

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE FILOSOFÍA
MAESTRÍA EN FILOSOFÍA



**EUCLIDES: UN PROCESO DE CONSTRUCCIÓN PEDAGÓGICA EN
LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA, EN LA TRADICIÓN CLÁSICA
GRIEGA**

TESIS

**Que como parte de los requisitos para obtener el grado de:
MAESTRO EN FILOSOFÍA**

PRESENTA:

BEATRIZ GARCÍA JIMÉNEZ

EXPEDIENTE: 95923

DIRECTOR:

DR. JOSÉ SALVADOR ARELLANO RODRÍGUEZ

Querétaro, Qro. Marzo del 2014



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE FILOSOFÍA
MAESTRÍA EN FILOSOFÍA

EUCLIDES: UN PROCESO DE CONSTRUCCIÓN PEDAGÓGICA EN
LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA, EN LA TRADICIÓN CLÁSICA
GRIEGA

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de:
Maestro en Filosofía

Presenta:

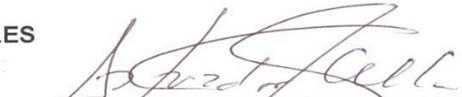
Beatriz García Jiménez

Dirigido por:

Dr. José Salvador Arellano Rodríguez

SINODALES

Dr. José Salvador Arellano Rodríguez
Presidente


Firma

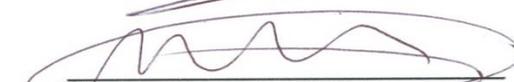
Dra. Hilda Romero Zepeda.
Sinodal


Firma

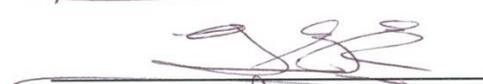
Dr. Fernando González Vega
Secretario

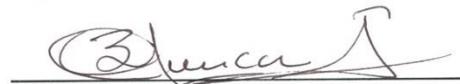

Firma

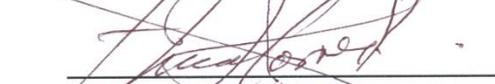
Dr. Mauricio Ávila Barba
Vocal


Firma

Dr. Eduardo González de Luna
Suplente


Firma


Dra. Blanca Estela Gutiérrez Grageda
Director de la Facultad


Dr. Irineo Torres Pacheco
Director de Investigación y Posgrado

RESUMEN

El presente trabajo de investigación se realizó en la Facultad de Filosofía de la UAQ. La tesis siguió la perspectiva histórica del pensamiento matemático de Euclides de Alejandría (325 – 265 a.C.), utilizando para su realización una investigación de tipo documental. El trabajo tiene como objetivo identificar si el mundo geométrico de Euclides es consecuencia de sus antecesores, de su contexto, de su necesidad docente y pedagógica, donde su método en la obra *Los Elementos* es un proceso de construcción didáctica para la enseñanza de la geometría, representando así, una nueva concepción sistemática en la tradición griega clásica. Para ello se parte desde las construcciones y representaciones más antiguas del conocimiento matemático, pasando por las primeras civilizaciones, hasta llegar al pensamiento prehelénico griego, donde el saber matemático fue delineando su propio campo de conocimiento y sus métodos. Fue hasta la Escuela de Alejandría donde Euclides organiza el conocimiento matemático en 13 Libros que conforman *Los Elementos*, que mediante axiomas teoremas y postulados conforma una estructura lógica sistematizada para este campo de conocimiento. Surge así, la primer ciencia que se desligó de la filosofía. *Los Elementos* de Euclides son el crisol donde se funde y se estructura el conocimiento matemático, estableciéndose como un paradigma a partir del cual otras ciencias se fueron consolidando. Además, desde sus tiempos y por más de 20 siglos fue el texto de cientos de generaciones, mediante el cual se enseñó y se aprendió el maravilloso mundo del pensamiento matemático, marcando una nueva concepción en su campo de conocimiento, su pedagogía y su didáctica. En la actualidad, los modelos educativos de casi todo el mundo, proponen un marco interdisciplinario para su realización, por lo que es fundamental que la historia y la matemática dialoguen con la filosofía, conformando la estructura del pensamiento matemático del individuo y cuyo soporte serán siempre las matemáticas griegas.

(Palabras clave: Matemáticas, filosofía, *Los Elementos*, ciencia, educación, pensamiento matemático, didáctica, pedagogía, razonamiento, sistematización)



SUMMARY

This research was conducted at the School of Philosophy of the Autonomous University of Queretaro (UAQ, from its initials in Spanish). The thesis follows the historical perspective of the mathematical thinking of Euclid of Alexandria (325-265 BC), using documental-type research. The objective of the work is to ascertain whether the geometrical world of Euclid is a consequence of its predecessors, its context, its teaching and pedagogical necessity, where the method in his work *Elements* is a process of didactic construction for the teaching of geometry, thus representing a new systematic conception in classical Greek tradition. The study begins with the most ancient constructions and representations of mathematical knowledge, and continues through early civilizations up until pre-Hellenic Greek thought, where mathematical knowledge began to outline its own field of knowledge and methods. It was not until the School of Alexandria, where Euclid organized mathematical knowledge in the 13 Books which make up *Elements* that through the use of axioms, theorems and postulates a logical systematic structure took shape for this field of knowledge. Thus came about the first science that separated itself from philosophy. Euclid's *Elements* is the crucible in which mathematical knowledge is fused and structured, establishing a paradigm on which other sciences began to consolidate. Moreover, beginning in his time and for more than 20 centuries, this was the text for hundreds of generations, a text through which the marvelous world of mathematical thought was taught and learned, marking a new concept in this field of knowledge, teaching and didactics. Today, educational models in most of the world propose an interdisciplinary framework for its implementation. It is therefore essential that history and mathematics maintain a dialogue with philosophy, forming the structure of mathematical thought in the individual, the support of which will always be Greek mathematics.

(Key words: Mathematics, philosophy, *Elements*, science, education, mathematical thought, didactics, teaching, reasoning, systematization)



AGRADECIMIENTOS

A toda mi familia, que es mucha, con quienes me tocó compartir momentos de esta vida de tanto amor, ternura y comprensión. Y a la vida misma, que es un torbellino de emociones, de subidas y bajadas, porque vivir es hermoso y somos afortunados los que la apreciamos.

A todos mis maestros, de quienes aprendí lo que significa ser un buen y mal profesor, porque todos moldearon y forjaron en mí al profesional docente que soy. A los excelentes maestros de matemáticas, entre ellos a mi papá, quienes me enseñaron a desarrollar procesos sublimes de la existencia de este saber.

A todos mis alumnos, con quienes compartí y comparto, espacios donde construimos un imaginario de simbolismos y razonamientos, de gran emoción y entusiasmo, de encuentros y desencuentros. Donde al paso de los años, espero haber dejado en ellos el deseo de saber más o, al menos, un grato sabor del saber matemático. Pues con todos ellos, con mis errores y aciertos, han hecho de mi labor docente una de mis grandes satisfacciones.

A todas las instituciones educativas en las que me eduqué, desde el preescolar, hasta el posgrado, pues fueron mi segundo hogar, donde aprendí el valor del saber, la lealtad y del compañerismo.

Y por último, a todas las personas que contribuyeron a la elaboración del presente trabajo, por sus aportes, lecturas y comentarios, pero en especial al Dr. José Salvador Arellano Rodríguez, quien con sus observaciones, sugerencias y correcciones, encontré siempre un aliciente en sus palabras que llenaron de entusiasmo mis horas de trabajo y desvelo. Por su apoyo y por ser como es ¡Muchas gracias por siempre!

ÍNDICE

	Página
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I. Los filósofos-matemáticos griegos más importantes antes de Euclides.	11
1.1 Los inicios	12
1.2 Primeras civilizaciones	13
1.3 Los matemáticos griegos antes de Euclides	19
CAPÍTULO II. Las escuelas antes de Alejandría más importantes, sus fundadores y discípulos.	45
2.1 Escuela de Mileto o Jónica	48
2.2 Escuela Eleática	51
2.3 Escuela Pitagórica	52
2.4 Escuela Pluralista	57
2.5 Escuela Atomista	58
2.6 Los Sofistas	60
2.7 Escuela de Sócrates de Atenas	63
2.8 Escuela Megárica	66
2.9 Escuela Cínica	67
2.10 Escuela Cirenaica	69
2.11 La Academia de Platón	70
2.12 Escuela Peripatética o Liceo	74
2.13 Escuela Estoica	77
2.14 Últimas escuelas del pensamiento griego	80
CAPÍTULO III. La escuela de Alejandría y el maestro, filósofo y matemático, Euclides; su labor docente y sus discípulos.	84
3.1 La Alejandría que está cerca de Egipto	85
3.2 El Museo de Alejandría	89

3.3	La Biblioteca de Alejandría	90
3.4	Euclides: el maestro, filósofo y matemático	93
3.5	Otros eruditos importantes de Alejandría	98
3.6	El ambiente científico en Alejandría en torno a las matemáticas	104
3.7	La decadencia y el fin de la Escuela de Alejandría	108
 CAPÍTULO IV. Corriente filosófica-pedagógica presentes en <i>Los Elementos</i> de Euclides, como un nuevo método para la enseñanza de la geometría, dentro de la tradición griega.		 111
4.1	Construcción geométrica griega con regla y compás	112
4.2	Un mundo griego claro y evidente en Euclides	114
4.3	Influencias filosóficas en la obra de Euclides	116
4.4	Los <i>Elementos</i> como un modelo para la ciencia helénica	119
4.5	Estructura de los <i>Elementos</i> de Euclides	121
4.6	Los <i>Elementos</i> y la enseñanza	128
4.7	Corriente pedagógica y psicológica en los <i>Elementos</i>	141
4.8	Euclides y su posteridad	149
 CONCLUSIONES		 154
 ANEXOS		 164
 BIBLIOGRAFÍA		 174

INTRODUCCIÓN

EUCLIDES: UN PROCESO DE CONSTRUCCIÓN PEDAGÓGICA EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA, EN LA TRADICIÓN CLÁSICA GRIEGA

El presente trabajo surge de una reflexión derivada de mi actividad laboral y profesional como docente de matemáticas, además de mi gusto por la historia y la filosofía de esta área de conocimiento. La reflexión y análisis de algunos teoremas de los primeros cuatro libros de *Los Elementos* de Euclides, me ayudarán a visualizar el método, la construcción y la pedagogía de la enseñanza de la geometría euclidiana en sus orígenes, como una nueva concepción sistemática, dentro de la tradición griega. La génesis de la imaginación espacial sistemática es la construcción del conocimiento geométrico de toda persona y de la humanidad misma; de ahí la importancia de estos textos didácticos, tanto en su tiempo como en la actualidad, razones por las que es necesario un retorno al pensamiento antiguo.

Como antecedentes podemos mencionar que existen muchos estudios realizados de los cuales, quedan sólo en el ámbito de la historiografía de los matemáticos más reconocidos, sin llevar sus obras a una comprensión en su desarrollo teórico y metodológico, ni de sus posibles relaciones entre la obra de un matemático y otro, como proceso lógico de desarrollo de esta ciencia.

Esta inquietud por el aspecto histórico y de construcción matemáticas es muy antigua. Hipócrates de Quíos (430 a.C.) escribió un libro: *Historia de la geometría* (perdido como tantos otros de su época); Platón hizo referencia en sus escritos sobre matemáticos anteriores a él; un discípulo de Aristóteles, llamado Eudemo de Rodas (320 a.C.) escribió una historia de las matemáticas extraviada; de la misma forma, Euclides, Arquímedes y Eratóstenes hicieron mención de otros matemáticos griegos. A Proclo (410-485 d.C.) se le considera el padre de la historia de las matemáticas.

Los primeros historiadores de la matemática eran filósofos y matemático, además, los matemáticos griegos eran grandes geómetras, donde su obra maestra “*Los Elementos* de Euclides llegó a nuestros días gracias a la preservación y traducción que hicieron los matemáticos árabes”.¹

En tiempos recientes, los hombres de ciencia han demostrado cierta inquietud por el aspecto histórico–filosófico de su actividad, ya que se han dado cuenta que el desconocer los antecedentes y los principios de ésta los limita a visualizar todas las variables que se involucran en torno a la actividad científica. Es por ello que en los últimos años, esta actividad se ha incrementado notablemente. En Francia hay un grupo especial que ha dedicado sus esfuerzos al estudio de estos tópicos (Commission Inter-IREM Epistemologie et Histoire des Mathématiques), organizando coloquios y publicaciones. En 1993, con la participación de profesores e investigadores de todo el mundo, el congreso tuvo como tema *La historia y la epistemología en la educación matemática*.

Cada vez más se ha vencido una cierta resistencia a abordar los temas históricos y se reconoce su importancia para las investigaciones en educación matemática. En México se ha creado la Asociación para la Historia, Filosofía y Pedagogía de las Ciencias Matemáticas, que reúne investigadores y profesores de las ciencias matemáticas.

Asimismo, cada vez más se abren espacios dedicados a escribir sobre temas educativos, dedicados a vincular la historia con la educación o la historia con las matemáticas. En México, la revista *Mathesis*, revista de divulgación e información en filosofía e historia de las matemáticas, es editada por el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Así, la actividad docente en el área de matemáticas, genera espacios donde se da el análisis y la reflexión en torno a la historia y la génesis de la construcción matemática, “que pretende ante

¹ Lara Aparicio, M. (1991). *Los matemáticos griegos*. Pág. 90.

todo estrechar los lazos y nexos entre las humanidades, las ciencias y la tecnología”.²

Por más que se atribuya a la filosofía ser el punto de vista más universal del pensamiento humano, esa mirada está condicionada por la mentalidad de una época histórica. La apreciación intelectual es función de las condiciones sociales, políticas y económicas, que posibilitan un cambio conceptual en una estructura de conocimientos ya preestablecidos; el transcurso del tiempo va fijando la evolución de la vida humana, así, nos encontramos un mundo babilónico, egipcio, griego, medieval, etc. Para el desarrollo del presente trabajo sólo se abordará el mundo griego, ya que en él se desarrolla la obra y la labor docente de Euclides.

Todo lo que se sabe de Euclides se debe a lo que escribió Proclo, el historiador de la matemática griega. Nos dice Proclo que Euclides nació en Grecia, a fines del siglo IV a.C., que estudió en la *Academia*, el centro de estudios fundado por Platón en el año 380 a.C. y que enseñó en Alejandría durante el reinado de Ptolomeo.

Euclides escribió sobre música y sobre óptica, también tiene una obra titulada “*Sofismas*”, para ejercitar la inteligencia, pero se le conoce más que nada por su obra “*Elementos*”, que durante más de veinte siglos se consideró la base de los conocimientos matemáticos en todo el mundo y que todavía hoy se toma como fundamento de los cursos de geometría de la enseñanza media.³

Plantearse un mundo geométrico, requiere una conciencia de objetos e ideas, de estructuras cognitivas ligadas con una realidad, o con un mundo interior donde las ideas tengan la posibilidad de presentarse como objetos. Esto requiere una actividad intelectual de construcción, de un método, de una sistematización y para ello es necesario vislumbrar la génesis de este mundo geométrico griego.

Euclides fue el primero que estableció un método riguroso de demostración geométrica.

² *Mathesis* Vol. V, No. 1. Pág. 125.

³ Perero, M. (1996). *Historia e historias de matemáticas*. Pág. 4.

La geometría construida por Euclides se mantuvo incólume hasta el siglo XIX. La piedra angular de su geometría es el postulado, por un punto exterior a una recta sólo puede trazarse una perpendicular a la misma y sólo una.⁴

Por ello, será necesario describir la pregunta central: ¿Es el mundo geométrico de Euclides, consecuencia de sus antecesores, de su contexto, de su necesidad docente y pedagógica; y su método en *Los Elementos* es un proceso de construcción didáctica para la enseñanza de la geometría, representando una nueva concepción sistemática en la tradición griega?

Asimismo, en la presente investigación se plantearán cuatro preguntas más, relacionadas con la pregunta central:

1. ¿Quiénes son los filósofos-matemáticos griegos más importantes antes de Euclides, su labor docente y sus discípulos?
2. ¿Cuáles son las escuelas antes de Alejandría, más importantes, sus métodos y corriente filosófica.
3. ¿Cuál es la contextualización de la escuela de Alejandría y el maestro, filósofo y matemático, Euclides; su labor docente y sus discípulos?
4. ¿Qué corriente filosófica-pedagógica y método, están presentes en *Los Elementos* de Euclides, así como las determinantes históricas que propiciaron una nueva concepción de sistematizar la geometría, dentro de la tradición griega.

Por lo anterior podemos señalar que después de que el positivismo perdió fuerza y que las nuevas teorías de la física cuántica empezaron a introducir en el ámbito científico términos como incertidumbre y relatividad, se nota casi en todos los aspectos de la vida intelectual un retorno o un reencuentro con las humanidades, y los que hemos hecho de la educación nuestro *modus vivendi*, tenemos la responsabilidad de profesionalizar nuestra labor docente. Lo anterior nos lleva a

⁴ Baldor, A. (1992). *Álgebra*. Pág. 97.

diversificar los contenidos de cualquier campo de conocimiento con otros, dando la riqueza de la interdisciplinariedad y lo multicultural.

La preocupación por resaltar la necesidad de reflexionar sobre el papel que la historia y la filosofía de las matemáticas puede desempeñar en la práctica docente, para conceptualizar los fundamentos de la matemática y el desarrollo de una cultura que propicie la justificación del origen y la construcción del pensamiento humano.

De manera general, se puede destacar que existen muy pocos trabajos realizados en México sobre el aspecto histórico o filosófico de la matemática, ya que los trabajos son de Centros o Departamentos de Investigación de la SEP, o de alguna institución de nivel superior (UNAM, IPN, UPN, etc.).

...predominando los siguientes temas: la enseñanza y el aprendizaje, la didáctica de las matemáticas, el análisis curricular, los contenidos de las matemáticas, las opciones y prácticas del maestro y la formación de maestros. Asimismo, se han desarrollado temas específicos sobre álgebra, cálculo, geometría, probabilidad y sobre el uso de la computadora en la educación matemática.⁵

Así vemos la necesidad de que el docente de matemáticas, tome la iniciativa de investigar las características históricas, teóricas y metodológicas con las que se abordan los contenidos de geometría. La reflexión sobre la génesis de estos aspectos constituye una tarea de integración y de teorización cada vez más importante para la generación de la imaginación espacial, fundamental en el conocimiento matemático.

Por ello, la presente investigación pretende dar claridad en los procesos de construcción de conceptos matemáticos, la cual es fundamental para provocar su generación y su reconstrucción a partir de lo anterior. Uno de esos momentos lo podemos encontrar en la obra de Euclides, partiendo de: ¿Qué sistematizó y cómo lo hizo? ¿Qué método utilizó? ¿Cuáles fueron sus aportes?, éstas son preguntas

⁵ Situación expuesta por la Dirección de Bachillerato de la SEP en el XXVII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Universidad Autónoma de Querétaro en octubre de 1994.

que muchos nos hacemos y que pocos investigan. Además, es preciso buscar al maestro, al profesor de matemáticas Euclides, sus materiales didácticos, su uso y su aplicación.

Así también pretendo presentar una perspectiva lateral del desarrollo del pensamiento matemático, subrayando la diversidad de prioridades sociales y de valores, que en distintas épocas han influido sobre el conocimiento; así como los métodos y los objetivos de la ciencia, ya que estos no son fijos y se han modificado o cambiado totalmente con el curso de la historia.

Algunas líneas de investigación en educación matemática, son las de tipo práctico, y las de tipo teórico.⁶ A continuación se describen las de corte teórico, por ser las que se adaptan a la presente investigación:

- De fundamentación: se orienta a la fundamentación tanto de alguna teoría cognoscitiva (de enseñanza, aprendizaje, etc.) como de la didáctica de la matemática en sí misma, tratando de construir teorías o de analizar las ya existentes desde una postura teórica o de identificar las bases sobre las que se pueda construir la didáctica de las matemáticas como una ciencia estable.
- Historia de la enseñanza de las matemáticas o de las propias matemáticas: en el primer caso se trata del interés por conocer la historia de la enseñanza de la matemática por el valor intrínseco de este componente de una cultura específica. En el segundo caso, se parte del desarrollo histórico de un concepto o grupo de conceptos, que se utiliza como elemento para comprender cómo se produce el proceso de aprendizaje de dicho concepto.
- Integración de los conocimientos: recopilación y clasificación de la información confiable disponible, con fines de integración de los conocimientos sobre el tema, para obtener conclusiones generales a partir de resultados parciales, hacer una descripción actualizada del estado de resolución del problema, señalar aspectos pendientes de investigación y plantar nuevos problemas relacionadas.

⁶ Waldegg, G. (1995). *Procesos de enseñanza y aprendizaje II*. Pág. 77.

Por ello también es importante puntualizar que tradicionalmente, muchos trabajos de investigación y tesis recurren, en mayor o menor medida, a resultados de estudios históricos para señalar los antecedentes del problema, para justificar la elección del mismo o con propósitos motivacionales. Se pueden observar dos tendencias principales, relativas a los marcos teóricos dentro de los que se inscriben estos trabajos:

- El análisis crítico del desarrollo histórico de los conceptos matemáticos es un auxiliar para la comprensión y explicación de los mecanismos matemáticos de apropiación y construcción del conocimiento. En esta línea se pueden apreciar dos tipos de trabajos: a) Estudios de profundización y nuevos acercamientos a los problemas históricos, sin llegar a establecer hipótesis en el campo educativo; b) Estudios históricos que dan lugar a hipótesis en el terreno educativo, mismas que se ponen a prueba mediante investigación de campo con estudiantes o profesores.
- El estudio, en las fuentes históricas primarias, de la presentación y los métodos operacionales asociados con un concepto matemático que pretende recuperar las condiciones que dieron origen a dicho concepto. En estos estudios se pueden identificar también dos tipos de trabajos: a) Propuestas didácticas fundamentadas teóricamente en los estudios históricos y; b) Propuestas didácticas fundamentadas experimentalmente mediante algún tipo de investigación de campo.

Por lo que entonces, en la presente investigación planteo la siguiente hipótesis: Si el mundo geométrico de Euclides es consecuencia de sus antecesores, de su contexto, de su necesidad filosófica y matemática, entonces, los métodos y los conocimientos previos que sistematiza en *Los Elementos* están presentes en su obra.

Y, si Euclides es maestro de matemáticas en Alejandría, entonces, su obra *Los Elementos* muestra su didáctica y su pedagogía, como un nuevo proceso de

construcción para la enseñanza de la geometría, representando una nueva concepción sistemática en la tradición griega.

Con ello pretendo a través de la presente investigación realizar un estudio y un análisis de la obra de Euclides.

Así, el objetivo general es identificar si el mundo geométrico de Euclides es consecuencia de sus antecesores, de su contexto, de su necesidad docente y pedagógica y que su método en *Los Elementos* es un proceso de construcción didáctica para la enseñanza de la geometría, representando una nueva concepción sistemática en la tradición griega.

Por lo que pretendo desarrollar los siguientes puntos:

- Identificar quiénes son los filósofos-matemáticos griegos más importantes antes de Euclides, su labor docente y sus discípulos.
- Identificar cuáles son las escuelas antes de Alejandría, más importantes, sus métodos y corriente filosófica.
- Analizar la contextualización de la escuela de Alejandría y al maestro, filósofo y matemático, Euclides; su labor docente y sus discípulos.
- Identificar qué corriente filosófica-pedagógica y método, están presentes en *Los Elementos* de Euclides, así como las determinantes históricas que propiciaron una nueva concepción de sistematizar la geometría, dentro de la tradición griega.

Dadas las características del presente trabajo, realizaré una investigación de tipo documental, la cual se caracteriza por el empleo y manejo de mensajes registrados en forma manuscrita e impresos, por lo que se le asocia normalmente con la investigación archivista y bibliográfica. El concepto de documento es mucho más amplio, ya que cubre registros gráficos y sonoros, como son: películas, diapositivas, grabaciones, etc., según Ario Garza Mercado, en su libro *Manual de Técnicas de Investigación*. Es decir, se tuvo que consultar diferentes materiales

impresos como libros, diccionarios, enciclopedias, revistas y algunos otros que aborden el tema central de esta investigación, principalmente el internet, como una de las fuentes de mayor información en la actualidad.

Asimismo, según Martínez E. (1999), esta investigación puede clasificarse también como básica, ya que “se propone la producción de nuevos conocimientos, sin interesarse en sus posibles aplicaciones o consecuencias prácticas, ya que su objetivo es cognitivo, más que práctico...”

En conclusión puedo señalar que el quehacer matemático pareciera poco claro e inteligible para muchos y además, ajeno a la realidad. Sin embargo, es producto del intelecto humano derivado de la necesidad de clasificar, cuantificar y diferenciar la vida cotidiana del hombre, por lo que ésta actividad de construcción constante nos ha acompañado a través de la historia de la humanidad.

El hombre, ubicado en el tiempo y en el espacio, puede ser estudiado históricamente y, de esta forma, se puede también analizar el contexto económico, político y cultural de una época determinada; así, uno de los espacios para la realización de este estudio es la historia de las ideas científicas, cuyo producto es el resultado de la interrelación de la creatividad intelectual del hombre con su realidad social.

La construcción del pensamiento matemático es una parte esencial de la historia del conocimiento humano científico, por lo que es necesario analizar los procesos de construcción matemática de la génesis de esta área del conocimiento, donde se plantean los fundamentos que dan validez a esta ciencia.

La obra de Euclides *Los Elementos* a simple vista pareciera ser de este tipo de construcción matemática, ya que en sus trabajos se puede apreciar un cambio en su método y en la sistematización de la geometría griega clásica; marcando en la tradición griega, una nueva concepción en la construcción y la enseñanza de la

matemática griega alejandrina y que por más de dos mil años, sirvieron como libros de ciencia y de texto, imprimieron la pauta del conocimiento y la enseñanza matemática.

Los *Elementos* es la primera sistematización axiomática deductiva del conocimiento matemático, hoy método general empleado en la matemática y en otras ciencias. Este método trascendió al pensamiento griego helénico y ha llegado hasta nuestros días como el método utilizado por muchas ciencias en la actualidad.

CAPÍTULO I

LOS FILÓSOFOS-MATEMÁTICOS GRIEGOS MÁS IMPORTANTES ANTES DE EUCLIDES

En el presente capítulo se abordará los albores del pensamiento matemático más significativo antes de Euclides de Alejandría, ya que esta rama del conocimiento se reconstruye a partir de andamiajes previos, incluso del pensamiento matemático más primitivo, por lo que es indispensable retornar a estos conocimientos previos que sirvieron como fundamentos básicos en la construcción de los *Elementos* de Euclides.

Abordar temas de la antigüedad es una forma en que una cultura rinde cuentas de su pasado, y es que, desde las épocas más remotas el hombre ha sentido la necesidad de dejar constancia de algunos hechos míticos o legendarios que sirvieran como explicación de su presente, incluso antes del descubrimiento de la escritura, la mayor parte de las sociedades primitivas conservaron relatos fabulosos que explicaban los orígenes de la colectividad y justificaban la situación de las clases dirigentes mediante la exaltación de sus virtudes.

Reflexionar para comprender y hacer comprender el presente desde el pasado; organizar el pasado en función del presente, incrementar el dominio sobre el presente al dominar y comprender el pasado. Y así, crear las condiciones que faciliten el interés por afianzar una identidad filosófica. Por todo lo anterior, podemos decir que:

...Para la propia filosofía, la mediación de sus problemas clásicos por las reflexiones precedentes de otros campos constituye auténtico alimento revitalizador, que restablece la frescura original y le otorga nueva legitimidad.⁷

⁷ Schrödinger, Erwin. (1997). *La Naturaleza y los griegos*. Pág. 13.

Con esta óptica la historia de la matemática es la propia historia del desarrollo del hombre. Desde el origen de la humanidad hasta nuestros días, la interrelación y manipulación del medio ambiente natural han modificado el pensamiento lógico-racional, desde un punto de vista analítico, crítico y reflexivo, dándole coherencia y significado a una de las actividades más significativas: el pensamiento matemático.

1.1 Los inicios

En los albores de la humanidad, el entorno del hombre primitivo es caótico, incomprensible y complejo. Ante este escenario, una de las primeras acciones racionales, producto de siglos de evolución, es establecer un orden, por lo que se enfrentó primero a clasificar y sistematizar lo que sus sentidos le mostraban y experimentaba. Al respecto se dice:

Cada una de estas técnicas supone siglos de observación activa y metódica, de hipótesis atrevidas y controladas, para rechazarlas o para controlarlas por intermedio de experiencias incansablemente repetidas.⁸

Así, esta acción de clasificar es un acto racional que se apoya en las semejanzas y diferencias físicas, enumerando y describiendo sus cualidades y características. Estos son los inicios y fundamentos de todo pensamiento. La representación de la cantidad utilizó marcas en huesos, en cuevas, guijarros, etc. La finalidad de agrupamiento de cosas y de seres, es introducir un principio de orden en el universo, pues la clasificación, además de poseer un conocimiento objetivo y práctico, conlleva la exigencia de una actividad intelectual, la noción de conjunto y de los elementos que lo componen. Por lo anterior se menciona que: “Toda clasificación es superior al caos; y aun una clasificación a nivel de las propiedades sensibles es una etapa hacia un orden racional”.⁹

⁸ Levi-Strauss, Claude. (1992). *El pensamiento salvaje*. Pág. 31.

⁹ Op. Cit. Pág. 33.

El hombre primitivo podía observar en la naturaleza fenómenos cuantitativos a través de las diferencias. Uno de los aspectos más importantes de las clasificaciones es guardar la memoria de la diversidad ordenada del entorno, pero eso requería un lenguaje más sofisticado y especializado. Producto de siglos de evolución en el pensamiento del hombre es la invención de la representación simbólica. Al respecto se dice: “Existe un intermediario entre la imagen y el concepto, el signo. Como la imagen, el signo es un ser concreto, pero se parece al concepto por su poder referencial”.¹⁰

El hombre primitivo necesita el número para contar tal o cual categoría de objetos, para verificar cuentas, para efectuar relaciones entre cantidades, magnitudes y propiedades. Contar y medir son las primeras actividades matemáticas del hombre y utilizaban medidas basadas en el cuerpo humano. La numeración, por muy primitiva que sea, llevará a la operación de adición y de sustracción. Los números naturales, ordinales y cardenales son la base de la aritmética y son un legado del hombre primitivo a nuestra civilización.

1.2 Primeras civilizaciones

El hombre del neolítico (6,000 años a.C.) es el heredero de la larga tradición del hombre primitivo, del paleolítico (10,000 años a.C.) y del mesolítico (8,000 años a.C.). Su mundo mítico, mágico y concreto incorpora y reorganiza nuevos elementos a su estructura racional y que nunca será la que fue antes; así, el pensamiento reflexiona y establece nuevas relaciones. Un aspecto importante es el poder reducir a escala un objeto, posibilita comprender y manipular sus propiedades. Este apoderamiento es cuantitativo y cualitativo, ofreciéndonos el poder sobre el objeto, primero de una forma artesanal y posteriormente racional y sistemática. Por lo anterior se dice:

...el modelo reducido hecho a mano...constituye una verdadera experiencia sobre el objeto. El modelo es artificial, se torna posible comprender cómo está

¹⁰ Levi-Strauss, Claude. (1992). *El pensamiento salvaje*. Pág. 38.

hecho y esta aprehensión del modo de fabricación soporta una dimensión suplementaria a su ser.¹¹

Como producto de lo anterior se posibilitó en las primeras civilizaciones, la creación de la geometría, como una manifestación del pensamiento objetivo, concreto, de orden, de construcción lógica y de una necesidad estética. Los principios de la geometría se remontan a las antiguas civilizaciones de los sumerios, babilonios y egipcios.

Sin embargo, se considera que la geometría como ciencia empezó en Grecia en el siglo IV con la escuela jónica. Al respecto se dice:

Hay que tomar en consideración el hecho de que tanto egipcios como babilonios le habían asignado a las matemáticas un enfoque puramente utilitarista...más los egipcios que los babilonios.¹²

Los sumerios

De 5000-3000 a.C. civilización que se establece en el sur de Mesopotamia (entre ríos); Empieza el proceso de sedentarización, la agricultura con plantaciones sistémicas y la domesticación de cabras, búfalos y carneros (confinamiento y procreación de plantas y animales). Aparece la escritura por el 3500 a.C. en tablilla de piedra, escritura cuneiforme; innovaciones técnicas en el torno alfarero, el arado, el sello en forma de cilindro, la aleación de metales, la rueda, una nueva arquitectura en forma de torres escalonadas, barcos a remos y vela, cerveza, carruajes; aparecen las clases sociales y la división del trabajo, etc.

Con la invención de la escritura se producen dos hechos importantes para la humanidad: a) La posibilidad del almacenamiento del conocimiento y b) La transmisión del conocimiento.

¹¹ Levi-Strauss, Claude. (1992). *El Pensamiento Salvaje*. Pág. 46.

¹² Lara Aparicio, M. (1991). *Los Matemáticos Griegos*. Pág. 17.

En el ámbito específico de las matemáticas, rubro de nuestro interés, se desarrolla el sistema de Metrología de pesas y medidas (3400 a.C.); se desarrolla la aritmética, tablas de multiplicar, problemas con divisiones (2600 a.C.), operaciones con multiplicaciones, divisiones, raíces y exponentes; tablas de columnas del sistema sexagesimal (primeros rastros de la numeración babilónica); aparición del ábaco (2700-2300 a.C.), también hay datos que ubican la aparición del ábaco en el lejano oriente 5000 a.C.; sistema de numeración posicional (3400 a.C.); regla de cálculos astronómicos (visión heliocéntrica, cinco planetas que se distinguen con los ojos); calendario lunar, 12 hrs, seis horas dobles de día y seis horas dobles de noche; la geometría se desarrolla y se aplica en la construcción y urbanización.

Los babilonios

Es la civilización que se desarrolla en Mesopotamia del 3500-539 a.C. Tienen una activa vida comercial y formulan la primera ley escrita *El código de Hammurabi* (1790-1750 a.C.); se construyen los Jardines Colgantes, murallas, tumbas, esculturas, canales de riego, la esclavitud se instaura como una institución de riqueza y poder.

En matemáticas el sistema de numeración es posicional y de base 60, símbolos cuneiformes (2000 a.C.); construcción de tablas de multiplicar, dividir, recíprocos, primos, números naturales y fracciones, poco simbolismo, algoritmo de la raíz cuadrada, potencias, cuadrados, cubos, raíces, cuentas diarias, contratos, préstamos, interés simple y compuesto (2000-1200 a.C.); se encontraron 400 tablillas de arcilla educativas, con contenidos matemáticos (1800- 1600 a.C.), se poseen tablillas cuneiformes mesopotámicas con resolución de problemas con ecuaciones de primer, segundo y tercer grado, así como sistemas de ecuaciones, el planteamiento es verbal de signos e incógnitas; perfeccionamiento del ábaco, pues se cree que el ábaco tiene su origen en China; progresiones aritméticas y geométricas.

En geometría se abordan problemas de construcción concreta utilizando el Teorema de Pitágoras; propiedades de los triángulos semejantes; áreas de cualquier rectángulo, triángulo recto, triángulo isósceles, trapecio, trapezoides y círculos; resolución de sólidos, paralelepípedos, cilindros, prismas rectos; el triángulo rectángulo y la relación entre sus lados; “La relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro ($\pi = 3$)”.¹³; el ángulo inscrito en un semicírculo es recto; Los lados homólogos de triángulos semejantes son proporcionales; círculo de 360° ; medidas de los ángulos en grados, minutos y segundos; estudio del arco a través de las propiedades de la circunferencia $C = 2\pi$.

El sistema sexagesimal ayudó a establecer un sistema de medición del tiempo; calendario con años, meses, un día de 24 horas, una hora de 60 minutos y un minuto de 60 segundos; la torre de Babel era un observatorio para predecir eclipses, con sus datos astronómicos crearon mapas de constelaciones, horóscopos y 12 signos del zodiaco (astrología),

En sus inscripciones no hay estructura lógica o demostraciones racionales, por lo que se dice:

Conjeturas de otra índole merecerían las consideraciones acerca de la finalidad que persiguieron sumerios y babilonios con su sorprendente matemática... Una hipótesis verosímil, que la índole de los problemas corroboraría fija a los textos matemáticos de los babilonios una finalidad formativa: su estudio y práctica serían considerados indispensables en el aprendizaje y adiestramiento de escribas y funcionarios de pueblos de un avanzado desarrollo comercial.¹⁴

Los egipcios

Esta civilización que se desarrolló en el delta del río Nilo, del 3150 - 31 a.C. y fueron XXX dinastías que los gobernaron; construyeron pirámides, tumbas; se desarrolló la agrimensura (2700 a.C.) y la astronomía (2400 a.C.); calendario (2400

¹³ Bell, E. T. (1999). *Historia de las Matemáticas*. Pág. 48.

¹⁴ Pastor, R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 26.

a.C.); en la construcción se utilizó la topografía (2000 a.C.); invención de jeroglíficos, símbolos para la escritura y para los números; su universo era un prisma rectangular (una caja), donde el techo era el cielo, el espacio encerrado era la región de los dioses, el sol y la luna, la base era la tierra donde habitaban los hombres.

Las periódicas inundaciones del Delta del río Nilo propiciaron que perfeccionaran su aritmética y la geometría. Primeros vestigios del desarrollo de una matemática en el papiro de Rhinda, que es un manual de aritmética para instruir a los escribas oficiales en la práctica de cálculos en la economía y la sociedad egipcia, al respecto se dice que el papiro contiene: "...las reglas para lograr un conocimiento de todo lo obscuro y de todos los misterios que residen en las cosas...".¹⁵ Escrito por el escriba Ahmes (1650 a.C.) y que es una copia del papiro de 1850 a.C., el más valioso y antiguo documento matemático que existe, matemáticamente se encuentran fórmulas, métodos para el cálculo de áreas, operaciones de suma, resta, multiplicación y división de las fracciones unitarias, el valor de $\pi = 3.16$ como el valor más aproximado de ese tiempo.

Primer sistema de numeración base 10 (2700 a.C.), no es un sistema posicional, cada decena era un símbolo; en los jeroglíficos para números se encontraba el ojo de Orus, que representa un número racional a/b ; en aritmética utilizaron jeroglíficos especiales para la suma y para la resta, elaboraron problemas prácticos con fracciones de adición, sustracción, multiplicación, tablillas de madera con tablas de fracciones, cocientes y residuos; métodos para duplicar y mitades, entre otros métodos; aplicaciones prácticas de peso y medidas, como el palmo, el pie, el cúbito, etc.; números compuestos y primos, la media aritmética.

Utilizaron de manera especial el Teorema de Pitágoras (2000-1850 a.C.); referencias de la raíz cuadrada; probabilidades algebraicas; métodos para resolver ecuaciones de primer grado y soluciones de ecuaciones de segundo grado, se presentan múltiples problemas de aplicación. El papiro de Berlín (1700 o 1300 a.C.)

¹⁵ Pastor, R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 30.

presenta problemas algebraicos con soluciones de ecuaciones de segundo grado; sumas de series aritméticas y geométricas. También existe el papiro de Moscú (1850 a.C.), donde aparece el cálculo del volumen de una figura trunca, además "...contiene 25 problemas relacionados con la vida práctica y se parece al de Ahmes, salvo en dos problemas de particular significación".¹⁶

Los egipcios perfeccionaron la geometría utilizando ejes de simetría; aportaron las fórmulas de áreas de un círculo, de los triángulos, cuadriláteros y trapecios; mediciones de superficies y volúmenes de cuerpos geométricos como cilindros, pirámides, ortoedros. Así también, volúmenes de figuras truncas; primer intento de la cuadratura del círculo.

Tanto el conocimiento de los babilonios como el de los egipcios eran altamente fiables, se adquirían a través de la experiencia, la inducción, el razonamiento por analogía y la experimentación. Todo esto nos lleva a un conocimiento empírico de ambos pueblos.

Las constantes invasiones que sufrían unos pueblos por otros, así como la cercanía de las regiones de estas culturas antiguas y el intercambio comercial que establecieron con otros pueblos del mediterráneo, fueron propiciando las condiciones para el surgimiento de una nueva cultura y el dominio de un nuevo pueblo en la historia de la humanidad, los griegos. Esta nueva civilización acogerá los conocimientos matemáticos de las civilizaciones predecesoras; despojadas las matemáticas, desde sus orígenes empíricos, de toda fantasía y magia, ahora están en la posibilidad de ser engrandecidas y posicionarse en la grandeza del pensamiento matemático lógico racional, nunca antes realizado por la humanidad.

¹⁶ Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 41.

1.3 Los matemáticos griegos antes de Euclides

Con lo anterior se ha llegado al punto de mayor referencia histórica en las aportaciones matemáticas en la Grecia antigua (ver Anexo 1), lugar donde la filosofía se inicia y la matemática se constituye como ciencia; producto de una exigencia racional, que busca la fundamentación de las cosas y los planteamientos que de ellos se hacían. Este movimiento surge en la región jónica, lugar de mayor desarrollo comercial, empresarial, deportivo y cultural del siglo VII a.C. Una nueva forma de pensamiento, desligada de la vida práctica, trae consigo la posibilidad de la creación independiente de la utilidad, al respecto se dice:

Los filósofos griegos tienen el mérito indudable de haber iniciado, tanto en los terrenos de la pura filosofía como en los de la ciencia, lo que hoy llamamos el pensamiento puro.¹⁷

Estos pensadores jónicos de Mileto nunca negaron la parte práctica y técnica de sus planteamientos teóricos, pero sorprendieron desde sus inicios, el alto grado de razonamiento de sus planteamientos filosóficos y matemáticos, sobre el origen de las cosas.

La importancia del pensamiento matemático de los griegos es que desarrollara la matemática abstracta y la matemática demostrativa, elaborando conclusiones a través del razonamiento deductivo, ligado a la comprensión del mundo, por lo cual guarda una visión profundamente filosófica. Gracias a lo anterior es posible que establezcan axiomas y teoremas de forma explícita y de sentido crítico. Se puede hacer su estudio a través de cuatro periodos, que abarca del siglo VII a.C. al siglo V d.C., estos periodos son:

1. Período Jónico.- Finales del siglo VII al siglo V a.C. Formación de la matemática como ciencia independiente.

¹⁷ Xirau, Ramón. (1995). *Introducción a la historia de la filosofía*. Pág. 20.

2. Periodo Ateniense.- Del 450 al 300 a.C. La matemática alcanza completamente una estructura propia que se conoce como algebra geométrica.
3. Periodo Helenístico.- Mediados del siglo IV a mediados del siglo II a.C. La matemática conoció su mayor esplendor, hasta el año 150 a.C. Conocido también como periodo alejandrino.
4. Periodo Greco-Alejandrino.- Mediados del siglo II a.C. hasta 640 d.C. Decadencia y fin de la matemática griega.

Es preciso mencionar que el presente trabajo se enfocará en la vida y obra del maestro y matemático Euclides de Alejandría, que vivió entre 325 y el 265 a.C. Esta precisión se debe a la presencia de un filósofo llamado Euclides de Megara, el cual vivió entre el 435 y 365 a.C. en Atenas y que fue discípulo de Sócrates, maestro de Platón en Megara, después de la muerte de Sócrates; así también, hubo otro filósofo griego llamado Euclides de Mileto, de la escuela megárica, también discípulo de Euclides de Megara, que vivió en el siglo IV a.C. La presencia de estos dos filósofos griegos, hace que frecuentemente se presente una confusión sobre estos autores, de ahí el hacer dicha precisión.

Los filósofos y matemáticos griegos clásicos que se abordarán a continuación pertenecen al período jónico y al período ateniense (ver Anexo 2), pues son los predecesores a Euclides, el maestro y matemático de Alejandría perteneciente al período helenístico.

Tales de Mileto (624 - 548 a.C.)

