

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Carrera: Ingeniería en Automatización

Construcción y control de un sistema péndulo invertido sobre un carro (PISC) con control esclavo de corriente por computadora

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de Ingeniero en Automatización, con línea terminal en Mecatrónica

Presenta:

Eduardo Espíndola López

Dirigido por:

Dr. Roberto Valentín Carrillo Serrano

SINODALES

Dr. Roberto Valentín Carrillo Serrano
Presidente

Firma

Dr. Víctor Manuel Hernández Guzmán
Secretario

Firma

Dr. Edgar Alejandro Rivas Araiza
Vocal

Firma

Dr. Juvenal Rodríguez Reséndiz
Suplente

Firma

Dr. Aurelio Dominguez González
Director de la Facultad

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Mayo de 2014
México

RESUMEN

En este trabajo se construye y controla un prototipo real de un péndulo invertido sobre un carro, que tiene como actuador principal, un motor de CD con escobillas e imán permanente. El control del prototipo consiste en tres controladores diferentes. El primero es para levantar al péndulo y es un controlador no lineal basado en la energía del sistema; el cual es una versión extendida de un controlador existente en la literatura, el segundo es para atrapar al péndulo y es un controlador lineal por retroalimentación de estado. El tercer controlador es un control proporcional-integral (PI) de corriente implementado como lazo esclavo de control, del cual se demuestra su estabilidad. Los tres controladores son programados con lenguaje C++ en una computadora portátil. Por otro lado, la interfaz con el prototipo junto con la adquisición de datos está basada en un microcontrolador comercial. También se presentan las dimensiones y las vistas del prototipo construido, así como los sensores y la electrónica necesaria para su funcionamiento. Finalmente, son mostrados los resultados experimentales.

(Palabras clave: péndulo invertido sobre un carro, control proporcional-integral (PI) de corriente, energía del sistema, retroalimentación de estado)

SUMMARY

In this work is built and controls a real prototype of an inverted pendulum over a car, that it has like actuator, a DC motor with brushes and permanent magnet. The control of prototype consist in three controllers. The first is for swing up the pendulum and is a nonlinear control based on energy of the system, which is an extended version of an existing controller in literature, the second is for to trap the pendulum and it's a linear control by state feedback. The third controller is a proportional-integral (PI) control of current implemented like slave loop control, which its stability is demonstrated. The three controllers are implemented with C++ language in a portable computer. For the other hand, the interface with the prototype together with the acquisition of data is based on a commercial microcontroller. Also are shown the dimensions and views of the prototype built, as well as the sensors and necessary electronic for its operation. Finally, are shown the experimental results.

(Key words: inverted pendulum on a cart, proportional-integral (PI) control of current, energy of the system, state feedback)

**A mis padres (que fueron la base para alcanzar esta meta),
a mis profesores y amigos
—por todo lo recibido.**

AGRADECIMIENTOS

- A la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ) por brindarme la oportunidad de formarme como ingeniero.
- A los profesores de la facultad de ingeniería por todas sus enseñanzas, en especial a mi asesor Dr. Roberto Valentín Carrillo Serrano por su constante retroalimentación, apoyo a este trabajo, confianza y amistad.
- Al Dr. Víctor Manuel Hernández Guzmán por su ayuda, comentarios y recomendaciones a este trabajo.
- Al Dr. Edgar Alejandro Rivas Araiza por sus comentarios y recomendaciones a este trabajo.
- Al Dr. Juvenal Rodríguez Reséndiz por sus recomendaciones a este trabajo.
- Al Dr. Gilberto Herrera Ruiz rector de la Universidad Autónoma de Querétaro por su ejemplo y amistad.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN	I
SUMMARY	II
DEDICATORIA	III
AGRADECIMIENTOS	IV
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.1.1. Objetivo	2
1.1.2. Hipótesis	2
1.2. Justificación	2
1.3. Antecedentes y estado del arte	3
2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	6
2.1. Bases y definiciones	6
2.1.1. Sistemas subactuados	6
2.1.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange	7
2.1.3. Estabilidad de Lyapunov	8
2.2. Modelo matemático del PISC	12
2.3. Controlador para levantar el péndulo	18
2.4. Controlador para atrapar el péndulo	21
2.5. Modelo matemático del motor de CD con escobillas e imán permanente	22
2.6. Control proporcional (P) de corriente de un motor de CD con escobillas e imán permanente	25
3. APORTACIÓN TEÓRICA	27
3.1. Ecuación de estado del PISC	27
3.2. Obtención del controlador para levantar el péndulo	29
3.3. Obtención del controlador para atrapar al péndulo	34
3.4. Control proporcional-integral (PI) de corriente de un motor de CD con escobillas e imán permanente	35
4. METODOLOGÍA	38
4.1. Control del sistema PISC con motor de CD como actuador	38
4.2. Funcionamiento del sistema	41

4.3.	Materiales y métodos	42
4.3.1.	Metrología de atributos estáticos	42
4.3.2.	Metrología de atributos dinámicos	45
4.3.3.	Procesador de la ley de control	47
4.3.4.	Interfaz entre el PISC y la computadora	48
5.	CONSTRUCCIÓN DEL PROTOTIPO EXPERIMENTAL	50
5.1.	Subsistema de la base del prototipo	50
5.2.	Subsistema mecánico del carro y péndulo	52
5.3.	Prototipo experimental completo	54
5.4.	Subsistema eléctrico	55
5.5.	Subsistema electrónico	56
6.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	60
6.1.	Parámetros del prototipo experimental	60
6.2.	Ganancias del control PI de corriente	61
6.3.	Ganancias del controlador lineal para atrapar el péndulo	63
6.4.	Ganancias del controlador no lineal para levantar el péndulo	66
6.5.	Criterio para relevar los controladores	66
6.6.	Resultados experimentales	67
7.	CONCLUSIONES	73
	BIBLIOGRAFÍA	75
	APÉNDICES	77
A.	Programas utilizados	77
A.1.	Programa para el microcontrolador PIC16F877A	77
A.2.	Programa de los controladores e interfaz serial en Dev-C++	80
A.3.	Programa en MATLAB para validar condiciones de los controladores	86

ÍNDICE DE CUADROS

3.1. Criterio de estabilidad de Routh aplicado al denominador de (3.51).	36
4.1. Características del MAX232.	48
6.1. Parámetros del PISC.	61
6.2. Ganancias del controlador PI de corriente.	63
6.3. Ganancias del controlador lineal.	66
6.4. Ganancias del controlador no lineal.	66
6.5. Constantes del criterio para relevar los controladores.	67

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Péndulo invertido sobre un carro Quanser modelo IP02.	4
2.1.	Péndulo invertido sobre un carro.	12
2.2.	Péndulo simple.	13
2.3.	Diagrama del motor de CD.	22
2.4.	Diagrama de bloques del control proporcional de corriente.	25
3.1.	Diagrama de bloques del control proporcional-integral de corriente.	35
4.1.	Diagrama de control del PISC.	40
4.2.	Distribución e interconexión de elementos del sistema.	42
4.3.	Prisma rectangular (Beer y Johnston, 1988).	43
4.4.	Motor R11-1450 de la empresa Hp.	44
4.5.	Codificador incremental óptico S1-1000-250-I-B-D.	45
4.6.	Sensor infrarrojo GP2Y0A21YK0F de la marca SHARP.	46
4.7.	Sensor de corriente ACS712.	47
4.8.	Convertidor USB-serial MANHATTAN.	48
4.9.	Puente H modelo LMD18200.	49
5.1.	Diseño de la base.	51
5.2.	Vistas y dimensiones de la base (cotas en [mm]).	52
5.3.	Diseño del carro y péndulo.	53
5.4.	Vistas y dimensiones del carro y péndulo (cotas en [mm]).	54
5.5.	Diseño del prototipo experimental.	55
5.6.	Fuente de alimentación para la parte de instrumentación.	56
5.7.	Tabla de verdad tomada de la hoja de datos del puente H LMD18200.	57
5.8.	Diagrama eléctrico del prototipo.	59
6.1.	Fotografía del prototipo experimental.	60
6.2.	Gráfica de una prueba del control de corriente.	62
6.3.	Gráfica de la posición del carro.	68
6.4.	Gráfica de la velocidad del carro.	69
6.5.	Gráfica de la posición del péndulo.	70
6.6.	Gráfica de la velocidad del péndulo.	70
6.7.	Gráfica de la corriente aplicada y la corriente deseada.	71
6.8.	Gráfica del voltaje aplicado al motor.	72

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Planteamiento del problema

En la industria, principalmente en el área de manufactura, el control de servomecanismos es una necesidad, por lo cual es importante que sea robusto y barato; es decir, se busca que los servomecanismos sean capaces de mantener su precisión y velocidad en el proceso productivo donde se usen; debido a esto, los controladores deben incluir términos no lineales que anteriormente se despreciaban, sin dejar de ser fáciles de implementar y sin consumir demasiados recursos, tales como tiempo de procesamiento.

En muchos casos, los controladores digitales de servomecanismos, no toman en cuenta variables directamente funcionales como la corriente de un motor eléctrico cuando se intenta controlar el servomecanismo a través del par del motor; en este sentido, el control de corriente de los motores se realiza fuera del controlador digital y se controla analógicamente con otros dispositivos (servo-amplificadores); esto ocasiona que los sistemas sean más caros al tener más bloques funcionales además de que el control de corriente analógico es susceptible al ruido eléctrico y se requieren otras consideraciones para evitarlo.

Por otro lado, los servomecanismos actualmente utilizados en la industria, tienen grandes dimensiones y altos precios; lo que hace difícil su adquisición en las instituciones de enseñanza para uso experimental y didáctico. Por tal motivo, se requieren prototipos más pequeños que utilicen partes reales a escala de servomecanismos industriales, como los tornillos de bola, rieles, guías, etc. La Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro no cuenta con un prototipo que cumpla esas características, y se propone la construcción y control de un péndulo invertido sobre un carro (PISC) didáctico y portable para

uso experimental que consiga representar la complejidad de los ejemplares reales; en el que se pueda proponer e implementar nuevos controladores.

1.1.1 Objetivo

Implementar un lazo esclavo de control de corriente programado en una computadora para controlar el péndulo invertido sobre un carro accionado por un motor de CD con escobillas e imán permanente.

1.1.2 Hipótesis

Es posible controlar el péndulo invertido sobre un carro, movido por un motor de CD con escobillas e imán permanente, usando un control esclavo de corriente por computadora.

1.2. Justificación

El control para máquinas herramienta que se implementa actualmente en la industria, se realiza normalmente a través de motores eléctricos y tiene dos partes importantes; una de ellas es el algoritmo de control que normalmente se encuentra programado en algún dispositivo de procesamiento digital y la otra parte es comúnmente conocida como servo-amplificador y tiene la función de asegurar que la señal de control proveniente del algoritmo sea interpretada correctamente. Para separar de manera eficiente estas dos partes, el algoritmo de control entrega una señal eléctrica que representa el par deseado; con ésta señal, el servo-amplificador asegura el par, a través de las constantes del motor y un lazo esclavo de control de corriente.

El lazo esclavo de control de los servo-amplificadores normalmente se realiza con electrónica analógica, lo que ocasiona que el propio servo-amplificador eleve su precio, tamaño y en algunas ocasiones su dificultad para ajustar. La principal razón por la que los servo-amplificadores se realizan con electrónica analógica es que el tiempo de respuesta de la corriente es muy pequeño y hasta hace algunos años la velocidad de adquisición de datos de los sistemas digitales no era suficientemente rápida como para muestrear una señal como la corriente eléctrica.

Con los sistemas digitales de adquisición de datos actuales ya es posible adquirir muestras de una señal que naturalmente puede cambiar muy rápido, por lo que el presente

trabajo utiliza esta capacidad para demostrar que es posible controlar la corriente eléctrica de un motor de forma digital.

El uso principal del lazo esclavo de control de corriente presentado por Hernández-Guzmán et al. (2013) y aplicado en este proyecto, es para diseñar partiendo solamente del esfuerzo de control del sistema mecánico que para este caso es la fuerza aplicada al carro; es decir, con el control esclavo de corriente del motor de CD se asegura que el par deseado del motor es alcanzado satisfactoriamente y por lo tanto la fuerza aplicada al carro también.

Una aplicación del prototipo (PISC) es como recurso didáctico en el área de Control Automático de la Facultad de Ingeniería; por lo que se pretende que el prototipo sea empleado en las clases de control para la enseñanza y demostración de los alcances del control automático.

Otra aplicación del PISC es para la experimentación a nivel posgrado en el área de Instrumentación y Control que se imparte en la Facultad de Ingeniería.

El PISC también puede ser utilizado para su exhibición en congresos, concursos, ferias y semanas de ingeniería; con la intención de transmitir a la sociedad el tipo de trabajo que se hace en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro.

1.3. Antecedentes y estado del arte

El prototipo PISC representa grandes desafíos para los ingenieros en control que desean obtener cada vez un controlador más robusto y de fácil de implementación; por ejemplo, en Subudhi et al. (2012) se propone un controlador PID robusto para el PISC, en este artículo se menciona que el problema de la no linealidad del péndulo invertido puede ser resuelto simplemente con dos PID's clásicos de tal manera que uno controle únicamente la posición del carro y otro el ángulo del péndulo, generando entre los dos una señal de control para el PISC.

La complejidad en el modelo matemático del PISC ha entusiasmado a muchos investigadores, hasta proponer nuevos retos en el diseño mecánico de este prototipo; por ejemplo, Wang (2012) propone un controlador de modo deslizante (SMC) para un péndulo invertido X-Z; este tipo de péndulo invertido se mueve con la combinación de fuerzas horizontales y verticales, lo que implica más versatilidad y un modelo matemático no lineal más apegado a

los sistemas de la realidad. La propuesta del control SMC (sliding-mode control) es debido a que tiene una propiedad especial de invariancia a las incertidumbres; lo que es esencial, cuando se tiene que decidir la combinación de fuerzas que se deben aplicar.

El PISC no solo es estudiado por ingenieros en control, también es un prototipo estudiado por ingenieros en mecánica y físicos; prueba de ello, en Polo et al. (2012) se explora el levantamiento del péndulo invertido sobre un carro con ruedas; en este artículo parten del hecho de que al aplicar al PISC un par externo con frecuencia variable se exhibe una dinámica caótica que no ha sido profundizada; por lo que proponen, un estudio riguroso de la mecánica del PISC cuando se aplica un par externo sobre las ruedas del carro.

Por otro lado, Sanabria y Hernández (2012) propusieron un controlador con el método de realimentación de estados tipo regulador y servomecanismo, para el péndulo invertido sobre un carro del fabricante Quanser modelo IP02 mostrado en la Figura 1.1. En este caso el fabricante del péndulo proporciona un controlador tipo LQR y se busca diseñar un nuevo controlador más eficiente a partir del modelo matemático del péndulo; obtenido a partir de las ecuaciones de la dinámica de Lagrange. El control junto con las simulaciones son programadas en el software SimuLink de MatLab desde una computadora personal.

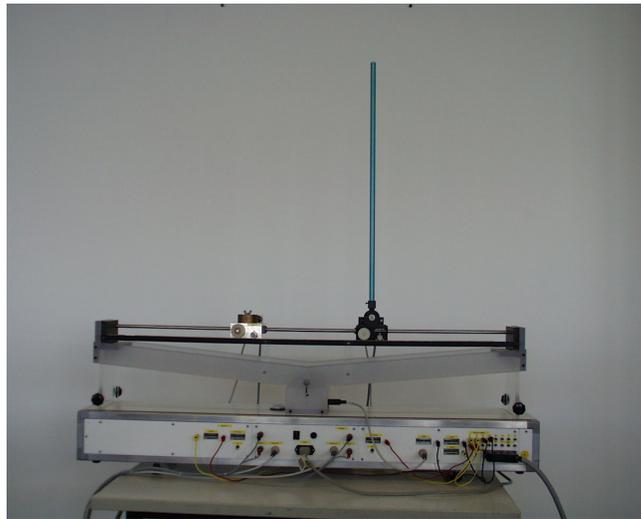


Figura 1.1: Péndulo invertido sobre un carro Quanser modelo IP02.

En Mahmoodabadi et al. (2013) se propone un controlador de modo deslizante dissociado (DSMC) para la estabilización del péndulo invertido; se menciona que es un gran

problema la determinación de una superficie deslizante de parámetros, para que el controlador funcione correctamente; en este sentido, se propone una técnica de optimización llamada: enjambre de partículas multi-objetivo (MOPSO), para optimizar los parámetros del DSMC; después se propone una simulación por internet hecha en JAVA para corroborar el funcionamiento del controlador.

En la búsqueda de un controlador más estable, efectivo y robusto; Bettayeb et al. (2014) proponen un controlador PI en el espacio de estados de forma fraccional para el control de un PISC; se explica que las raíces del polinomio característico en el sistema PISC junto con el controlador, son complejas de encontrar; por lo cual, proponen un método para descomponer el polinomio de una forma fraccional, de tal manera que se pueda ver como un sistema de primer orden; consiguiendo así un control más confiable.

