UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
Facultad de Ingeniería

MAESTRÍA EN INGENIERÍA MATEMÁTICA

DASARROLLO DE APLICACIONES INFORMÁTICAS CON MODELACIÓN MATEMÁTICA ORIENTADAS AL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INTEGRAL A NIVEL LICENCIATURA

TESIS
Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

MAESTRO EN MATEMÁTICAS APLICADAS
Presenta:

Víctor Guevara Basaldúa
Dirigida por:

Dr. Víctor Larios Osorio

Sinodales

Dr. Víctor Larios Osorio **Presidente**	**Firma**
Dra. Teresa Guzmán Flores **Secretaria**	**Firma**
Dr. Carlos Cortés Zavala **Vocal**	**Firma**
M.D.M Patricia Isabel Spíndola Yáñez **Suplente**	P. I. Spíndola Y. **Firma**
Dr. Roberto Augusto Gómez Loenzo **Suplente**	**Firma**

Dr. Gilberto Herrera Ruíz **Director de la Facultad de Ingeniería**	**Dr. Luis Gerardo Hernández Sandoval** **Director de Investigación y Posgrado**

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Septiembre, 2010
México

RESUMEN

Ante el gran reto que se tiene en Matemática Educativa sobre enseñanza-aprendizaje del Cálculo Integral, hemos realizado una propuesta didáctica diseñada con ayuda de un software para subsanar varios de los problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de esta materia tan importante. Con este software se pretenden llevar los conceptos más básicos de la Integral Definida hacia los estudiantes de primeros semestres en licenciatura, así como algunos problemas de aplicación que pudieran ser atractivos, de manera que el Cálculo pueda ser visto como una herramienta para solucionar situaciones cercanas a la vida real y así se vuelva necesario su estudio en alumnos de ingeniería principalmente. Para reforzar las estrategias de enseñanza del Cálculo Integral se parte de la premisa de que, tanto la Visualización como la Modelación Matemática son pieza fundamental para el aprendizaje de ésta disciplina, puesto que los conceptos están ligados, en la mayoría de los casos, a representaciones e interpretaciones gráficas que los alumnos no ven con claridad dentro de un salón de clases. Al mismo tiempo que los alumnos aprenden cómo se utiliza el software, también aprenden y refuerzan los conceptos involucrados en el manejo de la Integral Definida, basados en la definición a través de Sumas de Riemann. La estructura principal de la propuesta se fundamenta en la Visualización geométrica de las funciones involucradas en la definición de la Integral y en aquellas que se pueden construir modelando un problema real al que se le quiere dar una solución muy aproximada. Esto se debe a que las consideraciones de varios ingenieros acerca de las aplicaciones sugieren el estudio de problemas reales en los cuales sea necesaria la implementación de los conceptos más fundamentales, no sólo del Cálculo Integral, sino de todas las ramas de la matemática en general.

Palabras clave: Visualización, Modelación Matemática, Matemática Educativa, Software.

SUMMARY

There is in Mathematics Education the big threat on teaching-learning of Integral Calculus. We propose a didactic sequence supported with a software for alleviate very much problems connected with teaching and learning of this important subject. With software we pretend take on the basic more concepts of Defined Integral to students of first courses on high school, so someone application problems, so that Calculus can see with a tool for solve real problems y will be necessary you study in students, principally, of enginery. For increase the strategy of teaching in Calculus, we need such Mathematical Model as Visualization since are fundamental components for learning this discipline, because, concepts are linked at graphics interpretations and representations that students not seen with clarity in your classroom. At same time that students learn at working with software, they also learn and reinforce the concepts involucrate in Defined Integral, related in the definition around of Riemann Sums. The principal structure of proposal are based on geometric Visualization of involucrate functions in definition of the Integral and those that be construct modeling a real problem with a approximate solution. This is because considerations of much engineer in the applications suggest study of real problems that implement concept more fundamentals, not only integral Calculus: of all substances in general mathematics.

Key words: Visualization, Mathematical Model, Mathematics Education, Software

DEDICATORIAS

A mi nenita. A quien quiero mucho desde que sabía que iba a formar parte de nuestra familia.

A mi hijo Dylan, mi primer gran motivo para continuar con todo esto.

A mi esposa Nora, a quien nunca dejaré de amar.

A mis padres, Ángel e Inés, por su gran ejemplo de vida, humildad y responsabilidad.

A mi hermana Ceci, por su apoyo y aliento en los momentos difíciles.

A mis hermanos y hermanas, por su desinteresado apoyo en todo momento.

A todas las personas que me animaron a continuar a pesar de todos los obstáculos.

Las dificultades y los obstáculos son el metro con el cual se mide el éxito de los verdaderos campeones.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor Víctor Larios, por haberme permitido desde un principio trabajar con él. Por sus atinadas observaciones y consejos sobre el contenido de la tesis. Por hacerme participar en eventos nacionales e internacionales para conocer más gente en el área de las tecnologías y, sobre todo, por su amistad.

A mis sinodales, por su apoyo y confianza.

A Miguel Ángel Martínez Prado por haberme ayudado con la construcción del software y por haberme proporcionado su confianza hasta los últimos momentos de la maestría. Así mismo a Juan Carlos Mota, quien por medio de Migue, estuvo siempre al pendiente de las fallas del software y quien contribuyó en gran parte a la terminación del mismo.

A todos mis maestros en la maestría, en especial al Dr. Gilberto Herrera, por su atinada presión ejercida para concluir a tiempo con el proyecto.

Al CONACYT, ya que sin su ayuda no hubiera sido posible concluir con este proyecto académico y de formación.

ÍNDICE

Página

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN

Cada vez más, es evidente el rol que juegan las computadoras en el mundo contemporáneo: han invadido casi todas las áreas del desarrollo humano. Hoy en día, entre otras cosas, existen computadoras cada vez más veloces y potentes, se están difundiendo ampliamente las redes, los precios son más accesibles, hay un inmenso desarrollo de software, etc.
Ángel Balderas, 2001.

1.1 INTRODUCCIÓN

Las computadoras han venido a cambiar radicalmente el mundo que se conocía hace aproximadamente medio siglo. Su incursión dentro de los campos sociales ha sido con el objetivo, entre otras cosas, de resolver problemas que el hombre jamás se hubiera imaginado resolver o peor aún; *jamás hubiera podido resolver*. Esto ha dado pie para que la mayoría de las actividades del ser humano sean "más sencillas de realizar" y por tanto, las personas puedan producir más y con mayor calidad que hace 100 años. En lo que se refiere al contexto de la educación, las computadoras, la creación de software educativo y el diseño de herramientas virtuales, entre otras cosas, apuestan por una mejora en la enseñanza y en el aprendizaje de las disciplinas que son flexibles para su aplicación con ayuda de la tecnología del siglo XXI. A diferencia de hace unos 30 años, ahora se puede ver software matemático que resuelve grandes operaciones en cuestión de segundos, que calcula o aproxima integrales, ecuaciones diferenciales, transformadas de Laplace, que construye gráficas de funciones elementales y no elementales, etc., actividades o procesos matemáticos que literalmente, *a mano*, sería complicadísimo realizarlos. Cabe señalar que estos software tienen la propiedad de dar resultados concretos sin mayor explicación del cómo es que calculan o resuelven operaciones algebraicas con grados de dificultad considerables (particularidad de los software tipo *CAS* (*Computer Algebra Systems = Software de Cálculo Algebraico*)).

Sin embargo, y ante los alcances y las ventajas que puede ofrecer un software especializado en alguna área de la enseñanza de las matemáticas, se propone la creación e implementación de uno que pueda fortalecer, tanto la enseñanza, como el aprendizaje del Cálculo Integral, específicamente la definición de Integral Definida a través de Sumas de Riemann. Es sabido que software para Cálculo como Derive, Calculus, DPGraph, o para Geometría Dinámica como Cabri, Geogebra, Geómetra, entre otros, han sido de gran provecho para quienes los han utilizado en sus grupos de estudiantes (para un ejemplo ver Hitt, F. y Cortés, C. (2001)). Sin embargo, por ejemplo, hablando de Cálculo Integral y la definición de Integral Definida a través de Sumas de Riemann, no se ha encontrado software que se apegue a las necesidades particulares para enseñar dichos conceptos (esto no quiere decir que ninguno de los software mencionados anteriormente puedan ser utilizados con este fin, más bien que no lo tienen como principal objetivo). Es por ello que se ha dado la tarea del diseño e implementación de un software que ayude al aprendizaje y aplicación de los conceptos ligados en esta área del Cálculo Integral.

Otro de los factores que alentó este trabajo, es índice de reprobación que se da en ésta materia de Cálculo en los primeros semestres de licenciatura (ver más en el siguiente apartado), índice provocado por otros factores importantes como la forma en que se dan las clases, la preparación de la planta de profesores sobre el tema, las actividades o secuencias didácticas desarrolladas para el aprendizaje, los medios de transmisión del conocimiento o de los conceptos propios en Cálculo, etc., factores que inciden de manera directa sobre el funcionamiento de cualquier institución de educación, entendiendo como institución al conjunto de elementos como el alumno, el profesor, la familia, la instancia administrativa, etc., presentes en una escuela. Investigaciones realizadas por Barrera (2002) y Dolores (2000) apuntan que problemas como los mencionados pueden deberse en gran medida a la manera tradicional de impartir clases, así como al contenido curricular o a la preparación del profesorado sin tomar en cuenta las nuevas alternativas emergentes sobre la enseñanza de las matemáticas y en general de las ciencias.

Aparte del software, se han diseñado algunas actividades que pueden ser consideradas como modelo para la aplicación de la herramienta. La idea general es que en su conjunto, el software y las actividades, detonen en los estudiantes más de una de las siguientes características: gusto por el software, buen manejo de las herramientas dentro del software, aprendizaje significativo sobre conceptos esenciales de Sumas de Riemann e Integral Definida, convicción por el uso de software dinámico y didáctico para el aprendizaje, primero en matemáticas y después en todas las disciplinas del conocimiento.

En capítulo II se mencionan problemas relacionados con el aprendizaje del Cálculo, así como algunos de los intentos por la introducción de la Tecnología de la Información y la Comunicación (TIC)[1] en algunas partes del mundo dentro de diversas ramas de las matemáticas.

En el capítulo III se mencionan tanto las actividades que se diseñaron para su aplicación con el software, así como un panorama breve sobre el funcionamiento del mismo. Al comienzo del software se dan algunos ejemplos de Modelación Matemática, los cuales pueden servir de base para entender más a fondo cuál es la intención de la actividades que se han diseñado.

Ya para el capítulo IV se muestran los resultados que se obtuvieron al aplicar el software dentro de un grupo piloto al resolver dos de las actividades que se diseñaron. También se dan algunos de los comentarios sobre las observaciones de los alumnos al trabajar los temas de las actividades con la ayuda del software.

En el capítulo V se concluye sobre lo que se obtuvo en los resultados y se da la pauta para continuar con el diseño del software para una mayor cobertura de los conceptos que se enseñan en la materia del Cálculo Integral.

---

[1] El término TIC se puede entender como un término que se utiliza actualmente para hacer a una gama amplia de servicios, aplicaciones y tecnologías, que utilizan diversos tipos de equipos y programas informáticos, y que a menudo se transmiten a través de las redes de telecomunicaciones: *Comisión de Comunidades Europeas:* Bruselas, 14.12.2001; COM (2001)770 final; p.3. [versión electrónica] [Junio 2008]

1.2 OBJETIVOS GENERALES E HIPÓTESIS DEL TRABAJO

Existen tres objetivos generales del trabajo:

- Desarrollar una aplicación informática (software) orientada al aprendizaje del Cálculo Integral y que además contenga elementos de la Modelación Matemática para que los conceptos sean mejor aprendidos.
- Implementar el software con al menos un grupo piloto de Cálculo para obtener resultados y observaciones por parte de los alumnos.
- Promover su difusión en diversas instituciones para así implementarlo como herramienta de apoyo en la enseñanza del Cálculo Integral.

Las hipótesis son las siguientes:

- Los conceptos del Cálculo Integral son más comprensibles con la utilización del software, puesto que aumenta el número de alumnos que entienden la materia.
- La claridad de la graficación y la integración de elementos visuales en el software aumenta el interés en el alumno y por lo tanto ayuda a que éste retenga los conceptos necesarios para la aplicación de la Integral Definida.

CAPÍTULO II. REVISIÓN LITERARIA

2.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Siempre se hace la pregunta: ¿cuáles serán los aportes de los conocimientos matemáticos “necesarios” para la educación y la sociedad y cómo se deben llevar a cabo dichos aportes? (Brousseau, 1999). Uno de los objetivos centrales de la Matemática Educativa consiste en elaborar descripciones del *sistema didáctico* y de los *fenómenos didácticos* que en él suceden (Dolores, 2000). Hoy en día es además importante otro cuestionamiento en ésta misma dirección: ¿cuáles son los medios que se han utilizado para responder a esta demanda inicial? Se sabe que existen estas interrogantes en todas partes donde se intenta dar una educación integral a los estudiantes de matemáticas y, en general de cualquier disciplina. Más aún, sigue siendo motivo de estudio la preocupante interrogativa del porqué las matemáticas se han visto como materia aburrida, sin interés, y como causa de deserción de un fuerte porcentaje en la mayoría de las escuelas de todos los niveles de preparación. Por otro lado, puede verse en diversos libros de educación matemática o de matemáticas cuáles son algunas de las finalidades que se persiguen al estudiar esta ciencia (para un ejemplo de esto, ver el libro de Cálculo: conceptos y contextos de James Stewart, tercera edición en la parte del Prefacio). Todos ellos explican la necesidad, para una sociedad, de que cada ciudadano disponga de una cultura matemática suficiente, y a la vez, la necesidad social de disponer de la cantidad suficiente de técnicos y de científicos para enfrentar los desafíos del futuro. Todo tiende a convencer que las matemáticas jugarán en ello un papel importante. Dichos textos explican también la importancia de las propiedades formativas inherentes a las matemáticas, tanto a nivel individual, por las capacidades que parecen desarrollar, como a nivel de la vida colectiva.

Dado que para los estudiantes, el aprendizaje de las matemáticas ha representado desde casi siempre, una dificultad considerable, se hablará un poco de ello en la materia de Cálculo Integral. Aparicio y Ávila (2006) señalan que en la vida escolar preuniversitaria o universitaria un buen número de dificultades en los estudiantes están asociadas al manejo de los conceptos básicos y no tan básicos del Cálculo Diferencial e Integral. Se ha probado inclusive que aún aquellos estudiantes que ya han llevado uno o dos cursos de Cálculo muestran serias deficiencias a la hora de trabajar con los conceptos inmersos en esta materia.

Por supuesto que esto trae consigo, consecuencias lamentables para los estudiantes que intentan un desarrollo personal y profesional dentro de una preparación científica y social importante para su vida. García (2006) menciona que una de estas consecuencias es la deserción escolar que finalmente termina por cobrar costosas facturas a la sociedad. Después presenta lo siguientes datos. Apunta que en la UNAM desertan el 30% de los 35, 000 alumnos que ingresan a alguna de las licenciaturas, y que por tal motivo la sociedad mexicana pierde 262 millones 500 mil pesos anuales en alumnos que no concluyen su carrera profesional. Añade también que un 25% de alumnos que abandonan la licenciatura, lo hacen por reprobar materias de matemáticas (principalmente Cálculo Diferencial e Integral) en los dos primeros semestres (ver también Aparicio, E. y Ordaz, M. 2006). En el caso la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), dentro de la Facultad de Ingeniería, datos de los años 2006 y 2007 indican que, en 2006, un 39% de alumnos de nuevo ingreso fueron reprobados en la materia Cálculo Diferencial e Integral[2] (*en un mismo semestre se veían "los dos Cálculos"*), mientras que en el 2007, un 42% de los alumnos de nuevo ingreso reprobaron esa misma materia; ambos porcentajes muy altos. Ya para el año 2008 se hizo un ajuste en el currículo, de manera que se separaron las materias en Cálculo Diferencial en el primer semestre y Cálculo Integral en segundo semestre, obteniendo de esta forma los siguientes datos: en la materia solo de Cálculo Diferencial se obtuvo un 23% de reprobación, mientras que en la materia de Cálculo Integral, sólo un 12%. De esta forma, haciendo cambios en el currículo, se ve una mejora considerable, sin embargo no se ha trabajado mucho con el papel que juega la enseñanza.

Cantoral (1993), citado en Zaldívar (2006) hace mención al hecho de que en el área de del Cálculo los métodos convencionales de enseñanza llevan a los profesores a cubrir de algoritmos sus cursos obteniendo poca ganancia cognitiva y repercutiendo directamente en el currículo. Moreno (2005) asienta esto añadiendo que, además, en clases tradicionales, se intenta desde los inicios aplicar los tradicionales métodos rigurosos de demostración matemática; lo cual conduce a que no se reconozcan los mecanismos de

[2] Esta materia de Cálculo Diferencial e Integral se impartía al inicio de la carrera de Ingeniería en la UAQ.

producción de los conocimientos ni la organización social en el aula, que en conjunto hacen posible tal construcción de conocimiento; es decir, como anota Cordero (2001), existe una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar.

Por otro lado, se cree que las matemáticas pueden lograr en los alumnos capacidades de razonamiento y colectividad social bastante “necesarias”. Luego entonces, el grave problema en la enseñanza de las matemáticas, particularmente en la enseñanza del Cálculo a nivel universitario, detiene ese afán de producir en las personas lo que pretende: gente capaz de enfrentar y resolver sus problemas cotidianos con la ayuda de la herramienta que se supone indispensable, las matemáticas.

2.2 ANTECEDENTES

El problema en la enseñanza de las matemáticas no es nuevo, ha estado inmerso en las escuelas desde su aparición como disciplina de enseñanza. Esto no debe sorprendernos una vez que sabemos que las matemáticas son producto del intelecto humano, es decir, forman parte de los logros culturales de la humanidad y como tal hay que verlas y enseñarlas. Con respecto a la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral, se han hecho investigaciones sobre éste problema desde hace ya algunas décadas. Por ejemplo, Barrera (2002) y Dolores (2000) han encontrado que en los cursos tradicionales de Cálculo Diferencial e Integral, se prioriza el manejo operativo de límites, reglas de derivación y de integración, sin considerar una gran variedad de situaciones que están vinculadas al concepto. Algu8nas de estas situaciones son: la noción de límite, de función, variación y noción de aproximación, minimizando así su significado geométrico y, prácticamente reduciendo a cero su relación con la variación física. Además han encontrado que el tratamiento algebraico del proceso inverso derivación e integración, se ve mediante el Teorema Fundamental del Cálculo, sin embargo, esto visualmente no es inmediato.

Se sabe que el arduo trabajo en didáctica del Cálculo, así como los proyectos de innovación en su enseñanza, han logrado incidir poco al seno de las prácticas institucionales y en las prácticas que los profesores llevan a cabo. Adquiere importancia entonces, entre otras cosas, que los profesores de nivel superior conozcan y reconozcan los aportes de las investigaciones didácticas. Para ello, se hace necesario establecer puentes entre la investigación y la docencia (ver Cabrera y Zaldivar, 2007). Con el objetivo de superar el estatus problemático de la enseñanza – aprendizaje del Cálculo Integral, se han propuesto diversas reformas. Éstas comparten algunos criterios como son: cambios en los currículos vigentes, cambios en el desarrollo profesional dentro de las universidades, en la utilización sistemática de la tecnología y de otros materiales y sobre todo, en la formación didáctica y científica de los profesores tal y como anota Moreno (2005). *En lo que respecta a éste trabajo, nosotros pretendemos incidir primeramente en el desarrollo del software y después en la capacitación de los profesores*.

Uno de los elementos por los que se ha optado, después de estas discusiones para la mejora de la enseñanza del Cálculo, es: la utilización de software para realizar operaciones complejas propias de la materia del Cálculo (límites, integrales, derivadas, etc.), cálculos que no podrían ser resueltos con la facilidad que los distintos software proporcionan. Sin embargo, por su poca idea didáctica, no es sencilla la elaboración de hojas de trabajo para que en un momento dado, este tipo de software tuviera la aceptación tanto de alumnos como de maestros con el objetivo de lograr un mejor aprendizaje de la materia del Cálculo.

Se ha visto que las clases tipos talleres dentro de las matemáticas son más atractivas para los alumnos y resultan más provechosas, puesto que los exámenes han mostrado una diferencia notable para bien, en comparación con una clase del tipo tradicional (sin apoyos tecnológicos) (ver Mochón, 2006). Cabe señalar que este tipo de clases implica la aplicación de tareas u hojas de trabajo o actividades bien diseñadas que modelan los conceptos necesarios para aprender ciertos elementos indispensables de alguna rama de las matemáticas. El mismo Mochón señala que los profesores que han llevado a cabo esto de preparar actividades con herramientas tecnológicas, nota que a sus alumnos les encanta ir al *laboratorio de matemáticas* y su comportamiento es mejor que en el salón de clases, además de que mejoran su entendimiento de conceptos aún antes de que estos temas se cubran en clase.

Empero, no es nada sencillo el diseño de actividades con herramientas computacionales, una vez que se presupone un total dominio por parte del profesor en lo que se refiere al software y a la elaboración de las prácticas de trabajo. Al respecto, Parra

(2005) cita que las prácticas docentes que se realizan dentro del salón de clases son el resultado de las creencias de los profesores respecto a la forma en que se debe llevar la enseñanza y lo que ellos aceptan como muestras de aprendizaje por parte de sus alumnos. Siendo además la fuente de dichas creencias su propia experiencia como estudiante, llevándolo, en muchas ocasiones, a repetir esquemas realizados por sus propios profesores, formándose de ésta manera un círculo *"vicioso"* difícil de superar.