El primer pensador importante como antecedente para el desarrollo de la filosofía y la matemática es Tales de Mileto. Comerciante, estadista, matemático, físico, astrónomo, ingeniero y político griego, nacido en Mileto, colonia jónica del Asia Menor. Considerado el fundador de la filosofía griega y uno de los Siete Sabios

de Grecia, su principio original de todas las cosas es natural, el agua, y no místico, su frase preferida era: “El agua es la cosa más bella del mundo”.¹⁸

Fue el iniciador de la indagación racional sobre el universo. El universo de Tales de Mileto es un disco plano flotando sobre el agua. Famoso por sus conocimientos en astronomía, ya que, según Herodoto, predijo el eclipse solar del 28 de mayo del 585 a. C. Introdujo la geometría en Grecia, ya que sus actividades de comerciante lo llevaron a Egipto y Babilonia, de lo que se dice:

En cuanto tuvo uso de razón se embarcó en el primer barco que partía, y comenzó una larga serie de viajes por Egipto y Oriente Medio. En la práctica fueron los sacerdotes egipcios y caldeos los que se encargaron de su educación y los que le enseñaron todo lo que por aquel entonces se sabía de astronomía, aritmética y ciencia de la navegación.¹⁹

Enunció y demostró algunos teoremas de geometría plana que aún llevan su nombre:

- Cualquier diámetro bisecta un círculo
- Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
- Los ángulos internos de cualquier triángulo suman 180°
- Los ángulos formados por dos rectas que se interceptan, son iguales.
- Resolvió problemas prácticos como el de inscribir un triángulo en un círculo.
- Estudió sobre congruencia y semejanza de triángulos.

También se dice que calculó la altura de la pirámide de Egipto, por lo que se dice:

Diógenes Laurencio informo que Tales midió también las alturas de las pirámides de Egipto al observar las sombras proyectadas por cada pirámide y la proyectada por un bastón clavado en la arena a la misma hora, usando semejanza de triángulos.²⁰

¹⁸ De Crescenzo, L. (1997). *Historia de la filosofía griega*. Pág. 35.

¹⁹ Op. Cit. Pág. 31.

²⁰ Lara Aparicio, M. (1991). *Los Matemáticos Griegos*. Pág. 21.

Tales habría demostrado teoremas geométricos sobre la base de definiciones y premisas con ayuda de reflexiones sobre la [simetría](#). Deseaba encontrar una explicación racional del universo, brindando la forma de la organización racional de las matemáticas, siendo el primero al que se le atribuyen conocimientos matemáticos precisos. El conocimiento que se tiene de él procede de lo que se cuenta en la *Metafísica* de Aristóteles. Algunos estudiosos sostienen que Tales no escribió ninguna obra, y que su conocimiento se transmitió, en un principio, de forma oral. Otros sin embargo, opinan que sí y, siguiendo a las fuentes antiguas, citan entre sus obras (las cuales no han sobrevivido ni siquiera de manera fragmentaria), una *Astronomía náutica* (atribuida también a Foco de Samos), *Sobre el solsticio* y *Sobre los equinoccios*.

Anaximandro de Mileto (611 - 546 a.C.)

Fue un pensador que contribuyó al desarrollo de la filosofía y la matemática, alumno de Tales de Mileto y uno de los principales filósofos de la escuela jónica. De grandiosa plenitud espiritual, maestro, astrónomo, matemático, político, ingeniero, geógrafo y colonizador griego. Su principio es atrevido pues lo ubica en lo infinito, en una naturaleza ilimitada, indefinida e infinita. El fundamento de las cosas es algo que aún no se conoce, algo que aún no tiene nombre ni límites de ningún tipo y que además es inmortal e indestructible, él lo llamo *ápeiron*. Esta actitud de la inteligencia humana que se ejercita en las fronteras de lo incognoscible, este saber y esta actitud es auténticamente filosófica. El *ápeiron* es eterno y activo, es una sustancia divina que da origen a todo lo demás. Es el más importante de los físicos milesios, pues elaboró el primer mapa del mundo, logrando una concepción metafísica y geométrica del mundo, por lo que se dice: “El mundo de Anaximandro se halla construido mediante rigurosas proporciones matemáticas”.²¹ Se cree elaboró un libro *Sobre la naturaleza, La rotación de la Tierra, Sobre la mediación de los solsticios y equinoccios, Acerca de las estrellas fijas, Las esferas* y otras más. Para él la tierra era cilíndrica y se encontraba en el centro del universo, ya que

²¹ Werner, Jaeger. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. Pág. 156.

mantenía el equilibrio por hallarse por ambos lados a igual distancia de su esfera terrestre y por la rigurosa simetría geométrica del cosmos.

Anaxímenes de Mileto (585 - 524 a.C.)

Este pensador griego fue discípulo y compañero de Anaximandro de Mileto, siendo unos 20 años más joven que él. Filósofo, astrónomo y matemático, para quien el principio de todas las cosas es invariable e infinito, es un elemento concreto, el aire, sustancia que se transforma en otras cosas, como: el fuego, las nubes, el agua, la tierra, etc. El cambio de estado es producto de la rarificación y la condensación. El aire se ve como parte del cosmos, de un mundo concebido como totalidad previsto de alma. Se le atribuye un libro, *Sobre la naturaleza*, escrito, según Diógenes Laercio, en dialecto jónico. De su obra *Acerca de la naturaleza*, queda sólo un fragmento: ... *Así como nuestra alma, siendo aire, nos mantiene unidos, así el aliento y el aire abrazan el mundo entero...* Anaxímenes concibe el cosmos como un animal viviente, dotado de respiración, dentro del *pneuma* infinito que lo envuelve todo. De ahí proviene probablemente su concepto de que el aire es el principio primordial de todas las cosas, por lo que se dice:

Anaxímenes sostiene que el principio originario es el aire y no el agua y a partir de él trata, ante todo, de explicar la vida. El aire domina el mundo como el alma al cuerpo, y aun el alma es aire, aliento, *pneuma*.²²

El aliento y el aire circundan todo el cosmos. Pero no se trata del aire atmosférico, sino de un protoelemento eterno, divino, viviente, ilimitado, sutil, movilísimo, casi incorpóreo. Anaxímenes pone como *arqué* el aire que es un principio infinito. Se apoya en las nociones de condensación y rarefacción. Al condensarse el aire se torna fuego, éste forma el viento, luego las nubes; el agua el hielo, la tierra, las piedras y finalmente, los minerales; el proceso inverso lo representa la rarefacción: piedra, tierra, agua, nubes, aire y, por último la rarefacción del aire produciría el fuego. Probablemente Anaxímenes encontró en el aire una

²² Werner, Jaeger. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. Pág. 158.

serie de propiedades que desempeñarían mejor que otros elementos las funciones de *arqué*: a) La invisibilidad y la infinitud del aire, y b) El aire tiene carácter divino, el aire es dios, y se compara con el alma.

Pitágoras de Samos (582 - 500 a.C.)

Uno de los más importantes filósofos y matemáticos griegos presocráticos, nacido en la isla de Samos, isla muy cercana de Mileto, ubicada en el sureste de Grecia en el mar Egeo, cercana a la costa de Turquía. Se nos presenta como científico, político, educador, matemático y astrónomo. Su pensamiento místico religioso de la transmigración de las almas lo llevó a una vida mística y religiosa, la cual traslado a los números y al estudio de la música. Se cree fundó una orden o secta religiosa. Pitágoras fue instruido en las enseñanzas de los primeros filósofos jonios. Se dice que fue discípulo de Tales de Mileto y de Ferécides de Syros:

Gracias a una recomendación de su tío Zoilo, asistió a la escuela con el gran Ferécides quien, como nos cuenta Apolonio, lo primero que le enseñó fue a hacer milagros. Cuando murió Ferécides, queriendo especializarse en ciencias matemáticas, decidió dirigirse a los más ilustres sacerdotes egipcios.²³

Terminó sus estudios en Samos con Hermodamas y fundó su primera escuela. Fue condenado a exiliarse de Samos por su aversión al tirano persa de Polícrates, por lo que abandonó Samos y se instaló en Crotona, una colonia griega al sur de Italia, donde funda su segunda escuela, donde se da un movimiento con propósitos religiosos, políticos y filosóficos, conocido como pitagorismo, con características de una secta. La filosofía de Pitágoras se conoce sólo a través de la obra de sus discípulos, las cuales influyeron en el pensamiento de Platón. Entre los descubrimientos que se le atribuyen a Pitágoras están:

²³ De Crescenzo, L. (1997). *Historia de la filosofía griega*. Pág. 57.

- Una demostración del Teorema de Pitágoras, llamado así por Euclides, ya que era conocido y aplicado con mucha anterioridad a Pitágoras, en Babilonia, Egipto y la India, pero dio una prueba formal del teorema.
- Los números enteros eran la causa de las diferentes cualidades de los elementos del universo. El número es el principio de las cosas (*arqué*).
- Todo es número y “todo es matemáticas”; La armonía es divina y consiste en relaciones numéricas. Así todo se vuelve divino e inmortal.
- Estudia la aritmética, teoría de números, la geometría, la música y la astronomía. Estudió y clasificó los números.
- Los elementos de las cosas son números y los elementos de los números son puntos o unidades dentro del espacio. Por lo tanto, las cosas consisten en números y el número es el fundamento de las cosas.
- La estrella pentagonal fue un símbolo muy importante, contiene 20 secciones áureas, muy utilizadas en la arquitectura, la escultura y la estética clásica.

El estudio de las secciones áureas lo transfiere a otros ámbitos, como es la música y sus distintos tonos producidos por la longitud de las cuerdas de una lira, de ahí que los intervalos de la escala musical se interpretan como razones numéricas correspondientes a las longitudes de éstas, por lo que se menciona:

...la ley de los intervalos musicales, atribuida al mismo Pitágoras, relaciona los tonos de las notas emitidas por cuerdas de la misma clase, sometidas a iguales tensiones, con las longitudes de las cuerdas. Este descubrimiento, el primero en la física matemática, reveló una interdependencia inesperada del número, el espacio y la armonía.²⁴

Considera que el universo es una obra sólo descifrable a través de las matemáticas. Fueron los pitagóricos los primeros en sostener la forma esférica de la tierra y postular que ésta, el sol y el resto de los planetas conocidos, no se encontraban en el centro del universo, sino que giraban en torno a una fuerza simbolizada por el número uno. Plantea la teoría de la eterna marcha circular de todas las cosas, que tuvo su expresión culminante en la idea del cosmos.

²⁴ Bell, E. T. (1999). *Historias de las matemáticas*. Pág. 60.

Enseña la existencia de un único Dios que mantiene el mundo unido en la justicia, este Dios no piensa de manera humana ni tiene forma humana. Su cuerpo es una esfera y la divinidad se manifiesta en el movimiento circular del fuego de los astros.

Los pitagóricos atribuían todos sus descubrimientos a Pitágoras, por lo que es difícil determinar con exactitud cuáles resultados son obra del maestro y cuáles de los discípulos, por lo que se dice:

En esta sociedad que tenía carácter secreto, todo se compartía, incluso los conocimientos, a grado tal que sus miembros decidieron no dar créditos individuales por los descubrimientos que lograran hacer en matemáticas o en filosofía y así decidieron adjudicárselos a su maestro Pitágoras.²⁵

Del periodo que abarca de Pitágoras a Platón no existe evidencia objetiva o escrita que dé constancia de las matemáticas que se desarrollaron en este período, sólo se cuenta con los comentarios de un historiador griego llamado Proclo (siglo VI d.C.), quien a su vez hizo mención de Eudemo (siglo IV a.C.), primer historiador de la matemática griega y discípulo de Aristóteles. Eudemo menciona a Tales de Mileto como el fundador de la geometría griega durante el siglo VI a.C. y a Pitágoras como el inventor de la teoría de los números irracionales y constructor de los cinco sólidos regulares.

Téano de Crotona (siglo V a.C.)

No se tienen claros sus orígenes, pero se cree que nació por el año 546 a.C. en Crotona, hija de Milón un hombre rico que apreciaba el valor de las ciencias y las artes, tanto que fue mecenas de Pitágoras en Crotona, por lo que la envió como discípula de Pitágoras para que estudiara y aprendiera la ciencia matemática.

²⁵ Lara Aparicio, M. (1991). *Los Matemáticos Griegos*. Pág. 25.

Después se convirtió en la esposa de Pitágoras, 30 años menor que él²⁶, con quien tuvo tres hijas, Damo, Telauges y Arignote.

Como buena pitagórica, creía y defendía que todos los objetos materiales estaban compuestos por números naturales, por lo que la medida de cualquier cosa se podía expresar con una medida exacta. Se le atribuyen algunos estudios sobre la espiral y la proporción aurea, muy estudiada por los pitagóricos.

Se dedicó a aclarar temas sobre la concepción numérica del mundo, la cosmología y a la escritura de tratados de matemáticas, de física y de medicina. Su saber se diversificó en otras ramas del conocimiento: medicina y astronomía, por lo que es también una precursora de la investigación científica.

Téano estudió mucho y trabajó con gran dedicación, por lo que, al cabo de algunos años, se convirtió en maestra. Algunos escritos que se le atribuyen son: *Biografía de Pitágoras, Teorema sobre la proporción áurea, Tratado Sobre la Piedad, Cosmología, Teoría de números, Construcción del universo y Sobre la virtud.*

Cuando el pueblo de Crotona enfureció en contra de la escuela o secta pitagórica, destruyó la famosísima escuela y asesinó a sus maestros; Pitágoras sobrevive a este ataque, pero al poco tiempo muere. La única que se salvó de esa matanza fue Téano, que al morir Pitágoras, se hizo cargo de la escuela con el apoyo de sus hijas.

²⁶ En algunas fuentes se le cita como hija de Pitágoras y otras fuentes como su esposa, mucho más joven que él, por lo que no hay precisión sobre la certeza de dicha información. Lo que sí parece seguro, es que perteneció al grupo de los Pitagóricos, siendo de las pocas mujeres o la única en pertenecer a dicha secta.

Hipaso de Metaponto (500 a.C.)

Nació alrededor del 500 a.C. en Metaponto, la Magna Grecia, al sur de Italia. Matemático griego. Miembro de la escuela pitagórica, se le atribuyen tres importantes descubrimientos: 1) La construcción de un dodecaedro regular, sólido de doce caras, inscrito en una esfera, 2) El concepto de la inconmensurabilidad y 3) La determinación de las relaciones numéricas de las consonancias básicas mediante experimentos de sonido. También se cree que fue quien probó la existencia de los números irracionales. Se dice que fue expulsado por los pitagóricos e incluso muerto, por haber difundido sus conocimientos fuera de la secta. Aunque sus trabajos no han llegado hasta nosotros, al parecer hizo experimentos sobre acústica y resonancia. Pudo haber sido maestro de Heráclito de Éfeso, y creer como él que el *arjé* era el fuego y no los números.

Anaxágoras de Clazómenas (500 – 428 a.C.)

Este filósofo griego pre-socrático, nació en Clazómenas, actual Turquía, perteneció a la escuela jónica, probablemente fue discípulo de Anaxímenes. Fundó la primera escuela filosófica de Atenas, lo que contribuyó a la expansión del pensamiento científico y filosófico que se desarrolló en las ciudades griegas de Asia. Fue protegido de Pericles, que era también su discípulo. En 431 a.C. fue acusado de impiedad y de ateísmo, por lo que fue expulsado de Atenas. Se trasladó a Lampsaco, una colonia de Mileto, en Jonia y allí, fundó una nueva escuela. Este pensador, audaz por sus conocimientos astronómicos, estuvo encarcelado, pues decía que la luna recibía su luz del sol y dio suficientes explicaciones sobre los fenómenos de los eclipses lunares y solares. En el 455 a.C., Anaxágoras dió a conocer su teoría de que la Luna era más que un pedazo de tierra que cayó. La mayoría de sus contemporáneos estaban convencidos de que la Luna era un dios.

Estudio numerosas cuestiones geométricas, era más bien físico y astrónomo que matemático, su curiosidad lo llevo a la solución de problemas matemáticos

relacionados con la meteorología, es decir, a la ciencia de las cosas de lo alto. Una anécdota sobre su actuar dice que en alguna ocasión fue "...acusado de no cuidar a su familia ni de su patria, señala con la mano hacia el cielo y dice: Allí está mi patria".²⁷

Anaxágoras propuso, como pluralista, un principio que se unía tanto a los requisitos de la teoría del *ser*, principio inmutable de todo, como a cuestionar la existencia de múltiples manifestaciones de la realidad. Este nuevo principio llamado por Anaxágoras homeomerías, donde las homeomerías son las semillas que dan lugar a la realidad en su pluralidad de manifestaciones. Instauro una noción de causa inteligente, estableciendo un propósito universal en la evolución; esto repercutirá en filósofos posteriores como Platón y Aristóteles. También ejerce influencia sobre Leibniz.

Enópides de Quíos ($\frac{3}{4}$ del siglo V a.C.)

Se menciona por Proclo que Enópides de Quíos era un poco más joven que Anaxágoras de Clazómenas, cuyos estudios en astronomía lo llevaron a realizar trabajos en geometría teórica con el fin de proporcionar elementos para resolver problemas astronómicos. Estableció que el eje de la Tierra era inclinado. Ya en el siglo V a.C. Enópides de Quíos había establecido el uso de la regla y el compás como la norma en las construcciones geométricas, otorgando así, el rango de figuras elementales básicas, a la recta y al círculo.

Metón de Atenas (siglo V a.C.)

Este pensador griego aparece brevemente como un personaje en la obra de Aristófanes, *Las aves*. Va sobre el escenario llevando instrumentos de topografía y es descrito como un geómetra. Metón fue uno de los primeros astrónomos griegos en hacer observaciones astronómicas exactas. Trabajando con Euctemón, observó

²⁷ Werner, Jaeger. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. Pág. 153.

el solsticio de verano el 27 de junio del 432 a.C., que significaba el comienzo del Año Nuevo para los atenienses.²⁸

Filosofo que incursionó en diversos campos del conocimiento, se le atribuyen estudios en geometría, astronomía, ingeniería y matemáticas. Introdujo en el 432 a.C. un ciclo metónico de 19 años en el calendario Ático lunisolar como método para el cálculo de fechas. Metón encontró que 19 años solares son casi igual a 235 meses lunares y 6,940 días. Ninguna de sus obras sobrevive.

Zenón de Elea (490 - 430 a.C.)

De la escuela eleática, fue discípulo de Parménides, y según varios escritores, enseñó en Atenas durante algún tiempo. Fue un filósofo griego nacido en Elea, Italia meridional; trató de mostrar que la realidad es una e invariable y que todo movimiento es ilusorio. Su amplio arsenal conceptual con que defendió las tesis de su maestro fueron sus paradojas, que son situaciones que parecen absurdas y sin embargo son razonables; mostraba que algunas creencias, donde interviene el movimiento, eran un engaño. Contrastadas con la realidad, las pruebas de Zenón contra el movimiento, se revelan al punto como paradojas y como auténticos argumentos o contradicciones falsas, por lo que se dice: “Zenon descubrió la refutación de la refutación, es decir, la demostración mediante lo absurdo”.²⁹

Según varios escritores, enseñó en Atenas durante algún tiempo. Se limitó a atacar todo planteamiento que no partiera de las tesis eleáticas de Parménides. Como la mayoría de los filósofos presocráticos, la vida de Zenón de Elea permanece en gran parte desconocida. Las fuentes que brindan información son el diálogo Parménides de Platón y la obra *Vida de los filósofos ilustres* del historiador y filósofo Diógenes Laercio. Menciona Platón que Zenón tiene cerca de 40 años y que Parménides ronda los 65 años, en el momento en que se encuentran con un

²⁸ <http://es.wikipedia.org/wiki/Met%C3%B3n>

²⁹ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia del pensamiento filosófico y científico*. Tomo I. Pág. 60.

Sócrates muy joven. Diógenes Laercio indica que fue hijo natural de un hombre llamado Telentágoras y que Parménides lo tomó en adopción; hace hincapié en su destreza a la hora de analizar los dos lados de cada cuestión o dilema, capacidad que le hizo recibir el título de *Inventor de la Dialéctica* acompañado por Aristóteles, quien lo cita en algunas obras.

Zenón intenta probar que el ser tiene que ser homogéneo, único y que el espacio no está formado por elementos discontinuos sino que el cosmos entero es una única unidad. Sus paradojas o sofismas, están diseñadas bajo los siguientes ejes argumentativos: 1) Contra la pluralidad como estructura de lo real, 2) Contra la validez del espacio, 3) Contra la realidad del movimiento, y 4) Contra la realidad del transcurrir del tiempo. Al respecto se dice:

...estos argumentos constituyen una poderosa rebelión del *logos*, que pone en tela de juicio la experiencia misma, proclamando la omnipotencia de sus propias leyes.³⁰

Los razonamientos de Zenón constituyen el testimonio más antiguo que se conserva del pensamiento infinitesimal desarrollado muchos siglos después en la aplicación del cálculo infinitesimal que nacerá de la mano de Leibniz y Newton en 1666. Zenón era ajeno a toda posible matematización, su conceptualización es un instrumento necesario para poder formular sus paradojas.

Filolao de Crotona (470 – 385 a.C.)

A este pensador griego presocrático, también se le conoce como Filolao de Tarento; se dice que fue discípulo de Pitágoras, estudió medicina y astronomía, y difundió las doctrinas pitagóricas en Tebas y Tarento. Como todo pitagórico, su fundamento fue la teoría de los números, por lo que, el universo estaba determinado por números. Además, escribió las teorías de la escuela pitagórica, explicando la constitución de las sustancias y de todas las cosas, hecho que le permitió formular

³⁰ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia del pensamiento filosófico y científico*. Tomo I. Pág. 61.

una cosmología basada en la relación existente entre números y esferas celestes. Supuso que el número 10, que era el número básico, determinaba el número de esferas celestes. Afirmaba que la tierra, la luna, el sol, los planetas y las estrellas giraban alrededor de un fuego central a gran velocidad. Entonces, el universo es explicado por primera vez, como un incipiente precursor de los modelos heliocéntricos.

Teodoro de Cirene o Cyrene (465 - 398 a.C.)

Teodoro fue uno de los profesores de Teeteto y de Platón; este último lo menciona en su diálogo *Teeteto*, diciendo que Teodoro explicaba con figuras los números irracionales, los cuales no eran conmensurables con la unidad. Al respecto se dice:

Teeteto dice, “Teodoro estaba escribiendo para nosotros algo sobre raíces, como las raíces de tres o cinco pies, demostrando que en las medidas lineales son inconmensurables por la unidad; eligió los números que son raíces, hasta diecisiete, pero no fue más lejos; y puesto que hay innumerables raíces, se nos ocurrió la idea de intentar incluirlas todas ellas bajo un mismo nombre o una misma clase.³¹

Además, Teodoro de Cirene fue alumno de Protágoras y vivió la gran parte de su vida en Atenas, ciudad que brindaba suficiente cultura matemática y fue considerado por Proclo³² como un célebre geómetra; destacó en aritmética, música y astronomía.

Además, fue considerado como filósofo y matemático pitagórico, que nació y murió en Cirene, hoy en día Libia; desarrolló la teoría de los números irracionales y trabajó en campos tan diversos como la filosofía, la astronomía, la aritmética, la

³¹ Bell, E.T. (1999). *Historia de las Matemáticas*. Pág. 71.

³² Proclo de Bizancio (Siglo V) filósofo neoplatónico, estudió en Alejandría y dirigió dicha escuela. Es considerado como el primer historiador de las matemáticas de nuestra era. Sus diversas citas y comentarios los hace con base en los escritos de Eudemo de Rodas (Siglo IV a.C.). De sus fragmentos conservados, hacen suponer, que considera a Eudemo como el primer historiador de las matemáticas griegas, haciéndolo patente por las referencias que hace en muchos de sus aportes sobre lo que sabemos de los matemáticos griegos clásicos.

música y la educación. Es conocido sobre todo por su trabajo matemático, donde probó la irracionalidad de las raíces de los números enteros no cuadrados, al menos hasta la $\sqrt{17}$, a base del método tradicional pitagórico. Para ello desarrolló la espiral que lleva su nombre, usando el Teorema de Pitágoras y añadiendo perpendicularmente a un segmento una unidad, lo que forma triángulos cuyas hipotenusas son las sucesivas raíces gráficamente. No debe confundirse con Teodoro el Ateo.

Leucipo de Abdera o de Mileto (460 - 370 a.C.)

De sus orígenes no hay información precisa, pues no se sabe con exactitud su lugar de nacimiento, pues se dice que nació en Abdera, en Melos, en Mileto, en Elea o en Clazomene. Se ignora casi todo de su vida. Filósofo de la antigua Grecia, se le considera el fundador de la escuela atomista, que afirma que la materia está constituida por átomos. Pudo ser discípulo de Parménides, de Zenón de Elea o de Pitágoras. Se le atribuyen dos obras: *La ordenación del cosmos* o *El gran sistema del mundo* y *Sobre la mente*, de las que sólo quedan fragmentos en obras de otros autores como: Aristóteles, Simplicio o Sexto Empírico.

Leucipo formuló las primeras doctrinas atomistas, que serían desarrolladas por Demócrito, Epicuro y Lucrecio. Su doctrina fue un primer intento de conciliar la pluralidad de las cosas y la unidad y permanencia del *ser*. La consideración racional y no puramente empírica de la naturaleza, pues sostuvo, que el *no ser* existe igual que el *ser* y que ambos son la causa de las cosas por igual. Supuso que la naturaleza de los átomos era compacta, llena, que existía el *ser* y que se movía en el vacío, al que denominaba *no ser* y del que afirma que existe no menos que el *ser*.

Leucipo consideraba que la Luna era el astro más cercano a la Tierra, y el Sol el más alejado, reservando para el resto una posición intermedia entre aquéllos. Fue maestro de Demócrito de Abdera, de quien se dice plagió la teoría de los átomos

duros e impenetrables, pues se dice que ya había sido propuesta con anterioridad por Leucipo.

Hipias de Elis o Elide (449 – 350 a.C.)

El nombre de Hipias era muy común en Grecia y éste sofista griego se enorgullecía de haber ganado mucho más dinero que los otros dos sofistas del mismo nombre. Contemporáneo de Protágoras y probablemente de Sócrates. De los primeros sofistas griegos, nacido a mediados del siglo V a.C. Lo que se sabe de él procede de Platón, ya que aparece en dos diálogos *Hipias menor* e *Hipias mayor*, además de una breve aparición en el diálogo *Protágoras*.

Hipias de Élide fue el descubridor de la cuadratriz, empleada para buscar la solución a dos de los tres problemas de la geometría griega, por lo que se dice:

El único descubrimiento que se admite como suyo es el de la *cuadratriz*, curva especial utilizada para resolver el problema de la trisección de un ángulo y para tratar de solucionar la cuadratura del círculo.³³

Creador de los sistemas mnemotécnicos, por lo tanto, se decía que era poseedor de una gran memoria. Con la seguridad característica de los últimos sofistas, él se atribuía ser un conferencista y autoridad en todos los temas: filosofía, poesía, gramática, historia, política, arqueología, matemáticas, geometría y astronomía, además con un gran éxito económico. Estudió medicina, lo cual le ayudó mucho en cuanto a la matemática, ya que vivía en Grecia y Grecia era un país muy dedicado a la medicina y a la matemática. Se jactaba de ser más popular que Protágoras, y estaba preparado en cualquier momento para dar la dirección extemporánea de cualquier persona a la asamblea de Olimpia. De esta habilidad no hay duda alguna, pero es igualmente cierto que era superficial. Su talento no era ofrecer conocimientos, sino dar a sus alumnos las armas de la argumentación, para

³³ Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 84.

hacerlas fértiles en la discusión sobre cualquier tipo de temas. Se dice que se ostentaba de no vestir nada que no hubiese hecho con sus propias manos.

Hipócrates de Quíos (460 a.C.)

Hagamos desde el principio la diferenciación entre los dos Hipócrates griegos clásicos famosos, el Hipócrates de Cos, que fue un célebre médico y fundador de la medicina y a quien se le atribuye la juramentación que hacen todos los médicos. Y por otro lado, está Hipócrates de Quíos, que por el 430 a.C. abandonó su isla natal, instalándose en Atenas; era mercader y se aficionó por el pensamiento filosófico, llegando a ser un talentoso matemático.

Sus aportes más importantes en las matemáticas fueron los siguientes: a) Fue el primero en recopilar efectivamente un libro de los *Elementos*, un tratado sistemático de matemáticas; b) Descubrió la cuadratura de las lúnulas e intentó establecer la cuadratura del círculo; c) Fue el primero que observó que el problema de la duplicación del cubo se reduce al problema de encontrar dos medias proporcionales. Trató muchos temas matemáticos en sus escritos y aprovechaba toda ocasión para despertar el entusiasmo por las matemáticas en aquellos que estudiaban filosofía. Además se dice que: “Las cuadraturas de Hipócrates son importantes sobre todo porque pone de manifiesto el alto nivel matemático alcanzado por los griegos en esta época”.³⁴

También añadió al razonamiento matemático una técnica fundamental a su propia geometría, demostró la fuerza del método indirecto, *reductio ad absurdum*, cuya validez universal de este método permaneció hasta el siglo XX.

Demócrito de Abdera (460 – 370 a.C.)

³⁴ Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 89.

Viajero frecuente, se cuenta que visitó Atenas, Egipto, Mesopotamia, etc. y como todo filósofo griego de su época, trató todos los temas de estudio de su época. Sus viajes eran prolongados, adquiriendo una enorme cultura en ámbitos muy variados; fue el gran sistematizador del atomismo y la mente más universal de los Presocráticos, pero es más reconocido como el creador de la teoría física atomista. Esta teoría le sirvió de base a sus concepciones matemáticas, escribió varias obras de matemáticas, todas ellas desaparecidas, se dice que escribió sobre algunos temas de estudio, como son: “*Números, sobre la geometría, sobre las tangentes, sobre los irracionales*, además temas de ética y poesía”.³⁵ Los problemas matemáticos que interesaban a Demócrito eran de naturaleza infinitesimal, pues concebía a un sólido como una suma de un número infinito de capas planas paralelas, infinitamente próximas e infinitamente delgadas.

Teeteto de Atenas (417 – 369 a.C.)

Hijo de Eufronio, un hombre adinerado, que dejó mucho dinero, el cual fue mal gastado por sus herederos y conocidos. Teeteto es descrito por Platón como un hombre muy caballeroso y de mente hermosa. A este pensador griego pitagórico se le conoce por el diálogo de Platón que lleva su nombre, donde se relata una conversación entre Teodoro, Teeteto y Sócrates.

Teeteto conocía los trabajos de Teodoro sobre los irracionales y concibió generalizar estas cantidades irracionales en una teoría, en la que se distinguían los conmensurables de los inconmensurables. *Se cree que algunos libros de los Elementos de Euclides están basados en las investigaciones de él. Por lo que se dice al respecto:*

*Así se atribuye a Teeteto de Atenas, el estudio de los inconmensurables, con lo cual habría sentado las bases de las propiedades que más tarde se reunirán en el Libro X de los Elementos de Euclides.*³⁶

³⁵ Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 83.

³⁶ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 60.

En este libro se demuestra que existen cinco poliedros sólidos convexos; el octaedro y el icosaedro se deben a Teeteto. Tanto Platón como Teeteto, estudiaron bajo la dirección del matemático Teodoro de Cirene. Cirene era una próspera colonia griega en la costa del norte de África, en la actual Libia. Teodoro desarrolló la teoría de las cantidades inconmesurables y Teeteto continuó sus estudios, clasificando varias formas de números irracionales como expresiones de raíces cuadradas.

Hacia el año 369 a.C. combatió como soldado ateniense, en la batalla contra Corinto, fue herido y llevado de regreso a Atenas, contrajo disentería y llevado a la casa de Platón, donde murió ese mismo año.

Arquitas de Tarento (Siglo IV a.C.)

En la primera mitad del siglo IV a.C. aparece la figura de un general militar, amigo de Platón, aunque nunca perteneció a la Academia. Durante siete años fue estadista, llevó a cabo una reforma política en Tarento, por lo que llegó a ser la más rica y poblada de la Magna Grecia. Construyó templos y edificios, realizando la ciudad e impulsando el comercio al buscar relaciones con otras ciudades.

Arquitas perteneció a los Pitagóricos, alumno de la escuela de Filolao de Crotona. Fue contemporáneo de Platón, al que conoció durante el primer viaje que éste realizó al sur de Italia y a Sicilia en 388 a.C. En su Carta Séptima, Platón asegura que Arquitas lo rescató de sus dificultades con Dionisio II de Siracusa, mediante una carta de recomendación y enviándolo a Sicilia en 361 a.C.

Para algunos autores fue el maestro pitagórico de Platón y para otros su discípulo, también enseñó matemáticas a Eudoxo de Cnidos, siendo a su vez maestro de Menecmo. Arquitas fue filósofo, científico y matemático griego, siguió la tradición pitagórica al preponderar la aritmética por encima de la geometría. Estudió la teoría de los números con gran entusiasmo, desprovistos éstos de su carácter

místico religioso que Pitágoras les había dado, y basado en principios matemáticos; escribió el primer tratado sistemático de mecánica. Con una sorprendente imaginación espacial, construyó un espacio tridimensional, a partir de la intersección de tres superficies construidas en el espacio, obteniendo por este avance original en las matemáticas griegas la duplicación del cubo. De las muchas obras que escribió sólo ha quedado un tratado sobre los *Universales*. Por lo anterior se dice que: "...se ocupó de mecánica teórica y práctica, de aritmética y de geometría, dejando en este campo ingeniosas soluciones".³⁷

Trabajó en Aritmética, Geometría, Astronomía y Música, así como en Acústica, acotando las matemáticas a disciplinas técnicas, con la cuales se cree haya inventado la polea, el tornillo y una especie de mecanismo articulado con alas con el que, aunque sin éxito, intentó volar. Influenció a Euclides. Arquitas falleció en un naufragio en las costas de Abulia entre los años 360 y 350 a.C.

Dinostrato de Alopeconesus (390 – 320 a.C.)

Pensador y filósofo, que junto con su hermano Menecmo, perfeccionaron la geometría. Fue un matemático griego que estudió en la escuela de Platón. La mayor contribución de Dinóstrato a las matemáticas fue su solución al problema de la cuadratura del círculo. Para resolver este problema, Dinóstrato empleó la trisectriz de Hippias, que más tarde fue conocida como cuadratríz. Fue probablemente el primero que la utilizó en la resolución de la cuadratura del círculo. La solución de Dinóstrato la realizó utilizando el método de exhaustión; esto debido a que estudió en la Academia de Platón, donde daba clases Eudoxo, el más grande matemático de esa época, quien aportó a la matemática el método de exhaustión.

Aunque Dinóstrato resolvió el problema de la cuadratura del círculo, no empleó para ello exclusivamente regla y compás, por lo que para los griegos su solución violaba los principios fundacionales de sus matemáticas. "El último paso lo dará

³⁷ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. 1. Pág. 62.

Arquímedes al demostrar cómo se podía pasar, con regla y compás, de la circunferencia rectificada a la cuadratura del círculo”.³⁸ Más de dos mil años después se probaría que es imposible resolver el problema de la cuadratura del círculo mediante el uso exclusivo de regla y compás.

Leodamas de Tasos (380 a.C.)

Los filósofos y matemáticos griegos Arquitas de Tarento, Teeteto de Atenas y Leodamas de Tasos, contribuyeron con sus trabajos en matemáticas a incrementar el número de teoremas, dándose así, un paso más hacia el reagrupamiento científico de teoremas. Leodamas fue contemporáneo de Platón.

Amintas o Anticlas de Heraclea (Siglo IV a.C.)

Discípulo de Platón, filósofo y matemático griego, que junto con Menecmo, discípulo de Eudoxo, como miembro del círculo de Platón y su hermano Dinostrato perfeccionaron aún más la geometría en su conjunto.

Eudoxo de Cnidos (390, 408 – 337, 355 a.C.)

El siglo IV a.C. vio nacer en Cnidos, actual Turquía, a uno de los pensadores matemáticos y astrónomo griego más grande, probablemente perteneció a una familia relacionada con la medicina, ya que esos fueron sus primeros estudios, bajo la tutela de Filisto, y ejerció la profesión durante algunos años. En Atenas frecuentaba la Academia como discípulo de Platón; aprendió matemáticas de Arquitas de Tarento; asimismo fue recomendado por el rey Agesilao II al faraón Nectanebo I, para estudiar astronomía en Heliópolis durante más de un año. A su vuelta, fundó en Cícico una escuela de Filosofía, Matemáticas y Astronomía; también enseñó en otras ciudades del Asia Menor. De nuevo en Atenas, sobre el

³⁸ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 59.

año 365 a.C. y con una gran reputación, volvió a tomar contacto con Platón y figuró como uno de los maestros y miembros más brillantes del círculo de la Academia. Alrededor del año 350 a.C., Eudoxo retornó a Cnido, donde fundó su propia escuela, además se le encargó redactar la nueva constitución.

Como filósofo incursionó en astronomía y geografía, pero su mayor reconocimiento fue en las matemáticas puras y aplicadas. Elaboró una teoría de las semejanzas y clasificó los conceptos de número, longitud, dimensión espacial y temporal. Estableció los fundamentos para la teoría de la proporción, la cual ya contenía el axioma de Arquímedes o axioma de continuidad y anticipaba resultados del comportamiento de los irracionales. Su trabajo sobre la teoría de la proporción denota una amplia comprensión de los números, en el siglo XVI d.C. esta teoría fue resucitada por Tartaglia y otros estudiosos y se convirtió en la base de cuantitativas obras de ciencias de ese siglo. Al respecto se dice:

De muy capital importancia para todo el futuro de las matemáticas fue su teoría de la proporción...es esencialmente una teoría del sistema de los números reales y no fue sustancialmente modificada hasta la segunda mitad del siglo XIX.³⁹

La principal tarea de Eudoxo fue la geometrización del número o de la matemática pitagórica, la cual ya había producido un estancamiento en la primera mitad del siglo IV a.C. Resolvió al mismo tiempo, las dos máximas dificultades que impedían el progreso de la geometría: los irracionales y las equivalencias.

Desarrolló el método de exhaustión con el que demuestra la equivalencia entre prismas y pirámides. Explica su uso para determinar áreas y volúmenes de la pirámide y del cono. “El método de exhaustión es puramente un método de demostración que no pretende descubrir una nueva verdad, sino demostrarla”.⁴⁰ Ésta es una característica de la matemática griega, que puso su atención en el camino, y no en la meta o resultado.

³⁹ Bell, E. T. (1999). *Historia de las Matemáticas*. Pág. 66.

⁴⁰ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 59.

Eudoxo demostró que el volumen de una pirámide es la tercera parte del de un prisma de su misma base y altura; y que el volumen de un cono es la tercera parte del de un cilindro de su misma base y altura, teoremas ya intuitivos por Demócrito. Para demostrarlo utilizó el método de exhaustión, antecedente del cálculo integral, para calcular áreas y volúmenes. El método fue utilizado magistralmente por Arquímedes. El trabajo de ambos como precursores del cálculo fue únicamente superado en sofisticación y rigor matemático por Newton y Leibniz.

Su fama en astronomía matemática se debe a la invención de la esfera celeste y a sus aportaciones para comprender el movimiento de los planetas, que recreó construyendo un modelo de esferas homocéntricas que representaban las estrellas fijas, la Tierra, los planetas conocidos, el Sol y la Luna, y dividió la esfera celeste en grados de latitud y longitud. Su modelo cosmológico afirmaba que la Tierra era el centro del universo y el resto de cuerpos celestes la rodeaban fijados a un total de veintisiete esferas reunidas en siete grupos. Fue el primero en plantear un modelo planetario basado en un modelo matemático, primera explicación científica del sistema planetario, por lo que se le considera el padre de la astronomía matemática.

Nada de su obra ha llegado a nuestros días; todas las referencias con las que contamos provienen de fuentes secundarias, como el poema de Arato sobre astronomía. Eudoxo murió en su ciudad natal

Menecmo o Menaechmus de Alopeconnesus (375, 380 – 325, 320 a.C.)

En el siglo IV a.C. nació en Alopeconnesus, hoy Turquía, el pensador matemático, astrónomo y geómetra Menecmo, hermano de Dinostrato, quienes hicieron toda la geometría más perfecta. Ambos fueron discípulos de Eudoxo en la Academia de Platón. De Menecmo se dice: "...al que se supone tutor de Alejandro

Magno, inauguró la geometría de las secciones cónicas.”⁴¹ Con respecto a ellos se cuenta la misma anécdota entre Euclides y Tolomeo. Fue el director de la Escuela en Cyzicus.

Se sabe que resolvió el problema del cubo con base en las secciones cónicas y fue el primer matemático griego en trabajar las secciones cónicas, también llamadas *la tríada de Menecmo*. Platón no estaba de acuerdo con las soluciones mecánicas de Menecmo porque creía que con estas soluciones lo único que lograba era rebajar el estudio de la geometría. Aún así, el trabajo de Menecmo se centró en el desarrollo de la geometría, hizo un estudio donde discutió la distinción entre teoremas y problemas, aunque muchos habían dicho que eran diferentes. Menecmo sostuvo que no existía ninguna diferencia.

Según Proclo,...escribió obras sobre geometría, *Discusión sobre los fundamentos de la geometría*, sobre el *significado de la palabra elemento* y sobre *la diferencia entre los teoremas y los problemas*.⁴²

Calipo de Cízico (370 – 300 a.C.)

En la ciudad de Cízico, Eudoxo de Cnidos fundó una escuela de Filosofía, Matemáticas y Astronomía y uno de sus alumnos fue Calipo de Cízico, quien fue un astrónomo griego y realizó observaciones astronómicas en el Helesponto. Se tiene noticia de que trabajó con Aristóteles en Atenas hacia el 330 a.C. y su trabajo consistió en corregir y completar los trabajos de Eudoxo.

Las observaciones de Calipo sobre movimientos planetarios lo llevaron a la conclusión de que las 26 esferas utilizadas por su maestro Eudoxo, no bastaban para representarlos correctamente, por lo que se dice: “Su discípulo Calipo consideró necesario aumentar en seis el número de las esferas, con lo que éstas se convirtieron en 33”.⁴³ Esta adición de esfera al sistema de Eudoxo aumentó la

⁴¹ Bell, E.T. (1999). *Historia de las Matemáticas*. Pág. 66.

⁴² Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 99.

⁴³ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia del pensamiento filosófico y científico*. Tomo I. Pág. 261.

precisión de la teoría que exponía que los planetas se movían en círculos perfectos. Se explicaba con más precisión el movimiento de los cuerpos celestes, el Sol, la Luna, Mercurio, Venus y Marte. Realizó determinaciones precisas sobre la duración de las estaciones y construyó un ciclo de 76 años, que se llamó Ciclo Calipico, que comprendían 940 meses para armonizar los años lunares y solares; este calendario fue adoptado en el 330 a.C. y utilizado por astrónomos posteriores.

Otros trabajos de Calipo en matemáticas astronómicas incluyeron la observación de las diferencias de la duración de las estaciones explicando esto por variaciones en la rotación del Sol, agregando dos esferas más en su movimiento.

Autólico de Pítane o Pitania (360 – 290 a.C.)

Fue contemporáneo de Aristóteles y probablemente estudio en la Academia de Platón. Es autor de dos de los más antiguos tratados de geometría que han llegado casi íntegramente hasta nuestros días. El trabajo de este matemático y astrónomo griego dieron sustento y apoyo a la teoría de Eudoxo sobre las esferas homocéntricas, conformando una Teoría matemática de los fenómenos astronómicos. Estos dos tratados de Autólico son: *Sobre las esferas en movimiento* y *Sobre el orto y el ocaso de las estrellas*. Estas obras astronómicas escritas probablemente entre los años 320 – 310 a.C., dan un claro testimonio que la geometría griega tenía una tradición sólida sobre escritos de geometría clásica. Además, en estos escritos se utilizan con frecuencia teoremas que no demuestra, lo que hace suponer que eran bien conocidos en su época. Sus teoremas están claramente enunciados y demostrados. Con respecto a los estudios griegos sobre esféricas se dice:

...la esfera sólo se presenta en su relación con los poliedros inscritos y circunscritos. Este significativo silencio hizo pensar en la existencia de tratados que se refirieran especialmente a esa rama de la geometría del espacio y que, por su aplicación a la astronomía se consideran más pertenecientes a esta última ciencia que a la geometría.⁴⁴

⁴⁴ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 59.

Hasta aquí se ha hecho un rastreo histórico de los pensadores más importantes antes de Euclides. Los conocimientos matemáticos han recorrido hasta aquí un gran trecho, de miles y miles de años, desde sus orígenes, con el hombre primitivo, hasta los pensadores y filósofos griegos del periodo jónico y ateniense, quienes formalizaron las matemáticas como un conocimiento científico.