Por otro lado, en El-Nagar et al. (2014) se propone un controlador de lógica difusa tipo 2 de intervalo (IT2-FLC) para controlar un PISC; se menciona que este tipo de controlador es capaz de minimizar las incertidumbres numéricas y lingüísticas asociadas a las entradas y salidas de un sistema controlado con lógica difusa. El controlador propuesto utiliza el intervalo de tipo 2 basado en las reglas difusas Mamdani, con función de pertenencia triangular y el método Wu-Mendel de incertidumbre vinculada para aproximar el conjunto de tipo reducido.

Como se puede observar, para sistemas no-lineales e inestables no siempre es suficiente con un controlador que lo estabilice; también se requiere de algún método secundario, con la intención de lograr un control más seguro; sin perder de vista que cualquier algoritmo secundario, no debe afectar en el tiempo de ejecución del controlador principal; para no caer en retardos como se menciona en Balbastre et al. (2010). En este sentido, se propone un control esclavo de corriente para un péndulo invertido sobre un carro, tomando como base el trabajo de López (2011) que no utiliza el lazo esclavo de corriente.

Capítulo 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. Bases y definiciones

2.1.1 Sistemas subactuados

El modelado de sistemas dinámicos normalmente incluye términos no-lineales que en algunos casos son importantes de considerar para el diseño de los controladores; debido a esto, se ha asignado un tema específico para el estudio de éstos sistemas. Según McRobie y Thompson (1990) un sistema se define como no lineal si sus parámetros y atributos varían de manera no proporcional a la entrada aplicada, por lo cual las ecuaciones que describen su comportamiento tienen carácter no lineal.

Debido a que la mayor parte de los sistemas dinámicos reales que se modelan son no-lineales; tienen muchas clasificaciones, dentro de las cuáles existen cuatro importantes: sistemas altamente no-lineales, sistemas tipo cascada con estructuras triangulares, sistemas tipo cascada con estructuras no-triangulares y los sistemas subactuados; los cuales tienen aplicación en ésta tesis.

Los sistemas dinámicos subactuados son sistemas que tienen menos entradas de control que variables de configuración. Los sistemas subactuados aparecen en diversas aplicaciones incluyendo robótica, sistemas aeroespaciales, sistemas marinos, sistemas flexibles, sistemas móviles y sistemas locomotrices. La propiedad de subactuación o sistemas subactuados es debida a las siguientes cuatro razones según Olfati Saber (2001):

- La dinámica del sistema.
- Por diseño para la reducción de costo o algún propósito práctico.

- Fallas del actuador.
- Impuesto artificialmente para crear un complejo sistema no-lineal de bajo orden con el propósito de ganar visión en el control de un sistema subactuado de alto orden.

Los principales métodos de control aplicados al ejemplo del péndulo invertido tipo sistema subactuado están basados en columpiar y subir el péndulo desde su posición natural hacia abajo y entonces cambiar a un control de balanceo (para atrapar el péndulo) que se diseña usando alguna técnica de linealización (Olfati Saber, 2001).

2.1.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Para el control de cualquier sistema se requiere un modelo matemático que pueda representar todo lo que pasa en la realidad o al menos los aspectos de interés más importantes. Para encontrar el modelo matemático de los sistemas mecánicos se recurre a las leyes de la Física; a través de la mecánica clásica con las ecuaciones de Newton o a través de la mecánica analítica con las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Generar el modelo matemático con las ecuaciones de Newton se vuelve complicado cuando el sistema tiene muchas uniones por las cuales se transfiere energía; en tal caso es preferible utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange publicadas en 1788 por el francés Joseph Louis de La Grange en su trabajo “*Mécanique analytique*”.

Para estudiar las ecuaciones de Euler-Lagrange se puede considerar un robot manipulador con n grados de libertad. La energía total E de un robot manipulador de n grados de libertad (GDL) es la suma de las funciones de energía cinética y potencial, K y P respectivamente:

$$E(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) + P(q, \dot{q}) \quad (2.1)$$

Donde: $q = [q_1, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$, es el vector de grados de libertad del robot.

El *Lagrangiano* $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ de un robot manipulador de n GDL es la diferencia entre la energía cinética K y su energía potencial P , que es:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - P(q, \dot{q}) \quad (2.2)$$

Si se asume que la energía potencial P está dada solo por fuerzas conservativas como la energía gravitacional y la energía almacenada en resortes comprimidos. Entonces,

las ecuaciones de Euler-Lagrange del movimiento de un manipulador de n GDL, están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau, \quad (2.3)$$

o en su forma equivalente por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

Donde τ_i corresponden a las fuerzas y torques externos (suministrados por los actuadores) en cada unión, así como a otras fuerzas (no conservativas). En las clases de fuerzas no-conservativas se puede incluir a la debida por la fricción, la resistencia al movimiento de un sólido en un fluido, y en general, todas las que dependan del tiempo y velocidad no solo la posición. Se debe notar que se tienen tantas ecuaciones dinámicas como GDL (Kelly et al., 2005).

2.1.3 Estabilidad de Lyapunov

Según Kelly et al. (2005) el principal objetivo en la teoría de estabilidad de Lyapunov es el estudio del desarrollo dinámico de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.5)$$

Donde el vector x corresponde al estado del sistema representado por (2.5). Se denota la solución de la ecuación diferencial por $x(t, t_o, x(t_o))$. Esto quiere decir que $x(t, t_o, x(t_o))$ representa los valores de los estados del sistema en el tiempo t , con un estado inicial arbitrario $x(t_o) \in \mathbb{R}^n$ y un tiempo inicial $t_o \geq 0$. Para simplificar la notación se considerara $x(t)$ como una solución de (2.5) en lugar de $x(t, t_o, x(t_o))$.

Se asume que la función $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua en t y x ; y se elije de tal forma que:

- La ecuación (2.5) tiene una única solución correspondiente a cada condición inicial $t_o, x(t_o)$;
- la solución $x(t, t_o, x(t_o))$ de (2.5) depende continuamente de las condiciones iniciales t_o y $x(t_o)$.

Si la función f no depende explícitamente del tiempo, es decir, si $f(t, x) = f(x)$ entonces, la ecuación (2.5) queda como:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

y se puede decir que es autónoma. En este caso no tiene sentido hablar del tiempo inicial t_o ya que para cualquier t_o y t'_o dados, tal que $x(t_o) = x(t'_o)$; se tendría que $x(t_o + T, t_o, x(t_o)) = x(t'_o + T, t'_o, x(t'_o))$ para cualquier $T \geq 0$. Entonces, para todas las ecuaciones diferenciales autónomas se puede considerar $t_o = 0$.

Si $f(t, x) = A(t)x + u(t)$ siendo $A(t)$ una matriz cuadrada de dimensión n y $A(t)$ y $u(t)$ funciones solo de t ó constantes; entonces, la ecuación (2.5) se dice que es lineal. En el caso opuesto es no lineal.

Definición de estabilidad

Sin perder generalidad se asume que el origen del espacio de estado, $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, es un punto de equilibrio de (2.5) y en base a esto, se proveen las definiciones de estabilidad del origen, pero pueden ser reformuladas para otro punto de equilibrio desarrollando el cambio de coordenadas apropiado (Kelly et al., 2005).

Definición 2.1 Estabilidad

El origen es un punto de equilibrio estable (en el sentido de Lyapunov) de la ecuación (2.5) si, para cada par de números $\varepsilon > 0$ y $t_o \geq 0$, existe $\delta = \delta(t_o, \varepsilon) > 0$ tal que:

$$\|x(t_o)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_o \geq 0. \quad (2.7)$$

Correspondientemente, el origen de la ecuación (2.6) se dice que es estable si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que (2.7) contiene a $t_o = 0$.

En la Definición 2.1 la constante δ (quien es claramente más pequeña que ε) no es única. Se nota que para cualquier constante dada δ que satisface la condición de la definición, cualquier $\delta' \leq \delta$ también la satisface.

También, en la Definición 2.1 no se debe entender que el origen es estable (en el sentido de Lyapunov) si para cada $\delta > 0$ se puede encontrar $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\|x(t_o)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_o \geq 0.$$

En otras palabras, lo anterior establece que “el origen es un punto de equilibrio estable si para cualquier condición inicial acotada, la correspondiente solución es también acotada”. Esto es conocido como “acotación de soluciones” ó “estabilidad de Lagrange” y es una propiedad algo más débil que la estabilidad de Lyapunov. Sin embargo, la acotación de soluciones no es una condición necesaria ni suficiente para la estabilidad de Lyapunov.

Funciones de Lyapunov

Una vez analizada la estabilidad de Lyapunov para el punto de equilibrio $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, se presentan una serie de conceptos relacionados con la noción de la función candidata de Lyapunov (Kelly et al., 2005).

Definición 2.2 *Función candidata de Lyapunov*

Una función continua y diferenciable $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ se dice que es una función candidata de Lyapunov para el punto de equilibrio $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ si:

1. $V(t, x)$ es localmente definida positiva;
2. $\frac{\partial V(t, x)}{\partial t}$ es continua con respecto a t y x ;
3. $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$ es continua con respecto a t y x .

Correspondientemente, una función continua y diferenciable $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ se dice que es una función candidata de Lyapunov para el punto de equilibrio $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación (2.6), si $V(x)$ es localmente definida positiva y:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

es continua.

En otras palabras, una función candidata de Lyapunov para el punto de equilibrio $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ de las ecuaciones (2.5) ó (2.6) es cualquier función continuamente diferenciable y definida localmente positiva; esto es, con derivadas parciales continuas.

La derivada con respecto al tiempo de una función candidata de Lyapunov es una parte importante en las conclusiones gráficas acerca de los atributos de estabilidad del equilibrio de ecuaciones diferenciales. Por ésta razón, se presenta la siguiente definición.

Definición 2.3 Derivada temporal de un función candidata de Lyapunov

Sea $V(t, x)$ una función candidata de Lyapunov para la ecuación (2.5). La derivada temporal total de $V(t, x)$ a lo largo de las trayectorias de (2.5), denotadas por $\dot{V}(t, x)$, está dada por:

$$\dot{V}(t, x) := \frac{d}{dt}V(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x).$$

De la definición anterior se puede observar que si $V(x)$ no depende explícitamente del tiempo y la ecuación (2.5) es autónoma entonces,

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dx} f(x)$$

la cuál no depende explícitamente del tiempo también.

Definición 2.4 Función de Lyapunov

Una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ para la ecuación (2.5) es una función de Lyapunov para (2.5) si su derivada temporal total a lo largo de las trayectorias de (2.5) satisfacen:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

y para pequeños $\|x\|$.

Correspondientemente, una función candidata de Lyapunov $V(x)$ para la ecuación (2.6) es una función de Lyapunov si $\dot{V}(x) \leq 0$ para pequeños $\|x\|$.

Como se puede observar, el hecho de que el cambio con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov sea negativa y que además por definición sea localmente positiva, quiere decir que esta función tiende a decrecer hasta llegar a un punto cercano o igual a cero. Así que si se utilizan estos conceptos adecuadamente, se puede llevar a un sistema dinámico representado por la ecuación (2.5) a un punto de equilibrio estable $x = 0 \in \mathbb{R}^n$.

2.2. Modelo matemático del PISC

El modelo dinámico del PISC (ver Figura 2.1) se obtiene aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange (Wells, 1972; Kelly et al., 2005).

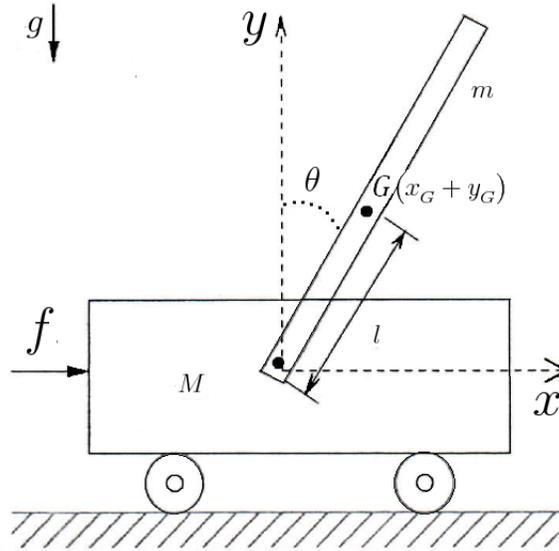


Figura 2.1: Péndulo invertido sobre un carro.

Primeramente, la energía cinética del PISC está dada como:

$$K = k_{pe} + k_{ca} \quad (2.8)$$

El primer término de (2.8) es la energía cinética del péndulo, la cual se compone de una parte traslacional y otra rotacional:

$$k_{pe} = \frac{1}{2}m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (2.9)$$

y el segundo término de (2.8) es la energía cinética del carro, la cual sólo tiene parte traslacional:

$$k_{ca} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad (2.10)$$

Donde:

- M es la masa del carro.
- m es la masa del péndulo.

- l es la distancia del pivote al centro de masa del péndulo.
- I es la inercia del péndulo alrededor de su centro de masa.
- x es la posición del carro.
- x_G es la coordenada del centro de masa del péndulo en x .
- y_G es la coordenada del centro de masa del péndulo en y .
- θ es posición angular del péndulo.

Así, sustituyendo (2.9) y (2.10) en (2.8), la energía cinética del PISC es:

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + \dot{\theta}l \cos(\theta))^2 + (-\dot{\theta}l \sin(\theta))^2] + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (2.11)$$

Simplificando (2.11) se obtiene:

$$K = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2 \quad (2.12)$$

Debido a que la energía potencial del carro es cero (Fantoni y Lozano, 2002), la energía potencial del PISC está dada sólo por el péndulo. En la Figura 2.2 se pueden observar los vectores \vec{F} y \vec{d} , por lo que de las definiciones básicas de trabajo y energía se tiene que la energía potencial esta dada como:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (2.13)$$

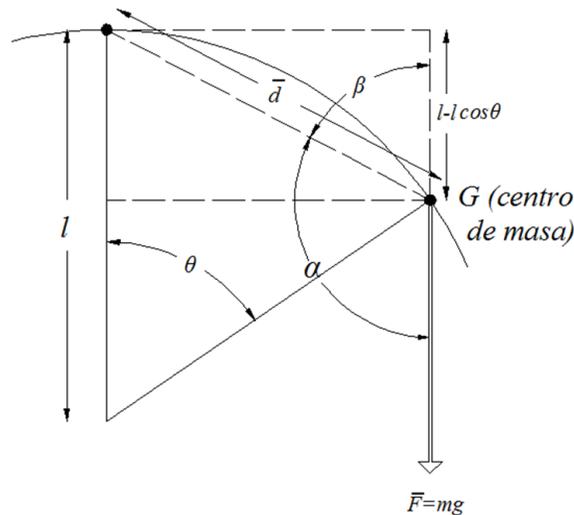


Figura 2.2: Péndulo simple.

Ahora poniendo (2.13) en términos de θ se tiene que:

$$P = -mgl(1 - \cos(\theta)) = mgl(\cos(\theta) - 1) \quad (2.14)$$

Donde:

- g es la aceleración de la gravedad.

Posteriormente con (2.12) y (2.14) se calcula el Lagrangiano definido como:

$$\mathcal{L} = K - P = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2 - mgl(\cos(\theta) - 1) \quad (2.15)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange (Wells, 1972; Kelly et al., 2005) al Lagrangiano (2.15) se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos(\theta) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml\dot{x}\cos(\theta) + (ml^2 + I)\dot{\theta} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mgl\sin(\theta) - ml\dot{x}\sin(\theta) \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) \quad (2.22)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml\ddot{x}\cos(\theta) - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta) + (ml^2 + I)\ddot{\theta} \quad (2.23)$$

Donde:

- f es la fuerza externa aplicada sobre el carro.

Definiendo:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.24)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.25)$$

y sustituyendo (2.19), (2.21),(2.22) y (2.23) en (2.16) y (2.17), es posible llegar al modelo compacto sin considerar efectos de fricción tal como lo presenta Fantoni y Lozano (2002):

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (2.26)$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos(\theta) \\ ml \cos(\theta) & ml^2 + I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (2.27)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{\theta} \sin(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (2.28)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl \sin(\theta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.29)$$

Donde:

- $M(q)$ es la matriz de inercia (simétrica y definida positiva).
- $C(q, \dot{q})$ es la matriz de efectos centrífugos y de Coriolis.
- $G(q)$ es el vector de pares gravitacionales.
- τ es el vector de entrada.

Se verifica que la matriz de inercia $M(q)$ en (2.27) es definida positiva a través de su determinante:

$$\begin{aligned} \det(M(q)) &= (M + m)(ml^2 + I) - m^2l^2 \cos^2(\theta), \\ &= (M + m)I + Mml^2 + m^2l^2 - m^2l^2 \cos^2(\theta), \\ &\geq (M + m)I + Mml^2 + m^2l^2 - m^2l^2, \\ &= (M + m)I + Mml^2 > 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Como $(M + m) > 0$ entonces $M(q)$ es definida positiva.