Como puede verse, la problemática con la enseñanza-aprendizaje del Cálculo está siendo abordada e investigada por diferentes autores, pero ¿qué otros tipos de acciones se han hecho para atacar el problema? De una u otra manera se han implementado técnicas de enseñanza distintas a las tradicionales, se han modificado los programas en las escuelas tratando de prever a los alumnos de los conceptos más importantes del Cálculo para así obtener mejores índices de aprovechamiento y por ende, de aplicación de dichos conceptos en la vida real.

2.3 AGUNOS EJEMPLOS CONCRETOS

En España Llorens y Santoja (1997), han estudiado una parte importante respecto de las deficiencias que se detectan en los conocimientos de los estudiantes. Para ver algunos de sus resultados es importante saber cómo es que analizan los ejercicios y sus implicaciones contextuales en los alumnos.

Se hizo la pregunta: *¿porqué la siguiente integral es incorrecta?*

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$$

De los 973 estudiantes de nivel superior que contestaron la pregunta, un alto porcentaje, 78%, contestaron mal. Después, en un examen de licenciatura este mismo reactivo aplicado a 198 alumnos, se obtuvo sólo el 67% de respuestas incorrectas, el resto dejó la pregunta en blanco o dijo que era correcta. Los conceptos que se necesitan para poder interpretar esta integral no son meramente algebraicos, que es lo que normalmente aplican los alumnos (un proceso algorítmico).

Se puede ver que no se logran asimilar los objetivos de *integrar el concepto de área con el de Integral Definida.* Además de que ni siquiera se preocupa por entender qué significado tiene realizar el *algoritmo* para calcular este tipo de integrales.

Otro ejemplo aplicado por Llorens y Santoja sobre en las deficiencias del aprendizaje de la Integral es el siguiente: *calcular el área sombreada en cada una de las figuras:*

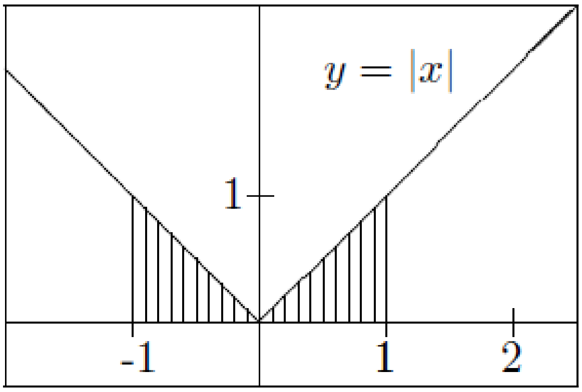


Figura 1

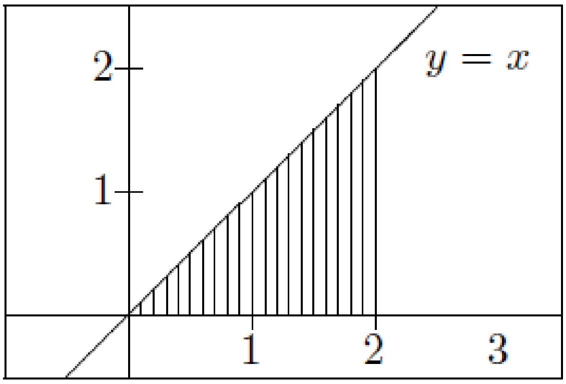


Figura 2

Sus resultados muestran que en algunos casos las respuestas son $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$ y $\int_{0}^{2} x dx$ respectivamente. Es decir, son respuestas correctas.

Sin embargo, en el primer caso, por la dificultad añadida que significa la presencia del módulo, muy frecuentemente se pudieron encontrar soluciones finales absurdas o incompletas. También señalan que en otro experimento similar, se obtiene nada más y nada menos que un 95% de estudiantes contestaron incorrectamente a la Integral:

$$\int_{-3}^{3} |x+2|\, dx\,,$$

de modo que se reafirma el diagnóstico señalado: el alumno está prefiriendo el contexto algebraico-formal al visual-geométrico sencillamente porque no los ha integrado. O como dice Duval (1998), "*los alumnos están confundiendo a los objetos matemáticos con su* *representación*". En este sentido, señala que en medio de esta confusión, lo que sucede es que, ya sea, a mediano o a largo plazo la comprensión y los conocimientos adquiridos sobre los conceptos matemáticos adquiridos llegan a ser inutilizables fuera de su contexto de aprendizaje. Vemos, por ejemplo en la primera integral, que el alumno no visualiza o no representa la gráfica de la función a integrar, en este caso $f(x)=\frac{1}{x^2}$, función que claramente no está definida en $x=0$, de manera que la integral $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ no puede calcularse. La mayoría está aplicando un procedimiento y nada más, sin ni siquiera preocuparse por entender lo que ello significa. Un resultado más aproximado podría darse si el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación fuera suficiente como para enriquecer el significado, el conocimiento, la comprensión del objeto ($\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$) y al mismo tiempo su complejidad (ver D`Amore, 2006).

Tal parece que la apuesta por mejorar los problemas con el aprendizaje del Cálculo gira en torno al aspecto de la Visualización. Cordero (2005), señala que las investigaciones en Matemática Educativa que han sido llevadas a cabo en la materia del Cálculo muestran que el estatus y la naturaleza de sus conceptos tienen un énfasis significativo en los aspectos formales dejando de lado otras dimensiones. De ésta manera surge la necesidad de crear alternativas de aprendizaje. A continuación se presentan uno ejemplos de ellas (obtenidos de Cantoral, Acuña y Calvillo, 2006): *sabiendo que los procesos de integración y derivación son inversos se puede formular un par de actividades que llevan al estudiante a entender porqué esto es así*. Los ejemplos son:

Si se tiene una función cuya gráfica es como la que se muestra en seguida,

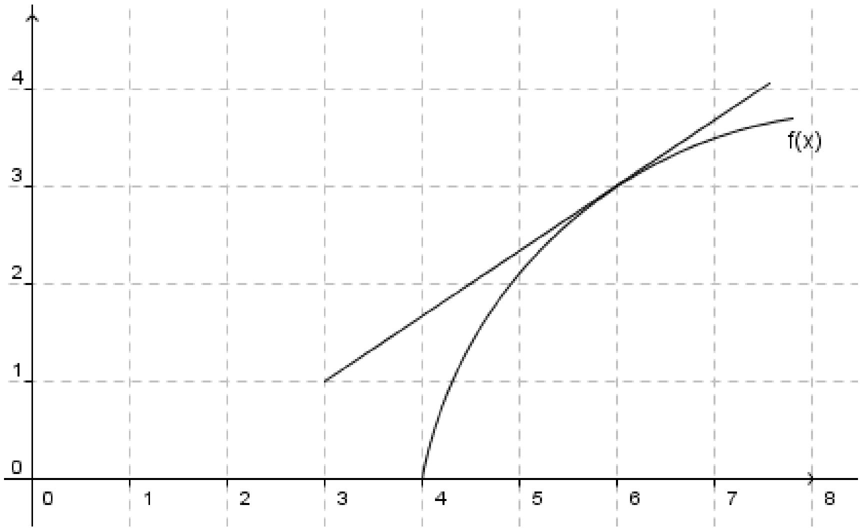


Figura 3.

¿Cuál es la derivada de la función en x = 6? Justificar la respuesta.

a) 6 b) 3 c) 2 d) 1

Si *f(x)* es una función par, cuya gráfica es

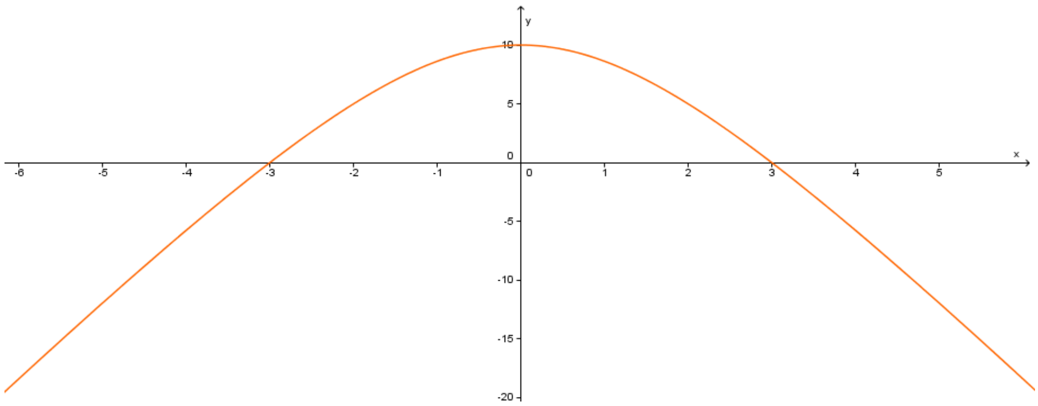


Figura 4.

considera que: i) $\int_0^3 f(x)dx = 18$ y ii) $\int_3^6 f(x)dx = -36$ contesta las preguntas:

a) ¿Cuál es el área bajo la curva de *f(x)* en [0, 3]?

b) ¿Cuál es el área bajo la curva de *f(x)* en [-3, 0]?

c) ¿Cuál es el área bajo la curva de *f(x)* en [-3, 3]?

Este tipo de actividades pueden ayudar a que, problemas como los que han encontrado Santoja y Llorens en sus investigaciones, sean cada vez menos.

También aquí en México, como antecedente importante para en lo que se refiere a la utilización de elementos como la calculadora, la computadora y las nuevas tecnologías para el aprendizaje de las ciencias en general, se han presentado varios avances y hallazgos significativos de una serie de proyectos educativos y de investigación, con el objetivo de poner en práctica herramientas computacionales en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias en escuelas secundarias. En 1997, con el apoyo de la Secretaría de Educación Pública se inició un proyecto educativo nacional con el fin de utilizar diversas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas. Debido al éxito obtenido con la utilización de la hoja de cálculo en el año 2000, se decidió implementar a otras áreas de las ciencias naturales. El modelo pedagógico construido para este proyecto consiste de varios componentes importantes, los cuales se señalan a continuación (debemos mencionar que este modelo no es sólo apropiado para las aulas que cuentan con computadoras, sino que también puede ser muy útil para un aula normal):

• Los estudiantes se vuelven el elemento más importante del salón de clases. A través de una participación activa y de su propia reflexión, construyen conceptos y desarrollan habilidades. El siguiente punto explica cómo se logra esto.

• El trabajo de los estudiantes se dirige mediante "hojas de trabajo". Con cada una de ellas, el objetivo principal es guiarlos a "descubrir" y construir una noción particular a la que ella se refiere (a esta idea central le llamamos su "objetivo didáctico"). Estos objetivos didácticos corresponden justo a lo que el profesor está interesado en que sus alumnos aprendan.

• La comunicación es un elemento muy importante en el proceso de aprendizaje. Debido a ello, el trabajo se realiza en grupos de dos o tres estudiantes, lo cual fomenta el intercambio de ideas entre ellos.

• El papel del profesor en el salón de clases es primordial. Dispone de tres maneras diferentes de participar en el proceso de aprendizaje de sus estudiantes:

a) Mediante el diseño de hojas de trabajo con su objetivo didáctico.

b) Dentro del salón de clases, con su apoyo al trabajo de los estudiantes.

c) Con discusiones de todo el grupo para hacer resaltar las ideas más importantes de las hojas de trabajo (aun aquí, el profesor debe ser sólo guía de la discusión y dejar que sus alumnos tomen una participación activa) (Mochón, 2006).

Otro trabajo importante, es el que se ha venido haciendo por la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México llamado "Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemáticas". Como su nombre lo dice, en el seminario se intercambian experiencias, puntos de vista, enfoques teóricos y acercamientos prácticos relativos al uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en el ámbito del Sistema Educativo Nacional. Además de ello y gracias a las colaboraciones de los participantes en el seminario y de gente interesada en el tema, se han hecho algunas aportaciones escritas que contienen experiencias y propuestas didácticas sobre la tecnología y las matemáticas, tal es el caso de "Reflexiones Sobre el Aprendizaje del Cálculo y su Enseñanza" (Cortés, C. y Hit, F., 2005). Dentro del apartado del libro, el capítulo titulado "La Integral Definida. Una propuesta de enseñanza utilizando el Derive", (Camacho, M., Socas, M. y Depool, R., 2005), artículo que parte del problema cásico de las cuadraturas utilizando el Derive, esto es, se calcula el área limitada por una curva con el eje de las abscisas en el sentido de distintas aproximaciones para posteriormente introducir el concepto de Integral Definida. El concepto se introduce desde una perspectiva gráfica y numérica, desglosando paso a paso los distintos procedimientos de aproximación del área limitada por la curva y el eje de las abscisas.

Otro proyecto, también español, denominado Descartes se desarrolla a partir de 1998, basado en un proyecto anterior, Atenea (1985). Dicho proyecto tiene el objetivo de implementar applets sobre matemáticas básicas y avanzadas que estén presentes en un acceso web. Cabe señalar que es uno de los avances más notorios en relación a lo que el concepto de Visualización necesita afianzar para obtener un mayor acercamiento con los conceptos manejados, por ejemplo en Cálculo Integral. La manipulación de objetos y al mismo tiempo la Modelación de conceptos es lo que le da fuerza a éste entorno de trabajo vía la computadora, entorno que, para empezar ya es un atractivo más para los estudiantes de matemáticas. Las siguientes imágenes muestran un pequeño entorno de los que son los applets y se ve claramente el diseño para poder ser modificado y manipulado según las necesidades de los alumnos o maestros.

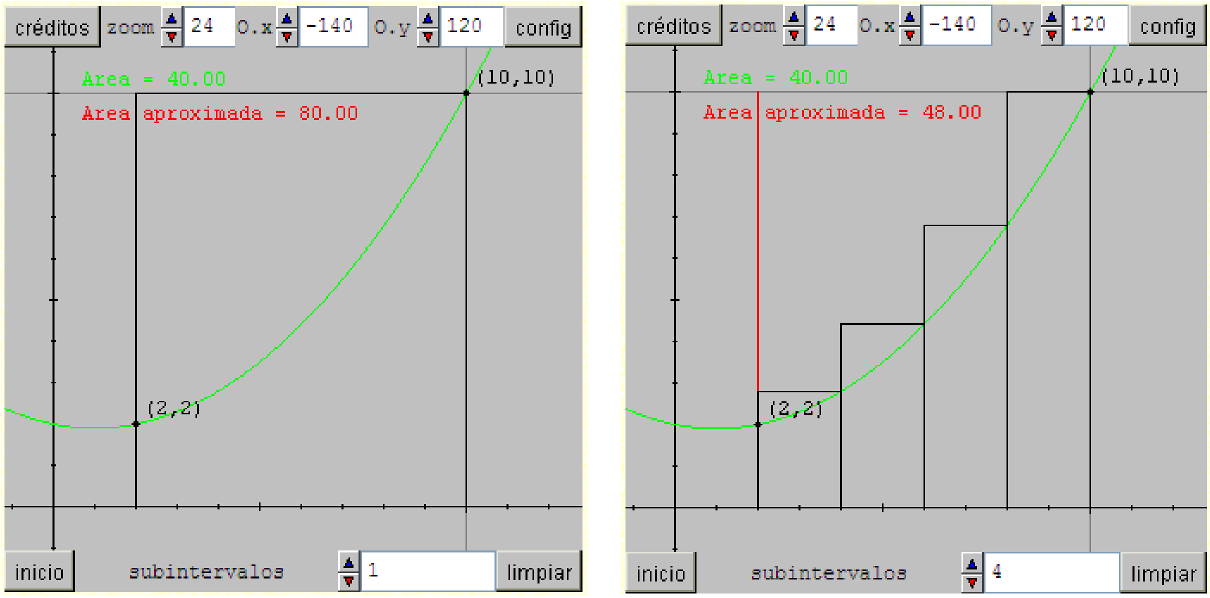


Figura 5.

Aunque el proyecto Atenea es pensado originalmente para adultos y educación especial, ya se aprecia una riqueza visual que atrae a los estudiantes. Es precisamente lo que se promueve con la Visualización además de preparar buenas actividades didácticas. Veamos que el diseño de la siguiente presentación a través de la página web resulta incluso hasta más interactiva que lo que se puede dar en una clase cotidiana de ejes coordenados.

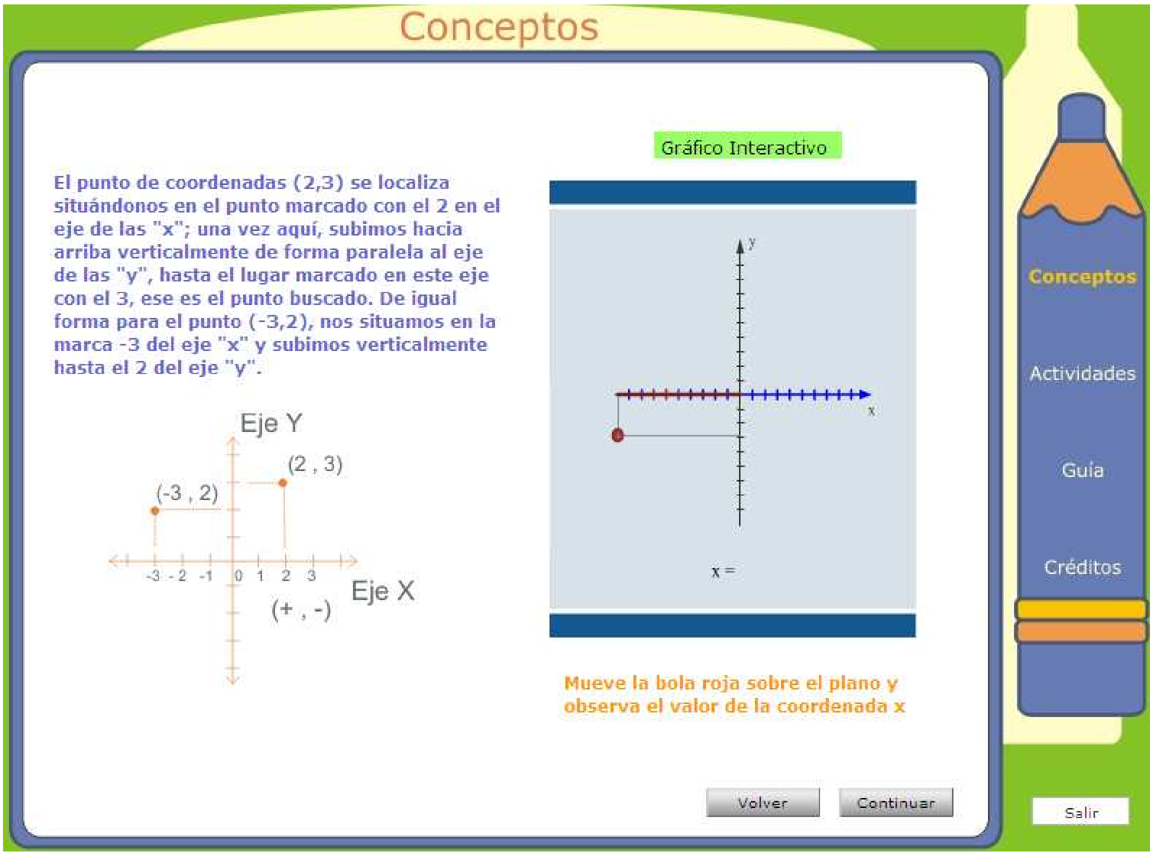


Figura 6.

Con todos estos ejemplos concretos sobre lo que se ha venido haciendo (utilizando las tecnologías, como en la Universidad Michoacana, o preparando actividades concretas, como Cantoral, Acuña y Calvillo, entre otras) puede añadirse que, en el caso de los primeros problemas, acerca de los estudios en España, la propuesta es también un apoyo a la enseñanza utilizando el aspecto de la Visualización, puesto que, disponen de la herramienta Derive para ayudarse a diseñar prácticas o laboratorios y obtener experiencias ilustrativas de un mejoramiento en la enseñanza del Cálculo. Lo mismo sucede con las actividades concretas, ya que se pueden diseñar con ayuda de algún software, por ejemplo el mismo Derive. De esta manera lo que se obtiene es que, para los propósitos de este trabajo, las Sumas de Riemann se visualizan y se calculan fácilmente en este software, lo cual genera una ganancia a la hora de interpretar resultados y a la hora de construir conocimientos.

Por otro lado, pero no menos importante, para que el aprendizaje y la enseñanza del Cálculo tenga mayor éxito, está la necesidad de preparar o capacitar profesores de Cálculo a nivel superior tal y como lo señalan Cabrera y Aparicio (2006). Se sabe que los problemas son graves por los resultados que arrojan las estadística sobre los conocimientos y habilidades del los alumnos en la materia del Cálculo, pero ¿será que el problema sólo se debe a los contenidos explícitos en los libros o en los programas de estudio? Precisamente estos dos autores han creado una especie de curso-taller de capacitación didáctica en el área del Cálculo para profesores universitarios. Esta propuesta fue manejada en una fase de experimentación, buscando determinar el grado de aceptación y el tipo de actitud de los profesores participantes hacia este tipo de talleres-cursos. Los resultados de esta propuesta constituyen una adecuada base para la elaboración de cursos de formación didáctica dirigidos a un mayor número de profesores universitarios en el área, no sólo de Cálculo, sino de las ciencias exactas.