De esta forma, están puestas las bases para el surgimiento de los pensadores y filósofos del periodo helenístico, donde se ubica a nuestro personaje, Euclides. Para el encuadre previo al periodo que nos interesa, será necesario describir cómo era la educación y cuáles fueron las principales escuelas antes de Alejandría, lo que se atenderá en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO II

LAS ESCUELAS ANTES DE ALEJANDRÍA MÁS IMPORTANTES SUS FUNDADORES Y DISCÍPULOS

En el anterior capítulo se hizo un recorrido por las primeras civilizaciones, donde se gestaron los más antiguos conocimientos matemáticos de los que se tienen noticias, así como los primeros filósofos griegos antes de Euclides y cuyos aportes fueron favoreciendo la génesis de una ciencia matemática. Ahora es el momento de abordar las principales escuelas filosóficas griegas y sus más importantes representantes, que crearon un movimiento de pensamiento filosófico y que en su mayoría favoreció o influyó el desarrollo matemático, antes de Alejandría y del maestro Euclides.

Una de las funciones más significativas y trascendente de toda sociedad es la transmisión de conocimientos y saberes de una generación a otra; desde el hombre primitivo hasta el hombre actual, ha sido una actividad constante y vital, que ha favorecido la supervivencia de la humanidad. Es nuestra propia historia en perpetua reconstrucción y reflexión de nuestros procesos de cómo aprendemos y cómo enseñamos. En los inicios de la humanidad esta actividad didáctica y pedagógica de transmitir los saberes, carecía de objetivos e instrumentos claros para su ejecución, incluso en las primeras civilizaciones.

Es hasta la aparición de los griegos, que se replantea, poco a poco, con claridad y conciencia el fin que persigue la educación, *la formación del hombre*, por lo que se dice: “Significó la educación del hombre de acuerdo con la verdadera forma humana, con su autentico ser”.⁴⁵ La grandeza de los pensadores griegos se manifiesta en las reflexiones y cuestionamientos que hicieron, desde el problema

⁴⁵ Werner, Jaeger. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. Pág. 12.

del cosmos, hasta el problema del hombre; así, el espíritu griego penetró en todas las formas de descubrimiento filosófico sobre lo humano como objeto de estudio.

Para los filósofos griegos, la razón no es el único motor de su espíritu, es la amalgama con la cultura y la civilización, donde se origina el concepto de *paideia*, entendido como un concepto general griego y que se entiende como:

La unión de conceptos modernos como civilización, cultura, tradición, literatura, educación, pero ninguno de ellos por sí solos representan lo que los griegos entendían por *paideia*.⁴⁶

Para el presente estudio no se abordará la educación homérica en Hesíodo y en Esparta, esto debido a que nos enfocaremos en la educación en Grecia a partir del surgimiento de la filosofía y su primer escuela en tierras jónicas. La educación que recibían hombres y mujeres en la Grecia antigua era muy diferenciada, las mujeres estaban, casi en su totalidad, marginadas de este proceso; mientras que, por el contrario, los hombres gozaban de muchos más privilegios sociales. Esto también dependía de la posición económica de la familia, ya que la educación era privada, limitándola aún más a la población.

Las niñas de las familias griegas, desde muy pequeñas, aprendían en sus hogares las tareas domésticas, música y danza. Había dentro de la casa un lugar destinado especialmente para las mujeres, llamado *gineceo*, que era el lugar donde transcurría su vida, ya que ellas no podían participar en negocios, política, ni en tomas de decisiones. Las niñas de familias adineradas también aprendían a leer, escribir y hacer la aritmética elemental para dirigir el hogar. A los quince años formaban su hogar con el novio elegido por el padre. Casi nunca recibían ninguna educación después de la niñez.

⁴⁶ Werner, Jaeger. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. Pág. 508.

En la Grecia del siglo VI a.C. la educación era privada, los niños entraban en la escuela al cumplir siete años, antes de esa edad, eran instruidos por su madre o por los sirvientes. A partir de esa edad, los varones ingresaban a las escuelas privadas, ya que sólo los niños de las familias adineradas, asistían a una escuela y eran cuidado todo el día por un *paidagogo*, “un esclavo doméstico designado para acompañar al niño a la escuela que le ayudaba a repetir sus lecciones”.⁴⁷ Las clases se impartían en las casas privadas de los maestros e incluían aritmética, lectura, escritura, canto y ejecución de instrumentos musicales como la cítara (lira) y el oboe (flauta). Al cumplir el joven 12 años de edad, a los estudios se le agregaban deportes como la lucha, carrera, lanzamiento de disco y de jabalina. A los 14 años la educación era más artística y deportiva. Posteriormente, a los 18 debía cumplir con dos años de servicio militar, al final de estos se les otorgaba la ciudadanía, indispensable para algunas funciones públicas. Después de los 30 años los hombres podían pertenecer al consejo de su ciudad. Los griegos varones estudiaban no para trabajar, sino para convertirse en buenos ciudadanos y poder participar en la vida política, democrática y cultural.

Una minoría de niños continuaba su educación después de la niñez. Una parte crucial de la educación de un muchacho rico era un aprendizaje con un adulto mayor. El muchacho aprendía por mirar a su mentor mientras hablaba de la política en el [ágora](#), ayudándolo a rendir sus deberes públicos, haciendo ejercicios con él en el gimnasio y asistiendo a [simposios](#) con él. El sistema educativo de los antiguos griegos adinerados también se llama *paideia* y se constituía por tres tipos de enseñanzas que eran: *grammatistes* para la aritmética, *kitharistes* para la música, y *paedotribae* para los deportes.

Los estudiantes más ricos proseguían su educación estudiando con maestros famosos. Algunas de las mayores escuelas filosóficas eran *La Academia* fundada por Platón y *El Liceo* de Aristóteles. En Atenas, algunos jóvenes mayores asistían a estas escuelas para las disciplinas más finas como la filosofía, las ciencias, la

⁴⁷ http://www.conductitlan.net/historia_educacion_grecia.ppt

música y las artes. La investigación filosófica no encajonaba al individuo en sí mismo; exigía más bien un conjunto de esfuerzos, una comunicación incesante entre los hombres que hacían de ella fin fundamental de su vida y determinaba así, una solidaridad firme y efectiva entre aquellos que se dedicaban a ella.

Se puede establecer que la filosofía griega desarrolló tres tipos de escuelas filosóficas, esta clasificación depende del fin que perseguían, estas son⁴⁸: 1) Representado por los milesios, los eleáticos y, en parte, el Liceo de Aristóteles, entiende la actividad filosófica como un conjunto de proyectos de investigación, no necesariamente carentes de interés pragmático, movidos por el deseo de explicar los fenómenos. Junto a sus actividades de investigación, muchos de estos filósofos mantienen una actividad política en el marco de las instituciones de sus propias ciudades. 2) Representado por los pitagóricos y la Academia platónica, se propone alcanzar la unión entre el saber y el poder. Esta propuesta halla su mejor síntesis en el ideal del filósofo rey. 3) Finalmente, en la época helenística, las escuelas filosóficas se proponen sobre todo ofrecer un ideal de vida al hombre culto e instruido de su tiempo.

A continuación, se presentan las escuelas filosóficas griegas más representativas antes de Alejandría. Esto con el fin de tener un antecedente de cómo era la educación antes de Euclides y las posibles corrientes educativas que lo instruyeron y lo influenciaron en su labor docente.

2.1 Escuela de Mileto o Jónica

La región jónica en el siglo VI a.C., era la zona geográfica marítima y mercantil griega de mayor auge, su intercambio comercial y cultural dieron una apertura a la diversidad en muy diversos aspectos. La principal colonia jónica era la ciudad de Mileto, floreciente por su desarrollo socioeconómico, intelectual y cultural, prevalecía una atmósfera de mayor libertad personal, aceptaron y trajeron de

⁴⁸ <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2575329>

Oriente sus observaciones empíricas y las sometieron a un pensamiento teórico, causal y racional, en búsqueda del origen y la esencia de las cosas. Es así como surge la filosofía y su primera escuela.

Después de algunos viajes que realizó Tales a Babilonia, Egipto y otros lugares, funda una escuela en la colonia griega de Mileto en la costa egea de Jonia, en donde enseña y trabaja con sus discípulos. Sus miembros más importantes fueron, Tales de Mileto, y sus discípulos, Anaximandro y Anaxímenes. Se dice que Pitágoras fue discípulo de Tales y de Ferécides de Syros⁴⁹, así como Anaxágoras fue discípulo de Anaxímenes. Tales enseñó en su escuela lo que aprendió en sus viajes, sobre todo astronomía y matemáticas.

Llamada escuela de milesia o jónica, es la primera escuela filosófica del mundo, donde se va a aplicar el método de abstracción a la naturaleza, con la intención de encontrar las leyes naturales generales que permitan explicar todos los casos particulares. Así surgen los primeros filósofos griegos, para quienes su problema central fue saber ¿de qué están hechas las cosas? y ¿de qué consisten? Al respecto se dice:

Eudemo habla de Tales como de alguien que inventó varias cosas y mostró a sus sucesores la vía para establecer los principios de algunas de ellas, unas universales y otras referidas a algo concreto.⁵⁰

El fundamento de esta escuela fue un elemento natural, el agua y no mitológico, sus investigaciones son en Meteorología, que es el estudio de lo alto, observaciones de fenómenos celestes, conocimiento del cosmos.

Tales fue el máximo exponente de esta escuela y a quien se le considera el padre de la filosofía griega, a su vez es considerado el fundador de la matemática y

⁴⁹ Una generación más joven que Tales y uno de los siete sabios de Grecia, al igual que Tales. Se menciona que era tío materno de Pitágoras. Se dice que era totalmente autodidacta, nunca tuvo maestro y fue asiduo lector de libros fenicios. Primero que escribió sobre los dioses en prosa.

⁵⁰ Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 66.

la geometría griega, proporcionando los rudimentos para una nueva geometría que se desarrollaría en Grecia. Se dice del Teorema de Pitágoras que: “Según la leyenda fue Tales de Mileto, quien enseñó el teorema en Grecia, por primera vez”.⁵¹

A Tales de Mileto también se debe un teorema que es una de las bases de la teoría de la semejanza y que es piedra angular de toda la geometría. Dice así: *Si varias paralelas cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.*

Esta escuela introdujo una nueva óptica sobre la naturaleza, una nueva forma de cuestionar la organización del mundo; presentó una visión en términos de entidades metodológicamente observables, por lo que puede considerarse la primera filosofía científica. Su método es la contemplación y su principio es natural. Antes de Tales de Mileto, las explicaciones del universo eran mitológicas, por lo que, su interés por la sustancia física básica del mundo marca el nacimiento del pensamiento científico.

En el año 499 a.C. el Imperio persa destruyó las embarcaciones griegas y al ejército griego, arrasando la Ciudad de Mileto, la mayor parte de la población murió y los supervivientes fueron esclavizados. A los filósofos Anaximandro y Anaxímenes les tocó vivir la destrucción de su ciudad; de esta manera terminó la Escuela de Mileto, aunque su filosofía se extendió por todas las ciudades de Jonia, estableciendo los conceptos fundamentales de la filosofía y abriendo el camino del origen racional de la matemática y la geometría en Grecia.

La matemática griega comienza con el mismo nombre con que se inicia la filosofía griega, Tales de Mileto, uno de los *siete sabios de Grecia*, primero al que se dio ese nombre, por el hecho de estudiar los secretos de la naturaleza y hacer conocer sus investigaciones.⁵²

⁵¹ Sestier, Andrés. (1996). *Historia de las Matemáticas*. Pág. 18.

⁵² Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 39.

Después de una súbita interrupción de un elevado florecimiento del pensamiento de tres generaciones de los pensadores jónicos, por la brutal interrupción y destrucción de la ciudad de Mileto, el desarrollo del pensamiento filosófico se traslada al sur de Italia.

2.2 Escuela Eleática

A fines del siglo VI a.C. y tras la destrucción de Mileto, la filosofía se traslada de las costas de Jonia a las de la Magna Grecia, al sur de Italia. Ante este panorama se funda la escuela Eleática, el nombre proviene de la ciudad griega de Elea, al sur de Italia, sus miembros más importantes fueron Parménides de Elea (515 – 440 a.C.), Zenón de Elea, Meliso de Samos (470 – ? a.C.) y Leucipo de Abdera (460 – 370 a.C.). Meliso es considerado el último representante de la escuela de Elea. Parménides y Zenón fueron los máximos exponentes de la escuela. No se sabe con precisión si la escuela fue fundada por Jenófanes de Colofón (580, 570 – 475, 466 a.C.) o por Parménides, ya que muchas de las doctrinas eleáticas se basaron en las enseñanzas de Jenófanes, mientras que Parménides desarrolló sus doctrinas dentro de un sistema de metafísica, donde la apariencia del movimiento y la existencia en el mundo de objetos distintos son mera ilusión, sólo parecen existir.

El pensamiento eleático se opone tanto a la filosofía materialista de los milesios, como a la teoría de flujo del filósofo griego Heráclito de Efeso (540 – 470 a.C.). Según los eleáticos, el universo es inmutable, ya que, siendo infinito en tiempo y espacio, está más allá de la cognición proporcionada por los sentidos humanos. Sólo a través de la reflexión filosófica se puede alcanzar la verdad última, ya que las observaciones sensoriales ofrecen tan solo una visión limitada y distorsionada de la realidad. “Su método no está explícitamente expuesto...sin embargo presupone principios lógicos y razonamientos que serán la base de toda lógica futura”.⁵³ . La mitad de la mitad de la mitad, jamás llega a ser cero. Este es el

⁵³ Xirau, Ramón. (1995). *Introducción a la historia de la filosofía*. Pág. 29.

principio de los seres infinitos, "...porque siempre es divisible hasta lo infinito cualquier cosa que se halle entre dos cosas determinadas".⁵⁴

Esta escuela demuestra un notable progreso: Zenón crea el método dialéctico para enfrentar a los adversarios de Parménides, a partir de sofismas o paradojas utiliza la refutación de la refutación, o sea, la demostración mediante lo absurdo, que será un método utilizado por futuros matemáticos griegos. En esta escuela presocrática se hizo un estudio crítico de los fundamentos de la ciencia. En esa época se plantearon los tres problemas famosos: la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo.

2.3 Escuela Pitagórica

Después de los milesios, el primer grupo filosófico importante son los pitagóricos, los cuales surgen de las escuelas fundadas por Pitágoras, el cual al terminar sus estudios con los jónicos, fundó su primer escuela en Samos, después, fue condenado a exiliarse de este lugar por su aversión al tirano persa Polícrates, por lo que abandonó Samos y se instaló en Crotona, una colonia griega al sur de Italia, donde funda su segunda escuela.

Los pitagóricos formaban una organización griega de astrónomos, músicos, matemáticos y filósofos, que creían que todas las cosas son, en esencia, números. Estudiaron las secciones áureas, especialmente la estrella pentagonal, llamado pentáculo místico, la cual era su insignia. En el área de la cosmología, la idea pitagórica de la transmigración del alma es de suma importancia y seguramente ésta fue impartida por Pitágoras, además, esta escuela tiene propósitos religiosos, políticos y filosóficos. El pensamiento pitagórico estaba dominado por las matemáticas y es profundamente místico, por lo que se decía que conformaban una secta, donde su principio y todo eran números.

⁵⁴ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág.61.

Con la matemática entra en la educación griega un elemento esencialmente nuevo...Las tradiciones legendarias posteriores acentuaron de un modo prominente la importancia de Pitágoras como educador.⁵⁵

Uno de los méritos más grandes de la escuela Pitagórica fue el aproximar la astronomía, la aritmética, la geometría y la música, en un solo cuerpo de estudio; la matemática, de lo que todo estaba hecho y se expresaba el Universo, de ahí que una de sus ideas pilares era que Dios no podía haber creado un mundo imperfecto, razón por lo que lo creó con números.

En la escuela pitagórica se distinguen cuatro grados:

- i. Los acústicos: se estudiaba la primera educación de las musas, mitos, cultos y cantos religiosos, memorización de poesías, instrumentos musicales, danza y gimnasia.
- ii. Los matemáticos: estudiaban aritmética, geometría, astrología y música.
- iii. Los físicos: con estudios filosóficos.
- iv. Los sebásticos: iniciados en la ciencia sagrada o esotérica.

En el siglo V a.C. los pitagóricos eran los principales investigadores científicos, por lo que utilizaron por primera vez términos como: filosofía y matemáticas, se dice que:

La palabra matemáticas acuñada por los pitagóricos significa “algo que ha sido aprendido o entendido” o bien “conocimiento adquirible por medio del aprendizaje”...Según Proclo, Pitágoras transformó las matemáticas en un tipo de educación liberal.⁵⁶

Para ellos la religión y la ciencia estaban en contacto directo, indisociables en un único estilo de vida teórica o contemplativa, no ligada a las necesidades del cuerpo, y practicaban un modo de vivir divino para alcanzar la purificación del alma, por lo que se sometían a una gran cantidad de extrañas normas y prohibiciones.

⁵⁵ Werner, Jaeger. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. Pág. 162.

⁵⁶ Lara Aparicio, M. (1991). *Los Matemáticos Griegos*. Pág. 26.

Sus fundamentos mantuvieron unidas a la ciencia y a la religión; estos fueron la contemplación y el descubrimiento de un orden en la disposición del universo. Una visión en conjunto de las contribuciones matemáticas que se atribuyen a los pitagóricos produce un marcado contraste, siendo las contribuciones más importantes del tipo geométrico, mientras que las contribuciones aritméticas son pobres y escasas. Este hecho resulta un tanto paradójico si se tiene en cuenta la concepción pitagórica de la omnipotencia del número, esencia de todas las cosas.

Los pitagóricos hacen el descubrimiento de un tipo de entes, los *números* y las *figuras geométricas* que no son corporales, pero que tienen realidad y presentan resistencia al pensamiento; los números y las figuras son la *esencia* de las cosas. Por otra parte, la aritmética y la geometría están en estrecha relación, ya que hay números místicos, dotados de propiedades especiales: el Uno es el punto, la unidad; el Dos es la línea; el Tres, el triángulo, la superficie, el Cuatro la pirámide, el sólido, el volumen; el número Diez, es la suma de los cuatro primeros, tiene el sentido de la totalidad, de final y retorno a la unidad, el más sagrado de todos los números por simbolizar a la creación universal, fuente y raíz de la eterna naturaleza, y si todo deriva de ella, todo vuelve a ella. Al respecto se dice:

El Uno de los pitagóricos no es par ni impar: es un *parimpar*, puesto que de él proceden todos los números...El 10 (la *tetraktys*) fue considerado como número perfecto y visualmente se simboliza mediante un triángulo equilátero...Los pitagóricos y la matemática antigua no conocieron el cero.⁵⁷

Tenían el entusiasmo propio de los primeros estudiosos de una ciencia en pleno desarrollo: la importancia del número en el cosmos, todas las cosas son numerables y todo lo podemos expresar numéricamente. Así, la relación entre dos cosas comparadas se puede expresar por una proporción numérica. La escuela también estableció la relación entre los cuadrados de la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo, que constituye el famoso teorema de Pitágoras.

⁵⁷ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 49.

Esta construcción pitagórica se levanta sobre una estructura matemático-racional, aunque ya existía desde la época de los babilonios, pero son los pitagóricos los primeros en hacer su demostración. Lo que no sabían los pitagóricos, es que desde el mismo ámbito matemático provendría un descubrimiento que pondría en *crisis* sus fundamentos, pues con el desarrollo de su teoría de los números, se descubrirían *los Números Irracionales*, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc. Para los pitagóricos estas raíces no son expresable de la forma a/b . Así, en su naturaleza, un número entero o razón no era explicable, *la relación entre los lados de un cuadrado y la diagonal*, no existía ningún patrón que los mida exactamente a ambos, pues *la relación entre el lado y la diagonal de un cuadrado* no se podía someter a *la perfección del Número Racional*, lo cual causó grandes desequilibrios entre los pitagóricos. Este hallazgo es negativo en la escuela pitagórica, pues cuestionaba los cimientos de su *racionalismo numérico* en el cual descansaba la solidez de su doctrina. Lo que sí se sabe es que: "...los pitagóricos sabían hacia finales del siglo V a.C. que $\sqrt{2}$ es irracional. Con un gran ingenio hallaron valores aproximados de $\sqrt{2}$ ".⁵⁸ Y con eso creyeron subsanar la crisis.

El lenguaje matemático no era usado sólo para explicar el mundo, también era usado con las *esferas subjetivas*, el hombre, la justicia, el arte, la medicina y hasta las estaciones, pues todo esto requería de números, proporción y medida. El lenguaje de la realidad es entonces para los pitagóricos, un *logos* matemático. Y, no contentos con recalcar la importancia de los números en el universo, fueron más lejos y declararon que *las cosas son números*. De esta forma, si todo está determinado por números y el número es orden, entonces, todo el universo es *kosmos*, es decir orden.

La escuela pitagórica creó una *teoría matemática* de la música. La relación entre las longitudes de las cuerdas y las notas correspondientes fueron aprovechadas para un estudio cuantitativo de lo musical; como las distancias de los planetas corresponden aproximadamente a los intervalos musicales, se pensó que

⁵⁸ Bell, E.T. (1999). *Historia de las Matemáticas*. Pág. 71.

cada astro da una nota, y todas juntas componen la llamada *Armonía de las Esferas* o música celestial, que no oímos por ser constante y sin variaciones. De ahí que el principio de orden manifestado en el universo y la armonía de los movimientos regulares de los cuerpos celestes es matemático. Para los Pitagóricos, la tierra y los planetas giraban a la vez que el sol en torno al fuego central o *Corazón del Cosmos*, identificado con el número uno. Se dice que: “La conexión de la música con la matemática establecida por Pitágoras fue, desde aquel momento, una adquisición definitiva del espíritu griego”.⁵⁹

Decir que todas las cosas son números significaría que todos los cuerpos constan de puntos o unidades en el espacio. Además los pitagóricos, concebían los números con un carácter pedagógico, pues como ellos no hay otros que tengan mayor capacidad explicativa. El número tenía un sentido genérico y decisivo en la construcción del cosmos, ya que el comienzo es *lo Uno (monas)*, es indeterminada y de naturaleza divina.

Con los pitagóricos el pensamiento humano lleva a cabo un avance decisivo: el mundo ha dejado de estar dominado por potencias oscuras e indescifrables y se ha convertido en número; el número expresa orden, racionalidad y verdad.⁶⁰

La filosofía de Pitágoras se conoce sólo a través de la obra de sus discípulos, influyendo en el pensamiento de Platón. Entre los principales pitagóricos se encuentran: Filolao de Crotona, Teano de Crotona, Hipaso de Metaponto, Teodoro de Cirene, Arquitas de Tarento, Teeteto de Atenas, etc. Al destacar la importancia del pitagorismo durante el Renacimiento italiano, traído por el platonismo, Galileo expresara que *La Naturaleza es inteligible porque está escrita en caracteres matemáticos*.

A mediados del siglo V a.C., la escuela pitagórica fundada en Crotona, es destruida por motivos políticos, una violenta reacción se dio contra la comunidad

⁵⁹ Werner, Jaeger. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. Pág. 163.

⁶⁰ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 51.

pitagórica, fueron perseguidos, muchos de ellos fueron muertos y Pitágoras logró salvarse, muriendo poco tiempo después. Su esposa e hijas lograron sobrevivir y después de un tiempo, ellas instaurar la escuela nuevamente. Esta escuela prevaleció por más de un siglo hasta su destrucción hacia el fin del siglo V, por cuestiones políticas.

2.4 Escuela Pluralista

Las primeras reflexiones sobre el mundo material que se iniciaron con las doctrinas de la escuela jónica, continuaron en el siglo V a.C. tras una interrupción y destrucción de Mileto, pero este surgimiento asumió diferencias en los planteamientos hechos por Empédocles y Anaxágoras, que desarrollaron filosofías que sustituían la descripción jónica de una sustancia primera única por la suposición “de una pluralidad de sustancias en el mundo”.⁶¹ Empédocles mantenía que todas las cosas están compuestas por cuatro elementos irreductibles: aire, agua, tierra y fuego, combinados o separados por dos fuerzas opuestas según un proceso de alternancia: el amor y el odio. Mediante este proceso, el mundo evoluciona desde el caos hasta la forma y vuelve al caos otra vez, en un ciclo reiterado. Empédocles consideró el ciclo eterno como el objeto verdadero del culto religioso.

Anaxágoras fundó la primera escuela filosófica de Atenas. Lo que contribuyó a la expansión del pensamiento científico y filosófico que se desarrolló en las ciudades griegas. En 431 a.C. fue expulsado de Atenas y se trasladó a Lampsaco, una colonia en Jonia, donde fundó una nueva escuela. “Fueron discípulos suyos Pericles, Tucídides, Eurípides, Arquelaos, Demócrito, Empédocles y, aunque no se sabe a ciencia cierta, Sócrates”.⁶² Anaxágoras sugirió que todas las cosas están compuestas por partículas muy pequeñas o semillas, que existen en una variedad infinita. Para explicar cómo se combinan esas partículas para formar los objetos que constituyen el mundo conocido, desarrolló una teoría de la evolución cósmica.

⁶¹ Abbagnano, N. (1996). *Diccionario de Filosofía*. Pág. 917.

⁶² <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/anaxagoras.htm>

Afirmaba que el principio activo de este proceso evolutivo es una mente universal que separa y combina las partículas, el *nous*. Su concepto de partículas elementales llevó al desarrollo de una teoría atómica de la materia. En esta corriente de nuevos pensamientos, los *pluralistas* se muestran más alejados de los aspectos míticos, no como los monistas, los pluralistas resaltaron el predominio de causas naturales como únicas fuerzas generadoras del cosmos.

2.5 Escuela Atomista

El atomismo es un sistema filosófico que surgió en Grecia durante el siglo V a C., según el cual, el universo está constituido por combinaciones de pequeñas partículas indivisibles denominadas átomos, que significa en griego *que no se puede dividir*. El fundador de esta escuela es Leucipo de Abdera, discípulo de Meliso. De Leucipo no se conoce su lugar de nacimiento y casi nada acerca de su vida, sin embargo se dice:

Leucipo, nació en Mileto, llegó a Italia, a Elea (donde conoció la doctrina eleática), a mediados del siglo V a.C., y de Elea pasó a Abdera, donde fundó la escuela que llegó a su culminación con Demócrito.⁶³

Según el atomismo mecanicista de Leucipo y Demócrito de Abdera, su discípulo, los átomos son unas partículas materiales indestructibles, desprovistas de cualidades, que no se distinguen entre sí más que por la forma y dimensión, y que por sus diversas combinaciones en el vacío constituyen los diferentes cuerpos. La concepción de la naturaleza fue absolutamente materialista, y explicó todos los fenómenos naturales en términos de número, forma y tamaño de los átomos. Incluso redujo las propiedades sensoriales de las cosas a las diferencias cuantitativas de los átomos.

El atomismo aparece en la filosofía griega como un intento de superar las dificultades lógicas para explicar el cambio de las cosas consideradas en la Escuela

⁶³ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 67.

eleática. Afirma lo que ésta misma afirma y puede afirmar también lo que ésta niega, haciéndose así más comprensiva como teoría. No hay disyuntiva entre ser y no ser, sino ambas cosas, sólo que el ser no es efectivamente tal, esto es, espacio y vacío. Esta simultaneidad de los contrarios constituye la fuente del movimiento. Esta teoría atómica recorre con tal fluidez el tránsito del ser a las cosas, suprime de golpe tantos obstáculos para la comprensión mecánica y matemática del universo, que desde entonces se convirtió en modelo para cualquier investigación racional de la naturaleza. "...el atomismo fue la más rigurosamente eleática de las propuestas pluralistas".⁶⁴

A Demócrito se le atribuyen numerosas obras y que en su conjunto constituyen el *corpus* de la escuela, donde confluyen las obras del maestro y sus discípulos. Esta escuela afirma que no existe más sustancia que la materia y el universo está compuesto de infinitos átomos en el espacio vacío. Todos los seres de la naturaleza se explican por combinación de átomos y vacío y su heterogeneidad depende de la diversidad atómica en cuanto al número, la forma, la magnitud y la posición. Demócrito dotó a los átomos de un principio de auto movilidad que los convertía en el origen de todas las cosas, excluyendo así toda causa que no fuera material, principio que se ha mantenido en todas las formas posteriores de materialismo.

La escuela atomista representa una reacción natural contra las exageraciones dialécticas, panteístas, el abuso del método puramente idealista y el apriorístico de la escuela eleática. Se abandonan las concepciones de los antiguos jónicos, y se rechaza la concepción monista e idealista de los eleáticos, para sustituirlas por una concepción esencialmente materialista y atea.

Los atomistas contribuyeron poderosamente al desarrollo de la ciencia porque representan la primer tendencia materialista y determinista en la historia...La ley de la causalidad ha estado en la base de todas las ciencias físicas y naturales. El descubrimiento de la ley, si bien no de su aplicación, debe encontrarse en el pensamiento de los atomistas griegos.⁶⁵

⁶⁴Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 216.

⁶⁵ Xirau, Ramón. (1995). *Introducción a la historia de la filosofía*. Pág. 32.

Esta escuela es lógica en sus deducciones y en la aplicación de sus principios. La esencia de la filosofía atomista se reduce a una doble hipótesis, la existencia del átomo con estas o aquellas propiedades y atributos, que nadie ha visto ni pudo ver, y la existencia del vacío absoluto como elemento o como condición esencial de los seres, además de la existencia de un movimiento que entra repentinamente.

Se dice que Protágoras de Abdera fue discípulo de Demócrito. Aunque Laercio afirma que Demócrito tuvo muchos discípulos de su doctrina, no figura entre ellos ningún nombre notable hasta llegar a Epicuro y Lucrecio, los cuales ya pertenecen a otra época filosófica.

2.6 Los Sofistas

Tras las guerras médicas (492-479 a.C.) que enfrentaron a los atenienses y los persas se produjo un cambio político en Atenas, se pasó del gobierno aristocrático al democrático. Este cambio político ocasionó una verdadera demanda por parte de los que pretendían acceder al poder, de preceptores que enseñaran el arte de convencer a la gente y de gobernar. De esta forma surgió un nutrido grupo de profesionales, dispersos e independientes de la enseñanza, que deambulaban por toda Grecia enseñando a sus alumnos, al respecto se dice:

A los sofistas se les reprochó su carácter errante y la falta de apego a su propia ciudad. Sin embargo...esta actitud también es algo positivo: los sofistas comprendieron que los estrechos límites de la *polis* ya no tenían razón de ser... y más que ciudadanos de una simple ciudad, se sintieron ciudadanos de la Hélade.⁶⁶

Por este oficio cobraban elevadas sumas de dinero, sus enseñanzas eran en el arte de la retórica, oratoria, derecho, política, dialéctica, arte, gramática, moral, religión, filosofía, astronomía y geometría. Afirmaban que la utilización de las matemáticas era un mecanismo para comprender el mundo.

⁶⁶ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 77.

Estos sofistas, de *sofos* sabio, abandonaron definitivamente el estudio de la *Phycis* y se dedicaron al estudio del hombre, sus costumbres, su organización social y sus leyes. Gracias a los sofistas se inicia el período humanista de la filosofía antigua. Su renuncia a seguir estudiando la naturaleza vino motivada por un cierto desencanto producido por la diversidad de interpretaciones ofrecidas hasta entonces.

Los sofistas crearon un ambiente con un fondo filosófico que refleja un relativismo y escepticismos, es decir, los sofistas son relativistas en cuestiones de moral y escépticos respecto al conocimiento. No creían que el ser humano fuese capaz de conocer una verdad válida para todos. Cada quien tiene *su verdad*

En la época de los sofistas la *paideia* se convierte por primera vez en un problema consciente y se sitúa en el centro del interés general bajo la presión de la vida misma y de la evolución del espíritu. Aparece una profesión especial, la de los sofistas, que se asignan como misión *el enseñar la virtud* y con ello el implemento de métodos pedagógicos y riqueza de material didáctico. "...son divulgadores de la idea, según la cual la virtud no depende de la nobleza de la sangre y del nacimiento, sino que se basa en el saber".⁶⁷

Es así como surge la enseñanza superior, produciendo innovaciones en la educación y gracias a sus aportaciones, los sofistas asumieron así, el papel de los primeros grandes educadores, con las siguientes características: a) Estos profesores eran conferencistas itinerantes. Las exhibiciones que hacían de su saber y de su talento de oradores atraían a sus alumnos que los seguían de ciudad en ciudad. b) Enseñaban todo lo que se podía saber y que no se enseñaba en la escuela elemental: geometría, física, astronomía, medicina, artes y técnicas, pero sobre todo, retórica y filosofía.

⁶⁷ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 76.

Los sofistas utilizaron magistralmente el *método dialéctico*, que consistía en largos discursos encaminados no a buscar la verdad, sino a mostrar las incoherencias del adversario. En principio nada es verdad ni es mentira, depende de la habilidad que se tenga en convertir el argumento más débil en el más fuerte, y el aparentemente más fuerte en el más débil.

El buen sofista es capaz de convencer de una cosa y de lo contrario. Los más relevantes miembros de la sofística fueron: Protágoras de Abdera⁶⁸ y Gorgias de Leontinos que fue muy radical. Otros sofistas, menos radicales son: Calicles, Trasímaco, Pródico, Hipias de Elis, Licofrón y Critias.

El desprecio con el que los sofistas eran tratados no era por el hecho de recibir remuneración por sus enseñanzas, sino por la formación en el arte de la política y las técnicas persuasivas, para hacerse de un lugar en la administración de la *polis*. Platón criticaba a los sofistas por su formalismo y sus trampas dialécticas, pretendiendo enseñar la virtud y a ser hombre desde el discurso retórico. Algunos autores sostienen que los sofistas no son filósofos, sin embargo presentan una actitud que sí es filosófica: el escepticismo y el relativismo.

...se habla de *ilustración sofística*, porque al igual que la ilustración europea del siglo XVIII, aprovechaba filosofías elaboradas precedentemente para examinar y criticar *a la luz de la pura razón humana*, los mitos, las creencias y sobre todo las instituciones políticas y sociales...La sofística fue, pues, un *movimiento cultural* más bien que una corriente filosófica específica.⁶⁹

Por el contrario, hay quien sostiene que sí lo eran, y que las críticas de Platón son diferencias políticas y filosóficas. Aristóteles también usa un sentido peyorativo hacia los sofistas.

2.7 Escuela de Sócrates de Atenas

⁶⁸ Protágoras (485 - 411 a.C.), fue el primero en profesionalizar la enseñanza de la retórica y en adoptar el calificativo de sofista, cobrando fuertes cantidades por toda Grecia, en el 445 se instala en Atenas. Se le atribuye la frase: *El hombre es la medida de las cosas*.

⁶⁹ Abbagnano, N. y A. Visalberghi. (1987). *Historia de la Pedagogía*. Pág. 59.

En la historia de la educación griega, los filósofos presocráticos y su acción educadora, no tienen el mismo impacto que Sócrates, a quien se le considera el educador por excelencia. Nació en Atenas en el año 470 a.C. y vivió en la época más espléndida de la historia de la antigua Grecia. Desde muy joven llamó la atención por la agudeza de sus razonamientos y su facilidad de palabra. Además de la ironía con la que amenizaba sus conversaciones con los jóvenes aristocráticos de Atenas, a quienes les preguntaba sobre su confianza en opiniones populares, aunque muy a menudo él no les ofrecía ninguna enseñanza.

Sócrates fue un filósofo clásico ateniense y tuvo por maestro al filósofo Arquelao de Atenas, quien lo introdujo en las reflexiones sobre la física y la moral. Su inconformismo lo impulsó a oponerse a la ignorancia popular y al conocimiento de los que se decían sabios, aunque él mismo no se consideraba un sabio. Filósofos, poetas y artistas, todos creían tener una gran sabiduría, en cambio, Sócrates era consciente tanto de la ignorancia que le rodeaba como de la suya propia. Esto lo llevó a tratar de hacer pensar a la gente y hacerles ver el conocimiento real que tenían sobre las cosas. Asumiendo una postura de ignorancia, interrogaba a la gente para luego poner en evidencia la incongruencia de sus afirmaciones; a esto se le denominó *ironía socrática*, la cual queda expresada con su célebre frase *Sólo sé que no sé nada*. Su más grande mérito fue crear la mayéutica, método inductivo que le permitía llevar a sus alumnos a la resolución de los problemas que se planteaban por medio de hábiles preguntas cuya lógica iluminaba el entendimiento y la construcción de conocimientos más sólidos.

Su filosofía representa la reacción contra el relativismo y subjetivismo sofista, y es la unidad entre teoría y conducta, entre pensamiento y acción. A la vez, fue capaz de llevar tal unidad al plano del conocimiento, al sostener que la virtud es conocimiento y el vicio ignorancia. Fue el verdadero iniciador de la filosofía que busca en el interior del ser humano, al respecto se dice:

Sócrates se centró sobre el hombre, al igual que los sofistas, pero a diferencia de ellos, supo llegar al fondo de la cuestión... ¿Cuál es la naturaleza y la realidad última del hombre? ¿Cuál es la esencia del hombre?.⁷⁰

Sócrates aportó a la *paideia* griega valiosos elementos, que son: a) Capacidad de la razón para la verdad. El fundamento de la pedagogía socrática es llegar a la verdad, como camino y resultado del indagar de la razón; b) Descubrimiento del concepto, que tiene un valor universal y fundamenta los valores éticos, morales, sociales y religiosos, en oposición a la doctrina relativista de los sofistas; c) Intelectualismo, la virtud se identifica con la verdad y existe entre ellas una correspondencia. Si el hombre no es virtuoso, es porque es ignorante; d) La aportación de la mayéutica en la educación, la introducción del diálogo en la tarea educativa para lograr que el interlocutor descubra sus propias verdades. El método socrático era dialéctico, ya que, después de plantear una proposición analizaba las preguntas y respuestas suscitadas por la misma; e) Es una didáctica activa, pues reflexiona, pregunta y dialoga, involucrando al alumno en el descubrimiento de la verdad, ya que el saber y el conocimiento de la realidad es una conquista de la búsqueda personal, donde el educador es un facilitador y una ayuda en esta indagación. Por lo que se dice:

...para Sócrates, quien conoce de verdad el bien lo realiza. Pero para conocer el bien es necesario haberlo encontrado en uno mismo, haberlo aclarado en diálogo con los demás, hasta no adquirir una ciencia clara y ulteriormente comunicable.⁷¹

Creía en la superioridad de la discusión sobre la escritura, pasando la mayor parte de su vida de adulto en los mercados y plazas públicas de Atenas, iniciando diálogos y discusiones con todo aquel que quisiera escucharle, a quienes solía responder mediante preguntas. “Sócrates no escribió nada, ya que consideraba que su mensaje debía comunicarse a través de la palabra viva, a través del diálogo y la oralidad dialéctica”.⁷²

⁷⁰ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 87.

⁷¹ Abbagnano, N. y A. Visalberghi. (1987). *Historia de la Pedagogía*. Pág. 66.

⁷² Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 85.

Entre sus discípulos más representativos e ilustres se encuentran: Jenofonte, Esquines, Antístenes, Aristipo, Euclides de Megara, Felón, y Platón. Conocemos su pensamiento por los testimonios de sus discípulos y otros. En ellos resulta difícil conocer el verdadero pensamiento de Sócrates y nos podemos acercar a él por medio de cuatro fuentes⁷³: 1) Los *Diálogos* de Platón como material más importante. 2) Los escritos de Jenofonte en los que habla de Sócrates. 3) La comedia de Aristófanes, *Las nubes*, que es una sátira contra los nuevos filósofos, fue escrita cuando Sócrates tenía 41 años. 4) Las menciones de Aristóteles en sus obras, son considerados los relatos más objetivos.

Sócrates fue encarcelado y juzgado, declarándolo culpable, por no reconocer a los dioses atenienses y corromper a la juventud. Murió a los 70 años de edad, en el año 399 a.C., según relata Platón en la *Apología* que dejó de su maestro. La sentencia fue la pena de muerte, con envenenamiento de cicuta, que era un método común empleado por los griegos.

Tras la muerte de Sócrates, algunos de sus principales discípulos decidieron salir de Atenas y fundar sus propias Escuelas Filosóficas, llamadas también *Escuelas Socráticas Menores*. En estas escuelas y muchas más anteriores y posteriores se desarrolló la *paideia* griega; al respecto se dice:

...los verdaderos representantes de la *paideia* griega no son los artistas mudos –escultores, pintores, arquitectos- sino los poetas y los músicos, los filósofos, los retóricos y los oradores, es decir, los hombres de estado.⁷⁴

Los fundadores de estas escuelas socráticas menores fueron: Antístenes, que fundó una escuela filosófica donde se perfilaron los comienzos del cinismo; Aristipo de Cirene, quien fundó una escuela filosófica denominada la escuela cirenaica; Euclides de Megara, el cual regresó a su tierra y fundó la escuela filosófica

⁷³ <http://es.wikipedia.org/wiki/Arist%C3%B3fanes>

⁷⁴ Werner, Jaeger. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. Pág. 14, 15.

megárica; Felón, quien fundó la escuela filosófica de Elis; y por último, Platón, quien se vió obligado a salir de Atenas, tras un largo tiempo regresó a Atenas y fundó su escuela filosófica la Academia. El pensamiento socrático tuvo una gran influencia en el pensamiento occidental, a través de la obra de su discípulo Platón.

2.8 Escuela Megárica

Después de la muerte de Sócrates, Euclides de Megara (450, 435 – 380,365 a.C.) vuelve a su ciudad natal, y funda una escuela filosófica, en la que se mezclan sus propias ideas y experiencias, junto con la formación que obtuvo de Sócrates y las doctrinas Eleatas. Se dice que: “Platón abandona Atenas, se dirige a Megara donde asiste a las clases de Euclides”.⁷⁵ En la escuela de Megara se refinó el arte de la dialéctica, pues se debatía sobre el arte de discutir como una rama superior de la dialéctica. Los megáricos tenían afinidad por las paradojas y la sutil elocuencia lógica que dominaban virtuosamente. Destacaron también en el cálculo proposicional, como más tarde harían los estoicos griegos.

La influencia socrática los movió a buscar la verdad, identificada con el bien, planteando un problema ético-gnoseológico. Identificaron entonces el Dios benevolente, inteligente y justo de Sócrates, idea que precedía al monoteísmo- con el ente único e inmutable de Parménides y lo llamaron Dios, sabiduría o justicia, adquiriendo ya la pregunta un carácter metafísico propio de la escuela eleática. Díodoro Cronos, por ejemplo, modificó las paradojas racionalmente imposibles de Zenón de Elea para negar así el movimiento de las cosas. Una teoría contigua a ésta afirmaba que *sólo se puede hablar del ser actual* y no del que está fuera del espacio o tiempo presentes. Por influencia de los eleatas, sostuvieron una tajante separación entre el mundo sensible de la apariencia y el inteligible o real. Por su raíz socrática, buscaban la verdad, entendida como el bien, más allá de lo inmediatamente presente. Combinando ambas fuentes, identificaron el bien socrático, con lo uno e inmóvil de Parménides y lo denominaron *Dios, mente*,

⁷⁵ Xirau, Ramón. (1995). *Introducción a la historia de la filosofía*. Pág. 44.

sabiduría o *entendimiento*. Para ellos, el ser inmóvil del que hablaba Parménides no era sino el bien del que hablaba Sócrates. De este modo, las ideas de Sócrates adquirieron un marcado carácter metafísico. Al respecto se dice: "Euclides, pues, procuró dar al socratismo el fundamento ontológico que le faltaba".⁷⁶ La escuela megárica, según se infiere de lo que dejamos indicado, debe considerarse como un ensayo de conciliación, o más bien de fusión entre la filosofía eleática y la socrática. El ser *uno* de los antiguos eleáticos, se transforma en el ser *bien* para los megáricos, y se identifica con la razón suprema y con Dios.

Las discusiones fueron decayendo hasta convertirse en un palabrerío o verborrea sin sentido, usando silogismos. Por este tipo de disputas dialécticas, la escuela también fue conocida como escuela Erística. Los discípulos más sobresalientes fueron Ebulides de Mileto y Estilpon de Megara, Alexio de Elea, y Diódoro de Jaso, cuyo sobrenombre era Kronos.

