



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN ESTUDIOS DE POSGRADO**



# **Diseño y análisis de moldes para inyección de plástico aplicando vibración**

**Tesis**

**Que como parte de los requisitos para obtener el grado de**

**Doctor en Ingeniería**

**Presenta:**

**Juan Primo Benitez Rangel**

**Junio de 2009**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

**Diseño y análisis de moldes para inyección de plástico aplicando vibración**

**TESIS**

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Doctor en Ingeniería

**Presenta:**

Juan Primo Benitez Rangel

**Dirigido por:**

Dr. Aurelio Domínguez González

**SINODALES**

Dr. Aurelio Domínguez González

Presidente

Dr. Gilberto Herrera Ruiz

Secretario

Dr. Iván R. Terol Villalobos

Vocal

Dr. René de Jesús Romero Troncoso

Suplente

Dr. Roque A. Osornio Ríos

Suplente

Dr. Gilberto Herrera Ruiz

Director de la Facultad de Ingeniería

Firma

Firma

Firma

Firma

Firma

Dr. Luis Gerardo Hernández Sandoval

Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario  
Querétaro, Qro.  
Junio 2009  
México

## **Dedicatoria**

**A mis padres.**

## **Agradecimientos**

Hay muchas personas e instituciones que directa o indirectamente me ayudaron este trabajo, a todos ellos mi profundo agradecimiento.

De manera particular quiero agradecer primeramente a mi asesor, el Dr. Aurelio Domínguez, por haberme invitado y convencido a vivir esta experiencia. También quiero agradecer Dr. Ivan Terol, miembro de mi jurado, de quien he recibido ayuda y buenos consejos desde la maestría, donde fue mi director. Un gran agradecimiento al Dr. Rene Troncoso y al Dr. Roque Osornio, por su apoyo y su dedicación para conmigo en la parte final de mi trabajo y por ser para mí el más cercano ejemplo de trabajo y dedicación. Muy especialmente al Dr. Gilberto Herrera por su incondicional apoyo en lo administrativo, lo académico y lo moral. A mis amigos Miguel, Luis, Manuel, José, Julián y mi compadre Manuel, por darme ánimo en todo momento y por su paciencia para conmigo. A Hoomar y Rebe porque para mí son mi única familia y de quien he recibido apoyo en todo momento.

Finalmente a la Universidad Autónoma de Querétaro, mi universidad, por su apoyo bajo el convenio 26/06 y al CONACYT por el apoyo recibido bajo la beca 208752.

## Resumen

Recientemente la industria de los plásticos ha crecido de manera sorprendente, sobre todo en las últimas décadas; por lo que es necesario estudiar nuevas técnicas que mejoren los procesos de manufactura de partes plásticas, como inyección y extrusión. Las mejoras al proceso se han visto en tres principales áreas, las máquinas de inyección, los moldes y los plásticos. Actualmente es posible mejorar el proceso de inyección por aditivos químicos como plastificantes, supresores de viscosidad, deslizantes, etc. Sin embargo, estos productos cambian las propiedades físicas de las partes moldeadas. También han surgido técnicas usando vibración, sin embargo hasta la fecha tales técnicas se han limitado a la modificación de la máquina de inyección, lo cual hace compleja su aplicación y encarece esta tecnología. Esta tesis presenta una nueva metodología para mejorar la inyección de plásticos a través del uso de vibración, aplicando la vibración en el molde. Más aún, el dispositivo de vibración se propone como un accesorio para el molde, por lo que se facilitará la aplicación tanto en nuevos moldes como en moldes existentes. Esta investigación se limita a mejorar la etapa de llenado del molde. Dentro del trabajo se presenta un análisis teórico de los fenómenos físicos necesarios para realizar la aplicación. Se incluye el diseño y fabricación de un molde experimental en el cual se acondiciono un mecanismo de vibración, los cuales permitieron demostrar las ventajas de la vibración en dicho proceso. Además, se propuso una metodología heurística para la elaboración de las pruebas. La investigación reveló que efectivamente existe una mejora en el llenado, mostrando un incremento cercano al 20% en frecuencias cercanas a los 3 Hz. Más aún, es posible concluir que entre más cercano sea el punto de aplicación de la vibración a la cavidad del molde, es posible aplicar dispositivos más sencillos y por ende más baratos.

**(Palabras clave:** Moldeo por inyección, llenado, reología, viscosidad vibración)

## Summary

The plastics industry has grown in a surprising way, mainly during the last decades, for this reason, it is necessary to study new techniques to improve the plastic manufacturing processes, such as injection mold and extrusion. Recent improvements to this process have been seen on three main areas: the injection machines, the molds and the plastics. Nowadays, it is possible to improve the injection process by chemical preservatives such as plastificants, viscosity suppressors, slidings, etc. These products change the physical properties of the molten parts though. Furthermore, vibration techniques have appeared. However, up to now, these techniques have been limited to the injection machine modification, which makes the use complex and the acquisition expensive. This thesis presents a new methodology to improve the plastic injection process through vibration, applying the vibration in the mold. Moreover, vibration is proposed as a device to be used in the mold, which will simplify its application in the new molds as well as in the current molds. This research is limited to improve the filling step of the molding process. As part of this work, a theoretical analysis of physical phenomena that takes part is presented. It includes the design and manufacturing of experimental devices as a rheometer and vibration apparatus, which allow to demonstrate the advantages of vibration on this kind of process. Furthermore, an heuristic methodology to make the experimental step was proposed. The research revealed that it does exist an improvement in the filling step, showing an increase of around 20% on frequencies close to 3Hz. Furthermore, it is possible to conclude that the closer the application point from the vibration to the mold cavity is, the simpler and cheaper the application devices are.

**(Key words:** Injection molding, filling step, rehology, viscosity, vibration)

# Contenido

Dedicatoria .....	iii
Agradecimientos.....	iv
Resumen .....	v
Summary.....	vi
Índice de Figuras .....	ix
Índice de Tablas.....	xi
1 Introducción.....	1
1.1 Enfoque y objetivos del proyecto de investigación.....	5
1.1.1 Objetivos particulares.....	5
1.2 Descripción de la tesis.....	6
2 Estado del arte .....	7
2.1 Ciclos del proceso de inyección.....	7
2.2 Reología de los plásticos.....	9
2.3 Clasificación de los plásticos.....	9
2.4 Condiciones térmicas de la inyección .....	11
2.5 Fluidos Newtonianos y no-Newtonianos.....	14
2.6 Cambio de fase .....	16
2.7 Leyes que interactúan en la etapa de llenado de un molde.....	17
2.7.1 Ecuaciones de Hele-Shaw .....	18
2.7.2 Ecuaciones de Navier-Stokes .....	19
2.7.3 Ley de Darcy .....	19
2.8 Técnicas para resolver ecuaciones de flujo y temperatura .....	20
2.8.1 El método de elemento finito.....	20
2.8.2 Elemento Finito / Diferencias Finitas (FE/DF) .....	21

2.8.3	Volumen de Control / Elemento Finito (CV/FEM).....	21
2.8.4	Galerkin discontinuo .....	22
2.8.5	Petrov – Galerkin.....	22
2.9	Fluidez y cambio de fase .....	23
2.10	Variables que influyen en la viscosidad .....	24
2.10.1	Variación de viscosidad por el efecto de velocidad .....	24
2.10.2	Variación de viscosidad por el efecto de la temperatura .....	25
2.10.3	Variación de viscosidad por efecto de la vibración.....	26
3	Metodología.....	28
3.1	Descripción del problema.....	28
3.2	Formulación matemática .....	29
3.2.1	Flujo.....	29
3.2.2	Ecuaciones de energía .....	37
3.3	Solución teórica (acoplamiento de ecuaciones).....	48
3.3.1	Desarrollo del experimento .....	48
3.4	Desarrollo experimental .....	52
4	Resultados y discusión .....	61
4.1	Reporte de pruebas experimentales .....	61
4.3	Reporte de modelación .....	64
4.4	Conclusiones.....	66
4.5	Prospectivas.....	68
	Referencias .....	70
	Apéndice A.....	79
	Apéndice B.....	87

# Índice de Figuras

<b>Figura</b>	<b>Página</b>
2.1. Pasos de un ciclo de inyección para polímeros termofijos.....	11
2.2. Pasos de un ciclo de inyección para polímeros termoplásticos.....	12
2.3. Perfil de temperatura de un ciclo de inyección para termoplásticos.....	13
2.4. Perfil de temperatura de un ciclo de inyección para termofijos.....	13
2.5. Perfil de velocidad para un fluido Newtoniano.....	15
2.6. Perfil de velocidad para un polímero fundido.....	15
2.7. Efecto de la velocidad en el ordenamiento de las partículas a) a bajas velocidades, cadenas enmarañadas, b) a mayores velocidades, cadenas orientadas.....	25
3.1. Espiral de Arquímedes con sección transversal circular.....	29
3.2. Mallado para solución en flujo y temperatura (mallado en COMSOL).....	37
3.3. Solución para el campo de flujo.....	37
3.4. Conducción uni-dimensional en un cuerpo aislado.....	41
3.5. Fronteras del flujo de calor en dirección $x$ .....	45
3.6. Solución para campo el de temperatura (graficado en °K).....	48
3.7. Diagrama de flujo del problema de acoplamiento.....	49
3.8. Estructura base (metros).....	50
3.9. Mallado de sección (148 elementos triangulares).....	50
3.10. Zonas de aplicación.....	50
3.11. Condiciones frontera.....	51
3.12. Diseño esquemático de montaje.....	53
3.13. Instalación del excitador sobre la boquilla de inyección.....	53
3.14. Componentes del excitador.....	54
3.15. Transmisor montado sobre la boquilla.....	54
3.16. Mecanismo de leva ajustable.....	56
3.17. Montaje de mecanismo generador con respecto al molde.....	56
3.18. Mecanismo leva-seguidor.....	57
3.19. Molde diseñado siguiendo la espiral de Arquímedes.....	58
3.20. Medición de longitud.....	59

3.21. Medición de peso.....	60
4.1. Muestras inyectadas en el molde de prueba. ....	61
4.2. Pruebas a distintas frecuencias. ....	62
4.3. Gráfica de desplazamientos entre experimentos hechos con vibración y sin ella. ....	63
4.4. Gráfica de pesos medidos en experimentos hechos con vibración y sin ella. ....	64
4.5. Comportamiento de viscosidad. ....	65
4.6. Comportamiento de temperatura. ....	66

## Índice de Tablas

<b>Tabla</b>	<b>Página</b>
4.1. Tabla de resultados experimentales para desplazamiento y peso.....	62
4.2. Tabla de mejoras en procesos en que se uso vibración. ....	63
4.3. Resultados experimentales de parámetros por zona de análisis. ....	65

# Capítulo I

---

## 1 Introducción

Hoy en día, con el avance de la tecnología y las computadoras, es posible simular el flujo de fluidos usando herramientas computacionales gráficas. Una simulación realista de fluidos requiere altas capacidades computacionales para la solución de las ecuaciones, que son no lineales, sin embargo pueden hacerse algunas consideraciones para linealizar el sistema y disminuir tales requerimientos. Esta investigación presenta un método efectivo de solucionar el sistema lineal de fluidos incompresibles a través de análisis de elemento finito.

Los paquetes comerciales de CAE están ganando aceptación en la industria, sin embargo tales softwares generalmente son de arquitectura cerrada, es decir no permiten integrar nuevas herramientas, sin hablar de los altos costos de compra y mantenimiento. De aquí la necesidad de desarrollar tecnología propia y especializada para tópicos específicos.

Actualmente existen un sin fin de productos químicos que permiten mejorar el proceso de moldeo por inyección, sin embargo, por un lado, muchos de ellos son productos consumibles, lo que implica un gasto constante, y por otro lado, estos aditivos funcionales y de proceso como depresores de viscosidad, deslizantes lubricantes, plastificantes, entre otros, modifican el peso molecular y con ello cambian las propiedades mecánicas características del polímero. Por tal motivo es muy aceptable un método no-químico que modifique la viscosidad del polímero, por lo menos en el tiempo en que tarda en ser moldeado, sin tener que sacrificar las propiedades del polímero.

El propósito de esta investigación es desarrollar un aparato para modificar la viscosidad del polímero fundido en el proceso de inyección de plásticos a través de vibración. Es importante aclarar que este desarrollo es una variante de otros aparatos existentes como el desarrollado por J. P. Ibar bajo la patente americana 5885495 en 1999, o el de Liu de 2006, entre otros, que explotan el mismo principio. Sin embargo, las principales diferencias radican en que el desarrollo que aquí se muestra es un accesorio del molde no el desarrollo o modificación de una máquina de inyección de plásticos.

Las investigaciones recientes se basan en la integración de diferentes herramientas o tecnologías para solucionar problemas. La integración de vibración ha ganado buena posición entre otras técnicas debido a su versatilidad en procesos que son susceptibles a mejora con métodos no convencionales como es el caso de la fundición por el lado de metales y de la extrusión e inyección por el lado de plásticos. Por citar algunos, Tai y Lin (1999), Barriere et al., (2002) calculan la posición óptima de las boquillas de inyección de un molde, tarea que antes se basaba en la experiencia del diseñador, con la ayuda de modelación por análisis de elemento finito (moldflow).

Por otro lado, hay quien ha integrado la inteligencia artificial para el auxilio en los procesos relacionados a la inyección de plásticos. Tay y Lin (1999) optimizó el sistema de refrigeración de moldes para evitar rechupes, usando Abductive Network. Silva et al., (2005) usan control difuso en sistemas de refrigeración de inyectoras. Más aun He et al., (2001) proponen un sistema neuro-difuso para determinar los parámetros de inyección reduciendo drásticamente los defectos y el tiempo de selección.

Haciendo un análisis de los resultados alcanzados con el uso de vibración en los procesos de manufactura es posible suponer un buen primer punto para el inicio del desarrollo en inyección de plásticos. Mas aún, los avances tecnológicos permiten la modelación de los procesos con una insignificante pérdida de tiempo.

Por ejemplo Liu (2006) analiza el comportamiento del polietileno en un proceso de extrusión adicionando vibración senoidal.

Por otro lado Yin and Qu (2006) encuentran mejoras relacionadas con la vibración asistida en el proceso de inyección de polvos de metal (MIM metal powder injection).

En el campo de la fundición, Abu-Dheir et al., (2005) muestran que la vibración del molde en el momento de la colada mejora la morfología de la aleación Al.Si.

El proceso de inyección cuenta de tres principales pasos llenado, empaquetamiento y enfriamiento (Benitez-Rangel et al., 2007). En el llenado es el paso en que se puede tener una mayor influencia sobre las propiedades mecánicas de las piezas moldeadas, Quan et al., (2006) estudian la relación entre el efecto de la vibración en el proceso de inyección de polipropileno con sus propiedades mecánicas.

Aunque en los últimos años se ha invertido un considerable esfuerzo para desarrollar sistemas que integren vibración, buen aparte de ellos son de difícil montaje ya que requieren modificaciones costosas de la máquina, por ejemplo las investigaciones de tanto de Yin and Qu (2006) como de Liu (2005) tiene la desventaja de que el aditamento desarrollado requiere ser montado sobre la inyectora no sobre el molde, lo cual no es fácil de implementar en la industria, por lo menos no como un apoyo a la industria existente, probablemente lo pueda ser para futuros desarrollos, sin embargo si el mercado es sobre los países en vías de desarrollo, esto no resulta viable.

Por otro lado en el caso de inteligencia artificial existen problemas relacionados a la metodología, por ejemplo las redes neuronales tienen que ser entrenadas a priori y de ello depende el éxito de la herramienta, sin embargo también son complejas en su programación y puesta en marcha.

Hay tres posibles usos de la vibración para modificar el proceso de moldeo o las propiedades del material moldeado:

1. La primer categoría son los que usan oscilación mecánica o oscilación ultrasónica para homogenizar e incrementar la densidad del material moldeado, en estado sólido o líquido, y a nivel microscópico y macroscópico. Sin embargo, no se hace uso de vibración para bajar la viscosidad del polímero fundido para incrementar la procesabilidad durante la

conversión, sino que se usa en el paso de empaquetado para incrementar la elasticidad del polímetro fundió.

2. La segunda categoría son los que simplemente usan la vibración para modificar la reología del material que está en función de la frecuencia y amplitud de vibración además de la temperatura y la presión. Esto se usa para influenciar características como crecimiento y orientación de grano. Sin embargo, como se menciona antes, no alteran la viscosidad del polímero en el sentido en el que se preserve la reducción de viscosidad, solo se usa mientras el polímero fundido es enfriado.

3. En la tercera categoría, la vibración es esencialmente usada para calentar localmente por fricción interna o para reducir el estrés superficial entre las paredes y el polímero fundido y para incrementar el rendimiento. El calentamiento local generado por la presión de la vibración es suficientemente significativo, en moldeo por inyección, como para evitar enfriamientos prematuros en las boquillas o bebederos, resultando en una significativa reducción de las contracciones en las partes terminadas.

Otra manera de mejorar en proceso de inyección es de manera química, actualmente existen un sin fin de productos que permiten mejorar el proceso de moldeo por inyección, sin embargo, por un lado, muchos de ellos son productos consumibles, lo que implica un gasto constante, y por otro lado, estos aditivos funcionales y de proceso como depresores de viscosidad, deslizantes lubricantes, plastificantes, entre otros, modifican el peso molecular y con ello cambian las propiedades mecánicas características del polímero. Por tal motivo es muy aceptable un método no-químico que modifique la viscosidad del polímero, por lo menos en el tiempo en que tarda en ser moldeado, sin tener que sacrificar las propiedades del polímero.

En resumen, en este trabajo es propuesto un nuevo método, no químico, para mejorar el ciclo de llenado del proceso de inyección exponiendo al polímero fundido, por un cierto tiempo, a oscilaciones senoidales de determinada amplitud y frecuencia a una temperatura constante, con el fin de reducir tiempo del llenado del molde. El polímero fundido es excitado por un vástago colocado en el bebedero del molde y el vástago es excitado por un vibrador (Shaker) ubicado fuera del molde y la máquina de inyección.

La principal mejora en el sistema vibrador propuesto sobre las otras técnicas es que no es estrictamente necesario modificar la inyectora, mas bien dicho, es un accesorio que se instala en el molde. Lo que permitirá una más rápida integración de esta tecnología al campo de trabajo. Es decir, se puede usar en una máquina nueva o en una existente.

## **1.1 Enfoque y objetivos del proyecto de investigación**

El estudio de la inyección de plástico se enfoca, principalmente, a establecer técnicas que mejoren el proceso de inyección en algún sentido, como disminución de temperatura, presión o ahorro en tiempo en el ciclo de inyección.

En esta tesis se estudiará el efecto positivo que produce la vibración en la etapa de llenado de molde en el proceso de inyección de plásticos. La investigación incluirá el estudio detallado de las leyes y fenómenos físicos que toman parte en dicho proceso, principalmente flujo de fluidos y flujo de temperatura. Así mismo, se modelará dicho proceso por el método de elementos finitos programando los algoritmos del MEF mediante Matlab. Programas que serán verificados contra programas de cómputo especializados en el tema como ANSYS o MOLDFLOW. Más aún, se elaborarán los moldes de pruebas así como los accesorios necesarios para llevar a cabo los experimentos prácticos que ayuden en la validación de la hipótesis.