En relación a la capacitación de la planta de maestros para una mejor enseñanza del Cálculo, Cabrera y Zaldivar (2007) señalan que el éxito de cualquier cambio en la forma en que se desarrolla la enseñanza, está determinado en gran parte por la implementación de un cambio en las concepciones del profesor, pues muchas de ellas se vuelven verdaderos obstáculos para lograr un cambio en los métodos de enseñanza que este plantea (ver Campanario, 2003). Por otra parte se puede afirmar que *la práctica docente está vinculada con la aparición de factores que inciden en el empeño escolar de los alumnos* (D´Amore y Martini, 2000). De éste modo un tema de interés en la educación es la formación de los profesores; pues cuando se trabaja sobre el diseño de cursos de formación preguntas tales como: ¿qué temáticas deben abordarse? ¿Cómo lograr incidir sobre las creencias y concepciones del profesorado? ¿Cómo lograr que los cambios se reflejen en sus prácticas educativas?, son comunes y determinantes para el diseño de cualquier propuesta.

2.4 JUSTIFICACIÓN

Como ya se ha mencionado, se cree que la implementación de un software educativo en Cálculo Integral puede subsanar algunos problemas relacionados con la Visualización y tratamiento de los conceptos ligados específicamente en el tema de Sumas de Riemann. La problemática comienza desde algo muy básico, por ejemplo: la confusa identificación de un *sólido de revolución* dibujado en el pizarrón, o peor aún, la representación sólo mental de ese sólido en la cabeza del alumno y del profesor, aspecto que supone entendimiento completo de una situación que algunos no verán o no entenderán si no hay una buena representación del objeto del cual se necesitan saber varias de sus características. En este tenor, como lo remarca Duval, si se desea transmitir o conocer matemáticas lo importante es poder, primero, ser capaz de *representar* los conceptos y los objetos matemáticos bajo diferentes *representaciones semióticas*. Es decir, entre más claros sean los registros de representación semiótica sobre un objeto, mejor será el trabajo matemático que se pueda hacer sobre ese objeto, donde por *registros de representación semiótica*, entendemos a las producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias exigencias de significancia y de funcionamiento. El tratamiento que se le da a ese objeto incide de manera directa en la concepción de los conceptos del Cálculo Integral y más particularmente, en el tema de Sumas de Riemann.

Para ver un ejemplo de este tipo de problemática básica de identificación de un sólido, simplemente nos podemos referir a un ejercicio como el que sigue: *calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar la región acotada por las gráficas de* $y = \sqrt{x}$ *e* $y = x^2$ *en torno el eje x* (Figuras 7 y 8)[3].

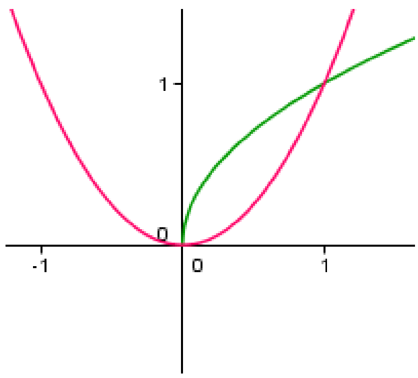


Figura 7.

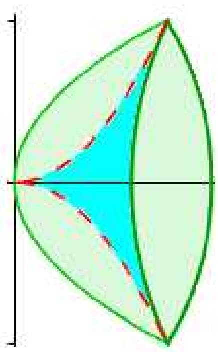


Figura 8.

[3] *Esto ejercicio ha sido tomado del libro: Cálculo y Geometría Analítica de Roland E. Larson y Robert P. Hostetler. Sexta edición Vol 1. p.p 475*

La solución al ejercicio hace referencia a conocimientos sobre volúmenes de cilindros y cálculo de radios presentes en las bases de esos cilindros. Si no hay un buen acercamiento de esta representación gráfica al alumno, difícilmente llega a realizar los cálculos algebraicos necesarios para responder a la encomienda inicial. Es a esto que Duval llama "*tratamiento de una representación como transformación en un mismo registro donde ha sido formada esa representación*" como actividad cognitiva fundamental ligada a la semiosis para formar un registro de representación semiótica.

Otra problemática que es también importante en el estudio de estos temas en Cálculo Integral está relacionada con el concepto de la aproximación en el sentido de que, para encontrar el volumen de un sólido como el anterior, sin utilizar Integrales Definidas, sino sólo el sentido intuitivo y la percepción visual, es necesaria una construcción de cilindros como referencia o acercamiento del volumen exacto, esto en un primer momento, y después el cálculo de los radios de cada cilindro como elementos para encontrar el volumen de cada uno de ellos (ver Figuras 9, 10 y 11), para que al final sólo se infiera el resultado con una suma de todos esos volúmenes calculados.

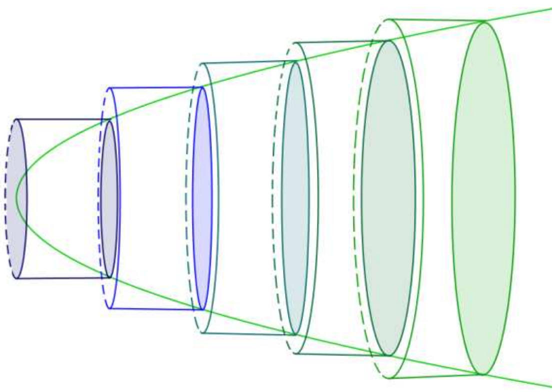


Figura 9.

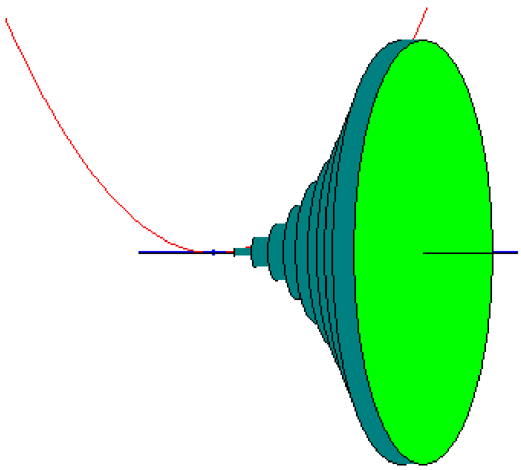


Figura 10.

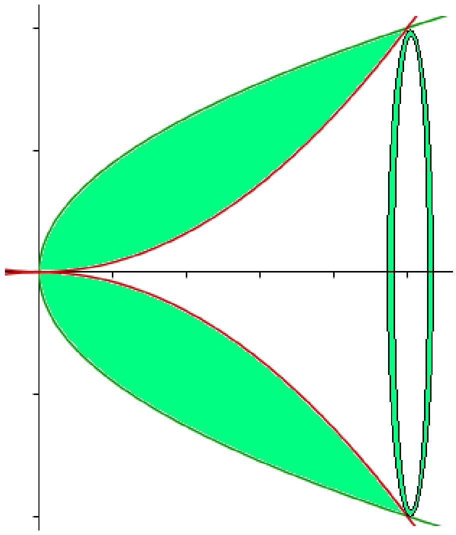


Figura 11.

Otras actividades como: *encontrar la región comprendida entre dos o más curvas, cuando éstas no son simples de trazar o de representar gráficamente, girar la región sobre alguno de los ejes x o y u otro eje paralelo a uno de estos dos*, así como la Visualización del sólido generado, después de haber resulto las primeras actividades de búsqueda, representan bastantes esfuerzos por parte, tanto del alumno como del profesor en una clase en el salón tan sólo con ayuda de lápiz y papel.

Con estas problemáticas y otras que cada quien puede tener al estudiar Sumas de Riemann, por ejemplo en el tema de sólidos de revolución, surge una gran oportunidad. Se propone la utilización de un software que se creará con las mayores ventajas posibles para que esas actividades complicadas que el alumno a veces no puede concretizar, sean ahora, por lo menos, más visibles, de manera que una representación de algún objeto o concepto matemático, pueda contener en esa misma representación varias características adheridas y que se puedan estudiar con más claridad.

Mochón (2006) escribe algunas características de un "buen software" y señala que entre más de las propiedades de la lista siguiente satisfaga un software educativo, mejor será. Dichas características son:

1. *Dinámico*.
2. *Interactivo*.
3. *Exploratorio*.
4. *Abierto*.
5. *Universal*.
6. *No denso*.
7. *Concentrado*.
8. *Social*.
9. *Didáctico*.
10. *Guiado*.

En éste sentido y siguiendo este modelo de Mochón, el software en el momento de ser capaz de poder representar lo que se le plantea a un alumno (graficación de funciones, reconocimiento grafico-algebraico de regiones entre funciones, construcción de sólidos, cálculo de volúmenes característicos, aproximaciones de resultados) ya incluirá al menos las características de ser *Dinámico, Interactivo, Exploratorio, Guiado* y *Didáctico*. Las características de ser Abierto y Social sin duda son importantes y las deberá tener. El ser *No Denso y Concentrado*, sin duda es importante y tratara de hacerlo lo más explícito posible.

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

Con el propósito de subsanar los problemas que se han mencionado anteriormente sobre el aprendizaje y la enseñanza del Cálculo, se intentará dar una idea general en este apartado sobre lo que se desea haga el software. La metodología a seguir es lo que se planteará, y se hará hincapié en la Modelación Matemática, así como también en la Visualización al estar trabajando con el software, al mismo tiempo que se resuelven actividades guiadas para el alumno, las cuales a su vez tienen el objetivo de hacer interactuar al software con el usuario y paralelamente analizaremos las actividades diseñadas que pueden modificar una perspectiva en el alumno, logrando así los objetivos planteados para el mejor desempeño de los estudiantes y la mayor aplicación del Cálculo Integral. De la misma manera que lo señalan Cantoral & Montiel (2003) se entiende a la Visualización como *la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende*. Por otro lado, se sabe que la Modelación Matemática *es un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático*. Mientras tanto, un modelo matemático de un fenómeno o de una situación *es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión*. Tal y como se señala en Salett & Hein (2004), "el modelo matemático no sólo permite obtener una solución particular, sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías".

Sobre esto que se menciona de la metodología y el contenido del software, Raymond Duval (2002) apunta que "no hay o no se produce el entendimiento sino existe una Visualización concreta de algo que se está señalando" (por ejemplo, en este caso se puede pensar que es complicado entender el concepto de Integral sin antes recurrir a la Visualización de áreas bajo curvas a través de Sumas de Riemann). Sin embargo, la Visualización va más allá de sólo ver la interpretación (por ejemplo, geométrica) de un concepto matemático. De hecho los libros de texto detallan la interpretación geométrica de las áreas involucradas en el concepto de Integral y sin embargo los resultados son todavía desalentadores cuando se ve un gran número de alumnos que reprueban o que no entienden y, por lo tanto no saben cómo aplicar los conceptos derivados del Cálculo Integral. Es por eso que la Modelación como parte fundamental del software es una propuesta para atacar este problema y reforzar la parte de Visualización ahora con un poco de interactividad entre el software y el alumno, lo cual hace aun más interesante el trabajo de taller que es ya bien visto por la mayoría de los alumnos.

3.1 EJEMPLOS DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

Para acercarse un poco en esto de la Modelación Matemática se pueden ver los siguientes ejemplos tomados de (Guevara, 2008), los cuales indican que cada pregunta sobre un tema o situación puesta en escena es fundamental para llegar a la construcción de un concepto más grande que puede formar parte del aprendizaje significativo sobre la situación señalada.

Ejercicio 1. *Determinar la presión sobre una placa triangular sumergida verticalmente en agua y en tal forma que la base del triángulo está al nivel de la superficie del líquido.*

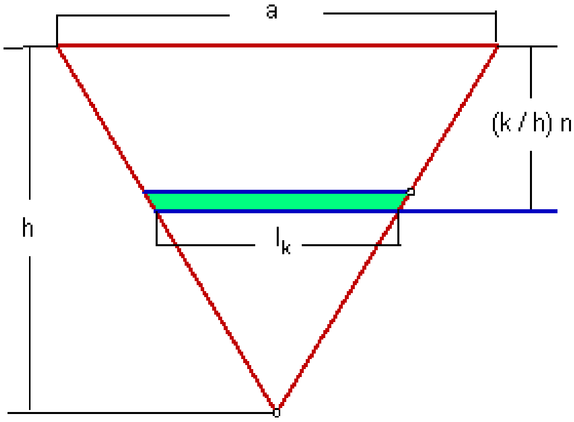


Figura 12.

En la figura anterior se muestra una representación de dicha placa y la idea es analizar a lápiz y papel cómo es que se puede encontrar la presión que el agua provoca sobre la placa.

Algunos de los pasos que se piden contestar a los alumnos son:

a) Divide la placa en n franjas horizontales de igual ancho. ¿Cuál es el ancho en términos de la altura h y el número de franjas?

b) Sabiendo que la presión es igual al área de la superficie sumergida por la profundidad de sumergimiento y pensando que las franjas forman rectángulos (*y no trapecios, como en la figura*), encontrar l_k (la longitud de la franja *k*-ésima.) Observar los triángulos semejantes ABC y PBQ.

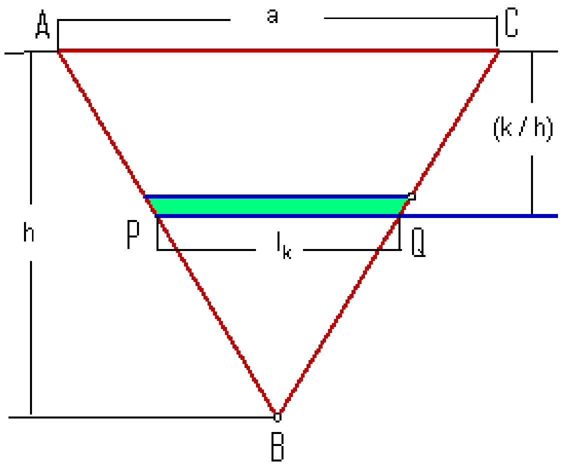


Figura 13.

c) ¿Cuánto es el área de la figura sombreada?

d) ¿Cuánto es la presión sobre dicha franja?

La presión total sobre la placa triangular se encuentra sumando las presiones sobre las franjas particulares:

$$P \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{ah^2}{n^2}(1-\frac{k}{n})k \, ,$$

O bien

$$P \approx \frac{ah^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{ah^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 ..$$

e) Utilizar los resultados de límites y sumatorias necesarios para concluir que la presión total sobre la placa es

$$P = \frac{ah^2}{2} - \frac{ah^2}{3}. \qquad \text{O bien} \qquad P = \frac{ah^2}{6}.$$

Ejercicio 2. Dado que el **ritmo** al que fluye un líquido por cierto conducto es igual a la velocidad del líquido multiplicada por el área del conducto: *Encontrar el ritmo al que fluye la sangre a través de una arteria.*

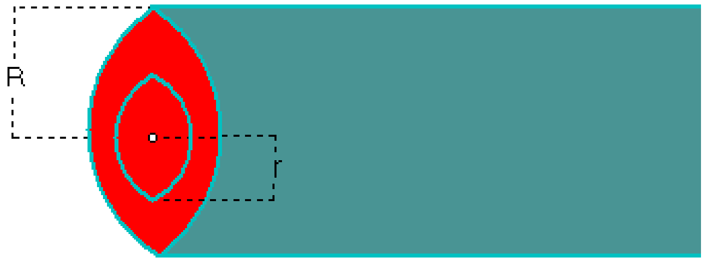


Figura 14.

La velocidad de la sangre en una arteria es función de la distancia al eje central de la arteria, es decir, la velocidad de la sangre $(\frac{cm}{s})$ *que está a r cm del eje central de la arteria es* $S(r) = k(R^2 - r^2)$, *donde R es el radio de la arteria y k es una constante (Ley de Poiseville).*

La pregunta que se resolverá paso por paso es ¿***con qué ritmo*** $(\frac{cm^3}{s})$ ***fluye la sangre a través de la arteria***?

a) Divide el intervalo [0, *R*] en *n* sub-intervalos de igual longitud Δr.

b) Fíjate en el sub-intervalo $[r_j, r_{j+1}]$ y calcula el área del anillo comprendido en dicho intervalo. A dicho anillo llámale r_j.

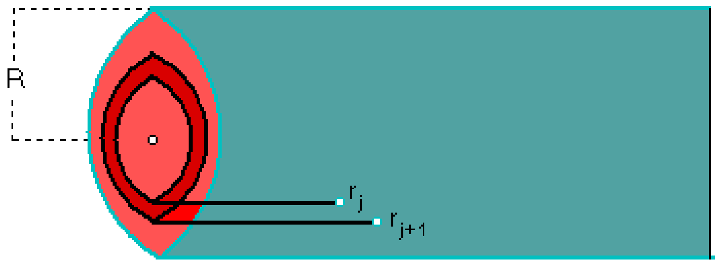


Figura 15.

c) ¿Cuál es la velocidad de la sangre en ese anillo, según la ley de Poiseville?

d) Al multiplicar el área del anillo y la velocidad, encuentras el ritmo de la sangre en ese anillo, entonces, ¿cuánto es el ritmo?

e) Si haces más fina tu partición de [0, *R*], más cerca estás de encontrar el ritmo total en la arteria, esto porque los resultados anteriores son aproximaciones ¿porqué? Si sumas ahora todos los ritmos de flujo encontrarás el ritmo total de manera exacta. ¿Cuánto es entonces, el ritmo en la arteria?

Se puede ver que la Modelación está fortalecida por la forma en que se construye el conocimiento a través de actividades guiadas que conducen al resultado que una clase demanda o que el mismo conocimiento requiere. Con esta idea se muestra enseguida lo que se puede plantear en un momento dado para abarcar el concepto del Cálculo Integral, los sólidos de revolución y las Sumas de Riemann en un mismo plano.

3.2 EL SOFTWARE

Actividad inicial. ¿Cómo encontrarías el volumen de los siguientes sólidos?

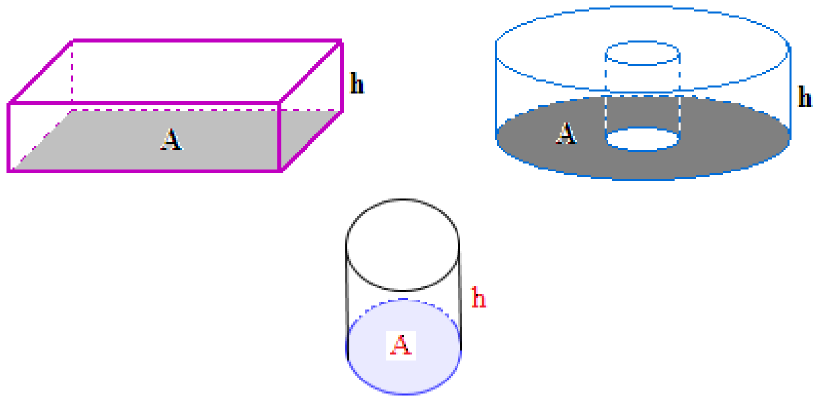


Figura 16.

La idea es ver que todos tienen una similitud, además de que se puede responder la pregunta, recordando precisamente la fórmula para calcular cada volumen. En este momento la actividad no genera nada nuevo aún, pero es de gran utilidad, puesto que el cilindro formará la parte más importante dentro de lo que resta de la actividad.

¿Cómo le puedes hacer para encontrar el volumen de los sólidos siguientes?

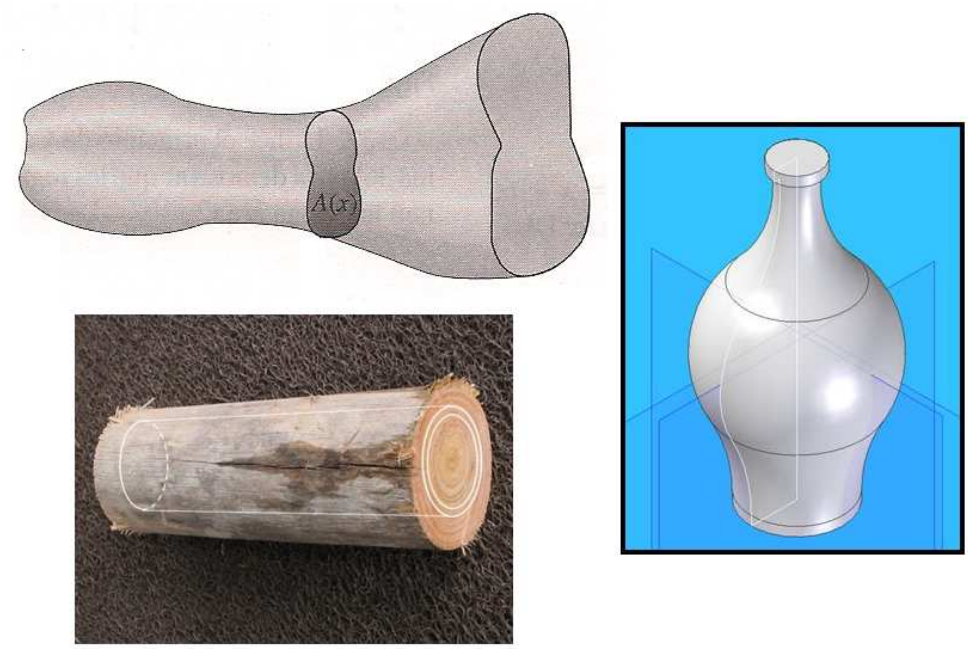


Figura 17.