El primero y segundo renglones de (2.26) son, respectivamente:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) = f \quad (2.31)$$

$$ml\ddot{x} \cos(\theta) + (ml^2 + I)\ddot{\theta} - mgl \sin(\theta) = 0 \quad (2.32)$$

De (2.32) se tiene que:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{ml^2 + I} [-ml\ddot{x} \cos(\theta) + mgl \sin(\theta)] \quad (2.33)$$

Sustituyendo (2.33) en (2.31):

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + \frac{ml \cos(\theta)}{ml^2 + I} [-ml\ddot{x} \cos(\theta) + mgl \sin(\theta)] - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) &= f, \\ \left[(M + m) - \frac{m^2 l^2 \cos^2(\theta)}{ml^2 + I} \right] \ddot{x} + \frac{m^2 l^2 g \sin(\theta) \cos(\theta)}{ml^2 + I} - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) &= f. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Aplicando la identidad:

$$\sin^2(\theta) - 1 = -\cos^2(\theta), \quad (2.35)$$

en (2.34) se tiene que:

$$\begin{aligned} \left[M + m + \frac{m^2 l^2}{ml^2 + I} (\sin^2(\theta) - 1) \right] \ddot{x} + \frac{m^2 l^2 g \sin(\theta) \cos(\theta)}{ml^2 + I} - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) &= f, \\ \left[M + m + \frac{m^2 l^2}{ml^2 + I} \sin^2(\theta) - \frac{m^2 l^2}{ml^2 + I} \right] \ddot{x} + \frac{m^2 l^2 g \sin(\theta) \cos(\theta)}{ml^2 + I} - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) &= f, \\ \ddot{x} = \frac{1}{M + m + \frac{m^2 l^2}{ml^2 + I} \sin^2(\theta) - \frac{m^2 l^2}{ml^2 + I}} \left[-\frac{m^2 l^2 g \sin(\theta) \cos(\theta)}{ml^2 + I} + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + f \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Suponiendo que I es despreciable, es decir, que $ml^2 \gg I$ entonces se puede escribir las ecuaciones (2.33) y (2.36) como:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{ml^2} [-ml\ddot{x} \cos(\theta) + mgl \sin(\theta)] \quad (2.37)$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{M + m \sin^2(\theta)} [-mg \sin(\theta) \cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + f] \quad (2.38)$$

Por otro lado, sustituyendo (2.38) en (2.37) se tiene que:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{1}{ml^2} \left[\frac{-ml \cos(\theta)}{M + m \sin^2(\theta)} \left(-mg \sin(\theta) \cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + f \right) + mgl \sin(\theta) \right], \\ \ddot{\theta} &= \frac{mg \sin(\theta) \cos^2(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - f \cos(\theta)}{(M + m \sin^2(\theta))l} + \frac{mgl \sin(\theta)(M + m \sin^2(\theta))l}{ml^2(M + m \sin^2(\theta))l}, \\ \ddot{\theta} &= \frac{mg \sin(\theta) \cos^2(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - f \cos(\theta) + Mg \sin(\theta) + mg \sin^3(\theta)}{(M + m \sin^2(\theta))l}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Aplicando la identidad (2.35) en (2.39) se tiene que:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{mg \sin(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - f \cos(\theta) + Mg \sin(\theta)}{(M + m \sin^2(\theta))l}, \\ \ddot{\theta} &= \frac{(M + m)g \sin(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - f \cos(\theta)}{(M + m \sin^2(\theta))l}.\end{aligned}\quad (2.40)$$

Con base en (2.38) y (2.40) se define:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad (2.41)$$

Por tanto, es posible escribir la ecuación de estado del PISC como:

$$\dot{y} = h(y, f) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \frac{-mg \sin(y_3) \cos(y_3) + mly_4^2 \sin(y_3) + f}{M + m \sin^2(y_3)} \\ y_4 \\ \frac{(M+m)g \sin(y_3) - mly_4^2 \sin(y_3) \cos(y_3) - f \cos(y_3)}{(M + m \sin^2(y_3))l} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Los puntos de operación del sistema (2.42) se obtienen al hacer:

$$h(y^*, f^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Del primer y tercer renglón de (2.43) se tiene que:

$$y_2^* = \dot{x}^* = 0 \quad (2.44)$$

$$y_4^* = \dot{\theta}^* = 0 \quad (2.45)$$

Posteriormente sustituyendo (2.44) y (2.45) en el segundo y cuarto renglón de (2.43) se observa que:

$$f^* = mg \sin(y_3^*) \cos(y_3^*) \quad (2.46)$$

$$(M + m)g \sin(y_3^*) - f^* \cos(y_3^*) = 0 \quad (2.47)$$

Sustituyendo (2.46) en (2.47) se tiene que:

$$\begin{aligned}(M + m)g \sin(y_3^*) - mg \sin(y_3^*) \cos^2(y_3^*) &= 0, \\ \sin(y_3^*)[Mg + mg - mg \cos^2(y_3^*)] &= 0, \\ \sin(y_3^*) &= 0.\end{aligned}\tag{2.48}$$

$$y_3^* = \theta^* = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.\tag{2.49}$$

Ahora se tiene que al sustituir (2.48) en (2.46) se encuentra:

$$f^* = 0\tag{2.50}$$

Finalmente como y_1^* no aparece en (2.43) se observa puede tomar cualquier valor, es decir:

$$y_1^* = x^* = c \in \mathbb{R}\tag{2.51}$$

2.3. Controlador para levantar el péndulo

Fantoni y Lozano (2002) proponen la siguiente función para su análisis:

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_e}{2} E(q, \dot{q})^2 + \frac{k_v}{2} \dot{x}^2 + \frac{k_x}{2} [x - x^*]^2\tag{2.52}$$

donde k_e , k_v y k_x son constantes positivas. Derivando (2.52) con respecto al tiempo se tiene que:

$$\dot{V} = k_e E \dot{E} + k_v \dot{x} \ddot{x} + k_x (x - x^*) \dot{x}\tag{2.53}$$

Como en Fantoni y Lozano (2002), la energía total del sistema se obtiene sumando (2.12) y (2.14):

$$E(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) + P(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + mgl(\cos(\theta) - 1)\tag{2.54}$$

La derivada con respecto al tiempo de (2.54) está dada como:

$$\dot{E} = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - mgl\dot{\theta} \sin(\theta)\tag{2.55}$$

Sustituyendo (2.26) en (2.55):

$$\dot{E} = \dot{q}^T [-C(q, \dot{q}) \dot{q} - G(q) + \tau] + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - mgl\dot{\theta} \sin(\theta)\tag{2.56}$$

Ahora, se sustituye (2.25), (2.28), (2.29) y la derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia (2.27) en (2.56) para obtener:

$$\dot{E} = \dot{x}f \quad (2.57)$$

Posteriormente, al sustituir (2.57) en (2.53) se obtiene:

$$\dot{V} = \dot{x}[k_e f E + k_v \ddot{x} + k_x(x - x^*)] \quad (2.58)$$

Así, al sustituir (2.38) en (2.58) se encuentra que:

$$\dot{V} = \dot{x} \left[f \left[k_e E + \frac{k_v}{M + m \sin^2(\theta)} \right] + \frac{mk_v \sin(\theta)(l\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta))}{M + m \sin^2(\theta)} + k_x(x - x^*) \right] \quad (2.59)$$

Ahora suponga que se escoge f de tal manera que el segundo factor de (2.59) sea:

$$f \left[k_e E + \frac{k_v}{M + m \sin^2(\theta)} \right] + \frac{mk_v \sin(\theta)(l\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta))}{M + m \sin^2(\theta)} + k_x(x - x^*) = -k_\delta \dot{x} \quad (2.60)$$

Para poder despejar f de (2.60) se debe asegurar que:

$$\left[k_e E + \frac{k_v}{M + m \sin^2(\theta)} \right] \neq 0, \quad (2.61)$$

lo cual se consigue, según Fantoni y Lozano (2002), con la siguiente condición:

$$\frac{k_v}{k_e} > 2mgl(M + m) \quad (2.62)$$

Así al cumplir (2.62), es posible despejar f de (2.60) quedando como:

$$f = \frac{k_v m \sin(\theta)(g \cos(\theta) - l\dot{\theta}^2) - (M + m \sin^2(\theta))[k_x(x - x^*) + k_\delta \dot{x}]}{k_v + (M + m \sin^2(\theta))k_e E} \quad (2.63)$$

Con esto (2.59) se convierte en:

$$\dot{V} = -k_\delta \dot{x}^2, \quad k_\delta > 0 \quad (2.64)$$

En consecuencia el estado y converge al conjunto:

$$S = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid \dot{x} = 0\} \quad (2.65)$$

Como $\dot{x} = 0$ se tiene que $\ddot{x} = 0$. Así, evaluando la dinámica (2.38) en S se observa que:

$$\ddot{x} = 0 = \frac{1}{M + m \sin^2(\theta)} \left[-mg \sin(\theta) \cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + f \right] \quad (2.66)$$

Encontrando que:

$$f = mg \sin(\theta) \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \quad (2.67)$$

Sustituyendo (2.67) en (2.40) se tiene que:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{(M + m)g \sin(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - (mg \sin(\theta) \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta)) \cos(\theta)}{(M + m \sin^2(\theta))l}, \\ \ddot{\theta} &= \frac{(M + m)g \sin(\theta) - mg \sin(\theta)(1 - \sin^2(\theta))}{(M + m \sin^2(\theta))l}, \\ \ddot{\theta} &= \frac{(M + m)g \sin(\theta) - mg \sin(\theta) + mg \sin^3(\theta)}{(M + m \sin^2(\theta))l}, \\ \ddot{\theta} &= \frac{\sin(\theta)(Mg + mg \sin^2(\theta))}{(M + m \sin^2(\theta))l} = \frac{g}{l} \sin(\theta). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Multiplicando ambos miembros de (2.68) por ml^2 se obtiene:

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin(\theta) \quad (2.69)$$

Así, en la ecuación (2.69) se tiene que la dinámica de un péndulo simple sin fricción, por lo que la energía es constante y si θ no es constante, el péndulo tendrá movimiento de manera perpetua.

Ahora se procede a sustituir (2.67) en el segundo sumando del primer término de (2.60) (recordar que f en (2.67) se obtuvo cuando $\dot{x} = 0$), con lo que se llega a:

$$Ek_e f + k_v(x - x^*) = -k_\delta \dot{x} = 0 \quad (2.70)$$

Sustituyendo nuevamente (2.67) ahora en el primer término de (2.70) se tiene que:

$$\begin{aligned} Ek_e [mg \sin(\theta) \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta)] &= k_x(x^* - x), \\ Ek_e \sin(\theta) [mg \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2] &= k_x(x^* - x). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Multiplicando por l ambos miembros de (2.71):

$$Ek_e \sin(\theta) [mgl \cos(\theta) - ml^2\dot{\theta}^2] = lk_x(x^* - x) \quad (2.72)$$

Como l y k_x son constantes además $\dot{x} = 0$ (x es constante también), entonces el miembro derecho de (2.72) es constante.

De acuerdo a (2.54) se tiene que $E = -2mgl$ cuando $\dot{\theta} = 0$ y $\theta = \pi$ además en virtud de (2.64) se tiene que V en (2.52) decrece mientras la $\dot{x} \neq 0$. Entonces si se eligen las condiciones iniciales de manera que $V(0) < k_e \frac{(2mgl)^2}{2}$ se asegura que el punto $\dot{\theta} = 0, \theta = \pi$ nunca se alcanzará. Por tanto, como el sistema se comporta como el péndulo mostrado en (2.69), cuando $y \in S$ entonces $\sin(\theta)[mg \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2]$ no puede ser constante (incluido el valor cero). Entonces, la única manera de que (2.72) sea constante, cuando $y \in S$, es que $E = 0$. Observando las convenciones del péndulo en la Figura 2.1, la energía del péndulo siempre es negativa y solo será cero cuando el péndulo en movimiento cuenta con la energía exacta para llegar a la posición $\theta = 0$ o cuando ya se encuentra el péndulo en reposo en dicha posición.

De tal manera, para que (2.72) sea constante se requiere que $E = 0$, lo que implica que $x = x^*$, por tanto el controlador no lineal (2.63) es capaz de llevar al sistema a la trayectoria homoclínica $E = 0$, que es la energía necesaria para llevar al péndulo a la posición $\theta = 0$.

2.4. Controlador para atrapar el péndulo

Con base en (2.44), (2.45), (2.49), (2.50) y (2.51) se tiene que el punto de operación en el cual se desea trabajar es:

$$y^* = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \\ y_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* \\ \dot{x}^* \\ \theta^* \\ \dot{\theta}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f^* = 0 \quad (2.73)$$

Aplicando las formulas que se muestran en Hernández-Guzmán et al. (2013) para la aproximación lineal del sistema (2.42) en el punto de operación (2.73) se tiene que:

$$\dot{z} = Az + Bw \quad (2.74)$$

$$A = \left. \frac{\partial h(y, f)}{\partial y} \right|_{f^*}^{y^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} & \frac{\partial h_1}{\partial y_3} & \frac{\partial h_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} & \frac{\partial h_2}{\partial y_3} & \frac{\partial h_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial h_3}{\partial y_1} & \frac{\partial h_3}{\partial y_2} & \frac{\partial h_3}{\partial y_3} & \frac{\partial h_3}{\partial y_4} \\ \frac{\partial h_4}{\partial y_1} & \frac{\partial h_4}{\partial y_2} & \frac{\partial h_4}{\partial y_3} & \frac{\partial h_4}{\partial y_4} \end{bmatrix} \bigg|_{f^*}^{y^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

$$B = \left. \frac{\partial h(y, f)}{\partial f} \right|_{y^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial f} \\ \frac{\partial h_2}{\partial f} \\ \frac{\partial h_3}{\partial f} \\ \frac{\partial h_4}{\partial f} \end{bmatrix} \bigg|_{y^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{Ml} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Donde:

$$z = y - y^* \quad (2.77)$$

$$w = f - f^* \quad (2.78)$$

Se encontró que el par (A, B) es controlable debido a que la matriz de controlabilidad $C = [B|AB|A^2B|A^3B]$ tiene el siguiente determinante:

$$\det(C) = \frac{g^2}{M^4 l^4} > 0 \quad (2.79)$$

Por lo tanto es posible asignar de manera arbitraria los valores propios de la matriz de lazo cerrado $(A - BK^T)$ a través del controlador $w = -K^T z$. De (2.73), (2.77) y (2.78) se deduce que el controlador para atrapar el PISC es:

$$f = w = -K^T z = -K^T y \quad (2.80)$$

2.5. Modelo matemático del motor de CD con escobillas e imán permanente

El motor de CD con escobillas e imán permanente es un sistema electromecánico que transforma la energía eléctrica en energía mecánica; debido a esto, el modelo matemático se obtiene con el análisis de los subsistemas eléctrico y mecánico por separado (Hernández-Guzmán et al., 2013); el diagrama representativo del motor se muestra en la Figura 2.3.

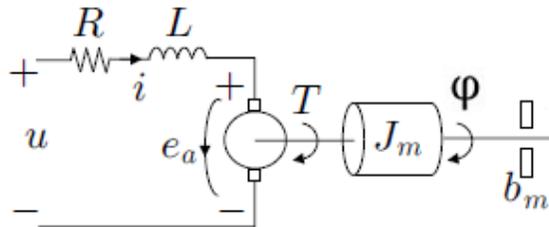


Figura 2.3: Diagrama del motor de CD.

Donde:

- u es el voltaje aplicado en las terminales del motor.
- i es la corriente eléctrica de armadura.
- φ es la posición angular del rotor del motor.
- $e_a = k_e \dot{\varphi}$ es la fuerza contra-electromotriz, donde k_e es la constante de fuerza contra-electromotriz.
- $T = k_m i$ es el par electromagnético generado, donde k_m es la constante de par del motor.
- L es la inductancia de armadura.
- R es la resistencia de armadura.
- J_m es la inercia del rotor del motor.
- b_m es la constante de fricción viscosa del motor.