Por otro lado, durante la investigación se apoyará a la universidad en la formación de recursos humanos, se promoverá la investigación y difusión de la misma en diferentes foros y medios; además de promover la línea de investigación en inyección de plásticos dentro de la facultad.

### **1.1.1 Objetivos particulares**

- Hacer un análisis teórico, básicamente reológico, de los fenómenos que toman parte en la investigación.
- Desarrollar las ecuaciones de transferencia de masa, momento y energía que representan al sistema y modelarlo.

- Desarrollar los dispositivos necesarios para el desarrollo experimental, que constan de un molde con diseño espiral (que a su vez constituye un reómetro no convencional) y los dispositivos de transmisión de vibración al polímetro.
- Hacer los experimentos prácticos necesarios para la validación de la investigación. Dichos experimentos consisten básicamente en pruebas de inyección con el molde experimental y el equipo de vibración.
- Hacer un análisis adimensional detallado de las muestras inyectadas en longitud y peso.
- Reportar y divulgar los resultados obtenidos tanto en el presente documento como en un artículo de revista indizada.
- Formar recursos humanos. Titular un estudiante de licenciatura.

## **1.2 Descripción de la tesis**

Capítulo 2: Este capítulo contiene una revisión de literatura referente al proceso de inyección de plásticos, así como a los fenómenos físicos que tienen lugar y las ecuaciones que los modelan.

Capítulo 3. En este capítulo se presenta información detallada acerca de materiales, equipos y procedimientos experimentales. La primera parte presenta una solución teórica del problema mientras que la segunda parte contiene el desarrollo experimental, tanto de los equipos auxiliares como de los experimentos.

Capítulo 4. En este capítulo se exponen los resultados derivados de la investigación así como la discusión de los mismos. La primera parte contiene las pruebas de inyección muestra las mejoras producidas por la adición de vibración; los resultados son discutidos en función de desplazamientos y pesos de las muestras inyectadas. La parte final contiene las conclusiones generales y las recomendaciones, prospectivas, del trabajo.

Apéndices A y B: En esta sección se presentan los artículos publicados, producto de esta investigación.

# Capítulo II

---

## 2 Estado del arte

### 2.1 Ciclos del proceso de inyección

La inyección de es uno de los procesos más usados en la industria de la manufactura para la elaboración de piezas plásticas. Un ciclo de inyección consiste en tres pasos fundamentales: (i) llenado, (ii) empaquetado, y (iii) enfriamiento. (Kyeong y Yong 1997; Holm y Langtangen 1999; Kumar y Ghoshdastidar 2002; Courbebaisse 2005, Benitez-Rangel et al., 2007).

Inicialmente, el polímetro se encuentra granulado (peletes), los cuales se funden por la acción del calentamiento en el cilindro de plastificación. En la punta de salida del cilindro, una boquilla hace posible la inyección del polímero en la cavidad del molde.

Durante el primer paso, una vez que el molde es cerrado, el polímetro fundido llena la cavidad interior del molde, moviéndose a través de las venas y canales.

En la fase de empaquetado una cantidad extra de polímero es inyectada para contrarrestar las posibles contracciones y rechupes causados por el enfriamiento del polímetro en el molde.

La fase de enfriamiento toma lugar concurrentemente con las fases de llenado y empaquetado, dicha fase provee el tiempo necesario para solidificación de la pieza, o plastificación, hasta lograr una plastificación del 80 % que es el mínimo necesario para expulsar la pieza sin deformarla (Galantucci y Spina 2003). Completándose el proceso con la apertura del molde y la expulsión de la pieza.

Durante los pasos anteriores existe una fuerte relación entre las propiedades del material, parámetros de la máquina así como de las variables externas del proceso, lo que hace que el proceso sea en extremo complejo.

La calidad del producto final, que frecuentemente es caracterizada en términos de estabilidad dimensional, apariencia y propiedades mecánicas, depende directamente de factores entre los que se incluyen temperatura de fundición, velocidad de llenado y perfiles de presión de empaquetamiento (Galantucci y Spina 2003).

La temperatura de fundición afecta directamente la viscosidad del fluido, velocidad de llenado y presión de llenado.

La velocidad de llenado tiene una fuerte influencia en la calidad de la parte moldeada, especialmente en propiedades mecánicas y estabilidad dimensional (Galantucci y Spina 2003; Kumar y Ghoshdastidar 2002; Hill 1996). La optima selección del perfil de presión de empaquetamiento reduce el esfuerzo residual reduciendo las contracciones y rechupes del producto, sin embargo, una mala selección puede incrementar el peso del objeto (Galantucci y Spina 2003).

Las investigaciones sobre inyección de plásticos empezaron con el trabajo de Spencer y Gillmore en inicios de los 50, ellos usaron una ecuación empírica para flujo capilar acoplada con una aproximación quasi-estática y desarrollaron una correlación para calcular el tiempo de llenado asociado con el proceso de moldeo (Kumar y Ghoshdastidar 2002).

Después fue desarrollado un modelo numérico para una geometría de disco. Tal modelo propone un tratamiento puramente matemático para el llenado, empaquetado y enfriamiento en el proceso de inyección. Como resultado fue presentado un modelo para trazar el llenado de la cavidad discal. Las ecuaciones usadas para resolver el flujo no-isotérmico del llenado fueron Power-Law (Kumar y Ghoshdastidar 2002).

Posteriormente también se trabajó en un modelo teórico unificado para simular los pasos de llenado y el post llenado (filling y pos-filling) en el proceso de inyección (Kyeong y Yong 1997; Courbebaisse 2005; Ravindran y Lewis 1998; Han, et al. 2004).

Mas tarde, apareció un modelo híbrido elemento-finito / diferencias-finitas, usado para hallar la solución generalizada para el flujo Hele-Shaw de un fluido viscoso compresible bajo condiciones no-isotérmicas (Kyeong y Yong 1997; Long, et al 2004).

También se simulo el llenado de la cavidad con un modelo tridimensional usando el método de elemento finito en el moldeo industrial de piezas plásticas, tarea difícil debido a las limitaciones tecnológicas del momento (Pichelin y Coupez 1998,1999; Kumar 2005).

Recientemente es posible observar la tendencia a la automatización, por ejemplo: se han desarrollado métodos automáticos para la localización de boquillas de inyección en la geometría del molde, así como para la optimización de las condiciones de moldeo. (Shen y Zhai 2004; Zhai, et al. 2005)

Mas aun, recientemente diferentes autores presentan la introducción de la inteligencia artificial para la optimización de parámetros de inyección usando Redes Neuronales y algoritmos Difusos . En sus estudios, han sido desarrollados sistemas que literalmente pueden aprender como seleccionar los parámetros óptimos del ciclo de inyección minimizando el uso de CAE y con ello tiempo de diseño. (Yoon, et al. 2000; Passad y Yarlagadda 2001; Passad, et al. 2001; Huang y Lee 2003; Shi, et al. 2003; Chen, et al. 2004)

## **2.2 Reología de los polímeros.**

Cuando el polímero se funde se comporta como un líquido, sin embargo conserva propiedades de sólido, por lo que es importante estudiar su reología. Lo anterior debido a que las ecuaciones que gobiernan su comportamiento son ecuaciones de fluidos.

La Reología es entendida como el estudio de la fluidez de los materiales plásticos fundidos. Su estudio es esencial en muchas industrias incluyendo las pinturas, alimentación, tintas de impresión, detergentes o aceites lubricantes, entre otras.

## **2.3 Clasificación de los plásticos**

Dentro de los polímeros existen tres principales grupos que son termoplásticos, termoestables y elastómeros (Bossi, 1993)

Los termoplásticos son resinas generalmente con estructuras lineales que durante el calentamiento para moldeo no sufren modificación química. La acción del calentamiento causa que la resina se funda rápidamente y que se solidifique por el enfriamiento sufrido por el contacto con las paredes del molde. Dentro de ciertos límites, la fusión-solidificación puede repetirse.

Los termoestables pueden ser fundidos solo una sola vez. Las resinas de este grupo son caracterizadas por tener una estructura molecular entrelazada, en el calentamiento inicial por la acción del calor pero enseguida, si el calentamiento continua, pueden tener cambios químicos irreversibles.

Los elastómeros contienen a los plásticos naturales y a los sintéticos, la capacidad de elongación los caracteriza, esta está alrededor de 200 a 1000%.

Dentro de los termoplásticos se encuentran las resinas poliolefinicas, que provienen de alquenos hidrocarburos con dobles enlaces. Son polímeros de alto peso molecular y poco reactivos debido a que están formados por hidrocarburos saturados. Sus macromoléculas no están unidas entre sí químicamente, excepto en los productos reticulados.

Los Polietilenos se clasifican en base a su densidad (de acuerdo al código ASTM) como:

- Polietileno de Baja Densidad (PEBD o LDPE)
- Polietileno Lineal de Baja Densidad (PELBD o LLDPE)
- Polietileno de Alta Densidad (PEAD o HDPE)
- Polietileno de Alta Densidad Alto Peso Molecular (HMW-HDPE)

Aunque de manera general solo se observan dos clasificaciones principales:

- De baja densidad (LDPE)
- De alta densidad (HDPE).

El de baja densidad tiene una estructura de cadena enramada, mientras que el polietileno de alta densidad tiene esencialmente una estructura de cadena recta.

## 2.4 Condiciones térmicas de la inyección

Para modelar las condiciones térmicas es necesario un buen modelo matemático, el cual involucra ecuaciones de transferencia de momento calor y masa combinadas con leyes de fluidos (Claveria, et al. 2005).

Basándonos en el tipo de materiales, termofijos y termoplásticos, existen dos tipos de ciclos de inyección mostrados en la Figura 2.1 y Figura 2.2 (Bossi 1993).

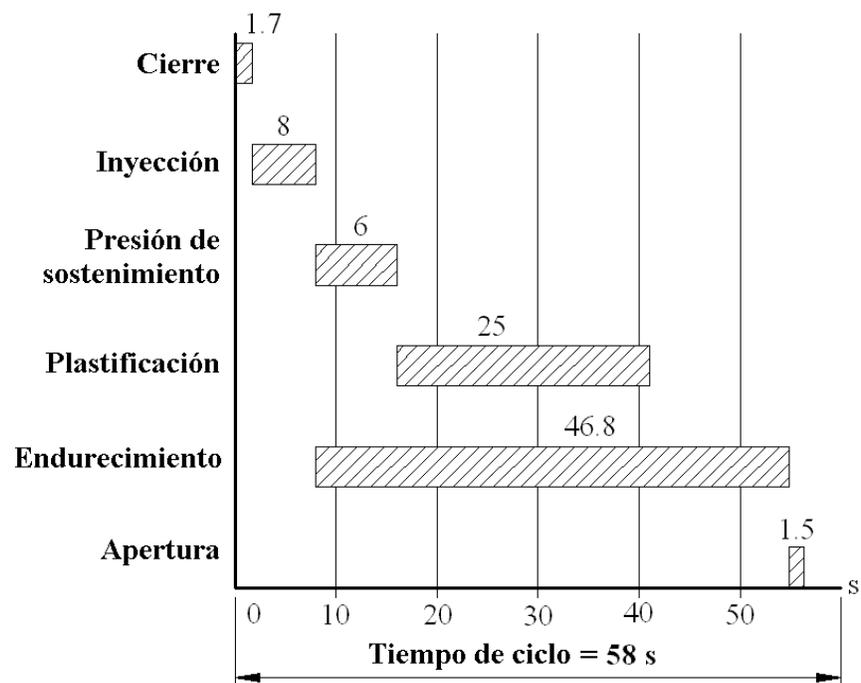


Figura 2.1. Pasos de un ciclo de inyección para polímeros termofijos.

El proceso de inyección en materiales termoplásticos es más simple que en los termofijos debido a que en los primeros, el paso de plastificación es omitido. Es decir, los materiales termoplásticos cambian su viscosidad gradualmente con el incremento de temperatura, sin embargo, en el caso de los termofijos la adición de temperatura no se relaciona directamente con el cambio de viscosidad, cuando la fundición toma lugar algunos segundos son suficientes para alcanzar su máxima viscosidad.

Para el caso de los materiales termo fijos, si la temperatura se mantiene, el polímetro empieza una acelerada solidificación después de la cual el material empieza a degradarse. (Bossi 1993).

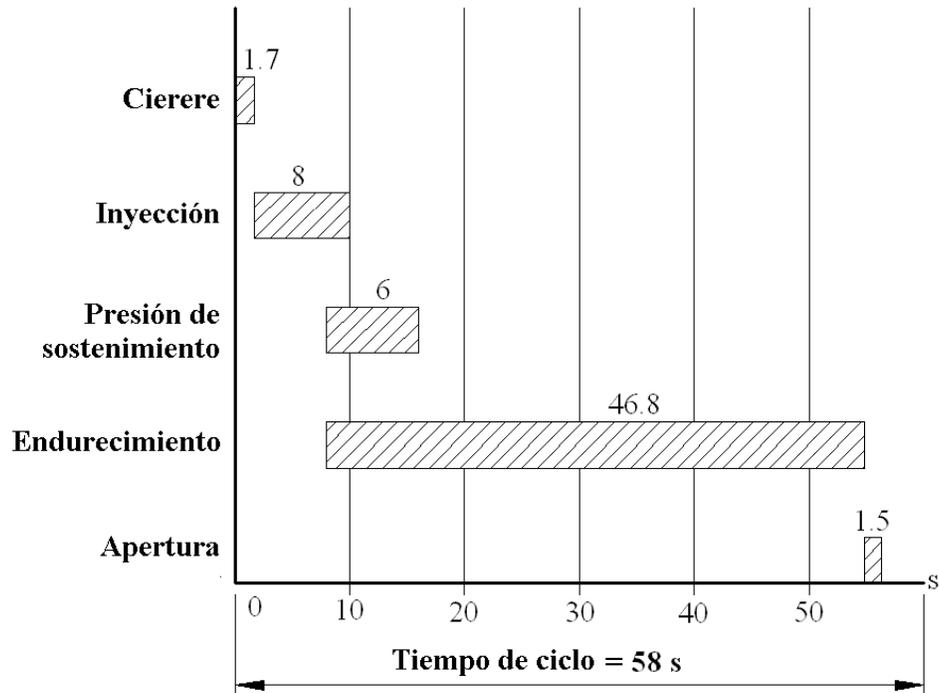


Figura 2.2. Pasos de un ciclo de inyección para polímeros termoplásticos.

Generalmente, en los materiales termoplásticos el polímetro fundido es inyectado en un molde frío (Hill 1996; Kumar y Ghoshdastidar 2002), sin embargo los termofijos son inyectados a baja temperatura a un molde caliente (Bossi 1993), como se muestra en la Figura 2.3 y Figura 2.4.

Un buen modelo debería considerar todos los fenómenos térmicos presentes en el ciclo de inyección, los cuales incluyen:

- Disminución de temperatura debido al contacto del polímetro con las paredes del molde.
- Calor inducido en el molde para fundir el polímetro, en el caso de los termo fijos.
- Incremento de temperatura causado por la fricción del material que fluye a alta presión por los canales del molde.
- Enfriamiento forzado para la solidificación de la pieza moldeada.

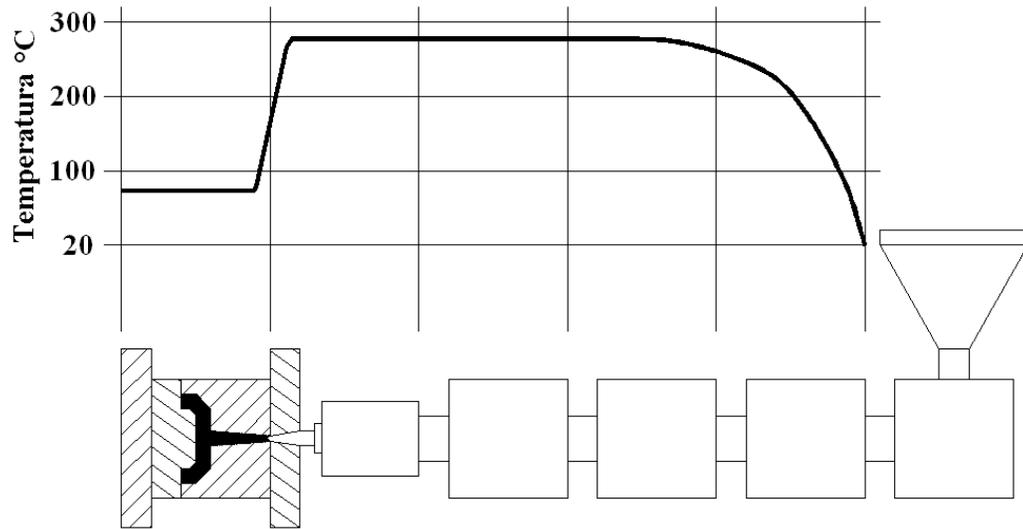


Figura 2.3. Perfil de temperatura de un ciclo de inyección para termoplásticos.

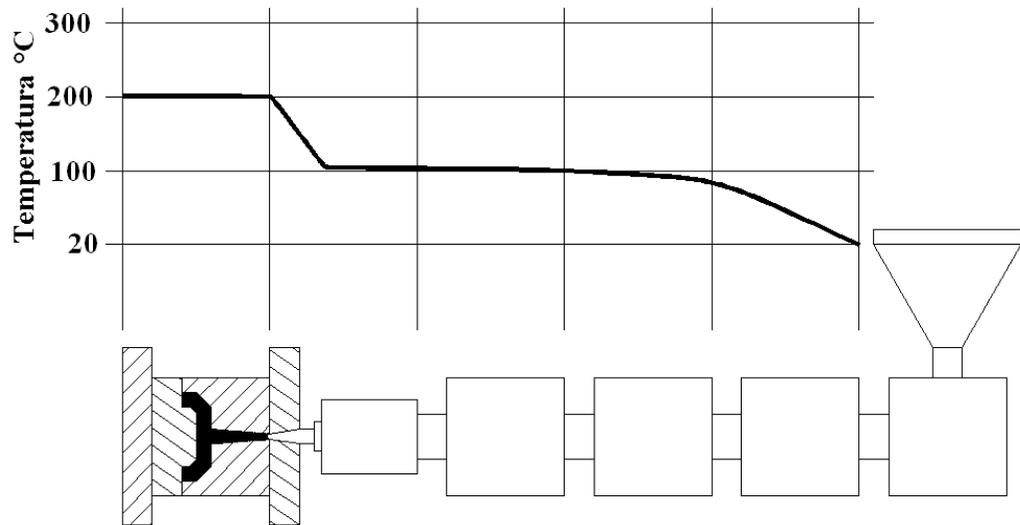


Figura 2.4. Perfil de temperatura de un ciclo de inyección para termofijos.

Sin considerar otros fenómenos debido a que el molde, por si mismo, es un intercambiador de calor, como son las perdidas debidas a radiación, al calor agregado al molde por el polímero fundido, etc. (Jansen 1995; Shimizu y Ohtani 1996; Seddeek 2006)

Sin embargo, la mayoría de los autores desprecian algunos factores, modelando flujo sin considerar los efectos de presión y temperatura (Hill 1996; Van, et al. 2001; Passad, et al. 2001; Nardin, et al. 2002; Ozdemir, et al. 2004; Courbebaisse 2005; Au 2005). Algunos mas consideran las condiciones isotérmicas limitadas y algunos también comparan entre flujos isotérmicos y no-isotérmicos (Hill 1996; Kyeong y Yong 1997; Holm y Langtangen 1999; Kumar y Ghoshdastidar 2002). Lo anterior con la finalidad de simplificar los modelos de estudio. Generalmente obteniendo resultados suficientemente buenos para el fenómeno estudiado.