2.9 Escuela Cínica

En la segunda mitad del siglo IV y durante el siglo III a.C. surge en Grecia un movimiento de pensamiento llamado cinismo, su fundador fue Antístenes, el más antiguo de los discípulos de Sócrates, el cual solía enseñar en un gimnasio llamado *Cinosarges*, que significa perro blanco o perro veloz. Esta escuela fue llamada *Escuela Socrática Menor*, ya que reinterpretaron la doctrina socrática considerando que la civilización y su forma de vida era un mal y que la felicidad venía dada siguiendo una vida simple, acorde con la naturaleza. Estaban en contra de la corrupción de las costumbres y los vicios de la sociedad griega de su tiempo, ya que pregonaban que el hombre llevaba en sí mismo todo para ser feliz y conquistar su autonomía que era de hecho el verdadero bien. A lo que se dice:

A tono con el desarrollo del concepto del "dominio sobre sí mismo", como el imperio de la razón sobre los instintos, se va formando ahora un nuevo concepto

⁷⁶ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 104.

de la libertad interior. Se considera libre al hombre que representa la antítesis de aquel que vive esclavo de sus propios apetitos.⁷⁷

Los cínicos despreciaban la riqueza y cualquier preocupación material, los placeres, las pasiones, las normas sociales y los lazos nacionales. Afirmaban que las costumbres, las creencias religiosas y las leyes se hallaban en oposición a la naturaleza. Veían a la civilización como algo artificial, antinatural y despreciable. Por lo anterior nunca elaboraron una doctrina moral sistemática, sino que ellos mismos fueron un testimonio de la virtud, la cual no es un saber, sino un modo de vida ascética, de abstinencia y autodominio. Su filosofía promulgaba que el hombre con menos necesidades era el más libre y el más feliz, ya que la felicidad viene de una vida sencilla y natural. Exaltaban la pobreza extrema en una virtud.

Ellos estaban en contra de la escuela, repudiaban las ciencias, las normas y las convenciones. Con un estilo excéntrico, franco, irreverente y provocador desconcertaban a sus contemporáneos, así como con sus numerosas sátiras o diatribas, hacían deliberadamente lo que los demás no se atrevían hacer por pudor o costumbre. De esta forma reafirmaban su independencia.

Los filósofos más reconocidos y representativos de este movimiento fueron Antístenes y su discípulo Diógenes de Sinope (412 – 323 a.C.), que por su comportamiento, su vida errante y desapego a los bienes materiales, les apodaron cínicos, que significaba *perro*. Antístenes se llamaba a sí mismo *El Auténtico Perro* y Diógenes se hacía llamar *Discípulo del Perro*. Otros discípulos fueron Crates de Tebas, discípulo de Diógenes, su esposa Hiparquía, y Menipo de Gadara. Ciertos aspectos de la moral cínica influyeron en el estoicismo. El cinismo no fue una escuela filosófica, sino un movimiento filosófico que se desarrolló en Grecia y se propagó por las grandes ciudades del Imperio Romano: Roma, Alejandría y Constantinopla.

2.10 Escuela Cirenaica

⁷⁷ Werner, Jaeger. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. Pág. 434.

Esta escuela, fundada por otro discípulo de Sócrates llamado Aristipo de Cirene, es también considerada una de las *Escuelas Socráticas Menores* y se centró en cuestiones de ética. De esta escuela se derivaron cuatro ramas que son: a) Cireneos, seguidores de Arístipo, b) Hegesíacos, seguidores de Hegesías, c) Anicerios, seguidores de Aníceris y c) Teodorios, seguidores de Teodoro el Ateo. Emparentada con las escuelas megárica y cínica; su doctrina fue bautizada como Hedonismo y la sistematización de sus afirmaciones se debe a Aristipo *El Joven*, nieto de Arispo de Cirene.

El autodomínio que buscaban todas las escuelas socráticas, era para ellos la administración de todos los placeres. El bien se identifica con el placer, aunque éste debe entenderse como placer espíritu y alma espiritual. La felicidad humana, según Aristipo, consiste en librarse de toda inquietud, siendo la vía para lograrlo la *autarquía*, “que es la condición de autosuficiencia del sabio a quien le basta ser virtuoso para el logro de la felicidad”.⁷⁸ Para los cirenaicos su concepción del placer es dinámica, en cuanto la búsqueda del goce corporal y sensible. Utilizar las circunstancias para conseguir el placer, sin dejarse dominar por el deseo de obtenerlo.

Los seguidores de Aristipo prolongaron las enseñanzas de su maestro hasta el período helenístico. Filósofos como Teodoro el Ateo, Hegesias, Aníceris, Antípatro de Cirene y Parebates representaron una tendencia filosófica más que una escuela. Cicerón y otros autores nos cuentan que las lecciones dadas por Hegesias en Alejandría fueron causa de tantos suicidios que Ptolomeo I tuvo que prohibir su continuidad. La escuela cirenaica también mantuvo relación con algunos discípulos de Fedón, los llamados eretrienses.

2.11 La Academia de Platón

⁷⁸ Abbagnano, N. (1996). *Diccionario de Filosofía*. Pág. 113.

A continuación nos enfocaremos a la escuela fundada por un hombre atlético, de familia aristócrata y adinerada, que tenía por sobrenombre Platón y significa *el de la espalda ancha*. Nació en Atenas en el 429 a.C. y su nombre propio era Aristocles Podros. Se cultivó en filosofía, matemáticas, poesía, música y deportes. Sobresalió como soldado y ganó dos veces el premio de los juegos ístmicos.

Recibió sus primeras lecciones de Cratilo y a los 21 años pasó a formar parte del círculo de alumnos de Sócrates. Tenía 28 años cuando murió Sócrates y siendo sospechoso por haber intentado salvar la vida de Sócrates, sus amigos le recomendaron que saliera de Atenas, pues no era lugar seguro para él. Tras este hecho, se refugió con Euclides en Megara, con quien continuó sus estudios por un breve tiempo. Ahí comenzó a escribir sus diálogos filosóficos. Decía: “Doy gracias a Dios de haber nacido griego y no bárbaro, libre y no esclavo, hombre y no mujer; pero sobre todo, haber nacido en tiempo de Sócrates”.⁷⁹

Así, en el 396 a. C. emprendió un viaje de diez años por Italia, Egipto y diferentes lugares de África, en busca de conocimientos. En Cirene conoció a Aristipo y al matemático Teodoro de Cirene. En la Magna Grecia se hizo amigo de Arquitas de Tarento y conoció las ideas de los seguidores de Parménides y de los principales pitagóricos de esa época. Se presupone que Teodoro y Arquitas, ambos pitagóricos, le enseñaron matemáticas a Platón. Esta influencia fue decisiva en su obra, ya que en los Diálogos de *Teeteto*, *Timeo*, *Fedón*, *Epínomis*, *La República*, *Protagoras* y *Gorgias*, se revela un marcado interés por las matemáticas. El contacto más antiguo de Platón con las matemáticas debió ser anterior a sus relaciones con los pitagóricos, pero esta influencia específica debe ser tomada en cuenta para el desarrollo de la filosofía y las matemáticas griegas.

Vuelve a Grecia en el 387 a. C. y su barco se detuvo en Egina, que estaba en guerra contra Atenas, por lo que fue vendido como esclavo, pero Anníceris de Cirene reconoció a Platón en la venta de esclavos y lo compró para devolverle la

⁷⁹ Durant, W. (1983). *Historia de la filosofía*. Pág. 40.

libertad. Ya en Atenas fundó su escuela a los 40 años, la cual fue organizada con un plan pedagógico. En el 361 a. C., Platón compró una finca en las afueras de Atenas, donde fundó una escuela, un centro especializado en la actividad filosófica y cultural, al cual llamó *Academia*, pues en dicha finca existía un templo dedicado al héroe Academo, de ahí el nombre de Academia. Esta escuela se dedicó a investigar y al conocimiento. Ahí se desarrolló todo el trabajo matemático de la época. También se enseñó medicina, retórica y astronomía. Sin embargo, su inclinación por los estudios matemáticos y la importancia que a ellos les daba, se refleja en la siguiente cita, la que dice:

Se recomendaba a los alumnos tener conocimientos de matemáticas antes de iniciarse en el estudio de la filosofía. Así lo hace suponer el cartel fijado en la entrada de este centro intelectual, que decía: "Nadie ingrese aquí si ignora la geometría".⁸⁰

Para antes de Platón se pueden distinguir seis problemas matemáticos importantes tratados por los pensadores griegos clásicos y los cuales fueron tratados y estudiados en la Academia⁸¹:

- 1.- La fundación sistemática de la geometría plana.
- 2.- El desarrollo de la teoría de números
- 3.- Las determinación geométrica de áreas de círculos, a partir de las lúnulas de Hipócrates.
- 4.- La duplicación del cubo, la trisección de un ángulo.
- 5.- La formulación del problema de los irracionales.
- 6.- La validez de los números infinitesimales a partir de los trabajos de Demócrito y de los sofistas.

Muchos filósofos e intelectuales estudiaron y dieron clases en esta Academia, entre los que destacan: Aristóteles, Espeusipo, Jenócrates de Calcedonia, Polemon y Crates de Atenas, Filipo de Knido, Heráclito de Póntico, Crantor de Solis, Eudoxo

⁸⁰ Platón. (2007). *Diálogos*. Estudio preliminar de Francisco Larroyo. Pág. XIV.

⁸¹ Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 89.

de Knido, Arquitas de Tarento, Menecmo y su hermano Dinostrato, Amintas de Heraclea, etc. Al respecto se dice:

Platón invitó a dar clases a matemáticos, astrónomos e incluso a médicos, que promovieron fértiles debates en el seno de la escuela. Eudoxo de Cnido, por ejemplo, fue el matemático y astrónomo más reconocido de aquellos tiempos, participó en los debates acerca de la teoría de las ideas.⁸²

Las aportaciones de Platón a las matemáticas carecieron de importancia, pero su alusión a ella en algunos de sus diálogos y su apoyo para el estudio y el desarrollo de la matemática que se dió en la Academia, logró un avance significativo en el desarrollo de esta ciencia, como fueron los trabajos de Eudoxo, Menecmo, Dinostrato, Euclides, etc. Al respecto de la obra de Platón y de la matemática se dice:

Los principales pasajes matemáticos de Platón están dispersos en sus diálogos y tratan aspectos tan variados como la teoría de números, las figuras cósmicas (llamadas también las figuras platónicas), la estereometría, los fundamentos matemáticos y la axiomática.⁸³

Platón estableció el carácter abstracto de las matemáticas y sus entidades, y las vinculó a otras como la justicia y bondad. Afirmó el valor de la matemática como propedéutica en la formación del filósofo y la concepción de los entes matemáticos como intermediarios entre el mundo de las ideas y el mundo de las cosas, para lograr el conocimiento de un mundo ideal y el único verdadero; quedando así justificada su frase en la entrada de la Academia.

Las únicas construcciones válidas en geometría para Platón, son aquellas donde se utiliza la regla y el compás, pues asegura la simetría de las figuras construidas. En el diálogo *El Timeo*, influido por el pitagorismo, expone el papel que le asigna a las matemáticas en la construcción del mundo. Tomando a los antiguos cuatro elementos fuego, aire, agua tierra, con los poliedros regulares tetraedro,

⁸² Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 155.

⁸³ Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 93.

octaedro, icosaedro y cubo respectivamente. Donde los primeros se podrán transformar en los segundos, estas figuras pueden descomponerse en triángulos rectángulos isósceles, de ahí que sean estos triángulos las figuras fundamentales con las que se construyó el mundo. Queda un quinto poliedro regular, el dodecaedro, el cual decora el universo; después será el elemento éter, que para Aristóteles será la quinta esencia.

En la Academia se pretende averiguar cuál es el objeto genuino del conocimiento universalmente válido. El método utilizado por Platón es el dialéctico, haciendo una clara exposición de la teoría del conocimiento absoluto y trascendente. Para Platón el objeto del verdadero conocimiento ha de ser estable y permanente, fijo, susceptible de una definición clara.

La Academia tuvo tres grandes periodos.⁸⁴

- La Antigua Academia.- Integrada por los discípulos más próximos a Platón y las generaciones siguientes hasta el año 260 a.C.; El conocimiento está basado en creencias verdaderas.
- La Academia Media.- Dirección escéptica, en la que se distingue la escuela de Arcesilao de Pitana (315 – 241 a.C.). Retoma el método socrático, mediante la ironía, la interrogación y la duda en las controversias filosóficas.
- La Academia Nueva.- A partir del año 160 a.C. y representada por Carnéades y Filón de Larisa se hace dogmática. Con Antíoco de Escalón cae en el eclecticismo.

Los últimos cuarenta años de la vida de Platón impartió enseñanzas en la Academia y muere en el 348 a.C. Espeusipo, sobrino de Platón, se hizo cargo de La Academia y fue cerrada por los romanos tras la conquista de la ciudad de Atenas en el año 86 a.C. Otras fuentes mencionan que la Academia funcionó ininterrumpidamente hasta su clausura por el emperador Justiniano I en el 529 d C., pues veía en ésta una amenaza para la propagación del cristianismo.

⁸⁴ Platón. (2007). *Diálogos*. Estudio preliminar de Francisco Larroyo. Pág. XIV.

2.12 Escuela Peripatética o Liceo

A la muerte de Platón, uno de sus discípulos más distinguidos llamado Aristóteles y después de haber permanecido 20 años en la Academia, se separó de ella a la edad de 37 años. Junto con Jenócrates, se trasladó con su discípulo Hermias, Príncipe de Atarneo, en Misia. Se dice que:

Estando en Mitilene, después de la muerte de Hermias, le llamaron en el 342 de la corte macedónica para que se hiciera cargo de la educación de Alejandro. Allí permaneció hasta el momento en que éste emprendió sus campañas por Asia.⁸⁵

Aristóteles nació en el 384 a.C. en Estagira, Macedonia, razón por la que seguramente fue contratado por Filipo, rey de Macedonia y padre de Alejandro Magno. Su formación le dio un gran prestigio y fama como: filósofo, biólogo, anatomista, taxonomista, astrónomo y botánico.

Aproximadamente en el 334 regresó a Atenas donde fundó *El Liceo*. La escuela fue designada como peripatética por la costumbre que tenía Aristóteles de deambular por los jardines con sus discípulos mientras filosofaban. La escuela era un círculo filosófico de la Grecia clásica. Dentro de la escuela Aristóteles dio algunas clases, lo más probable de retórica. Fue creador de la lógica, precursor de la anatomía, la biología y el creador de la taxonomía.

...el Liceo tenía una tendencia preferentemente hacia la biología y las ciencias naturales... Alejandro dio órdenes a sus cazadores, guardabosques, jardineros y pescadores de proporcionar a Aristóteles todo el material zoológico o botánico que pudiera desear... tuvo a su disposición un millar de hombres esparcidos por toda Grecia y Asia, para coleccionarle especímenes de la fauna y la flora de todas partes. Con esta gran riqueza fue capaz de crear el primer gran jardín zoológico que el mundo haya conocido.⁸⁶

⁸⁵ Dilthey, W. (1996). *Historia de la filosofía*. Pág. 60.

⁸⁶ Durant, W. (1983). *Historia de la filosofía*. Pág. 84.

Aristóteles escribió dos tipos de libros: los Esotéricos y Filosóficos o Acrománticos. Los diálogos se han perdido todos y sus escritos abordan casi todos los temas conformando un *corpus* de conocimientos. En filosofía, contribuyó con el silogismo, que es una terna de proposiciones, de las cuales la tercera, o conclusión, se deduce de la verdad de las otras dos llamadas premisas. “El primer gran mérito de Aristóteles es que, casi sin predecesores, y prácticamente solo, con una ardua y tenaz reflexión, creó una nueva ciencia, la Lógica”.⁸⁷

El método de deducción silogística de Aristóteles depende de las premisas, las cuales ni se pueden admitir sin demostración ni pueden ser simplemente hipotéticas. Por tanto, el camino del conocimiento de lo general a lo particular mediante el silogismo es imposible, pues el punto de partida es incierto. De modo que lo mejor desde el punto de vista escéptico es abstenerse de juzgar, pues no se puede decir nada más allá del parecer.

La ciencia para Aristóteles era cualitativa, basada en el sentido común, donde las matemáticas tenían un papel casi nulo. Para Aristóteles, los números y las formas geométricas también son propiedades de los objetos reales y se accede a ellos a través de la abstracción y la generalización. Las matemáticas para Aristóteles se refieren a conceptos abstractos derivados de propiedades de los objetos del mundo físico. Aristóteles considera que la aritmética es más precisa y previa, que la geometría.

Establece una diferencia cualitativa entre el punto y la recta, distinguiéndolos entre lo discreto y lo continuo respectivamente. Lo primero apunta a la aritmética y lo segundo a la geometría. Todo esto será utilizado y aplicado por Euclides de Alejandría en su obra *Los Elementos*.

⁸⁷ Op. Cit. Pág. 88.

Los más afamados miembros de la Escuela peripatética fueron: Teofrasto de Lesbos, Dicearco de Mesina, Calístenes de Olínto, Estratón de Lampsaco, Aristóxeno, Sátiro, Eudemo de Rodas, Andrónico de Rodas y Demetrio de Falero.

Al final de su vida, cayó en desgracia ante Alejandro, quien condenó a muerte a Calístenes, sobrino de Aristóteles e historiador personal de Alejandro, por no rendirle culto como Dios. Incluso, éste llegó a decir que podía condenar a muerte a quien él quisiera, incluidos los filósofos. A la muerte de Alejandro Magno (323 a.C.), Aristóteles fue acusado de impiedad, pues había enseñado que el sacrificio y la oración no servían de nada. Huyó de la ciudad y al llegar a Calcis, enfermó y murió solitario y empobrecido. Al respecto también se dice:

Diógenes Laercio nos cuenta que el anciano filósofo, amargamente decepcionado por el sesgo que todas las cosas tomaban contra él, se suicidó bebiendo cicuta.⁸⁸

Después de las dos anteriores grandes escuelas filosóficas creadas con un plan pedagógico, para la enseñanza de la filosofía, cada una con sus rasgos característicos, ambas escuelas recienten los estragos de la muerte de Alejandro Magno, así como la situación económica, política y social en la que cae Grecia. Además se trasladó el centro intelectual griego, de Atenas a Alejandría. A lo anterior se le suma la invasión y predominio de los romanos, quienes van a prevalecer en el poder por más de seis siglos.

2.13 Escuela Estoica

El pensamiento filosófico a finales del siglo IV a.C., hasta el siglo I d.C., entra en una variación que va de lo griego a lo romano y que se difunde por todo el imperio. Así surgen estas últimas escuelas del pensamiento filosófico griego, cuyo interés y preocupación fueron en aspectos éticos y religiosos. Al respecto se dice:

⁸⁸ Durant, W. (1983). *Historia de la filosofía*. Pág. 128.

Son cuatro las escuelas que se desarrollan en este largo periodo que va de la caída de las ciudades griegas hasta el momento en que el imperio Romano empieza a sentir la influencia del Cristianismo. Tres de ellas proceden del siglo III a.C.: el epicureísmo, el estoicismo y el escepticismo. La cuarta, el neoplatonismo, surge... como una respuesta al reto de las nuevas formas religiosas que invaden Grecia y Roma.⁸⁹

El estoicismo fue fundado por Zenón de Citio (333 – 262 a.C.) en Atenas, de origen chipriota y posiblemente de ascendencia griega y oriental. También conocido como Zenón el Estoico. Se trasladó a Atenas en el 311 a.C. después de una vida agitada. Por aquel entonces Atenas era el centro cultural del mundo griego, donde se congregaban las principales escuelas de filosofía. Durante su estancia tomó contacto con la filosofía socrática, en especial la de la escuela cínica. También estudió con otros filósofos de las escuelas aristotélicas y la megárica. Pero, insatisfecho con ellas, acabó creando su propia escuela, en la que combinaba múltiples aspectos cínicos con los de otros filósofos como Heráclito.

El término estoicismo proviene del lugar en el que Zenón comenzó a dar sus lecciones en el 301 a.C. el *pórtico pintado* del ágora de Atenas. Pronto atrajo a numerosos seguidores quienes, continuarían y expandirían su filosofía. Adquirió gran importancia y difusión por todo el mundo grecorromano, sobre todo entre las élites romanas. Abarcó un período del siglo III a.C. hasta finales del siglo II d.C.; esto tras el auge del cristianismo y la descomposición del alto Imperio romano.

El estoicismo fue la última gran escuela de filosofía del mundo griego en ser fundada, y continuó existiendo hasta que en el año 529 d.C., cuando el emperador Justiniano clausuró la Escuela. Los escritos de Zenón están perdidos pero se sabe que escribió numerosas obras como son: *De la vida conforme a la naturaleza*; *De los universales*, *Argumentos dialécticos* y *De las pasiones*.

Cuando Zenón muere en el 261 a.C. se hicieron cargo de la escuela Cleantes y Crisipo. A este último se le debe que el estoicismo perdurase, perfeccionando las

⁸⁹ Xirau, Ramón. (1995). *Introducción a la historia de la filosofía*. Pág. 85.

investigaciones lógicas y sistematizando las enseñanzas de Zenón. Los estoicos fueron los primeros en usar el término *lógica*, ciencia que tiene por objeto los discursos. Al respecto se dice: "...los discursos internos son los pensamientos, los discursos externos son las palabras, la lógica será dialéctica o retórica".⁹⁰

De su obra sólo quedan escasos fragmentos. Los estoicos antiguos dividieron la filosofía en tres disciplinas: *la lógica*, la racional, teoría del conocimiento y de la ciencia; *la física*, la natural, ciencia sobre el mundo y las cosas; y *la ética*, la moral, ciencia de la conducta. La faceta más importante fue la ética, por lo que se dice:

...la ética de los cínicos, cirenaicos y estoicos, que sitúa en el centro del problema la autarquía ética, se convertiría desde ese punto de vista en el verdadero apogeo de la historia de la filosofía griega.⁹¹

Tras la muerte de Crisipo en el 208 a.C., dirigieron la escuela Diógenes de Babilonia y Antípater de Tarso, quienes expandieron el estoicismo por todo el mundo mediterráneo. Otras figuras fueron Panecio de Rodas, Posidonio de Apamea. Se idealizaba y exaltaba la sencillez y su virtud, por lo que la doctrina estoica, fue muy favorable e introducida con éxito. Ganando adeptos tan conocidos como Catón el Viejo, Escipión el Africano y Catón el Joven; la fama de estos favoreció aún más al estoicismo, que pronto fue la escuela filosófica más admirada por los romanos.

Con la muerte de Catón el Joven surgió la última etapa del estoicismo, el llamado *Estoicismo nuevo* o *Estoicismo romano*. Los filósofos de esta etapa llevaron al estoicismo como la principal doctrina de las élites romanas. Los principales exponentes fueron Lucio Anneo Séneca (4 a.C. – 65 d.C.), Epicteto, esclavo liberto (50 – 130 d.C.) y el emperador Marco Aurelio (121–180 d. C.).

⁹⁰ Abbagnano, N. y A. Visalberghi. (1987). *Historia de la Pedagogía*. Pág. 107.

⁹¹ Werner, Jaeger. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. Pág. 434.

Los estoicos, filósofos preocupados esencialmente por problemas éticos, sostienen que se llega a la virtud por el saber. Por lo tanto, deben buscar el conocimiento pese a todas las objeciones, y para ello deben encontrar un criterio de verdad certero. Por lo que se dice: “Los estoicos enseñarán que la verdadera esclavitud es la de la ignorancia y que a la libertad del saber pueden acceder tanto el esclavo como su soberano”.⁹²

La obra de estos estoicos no introduce ningún elemento original, pero permite acercarse con sencillez y didáctica a los principales aspectos del estoicismo. Con la muerte de Marco Aurelio, el estoicismo entró en decadencia como consecuencia de una revalorización de la espiritualidad que el estoicismo no pudo afrontar. Surgió así el neoplatonismo, que, a partir del 250 d.C., desplazó al estoicismo como principal doctrina de las élites y del cristianismo.

La doctrina estoica consideraba esencial a cada persona como miembro de una familia universal, esto ayudó a romper barreras regionales, sociales y raciales, y preparar el camino para la propagación de una religión universal. El universo es un todo armonioso y causalmente relacionado, un poder que crea, unifica y mantiene unidas todas las cosas y que no es un poder físico: el *pneuma* o *logos* universal es una entidad fundamentalmente racional: es Dios, un alma del mundo o mente que todo lo rige y de cuya ley nada ni nadie puede sustraerse.

2.14 Últimas escuelas del pensamiento griego

El Epicureísmo

A finales del siglo IV a.C. (307-306 a.C.) se fundó una academia en Atenas llamada el Jardín y cuyo fundador fue Epicuro de Samos, filósofo ateniense. El epicureísmo es un sistema filosófico que defiende la búsqueda de una vida buena y feliz mediante la administración inteligente de placeres y dolores, *la ataraxia*, que

⁹² Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 205.

representa la ausencia de turbación. Además propone vínculos y relaciones amistosas entre sus correligionarios; el amor era lo que les daba alegría a las personas. Este placer no debía limitarse sólo al cuerpo, sino que debía ser también intelectual, ya que el hombre es un todo.

La nueva doctrina que procedía del Jardín era original precisamente en su espíritu peculiar...La fe epicúrea es una fe en este mundo, negadora de toda trascendencia y radicalmente ligada con la dimensión de lo natural y lo físico.⁹³

Según este filósofo, los placeres y sufrimientos son consecuencia de la realización o impedimento de los *apetitos*. Epicuro distingue entre tres clases de apetitos, por tanto placeres:

- Los naturales y necesarios, como alimentarse, abrigo, y el sentido de seguridad, que son fáciles de satisfacer.
- Los naturales pero no necesarios, conversación amena, gratificación sexual.
- Los no naturales ni necesarios, la búsqueda del poder, la fama, el prestigio.

Para los Epicúreos la presencia del placer o felicidad era un sinónimo de la ausencia de dolor, o de cualquier tipo de aflicción, un equilibrio perfecto entre la mente y el cuerpo que proporcionaba la serenidad o *ataraxia*. Se dice que: “En saber elegir y limitar las necesidades consiste la sabiduría que es por tanto la cosa más necesaria para la vida y más preciosa que la misma filosofía”.⁹⁴

Los seguidores de esta filosofía fueron llamados *epicúreos*. Esta corriente filosófica no es dualista, no postula la oposición cuerpo-alma; el alma, igual que el cuerpo, es material y está compuesta de átomos, por lo que se funda en la teoría física atomista de Demócrito. Hace la distinción entre dos tipos de placeres, pero unidos, que son: a) Los placeres del cuerpo. Son los más importantes y se busca el equilibrio voluntario y consciente de estos placeres, no su eliminación; pues no es posible conocer el placer si no se conoce el dolor. No es posible conocer el placer de comer, si no se conoce el hambre. El placer corporal tiene vigencia en el

⁹³ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 213.

⁹⁴ Abbagnano, N. y A. Visalberghi. (1987). *Historia de la Pedagogía*. Pág. 110.

momento presente, pero es efímero y b) Los placeres del alma. Estos placeres son superiores a los placeres del cuerpo, ya que los del alma son más duraderos y pueden eliminar o atenuar los dolores del cuerpo.

El placer es un bien y el dolor un mal y hay que administrar inteligentemente el placer y el dolor. La razón representa un equilibrio que nos permite alcanzar la total imperturbabilidad o *ataraxia*. La finalidad de esta filosofía no era teórica, sino más bien práctica, que procuraba sobre todo una vida feliz y placentera en la que los temores al destino, los dioses o la muerte quedaran eliminados.

Se fundamentaba en una teoría empirista del conocimiento, en una física atomista inspirada en las doctrinas de Leucipo y Demócrito y en una ética hedonista. El epicureísmo es una doctrina de un paganismo típicamente laico, por lo que ganó gran número de seguidores que la consideraron una doctrina verdadera que solucionaba todos los problemas.

Su escuela de pensamiento perduró siete siglos tras la muerte de Epicuro. En esta escuela se destacaron Metrodoro de Lámpsaco, Apolodoro, Zenón de Sidón, Fedro y Lucrecio Caro.

El escepticismo

Este movimiento filosófico predominó en la Academia de Platón en el siglo III a.C. Los escépticos retomaron y profundizaron en la crítica sofista del conocimiento objetivo. A través del descubrimiento del poder de la lógica, como un mecanismo filosófico capaz de destruir cualquier idea positiva. Esta doctrina niega la posibilidad del conocimiento, su suposición principal era que la humanidad no puede alcanzar el conocimiento o la ciencia que conciernen a la realidad y que el camino hacia la felicidad se basa en una serie de juicios lógicos.

...las cosas son verdaderas o falsas, hermosas o feas, buenas o malas, no por sí mismas *sino por convención*, es decir, son los hábitos, las costumbres, las decisiones de los hombres las que las hacen aparecer como tales. Si se prescinde de esas convenciones no es posible ninguna valoración...La

suspensión del juicio vuelve al hombre indiferente ante las cosas porque le impide preferir ésta o aquella...⁹⁵

Sus principales discípulos fueron Pirrón de Elis, fundador de esta corriente filosófica, Timón de Flío, su discípulo, Arquesilao de Pitana y Carnéades de Cirene, este último mantenía que las creencias adquiridas de la experiencia por vía inductiva pueden ser probables, pero nunca ciertas.

El neoplatonismo

En Roma se intentó fundar en el siglo II d.C. una ciudad llamada Platonópolis por Amonio Sacas. Se desarrolló en el siglo III por su discípulo Plotino, que es más un místico que un filósofo, aun así es la última expresión del pensamiento griego y su influencia se habrá de hacerse sentir en el pensamiento cristiano. Se basó en los escritos místicos y poéticos de Platón, así como en las doctrinas pitagóricas y las ideas de Filón de Alejandría. La principal razón de ser de esta filosofía es educar a los individuos para la experiencia del éxtasis en la que se hace uno con Dios. Al respecto se dice: “El neoplatonismo no es sólo filosofía, sino también religión”.⁹⁶ Lo uno es perfecto, incognoscible e infinito, está más allá del entendimiento racional y es la fuente original de toda realidad.

La doctrina conservó en esencia su carácter griego y una actitud contemplativa. Los principales discípulos de esta escuela fueron: Plotino, Porfirio, Jámblico y Proclo.

El neoplatonismo ejerció una fuerte influencia en el pensamiento medieval. En los siglos XII y XIII influyó en el progreso de las artes prácticas, por la atención que Platón había prestado a las matemáticas y por la relación entre cuerpos terrestres y celestes, que los neoplatónicos habían abordado. Al respecto se dice:

⁹⁵ Abbagnano, N. y A. Visalberghi. (1987). *Historia de la Pedagogía*. Pág. 111.

⁹⁶ Hirschberger, J. (1982). *Breve Historia de la Filosofía*. Pág. 77.

...el platonismo fue un estímulo directo al aprendizaje de las matemáticas. Porque Platón había subrayado que el universo era matemático en su estructura (*Timeo*, 31, 32 y 36) y se deducía que las matemáticas serían necesarias para comprender la naturaleza.⁹⁷

Hasta aquí hemos hecho un recorrido por el pensamiento más representativo de las escuelas filosóficas griegas, incorporando el movimiento filosófico helenista, el cual concluye en el 529 d.C., cuando Justiniano I cerró las escuelas filosóficas de Atenas: el Liceo, la Academia y la Stoa. Con esto, se pone fin a las diferentes corrientes del pensamiento filosófico, que se inició con los filósofos jónicos y que terminó con los últimos filósofos grecorromanos.

La Grecia que hemos vislumbrado hasta aquí, a través de sus pensadores matemáticos y de las principales escuelas del pensamiento filosófico, nos ha dado un panorama previo, de cuáles fueron las condiciones que propiciaron el surgimiento de la Ciudad de Alejandría y el trabajo científico que en ella se desarrolló, ubicando a Euclides en este contexto.

⁹⁷ Pacey, A. (1980). *El laberinto del ingenio. Ideas e idealismo en el desarrollo de la tecnología*. Pág. 70.

CAPÍTULO III

LA ESCUELA DE ALEJANDRÍA Y EL MAESTRO, FILÓSOFO Y MATEMÁTICO, EUCLIDES; SU LABOR DOCENTE Y SUS DISCÍPULOS

En este capítulo se abordará la escuela de Alejandría, su origen y el trabajo intelectual y científico que en ella se propició, pues en esta atmósfera se desarrolló el trabajo docente de Euclides, como maestro, filósofo y matemático. Así es que empezaremos por ver cómo era Alejandría, su origen, su actividad científica y sus principales miembros. En los capítulos anteriores se ha hecho mención de pensadores y escuelas filosóficas griegas, que abarcan desde el siglo VI a.C. hasta la invasión y predominio del Imperio Romano sobre Grecia, dejando al margen a la escuela de Alejandría y sus principales personajes, motivo por el cuál en el presente capítulo se abordará el periodo histórico de Alejandría desde su fundación, hasta la muerte de Hipatia, que marca el fin del pensamiento científico-filosófico griego y el predominio del cristianismo en Alejandría.

Empezaremos por señalar algunas hazañas de Alejandro III de Macedonia o Alejandro Magno (356 - 323 a.C.), quien fue hijo de Filipo rey de Macedonia y que en el año 338 a.C., conquistó Grecia. A la muerte de su padre, Alejandro heredó su reino en el año 336 a.C., el cual engrandeció los dominios griegos, sometiendo el mundo conocido: Persia, India, y Egipto, dando origen al primer y más grande imperio de la época, conocido también como Imperio Helenístico. Durante la expansión y las conquistas militares, Alejandro iba propagando la cultura y los conocimientos griegos, que a su vez, se veían influenciados por las culturas conquistadas, creando una amalgama cultural y territorial diferente. Pretendió una unificación cultural a través de una *Educación a la griega*. Esta visión diferente a la de otro conquistador se debe a la influencia de Aristóteles, quien fue su maestro a la edad de 13 años, "...aconsejaba a Alejandro que gobernase a los griegos con la

hegemonía, pero a los bárbaros con el despotismo”.⁹⁸ Además, le inculcó la profunda conciencia de la verdad del conocimiento, ya que su posesión le brinda libertad y sometimiento de otros, pues el conocimiento es poder. Además tuvo en su niñez a su primer maestro, que fue Leónidas y Lisímaco su maestro de letras. Se materializan los anhelos de la escuela de Isócrates, “...el de la posibilidad de que la cultura influyese en el estado a través de la educación de los gobernantes”.⁹⁹

3.1 La Alejandría que está cerca de Egipto

En las ciudades griegas, Alejandro Magno adoptó el criterio de continuidad de la política, respetó la autonomía de las ciudades conquistadas, limitada con su propia hegemonía de Alejandro; además, iba formando uniones matrimoniales con sus principales comandantes griegos y las hijas de los gobernantes sometidos. Pero sobre todo supo propiciar el interés común de acabar con la amenaza persa, así como silenciar y aplacar los movimientos antimacedonios en su contra y no dudó en emplear la fuerza y la represión para cambiar sistemas y facciones políticas ciudadanas que mostraban resistencia.

Alejandro propagó el modo de vida griego y el modelo de ciudad griega, con la fundación de ciudades, a las que solía designar con su propio nombre, proliferando por doquier *las Alejandrías*. Además de la Alejandría del delta del Nilo, fundó, entre otras, la Alejandría de Aria, la Alejandría de Aracosia, la Alejandría de Bactra, la Alejandría de Eschata o la extrema, la Alejandría Nikaia o de la Victoria y la Alejandría Bucéfala, en recuerdo de su caballo, Bucéfalo. Esta política de establecimiento de ciudades y de colonos greco-macedonios, además de servir como estrategia de defensa y de control de rutas comerciales que superaron las barreras nacionales, constituyó la avanzada de su proyecto de helenización del imperio. Al respecto se dice que:

⁹⁸ Jaeger, Werner. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. Pág. 653.

⁹⁹ Op. Cit. Pág. 871.

...la década de conquistas de Alejandro, durante la cual la civilización de los griegos sometidos se extendió por Asia con su conquistador...el arte griego penetró en toda la India e incluso en China, pero la difusión de la lengua griega a través de sus vastos dominios resultó más duradera que la mayoría de los éxitos políticos.¹⁰⁰

Además, junto con sus ejércitos militares, también iban expediciones de reconocimiento natural, recolectando plantas, animales, minerales, etc. que mandaba a Grecia para Aristóteles.

En el año 332 a.C., Egipto estaba bajo el dominio persa. Ese mismo año, Alejandro Magno entró triunfante en Egipto como vencedor del rey persa Darío III y los egipcios lo aceptaron y lo aclamaron como a un libertador. En Egipto, había desde tiempo atrás, una gran cantidad de colonias griegas y por lo que no era gente considerada como extranjera. Al año siguiente, en el 331 a.C., fundó la ciudad que llevaría su nombre en un lugar del delta del río Nilo, sobre un poblado llamado *Rakotis* habitado por pescadores. La elección del lugar fue afortunada pues estaba cerca del río para que pudiesen llegar las mercancías, a través de un canal que unía el río con el lago Mareotis y el puerto. El lugar estaba frente a una isla llamada Faro, que con el tiempo y las múltiples mejoras que se harían quedaría unida por un largo dique a la ciudad de Alejandro. El escritor griego Plutarco (46-125 d.C.) escribió la biografía de Alejandro Magno, y cuenta cómo éste tomó la determinación de fundar la ciudad en ese sitio con base en un sueño. Cuando se levantó quiso ir a la isla y se percató de su situación privilegiada. Además pensó que por medio de un dique, se le uniría a la costa. Entonces marcó él mismo el enclave de la futura Alejandría.

Cuando Alejandro se marchó de Egipto para continuar su lucha contra los persas y expandir su imperio hasta la India, dejó como administrador de Alejandría a Cleómenes de Naucratis, y a su arquitecto constructor Dinócrates de Rodas; el hijo de éste último, Sóstrato de Cnido, construirá años más tarde la famosa *Torre de Faros*. “A la edad de 33 años, soñando todavía con nuevas conquistas, Alejandro

¹⁰⁰ Derry, T. K. y T. I. Williams. (1997). *Historia de la tecnología*. Vol. 1. Pág. 27.

muere en Babilonia. Su imperio se divide en tres grandes monarquías”.¹⁰¹ Estas fueron: 1) Dinastía Antigónida.- Dirigida por el general Antígono y Demetrio, incluía Grecia y Macedonia. 2) Dinastía Seléucida.- Dirigida por el general Seleuco, incluía Babilonia, Siria y Asia. 3) Dinastía Ptolemaíca.- Dirigida por el general Ptolomeo, incluía Egipto.

Las diversas dinastías greco-macedónicas que se repartieron el inmenso imperio de Alejandro, siguieron aplicando la política de conciliación y fusión parcial con los pueblos sometidos.

...en el mundo griego las expediciones, conquistas y muerte de Alejandro habían modificado la fisonomía del mundo. Si bien el incipiente imperio que fundó, desapareció con él, la idea de imperio universal se arraigó en el campo de la cultura, extendiéndose y helenizando todo el Oriente.¹⁰²

En el 306 a.C. la parte egipcia del antiguo imperio macedonio, es tomada por Ptolomeo (368 – 283 a.C.), quien se proclama Rey de Egipto en el 305 a.C. y se hace llamar Ptolomeo I Sóter, *El Salvador*. Demetrio de Falero (350 - 282 a.C.), que era un filósofo y político ateniense exiliado, le sugirió a Ptolomeo I que estableciera un gran centro de Investigación en Alejandría. Por lo que éste construyó el palacio de mármol con grandes jardines, fuentes y estatuas. Al otro lado de ese jardín se levantó otro edificio construido en mármol al que se llamó Museo, el cual fue una innovación del rey Ptolomeo I. Cerca de este edificio se levantaba el templo de Serapis, el nuevo dios greco-egipcio.

En el centro de la ciudad se hallaban la Asamblea, las plazas, los mercados, los baños, los gimnasios, los estadios y demás edificios públicos necesarios para las costumbres de aquella época. El arquitecto Dinócrates de Rodas se ocupó del trazado de la ciudad y lo hizo según un plan hipodámico, cuyo diseño de sus calles es en ángulo recto y cuadrículas, sistema que se utilizaba desde el siglo V a. C.: una gran plaza, una calle mayor de treinta metros de anchura y seis kilómetros de

¹⁰¹ Xirau, Ramón. (1995). *Introducción a la historia de la filosofía*. Pág. 84.

¹⁰² Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 69.

largo que atravesaba la ciudad. Se construyeron barrios y tenían instalaciones de agua por cañerías. Administrativamente se dividió en cinco distritos, cada uno de los cuales llevó como primer nombre una de las cinco primeras letras del alfabeto griego. Además, se dice que:

En la ciudad real, zona elegante de la ciudad, se encuentran los palacios de los sucesores de Ptolomeo I, el mausoleo de Alejandro Magno, las tumbas de los reyes, los archivos nacionales, un teatro y un anfiteatro, muchos templos pequeños y exquisitos, el gran templo del dios Poseidón.¹⁰³

El reinado de los Ptolomeos se prolongó del 323 al 31 a.C., gracias a su estabilidad y su aislamiento con el resto de Europa. Los habitantes de Alejandría eran en su mayoría griegos de todas las procedencias. También había una colonia de mercaderes judíos y un barrio egipcio, de pescadores, la más pobre y abandonada de la gran urbe. Su población tenía una maravillosa diversidad: soldados macedonios y más tarde romanos, sacerdotes egipcios, marineros fenicios, visitantes de la India, árabes, sirios, hebreos, persas, nubios, galos e iberos intercambiaban mercancías e ideas, excepto la gran población de esclavos. Esta población tan heterogénea vivían juntos, en armonía y respeto mutuo, durante la mayor parte del período que marca la grandeza de Alejandría. Fue probablemente allí donde la palabra cosmopolita consiguió tener un sentido auténtico: ciudadano, no de una sola nación, sino del cosmos. Por lo anterior se dice: "...Alejandría crece de día en día y esta metrópoli alberga una población de casi un millón de personas".¹⁰⁴

Fue una ciudad opulenta que estaba frente a la isla llamada Faro, el arquitecto Dinostrato de Rodas también construyó un dique que unió a la isla con la ciudad de Alejandría. Así quedaron dos puertos de cada lado del dique, sus amplios muelles del puerto atracaban barcos que venían del Mediterráneo y el Atlántico. Traían mercancías como: lingotes de bronce de España, barras de estaño de Bretaña, algodón de las Indias, sedas de China, etc.; Mientras, Alejandría por su parte

¹⁰³ Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 142.

¹⁰⁴ Op. Cit. Pág. 141.

exportaba granos y papiro al resto del mundo. Con el tiempo y las múltiples mejoras que se realizaron, en el 280 a.C., el arquitecto Sóstrato de Cnido, construyó una Torre en la isla de Faros, con una altura de 120 metros, y dispuso en su cúspide un fuego nocturno permanente que guiara a los navegantes a la ciudad de Alejandría y por el día unos grandes espejos que reflejarán la luz del sol. Esta edificación permaneció hasta su destrucción en el año 1375 por un terremoto, fue una de las siete maravillas del mundo antiguo y perduró por más de 1600 años.

El periodo Helenístico duró más de 300 años, (323 – 30 a.C.), la lengua y la cultura griega eran predominantes en los pueblos conquistados por Alejandro, mientras las ciudades griegas y Atenas pierden su hegemonía comercial, política y cultural. En este mundo helenístico se diluyen las fronteras entre los diferentes pueblos y culturas, mezclándose en un conjunto de ideas religiosas, filosóficas y científicas. Pero, la cultura griega no sólo sobrevive a la muerte de Alejandro y a la división de su imperio, sino también al predominio romano, por lo que se dice:

Sin embargo, aunque más o menos adaptada a las nuevas exigencias la cultura helenística es una cultura griega y no una mezcla de culturas diversas; pero si esto es así no lo es por imposición, sino por virtud de la manifiesta superioridad intelectual y artística de la primera sobre las segundas.¹⁰⁵

3.2 El Museo de Alejandría

Entre los siglos III a.C. y el siglo I d.C. la cultura griega unida a la cultura romana da origen a una nueva visión del mundo. Los descubrimientos geográficos y científicos de esa época van a tener su máximo desarrollo y esplendor en Alejandría, "...una vez que las ciencias particulares se han desgajado de la filosofía".¹⁰⁶ El museo duró unos 600 años, de los cuales los más productivos para la ciencia fueron los primeros 200 años.

¹⁰⁵ Abbagnano, N. y A. Visalberghi. (1996). *Historia de la Pedagogía*. Pág. 105.

¹⁰⁶ Xirau, Ramón. (1995). *Introducción a la historia de la filosofía*. Pág. 84.