Para calcular el modelo matemático del sistema eléctrico se aplica la Ley de Kirchhoff de voltajes en la única malla; entonces, se tiene que:

voltaje aplicado = \sum caídas de voltaje en toda la malla, es decir:

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri + e_a = L \frac{di}{dt} + Ri + k_e \dot{\varphi} \quad (2.81)$$

En el caso del sistema mecánico se utiliza la Segunda Ley de Newton. Considerando que no existen pares de carga y que el motor no está acoplado a ningún tipo de transmisión; entonces, para la inercia y la velocidad angular del motor se tiene que:

inercia \times aceleración angular = \sum pares sobre la inercia J_m ; es decir:

$$J_m \ddot{\varphi} = T - b_m \dot{\varphi} = k_m i - b_m \dot{\varphi} \quad (2.82)$$

Debido a que las ecuaciones (2.81) y (2.82) dependen una de otra; es posible llegar a la representación del modelo matemático del motor con una sola ecuación, en la cual se pueda observar el comportamiento de la corriente en función del voltaje de entrada. Aplicando la

transformada de Laplace a las ecuaciones (2.81) y (2.82), considerando condiciones iniciales cero, se tiene que:

$$U(s) = LsI(s) + RI(s) + k_e s\Phi(s) \quad (2.83)$$

$$J_m s^2 \Phi(s) = k_m I(s) - b_m s \Phi(s) \quad (2.84)$$

De (2.84) se observa que:

$$\begin{aligned} J_m s^2 \Phi(s) + b_m s \Phi(s) &= k_m I(s), \\ (J_m s^2 + b_m s) \Phi(s) &= k_m I(s), \\ \Phi(s) &= \frac{k_m}{(J_m s^2 + b_m s)} I(s). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Sustituyendo (2.85) en (2.83) se tiene que:

$$\begin{aligned} U(s) &= LsI(s) + RI(s) + k_e s \left(\frac{k_m}{(J_m s^2 + b_m s)} I(s) \right), \\ U(s) &= LsI(s) + RI(s) + k_e \left(\frac{k_m}{(J_m s + b_m)} I(s) \right), \\ U(s) &= LsI(s) + RI(s) + \frac{k_e k_m}{(J_m s + b_m)} I(s), \\ U(s) &= \left(Ls + R + \frac{k_e k_m}{(J_m s + b_m)} \right) I(s), \\ U(s) &= \left(\frac{(Ls + R)(J_m s + b_m) + k_e k_m}{(J_m s + b_m)} \right) I(s). \end{aligned} \quad (2.86)$$

A partir de (2.86) se puede concluir que una forma de representar el modelo matemático del motor de CD como función de transferencia con la corriente como salida en términos de la transformada de Laplace, es:

$$\frac{I(s)}{U(s)} = \frac{(J_m s + b_m)}{(Ls + R)(J_m s + b_m) + k_e k_m} \quad (2.87)$$

2.6. Control proporcional (P) de corriente de un motor de CD con escobillas e imán permanente

Para asegurar que la corriente en un motor de CD con escobillas e imán permanente se aproxime al valor deseado; se puede valer de un control de corriente que en su forma más simple consiste en un controlador proporcional de corriente (Hernández-Guzmán et al., 2013). Es decir, la señal de control se calcula como:

$$u_i = k_{pi}(i_d - i) \quad (2.88)$$

Donde k_{pi} es una constante positiva que representa la ganancia del controlador proporcional de corriente, mientras que i_d representa la consigna de corriente que debe ser obtenida como la salida de otro controlador que se encarga de controlar la variable deseada. Supóngase que i_d es simplemente el valor deseado de corriente que será especificado de algún modo; entonces considerando la función de transferencia obtenida en (2.87) y visto en un diagrama de bloques en términos de la transformada de Laplace; el control proporcional de corriente de un motor de CD quedaría como se muestra en la Figura 2.4.

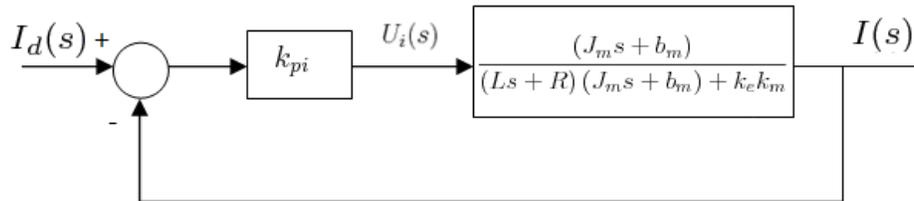


Figura 2.4: Diagrama de bloques del control proporcional de corriente.

Reduciendo la serie de bloques de la Figura 2.4; siendo $G_{La}(s)$ la función de transferencia de lazo abierto y $G_{Lc}(s) = \frac{I(s)}{I_d(s)}$ la función de transferencia de lazo cerrado, se tiene que:

$$G_{La}(s) = \frac{k_{pi}(J_m s + b_m)}{(L s + R)(J_m s + b_m) + k_e k_m} \quad (2.89)$$

$$G_{Lc} = \frac{\frac{k_{pi}(J_m s + b_m)}{(L s + R)(J_m s + b_m) + k_e k_m}}{1 + \frac{k_{pi}(J_m s + b_m)}{(L s + R)(J_m s + b_m) + k_e k_m}} \quad (2.90)$$

Reduciendo (2.90), se tiene que:

$$G_{Lc} = \frac{k_{pi} (J_m s + b_m)}{(Ls + R) (J_m s + b_m) + k_e k_m + k_{pi} (J_m s + b_m)},$$

$$G_{Lc} = \frac{(J_m s + b_m)}{\frac{1}{k_{pi}} (Ls + R) (J_m s + b_m) + \frac{k_e k_m}{k_{pi}} + (J_m s + b_m)}. \quad (2.91)$$

Como se puede observar, el polinomio característico de la función de transferencia de lazo cerrado (2.91) es de segundo orden y tiene todos sus coeficientes con el mismo signo (positivo), por lo tanto de acuerdo a la regla de los signos mostrada en Hernández-Guzmán et al. (2013), el polinomio característico tiene todas sus raíces con parte real negativa y el control proporcional de corriente es estable.

Por otro lado en (2.89) se puede observar que el sistema es un tipo 0, lo que indica que por el teorema del valor final el error en estado estacionario es diferente de cero; por lo tanto, nunca alcanzará una entrada escalón (valor de la corriente deseada). Pero si se elige una ganancia k_{pi} bastante grande, se pueden considerar algunos términos de la función de transferencia de lazo cerrado (2.91) aproximadamente cero; por lo tanto (2.91) quedaría como:

$$G_{Lc} \approx \frac{(J_m s + b_m)}{(J_m s + b_m)} = 1 \quad (2.92)$$

Lo cual implica que $I(s) \approx I_d(s)$; es decir, el control proporcional de corriente es capaz de llevar a la corriente eléctrica del motor a un valor muy cercano de la corriente deseada.

Capítulo 3

APORTACIÓN TEÓRICA

3.1. Ecuación de estado del PISC

En la sección 2.2 se obtiene el modelo compacto del PISC y a partir de éste se encuentran las ecuaciones de estado siguiendo la secuencia de análisis de Fantoni y Lozano (2002). Claramente se observa en esa sección (sección 2.2) que Fantoni y Lozano (2002) hacen una consideración en la que la inercia del péndulo se desprecia, es decir $I \approx 0$; para algunos sistemas esta consideración no se cumple y debido a esto se propone un nuevo análisis de las ecuaciones considerando que la inercia no es despreciable.

Entonces, se propone la definición de las siguientes constantes, a_1 y a_2 como:

$$a_1 = \frac{m^2 l^2}{m l^2 + I} \quad (3.1)$$

$$a_2 = M + m \quad (3.2)$$

Y siguiendo la metodología de análisis de Fantoni y Lozano (2002), se pueden escribir (2.36) y (2.33) como:

$$\ddot{x} = \frac{1}{a_2 - a_1 \cos^2(\theta)} \left[-a_1 g \sin(\theta) \cos(\theta) + m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + f \right] \quad (3.3)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{a_1}{m l} \left[-\ddot{x} \cos(\theta) + g \sin(\theta) \right] \quad (3.4)$$

Por otro lado, sustituyendo (3.3) en (3.4) se tiene que:

$$\ddot{\theta} = \frac{a_1}{m l} \left[-\frac{\cos(\theta)}{a_2 - a_1 \cos^2(\theta)} \left[-a_1 g \sin(\theta) \cos(\theta) + m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + f \right] + g \sin(\theta) \right],$$

$$\ddot{\theta} = \frac{a_1^2 g \sin(\theta) \cos^2(\theta) - a_1 m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - a_1 f \cos(\theta)}{m l (a_2 - a_1 \cos^2(\theta))} + \frac{a_1 g \sin(\theta)}{m l},$$

$$\ddot{\theta} = \frac{a_1^2 g \sin(\theta) \cos^2(\theta) - a_1 m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - a_1 f \cos(\theta)}{m l (a_2 - a_1 \cos^2(\theta))} + \frac{a_1 g \sin(\theta) (a_2 - a_1 \cos^2(\theta))}{m l (a_2 - a_1 \cos^2(\theta))},$$

$$\ddot{\theta} = \frac{a_1^2 g \sin(\theta) \cos^2(\theta) - a_1 m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - a_1 f \cos(\theta) + a_1 g \sin(\theta) (a_2 - a_1 \cos^2(\theta))}{m l (a_2 - a_1 \cos^2(\theta))},$$

$$\ddot{\theta} = \frac{a_1 a_2 g \sin(\theta) - a_1 m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - a_1 f \cos(\theta)}{m l (a_2 - a_1 \cos^2(\theta))}. \quad (3.5)$$

Con base en (3.3) y (3.5) y considerando la ecuación (2.41), es posible escribir la ecuación de estado del PISC como:

$$\dot{y} = h(y, f) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \frac{-a_1 g \sin(\theta) \cos(\theta) + m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + f}{a_2 - a_1 \cos^2(\theta)} \\ y_4 \\ \frac{a_1 a_2 g \sin(\theta) - a_1 m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - a_1 f \cos(\theta)}{m l (a_2 - a_1 \cos^2(\theta))} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Los puntos de operación del sistema (3.6) se obtienen al hacer:

$$h(y^*, f^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Del primer y tercer renglón de (3.7) se tiene que:

$$y_2^* = \dot{x}^* = 0 \quad (3.8)$$

$$y_4^* = \dot{\theta}^* = 0 \quad (3.9)$$

Posteriormente sustituyendo (3.8) y (3.9) en el segundo y cuarto renglón de (3.7) se observa que:

$$f^* = a_1 g \sin(y_3^*) \cos(y_3^*) \quad (3.10)$$

$$a_1 a_2 g \sin(y_3^*) - a_1 f^* \cos(y_3^*) = 0 \quad (3.11)$$

Sustituyendo (3.10) en (3.11) se tiene que:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 g \sin(y_3^*) - a_1 \cos(y_3^*) a_1 g \sin(y_3^*) \cos(y_3^*) &= 0, \\ a_1 a_2 g \sin(y_3^*) - a_1^2 g \sin(y_3^*) \cos^2(y_3^*) &= 0, \\ \sin(y_3^*) &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$y_3^* = \theta^* = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.13)$$

Ahora se tiene que al sustituir (3.12) en (3.10) se encuentra:

$$f^* = 0 \quad (3.14)$$

Finalmente se observa que y_1^* no aparece en (3.7) por lo que se puede tomar cualquier valor, es decir:

$$y_1^* = x^* = c \in \mathbb{R} \quad (3.15)$$

3.2. Obtención del controlador para levantar el péndulo

El nuevo controlador para levantar el péndulo se deduce a partir de la función (ecuación (2.52)) propuesta por Fantoni y Lozano (2002), vista en la sección 2.3:

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_e}{2} E(q, \dot{q})^2 + \frac{k_v}{2} \dot{x}^2 + \frac{k_x}{2} [x - x^*]^2$$

Siguiendo la misma metodología de análisis de la sección 2.3 se llega a la ecuación (2.58); a partir de la cual, al sustituir (3.3) en (2.58) se encuentra que:

$$\dot{V} = \dot{x} \left[f \left(k_e E + \frac{k_v}{a_2 - a_1 \cos^2(\theta)} \right) + \frac{k_v \sin(\theta) (-a_1 g \cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2)}{a_2 - a_1 \cos^2(\theta)} + k_x (x - x^*) \right] \quad (3.16)$$

Ahora se escoge f de tal manera que el segundo factor de (3.16) sea:

$$f \left(k_e E + \frac{k_v}{a_2 - a_1 \cos^2(\theta)} \right) + \frac{k_v \sin(\theta)(-a_1 g \cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2)}{a_2 - a_1 \cos^2(\theta)} + k_x(x - x^*) = -k_\delta \dot{x} \quad (3.17)$$

Para poder despejar f de (3.17) se debe asegurar que:

$$\left[k_e E + \frac{k_v}{a_2 - a_1 \cos^2(\theta)} \right] \neq 0 \quad (3.18)$$

Si se quiere asegurar (3.18) se requiere analizar los dos casos posibles para que la parte izquierda de la ecuación (3.18) sea diferente de cero; es decir, cuando la parte izquierda es mayor que cero y cuando es menor que cero. En éste sentido se analiza primero la situación cuando es menor que cero:

$$k_e E + \frac{k_v}{a_2 - a_1 \cos^2(\theta)} < 0 \quad (3.19)$$

Primero se observa que la energía total del sistema en el estado inicial E_o , cuando las velocidades \dot{x} y $\dot{\theta}$ son cero y el péndulo se encuentra en su estado natural, es decir, en $\theta = \pi$; la energía cinética inicial K_o es cero y la única energía que tiene el PISC es la energía potencial de inicio P_o , por lo cual se tiene que:

$$E_o = K_o + P_o = 0 + mgl(\cos(\pi) - 1) = -2mgl \quad (3.20)$$

Por lo tanto:

$$E \geq -2mgl \quad (3.21)$$

Lo que quiere decir que la energía del sistema comienza en valores negativos hasta alcanzar el cero. Por otra parte, el segundo término de (3.19) está dividido por $a_2 - a_1 \cos^2(\theta)$; en éste término se analiza primeramente a_1 ; del cual, se puede decir que el valor más grande que puede tomar es aproximadamente m . Ésta afirmación se debe a que si se aumenta la inercia I del péndulo, el denominador de a_1 (ec. (3.1)) aumenta y por lo tanto a_1 disminuye; entonces, el valor más grande que puede alcanzar a_1 es cuando $I \rightarrow 0$ ya que I no puede tomar valores negativos, de ésta manera a_1 queda como:

$$a_1 = \frac{m^2 l^2}{ml^2} = m, \quad a_1 < m. \quad (3.22)$$

Con la afirmación de anterior se observa que:

$$a_2 = M + m > m > a_1 \quad (3.23)$$

Una vez demostrado que $a_2 > a_1$ y debido a que k_v está definida positiva, se puede decir que:

$$\frac{k_v}{a_2 - a_1 \cos^2(\theta)} > 0 \quad (3.24)$$

Con la conclusión de (3.24) se puede plantear la situación en la que se elige k_v lo suficientemente grande para que el segundo término de (3.19) inicialmente sea más grande en magnitud que el valor absoluto del primer término de (3.19); si esta situación ocurre entonces no se cumpliría (3.19) ya que la diferencia sería un valor positivo, por lo cual se tendría que elegir un valor de k_v de tal forma que:

$$2mgl > \frac{k_v}{a_2 - a_1} \quad (3.25)$$

El problema de elegir un valor de k_v que cumpla (3.25) es que cuando la energía crezca desde un valor negativo $-2mgl$ para llegar a cero, en algún momento debe pasar por un valor idéntico y de signo contrario al que tendrá el segundo término de (3.19), por lo que al sumarse se harán cero y se dejará de cumplir la condición (3.18).

Con la conclusión anterior solo queda analizar cuando:

$$k_e E + \frac{k_v}{a_2 - a_1 \cos^2(\theta)} > 0 \quad (3.26)$$

Para ello se sigue de (3.21) que:

$$k_e E \geq -2mglk_e \quad (3.27)$$

Debido a que el valor más negativo que puede tener el primer término de (3.26) es el de la desigualdad (3.27) y por el cual podría dejar de cumplirse la condición (3.26), se puede sustituir (3.27) en (3.26) para obtener:

$$-2mglk_e + \frac{k_v}{a_2 - a_1 \cos^2(\theta)} > 0 \quad (3.28)$$

De ésta manera, si ahora se piensa en el valor más pequeño que puede tener el segundo término de (3.26) para llevar al límite a la desigualdad, se tiene que:

$$\begin{aligned} -2mglk_e + \frac{k_v}{a_2} &> 0, \\ \frac{k_v}{a_2} &> 2mglk_e, \\ \frac{k_v}{k_e} &> 2mgl a_2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Así al cumplir la nueva condición (3.29), es posible despejar f de (3.17) quedando como:

$$f = \frac{k_v \sin(\theta) \left(a_1 g \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \right) - (a_2 - a_1 \cos^2(\theta)) (k_x (x - x^*) + k_\delta \dot{x})}{k_v + (a_2 - a_1 \cos^2(\theta)) k_e E} \quad (3.30)$$

Con ésto (3.16) se convierte en:

$$\dot{V} = -k_\delta \dot{x}^2, \quad k_\delta > 0 \quad (3.31)$$

y en consecuencia el estado y converge al conjunto:

$$S = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid \dot{x} = 0\} \quad (3.32)$$

Como $\dot{x} = 0$ tenemos que $\ddot{x} = 0$. Así, evaluando la dinámica (2.38) en S se tiene que:

$$\ddot{x} = 0 = \frac{1}{a_2 - a_1 \cos^2(\theta)} \left[-a_1 g \sin(\theta) \cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + f \right] \quad (3.33)$$

Encontrando que:

$$f = a_1 g \sin(\theta) \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \quad (3.34)$$

Sustituyendo (3.34) en (3.5) se tiene que:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{a_1 a_2 g \sin(\theta) - a_1 ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - a_1 \left[a_1 g \sin(\theta) \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \right] \cos(\theta)}{ml(a_2 - a_1 \cos^2(\theta))}, \\ \ddot{\theta} &= \frac{a_1 a_2 g \sin(\theta) - a_1 ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - a_1^2 g \sin(\theta) \cos^2(\theta) + a_1 ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{ml(a_2 - a_1 \cos^2(\theta))}, \\ \ddot{\theta} &= \frac{a_1 a_2 g \sin(\theta) - a_1^2 g \sin(\theta) \cos^2(\theta)}{ml(a_2 - a_1 \cos^2(\theta))}, \\ \ddot{\theta} &= \frac{a_1 g \sin(\theta) (a_2 - a_1 \cos^2(\theta))}{ml(a_2 - a_1 \cos^2(\theta))} = \frac{a_1 g}{ml} \sin(\theta). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.1) en (3.35) se obtiene:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{mgl}{ml^2 + I} \sin(\theta), \\ (ml^2 + I)\ddot{\theta} &= mgl \sin(\theta).\end{aligned}\tag{3.36}$$

Así, en la ecuación (3.36) se observa la dinámica de un péndulo simple sin fricción, por lo que la energía es constante y si θ no es constante, el péndulo tendrá movimiento de manera perpetua.

