



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Doctorado en Ingeniería

IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS EN SISTEMAS MECÁNICOS NO
LINEALES

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Doctor en Ingeniería

Presenta:

Claudia Aide González Cruz

Dirigido por:

Dr. Juan Carlos Jáuregui Correa

Dr. Juan Carlos Jáuregui Correa
Presidente

Firma

Dr. Aurelio Domínguez González
Secretario

Firma

Dr. Alejandro Alfredo Lozano Guzmán
Vocal

Firma

Prof. Mihir Sen
Suplente

Firma

Dr. Carlos López Cajún
Suplente

Firma

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad

Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña
Directora de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Julio, 2016
México

Resumen

El estudio de sistemas mecánicos no lineales ha tomado gran importancia en las últimas décadas. Muchos métodos han sido propuestos para extraer y analizar características del desempeño de la maquinaria. Sin embargo, a la fecha no existe un método infalible capaz de identificar los parámetros del sistema y por ende, optimizar su diseño y funcionamiento. Este trabajo presenta una metodología de análisis basado en la combinación de diversas herramientas de procesamiento de señales para identificar la dinámica y parámetros de sistemas mecánicos. Se analizaron diferentes sistemas con el fin de comprobar la eficacia de las herramientas seleccionadas. Primero, se analizó una viga en voladizo, uno de los sistemas más elementales pero que dependiendo de sus características geométricas y de materiales puede tener un desempeño altamente no lineal. Las frecuencias que generan el comportamiento no lineal de la viga sólo pudieron ser determinadas al considerar grandes deformaciones como condición inicial, de otro modo los efectos no lineales fueron despreciables. También se analizó un automóvil como un sistema complejo con el objetivo de identificar y cuantificar la sincronización de sus elementos y estudiar cómo éste fenómeno influye en la dinámica del sistema. Posteriormente se estudiaron dos sistemas de transmisión mecánica a fin de determinar el comportamiento no lineal, inestable y caótico del sistema, así como estudiar los efectos que la variación de parámetros produce en la dinámica del sistema. Finalmente, de manera experimental se identificaron los parámetros dinámicos de un rotor montado sobre cojinetes de gas. El estudio de los sistemas fue basado en el análisis tiempo-frecuencia a partir de la transformada wavelet continua, la construcción y parametrización del diagrama de fase, diagramas de órbitas, el parámetro de orden de Kuramoto y algoritmos genéticos. Los resultados muestran que el uso combinado de técnicas de procesamiento y análisis de datos logra identificar inestabilidades, comportamientos no lineales y parámetros dinámicos de un sistema mecánico.

Palabras clave: identificación de parámetros, análisis tiempo-frecuencia, diagrama de fase, sincronización, algoritmos genéticos.

Summary

The study of nonlinear mechanical systems has been very important in last decades. Many methods have been proposed to extract and analyze characteristics of the machinery behavior, as well as for troubleshooting. However, nowadays there is no foolproof methodology able to identify the system parameters. In this way, the parameters identification could enable the optimization of the machinery design and increase the efficiency of them. This work presents an analysis methodology based on the combination of different signal processing tools to identify the dynamics and parameters of mechanical systems. Different systems were analyzed in order to check the effectiveness of the selected tools. First, a cantilever beam was analyzed, this is one of the most elementary systems but depending on its geometric and material characteristics can have a highly non-linear behavior. The frequencies that generate the non-linear behavior of the beam could only be determined when considering large deformations as initial condition, otherwise the non-linear effects could be neglected. An automobile, as a complex system, was also analyzed in order to identify and quantify the synchronization of its elements and to study how this phenomenon influences the dynamics of the system. Later, two mechanical transmission systems were studied in order to determine the nonlinear, unstable and chaotic behavior of the system, as well as to study the effects that the variation of parameters produces in the dynamics of the system. Finally, the dynamic parameters of a rotor supported on gas bearings were identified experimentally. The study of the aftermentioned systems was based on the time-frequency analysis using the continuous wavelet transform, the construction and parameterization of the phase diagram, orbit diagrams, the Kuramoto's order parameter and genetic algorithms. The results show that the combined use of data processing techniques can identify instabilities, nonlinear behaviors and the dynamic parameters of a mechanical system.

Key words: parameters identification, time-frequency analysis, phase diagram, synchronization, genetic algorithms.

*A Dios, a la memoria de mi madre
y a mis hermanos Misael y Josefina.*

Agradecimientos

Agradezco al gran arquitecto del universo por todo lo que he visto, oído y recibido durante estos años de estudio.

Expreso mi reconocimiento y gratitud a mi director de tesis, Dr. Juan Carlos A. Jáuregui Correa, por su tiempo y dedicación para el desarrollo de este trabajo, además de la amistad brindada y por transmitir, además de conocimientos, el gusto por la investigación. A mis sinodales Dr. Aurelio Domínguez González, Dr. Carlos López Cajún y Dr. Alejandro Lozano Guzmán por su guía y el tiempo dedicado a este trabajo. De manera muy especial agradezco al Prof. Mihir Sen del Departamento de Ingeniería Mecánica y Aeroespacial de la Universidad de Notre Dame, por la invitación para realizar una estancia de investigación en dicha institución; donde tuve la oportunidad no solo de contar con su tutoría sino también de enriquecer mi formación académica, científica y personal. Así mismo, agradezco al Dr. Manuel Toledano Ayala, jefe de la División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería, por brindarme el soporte institucional para realizar dicha estancia.

Para realizar una investigación objetiva debe existir un caso de estudio con aplicación real, de manera que agradezco la colaboración del M. C. Luis Meléndez y del Dr. Oscar de Santiago al proporcionar datos experimentales para validar las técnicas de procesamiento propuestas en éste trabajo.

Finalmente, pero no menos importante, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el financiamiento para realizar mis estudios de doctorado en México y la beca mixta para realizar la estancia internacional en la UND.

Claudia Aide González Cruz

Índice de contenido

1. Introducción	1
1.1. Justificación	2
1.2. Planteamiento del problema	3
1.3. Hipótesis y objetivos	4
1.3.1. Hipótesis	4
1.3.2. Objetivo general	4
1.3.3. Objetivos específicos	4
1.4. Estructura de la tesis	5
2. Revisión de literatura	6
2.1. Sistemas mecánicos	6
2.2. Sistemas de transmisión mecánica	8
2.3. Identificación de sistemas	11
2.3.1. Métodos de identificación no paramétrica	12
2.3.2. Métodos de identificación paramétrica	14
3. Fundamentación teórica	17
3.1. Vibraciones mecánicas	17
3.2. Sistemas lineales y no lineales	20
3.2.1. Ecuaciones no lineales: Duffing y van der Pol	21

3.3. Viga en voladizo	22
3.4. Sistema de transmisión mecánica	25
3.4.1. Rigidez de engranaje	26
3.4.2. Error de transmisión	26
3.4.3. Rigidez de los baleros	27
3.4.4. Formulación del modelo dinámico de una transmisión	29
3.5. Técnicas de procesamiento de señales	30
3.5.1. Análisis en el dominio de la frecuencia	31
3.5.2. Análisis en el dominio tiempo-frecuencia	31
3.5.3. Diagrama de fase	32
3.5.4. Transformada de Hilbert y parámetro de orden de Kuramoto	33
3.5.5. Descriptores estadísticos	34
3.5.6. Algoritmos de optimización	35
3.5.7. Algoritmos genéticos	35
3.5.8. Algoritmo genético continuo	36
3.5.9. Programación genética	42
4. Metodología	49
4.1. Análisis de una viga en voladizo	51
4.2. Análisis de un sistema complejo: sincronización dinámica de un automóvil	53
4.3. Análisis de sistemas de transmisión mecánica	56
4.3.1. Transmisión mecánica autmotriz	57
4.3.2. Transmisión mecánica de una etapa	60
4.4. Análisis de cojinetes gas	63
4.5. Implementación de algoritmos genéticos	68
4.5.1. Algoritmo genético continuo	68
4.5.2. Programación genética	70

5. Resultados	75
5.1. Resultados del análisis de una viga en voladizo	75
5.1.1. Solución numérica	75
5.1.2. Validación experimental del modelo	81
5.2. Resultados del análisis de un sistema complejo: sincronización dinámica de un automóvil	87
5.2.1. Análisis de las pruebas de impacto	87
5.2.2. Análisis de las pruebas conducidas	90
5.3. Resultados del análisis de sistemas de transmisión mecánica	99
5.3.1. Transmisión mecánica automotriz	99
5.3.2. Transmisión mecánica de una etapa	106
5.4. Resultados del análisis de cojinetes gas	123
5.4.1. Análisis del desempeño dinámico	124
5.4.2. Identificación de parámetros	129
5.5. Resultados de la implementación de algoritmos genéticos	133
5.5.1. Algoritmo genético continuo	133
6. Conclusiones	139
A. Publicaciones	144
A.1. Artículos en revistas indexadas	144
A.2. Artículos en conferencias internacionales	144
A.3. Capítulos de libro	145
B. Códigos	146
B.1. Algoritmo genético continuo en Matlab	146
C. Códigos	155
C.1. Algoritmo de programación genética en Matlab	155

Índice de tablas

4.1. Propiedades de la viga utilizada para el análisis numérico y experimental.	51
4.2. Características de los instrumentos utilizados en el desarrollo de pruebas de impacto en la TR6070.	58
4.3. Parámetros de diseño de los cojinetes tomados del catálogo del fabricante.	60
4.4. Parámetros de diseño de la transmisión de la Figura 4.7.	61
4.5. Principales frecuencias de excitación interna de la transmisión.	62
4.6. Tasas de selección del tipo de dato de los nodos de la población inicial.	72
5.1. Parámetros del tablero y la puerta a partir de las pruebas de impacto. .	90
5.2. Estadística del parámetro de déficit de orden.	96
5.3. Modos de vibración del engrane de 7ma de la transmisión TR6070 . . .	101
5.4. Estimación de los parámetros de las flechas de entrada y de salida de la transmisión TR6070.	103
5.5. Modos de vibración de transmisión TR6070. Resultados obtenidos en ANSYS vs resultados experimentales.	105
5.6. Estadística a partir del análisis de los datos numéricos y experimentales.	110
5.7. Resultados del algoritmo genético continuo al utilizar la correlación entre los espectros de frecuencia de las señales como función costo.	134
5.8. Resultados del algoritmo genético continuo al utilizar la correlación entre las señales de desplazamiento como función costo.	136

Índice de figuras

3.1. Respuesta de un sistema amortiguado. La amplitud de la sinusoide de- crece de acuerdo a una exponencial que depende del amortiguamiento del sistema.	19
3.2. Geometría de una viga en cantiliver sometida a una gran deformación. .	23
3.3. Aproximación de la rigidez de engranaje como una función periódica. .	26
3.4. Cinemática de los elementos rodantes de un balero: Cada rodamiento tiene un movimiento rotacional sobre su propio eje y un movimiento traslacional alrededor del eje.	27
3.5. a) Deformación de la pista de un balero debido a la carga aplicada, b) Variación de la rigidez en el tiempo para un rodamiento.	28
3.6. Diagrama esquemático del modelo dinámico de una transmisión de en- granjes de una etapa.	30
3.7. Diagrama de flujo del proceso de evolución usando algoritmos genéticos.	37
3.8. Sintaxis de árbol para representar la expresión $(9 + x)x + 2[x/(y - 3)]$.	43
3.9. Ejemplo del cruce de subárboles en el proceso de reproducción.	47
3.10. Ejemplo de la mutación de un subárbol.	47
4.1. Diagrama de los sistemas estudiados en el desarrollo de la metodología para la identificación de parámetros no lineales en sistemas mecánicos. .	50
4.2. Banco de pruebas para el análisis de una viga en voladizo: 1) viga, 2) ace- lerómetro, 3) sistema de adquisición de datos, 4) PC, 5) shaker inercial, 6) generador de señales, 7) amplificador de potencia.	52
4.3. Diagrama esquemático del banco de pruebas para el análisis del compor- tamiento de una viga en voladizo.	53

4.4. Ubicación y orientación de los acelerómetros en el automovil: A1-Tablero; A2-Puerta.	54
4.5. Banco de pruebas de la transmisión TR6070 para el desarrollo de pruebas experimentales	57
4.6. Instrumentación del engrane de séptima velocidad.	58
4.7. Transmisión mecánica de una etapa usada en las pruebas experimentales. 60	
4.8. a) Diagrama esquemático del banco de pruebas.	61
4.9. Banco de pruebas para experimentos sobre cojinetes de gas: a) rotor principal, b) motor eléctrico, c) multiplicador de velocidad, d) cojinete de gas en el lado acoplado al motor, e) cojinete de gas en el lado libre del rotor, f) sensor de proximidad.	64
4.10. Configuración del rotor principal del banco de pruebas. Todas las dimensiones están dadas en mm [in]	65
4.11. Lazo interno en el diagrama de fase del rotor operando en etapa inestable. El diámetro horizontal está relacionado a la energía potencial y el diámetro vertical a la energía cinética.	67
4.12. Individuos generados en la población inicial del algoritmo de programación genética usando la sintaxis de árbol.	73
5.1. Respuesta numérica, vibración libre para pequeñas deformaciones; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase. .	76
5.2. Respuesta numérica, vibración libre para grandes deformaciones; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase. .	77
5.3. Respuesta numérica, vibración forzada a 2.9 Hz; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.	78
5.4. Respuesta numérica, vibración forzada a 18.1 Hz; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.	79
5.5. Respuesta numérica a una frecuencia de excitación de 51 Hz; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.	80
5.6. Respuesta del sistema en el tiempo para la prueba de vibración libre. .	81
5.7. Resultados experimentales, vibración libre; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.	82

5.8. Respuesta a la vibración forzada obtenida a partir de un barrido de frecuencias; a) amplitud de la respuesta; b) mapa tiempo-frecuencia.	83
5.9. Resultados experimentales, vibración forzada a 18.1 Hz; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.	84
5.10. Respuesta no lineal de la frecuencia de 54 Hz causada por la frecuencia de excitación de 18.1 Hz.	85
5.11. Resultados experimentales, vibración forzada a 51 Hz; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.	86
5.12. Espectros de frecuencia de las pruebas de impacto.	88
5.13. Mapas tiempo-frecuencia a partir de las pruebas de impacto.	89
5.14. Gráficas tiempo-amplitud de cada frecuencia natural obtenidos a partir de las secciones transversales en los mapas tiempo-frecuencia para analizar la dinámica evolutiva de cada frecuencia natural.	90
5.15. Espectro de Fourier para las señales no filtradas de las pruebas conducidas.	92
5.16. Autocorrelación y correlación cruzada para las señales de las pruebas conducidas a diferentes velocidades; tablero y_1 , puerta y_2 ; línea azul - autocorrelación del tablero, línea verde - autocorrelación de la puerta, línea roja - correlación cruzada.	93
5.17. Mapas tiempo-frecuencia a partir de las señales del tablero y la puerta mostrando desempeño dinámico durante las pruebas conducidas.	94
5.18. Coeficientes de correlación cruzada entre las señales del tablero y la puerta, para las pruebas conducidas a diferentes velocidades.	95
5.19. Señales del tablero y_1 y la puerta y_2 y su parámetro de déficit de orden a partir de las pruebas conducidas a diferentes velocidades.	96
5.20. Histograma del déficit de orden para las pruebas conducidas a diferentes velocidades para un tamaño de muestra $\Delta s = 0.01$. La Figura interna es una vista ampliada.	97
5.21. Función de densidad de probabilidad $P(s)$ a partir de las pruebas conducidas y su aproximación.	98
5.22. Respuesta al impacto del engrane de séptima. (a) Aceleraciones tangenciales censadas por los instrumentos, (b) aceleración angular calculada a partir de las aceleraciones tangenciales.	99

5.23. Espectro de frecuencias de las aceleraciones en el eje x . a_2 , a_3 son las aceleraciones lineales; α es la aceleración angular calculada a partir de las aceleraciones lineales.	100
5.24. Mapas tiempo-frecuencia a partir de la aceleración angular de la transmisión TR6070.	101
5.25. Gráficas tiempo-amplitud de las frecuencias naturales de la transmisión TR6070.	102
5.26. Diagrama de fase de la transmisión TR6070, construido a partir de las velocidades y los desplazamientos angulares.	103
5.27. Lazos internos del diagrama de fase de la Figura 5.26.	104
5.28. Análisis de elementos finitos realizado en ANSYS por la empresa TREMEC S.A. de C.V.	105
5.29. Espectro de frecuencia a partir de la vibración radial en el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de rigidez suave).	106
5.30. Mapa tiempo-frecuencia a partir de la vibración radial en el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de rigidez suave).	107
5.31. Densidad espectral calculada a partir de los resultados de la transformada wavelet continua para el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de rigidez suave).	108
5.32. Diagrama de fase a partir de los datos del eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de rigidez suave).	108
5.33. Error de sincronización entre los ejes de entrada y salida a partir de su vibración radial (solución numérica considerando una carcasa de rigidez suave).	109
5.34. Parámetro de orden de Kuramoto a partir de la vibración radial en los ejes de entrada y salida: a) evolución en el tiempo, b) densidad de probabilidad (solución numérica considerando una carcasa de rigidez suave).	110
5.35. Espectro de frecuencia a partir de la vibración radial en el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de alta rigidez).	111
5.36. Mapa tiempo-frecuencia generado a partir de la vibración radial en el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de alta rigidez).	112

5.37. Densidad espectral calculada a partir de los resultados de la transformada wavelet continua para el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de alta rigidez). 112

5.38. Diagrama de fase a partir de los datos del eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de alta rigidez). 113

5.39. Error de sincronización entre los ejes de entrada y salida a partir de su vibración radial(solución numérica considerando una carcasa de alta rigidez). 113

5.40. Parámetro de orden de Kuramoto a partir de la vibración radial en los ejes de entrada y salida: a) evolución en el tiempo, b) densidad de probabilidad (solución numérica considerando una una carcasa de alta rigidez). 114

5.41. Mapa tiempo-frecuencia a partir de la vibración radial sobre el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de baja rigidez). . 115

5.42. Densidad espectral calculada a partir de los resultados de la transformada wavelet continua para el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de baja rigidez). 115

5.43. Diagrama de fase a partir de los datos del eje dde entradda (solución numérica considerando una carcasa de baja rigidez). 116

5.44. Error de sincronización entre los ejes de entrada y salida a partir de su vibración radial (solución numérica considerando una carcasa de baja rigidez). 116

5.45. Parámetro de orden de Kuramoto a partir de la vibración radial en los ejes de entrada y salida: a) evolución en el tiempo, b) densidad de probabilidad (solución numérica considerando una carcasa de baja rigidez). 117

5.46. Espectro de frecuencia obtenido a partir de la vibración radial en los cojinetes de la transmisión: a) eje de entrada, b) eje de salida. 118

5.47. Mapa tiempo-frecuencia obtenido a partir de la vibración radial en los cojinetes de la transmisión: a) eje de entrada, b) eje de salida. 119

5.48. Densidad espectral calculada a partir de los resultados de la transformada wavelet continua para los ejes de entrada y salida. 120

5.49. Diagrama de fase a partir de la vibración radial en los soportes de los ejes de la transmisión para: a) eje de entrada, b) eje de salida. 121

5.50. Diagrama de error de sincronización entre los ejes de entrada y salida. . 122

5.51. a) Parámetro de orden de Kuramoto a partir de las vibraciones radiales en los ejes de la transmisión; b) Función de densidad de probabilidad del parámetro de orden, $\Delta r = 0.01$	122
5.52. Desempeño dinámico del rotor durante las pruebas experimentales, lado libre del rotor.	124
5.53. Mapas tiempo-frecuencia a partir de los desplazamientos horizontales en los extremos del rotor.	125
5.54. Espectro de frecuencias a partir del desplazamiento horizontal en el lado libre del rotor.	126
5.55. Fenómeno de Jump en el cojinete del lado libre del rotor.	126
5.56. Diagramas de órbitas del extremo libre del rotor en las diferentes etapas de su desempeño dinámico.	127
5.57. Diagramas de fase del extremo libre del rotor en las diferentes etapas de su desempeño dinámico.	128
5.58. Lazos principales en los diagramas de fase para cada etapa del desempeño del rotor en el lado libre (datos del sistema de adquisición BN ADRE 408).130	
5.59. Desempeño de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en el eje horizontal del lado libre del rotor.	131
5.60. Desempeño de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en el eje vertical del lado libre del rotor.	132
5.61. Evolución del costo mínimo usando el coeficiente de correlación del espectro de frecuencias como función costo.	134
5.62. Resultados del algoritmo genético continuo al utilizar el coeficiente de correlación entre los espectros de frecuencias de las señales como función costo. Datos - señal a optimizar, AG - señal aproximada.	135
5.63. Evolución del costo mínimo usando el coeficiente de correlación del espectro de frecuencias como función costo.	136
5.64. Resultados del algoritmo genético continuo al utilizar el coeficiente de correlación entre las señales de desplazamiento como función costo. Datos - señal a optimizar, AG - señal aproximada.	137

Capítulo 1

Introducción

El acelerado desarrollo del mundo contemporáneo ha generado la necesidad de contar con máquinas que opere a mayor velocidad, sean más ligeras, generen menor ruido y consuman menor energía, entre otras características. No obstante, la combinación de ciertas variables puede generar inestabilidades en el desempeño del sistema y producir daños en sus componentes. A raíz de ésto, surge la necesidad de contar con herramientas que permitan analizar e identificar el comportamiento de los parámetros del sistema; siendo éstos los principales indicadores de su rendimiento y condición.

El método más efectivo para la identificación de un sistema es contar con su modelo matemático. Sin embargo, para los sistemas no lineales, el desarrollo del modelo matemático es una tarea difícil, incluso imposible, debido a la complejidad de sus elementos y a que cada tipo de no linealidad tiene una naturaleza única. No obstante, es posible identificar el modelo de un sistema no lineal a través del análisis de señales experimentales, donde las vibraciones mecánicas han sido la variable más utilizada.

La popularidad de las vibraciones se debe principalmente a que éstas capturan gran parte de la dinámica de una máquina. Además, el desarrollo tecnológico de nuevos sensores con capacidad para detectar amplios rangos de frecuencias ha hecho factible su empleo. Paralelamente, el avance en la tecnología electrónica ha permitido el desarrollo de sistemas de adquisición y transmisión de datos que han logrado reducir cada vez más la incertidumbre en las mediciones y capturar señales en intervalos de tiempo más reducidos.

Las metodologías de identificación de sistemas se pueden clasificar dentro de dos grupos principales: métodos paramétricos y no paramétricos. Donde el parte aguas es el

conocimiento teórico de la dinámica del sistema. En esta investigación, trabajamos el desarrollo de una metodología no paramétrica para identificar los parámetros dinámicos de diversos sistemas mecánicos no lineales.

1.1. Justificación

En ingeniería, conocer el desempeño de un sistema dinámico es de gran importancia debido a que permite caracterizar su funcionamiento; con lo cual es posible detectar inestabilidades y anticipar oportunamente la presencia de fallas.

En la actualidad existe una gran variedad de equipos para supervisar el desempeño dinámico de una máquina. El objetivo de su uso es mantener en óptimas condiciones de funcionamiento los componentes de las máquinas. Tales equipos de supervisión utilizan diversas metodologías para procesar las señales obtenidas a partir de las variables de entrada y/o salida de la máquina. Una de las técnicas más utilizadas es el análisis de vibraciones mediante la transformada rápida de Fourier. No obstante, el método ideal para supervisar y controlar el desempeño de un sistema dinámico es contar con su modelo representativo. El modelo matemático de un sistema permite analizar el comportamiento de los parámetros del sistema a través de su solución dinámica; además, habilita el alcance de los siguientes objetivos:

- Detectar la presencia de inestabilidades en el desempeño del sistema.
- Identificar fallas en el sistema y/o en sus componentes particulares.
- Incrementar el rendimiento y la vida útil de las máquinas y/o sus componentes.
- Alcanzar condiciones de operación máxima sin que se generen inestabilidades, incluso desde la etapa de diseño.
- Incrementar el trabajo neto realizado y reducir el desperdicio de energía en forma de vibraciones y ruido.

Además, la identificación oportuna de inestabilidades en un sistema, hace posible la reducción de los costos de operación, materiales y mano de obra. Por ejemplo, en el sector industrial, el mantenimiento de las condiciones de operación óptimas de la maquinaria hace posible incrementar la calidad de los procesos y de los productos generados.

Considerando lo anterior, es necesario desarrollar metodologías que permitan identificar los parámetros no lineales en sistemas mecánicos.

1.2. Planteamiento del problema

Hoy en día no existe un procedimiento general que logre identificar cualquier sistema no lineal, a pesar de que éste ha sido el enfoque de diversos investigadores durante las últimas décadas. La dificultad de su identificación radica en que a diferencia de una estructura lineal, las leyes generales como los principios de superposición y proporcionalidad no pueden ser aplicadas a los sistemas no lineales, siendo imposible analizarlos como la suma de los comportamientos de sus descriptores. Además, cada sistema no lineal tiene una naturaleza única, en consecuencia un método diferente es requerido para cada tipo de no linealidad.

El mayor enfoque en la identificación de sistemas dinámicos no lineales es el análisis de sus señales de respuesta, donde la principal dificultad es el tratamiento de la gran cantidad de información contenida en las señales y la variabilidad de los datos registrados. Cuando un sistema no lineal es excitado con una fuerza periódica, la respuesta puede incluir diferentes frecuencias no armónicas que varían en el tiempo, debido a esto, la frecuencia de respuesta del sistema no puede ser relacionada a la frecuencia de excitación. De manera que para un sistema no lineal, la respuesta en diferentes tiempos no es necesariamente la misma, ésta depende de los estados previos, es decir, de las condiciones iniciales de la respuesta.

Otros problemas importantes en el estudio de los sistemas no lineales son:

- Soluciones múltiples, estables e inestables, en estado estable en respuesta a las mismas entradas.
- El fenómeno de salto (jump), el cual involucra discontinuidades y cambios significativos en la respuesta del sistema.
- Movimientos complejos e irregulares (caóticos), extremadamente sensibles a las condiciones iniciales.
- Resonancias internas a diferentes frecuencias en diferentes partes del sistema. La resonancia es indeseable ya que puede ser destructiva en muchos sistemas al generar desgaste, ruido, desbalance, desalineamiento, fracturas, etc.

De manera general, la presencia de inestabilidades y sobrecarga en los sistemas dinámicos conduce en la mayoría de los casos, a daños en la maquinaria. Por citar un ejemplo, Li et al. (2012) señala que el 80 % de las averías y mal funcionamiento en la maquinaria de transmisión se debe a las fallas en sus engranes y cojinetes.

1.3. Hipótesis y objetivos

1.3.1. Hipótesis

Los sistemas dinámicos se modelan mediante ecuaciones diferenciales no lineales, cuyos parámetros sólo se pueden determinar si se analiza su respuesta dinámica a partir de la combinación de técnicas de procesamiento de señales y herramientas estadísticas.

1.3.2. Objetivo general

Identificar los parámetros no lineales en la ecuación de movimiento de un sistema mecánico, a partir del uso de técnicas de procesamiento de señales y análisis probabilístico de vibraciones mecánicas.

1.3.3. Objetivos específicos

- Evaluar el desempeño de las técnicas de procesamiento de señales existentes y definir sus áreas de aplicación.
- Desarrollar el análisis dinámico de sistemas mecánicos representativos.
- Caracterizar el desempeño de sistemas mecánicos a través de la relación entre las variables de los métodos empleados y el fenómeno en estudio.
- Desarrollar metodologías para identificarlos parámetros no lineales en el modelo característico de un sistema mecánico.
- Obtener la bondad de ajuste de la metodología desarrollada mediante su comparación con los métodos existentes.

1.4. Estructura de la tesis

En los siguientes capítulos se presenta el trabajo hecho durante los estudios de doctorado del autor. La información incluye las investigaciones publicadas en artículos científicos y congresos, así como información más detallada sobre los experimentos realizados. En el capítulo 2 se presenta una revisión del estado del arte sobre las investigaciones realizadas en el área de identificación de sistemas por diversos autores al rededor del mundo, donde se exhibe la diversidad de técnicas de procesamiento utilizadas para extraer las características del desempeño dinámico de sistemas mecánicos. El capítulo 3 presenta los fundamentos teóricos del desempeño dinámico de sistemas mecánicos no lineales, así como las técnicas de procesamiento de señales empleadas durante ésta investigación, incluyendo el análisis en el dominio tiempo-frecuencia, diagrama de fase, transformada de Hilbert, parámetros de orden de Kuramoto, algoritmos genéticos y el uso de descriptores estadísticos. El capítulo 4 describe de manera detallada los experimentos realizados en los diferentes sistemas mecánicos estudiados, así como la metodología seguida para el análisis de la información registrada. El capítulo 5 se enfoca en mostrar los resultados obtenidos utilizando las diferentes técnicas de procesamiento seleccionadas. Por último, el capítulo 6 concluye el presente trabajo y discute trabajo futuro y aspectos sobre los métodos y problemas enfrentados durante el desarrollo de la investigación.

Capítulo 2

Revisión de literatura

2.1. Sistemas mecánicos

Un sistema mecánico se define como la combinación de elementos mecánicos que actúan juntos para desarrollar un cierto objetivo (J. Angeles, 2007; Shearer et al., 2007). Por ejemplo, un aerogenerador es un sistema mecánico constituido por un conjunto de palas, ejes, engranes, cojinetes, etc., interconectados con el objetivo de transformar la energía eólica en energía eléctrica.

El comportamiento de un elemento mecánico individual depende de la relación entre la entrada aplicada y la salida producida. De modo que, cuando varios elementos se encuentran conectados en un sistema, las salidas de algunos elementos son las entradas para otros. Así, la respuesta general del sistema está determinada no solo por las condiciones de operación, sino también por las características intrínsecas de sus elementos y la manera en que éstos se encuentran interconectados. De acuerdo de su respuesta, un sistema puede ser lineal o no lineal.

Un *sistema lineal* es aquel cuyas salidas tienen una dependencia lineal con las entradas. Este tipo de sistemas obedece a los principios de superposición y homogeneidad. Contrario a un sistema lineal, un *sistema no lineal* es aquel cuyas salidas son una función no lineal de las entradas, por lo que no aplican los principios de superposición y homogeneidad.

A pesar de que el comportamiento de un sistema mecánico real es inherentemente no lineal, estos suelen describirse mediante modelos lineales a partir de la suposición de

que su comportamiento es lineal o muy cercano al comportamiento lineal. Sin embargo, asumir dichas condiciones lleva al desarrollo de modelos erróneos incapaces de describir correctamente el funcionamiento del sistema. Básicamente el uso de modelos lineales, en lugar de los no lineales, se debe a que la teoría lineal ha sido fuertemente establecida, mientras que la teoría no lineal aún se encuentra en desarrollo.

La dificultad en el estudio de los sistemas no lineales radica, entre otros aspectos, en que su respuesta es altamente sensible a las condiciones iniciales, presentan comportamiento caótico y la existencia de múltiples soluciones estables e inestables, aún en condiciones de estado estable; además, pueden presentar bifurcaciones, donde cambios pequeños en los parámetros del sistema generan discontinuidades y cambios significativos en la respuesta (fenómeno de salto) (Bureau et al., 2014).

Paralelo a los sistemas no lineales, un sistema complejo está formado por diversos elementos interactuando entre sí, de manera que el desempeño del sistema en conjunto puede ser bastante diferente al comportamiento de sus componentes individuales. No obstante, un sistema complejo se compone de subsistemas de dimensión finita o elementos que no pueden ser estudiados como un sistema continuo, pero que tienen importantes interacciones entre ellos (Albert and Barabási, 2002; Cheng et al., 2014). Por ejemplo, un sistema puede oscilar en sincronía de manera que todos sus elementos operen a la misma frecuencia, algunas veces en fase, otras no. Este fenómeno ha sido demostrado experimentalmente incluso para elementos con frecuencias naturales ligeramente diferentes. Otros efectos son la propagación de estímulos a través de los elementos del sistema y las fallas en cascada, donde los elementos fallan uno tras otro. Por definición, estos efectos no pueden suceder en un solo elemento del sistema y no pueden ser inferidos a partir de la superposición de los efectos individuales. La sincronización de sistemas complejos ha sido estudiada durante algún tiempo principalmente en contextos biológicos y sociológicos (Manrubia et al., 2004; Pikovsky et al., 2003; Strogatz, 2003). En ingeniería mecánica el estudio de sistemas complejos ha sido enfocado en la simulación dinámica y control con un fuerte enfoque en la caracterización de las no linealidades y la confiabilidad de los datos. Pocos trabajos se han realizado tanto de manera teórica como experimental, siendo la mayoría en el área térmica-hidráulica (Barron and Sen, 2014; Cai and Sen, 2008; Cai et al., 2006; O'Brien and Sen, 2011); mientras que en el área de sistemas mecánicos, la mayoría de los estudios han sido teóricos (Barrón and Sen, 2009a,b; Zhao et al., 2010). Un automóvil es un ejemplo de sistema complejo compuesto de un gran número de elementos individuales que están conectados mecánicamente de alguna manera y por lo tanto transmiten movimiento entre sí. Las

interconexiones a través de los elementos individuales, los cuales propagan los estímulos de un elemento a otro, pueden ser clasificados como débiles o fuertes y sus valores son críticos para que la sincronización ocurra (Dörfler and Bullo, 2011; Luo and Min, 2011; Wu et al., 2015). Muchos estudios han demostrado que la propagación de ondas a través del sistema genera retardos de tiempo en el acoplamiento de los elementos individuales (Breakspear et al., 2010; Ott and Antonsen, 2008; Wang et al., 2009b). Además, bajo condiciones de operación, cada elemento de un sistema complejo modifica los estímulos ya sea en amplitud, frecuencia, fase o dirección, creando una nueva fuente de excitación para los otros elementos. En ingeniería mecánica existen muy pocas publicaciones sobre sincronización en sistemas complejos (González-Cruz et al., 2015; Jauregui-Correa et al., 2011), a pesar de que los ingenieros constantemente trabajan con una combinación de componentes que interactúan formando sistemas complejos. Por ejemplo, un automóvil es un sistema complejo sujeto a excitaciones regulares y aleatorias del camino, del motor y de la caja de transmisión.

2.2. Sistemas de transmisión mecánica

La transmisión mecánica es un sistema altamente no lineal que destaca por la complejidad de sus elementos. Debido a esto, los sistemas de transmisión mecánica han sido ampliamente estudiados en las últimas décadas.

La mayoría de los estudios reportados en la literatura se han enfocado en modelar la dinámica de las transmisiones. Byrtus and Zeman (2011) utilizaron la síntesis modal para reducir el número de grados de libertad y poder evaluar los efectos no lineales en el acoplamiento dinámico de los elementos. En su análisis incluyeron los efectos de las diversas fuerzas que se aplican en la transmisión. Bozca (2010) presentó un modelo de optimización para reducir el ruido basado en la modificación de la forma del diente de los engranes. Yang and Shen (2009) estudiaron el comportamiento no lineal de una transmisión a partir del método de balance armónico incremental. Para realizar el modelo, expandieron la función de rigidez como una serie de Fourier. Abbes et al. (2010) modelaron la transmisión con elementos finitos, con este modelo estimaron los efectos dinámicos causados por las frecuencias de engranaje. Ellos utilizaron una función rectangular para representar la rigidez del engranaje. Faggioni et al. (2011) desarrollaron un modelo de optimización para evaluar la producción de ruido por las fluctuaciones del error de transmisión. Las variaciones en el error de transmisión dependían del torque

transmitido, por lo tanto el valor óptimo fue seleccionado a determinadas condiciones de operación. Se han publicado diversos métodos de optimización dinámica en transmisiones, Carbonelli et al. (2011) utilizaron el método de optimización tipo enjambre de partículas para encontrar las modificaciones al perfil de los dientes de una transmisión de tres etapas. Este mismo método lo utilizaron Savsani et al. (2010) para optimizar el peso de una transmisión. Bonori et al. (2008) optimizaron las funciones de corrección de perfil del diente utilizando algoritmos genéticos; en su análisis consideraron el efecto dinámico de los engranes. Mientras que Mendi et al. (2010) tomaron en cuenta los efectos de los rodamientos y las deflexiones de los ejes. En estas publicaciones se definieron los modelos dinámicos más adecuados para entender el comportamiento no lineal de los elementos de una transmisión.

El efecto de la carcasa sobre el comportamiento de los engranes y rodamientos de una transmisión se ha estudiado desde el punto de vista de las deformaciones, así como su capacidad para transmitir ruido y vibraciones a los elementos circundantes (Harris et al., 2009; Ognjanovic and Benur, 2010). La carcasa también actúa como un elemento pasivo de control de vibraciones que permite, o limita, la transmisión de ondas no lineales entre los elementos rotativos (Korkmaz, 2011; Setter and Bucher, 2011). Torres et al. (2010) presentaron un modelo no lineal de una transmisión e identificaron que la rigidez de la carcasa permite la sincronización de los elementos no lineales. Ellos plantearon que los engranes pueden aproximarse con la ecuación de Duffing. De manera similar, el comportamiento dinámico de los rodamientos se puede aproximar como un péndulo de Van der Pol. En este trabajo, los autores identificaron el fenómeno de sincronización midiendo las vibraciones mecánicas de una transmisión construida con una carcasa de muy flexible.

La presencia del fenómeno de sincronización no lineal adiciona una nueva carga dinámica que reduce la vida útil de los elementos rotativos, en particular de engranes y rodamientos. Para poder estimar el impacto de esta carga adicional y modificar las condiciones de diseño, se requiere de técnicas de análisis que identifiquen fenómenos no lineales y respuestas transitorias. Las técnicas más efectivas para este tipo de análisis son los mapas tiempo-frecuencia y el análisis del diagrama de fase. El análisis de los mapas tiempo-frecuencia permite identificar las variaciones del contenido de frecuencia y los instantes de tiempo en los que se presentan las variaciones.

El análisis en el dominio tiempo-frecuencia ha recibido gran atención. Particularmente en años recientes la transformada wavelet ha demostrado ser una herramienta poderosa en la detección de transitorios, proporcionando mecanismos altamente prometedores

para tratar defectos localizados en maquinaria rotativa Liu (2005), dejando atrás los métodos como la transformada de Fourier y la distribución de Wigner-Ville (Park et al., 2009).

Rafiee et al. (2010) introdujo un sistema automático para diagnosticar fallas en engranes y cojinetes. El sistema se basó en la extracción de características de los coeficientes de la transformada wavelet continua. Los descriptores estadísticos estudiados fueron la desviación estándar, varianza, curtosis y el cuarto momento central. Después de analizar 324 funciones wavelet madre el autor concluyó que la función Daubechies 44 es la más similar a la forma de las señales de vibración. Sevilla-Camacho et al. (2010) presentaron un método para mejorar los sistemas de supervisión de herramientas de corte en procesos de maquinado basado en el uso de la transformada wavelet discreta y metodologías estadísticas. Los autores analizaron el consumo de corriente del motor por estar estrechamente relacionado con la condición de la herramienta de corte. La función wavelet madre utilizada fue Daubechies-4 con un nivel de detalle igual a ocho. Tal nivel de descomposición permitió la reducción del tiempo de procesamiento de las señales al comprimir los datos sin perder información sobre la dinámica del sistema. La metodología para determinar el daño de la herramienta de corte comprendió principalmente el cálculo de la asimetría para determinar la forma de onda de dos pulsos consecutivos en la señal. Los resultados mostraron un tiempo de procesamiento sustancialmente menor comparado con el tiempo requerido por la FFT.

Las redes neuronales también han sido aplicadas con el fin de identificar fallas en sistemas mecánicos. Su uso se debe principalmente a la capacidad asociativa de memoria, auto-organización, auto-aprendizaje y la capacidad de resolver problemas de dinámica compleja no lineal. Sin embargo, las redes neuronales convencionales tienen una baja velocidad de aprendizaje y son susceptibles a caer en mínimos locales, resultando una herramienta de poca eficiencia. A raíz de lo anterior, se han desarrollado métodos que combinan redes neuronales con la transformada wavelet. Ésta combinación aprovecha las ventajas que ofrece el análisis tiempo-frecuencia. Huang et al. (2008) desarrolló un método para detectar fallas en la de transmisión mecánica de una turbina eólica utilizando la wavelet madre como la función de activación de las neuronas. El método logró identificar 16 tipos de fallas en los engranes. De manera similar, He et al. (2010) propusieron un método híbrido basado en un filtro Morlet wavelet y un algoritmo de procesamiento de señales morfológico. El filtro wavelet fue utilizado para eliminar el ruido y mejorar las características impulsivas de la señal. Posteriormente, la señal filtrada fue procesada con un operador morfológico y un algoritmo de máximo local para

aislar los impulsos periódicos. Los resultados mostraron la efectividad del método, aunque éste sólo fue probado con señales de vibración generadas mediante la simulación de fallas en rodamientos.

En el estudio hecho por Loutridis (2004) se utilizó una ley empírica para relacionar el contenido de energía de los modos intrínsecos a la magnitud de daño de un engrane, de manera que la energía modal fue asociada con la condición de deterioro del engrane y la predicción de fallas. Loutridis (2004) propuso una metodología para supervisar el desarrollo de daños en engranes; el método fue basado en el esquema de descomposición de modo empírico de las señales de vibración obtenidas a partir de pruebas experimentales. Los métodos de descomposición de modo empírico descomponen una señal en el tiempo en un conjunto finito de funciones llamadas funciones de modo intrínseco que satisfacen dos condiciones: 1) el número de extremos y el número de cruces por cero debe ser igual o diferente en al menos una unidad, 2) el valor promedio del contorno definido por el valor máximo local y el contorno definido por el valor mínimo local es cero. La ventaja que ofrecen los modos intrínsecos es que éstos no son forzosamente funciones sinusoidales, éstos pueden ser funciones no estacionarias y de amplitud y frecuencia moduladas, razón por la cual han demostrado ser útiles en el análisis de vibraciones.

Wang et al. (2009a) lograron clasificar daños en rodamientos mediante la construcción del espacio de fase y el establecimiento de modelos mixtos Gaussianos para cada tipo de daño. El espacio de fase de las señales experimentales fue construido a partir de retardos de la señal en el tiempo y el cálculo de la dimensión embebida. Las probabilidades condicionales entre los modelos establecidos y los datos experimentales fueron calculadas. El tipo de daño fue identificado a partir del resultado de la mayor probabilidad obtenida; además el método logró evaluar la severidad de la falla.

2.3. Identificación de sistemas

Debido a su amplio uso, el análisis de los sistemas mecánicos es de gran importancia. *i.e.*, en el sector industrial existe la demanda de máquinas que operen a mayor velocidad, de menor peso y que tengan mayor rigidez; sin embargo, la combinación de ciertas variables en el diseño de un sistema mecánico puede generar inestabilidades que den lugar a la disminución de la exactitud en el proceso de producción, menor calidad de los productos y el deterioro de la maquinaria. En éste sentido es necesario identificar los parámetros del sistema con el fin de entender su comportamiento dinámico.

La identificación de sistemas se define como el camino sistemático para inferir o mejorar modelos matemáticos de sistemas dinámicos a partir del uso de datos experimentales. La importancia de la identificación radica en el estudio de los parámetros (descriptores del comportamiento de las variables) del sistema, los cuales permiten conocer la dinámica de desempeño del sistema, mantener las condiciones de operación óptimas y evitar fallas en los componentes.

La identificación de sistemas es un área ampliamente utilizada en numerosas aplicaciones, tales como sistemas de control, comunicaciones, procesamiento de señales, control de procesos químicos y análisis de procesos biológicos, por mencionar algunos ejemplos. Para sistemas lineales la metodología de identificación está bien establecida, sin embargo para sistemas no lineales, aún no existe una metodología general que permita la identificación de parámetros. El éxito en la identificación de maquinaria rotativa y diagnóstico de fallas depende de las técnicas utilizadas en el procesamiento de datos, donde el análisis de vibraciones ha sido el enfoque más utilizado (Loutridis, 2004; Sevilla-Camacho et al., 2010).

De acuerdo al nivel de conocimiento que se tenga de la estructura del sistema, los métodos de identificación se pueden clasificar en paramétricos y no paramétricos. Los métodos no paramétricos utilizan técnicas que requieren poco o nulo conocimiento de la estructura, éstos toman una caja negra y ajustan la relación entrada-salida de la estructura mediante alguna forma general; para su implementación es necesaria una gran cantidad de datos con el fin de reducir los efectos del ruido. Por otra parte, los métodos paramétricos asumen que el modelo matemático y algunos parámetros del sistema son conocidos a partir de la teoría. Entonces, éstos métodos consisten en estimar los valores de los parámetros desconocidos a partir de datos experimentales (Masri, 1994). Para ambas metodologías el objetivo es la selección óptima de los parámetros del modelo a fin de lograr la mayor exactitud con la respuesta real del sistema cuando es sometido a una excitación aleatoria. Diversas técnicas de análisis y procesamiento de señales han sido implementadas para la identificación de sistemas mecánicos. A continuación se presenta una revisión de literatura que concierne a las dos metodologías.

2.3.1. Métodos de identificación no paramétrica

Cuando se tiene poca información del sistema o la estructura de estudio, los métodos de identificación no paramétrica pueden resultar más apropiados que los métodos paramétricos, para los cuales es necesario contar con el conocimiento previo de la estructura.

Basados en éste tipo de metodología, Hasiewicz (2001) utilizaron aproximaciones ortogonales multiescala asociadas con funciones escaladas de soporte compacto para la identificación de no linealidades en un sistema Hammerstein. El sistema fue sometido a una excitación aleatoria-estacionaria con función de densidad de probabilidad desconocida y respuesta ruidosa. Entonces utilizando solo los datos experimentales de la entrada y salida del sistema desarrollaron algoritmos para identificar características no lineales. Los resultados mostraron que bajo ciertos requerimientos, los algoritmos alcanzan una tasa óptima de convergencia con insensibilidad a la correlación del ruido. Por su parte, Peifer et al. (2003) basados en una regresión no paramétrica, estimaron el modelo no lineal de aislamientos metálicos helicoidales para cable mediante mínimos cuadrados. Los parámetros óptimos fueron determinados a través de la validación cruzada generalizada, haciendo de este enfoque un método completamente adaptativo para los datos. El método demostró efectividad para modelar los cambios en el desempeño no lineal de las fuerzas de restauración bajo parámetros de excitación cambiantes.

Rudinger and Krenk (2001) identificaron la rigidez y el amortiguamiento no lineal en un sistema de un grado de libertad. La rigidez fue estimada mediante un proceso iterativo que compara las energías elástica y cinética, mientras que el amortiguamiento fue estimado a través de una expresión genérica de densidad de probabilidad. Los métodos de estimación para ambos parámetros dieron resultados muy satisfactorios para tasas de amortiguamiento de alrededor de $\zeta = 0.05$. La estimación de la intensidad del ruido blanco condujo a resultados precisos solo en el caso de rigidez lineal; conforme la no linealidad en la rigidez fue aumentando, la precisión del método fue disminuyendo. Por su parte, Jang (2011) identificó el amortiguamiento no lineal y las características de restauración de sistemas oscilatorios. El método fue basado en el análisis de las señales de desplazamiento y velocidad de la respuesta del sistema, considerando que el amortiguamiento no lineal solo es función de la velocidad. El método mostró inestabilidades en la solución numérica, las cuales fueron resultas empleando una técnica de estabilización.

Pintelon et al. (2011) presentó dos métodos no paramétricos para caracterizar los niveles de ruido y los niveles de distorsión no lineal a partir de la estimación de la matriz de la respuesta en frecuencia de un sistema multivariable excitado periódicamente. Los autores lograron reducir a dos el número de periodos de la señal necesarios para analizar el ruido; también redujeron a dos el número de experimentos para la detección de distorsiones no lineales. Pérez-Canales et al. (2011) propusieron el uso de métodos basados en entropía aproximada (ApEn) para identificar inestabilidades en procesos de fresado y concluyeron que las inestabilidades se asocian con el incremento de entropía

para un rango de frecuencias, mientras que un proceso estable conduce a un patrón donde los altos valores de entropía se concentran a altas frecuencias, y se relacionan a la dinámica natural de la herramienta de corte.

2.3.2. Métodos de identificación paramétrica

A pesar de que la forma de las ecuaciones generales que rigen el movimiento son usualmente conocidas, los valores de algunos de sus parámetros frecuentemente no pueden ser calculados con exactitud a través de la teoría. Por ejemplo, aún cuando los parámetros de masa y rigidez lineal se pueden calcular con cierto grado de exactitud, los parámetros de amortiguamiento y rigidez no lineal generalmente no lo son, debido a la falta de precisión en los modelos físicos. Entonces, los métodos para la estimación de los parámetros desconocidos en los modelos dinámicos a partir de datos experimentales son de gran utilidad e interés.

Una amplia variedad de técnicas de procesamiento ha sido utilizada en las metodologías de identificación paramétrica, entre las cuales destacan: transformada de Fourier de corto tiempo, la distribución de Wigner-Ville, la transformada wavelet, la transformada Hilbert-Huang, los métodos de separación de fuentes blindadas y los análisis de señales estadístico (Nagarajaiah and Basu, 2010; Yang and Shen, 2009).

Giagopoulos et al. (2006) desarrollaron un método de monitoreo e identificación paramétrica del modelo de un sistema de par de engranes y cojinetes utilizando un enfoque estadístico Bayesiano, el método logró una identificación efectiva del tipo, localización y severidad de las fallas, sin embargo presentó dificultades de dinámica irregular y coexistencia de múltiples soluciones del sistema, de las cuales algunas fueron sobrellevadas aplicando un algoritmo genético. Entre los algoritmos evolutivos, el uso de los algoritmos genéticos ha tenido una amplia aplicación en la identificación de sistemas. Usando ésta técnica, Subudhi and Jena (2011) implementaron un método de identificación para sistemas no lineales basado en el uso combinado de algoritmos evolutivos y redes neuronales. Implementaron el algoritmo de evolución diferencial basada en la oposición para encontrar los valores de los pesos aproximados en la vecindad del valor mínimo global y así lograr una convergencia más rápida utilizando el algoritmo Levenberg Marquardt. El método fue probado en un rotor de un grado de libertad altamente no lineal. Los resultados mostraron ventajas en términos de velocidad de convergencia y capacidad de identificación del sistema sobre los métodos existentes basados en evolución diferencial simple y redes neuronales.

Por otra parte, Marano et al. (2011) implementaron un algoritmo genético para identificar sistemas mecánicos lineales de 10 y 30 grados de libertad sometidos a cargas dinámicas. Los autores asumieron como conocidos los parámetros de masa, rigidez y amortiguamiento. Alonge et al. (1998) identificaron los parámetros del modelo matemático de un motor de inducción a partir de las señales experimentales de velocidad del rotor, voltaje y corriente del estator. En su método consideraron términos no lineales de gran importancia, como la fricción de Coulomb. El método no fue implementado para su aplicación en línea. Gondhalekar et al. (2009) lograron identificar diferentes tipos de no linealidades como la rigidez, fricción y holgura, y sus combinaciones en sistemas de dos grados de libertad. El método consistió en dos etapas; primero, la identificación de la presencia de desempeño no lineal mediante el análisis de la fuerza de restauración y posteriormente, la identificación de los parámetros del sistema a través de un algoritmo genético. Los resultados lograron alta exactitud, sin embargo, el método no fue probado con datos experimentales.

(Novara et al., 2011) presentaron un método para la identificación de sistemas estructurales. Los sistemas interconectados fueron presentados a través de transformaciones lineales fraccionarias, las cuales separaron las partes lineal y no lineal del sistema de una manera general y sistemática asumiendo no linealidades parametrizadas. El método fue probado numérica y experimentalmente mostrando su capacidad para estimar los valores reales de los parámetros aún bajo la persistencia de ciertas condiciones de excitación. (Arslan et al., 2011) implementaron dos metodologías paramétricas para modelar estructuras no lineales de múltiples grados de libertad a partir del procesamiento de las funciones de respuesta en frecuencia del sistema. El primer método fue basado en el hecho de que las estructuras no lineales se comportan de manera lineal bajo condiciones específicas; aunque éste hecho ha sido probado en la literatura, el método propuesto por los autores utiliza la amplitud del desplazamiento de los parámetros modales para predecir la respuesta de estructuras no lineales. En el segundo método, la parte no lineal del sistema fue expresada en un vector de fuerzas no lineales inmerso en la matriz de estados del sistema.

Byrtus and Zeman (2011) utilizaron la técnica de síntesis modal con reducido número de grados de libertad para modelar una caja de transmisión. El modelo estima no linealidades causadas por la interrupción del engranaje, la excitación paramétrica generada por la variación de la rigidez y las fuerzas de contacto no lineales entre los rodamientos y la carcasa y es capaz de detectar fenómenos como impactos, bifurcaciones y movimientos caóticos bajo pequeñas cargas estáticas y en estado resonante. Jáuregui et al.

(2012) lograron determinar la rigidez y amortiguamiento en un cojinete analizando el diagrama de fase construido a partir de datos experimentales. El modelo del sistema es asumido como un arreglo masa-resorte-amortiguador con coeficientes dependientes del tiempo. Los parámetros de rigidez y amortiguamiento fueron extraídos como función de la frecuencia de excitación.

Frank Pai (2007) caracterizó vibraciones no lineales utilizando la transformada de Hilbert-Huang y una técnica de ajuste de ventanas deslizantes. Las principales no linealidades que lograron extraer fueron no linealidades cuadráticas, cúbicas y de orden superior, efectos de endurecimiento, movimientos de modulación de amplitud y fase de la señal, respuesta armónica distorsionada bajo la excitación armónica de una sola frecuencia y múltiples modos de vibración causados por resonancias internas/externas. Su et al. (2011) propusieron un método de descomposición en valores singulares para identificar fallas en engranes basado en la transformada de Hilbert-Huang, los resultados mostraron una efectiva clasificación e identificación de fallas. Feldman (2011) presentó un tutorial sobre el uso que la transformada Hilbert ha tenido en el diagnóstico de maquinaria. Kerschen et al. (2006) hicieron un interesante resumen de lo que se ha hecho en la identificación paramétrica y no paramétrica de sistemas mecánicos no lineales a lo largo de las dos últimas décadas. El estudio menciona los métodos tiempo-frecuencia y hace un énfasis importante en el análisis modal no lineal y el uso de los métodos normales no lineales como otra alternativa para identificar no linealidades y fenómenos transitorios. Gao and Yan (2006) presentaron un estudio comparativo de cuatro de las técnicas de análisis de frecuencia comúnmente empleadas en el procesamiento de señales no estacionarias: la transformada de Fourier de corto tiempo, la transformada wavelet discreta, la transformada por paquete wavelet y la transformada de Hilbert-Huang. En sus conclusiones señala que la transformada wavelet por paquetes identificó todos los elementos transitorios, así como los cambios de frecuencia asociados con transición de fase debido a la propagación del daño en rodamientos, la transformada de Fourier de corto tiempo también fue capaz de identificar los cambios de frecuencia, siempre y cuando se seleccionara un tamaño de ventana óptimo, mientras que las otras dos técnicas no mostraron resultados exitosos.

Como es posible ver, son múltiples las técnicas de procesamiento que han sido aplicadas para la identificación de sistemas mecánicos no lineales, la aplicación de una u otra depende del tipo de no linealidad asociada al sistema. En el siguiente capítulo se presentan los fundamentos teóricos del desempeño dinámico de sistemas mecánicos no lineales, así como la definición de las técnicas de procesamiento utilizadas en ésta investigación.

Capítulo 3

Fundamentación teórica

3.1. Vibraciones mecánicas

Las vibraciones se definen como la respuesta repetitiva, periódica u oscilatoria de un sistema, y pueden representar el comportamiento dinámico natural del sistema o bien ser inducidas mediante alguna fuerza de excitación generada internamente en el sistema o transmitida por una fuente externa (J. P. Den Hartog, 2007). El término de vibraciones mecánicas es utilizado para describir oscilaciones pequeñas de estructuras y sistemas mecánicos.

El movimiento de una partícula que oscila a una frecuencia específica ω se puede representar de diferentes formas. En el campo de los números reales éste movimiento es descrito como:

$$y(t) = |A(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)), \quad (3.1)$$

donde $|A(\omega)|$ es un valor positivo que representa la magnitud del desplazamiento y $\varphi(\omega)$ es el ángulo de fase en el rango $-\pi$ a $+\pi$. Mientras que en el campo de los números complejos, el movimiento armónico es representado de la siguiente manera:

$$y(t) = A(\omega)e^{i\omega t}. \quad (3.2)$$

Para establecer una relación entre la representación real y la forma compleja expandimos

las ecuaciones. (3.1) y (3.2) como sigue:

$$y(t) = |A(\omega)| \cos \varphi(\omega) \cos \omega t + |A(\omega)| \sin \varphi(\omega) \sin \omega t, \quad (3.3)$$

$$y(t) = \operatorname{Re} A(\omega) \cos \omega t - \operatorname{Im} A(\omega) \sin \omega t, \quad (3.4)$$

igualando los coeficientes de las ecuaciones (3.3) y (3.4) obtenemos las componentes real e imaginaria del movimiento armónico:

$$\operatorname{Re} A(\omega) = |A(\omega)| \cos \varphi(\omega) \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} A(\omega) = |A(\omega)| \sin \varphi(\omega), \quad (3.5)$$

lo que nos permite calcular la amplitud y el ángulo de fase del movimiento descrito en la Ec. (3.2) a partir de la Ec.(3.1), proporcionando una manera poderosa y compacta de procesar movimientos armónicos:

$$|A(\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re} A(\omega)]^2 + [\operatorname{Im} A(\omega)]^2}, \quad (3.6)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im} A(\omega)}{\operatorname{Re} A(\omega)}. \quad (3.7)$$

Si derivamos con respecto al tiempo la Ec. (3.2) obtenemos que la velocidad de la partícula está dada por:

$$\dot{y}(t) = i\omega A(\omega) e^{i\omega t}, \quad (3.8)$$

de manera similar, derivando la Ec. (3.8), obtenemos que su aceleración está dada por:

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 A(\omega) e^{i\omega t}. \quad (3.9)$$

De las ecuaciones (3.8) y (3.9) se puede observar que tanto la velocidad como la aceleración son señales armónicas con un valor máximo de $i\omega$ para el caso de la velocidad y $i^2\omega^2 = -\omega^2$ para el caso de la aceleración.