En su afán de edificar una ciudad suntuosa, Ptolomeo I construyó el Palacio que alojaría a la dinastía ptoloméica y a un costado el edificio del *Museo* (300 a.C.), que seguramente Demetrio de Falero ayudó a su organización y planificación. El Museo se convirtió en el centro del quehacer científico del mundo antiguo, dedicado a las Nueve Musas, y el centro internacional de investigación; además se propició un ambiente de protección a los científicos y a la ciencia. Los eruditos de la biblioteca estudiaron el *cosmos*, palabra griega que significa el orden del universo y lo opuesto al caos. En un principio los eruditos de Alejandría se dividían en dos grupos: 1) Los Filólogos.- Estudiaban los textos, la gramática y otras, como la historiografía y la mitografía. 2) Los Filósofos.- Abarcaban las ramas del pensamiento y la ciencia.

Progresivamente el trabajo realizado en el museo se fue especializando y la división del quehacer científico se dio en cuatro facultades: matemáticas, astronomía, medicina y letras; esta última facultad se asignó a la Biblioteca cuando ésta creció en tamaño e importancia, surgiendo así la filología. Pero, es la geometría, sin duda alguna, donde el Museo se destacó.

Los reyes griegos de Egipto apoyaron durante siglos la investigación y la ciencia, el salario del personal del Museo y de la Biblioteca lo pagaba el rey y propiciaron un ambiente adecuado de trabajo a los mejores eruditos de la época.

...en esa institución residían a expensas del rey...científicos provenientes de todas partes, con la única obligación de dedicarse a tareas de investigación o docentes en las que colaboraban estudiosos y estudiantes provenientes también de todos los rincones del mundo helénico o helenizado.¹⁰⁷

3.3 La Biblioteca de Alejandría

Con el helenismo se da una gran actividad industrial derivado de las rutas comerciales que cruzan toda Asia, Alejandría crecen bajo una planificación urbana,

¹⁰⁷ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 70.

grandes calzadas, bellos edificios, agua y drenaje etc., además: “Los importantes avances en matemáticas, astronomía y medicina fueron acompañados por inventos prácticos con el fin de ahorrar fuerza de trabajo”.¹⁰⁸

Pero la maravilla mayor de Alejandría fue su Biblioteca (300 a.C. – 416 d.C.), que se construyó en el área del Museo; ambas le dieron a la ciudad la característica de ser el primer y auténtico instituto de investigación de la historia del mundo, dedicadas exclusivamente a la actividad científica. Fue construida por Ptolomeo II Filadelfus, cuyo ideal era reunir la más grande colección de libros, con todo el saber de su época, con obras griegas y traducciones al griego de obras escritas originalmente en otras lenguas del Mediterráneo, el Medio Oriente y la India.

La biblioteca llegó a tener, para el año 48 a.C., una colección de 700,000 libros, rollos de papiros, resultado del patrocinio de los reyes. Los libros constituyeron formidables instrumentos de trabajo para los eruditos, los organizaban y escudriñaron todas las culturas y lenguajes del mundo. Enviaban agentes al exterior para comprar bibliotecas. Los buques de comercio que arribaban a Alejandría eran registrados, en busca de contrabando de libros. Los libros eran confiscados, copiados y devueltos luego a sus propietarios. Su capacidad editorial era única en su época, los libros eran muy caros, pues se escribían a mano. En la Biblioteca se depositaban las copias más exactas de los libros y en muchas ocasiones éstas eran más estimadas por las correcciones que les hacían, los sabios alejandrinos a las obras originales. Con Ptolomeo I se llegaron a tener 200,000 libros y con Ptolomeo II la biblioteca albergó 400,000 volúmenes, provenientes de todas partes del mundo antiguo.

Gracias a la disposición y cercanía de estos libros, los estudiosos de la Biblioteca y del Museo de Alejandría estudiaban todo lo que se pudiera estudiar: literatura, matemáticas, astronomía, historia, física, medicina, filosofía, geografía, biología e ingeniería. La Biblioteca constaba de diez grandes salas de investigación,

¹⁰⁸ Derry, T. K. y T. I. Williams. (1997). *Historia de la tecnología*. Vol. 1. Pág. 28.

cada una dedicada a un tema distinto. Contaba con jardines botánicos, un zoológico, salas de anatomía y de disección, un observatorio astronómico, y una gran sala comedor donde se discutían y criticaban las ideas. Con respecto al Museo y la Biblioteca, se dice que:

La Biblioteca tuvo directores famosos...Zenodoto, Apolonio de Rodas, Eratóstenes, Arístides de Bizancio, Apolonio Eidógrafo, Aristártco de Samotracia. Estos hombres, construyeron las bases de la ciencia filológica. El Museo, en cambio, atrajo matemáticos, astrónomos, médicos, geógrafos, los cuales manifestaron en el ámbito de esta institución lo mejor que haya producido la antigüedad.¹⁰⁹

Los sabios que vivían en el Museo y la Biblioteca, que llegaron a ser más de 100, hacían investigación, daban cursos, conferencias y lecciones a los jóvenes que quisieran aprender, por lo que en el Museo se implantó el régimen *Tiempo Completo*. Alejandría llegó a haber 5,000 estudiantes en sus tiempos de esplendor. Contenía habitaciones a modo de residencia para maestros y estudiantes, por lo que se dice que es la universidad más antigua de la humanidad. Los reyes que estaban orgullosos de esta institución, comían muchas veces allí, pues disfrutaban de la compañía y de las charlas de los eruditos.

Los Tolomeos invirtieron parte de su riqueza en la adquisición de todos los libros griegos, y de otras partes de mundo, como de África, Persia, la India, Israel etc. En tan raras ocasiones de la historia un Estado ha apoyado con tanta avidez la búsqueda, conservación y desarrollo del conocimiento.

Alejandría se convirtió, desde su fundación y por casi los dos siglos que le precedieron, en el centro de la cultura griega de la época helenística, contribuyendo a helenizar al resto del país, de tal manera que cuando llegaron los romanos todo Egipto era bilingüe. El arte y la arquitectura se mantenían propiamente egipcios. Tan importante y tan opulenta llegó a ser Alejandría, por su comercio, su puerto, su

¹⁰⁹ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 253.

museo y su biblioteca, que la llamaron *Alexandria ad Aegyptum*, es decir, *Alejandría que está cerca de Egipto*. Al respecto se dice:

...los Ptolomeos de Egipto, que convirtieron el gran puerto comercial de Alejandría en el centro científico más importante del mundo griego y también el más duradero.¹¹⁰

La grandiosa *Biblioteca de Alejandría* permaneció por más de 700 años funcionando. Pero la civilización helénica clásica acabó desintegrándose y la vida en Alejandría fue degradándose. El Museo fue perdiendo su importancia y la Biblioteca fue quemada y saqueada deliberadamente. El primer incendio lo sufrió en el año 48 a.C. cuando Julio César mando incendiar Alejandría, después los saqueos a la ciudad por parte de los emperadores romanos: Aureliano en el año 273, Diocleciano en el año 297 y el Teodocio el Grande en el año 391. Es claro que cuando llegó el califa Omar (634 – 649), la Biblioteca y la ciudad de Alejandría estaban despojadas de su riqueza y su esplendor. De los libros de la Biblioteca, sólo sobrevivió una pequeña cantidad de sus obras, junto con unos pocos fragmentos dispersos. De la gran mayoría de las obras destruidas sólo conocemos algunos títulos y en la mayoría de los casos no conocemos ni los títulos ni los autores.

3.4 Euclides: el maestro, filósofo y matemático

Se ha descrito el ambiente y el contexto de Alejandría, para ubicar en esa ciudad a uno de los más importantes pensadores matemáticos que vivió y trabajó en Alejandría, el maestro, filósofo y matemático Euclides (ver Anexo 3). Se sabe que fue de los primeros sabios que viajó a Alejandría, invitado por Demetrio Falera, donde se le asignó la fundación de la facultad de matemáticas, e impartió clases de matemáticas durante el reinado de Ptolomeo I. De su vida se sabe muy poco, pero se dice que vivió alrededor del año 300 a.C.; algunos autores árabes mencionan que probablemente vivió del 325 a.C. al 265 a.C. y que era hijo de Naucrates. Por lo que se dice:

¹¹⁰ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 70.

Todo lo que se sabe de Euclides se debe a lo que escribió Proclo (410 – 485), el historiador de la matemática griega. Nos dice Proclo que Euclides nació en Grecia a fines del siglo IV, a.C., que estudio en la “Academia” en Atenas y que enseñó en Alejandría durante el reinado de Ptolomeo I.¹¹¹

Se dice que seguramente estudio matemáticas con Teeteto y con Eudoxo en Atenas y que ahí conoció toda la matemática que después sistematizo en Alejandría. En cuanto a su personalidad como docente, Pappus de Alejandría cuenta que Euclides era de lo más justo y bien dispuesto con aquellos que hábiles deseaban avanzar en las matemáticas, no importando el nivel en el que se encontraran. Cuidaba de no ofender a nadie y no era arrogante ni vanidoso.

La escuela de Alejandría surge con los ideales de las más grandes escuelas de Grecia, como son: la jónica de Mileto, la pitagórica, la Academia de Platón y el Liceo de Aristóteles. Por lo que la escuela de Alejandría se organizó con un plan pedagógico y didáctico para la investigación, la enseñanza, el resguardo y la divulgación del conocimiento científico. Se convierte así en el centro educativo y de investigación donde se acogieron, casi en su totalidad, todos los sabios y estudiantes que tuvieran interés por las ciencias y las matemáticas del mundo helénico y helenizado. Las ciencias progresan en Alejandría, lo que no sucede con el mundo sensible y espiritual griego, Atenas se ve desplazada y su comedia, la poesía, la escultura y su filosofía carecen de fuerza y originalidad.

Como un personaje histórico y mítico, del cual se especulan muchos detalles sobre su vida y su obra, Euclides se encuentra envuelto en una serie de hipótesis, como las siguientes:

a) Al igual que a Pitágoras, a Euclides se le atribuye ser el líder y coordinador de un equipo de estudiosos, que contribuyeron a escribir los trabajos matemáticos realizados en Alejandría, aún después de la muerte de Euclides. Al respecto se

¹¹¹ Perero, M. (1996). *Historia e Historias de Matemáticas*. Pág. 4.

puede suponer que si fue el primer director y fundador de la facultad de matemáticas, seguramente coordinó y dirigió el trabajo, tanto de docentes como de estudiantes, que se empezó a dar en matemáticas. Además poseían todos los libros de conocimientos matemáticos de su época a su alcance. Lo que se necesitaba era entrar al ordenamiento, demostración, fundamentación y sistematización de la matemática griega, desde el siglo VI hasta el año 300 a.C. Fecha en la que se cree se elaboraron los *Elementos de Geometría de Euclides*.

Está fuera de duda que Euclides aprovechó todo lo que los griegos habían pensado al respecto durante los tres siglos anteriores... su genialidad consiste en la síntesis realizada: es sobre todo gracias a la forma de esta síntesis que la matemática griega pasó a la historia.¹¹²

b) Las obras completas de Euclides fueron escritas por un equipo de matemáticos de Alejandría quienes tomaron el nombre de Euclides, quien fue un filósofo de Megara, discípulo de Sócrates. Podemos empezar por decir que Euclides de Megara no aportó nada al campo de las matemáticas, fue un filósofo que vivió 100 años antes de la elaboración de los *Elementos*. Los dos Euclides fueron confundidos, uno con otro, por mucho tiempo, hasta que en el siglo XV se corrigió este error. Hay una razón de peso para creer en la existencia de Euclides de Alejandría y su obra: "Arquímedes, quien apareció inmediatamente después del primer Ptolomeo, hace mención de Euclides".¹¹³ Así también lo mencionan Eratóstenes y Apolonio de Perga.

c) La obra *Los Elementos de Geometría*, es una recopilación del conocimiento matemático impartido en la escuela de Alejandría, como libro de texto del académico. Por lo que desde entonces es una de las obras científicas más conocidas del mundo. A lo anterior podemos decir que como catedrático de matemáticas en la escuela de Alejandría, necesitaba material didáctico y libros en qué apoyar su quehacer docente. Seguramente para poder tener claridad en sus

¹¹² Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 256.

¹¹³ Lara Aparicio, M. (1991). *Los Matemáticos Griegos*. Pág. 89.

exposiciones y facilitar la comprensión de la matemática en sus estudiantes, trató, en un material escrito, de ordenar, clasificar, demostrar y fundamentar dichos conocimientos. Esta es una actividad que hacen todos los docentes comprometidos con su labor docente y el amor a sus estudiantes.

Seguramente ninguno de los resultados de los *Elementos* haya sido demostrado por primera vez por Euclides pero la organización del material y su exposición, se deben a él. De hecho, Euclides usó libros anteriores a él, una prueba de ello es que presenta un gran número de definiciones que no son usadas, tales como la de un oblongo, un rombo y un romboide. Lo que sí es claro, es que Euclides le asignó el nombre al llamado *Teorema de Pitágoras*, pues reconoció que fue Pitágoras el primero en realizar una demostración formal del teorema, el cual ya era conocido y aplicado desde tiempos muy remotos por babilonios y egipcios. También define qué es punto, así como el estudio de las propiedades de línea y planos, círculos y esferas, ángulos, triángulos isósceles, rectángulos, conos etc., así como de otras definiciones que seguimos usando en la actualidad.

Euclides fue uno de los primeros miembros de una gran escuela y biblioteca local, que produjo a muchos de los más importantes escritores técnicos de los tres o cuatro siglos siguientes¹¹⁴.

El gran movimiento que se produjo en Alejandría, favoreció el progreso, la especialización y la ramificación de la ciencia, favoreciendo la formación de grandes pensadores que, influenciados por las enseñanzas y la obra de Euclides, ya sea por sus procedimientos o por sus contenidos, produjo esta escuela. Estos científicos trabajaban en todas las áreas de la ciencia y la ingeniería. Así, a finales del Siglo IV y durante el siglo III a.C., Alejandría se convirtió en el centro indiscutible del quehacer científico y matemático del mundo antiguo.

¹¹⁴ Pacey, A. (1980). *El laberinto del ingenio. Ideas e idealismo en el desarrollo de la tecnología*. Pág. 86.

Otra referencia del quehacer educativo de Euclides son dos pasajes, muy conocidos de su vida mítica en Alejandría; en muchos libros de historia de las matemáticas, es muy común que se mencionen, uno de ellos es:

Ptolomeo I le pregunto alguna vez a Euclides si había un camino más corto, en geometría, que el de los *Elementos*, a lo que respondió que no había caminos reales hacia la geometría.¹¹⁵

Los estudiantes de matemática suelen seguir haciendo esta pregunta, una y otra vez, por siglos de los siglos, esperando que el docente les conteste que, ¡Sí!, que sí hay un camino corto y fácil para aprender matemáticas, no importa el nivel educativo en el que se encuentren, la esperanza nunca muere. Pero la respuesta es casi siempre la misma, ¡No!, pero, ¡Hay muchos caminos para llegar a la respuesta!, situación que en lugar de animarlos, los desanima.

El otro pasaje es con respecto a la idea sobre el concepto que tenía Euclides sobre el aprendizaje de las matemáticas, y es el siguiente:

Cuenta Proclo que uno de los discípulos de Euclides se quejaba de la falta de aplicaciones prácticas de los teoremas de la geometría; Euclides ordenó a uno de sus esclavos que le diera una moneda para que sacara algún provecho del estudio de la geometría.¹¹⁶

Es muy común que los estudiantes de matemáticas pongan en tela de juicio la aplicación de muchos conocimientos matemáticos, pues por lo general visualizan contenidos descontextualizados de contenidos ya aprendidos y por aprender, objetivo que se logra desgraciadamente en los últimos niveles educativos. Pero la pregunta casi siempre va encaminada sobre todo a la impaciencia de la siguiente interrogante ¿Qué ganarán aprendiendo esas cosas?, pues ellos no están dispuestos a perder tiempo y dinero. La perseverancia, la tenacidad y el entusiasmo, esos dioses internos, no van con ellos.

¹¹⁵ Lara Aparicio, M. (1991). *Los Matemáticos Griegos*. Pág. 89.

¹¹⁶ Perero, M. (1996). *Historia e Historias de Matemáticas*. Pág. 4.

Y como buen filósofo griego Euclides también escribió otras obras científicas como: *La Seudaria* (Proclo lo menciona), *Sobre los lugares geométricos que son superficies* (Pappo lo menciona), *Las Cónicas* (Pappo lo menciona), *Sobre las divisiones de figuras* (Proclo lo menciona), *Un tratado de música*, y *los Sofismas* (ejercicios para ejercitar la inteligencia). Todos los anteriores se perdieron, mientras que de otras obras se dice: “*Los Datos, Los Cálculos, y un tratado sobre Óptica* nos han llegado en su versión árabe, pero son menos significativas”.¹¹⁷

En la obra de Autólico de Pitano (360 – 290 a.C.) se muestra una teoría matemática de los fenómenos astronómicos y las esferas, mediante un proceso sistemático que presenta una introducción, un diagrama del problema, demostración del teorema y finalmente una conclusión. Estos manuales de geometría fueron escritos por el 320 a.C., y seguramente Euclides los conoció y los estudió, pues eran muy recientes. Anteriormente, ya existían otras obras de matemáticos griegos, llamados también Elementos, pero carecían del rigor sistemático de la obra de Euclides, que fueron opacados por la historia.

3.5 Otros eruditos importantes de Alejandría

El atractivo de Alejandría para los sabios y estudiantes de finales y principios de los siglos IV y III fue el *Museo* y su *Biblioteca*; Alejandría era el nuevo centro donde se concentraban los científicos del mundo helenizado (ver Anexo 4), además del ambiente que se propiciaba en la primer *Universidad* del mundo. Estos científicos tenían asegurado el sustento, alojamiento, un salario, instalaciones e instrumentos y tranquilidad para desarrollar el trabajo intelectual. Era irresistible no acudir al llamado de la ciencia, por lo que se sabe llegaron a ser más de 100 profesores en su época de esplendor, además, muchos estudiantes después pasaban a ser profesores, entre los más distinguidos científicos de Alejandría o que tuvieron algún contacto con ella se cuentan:

¹¹⁷ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 254.

- Dicearco de Mesina (355 –285 a.C.). Geógrafo y cartógrafo. Estudió en el liceo de Aristóteles. Lo utilizó Alejandro Magno en sus campañas.
- Dinócrates de Rodas (Siglo IV a.C.). Planificó la estructura urbana de Alejandría. Construyó el dique que unió a la isla de Faros con Alejandría.
- Eudemo de Rodas (350 - 290 a.C.). Primer historiador de las matemáticas, discípulo de Aristóteles. Proclo hace muchas referencias de él.
- Diódoro Kronos (¿ - 296 a.C.). Filósofo griego, cuya tesis está basada en la lógica metafísica. Identifica la verdad con la posibilidad.
- Demetrio Poliorcetes (337 - 283 a.C.). Ingeniero, creador de la Elépolis, una torre con catapultas para asalto de una ciudad.
- Herófilo de Calcedonia (335 – 280 a.C.). Médico griego. Funda la Escuela de medicina de Alejandría junto con Erasistrato. Fisiólogo que estableció de modo seguro, que es el cerebro y no el corazón el centro de la inteligencia. Trabajó con cadáveres, cerebros. Estudió el pulso y los nervios.
- Euclides de Alejandría (325 – 265 a.C.). Sistematizó toda la geometría de su tiempo en forma deductiva, mediante el método axiomático.
- Aristilo de Alejandría (Finales del siglo IV - III a.C.) Astrónomo griego. Trabajó en el Museo y elaboró un catálogo de estrellas.
- Sostrato de Cnido (Finales del siglo IV - III a.C.). Arquitecto e ingeniero, hijo de Dinócrates. Construyó el Faro de Alejandría en el año 300 a.C., con una altura de 120 metros. Con el terremoto del año 1303 perdió su función como faro, y con el terremoto del año 1323 se desmoronó.
- Aristeo de Alejandría (Finales del siglo IV - III a.C.). Contemporáneo de Euclides. Según Pappus, Aristeo era más joven que Euclides, trabajó las cónicas y las llamó sección del cono rectángulo y del cono obtusángulo. Escribió sobre lugares sólidos.
- Cares de Lindos (Finales del siglo IV - III a.C.). Ingeniero y escultor griego de la isla de Rodas. Construyó y erigió en el 292 a.C. al Coloso de bronce de 32 metros, que representaba al Dios Helios. Fue destruido con el terremoto del 226 a.C.

- Aristarco de Samos (320, 310 – 250, 230 a.C.). Ingeniero griego. Aplicó la trigonometría para estimar las distancias al Sol y a la Luna. Propuso un universo heliocéntrico. Decía que la Tierra es uno de los planetas que orbita al Sol y que las estrellas están a una enorme distancia de nosotros.
- Timocares de Alejandría (320 – 260 a.C.). Filósofo y astrónomo griego. Contemporáneo de Euclides. Junto con Aristilo crearon el primer catálogo de estrellas del mundo occidental.
- Erasístrato de Ceos (304 - 250 a.C.). Médico anatomista griego. Funda con Herófilo la Escuela de medicina de Alejandría. Estableció la diferencia entre venas y arterias, así como la diferencia entre nervios motores y nervios sensitivos.
- Cleanto de Asos (301 – ? a.C.). Filósofo estoico, estudioso del Museo. Fue discípulo de Zenón de Cito. Acusó a Aristarco de impiadoso.
- Arquímedes de Siracusa (287 – 212 a.C.). Matemático e ingeniero griego que combinó la ingeniería con la ciencia. Visitó Alejandría y durante su estancia en Alejandría inventó el Tornillo de Arquímedes para elevar agua. En geometría desarrolló un método para deducir π , y obtenerla con cualquier grado de precisión. Aplicó las teorías del movimiento de astrónomos y geómetras a dispositivos mecánicos e inventó muchos artefactos técnicos. Padre de la hidráulica y la mecánica; inventor de la palanca y precursor de los experimentos mentales y del cálculo integral.
- Ctesibio de Alejandría (285 - 222 a.C.). Matemático e ingeniero griego. Investigador de fenómenos naturales, físico mecánico. Fundó la Escuela de ingenieros de Alejandría, la cual perduró hasta el 22 a.C. Descubrió la elasticidad del aire e inventó artefactos que utilizaban aire y agua.
- Nicomedes (280 - 210 a.C.). Geómetra griego. Su obra maestra *Las líneas de la concoide*. Estudió la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.
- Eratóstenes de Cirene (276 – 194 a.C.). Matemático y geógrafo. Elaboró un mapa bastante exacto del mundo conocido. Determinó la circunferencia de la tierra, con un error del 1%. Medición de la tierra redonda. Aportó la criba de números primos. Realizó un catálogo con 44 constelaciones con sus mitos

y un listado de 475 estrellas fijas. Sugirió que los mares estaban conectados y que navegando por el oeste de España se llegaba a la India.

- Naucrates (Siglo III a.C.). Geómetra griego. Visitó a Apolonio en Alejandría y le sugirió que investigara sobre las cónicas.
- Apolonio de Perga (262 – 190 a.C.). Matemático griego. Escribió ocho libros de sus investigaciones sobre las propiedades de las curvas llamadas por él *secciones cónicas*; desarrolló una generación uniforme de todas las secciones cónicas: la parábola, la hipérbola y la elipse, mediante intersecciones planas de un único cono. Escribió sobre lugares planos y utilizó un método que superó al de Euclides en sus demostraciones.
- Filón de Bizancio (260-180 a.C.). Ingeniero, Describió muchas de las obras realizadas por la escuela de ingenieros de Alejandría.
- Aristarco de Samotracia (216 – 144 a.C.). Filósofo y gramático griego. Estudio en Alejandría con Aristófanes de Bizancio. Elaboró la primer crítica de los poemas de Homero. Fue director de la Biblioteca de Alejandría.
- Zenodoro (200 – 140 a.C.). Geómetra griego. Elaboró un tratado sobre figuras isoperimétricas; el círculo es de mayor área que cualquier polígono regular de igual perímetro que la circunferencia del círculo; que la esfera es de mayor volumen que cualquier sólido de igual superficie.
- Hiparco de Nicea o de Bitinia (190 – 120 a.C.). Astrónomo, geógrafo y matemático griego. Explicó la trigonometría y defendió la visión geocéntrica del Universo, trazó un mapa de las constelaciones y clasificó las estrellas por su brillo aparente. Inventó el sistema de latitud y longitud e importó el sistema circular de 360° de Babilonia, reunió mapas del cielo y especuló acerca del nacimiento y muerte de las estrellas. Descubrió y midió la precisión de los equinoccios, el tamaño y la trayectoria del Sol y la trayectoria de la Luna
- Hipsicles de Alejandría (180 – 120 a.C.). Matemático y astrónomo griego. Se cree que elaboró el Libro XIV de los *Elementos* de Euclides. Dio la definición del número poligonal.

- Dionisio de Tracia (170 – 90 a.C.). Gramático y retórico griego. Fue discípulo de Aristarco de Samotracia en la escuela de Alejandría. Definió las partes del discurso; hizo en el estudio del lenguaje lo que Euclides hizo en la geometría.
- Zenón de Sidón, Libia (150 – 70 a.C.). Filósofo griego, dirigió en Atenas la escuela epicúrea del 100 al 78 a.C. Es el primero en mostrar que las proposiciones de Euclides no se deducían nada más de los postulados y axiomas.
- Posidonio de Apamea, Siria (135 – 51 a.C.). Filósofo estoico, geógrafo e historiador griego. Enciclopedista, escribe 52 libros de historia, cultiva la astronomía, meteorología, matemáticas, fenómenos físicos y geológicos. Sobre este último tema estudio el fenómeno de las mareas.
- Andrónico de Cirrus (Finales del siglo II - I a.C.). Ingeniero y astrónomo griego. Construyó un *horologium* en Atenas y la Torre de los Vientos.
- Teodosio de Bitinia o Tripoli (Finales del siglo II - I a.C.). Ingeniero y matemático griego. Su obra es sobre geometría esférica.
- Diodoro de Sicilia (Siglo I a.C.). De Agira, historiador griego. Su obra consta de 40 volúmenes, llamados Biblioteca histórica.
- Sosígenes de Alejandría (Siglo I a.C.). Filósofo y astrónomo griego. En el año 45 a.C. el emperador romano César le mandó elaborar el calendario juliano con 365 días con un año bisiesto cada cuatro años.
- Marco Vitrubio Polión de Formia (Siglo I a.C.). Arquitecto, ingeniero, escritor y tratadista romano. En el año 14 a.C. elaboró 10 libros de arquitectura basados en libros y obras de arquitectos griegos.
- Filón de Alejandría (20 a.C. - 50 d.C.). Filósofo judío greco-egipcio. Representa el sincretismo filosófico entre ideología griega y judía.
- Herón de Alejandría (10 – 70 d.C.). Ingeniero. Padre de la neumática, inventor de cajas de engranajes y de aparatos de vapor, autor de *Autómata*, la primera obra sobre robots. Utilizó el aire comprimido, para mover muchas *máquinas y robots* que simulan acciones humanas. Inventó las puertas de apertura automática y mecanismos al vapor.

- Nicómaco de Gerasa (60 – 120 d.C.). Filósofo y matemático neopitagórico griego, técnico de la música, elaboró su manual de *Armónica*. Escribió un tratado sobre teoría de números, *Introducción Aritmética*, donde propone a la aritmética como una disciplina autónoma.
- Menelao de Alejandría (70 – 130 d.C.). Matemático y astrónomo griego. Estudió y trabajó en Alejandría; estudió la geometría esférica. En su obra sobre *Esferoides*, sus teoremas son la base de la trigonometría esférica.
- Claudio Ptolomeo de Hermia (85 – 165 d.C.). Astrónomo, geógrafo y matemático greco-egipcio. Con su sistema geocéntrico dio forma matemática a su modelo de los epiciclos, apoyando la visión geocéntrica aristotélica y escribió un tratado de Astrología, que perduró por 1,500 años.
- Galeno de Pérgamo (130 - 200 d.C.). Médico y filósofo, escribió obras básicas sobre el arte de curar y la anatomía que dominaron la medicina hasta el Renacimiento.
- Ammonio Saccas (175 - 242 d.C.). Filósofo griego alejandrino. Dio clases en Alejandría y fue maestro de Plotino. Ayudó a fundar el neoplatonismo, tratando de conciliar el platonismo con el aristotelismo.
- Diofanto de Alejandría (200 – 284 d.C.). Matemático greco-egipcio. Su obra *Aritmética*, está en 13 libros donde se presenta una colección de 150 problemas de álgebra aplicada. Abandona el álgebra geométrica griega y se aproxima al álgebra numérica, buscando soluciones exactas y racionales. Por su trabajo se le considera el padre del álgebra.
- Plotino de Licópolis (205 – 270 d.C.). Filósofo griego neoplatónico. Nació en Egipto y estudió en Alejandría, fundador del Neoplatonismo y discípulo de Ammonio de Sacas. En Roma quiso fundar la ciudad de Platonopolis.
- Porfirio de Apamea, Siria (232 – 304 a.C.). Filósofo griego, discípulo de Plotino. Trató de demostrar la superioridad de la filosofía de los clásicos. Sus obras: *Vida de Pitágoras*, *Introducción a las categorías de Aristóteles*, *Isagoge*, etc. Estudió los *Elementos* de Euclides.
- Pappus de Alejandría (290, 300 – 350 d.C.). Matemático y geómetra griego. Escribió comentarios a los *Elementos* de Euclides y al *Almagesto* de

Ptolomeo. Uno de los últimos matemáticos griegos, su obra es *Antología Matemática o Mecánica* en ocho libros, que son una guía para conocer la geometría griega. Se concentró en los números grandes y en las construcciones con semicírculos.

- Teón de Alejandría (335 – 405 d.C.). Teón y su hija Hipatia continuaron el trabajo en Astronomía, Geometría y Matemática.
- Hipatia de Alejandría (370 – 415 d.C.). Fue maestra y continuó el trabajo de su padre, Teón; ambos hicieron comentarios sobre sus predecesores.
- Proclo de Bizancio (410 – 485 d.C.). Estudió en Alejandría con el filósofo griego Olimpiodoro. Se trasladó a Atenas y se incorporó a la Academia, adoptando la doctrina estoica; posteriormente fue director de la Academia.
- Eutocio o Eutoquio de Escalona (480 – 540 d.C.). Último matemático griego. Estudió en Alejandría con Amonio de Hermia. Hizo comentarios a algunas obras de Arquímedes, a cuatro libros de las cónicas de Apolonio y elaboró la introducción al primer libro del *Almagesto* de Ptolomeo.
- Simplicio de Cilicia (490 - 560 d.C.). Filósofo y matemático bizantino. Comentarista de las obras de Aristóteles y de los *Elementos* de Euclides.

3.6 El ambiente científico en Alejandría en torno a las matemáticas

Con todo lo que se ha mencionado anteriormente, es claro que el Museo y la Biblioteca de Alejandría sirvieron de marco para la generación de una comunidad científica, especializada y diversa. Las diferentes ramas del conocimiento se comunicaban y se discutían, se unían y a su vez se separaban, creando una comunidad científica y pedagógica.

Una de las ciencias que se empezaron a desarrollar con mayor interés fue en mecánica, los alejandrinos tuvieron grandes aportes en hidráulica y neumática. La fuerza del aire, del agua, y del vapor de agua, el poder de *la palanca* y de los *instrumentos mecánicos*, principalmente de Arquímedes, se dice:

Arquímedes fue un matemático y se consideró como tal, es decir, alguien que trataba teóricamente los problemas; consideraba que sus estudios de ingeniería eran algo marginal.¹¹⁸

Una nueva expresión del conocimiento empírico y práctico de la ciencia griega fue el surgimiento en Alejandría de La escuela de ingenieros. Las obras de estos alejandrinos trataron tres temas: ingeniería militar, instrumentos científicos y juguetes mecánicos. No tocaron temas de ingeniería civil ni problemas prácticos de la vida diaria. La distinción entre práctico e imaginativo probablemente no les preocupaba, pues muchas veces tan sólo era la aplicación caprichosa y de entretenimiento. Estos trabajos pudieron llevar a una revolución tecnológica, la cual se pospuso por más de mil quinientos años.

Por su parte los matemáticos alejandrinos eran geómetras, pero también realizaron investigaciones en Teoría de Números. En geometría compilaron y perfeccionaron los principios geométricos de matemáticos griegos anteriores y los *Elementos* de Euclides son la representación de esta labor. Asunto que se abordará en el siguiente capítulo. Los alejandrinos se encargaron de hacer observaciones detalladas y de *crear modelos matemáticos* basados en ideas anteriores, principalmente el estudio *Sobre las secciones cónicas* de Apolonio. Muchos matemáticos también desarrollaban trabajos de astronomía, pues se empezaba a requerir cada vez más de ésta, para comprender los *raros* movimientos que realizaban los astros. Los trabajos de Euclides, de Arquímedes y de Apolonio, marcaron el desarrollo de toda la matemática de los siguientes siglos en Alejandría.

Así, quedaba la astronomía alejandrina como la proyección de *la Geometría Tridimensional* en una cuarta variable, el tiempo; donde los movimientos de las estrellas y el sol eran esenciales para determinar posiciones terrestres, ya que ellos proporcionaron puntos universales de referencia para diversos estudios posteriores.

¹¹⁸ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 259.

Una gran cantidad de estudios y conclusiones aportadas por los alejandrinos, en todas las ramas del conocimiento, fueron totalmente correctas, pero tuvieron que esperar casi 18 siglos para ser redescubiertas, apreciar la grandeza de los logros de la civilización griega y la tragedia de su destrucción. Concluiremos con la siguiente cita:

Con este ambiente científico de Alejandría se vinculan, directa o indirectamente, las tres figuras máximas de la matemática griega, los “tres grandes”: Euclides, Arquímedes y Apolonio, cuyo brillo justifica por sí sólo que se considere la época alejandrina como “edad de oro de la matemática griega”.¹¹⁹

Para darnos una idea de quiénes eran estos personajes y de su estancia en Alejandría, basta con mencionar algunas citas, por ejemplo, sobre Eratóstenes se dice que:

Pasó varios años de su juventud en Atenas, y más tarde, invitado por Ptolomeo III de Egipto, se convirtió en preceptor de su hijo y bibliotecario jefe de la Universidad de Alejandría a los cuarenta años.¹²⁰

Sobre Arquímedes se dice que visitó varias veces Alejandría, aunque nunca formó parte del grupo de sabios del *Museo*, pues siempre vivió en Siracusa, ciudad de la isla de Sicilia. Fue contemporáneo de Eratóstenes, con quien mantuvo correspondencia científica, pues a él le escribió sobre su *Método* y otros hallazgos científicos, con respecto a su relación con Alejandría se dice:

Su obra estaba estrechamente vinculada con la que se hacía en Alejandría en ese momento, pero parece haber sido un ingeniero práctico además de ser un brillante matemático.¹²¹

Recordemos que Arquímedes tiene tres grandes intereses en Alejandría, que son: a) Estar en contacto con los matemáticos, sucesores de Euclides, y los libros que son lo más adelantado de su época. b) Conocer y entrar en contacto con la

¹¹⁹ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 70.

¹²⁰ Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 139.

¹²¹ Pacey, A. (1980). *El laberinto del ingenio. Ideas e idealismo en el desarrollo de la tecnología*. Pág. 86.

Escuela de ingenieros de Alejandría, ingenieros instruidos en las ciencias que escriben y elaboran artefactos y máquinas como él. c) Y por último, algo que se dio en Alejandría por primera vez de manera formal, *La comunicación e intercambio de una comunidad científica*, que es, hasta el día de hoy, una característica del quehacer científico que necesita expresarse.

De Apolonio de Perga se dice que: "...llegó a Alejandría en su juventud para estudiar con los sucesores de Euclides y permaneció allí por mucho tiempo".¹²² Sobre Hiparco de Nicea al que se considera el padre de la astronomía y el fundador de la trigonometría griega, introdujo instrumentos y técnicas de observación novedosos. Se dice que se unió al Museo de Alejandría de los años 161 al 126 a.C., al respecto al periodo de su vida en Alejandría se dice:

La vida en Alejandría, durante la estancia de Hiparco en la Universidad, se degradaba de día en día y la atmósfera de agitación y turbulencia resultaba inquietante, cuando no insoportable para los habitantes, y en particular para los sabios... Así, esta sociedad, en otro tiempo orgullo e ideal de Alejandro Magno, decaía peligrosamente al dejar paso el desarrollo cultural a la decadencia moral.¹²³

Y aunque en el Museo y la Biblioteca se desarrollaba la ciencia y la cultura, ésta estaba reservadas sólo para unos cuantos privilegiados. La población de la ciudad no tenía la menor idea de los grandes descubrimientos que tenían lugar dentro de ella. Los nuevos descubrimientos no fueron explicados ni popularizados. Los conocimientos en ciencias, los descubrimientos en mecánica y en la tecnología del vapor, se utilizaron para perfeccionar las armas y divertir a los reyes. Los grandes logros intelectuales de la antigüedad tuvieron pocas aplicaciones prácticas y no beneficiaban a la población.

¹²² Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 142.

¹²³ Op. Cit. Pág. 149.

3.7 La decadencia y el fin de la Escuela de Alejandría

En el siglo III a.C. el Estado romano, comenzó lo que dejó inconcluso Alejandro, instaurar un Imperio. Los romanos empezaron sometiendo las ciudades griegas del sur de Italia y a los cartagineses. Fueron invencibles con su flota marítima, sus adiestradas legiones y sus estrategias militares, al respecto se dice:

...los romanos sobresalieron en las técnicas militares...Tomaron de los griegos del sur de Italia dos perfeccionamientos del principio del arco: la catapulta para lanzar flechas y la balista pesada".¹²⁴

La dinastía de los Ptolomeos estaba llegando a su fin, Cleopatra (69 – 30 a.C.) fue su última representante y luchó por el poder contra su hermano y esposo Ptolomeo XIII. Convenció al emperador romano Julio César (100 – 44 a.C.) de que le adjudicará el trono; pronto el emperador decidió alejarse de esta población, sin antes prender fuego a la flota alejandrina, y por la cercanía, el fuego se extendió a la ciudad, quemándose la Biblioteca, destruyéndose una gran cantidad de sus libros. Éste fue el primer incendio de la Biblioteca de Alejandría en el año 48 a.C., la Biblioteca contaba con 700,000 libros en ese entonces. Uno de los libros que sobrevivió era una obra de Ferécides de Siros del siglo VI a.C.

En el año 36 a.C. Marco Antonio (83 – 30 a.C.) sobrino de Julio César, militar y político romano, tratando de hacer una alianza con la reina de Egipto, se casó con Cleopatra. Se dice que le otorgó algunas concesiones, como algunos territorios romanos y le obsequió 200,000 libros, que habían sido un regalo a Roma en el año 133 a.C. por Atalo III de Pérgamo. Estos libros los resguardó en una biblioteca más pequeña, construida por Ptolomeo III, en el templo de *Serapis*, por lo que en Alejandría llega a haber más de 900,000 libros. Pero Marco Antonio tenía un enemigo muy poderoso en Roma, el emperador Octavio Augusto, quien lo persiguió hasta Egipto. Después de una guerra que duró del año 32 al 30 a.C., Roma venció

¹²⁴ Derry, T. K. y T. I. Williams. (1997). *Historia de la tecnología*. Vol. 1. Pág. 29.

a Marco Antonio y a Cleopatra, e invadió Egipto, por lo que se dice: “Finalmente, con la absorción del Egipto de Cleopatra, la tecnología militar romana completó la unión entre Oriente y Occidente”.¹²⁵

Así transcurrieron dos siglos de estabilidad del Imperio romano, pero paulatinamente se fue envolviendo en un clima de violencia entre paganos y cristianos, por lo que se dice:

...en el 192 empezó la inestabilidad y la decadencia. Mientras tanto Roma había sustituido a Alejandría como la más espléndida ciudad del mundo occidental.¹²⁶

Para el año 323 la violencia contra los cristianos llevó a una inestabilidad social, por lo que el emperador Constantino (285 – 337) abolió la persecución contra los cristianos mediante el *Concilio de Nicea* del mismo año. Pero fue con los emperadores romanos Teodosio (347 – 395) de Oriente y Valentiniano (371 – 392) de Occidente, que el cristianismo se convirtió en la religión oficial del Imperio romano, mediante el decreto *Conctos Populos* del año 380, donde se estipula castigo a quienes practicaran cultos paganos, de esta forma quedaba implícita la persecución contra los que practicaran otra fe o contra los que no practicaran ninguna religión, los ateos.

Dado el contexto anterior, el último científico que trabajó en la Biblioteca fue una matemática, astrónoma y física. Directora y catedrática de la escuela neoplatónica de Alejandría, su nombre era Hipatia. En el siglo IV era una mujer que se desenvolvía con toda soltura en un medio tradicionalmente acaparado por hombres.

Alejandría estaba bajo el dominio romano y sufría graves tensiones debido a la creciente iglesia cristiana que estaba consolidando su poder e intentando acabar

¹²⁵ Derry, T. K. y T. I. Williams. (1997). *Historia de la tecnología*. Vol. 1. Pág. 29.

¹²⁶ Op. Cit. Pág. 31.

con la influencia helenística. En el año 415, fue asesinada por una turba de fanáticos cristianos. Por lo que se dice:

Con Hipatia terminaron las matemáticas de Alejandría; ya unos años antes, en 392, las turbas de la ciudad habían destruido la única biblioteca que quedaba en el templo de Serapis. En esa época se sitúa el comienzo de la Edad Media, que representa un largo receso en el desarrollo de las matemáticas del mundo occidental.¹²⁷

En un recuento de los anteriores capítulos hemos abordado el desarrollo del pensamiento matemático desde sus orígenes y las principales escuelas del pensamiento filosófico griego antes de Euclides. Así también el contexto socio económico, político y cultural de Alejandría, su Museo y la Biblioteca, pues en ellos surgió el pensamiento científico que sentó las bases de la ciencia moderna.

Alejandría, lugar donde Euclides se desarrolló como docente, propagando su pensamiento filosófico, matemático y pedagógico, mediante su obra los *Elementos*, cuyo tema abordaremos en el siguiente capítulo, analizando su método para la enseñanza de la geometría.

¹²⁷ Perero, M. (1996). *Historia e Historias de Matemáticas*. Pág. 4.

CAPITULO IV

CORRIENTE FILOSÓFICA-PEDAGÓGICA PRESENTES EN “LOS ELEMENTOS” DE EUCLIDES, COMO UN NUEVO MÉTODO PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA, DENTRO DE LA TRADICIÓN GRIEGA.

Euclides es uno de los personajes que más ha influido en la historia, el desarrollo y la enseñanza de la matemática, debido a la conformación, el abordaje y la presentación que se muestra en su obra los *Elementos*; por lo que es el momento de abordar los aspectos de construcción, método, pedagogía, y demás elementos presentes, que por más de dos mil años han hecho de la obra de Euclides, los libros de texto más leídos y estudiados en la historia de la ciencia, propiciando el aprendizaje y la enseñanza de la geometría.

Debido al origen y al estilo del pensamiento griego, sin lugar a dudas fue la matemática la ciencia que gozó de mayor aprecio, desde Pitágoras hasta Platón. Para la época de Platón, la matemática anterior y la que se enseñaba en la Academia, era la matemática más avanzada, la cual permaneció en espera de la llegada de los maestros de la Escuela de Alejandría, para iniciar un nuevo y brillante camino: el de la posteridad. Recordemos que lo anterior fue producto de las siguientes condiciones:

La cultura y la ciencia helenística siguieron ocupando un lugar destacado en los sistemas políticos que sucedieron al imperio alejandrino y mantuvieron su influencia hasta bien entrada la época del Imperio Romano. Las matemáticas de entonces, que eran parte integrante de la cultura y la ciencia helenística, se liberaron, al igual que otras ciencias, de la filosofía.¹²⁸

Así, los matemáticos alejandrinos en su mayor parte geómetras, realizaron en la época de mayor esplendor, sus investigaciones y su tarea docente. Euclides, como fundador de la Escuela de matemáticas en Alejandría, tenía, seguramente,

¹²⁸ Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Pág. 51.

tres funciones a su cargo: la compilación, el perfeccionamiento o corrección, y la generación o desarrollo de conocimientos matemáticos; basándose tanto en textos griegos anteriores, como en escritos matemáticos realizados por otros pueblos. La finalidad que se pretendía con dichas acciones, era: la conservación, el perfeccionamiento, la divulgación, y la enseñanza de las matemáticas. Por lo que se dice:

En esta época magnífica, Euclides tejió la geometría plana elemental y la geometría sólida sintética para formar el rígido sistema deductivo que había de seguir siendo la pauta escolar durante más de dos mil doscientos años.¹²⁹

4.1 Construcción geométrica griega con regla y compás

El pensamiento griego clásico matemático estableció sus propias reglas de construcción para la geometría; ya para el siglo V a.C. Enópides de Quíos, matemático y astrónomo griego, había establecido el uso de la regla y el compás como la norma en las construcciones geométricas, otorgando así, el rango de figuras elementales básicas de la geometría, a la recta y al círculo. Se dice que:

Esto se justifica fácilmente recordando el instrumento de que el hombre dispone desde tiempos inmemorables para el trazo de rectas y círculos: si no es la cuerda manufacturada puede ser una liana flexible...No nos sorprende entonces que los medidores egipcios se llamaban tendedores de cuerdas. De este humilde origen, la regla y el compás llegaron a ser llamados “los instrumentos divinos” en la Grecia clásica.¹³⁰

La regla y el compás, son los equivalentes físicos de la línea recta y el círculo, figuras privilegiadas en la civilización griega. De ahí que el procedimiento de construcción en geometría griega se reduce a reproducir las mismas cosas que están dadas a la intuición contemplativa de los objetos. Así encontramos las concepciones platónicas opuestas a toda manipulación, que se corresponden con el mundo de la ideas y que a su vez son características del pensamiento griego. Con respecto a Platón se dice:

¹²⁹ Bell, E. T. (1999). *Historia de las Matemáticas*. Pág. 67.