Ahora se procede a sustituir (3.34) en el segundo sumando del primer término de (3.17) (recordar que f en (3.34) se obtuvo cuando $\dot{x} = 0$), con lo que se llega a:

$$Ek_e f + k_x(x - x^*) = -k_\delta \dot{x} = 0\tag{3.37}$$

Sustituyendo nuevamente (3.34) ahora en el primer término de (3.37) se tiene que:

$$\begin{aligned}Ek_e [a_1 g \sin(\theta) \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta)] &= k_x(x^* - x), \\ Ek_e \sin(\theta) [a_1 g \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2] &= k_x(x^* - x).\end{aligned}\tag{3.38}$$

Como k_x es constante además $\dot{x} = 0$ (x es constante también), entonces el miembro derecho de (3.38) es constante.

Entonces, al igual que se hizo en la sección 2.3 se puede concluir el controlador de la misma manera; es decir, de acuerdo a (2.54) se tiene que $E = -2mgl$ cuando $\dot{\theta} = 0$ y $\theta = \pi$ además en virtud de (3.31) se observa que V en (2.52) decrece mientras la $\dot{x} \neq 0$. Entonces si se eligen las condiciones iniciales de manera que $V(0) < k_e \frac{(2mgl)^2}{2}$ se asegura que el punto $\dot{\theta} = 0, \theta = \pi$ nunca se alcanzará. Por tanto, como el sistema se comporta como el péndulo mostrado en (3.36), cuando $y \in S$ entonces $\sin(\theta)[a_1 g \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2]$ no puede ser constante (incluido el valor cero).

Entonces, la única manera de que (3.38) sea constante, cuando $y \in S$, es que $E = 0$. Observando las convenciones del péndulo en la Figura 2.1, la energía del péndulo siempre es negativa y solo será cero cuando el péndulo en movimiento cuenta con la energía exacta para llegar a la posición $\theta = 0$ ó cuando ya se encuentra el péndulo en reposo en dicha posición.

De tal manera, para que (3.38) sea constante se requiere que $E = 0$, lo que implica que $x = x^*$, por tanto el controlador no lineal (3.30) es capaz de llevar al sistema a la tra-

yectoria homoclínica $E = 0$, que es la energía necesaria para llevar al péndulo a la posición $\theta = 0$.

3.3. Obtención del controlador para atrapar al péndulo

El nuevo controlador para atrapar el péndulo se obtiene con (3.8), (3.9), (3.13), (3.14) y (3.15); seleccionando el punto de operación como sigue:

$$y^* = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \\ y_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* \\ \dot{x}^* \\ \theta^* \\ \dot{\theta}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f^* = 0 \quad (3.39)$$

De la misma manera que en la sección 2.4; aplicando las formulas que se muestran en Hernández-Guzmán et al. (2013) para la aproximación lineal del sistema (3.6) en el punto de operación (3.39) se tiene que:

$$\dot{z} = Az + Bw \quad (3.40)$$

$$A = \left. \frac{\partial h(y, f)}{\partial y} \right|_{y^*, f^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} & \frac{\partial h_1}{\partial y_3} & \frac{\partial h_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} & \frac{\partial h_2}{\partial y_3} & \frac{\partial h_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial h_3}{\partial y_1} & \frac{\partial h_3}{\partial y_2} & \frac{\partial h_3}{\partial y_3} & \frac{\partial h_3}{\partial y_4} \\ \frac{\partial h_4}{\partial y_1} & \frac{\partial h_4}{\partial y_2} & \frac{\partial h_4}{\partial y_3} & \frac{\partial h_4}{\partial y_4} \end{bmatrix} \Bigg|_{y^*, f^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-a_1 g}{a_2 - a_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{a_1 a_2 g}{ml(a_2 - a_1)} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$B = \left. \frac{\partial h(y, f)}{\partial f} \right|_{y^*, f^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial f} \\ \frac{\partial h_2}{\partial f} \\ \frac{\partial h_3}{\partial f} \\ \frac{\partial h_4}{\partial f} \end{bmatrix} \Bigg|_{y^*, f^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2 - a_1} \\ 0 \\ \frac{-a_1}{ml(a_2 - a_1)} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Donde, de la misma forma que en la sección 2.4:

$$z = y - y^* \quad (3.43)$$

$$w = f - f^* \quad (3.44)$$

Analizando una vez más la matriz de controlabilidad $C = [B|AB|A^2B|A^3B]$ del par (A, B) , se tiene que:

$$\det(C) = \frac{g^2 a_1^4}{m^4 l^4 (a_1 - a_2)^4} > 0 \quad (3.45)$$

Por lo tanto, el sistema es controlable y es posible asignar de manera arbitraria los valores propios de la matriz de lazo cerrado $(A - BK^T)$ a través del controlador $w = -K^T z$. De (3.39), (3.43) y (3.44) se deduce que el nuevo controlador para atrapar el PISC es:

$$f = w = -K^T z = -K^T y \quad (3.46)$$

3.4. Control proporcional-integral (PI) de corriente de un motor de CD con escobillas e imán permanente

Como se analiza en la sección 2.6, el control proporcional de corriente es estable pero requiere valores muy grandes en la ganancia proporcional para que la corriente en el motor se acerque al valor de corriente deseada. Evidentemente para alcanzar el valor deseado de corriente, se necesita aumentar el “tipo” de la función de transferencia de lazo abierto del sistema; y esto se consigue incluyendo un término integral en el controlador; es decir, utilizando la misma nomenclatura de las secciones 2.6 y 2.5, la señal de control se calcula como:

$$u_i = k_{pi}(i_d - i) + k_{ii} \int (i_d - i) dt \quad (3.47)$$

Donde k_{ii} es una constante positiva que representa la ganancia integral del controlador PI; aplicando la transformada de Laplace (considerando condiciones iniciales cero) a la ecuación (3.47) se tiene que:

$$U_i(s) = k_{pi}(I_d(s) - I(s)) + \frac{k_{ii}}{s} (I_d(s) - I(s)) \quad (3.48)$$

Al igual que con el control proporcional, se analiza el diagrama de bloques del sistema en términos de la transformada de Laplace que se muestra en la Figura 3.1.

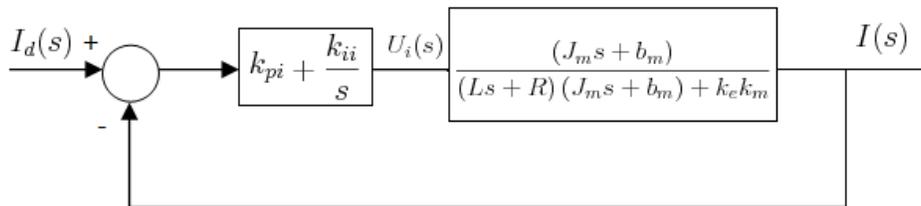


Figura 3.1: Diagrama de bloques del control proporcional-integral de corriente.

Reduciendo el diagrama de bloques de la Figura 3.1 se tiene que:

$$G_{La} = \frac{(k_{pi}s + k_{ii})(J_ms + b_m)}{s((Ls + R)(J_ms + b_m) + k_ek_m)} \quad (3.49)$$

$$G_{Lc} = \frac{\frac{(k_{pi}s + k_{ii})(J_ms + b_m)}{s((Ls + R)(J_ms + b_m) + k_ek_m)}}{1 + \frac{(k_{pi}s + k_{ii})(J_ms + b_m)}{s((Ls + R)(J_ms + b_m) + k_ek_m)}} \quad (3.50)$$

Simplificando la ecuación (3.50) se tiene que:

$$G_{Lc} = \frac{(k_{pi}s + k_{ii})(J_ms + b_m)}{LJ_ms^3 + (J_m(R + k_{pi}) + b_mL)s^2 + (b_m(R + k_{pi}) + k_ek_m + k_{ii}J_m)s + k_{ii}b_m} \quad (3.51)$$

Como se puede observar en (3.49) la función de transferencia en lazo abierto ya es un tipo 1; entonces, por el teorema del valor final, el error en estado estacionario es cero y el sistema alcanzará el valor deseado para una entrada escalón, que en éste caso es la corriente deseada.

Por otro lado, se observa en (3.51) que el polinomio característico de la función de transferencia en lazo cerrado es de grado 3; entonces, aplicando el criterio de estabilidad de Routh al polinomio característico de (3.51) se tiene que:

Tabla 3.1: Criterio de estabilidad de Routh aplicado al denominador de (3.51).

s^3	c_3	c_1	0
s^2	c_2	c_0	0
s^1	$\frac{c_2c_1 - c_3c_0}{c_2}$	0	0
s^0	c_0	0	0

Donde:

$$c_3 = LJ_m > 0 \quad (3.52)$$

$$c_2 = J_m(R + k_{pi}) + b_mL > 0 \quad (3.53)$$

$$c_1 = b_m(R + k_{pi}) + k_ek_m + k_{ii}J_m > 0 \quad (3.54)$$

$$c_0 = k_{ii}b_m > 0 \quad (3.55)$$

Analizando el término de la tercer fila y segunda columna de la tabla 3.1 se observa que:

$$\frac{c_2c_1 - c_3c_0}{c_2} = c_1 - \frac{c_3c_0}{c_2} \quad (3.56)$$

Sustituyendo (3.55), (3.54), (3.53) y (3.52) en (3.56) se tiene que:

$$\begin{aligned} c_1 - \frac{c_3c_0}{c_2} &= (b_m(R + k_{pi}) + k_e k_m + k_{ii}J_m) - \frac{LJ_mk_{ii}b_m}{J_m(R + k_{pi}) + b_mL}, \\ &= (b_m(R + k_{pi}) + k_e k_m + k_{ii}J_m) - \frac{k_{ii}J_m}{\frac{J_m}{Lb_m}(R + k_{pi}) + 1}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Entonces, del denominador del segundo término de (3.57) se tiene que:

$$\frac{J_m}{Lb_m}(R + k_{pi}) + 1 > 1 \quad (3.58)$$

Por lo tanto, se cumple:

$$\frac{k_{ii}J_m}{\frac{J_m}{Lb_m}(R + k_{pi}) + 1} < k_{ii}J_m \quad (3.59)$$

Considerando (3.57) y (3.59) se tiene:

$$\begin{aligned} (b_m(R + k_{pi}) + k_e k_m + k_{ii}J_m) &> \frac{k_{ii}J_m}{\frac{J_m}{Lb_m}(R + k_{pi}) + 1}, \\ (b_m(R + k_{pi}) + k_e k_m + k_{ii}J_m) - \frac{k_{ii}J_m}{\frac{J_m}{Lb_m}(R + k_{pi}) + 1} &> 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Con (3.60) queda demostrado que todos los términos de la segunda columna de 3.1 son positivos; por lo que no hay ningún cambio de signo entre elementos y se deduce que no hay raíces con parte real positiva en el polinomio característico de (3.51); es decir, el control PI de corriente es estable para cualquier valor de k_{pi} y k_{ii} .

Como se puede observar, los dos controladores (P y PI) de corriente son estables; pero una de las grandes diferencias entre un controlador y otro es que el controlador proporcional solo alcanza un valor cercano al valor deseado de corriente con una ganancia k_{pi} bastante grande, en cambio el control PI si puede alcanzar el valor deseado de corriente sin necesidad de aumentar demasiado la ganancia proporcional.

Capítulo 4

METODOLOGÍA

4.1. Control del sistema PISC con motor de CD como actuador

En base a las secciones 3.2 y 3.3, es posible controlar un sistema PISC con éstos 2 controladores; de los cuales, uno es para columpiar al péndulo (controlador no lineal) hasta llevarlo a una posición en donde se interrumpe éste controlador y entra el otro (controlador lineal) para mantenerlo en una posición de $\theta = 0$ (ver Fig. 2.1).

Como se puede observar, eventualmente se requiere un “criterio de swicheo” entre un controlador y otro. La primer idea que surge es cambiar al controlador lineal cuando el controlador no lineal haya llevado al péndulo a un cierto ángulo cercano de 0; pero éste criterio de swicheo solo funcionaría si la velocidad con la que sube el péndulo es pequeña, ya que si el péndulo sube con una velocidad muy grande, el controlador lineal probablemente no alcance a atrapar al péndulo.

Para solucionar ésto, se propone un criterio de swicheo que no dependa únicamente de la posición del péndulo θ sino que también de su velocidad $\dot{\theta}$; además, también se consideran los cuadrados de la posición y la velocidad del péndulo para evitar que se desconecte el controlador lineal cuando haya algún sobrepaso de θ ó $\dot{\theta}$ sea negativo, así el péndulo será atrapado con la velocidad que lleve. Entonces el criterio que se propone queda como:

$$\theta^2 + \dot{\theta}^2 k_{va} < \delta_s \quad (4.1)$$

Donde k_{va} es una constante positiva que sirve para ajustar el peso que tendrá la velocidad del péndulo y δ_s es una constante positiva que se utiliza para determinar cuando se cambia de controlador; de esta manera si (4.1) se cumple entonces se conecta el controlador lineal y en caso contrario se conecta el controlador no lineal.

Debido a que, el controlador para levantar el péndulo es un controlador no lineal que tiene como señal de control la fuerza f que se debe aplicar al carro; y el controlador para atrapar al péndulo, es un controlador lineal que también tiene como señal de control la fuerza que se debe aplicar al carro. Por lo tanto, el actuador que moverá al carro del PISC debe tener la capacidad de de entregar la fuerza calculada por los controladores.

En este sentido, un motor de CD con las especificaciones correctas puede generar esa fuerza a través del par que produce; es decir, ubicando el motor estratégicamente como parte del carro de modo que a través de las ruedas de radio R_r del carro se genere un par $T = fR_r = k_m i$ (ver sección 2.5), podemos obtener la corriente deseada del motor como:

$$i_d = \frac{fR_r}{k_m} \quad (4.2)$$

De esta manera solo queda asegurar que la corriente deseada sea representada en el motor; para esto, se puede valer de un control PI de corriente como el que se analiza en la sección 3.4. Así, el control de un sistema PISC con un motor de CD como actuador quedaría como se muestra en la Figura 4.1.

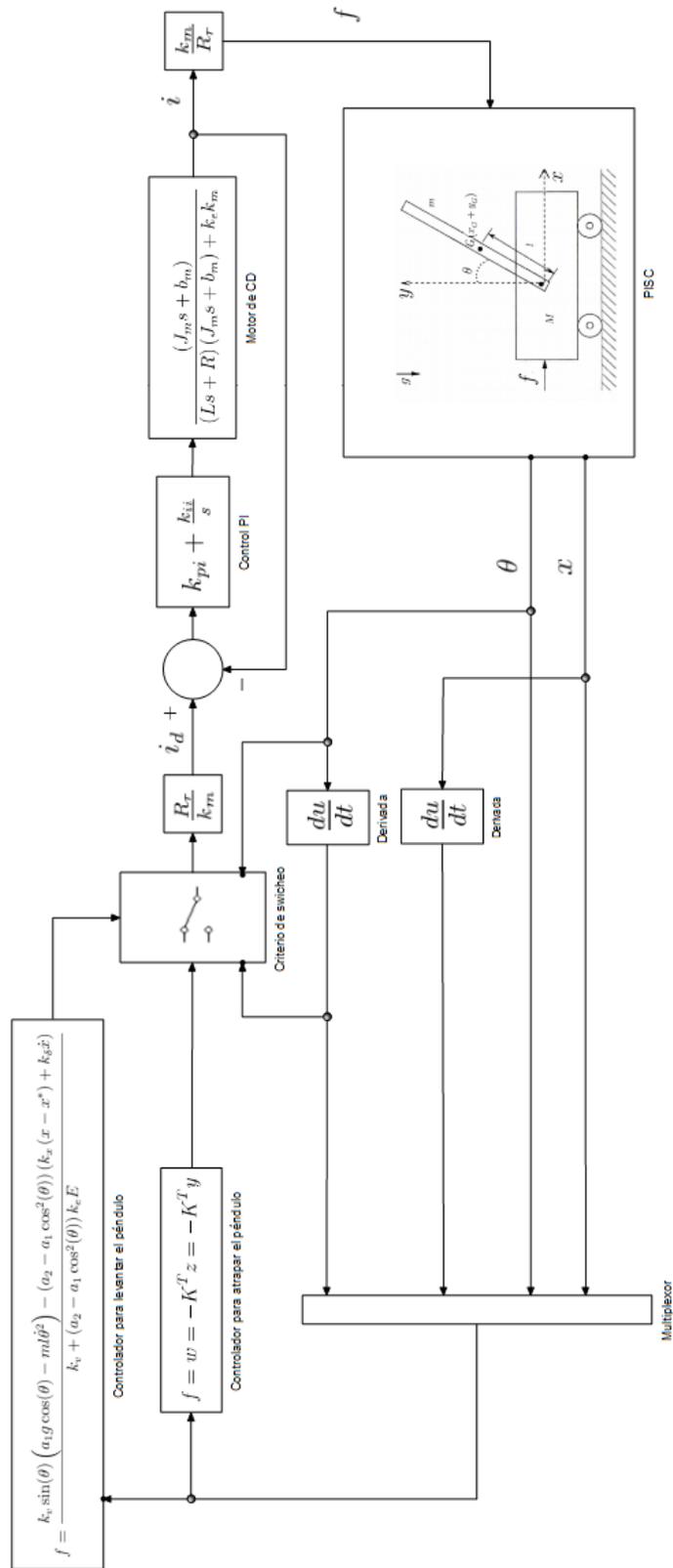


Figura 4.1: Diagrama de control del PISC.