Por otra parte la rigidez y el amortiguamiento para un sistema de un solo grado de libertad masa-resorte-amortiguador se pueden estimar a partir de su respuesta en el

tiempo al impulso unitario. Para ello, considérese que la respuesta oscilatoria del sistema es como se muestra en la Figura 3.1.

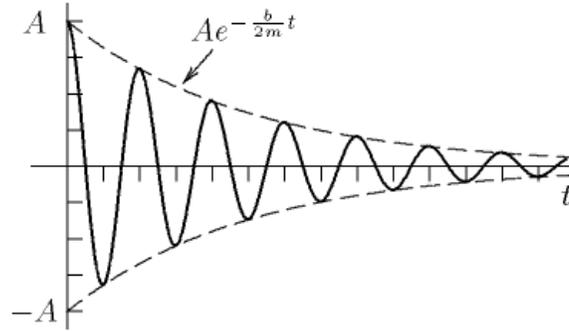


Figura 3.1. Respuesta de un sistema amortiguado. La amplitud de la senoide decrece de acuerdo a una exponencial que depende del amortiguamiento del sistema.

Matemáticamente la respuesta del sistema de la Figura 3.1 puede representarse como:

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.10)$$

donde,

- b es el coeficiente de amortiguamiento,
- m la masa del sistema,
- ω la frecuencia de oscilación y
- φ el ángulo de fase.

De acuerdo a la Ec. (3.10) la oscilación del sistema es descrita por una senoide de frecuencia:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}, \quad (3.11)$$

cuya amplitud está multiplicada por una exponencial decreciente con constante de tiempo $\tau = \frac{2m}{b}$. Considerando que la frecuencia de oscilación depende únicamente de la rigidez del sistema k , tenemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (3.12)$$

despejando para k en términos del periodo de oscilación T , encontramos que la rigidez del sistema está dada por:

$$k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m. \quad (3.13)$$

Por su parte, el coeficiente de amortiguamiento puede ser estimado a partir del decremento logarítmico de la respuesta en el tiempo del sistema como sigue:

$$b = \left(\frac{2m}{T}\right) \left[\ln \left(\frac{y_1}{y_2} \right) \right], \quad (3.14)$$

donde y_1 y y_2 son las amplitudes de dos picos consecutivos de la respuesta en el tiempo (Figura 3.1) y T es el intervalo de tiempo entre dichos picos.

3.2. Sistemas lineales y no lineales

Un sistema puede ser lineal o no lineal de acuerdo a su respuesta o salida. En un *sistema lineal* la(s) salida(s) dependen linealmente de la(s) entrada(s). Este tipo de sistemas obedece a los principios de superposición y homogeneidad. Donde el primero establece que si la salida $y_1(t)$ corresponde a la entrada $x_1(t)$ y la salida $y_2(t)$ corresponde a la entrada $x_2(t)$, entonces para una entrada $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ la salida correspondiente es $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$. Por su parte, el principio de homogeneidad establece que para una entrada escalada por un factor a , la salida correspondiente también es escalada por el mismo factor, $ay_1(t) = ax_1(t)$. Por el contrario, en un *sistema no lineal* la(s) salida(s) son función no lineal de la(s) entrada(s), por lo que no aplican los principios de superposición y homogeneidad.

Un sistema mecánico real es inherentemente no lineal, principalmente como consecuencia de los efectos de acoplamiento elásticos, viscosos o inerciales entre sus componentes, a causa de los materiales, fenómenos asociados a la modificación de la rigidez y amortiguamiento, por amplias deflexiones, desplazamientos rotacionales u otras características puramente cinemáticas, o como es el caso más común, de una combinación de varios de estos fenómenos. Debido a este amplio origen, frecuentemente resulta complejo representar la no linealidad de un sistema a partir de su modelado matemático (Mazzilli et al., 2008). Algunas características importantes de los sistemas no lineales son las

siguientes:

- La respuesta, en diferentes tiempos, a una entrada periódica no necesariamente es la misma. Esta depende de las condiciones iniciales, es decir, de los estados previos.
- Soluciones múltiples (estables e inestables) en estado estable en respuesta a las mismas entradas.
- El fenómeno de salto (jump), el cual involucra discontinuidades y cambios significativos en la respuesta del sistema.
- Movimientos complejos e irregulares (caóticos), extremadamente sensibles a las condiciones iniciales.
- Resonancias internas, involucrando diferentes partes del sistema vibratorio a diferentes frecuencias.

3.2.1. Ecuaciones no lineales: Duffing y van der Pol

Dos de las ecuaciones más utilizadas para describir el comportamiento de sistemas mecánicos no lineales son la ecuación de Duffing y la ecuación de van der Pol. La ecuación de Duffing (3.15) es una ecuación diferencial de segundo orden no lineal que describe el movimiento de ciertos modelos de osciladores amortiguados cuyo desempeño es más complicado que un movimiento armónico simple (Kovacic, 2011):

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \cos(\omega t), \quad (3.15)$$

donde,

- δ es el coeficiente de amortiguamiento,
- α es la rigidez del resorte,
- β es la no linealidad de la fuerza del resorte,
- F es la amplitud de la fuerza de excitación y
- ω es la frecuencia de oscilación.

La ecuación puede resolverse por varios métodos, uno de ellos es el de iteración, el cual es un proceso de aproximaciones sucesivas (Hu, 2006). Utilizando este método, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\omega^2 = \omega_n^2 + \frac{3}{4}\beta A^2 - \frac{F}{A}, \quad (3.16)$$

donde,

- ω es la frecuencia de la respuesta del sistema,
- A es la amplitud de la no linealidad de la fuerza del resorte y
- ω_n es la frecuencia natural del sistema.

Si $\beta = 0$ se obtiene el resultado para el sistema lineal dado por la Ec. (3.17), si $\beta \neq 0$ la frecuencia ω es una función de β , F y A , y si $F = 0$ se obtiene la ecuación de frecuencia (3.18) para la vibración libre.

$$A = \frac{F}{\omega_n^2 - \omega^2}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 + \frac{3}{4}\beta \frac{A^2}{\omega_n^2}. \quad (3.18)$$

Por otra parte, la ecuación de van der Pol (3.19):

$$\ddot{x} - \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (3.19)$$

proporciona un importante modelo matemático para sistemas dinámicos que tienen un único punto fijo inestable, junto con un único ciclo límite estable (Jiang and Wei, 2008). De manera particular, el comportamiento del ciclo límite de este sistema oscilador ha sido estudiado por muchos investigadores (Chen and Liu, 2009; G. Lin, 2007; Kovacic, 2011). Nótese que si el parámetro de amortiguamiento no lineal μ es igual a 0 en la ecuación (3.19), ésta se reduce a un movimiento armónico simple $x + \dot{x} = 0$.

3.3. Viga en voladizo

El modelo de una viga en voladizo es uno de los más empleados para modelar el comportamiento de elementos estructurales delgados, como álabes, aspas, trampolines, puentes, entre otros. Su uso radica en la similitud del comportamiento no lineal que dichos elementos tienen con una viga en voladizo sometida a grandes deformaciones (Jauregui-Correa and Gonzalez Brambila, 2009). Debido al amplio uso de los elementos delgados

en el diseño de máquinas y con el fin de estudiar su comportamiento, a continuación se presenta el desarrollo del modelo matemático de una viga en cantiliver.

Considérese la viga mostrada en la Figura 3.2, cuyo material es homogéneo, ortotrópico y lineal. El esfuerzo es encontrado a través de la deformación de la viga asumiendo que el desplazamiento perpendicular a la cara superior de la viga es mucho más grande que el espesor de la misma.

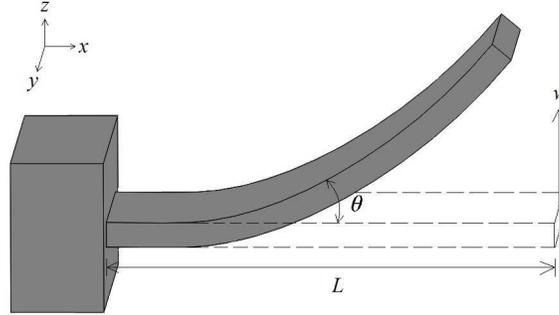


Figura 3.2. Geometría de una viga en cantiliver sometida a una gran deformación.

Si la viga es representada como un elemento en una dimensión, y el esfuerzo ocurre solo en la dirección x ; entonces, el campo de esfuerzos puede ser expresado como una función de la curvatura de flexión:

$$\epsilon = \frac{z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^3}}, \quad (3.20)$$

donde x , y y z son las coordenadas en el espacio y w es el desplazamiento a lo largo de z . Los subíndices indican derivadas parciales con respecto a x . Expandiendo los términos racionales como una serie convergente tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+m)^3}} = 1 - \frac{3}{2}m + \frac{15}{8}m^2 - \frac{105}{48}m^3 + \dots \quad (3.21)$$

Entonces, la función de esfuerzos puede ser reagrupada como:

$$\epsilon = z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (3.22)$$

Usando el método de Galerkin, el campo de desplazamiento se puede aproximar mediante un polinomio de la forma:

$$w = \sum_{i=1}^N a_i x^{i-1} \quad (3.23)$$

donde N es el número de grados de libertad del elemento y los coeficientes a_i son determinados a partir de las coordenadas generalizadas. Si la viga es representada como un elemento en una dimensión con dos nodos $j = 1, 2$, entonces, existen cuatro coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{u} = \{w_1, \theta_1, w_2, \theta_2\} \quad (3.24)$$

donde \mathbf{u} es el vector de coordenadas generalizadas, w_j son los desplazamientos y θ_j son los ángulos de flexión correspondientes a los nodos. Para éste caso particular, el polinomio de la Ec. (3.23) tiene cuatro coeficientes.

La ecuación de movimiento de la viga es encontrada a partir de la ecuación de Lagrange. La energía potencial, V , es determinada a partir de la función de energía de los esfuerzos:

$$V = \frac{1}{2} \int_v \sigma \epsilon dv. \quad (3.25)$$

Considerando solamente elementos de materiales con propiedades lineales, la ecuación constitutiva puede ser expresada como:

$$\sigma = E\epsilon. \quad (3.26)$$

Sustituyendo la Ec. (3.26) en la Ec. (3.25), la energía potencial es dada como:

$$V = \frac{1}{2} \int_v E\epsilon^2 dv. \quad (3.27)$$

En contraste, la energía cinética está determinada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_v \rho \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)^T \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) dv \quad (3.28)$$

Considerando que la viga es homogénea y la sección transversal es constante, las ecuaciones (3.27) y (3.28) son incluidas en la ecuación de Lagrange. De esta manera se obtienen cuatro ecuaciones, una por cada coordenada generalizada:

$$m_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} + \sum_4^{k=1} \frac{\partial V}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial u_i} = 0, \quad (3.29)$$

donde m_i son las masas asociadas a cada nodo. considerando que la viga se encuentra fija en un extremo, $w_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ y redefiniendo las otras dos coordenadas como $w_2 = 0$, $\theta_2 = 0$, la Ec. (3.29) se reduce a dos ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 w}{dt^2} + \xi \frac{dw}{dt} + \frac{17496}{385} \frac{EIw^5}{L^7} - \frac{486}{11} \frac{EIw^4}{L^6} + \left(\frac{1620}{11} \theta^2 - \frac{1296}{5} \right) \frac{EIw^3}{7L^5} - \\ \left(\frac{729}{22} \theta^3 - 162 \right) \frac{EIw^2}{7L^4} + \left(\frac{54}{77} \theta^4 - \frac{216}{35} \theta^2 + 12 \right) \frac{EIw}{L^3} - \\ \left(\frac{522}{385} \theta^4 - \frac{24}{7} \theta^2 + 6 \right) \frac{EI\theta}{L^2} = F(t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \xi \frac{d\theta}{dt} - \frac{486}{55} \frac{EIw^5}{L^6} - \frac{810}{77} \frac{EI\theta w^4}{L^5} + \left(-\frac{729}{22} \theta^2 + 54 \right) \frac{EIw^3}{7L^4} + \\ \left(-\frac{108}{11} \theta^2 - \frac{216}{5} \right) \frac{EIw^2}{7L^3} + \left(-\frac{522}{77} \theta^4 + \frac{72}{7} \theta^2 - 6 \right) \frac{EIw}{L^2} + \\ \left(\frac{1944}{385} \theta^4 - \frac{256}{35} \theta^2 + 4 \right) \frac{EI\theta}{L} = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde $F(t)$ es la fuerza de excitación y los términos polinomiales incluidos en la rigidez están relacionados a la fuerza de restauración generada por la energía potencial. Por lo tanto, la fuerza de restauración es modelada como un polinomio de quinto orden.

3.4. Sistema de transmisión mecánica

Otro sistema ampliamente utilizado y altamente no lineal es la transmisión mecánica, cuyo comportamiento no lineal se debe principalmente a las características de sus

componentes principales: engranes y rodamientos. La no linealidad de los engranes está asociada a la variación de la rigidez del engranaje, mientras que la no linealidad de los rodamientos se atribuye a la cinemática de sus elementos rodantes. A continuación se describe cada una de éstas dos principales fuentes de excitación.

3.4.1. Rigidez de engranaje

La rigidez de engranaje está relacionada a la relación de contacto del engranaje y varía periódicamente en función de la posición angular. Generalmente, las fluctuaciones de rigidez es representada por una forma rectangular o trapezoidal (Marano et al., 2011; Yang, 2013). Al aproximar la rigidez de engranaje a una forma rectangular (Figura 3.3), la función puede ser expandida en una serie de Fourier y después en una serie de Taylor como sigue:

$$S_t[\theta] = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3, \quad (3.32)$$

donde los coeficientes a_i dependen de la relación de contacto.

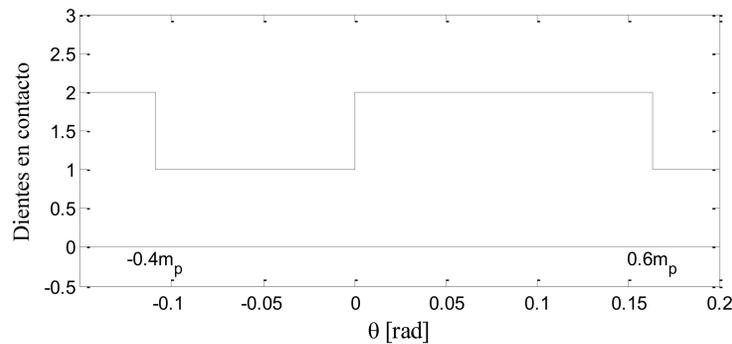


Figura 3.3. Aproximación de la rigidez de engranaje como una función periódica.

3.4.2. Error de transmisión

La excitación producida por el error de transmisión es otra importante fuente de inestabilidad en los sistemas de transmisión. Muchas investigaciones ha estudiado los efectos dinámicos del sistema (Cho et al., 2015; Wei et al., 2014). En esta investigación la fuerza de excitación es aproximada mediante la siguiente función:

$$F_e(t) = E_{ec}\cos(\omega t) + E_n\cos(N\omega t) + E_d\cos(\omega t), \quad (3.33)$$

la cual depende de la velocidad angular ω e incluye los errores causados por las excentricidades de los engranes (E_{ec}), el error del perfil de la involuta (E_n) y los efectos o daños en los dientes (E_d). La amplitud de los pulsos está relacionada a la severidad de los errores.

3.4.3. Rigidez de los baleros

El comportamiento no lineal de los baleros es producido principalmente por la variación instantánea en las condiciones de carga, fricción y amortiguamiento. Varios investigadores han trabajado en su modelado y han caracterizado algunos defectos en sus componentes (Kulkarni and Sahasrabudhe, 2014; Singh et al., 2015). El comportamiento no lineal de los baleros es producido principalmente por dos fenómenos: la deformación de la pista de los rodamientos y la variación del número de elementos rodantes soportando la carga. Los efectos de ambos fenómenos están determinados por la cinemática de los elementos rodantes (Harris, 2001). Cuando el eje está rotando a una velocidad ω_s , los elementos rodantes tienen un movimiento de traslación alrededor del eje del balero y un movimiento de rotación sobre su propio eje, ver Figura 3.4. El movimiento de traslación cambia el número de rodamientos que soportan la carga (Figura 3.5).

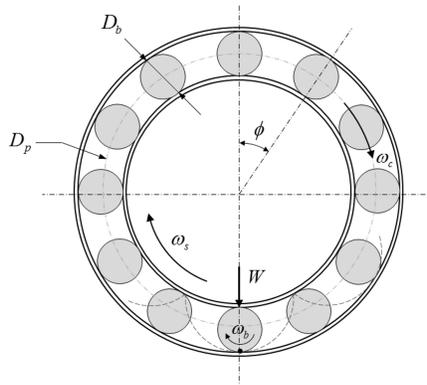


Figura 3.4. Cinemática de los elementos rodantes de un balero: Cada rodamiento tiene un movimiento rotacional sobre su propio eje y un movimiento traslacional alrededor del eje.

La variación del número de rodamientos que soporta la carga produce una deformación

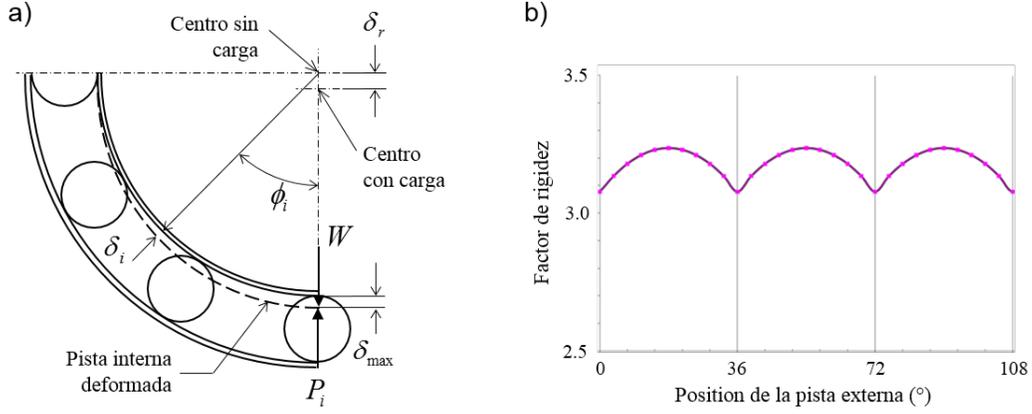


Figura 3.5. a) Deformación de la pista de un balero debido a la carga aplicada, b) Variación de la rigidez en el tiempo para un rodamiento.

de contacto en el i -ésimo rodamiento como una función de su posición angular (Figura 3.5a). Para un balero con N_c número de rodamientos en contacto, un diámetro de pitch D_p , diámetro de los rodamientos D_b y un ángulo de contacto α , la deformación de contacto para el i -ésimo rodamiento puede ser estimada como (Jauregui-correa, 2013):

$$\delta_i = \delta_{max} \cos \left[\frac{\pi}{2} - i \left(\phi_i + \frac{2\pi(i-1)}{N_c} \right) \right], \quad (3.34)$$

donde δ_{max} es la deformación de los rodamientos bajo carga, y ϕ_i es la posición angular del i -ésimo rodamiento dada por:

$$\phi_i = \frac{D_b \cos(\omega_c t)}{D_p + \frac{D_b}{2}} \cos(\alpha). \quad (3.35)$$

La deformación de cada elemento produce una fuerza de contacto S_i , la cual actúa radialmente sobre las pistas. Ésto genera una variación de la rigidez en el tiempo para el i -ésimo rodamiento, como se muestra en la Figura 3.4b. Aplicando la teoría de deformación de contacto de Hertz, el esfuerzo de contacto puede ser aproximado como:

$$S_b = \sum_{i=1}^N E \sqrt{\left(\frac{D_p D_b}{D_p - D_b} \right) \left(\frac{\delta_i}{\alpha} \right)^3}, \quad (3.36)$$

donde E es el módulo de young.

Como consecuencia de los movimientos de traslación y rotación, cada rodamiento pro-

duce cuatro frecuencias de excitación: frecuencia de la rejilla (ω_c), frecuencia de giro del elemento rodante (ω_{re}), frecuencia de la pista interna (ω_{ir}), y frecuencia de la pista externa (ω_{or}). Las expresiones para estas frecuencias de excitación fueron desarrolladas por Harris (2001):

$$\begin{aligned}\omega_c &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D_b}{D_p} \cos\alpha \right) \omega_s, \\ \omega_{re} &= \frac{D_p}{2D_b} \left[1 - \left(\frac{D_b}{D_p} \cos\alpha \right)^2 \right] \omega_s, \\ \omega_{ir} &= \frac{N}{2} \left(1 + \frac{D_b}{D_p} \cos\alpha \right) \omega_s, \\ \omega_{or} &= \frac{N}{2} \left(1 - \frac{D_b}{D_p} \cos\alpha \right) \omega_s.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Estas frecuencias son consideradas parte de las fuerzas de excitación de los baleros mediante la siguiente ecuación:

$$F(t) = F_c \cos(\omega_c t) + F_{re} \cos(\omega_{re} t) + F_{ir} \cos(\omega_{ir} t) + F_{or} \cos(\omega_{or} t),\tag{3.38}$$

donde la amplitud de cada componente depende de los errores de manufactura y la severidad de los defectos de los rodamientos y las pistas.

3.4.4. Formulación del modelo dinámico de una transmisión

La Figura 3.6 muestra el modelo dinámico de una transmisión de engranes de una etapa, donde los ensambles eje-engrane son representados mediante masas concentradas y la rigidez de la carcasa es modelada como un resorte lineal. La notación de la Figura 3.6 es la siguiente:

m_1, m_2	masas de los ensambles piñón-eje y engrane-eje
J_1, J_2	masa inercial de los ensambles piñón-eje y engrane-eje
r_1, r_2	radio del piñón y el engrane
F_1, F_2	fuerzas de excitación actuando sobre el piñón y el engrane
x	desplazamiento lineal
θ	desplazamiento angular
S_t	rigidez de engranaje

S_H rigidez de la carcasa
 S_{b1}, S_{b2} rigidez de los rodamientos

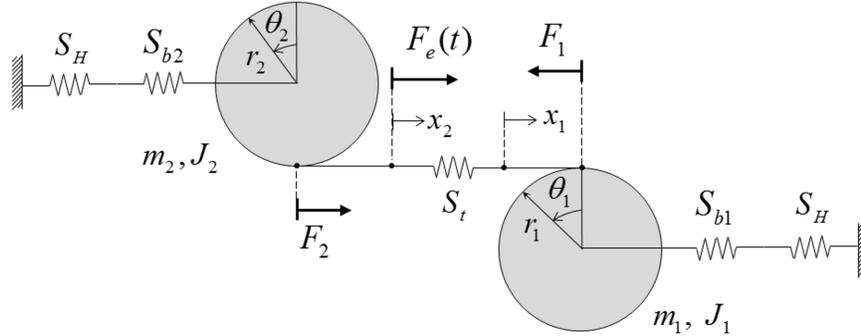


Figura 3.6. Diagrama esquemático del modelo dinámico de una transmisión de engranes de una etapa.

Usando las ecuaciones de Lagrange, el modelo matemático de la transmisión de la Figura 3.6 es formulado como sigue:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= \frac{F_1(t)}{m_1} - \frac{S_t}{m_1}u - \frac{S_{e1}}{m_1}x_1 \\
 \ddot{x}_2 &= \frac{F_2(t)}{m_2} + \frac{S_t}{m_2}u - \frac{S_{e2}}{m_2}x_2 \\
 \ddot{\theta}_1 &= -\frac{S_t}{J_1}r_1u + \frac{F_e(t)}{J_1} \\
 \ddot{\theta}_2 &= -\frac{S_t}{J_2}r_2u + \frac{F_e(t)}{J_2}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

donde S_{e1}, S_{e2} es la rigidez equivalente de la carcasa y los rodamientos y u es el desplazamiento relativo entre el engrane y el piñón dado por:

$$u = (x_1 - x_2) + (r_1\theta_1 + r_2\theta_2). \tag{3.40}$$

3.5. Técnicas de procesamiento de señales

Como se mencionó en el capítulo anterior y como se ha visto a lo largo de éste capítulo, el comportamiento no lineal de los sistemas mecánicos tiene una naturaleza

individualista, lo cual ha motivado el desarrollo de metodologías diversas para su identificación basadas en el uso de técnicas de procesamiento de señales. Ésta investigación está centrada en el desarrollo de una metodología de identificación no paramétrica. Las técnicas de procesamiento utilizadas son análisis en el dominio de la frecuencia, tiempo-frecuencia, diagramas de fase, análisis estadístico y programación genética. A continuación se presenta una breve descripción de cada una.

3.5.1. Análisis en el dominio de la frecuencia

En este grupo de técnicas, la transformada de Fourier (TF) es probablemente la herramienta de procesamiento de señales más utilizada en la ciencia e ingeniería. La TF descompone una señal en el dominio del tiempo en sus frecuencias constituyentes al medir la similitud entre la señal de entrada $y(t)$ y la función patrón $e^{-i2\pi f}$:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i2\pi f} dt. \quad (3.41)$$

A partir de la transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia es posible expresar información de la frecuencia promedio para el periodo completo de la señal. Sin embargo, la TF no revela la variación en el tiempo de las frecuencias de la señal y por lo tanto no es adecuada para el análisis de señales no estacionarias frecuentemente encontradas en los procesos industriales (Huang et al., 1998).

3.5.2. Análisis en el dominio tiempo-frecuencia

Comparado con la el análisis combinado en el dominio del tiempo y dominio de la frecuencia, estos métodos no proporcionan penetración adicional en la dinámica del sistema pero ofrecen una perspectiva diferente, y permiten la proyección de la historia de tiempo en un espacio que admite la separación de los componentes de la señal, lo cual facilita el filtrado en el caso de señales de múltiples componentes. éstas técnicas se basan en el teorema de la convolución de dos funciones, que se define como la integral del producto de ambas funciones después de desplazar una de ellas (P.S. Diniz and E.A. Da Silva and S.L. Netto, 2002). Para éste análisis utilizaremos la transformada wavelet continua (TWC) definida como:

$$W(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt. \quad (3.42)$$

$W(a, \tau)$ identifica similitudes entre la señal de entrada $x(t)$ y una función wavelet madre $\psi(t)$. a es el factor de escala, τ es la distancia de traslación a lo largo del eje tiempo, y $*$ es el complejo conjugado de la función wavelet madre. La función que comunmente utilizadas para el análisis de vibraciones mecánicas es la función Morlet, ya que habilita la identificación de comportamientos oscilatorios y amortiguados:

$$\psi(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp \left(-\frac{\eta^2}{2} \right) \exp (i2\pi f_0 \eta), \quad (3.43)$$

donde f_0 es la frecuencia central, y η es un parámetro no dimensional de tiempo.

Los resultados de aplicar la TWC se muestran en un mapa tiempo-frecuencia que permite ver la variación de cada frecuencia a lo largo del tiempo.

3.5.3. Diagrama de fase

El análisis y modelación de sistemas dinámicos puede ser desarrollado usando el enfoque Lagrangiano o el enfoque Hamiltoniano. El primero describe como la posición y velocidad cambian a lo largo del tiempo. El segundo, describe como la posición y el momento de una partícula específica un punto en un espacio llamado espacio de fase, plano de fase, o diagrama de fase entre otros.

La respuesta de un sistema dinámico puede ser representada como una función de energía. Ésta función depende del desplazamiento, la velocidad y el tiempo. La proyección de la función de energía sobre el plano real e imaginario es llamado el diagrama de fase. A cierto periodo, la función de energía forma un lazo, la suavidad de cada lazo determina la estabilidad del sistema. La función de un sistema mecánico es determinada usando la ecuación de Hamilton:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad (3.44)$$

donde (p, q) representa el espacio de fase de una partícula, además, $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Si el espacio de fase puede ser representado como una ecuación suave $\phi = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mathbb{R}$, entonces, esta representa la evolución del sistema en el tiempo. así, para un sistema con

n partículas:

$$\frac{d\phi}{dt} = \sum \frac{\partial\phi}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t}. \quad (3.45)$$

Utilizando la ecuación de Hamilton la función de campo se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \sum \frac{\partial\phi}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial\phi}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial q_i}, \\ \phi(t) &= [q(t), q(p)]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Para un sistema mecánico de un solo grado de libertad sometido a una respuesta forzada periódica, la Ec. (3.46) está dada como:

$$\phi(t) = \left[q(0) \sin(\omega t) + \frac{p(0)}{m} \cos(\omega t), p(0)m\omega \cos(\omega t) - p(0)\omega \sin(\omega t) \right]. \quad (3.47)$$

En el caso de sistemas lineales periódicos, el campo descrito por la Ec. (3.47) dibuja una elipse en cualquier instante de tiempo.

3.5.4. Transformada de Hilbert y parámetro de orden de Kuramoto

Kuramoto propuso un método para estimar el grado de sincronización entre N osciladores conectados mediante una fuerza de acoplamiento uniforme K , la cual es determinada por la rigidez de los elementos de acoplamiento (Kuramoto, 1975, 1984; Strogatz, 2000). En el más simple de los casos, un acoplamiento global, donde todos los osciladores se encuentran conectados entre sí, cada oscilador es caracterizado por una fase angular $\phi_i(t)$ y una frecuencia natural ω_i elegida de manera aleatoria a partir de la densidad de probabilidad $g(\omega)$. La dinámica del i -ésimo oscilador es derivada a partir del clásico modelo de Kuramoto:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i), i = 1, \dots, N, \quad (3.48)$$

cuando $N \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow \infty$, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$r(t) = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\varphi_j(t)} \right|, 0 \leq r(t) \leq 1. \quad (3.49)$$

De esta manera, la magnitud del parámetro de orden puede ser interpretada como una medida de la sincronización. Nótese que si el sistema está completamente sincronizado, el valor de la fase instantánea de todos los osciladores es igual, por lo tanto, $r = 1$; mientras que, si la fase instantánea de los osciladores está distribuida uniformemente en el intervalo $[0, 2\pi)$, el parámetro de orden es $r = 0$.

El ángulo de fase instantánea de una señal $x(t)$ puede ser calculado a partir de la transformada de Hilbert (Feldman, 2011):

$$H[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(v)}{\pi(t-v)} dv, \quad (3.50)$$

donde v y t son parámetros de traslación y tiempo, respectivamente.

Dado que $H[x(t)]$ es una serie de tiempo compleja, ésta se puede definir mediante la señal analítica $B(t)$:

$$B(t) = x(t) + iH[x(t)], \quad (3.51)$$

donde la fase instantánea de los osciladores puede ser estimada como:

$$\phi(t) = \arctan \frac{H[x(t)]}{x(t)}, \quad (3.52)$$

3.5.5. Descriptores estadísticos

Debido a que el parámetro de orden de Kuramoto es una técnica en el dominio del tiempo, es necesario realizar un análisis estadístico con el fin de cuantificar el grado de sincronización. Los principales descriptores estadísticos utilizados en esta investigación se listan a continuación:

1. Correlación cruzada. La correlación cruzada entre dos señales $x(t)$ y $y(t)$ se define como

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t + \tau)dt, \quad (3.53)$$

donde τ es el factor de corrimiento entre las señales: La función de correlación cruzada puede ser normalizada mediante $R_{xy}(0)$ o por su valor máximo $R_{xy}|_{max}$. El coeficiente de correlación es entonces $C_{xy} = R_{xy}(0)$. De manera similar, la función de autocorrelación de $x(t)$ consigo misma es $R_{xx}(\tau)$.

2. Kurtosis. Es una medida de la forma de la distribución de probabilidad de una serie de datos. Una Kurtosis mayor, indica una concentración de datos muy cerca de la media de la distribución α . En esta investigación, se consideró $\alpha = 1$, ya que representa sincronización completa:

$$Kur = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^4}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2\right]^2} \quad (3.54)$$

3.5.6. Algoritmos de optimización

Se llama *optimización* al proceso de hacer algo mejor. Por ejemplo, trazar la mejor ruta para ir de casa a la escuela. El proceso infiere que existen diferentes soluciones, donde la mejor solución depende de las características de la salida deseada. Si se desea tener la menor distancia entonces la salida puede ser encontrada fácilmente a partir de la magnitud de cada ruta, si por el contrario se desea lograr el menor tiempo, la salida dependerá de mayor número de variables como el clima, el tráfico, las condiciones de la carretera, entre otras variables.

Hoy en día, los avances tecnológicos y herramientas computacionales han hecho posible el desarrollo de diversos algoritmos de optimización. A continuación se describen dos de las técnicas utilizadas en esta investigación: *algoritmos genéticos* y *programación genética*.

3.5.7. Algoritmos genéticos

La base de operación de los algoritmos genéticos es la simulación del proceso de evolución de las especies a partir del principio de la selección natural de Darwin. El algoritmo inicia con la definición de los parámetros de operación y continúa con la generación de

un número aleatorio de soluciones potenciales, donde cada solución representa un *individuo* del conjunto llamado *población*, ver Figura 3.7. Posteriormente, la población es evaluada con una *función costo* o *función objetivo*, predefinida de acuerdo al problema particular. Como resultado cada individuo recibe un puntaje que indica su potencial para resolver el problema. La simulación del proceso de selección natural sucede de tal manera que los “mejores” individuos reciben una mayor probabilidad de sobrevivir, mientras que los “peores” obtienen una menor probabilidad. Así, los individuos que sobreviven participan en el proceso de *reproducción*, el cual combina dos individuos para crear uno nuevo (descendencia) esperando ofrezca una mejor solución. Después de la reproducción, sobre la nueva población se aplica un operador genético llamado *mutación*; éste operador cambia algunas características del individuo de acuerdo a una probabilidad pre-establecida con el fin de introducir nuevos elementos en la solución. El ciclo de evaluación, selección, reproducción y mutación es repetido tantas veces hasta que se cumple con un criterio de paro; generalmente que una solución aceptable sea encontrada o un número predefinido de iteraciones sea alcanzado. La evolución de los individuos se desarrolla conforme las iteraciones se llevan a cabo, encontrando así, la solución óptima al problema.

Existen dos tipos de vertientes para el manejo de las variables en los algoritmos genéticos: la *codificación binaria* y la *forma continua*. En la primera los valores de las variables son codificados en cadenas binarias; mientras que en la segunda, las variables son representadas por números de punto flotante. Dado que la forma continua es la vertiente utilizada en ésta investigación, a continuación se describe de manera más detallada.

3.5.8. Algoritmo genético continuo

Las principales ventajas que ofrece la forma continua de los algoritmos genéticos respecto a la codificación binaria son: menor tiempo de ejecución, al no existir un proceso de codificación/decodificación de las variables y mayor precisión en la solución numérica, al no restringir el número de bits con que se representan los datos. No obstante, sin importar la vertiente, las etapas básicas para el desarrollo de cualquier algoritmo genético son las mismas.

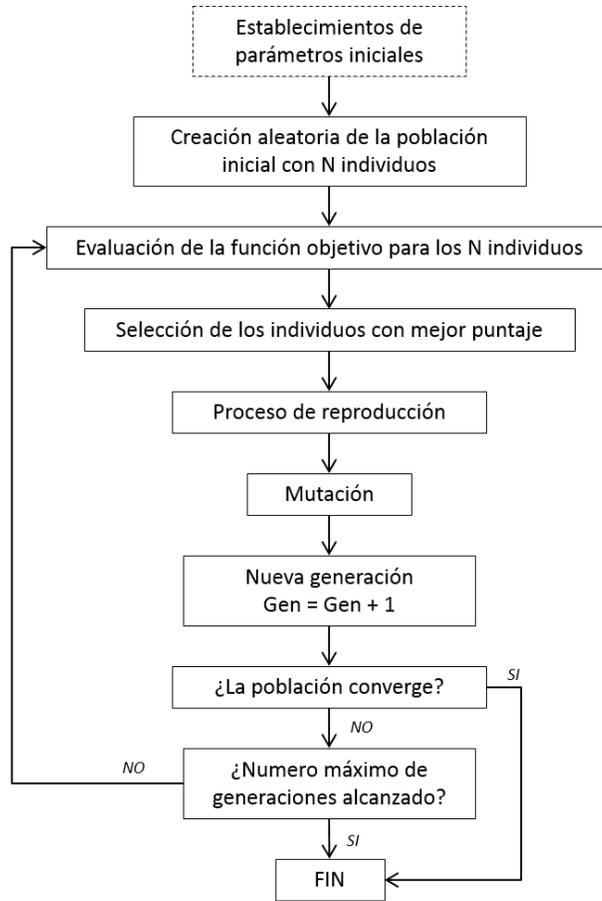


Figura 3.7. Diagrama de flujo del proceso de evolución usando algoritmos genéticos.

a) Definición de los parámetros iniciales

Antes de iniciar el desarrollo del algoritmo, es necesario definir un *individuo* como un arreglo de N variables a ser optimizadas, donde la elección de las variables depende de la naturaleza del problema a resolver:

$$p = [p_1, p_2, p_3, \dots, p_{Nvar}]. \quad (3.55)$$

Este paso es crucial dado que a través de la optimización del individuo se encontrará la mejor solución al problema dado. Partiendo de esta primicia, es indispensable establecer un rango de valores en el que oscilará cada variable. Dicho rango está expresado por:

$$val_{inf(i)} \leq p_i \leq val_{sup(i)}. \quad (3.56)$$

Otro paso importante es definir la *función de costo* que evaluará a los individuos. Ésta definición depende de cada problema particular y está determinada por el conjunto de restricciones del mismo problema:

$$costo = f(p) = f(p_1, p_2, p_3, \dots, p_{N_{var}}) \quad (3.57)$$

Como resultado, la función de la Ec. (3.57) entrega un *puntaje*, también llamado *costo*, que indica que tan bueno o malo es el individuo en la solución del problema planteado.

Para concluir ésta sección, es importante establecer *parámetros de control del algoritmo* como son el *tamaño de la población*, la probabilidad de desarrollar las operaciones genéticas de *reproducción* y *mutación* y los *criterio de terminación* del algoritmo, como son el *número máximo de iteraciones* y el *costo mínimo* esperado.

b) Definición de la población inicial

Después de definir los parámetros iniciales, el primer paso del algoritmo es definir una población inicial formada por N_{pop} individuos. La población es representada mediante una matriz de dimensión $N_{pop} \times N_{var}$, donde cada fila de la matriz ($1 \times N_{var}$) es un individuo definido por la Ec. (3.55). La población inicial es generada de manera que cada variable toma un valor aleatorio dentro de su rango:

$$pop = rand(N_{pop}, N_{var}). \quad (3.58)$$

Nótese, que en la Ec. (3.58) todas las variables están normalizadas por la función *rand* entre los valores 0 y 1, por lo que es necesario desnormalizar sus valores en los rangos establecidos para cada variable como sigue:

$$v(i) = val_{norm(i)} \times (val_{sup(i)} - val_{inf(i)}) + val_{inf(i)} \quad (3.59)$$

donde,

- $val_{norm(i)}$ valor normalizado de la variable i dado por la función *rand*,
- $val_{inf(i)}$ limite inferior del rango de la variable i ,
- $val_{sup(i)}$ limite superior del rango de la variable i .

Así, la población queda definida mediante la matriz:

$$pop = \left\{ \begin{array}{cccccc} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \dots & v_{1Nvar} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \dots & v_{2Nvar} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \dots & v_{3Nvar} \\ & & \ddots & & \\ v_{Npop1} & v_{Npop2} & v_{Npop3} & \dots & v_{NpopNvar} \end{array} \right\} \quad (3.60)$$

c) Selección

Todos los individuos de la población son evaluados mediante la función de costo para calificar que tan óptimos son en la solución del problema. Los individuos son re-ordenados de menor a mayor costo obtenido. El porcentaje de individuos que sobrevivirán en la siguiente generación y que participarán en el proceso de reproducción está definido por la tasa de sobrevivientes establecida en los parámetros iniciales, T_{sob} ; por ejemplo si el porcentaje de la población que sobrevivirá es 50%, entonces $T_{sob} = 0.5$. De manera que sólo un número de individuos $N_{sob} = N_{pop} \times T_{sob}$ sobrevivirá, el resto de la población morirá (será eliminado). Éste proceso de selección natural es repetido en cada iteración del algoritmo, habilitando así la evolución de la población en cada generación.

d) Reproducción

La reproducción es el proceso mediante el cual se generan descendientes (hijos) a partir de un conjunto de padres seleccionados. El proceso consta de dos etapas: el emparejamiento y el apareamiento. A continuación se describe cada una.

Emparejamiento. El emparejamiento refiere a la selección de un conjunto de individuos que fungirán como padres para generar una nueva descendencia. Existen diferentes técnicas de selección, siendo las más comunes la *reproducción aleatoria ponderada* y la *selección por torneo*.

- *Reproducción aleatoria ponderada.* La probabilidad que cada individuo tiene de ser seleccionado es inversamente proporcional a su costo, de manera que los individuos con menor costo tienen mayor probabilidad de reproducción y viceversa. Existen dos métodos para establecer la probabilidad de selección:

1. Rango ponderado: la probabilidad que un individuo tiene de ser seleccionado está determinada por

$$P_n = \frac{N_{sob} - n + 1}{\sum_{n=1}^{N_{sob}} n}, \quad (3.61)$$

donde, n es la posición que el individuo ocupa en el ordenamiento de menor a mayor costo. Entonces, la selección del individuo se realiza mediante su probabilidad acumulada $\sum_{i=1}^n P_i$. Para ello, se asigna a un individuo un número aleatorio en el rango 0 y 1. Si la probabilidad acumulada es mayor que el número asignado, entonces el individuo es seleccionado. En caso de que el mismo individuo sea elegido dos veces (como madre y padre) se puede optar por dejarlo participar, aunque en la siguiente generación existan tres individuos repetidos (el padre y sus dos hijos), elegir otro individuo utilizando la misma técnica o seleccionar otro individuo de manera aleatoria.

2. Costo ponderado: la probabilidad de selección de cada individuo es calculada a partir de su costo en lugar de su rango. Para ello, un costo normalizado de cada individuo es calculado a partir de la resta del costo más bajo de los individuos descartados, asegurando así, que los costos de los sobrevivientes sean negativos. Éste enfoque tiende a ponderar más el individuo superior cuando hay una gran dispersión en el costo entre los individuos superior e inferior. Por otro lado, tiende a ponderar los individuos de manera uniforme cuando todos tienen aproximadamente el mismo costo. Las acciones a tomar en caso de elegir el mismo individuo en un apareamiento son las mismas que en el caso anterior.
 - *Selección por torneo.* Este enfoque imita la competencia de emparejamiento en la naturaleza. Consiste en escoger al azar un pequeño subconjunto de los individuos (dos o tres) y elegir al individuo con el menor costo como padre. El torneo se repite para todos los padres necesarios, habilitando así, la selección de un buen par de individuos, ya que la población no tiene que ser sorteada.

Pese a que ambas técnicas son estándares para la selección de los padres, con cada una de ellas se obtiene un conjunto diferente de padres. En ésta investigación se implementa la selección por rango ponderado.

Apareamiento. El apareamiento es la creación de uno o más descendientes a partir de la combinación de los padres seleccionados en el proceso de emparejamiento. Existen

muchos métodos para realizar el proceso de apareamiento.

El método más simple consiste en seleccionar aleatoriamente uno a más puntos en los individuos padres para realizar un cruce de variables. Por ejemplo, dados los padres:

$$\begin{aligned} madre &= [v_{m1}, v_{m2}, v_{m3}, v_{m4}, v_{m5}, v_{m6}, v_{m7}\dots, v_{mNvar}] \\ padre &= [v_{p1}, v_{p2}, v_{p3}, v_{p4}, v_{p5}, v_{p6}, v_{p7}\dots, v_{pNvar}], \end{aligned} \quad (3.62)$$

y los puntos de cruce 3 y 6, la descendencia estará dada por:

$$\begin{aligned} hijo_1 &= [v_{m1}, v_{m2}, v_{p3}, v_{m4}, v_{m5}, v_{p6}, v_{m7}\dots, v_{mNvar}] \\ hijo_2 &= [v_{p1}, v_{p2}, v_{m3}, v_{p4}, v_{p5}, v_{m6}, v_{p7}\dots, v_{pNvar}] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Éste método ha tenido buenos resultados en la forma binaria de los algoritmos genéticos; sin embargo, en la forma continua no aporta en la introducción de nueva información, ya que los valores aleatorios generados en la población inicial son propagados a la siguiente generación, sólo en diferentes combinaciones, dejando la responsabilidad de evolución al operador de mutación.

Un segundo método consiste en la mezcla de las variables de los padres. El método inicia con la selección aleatoria de un punto de cruce (*enésima* variable) donde se realizará la combinación de valores, dando paso a la generación de las nuevas variables que aparecerán en los hijos:

$$\begin{aligned} v_{h1} &= v_{mn} - \alpha(v_{mn} - v_{pn}) \\ v_{h2} &= v_{pn} + \alpha(v_{mn} - v_{pn}) \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde,

- α es un número aleatorio entre 0 y 1,
- v_{mn} es la *enésima* variable en el cromosoma madre,
- v_{pn} es la *enésima* variable en el cromosoma padre.

Nótese que si $\alpha = 0, 1$, las nuevas variables son una copia de los padres; mientras que, para $0 < \alpha < 1$, la información se combina. El punto de cruce marca también el lugar a partir del cual se intercambiarán variables entre los padres, ya sea hacia la izquierda o hacia la derecha del cromosoma. De manera que la descendencia está dada por:

$$\begin{aligned} hijo_1 &= [v_{m1}, v_{m2}, v_{p3}, \dots, v_{hijo1}, v_{pNvar}], \\ hijo_2 &= [v_{p1}, v_{p2}, v_{m3}, \dots, v_{hijo2}, v_{mNvar}]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Igual que en el método anterior, es posible elegir más de una variable para ser combinada. Además, la mezcla puede realizarse utilizando el mismo valor de α para todas las variables o eligiendo un valor diferente para cada una.

e) Mutación

La importancia de la mutación radica en el hecho de que el algoritmo puede converger rápidamente en un mínimo local de la superficie de costo, en lugar del mínimo global. Para evitar éste problema, el algoritmo es forzado a explorar otras áreas de la superficie de costo; ésto mediante la alteración aleatoria de un porcentaje de las variables de la población. El número de mutaciones que se llevarán a cabo está determinado por la tasa de cambio o mutación $\%mut$ como sigue:

$$N_{mut} = \%mut \times N_{pop} \times N_{var} \quad (3.66)$$

Entonces de manera aleatoria se eligen las filas y columnas de las variables que serán mutadas. Posteriormente, la variable a mutar es reemplazada por un nuevo valor generado aleatoriamente como se definió en la Ec. (3.59).

f) Próxima generación

Después de las mutaciones, los costos asociados a la nueva generación son calculados. Entonces, el ciclo de selección-reproducción-mutación es iterado hasta alcanzar alguno de los criterios de terminación establecidos, ya sea que el costo mínimo esperado haya sido logrado o que un determinado número de iteraciones haya sido alcanzado .

3.5.9. Programación genética

La idea básica de la programación genética es similar a la de los algoritmos genéticos, aunque existe mayor complejidad en la estructura de las funciones para encontrar la solución óptima a un problema dado, ya que la solución se realiza a través de la generación

automática de funciones complejas entre los datos de entrada y salida de un sistema. En el algoritmo de programación genética, la sintaxis generalmente es representada en forma de árbol, el cual consta de dos tipos básicos de nodos: nodo de función y nodo terminal. Los nodos de función generalmente contienen funciones aritméticas, mientras que los nodos terminales contienen variables y constantes. Por ejemplo, la Figura 3.8 representa en diagrama de árbol el programa para calcular la expresión algebraica $(9 + x)x + 2[x/(y - 3)]$, donde cada rama o subárbol corresponde a una subrutina del programa que se agrupa a otras por medio de un nodo raíz.

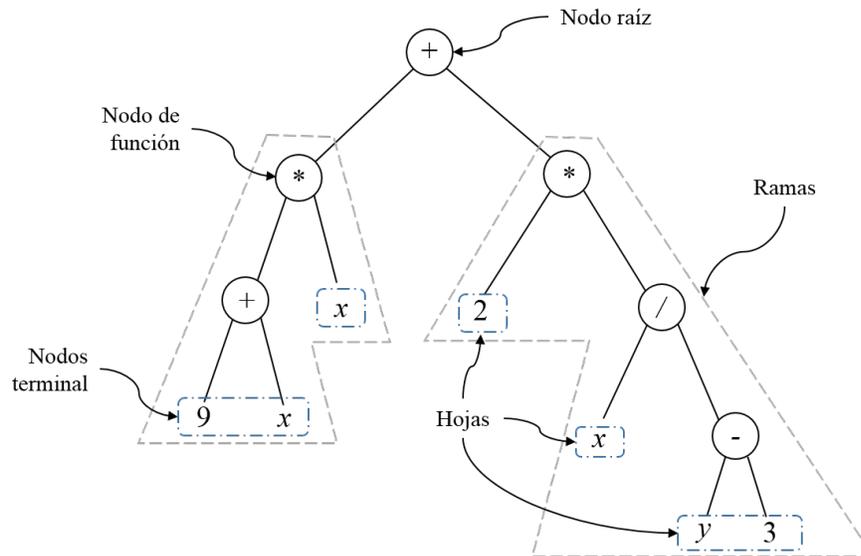


Figura 3.8. Sintaxis de árbol para representar la expresión $(9 + x)x + 2[x/(y - 3)]$.

Los pasos para desarrollar un algoritmo de programación genética se describen en las siguientes subsecciones.

a) Definición de parámetros iniciales

Al implementar un algoritmo de programación genética es necesario definir algunos parámetros iniciales:

- *Conjunto de terminales*: junto con el conjunto de funciones, define los componentes que estarán disponibles para la creación de programas. El conjunto de terminales puede contener diferentes tipos de datos, como son *variables*, por ejemplo x , y , \dot{x} ; *constantes* generadas aleatoriamente a partir de un rango de valores predefinido y *funciones sin argumentos* que no requieren argumentos de entrada y

cada vez que son utilizadas regresan diferentes valores o realizan una acción, por ejemplo la función *rand()* o la acción de encender/apagar un actuador.

- *Conjunto de funciones*: está definido por la naturaleza del dominio del problema. Por ejemplo, para un problema numérico simple el conjunto de funciones puede estar formado por (+, −, /, *), en caso de problemas matemáticos puede incluir (*cos*, *sin*, *exp*, *log*), para problemas lógicos (AND, NOT, OR), entre otros. En la definición de éste conjunto es importante tener en cuenta el cumplimiento de algunas propiedades:
 - Consistencia. Es necesaria para asegurar que los individuos puedan ser mezclados y reemplazados arbitrariamente durante las operaciones de cruce y mutación descritas más adelante. Para ello, las funciones deben aceptar el mismo tipo de datos, tener la misma *aridad* (cantidad de argumentos de entrada) y entregar el mismo tipo de datos de salida.
 - Seguridad de evaluación. Asegura que en caso de existir un error durante la evaluación de un programa se ejecute una excepción o que el individuo que lo generó sea penalizado mediante la reducción de su costo. Un ejemplo muy común de una excepción es la división protegida, la cual en caso de que el segundo argumento de la función sea cero, devuelve el valor 1.
 - Suficiencia. Garantiza que el conjunto de primitivos contenga las funciones necesarias para desarrollar programas que aproximen a la solución deseada del problema a resolver. Durante su definición se debe tener cuidado de no agregar funciones innecesarias, ya que lejos de asegurar la suficiencia puede hacer lenta la convergencia del algoritmo. La suficiencia depende del conocimiento teórico y experimental del problema a resolver que el programador tenga a partir de otros métodos.
- *Función costo*: es el mecanismo mediante el cual se evalúa el desempeño de los individuos en la solución del problema. El costo puede ser medido en diferentes formas dependiendo del objetivo del programa: por ejemplo, en términos del error entre la entrada y la salida, la cantidad de tiempo, la exactitud, etc. Además la evaluación del costo puede ser multi-objetivos, es decir, puede combinar dos o más elementos diferentes.
- *Parámetros de control del algoritmo*: ya que controlan la ejecución del algoritmo, es necesario establecer la probabilidad de desarrollar las operaciones genéticas de

reproducción y mutación, el tamaño de la población, el tamaño máximo de los individuos y los criterios de terminación del algoritmo, como son el costo mínimo esperado y el número de máximo de generaciones a ejecutar.

En la definición del tamaño de los individuos es importante establecer la profundidad máxima de los árboles, entendiendo profundidad como la cantidad de nodos de función que necesitan ser atravesadas desde la última hoja hasta llegar al nodo raíz. Por ejemplo, para el diagrama de la Figura 3.8 *profundidad* = 4.

b) Definición de la población inicial

De manera similar a cualquier otro algoritmo evolutivo, el primer paso es generar de manera aleatoria una población inicial. Existen diferentes criterios y métodos para generar la población inicial. A continuación se describen los más fáciles de implementar.

- *Método completo*: genera árboles en los que todas sus hojas están a la misma profundidad. Los nodos son asignados del conjunto de funciones hasta que la profundidad máxima es alcanzada, a partir de esa profundidad los nodos son completados con elementos del conjunto de terminales. Aunque éste método genera árboles de la misma profundidad, el tamaño del árbol y la forma puede variar si la aridad de las funciones en el conjunto primitivo es diferente.
- *Método creciente*: permite crear árboles de tamaños y formas variadas, donde los nodos son seleccionados tanto del conjunto de funciones como del conjunto de terminales hasta que la profundidad máxima es alcanzada; una vez alcanzada la profundidad máxima, sólo es posible elegir elementos del conjunto de terminales.

En ambos métodos la profundidad de los individuos generados no debe sobrepasar la profundidad máxima establecida en los parámetros iniciales del algoritmo. Es importante tener en cuenta que la selección del método para generar la población inicial condiciona la distribución estadística del tamaño y la forma de los árboles de acuerdo al tamaño de los conjuntos primitivos de funciones y terminales. Si el conjunto de terminales es mayor que el conjunto de funciones, el método creciente generará árboles menores que el límite máximo de profundidad, mientras que si el conjunto de funciones es mayor que el conjunto de terminales, el método creciente generará árboles de tamaño similar al método completo. Finalmente, cabe señalar que en caso de conocer algunas propiedades de la solución deseada, se pueden generar árboles con dichas propiedades

y usarlas para sembrar la población inicial, de manera que no toda la población sea generada aleatoriamente.

c) Selección

En la etapa de selección todos los individuos son evaluados mediante la función de costo y re-ordenados del menor a mayor costo obtenido. Entonces, un porcentaje determinado por la tasa de sobrevivientes, permanecerá en la siguiente generación y además participará en el proceso de reproducción para generar una nueva descendencia. La selección de parejas o padres que se reproducirán para dar lugar a la nueva descendencia, se lleva a cabo mediante el método de *selección por torneo* descrito en la sección anterior. Éste método de selección de parejas y el criterio de selección basado en el menor costo es repetido en cada generación del algoritmo.

d) Reproducción

El proceso de reproducción es un tanto diferente al descrito en la sección anterior debido a la sintaxis de árbol de los individuos. La metodología más común para éste proceso es el *cruce de subárboles*, ver Figura 3.9. En ésta metodología, primero se selecciona un nodo en cada árbol de los padres para ser el punto de cruce; después, el subárbol a partir del punto de cruce de la madre es reemplazado con el subárbol de la raíz hasta el punto de cruce del padre para crear el primer hijo. Posteriormente, el subárbol a partir del punto de cruce del padre es reemplazado con el subárbol de la raíz hasta el punto de cruce de la madre para crear el segundo árbol hijo.

La selección de los puntos de cruce no se realiza con una probabilidad uniforme. Poli et al. (2008) sugirió utilizar como punto de cruce la elección de funciones en un 90 % de las veces y de hojas en un 10 %. Mientras que la tasa de reproducción frecuentemente es establecida para ser de 90 % o mayor.

e) Mutación

El método de mutación más usado en la programación genética consiste en seleccionar un nodo como punto de mutación y sustituir el subárbol con otro generado aleatoriamente, ver Figura 3.10. Un segundo método consiste en la selección aleatoria de un nodo y el reemplazo de su contenido con un elemento del mismo conjunto primitivo;

éste método permite la mutación de múltiples nodos en un mismo árbol. En el caso de la mutación el porcentaje de ocurrencia típicamente es establecido en 1 %.

