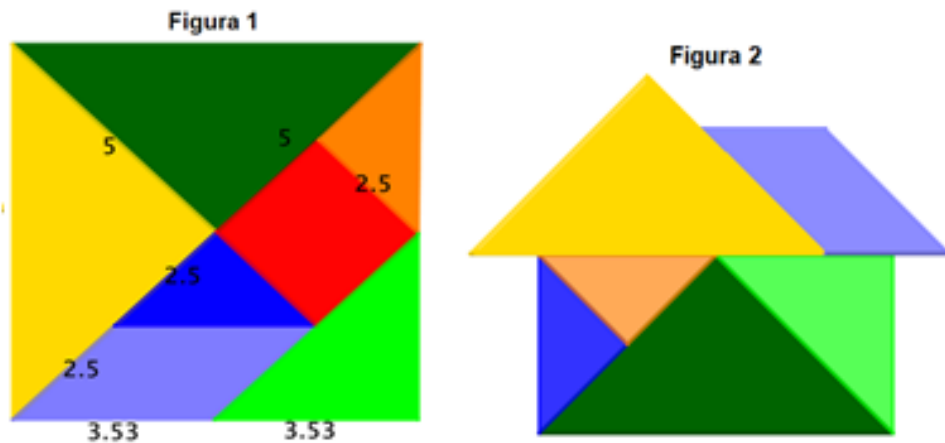
 <p>Figura 1</p>	 <p>Figura 2</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>a) La figura 1 tiene mayor área que la figura 2</li> <li>b) La figura 1 tiene la misma área que la figura 2</li> <li>c) La figura 1 tiene menos área que la figura 2</li> </ol>
---	--	--

- V. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado circunscrito en una circunferencia de 3.5cm de diámetro?

Dibuja el cuadrado circunscrito en la circunferencia de diámetro 3.5cm. Calcula lo que se te pide y justifica tu respuesta con procedimiento y una explicación.

Nota: Las respuestas a los ejercicios I y II les fueron proporcionadas a los estudiantes durante el examen.

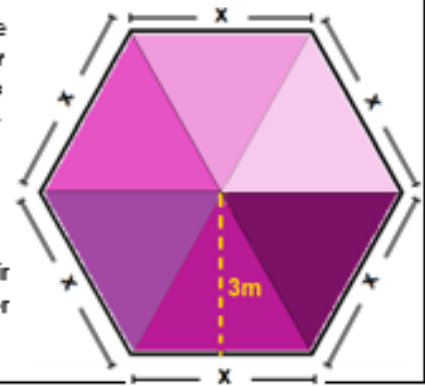
VI. Observa detenidamente las siguientes figuras. De acuerdo con la información proporcionada en la figura 1, contesta: ¿Cuál es el área de la figura 2? Justifica tu respuesta con procedimiento y una explicación.



VII. Se le ha pedido a un diseñador de interiores que mande fabricar un tapete. El tapete debe estar conformado por 6 triángulos de altura 3m, cada uno de un color distinto como se muestra en la siguiente imagen.

El área total que tiene que cubrir el tapete es de  $31.14m^2$ .

Ayúdale al diseñador a saber cuánto debe de medir cada uno de los lados del tapete, es decir, ¿cuánto debe de medir  $x$ ? Explica detalladamente los pasos a seguir para poder llegar al resultado



VIII. ¿Cuál es el área de una circunferencia inscrita en un cuadrado  $ABCD$ , que, a su vez, este cuadrado se encuentra dentro de un rectángulo  $EFGH$ , de tal manera que el vértice  $A$  del cuadrado coincide con el centro del rectángulo y uno de los lados del cuadrado coincide con la base del rectángulo. Si la base del rectángulo mide  $10cm$  y su altura mide  $6cm$ ?

Dibuja cada una de las figuras que se mencionan en el párrafo anterior tal cual se describen, coloca la letra que corresponde a cada vértice de las figuras. Calcula lo que se te pide y justifica tu respuesta con procedimiento y una explicación.