4.2. Funcionamiento del sistema

Para la aplicación (en un prototipo real) del controlador mostrado en la Figura 4.1 se llevaron diferentes etapas (ver Fig. 4.2); la primera etapa consiste en una computadora personal que calcula las señales de control de los tres controladores propuestos; es decir, el controlador para levantar el péndulo, el controlador para atrapar el péndulo y el control PI de corriente. Además la computadora también procesará el criterio de swicheo para intercambiar de controlador.

Una vez que la computadora haya calculado la señal de control final, ésta debe ser llevada hasta las terminales del motor; pero primero debe pasar por la siguiente etapa propuesta, que consiste en una tarjeta electrónica basada en un microcontrolador. Ésta siguiente etapa tendrá varias funciones, una de ellas es servir de interfaz entre la computadora y el prototipo, otra función es la adquisición de datos de todos los sensores y la última función es entregar la señal de control calculada por la computadora a la siguiente etapa, la etapa de potencia.

La etapa de potencia está basada en un puente H que recibirá de la etapa anterior una señal de modulación de ancho de pulso (PWM) y un bit representante de la dirección en la que debe girar el motor; la señal de PWM a través del puente H será interpretada como el equivalente de nivel de voltaje que se tiene que suministrar al motor de CD, siendo este la siguiente etapa.

Una vez suministrado el voltaje al motor de CD, comenzará a circular una corriente por la armadura del mismo que a su vez ocasionará un par mecánico, el cual a través de las ruedas acopladas al motor se interpretará como una fuerza aplicada al carro del prototipo. Estas equivalencias de corriente a fuerza se pueden observar en la Figura 4.1.

La fuerza entregada de la etapa anterior es transferida al carro con el péndulo para de esta manera comenzar la dinámica de la posición del carro y la posición del péndulo; debido a que estas dos variables junto con la corriente del motor son utilizadas por los controladores, se requiere de la siguiente etapa que está compuesta por los tres sensores que convierten las variables de interés en señales eléctricas que posteriormente son adquiridas por la tarjeta electrónica de la segunda etapa y transferidas de regreso a la computadora.

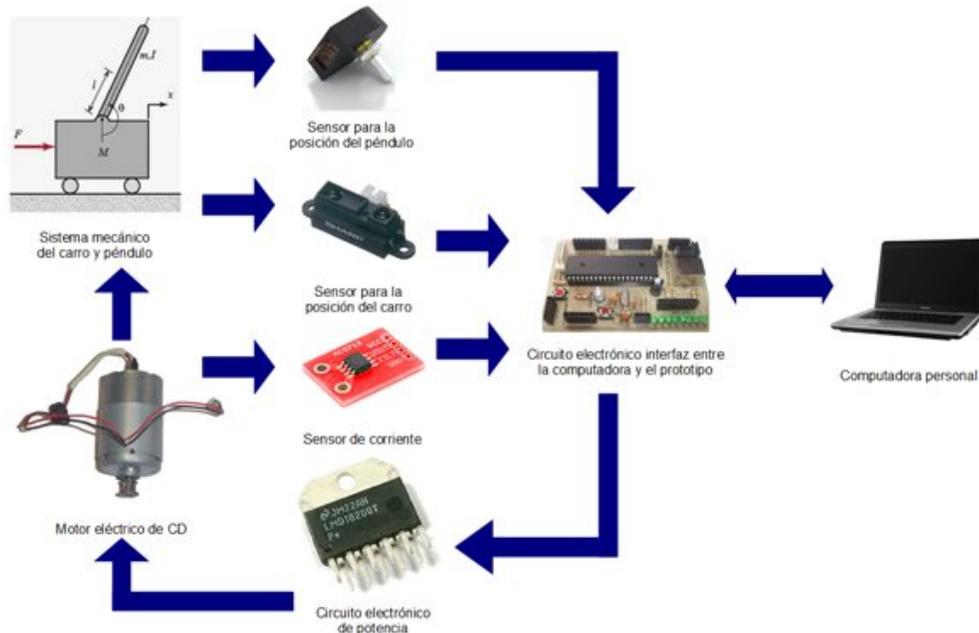


Figura 4.2: Distribución e interconexión de elementos del sistema.

4.3. Materiales y métodos

4.3.1 Metrología de atributos estáticos

Los atributos estáticos del prototipo experimental son aquellos que se consideran invariantes en el tiempo, por lo tanto, sólo se miden una vez.

- Masa, m [kg]:

Las masas que se requieren conocer son la del carro y el péndulo; para esto se utiliza una báscula disponible y comercial modelo ACB plus 1500 de la marca ae ADAM, con un rango de 0 a 1500 [g] y una resolución de 50 [mg].

- Longitudes, d [m]:

Las longitudes de interés son únicamente el radio de las ruedas acopladas a la flecha del motor y las partes geométricas del péndulo para posteriormente calcular su inercia y la distancia al centro de gravedad del mismo; estas longitudes se obtienen con un calibrador tipo vernier comercial modelo 531-128 de la marca MITUTOYO, con un rango de 0 a 150 [mm] con una resolución de 0.02 [mm].

- Momento de inercia, I [$kg \cdot m^2$]:

El péndulo con el que se trabajará es un prisma rectangular; entonces, el momento de inercia de un prisma rectangular de masa m , largo a y altura b con eje de rotación z (ver Figura 4.3), según Beer y Johnston (1988) esta dado como:

$$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \quad (4.3)$$

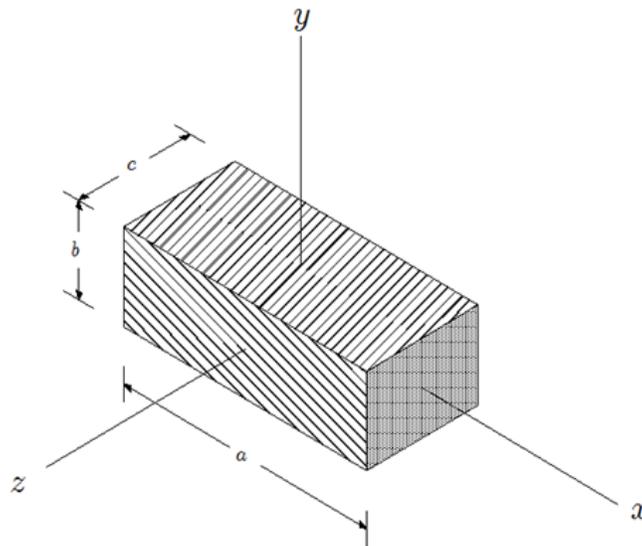


Figura 4.3: Prisma rectangular (Beer y Johnston, 1988).

- Constante de par, k_m [$\frac{N \cdot m}{A}$]:

La constante de par del motor se mide con una prueba realizada al motor, en la cual es necesario medir la corriente en la armadura del motor justo cuando el par que genera es conocido. La corriente eléctrica es medida con un multímetro disponible y comercial modelo MUL-285 de la marca STEREN.

El método para calcular la constante de par es el siguiente:

- Se acopla a la flecha del motor un extremo de alguna varilla disponible de longitud l_v y masa m_v conocidas.
- Se conecta el multímetro seleccionando medición de corriente y en serie con una terminal del motor.

- Se aplica voltaje al motor gradualmente hasta llevar a la varilla a una posición completamente horizontal.
- Se toma la lectura de corriente i_m en ese instante y la constante de par se calcula como sigue:

Si l_v es la longitud completa de la varilla; entonces, toda la masa de la varilla se concentra en $\frac{l_v}{2}$ y el peso de la varilla es:

$$w_v = m_v g = 9.81 m_v \quad (4.4)$$

Por lo tanto, el par que genera el motor para llevar al centro de masa de la varilla a su posición horizontal es:

$$T_g = w_v \frac{l_v}{2} = k_m i_m \quad (4.5)$$

Despejando k_m de (4.5) se observa que la constante de par queda calculada como:

$$k_m = \frac{w_v \frac{l_v}{2}}{i_m} \quad (4.6)$$

El motor que se utiliza en esta tesis es el modelo R11-1450 de la empresa Hp, de 24 [VCD] y 2 [A] y se muestra en la Figura 4.4.



Figura 4.4: Motor R11-1450 de la empresa Hp.

4.3.2 Metrología de atributos dinámicos

- Posición angular del péndulo, θ [rad]:

La posición angular del péndulo se obtiene con un codificador incremental óptico comercial modelo S1-1000-250-I-B-D, marca US DIGITAL, con una resolución 1000 cuentas por revolución (ver Figura 4.5). La actualización de la posición angular del péndulo en el controlador se realiza cada 0.005 [s].



Figura 4.5: Codificador incremental óptico S1-1000-250-I-B-D.

- Velocidad angular del péndulo, $\dot{\theta}$ [$\frac{rad}{s}$]:

La velocidad angular del péndulo se calcula de manera numérica basándose en la siguiente ecuación:

$$\dot{\theta}(k) = \frac{\theta(k) - \theta(k - 1)}{\Delta t}, \quad (4.7)$$

donde $\dot{\theta}(k)$ es la velocidad del péndulo en el instante actual, $\theta(k)$ es la posición del péndulo en el instante actual, $\theta(k - 1)$ es la posición del péndulo en el instante anterior y Δt es el periodo de tiempo entre las muestras de posición ($\Delta t = 0.005$ [s]).

- Posición del carro, x [m]:

La posición del carro se obtiene con un sensor infrarrojo de la marca SHARP modelo GP2Y0A21YK0F (ver Figura 4.6) que tiene una resolución de 10 a 80 [cm]; el cual se alimenta con 5 [VCD] y entrega una señal analógica de voltaje entre 0.5 y 3 [VCD]. La actualización de la posición del carro en el controlador se realiza cada 0.005 [s].



Figura 4.6: Sensor infrarrojo GP2Y0A21YK0F de la marca SHARP.

Debido a que la señal que entrega el sensor no es lineal se recurre a una linealización que consiste en tomar mediciones del voltaje entregado y la distancia del objeto al sensor para generar una tabla de datos y posteriormente una gráfica; con la cual se aproxima una función por medio de algún software (Microsoft Office Excel) y así es posible conocer directamente la posición del carro en metros de acuerdo al voltaje entregado por el sensor.

En base a la hoja de datos del sensor y a algunas mediciones; se puede obtener la función (4.8) que relaciona el voltaje entregado por el sensor V_{ir} y la distancia que se esta midiendo (x) como sigue:

$$x = 0.2451V_{ir}^{-1.069} \quad (4.8)$$

- Velocidad del carro, $\dot{x} [\frac{m}{s}]$:

La velocidad del carro se calcula de manera numérica basándose en la siguiente expresión:

$$\dot{x}(k) = \frac{x(k) - x(k - 1)}{\Delta t}, \quad (4.9)$$

donde $\dot{x}(k)$ es la velocidad del carro en el instante actual, $x(k)$ es la posición del carro en el instante actual, $x(k - 1)$ es la posición del carro en el instante anterior y Δt es el periodo de tiempo entre las muestras de posición ($\Delta t = 0.005 [s]$).

- Corriente de armadura del motor, $i [A]$:

La corriente de armadura del motor se mide con un sensor de corriente directa modelo ACS712 de la marca Allegro (ver Figura 4.7) el cual trabaja mediante el efecto Hall

y es alimentado con 5 [VCD]; el sensor entrega una señal analógica de voltaje entre 0 y 5 [VCD] equivalentes a la corriente medida entre -5 y 5 [A]. La actualización de la corriente del motor se realiza cada 0.005 [s].



Figura 4.7: Sensor de corriente ACS712.

4.3.3 Procesador de la ley de control

Las leyes de control se implementan en una computadora portátil modelo Satellite L455, marca TOSHIBA que cuenta con las siguientes características:

- Software:
 - Sistema operativo Windows 7 Home Basic.
 - MATLAB versión 8.0.
 - Dev-C++ versión 4.9.9.2.
 - Master-Prog+.
 - PCW C compiler versión 4.023.
- Hardware:
 - Procesador Intel Celeron 2.19 GHz.
 - Memoria RAM de 2 GB.
 - Disco duro de 250 GB.
 - Tres puertos USB2.

4.3.4 Interfaz entre el PISC y la computadora

Para la comunicación del PISC y la computadora se utiliza una interfaz serial a 115,200 [bps] a través de un cable convertidor USB-Serial de la marca MANHATTAN que se muestra en la Figura 4.8; en seguida los voltajes CMOS de la interfaz serial son convertidos a voltajes TTL con un driver MAX232 fabricado por la empresa TEXAS INSTRUMENTS que tiene las especificaciones de la Tabla 4.1.



Figura 4.8: Convertidor USB-serial MANHATTAN.

Los voltajes TTL se utilizan para completar la comunicación (por medio del protocolo UART) de la computadora con un microcontrolador comercial PIC16F877A de la empresa MICROCHIP, el cual se utiliza para adquirir las señales analógicas del sensor infrarrojo, el sensor de corriente, los pulsos del codificador incremental del péndulo y se encarga también de generar una señal de PWM que sirve para aplicar el voltaje en la armadura del motor a través un puente H.

Tabla 4.1: Características del MAX232.

Características	Valor
Velocidad máxima	120,000 [bps]
Voltaje de operación	5 [V]
Corriente nominal	0.008 [A]

El puente H que se utiliza en la parte de potencia, es fabricado por la empresa Texas Instruments modelo LMD18200 (ver Fig. 4.9); éste puente H tiene la capacidad de entregar 3 [A] y operar a voltajes de hasta 55 [VCD]; el puente H cuenta con un pin específico para saber si alcanza una temperatura peligrosa y tres terminales más para las señales de control (freno, dirección y PWM).



Figura 4.9: Puente H modelo LMD18200.

Capítulo 5

CONSTRUCCIÓN DEL PROTOTIPO EXPERIMENTAL

Debido a que el prototipo está planeado para fines didácticos y de experimentación; se diseñó con materiales comerciales de bajo costo, esto también ayudará para su mantenimiento y fácil reproducción en caso de ser necesario. La estructura que soporta al carro se escogió de aluminio para que sea ligera y se pueda transportar fácilmente, además de ser estética y resistente. Por otro lado, con el fin de lograr que la teoría se acerque bastante a la realidad, se diseñó un carro con cuatro ruedas que soporta el péndulo y puede correr libremente por la estructura con fricción seca casi nula. Al igual que el carro, el codificador incremental del péndulo también se eligió con balero para disminuir la fricción.

5.1. Subsistema de la base del prototipo

La base del prototipo soporta todos los subsistemas que componen al PISC, de tal manera que de la base hacia afuera únicamente salen los cables de alimentación eléctrica y el cable de comunicación con la computadora. Esta parte del prototipo se compone de varias piezas ensambladas con tornillos y pijas (ver Fig. 5.1). La pieza que se encuentra en la parte más baja (que da estabilidad a las demás piezas) es una madera de 60 [cm] de largo, 10.8 [cm] de ancho y 1.5 [cm] de grueso; a ésta madera se fijan 4 perfiles de aluminio tipo U normalmente utilizados en cancelería como rieles para puertas; estos perfiles se fijan en los extremos de la madera con pijas. Los perfiles miden 31 [cm] de largo, 2.2 [cm] de ancho y 2.0 [cm] de grueso.



Figura 5.1: Diseño de la base.

Las otras piezas son de otro tipo de perfil de aluminio que normalmente es utilizado en cancelería para sujetar los vidrios a las paredes y pisos. Se eligió este tipo de perfil debido a que lleva un riel por el centro de aproximadamente 11 [mm] de ancho que es muy útil para dirigir el carro que correrá sobre él. De éste perfil se cortaron 3 piezas con las mismas dimensiones que sirven como paredes para limitar el avance del carro en ambas direcciones, además en una de estas piezas se perforó una cavidad especial en donde cabe perfectamente el sensor infrarrojo que mide la posición del carro. Otras piezas de éste mismo perfil son cortadas y unidas con tuercas y tornillos para servir como plataforma por la cual correrá el carro con el péndulo. Las vistas y dimensiones de la base se muestran en la Figura 5.2.