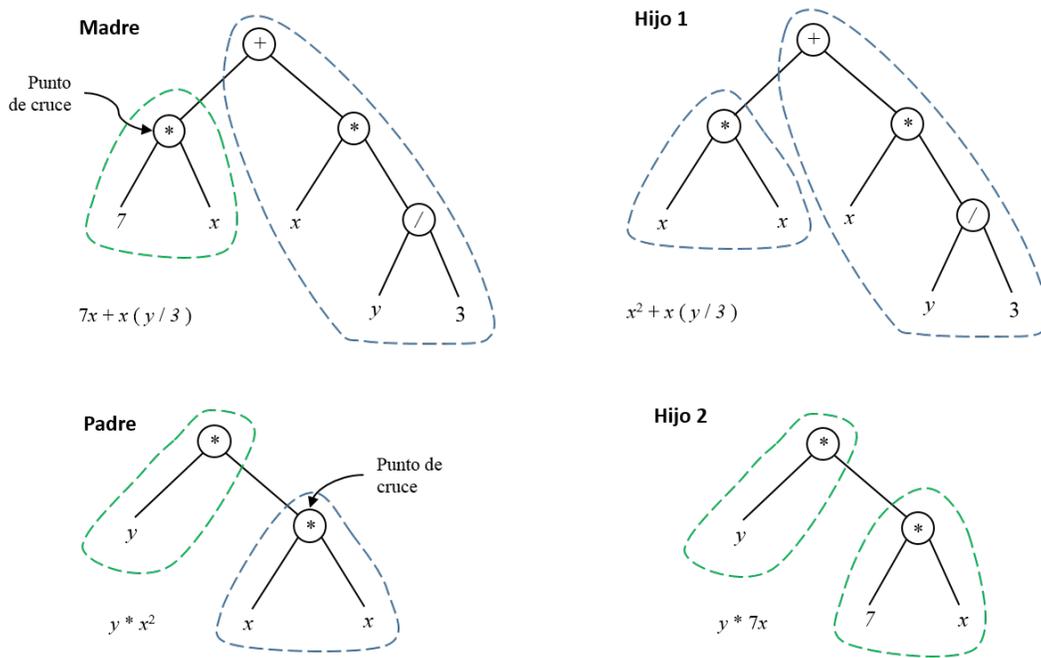


Figura 3.9. Ejemplo del cruce de subárboles en el proceso de reproducción.

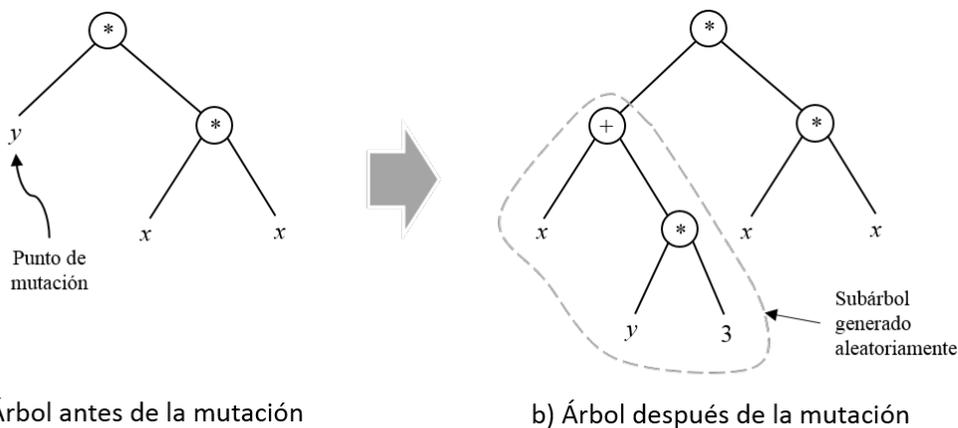


Figura 3.10. Ejemplo de la mutación de un subárbol.

f) Próxima generación

La población mutada es evaluada para calcular nuevamente los costos asociados a los individuos. Entonces, las etapas de selección-reproducción-mutación son repetidos hasta alcanzar alguno de los criterios de terminación del algoritmo.

En el siguiente capítulo se presentan los sistemas estudiados en ésta investigación y se describen de manera detallada los bancos de pruebas y la metodología seguida para el análisis de la información registrada.

Capítulo 4

Metodología

Con el objetivo de desarrollar herramientas para la identificación de los parámetros no lineales en sistemas mecánicos se analizaron varios casos de estudio, donde cada uno de ellos, además de caracterizar la dinámica no lineal propia de éstos sistemas, permitió probar la eficacia de las técnicas de procesamiento propuestas en esta investigación. La Figura 4.1 resume los sistemas analizados en esta investigación.

Primero se analizó uno de los casos más simples de los sistemas dinámicos, una viga en voladizo, la cual debido a sus características de diseño y materiales presenta un desempeño no lineal, el cual se amplifica bajo ciertas condiciones iniciales como los grandes desplazamientos. Este primer análisis permitió estudiar y caracterizar los diferentes fenómenos que ocurren en la dinámica de los elementos no lineales.

En una segunda etapa se estudió el caso de un automóvil como un sistema complejo formado por múltiples componentes conectados entre sí mediante elementos de acoplamiento que habilitan la propagación de ondas a través de los componentes. Utilizando diversas técnicas de análisis se pudo identificar el efecto de las fuerzas de acoplamiento entre los componentes del sistema y la manera en que éstas influyen en la dinámica del sistema en su totalidad.

A partir de éste punto, con el reconocimiento de los fenómenos característicos de un sistema no lineal, en una tercera etapa se analizaron dos sistemas de transmisión mecánica: una transmisión automotriz de siete velocidades y una transmisión de una etapa. Éstos sistemas además de ser complejos, están formados por componentes altamente no lineales (engranes y cojinetes) que generan sus principales fuentes de excitación. Para el caso de la transmisión de una etapa se desarrolló un modelo dinámico de cuatro

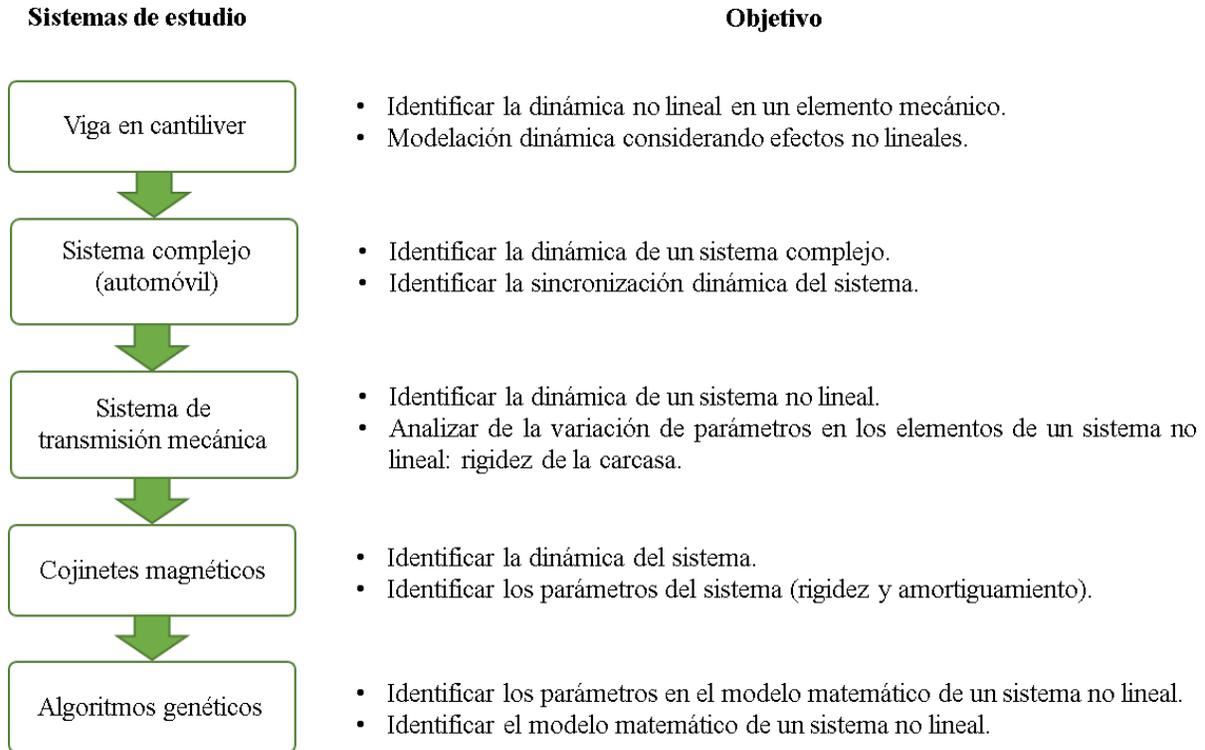


Figura 4.1. Diagrama de los sistemas estudiados en el desarrollo de la metodología para la identificación de parámetros no lineales en sistemas mecánicos.

grados de libertad, en el que se incluyó la rigidez de la carcasa con el fin de estudiar los efectos que ésta produce en el desempeño dinámico del sistema; la solución numérica del modelo fue analizada y comparada con el caso experimental.

Como cuarta etapa se analizó el comportamiento de un par de cojinetes de gas que servían de soporte para un rotor de una turbina. El análisis de los datos experimentales se ejecutó con el diagrama de fase logrando identificar la variación de los parámetros de rigidez y amortiguamiento de los cojinetes.

Finalmente, en la quinta etapa se abordó el tema de algoritmos inteligentes para la identificación de parámetros de un sistema mecánico no lineal representado con la ecuación de Duffing. También se incursionó en el desarrollo de un algoritmo de programación genética para la identificación del modelo matemático del mismo sistema, aunque los resultados obtenidos no fueron satisfactorios.

La metodología desarrollada para cada uno de los casos de estudio anteriormente mencionados se detalla en las siguientes secciones. Cabe mencionar, que en la mayoría de los casos estudiados, los datos experimentales fueron obtenidos a partir de las vibraciones

mecánicas, debido a la gran cantidad de información que éstas ofrecen sobre la dinámica del sistema. Sólo en el caso de los cojinetes la variable medida fue el desplazamiento.

4.1. Análisis de una viga en voladizo

El modelo de la viga en voladizo dado por las ecuaciones (3.30) y (3.31) fue resuelto numéricamente usando el método de Runge-Kutta con el objetivo de analizar el comportamiento no lineal de su respuesta. Primero obtuvo la respuesta del modelo a la vibración libre considerando un gran desplazamiento como condición inicial; posteriormente, el modelo fue resuelto para la vibración forzada asumiendo una excitación senoidal. Los parámetros de la viga utilizados en la simulación se listan en la Tabla 4.1 y corresponden a la viga utilizada en la experimentación.

Tabla 4.1. Propiedades de la viga utilizada para el análisis numérico y experimental.

Propiedad	Valor
Ancho, W	0.025 m
Espesor, T	0.003 m
Longitud, L	1.000 m
Módulo de Young, E	210 GPa
Frecuencia natural, ω_n	1.460 Hz
Masa, m	2.750 Kg
Coefficiente de amortiguamiento, ξ	0.269 Kg/s

Con el fin de validar la eficacia del modelo, se llevaron a cabo pruebas de vibración libre y vibración forzada sobre una viga en voladizo; el banco de experimentación se muestra en la Figura 4.2. La viga (1) fue instrumentada con un acelerómetro ADX-321J (2) en su extremo libre para medir las vibraciones en el eje vertical; cabe mencionar que la masa del acelerómetro es relativamente pequeña comparada con la masa de la viga por lo que no influye en la respuesta dinámica de la viga.

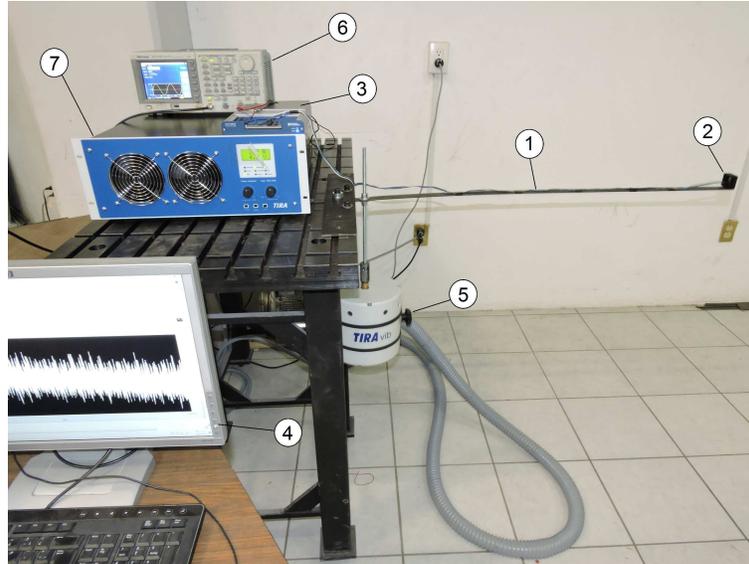


Figura 4.2. Banco de pruebas para el análisis de una viga en voladizo: 1) viga, 2) acelerómetro, 3) sistema de adquisición de datos, 4) PC, 5) shaker inercial, 6) generador de señales, 7) amplificador de potencia.

En la prueba de vibración libre, el extremo libre de la viga fue desplazado en el eje vertical una distancia de 0.5 veces la longitud de la viga. Mientras que en la prueba de vibración forzada, la viga fue excitada con un perfil de vibración senoidal mediante el shaker inercial TIRA TV-51144 (5). En este tipo de prueba, primero se realizó un barrido de frecuencias de 0-80 Hz en rampa de ascenso y descenso; posteriormente se realizaron pruebas a las frecuencias críticas encontradas durante el barrido de frecuencias. La señal senoidal enviada al shaker fue producida con el generador de funciones Tektronix AFG 3102 (6) y acondicionada a través del amplificador de potencia TIRA BAA 1000 (7). La adquisición de datos se realizó mediante el sistema NI USB-6366 (3), el cual fue controlado desde una PC (4) a través de una interfaz gráfica desarrollada en LabView. La Figura 4.3 muestra un diagrama esquemático del banco de pruebas, en el que se puede apreciar el flujo de datos.

Los datos numéricos y experimentales fueron analizados utilizando tres técnicas de procesamiento diferentes:

- *Espectros de frecuencias.* Estos fueron construido mediante la transformada rápida de Fourier con el fin de identificar el contenido de frecuencias de la señal en el dominio de la frecuencia.
- *Mapas tiempo-frecuencia.* Se generaron a partir de la transformada continua wa-

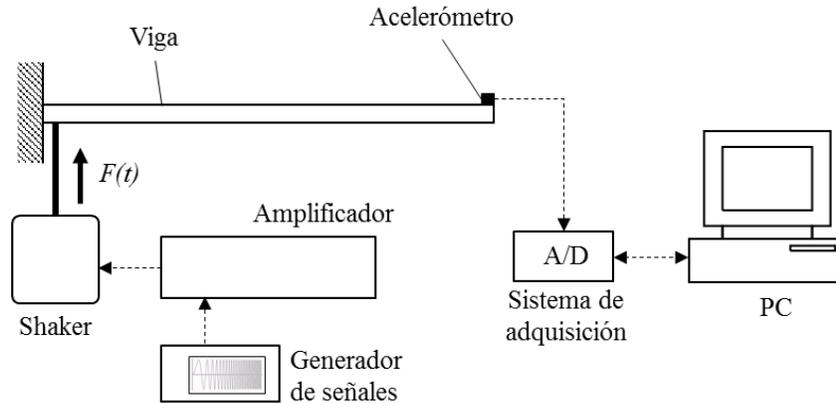


Figura 4.3. Diagrama esquemático del banco de pruebas para el análisis del comportamiento de una viga en voladizo.

velet con el fin de descomponer la señal en un conjunto de vectores de frecuencias a fin de mostrar el comportamiento de cada frecuencia a lo largo del tiempo, de manera que si el sistema es lineal, cada frecuencia permanece constante en cualquier instante de tiempo; de otro modo, ésta varía en el tiempo, mostrando cambios de amplitud en el mapa tiempo-frecuencia.

- *Diagramas de fase.* Fueron construidos para visualizar el espacio de energía instantánea. En el eje horizontal se muestran los cambios en la energía potencial y en el eje vertical los cambios de energía cinética. Si la dinámica de la respuesta es estable, entonces la trayectoria descrita por el diagrama de fase es una función suave; de otro modo, la trayectoria muestra muchos lazos internos y saltos o cambios de dirección. En el caso experimental, el desplazamiento y la velocidad se calcularon a partir de las integraciones numéricas de la aceleración.

La combinación de los resultados de los análisis del mapa tiempo-frecuencia y el diagrama de fase posibilitaron la identificación del desempeño no lineal de la viga. Los resultados de éste análisis se presentan en la sección 5.1.

4.2. Análisis de un sistema complejo: sincronización dinámica de un automóvil

La definición de un sistema complejo puede confundirse con la de un sistema no lineal. No obstante, un sistema complejo se compone de muchos componentes interactuando,

de manera que su comportamiento en conjunto puede ser bastante diferente al comportamiento de sus componentes individuales. Por ejemplo, un automóvil es un sistema complejo compuesto por un gran número de componentes conectados mecánicamente de alguna manera que transmiten vibraciones entre ellos, en donde además, todo el sistema se encuentra sujeto a excitaciones periódicas y aleatorias de la carretera, el motor y los subsistemas de transmisión de potencia.

En esta sección se plantea el estudio de un automóvil, como sistema complejo, operando en condiciones normales de uso. El objetivo es desarrollar herramientas analíticas que determinen la relación entre los movimientos vibratorios de los diferentes componentes del sistema. Para ello, se desarrollaron pruebas experimentales en un automóvil Mitsubishi Galant, 2009. Durante los experimentos se registraron las vibraciones de dos componentes de la carrocería interna: el tablero y la puerta. Las vibraciones fueron censadas con acelerómetros ADX321J de Analog Devices con sensibilidad de 100 mV/g y ancho de banda de 2.27 kHz, ver Figura 4.4. La adquisición paralela de datos se realizó mediante el sistema de adquisición NI-USB 6366 de National Instruments y fue controlada a través de una interfaz gráfica desarrollada en LabView.

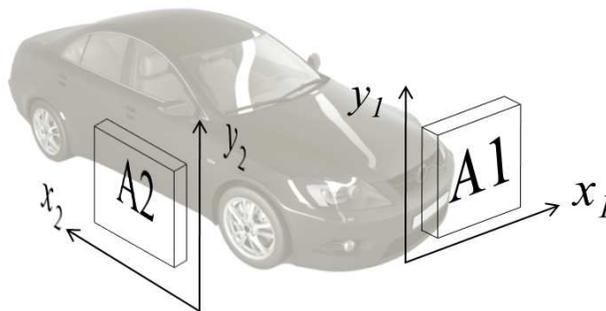


Figura 4.4. Ubicación y orientación de los acelerómetros en el automovil: A1-Tablero; A2-Puerta.

Dos tipos de pruebas fueron desarrolladas:

1. Pruebas de impacto con el vehículo parado. Los sitios de interés fueron impactados; primero el impacto fue hecho sobre el tablero y posteriormente sobre la puerta.
2. Pruebas del vehículo siendo conducido sobre una carretera. El vehículo fue conducido a tres velocidades diferentes, 60, 70 y 80 km/h; las cuales fueron sostenidas de manera constante mientras se realizaba la adquisición de datos.

En el análisis de datos, sólo las señales de aceleración vertical fueron analizadas (y_1 y y_2), ya que es en éste eje donde se lleva a cabo el movimiento dominante del automóvil. En el procesamiento de los datos se utilizaron diversas técnicas. Las metodologías de análisis para los datos de cada tipo de prueba se describen a continuación.

Pruebas de impacto

- *Identificación de las frecuencia naturales.* Primero se identificaron las frecuencias naturales de los elementos censados usando herramientas como la FFT y la transformada wavelet continua.
- *Estimación de los parámetros de los componentes.* Posteriormente, para cada elemento se estimaron sus coeficientes de amortiguamiento y rigidez a partir de la respuesta en el tiempo de cada una de sus frecuencias naturales. Para ello, se obtuvieron gráficas tiempo-amplitud de cada frecuencia natural a partir de cortes transversales en los mapas tiempo-frecuencia. Dichas gráficas pudieron ser analizadas como una función exponencial en decadencia como se describe en la sección 3.1. Así, los coeficientes de rigidez y amortiguamiento por unidad de masa fueron estimados mediante las ecuaciones (3.13) y (3.14).

Pruebas conducidas

- *Espectros de frecuencias.* Primero se obtuvieron los espectros de frecuencias para cada prueba (60, 70 y 80 km/h) usando la FFT. El objetivo fue determinar el contenido de frecuencias y la complejidad del sistema.
- *Proceso de filtrado.* Posteriormente se filtraron las señales usando filtros pasa-banda digitales a fin de mantener en la señal solo las frecuencias naturales de los elementos de interés y rechazar todas las demás. Las características de diseño de los filtros fueron las siguientes: tipo IIR, Chevyshev II y orden diez, con un ancho de banda de ± 10 Hz alrededor de la frecuencia de interés. El proceso de filtrar las frecuencias naturales de los elementos fue necesario dado que un sistema complejo está compuesto por muchos elementos interactuando simultáneamente y que la señal contiene ruido combinado con las vibraciones.
- *Función de correlación.* Fue calculada con el fin de determinar el grado de similitud de las señales filtradas, así como el tiempo de propagación de la onda a través de

todos los elementos del sistema.

- *Mapas tiempo-frecuencia.* Se obtuvieron a partir de la transformada wavelet continua y la función Morlet como wavelet madre para determinar la no linealidad en el comportamiento de los elementos del sistema.
- *Fase instantánea:* El ángulo de fase instantáneo entre las señales filtradas fue calculado usando la transformada de Hilbert. El resultado fue utilizado para calcular el parámetro de orden de Kuramoto.
- *Parámetro de déficit de orden.* Definido como $s = r - 1$, donde r es el parámetro de orden de Kuramoto fue calculado con el objetivo de medir el grado de sincronización entre las señales filtradas. Un valor $s = 0$ indica que los elementos están completamente sincronizados, mientras que conforme $s \rightarrow 1$ el sistema pierde sincronización.
- *Descriptores estadísticos.* Descriptores estadísticos como la media y la desviación estándar fueron calculados para el parámetro de déficit de orden. Además, con el fin de cuantificar el grado de sincronización, se calculó el porcentaje de eventos en los que $s < 0.2$, valor que fue establecido como el límite para considerar que el sistema está sincronizado.
- *Histogramas.* Se construyeron usando los resultados del parámetro de déficit de orden. Posteriormente, se identificó la forma de la distribución de probabilidad con el fin de determinar el comportamiento de la dinámica del sistema.

Los resultados obtenidos del análisis de ambas pruebas, de impacto y conducidas, se presenta en la sección 5.2 del siguiente capítulo.

4.3. Análisis de sistemas de transmisión mecánica

Como se mencionó anteriormente, los principales componentes de los sistemas de transmisión mecánica poseen características no lineales que al ser combinadas entre ellas provocan comportamientos complejos y altamente no lineales. Además debido al amplio uso que los sistemas de transmisión mecánica tienen en una gran cantidad de máquinas. En esta sección se presenta una metodología para analizar e identificar su comportamiento.

4.3.1. Transmisión mecánica automotriz

Primero se plantea el estudio de una transmisión mecánica automotriz de siete velocidades de la empresa TREMEC S. A de C. V. Su estudio parte de la necesidad de identificar la causa del quiebre de uno de los dientes del engrane de séptima velocidad, cuando éste es probado de manera dinámica en laboratorio. El banco de pruebas para el desarrollo de experimentos se muestra en la Figura 4.5. La transmisión fue montada sobre cuatro soportes metálicos altamente rígidos, mientras que las flechas de entrada y salida fueron sujetadas mediante coples para evitar la rotación del tren de engranes. Para eliminar el backlash y mejorar la relación de contacto entre los engranes se aplicó un par de 32 Nm sobre la flecha de entrada, el cual fue ejercido por la masa suspendida en el extremo de la barra de acero acoplada a la flecha de entrada.

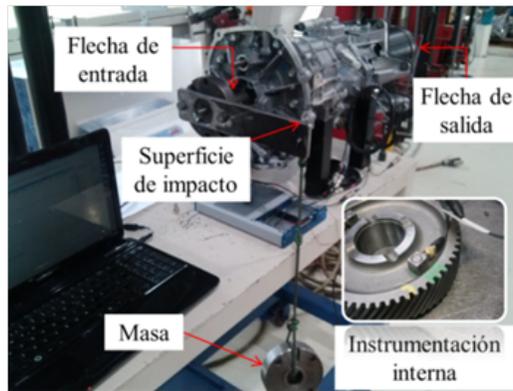


Figura 4.5. Banco de pruebas de la transmisión TR6070 para el desarrollo de pruebas experimentales

Con el fin de determinar la aceleración angular directamente sobre el tren de séptima, se implementó una metodología de medición a partir de las aceleraciones lineales. Para ello, se instrumentó el engrane de séptima velocidad como se muestra en la Figura 4.6. Los acelerómetros triaxiales fueron colocados sobre la misma línea de acción, a la misma distancia y en coordenadas opuestas con respecto al eje de rotación.

Las señales de los acelerómetros fueron registradas a una frecuencia de muestreo de 16.384 kHz con instrumentos del laboratorio de TREMEC S. A. de C. V. Las características de los instrumentos y equipos utilizados se listan en la Tabla 4.2.

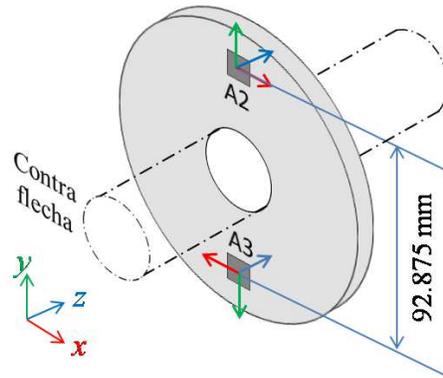


Figura 4.6. Instrumentación del engrane de séptima velocidad.

Tabla 4.2. Características de los instrumentos utilizados en el desarrollo de pruebas de impacto en la TR6070.

Instrumento	Modelo	Sensibilidad
Acelerómetro 1	Endevco 65HT-10	x = 10.15 mV/g y = 10.17 mV/g z = 10.21 mV/g
Acelerómetro 2	Endevco 65HT-10	x = 9.75 mV/g y = 10.04 mV/g z = 10.23 mV/g
Martillo de impactos	B&Kj-8206	22.7 mV/N
Sistema de adquisición	B&Kj-PULSE	No aplica

La aceleración angular fue determinada a partir de la definición de la aceleración tangencial. La cual establece que la aceleración tangencial a de una partícula es igual a su aceleración angular α por la distancia r al centro del movimiento en el mismo instante de tiempo:

$$a = \alpha r. \quad (4.1)$$

Por otra parte, el voltaje de salida de un acelerómetro lineal es equivalente a la sensibilidad K del instrumento por la aceleración registrada:

$$V = Ka. \quad (4.2)$$

Siempre que la sensibilidad de los acelerómetros sea la misma, es posible calcular la aceleración angular total del engrane como:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (4.3)$$

De manera que al sustituir las ecuaciones (4.1) y (4.2) en la ecuación (4.3) y resolver para α se llega a la fórmula que relaciona las aceleraciones lineales con la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{V_1 + V_2}{2Kr} \quad (4.4)$$

La metodología para analizar la aceleración angular se describe a continuación:

- *Espectros de frecuencia.* Los espectros de frecuencia a partir de la FFT fueron obtenidos para analizar el comportamiento del sistema en el dominio de la frecuencia y determinar sus frecuencias naturales.
- *Mapas tiempo-frecuencia.* El análisis en el dominio tiempo-frecuencia se realizó con el fin de identificar el comportamiento no lineales del sistema. Los mapas se obtuvieron a partir de la transformada continua wavelet, usando la función Morlet como wavelet madre.
- *Análisis en el dominio del tiempo.* Los parámetros de rigidez y amortiguamiento del sistema se calcularon a partir de la respuesta en el tiempo de sus frecuencias naturales. Las gráficas tiempo-amplitud de cada frecuencia fueron obtenidas a partir de cortes transversales en los mapas tiempo-frecuencia. Los parámetros por unidad de masa fueron estimados a partir de las ecuaciones (3.13) y (3.14) descritas en la sección 3.1.
- *Diagramas de fase.* Se contruyeron con el fin de determinar la estabilidad y no linealidad de la respuesta del sistema. Para su construcción, los datos de velocidad y desplazamiento se calcularon a partir de la integración numérica de la aceleración. Además, después de cada proceso de integración, se aplicó un proceso de filtrado para remover la baja frecuencia provocada por el offset de la señal de CD.

Los resultados del análisis de los datos experimentales se presentan en la sección 5.3.1 del siguiente capítulo.

4.3.2. Transmisión mecánica de una etapa

Con el fin de identificar los efectos que la variación de parámetros en los elementos de una transmisión genera sobre la dinámica general del sistema, se llevó a cabo el estudio de un sistema de transmisión de una etapa. De manera particular el estudio se centró en el análisis de la rigidez de la carcasa y su influencia en la sincronización dinámica de los componentes del sistema.

El estudio se desarrolló primero para el caso experimental de la transmisión mostrada en la Figura 4.7. Posteriormente, utilizando los parámetros de diseño de la misma transmisión, se resolvió su modelo matemático. Las Tablas 4.3 y 4.4 listan los parámetros de diseño de los cojinetes y la transmisión, respectivamente. Los parámetros de diseño de los cojinetes fueron tomados del catálogo del fabricante.



Figura 4.7. Transmisión mecánica de una etapa usada en las pruebas experimentales.

Tabla 4.3. Parámetros de diseño de los cojinetes tomados del catálogo del fabricante.

Parámetro	Valor	
	SKF 6212 (Eje de entrada)	SKF 6216 (Eje de salida)
Número de rodamientos, N	14	12
Diámetro de paso, D_p	85×10^{-3} m	114.5×10^{-3} m
Diámetro de los rodamientos, D_b	16×10^{-3} m	23.5×10^{-3} m
Ángulo de contacto, α	0.34 rad	0.34 rad

Tabla 4.4. Parámetros de diseño de la transmisión de la Figura 4.7.

Parámetro	Valor
Número de dientes en el piñón, N_p	23
Número de dientes en el engrane, N_g	207
Relación de transmisión, m_p	9
Diámetro de paso del piñón, d_1	0.064 m
Diámetro de paso del engrane, d_2	0.617 m
Módulo, M	3
Ángulo de hélice, φ	0°
Ángulo de presión, θ	20°
Relación de contacto, τ	1.6
Masa del piñón, m_1	9.91 kg
Masa del engrane, m_2	255 kg
Masa inercial del piñón, J_1	$5.13 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$
Masa inercial del engrane, J_2	$6300.96 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$

Durante los experimentos el eje de entrada fue conducido por un motor eléctrico de 44 kW a una velocidad de 2000 rpm, mientras que las vibraciones radiales fueron censadas cerca de los cojinetes con dos acelerómetros ADX321J. El primero fue colocado en el lado conducido de la transmisión y el segundo en la salida. Un esquema del banco de pruebas se muestra en la Figura 4.8.

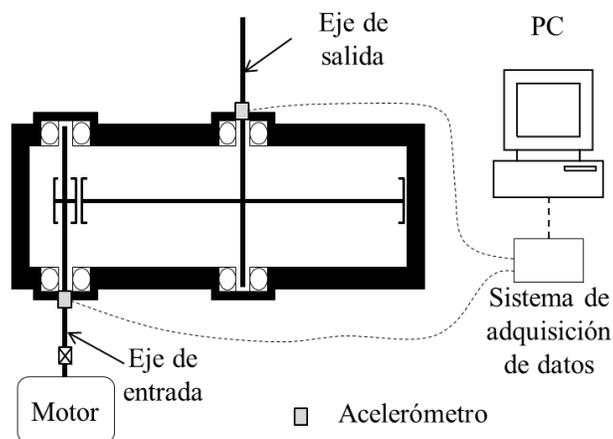


Figura 4.8. a) Diagrama esquemático del banco de pruebas.

Las señales de los sensores fueron adquiridas simultáneamente con un sistema de adquisición NI-6366 USB a una frecuencia de muestreo de 20 ksps. Las señales experimentales fueron almacenadas para su post-procesamiento.

La simulación numérica de la transmisión de la Figura 4.7 se realizó con el modelo dinámico dado por las ecuaciones (3.39). El modelo se resolvió considerando tres diferentes valores de rigidez de la carcasa, S_H , con el fin de evaluar el efecto de su variación en la sincronización de los componentes de la transmisión. En primer lugar se estableció una rigidez media para simular una fuerza de acoplamiento suave ($S_H = 1,4 \times 107 N/m$); luego, se asignó una rigidez alta para generar un fuerte acoplamiento ($S_H = 1,4 \times 109 N/m$) y por último, se consideró una rigidez muy baja para obtener un acoplamiento débil ($S_H = 1,4 \times 105 N/m$).

Las principales frecuencias de excitación del modelo se resumen en la Tabla 4.5 y fueron calculadas como sigue: frecuencia del eje de entrada, $\omega_{is} = 2000rpm/60$; frecuencia del eje de salida, $\omega_{os} = \omega_{is}/m_p$; frecuencia de engranaje, $\omega_m = N_p \omega_{is}$ y las frecuencias de los cojinetes a partir de las ecuaciones (3.37). Los valores de los parámetros de diseño de los engranes y cojinetes se tomaron de las Tablas 4.3 y 4.4.

Tabla 4.5. Principales frecuencias de excitación interna de la transmisión.

Componente	Entrada	Salida
Cojinetes:		
Rejilla, ω_c	13.53 Hz	8.28 Hz
Elementos rodantes, ω_{re}	85.41 Hz	48.62 Hz
Pista interna, ω_{ir}	277.19 Hz	150.61 Hz
Pista externa, ω_{or}	189.47 Hz	99.38 Hz
Eje, ω_s	33.3 Hz	3.7 Hz
Engranaje, ω_m	766.6 Hz	766.6 Hz

Las fuerzas de excitación debidas a la rigidez del engranaje, Ec. (3.32), y el error de transmisión, Ec. (3.33), también fueron consideradas durante la solución del sistema. Los coeficientes del polinomio de la Ec. (3.32) se establecieron como $a_0 = 1.51$, $a_1 = 20.77$, $a_2 = -136.78$, $a_3 = -25648.81$; mientras que las amplitudes de las fuerzas de excitación de la Ec. (3.33) fueron $E_n = 10 \times 10^{-11}$ y $E_{ec} = E_d = 2 \times 10^{-11}$. En cuanto a las fuerzas de excitación de los baleros, se incluyeron las fuerzas de contacto, Ec. (3.36), y la excitación causada por un daño en la pista interna del cojinete del eje de entrada de amplitud $F_{ir} = 5 \times 10^{-8}$ N, la cual se incluyó en la Ec. (3.38).

Las señales experimentales y los datos simulados fueron analizados con la siguiente metodología:

- *Espectros de frecuencia.* Los espectros de frecuencia fueron obtenidos a partir de la FFT con el fin de identificar las frecuencias fundamentales del sistema.
- *Mapas tiempo-frecuencia.* Fueron generados a partir de la transformada wavelet continua con dos objetivos principales: ver el desarrollo en el tiempo de las frecuencias del sistema y calcular su densidad espectral. La densidad espectral fue relacionada a la existencia de sincronización entre los elementos de la transmisión. Una densidad espectral constante indica que los elementos tienen un comportamiento independiente, de manera que no existe sincronización entre ellos; mientras que una densidad espectral cambiante indica la existencia de sincronización.
- *Diagrama de fase.* El diagrama de fase fue construido para analizar la estabilidad y no linealidad de la respuesta del sistema.
- *Diagrama de error de sincronización y parámetro de orden de Kuramoto.* Ambos fueron calculados con el objetivo de analizar el comportamiento de la sincronización entre los elementos del sistema. En ambos casos el estudio se complementó con el cálculo de descriptores estadísticos como la media, la desviación estándar

Los resultados obtenidos a partir de las herramientas descritas anteriormente, se presentan y discuten en la sección 5.3.2 del siguiente capítulo.

4.4. Análisis de cojinetes gas

Los cojinetes de gas son una tecnología prometedora en el área de turbo máquinas para la compresión de gas, debido a su inherente capacidad para trabajar con los fluidos del proceso. Además ofrecen la posibilidad de prescindir de aquellos que operan con aceite como fluido lubricante, proporcionando una operación limpia y reduciendo sustancialmente los costos operativos. Los cojinetes de gas están diseñados para soportar cargas estáticas debido al peso del rotor y los niveles de desequilibrio remanente. Sin embargo, pese a que su construcción es relativamente simple, la interacción del gas con el rotor modifica el comportamiento dinámico del sistema haciéndolo altamente no lineal; de manera que el modelado integral del sistema se torna complejo. Por otra parte, los datos experimentales requieren una atención aún más especial, ya que combinan la inestabilidad y la respuesta no lineal de los componentes del sistema.

En esta sección se presenta una metodología para analizar el desempeño de cojinetes de gas e identificar la evolución de sus parámetros dinámicos a partir de señales experimentales. El banco de pruebas utilizado durante la experimentación se muestra en la Figura 4.9. El rotor principal (a) corresponde al rotor de una turbina de gas de cinco etapas, conducido por un motor eléctrico (b) a través de un eje intermedio que incluye un multiplicador de velocidad y un arreglo de poleas (c). El rotor es soportado en sus extremos con cojinetes de gas, uno en el lado acoplado al motor (d) y otro en el extremo libre (e). Cuatro sensores de proximidad 3300 XL de Bently Nevada fueron colocados para medir los desplazamientos horizontales y verticales del rotor con respecto a cada cojinete, en la Figura 4.9 solo se distingue el sensor para el desplazamiento vertical en el extremo libre del rotor, (f). Cabe mencionar que las pruebas fueron centradas en el rendimiento de cojinetes radiales; por lo tanto, el rotor no tuvo restricción axial durante los experimentos, excepto en el acoplamiento con el multiplicador de velocidad. La configuración del rotor principal se muestra en la Figura 4.10.



Figura 4.9. Banco de pruebas para experimentos sobre cojinetes de gas: a) rotor principal, b) motor eléctrico, c) multiplicador de velocidad, d) cojinete de gas en el lado acoplado al motor, e) cojinete de gas en el lado libre del rotor, f) sensor de proximidad.

El experimento se condujo de la siguiente manera: el rotor fue puesto en marcha a partir del reposo hasta alcanzar la velocidad nominal de 9000 rpm, ésta velocidad se mantuvo hasta que se presentó una falla en el cojinete del extremo acoplado al motor, entonces, el rotor fue puesto en reposo. El desplazamiento del rotor se registró de manera paralela con dos sistemas de adquisición diferentes; el primero, NI-PXI-4475 DAQ, fue

configurado con una frecuencia de muestreo de 10 ksps, mientras que en el segundo, BN ADRE 408, el periodo de muestreo se estableció en función de la velocidad de rotación $T_s = 60/(128\omega)$, donde ω es la velocidad angular del rotor en rpm. Los datos fueron almacenados para su posterior procesamiento.

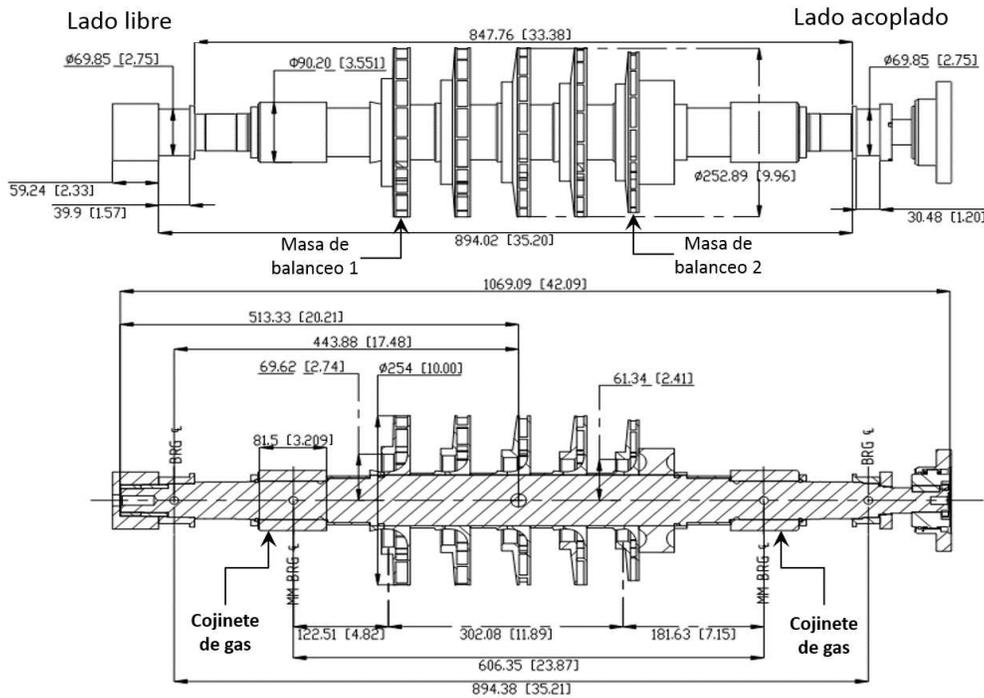


Figura 4.10. Configuración del rotor principal del banco de pruebas. Todas las dimensiones están dadas en mm [in]

El análisis de los datos se realizó siguiendo la metodología descrita a continuación:

- *Identificación de la dinámica del sistema.* En el caso de los cojinetes de gas, primero se identificó la existencia de comportamientos inestables y no lineales a partir del análisis de los datos registrados con el sistema NI-PXI 4472. Para ello, se utilizaron tres técnicas en el siguiente orden: transformada wavelet continua, diagrama de órbitas y diagrama de fase.
- *Identificación de parámetros.* Posteriormente, a partir de los datos registrados con el sistema NI-PXI-4475 DAQ, se identificó la variación de los parámetros dinámicos del sistema. El procedimiento de identificación se detalla a continuación:

1. Se obtuvo el *run out* del rotor a partir de los desplazamientos registrados a baja velocidad y posteriormente, éste fue extraído de la señal original de desplazamientos con el fin de asegurar la confiabilidad de los datos en la representación de la dinámica del sistema.
2. La velocidad del rotor fue calculada a partir de la derivada numérica de la señal de desplazamiento. Entonces, el diagrama de fase fue construido para determinar la estabilidad del sistema.
3. Se obtuvieron las fuerzas de excitación a partir de las pruebas de balanceo; de este modo, se evitó la necesidad de un banco de pruebas especial.

Las fuerzas equivalentes en los cojinetes fueron calculadas a partir de la segunda condición de equilibrio, $\sum M = 0$, utilizando las dimensiones del rotor dadas en la Figura 4.10:

$$\begin{aligned} F_{FE(i)} &= 0.2F_{b1(i)} + 0.7F_{b2(i)} \\ F_{CE(i)} &= 0.8F_{b1(i)} + 0.3F_{b2(i)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde,

- i representa los ejes x, y ,
- F_{FE} es la fuerza en el cojinete de gas del lado libre,
- F_{CE} es la fuerza en el cojinete de gas del lado acoplado,
- F_{b1} es la fuerza debida a la masa de balance del lado libre,
- F_{b2} es la fuerza debida a la masa de balance del lado acoplado.

4. Los parámetros dinámicos de los cojinetes fueron estimados a partir del espacio de fase y las fuerzas de excitación del sistema. Su identificación a partir de ésta metodología es posible debido la relación que existe entre la evolución de los parámetros del sistema y las frecuencias que la producen.

Como se describió en la sección 3.5.3, el espacio de fase, dado por la Ec. (3.46), dibuja a través del tiempo órbitas en un plano cuyo eje vertical representa los cambios de energía cinética del sistema y el eje horizontal los cambios de energía potencial, ver Figura 4.11. Por lo cual es posible establecer una relación entre el diámetro horizontal del lazo (δx) y la magnitud del desplazamiento, así como una relación entre el diámetro vertical del lazo (δy) y la magnitud de la velocidad. De manera que la evolución de los parámetros de dinámicos del sistema, rigidez y amortiguamiento, pueden estimarse a partir de los diámetros de los lazos en el diagrama de fase y las fuerza de

excitación correspondientes al instante en que se generan.

A partir de lo anterior, las ecuaciones para calcular la rigidez y el amortiguamiento en los ejes vertical y horizontal del rotor, están dadas por:

$$K_x = \frac{F_x}{\delta x}; \quad K_y = \frac{F_y}{\delta y}, \quad (4.6)$$

$$C_x = \frac{F_x}{\delta y}; \quad C_y = \frac{F_y}{\delta x}, \quad (4.7)$$

donde, x y y representan los ejes horizontal y vertical, respectivamente, K el coeficiente de rigidez, C el coeficiente de amortiguamiento, F la fuerza de excitación y δ la magnitud del diámetro del lazo en el diagrama de fase.

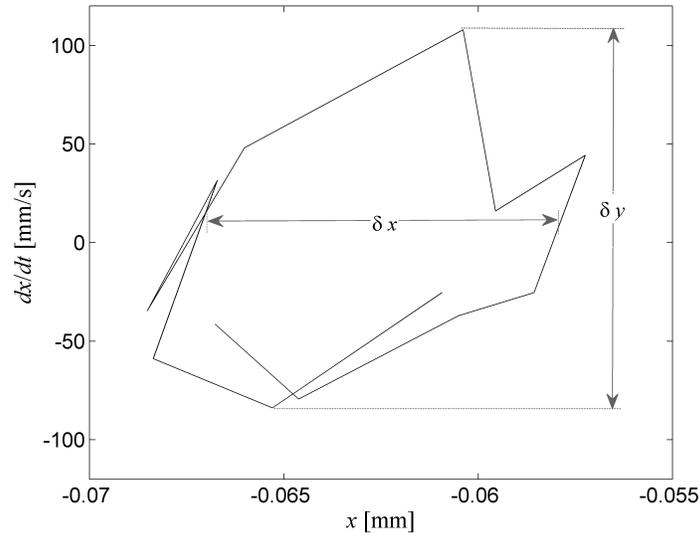


Figura 4.11. Lazo interno en el diagrama de fase del rotor operando en etapa inestable. El diámetro horizontal está relacionado a la energía potencial y el diámetro vertical a la energía cinética.

- Finalmente, las gráficas de la evolución de los parámetros de rigidez y amortiguamiento son elaboradas partiendo del hecho de que la variación de los parámetros del sistema sucede a una frecuencia específica, la cual es inversamente proporcional al periodo de tiempo en el que se genera un lazo y está dada por:

$$f = \frac{1}{T_l} \quad (4.8)$$

donde $T_l = T_s n$, siendo T_s el periodo de muestreo de la señal y n el número de muestras necesarias para completar un lazo cerrado.

Es importante mencionar que durante el desarrollo de los experimentos, la frecuencia de muestreo en los sistemas de adquisición de datos se estableció para evitar el efecto del *alias* en las señales y así poder recuperar la dinámica del sistema. Sin embargo, ésta no fue lo suficientemente alta para que los datos dibujaran órbitas suaves en el espacio de fase, como se muestra en la Figura 4.11. Ésta condición contribuyó en la incertidumbre de los resultados numéricos; no obstante, como se muestra en la sección 5.4, el método propuesto tiene la capacidad de caracterizar el desempeño de los parámetros dinámicos.

4.5. Implementación de algoritmos genéticos

4.5.1. Algoritmo genético continuo

En esta sección se presenta el desarrollo de un algoritmo genético continuo para optimizar el modelo matemático un sistema no lineal. Donde el sistema a optimizar es el oscilador de Duffing dado por la Ec. (3.15):

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \cos(\omega t), \quad (4.9)$$

donde, $\delta = 1$, $\alpha = 50$, $\beta = 150$, $F = 350$ y $\omega = 2\pi$. El objetivo del algoritmo fue optimizar los coeficientes del modelo y así encontrar la solución que mejor se aproxime a los datos numéricos de entrada.

Primero se definieron los parámetros iniciales del algoritmo:

- *Individuo*. El arreglo de variables que definen al individuo fue establecido a partir de los coeficientes en la ecuación de Duffing:

$$p = [\zeta, k, \gamma, A, \omega] \quad (4.10)$$

cuyo rango de valores fue establecido como: $-3 \leq \zeta \leq 3$, $-10 \leq k \leq 60$, $100 \leq \gamma \leq 200$, $0 \leq A \leq 400$ y $0 \leq \omega \leq 5$. Cabe mencionar que la rapidez del algoritmo para encontrar la mejor solución está fuertemente relacionado al rango de valores establecidos para cada variable.

- *Función costo.* La función para evaluar el costo de los individuos fue definida a partir del coeficiente de correlación entre dos señales (x, y) :

$$costo = CC(x, \hat{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\hat{x}_i - \bar{\hat{x}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - \bar{\hat{x}})^2}}, \quad (4.11)$$

donde x es la señal a optimizar y \hat{x} la señal estimada por el algoritmo. La función costo se implementó de dos maneras, primero se evaluó la correlación entre las señales en el dominio de la frecuencia $costo = CC[FFT(x, \hat{x})]$, y posteriormente la correlación entre las señales en el dominio del tiempo $costo = CC(x, \hat{x})$.

- *Parámetros de control del algoritmo.* Se establecieron como sigue:
 - Tamaño de la población: $N_{pop} = 200$ individuos
 - Tasa de sobrevivientes: $T_{sob} = 50\%$
 - Tasa de mutación: $\%mut = 50\%$
 - Número máximo de generaciones: 400
 - Costo mínimo: 0.01

Posteriormente, se generó la población inicial y se evaluó mediante la función de costo. En caso de no alcanzar el costo mínimo establecido en los parámetros iniciales, los mejores individuos fueron seleccionados para formar la siguiente generación. Los procesos de selección, reproducción y mutación fueron implementados como se describe a continuación:

- *Selección.* La cantidad de individuos que sobrevivieron en cada iteración y que participaron en el proceso de reproducción fue calculada como $N_{sob} = N_{pop} \times T_{sob}$, donde los N_{sob} fueron los individuos de menor costo. El método de emparejamiento fue la *selección aleatoria por rango ponderado*. En éste método la selección de los padres (madre y padre) se realizó a través de la selección aleatoria de un número dentro de la probabilidad acumulada de su probabilidad de reproducción, donde la probabilidad de reproducción de cada individuo está dada por la Ec. (3.61). En caso de que un individuo fuera seleccionado dos veces, participando como padre y madre, se optó por elegir otro individuo utilizando la misma técnica.
- *Reproducción.* La reproducción de los padres se realizó mediante el método de *mezcla de variables*, Ec. (3.64), con $\alpha = 0.5$ para todas las variables.

- *Mutación.* La cantidad de individuos a mutar en cada iteración está determinada por la Ec. (3.66), la cual depende de la tasa de mutación establecida en los parámetros iniciales del algoritmo. Las variables mutadas en la población total fueron elegidas de manera aleatoria y posteriormente su nuevo valor fue calculado mediante la Ec. (3.59).

Finalmente se calcularon los costos asociados a la nueva generación y el proceso de selección-reproducción-mutación-evaluación fue repetido hasta que alguno de los criterios de terminación del algoritmo fue alcanzado.

Se propusieron dos maneras de evaluar la optimización del modelo, primero a partir de los costos asociados a los datos de posición del sistema y posteriormente los costos de su espectro de frecuencias. Esto con la finalidad de encontrar la solución que mejor se aproxime a los datos de entrada. Los resultados del algoritmo se presentan en la sección 5.5 del siguiente capítulo. El código implementado se presenta en el Anexo B.

4.5.2. Programación genética

Otra área explorada en este trabajo de investigación fue la programación genética. Se implementó un algoritmo para generar de manera inteligente el modelo que mejor describa el comportamiento de un sistema no lineal a partir de la aproximación de su respuesta dinámica. La fundamentación teórica de ésta herramienta fue descrita en la sección 3.5.9. La función a optimizar por el algoritmo está dada como sigue:

$$\underbrace{\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x}_{f(x)} + g(x, \dot{x}, \omega, t) = F \cos(\omega t), \quad (4.12)$$

donde $f(x)$ describe el comportamiento lineal de cualquier sistema mecánico y $g(x, \dot{x}, \omega, t)$ es una función que depende de la posición, la velocidad, la frecuencia de excitación del sistema y el tiempo. La aproximación del modelo dado por la Ec. (4.12) se realiza mediante dos métodos, un algoritmo genético continuo para aproximar la función lineal $f(x)$ y un algoritmo de programación genética para aproximar la función no lineal $g(x, \dot{x}, \omega, t)$. El algoritmo genético continuo fue implementado siguiendo la metodología descrita en la sección anterior. El algoritmo de programación genética se describe a continuación.

a) Parámetros iniciales

Los parámetros iniciales fueron establecidos de la siguiente manera:

- *Conjunto de terminales.* Está formado por las variables de entrada y constantes generadas aleatoriamente en un rango de valores razonable:

$$terminales = \{x, \dot{x}, t, \omega, \mathfrak{R}\}, \quad (4.13)$$

donde \mathfrak{R} son constantes elegidas aleatoriamente en el rango -300 a 300.

- *Conjunto de funciones.* El conjunto de funciones se eligió de acuerdo a la naturaleza del problema. En este caso se eligieron funciones aritméticas y funciones matemáticas representativas de un sistema mecánico oscilatorio:

$$funciones = \{-, -, *, /, sin, cos, exp, log\}. \quad (4.14)$$

- *Función costo.* Dada la comprobación de mejor desempeño del coeficiente de correlación de las señales en el dominio del tiempo para evaluar a los individuos generados por el algoritmo. La función costo se definió como sigue:

$$costo = CC(x, \hat{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\hat{x}_i - \bar{\hat{x}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - \bar{\hat{x}})^2}}, \quad (4.15)$$

donde, x es la señal a optimizar y \hat{x} es la función estimada por el algoritmo de programación genética.

- *Parámetros de control.* Éstos parámetros sirven para restringir el tamaño y la forma de la población, controlar la evolución de la población mediante las tasas de reproducción y mutación y controlar la ejecución del algoritmo a través de los criterios de terminación. Los parámetros de control establecidos fueron los siguientes:

- Tamaño de la población: $N_{pop} = 200$ individuos
- Tasa de mutación: $\%mut = 50\%$
- Tasa de población sobreviviente: $T_{sob} = 50\%$
- Número máximo de generaciones: 200

- Costo mínimo: 0.01
- Profundidad de los árboles: 4
- Tasa de selección del tipo de dato de los nodos en la sintaxis de árbol de cada individuo, durante la generación de la población inicial:

Tabla 4.6. Tasas de selección del tipo de dato de los nodos de la población inicial.

Tipo	Valor	
<i>Nivel de profundidad</i>	> 1	1
Función	0.50	0.50
Variable	0.25	0.50
Constante	0.25	–

b) Población inicial

La parte lineal de la población inicial fue seleccionada de manera aleatoria de acuerdo a las ecuaciones (3.58) - (3.60). Mientras que la población no lineal se generó a partir de los parámetros de control del algoritmo de programación genética. La selección del tipo de dato de cada nodo del árbol se realiza de manera aleatoria a partir de la probabilidad acumulada de las probabilidades de la Tabla 4.6. Primero para cada nodo se genera un número aleatorio entre 0 y 1; posteriormente, se identifica en qué rango de la probabilidad acumulada se localiza el valor del número asignado; finalmente, de manera aleatoria se elige un elemento del conjunto correspondiente y se asigna al nodo. Ejemplos de individuos generados aleatoriamente en la población inicial del algoritmo de programación genética se muestran en la Figura 4.12. Éstos individuos forman la parte no lineal de la ecuación dinámica que se busca optimizar.