## **2.5 Fluidos Newtonianos y no-Newtonianos**

Un fluido newtoniano se caracteriza por cumplir la Ley de Newton, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.

El flujo de polímeros termoplásticos puede ser considerado como Newtoniano o no dependiendo de que tan complejo se desee hacer el modelo. Los fluidos Newtonianos como el agua, aceite, etc., son considerados no-compresibles, mas aun, la viscosidad en los fluidos Newtonianos esta directamente relacionada con la temperatura (la viscosidad decrece linealmente cuando la temperatura incrementa). En el caso de los No-Newtonianos la viscosidad decrece cuando la temperatura o velocidad de flujo incrementan; demás, los materiales plásticos en su estado fundido (molten) son mas viscosos y, de cierta forma, compresibles (Kondic, et al. 1996; Guermond y Quartapelle 2000; Boschan, et al. 2003; Koszkuł y Nabialek 2004).

La Figura 2.5 y Figura 2.6 muestran el flujo entre dos paredes muy juntas de un fluido Newtoniano y un termoplástico fundido, respectivamente(Bossi 1993).

En ambos casos la velocidad del fluido en contacto con las paredes es nula (Courbebaisse 2005), mientras que en dirección al centro, la velocidad incrementa gradualmente hasta alcanzar el máximo valor (flujo laminar). Durante el flujo del fluido

una delgada capa se solidifica al contacto con el molde por lo que el material fundido avanza dentro de la cáscara formada, Figura 2.6. Es necesario comentar que en la práctica muchas veces no se respeta lo citado en la literatura, puesto que los fabricantes aseguran que entre más pulido esté el molde mejor fluye el fluido, más aun, existen un sin fin de lubricantes que tratan de mejorar dicho flujo sin embargo, la teoría dice que el fluido no roza las paredes sino que la velocidad de contacto es cero.

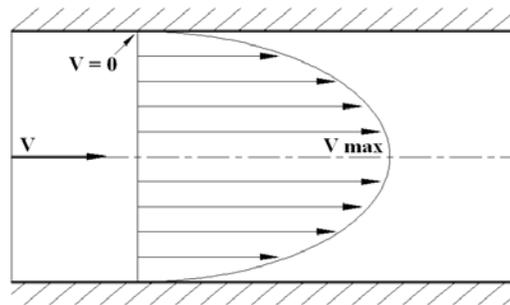


Figura 2.5. Perfil de velocidad para un fluido Newtoniano.

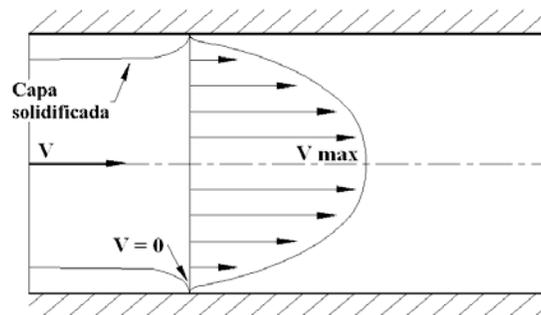


Figura 2.6. Perfil de velocidad para un polímero fundido.

Algunos autores consideran los fluidos como Newtonianos por razones de simplicidad en los modelos, para casos específicos, la aproximación podría ser buena (Bickerton y Advani 1997; Frank y Baaijens 1998; Zhen y Mujumdar 1998; Dimitrova y Faria 2002).

Otros autores trabajan sin despreciar todas restricciones de flujo haciendo un modelo mas confiable, sin embargo, sacrifican con ello la simplicidad del modelo (Hill 1996;

Kyeong y Yong 1997; Pichelin y Coupez 1999; Kumar y Ghoshdastidar 2002; Hong, et al. 2004)

## 2.6 Cambio de fase

En casos en que es necesaria una mayor preescisión en el modelado del ciclo de llenado algunos autores lo dividen en dos pasos (Kyeong y Yong 1997; Huang y Lee 2003; Han, et al. 2004; Courbebaisse 2005); cuyos nombre son llenado y curado (post-llenado en algunos casos). El llenado modela el efecto sufrido cuando el polímetro fundido llena la cavidad del molde, y el curado modela el tiempo de solidificación y los cambios que el polímero sufre durante la solidificación como contracciones y rechupes o incremento de peso debido a los factores que toman parte en el proceso de cambio de fase (Lan y Khodadadi 2001).

Es importante saber que generalmente los casos en que el post-llenado (post filling) es simulado, el polímetro es considerado no-Newtoniano (compresible), debido a que los efectos del modelado en esa fase tienen una relación directa con la compresibilidad del polímero (Kyeong y Yong 1997; Tezduyar 2005; Piau y Piau 2005).

Las variables afectadas en el cambio de fase son la presión, temperatura y directamente el tiempo.

La simulación responde a las siguientes ecuaciones (Han, et al. 2004):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (2.2)$$

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \cdot \nabla T) + \eta \dot{\gamma}^2 + \beta \cdot T \frac{DP}{Dt} + H \frac{D\alpha}{Dt} \quad (2.3)$$

$$\frac{D\alpha}{Dt} = (K_1 + K_2 \alpha^n) (1 - \alpha)^v \quad (2.4)$$

donde:

$$k_1 = A_1 e^{\left(-\left(\frac{E_1}{T}\right)\right)}, K_2 = A_2 e^{\left(-\left(\frac{E_2}{T}\right)\right)} \quad (2.5)$$

Las primeras tres ecuaciones describen la conservación de masa, momentum y energía, respectivamente, usando la formulación Hele-Shaw. Las ecuaciones ( 2.4) y ( 2.5) son las ecuaciones de curado de Kamal, que modelan la solidificación de la pieza. Este cambio también podría ser modelado resolviendo el problema de Stefan o ecuaciones de Stefan (Kyeong y Yong 1997), aunque Stefan es más ocupado por ejemplo en congelación donde no hay un frente de solidificación.

## **2.7 Leyes que interactúan en la etapa de llenado de un molde**

El modelado físico del proceso de inyección de plásticos es un fenómeno extremadamente complejo si se pretende una posterior simulación del proceso. El principal problema para la simulación del proceso de llenado es decidir sobre las ecuaciones o modelos de flujo de fluidos y transferencia de calor que se usarán; ya que se trata de modelar un flujo tridimensional transitorio (en presiones, temperaturas, densidades, ...). Algunas de las leyes físicas que se usan para estudiar este tipo de problemas son Hele-Shaw, leyes de Darcy, y las ecuaciones de Navier-Stokes entre otras (Chen, et al. 1998; Khosla y Rubin 2001; Kumar y Ghoshdastidar 2002; Dimitrova y Faria 2002; Ervin y Miles 2003; Deleglise, et al. 2005).

Hay dos métodos comúnmente usados para la transformación de plásticos: El proceso de inyección y el moldeo con transferencia de resina (RTM) (Dimitrova y Faria 2002; Courbebaisse 2005). En el proceso de moldeo por inyección el polímero fundido es inyectado en un molde con cavidad vacía, mientras que en RTM polímero fundido es inyectado a un molde con una base porosa, generalmente una base fibrosa, la cual es usada para reforzar al las piezas plásticas.

Las leyes principales para RTM son las leyes de Darcy. Estas modelan el flujo a través de un medio poroso (Bickerton y Advani 1997; Dimitrova y Faria 2002; Deleglise, et al. 2005).

Por otro lado, Las principales ecuaciones para modelar el proceso de inyección son Hele-Shaw y Navier Stokes, ambas modelan el flujo a través de una cavidad delgada y vacía (Kyeong y Yong 1997; Khosla y Rubin 2001; Joseph 2006).

### 2.7.1 Ecuaciones de Hele-Shaw

En el caso cuando se usa la ecuación generalizada de Hele-Shaw existe la principal limitación de que solo puede modelar cavidades delgadas, ya que presenta problemas como: imposibilidad de modelar flujos de surtidor (Fountain flow) en el que se observan pequeños retrocesos de flujo, no modela correctamente los cambios de grosor y bifurcaciones ya que supone el flujo plano, y presenta dificultad en la predicción de dirección de fibras, ya que este es un fenómeno completamente tridimensional.

Pareciera que el método tiene muchas limitantes, sin embargo no lo es, ya que cerca del 90% de las piezas industriales convencionales son de pared delgada.

El llamado flujo generalizado de Hele-Shaw bajo condiciones no isotérmicas. De hecho es el que utilizan, de una manera u otra, muchos de los programas de simulación de la inyección de plástico que se comercializan hoy en día.

Las ecuaciones del modelo generalizado de Hele-Shaw considerando el efecto de variable-densidad son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

Donde  $x$  y  $y$  denotan las coordenadas planares y  $z$  la coordenada de espesor, mientras  $u$ ,  $v$  y  $w$  son los componentes de velocidad en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  con  $t$  el tiempo y  $p$  la presión,  $\rho(T, p)$  es la densidad y  $\eta(\gamma, T, p)$  es la viscosidad (shear viscosity), donde  $\gamma$  es la velocidad efectiva (shear rate) (Hill 1996; Kyeong y Yong 1997; Chen, et al. 1998; Kumar y Ghoshdastidar 2002; Au 2005; Courbebaisse 2005).

El modelo Hele-Shaw es usado cuando hay que considerar factores como flujo no isotérmico o fluidos no newtonianos.

### 2.7.2 Ecuaciones de Navier-Stokes

La historia de Navier-Stokes empieza en 1822, pero las ecuaciones fueron completadas formalmente en 1845 (Joseph 2006). las cuales pueden expresarse como sigue:

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \left( \frac{1}{Re} \nabla v - vv - pI \right) = F(v,x,t) \quad \text{en } \Omega \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \left( \frac{1}{Re} \nabla v - vv - pI \right) = F(v,x,t) \quad \text{en } \Omega \quad (2.11)$$

Donde  $p = (1/\rho)\bar{p} - g$ ,  $\bar{p}$  es presión,  $\rho$  es densidad,  $g$  es aceleración debido a gravedad,  $v$  y  $T$  denotan velocidad y temperatura del fluido,  $Re > 0$  denota el número de Reynolds (Hong, et al. 2004 y Khosla y Rubin 2001).

Usualmente este tipo de modelos es empleado para modelar fluidos incompresibles o fluidos Newtonianos (Ravindran y Lewis; 1998; Pichelin y Coupez 1998, 99; Argyris, et al. 2003). No obstante algunos investigadores usan la viscosidad diferente a cero y lo usan para fluidos quasi-Newtonianos (Pichelin y Coupez 1998; Joseph 2006).

En esta sección solo se da un esquema general de las ecuaciones, mas adelante, en el capítulo 3, se hará el desarrollo detallado de las ecuaciones, tanto de flujo como de temperatura, para el caso específico de estudio.

### 2.7.3 Ley de Darcy

El moldeo por transferencia de resina RTM es un proceso de manufactura para materiales compuestos en los cuales la resina es inyectada dentro de un molde lleno con un material fibroso (Yoon, et al. 2000; Ruiz, et al. 2006; Shojaei 2006).

La ley de Darcy describe el flujo a través de medios porosos en pequeña y gran escala, por ejemplo un derrame de químicos en la tierra, en cuyo caso el medio poroso es la

tierra. En este caso es estudiado como pequeña escala y es usado para describir el flujo en RTM.

La ley de Darcy es expresada de la siguiente forma:

$$\bar{u} = -\frac{K}{\eta} \nabla P \quad (2.12)$$

Donde  $\bar{u}$  es el vector de velocidad, velocidad observada en escala microscópica,  $\eta$  es la viscosidad del fluido.  $\nabla P$  es el gradiente de presión, y  $K$  es el tensor de permeabilidad del medio poroso (Bickerton y Advani 1997; Deleglise, et al. 2005; Dimitrova y Faria 2000).

La forma bidimensional de la ley de Darcy puede ser expresada en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \end{pmatrix} = -\frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial P / \partial x \\ \partial P / \partial y \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Donde  $\bar{u}_x$  y  $\bar{u}_y$  son las velocidades de Darcy promediadas según el espesor de la pieza (Bickerton y Advani 1997) la cual envuelve las ecuaciones combinadas de conservación de masa, momento y energía.

## 2.8 Técnicas para resolver ecuaciones de flujo y temperatura

### 2.8.1 El método de elemento finito.

En muchos de los casos la solución de ecuaciones como Darcy, Hele-Shaw, Navier-Stokes entre otras son resueltas usando el método de elemento finito (FEM) este tiene un gran numero de variantes como Elemento Finito / Diferencias Finitas (FE/DF), Control de volumen / Elemento Finito (CV/FEM), Taylor-Galerkin discontinuo (DTG), Petrov-Galerkin (SPUG), etc. Además de las técnicas nuevas que se han venido desarrollando recientemente como técnicas adaptivas de elemento finito, entre otras. El método cambia de nombre debido al tipo de esquema numérico empleado en el proceso de solución (Qi y Xiao 2003; Ervin y Miles 2003)

### 2.8.2 Elemento Finito / Diferencias Finitas (FE/DF)

El modelo híbrido de Elemento Finito / Diferencias Finitas (FE/DF) combina la preescisión y flexibilidad encontradas en técnicas automáticas de elemento finito con la velocidad y reducción de requerimientos computacionales asociados con las técnicas de diferencias finitas (Blanchard, et al. 2000). Sin embargo, su aplicación es limitada a geometrías con mallados simples. (Long, et al. 2004)

El potencial de este método es que provee preescisión flexibilidad y soluciones relativamente rápidas para análisis de sistemas acoplados de flujo y temperatura para fluidos no-Newtonianos con cambio de fase (Kyeong y Yong 1997; Blanchard, et al. 2000).

### 2.8.3 Volumen de Control / Elemento Finito (CV/FEM)

El método más popular en transferencia de masa y calor para resolver problemas de convección / difusión es el Método de Elemento Finito (FEM) y el Método de Volúmenes Finitos (FVM) (Wintruff, et al. 2001) Ambos métodos tienen algunas características en común. En esta consideración, el Volumen de Control basado en el Método de Elemento Finito (CVFEM) aprovecha de los beneficios de ambos métodos.

El control-volumen / Método de Elemento Finito (CVFEM), introducido por Baliga y Patankar en inicio de los ochentas, es un intento de explorar las propiedades conservadoras de la formulación volumen de control en un ambiente de elemento finito. La idea principal es aplicar la integración de Gauss en un volumen de control finito, y simultáneamente mantener la flexibilidad geométrica de la formulación tradicional de elemento finito (Wintruff, et al. 2001).

CVFEM combina la flexibilidad del método de elemento finito para discretizar geometrías complejas con la formulación conservadora del volumen de control en la que las variables tienen una sencilla interpretación física en términos de flujo (Campos y Mendes 2001; Naterer 2003)

Este método es frecuentemente usado para resolver ecuaciones de flujo y transferencia de calor en RTM. Por lo tanto, las ecuaciones a resolver son generalmente las

de Darcy , También tiene la ventaja de simular en dos y tres dimensiones. (Naterer 2003; Shojaei 2006; Ruiz, et al. 2006)

#### 2.8.4 Galerkin discontinuo

Hay algunos problemas complejos que solo se ven en geometrías complejas, problemas como mallado desestructurado, ondas de choque, contacto discontinuo o gradientes de escalón en fronteras internas, problemas que requieren de la aplicación de un método robusto y confiable.

El Elemento Finito clásico, Volumen Finito o FEM estándar no permiten realizar aproximaciones numéricas de sistemas fuertemente no lineales en dominios con geometrías complejas.

Un excelente candidato que supera las dificultades mencionadas es el Método de elementos finitos discontinuo de Galerkin (DGFEM) (Nair, et al. 2005). El cual se esta haciendo mas y mas popular en la solución de problemas numéricos.

El DGFEM usa aproximaciones Piecewise Polinomiales de la deseada solución en una malla de elemento finito sin ningún requerimiento de continuidad en elementos vecinos y puede ser considerado como un compromiso entre el volumen finito y el método de elementos finito (Feistauer y Svadlenka 2004).

El primer método discontinuo de Galerkin fue introducido en 1973 por Reed y Hill para la solución de la ecuación de transporte de neutrones (Feistauer y Svadlenka 2004; Nair, et al. 2005). Durante los años recientes el método ha sido ampliamente usado por diversos investigadores para resolver diferentes problemas, desde ecuaciones de movimiento de un fluido hasta problemas de simulación térmica en 3D en el campo de llenado de moldes, para fluidos viscosos incompresibles, debido a la buena estabilidad observada (Pichelin y Coupez 1998, 1999).

#### 2.8.5 Petrov – Galerkin

El método de Petrov–Galerkin es ampliamente usado para resolver problemas de ecuaciones acopladas de flujo y temperatura (Barsoum y Alexandrou 1995; Zhen y

Mujumdar 1998; Argyris, et al. 2003; Hong, et al. 2004). Usualmente estos sistemas emplean las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos y no Newtonianos (Ervin y Miles 2003).

El método de Petrov–Galerkin, en contraste con el método general de Galerkin en el cual la función de prueba es igual a la función base, es posible usar una función base diferente, por ejemplo Lagrange. El problema es que la forma de la función prueba (típicamente una función simétrica) no puede detectar la presencia de oscilaciones de nodo a nodo (Berger y Stockstill 1995).

## 2.9 Fluidéz y cambio de fase

La fluidéz de un líquido tiene su origen en la movilidad de las partículas que lo constituyen. La viscosidad de un fluido es una medida de su resistencia a la rapidez de deformación. El comprender la existencia de la viscosidad requiere del examen del movimiento del fluido en una base molecular.

En esta tesis se trabaja con polímetros que cambian de fase por lo que es importante hablar del número de Knudsen, que explica el cambio de fase de las partículas de un sistema. El número de Knudsen es adimensional y se define como:

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \quad (2.14)$$

donde:

$\lambda$  = Camino libre promedio.

L = Longitud característica.

Si el número de Knudsen es mucho mayor a la unidad ( $K_n \gg 1$ ) las partículas están muy dispersas y su estudio pasa a ser de régimen molecular ya que es un gas. Si el número de Knudsen es similar a la unidad ( $K_n \approx 1$ ) el fluido comporta como un gas y como líquido y su estudio es complejo, sin embargo puede ser tratado como líquido. Por otro lado, si el número de Knudsen es mucho menor a la unidad ( $K_n \ll 1$ ), en el rango de  $K_n \leq 0.1$ , entonces se considera un líquido viscoso y pueden aplicarse las ecuaciones de la dinámica de los fluidos o mecánica del medio continuo y el fluido puede ser tratado con variables como velocidad, densidad, presión, y temperatura.

Las moléculas de los sólidos son compactas. El calentamiento provoca el movimiento de las cadenas poliméricas, disminuyendo la intensidad de las fuerzas de cohesión (atracción) que actúan entre ellas o fuerzas de Van Der Waals. Esto da fluidez al material que entonces puede adoptar con facilidad las formas útiles que se le quiera dar. Al ser enfriado, las moléculas vuelven a "acomodarse" por aumento de la intensidad de las mencionadas fuerzas de cohesión endureciendo nuevamente el material (Ibar, J.P 1998).