¹³⁰ Sestier, A. (1996). *Historia de las Matemáticas*. Pág. 23.

Para Platón, las únicas construcciones válidas en geometría son aquellas efectuadas con la sola ayuda de la regla o del compás, ya que permiten asegurar la simetría de las configuraciones, mientras que la introducción de instrumentos distintos de la regla o del compás no garantiza la simetría de las figuras construidas.¹³¹

Para Aristóteles, el mecanismo para probar la existencia de un ente geométrico, es la construcción a través de regla y compás. Es el método que también asumiría casi todo el mundo griego. Además, Aristóteles establece una diferencia cualitativa entre el punto y la recta, que refiere directamente a la distinción entre lo discreto y lo continuo. Lo primero apunta a la aritmética y lo segundo a la geometría.

Tanto Platón como Aristóteles restringen a la geometría a la construcción con regla y compas. Esto llegó a Euclides, quien también compartió esta idea y la plasmó en sus *Elementos*. Es a partir de lo anterior que los desarrollos griegos más importantes en matemáticas fueron en geometría, razón por lo que se dice que los griegos eran grandes geómetras y que los *Elementos de Geometría* de Euclides es la gran obra de la matemática griega.

Por más de 1800 años la geometría no sufrió cambios en su forma de construcción, desde los griegos clásicos. Para principios del siglo XIX los problemas abordados eran las construcciones resolubles con regla y compás; pero, Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) un matemático francés, demostró que varios problema geométricos griegos antiguos son imposibles de resolver usando solamente regla y compás. También expuso que los problemas de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo no pueden ser resueltos por construcción de regla y compás. Posteriormente, en el mismo siglo, otros matemáticos desafiaron las construcciones geométricas griegas, dando origen a otras geometrías, como las geometrías no euclidianas de Lobatchevski y la de Riemann.

¹³¹ Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 95.

4.2 Un mundo griego claro y evidente en Euclides

El tema de la construcción geométrica utilizando solamente regla y compás es muy relevante para la historia de las matemáticas, ya que esta restricción también se añadió a la utilización de razones conmensurables, introduciendo límites extraordinarios a las matemáticas de la Grecia Antigua. Es por esto que cuando aparecen las razones inconmensurables con Pitágoras, y sobre todo con la confirmación de $\sqrt{2}$ por parte del pitagórico Hipaso de Metaponto (500 – 470 a.C.), simplemente se negó su existencia, pues rompían con los preceptos de la matemática clásica griega; este hecho impidió el desarrollo de la aritmética y el álgebra griega. Al respecto se dice:

De modo que el obstáculo central, las matemáticas del infinito, que habían detenido a Pitágoras, detuvo a sus sucesores más de dos mil años después de que aquél se hubiera hecho legendario.¹³²

El griego clásico como producto del hombre proveniente de las primeras civilizaciones padece agorafobia, horror a los espacios vacíos, al infinito, lo indefinido, a lo indeterminado; es un estado de toda la colectividad griega, inclusive de sus sabios, quienes se posaban en la seguridad de lo determinado, lo claro, lo definido, lo cerrado, lo finito, lo evidente, lo visible, lo conmensurable y la unicidad de la verdad de lo real.

Así, el pensamiento griego clásico construyó *un mundo para sí*, propiciando la unicidad de las cosas geométricas, las cuales tienen que manifestar lo que son, su verdad y su tipo como se presentan. Esto trae consigo una concepción geométrica delimitada, cerrada y finita, y por consiguiente los métodos de la geometría griega eran a su vez consecuencia de la verdad de las cosas, por lo que se dice: “que las cosas sólo pueden ser de una manera y que de sólo una manera pueden ostentar

¹³² Bell, E. T. (1999). *Historia de las Matemáticas*. Pág. 181.

lo que son”.¹³³ Esto es un reflejo de la pasividad receptora pura del geómetra griego, capaz de un sólo tipo de verdad y de un único entendimiento de la realidad.

A su vez, la geometría euclidiana se construyó un mundo para sí, un mundo acomodado a su tipo de vida cognitiva. Un internado para sí, donde se expresen las conexiones de su universo, generando su identidad. Además, la preferencia helénica hizo un mundo habitado cordialmente con la luz. El filósofo y el geómetra griego se sirvieron de la luz, la luz ideal que hace aparecer lo visible y las propiedades de cada cosa, la *elucidación*. De ahí que se dice: “...esta dirección luminosa no se interrumpe en la geometría de Euclides; y en ella ocupa el lugar central la que es *luz en superficie*, sobre haz luminoso”.¹³⁴ La superficie tuvo un lugar privilegiado en la geometría griega porque en ella se refleja la luz y es lo inmediato visible de los cuerpos, y en la superficie se presentan o hacen su aparición las figuras geométricas. Por consiguiente, todos los demás elementos geométricos se pueden centrar o ubicar en una superficie.

Las cosas geométricas bien visibles, delimitadas para ver clara y distintamente, son cuestiones inseparables en la geometría griega. Euclides ha dicho que los puntos son extremos de líneas y que las líneas son extremos de superficie. El heleno exige finitud intrínseca de cada objeto. Así también, el círculo le pareció a los griegos, y aún a Euclides, como el modelo de figura, por hallar en él una *imagen geométrica* de la exigencia de finitud, impresa en su alma. El círculo, figura cerrada y definida, donde se hace patente el inicio y el fin, y donde vuelve a iniciarse el ciclo perpetuo de su claridad y evidencia.

Pero, por si acaso se piense, que estas ataduras epistemológicas griegas, fueron una restricción para el pensamiento matemático, muy al contrario se manifestó la grandeza de su pensamiento con la creación de las cantidades

¹³³ Euclides. Versión García Bacca, J.D. (1992). *Elementos de Geometría*. Pág. XIII.

¹³⁴ Euclides. Versión García Bacca, J.D. (1992). *Elementos de Geometría*. Pág. LV.

inconmensurables y el surgimiento de los números irracionales y poder lograr el continuo y la infinitud que los números reales necesitaban.

Pero la geometría griega, al tener relación con la teoría de números, tradición pitagórica, se desquebrajaba al seguir tropezándose con raíces incómodas, los irracionales. Toda una sucesión de hechos siguieron para refutar lo irracional y lo inconmensurable, para no ser anti-pitagórico ni anti-griego. Pero gracias a la contundencia y la persistencia de los números irracionales en la matemática griega, grandes matemáticos como Teodoro, Teeteto y Eudoxo pusieron la columna vertebral de la futura matemática, reconociendo que hay innumerables raíces irracionales, por lo que las incluyeron todas ellas bajo un mismo nombre y una misma clase, lo inconmensurable y lo infinito. A lo que se dice:

...los geómetras del siglo IV a.C. pusieron una de las piedras miliarenses en la historia de todo el pensamiento. “La gran continuidad” del análisis, el sistema del número real, estaba ya a la vista.¹³⁵

4.3 Influencias filosóficas en la obra de Euclides

Es sabido que Euclides estudió en Atenas, pues conocía las matemáticas más avanzadas que se enseñaban en la Academia de Platón. Así también, al vivir en esa ciudad tenía conocimiento de los trabajos de Aristóteles y del Liceo. Ambas corrientes filosóficas de estos dos grandes maestros griegos impregnaron la obra de Euclides, por lo que se presentara pitagórico y aristotélico a su vez.

La tradición griega que enaltecía la actitud contemplativa y se oponía a cualquier manipulación, acentuó el camino para la construcción matemática a partir de premisas filosóficas, las que empezaron a delimitar el método que emplearía esta disciplina cognitiva. De esta forma, Platón consideraba los experimentos sin valor e incluso dañinos, sin embargo, consideraba que las matemáticas permitían integrar

¹³⁵ Bell, E.T. (1999). *Historia de las Matemáticas*. Pág. 71.

las ideas puras; por lo que organizó y sistematizó las reglas para la demostración deductiva. Al respecto se dice:

...influencia favorecida por la índole especial de la teoría de las ideas y la teoría del conocimiento de Platón, se ejerció ya por el papel asignado a la matemática en la propia concepción filosófica y en la construcción del mundo, ya por las contribuciones técnicas aportadas por Platón o que se le atribuyen y por los matemáticos del círculo platónico o vinculados con él.¹³⁶

Se le atribuye a Platón una contribución metodológica en las construcciones de los tratados geométricos griegos, ya sea para demostrar un teorema o construir una figura, haciendo una diferencia entre el método analítico y el método sintético; distinción que los matemáticos griegos utilizaron en sus investigaciones. Al respecto se dice: “En definitiva, Euclides, con su trabajo, sistematizó la totalidad del material matemático de la época, tal como había sido prescrito por la escuela platónica”.¹³⁷

La distinción entre el método analítico y el método sintético explica la forma como se presentan las construcciones geométricas griegas cuando se examinan:

- a) Método Sintético.- Partir de una verdad conocida para deducir, por pasos sucesivos, la verdad a probar. Este método sintético, deductivo por excelencia, es el que utilizaron los griegos, después de haber obtenido por el método analítico el resultado buscado.
- b) Método Analítico o método heurístico.- Es el método empleado en la enseñanza. Suponer cierto el teorema a demostrar o resuelto el problema a construir y mediante verdades ya demostradas deducir un teorema o un problema conocidos. Y si el proceso puede invertirse, el teorema queda demostrado y el problema resuelto. Este proceso inverso es el método sintético.

Por otro lado, esta influencia la recibió Euclides de parte del gran sistematizador griego, Aristóteles. Como filósofo clásico griego, Aristóteles dedicó su trabajo a la obtención de un razonamiento claro, correcto y verdadero, por lo que

¹³⁶ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 59.

¹³⁷ Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Pág. 55.

hizo su principal aporte a la filosofía, su lógica silogística; así, el método deductivo y las reglas para un correcto razonamiento lógico estaban puestas. Por haber pertenecido más de 20 años al círculo de la Academia, conocía los trabajos que los matemáticos de su época realizaban. Se dice de Aristóteles que:

A lo largo de sus trabajos insistió en que la lógica la derivó de las matemáticas; fue mucho más tarde que la lógica se independizó de las matemáticas y se hizo aplicable a todo razonamiento.¹³⁸

En abierta oposición a las ideas de Platón, Aristóteles argumenta dos posturas: a) Que la matemática era incapaz de expresar la naturaleza esencial de las cosas, ni sus procesos físicos, ya que era una abstracción que no consideraba las diferencias cualitativas esenciales; b) Que en la prueba matemática lo principal no era una relación con un mundo ideal de formas fuera de la realidad física, sino con un mundo real.

Tal vez los dos rasgos mencionados en el párrafo anterior hicieron que Aristóteles no mostrara casi ningún interés para estudiar y sistematizar la matemática. Por lo que algunos autores mencionan que:

Ni Aristóteles ni su escuela parecen haberse ocupado especialmente de matemáticas...con su sistematización de la lógica, Aristóteles fijó las bases sobre las cuales se ordena y se erige una ciencia deductiva tal cual es la matemática; fue Aristóteles quien encomendó a su discípulo Eudemo de Rodas la redacción de "historias" de la matemática, de la geometría y de la astronomía.¹³⁹

Además, es de hacer notar que en su tratado sobre *Física*, Aristóteles trata de una forma muy sutil la noción de continuidad, y la describe como una propiedad física que es percibida por los sentidos.

En una justa interpretación del valor de los trabajos de Aristóteles, si bien él no elaboró un tratado sobre matemáticas o geometría, es porque consideraba que

¹³⁸ Lara, A. M. (1991). *Los Matemáticos Griegos*. Pág. 84.

¹³⁹ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 60, 61.

tanto el número y la forma geométrica son propiedad del objeto real y se accede a ellos a través de la abstracción y la generalización. Respecto a la lógica y la matemática en Aristóteles se dice:

...por sus fundamentos de lógica y por sus frecuentes alusiones a conceptos y teoremas matemáticos que se encuentran en sus voluminosos trabajos, puede considerarse que Aristóteles contribuyó al desarrollo de las matemáticas.¹⁴⁰

4.4 Los *Elementos* como un modelo para la ciencia helénica

Durante su estancia en Alejandría, Euclides tuvo a su alcance los libros, los instrumentos y todos los recursos que se le proporcionaban, tanto del Museo como de la Biblioteca de Alejandría. Así, se dio a la tarea de elaborar textos donde clasificó y sistematizó todos los conocimientos matemáticos que tuvo a su alcance y los de él mismo. Al respecto se dice: “Euclides construyó su grandiosa obra a partir de definiciones, postulados y axiomas, a los que le siguen teoremas con demostraciones, problemas y proposiciones auxiliares”.¹⁴¹

Para empezar a explorar los *Elementos*, podemos decir que los griegos clasificaban los lugares geométricos en: lugares planos, que se resolvían con rectas y circunferencias; y lugares sólidos, que se resolvían mediante cónicas. Euclides, formado en la tradición griega partía de esta clasificación, pero bajo las tendencias conceptuales, pedagógicas y metodológicas de la Academia de Platón y el Liceo de Aristóteles, que marcaban la tendencia y ejercían en distinta medida, su influencia en el desarrollo de la matemática de la Escuela de Alejandría; principalmente su visión del mundo y su método deductivo.

El método que utilizó Euclides para sistematizar los *Elementos*, sirvió de marco para que la estructura de una ciencia completa fuera un sistema deductivo de enunciados. Aristóteles ya había puesto de relieve la deducción de conclusiones a

¹⁴⁰ Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 103.

¹⁴¹ Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Pág. 54.

partir de primeros principios, por lo que muchos escritores y científicos de final y principio de nuestra Era, creían que el ideal de la sistematización deductiva había sido realizado en la geometría de Euclides y de sus sucesores. Por lo que se dice:

...el ideal de sistema científico que Aristóteles delineó en forma coherente y precisa encontró más tarde una realización casi perfectamente fiel en los *Elementos* de Euclides, donde se hallan organizados con rigor absoluto los resultados de la matemática antigua.¹⁴²

El resultado fue tan eficaz que esta obra se convirtió en el primer sistema axiomático de la matemática, anulando de la historia otros *Elementos* anteriores, como los de Hipócrates de Quios. Así, inspirados por la armonía de las proposiciones fundamentales y la potencia de la presentación lógica deductiva que hace Euclides en sus *Elementos*, encontramos su influencia en las obras de algunos de sus sucesores alejandrinos o cercanos a estos.

Por mencionar algunos científicos griegos posteriores tenemos la obra de Arquímedes, se dice que completó la obra de Euclides, extendiendo los problemas al espacio tridimensional; en geometría plana se destacó por su estudio de las espirales en su obra el *Arenario*, pero sobre todo por su obra *El Método*. Al respecto, sobre su geometría se dice:

El material expuesto en las obras *Sobre la esfera y sobre el cilindro y sobre los conoides y los esferoides* contiene importantes aprovechamientos de los *Elementos* de Euclides y aun hoy constituye un capítulo decisivo de los tratados de geometría.¹⁴³

Otro científico que siguió la estructura de la obra de Euclides fue Apolonio de Perga, escribió ocho libros sobre secciones cónicas, los cuales contenían 400 proposiciones, estudió ampliamente estas curvas, superando los trabajos de Menecmo, Aristeo y Euclides. Apolonio definió el cono como un sólido de revolución e hizo el primer estudio sistemático de las cónicas, ya estudiadas anteriormente por Euclides. Al respecto se dice:

¹⁴² Abbagnano, N. y A. Visalberghi. (1987). *Historia de la Pedagogía*. Pág. 90, 91.

¹⁴³ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 257.

...su fama procede esencialmente de sus Secciones Cónicas en donde el método utilizado está mucho más próximo a los métodos de la geometría analítica actual que a los puramente geométricos.¹⁴⁴

En el siglo II otra obra que se escribió siguiendo a Euclides fue la que formuló la teoría ptolemaica del Universo, según la cual la Tierra es el centro del Universo, el *Almagesto*, que perduró por más de 1,500 años.

De los *Elementos* de Euclides se ocuparon en Alejandría: Herón, Pappus, Porfirio, Proclo y Simplicio, siendo sus comentaristas. Teón reeditó los *Elementos* cambiando el lenguaje para darle mayor claridad y consistencia; su hija Hipatia continuó su trabajo. Las bases metodológicas y el modelo para la estructuración de las ciencias estaban listos para que cualquier rama del conocimiento utilizara un sistema axiomático deductivo para sustentarse y consolidarse

Los *Elementos* es la primera sistematización axiomática deductiva del conocimiento matemático, hoy método general empleado en la matemática y en otras ciencias. Este método trascendió al pensamiento griego helénico y ha llegado hasta nuestros días.

4.5 Estructura de los *Elementos* de Euclides

Seguramente, en los primeros años como director de la Escuela de matemáticas de Alejandría, Euclides asumió como una responsabilidad y un privilegio, recopilar, organizar y sistematizar todo el conocimiento matemático que tuvo a su alcance y el de él mismo. Pero, “La geometría de Euclides estaba sometida a la limitación de tener que dar forma deductiva lógica a los conceptos geométricos abstraídos de lo sensible por la mente griega”.¹⁴⁵

¹⁴⁴ Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 142.

¹⁴⁵ Euclides. Versión García Bacca, J.D. (1992). *Elementos de Geometría*. Pág. XLIV.

Entonces, bajo esta óptica, y la influencia de las dos escuelas filosóficas más importantes: La Academia y el Liceo, Euclides no reunió en sus textos todo el conocimiento matemático anterior a él, sino sólo aquellos conocimientos que tenían características susceptibles de elaborar bajo un criterio. A lo que se dice:

Los *Elementos*... sin duda contiene una buena parte de la matemática elaborada por los matemáticos griegos anteriores a Euclides y por Euclides mismo, pero esa parte no fue tomada al azar, sino seleccionada de acuerdo con un criterio prefijado que convirtió a ese conjunto de conocimientos en un sistema estructurado según un método.¹⁴⁶

En la estructura lógica metodológica de las matemáticas, Aristóteles ya había separado a los postulados de las nociones comunes: los postulados que son aplicables sólo a una ciencia particular y las nociones comunes que son aplicables a todas las ciencias. Euclides, siguiendo a Platón y a Aristóteles, llevó a cabo la sistematización de las matemáticas griegas, utilizando para ello 457 proposiciones. Su obra la compiló en 13 libros que en su conjunto se conocen como *Los Elementos de Geometría*.

A continuación se muestra una tabla que describe los rasgos más importantes de los Elementos de Geometría de Euclides:

Libro	Área de Estudio	Procedencia	Contenidos
I	Geometría Plana o Planimetría	Jónicos y pitagóricos	Propiedades básicas de figuras rectilíneas. Teoremas de congruencia, paralelas y paralelogramos, construcción. Del punto hasta el teorema de Pitágoras. Consta de: 48 Proposiciones, 23 Definiciones, 5 Postulados y 5 Nociones Comunes.
II			Álgebra geométrica, círculos, triángulos, paralelas, cuadrados, paralelogramos, rectángulos. Consta de 14 Proposiciones.
III			Propiedades y teoría del círculo. Consta de 37 Proposiciones y 11 Definiciones.

¹⁴⁶ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 71.

IV	Geometría Plana o Planimetría	Jónicos y pitagóricos	Polígonos regulares inscritos y circunscritos en círculos. Problemas sobre círculos. Consta de 16 Proposiciones y siete definiciones.
V		Eudoxo	Teoría de las proporciones aplicadas a magnitudes conmensurables e inconmensurables. Extensión de la teoría de las magnitudes, evitando los números irracionales; no llega a una fundamentación de los números irracionales. Se considera el principal resultado de la geometría euclidiana. Consta de 25 Proposiciones y 18 Definiciones.
VI		No se conoce	Trata sobre figuras semejantes. Aplicaciones en la geometría plana de los resultados del Libro V. Proporciones, aplicaciones a la planimetría. Consta de 33 Proposiciones y cuatro Definiciones.
VII	Teoría de Números. Aritmética	Pitagóricos	Introducción a la Teoría de Números, propiedades de los números enteros y las razones de números enteros. El algoritmo de Euclides para encontrar el Máximo Común Denominador (MCD) de dos números. Teoría de la divisibilidad, números primos. Consta de 31 Proposiciones y 22 Definiciones.
VIII			Estudio de los números cuadrados y cúbicos. Progresión y series geométricas. Contiene repeticiones innecesarias, falacias lógicas y enunciados enrevesados. Consta de 27 Proposiciones.
IX			Teoría de lo par y lo impar. Consta de 36 Proposiciones.
X	Números Irracionales	Teodoro, Teeteto	Clasificación de los diferentes tipos de número irracionales cuadráticos. Sentó las bases de las propiedades de los inconmensurables. Anexión de áreas. El más extenso y de los más importantes. Consta de 115 Proposiciones y 4 Definiciones.
XI	Geometría de sólidos	Jónicos, Tales de Mileto	Estereometría elemental. Presenta un patrón similar a los libros I y IV. Definiciones básicas necesarias para los libros XI, XII y XIII. Consta de 39 Proposiciones y 28 Definiciones.
XII		Eudoxo	Medición de figuras usando el método de exhaustión, pirámide, cono y esfera. Los círculos son unos a otros lo que los cuadrados

	o Tridimensional.		de sus diámetros y las esferas son unas a otras lo que los cubos de sus diámetros. Consta de 18 Proposiciones.
XIII	Estereométricos	Teeteto	Culminación de los 12 libros anteriores. Propiedades y construcción de los cinco sólidos regulares o polígonos regulares. Discute las propiedades de estas cinco figuras cósmicas o platónicas y da una prueba de que son exactamente cinco poliedros. Consta de 18 Proposiciones.

Existen también los tomos XIV (siglo II a.C.) y XV (siglo V d.C.), que en un principio se creía eran parte de la obra de Euclides, pero, bajo el estudio que se ha hecho de los *Elementos*, sobre todo del Renacimiento hasta el siglo XIX, se ha reconocido que no cumplen con la estructura y el manejo de las demostraciones de los primeros 13 libros, a lo que se dice:

Se atribuye a Euclides de manera apócrifa, otros dos libros de los *Elementos*, los libros XIV y XV; sin embargo, parece que el libro XIV debe ser atribuido a Hipsicles y el libro XV a Isidoro de Mileto.¹⁴⁷

Se dice que la presentación de los *Elementos* no es original, ya que antes de Euclides existieron otras obras llamadas los *Elementos*, además de obras de matemáticos antecesores y las obras de Aristóteles; pero, lo que sí es original es la forma y el orden de toda la obra. Y hay aún una parte más asombrosa de esta obra, la selección de postulados que hizo Euclides. Para Aristóteles los postulados no requieren ser autoevidentes, pero necesitan afirmar su verdad a partir de las consecuencias que se deriven de ellos. Se dice que:

Cuando el griego clásico como Euclides notó que ciertas proposiciones no eran de por sí suficientemente claras o aclarables por medio de otras perfectamente evidentes y manifiestas, “*pidió*” que se le concedieran cual si fueran claras y manifiestas, a fin de poder tratarlas e introducirlas al sistema total de proposiciones geométricas evidentes, dignas de ser vistas y formuladas proposicionalmente por un entendimiento encandilado y prendado por la evidencia y luminosidad intrínseca de las proposiciones verdaderas.¹⁴⁸

¹⁴⁷ Lara, A. M. (1991). *Los Matemáticos Griegos*. Pág. 89.

¹⁴⁸ Euclides. Versión García Bacca, J.D. (1992). *Elementos de Geometría*. Pág. XXIII.

Para el griego heleno, postulado significa petición de tomar una proposición clara y manifiesta. Y pedía tales proposiciones para completar un sistema de proposiciones evidentes que, por un acontecimiento extraño, no quedaba completo y perfecto. Los axiomas se obtienen de la observación de los objetos del mundo físico. Para Euclides, axioma es lo mismo que proposición básica, y los distingue en postulados y nociones comunes. Así, Euclides formuló un sistema de enunciados donde la verdad de los teoremas se seguía de la supuesta verdad de los axiomas y suponía que sus axiomas, junto con las definiciones de términos existían o tenía contacto con la realidad, por la única acción de su construcción.

Es por esto que para que los *Elementos* de Euclides cumplieran con el ideal griego de la sistematización deductiva, debían cumplir con tres aspectos:

- 1.- Los axiomas¹⁴⁹ y los teoremas deben estar relacionados deductivamente.
- 2.- Que los propios axiomas sean verdades evidentes. Euclides empleó dos importantes técnicas para probar teoremas a partir de sus axiomas: argumentos por *reductio ad absurdum* y el método de exhaustión. Se dice que: “El método de exhaustión es puramente un método de demostración que no pretende descubrir una nueva verdad, sino demostrarla”.¹⁵⁰
- 3.- Que los teoremas concuerden con las observaciones provenientes de la existencia del mundo real.

Este último tercer aspecto del ideal de sistematización deductiva pide que el sistema deductivo esté en contacto con la realidad. Euclides creía que los teoremas tenían contacto con el terreno de la experiencia, ya que al menos algunos de los términos del sistema deductivo hacían referencia a la existencia de objetos del mundo real. Se dice que: “Para Aristóteles y posteriormente para Euclides, la manera de demostrar la existencia de algo consiste en construirlo”.¹⁵¹

¹⁴⁹ Fue Proclo de Bizancio quien llamó a las Nociones Comunes *Axiomas*.

¹⁵⁰ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 59.

¹⁵¹ Lara, A. M. (1991). *Los Matemáticos Griegos*. Pág. 84.

Euclides y sus sucesores supusieron que términos tales como punto, línea, segmento y superficie tienen correlación empírica; pero estas ideas representan abstracciones de la realidad. Euclides supone que un punto no tiene tamaño, su dimensión es nula; que una línea es un conjunto de puntos que no tienen ni ancho ni grueso, solamente longitud, adquiere una dimensión; que una superficie no tiene grosor ni altura, por lo que tiene dos dimensiones, ancho y largo; por último, un cuerpo sólido, tiene tres dimensiones, largo, ancho y alto.

La unicidad de la geometría euclidiana y su convicción de que el sistema de verdades geométricas sólo puede ser de una manera, se deben a los Postulados de orden de los conocimientos, que son: a) Las cosas o seres geométricos sólo pueden ser lo que son de una manera, ni más ni menos; b) El modo como las cosas geométricas tienen que manifestar lo que son sus propiedades y no pueden cambiar el tipo de manifestación, y c) El modo como las cosas se hacen patentes o se manifiestan al conocimiento es unitario. Esta triple unicidad caracteriza al tipo de mentalidad que construyó la geometría griega y que se manifiesta en los *Elementos* de Euclides.

El griego pretendía la verdad bien redonda, clara, evidente y delimitada, que expusiera iluminadamente la perfección y la naturaleza de su mundo. Un mundo geométrico creado para sí. Propiciando la elevación del ser, cuanto más perfecto es, tanto más es sustancia, orden con el todo y armonía con el cosmos. Al respecto se dice: "...de ahí fluye el orden, del que toda belleza procede, y la belleza despierta amor".¹⁵²

Desde Tales de Mileto y Pitágoras toda la matemática griega se encaminó a la construcción de los *Elementos* de Euclides. Por ejemplo: En el Libro I se retoman los conocimientos de la Escuela de los primeros jónicos hasta llegar a la demostración del Teorema de Pitágoras. Euclides atribuye este teorema a Pitágoras, pues dice que fue éste el primero en realizar una demostración formal de

¹⁵² Hirschberger, J. (1982). *Breve Historia de la Filosofía*. Pág. 184.

dicho teorema, por lo que Euclides le dio el nombre de Teorema de Pitágoras. La demostración de este teorema hecha por Pitágoras no se conoce, la única demostración que se conoce es la realizada por Euclides en la Proposición 47 del libro I de los *Elementos*.

Por último, se dice que toda la obra de los *Elementos* está encaminada a la construcción de los cinco poliedros o sólidos regulares que se presenta en el Libro XIII, esto como un cierre y un tributo a Platón, pues en un comentario escrito por Proclo, se dice que:

Euclides era platónico de opinión y conocía muy bien la filosofía del maestro, por lo cual se propuso que sus *Elementos* condujeran a la meta de la construcción de las figuras denominadas platónicas.¹⁵³

Los cinco sólidos platónicos



Por otra parte, la obra de Aristóteles constituye el fundamento de todas las ciencias, convirtiéndose en el sintetizador del saber de su época. El elemento fundamental de las obras de Aristóteles y posteriormente la de Euclides, fue la creación de la lógica aristotélica o silogística, la cual reemplazó a la dialéctica de Sócrates y Platón. Lo que no hizo Aristóteles con las matemáticas lo hizo Euclides en Alejandría con el saber matemático de su época.

4.6 Los *Elementos* y la enseñanza

¹⁵³ Sestier, A. (1996). *Historia de las Matemáticas*. Pág. 20.

Cuando el estudiante empieza con los cursos de geometría en el nivel secundaria y bachillerato, empiezan a surgir los nombres de los *padres* de ciertas ramas del conocimiento; entre ellos surge el del llamado padre de la geometría, Euclides, y sus famosos *Elementos* que son referencias inseparables e ineludibles en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Y a medida que se va adentrando en esta área del conocimiento se empieza a comprender que:

Prácticamente toda nuestra educación intelectual tiene su origen en los griegos. Un conocimiento escrupuloso de estos orígenes es pues requisito indispensable para liberarnos de su aplastante influencia. Ignorar el pasado es aquí no sólo indispensable, sino simplemente imposible.¹⁵⁴

Cuando la docencia de las matemáticas se vuelve el *modus vivendi* de las personas, es inevitable volver a replantear los principios y fundamentos del área de conocimiento a impartir, pero ahora bajo la óptica de la enseñanza-aprendizaje: un nuevo y diferente abordaje de los *Elementos*, de un Euclides docente y facilitador del conocimiento matemático, otra faceta del quehacer científico, su divulgación a través de su enseñanza.

Es por esta razón que su obra de 13 libros donde sistematizó el conocimiento matemático griego tuvo dos propósitos significativos académicos: recopilar el conocimiento matemático, poseer dichos conocimientos, y, organizar, estructurar el conocimiento matemático de una forma didáctica para su enseñanza.

Decía Sócrates que es un deber de toda persona enseñar lo que se sabe; Euclides, educado en la Academia de Platón, compartía este deber. Así es como los *Elementos* pasan a formar una nueva concepción de presentar el conocimiento para su enseñanza y su conservación. Se dice que:

Durante dos milenios, este monumental tratado fue, el más utilizado y estudiado; los *Elementos*, además de ejercer una enorme influencia en el

¹⁵⁴ Schrödinger, Erwin. (1997). *La Naturaleza y los griegos*. Pág. 35 - 36.

pensamiento científico, determinaron toda la enseñanza de la geometría hasta nuestros días.¹⁵⁵

Los estudios de geometría que se han enseñado tradicionalmente en la escuela básica y media superior, desde tiempos muy remotos, están basados en los contenidos del Libro I de los *Elementos*. Incluso, en la época de Euclides muchos estudiantes en Alejandría sólo llegaban a la comprensión y estudio de la geometría plana de dicho Libro. En todo caso, ya era sabido entre los alumnos y profesores griegos helénicos y de los pueblos helenizados, que los estudios de la obra de Euclides eran sólo para estudiantes y maestros de nivel superior. Por lo que se dice que:

Los *Elementos* no constituían, como parece desprenderse del título, una obra para principiantes, sino antes bien para estudiantes de nivel avanzado. Casi la totalidad de las matemáticas de la época están comprendidas en ella.¹⁵⁶

La enseñanza de la geometría en el nivel secundaria abarca algunos temas que contiene el Libro I de los *Elementos*, llegando al teorema de Pitágoras en un abordaje muy simple. Además, por ser el último tema del 3er grado de secundaria, al docente no le da tiempo de llega a abordar ese tema. En el nivel medio superior, por muchos años la geometría se omitió de los planes y programas, pero el bachillerato general de la SEP, en sus últimos modelos educativos como la Reforma Curricular con un enfoque educativo centrado en el aprendizaje (2006), y la Reforma Integral de Educación Media Superior basado en un enfoque en competencias (2010), han incluido temas de geometría euclidiana, que abarcan temas del Libro I de los Elementos de Euclides. También se inicia el estudio de la teoría de números con los números racionales e irracionales, lo conmensurable e inconmensurable, que son temas del Libro V. En el Libro I se encuentran elementos para la construcción de las proposiciones de los *Elementos*, el cual es el segundo libro más extenso, después del Libro X.

¹⁵⁵ Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. Tomo I. Pág. 105.

¹⁵⁶ Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Pág. 53.

Empecemos entonces por describir el Libro I de los *Elementos*, ya que es el texto de geometría del cual los hombres aprendieron, por más de XX siglos, los planteamientos conceptuales matemáticos que han servido de base a la gran cantidad de conocimientos geométricos que son los cimientos de la enseñanza de la matemática en los centros educativos. Euclides construyó su obra a partir de 23 definiciones, 5 Postulados y 5 Nociones Comunes o Axiomas, a los que le siguen 48 Proposiciones. En la siguiente tabla se presentan los primeros de estos.¹⁵⁷

Definiciones	Postulados	Nociones Comunes
1. Punto es aquello que no tiene partes.	1. Trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.	1. Cosas que sean iguales a una tercera son iguales entre sí.
2. Línea es longitud sin espesor ni anchura.		
3. Extremos de una línea son puntos (segmento).		
4. Línea recta es aquella línea que tiene todos sus puntos en la misma dirección.		
5. Superficie es aquello que tiene solamente ancho y largo, no tiene espesor.	2. Prolongar por continuidad en línea recta una recta delimitada.	2. Si a cosas iguales se añaden otras iguales, las totales son iguales.
6. Los límites de la superficie son líneas.		
7. Superficie plana es aquella que descansa sobre sus rectas. Contiene rectas en cualquier posición.		
8. Ángulo es la inclinación de una línea con respecto a la otra en un plano que se cortan y que no están sobre una misma recta.	3. Para cada centro y radio describir su círculo.	3. Y si de cosas iguales se quitan otras iguales, las restantes son iguales.
9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.		
10. Cuando una recta se levanta sobre otra formando ángulos adyacentes iguales, cada uno de los ángulos iguales se llama ángulo recto, y la recta que se eleva sobre la otra se llama perpendicular a esta otra.	4. Que todos los ángulos rectos son iguales entre sí.	4. Y las cosas que coinciden o congruentes entre sí son iguales entre sí.
11. Ángulo obtuso es el ángulo mayor que el recto.		
12. Ángulo agudo es menor que el ángulo recto.		
13. Límite es lo que es extremo de algo.		

¹⁵⁷ Euclides. Versión García Bacca, J.D. (1992). *Elementos de Geometría*. Pág. 5-13.

14. Figura es lo comprendido por un límite o varios.	5. Que, si una recta incidente sobre dos rectas, hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos ángulos rectos, prolongadas esas dos rectas al infinito coincidirán por la parte en que estén los ángulos menores que dos ángulos rectos	
15. Círculo es una figura plana circundada por una sola línea, llamada circunferencia, respecto de la cual las rectas que sobre ella inciden desde uno de los puntos colocado en el interior de la figura son iguales entre sí.		
16. Tal punto se llama centro del círculo.		
17. Diámetro del círculo es una recta cualquiera que se haga pasar por el centro y cuyas dos partes tengan sus extremos en la circunferencia. Tal recta corta al círculo en dos partes iguales.		
18. Semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia recortada por el diámetro. Centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.		
19. Son figuras rectilíneas las comprendidas por rectas. Triláteras, las comprendidas por tres; cuadriláteras, las por cuatro; multiláteras, las comprendidas por más de cuatro.		
20. De entre las figuras triláteras, es triángulo equilátero la que tenga tres lados iguales; isósceles, la que tenga solamente dos lados iguales; escaleno, la que tenga los tres lados desiguales.		
21. Además, entre las figuras triláteras, es triángulo rectángulo la que tenga un ángulo recto; obtusángulo, la que tenga un ángulo obtuso; acutángulo, la que tenga los tres ángulos agudos.		
22. De entre las figuras cuadriláteras, el cuadrado es la figura equilátera y equiangular; un cuadrilongo es equiangular, más no equilátera; el rombo ¹⁵⁸ es equilátera, más no rectangular; el romboide es la que tiene los lados y los ángulos opuestos iguales, sin ser equilátero ni equiangular. Las restantes figuras cuadriláteras llámense trapecios o trapezoides, según tengan un par de lados paralelos o no tengan ninguno.		
23. Son rectas paralelas las que, estando en el mismo plano y prolongadas al infinito por ambas partes, no se cortan ni en uno ni en el otro sentido.		
		5. El todo es mayor que las partes.

¹⁵⁸ Euclides presenta definiciones que nunca son usadas tales como rombo y romboide. Lo que hace pensar que llevó a cabo una gran recopilación de elementos que después no incluyó en el desarrollo de sus teoremas.

Las definiciones de los elementos básicos de la geometría, son de tipo descriptivo y de naturaleza evidente. No son propiamente definiciones, sino descripciones en términos físicos de los objetos con los que va a trabajar. Las definiciones sirven para indicar y esclarecer las cosas. Para el griego Euclides, es primordial comenzar por delimitar y definir las cosas, crear un marco dentro del cual vea con claridad y sienta seguridad, formando su propio mundo de objetos para sí. Al respecto se dice:

El plan básico y típico de la geometría euclidiana consiste y se cifra en construir objetos *delimitados*, para que así resulten perfectamente visibles y abarcables con un golpe de vista.¹⁵⁹

Dirá Euclides que las definiciones de los elementos básicos punto, línea y superficie y figura sirven en geometría para delimitar y crear el estado de finitud, por lo que se dice: 1.- El punto posee la función de delimitar por extremos, los puntos señalan los extremos de otros objetos; punto es signo de finitud y objeto delimitador, haciendo que lo delimitado resulte más y mejor visible. 2.- La línea está delimitada por dos puntos; las líneas son extremos de la superficie, haciendo que la superficie resulte clara y visible. La línea ejerce dos funciones helénicas, finitar y visualizar. El concepto de segmento no existe en la geometría griega, por eso la línea de la que se hace mención es la línea finita. 3.- La superficie es la única entidad propiamente (Definición 7), resulta clara y visible por eso ahí se manifiestan los elementos geométricos. 4.- Figura es lo comprendido o circundado por uno o varios límites (Definición 13). La figura estará circundada por extremos suyos, un espacio cerrado por límites y que el criterio helénico llamará objetos geométricos.

Las definiciones han sido criticadas por ser poco claras y vagas, da por hecha la cosa definida, cuando la acción constructora comienza por hacerla. Por lo que se dice:

Las definiciones de Euclides no deben entenderse en el sentido lógico estricto. Algunas son meramente nominales; otras reflejan el sentido de la realidad

¹⁵⁹ Euclides. Versión García Bacca, J.D. (1992). *Elementos de Geometría*. Pág. LX.

existente en el mundo griego, admitiendo con esas definiciones la existencia de objetos de esa realidad.¹⁶⁰

Con respecto a los cuerpos geométricos, significa sólido privado de luz, por tener tercera dimensión, la tercera dimensión es oscura y está privada de luz. Por esta razón los griegos centraron la geometría en lo visible que es la superficie; casi toda la geometría versará sobre figuras planas, o sobre figuras en planos y ocupará un lugar mínimo el estudio de los cuerpos, su estudio será con base en la superficie que los envuelva. Esto como consecuencia del tipo de vida mental griego. Por lo que se dice:

El griego clásico, como todo hombre muy cercano aún al estadio primitivo, padece de esa enfermedad que se llama *agorafobia*, horror a los espacios vacíos, horror al infinito, a lo indeterminado.¹⁶¹

Paradójicamente, sobre sus objetos geométricos preferidos, por el mismo tipo de vida mental griega, la línea recta y la circunferencia, se dice de ellos:

La línea recta recibió el nombre de, *la de la carrera bella*; y el círculo les pareció a los griegos, y aún a Euclides, como el modelo de figura, por hallar en él una *imagen geométrica* de la exigencia de finitud, impresa en su alma.¹⁶²

De los cinco postulados que son afirmaciones geométricas, los tres primeros establecen el método de construcción con regla y compás. El cuarto postulado establece un principio de congruencia, la figura será independiente de la posición en el espacio en el que esté colocada, pues supone un espacio homogéneo. Y el quinto postulado, la existencia de una paralela. Este último no parecía tener la misma evidencia y claridad que los otros cuatro, de ahí que se intentara convertirlo en proposición o teorema y demostrarlo. Los postulados se aplican sólo para un área de conocimiento.

En cuanto a las nociones comunes o axiomas, en estos se logra una mayor claridad, gracias a la lógica aristotélica. Son supuestos generales que permiten a

¹⁶⁰ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 73.

¹⁶¹ Euclides. Versión García Bacca, J.D. (1992). *Elementos de Geometría*. Pág. LXI.

¹⁶² Op. Cit. Pág. LXX.

los matemáticos proceder como una ciencia deductiva. Las nociones comunes aplican para todas las ciencias. Se dice que: “A lo largo de la historia, las matemáticas después de Euclides, tanto los postulados como las nociones comunes fueron considerados verdades infalibles”.¹⁶³

En cuanto a las 48 proposiciones o teoremas se clasifican en teoremas de demostración y teoremas de construcción, así como también se separan en tres grupos, que son:

Primer grupo.- Abarca de la primera proposición a la proposición 26; presenta las propiedades de los triángulos e incluye los tres teoremas de congruencia.

Segundo grupo.- Comprende de la proposición 27 a la proposición 32; involucra la teoría de las paralelas y demuestra que $\alpha + \beta + \theta = 180^{\circ}$

Tercer grupo.- El último grupo incluye de la proposición 33 a la proposición 48; trata de los paralelogramos, triángulos y rectángulos, así como sus áreas. La proposición 47 es referente al teorema de Pitágoras y la proposición 48 es su recíproca.

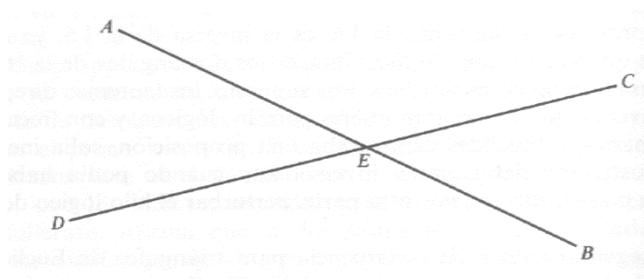
A continuación se describen algunos teoremas o proposiciones del Libro I:

Proposición del Primer Grupo:

Teorema I. 15 (Teorema demostrativo)¹⁶⁴

“Si dos rectas se cortan, hacen ángulos opuestos por el vértice iguales”

a) Figura:



b) Hipótesis: Córtese, las rectas AB y CD en el punto E, formándose los ángulos opuestos por el vértice AED, CEB, AEC y DEB.

c) Tesis: El ángulo AED es igual al CEB, y el ángulo AEC igual al DEB.

¹⁶³ Ruiz, Z. A. *Historia y Filosofía de las Matemáticas*. www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz. Pág. 73.