Los modelos correspondientes a cada individuo, incluyendo la parte lineal optimizada por el algoritmo genético, están dados por las ecuaciones (4.16) y (4.17)

$$\underbrace{\ddot{x} + 0.4\dot{x} + 1.5x}_{f(x)} + \underbrace{\frac{\omega - 2.8}{\dot{x}\cos(6.4\cos(x))}}_{g(x,\dot{x},\omega)} + \underbrace{\dot{x} - \omega}_{f(x)} = 2 \cos(\omega t), \quad (4.16)$$

$$\underbrace{\ddot{x} - 0.81\dot{x} + 1.14x}_{f(x)} + \underbrace{\omega 3.0 \exp(7.2) + \dot{x} + 3.8}_{g(\dot{x},\omega)} = \underbrace{1.7 \cos(1.5\pi t)}_{f(x)}, \quad (4.17)$$

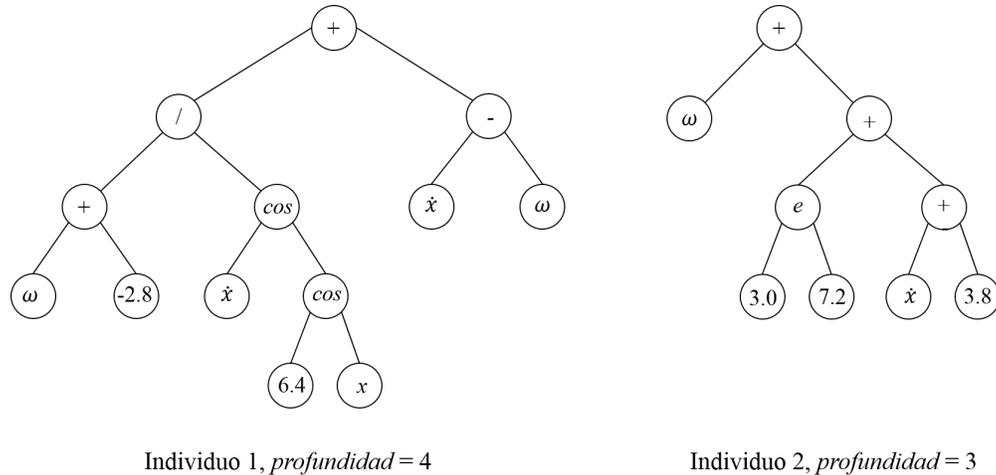


Figura 4.12. Individuos generados en la población inicial del algoritmo de programación genética usando la sintaxis de árbol.

c) Selección

La población inicial fue evaluada mediante la función de costo dada en la Ec. (4.15). En caso de no alcanzar el costo mínimo establecido, la tasa de individuos con menor costo es seleccionada para formar la siguiente generación y participar en el proceso de reproducción. La selección de parejas o padres se ejecutó mediante el método de selección aleatoria por rango ponderado. En éste método la selección de los padres (madre y padre) se realizó a través de la selección aleatoria de un número dentro de la probabilidad acumulada de su probabilidad de reproducción, donde la probabilidad de reproducción de cada individuo está dada por la Ec. (3.61). En caso de que un individuo fuera seleccionado dos veces, participando como padre y madre, se optó por elegir otro individuo utilizando la misma técnica.

c) Reproducción

El proceso de reproducción de la parte lineal de los padres se realizó mediante el método de *mezcla de variables*, Ec. (3.64), con $\alpha = 0.5$ para todas las variables. Mientras que la metodología empleada en la reproducción de la parte no lineal del modelo fue el *cruce de subárboles*, como se describió en la sección 3.5.9. Primero se seleccionó un nodo en cada árbol de los padres para ser el punto de cruce; después, el subárbol a partir del punto de cruce de la madre es reemplazado con el subárbol de la raíz hasta el punto de cruce del padre para crear el primer hijo. Posteriormente, el subárbol a partir del punto

de cruce del padre es reemplazado con el subárbol de la raíz hasta el punto de cruce de la madre para crear el segundo árbol hijo. Como punto de cruce para la reproducción se utilizaron funciones en una tasa de 100 %.

e) Mutación

La cantidad de individuos mutados en la población se determinó mediante la Ec. (3.66). Las variables a mutar en la población lineal fueron elegidas de manera aleatoria y su nuevo valor fue calculado mediante la Ec. (3.59). Por su parte, la población no lineal fue mutada a partir de la sustitución de subárboles. Primero en cada individuo a mutar se seleccionó aleatoriamente un nodo a partir del cual el subárbol dependiente sería sustituido por otro subárbol generados aleatoriamente.

Posterior a los procesos de selección-reproducción-mutación se calcularon los costos asociados a la nueva generación. Entonces, los costos fueron evaluados por los criterios de terminación del algoritmo, en caso de no alcanzar ninguno de los criterios, los procesos fueron repetidos de manera iterativa hasta alcanzar algunos de los criterios. El código del algoritmo de programación genética implementado se presenta en el Anexo C.

En el siguiente capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de las metodologías presentadas con anterioridad. La información es presentada en el mismo orden de éste capítulo.

Capítulo 5

Resultados

5.1. Resultados del análisis de una viga en voladizo

La descripción de la metodología de análisis de una viga en voladizo fue descrita en la sección 4.1. A continuación se presentan los resultados obtenidos del análisis de los datos numéricos y de los datos experimentales.

5.1.1. Solución numérica

a) Respuesta a la vibración libre

La respuesta a la vibración libre del modelo dado por las ecuaciones (3.30) y (3.31) se obtuvo considerando dos casos de condiciones iniciales en el extremo libre de la viga: pequeños desplazamientos y grandes desplazamientos.

Los resultados del análisis de la respuesta a pequeños desplazamientos se muestran en la Figura 5.1. En el espectro de frecuencias se observan dos picos dominantes, uno en 1.49 Hz y otro en 5.49 Hz, los cuales corresponden al primer y segundo modo de vibración, respectivamente. Por otra parte, en el mapa tiempo-frecuencia se puede observar que la viga tiene un comportamiento lineal, al no existir interacción entre las frecuencias ni variación en su amplitud. Por último, el diagrama de fase comprueba la respuesta estable de la viga al dibujar lazos cerrados que adoptan una forma anular.

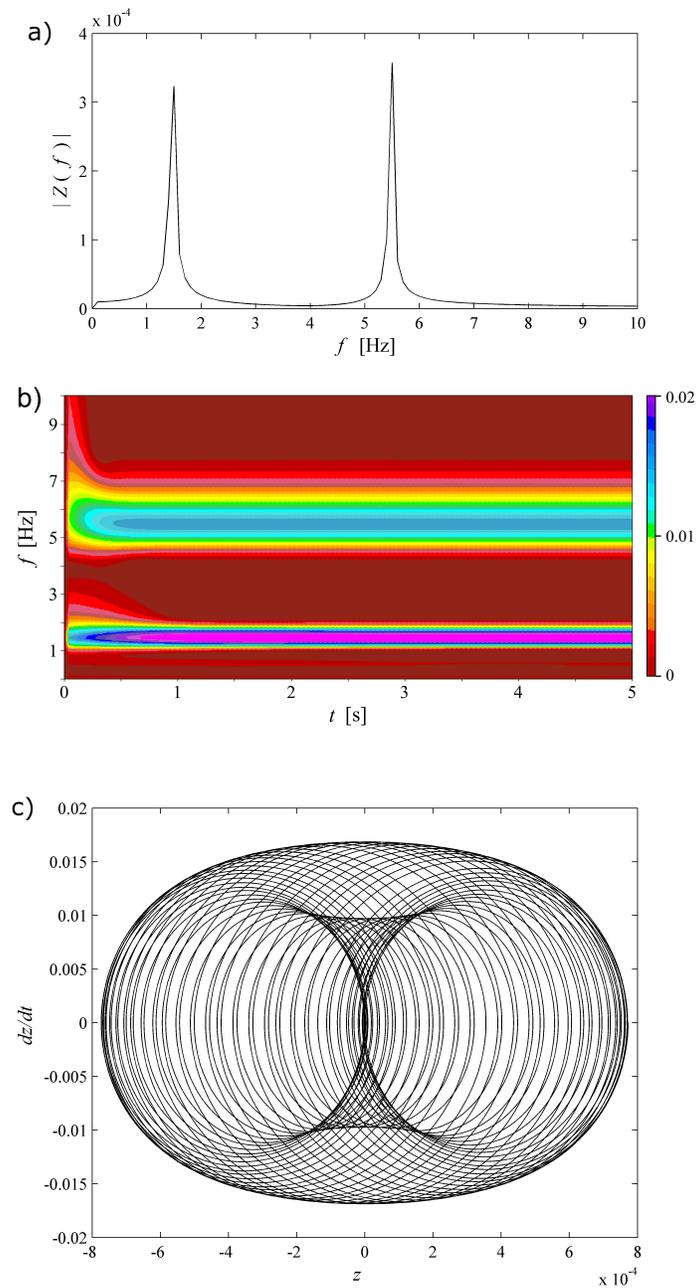


Figura 5.1. Respuesta numérica, vibración libre para pequeñas deformaciones; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.

Para el segundo caso, grandes desplazamientos, los resultados se muestran en la Figura 5.2. El espectro de frecuencias muestra dos picos principales, uno en 1.3 Hz, que corresponde al primer modo de vibración desplazado, y otro en 5.4 Hz que corresponde al segundo modo de vibración. Ambos modos muestran bandas laterales en 2.4 Hz y 6.7 Hz, respectivamente. Por otra parte, el mapa tiempo-frecuencia exhibe el compor-

tamiento no lineal de la viga al presentar variaciones en la amplitud de las frecuencias. Finalmente, el diagrama de fase muestra lazos cerrados con dos polos atractores. El efecto no lineal en el desempeño del sistema se observa más claramente al comparar éstos resultados con los de la solución lineal.

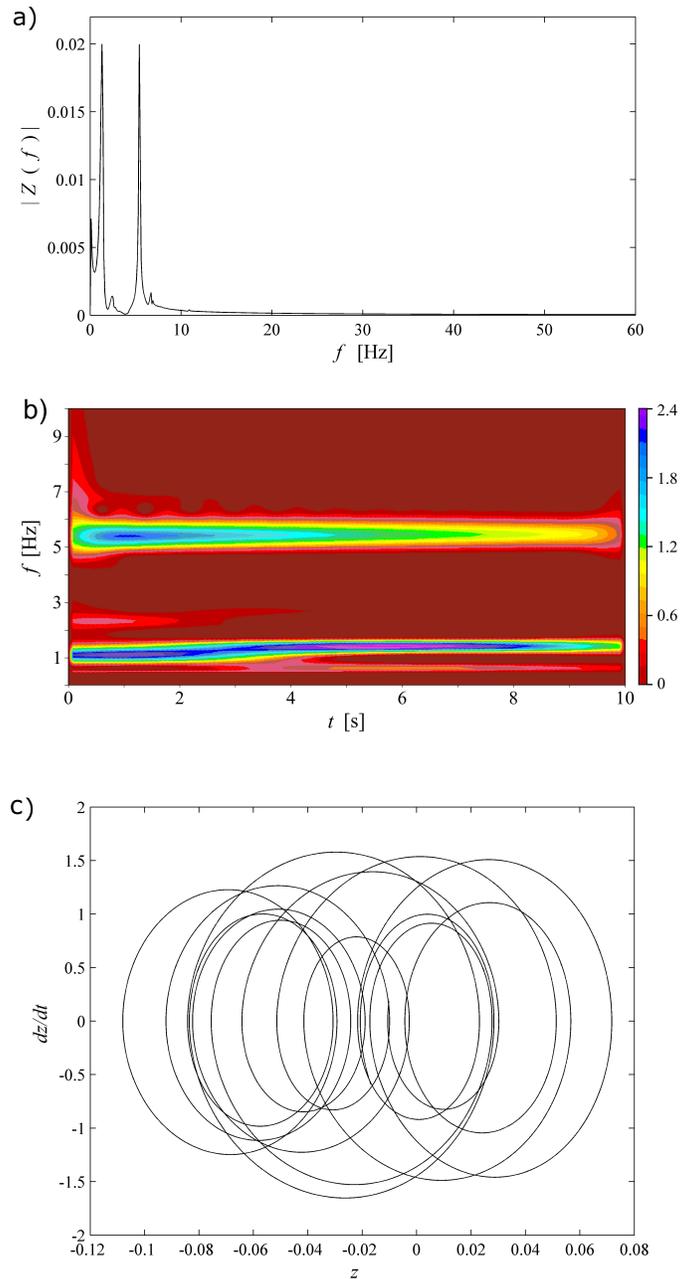


Figura 5.2. Respuesta numérica, vibración libre para grandes deformaciones; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.

b) Respuesta a la vibración forzada

La solución numérica del modelo de la viga para condiciones de vibración forzada se realizó a las frecuencias no lineales que se encontraron en el análisis experimental de la respuesta de la viga a la vibración libre: 2.9 Hz, 18.1 Hz y 51 Hz. La Figura 5.3 presenta los resultados del análisis de la respuesta de la viga cuando es excitada a 2.9 Hz.

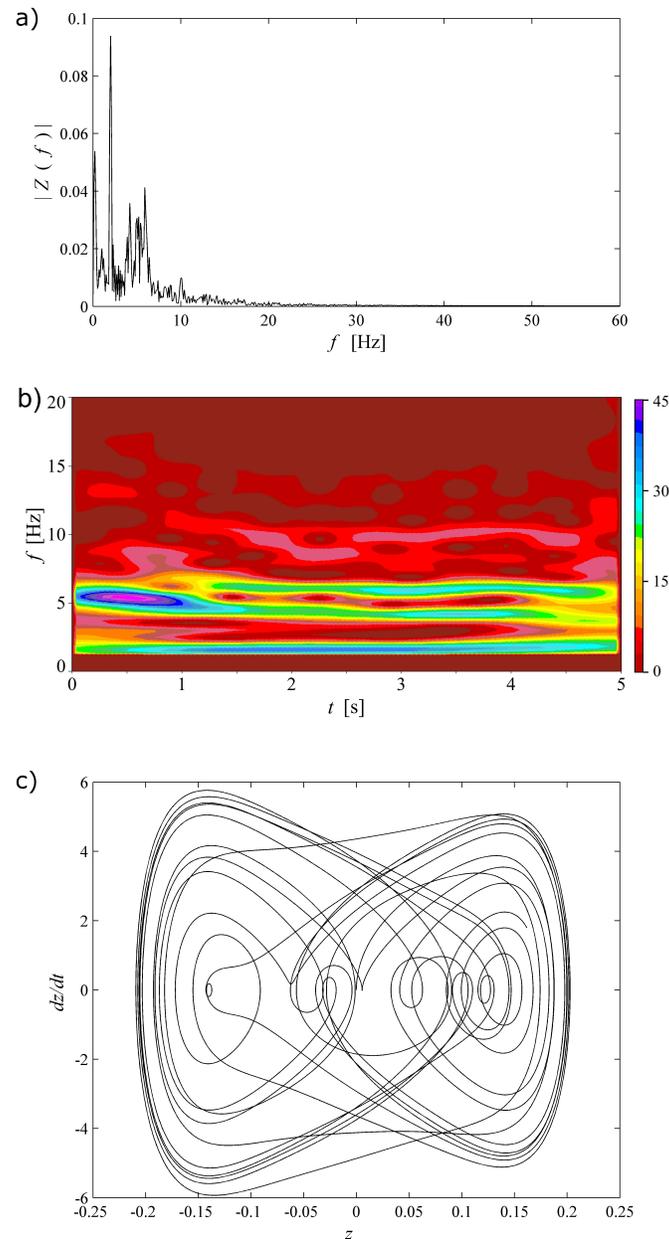


Figura 5.3. Respuesta numérica, vibración forzada a 2.9 Hz; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.

El espectro de frecuencias de la Figura 5.3(a) muestra un mayor contenido espectral, donde se distinguen tres picos dominantes, el primero en 2 Hz y otros dos en 5.9 Hz y 4.2 Hz. El mapa tiempo-frecuencia de la Figura 5.3(b) revela el comportamiento no lineal de la viga a partir de la variación en la amplitud de las frecuencias y la interacción entre ellas. El diagrama de fase en la 5.3(c) refuerza la identificación del comportamiento no lineal al dibujarse lazos con dos polos atractores en ± 0.13 . La Figura 5.4 muestra los resultados para el caso de vibración forzada a 18.1 Hz.

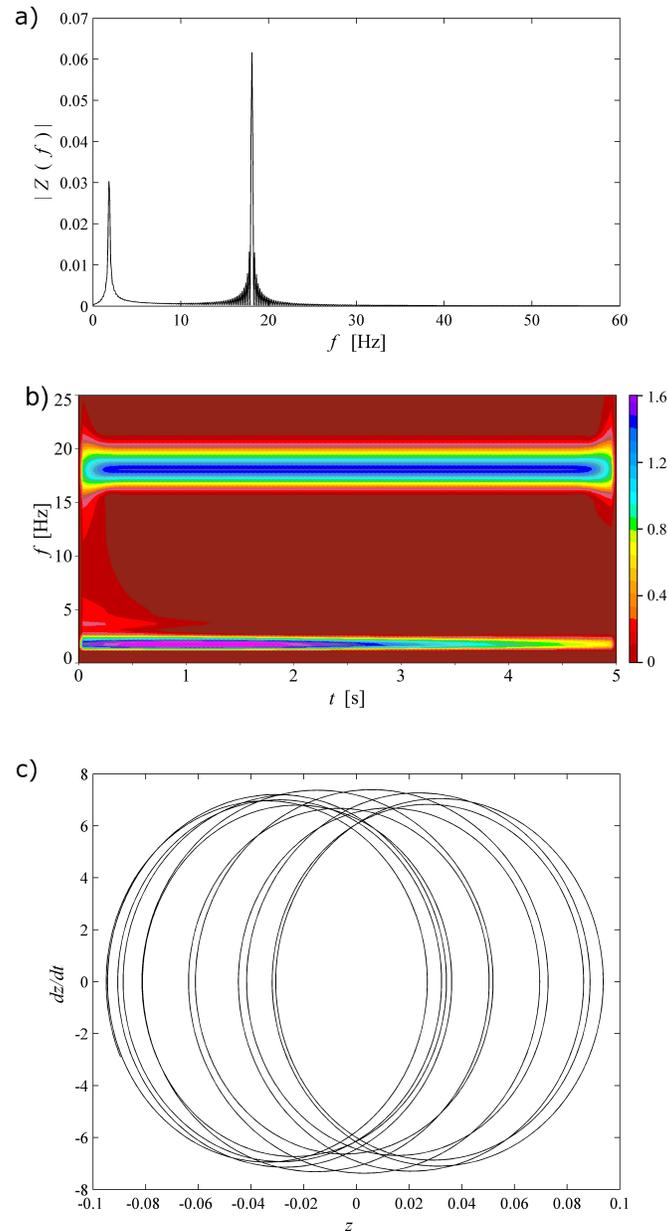


Figura 5.4. Respuesta numérica, vibración forzada a 18.1 Hz; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.

El espectro de frecuencias de la Figura 5.4(a) muestra dos picos principales, el pico dominante en la frecuencia de excitación y otro en 1.8 Hz. El mapa tiempo-frecuencia de la Figura 5.4(b) exhibe la no linealidad del sistema en la frecuencia de excitación al mostrar cambios de amplitud a lo largo del tiempo. Mientras que el diagrama de fase en la Figura 5.4(c) muestra un comportamiento inestable al dibujar lazos cerrados desplazados. Por último, en la Figura 5.5 se presentan los resultados del análisis de la respuesta de la viga cuando es excitada a 51 Hz.

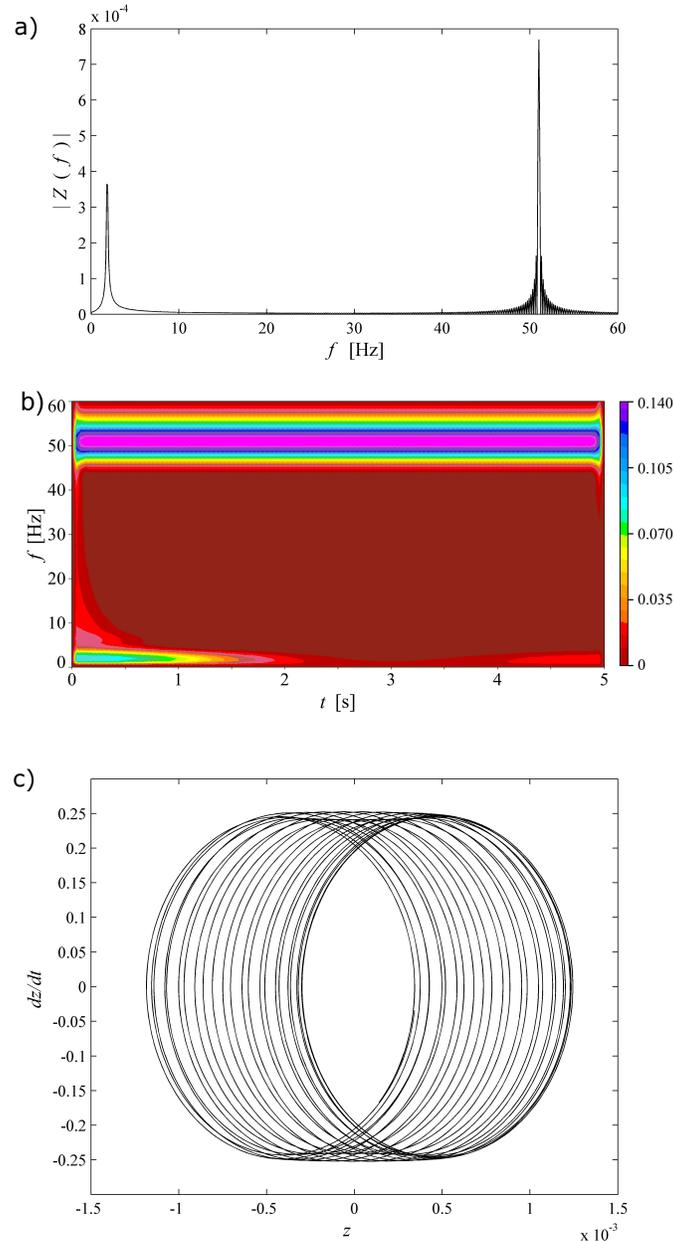


Figura 5.5. Respuesta numérica a una frecuencia de excitación de 51 Hz; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.

El espectro de frecuencias de la Figura 5.5(a) muestra un pico dominante a la frecuencia de excitación y otro en 1.4 Hz. El mapa tiempo-frecuencia de la Figura 5.5(b) exhibe el comportamiento no lineal del sistema cerca de la frecuencia 1.4 Hz. Finalmente, el diagrama de fase de la Figura 5.5(c) refleja la inestabilidad del sistema al mostrar lazos cerrados que se desplazan.

Los resultados del análisis numérico muestran que el modelo simplificado de la viga logra determinar las frecuencias causadas por los términos no lineales. Además, los términos polinomiales del modelo producen un patrón típico de distorsión armónica en la solución numérica.

5.1.2. Validación experimental del modelo

Con el fin de validar la efectividad del modelo simplificado se llevó a cabo una serie de experimentos sobre la viga en voladizo como se describió en la sección 4.1. Los resultados obtenidos del análisis de los datos se presentan continuación.

a) Respuesta a la vibración libre

La respuesta en el tiempo de la prueba en vibración libre se muestra en la Figura 5.6. En la señal es posible ver el efecto no lineal debido a las altas frecuencias cuando la amplitud de las oscilaciones es grande; conforme la amplitud de las oscilaciones disminuye, la respuesta del sistema es más lineal.

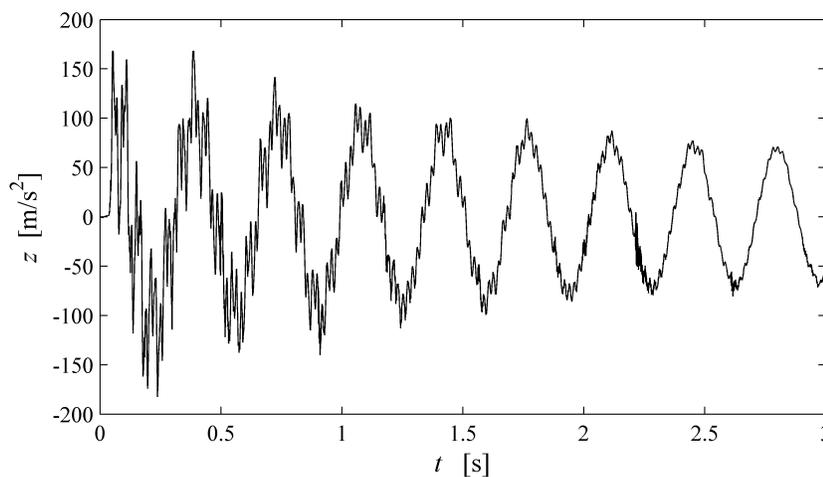


Figura 5.6. Respuesta del sistema en el tiempo para la prueba de vibración libre.

La Figura 5.7 presenta los resultados del análisis de la respuesta de vibración libre. El espectro de frecuencias de la Figura 5.7(a) muestra tres picos dominantes, el principal en 2.9 Hz y dos más en 18.01 Hz y 50.96 Hz. No obstante, el espectro no exhibe el comportamiento no lineal del contenido de frecuencias de la respuesta de la viga.

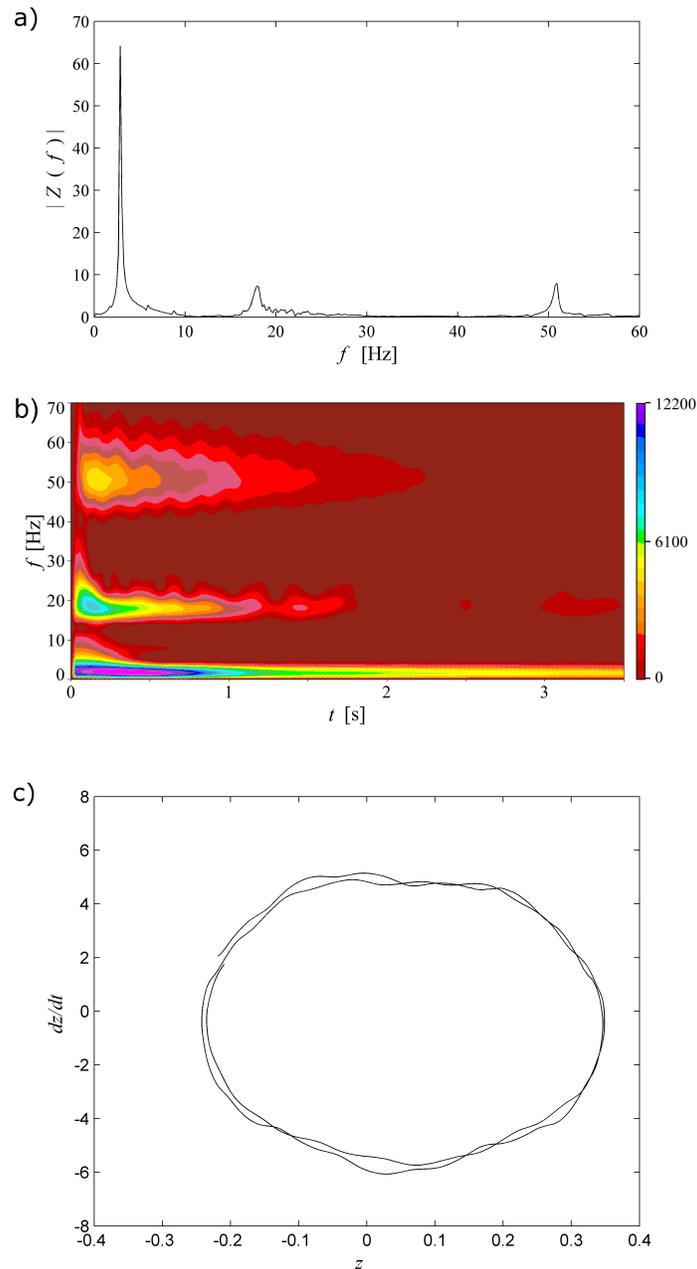


Figura 5.7. Resultados experimentales, vibración libre; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.

El mapa tiempo-frecuencia de la Figura 5.7(b) permite ver el efecto del amortiguamiento y el comportamiento no lineal del sistema al rededor de las frecuencias 18.01 Hz y 50.96 Hz. Mientras que el diagrama de fase de la Figura 5.7(c) muestra un lazo de forma cuadrada causado por el comportamiento no lineal. En éste caso los polos atractores se encuentran disminuidos debido al filtrado de las altas frecuencias no lineales causado por la integración numérica necesaria para obtener la velocidad y el desplazamiento.

b) Respuesta a la vibración forzada

Los resultados de analizar la respuesta de la viga al barrido de frecuencias se presenta en la Figura 5.8. La Figura 5.8(a) presenta la amplitud de las vibraciones registradas durante las rampas de ascenso y descenso. La gráfica deja en claro que hay un fenómeno salto asociado a las no linealidades de la viga en las frecuencias de 18.1 Hz y 51 Hz. En el caso de la frecuencia de 51 Hz, la viga muestra amplitudes relativamente grandes haciendo más notable el comportamiento no lineal de la viga en esta frecuencia.

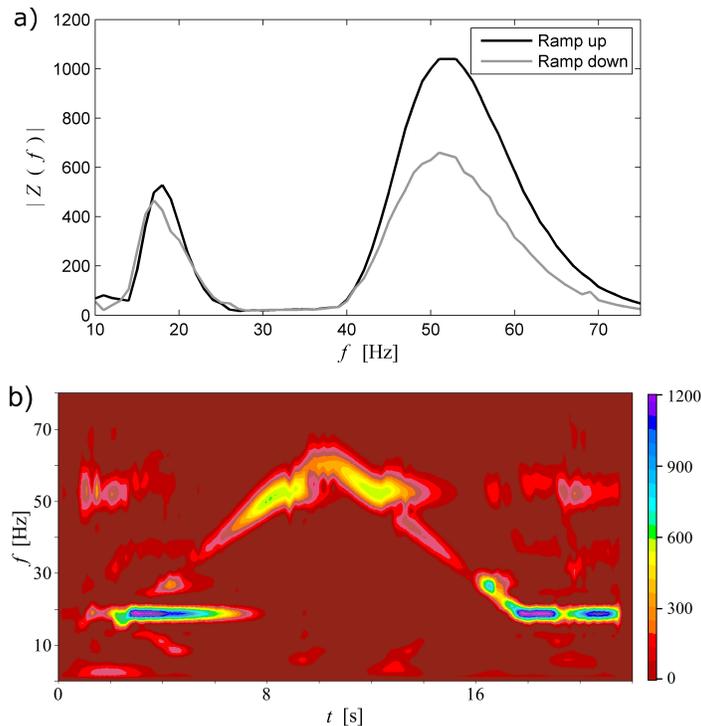


Figura 5.8. Respuesta a la vibración forzada obtenida a partir de un barrido de frecuencias; a) amplitud de la respuesta; b) mapa tiempo-frecuencia.

Por su parte, el mapa tiempo-frecuencia de la Figura 5.8(b) muestra la evolución de la respuesta del sistema. En el mapa se puede observar como la frecuencia de 51 Hz

también se excita a bajas frecuencias; además, es posible ver la presencia de frecuencias armónicas y el efecto del amortiguamiento de la frecuencia de 18.1 Hz.

A partir de los resultados del diagrama de salto, se llevaron a cabo pruebas de vibración forzada en las dos frecuencias críticas encontradas: 18.1 Hz y 51 Hz. Los resultados de la prueba a 18.1 Hz se presentan en la Figura 5.9.

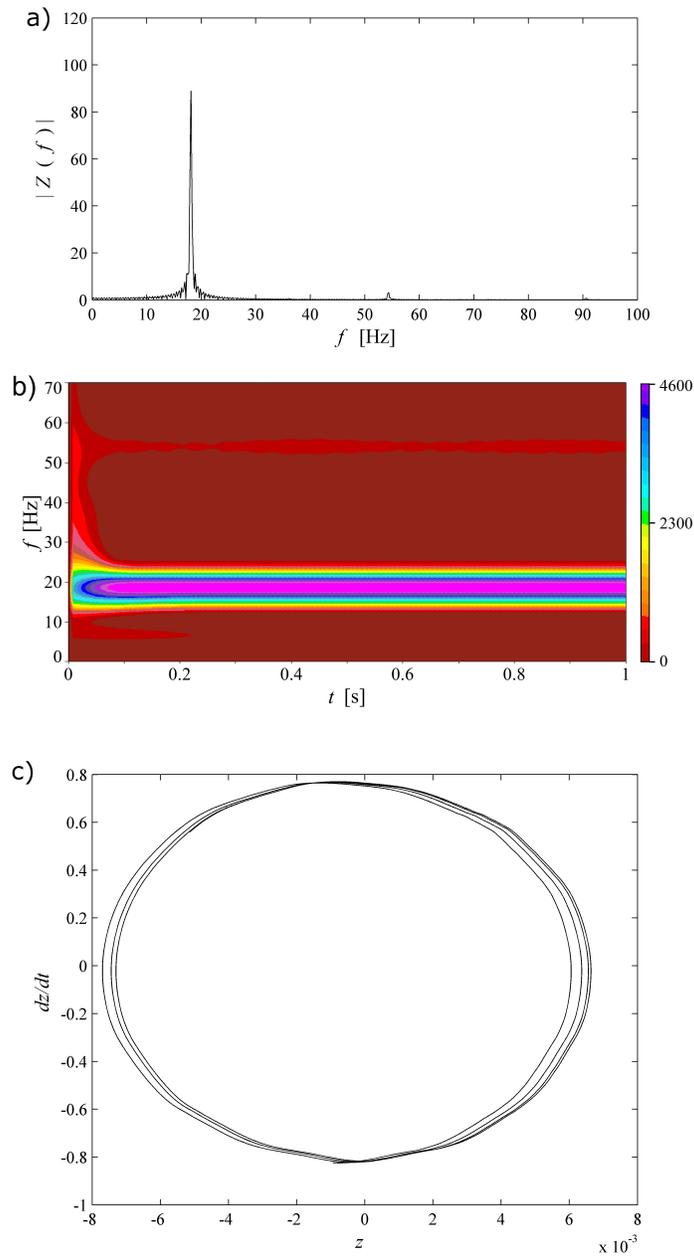


Figura 5.9. Resultados experimentales, vibración forzada a 18.1 Hz; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.

El espectro de frecuencias de la Figura 5.9(a) muestra un pico dominante en la frecuencia de excitación y un segundo pico de menor amplitud en 54 Hz. En el mapa tiempo-frecuencia de la Figura 5.9(b) se puede observar que la frecuencia de excitación domina en la respuesta de la viga, de manera que las otras frecuencias se ven atenuadas; además se puede ver como las grandes amplitudes producidas por la frecuencia de excitación activan el comportamiento no lineal de la viga de alrededor de 54 Hz. Por su parte, el diagrama de fase de la Figura 5.9(c) muestra lazos cerrados con forma de balón.

Con el fin de observar de manera más clara el comportamiento no lineal de la viga en la frecuencia de 54 Hz, la Figura 5.10 muestra una vista cercana del mapa tiempo-frecuencia alrededor de ésta frecuencia. En la figura se pueden observar los cambios de amplitud de dicha frecuencia a lo largo del tiempo. Esto es posible dado que el procesamiento en un rango más cerrado de frecuencias atenúa la gran amplitud de la frecuencia de 18.1 Hz, permitiendo ver de manera más detallada el desempeño de la frecuencia de interés.

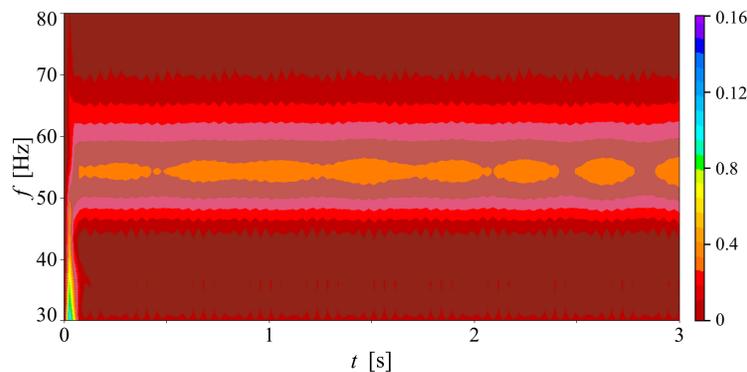


Figura 5.10. Respuesta no lineal de la frecuencia de 54 Hz causada por la frecuencia de excitación de 18.1 Hz.

La segunda prueba de vibración forzada se realizó a 51 Hz. Los resultados del análisis de los datos registrados se muestran en la Figura 5.11. Para éste caso, el espectro de frecuencias muestra sólo un pico dominante en torno a la frecuencia de excitación, mientras que el mapa de tiempo-frecuencia muestra el variaciones de amplitud para la misma frecuencia, exhibiendo así el comportamiento no lineal de la frecuencia de 51 Hz. Finalmente, el diagrama de fase forma lazos cerrados en forma de balón ligeramente desplazados.

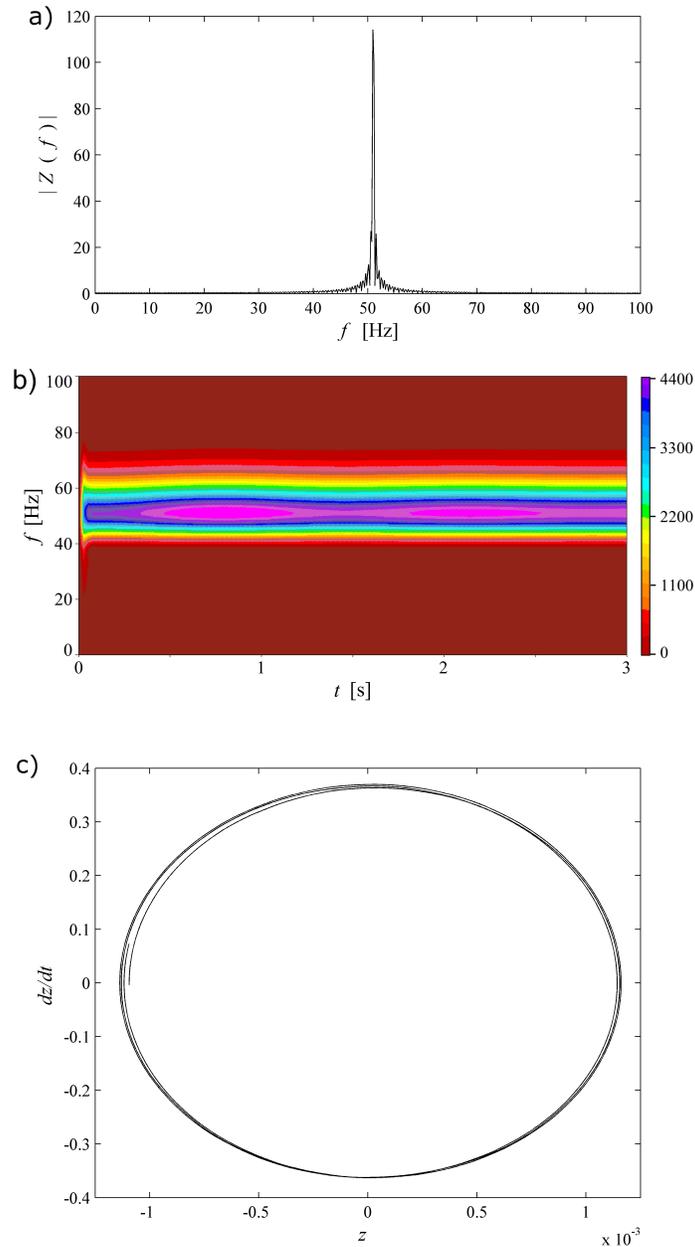


Figura 5.11. Resultados experimentales, vibración forzada a 51 Hz; a) espectro de frecuencia; b) mapa tiempo-frecuencia; c) diagrama de fase.

Después de analizar los resultados, se comprueba que el comportamiento no lineal de la viga en voladizo debido a las grandes deformaciones se produce a ciertas frecuencias, las cuales únicamente pueden ser identificadas de manera numérica o experimental. Para encontrar éstas frecuencias la viga debe ser flexionada una gran cantidad, de otro modo, los efectos generados por el desplazamiento, pudieran ser despreciados. A partir de la prueba de barrido de frecuencias, se pudo observar que las amplitudes de las vibraciones

son diferentes en la rampa de ascenso que en la rampa de descenso. En particular, para el caso de la frecuencia de 51 Hz, la viga mostró amplitudes de vibración muy diferentes, resaltando el comportamiento no lineal del sistema en ésta frecuencia.

5.2. Resultados del análisis de un sistema complejo: sincronización dinámica de un automóvil

A continuación se presentan los resultados del análisis de la sincronización dinámica de un automóvil como un sistema complejo. El desarrollo de los experimentos y la metodología empleada para el análisis de los datos fueron descritos en la sección 4.2.

5.2.1. Análisis de las pruebas de impacto

Las pruebas de impacto sobre la puerta y el tablero fueron desarrolladas para establecer una base del sistema. Las señales fueron analizadas con la transformada rápida de Fourier para identificar las frecuencias naturales de los elementos, los espectros de frecuencia obtenidos se muestran en la Figura 5.12.

Los primeros espectros (Figuras 5.12(a) y 5.12(b)) muestran la respuesta de ambos componentes, tablero y puerta, cuando fueron excitados con un impacto en el tablero; los segundos (Figuras 5.12(c) y 5.12(d)) corresponden a la respuesta de los componentes cuando el experimento se repitió con un impacto en la puerta. Cabe destacar que las aceleraciones de ambos componentes fueron registradas simultáneamente durante los experimentos.

Aunque los espectros muestran el comportamiento complejo del contenido de frecuencias del sistema, éstos no son suficiente para determinar las características dependientes del tiempo del contenido de frecuencias. Para ello, los mapas de tiempo-frecuencia para los mismos datos fueron construidos. Los espectrogramas obtenidos se muestran en la Figura 5.13. De los resultados anteriores, se encontró que las frecuencias naturales del tablero son $f_1 = 63$ Hz y $f_2 = 117$ Hz; mientras que las frecuencias de la puerta están en $f_3 = 170$ Hz y $f_4 = 256$ Hz. Éstas frecuencias se utilizaron para establecer los valores de los filtros pasa banda implementados en el análisis de los datos de las pruebas conducidas.

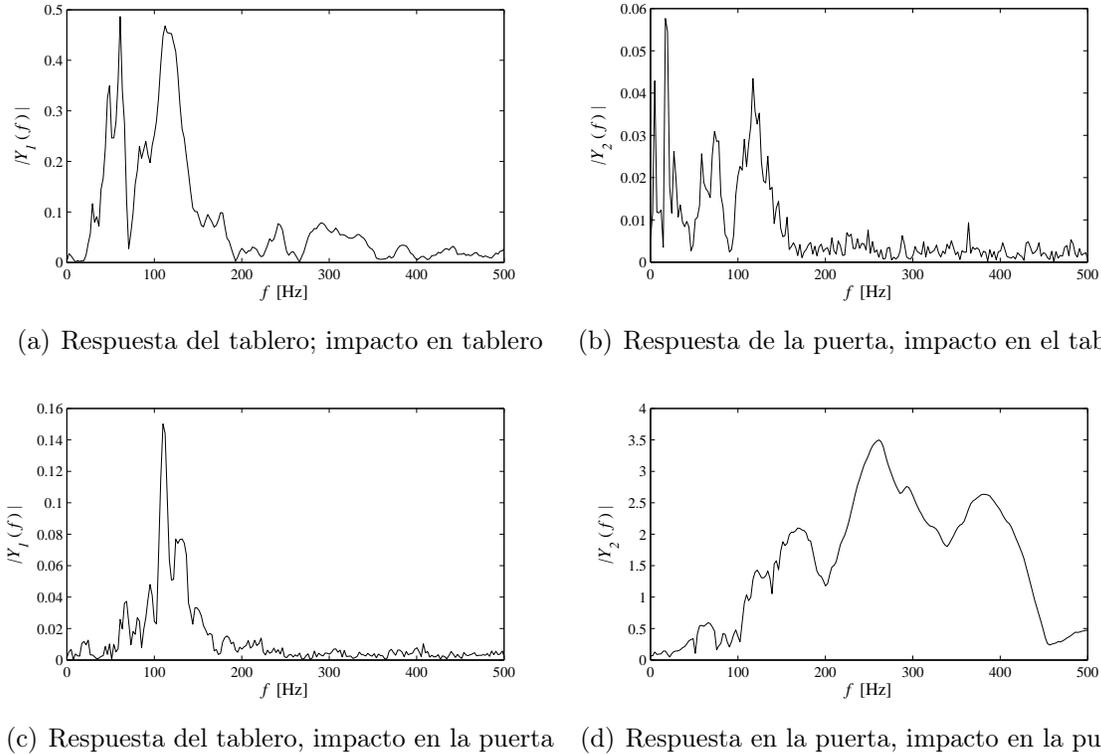


Figura 5.12. Espectros de frecuencia de las pruebas de impacto.

En los mapas tiempo-frecuencia de la Figura 5.13 es posible ver no solo el comportamiento complejo del sistema, sino también el comportamiento no lineal. Éste puede ser observado a partir de la variación del contenido de frecuencias del sistema a lo largo del tiempo, así como los cambios de amplitud de las mismas frecuencias. Al comparar los resultados de los espectros de frecuencia y los espectrogramas del análisis tiempo-frecuencia, se puede observar que el comportamiento del sistema en las Figuras 5.12(d) y 5.13(d) es diferente de las demás. Ésto se atribuye a que el impacto de la puerta produce una gran respuesta en la misma puerta, lo cual conduce a que las no linealidades amplíen su contenido de frecuencias.

Los mapas de tiempo-frecuencia permiten el análisis en el tiempo de los elementos del automóvil. Está claro que la amplitud de las frecuencias dominantes disminuye de manera diferente en el tiempo; las frecuencias de la puerta decaen más rápido que las frecuencias del tablero.

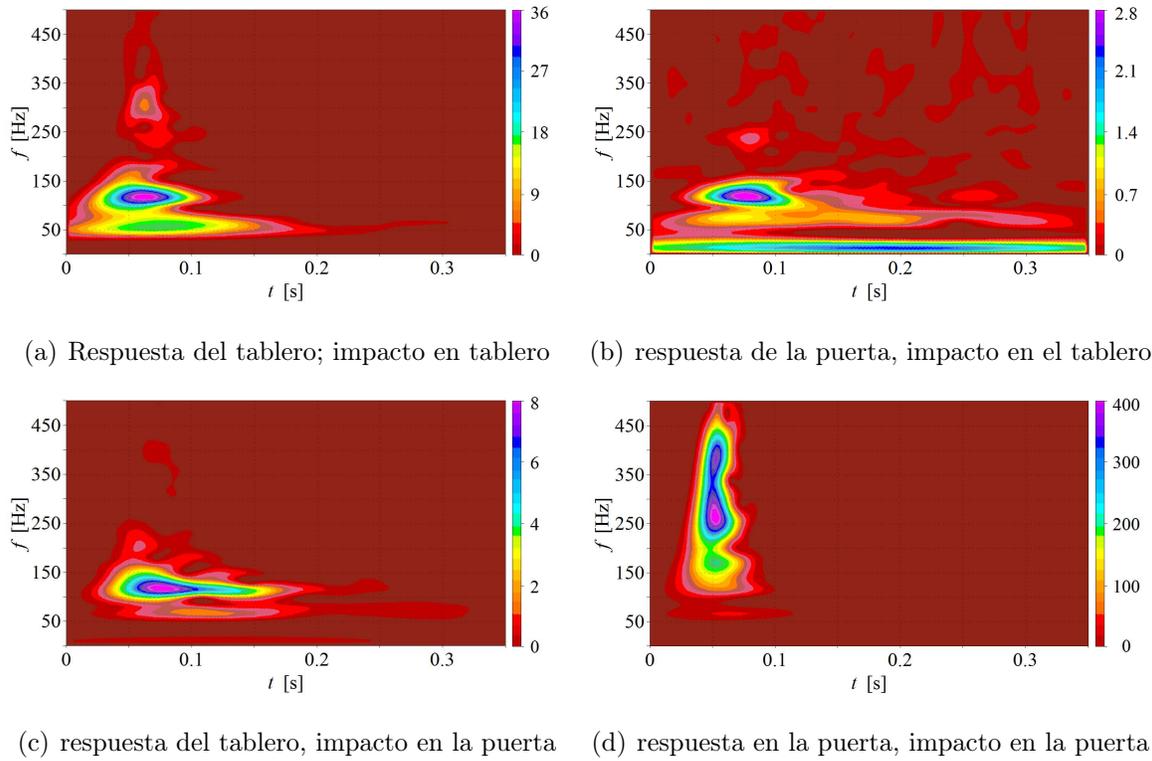


Figura 5.13. Mapas tiempo-frecuencia a partir de las pruebas de impacto.

Las gráficas tiempo-amplitud de la Figura 5.14 se obtuvieron seccionando transversalmente los mapas tiempo-frecuencia de la respuesta al impacto en las frecuencias de interés. Las Figuras 5.14(a) y 5.14(b) muestran el desarrollo de las frecuencias naturales del tablero (f_1 y f_2) cuando el tablero fue impactado; del mismo modo, las Figuras 5.14(c) y 5.14(d) muestran el comportamiento de las frecuencias naturales de la puerta (f_3 y f_4) cuando la puerta fue impacta.

La respuesta de cada frecuencia en la Figura 5.14 puede ser aproximada a una función exponencial en decadencia, de manera que es posible calcular el decremento asociado con el coeficiente de amortiguamiento. Así, el coeficiente de amortiguamiento por unidad de masa, c , es estimado para cada frecuencia de acuerdo a la Ec. (3.14). Por otra parte, considerando que la frecuencia natural sólo depende de la rigidez del elemento, el coeficiente de rigidez por unidad de masa, k , es estimado mediante la Ec. (3.13). Los coeficientes de rigidez y amortiguamiento obtenidos para cada una de las frecuencias naturales de los elementos se listan en la Tabla 5.1.

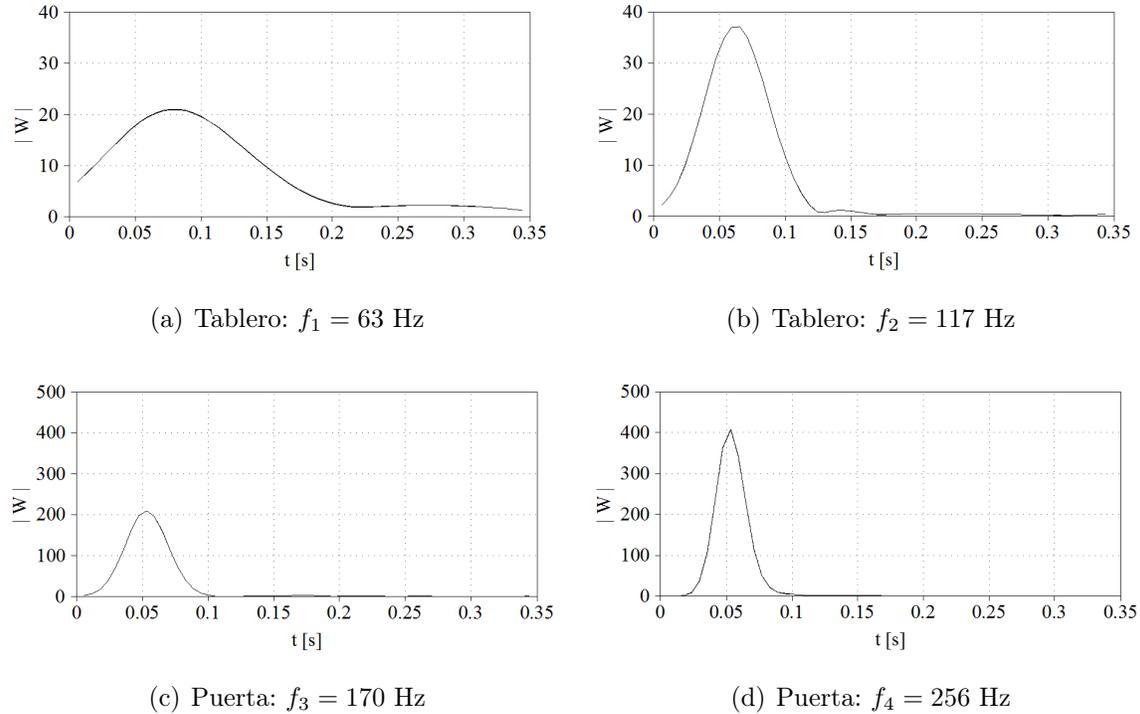


Figura 5.14. Gráficas tiempo-amplitud de cada frecuencia natural obtenidos a partir de las secciones transversales en los mapas tiempo-frecuencia para analizar la dinámica evolutiva de cada frecuencia natural.

Tabla 5.1. Parámetros del tablero y la puerta a partir de las pruebas de impacto.

Elemento	n	f_n [Hz]	k [s^2/kg]	c [s/kg]
Tablero	1	63	3969	22.9
	2	117	13619	87.4
Puerta	3	170	28900	75.7
	4	256	65536	113.8

5.2.2. Análisis de las pruebas conducidas

Mientras es conducido, el automóvil tiene varias fuentes de excitación regulares y aleatorias que se transmiten a través de sus componentes, principalmente la excitación de la carretera, el motor y los subsistemas de transmisión de potencia, entre otros; por tal motivo, fue necesario implementar un proceso de filtrado a las señales de antes de analizarlas. El proceso de filtrado consistió en dejar pasar sólo las frecuencias naturales

de los elementos (f_1 , f_2 , f_3 y f_4) y eliminar otras frecuencias principales. Los detalles de diseño de filtros empleados fueron descritos en la sección 4.2. Los resultados del análisis de las señales no filtradas y filtradas se presentan a continuación.

Espectros de Fourier

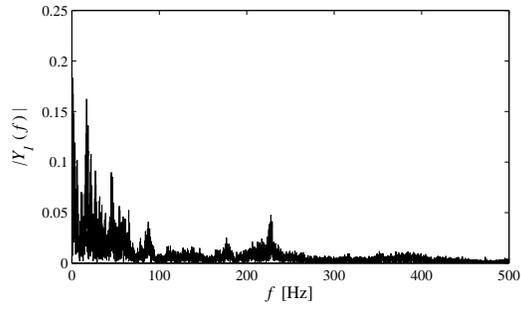
La Figura 5.15 muestra los espectros de frecuencia para las señales no filtradas del tablero y la puerta durante las pruebas conducidas, en los cuales es posible observar las frecuencias dominantes. Existe una frecuencia $f_v = 1.5$ Hz que se atribuye al primer modo de vibración del automóvil y otra más, f_w , que corresponde a la rotación de la rueda; usando $f_w = V/(\pi D)$, donde $D = 0.6$ m es el diámetro de la llanta, se obtiene que $f_w = 8.8$ Hz para 60 km/h, 10.3 Hz para 70 km/h y 11.8 Hz para 80 km/h.

Correlación cruzada

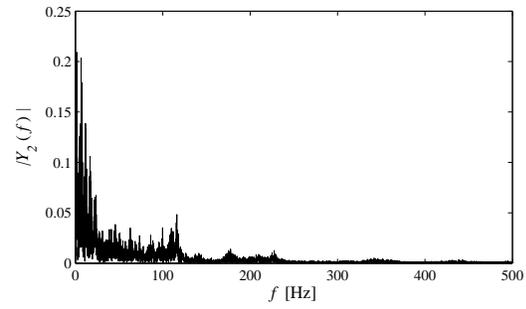
La primera etapa para la identificación de la sincronización fue calcular el coeficiente de correlación entre las señales no filtradas del tablero y la puerta, C_{y_1, y_2} . Los valores calculados fueron relativamente pequeños y positivos: 0.366 para la velocidad de $V = 60$ km/h, 0.256 para 70 km/h, y 0.354 para 80 km/h. Los bajos valores se atribuye a la incapacidad del coeficiente de correlación para separar el alto contenido de frecuencias de las señales y entonces analizar sus respuestas individuales; por lo tanto, fue necesario calcular las funciones de correlación.

Los resultados de la función de correlación se muestran en la Figura 5.16. En éstos se puede ver que las autocorrelaciones tienen sus valores máximos en un tiempo de retardo $\tau = 0$ y picos más pequeños a los lados. La correlación cruzada entre el tablero y puerta tiene su valor máximo en un tiempo de retardo de alrededor de 5 ms. Este retardo es asociado con el tiempo de propagación de la onda de un elemento a otro.

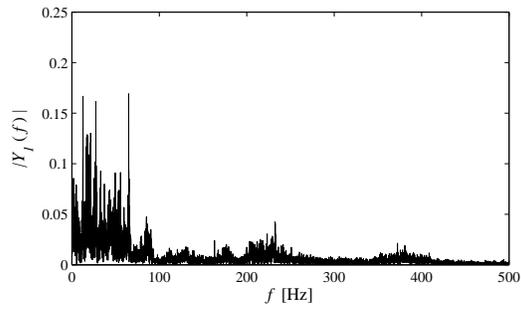
Teniendo en cuenta la distancia entre los elementos medidos, la velocidad de propagación de la perturbación se calcula es alrededor de 180 m/s. La disminución de la función de correlación para grandes retardos indica falta de dependencia entre las señales y la carencia de un estímulo.



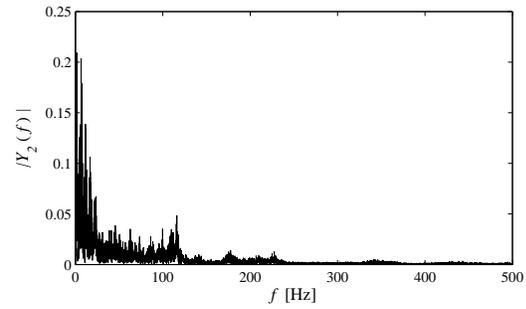
(a) Tablero a 60 km/h



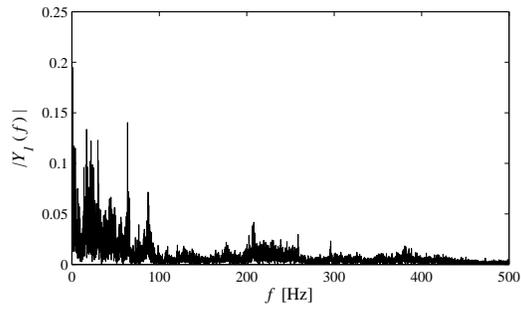
(b) Puerta a 60 km/h



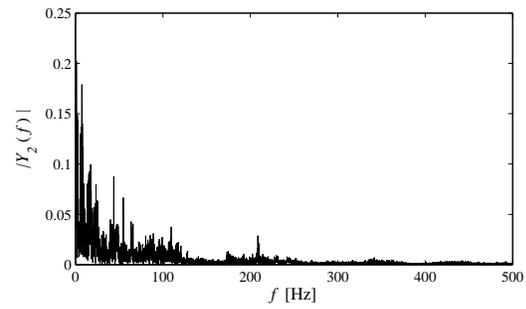
(c) Tablero a 70 km/h



(d) Puerta a 70 km/h



(e) Tablero a 80 km/h



(f) Puerta a 80 km/h

Figura 5.15. Espectro de Fourier para las señales no filtradas de las pruebas conducidas.