Sin duda más de alguno de los alumnos, al meterse en la actividad verá que para empezar no existe una forma por demás parecida a los primeros sólidos, si a caso un poco el *trozo de árbol*, pero no lo suficiente puesto que en su corteza pude ser de forma irregular de manera que ya cabría la posibilidad de que el volumen tuviera que ser calculado con más detalle. Es este momento apto para decirle al alumno que para lograr la encomienda tendrá que pasar por ciertas actividades que le darán la pauta, para que después de aprender ciertos conceptos de Cálculo Integral se interese por el trabajo tan importante de las funciones y él solo concrete que la magnitud del Cálculo puede no tener fronteras al aplicarlo convenientemente.

Encomienda uno: Considérese la función siguiente y su gráfica. Gira la región acotada por la función, el eje de las abscisas y una recta paralela al eje de las ordenadas, para formar el sólido de revolución asociado.

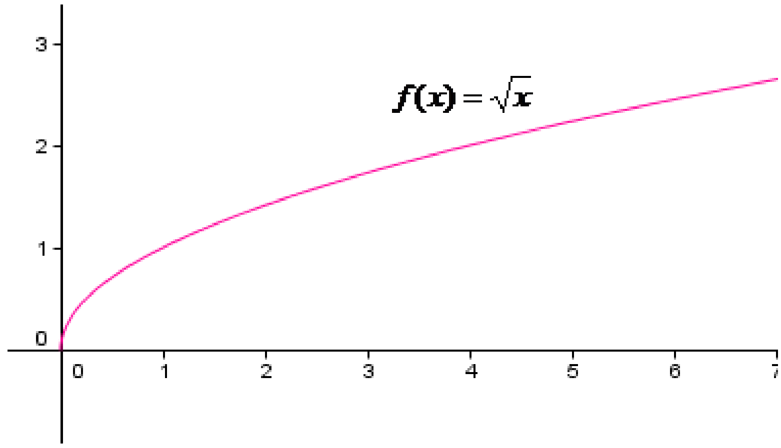


Figura 18.

El resultado ya se puede ir aventurando con la utilización del software sin mayor dificultad (Figura 19):

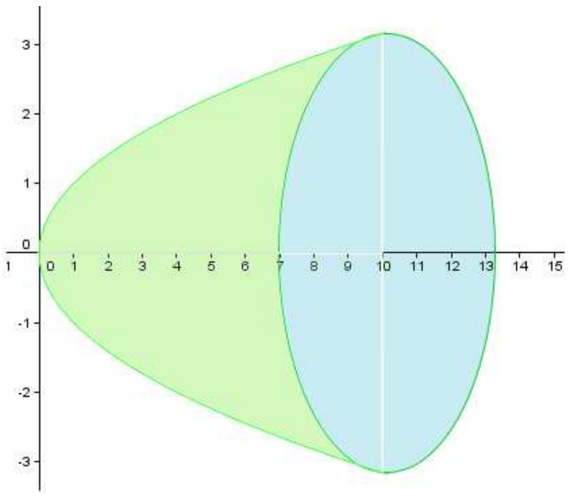


Figura 19.

El software debe ser contundente en la graficación de las funciones y en la claridad visual de sus características geométricas. Además de que graficará funciones en dos dimensiones, deberá ser capaz de "*girarla*" sobre algún eje de revolución (eje de las abscisas o de las ordenadas), de tal forma que "construya" un sólido de revolución visto en tres dimensiones.

Encomienda dos: Si consideras que el sólido se encuentra entre $x = a$ y $x = b$ y si tomas una partición de orden ***n*** del intervalo [a, b], de manera que los sub-intervalos sean todos iguales, ¿Cuánto miden cada uno de estos sub-intervalos?

Definición: Sea $a < b$.

Recibe el nombre de ***partición*** del intervalo [a, b] todo conjunto finito de puntos $\{t_0, t_1, t_2, ..., t_{n-1}, t_n\}$ de [a, b] de forma que uno de ellos coincide con a y otro con b, además se cumple que: $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = b$.

Toma como referencia para tus cálculos un intervalo intermedio. Observa la siguiente figura.

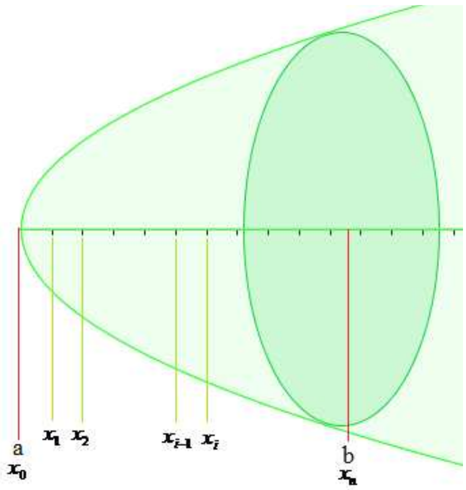


Figura 20.

Lo que enriquece la utilización del software, es el hecho de que paralelamente que se maneja el software, se estudian los conceptos, ya sea en el salón de clases o en hojas de trabajo y en un laboratorio de prácticas con herramientas computacionales. De esta forma se aprovecha tiempo y se avanza más rápido, pero aún mejor: los alumnos ingresan a una dinámica que no se les hace aburrida y que les exige estar constantemente atentos al trabajo que implica esta forma de estudio, logrando que después de adquirir cierta experiencia, puedan hasta predecir qué es lo que continúa en actividades de este estilo.

Encomienda tres: Para el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ dibuja el cilindro correspondiente teniendo en cuenta que el radio deberá ser calculado con ayuda de la función y tomando como referencia para hacerlo el punto x_i. ¿Cuánto es el volumen de ese cilindro? ¿Qué tanto nos sirve este valor para encontrar el volumen real contenido entre los valores x_{i-1} y x_i?

Al igual que la encomienda anterior, aquí se debe explicitar lo que cada encomienda quiere dar a entender.

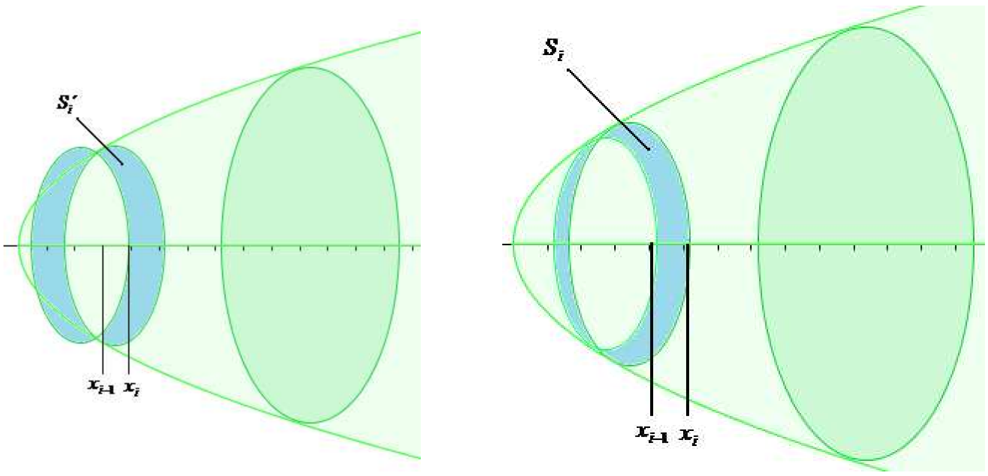


Figura 21.

Aquí se tiene el objetivo de trabajar sobre la franja y cilindro contenidos en un intervalo de los de la partición, uno que sea representativo de todos y que matemáticamente se puede hacer de manera formal. Es el momento en que el alumno conoce un poco de la formalidad y manifiesta su sentido común. El software ayuda con estos términos en la siguiente parte.

Observar cómo la interactividad y las gráficas resaltan en cada actividad y además pueden ser fundamentales para resolver cada encomienda.

Encomienda cuatro: Una vez graficada la función y construido el sólido de revolución, escoger una partición de [*a*, *b*], con la intención de dibujar los cilindros asociados a cada sub-intervalo encontrado con esa partición, (al principio pueden ser 2, 3, 4, 5 ó hasta 10 cilindros). Después calcular el alto de cada cilindro y respectivamente el radio de cada uno de ellos:

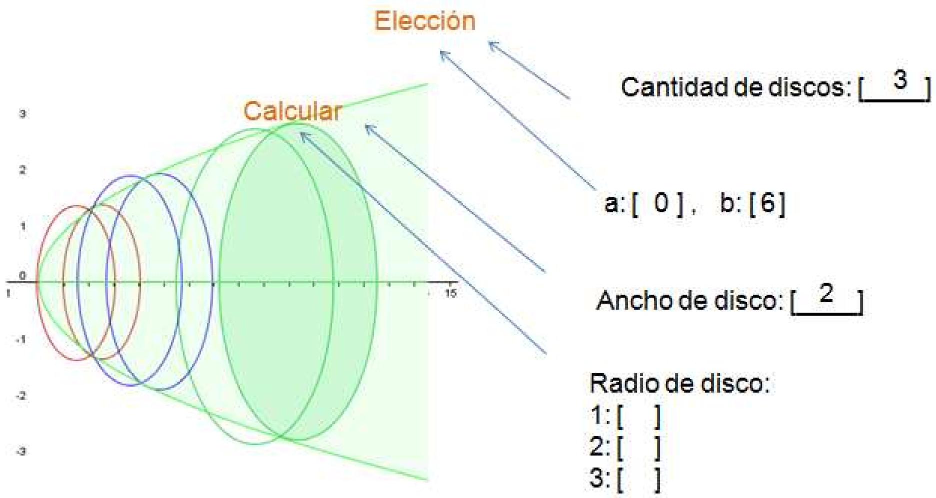


Figura 22.

Además de todo ello, también calcular el volumen de los cilindros construidos y aproximar con éstos, el volumen total del sólido en dicho intervalo [*a*, *b*]. Se podrá contar con la opción de volver a empezar con esta ***encomienda*** y acercarse cada vez más al volumen real o sino, se calculará el volumen exacto: Esto permite una evaluación por parte del profesor, es decir, él es quien debe dar la pauta para avanzar o para analizar más de lo que sucede con estas encomiendas puesto que para que el software y las actividades sean más provechosas, el maestro deberá guiar cada encomienda y, permitir el avance o no hacerlo, dependerá de la habilidad de los alumnos.

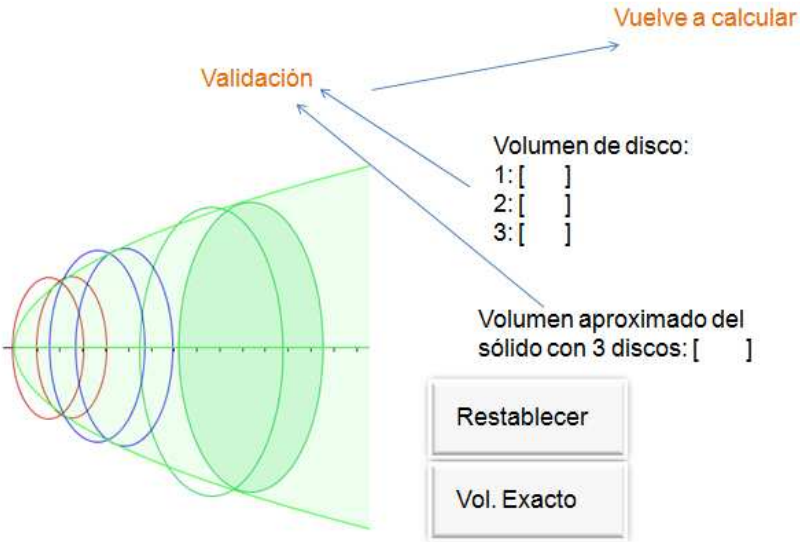


Figura 23.

Para encontrar el volumen exacto, incluso los alumnos pueden ya intuir el resultado: con un límite y una sumatoria de volúmenes cada vez más estrechos es como se puede llegar al valor correcto. Paralelamente se debe observar que lo más importante aquí es que se habla o no de una función conocida, con la cual se obtienen una región que se desea girar sobre algún eje. Sin esta función prácticamente se reduce al trabajo con fórmulas, por ejemplo de integración, que pueden no tener una relación práctica del conocimiento. Es ahora que para la encomienda inicial de encontrar los volúmenes de los sólidos presentados en un principio se deberá de conocer la función del contorno para poder encontrar el volumen aunque pareciera que no se puede calcular o aproximar casi con exactitud:

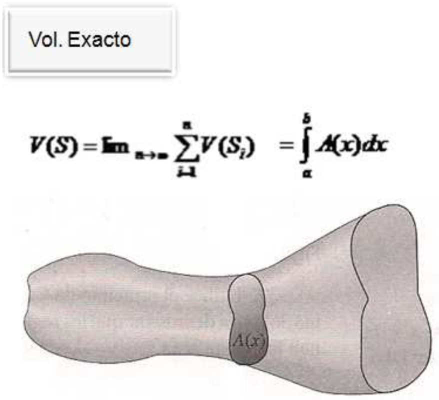


Figura 24.

3.3 LA INTERFAZ

Cabe mencionar que las actividades dentro del software deben ser interactivas y didácticas, puesto que también se pretende que se pueda seguir individualmente sin la ayuda de un profesor. Es importante también señalar que no sólo los sólidos de revolución y la definición de Sumas de Riemann en este tema es lo único que contiene el recurso informático. También se pueden ver las aplicaciones de la Regla de los Trapecios, el Método de Simpson, la Longitud de Arco, así como las diferentes formas de encontrar el área por los métodos de exhaución con rectángulos. La pantalla siguiente es el panel principal que muestra lo que se acaba de mencionar.

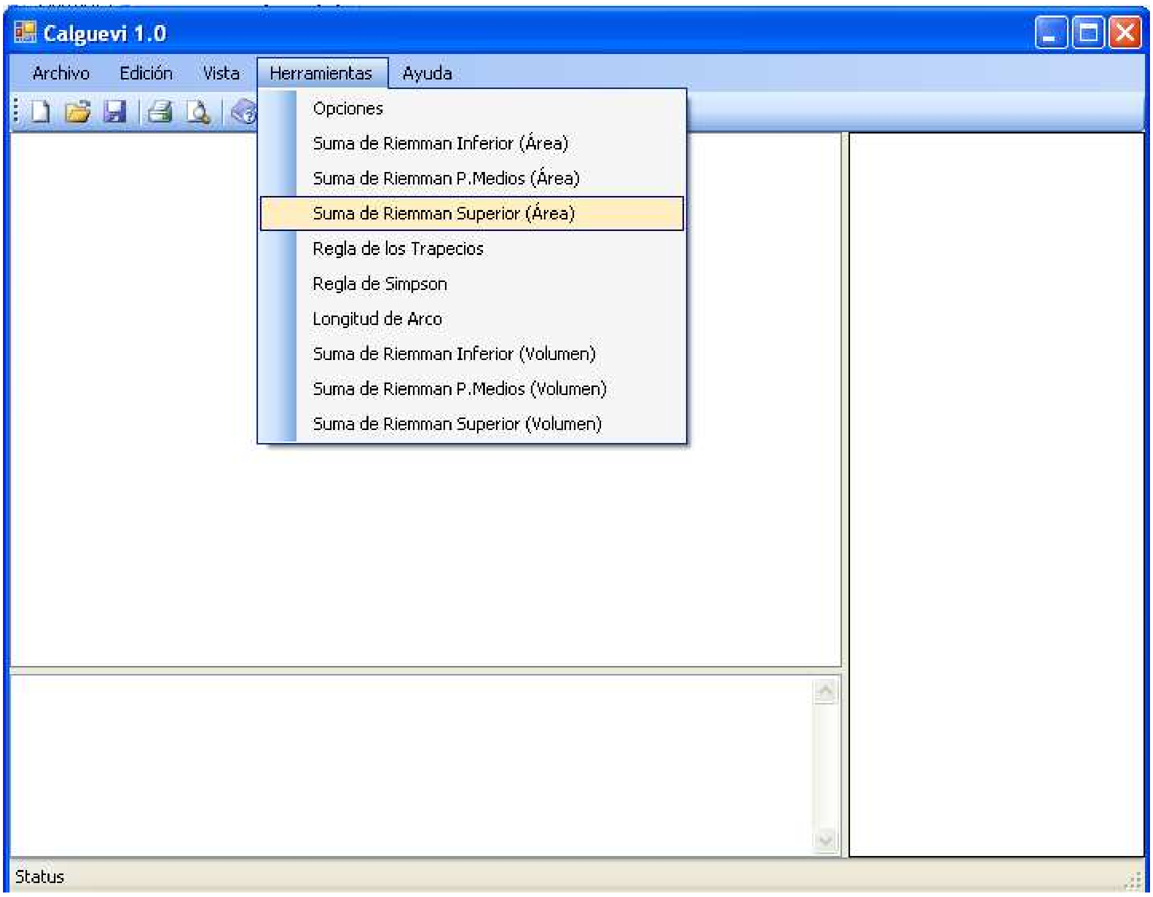


Figura 25.

Como se puede apreciar, la aplicación contiene tres apartados (*llamados Paneles o Contenedores dentro de la programación*) en la pantalla principal. Uno de ellos muestra los aspectos de la Visualización y se le da peso en este panel al aspecto geométrico, tanto de las funciones como de los elementos construidos (cilindros, rectángulos, trapecios, etc.).

Dentro de cada una de estas opciones como *herramientas del software* (en la opción *Herramientas*) se encuentra una ventana nueva, en la cual aparecen las diferentes características que componen la idea de aproximación desde la perspectiva de Riemann. Aparece también la variable dependiente de la función, la cual indica además, el eje sobre el cual se hará referencia al momento de construir los elementos necesarios antes mencionados.

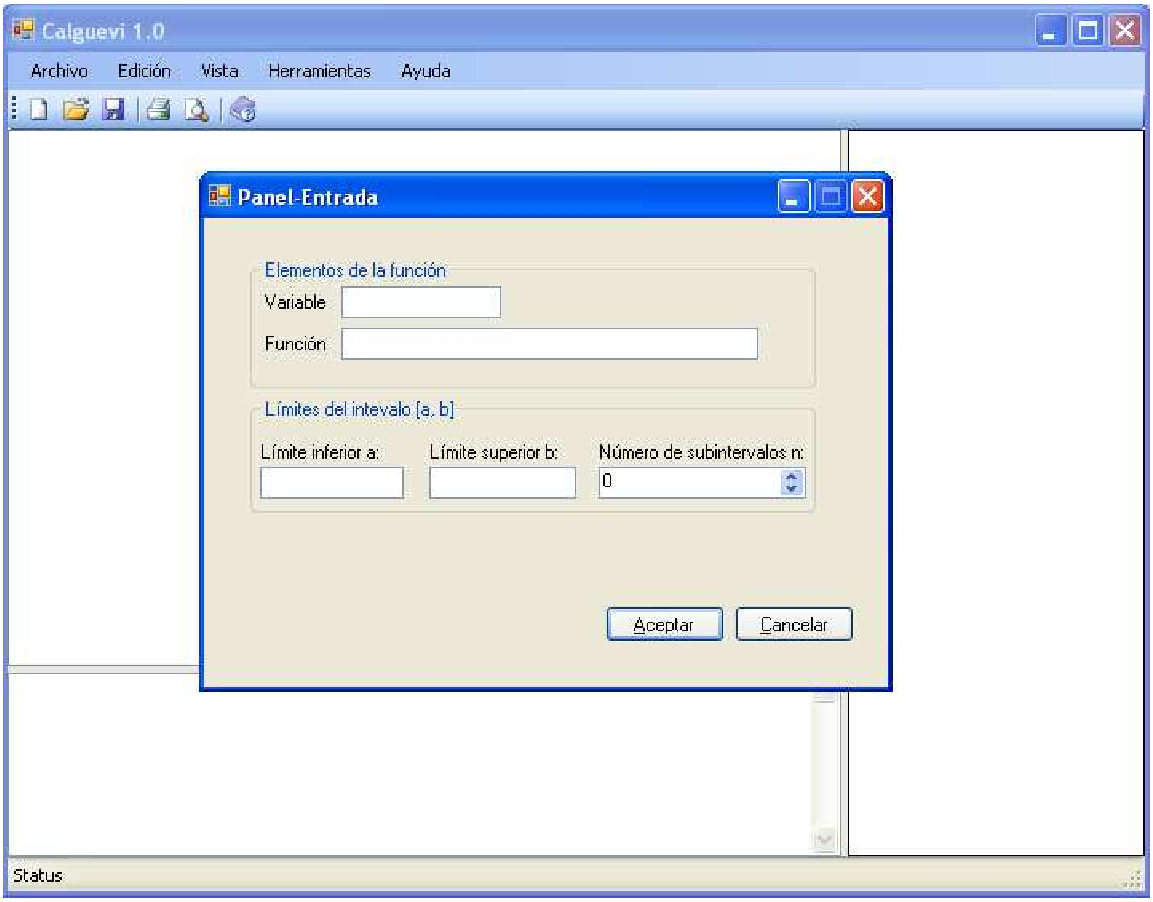


Figura 26.

En cada una de las herramientas, al ser seleccionadas, aparecerá esta nueva ventana igual que será completada en cada uno de sus campos, para así continuar con el trabajo de la Modelación.