¹⁶⁴ Euclides. Versión García Bacca, J.D. (1992). *Elementos de Geometría*. Pág. 43.

d) DEMOSTRACIÓN:

15.1 Puesto que la recta AE está levantada sobre la recta CD, hace los ángulos CEA y AED. (Definición I. 8)

15.2 Así los ángulos CEA y AED son iguales a dos rectos. (Teorema I. 13)

15.3 Además la recta DE está levantada sobre la recta AB hace los ángulos AED y DEB. (Definición I. 8)

15.4 Así los ángulos AED y DEB son iguales a dos rectos. (Teorema I. 13)

15.5 Pero quedó ya demostrado que también los ángulos CEA y AED son iguales a dos rectos. (15.2)

15.6 Entonces los ángulos CEA, AED son iguales a AED, DEB. {Noción C. 1; Silogismo proporcional corriente: $[(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ }

15.7 Réstese el ángulo común AED a ambos. (Noción C. 3)

15.8 Luego el restante CEA es igual al restante DEB. {Noción C 4; Silogismo racional: $[(a - b) \& (b - c)] \rightarrow (a - c)$ }

15.9 De la misma forma se demostrará que los ángulos AED y CEB son iguales.

e) Conclusión: Si dos rectas se cortan, hacen ángulos opuestos por el vértice iguales. Entonces el ángulo AED es igual al CEB, y el AEC igual al DEB.

Que es lo que se había de demostrar

Corolario¹⁶⁵.- De lo cual es evidentemente que si dos rectas se cortan entre sí los ángulos alrededor del corte harán ángulos iguales en total a cuatro rectos.

Los *Elementos* de Euclides son notables por la claridad con la que se exponen y se demuestran los teoremas. Así como por su nivel de rigor. La anterior demostración axiomática muestra el procedimiento por medio del cual Euclides expone rigurosamente el método deductivo, que pretende ante todo la representación del objeto, más no la construcción del objeto. Incluso, el método de exhaustión es un método puramente demostrativo, pues no pretende descubrir una verdad, sino demostrarla. “Los matemáticos griegos pusieron el acento en la demostración y no en el resultado, en el camino y no en la meta”.¹⁶⁶

¹⁶⁵ Es una afirmación segura de una conclusión que se ha demostrado anteriormente.

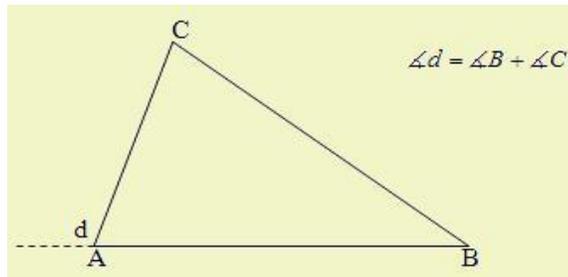
¹⁶⁶ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 66.

Proposición del Segundo Grupo:

Teorema I. 32 (Teorema demostrativo)

“En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son igual a dos rectos”

a) Figuras:



b) **Hipótesis:** Sea el triángulo ABC y d un ángulo exterior.

c) **Tesis:** Que el ángulo $C + B = d$; y que $A + B + C = 180^\circ$

d) DEMOSTRACIÓN:

Afirmación

Justificación

32.1 $A + B + C = 180^\circ$

Por hipótesis.

32.2 $A + d = 180^\circ$

Forma un ángulo llano

32.3 $A + d = A + B + C$

Propiedad transitiva de la igualdad

32.4 $d = B + C$

Propiedad de cancelación

32.5 $d = 180^\circ - A$

Despejando d de 32.2

32.6 $d = d$

Por la ley reflexiva de la igualdad

32.7 $180^\circ - A = B + C$

Propiedad transitiva de igualdad: 32.4 y 32.5

32.8 $180^\circ = A + B + C$

Por despeje

e) **Conclusión:** En todo triángulo si se prolonga uno de los lados el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos: $d = B + C$ (32.4); y además la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180^\circ = A + B + C$ (32.8).

Que es lo que se había de demostrar

Corolario.- Todo ángulo externo es suplementario a su ángulo interno adyacente.

Aquí se presenta una forma más moderna de llevar a cabo las demostraciones de los teoremas de los *Elementos* de Euclides. Sin que se pierda el valor del método deductivo, se utilizan símbolos, operaciones aritméticas y algebraicas, características de las que carece la anterior demostración del Teorema I.15. Finalmente, lo que se pretende es tener claridad, como seguramente lo buscó Euclides, en los procesos de enseñanza para la construcción racional del pensamiento matemático del estudiante. Se dice que:

La enseñanza de la geometría tiene un valor más pedagógico que científico. Su fin es desenvolver el espíritu de la observación, ejercitar la vista, cultivar el sentido de lo bello y acostumbrar al orden y a la regularidad.¹⁶⁷

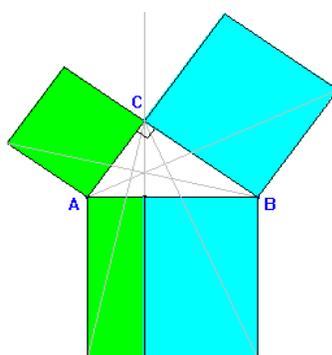
Proposición del Tercer Grupo:

Teorema I. 47 (Teorema demostrativo)

“En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”

a) Figura:

Teorema de Pitágoras



$$a^2 + b^2 = c^2$$

La anterior figura es la que se presenta en el libro I de los *Elementos* de Euclides.¹⁶⁸ Su demostración es complicada y poco didáctica. Así, encontramos otras imágenes más actuales que muestran de forma más didáctica al Teorema de

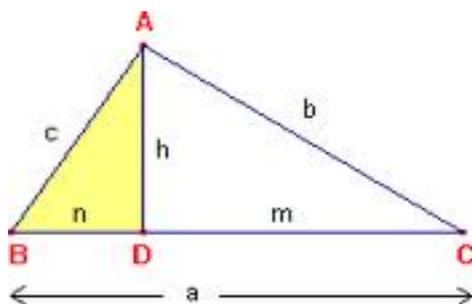
¹⁶⁷ Lecona, U. M. E. (1990). *Geometría Euclideana*. Pág. 11.

¹⁶⁸ Euclides. Versión García Bacca, J.D. (1992). *Elementos de Geometría*. Pág. 115.

Pitágoras, que son las más utilizadas en las escuelas de nivel básico para su demostración y comprensión (Ver anexo 6).

Pero, como se desea utilizar una demostración deductiva del Teorema de Pitágoras, de forma más matemática y actual, se utilizarán para ello los postulados de semejanza de los triángulos, para una mejor comprensión de estos en las matemáticas, y su utilización en esta demostración.

a) **Figura:**



b) **Hipótesis:** El triángulo ABC es un triángulo rectángulo. Siendo BAC el ángulo recto.

c) **Tesis:** $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ ó $b^2 + c^2 = a^2$

d) **Trazo Auxiliar:** Trazar una perpendicular h . $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

e) **DEMOSTRACIÓN:**

Afirmación	Justificación
47.1 El $\triangle ABC \sim \triangle ABD$	Postulado de semejanza A-A ¹⁶⁹
47.2 $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$	Postulado de semejanza L-A-L ¹⁷⁰ Lados homólogos proporcionales
47.3 $(AB)(BD) \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB} (AB)(BD)$	Multiplicar ambos miembros por $(AB)(BD)$. Postulado de orden multiplicativo
47.4 $\overline{AB}^2 = (\overline{BC})(\overline{BD})$	Propiedad de cancelación y operación
47.5 $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$	Lados homólogos proporcionales
47.6 $(AC)(CD) \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC} (AC)(CD)$	Multiplicar ambos miembros por $(AC)(CD)$

¹⁶⁹ Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales.

¹⁷⁰ Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo respectivamente igual y proporcionales los lados que lo forman.

	Postulado de orden multiplicativo
47.7 $\overline{AC^2} = (\overline{BC})(\overline{CD})$	Propiedad de cancelación y operación
47.8 $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = (\overline{BC})(\overline{BD}) + (\overline{BC})(\overline{CD})$	Sumando 47.4 y 47.7
47.9 $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = \overline{BC} [\overline{BD} + \overline{CD}]$	Por factorización
47.10 $\overline{BD} + \overline{CD} = \overline{BC}$	Por construcción
47.11 $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = (\overline{BC})(\overline{BC})$	Principio de sustitución: 47.10 en 47.9
47.12 $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = \overline{BC^2}$	Por operación

f) Conclusión: En los Δ rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto. $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = \overline{BC^2}$ ó $b^2 + c^2 = a^2$

Que es lo que se había de demostrar

Corolario: El cuadrado de cualquier cateto en un Δ rectángulo es igual a la diferencia del cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.

$$b^2 = a^2 - c^2$$

La demostración de este teorema se debe a Euclides, aunque él dice que fue Pitágoras quien por primera vez realizó una demostración rigurosa sobre dicho teorema, incluso fue Euclides quien lo llamó así: "Teorema de Pitágoras". Este teorema ya era conocido por los babilonios y los egipcios, por lo que:

En lo que respecta al teorema pitagórico en sí mismo, quienquiera que lo adivinara primero, recordemos que es la piedra angular de la geometría métrica euclidiana y una de las bases de toda la métrica. Por otro lado, como los triángulos semejantes, enlaza a toda la historia de las matemáticas, no sólo en la geometría, sino también en el álgebra, la teoría de los números y la física matemática.¹⁷¹

¹⁷¹ Bell, E.T. (1999). *Historia de las Matemáticas*. Pág. 49.

Por lo anterior, este Libro I de los *Elementos* de Euclides es tan importante, tanto para el estudio como para la enseñanza de las matemáticas en los niveles básicos y medio superior, pues se consagra como fin último a la demostración del Teorema de Pitágoras, el cual conlleva, intrínsecamente, el aspecto metafísico de la idea de lo infinito y lo inconmensurable de los números irracionales que Pitágoras conoció y que tanto evitó.

De esta gran obra pedagógica y didáctica que ha soportado el paso del tiempo, se han hecho modificaciones y comentarios, desde la época de Euclides; o, lo realizado seis siglos después con los matemáticos alejandrinos Pappus y Teón, que le hicieron comentarios y aportes; y muchos más, que en el transcurso de 23 siglos, han quedado fascinados por el orden lógico, los recursos deductivos y los métodos de demostración que en ellos se muestran. Es por esto que los *Elementos* de Euclides marcan un cambio de paradigma en la forma de sistematizar y enseñar los fundamentos matemáticos, creando un modelo a seguir para el pensamiento científico alejandrino, en un mundo griego que se creó para sí. Con respecto a lo que se entiende como un paradigma científico se dice que son:

...como realizaciones científicas universalmente reconocidas que, durante cierto tiempo, proporcionan modelos de problemas y soluciones a una comunidad científica.¹⁷²

Otros trabajos donde se sabe que hay rasgos donde Euclides se muestra como docente es en dos de sus obras: *La Pseudaria* y *Sofismas*. *La Pseudaria* enseña a reconocer los razonamientos falsos, sobre esta obra: “Proclo habla de la gran utilidad del libro para los principiantes que no fueron más allá de la geometría elemental”.¹⁷³ Se dice que su obra *Sofismas*, la escribió para ejercitar la inteligencia; es decir: “Los *Sofismas* probablemente es una obra didáctica escrita para adiestrar a los discípulos en el razonamiento correcto”.¹⁷⁴

¹⁷² Kuhn, T. (1997). *La Estructura de las Revoluciones Científicas*. Pág. 13.

¹⁷³ Lara, A. M. (1991) *Los Matemáticos Griegos*. Pág. 90.

¹⁷⁴ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 79.

Euclides, como cualquier profesor de matemáticas, sabía las dificultades a las que se enfrentaba un estudiante al aprender y el profesor al enseñar esta disciplina. Es por ello la necesidad de claridad y sencillez en los procesos de las demostraciones, la construcción de conceptos que den validez a la estructura lógica racional para la comprensión y aprendizaje del pensamiento matemático.

Algunos niveles del desarrollo del pensamiento requieren de la geometría como ciencia del espacio para, con base en ellas, desarrollar la visión de la geometría como una estructura lógica.¹⁷⁵

Además, el carácter particular de la matemática deductivo y demostrativo, propician un estado de perfeccionamiento en toda la estructura de su método. Esto no es fácil en el proceso de enseñanza-aprendizaje, debido al origen mismo de la matemática. Al respecto se dice que:

Euclides con sus *Elementos* acentúa una nota característica y permanente de la matemática: su carácter abstracto y su finalidad fincada exclusivamente en el conocimiento¹⁷⁶.

4.7 Corriente pedagógica y psicológica en los *Elementos*

En toda sociedad moderna un aspecto fundamental de ésta, es la fuerza con la que la educación impacta su estructura social, reflejando y reproduciendo los aspectos de su política, su economía y su cultura. Además, la educación tiende a seguir ciertas corrientes pedagógicas, según la época, la política educativa y la moda; es por ello que los modelos educativos describen y propician el tipo de orientación social que se requiere. Al respecto se dice que:

La educación es el principio mediante el cual la comunidad humana conserva y transmite su peculiaridad física y espiritual...El hombre sólo puede propagar y conservar su forma de existencia social y espiritual mediante las fuerzas por las cuales la ha creado, es decir, mediante la voluntad consiente y la razón. La

¹⁷⁵ Cantoral, R. y Farfán R. M. (2003). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Pág. 145.

¹⁷⁶ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 76.

educación no es una propiedad individual, sino que pertenece por su esencia a la comunidad.¹⁷⁷

Hoy en día, la práctica profesional de la docencia en matemáticas debe marcar su orientación pedagógica, tan importante y difícil de describir, debido a su complejidad con la que se presenta y todos los elementos a considerar. Sin embargo, es preciso describirla debido a sus implicaciones sociales, pero sobre todo, porque marcarán el rumbo de todas las acciones a emprender para el cumplimiento de objetivos en el aprendizaje de las matemáticas en el acto educativo. De aquí que la pedagogía y la didáctica en esta área del conocimiento no deben ser un cuerpo dogmático con una sola interpretación, sino un crisol donde diferentes posturas y puntos de vista intervengan para la discusión de dicha tarea. Al respecto de la educación en matemáticas se dice que:

Todavía se enseñan en el nuevo plan los viejos temas, la aritmética, el álgebra, la geometría euclídea, la trigonometría y los elementos de geometría analítica... Naturalmente, la proporción de temas tradicionales varía de una versión a otra en los planes de matemáticas moderna, pero es, desde luego, la parte predominante en todos los casos.¹⁷⁸

Es por esta razón que los conocimientos matemáticos de los antiguos griegos pueden ser tratados con la perspectiva de los modelos pedagógicos actuales, específicamente los *Elementos* de Euclides; los cuales a su vez son producto de siglos de anteriores elaboraciones matemáticas y de una larga tradición educativa, aunque elitista, que abarca desde la escuela jónica, la pitagórica, la sofística, la socrática, la Academia y el Liceo. Y como los contenidos de geometría que se enseñan en el nivel primaria, secundaria y preparatoria son en su mayoría los conocimientos que están presentes en el libro I de los *Elementos* de Euclides, entonces estos pueden ser vistos bajo el enfoque moderno de las corrientes pedagógicas, psicológicas y la didáctica del enfoque constructivista. ¿Por qué el constructivismo? El constructivismo ha permeado la educación contemporánea,

¹⁷⁷ Jaeger, W. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. Pág. 3.

¹⁷⁸ Morris, K. (1980). *El Fracaso de la Matemática Moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Pág. 98.

convirtiéndose en el paradigma teórico y metodológico que orienta el proceso enseñanza-aprendizaje. Al respecto se dice que:

El constructivismo es una concepción filosófica que surge como consecuencia de la interacción entre las ideas empiristas e innatismo. Trata sobre los procesos cognoscitivos, referentes al carácter pasivo y activo de dichos procesos. Sostiene que el sujeto construye su peculiar modo de pensar, de conocer, de modo activo, como resultado de la interacción entre sus capacidades innatas y la exploración ambiental que realiza mediante el tratamiento de la información que recibe del entorno.¹⁷⁹

Pero el constructivismo es un movimiento que tiene sus orígenes en la Grecia antigua, donde el pensamiento filosófico aborda la problemática de la adquisición del conocimiento. Y aunque no podamos catalogar a estos pensadores presocráticos de constructivistas, sí se puede decir que está presente la génesis de este enfoque pedagógico. Así encontramos las ideas del filósofo Jenófanes, quien con sus versos critica la concepción de los dioses que Homero y Hesíodo habían forjado en la religión del griego común; poniendo en tela de juicio la credibilidad de los dioses y de sus promulgadores. A lo que se dice:

Jenófanes, con sagacidad, objeta lo siguiente: si los animales tuviesen manos y pudieran crear efigies de dioses, les darían formas de animales; al igual que los etíopes, que son negros y con la nariz achatada, representan a sus dioses con la piel negra y la nariz chata.¹⁸⁰

Así también, desmitifica los fenómenos naturales que eran atribuidos a los dioses; haciendo uso de la filosofía analiza y reflexiona, produciendo ideas escépticas que desarrollaron toda una teoría sobre la búsqueda de la verdad y el conocimiento. Para Jenófanes la verdad es una competencia racional de puntos de vistas diferentes sobre un mismo tema, de concepciones alternativas sobre los objetos, procesos y fenómenos de la realidad tanto natural como social. Si comparamos la definición de constructivismo con el pensamiento de Jenófanes, podremos ver por qué muchos consideran a este filósofo presocrático como el

¹⁷⁹ Santillana para Profesores. (1983). *Diccionario de las Ciencias de la Educación*. Tomo I. Pág. 314 – 315.

¹⁸⁰ Reale, G. y D. Antiseri. (2001). *Historia de Pensamiento Filosófico y Científico*. Tomo I. Pág. 53.

primer constructivista. Otro grupo importante donde encontramos constructivistas antiguos son Pitágoras y los pitagóricos, ya que entre sus trabajos más importantes está la demostración del teorema que lleva su nombre y el estudio y realización de los cinco sólidos regulares, donde intervienen procesos constructivistas. Posteriormente encontramos a los sofistas, entre ellos se destaca Protágoras, quien influido por Heráclito proponía que todos nuestros conocimientos provienen de la sensación y que ésta varía según los individuos, de ahí su gran lema: *El hombre es la medida de todas las cosas*. Se dice que: "...todo lo que nos dice Platón de Protágoras se refiere a la posibilidad de la educación".¹⁸¹

Por otra parte, también encontramos anti-constructivistas en esta Grecia antigua, como Parménides y Platón. Este último consideraba que el conocimiento existe en el mundo de manera independiente de la actividad y las necesidades cognoscitivas cambiantes de los seres humanos. Para Platón las matemáticas eran un instrumento pedagógico esencial para construir un pensamiento racional, pues ofrece la certeza de integrar las ideas puras que potencializan el razonamiento abstracto para comprender las formas que nos ofrece la geometría.

Planteamos el constructivismo entonces como una corriente donde converge el pensamiento filosófico, psicológico y pedagógico, para proporcionar una cosmovisión del conocimiento humano visto como un proceso de construcción y reconstrucción cognoscitiva llevado por los individuos que tratan de entender los procesos, objetos y fenómenos del mundo que los rodea, sobre lo que ellos ya conocen; donde el entendimiento es toda asociación de conocimientos anteriores ya adquiridos con conocimientos por aprender o posteriores, donde el acto de asociar sólo puede ser realizado por el sujeto, pues es un acto de construcción íntima, heurística.

Así encontramos que las corrientes constructivistas que imprimen su sello en los modelos educativos actuales y con las que podemos ver los contenidos de los

¹⁸¹ Jaeger, W. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. Pág. 285.

Elementos de Euclides, son: el Constructivismo Biológico, Constructivismo Social y el Constructivismo Didáctico.

Constructivismo Biológico.- Del suizo Jean Piaget (1896 - 1980). También llamado constructivismo genético, basado en los conductistas estadounidenses. Sostiene que el sujeto construye su conocimiento en su mundo físico y familiar con base en su desarrollo cognitivo. En la obra de Euclides está implícito que en geometría conocer es demostrar; así también por sus orígenes empíricos babilonios y egipcios se hace patente que se construye para conocer, se demuestra para ver con claridad y se aprende para conocer. Estos son los elementos primarios con los que la humanidad inicia su camino hacia la construcción del conocimiento matemático y que siguen presente hoy día en cada individuo. Al respecto se dice:

Cada persona debe pasar por las mismas experiencias por las que pasaron sus antepasados si quiere alcanzar el nivel de pensamiento que muchas generaciones han alcanzado. Este argumento ha sido anticipado por muchos grandes matemáticos relacionados con la pedagogía... Desde el punto de vista de la pedagogía matemática... el desarrollo de los individuos reproduce en una serie resumida todas las etapas del desarrollo de la especie, es por esto que la enseñanza de las matemáticas, como la de cualquier otra cosa, sigue esta ley.¹⁸²

Constructivismo Social.- Del ruso Lev Semionovich Vigotsky (1896 - 1934). Es un enfoque histórico cultural, basado en ideales marxistas que exponen el impacto de las interacciones sociales y de sus instituciones, como la influencia principal en el proceso de aprendizaje y en el desarrollo del sujeto. El aprendizaje se concibe como una reconstrucción de saberes facilitada por la interacción con otros individuos y sus diversas formas de comunicación. En el periodo alejandrino se construyeron las ciencias y las matemáticas, a través de mecanismos sociales, comunidades pequeñas constituidas normalmente alrededor de una figura dirigente importante, como Euclides y sus discípulos, similares a los que se dan en la actualidad. Grupos de investigadores e intelectuales, maestros y estudiantes, que

¹⁸² Morris, K. (1980). *El Fracaso de la Matemática Moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Pág. 48.

conforman comunidades científicas que comparten y construyen un paradigma basado en su estructura metodológica y sus fundamentos. Al respecto se dice:

Esto hace referencia a los métodos de construcción del conocimiento, tanto de sus contenidos como de su naturaleza y fronteras... No es un mundo abstracto absoluto infalible, impoluto, al que se llega sólo por las vías racionales, protagoniza y concurre lo social y lo histórico con todas sus poderosas propiedades.¹⁸³

Las comunidades científicas también elaboran sus propios libros de texto, pues es una forma de divulgar y reafirmar en las futuras generaciones el paradigma que imponen; es por esta razón que estos libros son revisados y se van ajustando hasta que sus contenidos son válidos, o hasta que el surgimiento de un nuevo paradigma emergente los hace obsoletos. Al respecto se dice:

...cada revolución científica modifica la perspectiva histórica de la comunidad que la experimenta, entonces ese cambio de perspectiva deberá afectar la estructura de los libros de texto y las publicaciones de investigación posteriores a dicha revolución.¹⁸⁴

Esto nos refiere el por qué la obra de los *Elementos* de Euclides fue el libro de texto de matemáticas que predominó por más de XX siglos, pues el paradigma de la geometría euclidiana perduró hasta el siglo XIX, cuando surgieron las geometrías *No Euclidianas*. Los 13 Libros de Euclides instituyeron y siguen proporcionando toda una cosmovisión del pensamiento geométrico y de su enseñanza, en los niveles educativos básicos y medio superior, pues para comprender los conocimientos de la matemática actual, hay que pasar forzosamente por los contenidos de los fundamentos primarios y básicos de la matemática de los antiguos griegos, que se encuentran recopilados y sistematizados en los *Elementos* de Euclides.

Constructivismo Didáctico.- Del estadounidense David Paul Ausubel (1918–2008). Teoría basada en el concepto de aprendizaje significativo, donde el sujeto debe ser consciente de las relaciones entre los conocimientos que posee con los

¹⁸³ Ruiz, Z. A. *Historia y Filosofía de las Matemáticas*. www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz. Pág. 72.

¹⁸⁴ Kuhn, T. (1997). *La Estructura de las Revoluciones Científicas*. Pág. 15.

conocimientos por aprender, y de su propia estructura cognitiva para poder relacionarlos en un nuevo cuerpo de conocimientos. La obra de los *Elementos*, sería imposible abordarlos si no hay nociones previas de geometría y aritmética; para la época de Euclides eran los conocimientos más avanzados de geometría donde hay una secuencia de andamiaje constructivista, donde los conocimientos de unos Libros son la base de otros y así hasta llegar al Libro XIII, que es considerado por muchos como el fin último de la obra de Euclides. Por lo que se asegura que:

La razón, que tiene una capacidad peculiar, la de captar conexiones necesarias de la esencia. Éstas son precisamente las verdades de razón. Euclides no contó ni midió exhaustivamente lo que es así, sino que mostró lo que debe ser así. Ofreció verdades de razón, como hace todo conocimiento matemático.¹⁸⁵

Ésta es una necesidad didáctica de las matemáticas, la de mostrar verdades a partir de conceptos previos establecidos, pues de algo establecido se puede seguir construyendo un conocimiento matemático que implique mayor nivel cognitivo. Propiciar reflexiones en los individuos sobre un mundo cognoscible y complejo, para vislumbrar el grado de comprensión que tienen de ello, así como la adquisición de un lenguaje especializado y de un simbolismo científico basado en el razonamiento lógico que busca la explicación y sustento mediante argumentos axiomáticos para su validez, como en los *Elementos*.

Estos modelos constructivistas postulan que el aprendizaje tiene lugar cuando el sujeto actúa sobre la información, relacionándola con los conocimientos que ya posee y los nuevos, asimilando e impregnando así de información y significado a su experiencia cognitiva. Con el enfoque constructivista se dice que:

...además se construye ese conocimiento en forma de reglas, principios, axiomas, categorías y teorías. Asimismo, dicho proceso de construcción y reconstrucción de conocimientos es tentativo cuando se asegura que el nuevo conocimiento debe tomarse siempre como hipotético-deductivo...¹⁸⁶

¹⁸⁵ Hirschberger, J. (1982). *Breve Historia de la Filosofía*. Pág. 182 - 183.

¹⁸⁶ Mazario, T. I. y T. A. C. Mazario. *Constructivismo y Educación*. Monografía. www.bibliotecas.cu/gsd/collect/libros/index/assoc/HASH2243.dir/doc.pdf

Es por esto que desde la época de los últimos matemáticos alejandrinos como Proclo de Bizancio, éste ya había señalado que todas las matemáticas son hipotéticas. El pensamiento matemático se desarrolla elaborando sus procedimientos mediante la construcción racional cognitiva, para posteriormente producir un sistema axiomático deductivo, como son los *Elementos* de Euclides para justificar y plantear, por medio de la lógica, sus fundamentos y procedimiento. Al respecto, se dice:

...los *Elementos* nos ofrecen el primer ejemplo en gran escala de ese fecundo juego de la razón, creador de nuevos conocimientos que se presentan atraídos por la irresistible fuerza del raciocinio y cuya única finalidad es el conocimiento mismo.¹⁸⁷

Entonces, el conocimiento matemático se fragua a partir de premisas filosóficas específicas, desde donde se definen los límites y métodos de las matemáticas y de su enseñanza: es éste un ejemplo de una auténtica construcción social, histórica, de una disciplina cognoscitiva. Puede decirse que a partir de los *Elementos* de Euclides se estableció la deducción como el método exclusivo de las matemáticas y de las ciencias mismas.

Y es que, tanto para los antiguos pensadores griegos, como para los actuales filósofos, pedagogos, psicólogos, etc., la interrogante más significativa ha sido ¿Cómo se construye la realidad circundante del individuo? y ¿De qué forma construimos el conocimiento históricamente? El constructivismo parece ser el enfoque epistemológico que nos proporciona, tanto en lo individual como en lo social, la oportunidad de conceptualizar, reformular y ser conscientes de nuestra propia visión del mundo.

4.8 Euclides y su posteridad

El esplendor de la cultura y la ciencia griega coinciden con el poderío de los romanos, quienes realizaron grandes obras de ingeniería, aunque no comprendían

¹⁸⁷ Pastor, J. R. y J. Babini. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I. Pág. 76 - 77.

ni daban mérito a la ciencia que había en las aplicaciones técnicas. El pueblo romano, a pesar de su cercanía con la cultura griega, mostró una gran incapacidad en el desarrollo de las matemáticas; en el largo periodo de su hegemonía no hubo ningún matemático romano, su matemática y su sistema de numeración eran rudimentarios. Las formulas geométricas fueron copias de los griegos y greco-alejandrinas. El emperador romano Diocleciano (245 – 316 d.C.) prohibió y condenó el arte de las matemáticas, por lo que el término Matemáticas decayó y los matemáticos empezaron a ser mal vistos, hasta llegar a la trágica muerte de Hipatia en Alejandría. Así cubrió con su capa de oscurantismo la época medieval al mundo occidental y sobre todo al conocimiento matemático. Las matemáticas medievales fueron muy limitadas y poco usuales, esto se reflejó en las escasas aportaciones a la geometría. En otra parte del mundo, los matemáticos árabes habían traducido y desarrollado las matemáticas de los griegos, hasta llegar a su aporte principal, el álgebra. Para el siglo X, la obra del árabe Ibn Al-Haytham recuerda la obra de Euclides.

En el arte de la construcción de catedrales y palacios de finales de la época medieval europea, la geometría desempeñó un papel importante, pues el manejo de los espacios, las líneas del diseño y el plan de edificación, exigían cada vez más el uso de las matemáticas. El estilo arquitectónico gótico es totalmente geométrico, a lo que se dice: "...lo que tuvo mayor importancia para el desarrollo de las artes prácticas en los siglos XII y XIII fue el interés demostrado entonces hacia las matemáticas".¹⁸⁸ Así, la poderosa técnica matemática había sido recuperada de algunos textos griegos poco estudiados hasta entonces. Otra aplicación práctica de la geometría era el dibujo de cartas marinas, se dice que:

En el siglo XIII, no mucho después del momento en que la geometría euclidiana fuera enseñada en Italia, se vio que esas direcciones de ruta podían ser representadas geoméricamente.¹⁸⁹

¹⁸⁸ Pacey, A. (1980). *El laberinto del ingenio. Ideas e idealismo en el desarrollo de la tecnología*. Pág. 70.

¹⁸⁹ Pacey, A. (1980). *El laberinto del ingenio. Ideas e idealismo en el desarrollo de la tecnología*. Pág. 74.

En Francia e Italia se instalaron escuelas en las catedrales, los estudiantes, futuros alarifes o arquitectos, se instruían en latín y en geometría. Los maestros alarifes reconocían el valor práctico de la geometría, pero los alumnos de estas escuelas medievales no iban más allá de conocimientos del Libro I de Euclides. El sistema hindú ya era conocido y los números romanos continuaban siendo de uso común. A lo anterior se dice:

En la escuela de la catedral de Chartres se estudiaron cuidadosamente los teoremas redescubiertos de Euclides y fue allí donde se los enseñó por vez primera. De hecho, Chartres se convirtió en la escuela de matemáticas más importante de Occidente. En ese sitio el pensamiento platónico recibía considerable atención... El énfasis de Platón en las matemáticas estimuló enormemente el interés en la geometría.¹⁹⁰

La Europa medieval había ignorado o desconoció los logros matemáticos de los antiguos griegos, pero en el siglo XIV, las ideas establecidas por el gran maestro Aristóteles fueron cuestionadas y sometidas a juicios lógicos y empíricos; esta actitud crítica preparó el camino para liberar al pensamiento racional de los principios aristotélicos, estableciendo así la mecánica matemática de Galileo, como el rasgo distintivo de una revolución científica, dándose así el comienzo de procedimientos de investigación experimental; esto de igual forma marcará la diferencia entre la ciencia moderna y la antigua.

Al instaurarse el comienzo de un nuevo paradigma del pensamiento científico, los matemáticos más competentes también estaban en condiciones de apropiarse y contribuir con conocimientos originales a la geometría y a otras áreas de la matemática, algunos de ellos son: Leonardo de Pisa mejor conocido como Fibonacci, Jordano de Nemore, Nicole Oresme, George Peverbach, Ricardo de Wallingford y Johann Matees Müller de Königsberg, mejor conocido como Regiomontanus, con lo que poco a poco y a partir de ellos, se instaura y se va consolidando una tradición matemática que no había en Europa.

¹⁹⁰ Op. Cit. Pág. 71 - 72.

El pensamiento matemático occidental del siglo XIV acogía las nuevas traducciones realizadas del árabe al latín; matemáticos como Euclides y Ptolomeo ya habían sido estudiados en los siglos XII y XIII; otras traducciones antiguas como las de Arquímedes, Apolonio y Diofanto estaban disponibles pero por lo general no eran estudiadas. Además no eran de fácil acceso y comprensión.

En el año de 1448 aparecen en el taller de Gutenberg los primeros libros impresos en Europa, ofreciendo con ello un mayor acceso a la población de poseer libros, pues los costos de elaboración disminuyeron; como consecuencia de lo anterior se favoreció la divulgación del legado matemático griego que sobrevivió. En Venecia en el año de 1482 aparece la primera edición en latín de *Los Elementos* de Euclides; después Francesco Mauro Lico editó versiones latinas de Arquímedes, Apolonio, Diofanto, y posteriormente Federico Comandino siguió haciendo ediciones de Euclides, Pappo, Herón y Aristarco. A lo que se dice:

La demanda de los libros fue un resultado del complejo cambio cultural para el que ya había sido utilizada la palabra “Renacimiento”. Desde su comienzo en Italia hacia 1400, hubo un resurgimiento de la cultura y la educación. La imprenta creció al servicio de la erudición renacentista, y el arte de la impresión fue una tecnología del Renacimiento.¹⁹¹

En los siglos XV, XVI y XVII se requirió de mucho esfuerzo para la comprensión de las antiguas civilizaciones griega y romana, ya que estos habían dejado libros técnicos, tanto de matemáticas, astronomía, geometría y arquitectura. El interés por la geometría y la matemática es reconocido por los mecánicos, astrónomos y matemáticos, como son: Galileo, Copérnico, Kepler y Descartes. Esto fue necesario tanto para la ingeniería como para las artes prácticas del Renacimiento, una época de artistas-ingenieros y en este ambiente floreció la matemática. La obra de Euclides fue fundamental para este propósito, pues desde la aparición de la primera impresión en Italia su influencia se ha dejado sentir a través de miles de impresiones. Los *Elementos*, es la obra científica con más traducciones, el más

¹⁹¹ Pacey, A. (1980). *El laberinto del ingenio. Ideas e idealismo en el desarrollo de la tecnología*. Pág. 83.

publicado y el más estudiado en el occidente. Por lo anterior se dice: "...la obra de Euclides ha sido casi tan leída e impresa como la Biblia. En todo caso es el segundo libro más difundido de toda la historia".¹⁹²

Desde los inicios de la creación de los *Elementos* de Euclides, matemáticos griegos y árabes antiguos discutieron ampliamente el quinto postulado, *el Postulado de las Paralelas*, pues no parecía tener la misma evidencia y claridad que los otros cuatro postulados. Así, encontramos en la historia de la geometría intentos para suprimir el V postulado de Euclides, pero sin tener éxito. Fue hasta el siglo XVIII y XIX que matemáticos como Legendre, Gauss, Lobatchevsky, Bolyai y Riemann, proporcionaron con muchos más recursos matemáticos y demostraciones rigurosas, la imposibilidad de trazar por un punto exterior a una recta una paralela a ésta. Surgieron así las geometrías no euclidianas, que también son producto de los *Elementos* de Euclides al querer afirmar o refutar el V postulado, su grandeza axiomática dio origen a otras geometrías, aunque también hubo quien creyó que había llegado su fin. Al respecto se dice:

En un siglo de vieja geometría, que ha mantenido la fortaleza de las matemáticas durante dos mil años, esta fue casi por entero destruida. Y el texto de Euclides, el más viejo de los libros de escuela del mundo, fue por fin sobreseído.¹⁹³

Y aunque después del siglo XIX algunos matemáticos han querido depreciar la obra de Euclides, basta y sobra con mencionar que siguen siendo los fundamentos de la enseñanza y la construcción en la educación básica y media superior, ya que para acceder al conocimiento matemático actual hay que pasar por la matemática antigua. Por esta carga ancestral del desarrollo matemático, la enseñanza de esta área del conocimiento no es fácil, ni para el estudiante, ni para el profesor, pues requiere de todo un proceso de construcción significativo. En la actualidad, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas están pasando por un proceso de abandono y fracaso escolar, primero se culpaba a los procesos tan

¹⁹² Sestier, A. (1996). *Historia de las Matemáticas*. Pág. 34.

¹⁹³ Durant, W. (1983). *Historia de la filosofía*. México: Editorial Diana. Pág. 529.

lógicamente rigurosos con los que se enseñaba la matemática. Pero ahora que casi se aniquiló esa supuesta barrera, que se redujo una gran cantidad de temas matemáticos en casi todos los planes de estudio en el sistema educativo, que se ha culpado a los modelos educativos, los cuales se quitan y se ponen por capricho o por moda. Ahora que seguimos buscando en las opiniones de psicólogos, pedagogos o intelectuales de renombre y que influyen en la política educativa, seguimos buscando una explicación al fracaso en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Por lo que se dice de las últimas generaciones de estudiantes:

Y los resultados totalmente negativos; una generación de analfabetos matemáticos, con un temor sin precedentes a este campo de la enseñanza, es la prueba más palpable del fracaso de la matemática moderna.¹⁹⁴

Hemos llegado al fin de esta búsqueda en el desarrollo del pensamiento matemático, que ha recorrido hasta aquí un largo trecho de muchos siglos de elaboración racional y social. La magna obra de Euclides es la de mayor éxito en el ámbito de la matemática, la educación y la divulgación de las ciencias, pues predominó por más de dos mil años, siendo el paradigma para el estudio y la enseñanza de la geometría. Esta obra titulada *Los Elementos*, instauro planteamientos conceptuales matemáticos que fueron válidos hasta mediados del siglo XIX y fijaron el ideal del conocimiento verdadero y su enseñanza. Esto lo ha convertido en el libro de texto que impulsó y propició el interés por el pensamiento científico y matemático, como un poderoso instrumento de razonamiento deductivo, brindando el método axiomático deductivo que es el método actual de muchas ciencias.

¹⁹⁴ Ontiveros, Q. J. (1994). *El Fracaso de la Enseñanza de las Matemáticas del Bachillerato*. Pág. 25.

CONCLUSIONES

Como hemos podido ver, la historia del hombre es la historia de la naturaleza de su pensamiento, su comprensión y la interrelación con su entorno. Por su naturaleza y por el instinto de sobrevivencia, el hombre aspira al saber, única forma de comprender y transformar su medio ambiente; con ello, el asombro y la admiración de las explicaciones se han ido transformando en un *corpus* de conocimientos llamado ciencia.

La ciencia es un trabajo duro y perseverante, construcción continua de miles y miles de años, de un pueblo a otro y de una generación a otra. Transmisión de conocimientos que nos han dado una identidad en cada etapa de nuestra historia y han forjado lo que hoy somos, los herederos de toda una tradición de conocimientos y que nos definen como humanidad.

Es por esto que los griegos también fueron los herederos de sus antepasados, desde el hombre primitivo, la revolución neolítica y las primeras civilizaciones, como la de los babilonios y la de los egipcios. Los conocimientos empíricos matemáticos de estos pueblos sirvieron de base para la agricultura, su calendario, registro y cuantificación del tiempo y las estaciones, así como sus cartas astronómicas para la navegación; sus sistemas de numeración para realizar sus operaciones básicas y sus sistemas de medidas para el comercio de su vida diaria, sus estadísticas, sus censos y, en general, para la administración. Ambos pueblos conocían el Teorema de Pitágoras, lo utilizaban para la construcción de sus edificios y pirámides, para la agrimensura y para otras aplicaciones.

Estos conocimientos fueron aprendidos y estudiados por los primeros filósofos y matemáticos griegos, como son Tales de Mileto y Pitágoras de Samos, quienes introdujeron estos conocimientos a Grecia, fundando sus escuelas, donde los propagaron y enseñaron entre sus discípulos. Se sabe que Pitágoras fue alumno de Tales en la escuela Jónica. Estos conocimientos se enseñaron desligados de la

religión griega, de los poemas de Homero y de toda la mitología griega; se enseñaban como explicaciones cuyas base se centraban en cuestiones físicas y cuyos principios eran elementos naturales, como el agua, el aire, el viento, etc. pero sobre todo, aplicaron a sus conocimientos prácticos el *lógos*, la razón. Se dedicaron principalmente a la búsqueda sobre interrogantes sobre el *cómo*, pero sobre todo del *por qué*. De este modo están puestas las bases que propiciaron la madurez intelectual, la manipulación del objeto como objeto de estudio y el gusto de conocer por conocer, que es la herencia de los griegos a la humanidad: la filosofía.

Los griegos que asistían a las anteriores escuelas eran estudiantes de escuelas de nivel superior y su edad era por lo general después de los 18 años o más y permanecían ahí por largo tiempo. A partir de estas dos escuelas, jónica y pitagórica, se impulsó poco a poco, el surgimiento de una serie de pensadores griegos, quienes estudiaban filosofía y organizaron para su estudio los conocimientos matemáticos, principalmente de geometría. Los griegos ampliaron y fundamentaron los conocimientos de pueblos anteriores, buscaron explicaciones y aportaron métodos para su divulgación a través de la educación; es por ello que los conocimientos matemáticos fueron tomados con un carácter didáctico-pedagógico para su enseñanza.

Se puede considerar que tanto la filosofía, la matemática y su didáctica tienen el mismo origen en Grecia, y que se traduce a una preocupación racional por entender y explicar el mundo físico, y divulgar el conocimiento a través de la educación. Este proceso convirtió paulatinamente a los conocimientos matemáticos en una ciencia deductiva axiomática, sustituyendo su carácter empírico con el que surgió en las primeras civilizaciones. Sobre todo con la escuela pitagórica, donde la matemática adquiere un carácter abstracto y místico.

La forma peculiar en que el pensamiento griego se expresó desde sus inicios es la matemática y su método para su explicación y enseñanza dio origen a la filosofía, que es el más universal punto de vista de una concepción de la vida y de

su relación con el mundo real, produciendo así una serie de interrogantes y planteamientos que cambiaron el pensamiento griego y occidental. Sin embargo, el pensamiento griego, todavía muy cercano al del hombre rudimentario, no podrá separarse del todo del pensamiento místico y religioso, esa poderosa carga ancestral que estará presente constantemente en su pensamiento matemático; así encontramos a una comunidad sectaria, los pitagóricos, de quienes una de sus ideas pilares era que Dios no podía haber crear un mundo imperfecto, por lo que, a partir de ahí, los griegos clásicos se dedicaron a crear desde su cosmovisión, un mundo perfecto, un mundo para sí, donde la construcción de sus conceptos y sus definiciones fuesen seguras y claras, sin un tinte de ambigüedad o incertidumbre, evidente ante la luz y ante la claridad de sus razonamientos. Este era un pensamiento griego, hasta la época de Euclides, es por esto que el griego intelectual puede no solamente convertir las cosas en objetos, dándoles un nuevo matiz mediante las formas establecidas de las que disponía, sino que propició para sí una morada donde crearon una identidad, distinta en su conexión interior de la conexión que tuviera el universo de todas las cosas. Una morada donde crearon una intimidad para sí. Es por esto que la geometría es producto de esta vida intelectual griega, donde sus conexiones con sus rigurosos métodos, produjeron el gran escenario donde surgieron las formas espaciales de la matemática.

Considerando que aunque las matemáticas griegas nacen en el siglo VII a. C. con Tales de Mileto, las matemáticas eran casi totalmente ajenas a la mayoría de los griegos; los que se interesaban por las matemáticas siempre fueron un número reducido de filósofos-matemáticos. Además, considerando los escasos periodos de producción matemática en los que se forjó la ciencia matemática griega, se puede decir que sus logros fueron muchos, de los cuales nosotros somos sus herederos.

Así, filósofos presocráticos y filósofos como Platón y Aristóteles, prepararon el marco teórico y los métodos, de las escuelas filosóficas donde se generaron formas de pensamiento intuitivo, sensible, ordenado y racional. De la misma forma los matemáticos antecesores de Euclides ya habían aumentado el número de teoremas

y de conocimientos, dando un paso más hacia el reagrupamiento científico de los elementos de geometría.

Y es en Alejandría, al norte de Egipto, durante la época de los Ptolomeos, la ciudad donde se concentró el conocimiento de las culturas ancestrales, de los griegos mismos y de otras culturas contemporáneas; esto gracias a la creación de dos instituciones nunca antes vistas en la humanidad: el Museo y la Biblioteca de Alejandría. Además, por primera vez en la historia de la ciencia se dan las condiciones para la generación de una comunidad científica, especializada y diversa, donde se propició la comunicación, el intercambio y los discursos teóricos-pedagógicos interdisciplinarios entre los miembros de esta comunidad.