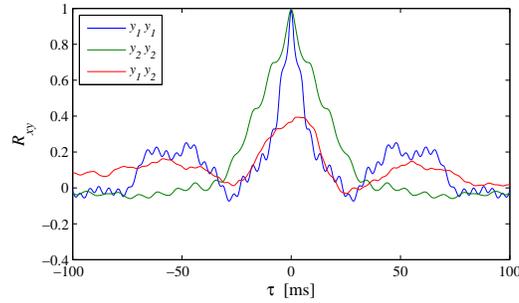
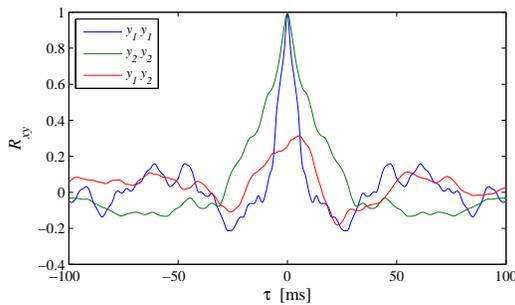
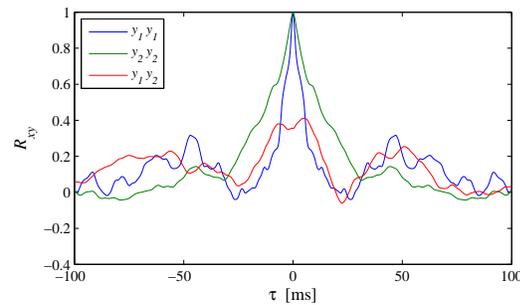
(a) $V = 60$ km/h(b) $V = 70$ km/h(c) $V = 80$ km/h

Figura 5.16. Autocorrelación y correlación cruzada para las señales de las pruebas conducidas a diferentes velocidades; tablero y_1 , puerta y_2 ; línea azul - autocorrelación del tablero, línea verde - autocorrelación de la puerta, línea roja - correlación cruzada.

Mapas tiempo-frecuencia

El análisis tiempo-frecuencia usando la transformada wavelet continua se realizó con las señales filtradas. Los mapas obtenidos se muestran en la Figura 5.17 para las tres velocidades. Entre ellos se puede observar una tendencia similar, a medida que la velocidad aumenta, las amplitudes de todas las frecuencias naturales también se incrementan. Además, las amplitudes de las frecuencias del tablero son más altas que las de la puerta. También se puede notar que la respuesta del tablero es más sensible a las altas frecuencias alrededor de 250 Hz. Los mapas de tiempo-frecuencia muestran la evolución de cada frecuencia en el tiempo.

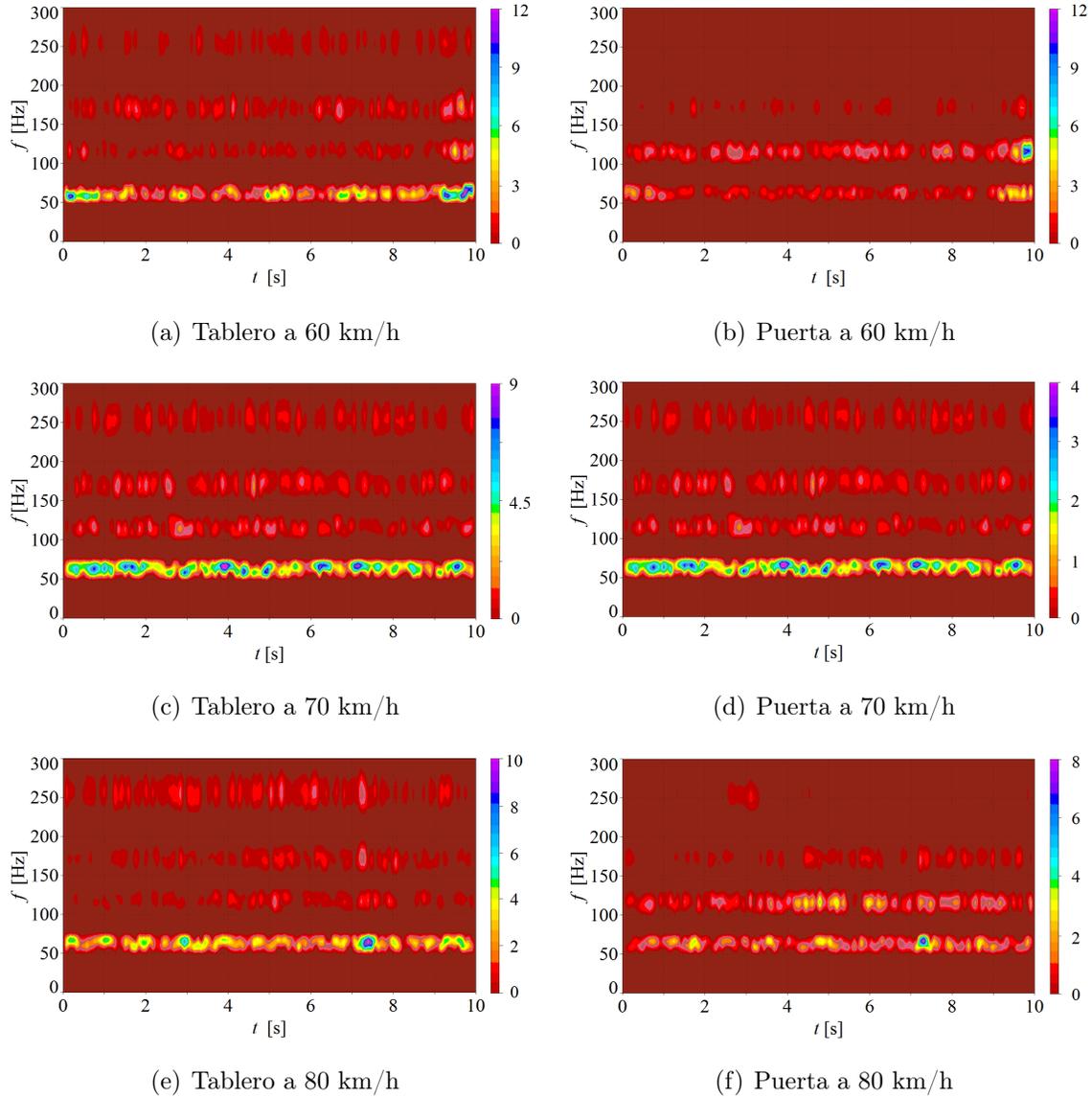


Figura 5.17. Mapas tiempo-frecuencia a partir de las señales del tablero y la puerta mostrando desempeño dinámico durante las pruebas conducidas.

El coeficiente de correlación fue calculado a partir del comportamiento de cada frecuencia natural, la Figura 5.18 muestra los resultado. En ella se puede ver que las correlaciones son más altas para las señales filtradas que para las señales no filtradas.

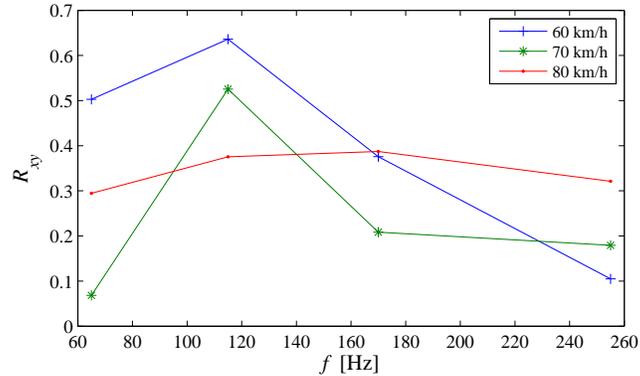


Figura 5.18. Coeficientes de correlación cruzada entre las señales del tablero y la puerta, para las pruebas conducidas a diferentes velocidades.

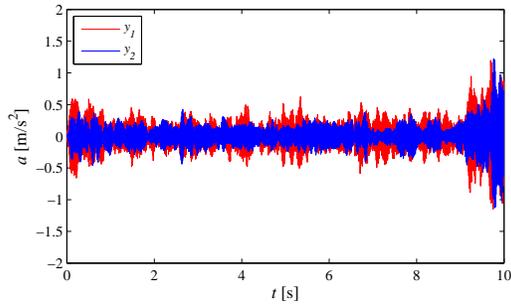
Transformada de Hibert y el parámetro de déficit de orden

El parámetro de déficit de orden fue introducido con el fin de cuantificar la sincronización. Las señales filtradas para el tablero y la puerta cuando el automóvil fue conducido en 60 km/h se muestran en la Figura 5.19(a). El parámetro de déficit de orden para las mismas señales que se presentan en la Figura 5.19(b). Puede verse que s es cercano a cero la mayor parte del tiempo, lo que indica que los componentes están muy cercanos a la sincronización. Las Figuras 5.19(c) y 5.19(d) muestran los resultados para las pruebas cuando el automóvil fue conducido a 70 km/h, y las Figuras 5.19(e) y 5.19(f) para el caso de 80 km/h.

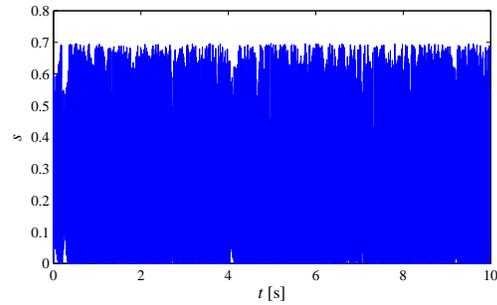
La Tabla 5.2 muestra los resultados del análisis estadístico de parámetro de déficit de orden s . La desviación estándar se calculó a partir del valor máximo de sincronización ($s = 1$) con el fin de proporcionar una medida cuantitativa de la anchura de la distribución. De los resultados se aprecia que a mayor velocidad, el número de contenedores con $s = 0$ aumenta ligeramente. Sin embargo, el número de contenedores con $s \leq 0.2$ es casi el mismo en las tres velocidades. También se puede notar que en todos los casos el valor medio de s está alrededor de 0.2, lo que significa que la mayor parte del tiempo los elementos están en sincronía. Además, se observa que el valor s para todas las pruebas siempre fue inferior a 0.7.

Tabla 5.2. Estadística del parámetro de déficit de orden.

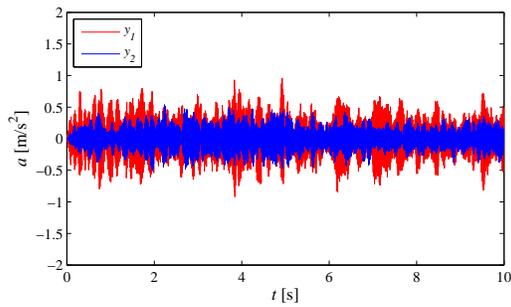
Descriptor	Velocidad		
	60 km/h	70 km/h	80 km/h
Media	0.218	0.217	0.226
Desviación estándar	0.307	0.307	0.313
Fracción de eventos con $s \leq 0.2$	0.560	0.563	0.537



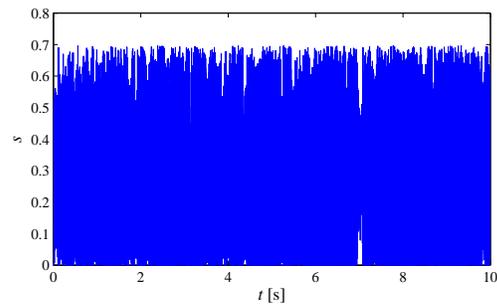
(a) Señal de aceleración a 60 km/h



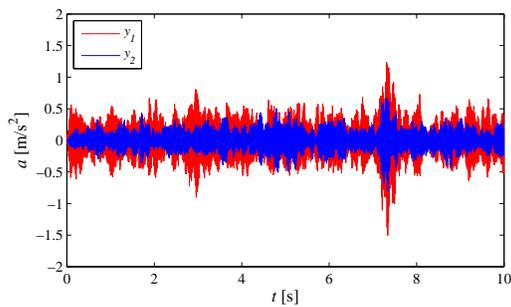
(b) Parámetro de déficit de orden a 60 km/h



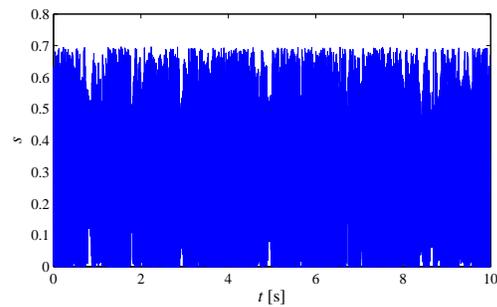
(c) Señal de aceleración a 70 km/h



(d) Parámetro de déficit de orden a 70 km/h



(e) Señal de aceleración a 80 km/h



(f) Parámetro de déficit de orden a 80 km/h

Figura 5.19. Señales del tablero y_1 y la puerta y_2 y su parámetro de déficit de orden a partir de las pruebas conducidas a diferentes velocidades.

La Figura 5.20 presenta los mismos datos calculados a partir de $s(t)$ para las tres velocidades de una manera ligeramente diferente. Si $P(s)$ es la proporción de eventos que están dentro de una ventana $s \pm \Delta s/2$, entonces $P(s)$ se convierte en la función de densidad de probabilidad conforme $s \rightarrow 0$.

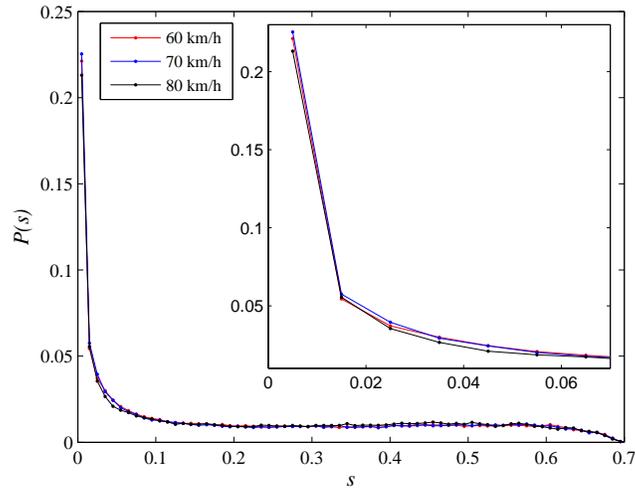


Figura 5.20. Histograma del déficit de orden para las pruebas conducidas a diferentes velocidades para un tamaño de muestra $\Delta s = 0.01$. La Figura interna es una vista ampliada.

Los histogramas en la Figura 5.20 para $\Delta s = 0.01$ son muy similares. Las gráficas muestran que es muy probable que el parámetro de déficit de orden esté por debajo de 0.02, valor establecido como el umbral que define la existencia de sincronización de los elementos. Para valores bajos, los histogramas de s son aproximados a una distribución de ley de potencias, mientras que para valores altos son aproximados a una constante c . De manera que la función de aproximación de $P(s)$ se define como:

$$P(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \\ as^\gamma & \text{si } 0 \leq s \leq 0.2 \\ c & \text{si } 0.2 < s \leq 0.7 \end{cases} \quad (5.1)$$

Los parámetros de mejor ajuste estimados a partir de $P(s)$ son $a = 0.19$, $\gamma = -0.83$, $c = 0.0092$. El exponente 0.83 es también una cuantificación del grado de déficit de sincronización. Cuanto más alto sea éste, el sistema estará más sincronizado. Las funciones de densidad de probabilidad $P(s)$ a partir de los datos experimentales y sus mejores aproximaciones dadas por la Ec. (5.1) se muestran en la Figura 5.21. La correspondien-

te función de distribución acumulada $p(s)$ se muestra en el recuadro interno para cada caso. Se puede observar que $P(s)$ tiene un desfase debido a la diferencia en el comienzo de la distribución de la ley de potencias. Sin embargo, la aproximación en la decadencia de ley de potencias se ajusta bien en el rango $0 \leq s \leq 0.2$, mientras que es menos precisa para $0.2 < s \leq 0.7$.

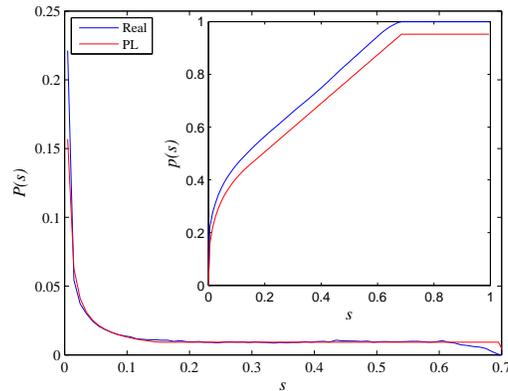
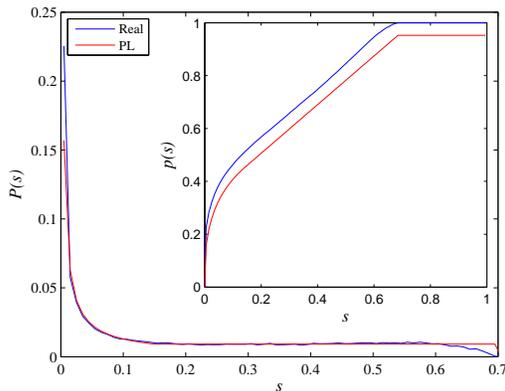
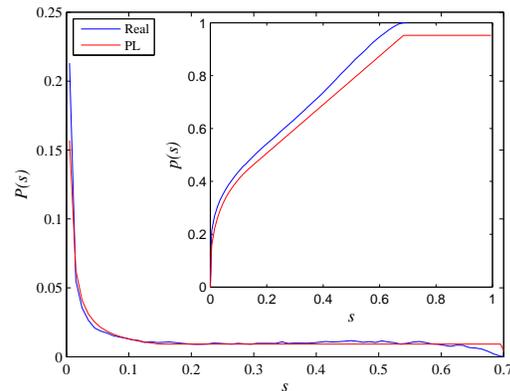
(a) $V = 60$ km/h(b) $V = 70$ km/h(c) $V = 80$ km/h

Figura 5.21. Función de densidad de probabilidad $P(s)$ a partir de las pruebas conducidas y su aproximación.

La combinación de las herramientas presentadas anteriormente permiten determinar la existencia de sincronización entre los elementos de un sistema complejo y cuantificar el grado de sincronización. Primero es necesario identificar las frecuencias naturales de los elementos individuales de interés, de manera que todas, menos las frecuencias naturales de los elementos sean eliminadas la señal original. Así, los datos filtrados pueden ser analizados para identificar la sincronización de los elementos de interés.

5.3. Resultados del análisis de sistemas de transmisión mecánica

5.3.1. Transmisión mecánica automotriz

En ésta sección se presentan los resultados del análisis de las señales experimentales de la transmisión automotriz descrita en la sección 4.3.1. La Figura 5.22 muestra la respuesta al impacto del engrane de la séptima velocidad. La aceleración angular fue calculada a partir de las aceleraciones tangenciales mediante la Ec. (4.4).

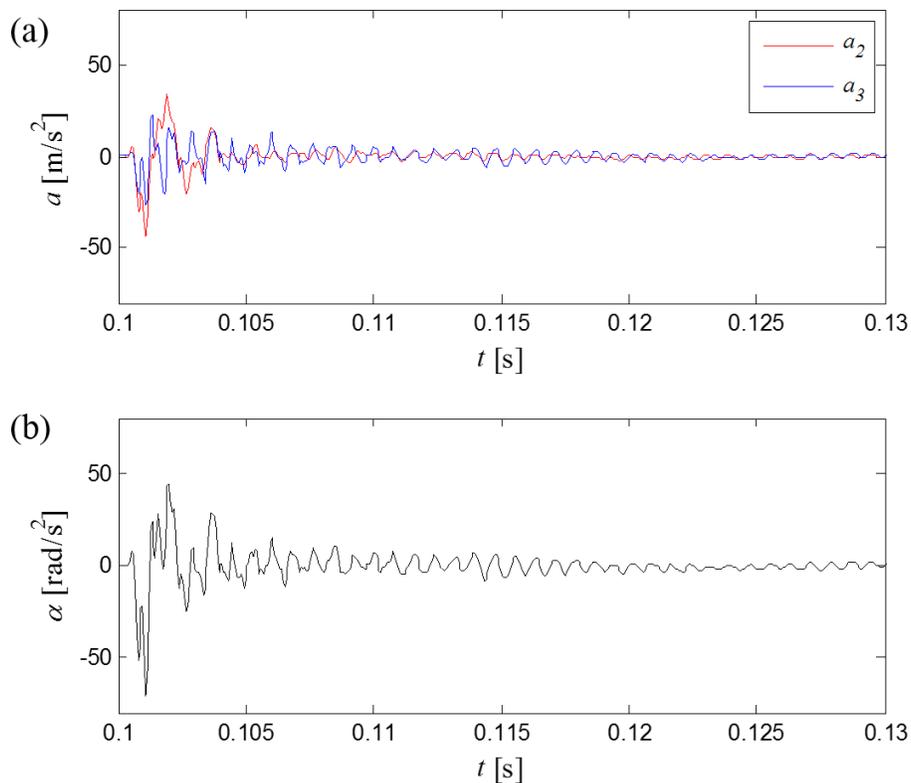


Figura 5.22. Respuesta al impacto del engrane de séptima. (a) Aceleraciones tangenciales censadas por los instrumentos, (b) aceleración angular calculada a partir de las aceleraciones tangenciales.

Análisis en el dominio de la frecuencia

La Figura 5.23 presenta el espectro de frecuencia para la aceleración angular. A partir de la FFT se puede determinar las frecuencias naturales promedio del sistema. Sin

embargo, como ya ha sido discutido, la FFT no es capaz de revelar la dependencia del tiempo de una señal y no logra captar las características evolutivas que comúnmente se observan en las señales experimentales de sistemas excitados naturalmente.

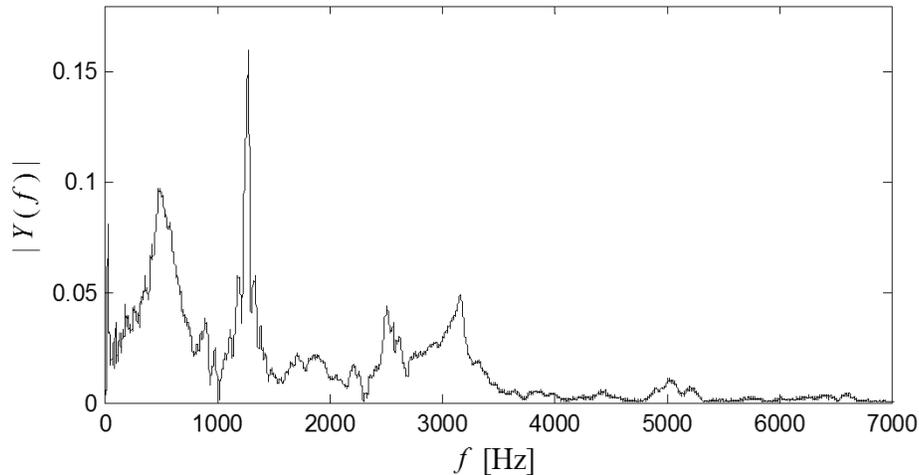


Figura 5.23. Espectro de frecuencias de las aceleraciones en el eje x . a_2 , a_3 son las aceleraciones lineales; α es la aceleración angular calculada a partir de las aceleraciones lineales.

Análisis en el dominio tiempo-frecuencia

Debido a la limitante de la transformada de Fourier para detectar transitorios, se utiliza la transformada wavelet continua para analizar señales en el dominio de tiempo-frecuencia. El mapa tiempo-frecuencia correspondiente a la aceleración angular se presenta en la Figura 5.24. En éste se pueden apreciar tres frecuencias fundamentales: la frecuencia de la flecha de entrada $f_i = 1350$, la frecuencia de la flecha de salida $f_o = 3170$ y una una frecuencia de acoplamiento $f_c = 530$. El mapa permite ver la evolución de las frecuencias y con ello el comportamiento no lineal del sistema ligado a la variación de amplitud e interacción entre su contenido de frecuencias. La Tabla 5.3 lista los modos de vibración identificados a partir del mapa tiempo-frecuencia.

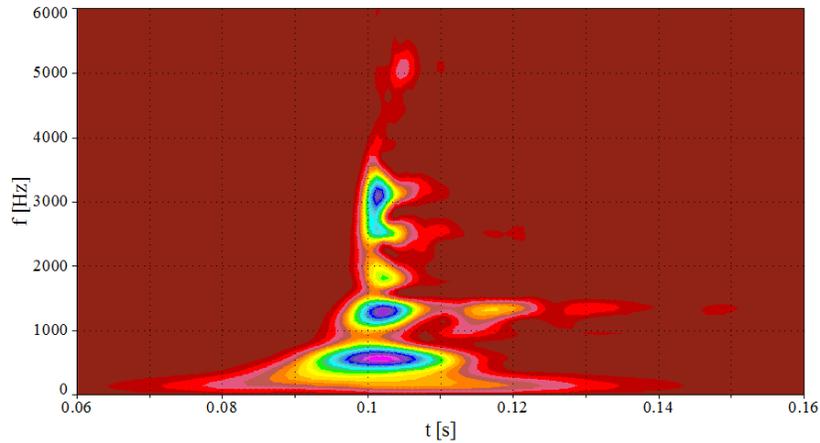


Figura 5.24. Mapas tiempo-frecuencia a partir de la aceleración angular de la transmisión TR6070.

Tabla 5.3. Modos de vibración del engrane de 7ma de la transmisión TR6070

No.	Frecuencia [Hz]	Tipo
1	530.3	Torsional
2	1350.0	Torsional
3	2517.9	Torsional
4	3170.2	Torsional

El procedimiento para identificar los parámetros dinámicos de sistemas de varios grados de libertad resulta complejo debido a que la respuesta del sistema involucra la respuesta de todos los componentes y no de los elementos individuales. No obstante, como se describió en la sección 4.3.1, es posible conocer la evolución individual de las frecuencias naturales de los componentes del sistema a partir del análisis tiempo-frecuencia.

La Figura 5.25 muestra la evolución de las tres principales frecuencias fundamentales identificadas en el mapa tiempo-frecuencia de la Figura 5.24. El desempeño de éstas frecuencias en el tiempo puede ser aproximado a una función exponencial en decadencia, de tal manera que los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de las flechas de entrada y salida pueden ser identificados mediante las ecuaciones (3.13) y (3.14). La Tabla 5.4 lista los valores obtenidos.

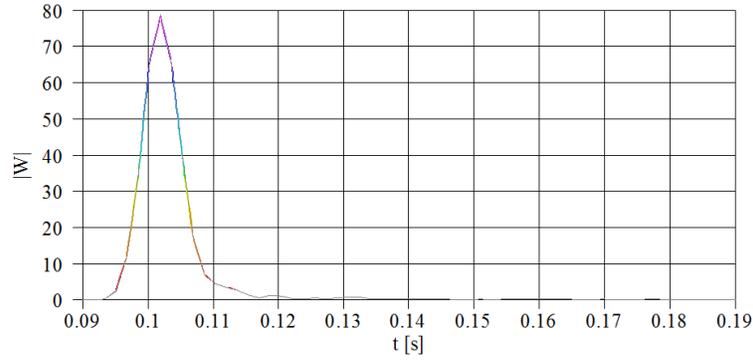
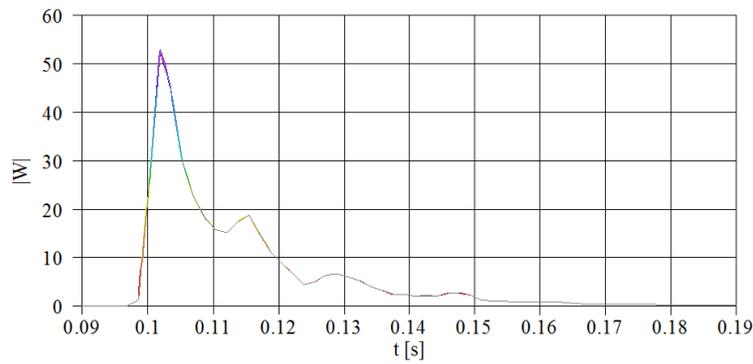
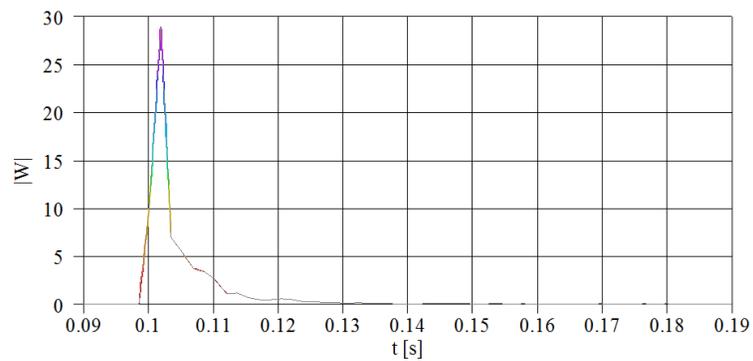
(a) $f_c = 530$ Hz(b) $f_i = 1350$ Hz(c) $f_o = 3170$ Hz

Figura 5.25. Gráficas tiempo-amplitud de las frecuencias naturales de la transmisión TR6070.

Tabla 5.4. Estimación de los parámetros de las flechas de entrada y de salida de la transmisión TR6070.

Elemento	Datos	k [N/m]	b [N · s/m]
Flecha de entrada ($f = 1350$ Hz)	$W_1 = 53$	9.68×10^4	391.8×10^{-3}
	$W_2 = 2$		
	$T = 22.5 \times 10^{-3}$ s		
	$J = 1.345 \times 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$		
Flecha de salida ($f = 3170$ Hz)	$W_1 = 29$	2.27×10^{-3}	733.5×10^{-3}
	$W_2 = 1$		
	$T = 52.5 \times 10^{-3}$ s		
	$J = 5.718 \times 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$		

Diagramas de fase

El diagrama de fase fue construido con el fin de determinar la inestabilidad y no linealidad del sistema. La Figura 5.26 presenta el diagrama para el tiempo de disipación del impacto (0.1 a 0.3 s), donde se puede observar el efecto del amortiguamiento y el comportamiento no lineal generado por las altas frecuencias.

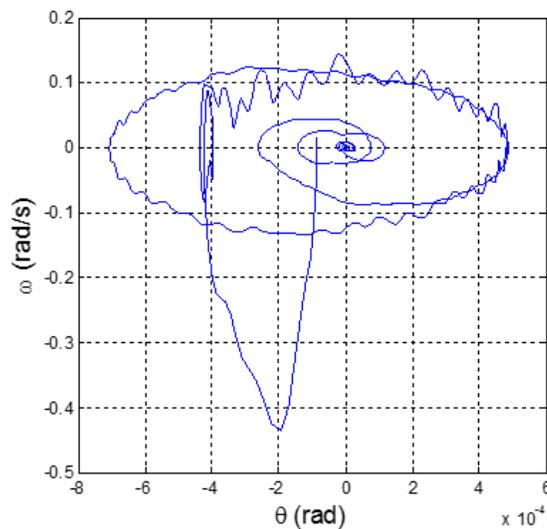


Figura 5.26. Diagrama de fase de la transmisión TR6070, construido a partir de las velocidades y los desplazamientos angulares.

Con el fin de apreciar de mejor manera el desempeño del sistema, la Figura 5.27 muestran el mismo diagrama pero en lapsos de tiempo reducido. De éste conjunto de diagramas se pueden observar que debido a la disipación de energía los lazos internos del diagrama no dibujan trayectorias cerradas; sin embargo, éstas tienen una forma similar.

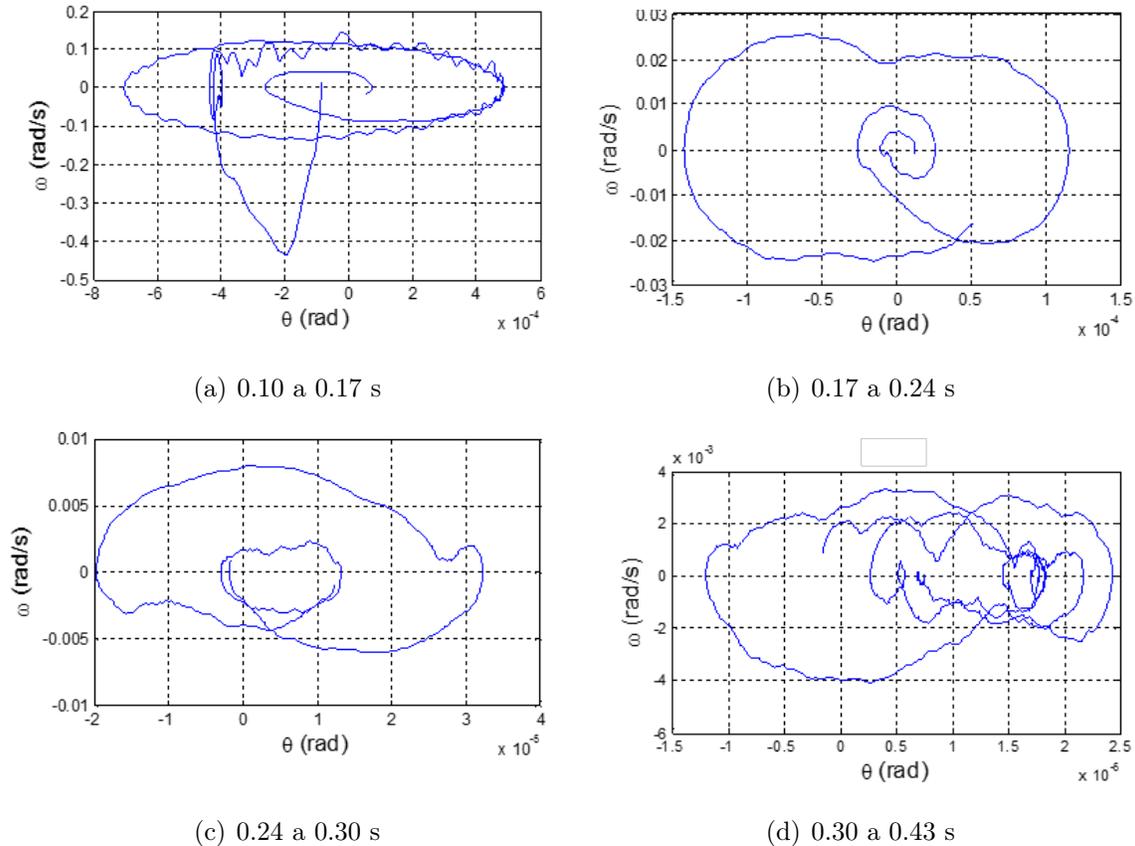


Figura 5.27. Lazos internos del diagrama de fase de la Figura 5.26.

A partir de los resultados anteriores se puede ver que el desempeño del sistema se puede caracterizar mediante el uso paralelo de la transformada wavelet y el diagrama de fase. La transformada wavelet es eficaz en la detección de las no linealidades del sistema y el instante en que se presentan; mientras el diagrama de fase resulta apropiado para identificar el tipo de no linealidad.

Resultados obtenidos en el análisis de elementos finitos

La empresa TREMEC S.A de C.V. desarrolló la simulación del modelo en ANSYS para obtener los primeros 20 modos de vibración del sistema, Figura 5.28. La simulación se realizó para el tren de engranes de la séptima velocidad considerando precargada la

flecha de entrada. Los resultados obtenidos son comparados con los resultados experimentales en el dominio de la frecuencia y tiempo-frecuencia. La Tabla 5.5 lista los resultados para ambos casos.

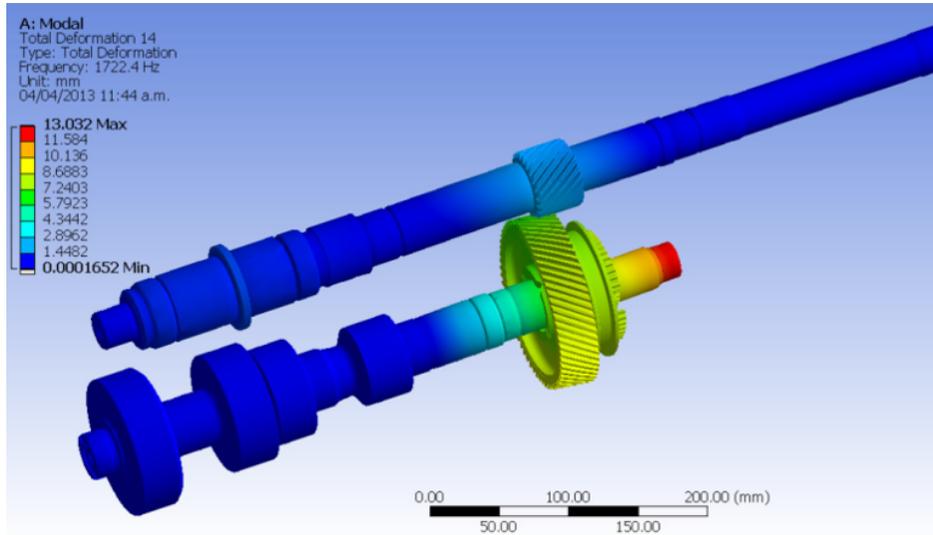


Figura 5.28. Análisis de elementos finitos realizado en ANSYS por la empresa TREMEC S.A. de C.V.

Tabla 5.5. Modos de vibración de transmisión TR6070. Resultados obtenidos en ANSYS vs resultados experimentales.

Modo	ANSYS	Datos experimentales	Modo	ANSYS	Datos experimentales
1	93.732	180.08	11	1476.7	1771.1
2	93.836	240.10	12	1609.6	1828.7
3	195.06	481.34	13	1626.5	2085.6
4	195.53	780.31	14	1722.4	2229.5
5	232.78	879.35	15	1946.8	2566.3
6	469.25	965.39	16	2295.6	2600.4
7	773.26	992.40	17	2431.2	2644.2
8	1144.1	1183.5	18	2678.8	2761.3
9	1232.8	1260.5	19	2813.2	2868.1
10	1419.8	1632.7	20	2884.4	2884.3

5.3.2. Transmisión mecánica de una etapa

En ésta sección se presentan los resultados del análisis de la transmisión de una etapa descrita en la sección 4.3.2. La respuesta dinámica de la transmisión se analizó teórica y experimentalmente con el objetivo de caracterizar la influencia que la rigidez de la carcasa tiene en la sincronización de los componentes de la transmisión. Primero se presentan los resultados del análisis del modelo dinámico de la transmisión y posteriormente se presentan los resultados del análisis experimental.

Análisis del modelo dinámico

El modelo dinámico de la transmisión dado por las ecuaciones (3.39), se resolvió considerando tres valores diferentes en la rigidez de la carcasa: media, alta y baja.

a) Carcasa de rigidez media

En primer lugar se estableció una rigidez media para simular una fuerza de acoplamiento suave ($S_H = 1, 4 \times 10^7 N/m$). El espectro de frecuencias para los datos del eje de entrada se muestra en la Figura 5.29. En el espectro se puede identificar claramente la frecuencia del eje de entrada ≈ 33 Hz, la frecuencia de engranaje ≈ 759 Hz y otras frecuencias inferiores a 300 Hz. Las frecuencias de los cojinetes no son visibles en el espectro debido a su baja amplitud.

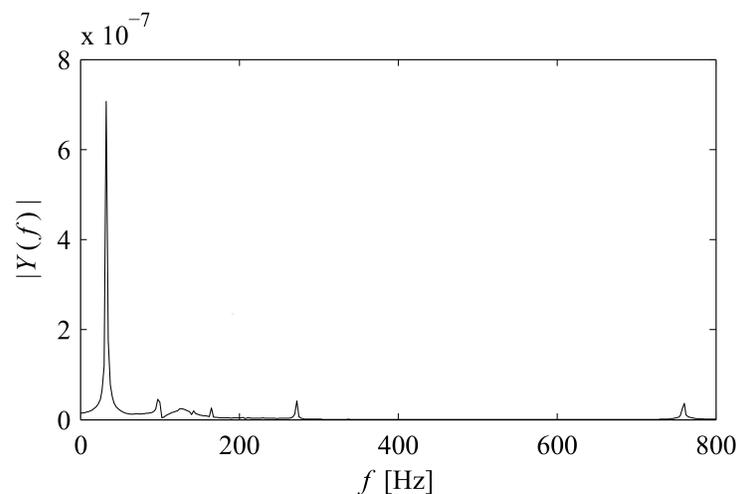


Figura 5.29. Espectro de frecuencia a partir de la vibración radial en el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de rigidez suave).

El análisis de los datos con la transformada wavelet continua se hizo en el rango de 50 Hz a 350 Hz, el cual comprende las principales frecuencias no lineales del sistema. Los parámetros de la wavelet Morlet fueron establecidos como $f_0 = 16$ Hz, $\Delta f = 25.76$ Hz, y $\Delta t = 0.195$ ms.

El mapa de tiempo-frecuencia para el eje de entrada se muestra en la Figura 5.30. En el mapa se puede observar que las frecuencias de los rodamientos son dominantes y que las bajas frecuencias ($\approx 160, 272$ Hz) presentan pequeños cambios de amplitud en el tiempo. La variación de la amplitud y la presencia de franjas verticales representan la interacción no lineal entre los componentes del sistema intentando sincronizarse. Las franjas verticales también están asociados con la conmutación entre los estados de sincronización y desincronización.

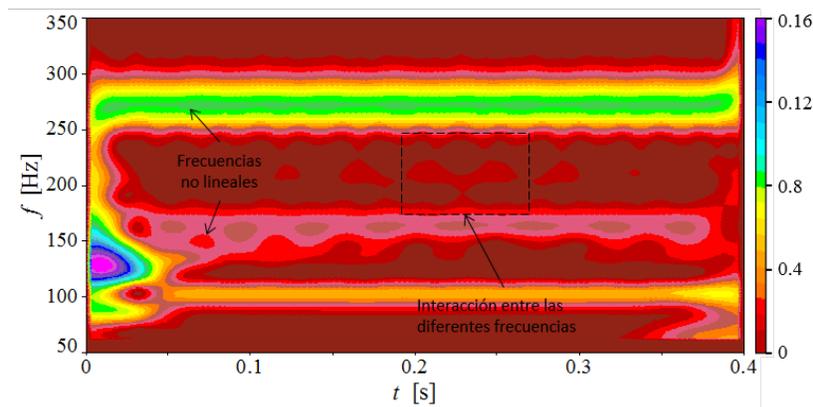


Figura 5.30. Mapa tiempo-frecuencia a partir de la vibración radial en el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de rigidez suave).

La potencia de la densidad espectral, $P(f)$, fue calculada con el fin de medir la variación del contenido de frecuencias de la señal, ver Figura 5.31. Ésta variación está relacionada con las variaciones de energía en el sistema. Cuando $P(f)$ es constante, no hay sincronización, lo que significa que cada elemento de la transmisión tiene un comportamiento independiente. Conforme $P(f)$ presenta cambios de amplitud, existe sincronización. Variaciones más fuertes de $P(f)$ indican que el sistema está sincronizado la mayor parte del tiempo. En el caso de la carcasa de rigidez suave, $P(f)$ muestra variaciones de pequeña amplitud. La media y la desviación estándar se calcularon encontrando que $\overline{P(f)} = 7.75 \times 10^{-4}$ y $\sigma_{P(f)} = 4.48 \times 10^{-5}$, respectivamente.

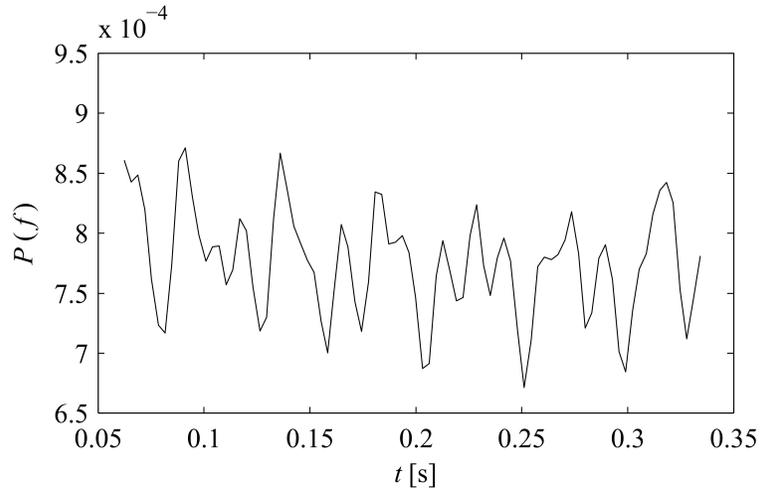


Figura 5.31. Densidad espectral calculada a partir de los resultados de la transformada wavelet continua para el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de rigidez suave).

Los datos también se analizaron con el diagrama de fase (Figura 5.32). En el diagrama se observa claramente que hay dos polos atractores alrededor de $y = 6 \times 10^{-7}$ y $y = -6 \times 10^{-7}$. La presencia de estos polos indica comportamiento no lineal del sistema. Los lazos internos en el diagrama corresponden a interacción de las diferentes frecuencias de los elementos del sistema.

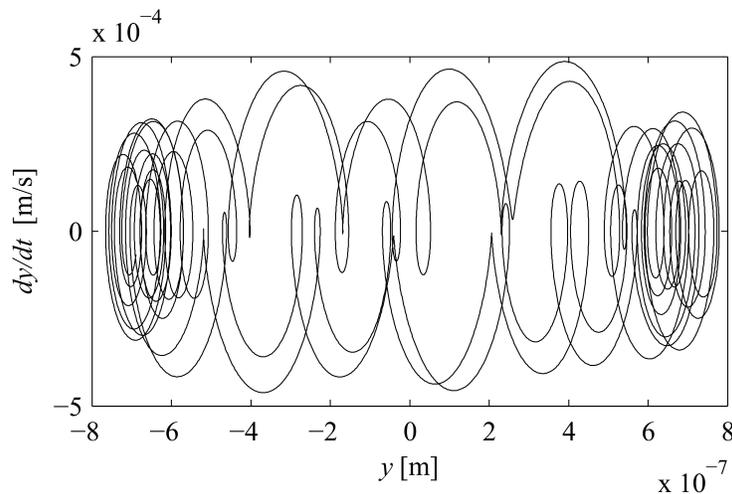


Figura 5.32. Diagrama de fase a partir de los datos del eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de rigidez suave).

La Figura 5.33 muestra el error de sincronización, el cual tiene un valor medio igual a $\bar{z} = 1.82 \times 10^{-4}$ y una desviación estándar $\sigma_z = 0 = 2.22 \times 10^{-4}$.

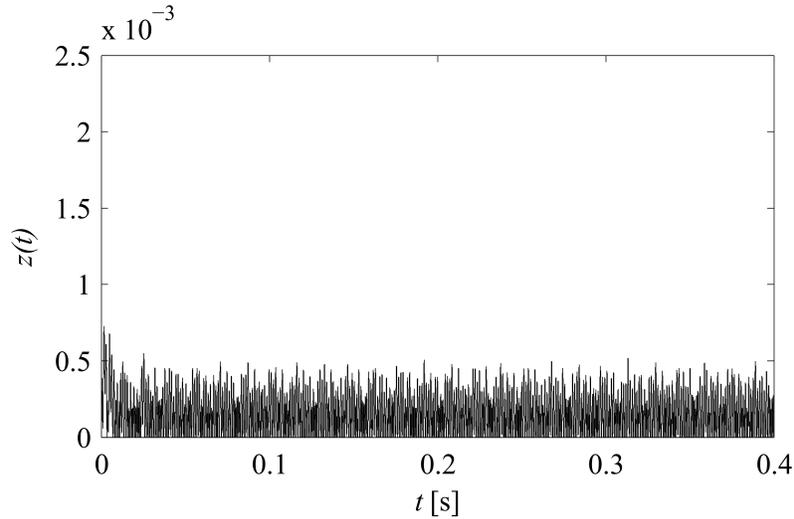


Figura 5.33. Error de sincronización entre los ejes de entrada y salida a partir de su vibración radial (solución numérica considerando una carcasa de rigidez suave).

El parámetro de orden de Kuramoto fue calculado con el fin de analizar la sincronización entre los elementos del sistema, dado que éste varía en el tiempo, su función de densidad de probabilidad $P(r)$ fue calculada, los resultados se presentan en la Figura 5.34. La gráfica de la Figura 5.34a muestra que la probabilidad más alta se encuentra en el rango de $0.75 \leq r \leq 0.88$. Por su parte, $P(r)$ muestra la porción de eventos que están dentro de una ventana $r \pm \Delta r/2$ con $r = 0.01$. Cabe mencionar que en todos los análisis, los histogramas se calcularon utilizando el mismo ancho de la ventana.

La Tabla 5.6 resume la estadística del parámetro de orden de Kuramoto para todos los casos estudiados en ésta subsección. En el caso de la solución numérica para una carcasa de rigidez media se encontró que la curtosis alrededor de 1 es igual a 2.03, y que la tasa de eventos con $r \geq 0.8$ fue 60.33%.

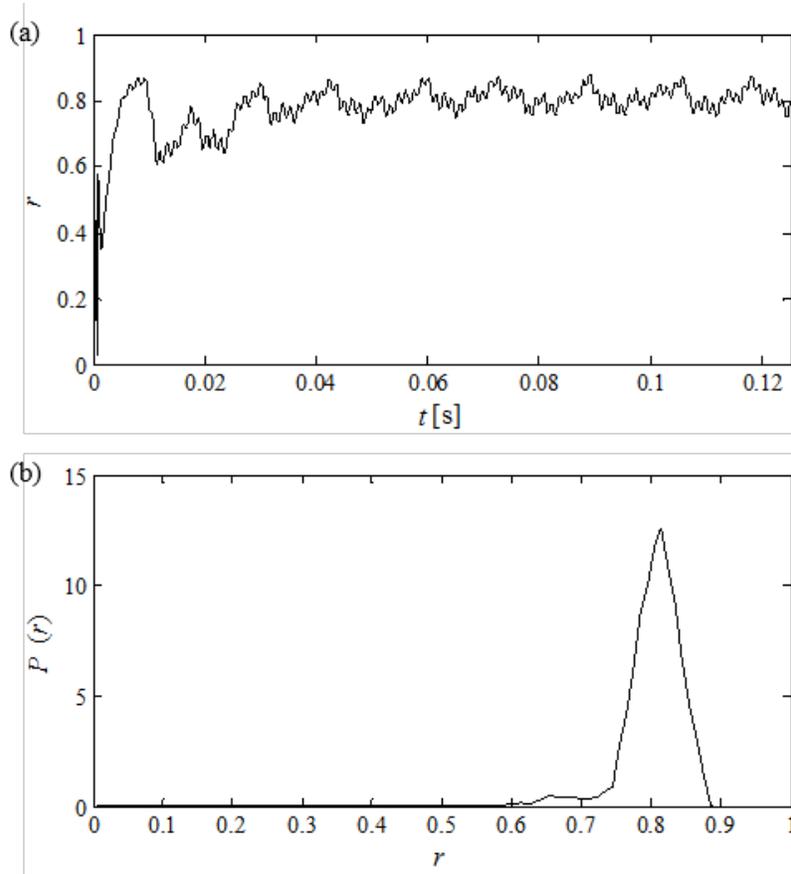


Figura 5.34. Parámetro de orden de Kuramoto a partir de la vibración radial en los ejes de entrada y salida: a) evolución en el tiempo, b) densidad de probabilidad (solución numérica considerando una carcasa de rigidez suave).

Tabla 5.6. Estadística a partir del análisis de los datos numéricos y experimentales.

Parámetro estadístico	Modelo matemático			Datos experimentales	
	<i>Rigidez de la carcasa</i>			<i>Eje de entrada</i>	<i>Eje de salida</i>
	<i>Media</i>	<i>Alta</i>	<i>Baja</i>		
$\bar{P}(f)$	7.75×10^{-4}	6.51×10^{-8}	1.02×10^{-8}	0.34	0.64
$\sigma_{P(f)}$	4.48×10^{-5}	1.67×10^{-8}	9.07×10^{-12}	0.14	0.29
\bar{z}	1.82×10^{-4}	1.93×10^{-4}	1.2×10^{-3}	0.012	
$\sigma_{z=0}$	2.22×10^{-4}	2.37×10^{-4}	1.3×10^{-3}	0.015	
Curtosis	2.03	1.26	1.01	2.56	
% de eventos con $r > 0.8$	60.33	0.64	0.01	41.32	

b) *Carcasa de rigidez alta*

En un segundo caso se estableció una rigidez alta para simular un fuerte acoplamiento ($S_H = 1,4 \times 10^9 N/m$). El espectro FFT a partir de la solución numérica del modelo se muestra en la Figura 5.35. En este caso, las amplitudes del espectro son menores que en el obtenido para el caso de una rigidez suave. Las frecuencias de eje de entrada (33 Hz), de engranaje (759 Hz) se puede identificar claramente, además, se observa un incremento en la amplitud de las bajas frecuencias (< 300 Hz). Este incremento está relacionado a las no linealidades generadas por la elevada fuerza de acoplamiento.

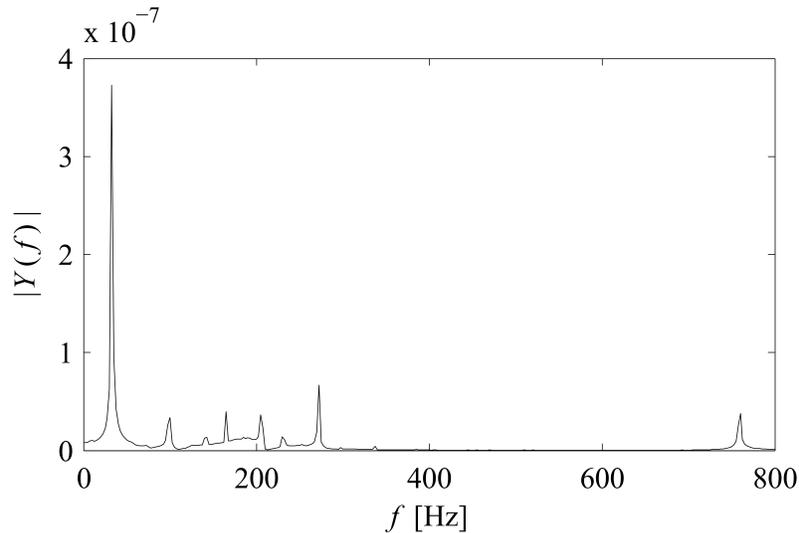


Figura 5.35. Espectro de frecuencia a partir de la vibración radial en el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de alta rigidez).

El mapa tiempo-frecuencia correspondiente a esta condición se muestra en la Figura 5.36. En él se puede observar un incremento en el comportamiento no lineal del sistema, ya que las bajas frecuencias ($\approx 160, 207, 270$ Hz) presentan una mayor variación en el tiempo en comparación con en el caso anterior. Por otra parte, las franjas verticales son más notables, lo que demuestra mayor interacción entre las bajas frecuencias. El aumento en la amplitud de las franjas se asocia a la existencia de una mayor fuerza de acoplamiento, que a su vez aumenta la amplitud de las vibraciones.

La variación en la potencia de la densidad espectral para éste caso se presenta en la Figura 5.37. El valor medio y la desviación estándar fueron $\overline{P(f)} = 6.51 \times 10^{-8}$ y $\sigma_{P(f)} = 1.67 \times 10^{-8}$, respectivamente. Estos valores son más bajos que en el caso de una rigidez suave, lo cual indica que el sistema está menos sincronizado.

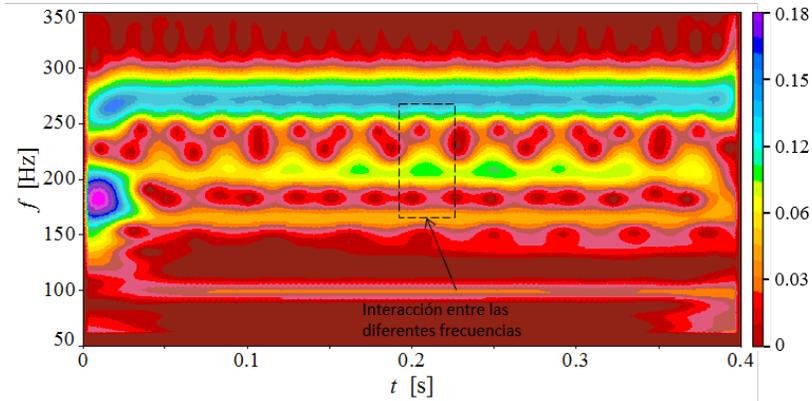


Figura 5.36. Mapa tiempo-frecuencia generado a partir de la vibración radial en el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de alta rigidez).