Una vez graficada la función y construidos los elementos, por ejemplo, los sólidos de revolución en el intervalo especificado por el usuario, aparecerá en el panel inferior una serie de cálculos en términos de los elementos ingresados por el usuario en la segunda ventana (a, b, n), de manera que si el usuario (en este caso los alumnos) tienen suficiente información sobre estos elementos tendrá la capacidad de interpretarlos correctamente, para que así pueda concretar que estos cálculos no son más que los que debe realizar para completar el tercer panel (el panel derecho).

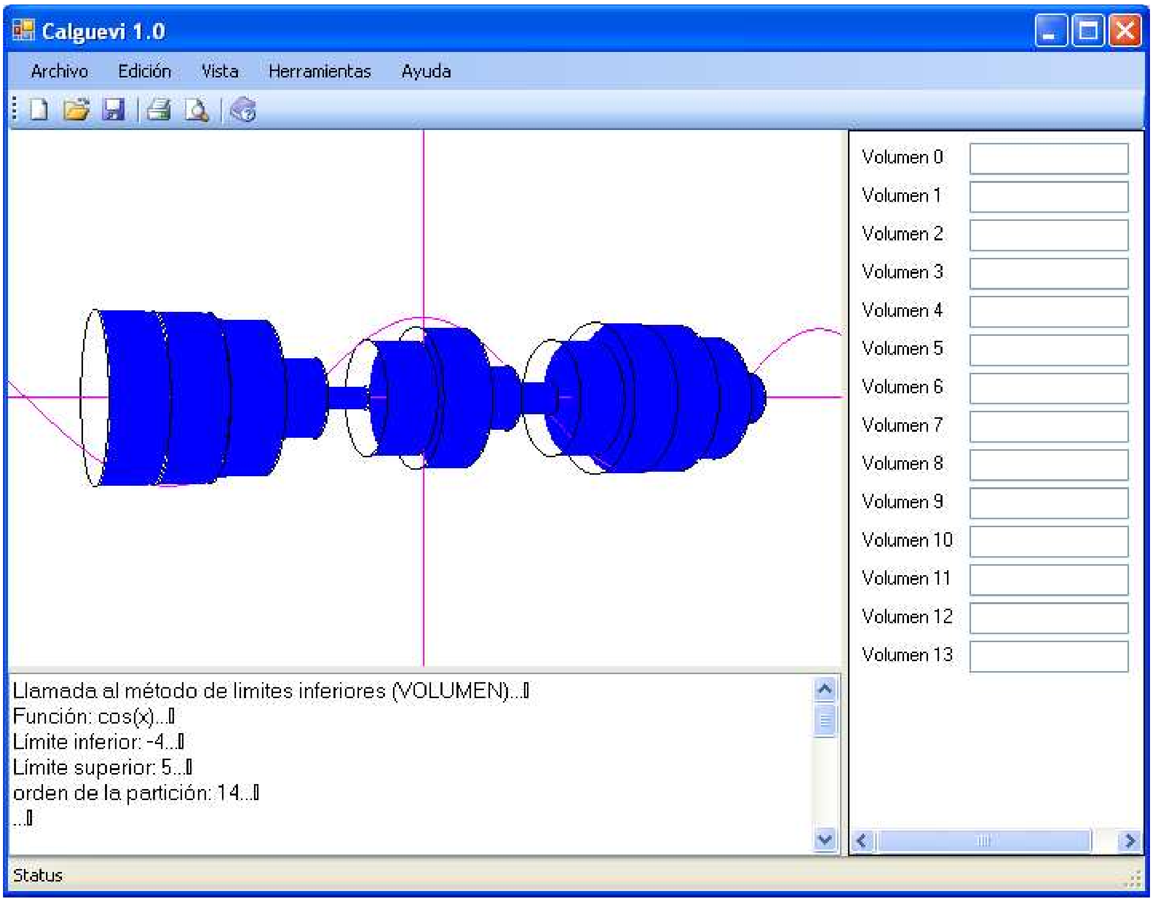


Figura 27.

Se puede apreciar en este panel qué es lo que el usuario pidió que hiciera el software y la cantidad de cálculos que éste debe hacer, así como la forma en que los debe realizar para encontrar la aproximación correspondiente con los elementos ingresados, tal y como si lo estuviese haciendo a mano o de cualquier otra forma.

A continuación, en el panel derecho, lo que aparece es una lista de botones y de cuadros de texto (tantos como el número de operaciones) en los cuales se deberán de colocar los resultados de los “cálculos” que se han hecho. Si se coloca un resultado erróneo, el botón lo indicará con alguna señal, ya sea con una *palomita* o con un color identificable como valor correcto en ese cuadro de texto. Si se escribe un resultado incorrecto, aparecerá lo contrario, una *cruz* o un color identificable como incorrecto en el botón correspondiente. Es en este momento que entra en juego la Modelación y ayuda al alumno a reforzar sus conocimientos y a entender mejor los conceptos del Cálculo Integral.

La puesta en escena del software toma fuerza justo cuando se combinan las aplicaciones con la teoría. En esta dirección se plantean problemas cercanos a la realidad y que por lo tanto necesitan, no sólo del Cálculo Integral o Diferencial, sino que para su resolución se vuelve necesario el conocimiento y la aplicación de otras disciplinas, cosa que enriquece una clase y que le da sentido al estudio de los problemas ya en una carrera de Ingeniería, por ejemplo. Es por eso que se han planteado algunas actividades que pueden conducir al resultado esperado, en el cual al menos los alumnos se llevan la satisfacción de saber que el Cálculo y, en general las matemáticas tienen de verdad bastante aplicación, tan cercana como se quiera llegar a entender y dominar, en otras palabras, sin límites.

3.4 ALGUNAS ACTIVIDADES

Enseguida se muestran algunos de los ejemplos que deberán llevar al alumno a utilizar el software como se mencionó en el capítulo anterior. Para ello, como ya se dijo antes, se buscarán problemas que involucren aplicaciones y conceptos de otras disciplinas, conceptos que estén al alcance del nivel en el cual se enseña Cálculo Integral. Ésta idea de incluir problemas diversos y más completos es con la finalidad de modelar más ampliamente dentro de una actividad, puesto que de esta forma es como se pretende llegar a un conocimiento adecuado de los conceptos involucrados en dichos problemas.

A continuación hay algunas actividades, las cuales necesitan ser abordadas, con ayuda de otras herramientas, las cuales están señaladas al final del capítulo y que dentro de una lección en aula pueden estar sujetas a un trabajo externo del tipo tarea o a una hoja de actividades paralelas que los alumnos deben aprender a manejar.

Problema 1. A un ingeniero se le pide determinar la cantidad de material requerida para producir una pieza de una máquina (ver la Figura 28). Los diámetros ***d*** de la pieza en los puntos ***x*** uniformemente espaciados se listan en la tabla. Las medidas están en centímetros.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	4.2	3.8	4.2	4.7	5.2	5.7	5.8	5.4	4.9	4.4	4.6

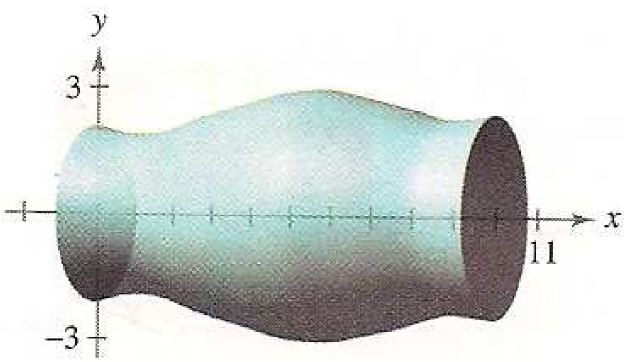


Figura 28.

a. Usar estos datos y con la *regla de Simpson* aproximar el volumen de la pieza. ¿Cuántos puntos debes sustituir en la fórmula de Simpson?____________________

b. ¿Encuentras alguna función explícita que ajuste estos puntos con esta regla? ¿Por qué?____

c. ¿Cuáles son los valores de *a* y *b*, según dicha regla?________________________

d. ¿Porqué debe ser par el número de sub-intervalos en la regla de Simpson?__________
____

e. ¿Cuál es el volumen del sólido de la figura con esta regla?__________________________

f. Usa el método de *interpolación de Lagrange* y encuentra la función que describe estos valores y grafícala. Después calcula el volumen del sólido en el intervalo [0, 10], utilizando 2, 4, 6 y 10 sub-intervalos con ayuda del software. ¿De qué grado debe ser el polinomio que encuentres? ¿Por qué?___________________________________
____

g. ¿Cuál es el polinomio que pasa por todos estos puntos?____________________________
____
____

h. ¿Cuál es el volumen del sólido generado por la función en el intervalo [0, 10]?_____
____

i. ¿Cuál de los métodos anteriores te parece más preciso? ¿Por qué?_________________
____
____

Problema 2. Un estanque es aproximadamente circular, con un diámetro de 400 pies (observa la Figura 29).

a. Empezando en el centro, la profundidad del agua es medida cada 25 pies. Elabora una tabla de valores de la distancia en pies-profundidad.
b. ¿Cuántos puntos obtienes en la tabla?____

c. Si la distancia desde el centro es 100 pies, ¿cuál es la profundidad del estanque? ¿Y si es de 150?___________________________________

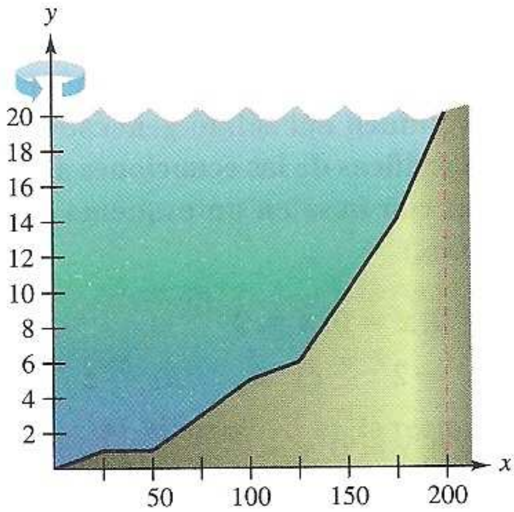


Figura 29.

Usa la regla de Simpson para aproximar la cantidad de agua en el estanque.

d. ¿Cuál es este volumen?___________________

e. Con el método de mínimos cuadrados, ¿cuál parece ser el grado conveniente para ajustar los puntos de algún polinomio?____

f. ¿Cuál es el polinomio obtenido? Grafícalo.

g. ¿Se ajusta este polinomio lo suficiente a la poligonal mostrada en el estanque?_____

h. Si giras con respecto al eje de las ordenadas, ¿con cuántos sub-intervalos estás más cerca que el método de Simpson? ¿Lo puedes estimar? Si. No. ¿Por qué?_________
____

i. ¿Cuál es el volumen con este método de interpolación?_______________________

Con la reformulación hecha sobre el asunto de las prácticas y hojas de trabajo que se planteaba en un principio al señalar la metodología de trabajo a seguir con la ayuda del software, lo que deseamos ahora es mostrar unos cuantos ejemplos más y ya después saldrán a flote las observaciones, implementaciones y los ajustes necesarios después de una evaluación tanto hacia los alumnos como al mismo software, utilizando técnicas de comparación y apreciación personal y distintos puntos de vista de personas un tanto ajenas a la clase de Cálculo Integral, por ejemplo encargados de centro de cómputo o profesores de materias que utilizan los laboratorios de cómputo como aulas o como espacio de aplicación de conceptos vistos teóricamente en un salón de clase común y corriente.

Otra vez, la idea es mostrar los artificios o técnicas que puede poner en práctica el profesor a la hora de enseñar matemáticas, especialmente Cálculo Integral, o incluso cualquier materia en la que se pueda implementar la ayuda y utilización de algún software especializado para aprender conceptos de dicha disciplina. Para ello, continuamos, sin perder de vista el método que estamos proponiendo a la hora de aplicar y enseñar el software y el Cálculo. Recordemos que desde los inicios del trabajo, incluso hasta en el título del mismo, conjuntamente con el desarrollo del software, surge de forma paralela y no menos importante (de hecho se puede decir que es la parte más indispensable) la palabra ***Modelación Matemática***, que sin duda es pieza fundamental para lograr nuestro objetivo más importante de todos: lograr que los alumnos se lleven un mejor entendimiento de lo que es la definición de Sumas de Riemann, y por lo tanto de la Integral misma, así como un plus, la inquietud de aplicar sus conocimientos obtenidos, sobre una plataforma que nunca dejará de tocar y de estar en ella, a menos de que desista en su quehacer diario, en nada más y nada menos que la vida real.

Comenzamos nuevamente con un problema típico en Cálculo Integral, pero que tiene visibles aplicaciones en otras disciplinas, como por ejemplo, hidráulica, los métodos numéricos manejados en ingeniería o áreas afines a las carreras de ingeniería en optimización.

Problema 3: Una compuerta de una presa vertical en un dique tiene la forma de un trapecio, con 8 pies en la parte superior y 6 pies en el fondo, con una altura de 5 pies. ¿Cuál es la fuerza del fluido en la compuerta cuando la parte superior está a 4 pies debajo de la superficie del agua? Esto puede ayudar a diseñar con el material adecuado dichos diques, ya que por estar más cerca de la superficie del agua no tienen tanta presión sobre sí, como la que pueden tener los que están cerca de lo profundo de la presa. De esta forma el material puede, por ejemplo ser más económico.

Observemos que el problema es semejante a los tratados al comienzo de este trabajo, puesto que necesitaremos la idea de aproximación primero y después hacer uso de las técnicas del Cálculo Infinitesimal. Para dar solución:

a. Ubica el eje *y* a la mitad del dique y el eje *x* en la superficie del agua. Si llamas *h* a la profundidad del agua, ¿cómo está relacionada con una función en términos de *y*?____

____

Con esta respuesta lo que estás encontrando, particularmente es lo que sería la altura de una lámina delgada como tú quieras contenida en el dique de la presa. Falta encontrar el largo lo suficientemente pequeño para poder calcular la fuerza sobre esa franja del dique de la presa. Para ello:

b. ¿Cuál es la ecuación de la recta que forma el lado derecho de la compuerta?_______

____

Si despejas la variable independiente de ésta ecuación, ¿Qué representa esa igualdad para esa variable?____

____

c. ¿Cuál es la longitud total *L* de la región que estamos analizando en términos de *x*?_________ En este sentido, ¿cuál es la longitud en términos de y? _______________

____

d. Según la definición de fuerza ejercida por un fluido, cuáles son las funciones a integrar para resolver la situación. Escríbelas ___________________________________

____

e. La integral que se sebe evaluar, tiene como límite inferior: ______________________

f. Y como límite superior: ____

g. ¿Cuál es el resultado que estamos buscando?___________________________________

____

Concluye con tus compañeros de grupo y tu profesor acerca de la importancia que tiene el identificar las distintas formas de modelar un mismo problema, por ejemplo, colocando los ejes cartesianos de otra forma y verificando el resultado y la dificultad o sencillez que se tiene con esa nueva forma. O también, la importancia que se tiene al identificar las funciones, tanto de longitud como de altura y en términos de cuál variable. Los dibujos pueden haber quedado como los que se muestran enseguida. Cabe notar que para la hoja de trabajo, a menos que el profesor así lo crea necesario, las imágenes no deberán ir dentro de las hojas, puesto que la habilidad del alumno será crear el modelo en su mayoría y sólo se le orientará en caso de que así se requiera y según la aceptación del profesor.

A manera de conclusión del capítulo, sólo falta recalcar que el uso del software está fortalecido en cada momento por las actividades que se diseñan por parte de los profesores, puesto que entre más se relacione una situación con él, más será la importancia del mismo. Dejando de manifiesto que los problemas se pueden realizar sin su ayuda, pero con mayores complicaciones, se acude a la plataforma y fortaleza que un software para el área de matemáticas puede brindar. Recordar cuál es la finalidad de un software educativo, y en general de la mayoría de las aplicaciones de escritorio, si no es que todas: *hacer la vida al hombre de forma más sencilla, cómoda y flexible de lo que el mismo ser humano puede alcanzar a lograr*. De ésta forma los problemas a resolver se hacen más rápido y con mayores variantes, si es que uno decide cambiar el rumbo de una solución pasado cierto tiempo o cambiadas la consideraciones finales de cierta interrogante.

Además, hay que notar ahora que el software se puede ir utilizando pero se debe saber que la manera de utilizarse está descrita en párrafos externos a las hojas de trabajo, puesto que se supone, primero se ha dado un curso rápido sobre su funcionamiento y por lo tanto en las hojas se hace referencia a su utilidad y aplicación nada más.

Las respuestas a todas la interrogantes propuestas en este capítulo está enmarcadas al final del mismo y las evaluaciones y resultados sobre el funcionamiento del taller de Cálculo Integral están contemplados para el capítulo posterior, en el cual se ve el rumbo y dirección del proyecto que se está planteando con tanto anhelo.

3.5 RESPUESTAS A LAS ACTIVIDDAES

Para la primera de las actividades se necesita saber que el método de Simpson requiere un número par de puntos, que en este caso son 10. Las respuestas son:

a. 10.

b. No. Porque la regla de Simpson sólo da aproximaciones sobre una función que no se puede conocer con la regla.

c. $a = 0$, $b = 10$.

d. Porque por cada dos sub-intervalos continuos (el orden de *n*) se tienen tres puntos sobre la función, suficientes para construir una parábola que los interpole.

e. $\frac{10-0}{3(10)}(4.2+3.8+4.2+...+4.6)=17.63$.

f. De grado 9. Porque si por ejemplo n = 2, se obtiene un polinomio de grado 1 (línea recta), si n = 3, se obtiene uno de grado 2 (una parábola), y así sucesivamente, con n = 10, un polinomio de grado 9.

g. El polinomio es:

$$-0.000000562x^{10}+0.0000376x^{9}-0.0009714x^{8}$$
$$+0.013894x^{7}-40.649x^{6}+197.79x^{5}-1.7664x^{4}$$
$$+2.9256x^{3}-1.9507x^{2}-0.0851x+4.42.$$

h. $8.9561(10)^{14}$.

i. Es más preciso el primero porque el segundo volumen es extremadamente grande.

La segunda actividad es similar. Las respuestas son:

a.

X	**0**	**25**	**50**	**75**	**100**	**125**	**150**	**175**	**200**
Y	0	1	1	4	6	7	10	14	20

b. 9.

c. 14 pies, 10 pies.

d. Jjjj

e. Segundo grado.

f. Con la tabla de valores anterior, se obtiene el polinomio:

$$p(x)=\frac{2187}{5451250}x^2+\frac{4283}{327075}x+\frac{13}{1869}$$

g. Si.

h. Se puede dar la respuesta más aproximada calculando la integral: $\int_0^{20}\pi(\frac{25}{6561}\sqrt{171675126y+17149987}-\frac{107075}{6561})^2\,dy$ la cual da el volumen igual a: $V=1.9060\times10^6u^3$

La tercera actividad puede ya ser trabajada por el lector.

CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A fin de probar de manera directa el software que se ha diseñado, se ha escogido un grupo piloto para trabajar algunos de los temas que dicho software contiene. También se han diseñado actividades que orientan al estudiante sobre la aplicación de sus conocimientos y habilidades matemáticas para un mejor aprovechamiento de los recursos que ya tiene o que va a aprender. De esta manera, lo que se ha pretendido es obtener de parte de los alumnos la aceptación del ambiente que produce el trabajar con la herramienta al momento de ir conociendo conceptos ligados a la definición de la Integral Definida. Los ejercicios que a continuación se muestran, son los modelos de actividades que se pueden diseñar con la finalidad de provocar en el alumno la sensación de utilidad del software y también la utilidad que se tiene al reconocer los conceptos ligados, no sólo al Cálculo Integral, sino a cualquier campo del conocimiento; pues así toma sentido aquella idea con la que se comenzó el trabajo: la creación y diseño de herramientas (*háblese de computadoras, máquinas, software o cualquier tipo de tecnología*) que ayuden al ser humano a tener una vida más sencilla, más cómoda, en la que dichas herramientas proporcionan al mismo tiempo: disponibilidad de seguir aprendiendo y caminos diversos de resolución de problemas cotidianos.

Dos de las actividades que fueron diseñadas para aplicar el software abarcan temas importantes cuando se está trabajando con Sumas de Riemann: **áreas bajo curvas** y **volúmenes de revolución**. Es preciso señalar que estos temas forman parte del Plan de Estudios y programa vigente en la Universidad Autónoma de Querétaro dentro de la Facultad de Ingeniería. Este programa de Cálculo Integral está dividido básicamente en 3 unidades, destacando la aplicabilidad del software en temas abarcados dentro de cada una de las unidades (en el apéndice aparece el programa, así como los temas, <u>subrayados</u>, que principalmente pueden ser vistos con ayuda del software). Al igual que se ha señalado ya en las problemáticas y en los antecedentes, se ha percibido que los alumnos no visualizan regiones importantes (como anchos o alturas de los rectángulos, radios de los cilindros) para el cálculo de elementos como áreas y volúmenes construidos a partir de la manipulación de funciones conocidas o elementales tanto en el plano como en el espacio.

Es por ello que se ha optado por aplicar el software diseñado con los temas mencionados anteriormente.