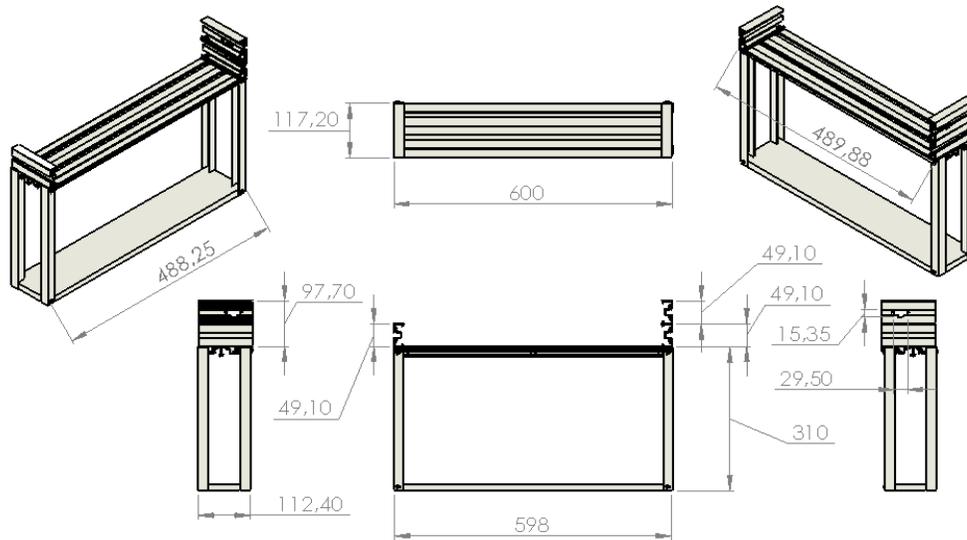


Figura 5.2: Vistas y dimensiones de la base (cotas en [mm]).

5.2. Subsistema mecánico del carro y péndulo

El carro que se propone para el prototipo está diseñado para disminuir la fricción seca que no se está modelando y pudiera alejar al prototipo de la teoría. El carro consiste en dos bases a diferentes alturas utilizadas para fijar un par de llantas en cada base (ver Fig. 5.3); la base superior es un trozo de canaleta que se utiliza para fijar componentes en tableros eléctricos de potencia, la canaleta es de acero inoxidable y mide aproximadamente 3.5 [cm] de ancho y 16.6 [cm] de largo. Ésta canaleta tiene perforaciones de fábrica que ayudan para fijarla en las paredes; en el prototipo, las perforaciones se utilizan para fijar con tornillos y tuercas de diferentes tamaños una abrazadera tipo U de acero inoxidable, la cual sujeta al motor de CD e imán permanente utilizado para generar la fuerza que mueve el carro.

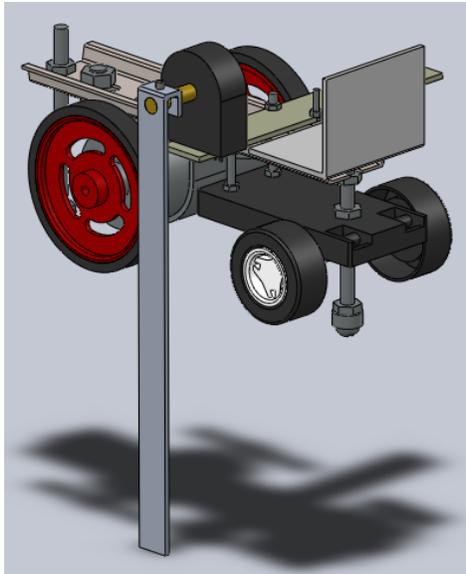


Figura 5.3: Diseño del carro y péndulo.

El motor que se eligió esta cuidadosamente seleccionado debido a que debe tener una flecha suficientemente extendida hacia los dos extremos del mismo; esto es porque posteriormente se acoplan dos llantas a presión directamente en la flecha del motor. Una vez que se fijaron las dos llantas traseras se atornilla el motor. Posteriormente, la siguiente base a la canaleta también se atornilla. La segunda base fue tomada de un carro de juguete en conjunto con las otras dos llantas.

La siguiente parte acoplada a la canaleta es una placa fenólica de 12.2 [cm] de largo y 1.8 [cm] de ancho, el motivo de ésta placa es porque lleva grabadas varias líneas de cobre que conectan los 5 pines del codificador incremental del péndulo (que están soldados con estaño a la placa) y las dos terminales del motor (también soldadas), con una tira de pines al final de la placa, de la cual se conecta un cable plano para enviar las señales además de las terminales del motor a la placa de adquisición de datos y al circuito de potencia respectivamente.

Por último, también está atornillado al extremo de la canaleta un trozo de ángulo de aluminio blanco de 4 X 3 [cm]; este ángulo de aluminio blanco sirve como material reflectante para el sensor infrarrojo que mide la posición del carro. También se colocaron en los dos extremos de la canaleta, tornillos de 7.5 [cm] de largo con un balero de 11 [mm] de diámetro en la parte inferior; esto se propone para que los baleros corran libremente por el riel que

tiene el perfil de aluminio de la plataforma, de tal forma que el carro siempre estará bien dirigido a lo largo del riel con fricción seca despreciable gracias a los baleros. Las vistas del carro y el péndulo se muestran en la Figura 5.4.

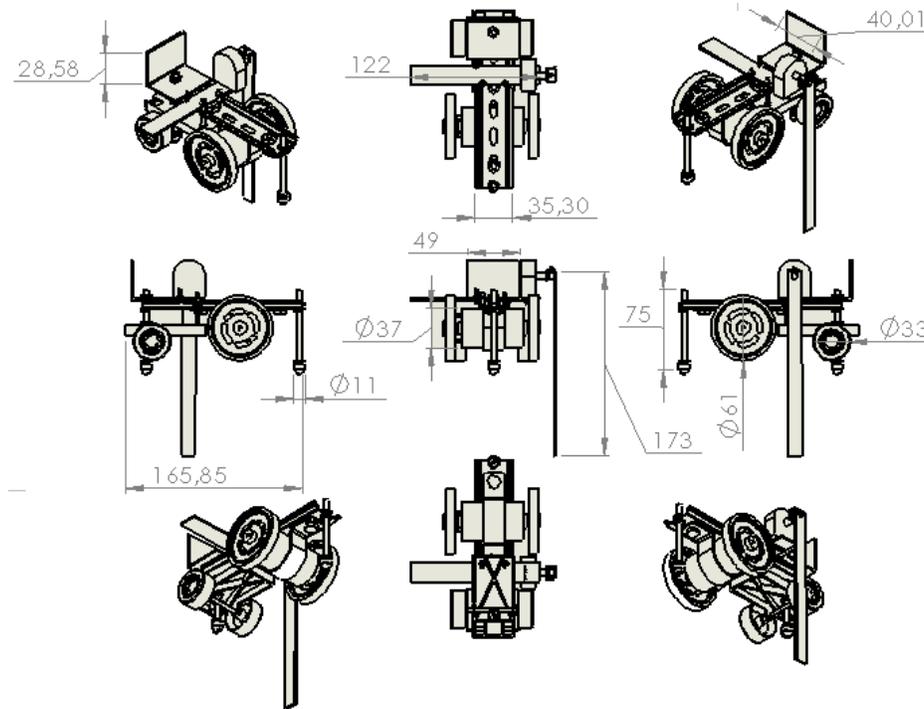


Figura 5.4: Vistas y dimensiones del carro y péndulo (cotas en [mm]).

El péndulo únicamente es una solera de aluminio de 17.3 [cm] de largo, 1.3 [cm] de ancho y 0.19 [cm] de espesor que tiene un dobles cuadrado en forma de U en el extremo, en el cual se perforó un agujero de 0.6 [cm] de diámetro para introducir la flecha del codificador incremental y un agujero de 0.13 [cm] de diámetro en la parte superior para atornillar el péndulo con la flecha a través de un opresor.

5.3. Prototipo experimental completo

En la Figura 5.5 se muestra el diseño integrado del prototipo experimental PISC que se construyó.

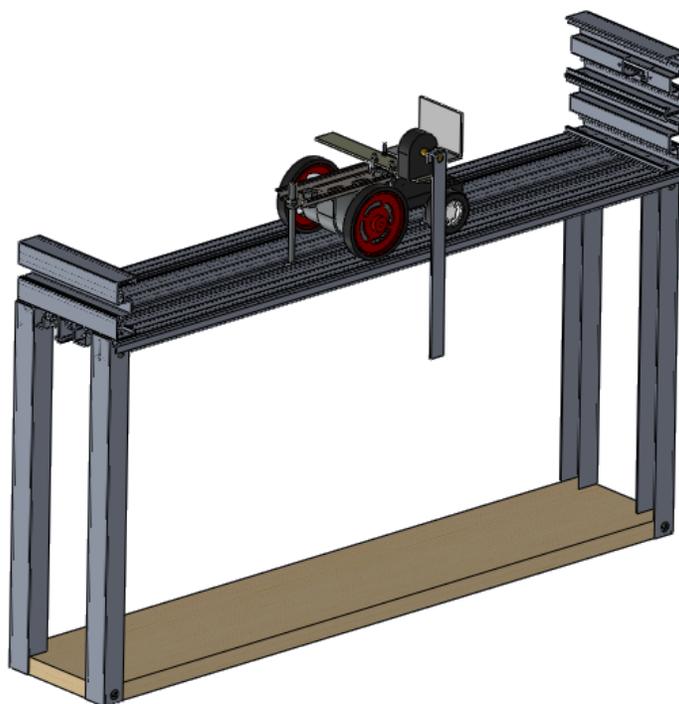


Figura 5.5: Diseño del prototipo experimental.

5.4. Subsistema eléctrico

Para el prototipo se utilizaron dos fuentes de alimentación; una fuente conmutada de computadora que entrega varios niveles de voltaje para la parte de potencia y una fuente de 5 [VCD] para la parte de instrumentación e interfaz con la computadora. De la fuente conmutada únicamente se ocupa una salida de 12 [VCD] y una de 5 [VCD]. Por otro lado la fuente de 5 [VCD] a 1 [A] que se construyó (ver Fig. 5.6) esta conformada por un transformador con derivación central de 12 [VCA] a 1 [A], un puente de rectificación, una etapa de eliminación de rizados con un capacitor de 1000 [uF] y una etapa de regulación con un circuito regulador de voltaje modelo LM7805 de la empresa FAIRCHILD, el cual puede disminuir voltajes de hasta 40 [VCD] en 5 [VCD] a 1 [A]. El hecho de utilizar dos fuentes es debido a que están separadas las referencias de voltaje de la parte de instrumentación y la parte de potencia a través de opto-acopladores.

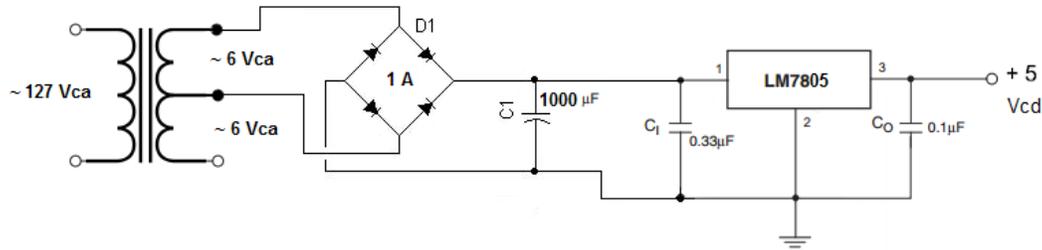


Figura 5.6: Fuente de alimentación para la parte de instrumentación.

Las dos fuentes de alimentación toman la corriente alterna desde el mismo cable, por lo que el prototipo únicamente requiere la conexión de un cable para suministrar la corriente alterna. Por otro lado, la fuente conmutada es lo suficientemente delgada para caber en el ancho de la tabla que se encuentra de base en el prototipo; por tal motivo, las fuentes se fijan con pijas a la madera y encima de la fuente conmutada se coloca con tornillos y contra-tuercas la tarjeta electrónica de potencia y comunicación con la computadora. Debido a esto, el prototipo queda perfectamente alimentado y comunicado con la computadora.

5.5. Subsistema electrónico

En la Figura 5.8 se muestra el diagrama de conexiones de los componentes que forman la parte de instrumentación, la interfaz con la computadora y la etapa de potencia. El componente principal de este circuito es el microcontrolador PIC16F877A, el cual por un lado está directamente conectado con el driver MAX232 quien transforma las señales TTL del microcontrolador a señales con niveles de voltaje del estándar RS-232 y así poder enviar y recibir la información desde la computadora a través de un conector DB9.

Por otro lado, el microcontrolador está conectado a través de resistencias de 330 $[\Omega]$ con dos opto-acopladores 4N28 que sirven para separar la parte de potencia de la parte de instrumentación y comunicación con la computadora; las dos señales que se opto-acoplan son la señal de PWM y el bit de dirección que posteriormente se transfieren al puente H LMD18200 quien a partir de su circuito básico genera los voltajes para las terminales del motor. Cabe mencionar que la terminal del puente H que genera el frenado del motor está conectada a tierra debido a que el puente H junta las terminales del motor cuando la señal de PWM tienen un cero lógico y el pin de “break” también está en cero (ver Fig. 5.7); lo cual es

útil ya que las ecuaciones teóricas consideran que el motor recibe 0 [V] cuando la señal de PWM está en bajo, y esto se consigue juntando las terminales del motor (que equivale a la configuración “break”).

PWM	Dir	Brake	Active Output Drivers
H	H	L	Source 1, Sink 2
H	L	L	Sink 1, Source 2
L	X	L	Source 1, Source 2
H	H	H	Source 1, Source 2
H	L	H	Sink 1, Sink 2
L	X	H	NONE

Figura 5.7: Tabla de verdad tomada de la hoja de datos del puente H LMD18200.

Una de las salidas del puente H está conectada directamente a una terminal del motor, pero la otra salida atraviesa primero al sensor de corriente antes de conectarse a la otra terminal del motor. El sensor de corriente con su circuito básico genera una señal analógica de voltaje que es equivalente a la corriente medida; ésta señal analógica pasa por un filtro pasa bajas hecho con una resistencia y un capacitor con los valores mostrados en la Figura 5.8, el cual tiene una frecuencia de corte de 72 [Hz] aproximadamente. Posteriormente la señal pasa al pin 3 del microcontrolador para ser convertida en 10 bits digitales a través de su convertidor analógico-digital (ADC) interno.

Otra señal que también es convertida en 10 bits digitales, es el voltaje que entrega el sensor infrarrojo GP2Y0A21YK0F que se utiliza para medir la posición del carro; la señal que entrega este sensor también es filtrada mediante un filtro pasa bajas construido con un capacitor y una resistencia con valores de 330 [nF] y 47 [kΩ] respectivamente. Este filtro tiene una frecuencia de corte de 10 [Hz] aproximadamente, debido a que (por el tipo de sensor) la señal que entrega puede ser muy ruidosa.

Como se puede observar, al microcontrolador también están conectadas dos resistencias variables en serie para dividir el voltaje en 0.595 [VCD] y 3.1 [VCD]. La razón de estos voltajes es que sirven como referencia al ADC interno del microcontrolador; es decir, 0.595 [VCD] equivalen a un 0 binario de 10 bits y 3.1 [VCD] equivalen a un 1023 decimal de 10 bits. Las referencias se decidieron en esos niveles de voltaje en base al rango de medición del sensor infrarrojo; es decir, cuando el carro sobre la estructura está lo más alejado posible del sensor, entrega un voltaje de 0.595 [VCD] y cuando está a la distancia mínima

(10 [cm]) del sensor, entrega un voltaje de 3.1 [VCD]. Ésto no afecta la medición de la señal entregada por el sensor de corriente ya que el rango de voltajes en los que se utiliza el sensor de corriente es de 2 a 3 [VCD] el equivalente de -2 a 2 [A] aproximadamente, por lo cual se pueden representar perfectamente dichos niveles de voltaje en los 10 bits del ADC.

Por último, se conectan a los pines 37 y 38 del microcontrolador dos capacitores a tierra junto con las dos señales del codificador incremental (encoder) que mide la posición del péndulo; estas dos señales son los canales A y B del encoder, los cuales son leídos a partir de una interrupción por el puerto B del microcontrolador, dicha interrupción tiene un algoritmo programado que se encarga de sumar los pulsos de los canales del encoder y de esta manera conocer la posición angular del péndulo.