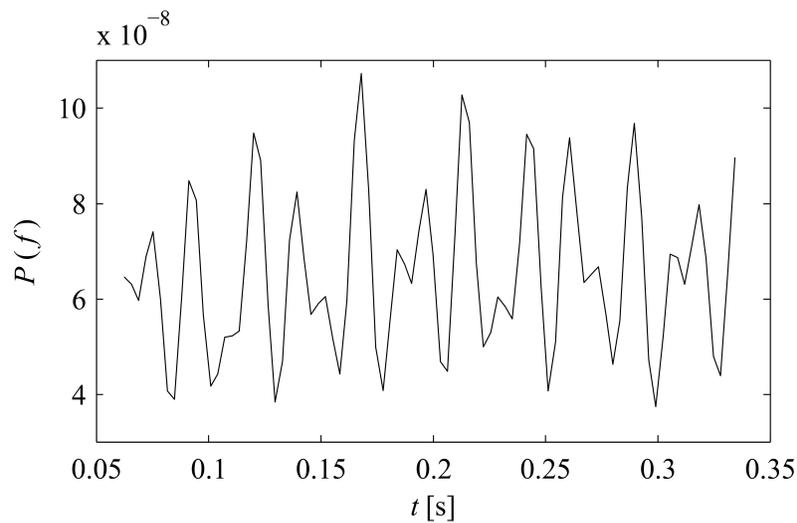


Figura 5.37. Densidad espectral calculada a partir de los resultados de la transformada wavelet continua para el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de alta rigidez).

El diagrama de fase para el caso de una carcasa de rigidez alta se muestra en la Figura 5.38. En el diagrama se pueden observar dos polos atractores en los extremos y el comportamiento caótico del sistema. En éste caso de estudio los polos atractores están más cerca que en el caso de una carcasa de rigidez suave.

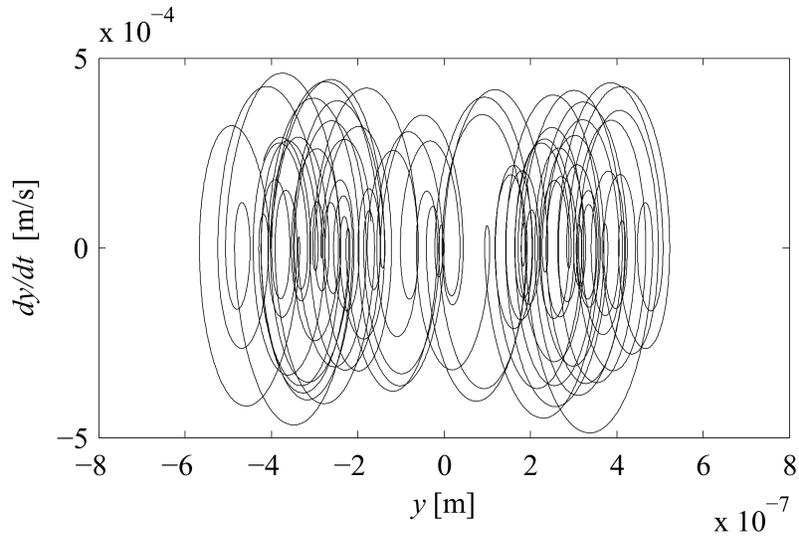


Figura 5.38. Diagrama de fase a partir de los datos del eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de alta rigidez).

El error de sincronización fue calculado encontrando que su valor medio es igual a $\bar{z} = 1.93 \times 10^{-4}$ con una desviación estándar $\sigma_{z=0} = 2.37 \times 10^{-4}$. Éstos valores son similares a los obtenidos en el caso de una carcasa de rigidez suave. El diagrama de error de sincronización se muestra en la Figura 5.39.

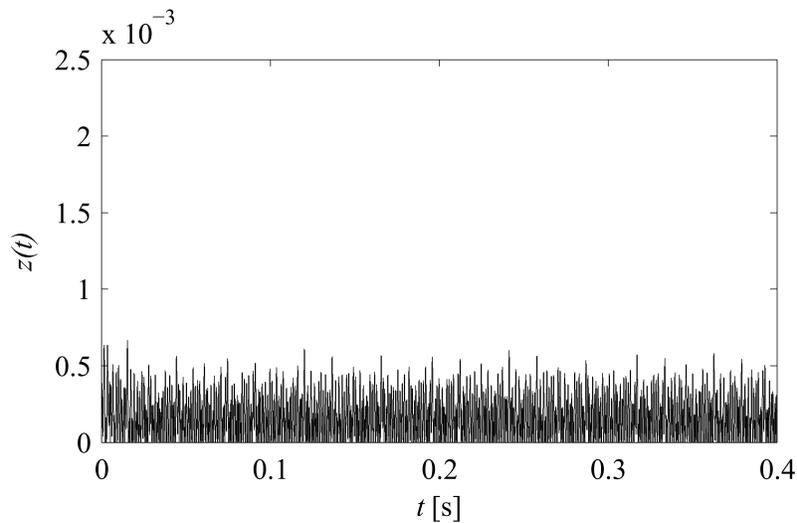


Figura 5.39. Error de sincronización entre los ejes de entrada y salida a partir de su vibración radial (solución numérica considerando una carcasa de alta rigidez).

Los resultados del análisis con el parámetro de orden de Kuramoto se muestra en la Figura 5.40. En ésta se puede ver que la concentración de r está cerca de 0.57. Además se presentan oscilaciones más amplias que en los resultados de la condición de carcasa suave, lo que indica que la sincronización se produce durante períodos de tiempo más cortos. A partir de la función de densidad de probabilidad de $P(r)$ (Figura 5.40b) se observa que la mayoría de los datos se concentran en el rango $0.3 \leq r \leq 0.8$. Los resultados del cálculo de los descriptores estadísticos muestran que la curtosis alrededor de la unidad es igual a 1.264, y la tasa de eventos con $r > 0.8$ es 0.64 %.

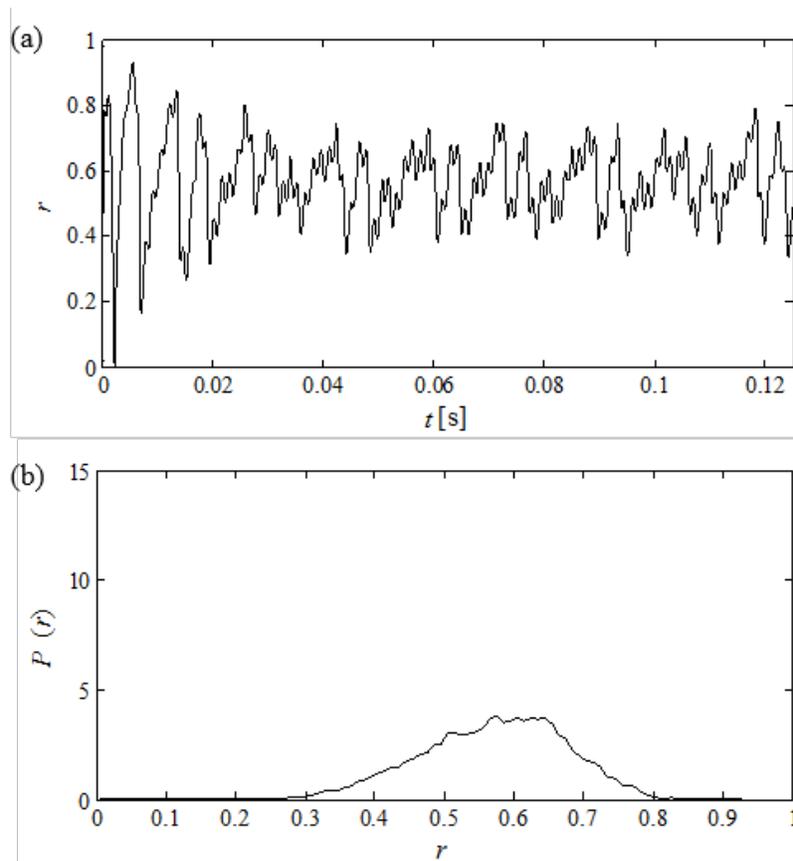


Figura 5.40. Parámetro de orden de Kuramoto a partir de la vibración radial en los ejes de entrada y salida: a) evolución en el tiempo, b) densidad de probabilidad (solución numérica considerando una carcasa de alta rigidez).

c) Carcasa de rigidez baja

En tercer caso se consideró una rigidez muy baja para obtener un acoplamiento débil ($S_H = 1,4 \times 10^5 N/m$) entre los elementos de la transmisión. Aunque esta condición no es posible en un sistema real, se analizó para demostrar la capacidad de la metodología para medir el grado de sincronización del sistema. La Figura 5.41 muestra el mapa

de tiempo-frecuencia para este caso; se ve claramente que existe un comportamiento independiente entre las frecuencias del sistema, ya que no presenta franjas verticales.

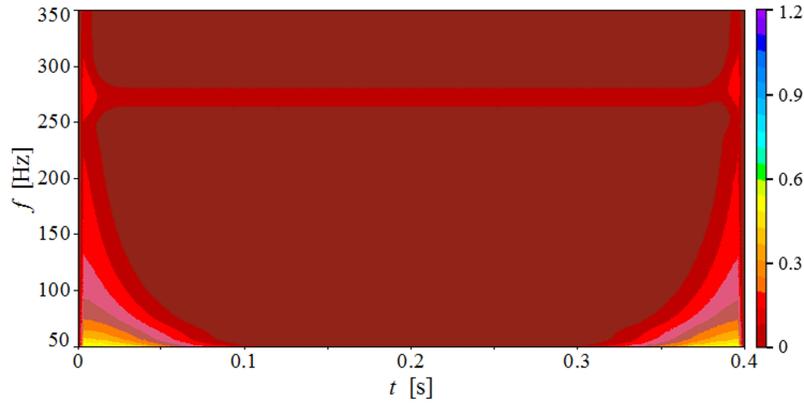


Figura 5.41. Mapa tiempo-frecuencia a partir de la vibración radial sobre el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de baja rigidez).

La potencia de la densidad espectral $P(f)$ para éste caso se presenta en la Figura 5.42. El valor medio y la desviación estándar para $P(f)$ fueron calculados encontrando $\overline{P(f)} = 1.02 \times 10^{-8}$ y $\sigma_{P(f)} = 9.07 \times 10^{-12}$, respectivamente, siendo más bajos que los dos casos anteriores.

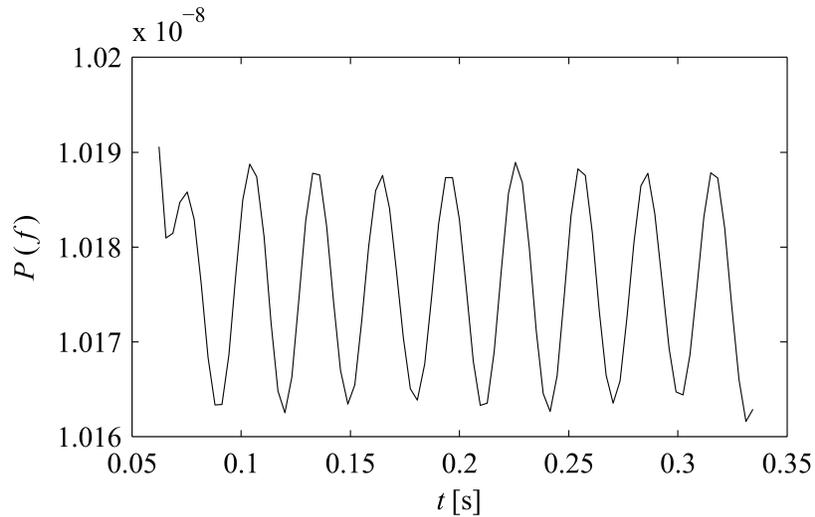


Figura 5.42. Densidad espectral calculada a partir de los resultados de la transformada wavelet continua para el eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de baja rigidez).

La Figura 5.43 muestra el diagrama de fase para del eje de entrada, en él se puede observar un comportamiento no lineal, al dibujar lazos cerrados con pequeñas oscilaciones causadas por las altas frecuencias.

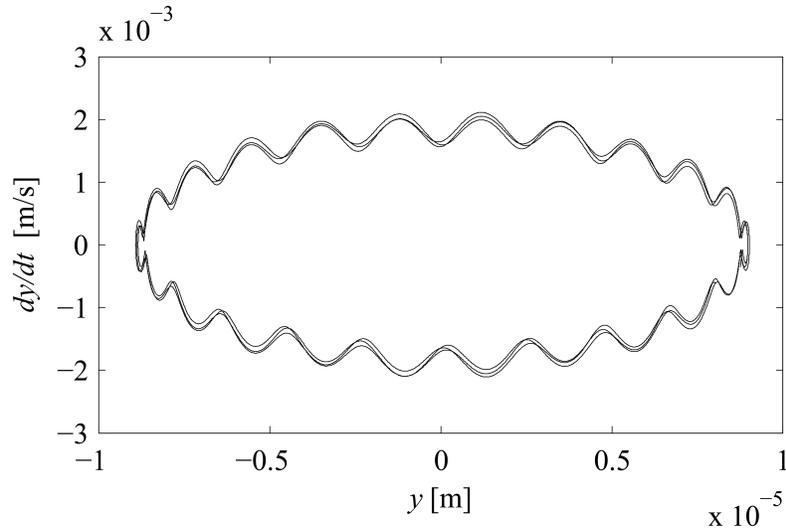


Figura 5.43. Diagrama de fase a partir de los datos del eje de entrada (solución numérica considerando una carcasa de baja rigidez).

La Figura 5.44 muestra el diagrama de error de sincronización. En este caso, es notable que los aumentos de amplitud. El valor medio y la desviación estándar en torno a cero son $\bar{z} = 1.2 \times 10^{-3}$ y $\sigma_{z=0} = 1.3 \times 10^{-3}$, respectivamente.

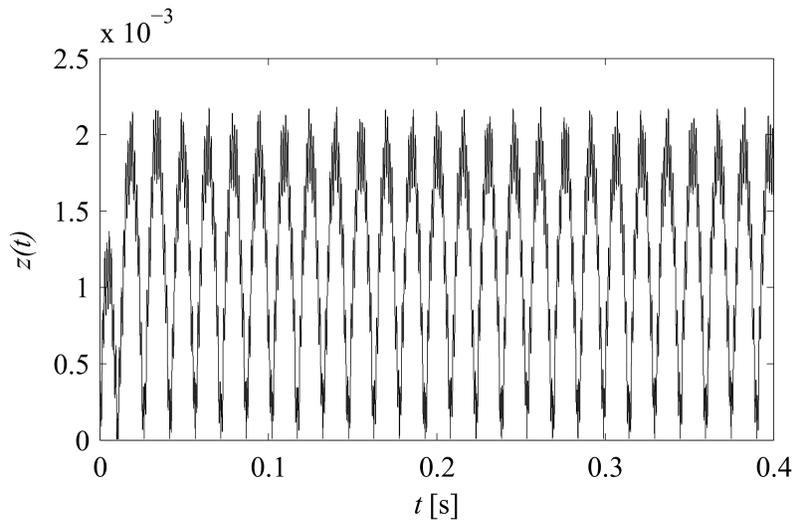


Figura 5.44. Error de sincronización entre los ejes de entrada y salida a partir de su vibración radial (solución numérica considerando una carcasa de baja rigidez).

Los resultados del parámetro de orden y su función de densidad de probabilidad se muestran en la Figura 5.45. En ella es posible ver que r fue siempre inferior a 0.2. La curtosis alrededor de la unidad fue igual a 1.015, y la tasa de eventos con $r \geq 0.8$ fue de 0.01 %. El bajo valor de kurtosis prueba que cuando la fuerza de acoplamiento es suficientemente débil, los elementos del sistema no están sincronizados.

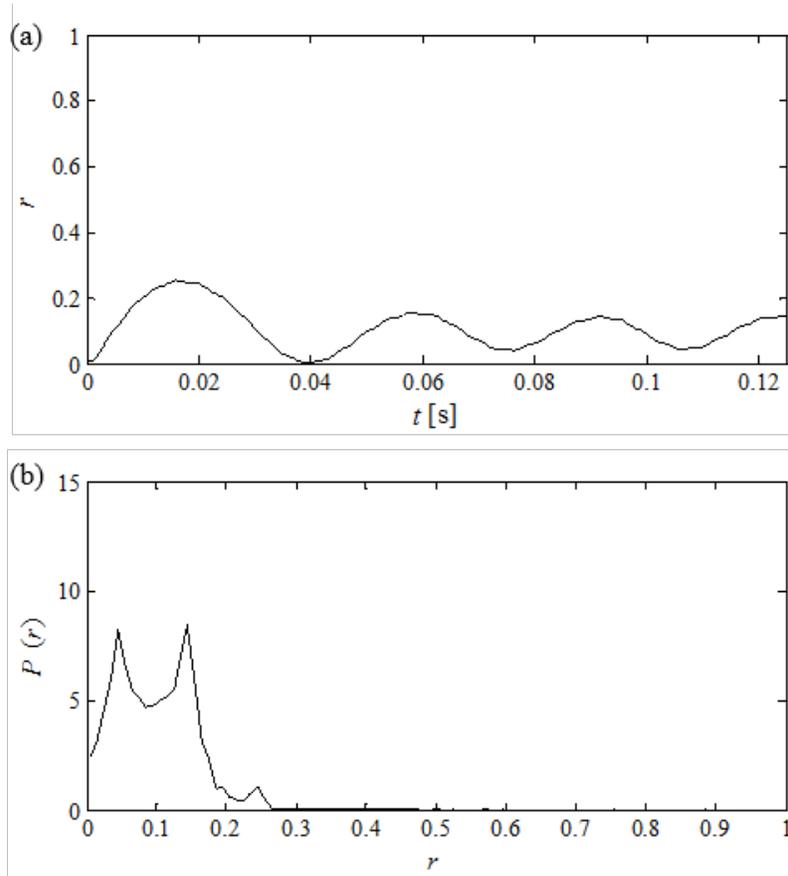


Figura 5.45. Parámetro de orden de Kuramoto a partir de la vibración radial en los ejes de entrada y salida: a) evolución en el tiempo, b) densidad de probabilidad (solución numérica considerando una carcasa de baja rigidez).

Los resultados anteriores revelan que una carcasa de rigidez media habilita la sincronización no lineal de los elementos de la caja de transmisión, ver Tabla 5.6. Este hecho se demuestra por la fuerte variación en la potencia de la densidad espectral ($\sigma_{P(f)}$), los pequeños valores del error de sincronización (\bar{z} , $\sigma_{z=0}$), la alta probabilidad que $r > 0.8$ y el alto valor de la curtosis. Por otro lado, una carcasa de alta rigidez no favorece la sincronización. En esta condición, las variaciones de $P(f)$ son pequeñas, el error de sincronización es alto, la probabilidad de que $r > 0.8$ es pequeña y el valor de la curtosis es bajo. En el otro extremo, una carcasa de rigidez muy baja también inhabilita la

sincronización, éste hecho se comprueba con alto error de sincronización, los pequeños valores de la curtosis y la baja probabilidad de que $r > 0.8$.

Análisis experimental

A continuación se presentan los resultados del análisis de los datos experimentales de la transmisión descrita en la sección 4.3.2. La Figura 5.46a muestra el espectro FFT para los datos del eje de entrada, en el se puede identificar la frecuencia de engranaje ω_m 767 Hz, la frecuencia del eje de entrada $\omega_{is} \approx 33$ Hz, las frecuencias de los cojinetes: $\omega_{ir} \approx 296$ Hz, $\omega_{or} \approx 70$ Hz, $\omega_{cl} \approx 13$ Hz, $\omega_{rel} \approx 120$ Hz y otras frecuencias. Por otra parte, la Figura 5.46b muestra el espectro FFT para los datos del eje de salida, en el que se logra identificar la frecuencia de engranaje y otras frecuencias. Éste análisis expone la complejidad del sistema al exhibir su alto contenido de frecuencias.

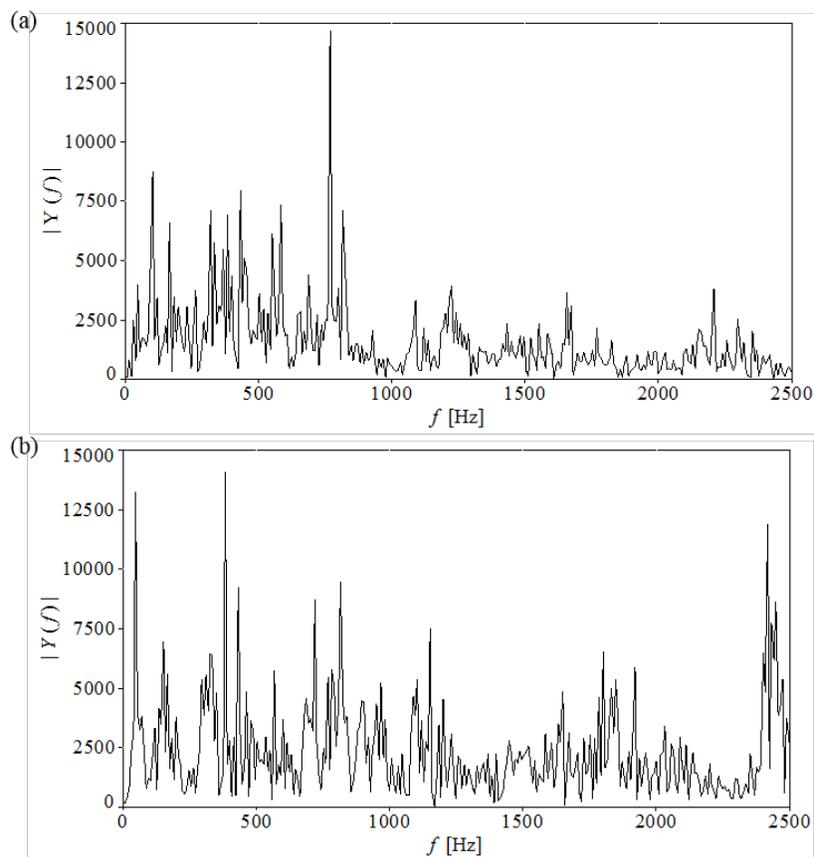


Figura 5.46. Espectro de frecuencia obtenido a partir de la vibración radial en los cojinetes de la transmisión: a) eje de entrada, b) eje de salida.

La transformada continua wavelet fue calculada estableciendo los siguientes parámetros: función Morlet como la wavelet madre, $f_0 = 16$ Hz, $\Delta f = 80.5$ Hz y $t = 0.06$ ms. La Figura 5.47 muestra los mapas tiempo-frecuencia obtenidos para los ejes de entrada y de salida. En ambos mapas, el comportamiento altamente no lineal del sistema es identificado por la variación de la frecuencia en el tiempo. En los mapas es posible identificar la frecuencia de engranaje (≈ 768 Hz) y frecuencias inferiores a 300 Hz. La sincronización no lineal queda identificada a partir de las franjas verticales que conectan las diferentes frecuencias del sistema. Dichas franjas indican que hay propagación de estímulos entre los elementos del sistema a través de los elementos de conexión. Las amplitudes más fuertes en los espectrogramas se atribuyen a las amplitudes de vibración más altas de los elementos del sistema.

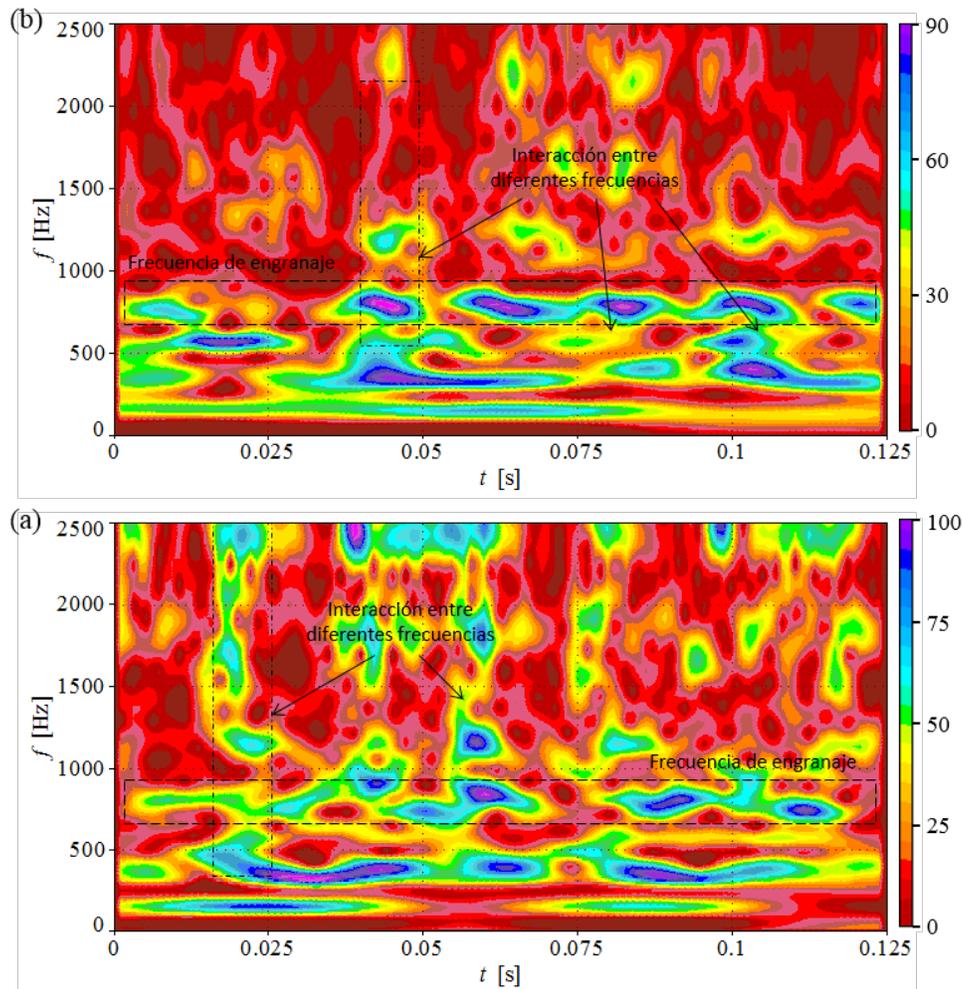


Figura 5.47. Mapa tiempo-frecuencia obtenido a partir de la vibración radial en los cojinetes de la transmisión: a) eje de entrada, b) eje de salida.

La Figura 5.48 presenta la potencia de la densidad espectral $P(f)$ en el dominio del tiempo para ambos ejes, entrada y salida. En la figura puede observarse que existe sincronización, ya que $P(f)$ varía en el tiempo.

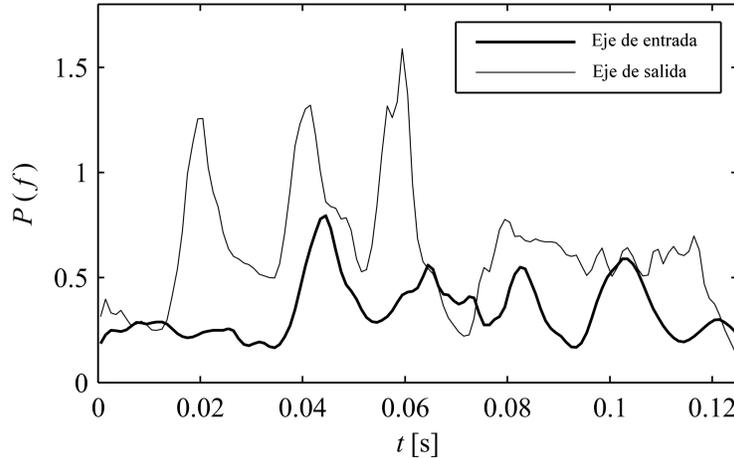


Figura 5.48. Densidad espectral calculada a partir de los resultados de la transformada wavelet continua para los ejes de entrada y salida.

Con el fin de medir la distribución de $P(f)$, se calcularon la media y la desviación estándar. En el caso del eje de entrada, $\overline{P(f)} = 0.34$, $\sigma_{P(f)} = 0.14$, mientras que para el eje de salida, $\overline{P(f)} = 0.64$, $\sigma_{P(f)} = 0.29$. Los valores obtenidos indican que el eje de salida tiene un comportamiento más complejo que el eje de entrada, ya que los valores de la media y la desviación estándar son más altos. Este comportamiento se atribuye a la mayor masa inercial del engrane.

La variación de $P(f)$ se utilizó para evaluar el incremento en la carga cíclica del sistema de transmisión debido a la sincronización no lineal. El cálculo del incremento se realizó a partir de la medida del porcentaje de tiempo en que $P(f)$ es mayor que su valor medio. Los resultados muestran que para ambos ejes la carga cíclica aumentó aproximadamente 40%. Para fines de diseño, éste incremento puede ser considerado como un incremento en el ciclo de carga, en lugar de un incremento de carga. Por lo tanto, se recomendaría extender el requisito de vida útil en un 40%, en lugar de aumentar el factor de carga.

El diagrama de fase para los datos experimentales, mostrado en la Figura 5.49, exhibe un comportamiento caótico con lazos cerrados desplazados, similar a los resultados del caso de una carcasa de rigidez media.

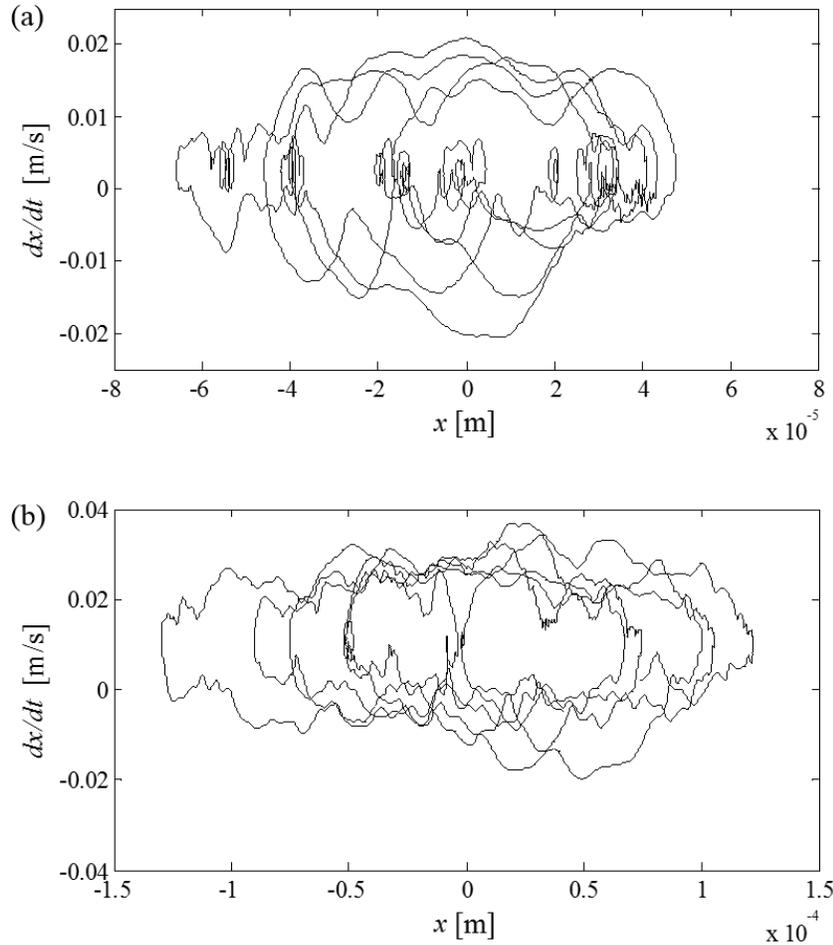


Figura 5.49. Diagrama de fase a partir de la vibración radial en los soportes de los ejes de la transmisión para: a) eje de entrada, b) eje de salida.

La Figura 5.50 muestra el diagrama de error de sincronización. Sus parámetros estadísticos muestran que el error tiene un valor medio igual a $\bar{z} = 0.012$ y una desviación estándar alrededor de cero igual a $\sigma_{z=0} = 0.015$. Las oscilaciones en el diagrama se atribuyen a la conmutación entre los estados de sincronización y desincronización causado por las vibraciones de alta amplitud.

Los resultados del análisis del parámetro de orden de Kuramoto se muestran en la Figura 5.51. La Figura 5.51a muestra el cambio continuo del parámetro de orden del Kuramoto. Los descriptores estadísticos dan como resultado que la kurtosis alrededor de la unidad es igual a 2.56 y la tasa de eventos con $r > 0.8$ es 41.32. La Figura 5.51b muestra la distribución de $P(r)$, donde se puede ver que r tiene una distribución similar a una función de ley de potencias, lo que implica que el sistema es muy sensible a los cambios relativos en sus variables.

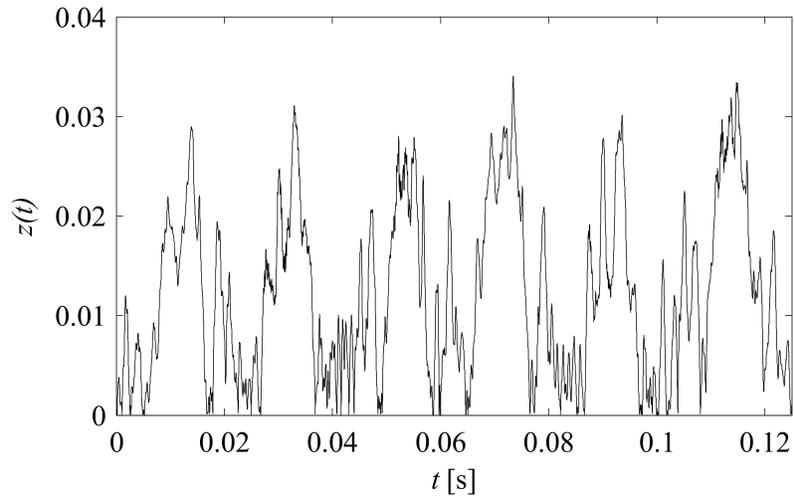


Figura 5.50. Diagrama de error de sincronización entre los ejes de entrada y salida.

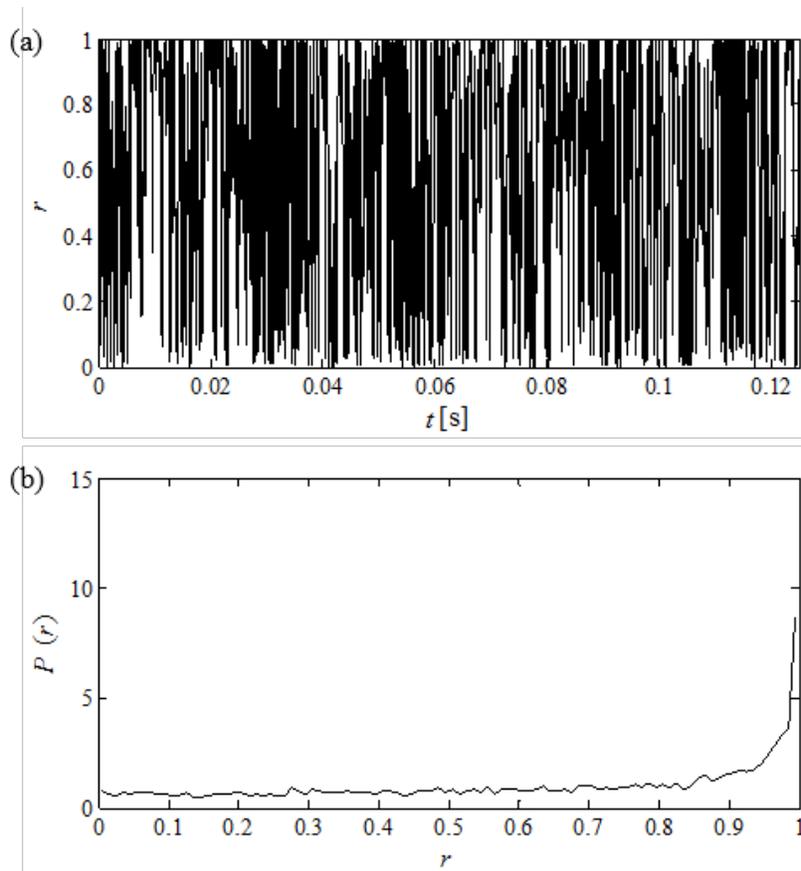


Figura 5.51. a) Parámetro de orden de Kuramoto a partir de las vibraciones radiales en los ejes de la transmisión; b) Función de densidad de probabilidad del parámetro de orden, $\Delta r = 0.01$.

Esta sensibilidad del sistema a cambios en sus variables se atribuye a la propagación de la onda a través de sus elementos del sistema y a la fuerza de acoplamiento que les permite sincronizarse. Aunque la distribución de $P(r)$ es casi uniforme, la Figura 5.51b muestra que hay una mayor probabilidad de que el parámetro de orden tome un valor por encima de 0.8, ya que $P(r)$ tiene un pico en el valor igual a unidad.

La fluctuación entre la sincronización y desincronización en diferentes valores de rigidez se atribuye a la diferente naturaleza de los elementos del sistema y sus características no lineales. El análisis de los datos experimentales indica que la caja de transmisión tiene una carcasa de rigidez media o suave, ya que la concentración de los datos de parámetro de orden está cerrado en $r = 1$ la mayor parte del tiempo y la curtosis tiene un valor similar al análisis de datos numéricos utilizando una rigidez media.

5.4. Resultados del análisis de cojinetes gas

A continuación se presentan los resultados del análisis del desempeño dinámico de los cojinetes de gas descritos en la sección 4.4. Durante la experimentación, el cojinete del lado libre del rotor presentó deformaciones en su lámina superior, lo cual afectó severamente el comportamiento dinámico del sistema, principalmente en éste lado del rotor.

La Figura 5.52 presenta la gráfica de la velocidad de operación del rotor y la amplitud del desplazamiento horizontal en el lado libre del rotor. En la gráfica se puede observar que el sistema cruza la zona de resonancia al rededor de 4500-5000 rpm. Durante su operación del sistema a la velocidad nominal de 9000rpm, se distinguen cuatro etapas en su desempeño dinámico de acuerdo a los incrementos en la amplitud de los desplazamientos. Primero, el sistema tiene un desempeño *estable* en el que la amplitud del desplazamiento se mantiene casi constante; después existe una etapa de *transición* donde la amplitud del desplazamiento comienza a incrementar a causa del inicio de la falla en el cojinete; posteriormente, se presenta la condición de operación *inestable* caracterizada por que la amplitud del desplazamiento incrementa a más del doble; finalmente se presenta la condición de *falla* en la que la el desplazamiento incrementa constantemente.

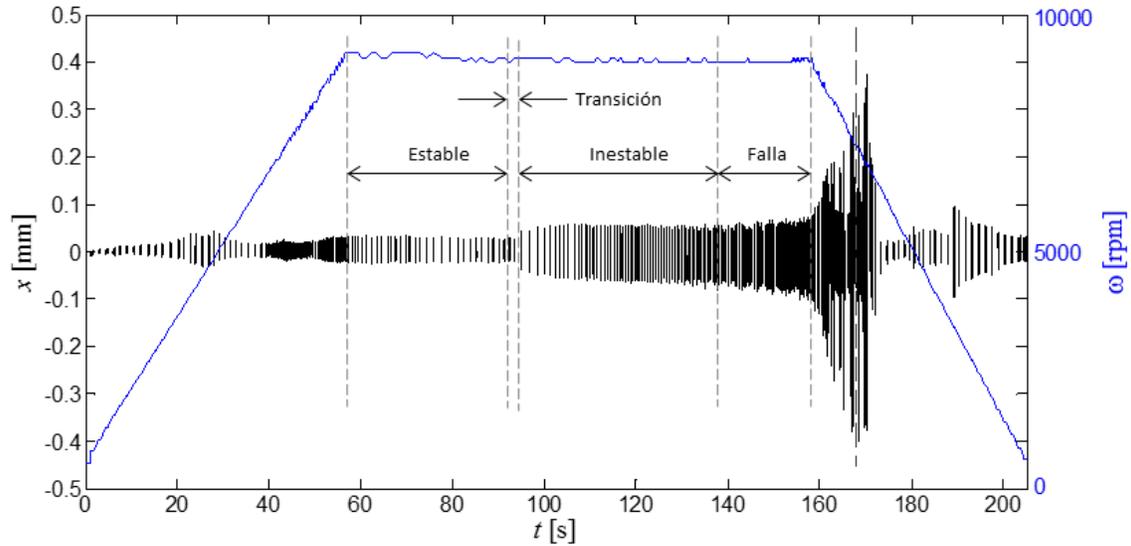
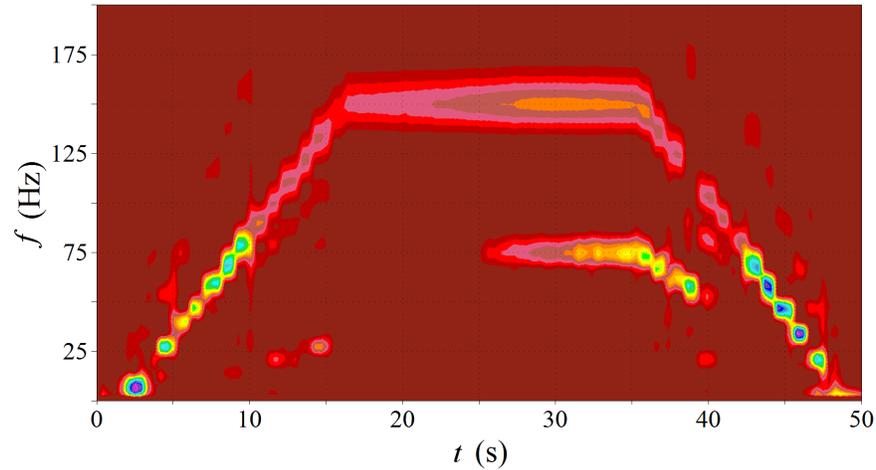


Figura 5.52. Desempeño dinámico del rotor durante las pruebas experimentales, lado libre del rotor.

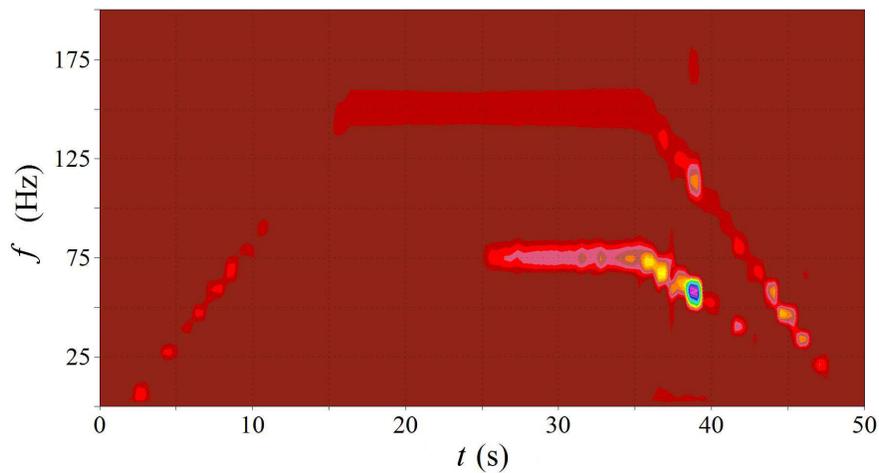
5.4.1. Análisis del desempeño dinámico

Mapas tiempo-frecuencia

La Figura 5.53 muestra los mapas tiempo-frecuencia de los desplazamientos horizontales para ambos extremos del rotor. En los mapas se puede observar la variación del contenido de frecuencias del sistema durante su operación. La rampa de ascenso corresponde a la aceleración del rotor hasta alcanzar la velocidad nominal de operación (150 Hz). Durante la operación nominal se pueden distinguir las cuatro etapas señaladas en la Figura 5.52. La rampa de descenso corresponde a la desaceleración del rotor. Es importante notar que la frecuencia subarmónica a 75 Hz aparece al iniciar la falla en el cojinete del extremo libre y que su amplitud incrementa conforme se desarrolla la falla del cojinete creando inestabilidad en la dinámica del sistema. En ambos mapas se puede observar que las mayores amplitudes de vibración durante la operación nominal se producen a la frecuencia subsíncrona, mientras que la amplitud máxima de vibración durante toda la prueba se presenta en la desaceleración del rotor. Además, en la Figura 5.53(a) es posible observar frecuencias sincrónicas durante la rampa de ascenso, siendo dominante la frecuencia de desbalance.



(a) Cojinete en el lado libre del rotor



(b) Cojinete en el lado acoplado al motor

Figura 5.53. Mapas tiempo-frecuencia a partir de los desplazamientos horizontales en los extremos del rotor.

La Figura 5.54 muestra el espectro FFT de los desplazamientos verticales del lado libre del rotor. Éste aunque muestra el contenido espectral del sistema, no revela su variación en el tiempo. Por lo tanto la transformada wavelet continua fue utilizada para identificar las frecuencias instantáneas del sistema y construir el diagrama de salto. Las frecuencias instantáneas fueron identificadas en ventanas de tiempo de ancho $\Delta t = 1s$, para cada ventana se identificó la frecuencia de mayor amplitud como la frecuencia instantánea del sistema. El diagrama de salto obtenido se muestra en la Figura 5.55.

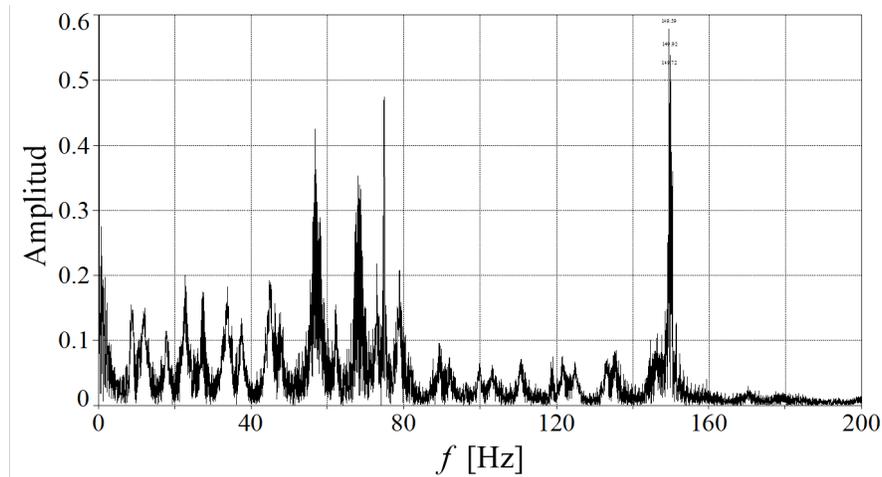


Figura 5.54. Espectro de frecuencias a partir del desplazamiento horizontal en el lado libre del rotor.

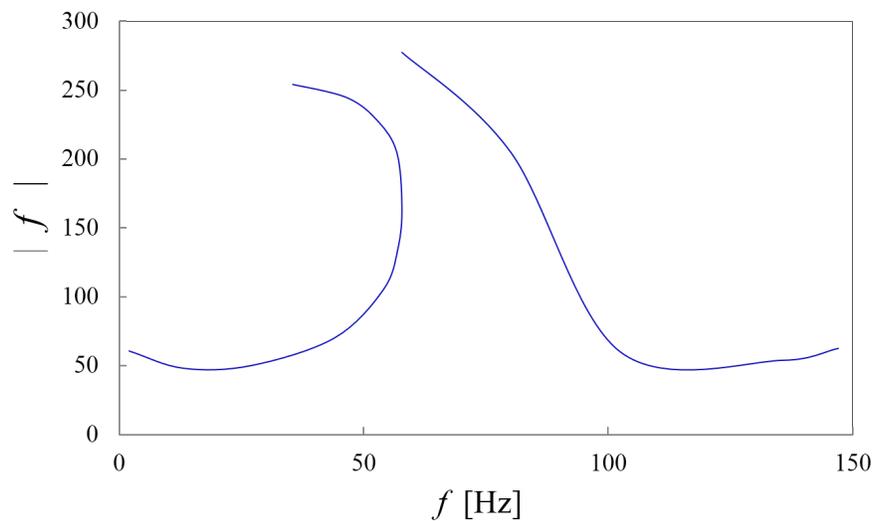
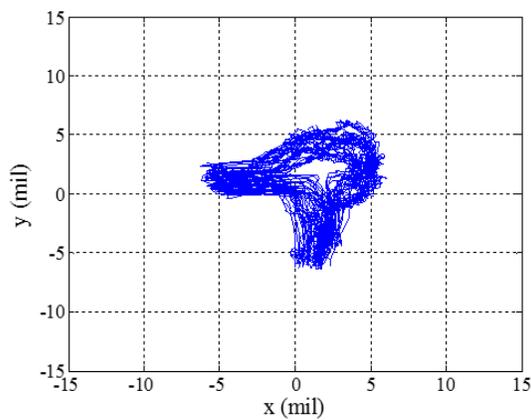


Figura 5.55. Fenómeno de Jump en el cojinete del lado libre del rotor.

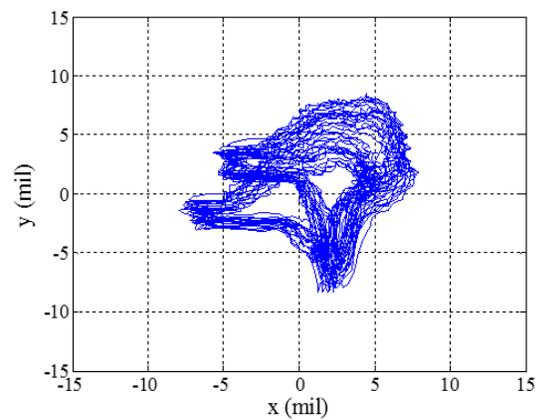
Diagramas de órbitas

Los diagramas de órbitas fueron construidos para analizar la evolución en el desempeño del sistema durante las cuatro etapas de operación. Los resultados se muestran en la Figura 5.56, el eje x corresponde a los desplazamientos horizontales y el eje y a los verticales. El diagrama de la Figura 5.56(a) dibuja un patrón de una única órbita correspondiente al sistema operando en estado estable; dicho patrón es relacionado al comportamiento lineal del sistema, donde la amplitud máxima registrada es de 5.5 milésimas de pulgada. La Figura 5.56(b) muestra el comportamiento del sistema durante el

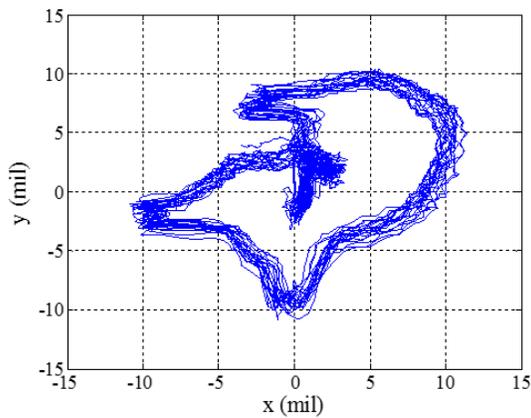
período de transición; en este caso, la forma de la órbita es similar a la del estado estable, sin embargo, la órbita oscila y el desplazamiento incrementa aproximadamente 40%. En la Figura 5.56(c) se pueden ver las órbitas apenas antes de la falla del cojinete; una vez más, la forma de la órbita es similar a los casos previos, pero el rango de oscilación es más amplio. La amplitud también aumenta en comparación con los diagramas anteriores. Finalmente, la Figura 5.56(d) presenta el comportamiento del sistema durante la falla del cojinete donde es notable el incremento en la amplitud de los desplazamientos horizontales, aunque la forma permanece similar a las órbitas dibujadas antes de la falla.



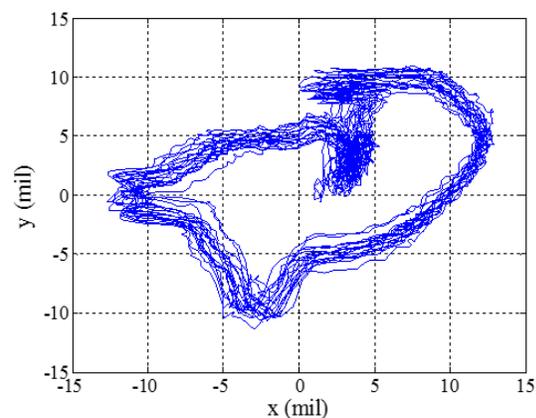
(a) Estado estable



(b) Transición



(c) Estado inestable



(d) Condición de falla

Figura 5.56. Diagramas de órbitas del extremo libre del rotor en las diferentes etapas de su desempeño dinámico.

Diagrama de fase

La Figura 5.57 presenta los diagramas de fase para las cuatro etapas de operación del rotor. a través de ellos se puede ver la evolución del sistema y que los lazos dibujados aunque no son cerrados están restringidos en un área determinada.

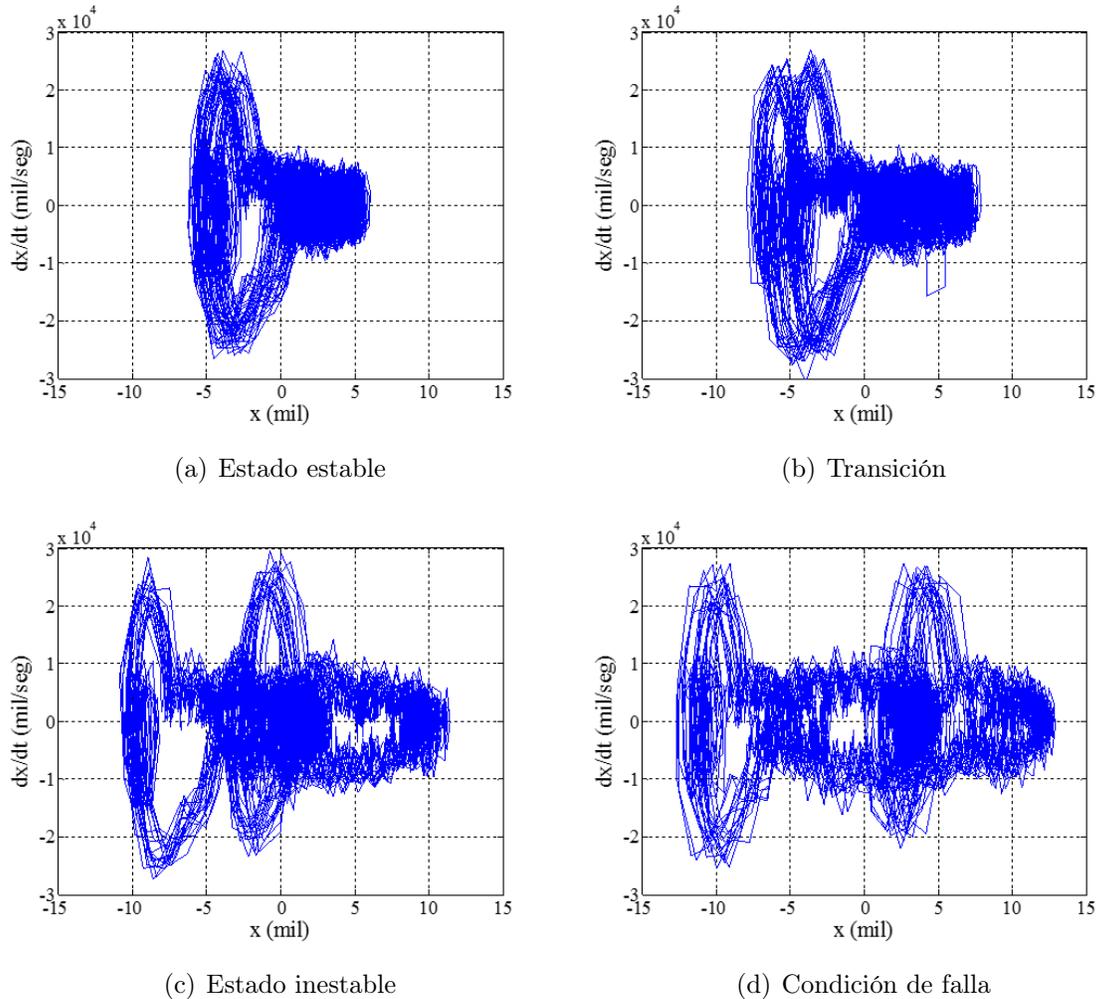


Figura 5.57. Diagramas de fase del extremo libre del rotor en las diferentes etapas de su desempeño dinámico.