El grupo estuvo formado por ocho alumnos de segundo semestre de licenciatura del plan de estudios enero-junio de 2010 en la Facultad de Ingeniería de la UAQ, de los cuales dos estaban re-cursando la materia. Es importante también señalar que antes de entrar con las actividades al salón de clase se dio una introducción con un ejemplo sencillo de la función $f(x)=x^2$ y la construcción de cuatro rectángulos de la misma base en el intervalo [0, 2], de manera que ya tenían un acercamiento previo con la idea de aproximación del área en este ejemplo. En cambio, para la actividad de volúmenes hay que recalcar que no se había visto nada en clase sobre sólidos de revolución, ni siquiera alguna definición o un acercamiento sobre este tema. Entonces, en las actividades sobre volúmenes, los alumnos trabajaron únicamente siguiendo los cuestionamientos que ahí se planteaban, de manera que se supuso, que con la ayuda de la actividad de áreas trabajada con el software además las actividades guiadas en la parte de volúmenes, el alumno sería capaz de interpretar sus resultados y conocer por sí solo los conceptos básicos sobre Sumas de Riemann y volúmenes. Las actividades se desarrollaron en dos clases de aproximadamente una hora y media, estando presente el profesor de grupo y guiando a los alumnos con cuestionamientos básicos del contenido de las actividades.

A continuación se muestran ambas actividades. Más adelante se mostrarán los resultados obtenidos y después se discutirán. Lo que está escrito en fuente cursiva sin negrita no aparece en las actividades.

4.1 Las actividades

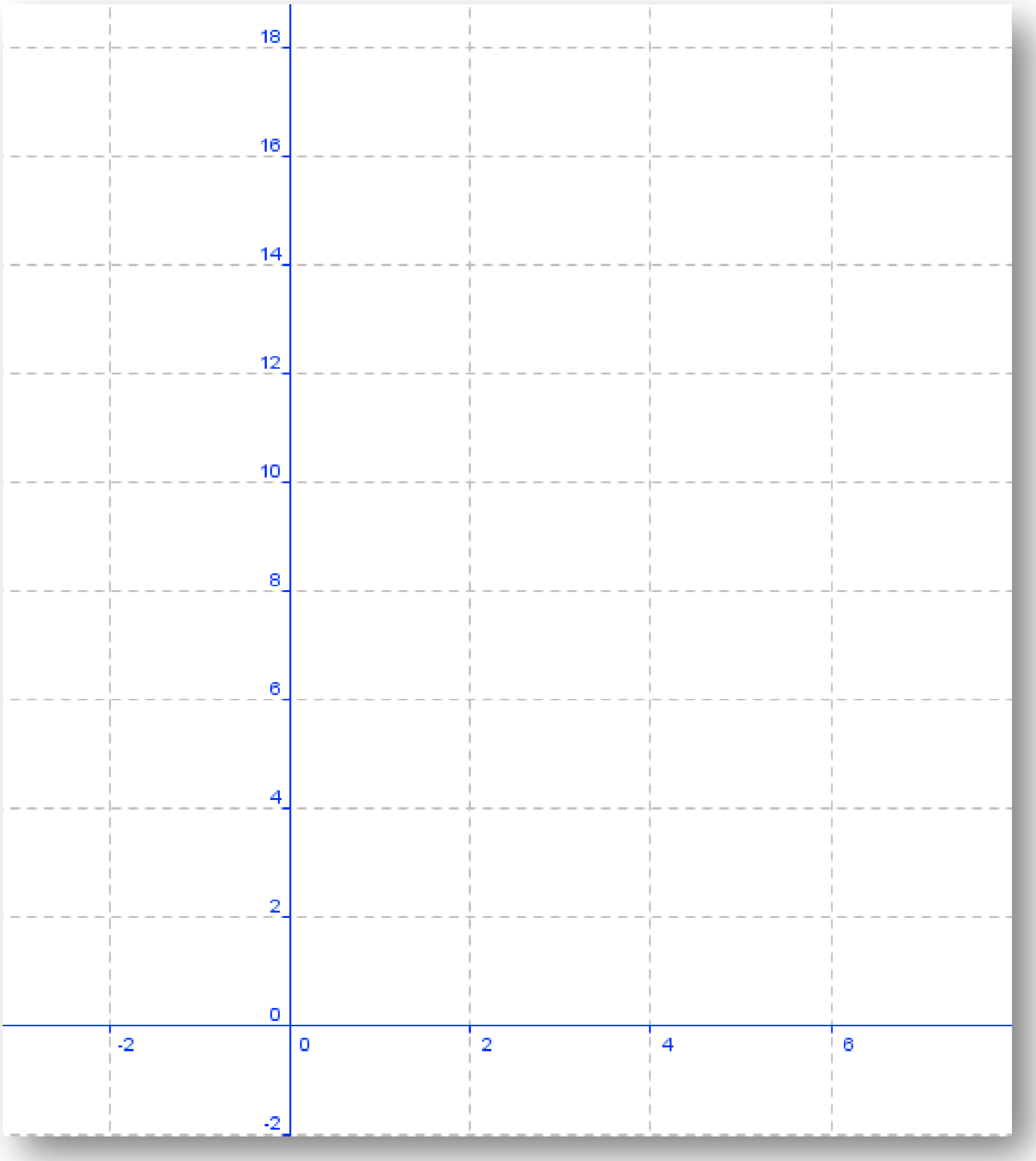
4.1.1 Actividad 1. "ÁREAS"

Calcular el área que se encuentra entre la gráfica de la ecuación $f(x)=x^2+2$, las rectas $x=-2$, $x=4$ y el eje de las abscisas. Para ello, se harán primero algunas aproximaciones con áreas de rectángulos construidos en dicha región.

Lo que se pretendió aquí es que primeramente el alumno realizara algunos cálculos aproximando el área que se solicitaba y que se fuera dando cuenta que resultaba impráctico el procedimiento cuando se le solicitaba que se aproximara más al área real.

- **Parte I.**

a) Esboza primeramente en el siguiente espacio la función a graficar.



b) Identifica claramente la ubicación de los puntos (-2, 0) y (4, 0), así como la región de la cual obtendrás el área (puedes remarcar los límites de la región para visualizarla mejor).

c) Si divides el intervalo [-2, 4] en el eje de las abscisas con 6 sub-intervalos de la mismo longitud, ¿cuál debe de ser esta longitud?______________________________________

¿Cómo la calculas?____

d) ¿Cuántos puntos fueron necesarios para construir los 6 sub-intervalos? ________ Anota en el espacio todos los sub-intervalos que se han construido.

Se puede ver que estos primeros incisos solicitaban al estudiante conocer elementos básicos para graficar funciones y localizar puntos sobre el eje de las abscisas. El objetivo era darse cuenta de si el alumno podía solo con esta parte y qué tanto se le dificultaba, de manera que al aplicar el software le pareciera mucho más sencillo.

e) Por cada sub-intervalo que tienes deberás construir sobre la gráfica que esbozaste un rectángulo que tenga como altura la función evaluada en cada uno de los puntos inferiores de cada sub-intervalo. Colorea los rectángulos una vez construidos. ¿Cómo será el área de la región en comparación con las áreas de los rectángulos?_________________________

____

____

f) ¿Cuáles son las alturas de cada uno de los rectángulos que acabas de construir? ¿Cómo las obtuviste? Anótalas enseguida:

g) Calcula el área de cada uno de los rectángulos y anótalas en el espacio siguiente:

h) Suma éstas áreas y anota el resultado en el espacio:

Puede notarse que la primera parte de la actividad no es muy exigente ni con tantos cálculos ni tampoco con muchos conceptos nuevos, o sea que de ésta manera, una vez terminada la encomienda, estará más seguro de que puede comenzar las otras partes.

- **Parte II.**

a) Si ahora sobre la misma gráfica y dentro del mismo intervalo construyes el doble de rectángulos, todos de la misma longitud, ¿cuál es esta longitud de cada rectángulo?________

b) Realiza la construcción de los rectángulos, tomando la altura de cada uno como la función evaluada en cada uno de los límites inferiores de cada sub-intervalo. Coloréalos de manera que se perciban todos. ¿Cómo será el área de la región en comparación con las áreas de los rectángulos?____

____

c) Anota las alturas de cada uno de los rectángulos en el espacio siguiente:

d) Calcula el área de cada uno de ellos y anótalas enseguida:

e) Suma ahora estas áreas y coloca el total en el espacio:

f) Escribe tus conclusiones acerca de la aproximación del área que se desea encontrar comparando las partes I y II anteriores. Si así lo consideras, puedes dar alguna alternativa o estrategia para encontrar el área exacta de la región.

Después de la tercera parte, con la utilización del software, al resolver los mismos ejercicios que las partes I y II el alumno se dará cuenta de las ventajas que tiene su funcionamiento en cuanto a rapidez para calcular las áreas se refiere. Además de ello notará que la visualización de las gráficas, en conjunto con los rectángulos, es más amena y clara que lo que ha trabajado a papel y lápiz. Precisamente ese es el primer objetivo: la herramienta de cálculo y graficación que puede otorgar la aplicación del software que se está proponiendo.

A continuación se inicia el trabajo y el conocimiento del software.

- **Parte III.**

Para continuar con la actividad, deberás ejecutar el programa "**Calguevi 1.0**" y seguir las instrucciones que se te presentan.

a) Una vez ejecutado el programa, leerás un mensaje pintado en color rojo en el centro de la pantalla: "***Ingresa elemento en la opción: Herramientas***", por lo que deberás ir a la barra de menú y dar click en esa opción.

b) Se te desplegará una lista de opciones y deberás elegir la que dice "***Suma de Riemann Inferior (Área)***".

c) Aparecerá de inmediato una nueva ventana llamada "**Panel-Entrada**" en la cual introducirás lo siguiente:

i. La letra ***x*** en el espacio dedicado a la palabra "**Variable**".
ii. La expresión $x^2 + 2$ en el espacio para "**Función**".[4]
iii. El número – 2 en el espacio "**Límite inferior a:**"
iv. El número 4 en el espacio "**Límite superior b:**"
v. El número 6 en el espacio "**Número de sub-intervalos n:**"

d) Si no se aprecia con tanta claridad la gráfica resultante, así como los rectángulos que se ven construidos, puedes ajustar la escala desde la barra de menú en la opción "**Edición**". Para ello, tendrás que hacerlo de forma manual eligiendo esa opción. Después de eso, puedes modificar las escalas tanto vertical como horizontal, por ejemplo:

Escala horizontal: Límite inferior………. – 2.5.

Límite superior……... 5

Escala vertical: Límite inferior………….. – 3

Límite superior………… 12

[4] La manera en que el software detecta la expresión es escribiendo x^2 + 2 o simplemente x*x + 2.

e) En la parte inferior de la pantalla aparece una cierta información sobre qué es lo que se eligió de entre las posibilidades del panel de entrada, pero además aparecen algunos valores indispensables también. ¿Puedes decir qué significado tienen cada uno de éstos valores?

Anótalo enseguida. ____

____

____

f) Con esa información puedes continuar escribiendo cada una de las áreas de los rectángulos en la parte lateral derecha de la pantalla, en la que deberás completar los cálculos con más o menos cierta precisión, porque de no ser así, se te marcará una ***"tacha"*** como signo de error.

g) Finalmente anotarás el área aproximada de la región con los rectángulos que se construyeron.

Como te darás cuenta la Parte III de ésta actividad es muy similar a la Parte I, sólo que trabajada con un software. Trabaja ahora la Parte II pero con el software y una vez que termines contesta lo que se te pide a continuación:

1.- Si para la misma función y el mismo intervalo, se te pide encontrar una aproximación del área de la región pero ahora con una cantidad de 17 sub-intervalos, ¿cuál sería el ancho de cada rectángulo construido?________________ ¿Cómo lo calcularías?________________

____

2.- ¿Cuántas veces tendrías qué hacer uso de la función para encontrar las áreas de los rectángulos?_________________ ¿Con cuál de las partes anteriores preferirías hacerlo? ¿La I, la II, o la III? ¿Por qué?____

____

3.- Escribe tus conclusiones acerca de la aproximación del área que se desea encontrar comparando las partes anteriores. ____

4.- ¿Cuántos sub-intervalos necesitarías para encontrar el área exacta? ______________

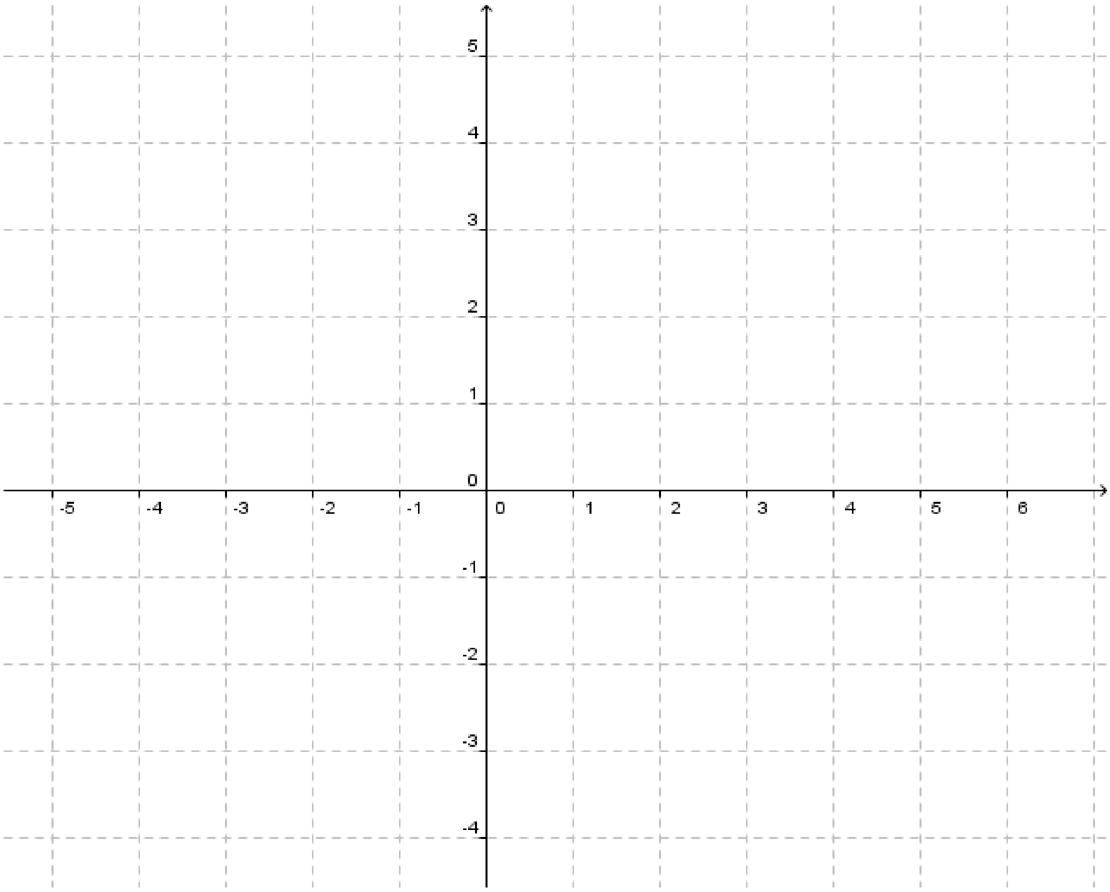
4.1.2 Actividad 2. "VOLÚMENES"

- **Parte I. El ejercicio a lápiz y papel**

Se tiene la función $f(x) = \sqrt{x}$ ¿Cuál será el volumen del sólido obtenido al girar la región comprendida entre la función *f(x)*, eje de las abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3.5$?

Como ya se dijo al principio de este capítulo, el tema de sólidos de revolución no se había trabajado en el grupo antes de realizar las actividades presentes. De este modo era de pensarse que los resultados obtenidos no fueran como se esperaba para el caso de áreas. De hecho en las conclusiones de los alumnos (más abajo se verá esto) se puede notar cierta relación y la mayoría asume que como no se había visto el tema, no se podía entender lo que se pedía. Sin embargo, aun así se trabajó hasta el final. Ya con el trabajo del software la idea era que sus dudas se despejaran, puesto que la funcionalidad de éste ayuda a visualizar de manera concreta lo que se pedía en la actividad que se realiza a papel y lápiz.

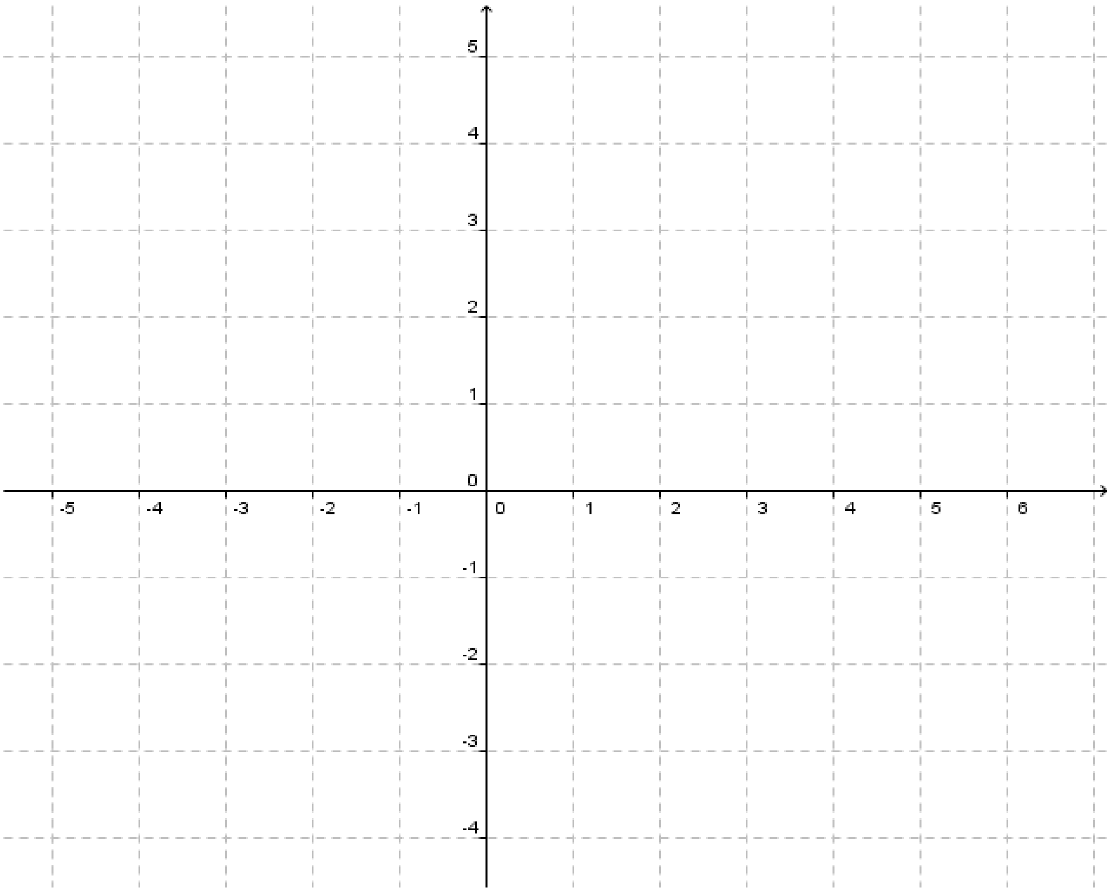
a) Haz un bosquejo de la función en el siguiente plano cartesiano:



b) Si consideras una partición del intervalo [1, 3.5] en 10 sub-intervalos de la misma longitud, ¿cuáles son los puntos que delimitan a cada uno de los 10 sub-intervalos? ¿Cuál es la distancia entre cada par de puntos (la longitud de cada sub-intervalo)? ¿Cómo la obtienes?