## 2.10 Variables que influyen en la viscosidad

En esta sección se estudiará la influencia que tiene la viscosidad en el flujo de fluidos, lo anterior es debido a que la variable física que se estudia en el presente trabajo es el cambio de viscosidad, en base a lo cual, se estudiara el cambio en el flujo.

La viscosidad se puede definir como una medida de la resistencia a la deformación del fluido. Dicho concepto se introdujo en la Ley de Newton, ecuación ( 2.15 ), que relaciona el esfuerzo cortante con la velocidad de deformación (gradiente de velocidad).

$$\tau = \mu \cdot \dot{\theta} \quad ( 2.15 )$$

donde:

$\tau$ : esfuerzo cortante

$\dot{\theta}$ : velocidad de deformación

$\mu$ : viscosidad

La viscosidad puede ser afectada por variables como el gradiente de velocidad de deformación, la temperatura y la presión, sin embargo, nuevas investigaciones demuestran que también la vibración afecta el comportamiento de la viscosidad (Ibar, J.P 1998).

### 2.10.1 Variación de viscosidad por el efecto de velocidad

La viscosidad no constante que depende de la velocidad de cizalla es precisamente lo que da a los polímeros el carácter de no-Newtoniano, si la viscosidad permaneciera constante a pesar del cambio de velocidad, el comportamiento sería Newtoniano.

Despejando la viscosidad de la ecuación ( 2.15 ):

$$\mu = \frac{\tau}{\theta} \quad ( 2.16 )$$

Se observa en la ecuación ( 2.16 ) que la velocidad esta fuertemente relacionada con la viscosidad, es decir a mayor velocidad de flujo (y por lo tanto de velocidad de corte), menor viscosidad.

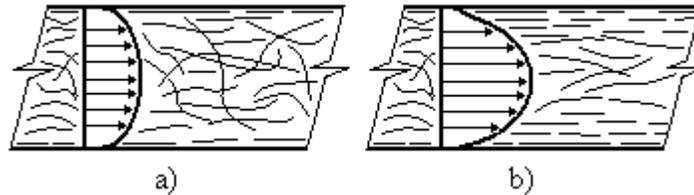


Figura 2.7. Efecto de la velocidad en el ordenamiento de las partículas a) a bajas velocidades, cadenas enmarañadas, b) a mayores velocidades, cadenas orientadas.

A velocidades de flujo muy bajas, como se muestra en la Figura 2.7a, la mayoría de las moléculas están enmarañadas, o dicho de otra forma, existe un alto grado de fricción entre ellas. A medida que la velocidad de flujo aumenta, Figura 2.7b, las moléculas empiezan a desenmarañarse y a orientarse. Las moléculas orientadas están menos enmarañadas, de manera que la fricción entre ellas se reduce y ahora fluyen más fácilmente. Debido a que existe menos fricción entre ellas, la viscosidad del plástico disminuye; es decir, la viscosidad del plástico disminuye al aumentar la velocidad de flujo (Yañez et al, 2001).

### 2.10.2 Variación de viscosidad por el efecto de la temperatura

El aumento de temperatura provoca un movimiento (mayor separación) de las cadenas poliméricas disminuyendo la intensidad de las fuerzas de cohesión provocando la disminución de la viscosidad. Otra manera de comprobarlo es observando algunas de las formulas que permiten evaluar la variación de la viscosidad de un líquido al cambiar la temperatura.

Las más importantes son:

A) La ecuación de Arrhenius

$$\mu = A \cdot e^{\frac{B}{T}} \quad (2.17)$$

siendo:

$\mu$ : viscosidad dinámica

$A$  y  $B$ : constantes dependientes del líquido

$T$ : es la temperatura absoluta

B) La ecuación de Poiseville (1840)

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \alpha T + \beta T^2} \quad (2.18)$$

donde:

$\mu_0$ : la viscosidad dinámica a 0 ° C.

$T$ : la temperatura.

$\alpha, \beta$ : coeficientes constantes.

Como se ve en las ecuaciones ( 2.17 ) y ( 2.18 ), la viscosidad disminuye en función a la temperatura. Esto es debido al hecho de que, conforme aumenta la temperatura, las fuerzas viscosas son superadas por la energía cinética, dando lugar a una disminución de la viscosidad.

### 2.10.3 Variación de viscosidad por efecto de la vibración

Es ampliamente aceptado, y se puede percibir en los dos casos anteriores, que lo que favorece la disminución de la viscosidad es la correcta orientación o des enmarañamiento de las cadenas poliméricas (Zheng et al, 2002)

Bajo la influencia de vibración, el número total de puntos de unión entre las cadenas poliméricas disminuye y, luego entonces, la viscosidad del polímero baja (Ibar, J.P 1998).

Sin embargo, hay que tener cuidado en la selección de la frecuencia ya que de lo contrario, si la vibración es excesiva, puede favorecer a un enredamiento de partículas lo cual resulta en un incremento de viscosidad que es contrario a lo que se desea; es posible también que las partículas sufran un empaquetamiento que cause dificultad de flujo. Por otro lado es sabido que una vibración a frecuencias altas puede causar fatiga al polímetro fundido, cambiando con ello algunas de sus propiedades físicas (US Patent 5885495 - Viscosity control for molten plastics prior to molding. J. P. Ibar)

Recientemente Liu (2005) desarrollo una ecuación, ( 2.19 ), que describe la relación entre viscosidad y vibración, sin embargo solo es útil para condiciones muy específicas de extrusión. No obstante, corrobora la teoría de la relación existente.

$$\eta_a = \frac{\pi R^3}{\bar{Q}} \cdot \frac{a \cdot \Delta p}{3 + \frac{a^2 \cdot \Delta p^2 \cdot \varepsilon_p \cdot \varepsilon_q \cdot \cos \varphi}{a^2 \cdot \Delta p^2 \cdot \varepsilon_p^2 + 2a \cdot b \cdot \Delta p \cdot \bar{Q} \cdot \varepsilon_p \cdot \varepsilon_q \cdot \omega \cdot \sin \varphi + b^2 \cdot \bar{Q}^2 \cdot \varepsilon_q^2 \cdot \omega^2}} \quad ( 2.19 )$$

donde:

$\eta_a$ : Viscosidad aparente

$P$ : Presión

$Q$ : Tasa de capilaridad

$\omega$ : Frecuencia

Complementariamente a este capítulo, el Apéndice A contiene un artículo titulado “Filling Process in Injection Mold: A Review” publicado en la revista *Polymer-Plastics Technology and Engineering*, en 2007. Así mismo se adjuntan tres artículos relacionados al tema, con cuitas del autor.

# Capítulo III

---

## 3 Metodología

En el Capítulo 2 se describieron los fenómenos que toman parte dentro del proceso de inyección en todas sus variantes, por lo que en esta sección se hará un análisis detallado solo de las ecuaciones de interés, es decir, flujo y temperatura, y su relación con el fenómeno a estudiar, viscosidad. Además, se describirá el diseño de los experimentos prácticos.

### 3.1 Descripción del problema

Prácticamente todos los fluidos utilizados en la industria son fluidos no Newtonianos, sin embargo es posible hacer una aproximación y considerarlos como Newtonianos, en el afán de simplificar el modelo, ya que lo interesante del modelo es la interacción o acoplamiento entre temperatura y flujo. Para este experimento se tomarán las siguientes consideraciones:

- El fluido se considerará Newtoniano, es decir, su viscosidad es constante independientemente del esfuerzo de corte al cual sea sometido. La viscosidad dependerá únicamente de sus propiedades termodinámicas.
- El flujo será considerado incompresible, es decir, las variaciones de densidad serán despreciables. Lo anterior debido a que los flujos compresibles son más usados para modelar gases.
- El material se considerará viscoso, es decir con viscosidad diferente de cero.
- El fluido es asumido isotérmico.

Por lo anterior las ecuaciones de flujo serán tipo pseudoplásticos.

El movimiento del fluido será a través de un ducto de sección transversal circular de 4mm y que en sí, describe una curva que responde a la espiral de Arquímedes, como se puede observar en la Figura 3.1.



Figura 3.1. Espiral de Arquímedes con sección transversal circular.

La condición de frontera a la entrada en  $z=0$ , considera un perfil parabólico de velocidades. El flujo a la salida  $z=L$ , será desarrollado. En el centro de la tubería  $r=0$ , se supone simetría y en las paredes se postula que no hay deslizamiento,  $V=0$ . La modelación se realizará considerando índices de viscosidad correspondientes a fluidos pseudoplásticos. Ver Figura 2.5.

## 3.2 Formulación matemática

### 3.2.1 Flujo

Ecuaciones de movimiento de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos incompresibles.

Conservación de momento:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = F_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (3.1)$$

Conservación de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.2)$$

Si el flujo a modelar fuera estacionario, sería posible eliminar los términos de  $t$ , sin embargo se hará el estudio tomando en cuenta  $t$ .

Términos de velocidad y presión.

La velocidad está en función de la posición y del tiempo, como lo muestran las ecuaciones ( 3.3 ), ( 3.4 ) y ( 3.5 ):

$$\bar{V} = \bar{V}(\bar{X}, t) \quad (3.3)$$

$$\bar{V} = \bar{V}(x, y, z, t) \quad (3.4)$$

$$\bar{V} = \begin{cases} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{cases} \quad (3.5)$$

La presión, al igual que la velocidad, esta en función de la posición y el tiempo. Se dice que es parecida a la velocidad debido a que para que haya una diferencia de velocidad, debe haber un diferencia de presión que favorezca el flujo. Compare ecuaciones ( 3.6 ) y ( 3.7 ) con ( 3.3 ) y ( 3.4 ).

$$P = P(\bar{X}, t) \quad (3.6)$$

$$P = P(x, y, z, t) \quad (3.7)$$

Sustituyendo los componentes de la velocidad ( 3.5 ) en la ecuación de Navier-Stokes para  $i=1,2,3$ . Se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = F_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_j \frac{\partial v}{\partial x_j} = F_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v_j \frac{\partial w}{\partial x_j} = F_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \quad (3.10)$$

Sustituyendo los componentes de la posición ( 3.4 ) en las ecuaciones ( 3.8 ), ( 3.9 ) y ( 3.10 ) de Navier-Stokes para  $j=1,2,3$ . Se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.13)$$

Sustituyendo la los componentes de velocidad y posición (i, j) la ecuación ( 3.2 ) de conservación de masa (ecuación escalar) queda como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.14)$$

Las ecuaciones ( 3.11 ) a ( 3.14 ) son las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma general para flujo en tres ejes tomando en cuenta la densidad y la viscosidad.

Condiciones frontera:

#### **-Flujo no estacionario.**

La presión y la velocidad siguen estando en función del tiempo.

$$\bar{V} = (\bar{X}, t)$$

$$\bar{P} = (\bar{X}, t)$$

#### **-Problema bidimensional.**

Si la velocidad no depende de una condición en el espacio, la presión tampoco. Si la velocidad no tiene componente el z, tampoco la presión.

El nuevo sistema queda entonces:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

$$w = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (3.17)$$

Para conservación de momento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.19)$$

Para conservación de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.20)$$

### - Fluido incompresible, $\rho$ =constante

Para conservación de momento: En un fluido en el que las velocidades son muy bajas, los términos de inercia (no lineales) pueden considerarse despreciables en comparación con los efectos de la viscosidad. Lo cual es conocido como flujo de **Stokes** (C. Taylor, 1981), que es comúnmente usado en el procesamiento de fluidos de alta viscosidad como polímeros fundidos.

Tomando en cuenta la que la compresibilidad será nula,  $\rho$  despreciable, y observando la ecuación de continuidad, las ecuaciones de **Stokes** quedan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.22)$$

Para conservación de masa: De la ecuación ( 3.20 ) se puede ver que si el fluido es incompresible  $\rho$ =Cte., la tasa de tiempo de expansión del volumen será cero, entonces la ecuación de continuidad para ambos, flujo estacionario y no estacionario, será:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.23)$$

Con el fin de explicar el significado físico de las ecuaciones, se hará un análisis extra de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible.

Sean las ecuaciones tridimensionales siguientes ( 3.11 ), ( 3.12 ), ( 3.13 ):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Las ecuaciones anteriores puede describirse de la forma:

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Y pueden escribirse de una forma simplificada como:

$$\frac{Dv}{Dt} = g - \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v$$

El significado físico de cada expresión es el siguiente:

$\frac{Dv}{Dt}$	Aceleración o fuerza inercial
$g$	Fuerza de gravedad $g$
$\frac{\nabla P}{\rho}$	Fuerza de presión
$\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v$	Fuerza viscosa

Si se observa la parte izquierda de la ecuación de momento se puede observar lo siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u$$

Aceleración restringida
Aceleración convectiva

Es necesario hacer notar que la ecuación de momento es una ecuación no lineal debido a los términos de inercia conectiva, términos de la forma  $\rho u(\partial u/\partial x)$ .

Retomando, las ecuaciones de Stokes ( 3.21 ) a ( 3.23 ) pueden ser resueltas por varias técnicas como se dijo en el capítulo 2, sin embargo la más usada es la de elemento finito. Dentro de la cual se encuentra la solución para velocidad-presión a través de aproximación de Galerkin.

A continuación se describe el planteamiento de ecuaciones para flujo viscoso no newtoniano (Rao, 1999) en su solución por elemento finito: Sean las ecuaciones de conservación de momento ( 3.21 ), ( 3.22 ) y la ecuación continuidad ( 3.23 ). Puesto que, como se menciono anteriormente, la densidad será despreciable las ecuaciones quedan como:

$$0 = F_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad ( 3.24 )$$

$$0 = F_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad ( 3.25 )$$

Considérese la presión (P), el componente de velocidad en el eje x (u) y en y (v). Los elementos finitos dentro de la región S son p, u y v, que son asumidos como:

$$\begin{aligned} p^{(e)}(x, y) &= \sum_i N_i^p(x, y) P_i^{(e)} = [N^p(x, y)] \bar{P}^{(e)} \\ u^{(e)}(x, y) &= \sum_i N_i^u(x, y) U_i^{(e)} = [N^u(x, y)] \bar{U}^{(e)} \\ v^{(e)}(x, y) &= \sum_i N_i^v(x, y) V_i^{(e)} = [N^v(x, y)] \bar{V}^{(e)} \end{aligned} \quad ( 3.26 )$$

Donde  $N_i^p$ ,  $N_i^u$  y  $N_i^v$  son funciones de interpolación, las cuales no son del mismo orden, necesariamente,  $\bar{P}^{(e)}$ ,  $\bar{U}^{(e)}$  y  $\bar{V}^{(e)}$  son los vectores de nodos desconocidos del elemento e. Por simplicidad se asume  $N_i^u \equiv N_i^v \equiv N_i$  en el siguiente desarrollo.

Usando el método de residuos ponderados de Galerkin es posible escribir cualquier nodo i del elemento e en tres grupos de ecuaciones. La primera de las cuales es:

$$\iint_{A^{(e)}} (x, y) \left[ F_x - \frac{\partial p^{(e)}}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u^{(e)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(e)}}{\partial y^2} \right) \right] dA = 0 \quad (3.27)$$

Donde las funciones forma corresponden al nodo  $i$ , mientras que  $N_i(x, y)$  es usado como función de forma. Integrando la ecuación ( 3.27 ) por partes se obtiene:

$$\begin{aligned} \iint_{A^{(e)}} \left[ -N_i X - \frac{\partial N_i}{\partial x} p^{(e)} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} \right] dA + \int_{C^{(e)}} N_i p^{(e)} l_x dC \\ - \int_{C^{(e)}} \mu N_i \left( \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} l_x + \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} l_y \right) dC = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Donde  $l_x$  y  $l_y$  indican los cosenos directores exteriores normales a la frontera del elemento e,  $C^{(e)}$ . Sustituyendo las ecuaciones ( 3.26 ) en la ecuación ( 3.28 ) se tiene:

$$\begin{aligned} \iint_{A^{(e)}} \left[ -N_i X - \frac{\partial N_i}{\partial x} [N^p] \bar{P}^{(e)} + \left( \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \bar{U}^{(e)} \right] dA \\ - \int_{C^{(e)}} \mu N_i \left( \frac{\partial [N]}{\partial x} l_x + \frac{\partial [N]}{\partial y} l_y \right) \bar{U}^{(e)} dC + \int_{C^{(e)}} N_i [N^p] \bar{P}^{(e)} l_x dC = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

La segunda ecuación es similar a la ( 3.29 ) y puede ser obtenida intercambiando  $x$  y  $y$ ,  $U$  y  $V$  y  $X$  y  $Y$  en la ecuación ( 3.29 ). La tercera ecuación se desprende de la ecuación (continuidad) usando  $N_i^p$  como función de peso:

$$\iint_{A^{(e)}} N_i^p \frac{\partial [N]}{\partial x} \bar{U}^{(e)} dA + \iint_{A^{(e)}} N_i^p \frac{\partial [N]}{\partial y} \bar{V}^{(e)} dA = 0 \quad (3.30)$$

Asumiendo cuadrática la variación para los componentes de velocidad  $u$  y  $v$  y lineal para la presión dentro del elemento triangular, las ecuaciones de los elementos pueden ser escritas en su forma matricial como

$$[K^{(e)}] \bar{\phi}^{(e)} = \bar{P}^{(e)} \quad (3.31)$$

donde:

$$[K^{(e)}]_{15 \times 15} = \begin{bmatrix} [K_1^{(e)}]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 6} & [K_2^{(e)}]_{6 \times 3} \\ [0]_{6 \times 6} & [K_1^{(e)}]_{6 \times 6} & [K_3^{(e)}]_{6 \times 3} \\ -[K_2^{(e)}]^T_{3 \times 6} & -[K_3^{(e)}]^T_{3 \times 6} & [0]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\phi^{(e)}_{15 \times 1} = \{U_1^{(e)} \quad U_2^{(e)} \quad \dots \quad U_6^{(e)}; V_1^{(e)} \quad V_2^{(e)} \quad \dots \quad V_6^{(e)}; -P_1^{(e)} \quad -P_2^{(e)} \quad -P_3^{(e)}\} \quad (3.33)$$

$$\bar{P}^{(e)}_{15 \times 1} = \{P_1^{(e)} \quad P_2^{(e)} \quad \dots \quad P_6^{(e)}; P_7^{(e)} \quad P_8^{(e)} \quad \dots \quad P_{12}^{(e)}; 0 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (3.34)$$

$$K_{1ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mu \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dA \quad (3.35)$$

$$K_{2ij}^{(e)} = - \iint_{A^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j^p dA \quad (3.36)$$

$$K_{3ij}^{(e)} = - \iint_{A^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j^p dA \quad (3.37)$$

$$P_i^{(e)} = \int_{C^{(e)}} N_i \left( \mu \frac{\partial u^{(e)}}{\partial n} - p^{(e)} \right) l_x dC - \iint_{A^{(e)}} N_i X dA \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (3.38)$$

$$P_i^{(e)} = \int_{C^{(e)}} N_i \left( \mu \frac{\partial v^{(e)}}{\partial n} - p^{(e)} \right) l_y dC - \iint_{A^{(e)}} N_i Y dA \quad i=7, 8, \dots, 12 \quad (3.39)$$

Los elementos de la ecuación ( 3.31 ) pueden ser ensamblados como:

$$[K] \bar{\phi} = \bar{P} \quad (3.40)$$

donde:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [K^{(e)}] \quad \bar{\phi} = \sum_{e=1}^E \bar{\phi}^{(e)} \quad \bar{P} = \sum_{e=1}^E \bar{P}^{(e)} \quad (3.41)$$

donde  $E$  es el número de los elementos.