La Figura 5.57(a) muestra el diagrama de fase cuando el rotor opera en estado estable. En este caso hay un solo polo de atracción, cuya amplitud varía en el tiempo debido a los cambios de en las energías cinética y potencial del sistema. Éstas variaciones son producidas por dos frecuencias principales, así como por la alta frecuencia de sistema de adquisición de datos. La Figura 5.57(b) muestra el comienzo de la etapa de inestabilidad, donde los polos atractores están situados en coordenadas separadas. La amplitud de los desplazamientos incrementa, mientras que la amplitud de la velocidad

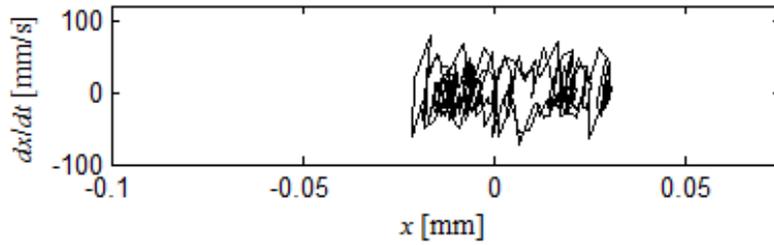
se mantiene. La Figura 5.57(c) muestra la presencia de inestabilidad en el sistema. Los polos atractores se separan completamente y la amplitud de desplazamiento aumenta el doble en comparación con las condiciones de estado estable. Finalmente, la Figura 5.57(d) corresponde al comportamiento del rotor en presencia de la falla del cojinete. En este último caso, la separación entre los dos polos es mayor, lo que se interpreta como una fuerte no linealidad del sistema. Aunque se presentan varios lazos, existen dos polos atractores, el primero alrededor de $x = 3$ mil y el segundo cerca de $x = -10$ mil.

5.4.2. Identificación de parámetros

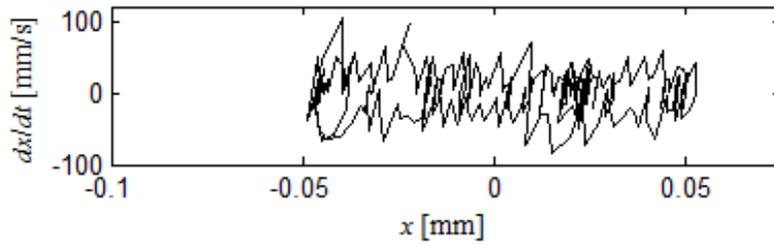
La metodología para la identificación de parámetros a partir del diagrama de fase fue descrita en la sección 4.4. Primero se identificaron los principales lazos cerrados en los diagramas de fase para cada etapa del desempeño dinámico del rotor, éstos se muestran en la Figura 5.58. En cada lazo principal se pueden apreciar lazos internos de menor diámetro producidos por las altas frecuencias. Los lazos no son suficientemente suaves debido a la frecuencia de muestreo establecida en el sistema de adquisición BN ADRE 408. Ésta condición contribuye a la incertidumbre en los resultados numéricos; no obstante, el método es capaz de caracterizar el desempeño de los parámetros dinámicos.

Los diámetros horizontal y vertical de cada lazo principal y los lazos internos del diagrama de fase fueron medidos. Paralelamente, las fuerzas equivalentes en los cojinetes fueron calculadas mediante la Ec. (4.5). Entonces, a partir los valores de los diámetros de los lazos cerrados identificados en el diagrama de fase y las fuerzas equivalentes en los cojinetes, se calcularon los parámetros de rigidez y amortiguamiento mediante las ecuaciones (4.6) y (4.7) para cada etapa del desempeño dinámico del sistema.

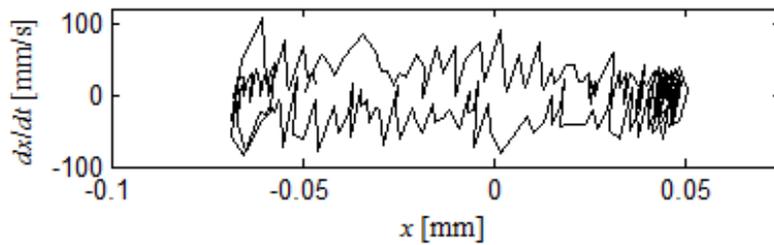
La Figura 5.59 muestra el desempeño de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en el eje horizontal del lado libre del rotor. En ambos casos se puede ver que el desempeño de los parámetros es gradual durante las etapas estable y de transición; mientras que para las etapas de inestabilidad y de falla los parámetros cambian repentinamente.



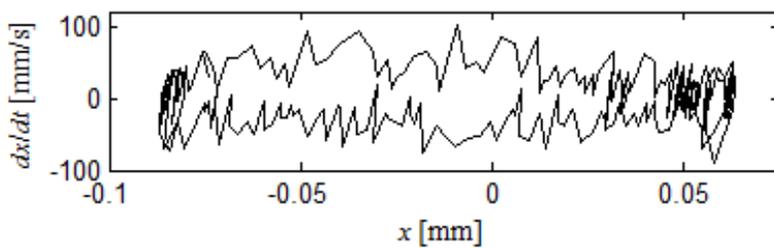
(a) Estado estable



(b) Transición

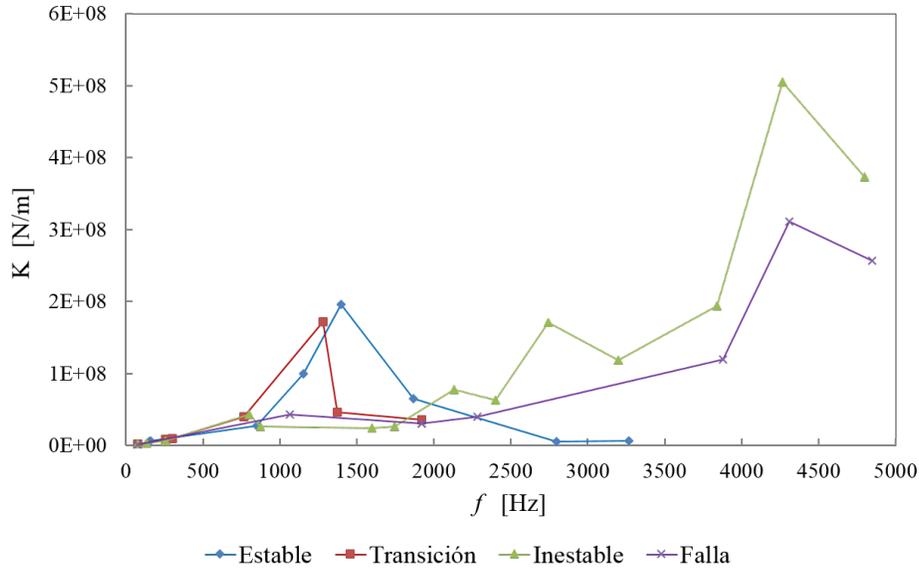


(c) Estado inestable

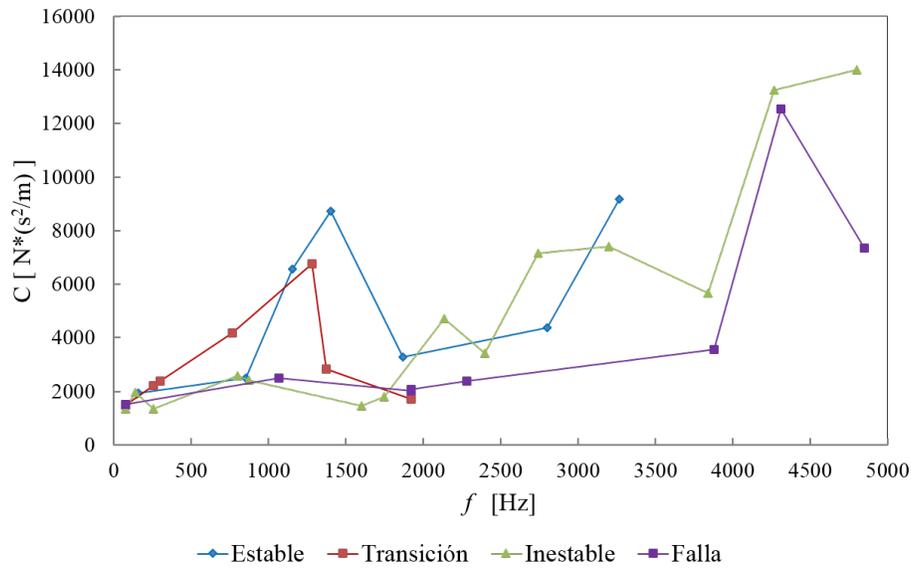


(d) Condición de falla

Figura 5.58. Lazos principales en los diagramas de fase para cada etapa del desempeño del rotor en el lado libre (datos del sistema de adquisición BN ADRE 408).



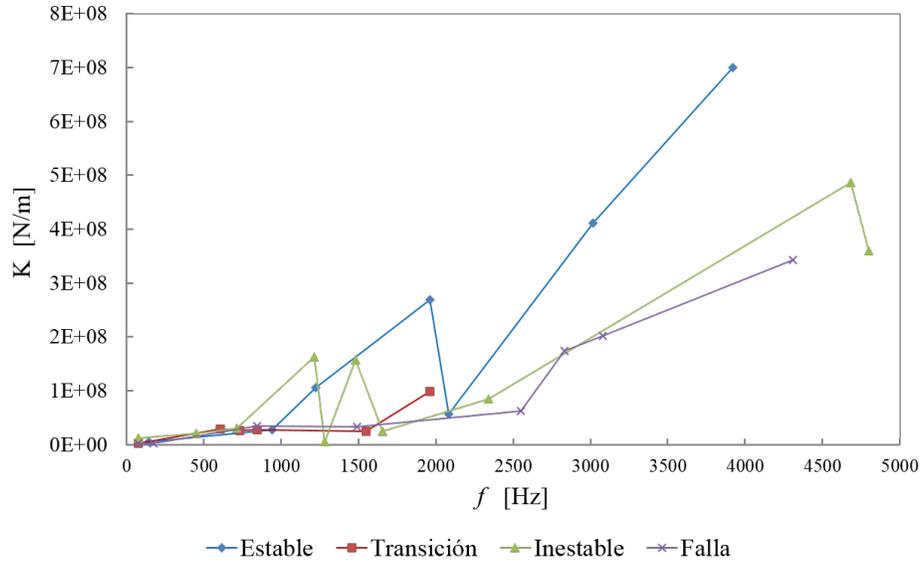
(a) Coeficiente de rigidez.



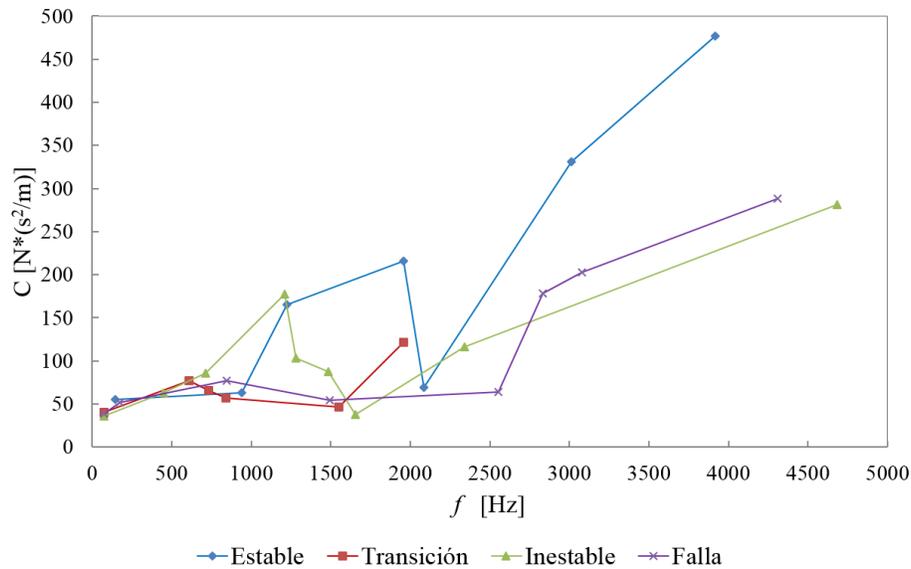
(b) Coeficiente de amortiguamiento.

Figura 5.59. Desempeño de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en el eje horizontal del lado libre del rotor.

La Figura 5.60 presenta los resultados para el eje vertical. De manera similar, los parámetros en el eje vertical presentan cambios repentinos en las etapas de inestabilidad y de falla, mientras que en la etapa estable aparecen sólo algunas altas frecuencia.



(a) Coeficiente de rigidez.



(b) Coeficiente de amortiguamiento.

Figura 5.60. Desempeño de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en el eje vertical del lado libre del rotor.

Los resultados de ambos ejes muestran que la variación de los parámetros durante la etapa de operación estable es suave, mientras que para la etapa inestable éstos varían drásticamente debido a las altas frecuencias desarrolladas durante la inestabilidad, las cuales generan el comportamiento altamente no lineal y caótico del sistema.

En ésta sección se pudo comprobar la necesidad de combinar herramientas de análisis

para identificar la dinámica de sistemas. El análisis tiempo-frecuencia mediante el uso de la transformada wavelet sirvió para reconocer el comportamiento no lineal de un rotor soportado por cojinetes de gas. Ésto fue posible debido a que los mapas tiempo-frecuencia muestran la evolución del contenido de frecuencias del sistema, permitiendo identificar las frecuencias no lineales y comportamientos inestables del sistema. Además, a partir de los resultados de los mapas tiempo-frecuencia es posible construir el diagrama de salto. Éste tipo de identificación difícilmente se puede hacer a través de la FFT e incluso mediante los diagramas de cascadas, los cuales solamente pueden identificar la presencia de frecuencias subarmónicas, más no su causa. Por otra parte, el diagrama de órbitas auxilia en la identificación de la inestabilidad del sistema, pero tampoco ayudar a determinar sus causas. De manera similar, el diagrama de fase permite identificar comportamientos no lineales pero no el momento en que se presentan.

Finalmente, se pudo demostrar la eficacia del uso del diagrama de fase como herramienta de procesamiento en la estimación de la rigidez y el amortiguamiento de un rotor soportado por cojinetes de gas. El uso de esta herramienta es práctico, ya que se pueden utilizar datos de campo, evitando así la necesidad de implementar bancos de pruebas especiales. Un aspecto que cabe resaltar, es que la incertidumbre del método depende de la frecuencia de muestreo de las señales experimentales. El uso de altas frecuencias de muestreo permite dibujar diagramas de fase de mayor resolución, lo cual habilita la representación de la dinámica completa del sistema, mientras que el uso de bajas frecuencias de muestreo incrementa la incertidumbre del método.

5.5. Resultados de la implementación de algoritmos genéticos

5.5.1. Algoritmo genético continuo

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de la identificación de la respuesta del sistema descrito en la sección 4.5.1, a partir de la implementación de un algoritmo genético continuo. La población generada por el algoritmo fue evaluada con la función costo propuesta en el capítulo anterior; primero se evaluó el coeficiente de correlación entre las señales en el dominio de la frecuencia, $costo = CC[FFT(x, \hat{x})]$, y posteriormente el mismo coeficiente para las señales en el dominio del tiempo, $costo = CC(x, \hat{x})$. Donde x es la señal a optimizar y \hat{x} es la señal aproximada por el algoritmo.

La Figura 5.61 muestra la convergencia del algoritmo al utilizar el coeficiente de correlación entre los espectros de frecuencia de cada señal, $CC[FFT(x, \hat{x})]$. Se puede observar que el costo mínimo establecido en los parámetros iniciales del algoritmo no es alcanzado durante las 400 iteraciones establecidas en los parámetros iniciales. El costo mínimo obtenido por el algoritmo fue alcanzado en la generación número 236 con un valor de 0.002045.

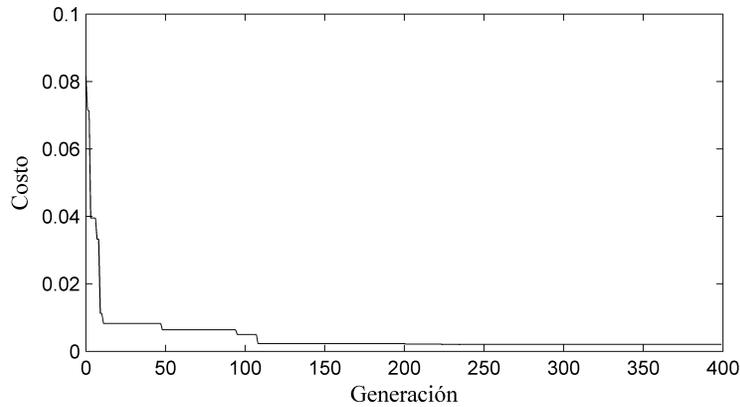
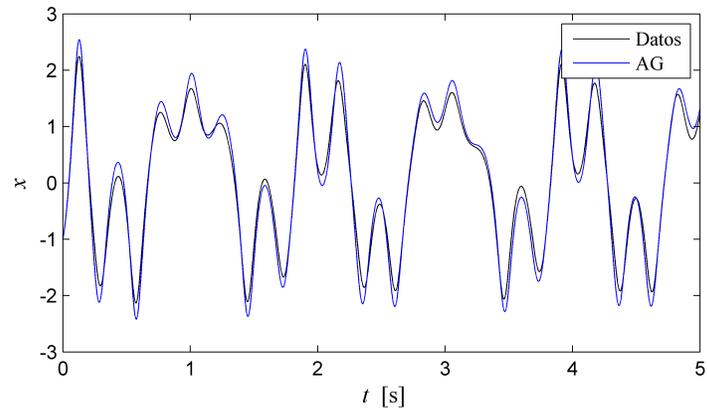


Figura 5.61. Evolución del costo mínimo usando el coeficiente de correlación del espectro de frecuencias como función costo.

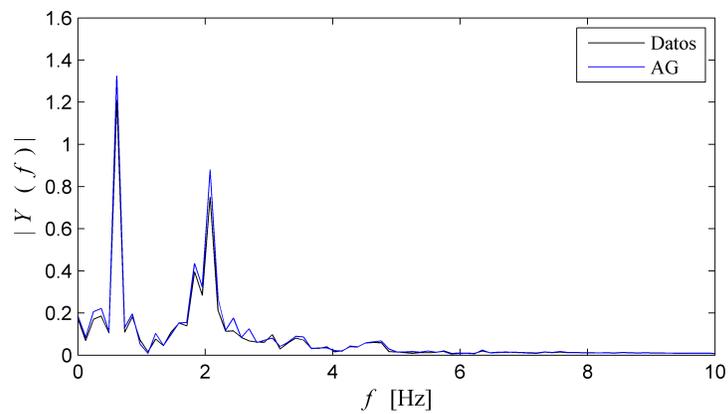
Los mejores resultados del algoritmo se presentan en la Tabla 5.7. Estos valores fueron utilizados para resolver la Ec. (3.15) y encontrar la solución aproximada \hat{x} . La comparación del desempeño de x y \hat{x} se muestra en la Figura 5.62. El coeficiente de correlación entre los espectros de frecuencias de ambas señales fue $CC[FFT(x, \hat{x})] = 0.998$; mientras que para las señales en el tiempo se obtuvo $CC(x, \hat{x}) = 0.995$. Los resultados muestran una alta correlación entre la señal a optimizar y la señal aproximada. No obstante, el espectro de frecuencias muestra el contenido promedio de frecuencias del sistema mas no su evolución. Por lo tanto, el algoritmo se ejecutó utilizando la misma función costo ahora para evaluar la correlación entre las señales de desplazamiento, $cc(x, \hat{x})$.

Tabla 5.7. Resultados del algoritmo genético continuo al utilizar la correlación entre los espectros de frecuencia de las señales como función costo.

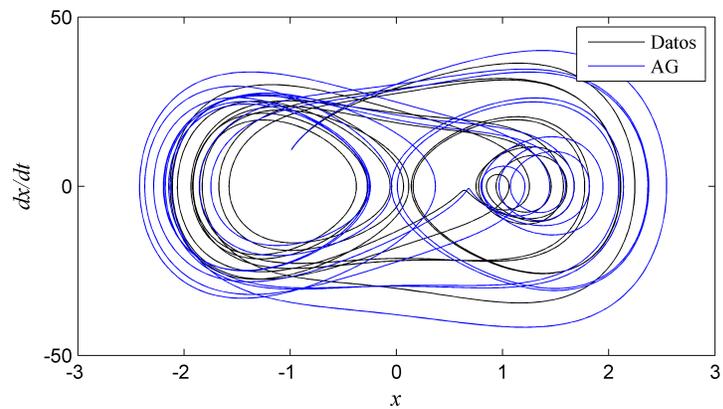
Valor	δ	α	β	F	ω
Real	1.0000	50.0000	150.0000	350.0000	2.0000
Identificado	0.7525	-0.3391	119.7941	395.8397	1.9966



(a) Respuesta en el tiempo.



(b) Espectro FFT.



(c) Diagrama de fase.

Figura 5.62. Resultados del algoritmo genético continuo al utilizar el coeficiente de correlación entre los espectros de frecuencias de las señales como función costo. Datos - señal a optimizar, AG - señal aproximada.

La Figura 5.63 muestra la convergencia del algoritmo para el caso de la correlación entre las señales de desplazamiento, $cc(x, \hat{x})$. Se puede observar que el costo mínimo alcanzado por el algoritmo fue 0.0062 en la generación número 19.

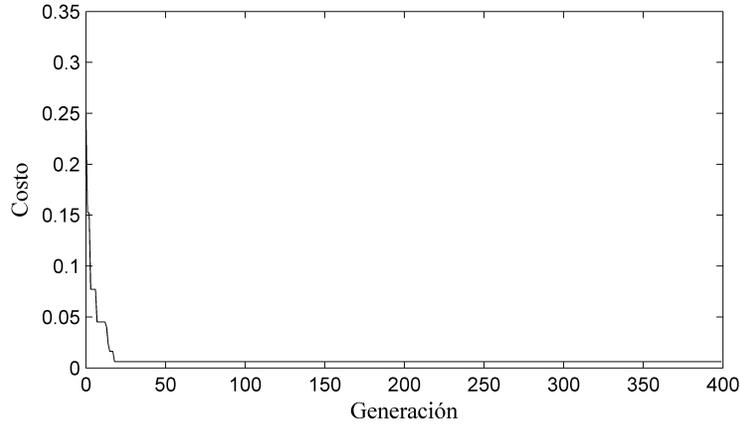


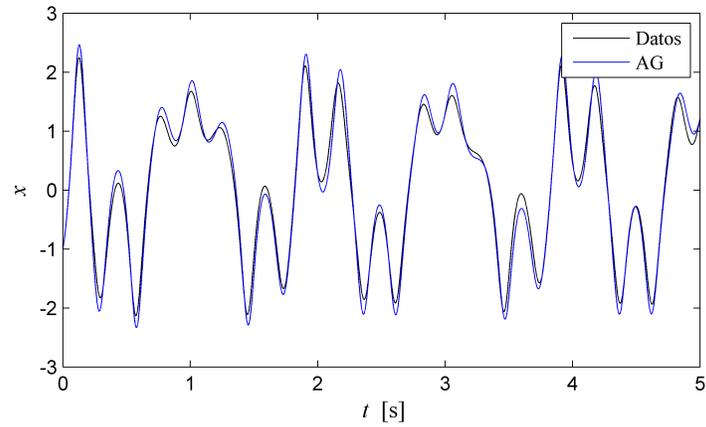
Figura 5.63. Evolución del costo mínimo usando el coeficiente de correlación del espectro de frecuencias como función costo.

Los mejores resultados del algoritmo se presentan en la Tabla 5.8. La diferencia entre el valor real de α y su valor optimizado por el algoritmo se atribuye al rango establecido para el valor de ésta variable. Un rango de valores más cerrado al valor real puede mejorar el resultado. No obstante, el coeficiente de correlación entre las señales de desplazamiento fue $CC(x, \hat{x}) = 0.9938$, mientras que para su espectro de frecuencias tuvo un valor de $CC[FFT(x, \hat{x})] = 0.9983$.

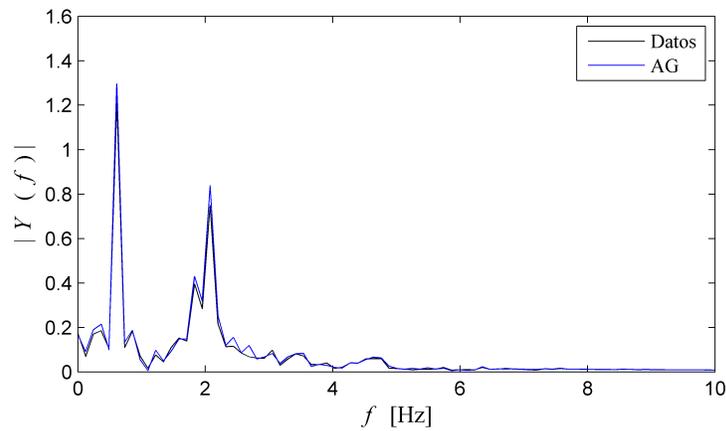
Tabla 5.8. Resultados del algoritmo genético continuo al utilizar la correlación entre las señales de desplazamiento como función costo.

Valor	δ	α	β	F	ω
Real	1.0000	50.0000	150.0000	350.0000	2.0000
Identificado	0.8100	-5.4337	128.0625	378.2680	1.9966

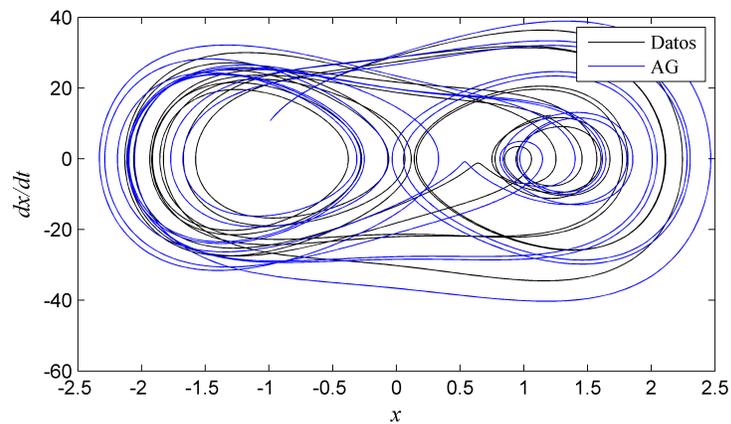
Estos resultados muestran que la similitud entre la señal a optimizar y su aproximación encontrada con el algoritmo es de alrededor de 99%. La comparación del desempeño de x y \hat{x} utilizando los valores anteriores se muestra en la Figura 5.64.



(a) Respuesta en el tiempo.



(b) Espectro FFT.



(c) Diagrama de fase.

Figura 5.64. Resultados del algoritmo genético continuo al utilizar el coeficiente de correlación entre las señales de desplazamiento como función costo. Datos - señal a optimizar, AG - señal aproximada.

De los resultados anteriores se puede observar que para ambos casos de la implementación de la función costo, evaluación en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo, la correlación entre los espectros de frecuencia de la solución aproximada y de la señal a optimizar tuvo un valor mayor que la correlación de las mismas señales en el dominio del tiempo. No obstante, el coeficiente de correlación entre las señales en el dominio del tiempo resulta ser un mejor indicador dado que el espectro de Fourier no detecta las variaciones en el tiempo del contenido espectral de un sistema no lineal.

Los resultados obtenidos muestran la capacidad del algoritmo genético para optimizar el modelo de Duffing, sin embargo aún falta trabajo para su validación con datos experimentales. También se comenzó el desarrollo de un algoritmo de programación genética que sea capaz de aproximar el mismo modelo a partir de un conjunto de funciones y operadores. Éste trabajo aún se encuentra en desarrollo y se contempla para continuar como trabajo futuro.

Capítulo 6

Conclusiones

Debido a la importancia de los sistemas no lineales en ingeniería, en este trabajo de investigación se presentaron metodologías de identificación de parámetros no lineales en sistemas mecánicos a partir del procesamiento de señales de vibración. Se analizaron diferentes sistemas con el fin de comprobar la eficacia de las herramientas de procesamiento propuestas. Primero, se analizó una viga en voladizo, uno de los sistemas más elementales pero que dependiendo de sus características geométricas y de materiales puede tener un desempeño altamente no lineal. La respuesta de la viga fue analizada considerando grandes deformaciones como condición inicial. Para ello, experimentalmente fue necesario desplazar el extremo libre de la viga varias veces su espesor. Éstas condiciones generan una respuesta dinámica que se produce a una frecuencia que no tiene relación con las frecuencias asociadas a los modos lineales de vibración. La identificación experimental del desempeño no lineal de la viga habilitó el desarrollo y comprobación de un modelo dinámico que incluyó términos polinomiales no lineales. La solución del modelo mostró un patrón de distorsión armónica y cuando la frecuencia de excitación fue inferior a la frecuencia natural, el diagrama de fase mostró inestabilidad al presentar dos polos atractores. Las frecuencias que generan el comportamiento no lineal de la viga sólo pudieron ser determinadas de manera teórica y experimental al considerar grandes deformaciones como condición inicial, de otro modo los efectos no lineales fueron despreciables.

El estudio de la viga en voladizo permitió comprobar que las condiciones que generan la respuesta dinámica no lineal de un sistema son difíciles de encontrar en problemas prácticos de ingeniería, ya que para ello es necesario que el sistema presente grandes deformaciones o sea excitado a una frecuencia cercana a su frecuencia no lineal.

Los sistemas mecánicos están formados por un conjunto de elementos acoplados que interactúan entre sí durante su operación. Ésta interacción genera comportamientos que se propagan a través de todos los componentes, por lo tanto, la manera y el medio a través del cual los elementos se conectan son importantes ya que determinan la dinámica del sistema en conjunto. Con el fin de estudiar esa dinámica, se analizó un automóvil como un sistema complejo y se determinó la sincronización dinámica de sus componentes. Para ello se instrumentaron dos elementos de la carrocería interna del vehículo, el tablero y la puerta, de manera que se midieron las vibraciones en el eje perpendicular a la dirección del desplazamiento del vehículo. Se llevaron a cabo dos tipos de pruebas: pruebas de impacto y pruebas del vehículo siendo conducido. A partir de las pruebas de impacto se identificaron las frecuencias naturales de los elementos individuales en estudio; además, utilizando herramientas de análisis tiempo-frecuencia fue posible encontrar las frecuencias naturales asociadas a cada elemento e identificar sus parámetros de rigidez y amortiguamiento.

Las pruebas del vehículo en funcionamiento se realizaron manteniendo tres velocidades diferentes durante la adquisición de los datos: 60, 70 y 80 km/h. Las señales originales fueron filtradas con el fin de rechazar las frecuencias distintas de las frecuencias naturales de los elementos. Posteriormente, las señales filtradas fueron analizadas con la transformada wavelet continua, lo cual habilitó la identificación de la sincronización de los elementos del sistema. Por otra parte, se introdujo el concepto del parámetro de déficit de orden con el fin de medir el grado de sincronización de los elementos. Las funciones de densidad de probabilidad fueron calculadas y se pudo demostrar que para los tres casos de pruebas conducidas éstas tienen una tendencia similar que puede ser aproximada a una ley de potencias; donde, el exponente de la ley de potencia es un indicador del grado de sincronización. El parámetro de déficit de orden entre el tablero y la puerta tuvo un valor alrededor de 0.2 y fue menor a éste valor en un 53-56 % del tiempo, lo cual indica que los elementos estuvieron sincronizados la mayor parte del tiempo.

En este trabajo de investigación se estudiaron dos sistemas de transmisión mecánica. El interés de su estudio básicamente fue debido a que éstos sistemas presentan un comportamiento altamente no lineal a causa de sus componentes principales, engranes y cojinetes; además, los sistemas de transmisión mecánica son ampliamente utilizados en diferentes tipos de máquinas. Primero se analizó una transmisión mecánica automotriz de siete velocidades con el fin de identificar la causa de la falla en el engrane de la séptima velocidad. El engrane en cuestión fue instrumentado con acelerómetros colocados de tal

manera que a partir de sus vibraciones lineales fue posible determinar su vibración torsional. La señal procesada fue analizada en el dominio de la frecuencia a partir de la FFT para identificar la complejidad del sistema y algunas de sus frecuencias fundamentales. No obstante, el mayor procesamiento se realizó con los mapas tiempo-frecuencia generados a partir de la transformada wavelet continua. Ésta herramienta permitió identificar el comportamiento no lineal del sistema y los parámetros de rigidez y amortiguamiento; los cuales se obtuvieron al analizar la respuesta en el tiempo de cada frecuencia fundamental. El comportamiento inestable del sistema fue identificado mediante los diagramas de fase.

El segundo sistema de transmisión estudiado fue una transmisión de una etapa. El objetivo principal fue identificar los efectos producidos por la variación de parámetros en los elementos de la transmisión, específicamente se estudió la influencia de la rigidez de la carcasa en el desempeño dinámico y la sincronización del sistema completo. Se aplicaron diferentes técnicas de procesamiento a la señal: la transformada wavelet continua, el diagrama de fase, el diagrama de error de sincronización, parámetro de orden de la Kuramoto, y algunos descriptores estadísticos .

Dado que la rigidez de carcasa se propone como elemento de acoplamiento que permite la sincronización, se establecieron tres valores de rigidez diferentes. Los resultados mostraron que cuando la fuerza de acoplamiento es suficientemente débil (rigidez de la carcasa muy baja), los elementos del sistema se mueven incoherentemente, mientras que al pasar un determinado umbral de la fuerza de acoplamiento, los elementos se sincronizan colectivamente. Sin embargo, cuando la fuerza de acoplamiento es mucho mayor que el umbral de sincronización (alta rigidez de la carcasa), la sincronización desaparece. De esta manera se pudieron identificar los efectos que produce la variación del parámetro de rigidez en el sistema de transmisión mecánica.

En el análisis de los datos experimentales de la transmisión de una etapa, los resultados mostraron un alto grado de sincronización. Por lo tanto, el modelo propuesto de la transmisión de engranajes de una sola etapa demostró la capacidad de predecir la sincronización no lineal entre los elementos rotativos. Además, se encontró que la dinámica entre los engranes y los cojinetes puede producir un incremento en la carga cíclica, el cual pudo ser estimado a partir de la potencia de la densidad espectral obtenida de los mapas tiempo-frecuencia generados con la transformada wavelet continua. También se encontró que las cargas cíclicas aumentaron alrededor de un 40 % en el caso experimental; por lo que en los parámetros de diseño de la transmisión es factible considerar que el ciclo de carga aumenta en ésta cantidad.

El análisis de la variación de los parámetros dinámicos es importante para mantener las condiciones óptimas del desempeño de una máquina. Para lograrlo es necesario utilizar herramientas que permitan analizar la evolución de los parámetros en el tiempo. En ésta investigación se estudió el caso experimental de un rotor montado sobre cojinetes de gas con el fin de identificar el comportamiento del sistema y la evolución de sus parámetros. Las señales experimentales fueron adquiridas con sensores de desplazamiento ubicados próximos al rotor y cercanos a los cojinetes. Los datos fueron analizadas mediante la FFT, diagramas de órbitas, mapas tiempo-frecuencia y diagramas de fase. Durante el desarrollo de los experimentos fue posible distinguir cuatro etapas en el desempeño dinámico del rotor: comportamiento estable, etapa de transición a la inestabilidad, comportamiento inestable y condición de falla.

El solo uso de la FFT fue insuficiente para identificar la gama de frecuencias en las que el sistema es inestable. Incluso, a partir de un diagrama de cascada solamente sería posible visualizar la presencia de subarmónicos, más no la naturaleza del fenómeno. El análisis de los diagramas de órbitas demostró la inestabilidad del sistema, aunque tampoco ofrece información sobre las causas de la inestabilidad y los parámetros que la producen. Por su parte, el análisis de tiempo-frecuencia fue capaz de ilustrar el comportamiento no lineal y el instante en que éste aparece. Además, haciendo uso de las ventajas que ofrece éste análisis, fue posible construir el diagrama de salto e identificar el desempeño caótico del sistema. El diagrama de fase fue útil para comprobar el comportamiento no lineal y caótico del sistema. También sirvió para desarrollar una metodología que permitió identificar los parámetros dinámicos del sistema a partir del análisis de los lazos que dibuja. Los resultados de éste análisis mostraron que la evolución de la rigidez y el amortiguamiento durante la etapa estable es suave, mientras que durante la etapa inestable presentan una variación drástica. Éstas variaciones son atribuidas al comportamiento altamente no lineal del sistema y demuestran que su comportamiento es impredecible y caótico. Además, la no linealidad en el desempeño de la rigidez habilitó el desarrollo de frecuencias subsíncronas.

A partir del análisis con el diagrama de fase y los mapas tiempo-frecuencia fue posible identificar que el rotor se comporta de acuerdo a la ecuación de la Duffing con una rigidez de reblandecimiento, lo cual significa que la rigidez disminuye a medida que el desplazamiento aumenta.

Con el fin de encontrar los mejores parámetros para la ecuación de la Duffing y validarlos con los datos experimentales se inició una línea de investigación enfocada en el desarrollo de algoritmos genéticos. Primero, se implementó un algoritmo genético conti-

nuo que fuera capaz de optimizar los coeficientes del modelo de Duffing. Los resultados obtenidos muestran la capacidad del método para optimizar el modelo, sin embargo aún falta trabajo para su validación con datos experimentales. También se comenzó el desarrollo de un algoritmo de programación genética que sea capaz de aproximar el modelo matemático de un sistema mecánico a partir de sus señales experimentales. Éste trabajo se encuentra en desarrollo y se contempla para continuar como trabajo futuro.

Como se pudo comprobar a lo largo de éste trabajo de tesis, la combinación de diversas herramientas de procesamiento de señales hace posible la identificación de sistemas dinámicos, la cual no es posible mediante herramientas clásicas como el espectro de frecuencias. La transformada wavelet continua resulta útil para identificar el comportamiento no lineal del sistema y la evolución de su contenido espectral. Ésta característica habilita el análisis de la respuesta en el tiempo de cada frecuencia del sistema, haciendo posible la estimación de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento relacionados a los componentes del sistema. Además, mediante los mapas tiempo-frecuencia generados se puede calcular la variación de la densidad espectral y relacionar el desempeño dinámico del sistema a determinadas condiciones de operación del sistema.

Por su parte, el diagrama de fase es una herramienta matemática poderosa que permite identificar comportamientos no lineales y caóticos. Además, permite la identificación de los parámetros dinámicos en un sistema mecánico no lineal. Para la reconstrucción del diagrama de fase, es necesario tener suficientes datos de manera que sea posible recuperar la dinámica completa del sistema. Bajas frecuencias de muestreo durante la adquisición de los datos incrementan la incertidumbre del método. Éste método de identificación emplea datos de campo por lo que es posible no depender de bancos de pruebas especiales.

Otra herramientas como el parámetro de orden de Kuramoto hacen posible identificar fenómenos presentes en la dinámica de desempeño de un sistema mecánico, como el fenómeno de la sincronización dinámica de sus componentes. Éste parámetro permite cuantificar la presencia de la sincronización, la cual representa una carga dinámica para el sistema y que es importante considerar durante la etapa de diseño de los elementos de máquinas. Por otra parte los diagramas de órbitas permiten identificar comportamientos inestables del sistema. Cabe mencionar que para poder caracterizar la dinámica de un sistema es necesario el uso de descriptores estadísticos como la media, desviación estándar, la kurtosis, entre otros.

Apéndice A

Publicaciones

A.1. Artículos en revistas indexadas

- González-Cruz, C. A., Jáuregui -Correa, J. C., Domínguez-González A. Lozano-Guzmán A. (2016). Effect of the coupling strength on the nonlinear synchronization of a single-stage gear transmission. *Nonlinear Dynamics*. 85 (1), 123-140.
- Claudia Aide González-Cruz, Juan Carlos Jáuregui-Correa, Gilberto Herrera-Ruíz (2016). Nonlinear Response of Cantilever Beams Due to Large Geometric Deformations: Experimental Validation. *Strojniki vestnik - Journal of Mechanical Engineering* 62 (3), 187-196.
- González-Cruz, C. A., Jáuregui -Correa, J. C., López-Cajún, C., Sen, M., Domínguez-González A. (2015). Experimental analysis of synchronization and dynamics in an automobile as a complex system. *Mechanical Systems and Signal Processing* 60-61, pp. 472-484.

A.2. Artículos en conferencias internacionales

- López-Cajún, C. S., Jáuregui-Correa, J. C., González-Cruz, C. A., Rodríguez, M. (2015). Mechanical Reproduction of the Horse Movement from a Hippotherapy Cycle. *Multibody Mechatronic Systems*, pp. 371-380. Springer International Publishing.
- González, C. A., Jáuregui, J. C., de Santiago, O., Solórzano, V. (2015). Estimation of the rotordynamic coefficients of a compressor mounted on gas bearings using

the phase diagram and the unbalanced response (GT2015-42735). *ASME Turbo Expo 2015: Turbine Technical Conference and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, Montreal, Canada.

- González-Cruz, C. A., Jáuregui-Correa, J. C., López-Cajún, C. S., Sen, M. (2014). Dynamic behavior and synchronization of an automobile as a complex system (EDSA2014-20037). *ASME 2014 12th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*. American Society of Mechanical Engineers, Copenhagen, Denmark.
- González, C. A., Jáuregui, J. C., de Santiago, O. (2014). Identification of Nonlinear Instabilities in Rotors Supported on Gas Bearing. *ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, Dsuseldorf, Germany.

A.3. Capítulos de libro

- Jáuregui-Correa, J.C., González-Cruz, C.A. (2015). Identificación de parámetros no lineales en sistemas mecánicos a partir de mediciones de campo. *Estadística y ciencia, Investigación cuantitativa en diversas disciplinas*. Fontamara, México D.F. ISBN 978-607-736-208-1.

Apéndice B

Códigos

B.1. Algoritmo genético continuo en Matlab

Programa principal

```
%=====
%          CONTINUOUS GENETIC PROGRAMMING
%=====
% minimize the objective function designated in 'ff'
% Before begining, set all the parameters in part II
% function 'setupGA'

clc; clear all; close all;

%% create directory to save *.txt file at the end of the algorithm
folderName = uigetdir;
folderName = strcat(folderName, '\');
fileName = input('Ingresa_nombre_para_el_archivo:_', 's');

%% 1. Experimental data loading
%-----
[t,x,v] = f_dataLoading();

%% 2. Setup parameters
%-----
[nvar, vlimits, maxit, mincost, popsize, Nt, keep, nmut, M, selection, mutrate] = f_setupGA();

%% 3. Evaluate the initial population
%-----
pop = f_initialpop(popsize, nvar, vlimits); % initial population
iga = 1; % generation counter initialized
cost = ff2(pop,t,x); % calculates population cost using ff or ff3
[ cost, ind] = sort(cost); % min to max cost and save the index
pop = pop(ind,:); % rearrangement according to the min cost
```

```

minc(1) = min(cost);           % minc contains min of population
meanc(1) = mean(cost);        % meanc contains mean of population
disp([iga cost(1)])

%% 4. Iterate through generations
%-----
while iga < maxit

    iga = iga + 1;              % generation counter

    % Create the new generation and evaluate it
    %-----
    % 4.1 Mate and crossover function
    pop = f_mating(pop, popsize, keep, Nt, nvar);

    % 4.2 Mutate the population
    pop = f_mutation(nmut, popsize, Nt, pop, vlimits);

    % 4.3 The cost of the new offspring are evaluated using ff or ff3
    cost = ff2(pop, t, x);

    % sort the cost and associated parameters
    %-----
    [cost, ind] = sort(cost);    % min to max cost and save the index
    pop = pop(ind, :);          % rearrangement according to the min cost

    % do statistics for a single nonaveraging run
    %-----
    minc(iga) = min(cost);       % minc contains min of population
    meanc(iga) = mean(cost);     % meanc contains mean of population

    % stopping criteria evaluation
    %-----
    if (iga > maxit) || (minc(iga) < mincost)
        break
    end

    disp([iga cost(1)])

end

%% a) Evaluate the last generation
%-----
[xe, ve, ae] = f_SystemSolution(t, pop(1, :)); % [x, v, a]

%% b) Display the GA parameters and the best solution
%-----
f_DispGAdata(nvar, popsize, selection, mutrate, maxit, mincost, iga, cost(1), pop(1, :));

nfig = 1;
nfig = f_plotting(t, x, v, nfig);           % Real data
nfig = f_plotting(t, xe, ve, nfig);        % Last generation
nfig = f_plotting2(t, x, v, xe, ve, nfig); % real data vs last generation
nfig = f_plotting3(minc, meanc, nfig);     % cost behavior

%% c) Compute the cost of the best solution
%-----
[CC, MSE] = f_costBestSol(t, x, xe);

```

```

%%d) Create *.txt files
%-----
f_DoTxt(fileName, folderName, t, xe, ve, ae, minc, meanc, pop(1,:), popsize, selection, mutrate,
maxit, mincost, CC, MSE);

```

Funciones auxiliares

```

%-----
%                               DATA LOADING FUNCTION
%-----
function [t,x,v,a] = f_dataLoading()

data = load('Duffing_conExcitacion1.txt');

t = data(:,1); % time
x = data(:,2); % displacement
v = data(:,3); % velocity
a = data(:,4); % acceleration

%-----
%                               FUNCTION TO GENERATE THE INITIAL POPULATION
%-----
function [pop] = f_initialpop(popsiz, nvar, vlimits)

pop = zeros(popsiz, nvar);
for j = 1:nvar
    pop(:,j) = vlimits(1,j)+(vlimits(2,j)-vlimits(1,j))*rand(popsiz,1);
end;

end

%-----
%                               FITNESS FUNCTION 1
%-----
% Minimize the main squared error and correlation factor
% data — experimental data, column vector
% x_est — approximated solution using the population i

function cost = ff(pop,t,data)

L=length(t);
[popsiz,~] = size(pop);
MSE = zeros(popsiz,1);
CC = zeros(popsiz,1);

% Evaluate the population
for i=1:popsiz
    [x_est,~,~] = f_SystemSolution(t,pop(i,:)); % x(:,i), v(:,i), a(:,i)

    % Mean Squared Error
    %-----
    MSE(i,1) = sum((data-x_est).^2)/L;

    % Correlation factor
    %-----
    a1 = L*sum(data.*x_est) - sum(data)*sum(x_est);

```

```

        a2 = sqrt( L*sum(data.^2) - sum(data)^2 )*sqrt( L*sum(x_est.^2) - sum(x_est)^2
        );
        CC(i,1) = 1-a1/a2;
    end;

    cost = CC; % population cost

end

%-----
%                               FITNESS FUNCTION 2
%-----
% Minimize the MSE and CC between the FFT spectrums
% data  ——— experimental data, column vector
% x_est ——— approximated solution using the population i

function cost = ff2(pop,t,data)

    %FFT parameters
    L=length(t); % length of data
    NFFT = 2^nextpow2(L); % # of points for the fft

    FFT1 = fft( data,NFFT )/L; % FFT of experimental data
    FFTdata = 2*abs(FFT1(1:NFFT/2+1)); % absolute value of the fft
    FFTdata = FFTdata/norm(FFTdata); % normalization

    [popsize,~] = size(pop);

    MSE = zeros(popsize,1);
    CC = zeros(popsize,1);

    % Evaluate the population
    for i=1:popsize
        [x_est,~,~] = f_SystemSolution( t,pop(i,:) ); % x(:,i),v(:,i),a(:,i)

        FFT1 = fft( x_est,NFFT )/L; % FFT of estimated data
        FFTx_est = 2*abs(FFT1(1:NFFT/2+1)); % absolute value of the fft
        FFTx_est = FFTx_est/norm(FFTx_est); % normalization

        % Mean Squared Error
        %-----
        MSE(i,1) = sum( (FFTdata-FFTx_est).^2 ) /L;

        % Correlation factor
        %-----
        a1 = L*sum( FFTdata.*FFTx_est ) - sum(FFTdata)*sum(FFTx_est);
        a2 = sqrt( L*sum(FFTdata.^2) - sum(FFTdata)^2 )*sqrt( L*sum(FFTx_est.^2) - sum
            (FFTx_est)^2 );
        CC(i,1) = 1-a1/a2;
    end;

    cost = CC; % population cost

end

%-----
%                               SYSTEM SOLUTION FUNCTION
%-----
function [xe,ve,ae] = f_SystemSolution(t,pari)

```

```

% Parameters of the system
%-----
X = [-1 10.3];      % initial conditions [x,v]

h = t(2)-t(1);     % sample period
L = length(t);     % length of the time data
Lsys = length(X);  % order of the system

% Initialize variables
%-----
xe = zeros(L,1);   % [estimated position]
ve = zeros(L,1);   % [estimated velocity]
ae = zeros(L,Lsys/2); % [estimated acceleration]

for i = 1:L
    X = f_RungeKutta(t(i),X,h,pari);
    xe(i) = X(1);
    ve(i) = X(2);
    ae(i) = pari(4)*cos(pari(5)*pi*t(i)) - pari(1)*X(2) - pari(2)*X(1) - pari(3)*(
        X(1)^3);
end;

end

%-----
%                               RUNGE KUTTA METHOD
%-----
function dX = f_RungeKutta(t,X,h,pari)

    l = length(X);
    x = X;
    K(:,1) = f_Sys(t,x,pari);

    for i=1:l
        x(i) = X(i)+K(i,1)*(h/2);
    end;
    K(:,2) = f_Sys(t+(h/2),x,pari);

    for i=1:l
        x(i) = X(i)+K(i,2)*(h/2);
    end;
    K(:,3) = f_Sys(t+(h/2),x,pari);

    for i=1:l
        x(i) = X(i)+K(i,3)*h;
    end;
    K(:,4) = f_Sys(t+h,x,pari);

    dX = X*0;
    for i = 1:l
        dX(i) = X(i) + (h/6)*( K(i,1) + 2*K(i,2) + 2*K(i,3) + K(i,4) );
    end;

end

function K = f_Sys(t,X,pari)

```

```

K(1) = X(2);
K(2) = - pari(1)*X(2) - pari(2)*X(1) - pari(3)*( X(1)^3) + pari(4)*cos(pari(5)
      *pi*t);

end

%-----
%                               MATING FUNCTION
%-----
function pop = f_mating(pop,popsize,keep,Nt,nvar)

% Pair and mate
%-----
M = ceil( (popsize-keep)/2 );           % number of matings
prob = flipud( [1:keep]'/sum( [1:keep] ) ); % weights chromosomes
odds = [0 cumsum(prob(1:keep)) '];     % probability distribution function
pick1 = rand(1,M);                     % mate #1
pick2 = rand(1,M);                     % mate #2

%ma and pa contain the index of the chromosomes that will mate
i = 1;
while i <= M
    for j = 2:keep+1
        % if the probability of mate#1 is a<pick1<b
        if ( pick1(i) > odds(j-1)) && ( pick1(i) <= odds(j) )
            ma(i) = j-1;
        end;
        % if the probability of mate#2 is a<pick2<b
        if ( pick2(i) > odds(j-1)) && ( pick2(i) <= odds(j) )
            pa(i)=j-1;
        end;
    end;
    i = i+1;
end

%perform mating using single point crossover
%-----
ix = 1:2:keep;                         % index of mate #1
xp = ceil(rand(1,M)*Nt);                % crossover point, from 1 to Nvar
r = rand(1,M);                          % mixing parameter

for i = 1:M
    xy = pop(ma(i),xp(i)) - pop(pa(i),xp(i)); %ma and pa mate

    pop( keep+ix(i) , : ) = pop(ma(i),:); % 1st offspring
    pop( keep+ix(i)+1 , : ) = pop(pa(i),:); % 2nd offspring
    pop( keep+ix(i) , xp(i) ) = pop(ma(i),xp(i)) - r(i).*xy; % 1st
    pop( keep+ix(i)+1 , xp(i) ) = pop(pa(i),xp(i)) + r(i).*xy; % 2nd

    % crossover when last variable not selected
    if xp(i) < nvar
        pop( keep+ix(i) , : ) = [ pop( keep+ix(i),1:xp(i) ) pop( keep+ix(i)+1,xp(i)
            )+1:nvar )];
        pop( keep+ix(i)+1,: ) = [ pop( keep+ix(i)+1,1:xp(i)) pop( keep+ix(i),xp(i)
            +1:nvar )];
    end;
end;

end

```

```

%-----
%                               MUTATION FUNCTION
%-----
function pop = f_mutation(nmut, popsize, Nt, pop, vlimits)

    mrow = sort(ceil(rand(1,nmut)*(popsize-1)) + 1);
    mcol = ceil(rand(1,nmut)*Nt);

    for i=1:nmut
        % mutation = lim_inf + range*rand()
        pop(mrow(i),mcol(i)) = vlimits(1,mcol(i)) + (vlimits(2,mcol(i))-vlimits(1,
            mcol(i)))*rand;
    end;

end

%-----
%                               DISPLAY OF THE RESULTS
%-----
function f_DisgAdata(nvar, popsize, selection, mutrate, maxit, mincost, iga, bestcost,
    bestpop)

    disp('PARAMETERS_OF_THE_CONTINUOUS_GENETIC_ALGORITHM');
    disp('-----');
    disp(['#var = ' num2str(nvar)]);
    disp(['Population_size = ' num2str(popsize) ]);
    disp(['Selection_rate = ' num2str(selection)]);
    disp(['Mutation_rate = ' num2str(mutrate)]);
    disp(['Max_iterations = ' num2str(maxit)]);
    disp(['Min_cost = ' num2str(mincost) ]);
    disp('-----');

    disp('.....BEST_SOLUTION')
    disp('-----');
    disp(['No. of generations = ' num2str(iga)]);
    disp(['Best_cost = ' num2str(bestcost)]);
    disp(['Variable values = ' num2str(bestpop)]);

end

%-----
%                               DISPLAY THE SYSTEM RESPONSE
%-----
function [i] = f_plotting(t,x,v,i)

    figure(i)

    % Phase diagram
    subplot(3,1,1); plot(x,v,'k');
    xlabel('\it{x}\rm{[mm]}', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 12);
    ylabel('\it{dx/dt}\rm{[mm/s]}', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 12);
    title('Phase_diagram', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 13');

    % position
    subplot(3,1,2); plot(t,x,'k');
    xlabel('\it{t}\rm{[s]}', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 12);
    ylabel('\it{x}\rm{[mm]}', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 12);
    title('Displacement', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 13');

```

```

    %FFT of the displacement
    Fs = 1/( t(2)-t(1) );
    L =length(t);
    NFFT = 2^nextpow2(L);
    f = Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2+1);
    xFFT = fft( x )/L;
    xFFT = 2*abs(xFFT(1:NFFT/2+1));

    subplot(3,1,3); plot(f,xFFT,'k');
    xlabel('\it {\_f\_}\_}\rm{[Hz]}', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 12');
    ylabel('\it {\_Y\_}\_}\rm{(\_}\it {\_f\_}\_}\rm{\_}\_}\_}', 'FontName', 'Times_New_Roman', '
        FontSize', 12);
    axis([0 10 0 1.6]);
    title ('FFT_of_the_displacement', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 13');

    i=i+1;

end

%-----
%          DISPLAY THE ORIGINAL DATA VS GA RESULTS
%-----
function [i] = f_plotting2(t,x,v,xv,ve,i)

    % Phase diagram
    figure (i)
    plot(x,v,'k',xv,ve,'b');
    xlabel('\it {\_x\_}\_}', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize',12);
    ylabel('\it {\_dx/dt\_}\_}', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize',12);
    LG=legend('Datos','AG',1);
    LEG = findobj(LG,'type','text');
    set(LEG,'FontName','Times_New_Roman','FontSize',10)

    % position
    i=i+1;
    figure (i)
    plot(t,x,'k',t,xv,'b');
    xlabel('\it {\_t\_}\_}\rm{[s]}', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize',12);
    ylabel('\it {\_x\_}\_}', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize',12);
    LG=legend('Datos','AG',1);
    LEG = findobj(LG,'type','text');
    set(LEG,'FontName','Times_New_Roman','FontSize',10)

    %FFT of the displacement
    Fs = 1/( t(2)-t(1) );
    L =length(t);
    NFFT = 2^nextpow2(L);
    f = Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2+1);
    xFFT = fft( x )/L;
    xvFFT = fft( xv )/L;

    i=i+1;
    figure (i)
    plot(f,2*abs(xFFT(1:NFFT/2+1)), 'k', f,2*abs(xvFFT(1:NFFT/2+1)), 'b');
    xlabel('\it {\_f\_}\_}\rm{[Hz]}', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 12');
    ylabel('\it {\_Y\_}\_}\rm{(\_}\it {\_f\_}\_}\rm{\_}\_}\_}', 'FontName', 'Times_New_Roman', '
        FontSize', 12);
    axis([0 10 0 1.6]);
    LG=legend('Datos','AG',1);

```

```
LEG = findobj(LG, 'type', 'text');
set(LEG, 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 10)

i=i+1;

end

%-----
%                DISPLAY THE COST EVOLUTION
%-----
function [i] = f_plotting3(minc, meanc, i)

    iters = 0:length(minc)-1;

    % Minimum cost
    figure(i)
    plot(iters, minc, 'k');
    xlabel('Generaci\on', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 12);
    ylabel('Costo', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 12);
    i=i+1;

    % Mean cost
    figure(i)
    plot(iters, meanc, 'k');
    xlabel('Generaci\on', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 12);
    ylabel('Costo', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 12);

    i=i+1;

end
```