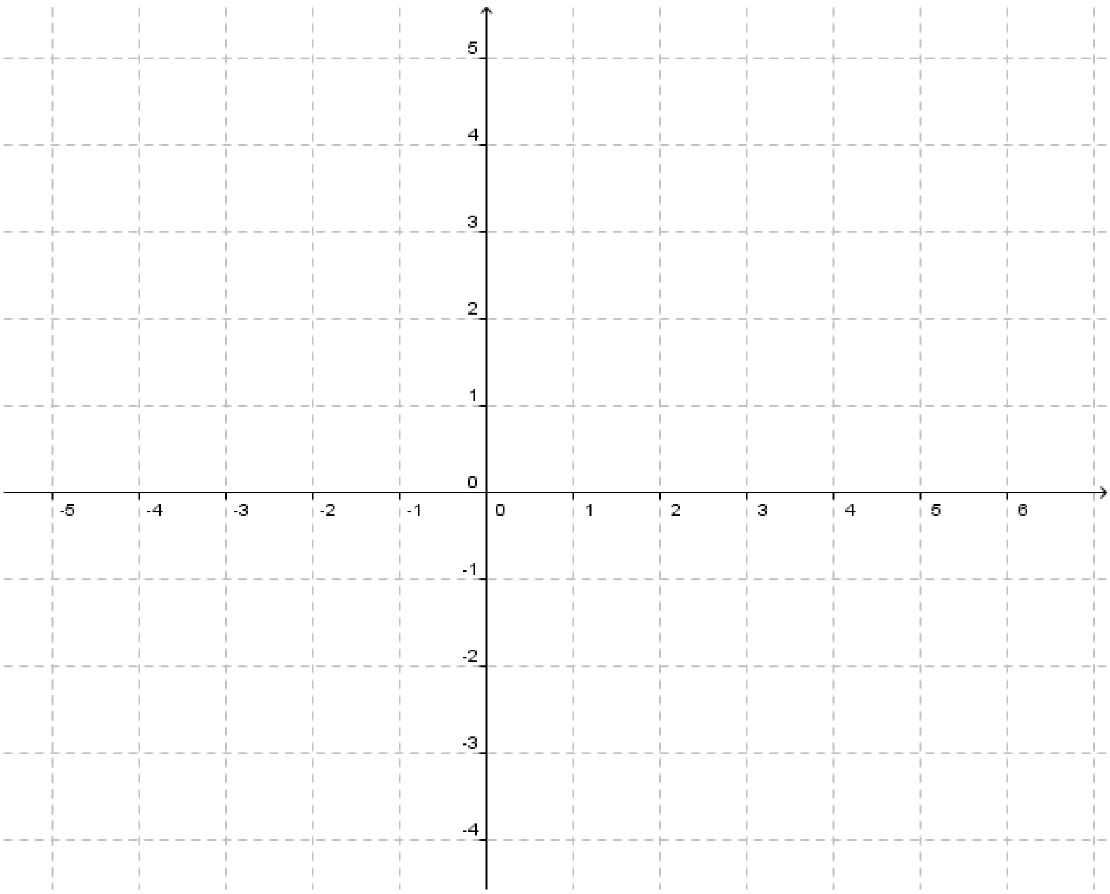
c) ¿Cuál es la forma del sólido del cuál debes encontrar el volumen? ¿Podrías hacer un bosquejo? ¿Conoces alguna fórmula para encontrar el volumen de formas como la que se está analizando en esta ocasión?

d) ***Haz un bosquejo de la función girada y del volumen construido.***



e) Elige alguno de los sub-intervalos construidos y construye un cilindro que tenga de altura la longitud de dicho sub-intervalo y que sea parte del volumen que se desea encontrar. ¿Cómo tendrías qué utilizar la función para saber el volumen del cilindro que has de

f) Haz un bosquejo del cilindro.



g) Si haces lo mismo (construyes un cilindro) con los demás sub-intervalos, ¿Qué tan cercano estás del volumen que se te pidió calcular?

h) Realiza el cálculo de los volúmenes de los cilindros construidos anota tus procedimientos en la parte de abajo.

i) ¿Cómo has construido tus cilindros? ¿Bajo qué procedimiento te has basado para hacer la construcción? Responde a estas cuestiones en el espacio siguiente y describe si se te dificultó en algún momento la construcción de tus cilindros.

- **Parte II. El ejercicio con el software**

Igualmente que en la actividad 1 debes ahora ejecutar **Calguevi 1.0**.

a) ¿Cuál de los elementos que está en la opción herramientas deberás utilizar para responder a la cuestión inicial de esta actividad?______________________________

____

b) Si la idea es aproximar el volumen primeramente con 10 sub-intervalos en el intervalo [1, 3.5], dónde debes ubicar éstos valores en el Panel-Entrada.______________________

____

c) Anota tus observaciones después de ingresar los datos correctamente al panel. ¿Qué es lo que se muestra en la pantalla? ¿Son claros los elementos graficados?________________

____

____

____

d) ¿Qué es lo que indican los renglones que aparecen en la parte inferior de la pantalla? ¿Es complicado seguir las indicaciones? ¿Crees que son necesarios esos datos para poder responder a la encomienda inicial?_______________________________________

____

____

____

____

e) Si en la parte derecha de la pantalla debes colocar los volúmenes de los cilindros dibujados, al igual que en la parte I, ¿qué tan complicado te resulta este procedimiento con el software?____

____

____

f) ¿Cuáles son los volúmenes que identifica el software en sus campos como los correctos? ¿Cuál es la suma de todos ellos? ¿Esta suma es la misma que habías obtenido en la parte I, o hay diferencias? ____

____

____

____

____

g) Dentro del ambiente del software para graficar, para calcular, para consultar la ayuda, según tus apreciaciones, ¿qué crees que le haga falta para que se pueda utilizar con más productividad en estos temas de Sumas de Riemann?______________________________

____

____

____

h) Escribe tus conclusiones acerca del trabajo para conocer Sumas de Riemann, a papel y lápiz y con el software. Analiza los procedimientos desde distintos puntos de vista. ______

____

____

____

____

____

____

____

4.2 RESULTADOS

Al principio de la actividad 1 sobre áreas, cuando se pide graficar la función $f(x) = x^2 + 2$ lo que se obtiene es algo que se esperaba: todos los alumnos cumplieron sin mayor dificultad con el ejercicio. Al momento de pedir que se identificara la longitud de los sub-intervalos tampoco hubo problema, esto puede ser porque eran pocos sub-intervalos, además de que la instrucción era muy clara "*iguales en longitud*". Sin embargo cuando se hace la pregunta "*¿cuántos puntos fueron necesarios para construir los 6 sub-intervalos?*", hubo algunos errores, por ejemplo se contestó que eran necesarios 6 u 8 puntos (dos alumnos dijeron que eran 8 y dos dijeron que eran 6). Solamente 4 de los 8 alumnos dijeron que eran necesarios 7 puntos. Esto quiere decir que no se ha entendido claramente la relación entre puntos y sub-intervalos. *Se sabe que por cada dos puntos se obtiene siempre un intervalo, entonces para formar **n** sub-intervalos, se necesitan **n** + 1 puntos.*

Otro detalle que resulta de la actividad se da cuando se pregunta "*¿cómo será el área de la región en comparación con las áreas de los rectángulos?*" Lo que sucede en este caso es que algunos alumnos responden "*será mayor*" y otros "*será menor*", lo cual indica, para el caso de los que contestan "*será menor*", que se quedan con la idea de los rectángulos inferiores, siendo que se pregunta sobre el área que está por encima de ellos, además de la que los rectángulos contienen. Por otro lado, en lo que respecta a las evaluaciones de los puntos inferiores de cada sub-intervalo, no se presentan detalles mayores, de hecho la mayoría de los alumnos concluyen algo como "*son la función evaluada en ese punto, las alturas se obtienen evaluando en la función*" y por lo tanto, las alturas son correctas en todos los casos. Esto ocasiona que las áreas para cada uno de los 6 rectángulos sean correctas, asimismo la aproximación total del área en cuestión.

En lo que respecta a la parte II, simplemente las respuestas son correctas y se puede ver que nada más afianzan lo que se planteó en la parte I. por ejemplo; se concluye que el área aproximada sigue siendo aún menor cuando se construyen 12 rectángulos con la misma base (se vuelve a contestar correctamente con cálculos precisos), incluso ya se dan algunas conclusiones mayores, aseverando que la aproximación sería mejor si se construyeran una infinidad de rectángulos similares.

Ya para la parte III se obtienen los resultados siguientes. Cuando se pregunta qué significado tienen los renglones que aparecen en la parte inferior del software al insertar los datos de la función a graficar algunos contestan que son las áreas de cada rectángulo, utilizando el ancho y la función evaluada en ese punto (se puede inferir que en lo que respecta al llenado de campos para ingresar elementos de la función y de los intervalos dentro del software no hay ninguna dificultad). Sin embargo alguno de los alumnos lo que contesta literalmente es lo que sigue: “es una serie que va aumentando”. Al parecer no visualiza lo que cada renglón significa, siendo que eso es lo que está haciendo al momento de calcular las áreas de los rectángulos que ha construido. Es importante mencionar que el software, por la forma en que está estructurado computacionalmente, imprime al final de cada renglón en esa parte inferior de la pantalla principal un símbolo parecido a un “cero”, por lo que algunos alumnos mencionaban que era algo confuso el identificar completamente lo que significaba cada línea.

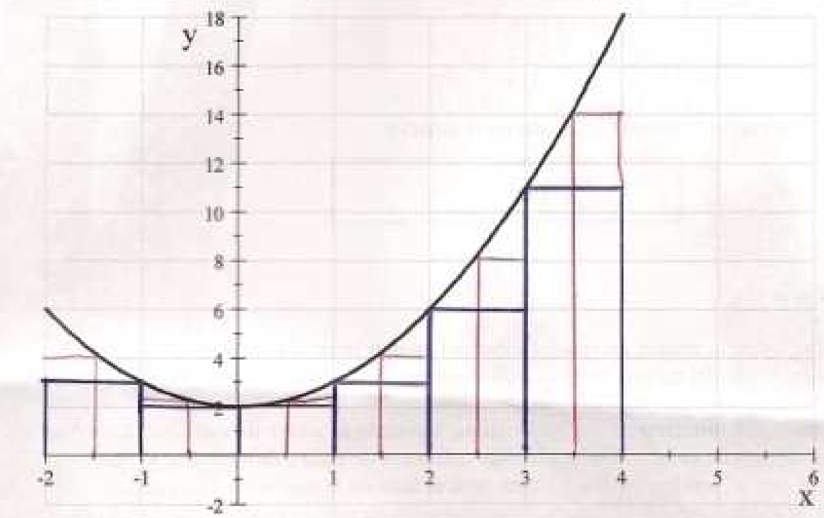
En lo que se refiere a los campos del lado derecho, los cuales deben ser llenados con las áreas de cada rectángulo construido, no hay demasiada complicación para obtener sólo resultados correctos. Esto se debe más que nada al hecho de que se ha entendido, ya sea por experiencia de las partes I y II o por la ayuda de la parte inferior del software. Quizá lo que resulte más interesante es la conclusión que el alumno da en la parte final de la actividad. Por ejemplo, cuando se pregunta: ¿con cuál de las formas vistas te gustaría encontrar el área aproximada pero trabajando con 17 sub-intervalos? La respuesta es contundente. Todos contestaron que con la forma de la parte III, es decir utilizando el software. Ya después cuando se pide den sus argumentos del porqué, surgen respuesta como la siguiente: “creo que es más cómodo utilizar el software pero comprendiendo lo que se hace en la parte I y II, aunque conforme se desea más precisión los cálculos se van complicando”. En este sentido, se entiende que el alumno puede utilizar el software sin mayor dificultad, una vez que se han planteado actividades encaminadas, pero con la tecnología a papel y lápiz. Enseguida se mesura una copia escaneada de uno de los trabajos sobre áreas, el cual contiene algunas de las conclusiones ya descritas con anterioridad.

Actividad 1.

Se tiene la ecuación $f(x) = x^2 + 2$ y se desea encontrar el área que hay entre la gráfica de la función, las rectas $x = -2$, $x = 4$ y el eje de las abscisas. Para ello, se harán primero algunas aproximaciones con áreas de rectángulos construidos en dicha región.

- **Parte I.**

a) Esboza primeramente en el siguiente espacio la función a graficar.



b) Identifica claramente la ubicación de los puntos (-2, 0) y (4, 0), así como la región de la cual obtendrás el área (*puedes remarcar los límites de la región para visualizarla mejor*).

c) Si divides el intervalo [-2, 4] en el eje de las abscisas con 6 sub-intervalos del mismo ancho, ¿cuál debe de ser este ancho? El ancho será de 1
¿Cómo lo calculas? Con la fórmula de $\Delta x = (b-a)/n$

d) ¿Cuántos puntos fueron necesarios para construir los 6 sub-intervalos? Seis puntos
Anota en el espacio todos los sub-intervalos que se han construido.
$x_0 = -2$ $x_2 = 0$ $x_4 = 2$
$x_1 = -1$ $x_3 = 1$ $x_5 = 3$

e) Por cada sub-intervalo que tienes deberás construir sobre la gráfica que esbozaste un rectángulo que tenga como altura la función evaluada en cada uno de los puntos inferiores de cada sub-intervalo. Colorea los rectángulos una vez construidos. ¿Cómo será el área de la región en comparación con las áreas de los rectángulos? El area de la region sera mayor porque los rectángulos construidos no abarcan todo el espacio del area bajo la curva

f) ¿Cuáles son las alturas de cada uno de los rectángulos que acabas de construir? ¿Cómo las obtuviste? Anótalas enseguida:

$f(x_0) = f(-2) = 6$
$f(x_1) = f(-1) = 3$
$f(x_2) = f(0) = 2$
$f(x_3) = f(1) = 3$
$f(x_4) = f(2) = 6$
$f(x_5) = f(3) = 11$

g) Calcula el área de cada uno de los rectángulos y anótalas en el espacio siguiente:

Area 1 = (1)(6) = 6
Area 2 = (1)(3) = 3
Area 3 = (1)(2) = 2
Area 4 = (1)(3) = 3
Area 5 = (1)(6) = 6
Area 6 = (1)(11) = 11

h) Suma éstas áreas y anota el resultado en el espacio:

31

- **Parte II.**

a) Si ahora sobre la misma gráfica y dentro del mismo intervalo construyes el doble de rectángulos, todos del mismo ancho, ¿cuál es éste ancho que deben tener? 0.5

b) Realiza la construcción de los rectángulos, tomando la altura de cada uno como la función evaluada en cada uno de los límites inferiores de cada sub-intervalo. Coloréalos de manera que se perciban todos. ¿Cómo será el área de la región en comparación con las áreas de los rectángulos? Sera mayor porque ahora existen mas rectangulos que abarcan mayor área

c) Anota las alturas de cada uno de los rectángulos en el espacio siguiente:

$f(x_0) = f(-2) = 6$
$f(x_1) = f(-1.5) = 4.25$
$f(x_2) = f(-1) = 3$
$f(x_3) = f(-0.5) = 2.25$
$f(x_4) = f(0) = 2$
$f(x_5) = f(0.5) = 2.25$
$f(x_6) = f(1) = 3$
$f(x_7) = f(1.5) = 4.25$
$f(x_8) = f(2) = 6$
$f(x_9) = f(2.5) = 8.25$
$f(x_{10}) = f(3) = 11$
$f(x_{11}) = f(3.5) = 14.25$

d) Calcula el área de cada uno de ellos y anótalas enseguida:

Area 1 = 6
2 = 4.25
3 = 3
4 = 2.25
5 = 2
6 = 2.25

Area 7 = 3
8 = 4.25
9 = 6
10 = 11
11 = 14.25

e) Suma ahora estas áreas y coloca el total en el espacio:

56

f) Escribe tus conclusiones acerca de la aproximación del área que se desea encontrar comparando las partes I y II anteriores. Si así lo consideras, puedes dar alguna alternativa o estrategia para encontrar el área exacta de la región.

Entre mas rectangulos o subintervalos usemos, mas cerca estaremos de encontrar el area exacta del area bajo la curva, por lo que para encontrar el area en necesario realizar un limite cuando $n \to \infty$

- **Parte III.**

Para continuar con la actividad, deberás ejecutar el programa "**V.G. SumasR.**" y seguir las instrucciones que se te presentan.

a) Una vez ejecutado el programa, leerás un mensaje pintado en color rojo en el centro de la pantalla: "***Ingresa elemento en la opción: Herramientas***", por lo que deberás ir a la barra de menú y dar click en esa opción.

b) Se te desplegará una lista de opciones y deberás elegir la que dice "***Suma de Riemann Inferior (Área)***".

c) Aparecerá de inmediato una nueva ventana llamada "**Panel-Entrada**" en la cual introducirás lo siguiente:

i. La letra ***x*** en el espacio dedicado a la palabra "**Variable**".
ii. La expresión $x^2 + 2$ en el espacio para "**Función**".[1]
iii. El número – 2 en el espacio "**Límite inferior a:**"
iv. El número 4 en el espacio "**Límite superior b:**"
v. El número 6 en el espacio "**Número de subintervalos n:**"

d) Si no se aprecia con tanta claridad la gráfica resultante, así como los rectángulos que se ven construidos, puedes ajustar la escala desde la barra de menú en la opción "**Edición**". Para ello, lo tendrás que hacer de forma manual eligiendo esa opción. Después de eso, las escalas tanto vertical como horizontal las puedes modificar a por ejemplo:

Escala horizontal: Límite inferior………. – 2.5.
Límite superior……... 5

Escala vertical: Límite inferior………….. – 3
Límite superior………… 12

e) En la parte inferior de la pantalla aparece una serie de información sobre qué es lo que se eligió de entre las posibilidades, pero además aparecen algunos valores indispensables también. ¿Puedes decir qué significado tienen cada uno de éstos valores?

[1] La manera en que el software detecta la expresión es escribiendo x^2 + 2 o simplemente x*x + 2.

3

Anótalo enseguida. Lo que nos muestra es la función, los puntos que abarcan la region asi como el número de subintervalos y mas abajo muestra como sacar las áreas de cada rectángulo

f) Con esa información puedes continuar escribiendo cada una de las áreas de los rectángulos en la parte lateral derecha de la pantalla, en la que deberás completar los cálculos con más o menos cierta precisión, puesto que de no ser así, se te marcará una ***"tacha"*** como un signo de error.

g) Finalmente anotarás el área aproximada de la región con los rectángulos que se construyeron.

Como te darás cuenta la Parte III de ésta actividad es muy similar a la Parte I, sólo que trabajada con un software. Trabaja ahora la Parte II pero con el software y una vez que termines contesta lo que se te pide a continuación:

1.- Si para la misma función y el mismo intervalo, se te pide encontrar una aproximación del área de la región pero ahora con una cantidad de 17 sub-intervalos, ¿cuál sería el ancho de cada rectángulo construido? 0.35294... ¿Cómo lo calcularías? con la fórmula $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

2.- ¿Cuántas veces tendrías qué hacer uso de la función para encontrar las áreas de los rectángulos? 1 por cada intervalo ¿Con cuál de las partes anteriores preferirías hacerlo? ¿La I, la II, o la III? ¿Por qué? Lo haria manualmente con la parte I respaldando mis resultados con la parte III (software)

3.- Escribe tus conclusiones acerca de la aproximación del área que se desea encontrar comparando las partes anteriores.

En ocasiones el area varía mucho dependiendo de cuantos subintervalos se utilizen

4.- ¿Cuántos sub-intervalos necesitarías para encontrar el área exacta?

n subintervalos, es decir, cuando $n \to \infty$ encontramos el area exacta bajo la curva

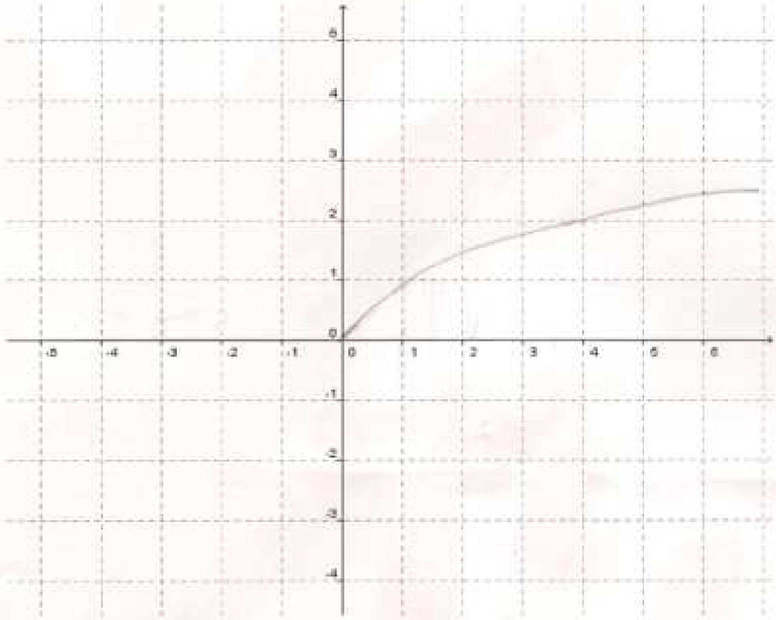
Ya para la actividad II, sobre volúmenes las cosas no fueron tan alentadoras. Esto se debe a que no se había dado una pequeña introducción sobre el tema, ni tan siquiera una definición. Sin embargo, las personas que lo atacaron, se dieron cuenta de que los planteamientos eran similares a los trabajados en la actividad de áreas, puesto que contestaron bien las preguntas sobre longitud de los sub-intervalos y bosquejaron con claridad lo que se les solicitaba. En éste sentido tomaron esta actividad como una generalización de la actividad anterior, obteniendo así un trabajo aceptable. Deliberadamente no se menciona si los cilindros que se van a dibujar son inferiores o superiores y sin embargo los alumnos construyen cilindros inferiores, como si esos fueran los obligados a dibujar. Un detalle que complica la actividad es el hecho de que no visualizan exactamente si los cilindros están acostados o parados sobre el eje de las abscisas, puesto que los cálculos ya no los logran realizar, además de que argumentan no se les ha apoyado lo suficiente para trabajar la actividad, en el sentido de que no se ha dado una clase anteriormente sobre el tema.

Sucede algo similar con la utilización del software, en el sentido de que el software no los ha guiado como ellos quisieran. Esto se debe a que el software presenta, para el caso particular de sólidos de revolución, una representación de cilindros buena, pero no así del espacio de graficado (el caso 3D). En seguida se muestra uno de los trabajos escaneados que manifiesta lo que se menciona más arriba.

Parte 1. El ejercicio a lápiz y papel

Se tiene la función $f(x)=\sqrt{x}$ ¿Cuál será el volumen del sólido obtenido al girar la función sobre el eje de las abscisas en el intervalo [1, 3.5]?

Bosquejo de la función:::



Si consideras una partición del intervalo [1, 3.5] en 10 sub-intervalos de la misma longitud, ¿cuáles son los puntos que delimitan a cada uno de los 10 sub-intervalos? x_i,
¿Cuál es la distancia entre cada par de puntos (el ancho de cada sub-intervalo)?