Las ecuaciones anteriores representan la forma general de elemento finito para flujo bidimensional. La Figura 3.2 y Figura 3.3 representan la solución para un ejemplo típico de una vena recta de 6mm de ancho y de 10cm de largo, por la que fluye PEAD con una velocidad inicial de 1m/s. Tal geometría fue mallada con 148 elementos como lo muestra la Figura 3.2. En la Figura 3.3 puede observarse que el flujo máximo se da en el centro de la vena (rojo) y que es nulo al contacto con las paredes (azul), como lo explica la Figura 2.5 y Figura 2.6 del capítulo anterior.

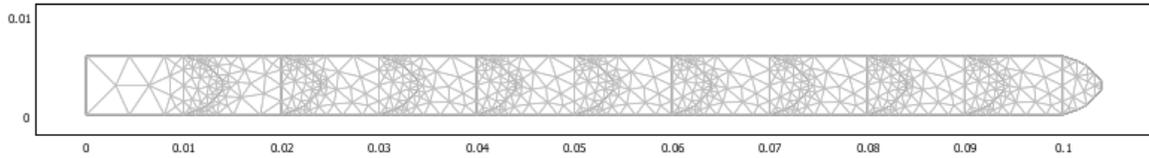


Figura 3.2. Mallado para solución en flujo y temperatura (mallado en COMSOL).

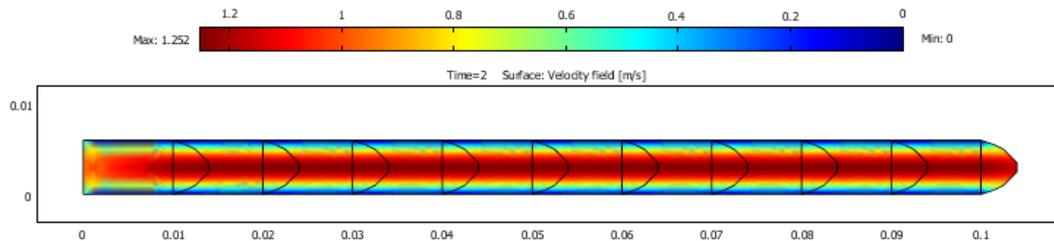


Figura 3.3. Solución para el campo de flujo.

### 3.2.2 Ecuaciones de energía

Las ecuaciones anteriores modelan únicamente el flujo del modelo, sin embargo, un modelo en que se pueda observar el efecto del cambio de fase (líquido-sólido) requiere modelar la transferencia de calor.

La transferencia de calor y masa son un proceso cinemático que puede ser estudiado junto o de manera separada. En esta tesis se estudiarán las ecuaciones por separado y, posteriormente, se acoplarán para su solución.

#### Termodinámica y transferencia de calor

En la mayoría de los problemas de transferencia de calor, sería poco objetivo atribuir la temperatura de un sistema a un simple promedio de temperatura, y por eso se usará una formulación local, definiendo la densidad de la tasa de flujo de calor (o simplemente flujo de calor) como  $\dot{q} \equiv d\dot{Q}/dA$ . De acuerdo con el fenómeno físico de transporte explicado abajo, el flujo de calor puede ser como una diferencia de temperatura entre un sistema y el medio ambiente en los tres modelos clásicos como conducción, convección y radiación.

$$\dot{q} = K\Delta T \begin{cases} \text{conducción} & \bar{q} = -K\nabla T \\ \text{convección} & \dot{q} \equiv h(T - T_\infty) \\ \text{radiación} & \dot{q} = \varepsilon\sigma(T_4 - T_0^4) \end{cases} \quad (3.42)$$

Estos tres modelos de flujo de calor pueden también ser vistos como: transferencia de calor en materiales (conducción), transferencia de calor en fluidos (convección) y transferencia de calor a través de un espacio vacío (radiación).

Note que el calor (con relación a la parte integral en un volumen de control cerrado en termodinámica) tiene el signo positivo cuando este entra al sistema, pero el flujo de calor relacionado al área de control, no le puede ser atribuido un signo mientras no se seleccione “nuestro lado”. Para la conducción de calor, de forma vectorial, establece que el flujo de calor es un campo vectorial alineado con el campo del gradiente de temperatura, y tiene un sentido opuesto. Para convección y radiación, sin embargo, tiene una forma escalar, y, aunque se puede pasar a su forma vectorial multiplicando por el vector unitario normal a la superficie, es comúnmente usada la forma escalar que sugiere que, en un problema típico de transferencia de calor, la convección y la radiación son únicamente condiciones de frontera y no un campo de ecuaciones como para la conducción, ecuación (3.42). Note también que la conducción de calor envuelve variables de campo: como el campo escalar para  $T$  y el campo vectorial para  $\bar{q}$ , con las ecuaciones diferenciales asociadas que relacionan uno con otro (porque únicamente es involucrado un pequeño rango de interacciones), las cuales son ecuaciones diferenciales parciales ya que están relacionados el tiempo y algunas coordenadas espaciales.

Otro punto importante en (3) es la dependencia no lineal de la temperatura de radiación, que fuerza a usar valores absolutos para temperatura en cualquier ecuación con efectos de radiación. Los problemas de convección y radiación son usualmente lineales en temperatura (si  $k$  y  $h$  son independientes de  $T$ ), y es una práctica común trabajar en grados Centígrados en vez de temperaturas absolutas.

Finalmente note que tanto (1) como (2) corresponden a la primera ley (conservación de la energía) y (3) incorpora la segunda ley consecuencia del flujo de calor descendente en el campo de  $T$  (de caliente a frío).

## Fenómeno físico de transporte

Tradicionalmente se consideran tres formas de transferencia de energía: conducción, convección y radiación; todos los procesos de transferencia de calor involucran una o más de estas formas.

### Conducción

La conducción es el transporte de energía térmica en sólidos y fluidos estáticos, y puesto que es principalmente un fenómeno molecular, sería de esperarse que la ecuación básica que se utiliza para describir este proceso sea similar a la expresión que se utiliza en transferencia molecular de momento. Dicha ecuación fue establecida por primera vez en 1882 por Fourier en la forma (Welty,2004):

$$\frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (3.43)$$

donde  $q_x$  es la rapidez de transferencia de calor en la dirección  $x$ ,  $A$  es el área normal a la dirección de flujo de calor,  $dT/dx$  es el gradiente de temperatura en la dirección  $x$  y  $k$  es la conductividad térmica. La ecuación ( 3.44 ) es una relación más general para el flujo de calor,

$$\bar{q} = \frac{q}{A} = -k\nabla T \quad (3.44)$$

que expresa el flujo de calor como proporcional al gradiente de temperatura. Se observa que la constante de proporcionalidad es la conductividad térmica, que juega un papel similar al de la viscosidad en la transferencia de momento. El signo negativo de la ecuación indica que el flujo de calor está en la dirección de un gradiente de temperatura negativo. La ecuación ( 3.44 ) es la forma vectorial de la *ecuación de razón de cambio de Fourier*, que con frecuencia se conoce como la primera ley de Fourier de la conducción de calor.

La conductividad térmica,  $k$ , se define por la ecuación ( 3.44 ), se supone independiente de la dirección de la ecuación ( 3.44 ); así pues, esta expresión se aplica sólo a un medio isotrópico.

Entonces, la ley de Fourier tiene un carácter local, es decir, el flujo de calor es proporcional al gradiente local de temperatura e independiente del resto del campo de temperatura  $T$ .

La conductividad térmica es una propiedad de un medio conductor y, lo mismo que la viscosidad, es principalmente una función de la temperatura y varía de manera significativa con la presión solo en el caso de gases sujetos a presiones elevadas.

## Convección

La transferencia de calor debida a la convección implica el cambio de energía entre una superficie sólida (con temperatura  $T$ ) y un fluido en movimiento adyacente ( $T_\infty$ ).

La ecuación de la razón de cambio para la transferencia de calor por convección fue expresada por primera vez por Newton en 1701 y se conoce como la ecuación de razón de cambio de Newton o “ley” de Newton del enfriamiento. Esta ecuación es:

$$\frac{q}{A} = h\Delta T \quad (3.45)$$

También escrita como:

$$\dot{q} = h(T - T_\infty) \quad (3.46)$$

donde  $q$  es la rapidez de transferencia de calor por convección,  $A$  es el área normal a la dirección del flujo,  $\Delta T$  es la diferencia de temperaturas entre la superficie y el fluido, y  $h$  es el coeficiente de transferencia de calor por convección. La ecuación ( 3.46 )no es una ley sino una definición del coeficiente  $h$ .

## Radiación

La transferencia de calor radiante a diferencia de la conducción y de la convección es que no se requiere de ningún medio para su propagación; de hecho, la transferencia de energía por radiación es máxima cuando las dos superficies que intercambian energía se encuentran separadas por un vacío perfecto. Sin embargo, un hecho notable es que en un

proceso tan complejo como la transferencia de calor por radiación puede describirse mediante una expresión analítica razonablemente simple.

La rapidez de emisión de energía de un radiador perfecto o un cuerpo negro esta dada por la ecuación ( 3.47 ).

$$\frac{q}{A} = \sigma T^4 \quad ( 3.47 )$$

también escrita como:

$$q = \sigma(T^4 - T_0^4) \quad ( 3.48 )$$

donde  $q$  es la rapidez de emisión de energía radiante,  $A$  es el área de la superficie emisora,  $T$  es la temperatura absoluta y  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ ). La constante de proporcionalidad que relaciona el flujo de la energía radiante con la cuarta potencia de la temperatura absoluta se conoce frecuentemente como la ley de Stefan-Boltzmann de la radiación térmica.

#### Principio de conservación de la Energía.

El Principio de conservación de energía puede ser aplicado para obtener las ecuaciones del sistema mostrado en la Figura 3.4 como:

$$E_{ent} + E_{gen} = E_{inc} + E_{sal} \quad ( 3.49 )$$

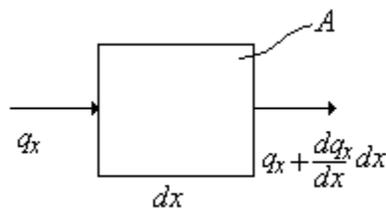


Figura 3.4. Conducción uni-dimensional en un cuerpo aislado.

La ecuación ( 3.49 ) establece que la energía entrante al volumen de control mas la energía generada por una fuente interna es igual al incremento de energía interna mas la energía saliente del volumen de control (Hutton, 2004)

La ecuación ( 3.49 ) puede expresarse como

$$q_x A dt + Q A dx dt = \Delta U + \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) A dt \quad ( 3.50 )$$

para una dimensión, y para dos como

$$q_x dy + q_y dx + Q dy dx = \Delta U + \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx + 2h(t - T_a) dy dx \quad ( 3.51 )$$

donde:

$q_x, q_y$  = Flujo de calor a través de la frontera

$Q$  = Tasa de generación de calor interno

$U$  = Energía interna

$h$  = Coeficiente de convección de las superficies del elemento diferencial

$T_a$  = Temperatura ambiente del exterior

El flujo de calor es expresado en términos de el gradiente de temperatura a través de la Ley de Fourier de conducción, como

$$\begin{aligned} q_x &= -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -k_y \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \quad ( 3.52 )$$

donde  $k_x, k_y$  son las conductividades térmicas del material en la dirección  $x$  y  $y$ , respectivamente,  $T=T(x,y,t)$  es la temperatura. El incremento de la energía interna es

$$\Delta U = c \rho dy dx dT \quad ( 3.53 )$$

sustituyendo las ecuaciones ( 3.52 ) en ( 3.51 ) se tiene

$$Q dy dx = c \rho dy dx dT + \frac{\partial}{\partial x} \left( -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy dx + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dx + 2h(T - T_a) dy dx \quad ( 3.54 )$$

simplificando

$$Q = c\rho dT + \frac{\partial}{\partial x} \left( -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + 2h(T - T_a) \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q - c\rho dT = 2h(T - T_a) \quad (3.56)$$

explicando los términos de la ecuación se tiene

$Q$  = Calor generado por una fuente interna

$c\rho dT$  = Incremento de energía interna (disipación viscosa)

$2h(T - T_a)$  = Transferencia de calor por convección

$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right)$  = Transferencia de calor por conducción

### Condiciones de frontera

#### Flujo estacionario

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q - c\rho dT = 2h(T - T_a) \quad (3.57)$$

Si el flujo se considera estacionario,  $\Delta U = 0$ , por lo que se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = 2h(T - T_a) \quad (3.58)$$

### Solución de ecuaciones

Al respecto de la solución de las ecuaciones, de movimiento y las de temperatura, es necesario aclarar que se resolverán de manera separada y posteriormente se podrá hacer una interacción entre ellas.

Considere las ecuaciones de transferencia de calor bidimensional para conducción y convección en un medio homogéneo, ( 3.58 ), tomando en cuenta el espesor  $t$  (Hutton, 2004).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( tK_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( tK_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Qt = 2h(T - T_a) \quad (3.59)$$

las condiciones iniciales son:

Esencial (Dirichlet)  $\varphi = \bar{\varphi}$  en la frontera  $\Gamma_\phi$

Natural (Newmann)  $q = \bar{q}$  en la frontera  $\Gamma_q$

Si el cuerpo se descompone en elementos, la distribución de temperatura en cada elemento es descrita de la forma

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^M N_i(x, y) T_i = [N] \{T\} \quad (3.60)$$

donde  $N_i(x, y)$  es la función de interpolación asociada con la temperatura nodal  $T_i$ ,  $[N]$  es la matriz renglón de funciones de interpolación, y  $\{T\}$  es la matriz columna (vector) de temperaturas nodales.

Aplicando el método de elemento finito de Galerkin, el residuo ponderado para la ecuación ( 3.59 ) queda como

$$\iint_A N_i(x, y) \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( tK_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( tK_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Qt - 2h(t - T_a) \right) dA = 0 \quad i = 1, M \quad (3.61)$$

donde el espesor  $t$  es una constante y puede sacarse de la integral. Ya que estrictamente ablando la integración es sobre un volumen, para desarrollar las ecuaciones bidimensionales, es necesaria una ligera manipulación matemática.

Considere las primeras dos integrales de la ecuación ( 3.61 ) como

$$t \iint_A \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) N_i + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) N_i \right) dA = -t \iint_A \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} N_i + \frac{\partial q_y}{\partial y} N_i \right) dA \quad (3.62)$$

y note que se uso la ley de Fourier para la ecuación. A manera de ilustración (Figura 3.5) es posible asumir que

$$t \iint_A \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} N_i \right) dA = t \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} N_i \right) dx dy \quad (3.63)$$

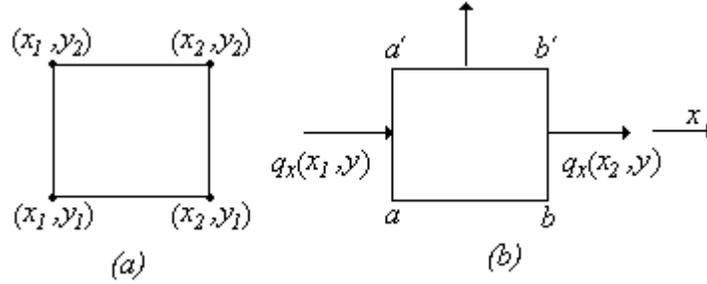


Figura 3.5. Fronteras del flujo de calor en dirección  $x$ .

integrando por partes en  $x$  con  $u = N_i$  y  $dv = \partial q_x / \partial x dx$ , se obtiene, formalmente

$$\begin{aligned} t \iint_A \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} N_i \right) dA &= t \int_{y_1}^{y_2} q_x N_i \Big|_{x_1}^{x_2} dy - t \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left( q_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) dx dy \\ &= t \int_{y_1}^{y_2} q_x N_i \Big|_{x_1}^{x_2} dy + t \int_A k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dA \end{aligned} \quad (3.64)$$

analizando el sentido físico del término

$$t \int_{y_1}^{y_2} q_x N_i \Big|_{x_1}^{x_2} dy = t \int_{y_1}^{y_2} [q_x(x_2, y) N_i(x_2, y) - q_x(x_1, y) N_i(x_1, y)] dy \quad (3.65)$$

el integrando es el valor ponderado ( $N_i$  es la función ponderada escalar) de la transferencia de calor en dirección  $x$  a través de los lados  $a-a'$  y  $b-b'$  en la Figura 3.5b. Entonces, cunado se integra en  $y$ , se obtiene la diferencia en la tasa de flujo de calor ponderado en la dirección  $x$  a través de  $b-b'$  y  $a-a'$ , respectivamente. Note el hecho de que la tasa de flujo de calor en la dirección  $x$  a través de las fronteras horizontales  $a-b$  y  $a'-b'$  es cero, la integral sobre el área del elemento es equivalente a la integral alrededor del perímetro del elemento, que es dado por

$$t \iint_A q_x N_i dA = t \oint_S q_x N_i n_x dS \quad (3.66)$$

en la ecuación (3.66),  $S$  es el perímetro del elemento y  $n_x$  es la componente en  $x$  del vector normal saliente (perpendicular) al perímetro. En este ejemplo, usando un elemento

rectangular, se tiene  $n_x = 1$  a lo largo de  $b-b'$ ,  $n_x = 0$  a lo largo de  $b'-a'$ ,  $n_x = -1$  a lo largo de  $a'-a$ , y  $n_x = 0$  a lo largo de  $a-b$ . No te que el uso de la componente del vector normal asegura que la dirección natural del flujo de calor es contada apropiadamente.

Un argumento idéntico se puede observar para la dirección  $y$  de la ecuación ( 3.62 ).

$$t \iint_A \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) N_i dA = -t \oint_S q_y N_i n_y dS - \int_A k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} dA \quad (3.67)$$

Estos argumentos, basados en el caso específico de un elemento rectangular, se desarrollaron con el motivo de aplicar la relación conocida como el teorema de Green-Gauss que establece: Siendo  $F(x,y)$  y  $G(x,y)$  funciones continuas definidas en una región del plano  $x-y$  ( en este caso el área del elemento), entonces

$$\iint_A \left( \beta \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial G}{\partial y} \right) = \oint_S (\beta F n_x + \beta G n_y) dS - \iint_A \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} dA \quad (3.68)$$

Regresando a la ecuación ( 3.62 ),  $F=k_x \partial T / \partial x$ ,  $G=k_y \partial T / \partial y$ , y  $\beta=N_i(x,y)$ , y aplicando el teorema de Green-Gauss se obtiene

$$\begin{aligned} & t \iint_A \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) N_i + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) N_i \right) dA \\ &= -t \oint_S (q_x n_x + q_y n_y) N_i dS - t \iint_A \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dA \end{aligned} \quad (3.69)$$

Regresando a la ecuación de residuos de Galerkin representada por la ecuación ( 3.61 ) y sustituyendo las relaciones desarrolladas a través de l teorema de Green-Gauss se tiene

$$\begin{aligned} & \iint_A \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) t dA + 2h \iint_A T N_i dA \\ &= \iint_A Q N_i t dA + 2h T_a \iint_A N_i dA - t \oint_S (q_x n_x + q_y n_y) N_i dS \end{aligned} \quad (3.70)$$

$i = 1, M$

como el sistema de  $m$  ecuaciones para la formulación bidimensional de elemento finito del método de Galerkin.