Apéndice C

Códigos

C.1. Algoritmo de programación genética en Matlab

Programa principal

```
clc; clear all; close all;

% *****
%                               CONTINUOUS GENETIC PROGRAMMING
% *****
% minimize the objective function designated in 'ff'
% Before begining, set all the parameters in part II function 'setupGA'
% *****

%                               GLOBAL VARIABLES DECLARATION
%-----

global N_lvar;      %number of linear variables
global popsize;    %population size
global CLset;      %set of linear constants
global Fset;       %set of GP functions
global Tset;       %set of GP terminals
global CNLset;     %set of nonlinear constants

global L_fset;     %length of function set
global L_tset;     %length of terminal set
global L_CNLset;  %length of nonlinear constant' set

global maxit;      %number maximum of iterations
global mincost;    %minimum cost
global mutrate;    %mutation rate
global selection;  %fraction of population kept
global depth;      %depth of tree
global prob;       %selection rate for terminals in depth > 1
global prob1;      %selection rate for terminals in depth = 1
global cumprob;    %cum probability for prob
```



```

%%
%%
%%-----
6. MUTATION
%%-----
fGP_mutationPop();

%%
%%-----
7. EVALUATE THE NEW OFFSPRING
%%-----
% create the expressions based on the population
pop = fGP_stringPop(popL, popNL);

% calculates population cost
cost = fGP_ff(pop, t, x);

% sort the cost (arrange from min to max cost and save the index)
[ cost, ind ] = sort(cost);

% arrangement the associated parameters according to the min cost
popL = popL(:, ind);           % linear population
popNL = popNL(:, :, ind);      % non linear population
depthL = depthL(:, ind);      % depth
op = op(:, :, ind);           % operators

% save the minimum and mean cost
minc(iga) = min(cost);
meanc(iga) = mean(cost);

%%
%%-----
8. STOPING CRITERIA
%%-----
if iga > maxit || cost(1) < mincost
    break
end;

disp([iga cost(1)])

end;

%% a) Evaluate the last generation
%%-----
[xe, ve, ae] = f_systemSolution(t, pop(1, :)); % [x, v, a]

% b) Display the GA parameters and the best solution
%%-----
f_DisGPdata(N_lvar, popsize, selection, mutrate, maxit, mincost, iga, cost(1), pop(1, :));

nfig = 1;
nfig = f_plotting2(t, x, v, xe, ve, nfig); % real data vs last generation
nfig = f_plotting3(minc, meanc, nfig); % cost behavior

% c) Compute the cost of the best solution
%%-----
[CC, MSE] = f_costBestSol(t, x, xe);

%%
% d) Create *.txt files
%%-----
bbestpop = char(pop(1, :));

```

```
f_DoTxt ( fileName , folderName , t , xe , ve , ae , minc , meanc , bbestpop , popsize , selection , mutrate ,
maxit , mincost , CC,MSE);
```

Funciones auxiliares

```
%-----
%                               DATA LOADING FUNCTION
%-----
function [t,x,v] = fGP_dataLoading()

    data = load('data-1-10_3.txt');

    t = data(:,1); % time
    x = data(:,2); % displacement
    v = data(:,3); % velocity
end

%-----
%                               SETUP PARAMETERS FUNCTION
%-----

function fGP_setup()

    % global variables declaration

    global CLset;           % set of linear constants
    global N_lvar;         % number of linear variables
    global Fset;           % set of GP functions
    global Tset;           % set of GP terminals
    global CNLset;         % set of nonlinear constants
    global L_fset;         % length of function set
    global L_tset;         % length of terminal set
    global L_CNLset;       % length of nonlinear constant' set
    global maxit;          % number maximum of iterations
    global mincost;        % minimum cost

    global popsize;        % population size
    global mutrate;        % mutation rate
    global selection;      % fraction of population kept
    global depth;          % depth of tree
    global prob;           % selection rate for terminals in depth > 1
    global prob1;          % selection rate for terminals in depth = 1
    global cumprob;        % cum probability for prob
    global cumprob1;       % cum probability for prob1
    global keep;           % surviving population
    global nmut;           % total number of mutations of linear population
    global nmutNL;         % total number of mutations of NL population
    global M;              % number of matings
    global Nmax_term;      % #terminals in the last depth level
    global Nter_inL;       % #terminals per line
    global step_inL;       % #step per line
    global probCrossover;  % probability of crossover
    global odds;           % Prob dist funct for crossover operation;

    % Setup of the linear population
    %-----
    % Range of values for the linear variables set
    CLset = [ -1          1;... %C [L_inf   L_sup]
```

```

-5      5;];      %K [L_inf  L_sup]

% Setup of the GP to generate the non linear population
%-----
% Function set
Fset = {      '+'      ;...
          '-'      ;...
          '*'      ;...
          '/'      ;...
          '*sin'   ;...
          '*cos'   ;...
          '*exp'   };

% Terminal set
Tset = {      '(X(1))' ;...      % position
          '(X(2))' ;...      % velocity
          '(t)'    ;...      % time
          '(omega)'};      % frequency

% Range of values for the nonlinear constant set
CNLset = [ -10      10 ]; % [L_inf  L_sup ]

% depth of the trees
depth = 4;

% selection rate for terminals in depth > 1
prob = [ 0.50;...      % function
         0.25;...      % variable
         0.25];      % constant

% selection rate for terminals in depth = 1
prob1 = [ 0.50;...      % variable
          0.50];      % constant

% Setup parameters of the algorithm
%-----
popsize = 10;      % population size
mutrate = 0.5;      % mutation rate
selection = 0.5;      % fraction of population kept
maxit = 2;      % maximum number of iteration
mincost = 0.001;      % minimum cost

% Compute auxiliar variables
%-----
[N_lvar, ~] = size(CLset);      % length of constant linear set
[L_fset, ~] = size(Fset);      % length of function set
[L_tset, ~] = size(Tset);      % length of terminal set
[L_CNLset, ~] = size(CNLset);      % length of nonlinear constant set

cumprob = [0 cumsum(prob)'];      % cumulative probability for prob
cumprob1 = [0 cumsum(prob1)'];      % cumulative probability for prob1

keep = floor(selection*popsize);      % surviving population
probCrossover = (keep:-1:1)'/sum( 1:keep );      % weight of the individuals to
      crossover operation
odds = [0 cumsum(probCrossover(1:keep))'];      % probability distribution function

nmut = ceil(mutrate*(popsize-1)*N_lvar);      % total number of mutations
nmutNL = ceil(mutrate*(popsize-1));      % total number of mutations in NL

```

```

    population
M = ceil( (popsize-keep)/2 );           % number of matings

Nmax_term = 2^(depth);                 % #terminals in the last depth level
Nter_inL = zeros(1,depth+1);          % #terminals per line
step_inL = zeros(1,depth+1);          % #step per line

for i = 1:depth+1
    Nter_inL(i) = 2^(i-1);
    step_inL(i) = Nmax_term/Nter_inL(i);
end;

end

%-----
%                               FUNCTION TO GENERATE THE LINEAR POPULATION
%-----

function [popL] = fGP_linearPop()

    global N_lvar;   % number of linear variables
    global popsize; % population size
    global CLset;   % set of linear constants

    popL= zeros(N_lvar, popsize);      {C K}

    % Randomly choose of the linear coefficients
    for k = 1:popsize
        for j = 1:N_lvar
            popL(j,k) = CLset(j,1) + rand()*(CLset(j,2)-CLset(j,1));
        end;
    end;

end

%-----
%                               FUNCTION TO GENERATE THE NONLINEAR POPULATION
%-----

function [popNL] = fGP_nonLinearPop()

    global depth;
    global Nmax_term;
    global popsize;

    global prob;
    global probl;
    global cumprob;
    global cumprobl;
    global Tset;
    global Fset;
    global L_tset;
    global L_fset;
    global CNLset;
    global step_inL;
    global depthL;

    global op;
    global colter;

```

```

popNL = cell(depth+1,Nmax_term, popsize);    % non linear population
op = zeros(depth+1,Nmax_term, popsize);    % selected operators
depthL = 1+ceil(depth*rand(1, popsize));    % choose randomly the depth of all
      population

% Randomly generation of the nonlinear part
%-----

for k = 1:popsize

    op(1,1,k)= 1;    % set an Operator for the first level
    popNL(1,1,k) = Fset( ceil(L_fset*rand()) );    % choose an operator form Fset
    oppos_prevL = 1;    % operator position 's in the previous level

    for i = 2:depthL(k)

        Nop_inL = 0;    % number of operators in the current level

        %-----
        %                CASE OF DEPTH EQUAL TO 1
        %                the terminals are variables or constant values
        %-----

        if depthL(k) == 2

            colter = oppos_prevL;    % column to place a terminal
            terminal = rand(1,2);    % chose randomly the terminals: var||cte

            % choose the terminal using the Cumulative Probability Distribution
            for j = 1:2    % two branches per operator

                for jj = 1: length(probl)    % evaluate the CPD

                    if (terminal(j) > cumprobl(jj)) && ( terminal(j) <= cumprobl(
                        jj+1) )

                        op(i, colter ,k) = jj+1;    % choosing var||const = 2||3

                        %-----
                        if op(i, colter ,k)==2    % 2 = var

                            popNL(i, colter ,k) = Tset( ceil(L_tset*rand()) );

                        elseif op(i, colter ,k)==3    % 3 = constant

                            popNL(i, colter ,k) = cellstr(strcat('(', num2str( CNLset
                                (1,1) + rand()*(CNLset(1,2)-CNLset(1,1)) ), ')'));

                        end;

                        %-----

                        colter = colter + step_inL(i);

                    end;

                end;    % the asignation of one: var||const

            end;    % the assignation of terminals in the corresponding level
        end;
    end;
end;

```

```

end; %end the creation of level 1

%-----
%                               CASE OF DEPTH DIFFERENT TO 1
%                               terminals can be operator//variable//constant
%-----

if (depthL(k) ~= 2) && (i < depthL(k))

    while Nop_inL == 0 %there isn't an operator in the actual level

        % create two branches and place in the corresponding
        % position according to the last level operators position

        for n = 1:length(oppos_prevL) %opNum_prevL

            colter = oppos_prevL(n); %column to place a terminal
            terminal = rand(1,2); %chose randomly the terminals
                kind

            for j = 1:2 %two branches per operator

                for jj = 1: length(prob) %evaluate the CPD

                    if (terminal(j) > cumprob(jj)) && ( terminal(j) <=
                        cumprob(jj+1) )

                        op(i, colter ,k) = jj;

                        %-----
                        if op(i, colter ,k)==1 %op

                            popNL(i, colter ,k) = Fset( ceil(L_fset*rand())
                                );

                        elseif op(i, colter ,k)==2 %var

                            popNL(i, colter ,k) = Tset( ceil(L_tset*rand())
                                );

                        elseif op(i, colter ,k)==3 %const

                            popNL(i, colter ,k) = cellstr(strcat('(',num2str
                                ( CNLset(1,1) + rand()*(CNLset(1,2)-CNLset
                                (1,1) ),')'));

                        end;
                        %-----

                        colter = colter + step_inL(i);

                    end;

                end;

            end; % the asignation of one: op//var//const

        end; % the assignation of terminals in the corresponding level

    end; %end the creation of actual level

```

```

% due to the depth is less than the depthK, it is necessary
% to check if there is at least one operator
[~,oppos_inL] = find( op(i,:,k) == 1 );

if isempty(oppos_inL) == 0
    Nop_inL = length(oppos_inL);    % #operators in the current
    level
    oppos_prevL = oppos_inL;        % position of the operators
end;

end; % do... while opNum_inL == 0

end; % the evaluation if depth_k ~= 1 && level < depth_k

%-----
%                               CASE OF DEPTH EQUAL TO depthK
%                               the terminal only can be variables || constants
%-----

if i == depthL(k)

    for n = 1:length(oppos_prevL) % opNum_prevL

        colter = oppos_prevL(n);
        terminal = rand(1,2);      % chose randomly the terminals kind

        for j = 1:2 % two branches per operator

            for jj = 1: length(prob1)

                if (terminal(j) > cumprob1(jj)) && ( terminal(j) <=
                    cumprob1(jj+1) )

                    op(i,colter,k) = jj+1;

                    %-----
                    if op(i,colter,k)==2

                        popNL(i,colter,k) = Tset( ceil(L_tset*rand()) );

                    elseif op(i,colter,k)==3

                        popNL(i,colter,k) = cellstr(strcat(' ',num2str(
                            CNLset(1,1) + rand()*(CNLset(1,2)-CNLset(1,1))
                            ),' '));

                    end;
                    %-----

                    colter = colter + step_inL(i);

                end;

            end;

        end; % the asignation of one: op || var || const

    end; % the asignation of terminals in the corresponding level

```

```

        end; %end the creation of actual level

        end; %the evaluation if depth_k ~= 1 && level < depth_k

    end; %for depthK(k)

end;

end

%-----
% FUNCTION TO GENERATE THE SYSTEM EXPRESSION TO BE EVALUATED BY THE FF
%-----

function [popStr] = fGP_stringPop(popL,popNL2)

    global popsize;
    global depthL;
    global Nter_inL;
    global step_inL;

    popStr = cell(popsiz,1); %population string

    for k = 1:popsiz

        for i = depthL(k):-1:2

            colter = 1; %counter to run through the terminals in the last level

            for j = 1: Nter_inL(i)/2

                a = popNL2{i,colter,k}; %1st terminal
                b = popNL2{i,colter + step_inL(i),k}; %2nd terminal

                if (isempty(a)==0) || (isempty(b)==0) %if 1st and 2nd are not empty
                    op_inLL = popNL2{i-1,colter,k}; %operator in Last Line
                    popNL2{i-1,colter,k} = strcat('(',a,op_inLL,b,')');
                    popNL2{i,colter,k} = []; %clean the 1st terminal
                    popNL2{i,colter+step_inL(i),k} = []; %clean the 2nd terminal
                end;

                colter = colter+2*step_inL(i);

            end; %evaluation of Nter_inLine

        end; %evaluation of the complete depth

        %concatenate the string Linear and Nonlinear
        popStr{k,1}= strcat('(',num2str(popL(1,k)),')*X(2)+( ',num2str(popL(2,k)),')*X
            (1)+',popNL2{1,1,k});

    end;

end

%-----
% FITNESS FUNCTION
%-----
% Minimize the main squared error and correlation factor

```

```

% data — experimental data, column vector
% x_est — approximated solution using the population i

function cost = fGP_ff(pop,t,data)

    L=length(t);           %length of data
    [popsize,~]=size(pop); %length of population

    MSE=zeros(popsize,1); %mean square error
    CC=zeros(popsize,1);  %correlacion factor

    for i=1:popsize
        [x_est,~,~]=f_systemSolution( t,pop{i,:} ); % [x(:,i),v(:,i),a(:,i)]

        % Mean Squared Error
        MSE(i,1)=sum( (data-x_est).^2 )/L;

        % Correlation factor
        a1=L*sum( data.*x_est ) - sum(data)*sum(x_est);
        a2=sqrt( L*sum(data.^2) - sum(data)^2 )*sqrt( L*sum(x_est.^2) - sum(x_est)^2 );
        CC(i,1)=1-a1/a2;

        disp(['ind' num2str(i)])
    end;

    cost=CC; %population cost

end

%-----
%                               FUNCTION FOR CROSSOVER OPERATION
%-----

function [] = fGP_crossover_Pop()

    global M;           %number of matings;
    global odds;        %probability distribution function
    global keep;        %syrviving population;
    global N_lvar;      %# of linear variables
    global depth;       %depth of trees
    global op;
    global popL;
    global popNL;
    global step_inL;

    % 1. Pair and mate
    %-----
    pick1=rand(1,M); %mate #1, vector of random probability
    pick2=rand(1,M); %mate #2, vector of random probability
    ma=zeros(M,1); %randomly selected Ma chromosomes
    pa=zeros(M,1); %randomly selected Pa chromosomes

    %ma and pa contain the index of the chromosomes that will mate
    i=1;
    while i <= M
        for j=2:keep+1
            %if the probability of mate#1 is a<pick1<b
            if ( pick1(i) > odds(j-1) ) && ( pick1(i) <= odds(j) )

```

```

        ma(i) = j-1;
    end;
    % if the probability of mate#2 is a<pick2<b
    if ( pick2(i) > odds(j-1)) && ( pick2(i) <= odds(j) )
        pa(i)=j-1;
    end;
end;
i = i+1;
end

% if ma and pa are the same individual , select a diferent pa

for i = 1:M
    while pa(i) == ma(i)
        for j = 2:keep+1
            pick2(i) = rand();
            if ( pick2(i) > odds(j-1)) && ( pick2(i) <= odds(j) )
                pa(i)=j-1;
            end;
        end;
    end;
end;

% 2. Mating of the linear polulation using a 'single crossover point'
%-----
ix = 1:2:keep; % index of mate #1 , 1,3,...,keep
xp = ceil(rand(1,M)*N_lvar); % crossover point, from 1 to Nvar
r = rand(1,M); % mixing parameter

for i = 1:M
    xy = popL(xp(i),ma(i)) - popL(xp(i),pa(i)); %ma and pa mate

    popL( :, keep+ix(i) ) = popL(:,ma(i)); % 1st offspring
    popL( :, keep+ix(i)+1 ) = popL(:,pa(i)); % 2nd offspring

    popL( xp(i) , keep+ix(i) ) = popL(xp(i),ma(i)) - r(i).*xy; % 1st
    popL( xp(i) , keep+ix(i)+1 ) = popL(xp(i),pa(i)) + r(i).*xy; % 2nd

    if xp(i) < N_lvar % crossover when last variable not selected
        popL( :, keep+ix(i) ) = [ popL( 1:xp(i) , keep+ix(i) ) popL( xp(i)+1:
            N_lvar , pa(i) )];
        popL( :, keep+ix(i)+1 ) = [ popL( 1:xp(i) , keep+ix(i)+1) popL( xp(i)+1:
            N_lvar , ma(i) )];
    end;
end;

% 3. Mating of the non linear population using 'one crossover point'
%-----
% 3.1 Select randomly the crossover points in (ma) & (pa)

% Find the position and number of operators in the trees
operatorPosition = cell(keep,1);
Nop = zeros(keep,1);

for i = 1: keep
    [row_op,col_op] = find(op(:,:,i) == 1);
    operatorPosition{i,1} = horzcat(row_op,col_op);
    [Nop(i),~] = size(operatorPosition{i});
end;

```

```

% choose randomly the crossover points
crosspoint_ma = zeros(M,2); %row col]
crosspoint_pa = zeros(M,2); %row col]
L_subtreeMa = zeros(M,2);
L_subtreePa = zeros(M,2);
freeSpaceMa = zeros(M,1);
freeSpacePa = zeros(M,1);

for i = 1: M

    % choose randomly the crossover point in ma(i)
    crosspoint_ma(i,:) = operatorPosition{ma(i)}(ceil(Nop(ma(i))*rand()),:);
    if Nop(ma(i))==1
        aux1=ceil(2*rand());
        if aux1==1
            crosspoint_ma(i,:) = [2,1];
        else
            crosspoint_ma(i,:) = [2,step_inL(2)+1];
        end;
    else
        while crosspoint_ma(i,1) == 1
            crosspoint_ma(i,:) = operatorPosition{ma(i)}(ceil(Nop(ma(i))*rand()),:);
        end;
    end;

    if Nop(ma(i))==1
        L_subtreeMa(i,2) = 1;
    else
        L_subtreeMa(i,2) = 2^(depth+1 - crosspoint_ma(i,1) );
    end;
    L_subtreeMa(i,1) = 0;

    for r = crosspoint_ma(i,1):depth+1
        flag = 0;
        for c = crosspoint_ma(i,2):crosspoint_ma(i,2) + L_subtreeMa(i,2) - 1
            if ( op(r,c,ma(i)) ) ~= 0
                flag = flag+1;
            end;
        end;
        if flag ~=0
            L_subtreeMa(i,1) = L_subtreeMa(i,1)+1;
        end;
    end;
    freeSpaceMa(i) = depth+1-crosspoint_ma(i,1)+1;

    % choose randomly the crossover point in pa(i)
    crosspoint_pa(i,:) = operatorPosition{pa(i)}(ceil(Nop(pa(i))*rand()),:);

    if Nop(pa(i))==1
        aux1=ceil(2*rand());
        if aux1==1
            crosspoint_pa(i,:) = [2,1];
        else
            crosspoint_pa(i,:) = [2,step_inL(2)+1];
        end;
    else
        while crosspoint_pa(i,1) == 1

```

```

        crosspoint_pa(i,:) = operatorPosition{pa(i)}(ceil(Nop(pa(i))*rand()
        ,:);
    end;
end;

if Nop(pa(i))==1
    L_subtreePa(i,2) = 1;
else
    L_subtreePa(i,2) = 2^( depth+1 - crosspoint_pa(i,1) );
end;
L_subtreePa(i,1) = 0;

for r = crosspoint_pa(i,1):depth+1
    flag = 0;
    for c = crosspoint_pa(i,2):crosspoint_pa(i,2)+L_subtreePa(i,2)-1
        if ( op(r,c,pa(i)) ) ~= 0
            flag = flag+1;
        end;
    end;
    if flag ~=0
        L_subtreePa(i,1) = L_subtreePa(i,1) + 1;
    end;
end;
freeSpacePa(i) = depth+1-crosspoint_pa(i,1)+1;

%repeat the pa crossover selection until the size of subtrees will
%be correct to place in the freespace of them in parents cromosomes
while (L_subtreeMa(i,1) > freeSpacePa(i)) || (L_subtreePa(i,1) > freeSpaceMa(i
))

    crosspoint_pa(i,:) = operatorPosition{pa(i)}(ceil(Nop(pa(i))*rand() ,:);

    if Nop(pa(i))==1
        aux1=ceil(2*rand());
        if aux1==1
            crosspoint_pa(i,:) = [2,1];
        else
            crosspoint_pa(i,:) = [2,step_inL(2)+1];
        end;
    else
        while crosspoint_pa(i,1) == 1
            crosspoint_pa(i,:) = operatorPosition{pa(i)}(ceil(Nop(pa(i))*rand
            ()),:);
        end;
    end;

    if Nop(pa(i))==1
        L_subtreePa(i,2) = 1;
    else
        L_subtreePa(i,2) = 2^( depth+1 - crosspoint_pa(i,1) );
    end;
    L_subtreePa(i,1) = 0;

    for r = crosspoint_pa(i,1):depth+1
        flag = 0;
        for c = crosspoint_pa(i,2):crosspoint_pa(i,2)+L_subtreePa(i,2)-1
            if ( op(r,c,pa(i)) ) ~= 0
                flag = flag+1;
            end;
        end;
    end;
end;

```

```

        end;
        if flag ~=0
            L_subtreePa(i,1) = L_subtreePa(i,1) + 1;
        end;
    end;
    freeSpacePa(i) = depth+1-crosspoint_pa(i,1)+1;
end;

end;

% 3.2 Mating the non linear population

for i = 1:M

    % Generate the offspring keep + ix(i)

    % take the Ma cromosome
    popNL(:, :, keep+ix(i)) = popNL(:, :, ma(i));
    op(:, :, keep+ix(i)) = op(:, :, ma(i));

    % delete the subtree from the crossover point in Ma cromosome
    for r = crosspoint_ma(i,1):crosspoint_ma(i,1)+L_subtreeMa(i,1)-1
        for c = crosspoint_ma(i,2):crosspoint_ma(i,2)+L_subtreeMa(i,2)-1
            popNL{r, c, keep+ix(i)} = [];
            op(r, c, keep+ix(i)) = 0;
        end;
    end;

    % take the subtree from Pa and place in Ma
    ii = crosspoint_pa(i,1);
    for r = crosspoint_pa(i,1):crosspoint_pa(i,1)+L_subtreePa(i,1)-1
        jj = crosspoint_ma(i,2);
        aux1 = 2^( depth+1-r );
        aux2 = 2^( depth+1-ii );
        for c = crosspoint_pa(i,2):aux1:crosspoint_pa(i,2)+L_subtreePa(i,2)-1
            if op(r, c, pa(i)) ~=0
                popNL{ii, jj, keep+ix(i)} = popNL{r, c, pa(i)};
                op(ii, jj, keep+ix(i)) = op(r, c, pa(i));
            end;
            jj = jj + aux2;
        end;
        ii = ii+1;
    end;
end;

% Generate the offspring keep + ix(i) + 1

% take the Pa cromosome
popNL(:, :, keep+ix(i)+1) = popNL(:, :, pa(i));
op(:, :, keep+ix(i)+1) = op(:, :, pa(i));

% delete the subtree from the crossover point in Pa cromosomes
for r = crosspoint_pa(i,1):crosspoint_pa(i,1)+L_subtreePa(i,1)-1
    for c = crosspoint_pa(i,2):crosspoint_pa(i,2)+L_subtreePa(i,2)-1
        popNL{r, c, keep+ix(i)+1} = [];
        op(r, c, keep+ix(i)+1) = 0;
    end;
end;

% take the subtree from Ma and place in Pa

```

```

    ii = crosspoint_pa(i,1);
    for r = crosspoint_ma(i,1):crosspoint_ma(i,1)+L_subtreeMa(i,1)-1
        jj = crosspoint_pa(i,2);
        aux1 = 2^( depth+1-r );
        aux2 = 2^( depth+1-ii );
        for c = crosspoint_ma(i,2):aux1:crosspoint_ma(i,2)+L_subtreeMa(i,2)-1
            if op(r,c,ma(i))~=0
                popNL{ii,jj,keep+ix(i)+1} = popNL{r,c,ma(i)};
                op(ii,jj,keep+ix(i)+1) = op(r,c,ma(i));
            end;
            jj = jj + aux2;
        end;
        ii = ii+1;
    end;

end;

end;

%-----
%                               FUNCTION FOR MUTATION OPERATION
%-----

function [] = fGP_mutationPop()

    global nmut;
    global popsize;
    global N_lvar;
    global CLset;
    global Fset;
    global L_fset;
    global prob;
    global cumprob;
    global probl;
    global cumprobl;
    global Tset;
    global L_tset;
    global CNLset;
    global nmutNL;
    global depth;
    global step_inL;
    global op;
    global popL;
    global popNL;

    %% 1. Mutation of the Nonlinear part
    %-----
    popNL_mutated = zeros(nmutNL,1);           % mutated population
    operatorPosition = cell(nmutNL,1);         % operator's position
    Nop = zeros(nmutNL,1);                    % Number of operators
    mutationPoint = zeros(nmutNL,2);          % [row col]
    freeSpace_subtreeMut = zeros(nmutNL,1);    % free rows to the new subtree

    L_mutsubtree = zeros(nmutNL,2);
    mut_subtreeNL = cell(nmutNL,1);
    mut_op = cell(nmutNL,1);
    %%
    for i = 1: nmutNL

```

```

% 1.1 Select the individual to be mutated
%-----
popNL_mutated(i) = ceil( rand()*popsize );

% Review if the individual has been selected previously
aux1 = 0;
for j = 1:nmutNL
    if popNL_mutated(i) == popNL_mutated(j)
        aux1 = aux1+1;
    end;
end;

% while the individual is repeted
while aux1>1
    % choose a new individual for mutation
    popNL_mutated(i) = ceil( rand()*popsize );

    % Review if the individual has been selected previously
    aux1 = 0;
    for j = 1:nmutNL
        if popNL_mutated(i) == popNL_mutated(j)
            aux1 = aux1+1;
        end;
    end;
end;

end;

%%
for i = 1: nmutNL
    % 1.2 Select the mutation point
    %-----
    % Find the position and number of operators in the tree
    [row_op, col_op] = find( op( :, :, popNL_mutated(i) ) == 1 );
    operatorPosition{i,1} = horzcat( row_op, col_op );
    [Nop(i), ~] = size( operatorPosition{i} );

    if Nop(i)==1 % if there is only one operator

        % choose randomly a terminal
        aux1=ceil(2*rand());

        if aux1==1
            mutationPoint(i,:) = [2,1];
        else
            mutationPoint(i,:) = [2,step_inL(2)+1];
        end;

    else
        % choose randomly an operator
        mutationPoint(i,:) = operatorPosition{i}(ceil(Nop(i)*rand()),:);

        % while the operator chosen is the first, choose other one
        while (mutationPoint(i,1) == 1) && (mutationPoint(i,2) == 1)
            mutationPoint(i,:) = operatorPosition{i}(ceil(Nop(i)*rand()),:);
        end;

    end;

end;

```

```

%% 1.3 Compute the free space for the mutated subtree
%-----
freeSpace_subtreeMut(i) = depth+1-mutationPoint(i,1)+1;

end;
%%
for k=1:nmutNL
    %%
    % 1.4 Create the space for the new subtree
    %-----
    % possibles lengths for the new subtree
    aux1 = 2:freeSpace_subtreeMut(k);

    % choose randomly the length of the new subtree
    L_mutsubtree(k,1) = aux1(ceil(rand()*length(aux1)));

    % compute the necessarily number of columns
    L_mutsubtree(k,2) = 2^(L_mutsubtree(k,1)-1);

    % create the space for the new subtree
    mut_subtreeNL{k} = cell(L_mutsubtree(k,1),L_mutsubtree(k,2));
    mut_op{k} = zeros(L_mutsubtree(k,1),L_mutsubtree(k,2));

    % 1.5 Generate randomly the new subtree
    %-----
    % set an Operator for the first level
    mut_op{k}(1,1)= 1;
    mut_subtreeNL{k}(1,1) = Fset(ceil(L_fset*rand()));

    oppos_prevL = 1; % operator position's in the previous level

    for i = 2:L_mutsubtree(k,1)

        Nop_inL = 0; % number of operators in the current level

        %-----
        % CASE OF LENGTH OF MUTATED SUBTREE EQUAL TO 2
        % the terminals are variables or constant values
        %-----
        if L_mutsubtree(k,1) == 2
            %
            colter = oppos_prevL; % column to place a terminal
            terminal = rand(1,2); % choose var||cte

            % choose the terminal using the Cumulative Probability Distribution
            for j = 1:2 % two branches per operator
                for jj = 1:length(prob1) % evaluate the CPD
                    if (terminal(jj) > cumprobl(jj)) && (terminal(jj) <= cumprobl(
                        jj+1))
                        mut_op{k}(i,colter) = jj+1; % choose (var=2)||(const=3)
                        %-----
                        if mut_op{k}(i,colter)==2 % 2 = var
                            mut_subtreeNL{k}(i,colter) = Tset(ceil(L_tset*rand())
                                );
                        elseif mut_op{k}(i,colter)==3 % 3 = constant
                            mut_subtreeNL{k}(i,colter) = cellstr(strcat(' ',
                                num2str(CNLset(1,1) + rand()*(CNLset(1,2)-CNLset
                                    (1,1))),')));
                        end;
                    end;
                end;
            end;
        end;
    end;

```

```

%-----
colter = colter + 2^(L_mutsbtree(k,1)-2);
end;
end; % the asignment of one: var||const
end; % the assigation of terminals in the correspinding level
end; % end the creation of level 1

%-----
% CASE THE LENGTH OF MUTATED SUBTREE BE DIFFERENT TO 2
% terminals can be operator||variable||constant
%-----

if (L_mutsbtree(k,1) ~= 2) && (i < L_mutsbtree(k,1))

while Nop_inL == 0 % there isn't operator in the current level

% create two branches and place in the corresponding
% position according to the last level operators position

for n = 1:length(oppos_prevL) % opNum_prevL
colter = oppos_prevL(n); % column to place a terminal
terminal = rand(1,2); % chose randoonly the terminals
kind
for j = 1:2 % two branches per operator
for jj = 1: length(prob) % evaluate the CPD
if (terminal(j) > cumprob(jj)) && ( terminal(j) <=
cumprob(jj+1) )
mut_op{k}(i, colter) = jj;
%-----
if mut_op{k}(i, colter)==1 % op
mut_subtreeNL{k}(i, colter) = Fset( ceil(L_fset
*rand() ) );
elseif mut_op{k}(i, colter)==2 % var
mut_subtreeNL{k}(i, colter) = Tset( ceil(L_tset
*rand() ) );
elseif mut_op{k}(i, colter)==3 % const
mut_subtreeNL{k}(i, colter) = cellstr(strcat('
', num2str( CNLset(1,1) + rand()*(CNLset
(1,2)-CNLset(1,1)) ),')));
end;
%-----
colter = colter + 2^(L_mutsbtree(k,1)-i);
end;
end; % the asignment of one: op||var||const
end; % the assigation of terminals in the correspinding level
end; % end the creation of actual level

% because the depth is less than the depthK, it is necessary
% to check if there is at least one operator
[~, oppos_inL] = find( mut_op{k}(i, :) == 1 );

if isempty(oppos_inL) == 0
Nop_inL = length(oppos_inL); % #operators in the current
level
oppos_prevL = oppos_inL; % position of the operators
end;
end; % do... while opNum_inL == 0
end; % the evaluation if depth_k ~= 1 && level < depth_k

```

```

%-----
%      CASE THE LENGTH OF MUTATED SUBTREE BE EQUAL TO L_SUBTREE
%      the terminal only can be variables||constants
%-----

if i == L_mutsubtree(k,1)
    for n = 1:length(oppos_prevL) %opNum_prevL
        colter = oppos_prevL(n);
        terminal = rand(1,2); %choose the terminals kind
        for j = 1:2 %two branches per operator
            for jj = 1: length(prob1)
                if (terminal(j) > cumprob1(jj)) && ( terminal(j) <=
                    cumprob1(jj+1) )
                    mut_op{k}(i, colter) = jj+1;
                    %-----
                    if mut_op{k}(i, colter)==2
                        mut_subtreeNL{k}(i, colter) = Tset( ceil(L_tset*
                            rand() ) );
                    elseif mut_op{k}(i, colter)==3
                        mut_subtreeNL{k}(i, colter) = cellstr(strcat('(',
                            num2str( CNLset(1,1) + rand()*(CNLset(1,2)-
                                CNLset(1,1)) ),')'));
                    end;
                    %-----
                    colter = colter + 2^(L_mutsubtree(k,1)-i);
                end;
            end; %the asignation of one: op||var||const
        end; %the assignation of terminals in the corresponding level
    end; %end the creation of actual level
end; %the evaluation if depth_k == 1 && level < depth_k
end; %for depthK(k)

end;

%% 1.6 Place the new subtree in the mutation point
%-----

for i=1:nmutNL

    %delete the old subtree in the 'op' and 'popNL' GP variables
    for r = mutationPoint(i,1):depth+1
        for c = mutationPoint(i,2):step_inL(r):mutationPoint(i,2)+step_inL(
            mutationPoint(i,1))-1
            op(r,c,popNL_mutated(i))=0;
            popNL{r,c,popNL_mutated(i)}=[];
        end;
    end;

    %place the new subtree in the 'op' and 'popNL' GP variables
    ii = mutationPoint(i,1);

    for r = 1:L_mutsubtree(i,1)
        jj = mutationPoint(i,2);
        for c = 1:2^(L_mutsubtree(i,1)-r):L_mutsubtree(i,2)
            op(ii,jj,popNL_mutated(i)) = mut_op{i}(r,c);
            popNL{ii,jj,popNL_mutated(i)} = mut_subtreeNL{i}{r,c};
            jj = jj + step_inL(ii);
        end;
    end;
end;

```

```

        ii = ii+1;
    end;
end;

%% 2. Mutation of the Linear part
%-----
mrow = sort( ceil( rand(1,nmut)*(popsize-1) ) + 1 );
mcol = ceil( rand(1,nmut)*N_lvar );

for i=1:nmut
    if mcol(i) == 1
        popL(mcol(i),mrow(i)) = (CLset(1,2)-CLset(1,1))*rand + CLset(1,1);
    elseif mcol(i) == 2
        popL(mcol(i),mrow(i)) = (CLset(2,2)-CLset(2,1))*rand + CLset(2,1);
    end;
end;
end;

%-----
%                               SYSTEM SOLUTION FUNCTION
%-----
% Solve the system expression given by the 'popStr function'

function [xe,ve,ae] = f_systemSolution(t,popi)

    X = [-1 10.2];           % initial conditions [x,v]

    h = t(2)-t(1);         % sample period
    L = length(t);         % length of the time data
    Lsys = length(X);      % order of the system

    xe = zeros(L,1);       % [estimated position]
    ve = zeros(L,1);       % [estimated velocity]
    ae = zeros(L,Lsys/2);  % [estimated acceleration]

    omega = 0.1526*2*pi;
    for i = 1:L
        X = f_RungeKutta(t(i),X,h,popi);

        xe(i) = X(1);
        ve(i) = X(2);
        ae(i,1) = eval( char(popi) );
    end;

end

%-----
%                               FUNCTION OF THE RUNGE KUTTA METHOD
%-----
function dX = f_RungeKutta(t,X,h,popi)

    l = length(X);

    x = X;
    K(:,1) = f_system(t,x,popi);

    for i=1:l
        x(i) = X(i)+K(i,1)*(h/2);
    end;
end;

```

```

K(:,2) = f_system(t+(h/2),x,popi);

for i=1:l
    x(i) = X(i)+K(i,2)*(h/2);
end;
K(:,3) = f_system(t+(h/2),x,popi);

for i=1:l
    x(i) = X(i)+K(i,3)*h;
end;
K(:,4) = f_system(t+h,x,popi);

dX = X*0;
for i = 1:l
    dX(i) = X(i) + (h/6)*( K(i,1) + 2*K(i,2) + 2*K(i,3) + K(i,4) );
end;

end

%-----
%                FUNCTION TO EVALUATE THE SYSTEM EXPRESSION
%-----
function K = f_system(t,X,popi)

    omega = 0.1526*2*pi;

    K(1) = X(2);
    K(2) = eval( char(popi) );

end

%-----
%                DISPLAY OF THE RESULTS
%-----
function f_DisgAdata(nvar,popsize,selection,mutrate,maxit,mincost,iga,bestcost,
    bestpop)

    disp('PARAMETERS_OF_THE_CONTINUOUS_GENETIC_ALGORITHM');
    disp('-----');
    disp(['#var = ' num2str(nvar)]);
    disp(['Population_size = ' num2str(popsize)]);
    disp(['Selection_rate = ' num2str(selection)]);
    disp(['Mutation_rate = ' num2str(mutrate)]);
    disp(['Max_iterations = ' num2str(maxit)]);
    disp(['Min_cost = ' num2str(mincost)]);
    disp('-----');

    disp('.....BEST_SOLUTION');
    disp('-----');
    disp(['No. of generations = ' num2str(iga)]);
    disp(['Best_cost = ' num2str(bestcost)]);
    disp(['Variable_values = ' bestpop]);

end

%-----
%                DISPLAY THE ORIGINAL DATA VS GA RESULTS
%-----
function [i] = f_plotting2(t,x,v,xv,ve,i)

```

```

% Phase diagram
figure (i)
plot(x,v,'k',xe,ve,'b');
xlabel('\it{x_0}','FontName','Times_New_Roman','FontSize',12);
ylabel('\it{dx/dt}','FontName','Times_New_Roman','FontSize',12);
LG=legend('Datos','AG',1);
LEG = findobj(LG,'type','text');
set(LEG,'FontName','Times_New_Roman','FontSize',10)

% position
i=i+1;
figure (i)
plot(t,x,'k',t,xe,'b');
xlabel('\it{t}_\rm{[s]}','FontName','Times_New_Roman','FontSize',12);
ylabel('\it{x_0}','FontName','Times_New_Roman','FontSize',12);
LG=legend('Datos','AG',1);
LEG = findobj(LG,'type','text');
set(LEG,'FontName','Times_New_Roman','FontSize',10)

% FFT of the displacement
Fs = 1/( t(2)-t(1) );
L =length(t);
NFFT = 2^nextpow2(L);
f = Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2+1);
xFFT = fft( x )/L;
xeFFT = fft( xe )/L;

i=i+1;
figure (i)
plot(f,2*abs(xFFT(1:NFFT/2+1)), 'k', f, 2*abs(xeFFT(1:NFFT/2+1)), 'b');
xlabel('\it{f}_\rm{[Hz]}','FontName','Times_New_Roman','FontSize', 12);
ylabel('\it{Y}_\rm{(}\it{f}_\rm{)}','FontName','Times_New_Roman',
FontSize', 12);
axis([0 10 0 1.6]);
LG=legend('Datos','AG',1);
LEG = findobj(LG,'type','text');
set(LEG,'FontName','Times_New_Roman','FontSize',10)

i=i+1;
end

%-----
% DISPLAY THE COST EVOLUTION
%-----
function [i] = f_plotting3(minc,meanc,i)

iters = 0:length(minc)-1;

% Minimum cost
figure(i)
plot(iters,minc,'k');
xlabel('Generaci\on','FontName','Times_New_Roman','FontSize', 12);
ylabel('Costo','FontName','Times_New_Roman','FontSize', 12);
i=i+1;

% Mean cost
figure(i)
plot(iters,meanc,'k');

```

```

xlabel( 'Generaci\on', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 12);
ylabel( 'Costo', 'FontName', 'Times_New_Roman', 'FontSize', 12);

i=i+1;
end

function [CC,MSE] = f_costBestSol(t,x,x_est)

% x — experimental data, column vector
% x_est — approximated solution using the GA

%% Evaluate in the frequency domain
%-----
L = length(t);           % length of data
NFFT = 2^nextpow2(L);   % number of points for the fft

% FFT of data
FFT1 = fft( x,NFFT )/L;           % FFT of experimental data
FFTdata = 2*abs(FFT1(1:NFFT/2+1)); % absolute value of the fft
FFTdata = FFTdata/norm(FFTdata); % normalization

% FFT of the best solution
FFT1 = fft( x_est,NFFT )/L;           % FFT of estimated data
FFTx_est = 2*abs(FFT1(1:NFFT/2+1)); % absolute value of the fft
FFTx_est = FFTx_est/norm(FFTx_est); % normalization

% Mean Squared Error
MSE(1) = sum( (FFTdata-FFTx_est).^2 ) /L;

% Correlation factor
a1 = L*sum( FFTdata.*FFTx_est ) - sum(FFTdata)*sum(FFTx_est);
a2 = sqrt( L*sum(FFTdata.^2) - sum(FFTdata)^2 )*sqrt( L*sum(FFTx_est.^2) - sum(
    FFTx_est.^2 ) );
CC(1) = a1/a2;

%% Evaluate in the time domain
%-----

% Mean Squared Error
MSE(2) = sum( (x-x_est).^2 ) /L;

% Correlation factor
a1 = L*sum( x.*x_est ) - sum(x)*sum(x_est);
a2 = sqrt( L*sum(x.^2) - sum(x)^2 )*sqrt( L*sum(x_est.^2) - sum(x_est)^2 );
CC(2) = a1/a2;

end

function f_DoTxt(fileName , folderName , t , xe , ve , ae , minc , meanc , bestpop , popsize , selection ,
    mutrate , maxit , mincost , CC,MSE)

%%
folderName = uigetdir;
folderName = strcat(folderName , '\');
fileName = input( 'Ingresa_nombre_para_el_archivo:_', 's' );
%%
Lt = length(t);
[~,Lcost] = size(minc);

%-----

```


Bibliografía

- Abbes, M. S., Trigui, M., Chaari, F., Fakhfakh, T., and Haddar, M. (2010). Dynamic behaviour modelling of a flexible gear system by the elastic foundation theory in presence of defects. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 29(5):887–896.
- Albert, R. and Barabási, A.-L. (2002). Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74(1):47–97.
- Alonge, F., Raimondi, F., Ferrante, G., and D’Ippolito, F. (1998). Parameter identification of induction motor model using genetic algorithms. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 145(6):587–593.
- Arslan, Ö., Aykan, M., and Nevzat Özgüven, H. (2011). Parametric identification of structural nonlinearities from measured frequency response data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(4):1112–1125.
- Barrón, M. and Sen, M. (2009a). Synchronization of four coupled van der Pol oscillators. *Nonlinear Dynamics*, pages 1–31.
- Barrón, M. A. and Sen, M. (2009b). Synchronization of coupled self-excited elastic beams. *Journal of Sound and Vibration*, 324(1-2):209–220.
- Barron, M. A. and Sen, M. (2014). Synchronization of temperature oscillations in heated plates with hysteretic on-off control. *Applied Thermal Engineering*, 65(1-2):337–342.
- Bonori, G., Barbieri, M., and Pellicano, F. (2008). Optimum profile modifications of spur gears by means of genetic algorithms. *Journal of Sound and Vibration*, 313(3-5):603–616.
- Bozca, M. (2010). Torsional vibration model based optimization of gearbox geometric design parameters to reduce rattle noise in an automotive transmission. *Mechanism and Machine Theory*, 45(11):1583–1598.

- Breakspear, M., Heitmann, S., and Daffertshofer, A. (2010). Generative models of cortical oscillations: neurobiological implications of the kuramoto model. *Frontiers in human neuroscience*, 4(November):190.
- Bureau, E., Schilder, F., Elmegård, M., Santos, I. F., Thomsen, J. J., and Starke, J. (2014). Experimental bifurcation analysis of an impact oscillator-Determining stability. *Journal of Sound and Vibration*, 333(21):5464–5474.
- Byrtus, M. and Zeman, V. (2011). On modeling and vibration of gear drives influenced by nonlinear couplings. *Mechanism and Machine Theory*, 46(3):375–397.
- Cai, W. and Sen, M. (2008). Synchronization of thermostatically controlled first-order systems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51(11-12):3032–3043.
- Cai, W., Sen, M., Yang, K. T., and McClain, R. L. (2006). Synchronization of self-sustained thermostatic oscillations in a thermal-hydraulic network. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(23-24):4444–4453.
- Carbonelli, A., Perret-Liaudet, J., Rigaud, E., and Le Bot, A. (2011). Particle Swarm Optimization as an Efficient Computational Method in order to Minimize Vibrations of Multimesh Gears Transmission. *Advances in Acoustics and Vibration*, 2011:1–6.
- Chen, Y. M. and Liu, J. K. (2009). Uniformly valid solution of limit cycle of the Duffing-van der Pol equation. *Mechanics Research Communications*, 36(7):845–850.
- Cheng, R., Peng, M., and Yu, W. (2014). Pinning synchronization of delayed complex dynamical networks with nonlinear coupling. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 413:426–431.
- Cho, S., Choi, J., Choi, J. H., and Rhim, S. (2015). Numerical estimation of dynamic transmission error of gear by using quasi-flexible-body modeling method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29(7):2713–2719.
- Dörfler, F. and Bullo, F. (2011). On the Critical Coupling for Kuramoto Oscillators. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 10(3):1070–1099.
- Faggioni, M., Samani, F. S., Bertacchi, G., and Pellicano, F. (2011). Dynamic optimization of spur gears. *Mechanism and Machine Theory*, 46(4):544–557.
- Feldman, M. (2011). Hilbert transform in vibration analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(3):735–802.

- Frank Pai, P. (2007). Nonlinear vibration characterization by signal decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 307(3-5):527–544.
- Gao, R. and Yan, R. (2006). Non-stationary signal processing for bearing health monitoring. *International Journal of Manufacturing*
- Giagopoulos, D., Salpistis, C., and Natsiavas, S. (2006). Effect of non-linearities in the identification and fault detection of gear-pair systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(2):213–230.
- G. Lin (2007). Periodic solutions for van der Pol equation with time delay. *Applied Mathematics and Computation*, 187(2):1187—1198.
- Gondhalekar, a. C., Petrov, E. P., and Imregun, M. (2009). Parameters Identification for Nonlinear Dynamic Systems Via Genetic Algorithm Optimization. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 4(4):041002.
- González-Cruz, C. A., Jáuregui-Correa, J. C., López-Cajún, C., Sen, M., and Domínguez-González, A. (2015). Experimental analysis of synchronization and dynamics in an automobile as a complex system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 60:472–484.
- Harris, O. J., Douglas, B. M., James, B. M., Woolley, A. M., and Lack, L. W. (2009). Predicting the effects of transmission housing flexibility and bearing stiffness on gear mesh misalignment and transmission error. In *Proceedings of the 2nd MSC Worldwide Automotive Conference*.
- Harris, T. (2001). *Rolling Bearings Analysis*. Wiley, New york, USA.
- Hasiewicz, Z. (2001). Non-parametric estimation of non-linearity in a cascade time-series system by multiscale approximation. *Signal Processing*, 81(4):791–807.
- He, W., Jiang, Z., and Qin, Q. (2010). A joint adaptive wavelet filter and morphological signal processing method for weak mechanical impulse extraction. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 24(8):1709–1716.
- Hu, H. (2006). Solutions of the Duffing-harmonic oscillator by an iteration procedure. *Journal of Sound and Vibration*, 298(1-2):446–452.
- Huang, N. E. N., Shen, Z., Long, S., Wu, M., Shih, H., ZHENG, Q., YEN, N.-C. N., Tung, C., Liu, H. H., SHEN Z, SR, L., MC, W., SHIN, H., ZHENG, Q., YEN, N.-C. N., CC, T., and Liu, H. H. (1998). The empirical mode decomposition and the

- Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 454(1971):903–995.
- Huang, Q., Jiang, D., Hong, L., and Ding, Y. (2008). Application of Wavelet Neural Networks on Vibration. In Sun, F., Zhang, J., Tan, Y., Cao, J., and Yu, W., editors, *Advances in Neural Networks*, chapter Applicatio, pages 313–320. Springer.
- J. P. Den Hartog (2007). *Mechanical Vibrations*. McGraw Hill, N.Y., USA.
- Jang, T. (2011). Non-parametric simultaneous identification of both the nonlinear damping and restoring characteristics of nonlinear systems whose dampings depend on velocity alone. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(4):1159–1173.
- J. Angeles (2007). *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods, and Algorithms*. Springer. ISBN 978-0-387-29412-4, Montreal, Quebec, Canada.
- Jáuregui, J. C., San Andrés, L., and De Santiago, O. (2012). GT2012-69980. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2012*, pages 1–7, Copenhagen, Hovedstaden, Denmark.
- Jauregui-correa, J. C. (2013). The effect of nonlinear traveling waves on rotating machinery. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 39:129–142.
- Jauregui-Correa, J. C. and Gonzalez Brambila, O. (2009). *Mechanical Vibrations of Discontinuous Systems*. Nova Science Publishers, New York, USA.
- Jauregui-Correa, J. C., Sen, M., and López-Cajún, C. (2011). Experimental characterization of blade vibration synchronization. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2011*.
- Jiang, W. and Wei, J. (2008). Bifurcation analysis in van der Pol’s oscillator with delayed feedback. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 213(2):604–615.
- Kerschen, G., Worden, K., Vakakis, A. F., and Golinval, J.-C. (2006). Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(3):505–592.
- Korkmaz, S. (2011). A review of active structural control: challenges for engineering informatics. *Computers & Structures*, 89(23-24):2113–2132.
- Kovacic, I. (2011). On the motion of a generalized van der Pol oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(3):1640–1649.

- Kulkarni, P. G. and Sahasrabudhe, A. D. (2014). A dynamic model of ball bearing for simulating localized defects on outer race using cubic hermite spline. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 28(9):3433–3442.
- Kuramoto, Y. (1975). Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In *H. Araki (Ed.), Lecture Notes in Physics, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, 39*, New York, USA. Springer-Verlag.
- Kuramoto, Y. (1984). *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer-Verlag, New York, NY.
- Li, Z., Yan, X., Tian, Z., Yuan, C., Peng, Z., and Li, L. (2012). Blind vibration component separation and nonlinear feature extraction applied to the nonstationary vibration signals for the gearbox multi-fault diagnosis. *Measurement*.
- Liu, B. (2005). Selection of wavelet packet basis for rotating machinery fault diagnosis. *Journal of Sound and Vibration*, 284(3-5):567–582.
- Loutridis, S. (2004). Damage detection in gear systems using empirical mode decomposition. *Engineering Structures*, 26(12):1833–1841.
- Luo, A. C. and Min, F. (2011). Synchronization dynamics of two different dynamical systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 44(6):362–380.
- Manrubia, S. C., Mikhailov, A. S., and Zanette, D. H. (2004). *Emergence of Dynamical Order: Synchronization Phenomena in Complex Systems*. World Scientific, New Jersey.
- Marano, G. C., Quaranta, G., and Monti, G. (2011). Modified Genetic Algorithm for the Dynamic Identification of Structural Systems Using Incomplete Measurements. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 26(2):92–110.
- Masri, S. F. (1994). A hybrid parametric/nonparametric approach for the identification of nonlinear systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 9(1-2):47–57.
- Mazzilli, C. E., Sanches, C. T., Baracho Neto, O. G., Wiercigroch, M., and Keber, M. (2008). Non-linear modal analysis for beams subjected to axial loads: Analytical and finite-element solutions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43(6):551–561.

- Mendi, F., Baskal, T., Boran, K., and Boran, F. E. (2010). Optimization of module, shaft diameter and rolling bearing for spur gear through genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 37(12):8058–8064.
- Nagarajaiah, S. and Basu, B. (2010). Output only modal identification and structural damage detection using time frequency & wavelet techniques. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 8(4):583–605.
- Novara, C., Vincent, T., Hsu, K., Milanese, M., and Poolla, K. (2011). Parametric identification of structured nonlinear systems. *Automatica*, 47(4):711–721.
- O'Brien, J. and Sen, M. (2011). Temperature synchronization, phase dynamics and oscillation death in a ring of thermally-coupled rooms. In *Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, pages 73–82, Denver, CO.
- Ognjanovic, M. and Benur, M. (2010). Experimental research for robust design of power transmission components. *Meccanica*, 46(4):699–710.
- Ott, E. and Antonsen, T. M. (2008). Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. *Chaos (Woodbury, N.Y.)*, 18(3):037113.
- Park, S.-G., Sim, H.-J., Lee, H.-J., and Oh, J.-E. (2009). Application of non-stationary signal characteristics using wavelet packet transformation. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 22(11):2122–2133.
- Peifer, M., Timmer, J., and Voss, H. (2003). Non-parametric identification of non-linear oscillating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 267(5):1157–1167.
- Pérez-Canales, D., Álvarez-Ramírez, J., Jáuregui-Correa, J. C., Vela-Martínez, L., and Herrera-Ruiz, G. (2011). Identification of dynamic instabilities in machining process using the approximate entropy method. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 51(6):556–564.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., and Kurths, J. (2003). *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University press, Cambridge.
- Pintelon, R., Vandersteen, G., Schoukens, J., and Rolain, Y. (2011). Improved (non-)parametric identification of dynamic systems excited by periodic signals-The multivariate case. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(8):2892–2922.

-
- Poli, R., Langdon, W. B., MeePhee, N. F., and Koza, John, R. (2008). *A Fiel Guide to Genetic Programing*. England, U.K.
- P.S. Diniz and E.A. Da Silva and S.L. Netto (2002). *Digital Signal Processing: System Analysis and Design*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- Rafiee, J., Rafiee, M., and Tse, P. (2010). Application of mother wavelet functions for automatic gear and bearing fault diagnosis. *Expert Systems with Applications*, 37(6):4568–4579.
- Rudinger, F. and Krenk, S. (2001). Non-parametric system identification from non-linear stochastic response. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16:233–243.
- Savsani, V., Rao, R., and Vakharia, D. (2010). Optimal weight design of a gear train using particle swarm optimization and simulated annealing algorithms. *Mechanism and Machine Theory*, 45(3):531–541.
- Setter, E. and Bucher, I. (2011). Flexural vibration patterning using an array of actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 330(6):1121–1140.
- Sevilla-Camacho, P. Y., Herrera-Ruiz, G., Robles-Ocampo, J. B., and Jáuregui-Correa, J. C. (2010). Tool breakage detection in CNC high-speed milling based in feed-motor current signals. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 53(9-12):1141–1148.
- Shearer, B. K., Gardner, J., and L. J. (2007). *Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems*. Cambridge University press, New York, USA.
- Singh, S., Howard, C. Q., and Hansen, C. H. (2015). An extensive review of vibration modelling of rolling element bearings with localised and extended defects. *Journal of Sound and Vibration*, 357:300–330.
- Strogatz, S. (2003). *Synchronization: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Theia, New York.
- Strogatz, S. H. (2000). From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1-4):1–20.
- Su, Z., Zhang, Y., Jia, M., Xu, F., and Hu, J. (2011). Gear fault identification and classification of singular value decomposition based on Hilbert-Huang transform. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25(2):267–272.

- Subudhi, B. and Jena, D. (2011). A differential evolution based neural network approach to nonlinear system identification. *Applied Soft Computing*, 11(1):861–871.
- Torres, I., Jáuregui, J. C., García, R., and León, A. (2010). Método de Diseño Dinámico Integral de Reductores de Velocidad. In *Memorias del XVII Congreso Internacional Anual De La SOMIM*.
- Wang, G. F., Li, Y. B., and Luo, Z. G. (2009a). Fault classification of rolling bearing based on reconstructed phase space and Gaussian mixture model. *Journal of Sound and Vibration*, 323(3-5):1077–1089.
- Wang, Q., Perc, M., Duan, Z., and Chen, G. (2009b). Synchronization transitions on scale-free neuronal networks due to finite information transmission delays. *Physical Review E*, 80(2):026206.
- Wei, J., Gao, P., Hu, X., Sun, W., and Zeng, J. (2014). Effects of dynamic transmission errors and vibration stability in helical gears. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 28(6):2253–2262.
- Wu, X., Xu, C., and Feng, J. (2015). Complex projective synchronization in drive-response stochastic coupled networks with complex-variable systems and coupling time delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 20(3):1004–1014.
- Yang, J. (2013). Vibration analysis on multi-mesh gear-trains under combined deterministic and random excitations. *Mechanism and Machine Theory*, 59:20–33.
- Yang, S. and Shen, Y. (2009). Recent advances in dynamics and control of hysteretic nonlinear systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(4):1808–1822.
- Zhao, C., Wen, B., and Zhang, X. (2010). Synchronization of the four identical unbalanced rotors in a vibrating system of plane motion. *Science China Technological Sciences*, 53(2):405–422.