En este favorable ambiente científico, donde Euclides era director de la escuela de matemáticas en Alejandría, éste se dio a la tarea de recuperar casi todo el conocimiento y la historia de la matemática en un sistema organizado, consistente y condensado. Pero, ¿Qué es lo que recopiló y sistematizó Euclides? No es todo el conocimiento matemático previo a él, sino sólo aquello que se podía estructurar a través de un método y donde disponía de excelentes fuentes bibliográficas. En sus 13 libros que conforman su obra los *Elementos*, Euclides deja ver su gran capacidad sistematizadora, fundamentando y proporcionando una estructura y coherencia lógica a los conocimientos matemáticos que abordó.

Y es también en Alejandría, el lugar donde las ciencias empiezan a desprenderse de la filosofía, conservando su método y la fuerza de la conceptualización. La primer área de conocimiento que se separó de la filosofía fue la matemática, pues creó el primer sistema racional axiomático y deductivo del conocimiento geométrico, los *Elementos*, pues poseía una tradición ancestral de conocimientos y madurez en sus procedimientos de elaboración. Esto sirvió de modelo para que las demás áreas del conocimiento alejandrino se empezaran a separar de la filosofía y crearan su propio cuerpo de conocimiento, sus métodos de estudio, y se constituyeran poco a poco como ciencias.

Un hecho concreto sobre el gran potencial que los griegos tenían para intuir teoremas y demostraciones queda asentada por el hecho de que los *Elementos* de Euclides contienen 467 proposiciones y las *Secciones Cónicas* de Apolonio 487, obtenidas todas ellas, a partir de cinco nociones comunes y cinco postulados y que se encuentran en los *Elementos*. La obra de Euclides también influenció a Arquímedes de Siracusa, quien lo cita en sus trabajos matemáticos y menciona verse apoyado en los *Elementos*, que junto con las obras de mecánica de Arquímedes inauguran el surgimiento de un nuevo grupo de científicos: los ingenieros de Alejandría. Muchos de estos ingenieros estudiaron con discípulos de Euclides. Ni Arquímedes ni los ingenieros de Alejandría pretendían unificar la matemática con la mecánica -aunque en el *Método* de Arquímedes sí lo intenta-, ni lograron ver el inmenso potencial científico de esta unión, pues su idiosincrasia no se los permitió.

La obra de Euclides también instauro un paradigma científico, pues sirve de modelo para la organización, generación y sistematización de otros campos del conocimiento que se estudiaban en Alejandría, como eran: la mecánica, la geografía, la astronomía, la biología, la física, la literatura, la filosofía, la ingeniería, etc. Con este modelo de sistematización se inicia la época de oro de la matemática griega, colocando a las matemáticas en una posición privilegiada en la actividad científica alejandrina, la cual se extendió más allá de sus fronteras y del tiempo.

Los *Elementos* de Euclides establecieron las definiciones, los límites, los métodos y los objetos de la matemática por más de XX siglos. Las contribuciones griegas más significativas a las matemáticas, y que se condensan en los *Elementos* son: geometría plana y del espacio o sólida, teoría de números, álgebra geométrica y trigonometría plana. La innovación más importante fue la invención de las matemáticas abstractas basadas en una estructura lógica y el razonamiento por deducción. Su descubrimiento más fino matemáticamente, fue la teoría de los conmensurables y los inconmensurables. Las más grandes aportaciones están en

el terreno de la geometría, por lo que desde sus inicios mostraron gran interés por la construcción de las figuras y los cuerpos geométricos, como son los cinco sólidos regulares o sólidos platónicos. Proporcionan la primera demostración rigurosamente racional del Teorema de Pitágoras. Crearon una terminología apropiada para la matemática que propició exactitud y certeza, a partir de sus raíces griegas y posteriormente latinas; éste es un esfuerzo de los matemáticos griegos, desde Tales de Mileto, y que se ha convertido en el lenguaje científico universal. Establecieron a través de la racionalidad una relación entre el mundo real y las matemáticas, por lo que las leyes del mundo se expresan por medio de leyes matemáticas.

Desde los inicios, los griegos mostraron gran interés por las figuras geométricas, especialmente por la recta, el círculo y la circunferencia, las cuales fueron la base de la construcción de su geometría, obligándose al uso exclusivo de la regla y el compás, motivo por el cual su matemática se vio restringida. La geometría se volvió cada vez más cualitativa que cuantitativa, a su vez también por la imposibilidad de manejar los números irracionales, ya que los griegos sólo manejaban números enteros. Esto mismo propició la imposibilidad del manejo del infinito. Otra restricción de la geometría euclidiana es el quinto postulado, que hace referencia a la paralela; este postulado no parece una verdad evidente, por lo que varios matemáticos trataron de demostrarlo o eliminarlo, llegando a resultados tan contradictorios como paradójicos. Es así como surgen las geometrías No euclidianas, como son la geometría hiperbólica (Gauss, Bolyai y Lobachevsky) y la geometría elíptica (Rimann). La geometría euclideana siguió produciendo más desarrollos matemáticos en el siglo XIX.

La geometría de Euclides es una más de las geometrías que actualmente existen, sin embargo, cualquier geometría de la que se trate, sigue determinándose, aún hoy, por la relación que puede guardar con Euclides. Una geometría no puede ser más verdadera que otra, sólo puede ser más útil, según la ocasión. La geometría euclideana sigue siendo la más útil y la más sencilla, además de que es la que concuerda cuando medimos y comparamos con nuestros sentidos. Y su utilidad

mayor, sigue siendo la geometría de nuestra vida diaria y con la que comenzamos a comprender la realidad que nos envuelve.

Los sistemas axiomáticos en los que se sigue fundamentando la geometría tienen dos vertientes extremas: una idealista o platónica y una que pide conexión con la realidad o aristotélica, ambas parten de una dialéctica que conforman la construcción del pensamiento matemático. Ambas siempre han estado presentes, y no se concibe la matemática una sin la otra, pues las dos la conforman, como un motor generador, que la eleva y la aterriza constantemente.

Así también, la fuerza educadora dentro del todo social, determina el principio mediante el cual la comunidad humana conserva y transmite su esencia a la comunidad y a las futuras generaciones. Los griegos imprimen su sello a su vida intelectual y asumen que la educación es un proceso de construcción consiente, la esencia de lo humano y lo más difícil de adquirir y enseñar. Asumieron esta tarea con mucha entereza, sobre todo los primeros pensadores, como Tales de Mileto y Pitágoras. Este último se percató, en sus viajes por oriente, de la ignorancia del pueblo, siendo fáciles de gobernar y oprimir, por lo que Pitágoras se da a la tarea de educar a los hombres. Para ello hay que enseñarles la verdadera ciencia, la que explica todas las cosas, las matemáticas. También los pensadores griegos presocráticos llevan a cabo este sentir griego, que asumían como una obligación, enseñar lo que se sabían, y cuya cúspide se alcanza con Sócrates, Platón y Aristóteles. Sin la *paideia* griega no se podría explicar lo universal de la cultura helénica, que se propagó a través de la educación, impregnando la vida intelectual del griego.

En la Academia de Platón, recinto educativo donde se formó Euclides, se elaboró un plan de estudios, donde la matemática era parte de las disciplinas de un programa de enseñanza, que pretendía formar a los individuos, propiciando, según argumenta Platón, habilidad en la capacidad de la memoria, agilizando la virtud formativa del individuo, lo que ninguna otra asignatura propicia; motivo por el cual

la matemática constituye el eje de la educación. Además, para Platón las matemáticas eran un instrumento pedagógico esencial para agilizar la mente, construye el razonamiento abstracto para comprender las formas e integrarlas a las ideas puras de la matemática.

El anterior modelo educativo se continuó en la siguiente época, la helenística, principalmente en Alejandría. Esta educación sólo era para la clase alta. Los 13 libros que conforman los *Elementos*, sirvió como un trabajo de recopilación y sistematización de la matemática, y también, seguramente, fue el texto con el que Euclides enseñó matemáticas a sus discípulos. Ningún libro de texto de matemáticas ha propagado e influenciado el conocimiento y el interés por el estudio de la matemática. Tanto ayer como hoy, sigue conservando su didáctica, el poder de la construcción para su demostración, mostrar para ver con claridad, para enseñar lo sublime de la creación humana. Desde su época fue un ícono en la enseñanza de la matemática, mostrando sus fundamentos y su método. Los teoremas que muestra Euclides son los que se enseñan en la escuela básica y media actual, las demostraciones escolares se han vuelto extremadamente simplificadas, y aún así, conservan la crítica y la reflexión de su construcción. Como nos enseñó Euclides, partir de un conocimiento simple a uno cada vez más complejo, a través de un andamiaje de aprendizajes significativos para desarrollar la estructura cognoscitiva, donde se relacionen los conocimientos anteriores con los nuevos e ir incorporando nuevos y más complejos en un proceso dinámico de elaboración intelectual. Todos ellos conformarán la estructura del pensamiento matemático del individuo y cuyo soporte serán las matemáticas antiguas.

Muchos matemáticos modernos consideran a las demostraciones euclidianas estériles, modelos formales demasiado rígidos y poco pedagógicos. Los *Elementos* vistos y juzgados con criterios actuales parecerían darle la razón a juicios tan ligeros; pero quien reconoce en su obra el destacado nivel de rigor, la claridad con la que pretende exponer y demostrar sus teoremas, la época y la ausencia total de simbolismo, es de admirar tan altos alcances que logró esta obra. Hoy, la

matemática cuenta con un lenguaje especializado y toda una simbología que facilita su desarrollo, su comprensión, sus demostraciones, su divulgación y su enseñanza. Reconocer el arduo trabajo de tan difícil empresa, indagar la huella que imprime la construcción de un pensamiento matemático de miles de años, en cada época y su evolución; tras periodos de mucha actividad y otros de nula producción, antes y después de Euclides; así se expresa este campo vivo del conocimiento humano, pues sus contenidos siguen siendo la base de todo conocimiento matemático y sin los cuales no se podría entender la matemática actual.

Los matemáticos griegos aportaron algo radicalmente original para las matemáticas, las convirtieron en una ciencia racional, deductiva e hipotética, que con Euclides, a partir de un método y la lógica, se volvió rigurosamente axiomática. Los *Elementos* es una construcción de pensamiento matemático que se fue heredando de una época a otra, hasta nuestros días. El proceso de construcción de la geometría euclidiana debe ser mediante un razonamiento claro y demostrable, que mediante el rigor de su lógica, se favorezca la sencillez y la claridad que sus conceptos y su método exige. El pensamiento griego promovió formas matemáticas puras, organizando un nuevo espacio no mítico, sino geométrico, proporcionando belleza en las formas, en la estética de su construcción espacial.

Atendiendo entonces a los criterios actuales de cientificidad, la matemática debe ser considerada como la forma de pensamiento científico de mayor antigüedad dentro de la cultura del hombre. Y aún hoy conserva la esencia con la que surgió y con la que Euclides la sistematizó, pues una definición actual de matemáticas dice que: la matemática es la ciencia que estudia, por medio de sistemas hipotéticos-deductivos, las propiedades de los entes abstractos, tales como las figuras geométricas, los números, etc. así como las relaciones que se establecen en ellos.

La crisis en la educación matemática actual requiere la necesidad de llevar a cabo una revisión de sus principios hasta los fundamentos más profundos y plantearse una vez más, el retorno al estudio del pensamiento griego, pues en él se

encierran sus fundamentos, su método y su didáctica. La geometría debe desarrollar en el individuo la capacidad de análisis, desarrollar sus propios conceptos y relacionarlos en el espacio euclideo, descubriendo la estética de su espacio cognitivo. Los *Elementos* de Euclides propician la lógica del aprendizaje de la matemática, ya que por medio del proceso de construcción de la demostración, el alumno aprende cadenas deductivas que son la base del pensamiento lógico racional y que hoy en día le hace falta a la educación. De ahí la reflexión del presente trabajo, orientado a la colaboración interdisciplinaria de la matemática con otras áreas del conocimiento y de su enseñanza, integrando los aspectos educativos y culturales, como un todo, así como sus mutuas interrelaciones, de un periodo histórico y la problematización crítica de un hecho que sigue mostrando su poderosa influencia hasta nuestros días.

Los *Elementos* es una obra universal, que pertenece a toda la humanidad, pues en su construcción se recapitula desde el pensamiento más antiguo, las primeras civilizaciones, los griegos clásicos, los griegos helénicos, los árabes, los primeros traductores al latín y todos los que hemos tenido contacto con los *Elementos*, ya sea para nuestro aprendizaje o para la enseñanza de esta área del conocimiento. Además, al permanecer por más de XXIII siglos como un texto que marcó los lineamientos de la producción matemática y su enseñanza, las muchas contribuciones a lo largo de su historia en los que fueron retomados, asumidos, sobrestimados, reconstruidos, corregidos, ampliados y manipulados. Esto nos habla de una disciplina cognitiva que ha rebasado las barreras del tiempo y de su época, convirtiéndose en una elaboración histórica. Razón por lo que *Los Elementos de Geometría de Euclides* es considerada una de las obras más grandiosas legadas por la antigüedad para la humanidad.

ANEXOS

ANEXO 1

Mapa de Grecia Antigua¹⁹⁵

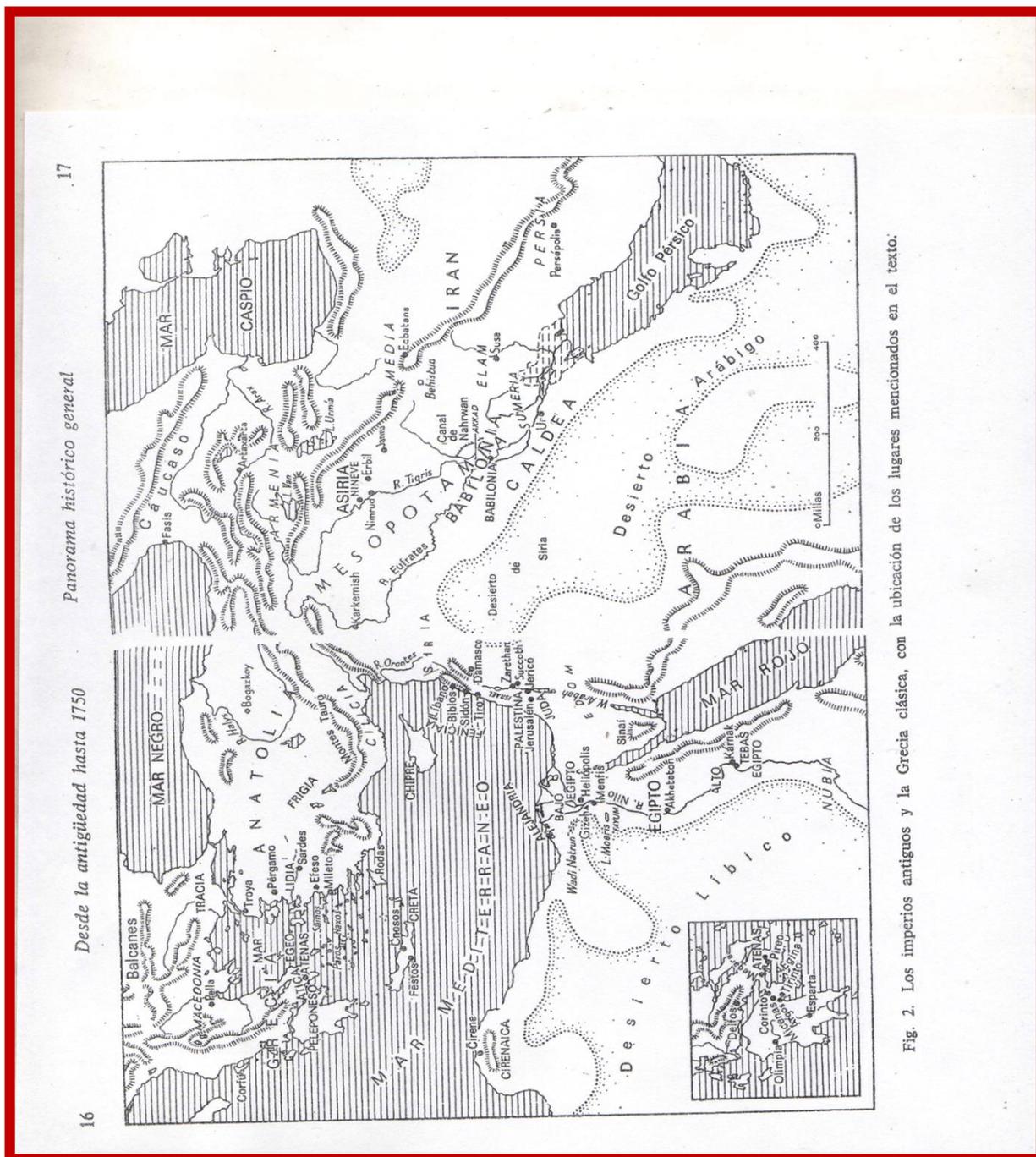


Fig. 2. Los imperios antiguos y la Grecia clásica, con la ubicación de los lugares mencionados en el texto.

¹⁹⁵ Derry, T. K. y T. I. Williams. (1997). *Historia de la tecnología*. Vol. 1. Pág. 16, 17.

ANEXO 2

FILÓSOFOS GRIEGOS PREHELÉNICOS QUE ABORDARON MATEMÁTICAS

1.- Tales de Mileto	(624 - 548 a.C.)
2.- Anaximandro de Mileto	(611 – 546 a.C.)
3.- Anaxímenes de Mileto	(585 – 524 a.C.)
4.- Pitágoras de Samos	(582 – 500 a.C.)
5.- Téano de Crotone	(siglo V a.C.)
6.- Jenófanes de Colofón	(580 – 475 a.C.)
7.- Heráclito de Éfeso	(540 – 470 a.C.)
8.- Parménides de Elea	(515 – 440 a.C.)
9.- Hipaso de Metaponto	(500 a.C.)
10.- Anaxágoras de Clazómenas	(500 – 428 a.C.)
11.- Zenón de Elea	(490 - 430 a.C.)
12.- Protágoras de Abdera	(485 – 411 a.C.)
13.- Enópides de Quíos	(¾ del siglo V a.C.)
14.- Metón de Atenas	(siglo V a.C.)
15.- Sofistas	(Siglo V – IV a.C.)
16.- Sócrates de Atenas	(470 – 399 a.C.)
17.- Filolao de Crotona	(470 – 385 a.C.)
18.- Teodoro de Cirene	(465 - 398 a.C.)
19.- Leusipo de Abdera o Metos	(460 – 370 a.C.)
20.- Hipócrates de Quíos	(460 a.C.)
21.- Demócrito de Abdera	(460 – 370 a.C.)
22.- Hipias de Elis o Elide	(449 – 350 a.C.)
23.- Platón de Atenas	(427 – 348 a.C.)
24.- Teeteto de Atenas	(417 – 369 a.C.)
25.- Arquitas de Tarento	(Primer mitad del siglo IV a.C.)
26.- Dinostrato de Alopeconnesus	(390 – 320 a.C.)
27.- Leodamas de Tasos	(380 a.C.)

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 28.- Amintas de Heraclea | (Siglo IV a.C.) |
| 29.- Eudoxo de Cnidos | (390, 408 – 337, 355 a.C.) |
| 30.- Aristóteles de Estagira | (384 – 322 a.C.) |
| 31.- Menecmo de Alopeconnesus | (375, 380 – 325,320 a.C.) |
| 32.- Calipo de Cizico | (370 – 300 a.C.) |
| 33.- Licipo de Sición | (370 – 318 a.C.) Famoso escultor. |
| 34.- Autólico de Pítaneo o Pitania | (360 – 290 a.C.) |

ANEXO 3

Euclides situado en un mapa cronograma¹⁹⁶

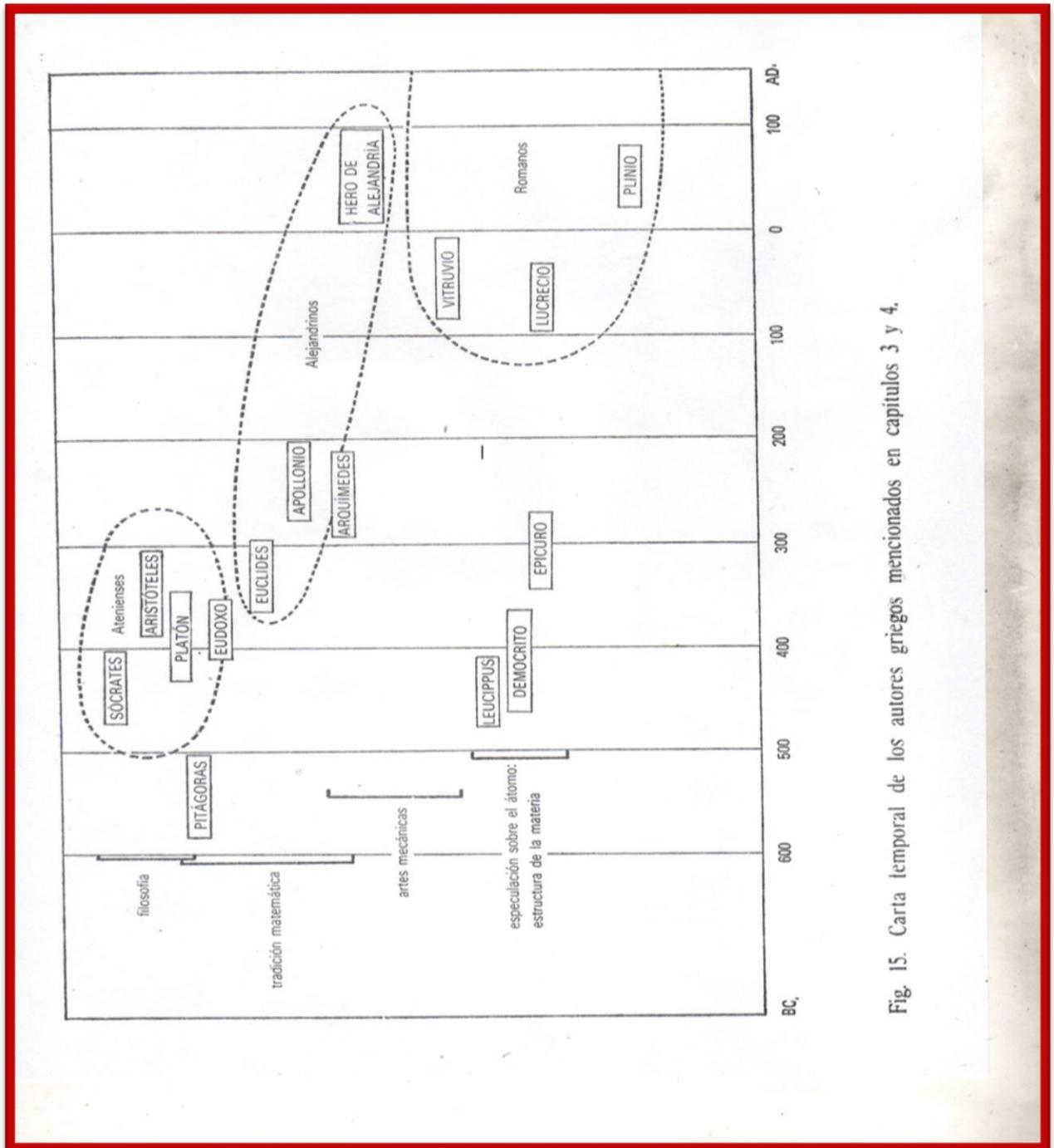


Fig. 15. Carta temporal de los autores griegos mencionados en capítulos 3 y 4.

¹⁹⁶ Pacey, A. (1980). *El laberinto del ingenio. Ideas e idealismo en el desarrollo de la tecnología.* Pág. 85.

ANEXO 4

FILÓSOFOS, MATEMÁTICOS Y CIENTÍFICOS DE ALEJANDRÍA

ÉPOCA HELÉNICA

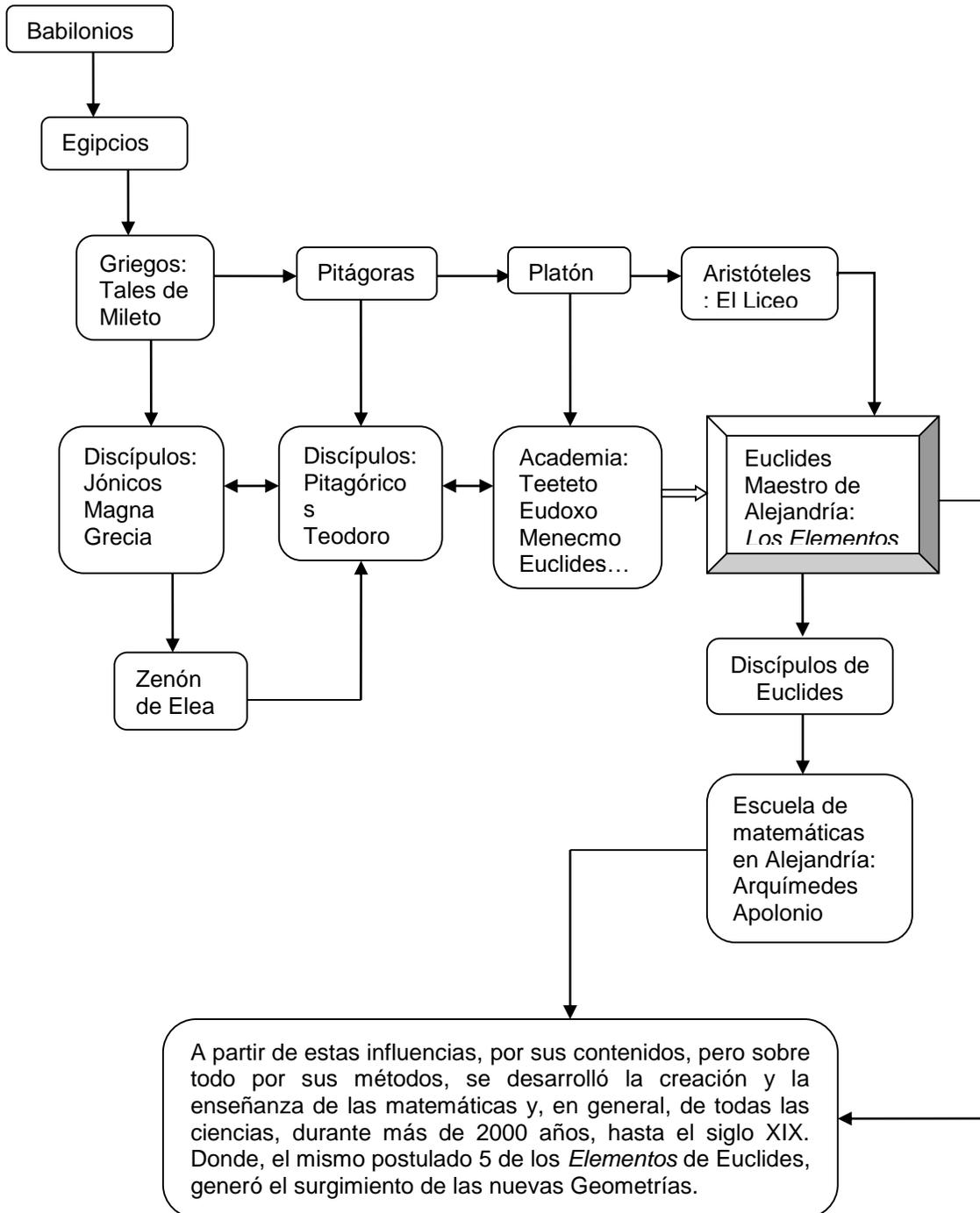
- Alejandro Magno o Alejandro III de Macedonia (356 – 323 a.C.)
- Ptolomeo I. Sóter (368 - 283 a.C.). En el 305 se proclama Rey.
- Biblioteca y Museo de Alejandría (300 a.C. – 416 d.C.).
- En Alejandría las ciencias y la matemática se desprenden de la filosofía.

1.- Dicearco de Mesina	(355 – 285 a.C.)
2.- Dinócrates de Rodas	(Siglo IV a.C.)
3.- Eudemo de Rodas	(350 - 290 a.C.)
4.- Diódoro Kronos	(¿ - 296 a-C.)
5.- Demetrio Poliorcetes	(337 - 283 a.C.)
6.- Herófilo de Calcedonia	(335 – 280 a.C.)
7.- Euclides de Alejandría	(325 – 265 a.C.)
8.- Aristilo de Alejandría	(Finales del Siglo IV – III a.C.)
9.- Sóstrato de Cnido	(Finales del Siglo IV - III a.C.)
10.- Aristeo de Alejandría	(Finales del Siglo IV - III a.C.)
11.- Cares de Lindos	(Finales del Siglo IV - III a.C.)
12.- Aristarco de Samos	(320, 310 – 250, 230 a.C.)
13.- Timocares de Alejandría	(320 – 260 a.C.)
14.- Erasítrato de Ceos	(304 - 250 a.C.)
15.- Cleanto de Asos	(301 - ? a.C.)
16.- Arquímedes de Ciracusa	(287 – 212 a.C.)
17.- Ctesibio de Alejandría	(285 - 222 a.C.)
18.- Nicomedes	(280 – 210 a.C.)
19.- Eratóstenes de Cirene	(276 – 194 a.C.)
20.- Naucrates	(Siglo III a.C.)
21.- Apolonio de Perga	(262 – 190 a.C.)
22.- Filón de Bizancio	(260-180 a.C.)

23.- Aristarco de Samotracia	(216 – 144 a.C.)
24.- Zenodoro	(200 – 140 a.C.)
25.- Hiparco de Nicea o de Bitinia	(190 – 120 a.C.)
26.- Hipsicles de Alejandría	(180 – 120 a.C.)
27.- Dionicio de Tracia	(170 – 90 a.C.)
28.- Zénon de Sidón	(150 – 70 a.C.)
29.- Posidonio de Apamea	(135 – 51 a.C.)
30.- Andrónico de Cirrus	(Finales del Siglos II – I a.C.)
31.- Teosio de Bitinia o Tripoli	(Finales del Siglos II – I a.C.)
32.- Diodoro Sículo o de Sicilia	(Siglo I a.C.)
33.- Sosígenes de Alejandría	(Siglo I a.C.)
34.-Marco Vitrubio Polión de Formia	(Siglo I a.C.)
35.- Filón de Alejandría	(20 a.C. – 50 d.C.)
36.- Herón de Alejandría	(10 – 70 d.C.)
37.- Nicómaco de Gerasa	(60 – 120 d.C.)
38.- Menelao de Alejandría	(70 – 130 d.C.)
39.- Claudio Ptolomeo de Hermia	(85 – 165 d.C.)
40.- Galeno de Pérgamo	(130 - 200 d.C.)
41.- Ammonio Saccas	(175 - 242 d.C.)
42.- Diofanto de Alejandría	(200 – 284 d.C.)
43.- Plotino de Licópolis	(205 – 270 d.C.)
44.- Porfirio de Apamea o Siria	(232 – 304 d.C.)
45.- Pappus de Alejandría	(290, 300 – 350 d.C.)
46.- Teón de Alejandría	(335 – 405 d.C.)
47.- Hipatia de Alejandría	(370 – 415 d.C.)
48.- Proclo de Bizancio	(410 – 485 d.C.)
49.- Eutocio o Eutoquio de Escalona	(480 – 540 d.C.)
50.- Simplicio de Cilicia	(490 - 560 d.C.)

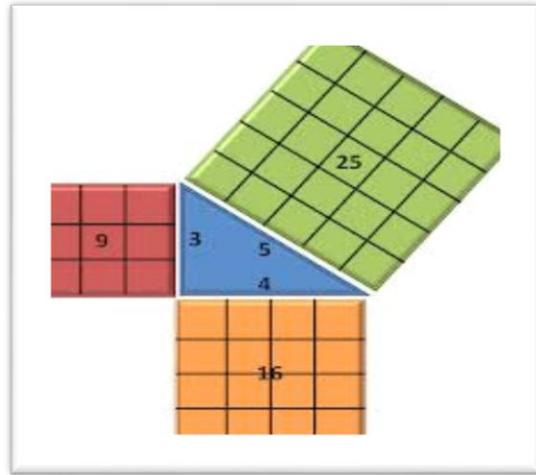
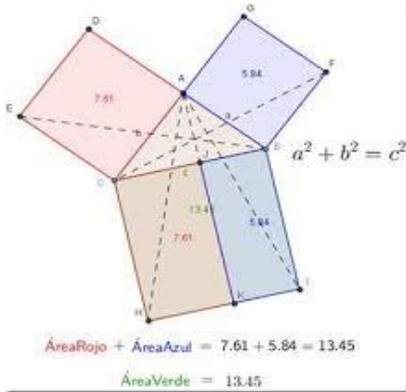
ANEXO 5

DIAGRAMA DE LA GÉNESIS Y LAS RELACIONES DE ENSEÑANZA Y TRANSMISIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO, QUE INFLUYERON Y APORTARON, EN LA CREACIÓN DE LOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

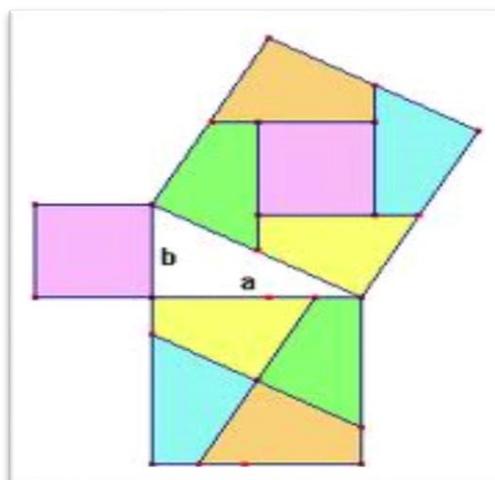
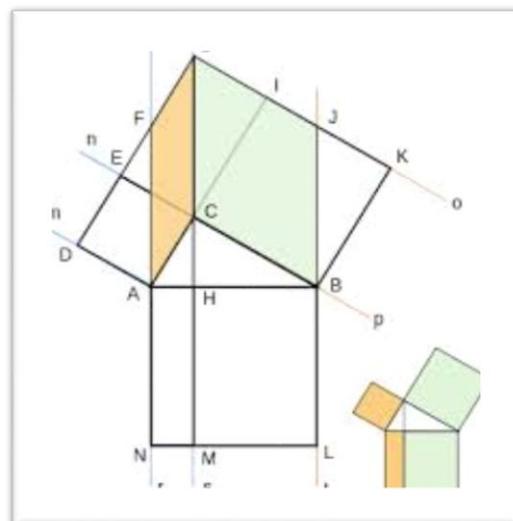
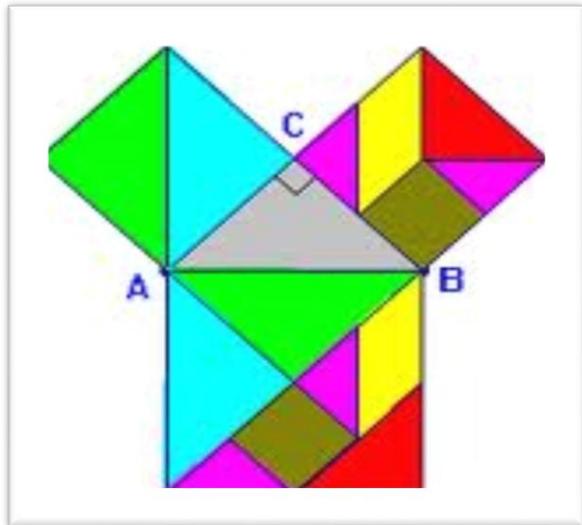


ANEXO 6

DIFERENTES FORMAS DE LAS REPRESENTACIONES DIDÁCTICAS DEL TEOREMA DE PITÁGORAS¹⁹⁷



¹⁹⁷ En: <https://www.google.com.mx/search?hl=es419&site=img&tbm>



BIBLIOGRAFÍA

- Abbagnano, Nicola. (1996). *Diccionario de Filosofía*. México. Fondo de Cultura Económica.
- Abbagnano, N. y A. Visalberghi. (1987). *Historia de la Pedagogía*. México. Fondo de Cultura Económica.
- Argüelles, J. (1989). *Historia de la Matemática*. Madrid, España. Ediciones Akal.
- Aróstegui, J.M., Bustamante, A., Cherniak, V., Guerásimov, Y., Mateo, J., Montagne, G., Nikiforov, A., Ogurstov, A., Rodríguez, S.M., Ruzavin, G., Sadovsky, V. y V. Schviriev (1981). *Metodología del conocimiento científico*. URSS: Academia de Ciencias de la URSS, Edit. Presencia Latinoamericana.
- Ausubel, David P. (1982). *Psicología Educativa*. Editorial Trillas. México.
- Baldor, A. (1992). *Álgebra*. México. Publicaciones Cultura.
- Bell, E.T. (1999). *Historia de las Matemáticas*. México. Fondo de Cultura Económica.
- Bernal, John D. (1979). *Historia social de la ciencia*. Barcelona, España: Editorial Península.
- Boyer, Carl B. (2001). *Historia de la matemática, ciencia y tecnología*. Editorial Alianza.
- Cantoral, R., Farfán R. M., Cordero F., Alanís J. A., Rodríguez R. A. y A. Garza. (2003). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México. Editorial Trillas.
- Carroll, V. Newsom. (1966). *Disertaciones matemáticas. La enseñanza de la ciencia matemática*; Editorial Diana: México.
- Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. España. Editorial Siglo XXI.
- Crombie, A. C. (1983). *Historia de la ciencia: de San Agustín a Galileo*. Tomo I y II. Madrid, España: Edit. Alianza Universidad.
- Davis, P. J. y Hersh R. (1980). *Experiencia matemática*. México.

- Derry, T. K. y T. Williams. (1997). *Historia de la Tecnología, desde la antigüedad hasta 1750*. México. Editorial Siglo XXI.
- Dilthey, W. (1996). *Historia de la filosofía*. México. Fondo de Cultura Económica.
- Durant, Will. (1983). *Historia de la filosofía*. México: Editorial Diana.
- Editorial Cumbre. (1982). *Enciclopedia de las ciencias*. México.
- Editorial Planeta. (1986). Enciclopedia Temática Planeta. Tomo: “*Historia de las ideas y de las creencias*”, Tomo: “*Historia de la ciencia de la matemática, astronomía, astronáutica e informática*”. España. Editorial Planeta.
- Enciclopedia Mensajero Bilbao. (1978). Enciclopedia “*Las matemáticas, las ideas, las obras y los hombres*”. Bilbao. España.
- Eherenfried Hofmann, Joseph. (1978). *Historia de la matemática*, Tomo I, II y III. Editorial UTEHA: México.
- Euclides. *Los elementos de geometría*. Introducción y versión de García Vacca, J. D. (1992). Tomo I, II, III, IV, V. México. UNAM.
- Garza Mercado, Ario. (1973). *Manual de técnicas de investigación*. El Colegio de México: México.
- Grimberg, Carl (1973). *Historia Universal Daimon: Grecia*. Tomo 2. Barcelona, España: Edit. Daimon
- Guthrie, W. K. C. (2010). *Historia de la Filosofía Griega. Tomo V*. España. Edit. GREDOS.
- Hall, Rupert A. (1985). *La Revolución Científica 1500 – 1750*. Barcelona, España. Editorial Crítica, Grijalbo.
- Hirschberger, J. (1982). *Breve Historia de la Filosofía*. Barcelona España. Editorial Herder.
- Kuhn, Thomas S. (1997). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: Editorial Fondo de Cultura Económica.
- Lara Aparicio, Miguel. (1991). *Los matemáticos griegos*. México. Universidad Autónoma de Querétaro.
- Lecona Uribe, M. E. (1990). *Geometría Euclideana*. México. Universidad Autónoma de Querétaro.

- Levi-Strauss, Claude. (1992). *El Pensamiento Salvaje*. México. Fondo de cultura económico.
- Martínez, Elías. (1999). *Elaboración de proyectos, desarrollo de trabajos y redacción de informes de investigación educativa*. Querétaro, Qro. México: Edit. Elías Martínez Patiño.
- Morris, Kline. (1980). *El Fracaso de la Matemática Moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* México. Edit. Siglo XXI.
- Mason, Stephen F. (1997). *Historia de las ciencias*. Tomo I. México: Edit. Alianza.
- Ontiveros, Josefina (1994). *El fracaso de la enseñanza de las matemáticas en bachillerato*. México. Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ).
- Pacey, Arnold (1980). *El laberinto del ingenio*. Barcelona, España: Edit. Gustavo Grill.
- Pastor, J. y J. Babini,. (1997). *Historia de la Matemática*. Barcelona, España. Editorial Gedisa.
- Perero, Mariano. (1996). *Historia e historias de matemáticas*. México. Editorial Iberoamericana.
- Platón. (2007). *Diálogos*. México. Editorial Porrúa.
- Publicaciones Diagonal Santillana para Profesores. (1983). *Diccionario de las Ciencias de la Educación*. Tomo I y II. México. Editorial Santillana S.A.
- Reale, Giovanni y D. Antiseri. (2001). *Historia del pensamiento filosófico y científico*. Tomo I. Barcelona, España: Edit. Herder.
- Serres, Michel. (1996). *Los Orígenes de la Geometría*. México. Editorial Siglo XXI.
- Sestier, Andrés. (1996). *Historia de las matemáticas*. México. Editorial Limusa.
- Schrödinger, Ervin. (1997). *La Naturaleza y los griegos*. METATEMAS 48. Barcelona, España. Tusquets Editores.
- Solana, Dueso [J.](#) (2008). *Ciencia, pensamiento y cultura*. ISSN 0210-1963, [Nº 731, 2008](#) (Ejemplar dedicado a: Sociología del saber: el papel de las comunidades especializadas en el proceso de conocimiento / coord. por Goberna Falque J. R. págs. 413-422.

- Ströbl, Walter. (1986). *Diccionario Matemáticas*. México. Editorial E.D.I.P.L.E.S.A.
- Thomson, George. (1988). *Los Primeros Filósofos*. México. UNAM.
- Universidad Nacional Autónoma de México: (1988) *Mathesis: Vol. IV, Núm. 4*; (1989) *Mathesis. Vol. V, No. 1*; (1990) *Mathesis Vol. VI, No. 2*. Revista de divulgación e información en filosofía e historia de las matemáticas; Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias de la UNAM. México.
- Waldegg, Guillermina –coordinadora-. (1995). *Procesos de enseñanza y aprendizaje II*, Vol. 2. Colección “La investigación educativa en los ochenta, perspectivas para los noventa; Fundación SNTE para la cultura del maestro mexicano: México.
- Werner, Jaeger. (2010). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. México. Editorial Fondo de Cultura Económica.
- Willerding, Margaret, F. (1969). *Conceptos matemáticos. Un enfoque histórico*. Editorial CECSA: México.
- Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Madrid, España. Editorial Siglo XXI.
- Xirau, Ramón. (1995). *Introducción a la Historia de la Filosofía*. México. UNAM.

FUENTES ELECTRÓNICAS

Título de página: Biografías y Vidas; Artículo (nombre): Biografía de Anaxágoras,

En: <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/anaxagoras.htm>

Última revisión: mayo 2013.

Título de página: Wikipedia, la enciclopedia libre; Artículo (nombre): Aristófanes.

En: <http://es.wikipedia.org/wiki/Arist%C3%B3fanes>

Última revisión: mayo 2013.

Título de página: Wikipedia, la enciclopedia libre; Artículo (nombre): Metón;

En: <http://es.wikipedia.org/wiki/Met%C3%B3n>

Última revisión: junio 2013.

Título de página: Conductitlan. Asociación Oaxaqueña de Psicología A.C.;

Autor: Jorge Everardo Aguilar Morales; Artículo (nombre): La educación en Grecia;

En: http://www.conductitlan.net/historia_educacion_grecia.ppt

Última revisión: julio 2013.

Título de página: Matemática, Filosofía y Educación. U Costa Rica; Autor: Ruiz

Zúñiga Ángel; Artículo: Historia y Filosofía de las Matemáticas;

En: www.cimm.ucr.ac.cr/aruz

<http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Secciones/Indice.htm>

Última revisión: septiembre 2013.

Título de página: Constructivismo. U de Matanzas Cuba; Autor: Mazario Triana

Israel, Mazario Triana Ana. C.; Artículo: Constructivismo y Educación.

(Monografía). El constructivismo: Paradigma de la escuela Contemporánea.

En: www.bibliotecas.cu/gSDL/collect/libros/index/assoc/HASH2243.dir/doc.pdf

Última revisión: octubre 2013.

Título de página: Google-Imágenes; Artículo (nombre): Teorema de Pitágoras

En: <https://www.google.com.mx/search?hl=es419&site=img&tbm>

Última revisión: octubre 2013.