Usando la ecuación ( 3.60 ) para convertir la ecuación ( 3.70 ), se tiene

$$\begin{aligned} \iint_A \left( k_x \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]^T \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] + k_y \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]^T \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \right) \{T\} t dA + 2h \iint_A [N]^T [N] \{T\} dA \\ = \iint_A Q [N]^T t dA + 2h T_a \iint_A [N]^T dA - \oint_S q_s n_s [N]^T t dS \end{aligned} \quad (3.71)$$

que es de la forma

$$[k^{(e)}] \{T\} = \{f_Q^{(e)}\} + \{f_h^{(e)}\} + \{f_g^{(e)}\} \quad (3.72)$$

como se desea.

La comparación de las ecuaciones ( 3.71 ) y ( 3.72 ) muestra que la matriz de conductancia es

$$[k^{(e)}] = \iint_A \left( k_x \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]^T \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] + k_y \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]^T \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \right) t dA + 2h \iint_A [N]^T [N] dA \quad (3.73)$$

el cual tiene una matriz simétrica de  $M \times M$  para un elemento de  $M$  nodos. Mientras se use el termino de *matriz de conductancia*, el primer termino de la integral representa la *matriz de rigidez*, mientras la segunda integral representa la *convección* de las superficies laterales de alrededor. Si en las superficies laterales no hay convección (superficies aisladas) los términos de convección se eliminan haciendo  $h=0$ .

Los elementos que fuerzan las funciones son descritos en la matriz columna (vector) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \{f_Q^{(e)}\} &= \iint_A Q [N]^T t dA = \iint_A Q \{N\} t dA \\ \{f_h^{(e)}\} &= 2h T_a \iint_A [N]^T dA = 2h T_a \iint_A \{N\} dA \\ \{f_g^{(e)}\} &= -\oint_S q_s n_s [N]^T t dS = -\oint_S q_s n_s \{N\} t dS \end{aligned} \quad (3.74)$$

donde  $[N]^T = \{N\}$  es la matriz columna  $M \times 1$  de las funciones de interpolación.

Las ecuaciones ( 3.72 ) a ( 3.74 ) representan la forma general de elemento finito para conducción de calor bidimensional con convección en las superficies. Note en particular que estas ecuaciones son validas para cualquier elemento arbitrario que tenga  $M$  nodos y además valido para funciones de interpolación de cualquier orden (lineal cuadrática cúbica, etc).

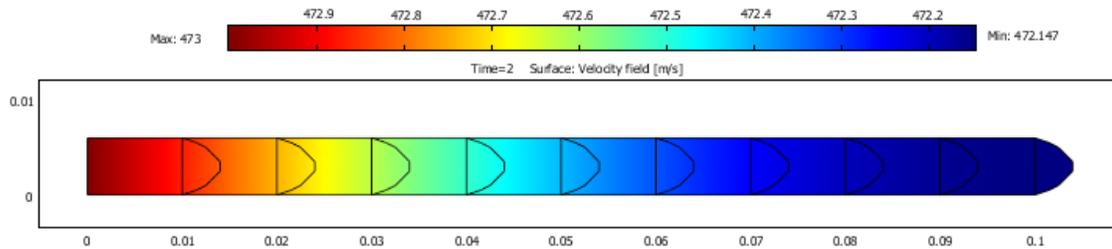


Figura 3.6. Solución para campo el de temperatura (graficado en °K)

La Figura 3.6 muestra un ejemplo de la modelación de flujo de temperatura en una vena de 6mm de ancho por 10cm de largo con las paredes aisladas y una temperatura en el extremo izquierdo de 200°C. El mallado es el mismo de la Figura 3.9 con el fin de homogenizar parámetros en experimentos. Los datos graficados corresponden al polietileno a excepción de la conductividad térmica  $k$ , que se subió a 50000 [W/(m\*K)] para hacer más evidente el flujo.

### 3.3 Solución teórica (acoplamiento de ecuaciones)

En esta sección se hará el acoplamiento de las ecuaciones de flujo y temperatura mediante un proceso iterativo entre dichas ecuaciones.

Para acoplar las ecuaciones es necesario integrar las ecuaciones de conservación de masa, de momentum y de energía, ( 3.21), ( 3.22 ), ( 3.23), ( 3.50 ). Las tres primeras están implícitas en las ecuaciones de Navier-Stokes y la cuarta es la ecuación de la energía. Sin embargo, hace falta una ecuación más, una ecuación de acoplamiento. En este caso se usará la ecuación de Arrhenius ( 2.17) que relaciona viscosidad con temperatura. Para este caso, en el que se usan temperaturas bajas, 200°C y menores, se usará la ecuación básica de Arrhenius ( 2.17), ya que para mayor rango de temperaturas por ejemplo para problemas de fundición se usa un ecuación generalizada (WLF).

#### 3.3.1 Desarrollo del experimento

La solución se hará mediante un proceso iterativo entre las ecuaciones, dicho proceso se describe a continuación y se muestra de manera gráfica en la Figura 3.7.

1. Inicializar valores de temperatura velocidad, viscosidad y densidad en las ecuaciones.
2. Resolver las ecuaciones de flujo para velocidad.
3. Resolver las ecuaciones de energía para temperatura, tomando en cuenta la velocidad encontrada en la zona anterior y la temperatura anterior.
4. Resolver Arrhenius para viscosidad, tomando en cuenta la solución de temperatura de la zona anterior.
5. Actualizar los valores de entrada para viscosidad en Navier-Stokes y repetir a partir de 2, hasta observar convergencia en viscosidad.

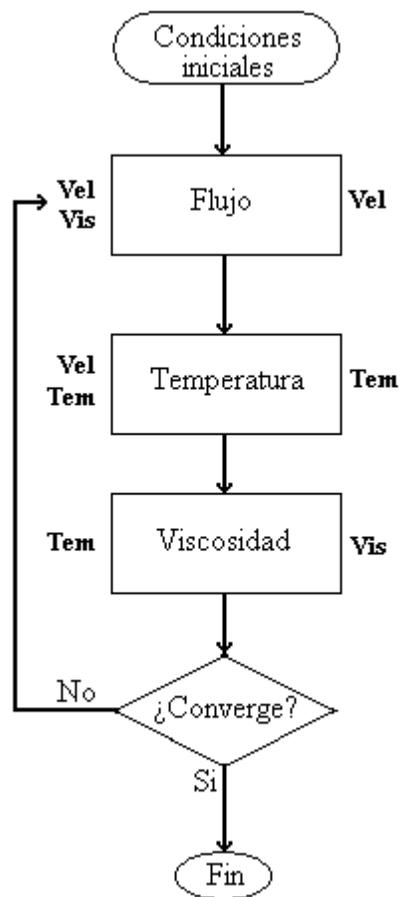


Figura 3.7. Diagrama de flujo del problema de acoplamiento.

La modelación se llevará a cabo en el programa de análisis de elemento finito COMSOL. Las ecuaciones acopladas modelarán el comportamiento del flujo con efecto de solidificación. Las pruebas iniciales se hicieron en una geometría de prueba que representa un una vena recta del molde. Se podrían hacer en la vena espiral del molde, sin embargo se

tendría que considerar la vorticidad de las partículas lo cual es muy complejo para lo que desea comprobar.

La vena tiene un ancho de 6mm y un largo de 100mm como se muestra en la Figura 3.8. El flujo irá de izquierda a derecha. En el extremo derecho se modificó la salida de la vena para poder tomar una medida lejos de la frontera de salida.

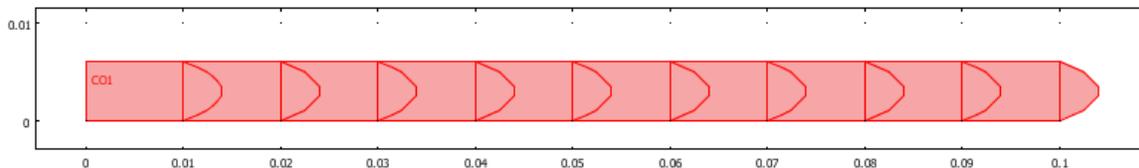


Figura 3.8. Estructura base (metros)

El mallado se hizo de manera automática mediante un algoritmo propio de COMSOL y el problema de estudio se dividió en 148 elementos triangulares como lo muestra la Figura 3.9.



Figura 3.9. Mallado de sección (148 elementos triangulares).

La vena se dividió en 10 zonas que se evaluarán de manera independiente para ir evaluando las condiciones de operación en cada zona y saber en que sección deja de fluir. La Figura 3.10 muestra las zonas de división.

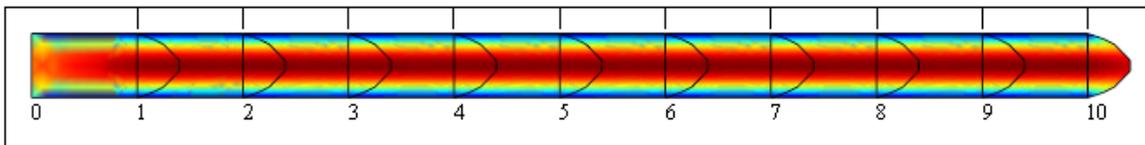


Figura 3.10. Zonas de aplicación.

En cada sección se traza una línea vertical sobre la cual coinciden los nodos del mallado para que la evaluación sea puntual.

Para la medición de flujo es posible obtener una velocidad promedio en la línea de cruce de zona, sin embargo para la solución de temperatura se obtendrá la temperatura por puntos y se tomará el promedio de ellos. Finalmente, de cada zona se obtendrán los valores de velocidad temperatura y viscosidad que serán realimentados para la evaluación de la siguiente zona.

Las condiciones de frontera que se tomaron fueron las siguientes:

- Paredes sean aisladas,
- Temperatura de entrada de 200 °C ( temperatura de inyección típica para polietileno)
- Temperatura ambiente a la salida de la vena (tomada por convención en 30°C).

La Figura 3.11 muestra la distribución de condiciones, por simplicidad solo se muestra una sección de las diez programadas.

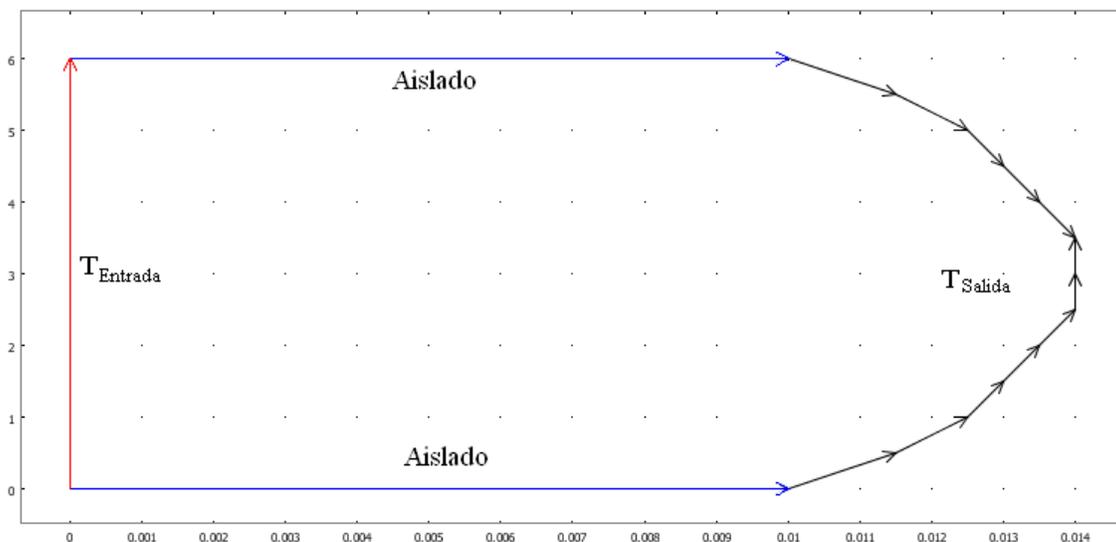


Figura 3.11. Condiciones frontera.

El proceso de evaluación se inicia definiendo las condiciones iniciales para la primer zona, posteriormente se evalúa y los resultados obtenidos pasan a ser las condiciones iniciales de la segunda zona, el proceso se repetirá hasta tener una convergencia en

viscosidad. Es de esperarse que esa convergencia se de cuando la temperatura de entrada disminuya hasta coincidir con la de salida, temperatura ambiente. Este momento indicará que la muestra se encuentra cercana a la temperatura ambiente y en estado sólido. Ver Figura 3.7.

### **3.4 Desarrollo experimental**

#### **Diseño de dispositivo**

Para llevar a cabo las pruebas, son necesarias dos etapas: la primera, es el desarrollo de los accesorios y mecanismos de los que se tomará ventaja para realizar el experimento, estos son: el excitador y el molde. En segundo termino, se propondrán los pasos a seguir en el proceso experimental. La siguiente sección muestra cada uno de ellos de manera detallada.

#### **Vibrador**

Este aparato consta de dos dispositivos, por un lado, el mecanismo que transmite la vibración al polímetro y que esta en contacto directo con el, y por otro, el mecanismo que genera dicha vibración. Ver Figura 3.12.

#### **Transmisor**

Existen una gran cantidad de maneras de transmitir la excitación mecánica al molde, por ejemplo: se puede hacer que una de las paredes del molde vibre y así transmita la vibración al polímetro que cruce a través de ella (Piau J. M., Piau M., 2002, 2005 y Martins M., Covas J. A., 2002) o que un canal se elonge para transmitir la vibración (Gorman et al., 2000), etc.

Sin embargo, la idea principal en esta investigación es desarrollar un accesorio de funcionamiento sencillo y de fácil montaje. Para este caso se usará un mecanismo mecánico que excitara el flujo de manera directa, es decir, estará en contacto directo con el plástico fundido.

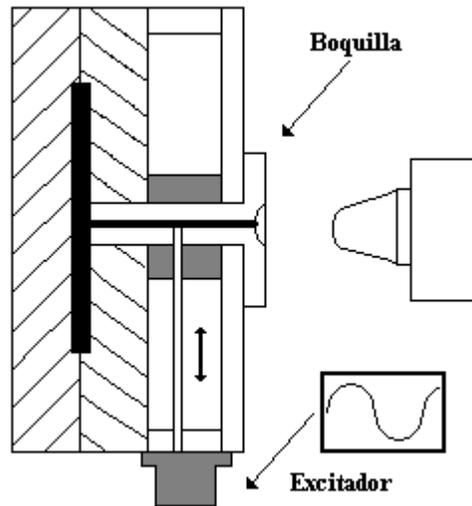


Figura 3.12. Diseño esquemático de montaje.

La Figura 3.13 muestra un bosquejo general del diseño en el que se puede apreciar como el transmisor “abraza” la boquilla de inyección, esto, con el fin de favorecer que el contacto con el fluido sea lo más directo posible y lo mas cercano a la cavidad del molde, por otro lado, a pesar de que el vibrador esta colocado de manera perpendicular al flujo, esta colocación favorece la sencillez del instrumento ya que de lo contrario, el mecanismo se haría más complejo, contraponiéndose a la idea original de sencillez.

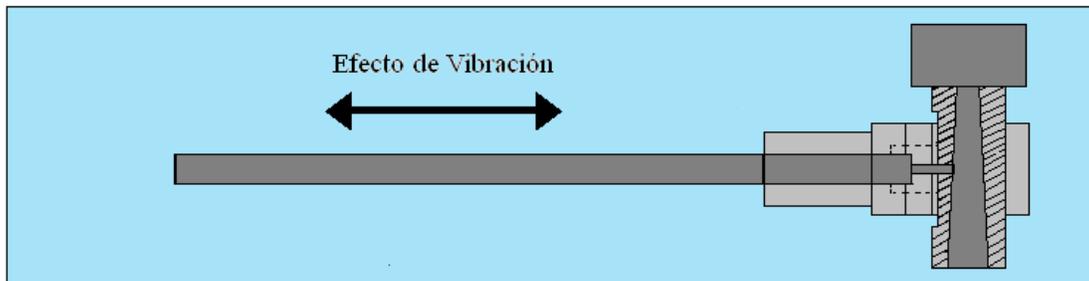


Figura 3.13. Instalación del excitador sobre la boquilla de inyección.

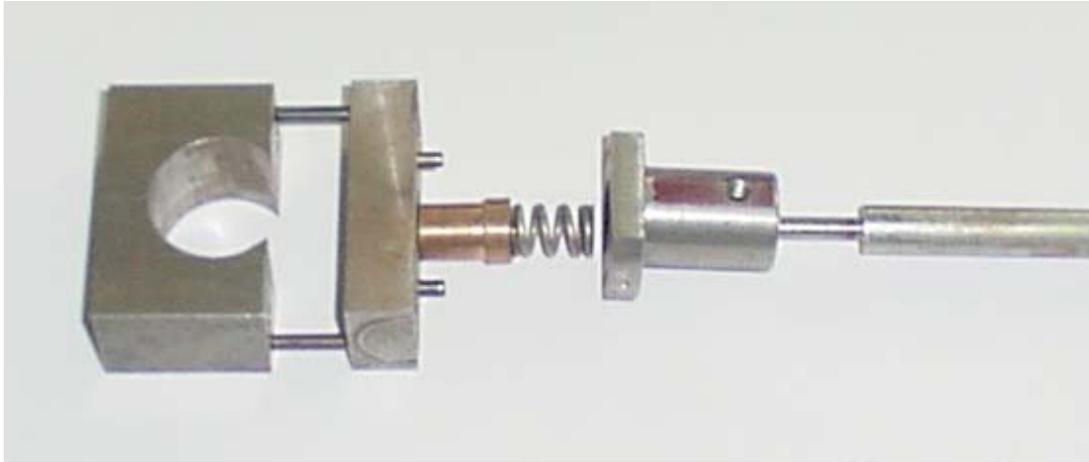


Figura 3.14. Componentes del excitador.

La Figura 3.14 muestra las partes de las que está compuesto el transmisor y que son, de izquierda a derecha: la abrazadera que cubrirá la boquilla, un buje de bronce a través del cual se desliza el vástago, un resorte para favorecer el regreso del vástago y una cubierta. El mecanismo, ya montado en la boquilla, puede verse en la Figura 3.15.



Figura 3.15. Transmisor montado sobre la boquilla.

## Generador

Existen una gran cantidad de actuadores de vibración, su selección dependerá de la aplicación a la que se dedicarán. Por ejemplo, existen desde actuadores piezoeléctricos para aplicaciones de alta frecuencia y poca fuerza, hasta electro hidráulicos para frecuencias

menores con una mayor fuerza y un mayor desplazamiento. Y las tecnologías van desde vibradores sónicos y microondas, hasta electromagnéticos y mecánicos.

En la etapa de investigación generalmente se usa un vibrador de amplio rango de frecuencia, sin embargo, una vez caracterizada la necesidad, según el polímero a usar, es posible usar un mecanismo sencillo y barato para uso de producción y que opere en un rango limitado de frecuencia, seleccionado para cada tipo de material.