0.25

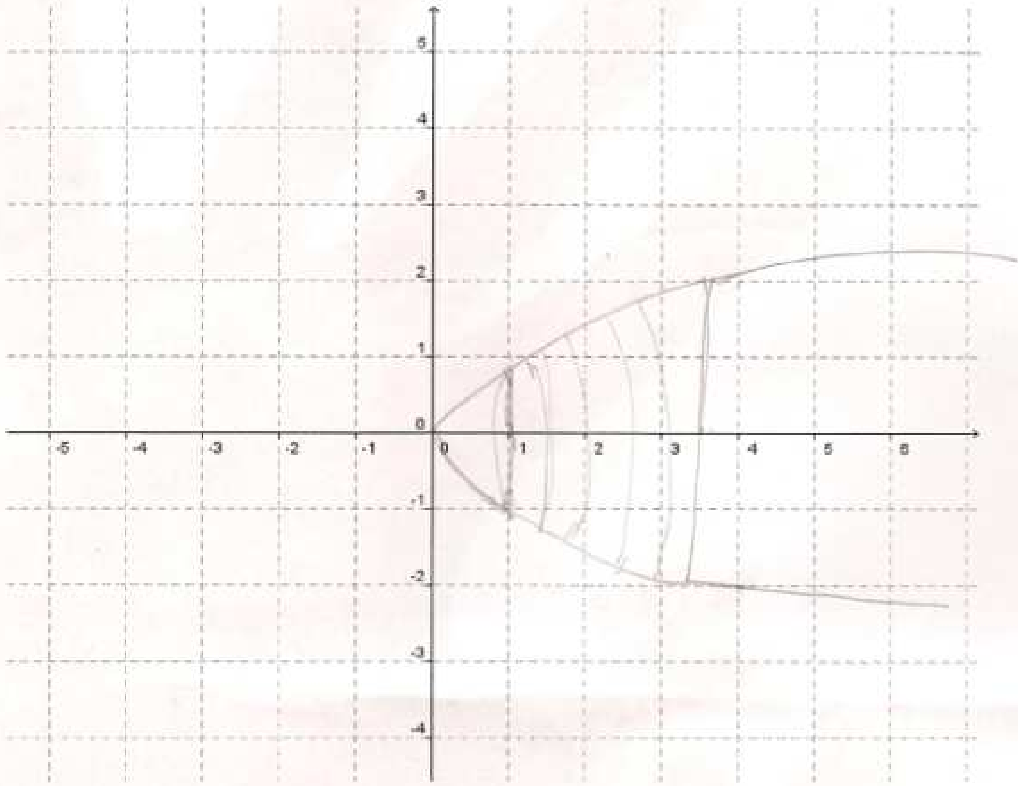
¿Cuál es la forma del sólido del cuál debes encontrar el volumen? ¿Podrías hacer un bosquejo? ¿Conoces alguna fórmula para encontrar el volumen de formas como la que se está analizando en esta ocasión?

que se estaría buscando algo más o menos así:

, quitando el volumen buscado sería.

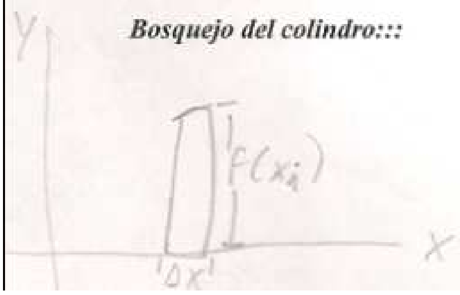
pero como es irregular no tengo fórmula que pudiera emplear.

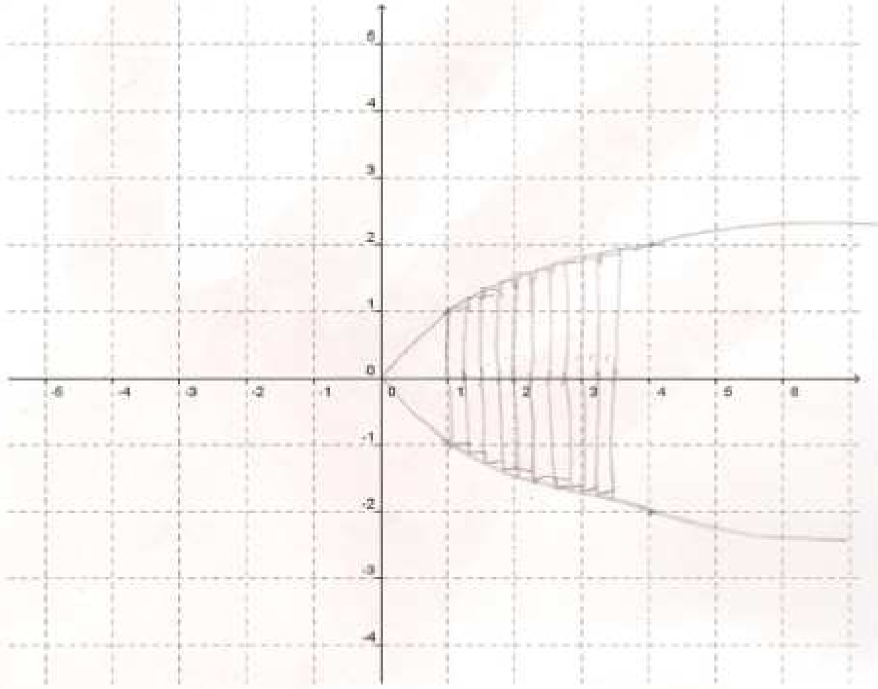
Bosquejo de la función girada y del volumen construido:::



Elige alguno de los sub-intervalos construidos y construye un cilindro que tenga de altura al ancho de dicho sub-intervalo y que sea parte del volumen que se desea encontrar. ¿Cómo tendrías qué utilizar la función para saber el volumen del cilindro que has de calcular?

Bosquejo del colindro::: para un solo cilindro sería algo así.





Si haces lo mismo (construyes un cilindro) con los demás sub-intervalos, ¿Qué tan cercano estás del volumen que se te pidió calcular?

Esta cerca pero aun no es todo, pues
espacios porque sólo son 10 subintervalo

Realiza el cálculo de los volúmenes de los cilindros construidos a anota tus procedimientos en la parte de abajo.

Parte 2. El ejercicio con el software

Utilizando el software… Ya sabrás cuáles son los pasos a seguir con la ayuda de la parte 1 para utilizar V.G SumasR.

Ahora obtén tus respuestas al ejercicio anterior pero utilizando el programa.

Escribe tus conclusiones acerca del trabajo para trabajar Sumas de Riemann, a papel y lápiz y con el software. Analiza los procedimientos desde distintos puntos de vista. Concluye en al aprox. 10 renglones lo que has observado.

Se sabe que la formula para calcular el volumen de un cilindro es: $V = \pi r^2 h$.

En nuestro caso:

$h = \Delta x$

$r^2 = f(x_i)$

Entonces:

$V_0 = \pi [f(x_0)]^2 \Delta x = 0.7853$

$V_1 = \pi [f(x_1)]^2 \Delta x = 0.9817$

$V_2 = \pi [f(x_2)]^2 \Delta x = 1.178$

$V_3 = \pi [f(x_3)]^2 \Delta x = 1.3744$

$V_4 = \pi [f(x_4)]^2 \Delta x = 1.5707$

$V_5 = \pi [f(x_5)]^2 \Delta x = 1.7671$

$V_6 = \pi [f(x_6)]^2 \Delta x = 1.9643$

$V_7 = \pi [f(x_7)]^2 \Delta x = 2.1598$

$V_8 = \pi [f(x_8)]^2 \Delta x = 2.3561$

$V_9 = \pi [f(x_9)]^2 \Delta x = 2.552$

[redacted] Conclusiones y Observaciones.

La verdad me fue muy muy difícil poder conceptualizar lo que nos piden en la actividad porque la posición del cilindro no es claro a la primera, por que enseguida se piensa en cilindros parados pero ya despues se ve que estan acostados, y aún así todavia no entiendo como nos acercan al volumen buscado porque se tendría que hacer una suma de los cilindros pero alrededor del eje X, y no comprendo bien como se haría eso.

El software no enumera los ejes, no comprendo bien la gráfica por que dibuja como una serie de discos y no parecen ser lo que se calcula.

Agregando los comentarios expuestos en la parte de areas, pienso que falta poner una parte donde diga, despues de calcular los volumenes o areas, cual es el valor de la suma y cual es el valor real del volumen o área buscado para ver que tan cerca o lejos se esta del valor deseado.

Dentro de las actividades anteriores, en el área de conclusiones, los alumnos manifestaban ya algunos detalles al trabajar con el software. Unos detalles a favor y por supuesto, otros en contra. Por ejemplo, algunos de los puntos a favor indican que es fácil de entender, los gráficos son buenos pero que se pueden mejorar, lo visual está dentro de los estándares de agrado, tiene ayuda en la parte inferior de la pantalla, lo que permite que se visualice de buena forma lo que está saliendo con el resultado y comparar si se están haciendo bien las cosas. Algo que parece bueno es la inclusión de campos indicadores de respuestas que verifican si están escribiéndose resultados correctos o no.

CAPÍTULO V

5.1 CONCLUSIONES

Es importante señalar que el software que se ha preparado con la ayuda de alumnos y profesores de la universidad por poco más de un año es aún una aplicación que tiene detalles corregibles en varios sentidos. Por ejemplo se puede ver en el apartado de la interfaz en el capítulo 3 que tiene una apariencia común y corriente del software que existe sobre matemáticas. Por supuesto que se pueden dar sugerencias sobre el diseño del mismo para que su apariencia sea del agrado del usuario, así como también favorezca la apreciación clara de sus componentes en pantalla y que al mismo tiempo ayude al estudiante de Cálculo Integral a retener los conceptos que intentan enseñar con ayuda del software.

Una última observación sobre los resultados comentados anteriormente es que el software en gran medida puede agilizar no sólo el estudio de Sumas de Riemman, sino de otras áreas del Cálculo Integral, puesto que cuando se aplicaban algunos de los ejercicios los alumnos decían cosas como "¿y no calcula integrales?" "¿cómo se trabajaría con el software si se quisiera enseñar derivadas?", obviamente no abarcaría todo el Cálculo Integral , pero es seguro que si contiene más trabajo con otros conceptos entonces se vería más rico en contenido y se podría utilizar más frecuentemente en cursos similares.

Calguevi 1.0 está pensado para que pueda ser incorporado a más grupos de la facultad de ingeniería una vez que tenga los siguientes elementos que aún le hacen falta: cálculos de integrales y derivadas, series, gráficas de más de dos funciones en una misma pantalla para un mismo problema, así como los elementos visuales de áreas y volúmenes necesarios. Será en otro momento no lejano y en otro escrito similar cuando se esté leyendo que Calguevi es un software más o menos completo que ayuda a la enseñanza y al aprendizaje del Cálculo a nivel Licenciatura.

LITERATURA CITADA

Acuña, M., Calvillo, J. y Cantoral, R. (2006). Presentación de aspectos visuales en problemas de cálculo y análisis. *X Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Sta. Cruz Tlaxcala (2006). Reporte de Investigación.* Págs. 01-11.

Aparicio, E. y Ávila, E. (2006). Un estudio de las facultades que presentan estudiantes universitarios en el área del cálculo. *Memoria electrónica del V encuentro de investigación educativa.* Mérida Yucatán.

Aparicio, E. y Ordaz, G. (2006). Estudio Cualitativo sobre la Reprobación del Cálculo en el área de Ciencia Computacionales y Matemáticas. *X Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Sta. Cruz Tlaxcala (2006). Reporte de Investigación.* Págs. 22-30.

Balderas, A. (2001). Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales asistido por computadora. *Tesis de maestría, tomo 1,* UAQ, México. (No publicada).

Barrera, J. (2002). La construcción de la derivada a través de la noción de variación en estudiantes de Nivel Superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 15(1), México, Grupo Editorial Iberoamérica. Págs. 67-72.

Brousseau, G. (1999) Educación y didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática* 12(1):5-38. Obtenido en febrero del 2000.

Cabrera, L. y Aparicio, E. (2006). Una propuesta de capacitación didáctica para profesores de cálculo en el nivel superior. *X Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Sta. Cruz Tlaxcala (2006). Reporte de Investigación.* Págs. 43-53.

Campanario, M. (2003). Contra algunas concepciones y prejuicios comunes de los profesores universitarios de ciencias sobre la didáctica de las ciencias. *Revista Enseñanza de las ciencias*, 21(2). Págs. 319-328.

Cortés, C. y Hitt, F. (2001). Hacia el siglo XXI: Funciones en Contexto en Formato Electrónico. *IX Encuentro de Profesores de Matemáticas de Educación Superior, Mor. Michoacán*. Págs. 118-123.

Cortés, C. y Hitt, F. (2005). Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza. Morelia Mich. Morevallado Editores.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 4(2). Págs. 103-128.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una epistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 8-3. Págs. 265-286.

García, E. (2006). Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula. Elemento de análisis en la reprobación y rezago del cálculo. *Tesis de Licenciatura*, Mérida, Yucatán.

Guevara, V. (2008). La Modelación Matemática en la Formación de Profesores de Bachillerato. *Tesis de Licenciatura*. UAQ, México. (No publicada).

Cabrera, L. y Zaldívar, J. (2007). Formación Didáctica en Cálculo Universitario. Una Propuesta Basada en el Diseño de Actividades como Eje Rector. *XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Mérida, Yucatán (2007). Trabajo de Investigación.* Págs. 396-407.

D`Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (Número Especial).* 2006. Págs. 177-195.

D`Amore, B. y Martini, B. (2000). Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 3(1). Págs. 33-45.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. El futuro del Cálculo Infinitesimal. Capítulo V: ICME-8, Sevilla, España: Iberoamérica, México, DF. Págs. 155-181.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (ed.), "Investigaciones en Matemática Educativa II" (págs. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Llorens, J. y Santoja, F. (1997). Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de la Integral. *Divulgaciones Matemáticas* 5(1). Págs. 61-76.

Mochón, S. (2006). Avances y hallazgos en la implementación de tecnologías para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias. *Matemática educativa, treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*, México, Santillana y Cinvestav. Págs. 101-121.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del Cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM.* Págs. 81-96.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. EEUU, NCTM.

Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(1). Págs. 69-90.

Zaldívar, J. (2006). Un estudio sobre elementos para el diseño de actividades didácticas en cálculo. *Tesis de licenciatura.* Universidad Autónoma de Yucatán, Yucatán, Mérida.

APENDICE

a) REGLA SE SIMPSON

Esta regla recibe ese nombre en honor al matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761) y aproxima una función f mediante polinomios de a lo más, grado dos. La regla dice:

Sea f continua en [a, b]. La regla de Simpson para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ es

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+...+4f(x_{n-1})+f(x_n)].$$

Además, cuando $n \to \infty$, el lado derecho tiende a $\int_a^b f(x)dx.$ Nota: n debe ser par.

b) REGLA DE LOS TRAPECIOS

Sea f continua en [a, b]. La regla de los trapecios para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ es

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)].$$

Además, cuando $n \to \infty$, el lado derecho tiende a $\int_a^b f(x)dx.$

c) INTERPOLACIÓN

En las aplicaciones es frecuente tratar funciones que no son del tipo de las elementales, además de que también es común enfrentarse a funciones definidas en forma tabular o gráfica, de las que se desconoce su expresión analítica. Un ejemplo de esto es la interpolación de datos obtenido experimentalmente, donde entendemos por interpolación que un conjunto discreto de datos continuará con las mismas características que los obtenidos hasta cierto momento.

Cuando los resultados no se requieren con gran aproximación, estos problemas se resuelven, generalmente, usando técnicas gráficas mediante la construcción de tangentes a las curvas trazadas en forma aproximada y estimando áreas bajos las mismas. Sin embargo, hay casos en los que se requiere dar una aproximación alta, y para esto existen varios métodos numéricos disponibles. Estos métodos consisten, básicamente, en sustituir la función determinada por datos experimentales, o por una expresión matemática complicada, o por una función que aproxime a los puntos que la definen. Generalmente, se usan funciones racionales enteras (polinomios) de primero, segundo y tercer grado.

Al discutir los errores en que se incurre al usar las fórmulas para derivar e integral numéricamente, se verá que los errores inherentes a la derivación son mayores que los correspondientes a la integración.

- *Interpolación por el método de Newton:*

Dada la función $y = f(x)$ de finida por la siguiente tabla (los incrementos son constantes en los valores de x), el problema de la interpolación consiste en encontrar el valor de la función $f(x)$ para un valor x incluido entre dos valores consecutivos de la tabla, $x_k < x < x_{k-1}$. Un primer intento para resolver este problema, consiste en admitir que la función $f(x)$ se aproxima a un polinomio $P(x)$ de grado n, que pasa por todos los puntos que definen la función, como se muestra enseguida.

x_i	y_i
x_0	y_0
$x_1 = x_0 + h$	y_1
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2
$x_3 = x_0 + 3h$	y_3
$x_4 = x_0 + 4h$	y_4
$x_n = x_0 + nh$	y_n

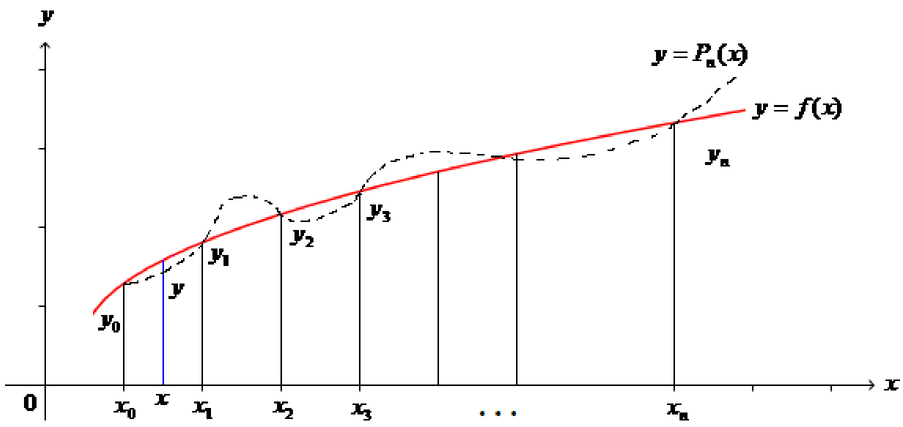


Figura 30.

El valor y_k se puede encontrar como

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

- *Interpolación de Lagrange:*

Este método trata de encontrar una fórmula de interpolación aplicable a funciones tabulares con valores de *x* que no son necesariamente equidistantes. Para hacer la interpolación, se busca un polinomio que pase por todos los puntos de la tabla y de la gráfica mostrada. Es evidente que si tuvieran únicamente dos puntos, el polinomio que pasaría por estos puntos sería de grado uno; si se tuvieran tres puntos, el polinomio sería de segundo grado, etc. En el caso general de tener *n* puntos, el polinomio sería de grado *n* - 1, o sea

$$y = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x + a_{n-1}.$$

Este polinomio puede escribirse, para dos puntos, como

$$P(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

donde

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}.$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Para tres puntos

$$P(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2).$$

donde

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}.$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}.$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Y de manera general

$$\begin{aligned} P(x) &= L_{n,0}(x) f(x_0) + L_{n,1}(x) f(x_1) + ... + L_{n,n}(x) f(x_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x). \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} L_{n,k}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_k)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}. \end{aligned}$$

- *El método de Mínimos Cuadrados:*

Dada una función en forma tubular (como hemos dicho, por un conjunto de puntos), se trata de obtener los valores de los coeficientes de la función siguiente:

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m$$

cuya gráfica es una curva suave que se acerca a la mayoría de los puntos. La desviación de la curva de los puntos dados es

$$r_i = y_i - g(x_i), i = 1,2,..., L$$

donde L es el número de puntos dados. El total de los cuadrados de la derivación es el siguiente

$$R = \sum_{i=1}^{L} (r_i)^2.$$

Hacemos iguales a cero las derivadas parciales de *R* con respecto a los coeficientes del polinomio para minimizar a *R*:

$$\frac{\partial R}{\partial a_n} = 0, n = 0,1,..., N$$

o en forma equivalente

$$\sum_{n=0}^{N}(\sum_{i=1}^{L} x_i^{n+k})a_n = \sum_{i=1}^{L} x_i^{k} y_i, k = 0,1,...N.$$

Nótese que estos temas enriquecen la utilidad y la potencialidad de la matemática misma. La finalidad es formar alumnos con más herramientas para resolver problemas. El software entra en juego cuando en alguna de las preguntas se pide graficar la función obtenida y encontrar el volumen del sólido en algún intervalo especificado.

Programa para la materia de Cálculo Integral:

Semana	**Tema / Subtema**
1	**Antiderivadas e Integral definida**
	Definición de antiderivada. Antiderivada de funciones conocidas
	Propiedades de la antiderivada. Operaciones y sustitución
2	Sumas de Riemann
	Definición de función integrable en un intervalo.
	Propiedades de la integral definida
3	Integrales de funciones conocidas
	Teorema Fundamental del Cálculo
	Teorema del valor medio para integrales
4	**Sucesiones y series**
	Concepto de sucesión
	Convergencia de sucesiones
5	Operaciones entre sucesiones, límites de sucesiones.
	Teoremas básicos sobre convergencia de sucesiones
6	Concepto de serie
	Convergencia de series
7	Prueba de la integral para series
	Series de potencias. Serie de Taylor y McLaurin
8	Integración por sustitución y cambio de variable
9	Integración por partes
10	Integración trigonométrica y sustitución trigonométrica
11	Integración por fracciones parciales
12	**Aplicaciones de la Integral Definida**
	Área bajo la curva, Área entre curvas
	Integración numérica
13	Volúmenes; sólidos de revolución
14	Trabajo
	Momentos de masa.

15 Longitud de arco

Integrales impropias