Yin y Qu (2006), entre otros, han investigado las frecuencias en las que la vibración favorecen diferentes tipos de flujo observando frecuencias óptimas alrededor de 5Hz. Frecuencia que es baja comparada con otros procesos que usan vibración, como el caso de la fundición en la que se usa frecuencias de alrededor de 100Hz (Abu-Dheir, 2005).

Como un primer paso para la demostración de la hipótesis, y sabiendo que las frecuencias de operación serían bajas, se desarrolló un vibrador mecánico ajustable en frecuencia y en amplitud, basado en un mecanismo leva seguidor, que consta de una leva excéntrica ajustable. Dicho mecanismo se ocupó en la primer fase de pruebas.

La Figura 3.16 muestra el diseño conceptual del aparato, el cual consta de tres partes principales: la base de giro y dos levas excéntricas. La parte fija, o base, por un lado soportará a las dos levas excéntricas, parte superior, y por otro, parte inferior, se fijará a la flecha impulsora. La configuración de las levas en posición opuesta describe un círculo concéntrico a la base, sin embargo dicho círculo puede ser des-centrado con la interacción de ellas.

Como complemento, la leva tendrá un seguidor, el cual estará montado en la misma base rígida del motor y será el encargado de transmitir el movimiento al interior del molde, a través del mecanismo transmisor. Ver figura Figura 3.17 y Figura 3.18.



Figura 3.16. Mecanismo de leva ajustable.



Figura 3.17. Montaje de mecanismo generador con respecto al molde.

Este dispositivo es impulsado por un motor de CA el cual es controlado a través de un variador de frecuencia con el fin de variar las revoluciones por minuto (RPM), y con ello la frecuencia de la onda. El ajuste de la leva cambiará las amplitudes de la onda, que en esencia serán una ondas senoidales.



Figura 3.18. Mecanismo leva-seguidor.

Ya que ésta es una etapa inicial, es posible que la onda senoidal no este bien definida, sin embargo una onda de características similares sería suficiente. Liu (2005) hizo el experimento de sensar la onda dentro del molde obteniendo que la onda no es exactamente una senoidal, sin embargo, los resultados fueron muy buenos para las pruebas.

### **Molde experimental**

Existen varias maneras de probar la mejora del flujo, como puede ser: medir la viscosidad del plástico con un rehómetro (Bossi, 1993), medir el perfil de flujo con alguna aplicación de procesamiento de imágenes o usar un molde experimental que permita hacer la comparación por inyección directa, caso que Clavería et al., (2005) llamaron rehómetro no convencional. Para la presente investigación se usará el tercer caso.

El diseño de molde en espiral, (Clavería et al., 2005, Abu-Dheir et al., 2005), se ha usado para hacer múltiples pruebas de mejoramiento de flujo. Dicho molde puede responder a diferentes matrices o patrones, en este caso se selecciono una espiral de Arquímedes, lo anterior a razón de que ésta tiene una gran cantidad de características que facilitaran el futuro cálculo o análisis, como son: La distancia entre espiras es constante, existe un método , tanto analítico como práctico, para medir su longitud y, así mismo, su forma puede ser trazada respondiendo a una ecuación matemática o a una representación gráfica simple. Ver Figura 3.19.

La espiral de Arquímedes se define como el lugar geométrico de un punto moviéndose a velocidad constante sobre una recta que gira sobre un punto de origen fijo a

velocidad angular constante. En coordenadas polares ( $R, \theta$ ) la espiral de Arquímedes puede ser descrita por la ecuación ( 3.75 ):

$$R = a \times \theta \quad ( 3.75 )$$

3.5

Donde:

$R$ : Modulo o distancia al origen

$a$ : Constante real

$\theta$ : Desplazamiento angular

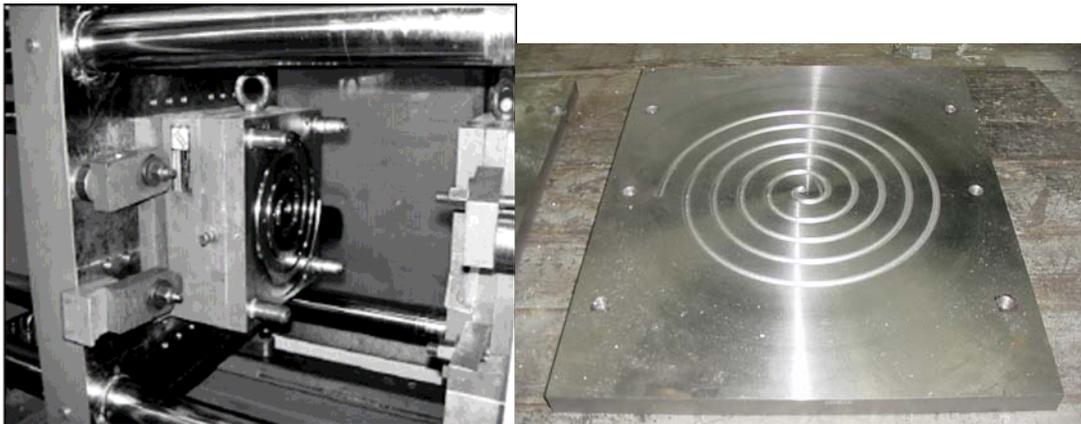


Figura 3.19. Molde diseñado siguiendo la espiral de Arquímedes.

El perfil de la vena de la espiral es redondo con el fin de obtener un perfil simétrico y parabólico en las velocidades. La vena fue diseñada y manufacturada con un diámetro de 6mm.

### **Procedimiento del experimento**

Para este experimento se usa polietileno de alta densidad (HDPE, PEAD 60120 de PEMEX) ya que es un polímero con buenas propiedades físicas y que además no tiene mayores problemas en la inyección, como de absorción de humedad entre otras. Algunas de las propiedades que hacen del polietileno una materia prima muy conveniente para miles de artículos manufacturados son: poco peso, flexibilidad, tenacidad, alta resistencia química y propiedades eléctricas sobresalientes (Guerrero et al, 2003).

Dicho polímero se inyectará usando una máquina inyectora marca Husky de 200 ton. La temperatura ajustada en la máquina para el experimento fue de 140°C. (La temperatura

oscilo por el controlador  $\pm 15$  °C), el ciclo de inyección fue semi-automático con una tiempo de duración de 8 seg. Debido a la cantidad de ciclos del experimento y al tamaño de pieza, no fue necesario utilizar un sistema de enfriamiento para el molde.

La metodología que se siguió en el experimento fue la siguiente: Las variables de temperatura, velocidad y tiempo permanecen constantes, lo único que cambiara de una prueba a otra será la aplicación de la vibración en el proceso de llenado, es decir, se harán dos ciclos de experimentos, uno con vibración y otro sin ella. Se harán por lo menos un ciclo de 9 pruebas para cada frecuencia, siendo estas: 0 (sin vibración), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 19 Hz respectivamente, elegidas de manera heurística.

Cabe mencionar, al hablar de resultados, que estos se medirán solo a través de comparación, tanto en longitud como en peso, entre una prueba que no tuvo vibración y otra donde si la hubo.

Lo que deberá observarse en el experimento es el desplazamiento del fluido dentro del molde, el cual, según la teoría, deberá desplazarse en mayor cantidad en un ciclo con vibración, debido al momentáneo cambio de viscosidad, producto de la vibración. Los resultados se medirán de dos maneras: En la primera, se medirá el desplazamiento con un transportador de preescisión calibrado en grados y debido a la forma del patrón inyectado la longitud se medirá en desplazamiento angular, es decir en grados o radianes (Radianes para este caso). Figura 3.20..



Figura 3.20. Medición de longitud.

En la segunda medición, las pruebas serán pesadas con el afán de comprobar que en una muestra en que uso vibración la cantidad de plástico inyectado es mayor en comparación a la de una muestra donde no la hubo. Figura 3.21.



Figura 3.21. Medición de peso.

Existe una tercer forma que es a través de las ecuaciones que describen el perímetro de la espiral, sin embargo también son soluciones aproximadas, por lo que solo se reaporan las dos primeras.

En el Apéndice B se puede consultar el dispositivo diseñado en un artículo titulado “Improvement of the injection mold process by using vibration through a mold accesory” publicado en la revista *Materials and Manufacturing Procesess*, en 2009.

# Capítulo IV

---

## 4 Resultados y discusión

### 4.1 Reporte de pruebas experimentales

En este trabajo se desarrollo un método no químico para modificar la viscosidad de un polímero dentro del proceso de inyección de plásticos. El método se basó en la adición de vibración al polímero durante el proceso de inyección, mediante un dispositivo mecánico.

Las figuras Figura 4.1 y Figura 4.2 muestran algunas de las muestras inyectadas.



Figura 4.1. Muestras inyectadas en el molde de prueba.

El dispositivo que modificó la viscosidad del polímero, por lo menos en el tiempo en que tarda en ser moldeado, sin tener que sacrificar las propiedades del polímero.

Finalmente se pudo deducir que la frecuencia óptima para trabajar con el excitador fue 3 Hz.

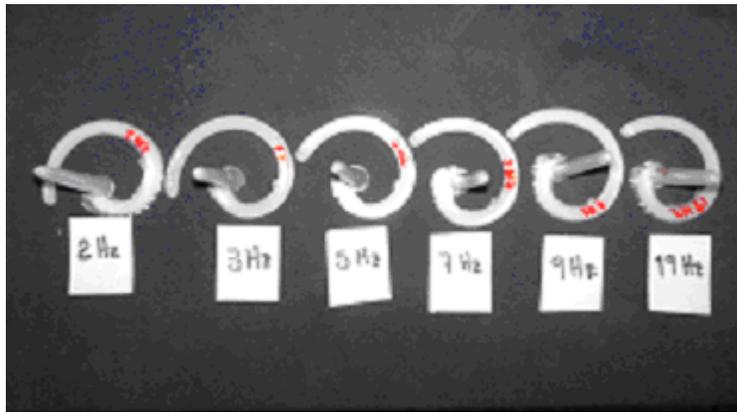


Figura 4.2. Pruebas a distintas frecuencias.

Las gráficas de las Figura 4.3 y Figura 4.4, basadas en la Tabla 4.1, muestran el peso y el desplazamiento alcanzado. En las pruebas se observó la aportación positiva de la vibración, mostrando mejores resultados en un intervalo de 2 a 5Hz, siendo 3Hz, (Figura 4.3), el máximo desplazamiento y más útil para el estudio y para lo que se quiere demostrar:

La Tabla 4.1 muestra los resultados de desplazamientos angular y de peso a diferentes frecuencias, así como la diferencia entre la inyección con vibración y sin ella.

**Tabla 4.1. Tabla de resultados experimentales para desplazamiento y peso**

Frecuencia (Hz)	Desplazamiento angular (Rad)	Peso (Oz)
4.2 Sin vibración	2.076	0.18
2	2.094	0.18
3	2.757	0.1898
4	2.338	0.1842
5	2.182	0.1842
7	2.199	0.1828
9	2.129	0.1815
19	2.089	0.1803

La Figura 4.3 responde a la Tabla 4.1 y muestra en su eje horizontal las frecuencias a las que se realizaron los experimentos y en su eje vertical el desplazamiento angular. Es

posible notar el evidente incremento de desplazamiento en frecuencias bajas, alcanzando el máximo en 3 Hz. Es posible observar también que a frecuencias altas no se observa un incremento notable, lo mismo que a frecuencias cercanas a cero.

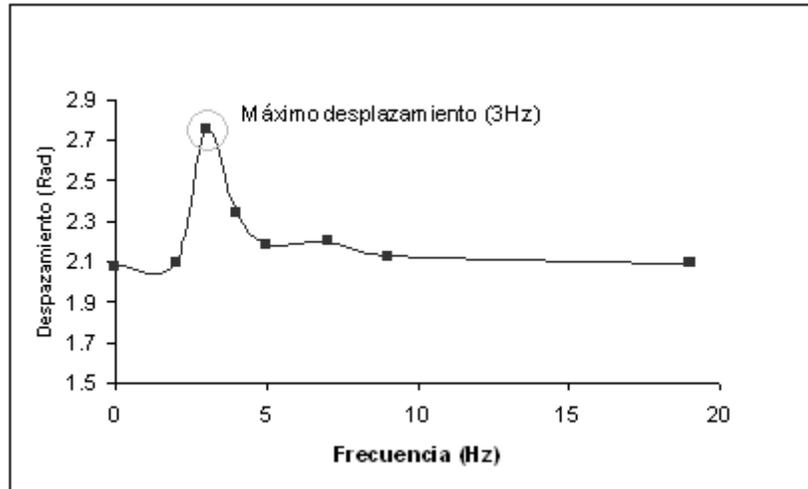


Figura 4.3. Gráfica de desplazamientos entre experimentos hechos con vibración y sin ella.

**Tabla 4.2. Tabla de mejoras en procesos en que se uso vibración.**

Referencia	Técnica	Mejora
Este trabajo	Molde en espiral 3Hz	30 %
Yan et al.	Rehómetro 3.5Hz	23.9%
Yin et al.	Presión en cavidad 5Hz	22.3%
Liu	“Die Swell Ratio” 13Hz	4%

Resulta obvio que al entrar una cantidad mayor de plástico en la cavidad, debida a la momentánea disminución de viscosidad producto de la vibración, la pieza debe pesar más, por lo que la gráfica de la Figura 4.4 es similar a la de desplazamiento, Figura 4.3. Sin embargo, no presenta una relación completamente lineal.

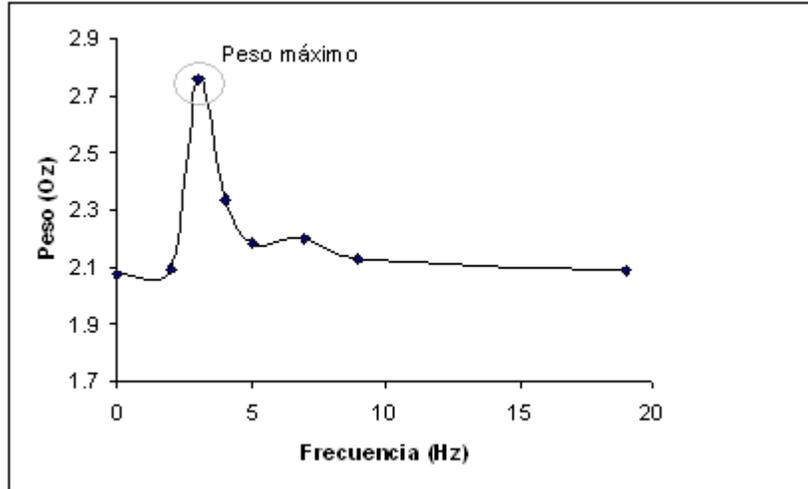


Figura 4.4. Gráfica de pesos medidos en experimentos hechos con vibración y sin ella.

Finalmente, la

Tabla 4.2 muestra la eficiencia del dispositivo desarrollado en este trabajo comparado con los reportados en la literatura.

Los trabajos reportados en la con excepción al aquí desarrollado, responden en a aparatos montados en la inyectora y no en el molde. Así es posible ver que a pesar de la sencillez del dispositivo desarrollado se obtuvo un rendimiento superior, esto, debido al aprovechamiento de la cercanía al punto de uso con la que fue aplicada la vibración.

En el Apéndice B se presenta un artículo titulado “Improvement of the injection mold process by using vibration through a mold accessory” que resume de una forma detallada el experimento, publicado en 2009 en la revista *Materials and Manufacturing Processes*.

### 4.3 Reporte de modelación

Recapitulando, la modelación consistió en simular el flujo bidimensional con efectos de solidificación en una vena de un ancho de 6mm y un largo de 10cm, dividida en 10 zonas de análisis. Ver Figura 3.8, Figura 3.9, y Figura 3.10. La Tabla 4.3 muestra resultados de velocidad, temperatura y viscosidad para cada zona.

**Tabla 4.3. Resultados experimentales de parámetros por zona de análisis.**

Zona	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Velocidad [m/s]	0.5	0.395	0.317	0.254	0.205	0.1642	0.1307	0.104	0.104
Viscosidad [Pa.S]	1006.3	1008.12	1008.8	1009.05	1009.13	1009.16	1009.17	1009.17	1009.17
Temperatura [°K]	443	342.571	315.5	306.9	304.14	303.28	303.053	302.899	302.9

La columna de la zona cero de la tabla Tabla 4.3 fue llenada con los valores iniciales del experimento, explicados en la sección 3.3.1 del capítulo anterior. A partir de la zona 1 se muestran los valores obtenidos de las ecuaciones de momento, energía y la de relación temperatura-viscosidad (Arrhenius).

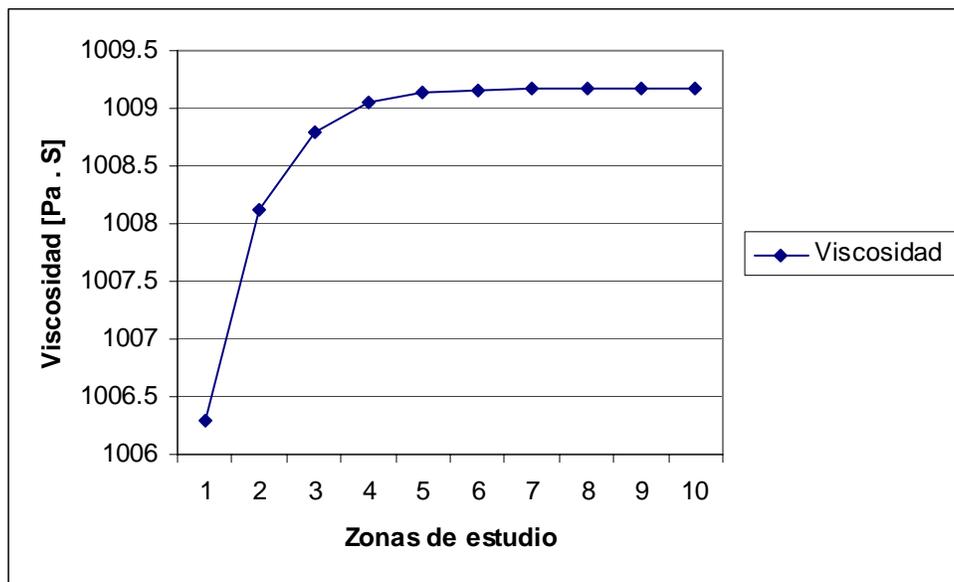


Figura 4.5. Comportamiento de viscosidad.

Es interesante observar la línea de viscosidad de la Tabla 4.3 o la gráfica de la Figura 4.5. Comportamiento de viscosidad. Figura 4.5 y ver que hubo una convergencia en las últimas dos zonas, lo cual indica que el polímero ya no cambia de viscosidad lo que indica su solidificación. También puede observarse que dicha convergencia se logra cercana a la temperatura ambiente, Figura 4.6, fijada en 303°K.

Aun cuando el experimento parece sencillo, realmente es interesante ya que las herramientas de modelación incluidas en COMSOL no integran la solidificación.



Figura 4.6. Comportamiento de temperatura.

Es decir, si se baja la viscosidad a valores de solidificación lo que se obtiene es un error de convergencia, debido a que la herramienta solo modela fluidos, por lo que al detectar viscosidades tan bajas genera un error precisamente de convergencia.

#### 4.4 Conclusiones

En este trabajo se desarrollo un método, que no implica aditivos químicos, para modificar la viscosidad de un polímero dentro del proceso de inyección de plásticos. El método se baso en la adición de vibración al polímero durante el proceso de inyección.

En la primer parte de la investigación se hizo un análisis de las ecuaciones que toman parte en el proceso de inyección de plásticos, poniendo especial énfasis en la etapa de llenado del molde. Se encontró que las ecuaciones más usadas fueron las de Navier Stokes, seguidas por la ecuación generalizada de Helen Shaw.

En la segunda parte de la tesis se justifico, por un análisis de ecuaciones, la relación de la viscosidad con la vibración en el proceso de inyección y se eligió el grupo de ecuaciones de transferencia de momento, masa y energía para la modelación del proceso. Esta sección incluye el desarrollo de las ecuaciones y su formulación para ser resueltas por el método de elementos finitos (MEF).

La tercer parte contiene la demostración práctica de la hipótesis. Es decir se hizo la inyección de una pieza muestra, para este caso una espiral trazada bajo la ecuación de Arquímedes, que permitió la medición del fenómeno estudiado, viscosidad-vibración, a través de un método no convencional. Los resultados obtenidos demuestran la contribución positiva de la vibración al proceso de inyección. Más aún, se logró una mejora substancial por encima de los métodos reportados por la literatura. Fue posible observar también que la cercanía de el dispositivo a el punto de aplicación permitió hacer un dispositivo cenicillo, y por lo mismo barato, completamente funcional. Lo anterior demuestra que el dispositivo desarrollado es una buena opción como método no químico de modificación de viscosidad.

La modelación teórica se limito a la simulación de flujo con efecto de solidificación para un problema bi-direccional sin incluir vorticidad, obteniéndose resultados que demuestran el buen funcionamiento de los métodos propuestos.

Como productos extra y según el objetivo de la tesis se publico un artículo que justifica los dos primeros capítulos de la tesis, cuyo nombre es: Filling process in injection mold: A review. Fue publicado en la revista indexada Polimer-Plastics Technology and Engineering (46, 2007).

Además se publicó un artículos más, de nombre: “Improvement of the injection mold process by using vibration through a mold accessory” en la revista Materials and Manufacturing Processes. Éste artículo valida la metodología del experimento de estudio, básicamente el capítulo 3 de esta Tesis.

Como aportación a la formación de nuevos profesionistas, se tiene dirigió una tesis colectiva de dos alumnos: Arturo Martínez González y Edgar A. Valdivia Esparza. La tesis que se titula: Mejora de la etapa de llenado de moldes de inyección de plástico usando vibración. Aun cuando no se ha llevado a cabo la titulación, la tesis está completa y debidamente registrada ante el consejo académico de la facultad de ingeniería de esta la UAQ.

Los productos anteriores se refieren al trabajo apegado a la tesis, sin embargo, durante el desarrollo del doctorado se tuvo además la siguiente productividad:

- Un artículo en revisión de nombre: “Determination of grain size using the intercept approach with image processing” en la revista indizada *Bullentin of Material Science*. Artículo en procesos de revisión.
- El registro en tramite de una patente titulada: Molino-Ensilador de bajo consumo de energía, ante el Instituto Mexicano de la Propiedad Industrial. A la fecha se ha aprobado el examen de forma y se esta en espera de resultados del examen de fondo.
- Un tesis de licenciatura de nombre *Manual de prácticas de manufactura*. Terminada y debidamente registrada ante el Consejo Académico de la Facultad de Ingeniería de la UAQ:

## 4.5 Prospectivas

En este trabajo se uso un vibrador (shaker) experimental, que fue suficiente para validar la hipótesis, sin embargo, se pueden obtener resultados más finos con un vibrador comercial debido a que tiene un rango mas alto de frecuencia y un control más fino de los parámetros, lo cual ayudaría en análisis futuros de propiedades físicas de la pieza moldeada.

Otra posible mejora esta en la dirección de aplicación de la vibración, entre más alineada a la dirección de flujo, mejores resultados. Debido a que se tendría una componente en el sentido de flujo.

En esta investigación solo se desarrollaron las ecuaciones que toman parte en el fenómeno de flujo con solidificación en dos dimensiones, lo anterior debido al complejidad de las ecuaciones, sin embargo, para trabajos futuros se modelara el problema completo, ed decir incluyendo el efecto de la vibración. Más aún, es posible obtener de manera experimental un factor numérico de relación vibración-viscosidad que permita modelar de manera sencilla el efecto de la vibración en el llenado del molde sin tener que usar algoritmos complejos.

En la sección de modelación se encontró la solución tanto de velocidad como de temperatura por zonas, sin embargo, en trabajos futuros será posible modelar temperatura, flujo y viscosidad nodo a nodo en toda la malla, lo cual dará un resultado más fino.

En reportes futuros sería interesante hacer un análisis de tamaños y orientación de grano y relacionarlo con la frecuencia de vibración. Esto daría una validación del método

por granulometría. Más aun, se puede extender a hacer prueba de esfuerzo y deformación para verificar las mejoras en propiedades físicas debidas a la orientación y tamaño de grano.

## Referencias

Abu-Dheir N., Khraisheh M., Saito K., Male A. (2005). Silicon morphology in the autectic Al-Si alloy using mechanical mold vibration. *Material Science and Engineering A*. 393 109-117.

Argyris Jhon, Laxander Armin, Szimmat Jochen (2003). Petrov-Galerkin finite element approach to coupled heat and fluid flow.

Au C. K. (2005). A Geometric approach for injection mould filling simulation. *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 45: 115-124.

Barriere T., Gelin J. C., Liu B. (2002). Improving mould design and injection in metal injection moulding by accurate 3D finite element simulation. *Journal of materials processing technology*. 125-126 518-524.

Barsoum Magued E., Alexandrou Andreas N. (1995). Stable finite element solutions of fully viscous compressible flows. *Finite elements in analysis and design* 19: 69-87.

Benitez-Rangel J. P., Dominguez-Gonzalez A., Herrera-Ruiz G., Delgado-Rosas M. (2007). Filling process in injection mold: A review. *Polymer-Plastics Technology and Engineering*. 46 721-727.

Berger R. C., Stockstill R. L. (1995). Finite-element model for High-velocity channels. *Journal of hydraulic engineering*: 710-716.

Bickerton Simon, Advani Suresh G. (1997). Experimental investigation and flow visualization of the resin-transfer mold-filling process in a non-planar geometry. *Composites Science and Technology* 57: 23-33.

Blanchard C. H., Gutierrez G., White J. A., Roemer R. B. (2000). Hybrid finite element-finite difference method for thermal analysis of blood vessels. *International Journal of hyperthermia* 16: 314-353.

Boschan A., Charette V. J., Gabbanelli S., Ippolito I., Chertcoff R. (2003). Tracer dispersion of non-Newtonian fluids in a Hele-Shaw cell. *Physica A* 327: 49-53.

Bossi, Negri.1993. Moulding machines and moulds for plastics processing. Milano, Italia: McGRAW-HILL

Campos Silva Joao Batista, Mendes de Moura Luiz Felipe (2001). A control-volume finite-element method (CVFEM) for unsteady, incompressible, viscous fluid flows. *Numerical Heat Transfer* 40: 61-82.

Cardozo D. (2009). A brief history of the filling simulation of injection molding. *Journal of Mechanical Engineering Science*. 223 711-721.

Chen J. K., Beraun J. E., Tham C. L. (2003). Investigation of a thermal response caused by pulse laser heating. *Numerical Heat Transfer* 44 705-722.

Chen S. C., Chen Y.C., Cheng N.T., Ming-Shyan (1998). Simulation of injection-compression mold-filling process, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 25 (7): 907-917.

Chen Xi, Gao Furong, Chen Guohua (2004). A soft-sensor development for melt-flow-length measurement during injection mould filling. *Materials Science and Engineering* 384: 245-254.

Claveria I., Javierre C., Ponz L. (2005). Method for generation of rheological model to characterize non-conventional injection molding by means of spiral mold. *Journal of Material Processing Technology* 162 477-483.

Claveria I., Javierre C., Ponz L. (2005). Method for generation of rheological model to characterize non-conventional injection molding by means of spiral mold, *Journal of Materials Processing Technology* 162-163: 477-483.

Courbebaisse Guy (2005). Numerical simulation of injection molding process and the pre-modeling concept. *Computational Material Science* 34: 397-405.

Deleglise Mylene, Binetruy Christophe, Krawczak Patricia (2005). Solution of filling time prediction issues for constant pressure driven injection in RTM. *Composites: Part A* 36: 339-344.

Dimitrova Z., Faria L. (2000). Finite element modeling of the resin transfer molding process based on homogenization techniques. *Computers & Structures* 76: 379-397.

Ervin Nincent J. (2003). Miles William W., Approximation of time-dependent viscoelastic fluid flow: SPUG approximation. *Journal of Numerical Analysis* 41(2): 457-486.

Ervin Vincent J., Miles William (2003). Approximation of time-dependent viscoelastic flow: SPUG approximation. *SIAM Journal of numerical Analysis* 2: 457-486.

Feistauer M., Svadlenka K. (2004). Discontinuous Galerkin method of lines for solving nonstationary singularly perturbed linear problems. *J. Numer. Math.* 12: 97-117.

Frank P. T. Baaijens (1998). Mixed finite element methods for viscoelastic flow analysis: a review. *Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics* 79: 361-385.

Galantucci L. M., Spina R. (2003) Evaluation of filling conditions of injection moulding by integrating numerical simulations and experimental tests. *Journal of Materials Processing Technology* 141: 266-275.

Gorman D. G., Reese J. M., Zhang Y. L. (2000). Vibration of a flexible pipe conveying viscous pulsating fluid flow, *Journal of sound and vibration*, 230 (2): 379-392.

Guermond J. L., Quartapelle L. (2000). A projection FEM for variable density incompressible flows. *Journal of Computational Physics* 165: 167-188.

Guerrero C., Lozano T. Gonzalez V. Arroyo E. (2003). Morfología y propiedades de politereftalano de etilen-glicol y polietileno de alta densidad. *Ciencia UANL* 2 203-211.

Han Sejin, Costa Franco S., Ray Shishir R. (2004). Integrated floor analysis during filling and post-filling stage of thermoset molding. *Material Processing and Design*: 180-185.

Hill D. (1996) Further studies of the injection moulding process. *Appl. Math. Modeling* 20: 719-730.

Holm Erik J., Langtangen Hans Petter (1999). A unified finite element method model for the injection molding process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 178: 413-429.

Hong Wu Yong, Wiwatanapataphee Benchawan, Yu Xiju (2004). An Enthalpy control volume method for transient mass and heat transport with solidification, *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 18: 577-584.

Huang S. J., Lee T. H. (2003). Application of Neural Networks in injection moulding process control. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 21: 956-964.

Hutton David V. (2004). *Fundamentals of finite element analysis*, Mc Graw Hill Higher Education. New York, NY.

Ibar J. P. United States Patent: 5885495.

Jansen K. M. B. (1995). Heat transfer in injection moulding systems with insulation layers and heating elements. *International Journal of heat and mass transfer* 38: 309-316.

Joseph Daniel D. (2006). Potential flow of viscous fluids: Historical notes. *International journal of multiphase flow* 32: 285-310.

Khosla P. K., Rubin S. G. (2001). A review of strongly coupled algorithms for viscous flow problems. *Computers & Fluids* 30: 927-937.

Kondic Ljubinko, Palffy-Muhoray Peter, Shelley Michael J. (1996). Models of non-Newtonian Hele-Shaw flow. *Physical Review E* 54: 536-539.

Koszkul J., Nabialek J. (2004). Viscosity models in simulation of the filling stage of the injection moulding process, *Journal of Materials Processing Technology* 157-158: 183-187.

Kumar Amit, Ghoshdastidar P. S., Muju M. K. (2002). Computer simulation of transport process during injection mold-filling and optimization of the molding conditions, *Journal of Materials Processing Technology* 438-449.

Kumar Singh Ajay (2005). Three-dimensional flow of a viscous fluid with heat and mass transfer. *International Communications in heat and mass transfer* 32: 1420-1429.

Kyeong-Hee Han and Yong-Taek Im (1997). Compressible flow analysis of filling and post filling injection molding with phase-change effect. *Composite Structures* 38 (1-4): 179-190.

Lan X. K. (2001). Khodadadi J. M., Fluid flow, heat transfer and solidification in the mold of continuous casters during ladle change. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 44: 953-965.

Li C. L., Li C. G. Mok A. C. K. (2005). Automatic layout design of plastic injection mould cooling system. *Computer-Aided Design* 37 645-662.

Liu Yue-Jun. (2005). Rheological equation for polymer melt under the action of vibration. *Plastic, Rubbers and Composites* 34 54-58.

Liu Yue-Jun. (2006). Elastic behavior of polymer melt extruding through capillarity with an additional sinusoidal vibration. *Polymer Bulletin* 56 599-606.

Long Lye N., Morris Philip J. Agarwal Anurag (2004) A review of parallel computing in computational aeroacoustics. *International Journal of computational fluid dynamics* 18 (6): 493-592.

Long Lye N., Morris Philip J., Agarwal Anurag (2004). A review of parallel computing in computational Aeroacoustics. *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 18 493-502.

Martins M., Covas J. A. (2002). Polymer melt flow through channels with vibrating walls. *Key Engineering Materials* 230, 232, 200-302.

- Nair Ramachardan D., Thomas Steohen J., Loft Richard D. (2005). A discontinuous Galerkin transport scheme on the cubed sphere. *Monthly Weather Review* 133 (8): 14-828.
- Nardin B., Kuzman K., Kampus Z. (2002). Injection molding simulation results as an input to the injection moulding process. *Journal of Materials Processing Technology* 130-131: 310-314.
- Naterer G. F. (2003). Eulerioan Three-phase formulation with coupled droplet flow and multimode heat transfer. *Numerical Heat Transfer* 43: 331-352.
- Ozdemir A., Uluer O., Guldass A. (2004). Flow front advancement of molten thermoplastic materials during filling stage of a mold cavity. *Polymer Testing* 23: 957-966.
- Passad K. D. V. Yarlagadda (2001). Prediction of processing parameters for injection moulding by using a hybrid neural network. *Proceedings of the institution of Mechanical Engineers* 215: 1465-1470.
- Passad K. D. V. Yarlagadda, Teck Khong Cobby Ang (2001). Development of a hybrid neural network system for prediction of process parameters in injection moulding. *Journal of Materials Processing Technology* 118: 110-116.
- Piau J. M., Piau M. (2002). Easier flow of viscoplastic materials with ultrasonic longitudinal wall motion. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 104 185-226.
- Piau M., Piau J. M. (2005). Plane couette flow of viscoplastic materials along a slippery vibrating wall, *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics* 125: 71-85.
- Pichelin E, Coupez T. (1998). Finite element solution of 3D mold filling problem for viscous incompressible fluid. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 163: 359-371.
- Pichelin E, Coupez T. (1999). A Taylor discontinuous Galerkin method for the thermal solution in 3D mold filling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 178: 153-169.

Qi-Lin Zhang, Xiao-Qun Luo. (2003). Finite element method for developing arbitrary surfaces to flattened forms. *Finite elements in analysis and design* 39: 977-984.

Rao S. S. (1999) *The finite element method in engineering*, Butterworth-Heinemann, USA.

Ravindran K, Lewis R. W. (1998). Finite element modeling of solidification effects in mould filling. *Finite Elements in Analysis and Design* 31: 99-116.

Ruiz E, Achim V., Trochu F., Breard J. (2006). Optimization of injection flow rate to minimize micro/macro-voids formulation in resin transfer molded composites. *Composites Science and Technology* 66: 475-486.

Seddeek M. A. (2006). Finite element method for the effect of various injection parameter on heat transfer for a power-law non-Newtonian fluid over a continuous stretched surface with thermal radiation. *Computational Materials Science* (Article in press)

Shen C., Zhai M. (2004). Algorithm to optimize number of gates and locations in an injection mould. *Plastics, Rubbers and Composites* 33: 330-334.

Shi F., Lou Z. L., Lu J. G., Zhang Y. Q. (2003). Optimization of plastic injection moulding process with soft computing. *The international Journal of Advanced Manufacturing Technology* 21: 656-661.

Shimizu Tatsuya, Ohtani Masahiko. (1996). Numerical simulation of heat transfer and fluid flow applied to exhaust manifold. *JSAE Review* 17: 17-23.

Shojaei Akbar (2006). A numerical study of filling process through multilayer performs in resin injection/compression molding. *Composites Science and Technology* (Article in press)

Silva F. V. Neves Filho L. C., Siverira Jr. V. (2005). Experimental evaluation of fuzzy controllers for the temperature control of the secondary refrigerant liquid chiller. *Journal of food engineering*.

Tai C. C., Lin J. C. (1999). The optimal position for the injection gate of a die-casting die, *Journal of materials processing technology* 86 87-100.

Taylor C., Hughes T. G. (1981) *Finite element programming of the Navier-Stokes equations*. Pineridge Press Ltd.. Swansea U. K.

Tezduyar Tayfun E. (2005). *Finite elements in fluids: Spatial methods and enhanced solution techniques*. *Computers and Fluids* (Article in press)

Van Stappen M., Vandierendonck K., Mol C., De Cleecq E. (2001). Practice vs. Laboratory tests for plastic injection moulding. *Surface & Coatings Technology*: 143-145.

Wang Quan, Jin-Ping Qu, He Liang. (2006). Effect of vibration parameters of electromagnetic dynamic plastics injection molding machine on mechanical properties of polypropylene samples. *Journal of Applied Polymer Science* 102 972–976.

Welty J. R., Wicks C. E. Wilson R. E. (2004). *Fuundamentos de transferencia de momento, calor y masa*. Limusa Wiley, México DF.

Wintruff I., Gunther C., Class A. G. (2001). An interface-tracking control-volume finite-element method for melting and solidification problems Part I: Formulation. *Numerical Heat Transfer* 39: 101-125.

Yañez Flores I., Sanchez Valdez S. (2001) *Moldeo por inyección de plasticos*. Centro de Investigación en Química Aplicada.

Yin Xiaochun, Qu Jinping. (2006). Experimental study of the vibration-assisted MIM process on cavity pressure. *Journal of Thermoplastic Composite Materials* 16 375-383.

Yoon Kim Byoung, Joon Nam Gi, Sok Ryu Ho, Wook Lee Jae (2000). Optimization of filling process in RTM using genetic algorithm. *Korea-Australia Rheology Journal* 12 (1): 83-92.

Zhai Ming, Lam Y. C., Au C. K., Liu D. S. (2005). Automated selection of gate location for plastic injection molding processing. *Polymer-Plastics Technology and Engineering* 44: 229-242.

Zheng Yan, Kai Zhi Shen, Jie Zhang, Li Min Chen, Chixing Zhou. (2002). Effect of vibration on rheology of polymer melt. *Journal of Applied Polymer Science* 85 1587–1592.

Zhen-Xiang Gong, Mujumdar Arun S. (1998). Flow and heat transfer in convection-dominated melting in a rectangular cavity heated from below. *International journal of Heat and mass transfer* 41 (17): 2573-2580.

## **Apéndice A**

Artículo publicado 1

**Filling Process in Injection Mold: A Review**

**Polymer-Plastics Technology and Engineering (2007)**















## **Apéndice B**

Artículo publicado 2

**Improvement of the Injection Mold Process by Using Vibration Through  
a Mold Accessory**

**Materials and Manufacturing Processes ( 2009 )**