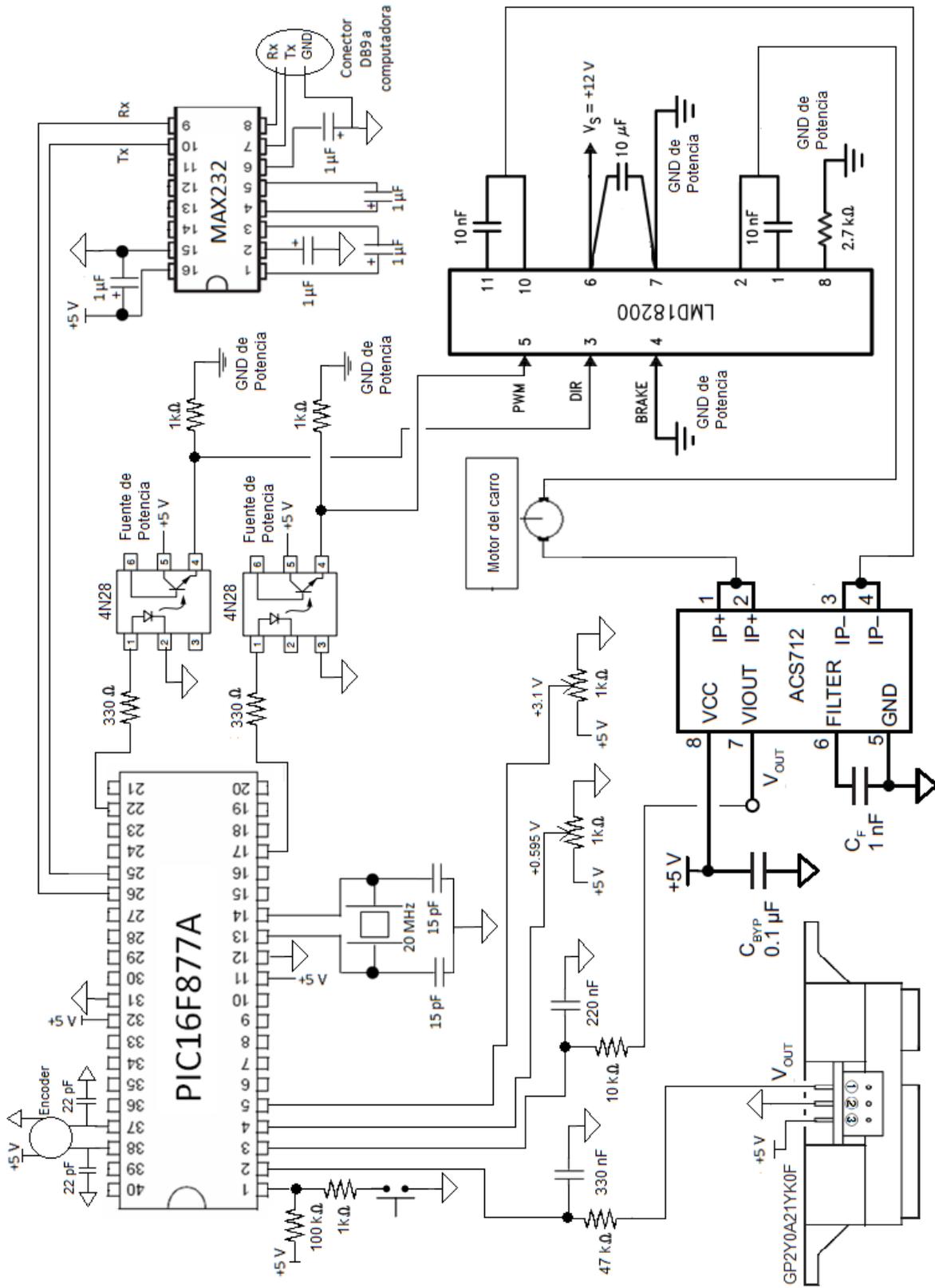


Figura 5.8: Diagrama eléctrico del prototipo.

Capítulo 6

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6.1. Parámetros del prototipo experimental

El prototipo real que se desarrollo se muestra en la fotografía de la Figura 6.1, esta fotografía fue tomada en el momento en que el prototipo estaba en funcionamiento y el carro regresaba a su posición inicial ($x = 0$) mientras equilibraba el péndulo en su posición vertical hacia arriba ($\theta = 0$).

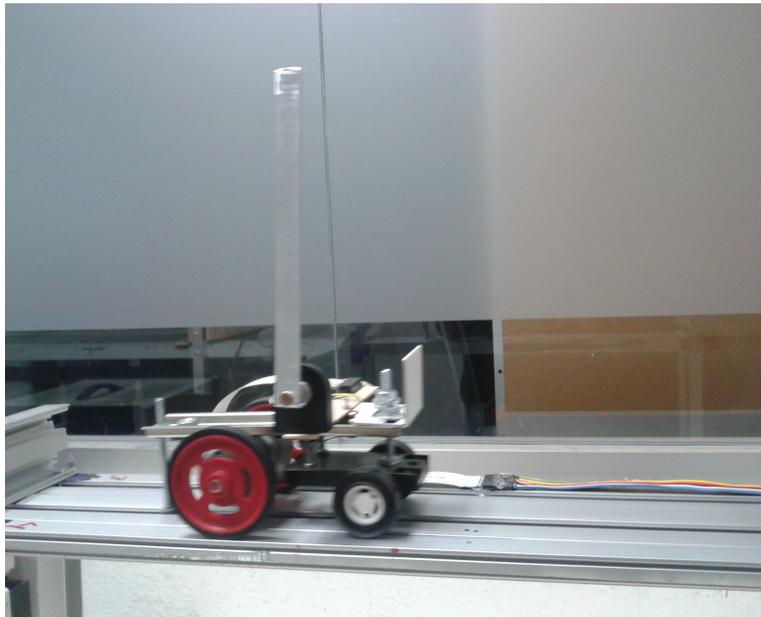


Figura 6.1: Fotografía del prototipo experimental.

En base a la sección 4.3 se obtuvieron los datos del prototipo mostrados en la tabla 6.1. Cabe mencionar que para el cálculo de la constante de par del motor se utilizó una varilla rectangular de masa 49.05 [g] y longitud 315.44 [mm]; de tal forma que para llevar a la varilla

a una posición totalmente horizontal se midió una corriente de armadura en el motor de 1.19 [A]. Con éstos datos se utiliza la ecuación (4.6) para calcular la constante de par del motor.

Tabla 6.1: Parámetros del PISC.

Símbolo	Descripción	Valor	Unidades
l	longitud al centro de masa del péndulo	0.0865	[m]
M	masa del carro	0.4735	[kg]
m	masa del péndulo	0.01055	[kg]
I	inercia del péndulo	0.00002631524	[$kg \cdot m^2$]
K_m	constante de par	0.0637	[$\frac{N \cdot m}{A}$]
r	radio de las ruedas acopladas al motor	0.032	[m]

Como se puede observar en los parámetros del PISC, el valor de ml^2 es:

$$ml^2 = (0.01055)(0.0865)^2 = 7.89377375 \times 10^{-5}$$

y el valor de la inercia es $I = 0.00002631524 = 2.631524 \times 10^{-5}$; debido a estos valores, no es posible cumplir la condición $ml^2 \gg I$ que se utiliza en la sección 2.2 para calcular las ecuaciones (2.37) y (2.38). Por tal razón, se utilizan los controladores desarrollados en la secciones 3.2 y 3.3.

6.2. Ganancias del control PI de corriente

Debido a que el control PI de corriente es estable para cualquier valor de ganancias k_{ii} y k_{pi} como se demostró en la sección 3.4; se hicieron varias pruebas con el motor de CD y el prototipo ya ensamblado; esto para corroborar que el controlador estuviera funcionando adecuadamente y para obtener las ganancias con las cuales se llega al valor deseado de corriente en menos tiempo.

Para las pruebas que se realizaron se generó con la misma computadora una señal de corriente deseada senoidal de diferentes amplitudes A_d y frecuencias f_d (ver ecuación (6.1)), el objetivo de esta forma de onda es para asegurar que la corriente en el motor este siguiendo de cerca a la corriente deseada aunque esta tenga variaciones muy grandes y valores tanto positivos como negativos.

$$i_d = A_d \sin(2\pi f_d t) \quad (6.1)$$

Donde t representa el tiempo real de la prueba y es aumentada internamente en el programa cada que se recibe una nueva muestra de corriente medida, es decir, cada 0.005 [s]. Las ganancias del controlador quedan ajustadas solo hasta que puedan seguir una corriente deseada de una frecuencia y amplitud “grandes”, que para este proyecto se considera una frecuencia de 20 [Hz] y una amplitud de 0.15 [A].

Se realizó una prueba del control de corriente que dura aproximadamente 1 [s], la cual se muestra en la Figura en donde se observa en color rojo la corriente deseada y en color azul la corriente medida. En esta prueba se puede ver que la corriente en el motor sigue en todo momento de cerca a la corriente deseada, a pesar de su frecuencia y su amplitud.

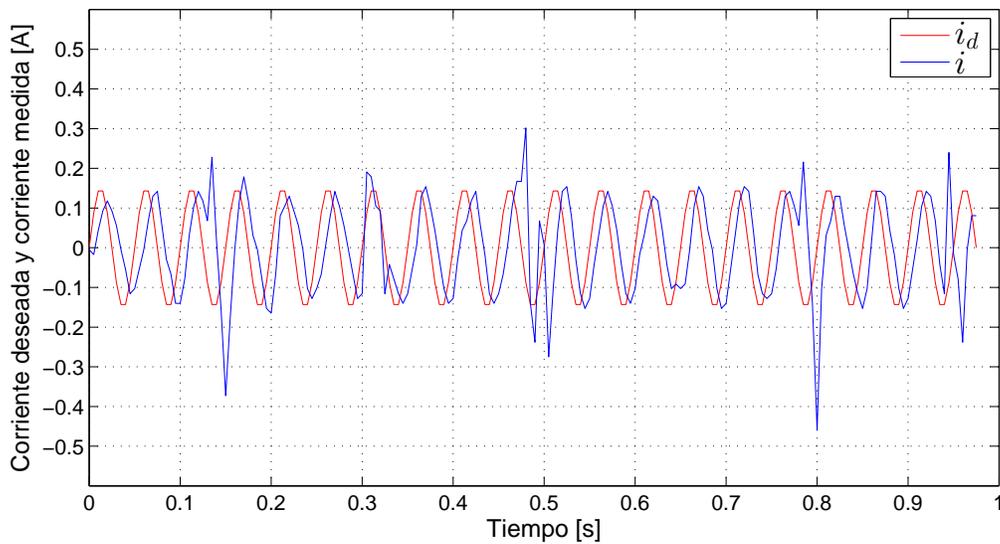


Figura 6.2: Gráfica de una prueba del control de corriente.

Siguiendo las pruebas anteriores se encontraron las ganancias del controlador PI mostradas en la tabla 6.2.

Tabla 6.2: Ganancias del controlador PI de corriente.

Ganancia	Valor
k_{pi}	2.9
k_{ii}	1800.0

6.3. Ganancias del controlador lineal para atrapar el péndulo

El controlador lineal para atrapar el péndulo tiene cuatro ganancias debido a que esta propuesto según la ecuación (3.46), estas ganancias se calculan con el método de asignación de polos por retroalimentación del estado, en base al lugar en donde se desea colocar los polos de lazo cerrado del sistema; para esto, en primera instancia se calcula el polinomio característico del sistema, con el determinante:

$$\det((A - BK^T) - \lambda I)$$

Donde A y B son las matrices (3.41) y (3.42) respectivamente, I es la matriz identidad que tiene el mismo tamaño de A , λ representa los valores propios del sistema y K es la matriz del controlador que se define como:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

En éste sentido la matriz $(A - BK^T) - \lambda I$ queda como:

$$\begin{aligned}
 & (A - BK^T) - \lambda I = \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-a_1 g}{a_2 - a_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{a_1 a_2 g}{ml(a_2 - a_1)} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2 - a_1} \\ 0 \\ \frac{-a_1}{ml(a_2 - a_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.16302 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 86.469 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2.1002 \\ 0 \\ -18.210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -2.1002k_1 & -2.1002k_2 - \lambda & -2.1002k_3 - 0.16302 & -2.1002k_4 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 18.210k_1 & 18.210k_2 & 18.210k_3 + 86.469 & 18.210k_4 - \lambda \end{bmatrix} \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

Y el determinante de (6.3) es:

$$\begin{aligned}
 & \det((A - BK^T) - \lambda I) = \\
 & \lambda^4 + (2.1002k_2 - 18.21k_4)\lambda^3 + (2.1002k_1 - 18.21k_3 - 86.469)\lambda^2 \\
 & \quad - 178.63k_2\lambda - 178.63k_1 \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

Donde el polinomio de la ecuación (6.4) es el polinomio característico del sistema en lazo cerrado y los valores de λ que hacen que el polinomio se haga cero, son los polos del sistema en lazo cerrado; entonces, se puede pensar en el siguiente polinomio:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + p_1)(\lambda + p_2)(\lambda + p_3)(\lambda + p_4) = \\
 & \lambda^4 + (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)\lambda^3 + (p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4)\lambda^2 + \\
 & \quad (p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4)\lambda + p_1p_2p_3p_4 \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

Donde p_1, p_2, p_3 y p_4 son los polos propuestos arbitrariamente que se desean para el sistema; entonces, igualando (6.4) y (6.5) se tiene que:

$$2.1002k_2 - 18.21k_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \quad (6.6)$$

$$2.1002k_1 - 18.21k_3 - 86.469 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4 \quad (6.7)$$

$$-178.63k_2 = p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4 \quad (6.8)$$

$$-178.63k_1 = p_1p_2p_3p_4 \quad (6.9)$$

y acomodando el sistema de ecuaciones en forma matricial se tiene:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2.1002 & 0 & -18.21 & p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \\ 2.1002 & 0 & -18.21 & 0 & p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4 + 86.469 \\ 0 & -178.63 & 0 & 0 & p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4 \\ -178.63 & 0 & 0 & 0 & p_1p_2p_3p_4 \end{array} \right] \quad (6.10)$$

Donde las primeras 4 columnas de izquierda a derecha de la matriz (6.10) corresponden a los coeficientes de k_1 , k_2 , k_3 y k_4 respectivamente; entonces, se asignan los polos del sistema sobre el eje real negativo para que el sistema responda sin oscilaciones y se asegura que sean lo suficientemente grandes para que responda con rapidez; de tal forma que para este trabajo se elijen los polos en -15 , -11 , -2 y -1.5 , es decir, $p_1 = 15$, $p_2 = 11$, $p_3 = 2$ y $p_4 = 1.5$; entonces, utilizando la eliminación de Gauss-Jordan se reduce la matriz (6.10) y se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2.7711 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3.6696 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -19.291 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0432 \end{array} \right] \quad (6.11)$$

Así, las ganancias del controlador lineal para atrapar el péndulo quedan calculadas y se muestran en la tabla 6.3.

Tabla 6.3: Ganancias del controlador lineal.

Ganancia	Valor
k_1	-2.7711
k_2	-3.6696
k_3	-19.291
k_4	-2.0432

6.4. Ganancias del controlador no lineal para levantar el péndulo

Para encontrar las ganancias del controlador no lineal se sigue un proceso totalmente empírico, teniendo cuidado en que las ganancias k_v y k_e siempre deben cumplir la condición (3.29). Siguiendo este proceso, se encontró que una respuesta satisfactoria del controlador no lineal se obtiene con las ganancias mostradas en la tabla 6.4.

Tabla 6.4: Ganancias del controlador no lineal.

Ganancia	Valor
k_v	0.1
k_x	55.5
k_δ	1.55
k_e	8.1

6.5. Criterio para relevar los controladores

El criterio para relevar los controladores o criterio de swicheo, requiere dos valores, como ya se analizó en la sección 4.1; estos valores dependen directamente de la manera en la que se sintonizó el controlador para levantar al péndulo; a pesar de que el controlador no lineal busca dar la energía necesaria para que se alcance la trayectoria homoclínica, es decir, la energía para que llegue a la parte vertical invertida con velocidad cero; si se sintonizó el controlador no lineal para que el péndulo suba más rápido, entonces la ganancia k_{va} debe ser grande, en caso contrario la ganancia debe ser pequeña; esto se debe a que la ganancia k_{va} influye en el criterio de swicheo con respecto a la velocidad del péndulo, de tal forma que, entre más rápido suba, más rápido cambiará de controlador proporcionalmente con k_{va} .

La ganancia δ_s se debe proponer de acuerdo al rango de cercanía a cero de θ , en el cual se trabajará el controlador lineal y dejará de trabajar el no lineal, es decir, si el péndulo sube lentamente, la variable θ^2 debe alcanzar a δ_s en el momento justo para que el controlador lineal lleve rápidamente al péndulo a la posición $\theta = 0$.

Tomando en cuenta estas consideraciones y con algunas pruebas reales, se encontró que el criterio de swicheo funciona adecuadamente con las ganancias mostradas en la tabla 6.5.

Tabla 6.5: Constantes del criterio para relevar los controladores.

Constante	Valor
k_{va}	0.015
δ_s	0.6

6.6. Resultados experimentales

La prueba que se muestra a continuación dura aproximadamente 6[s], en este experimento el carro comienza en una posición diferente de cero y el péndulo comienza en una posición totalmente vertical hacia abajo, es decir, $\theta = \pi$. Al iniciar la prueba, el carro es jalado hacia el cero debido al controlador no lineal y automáticamente comienza a desarrollarse la dinámica del sistema. Como se puede observar en la Figura 6.3, la posición del carro oscila alrededor del cero, lo que indica que el controlador no lineal intenta llevar la posición del carro a la posición de estabilidad, es decir, $x = 0$ para que la función de Lyapunov llegue a cero; sin embargo, al momento en que las demás variables comienzan a interactuar, obligan al carro a alejarse del cero. Por otro lado, cuando el péndulo es atrapado arriba, la posición del carro regresa rápidamente a cero debido al controlador lineal que tiene su punto de operación justo en $x = 0$. Pero, el carro tarda en llegar a cero porque el péndulo aún se mueve y el sensor de posición debido a su naturaleza, introduce pequeñas perturbaciones en forma de ruido sobre las lecturas de posición.

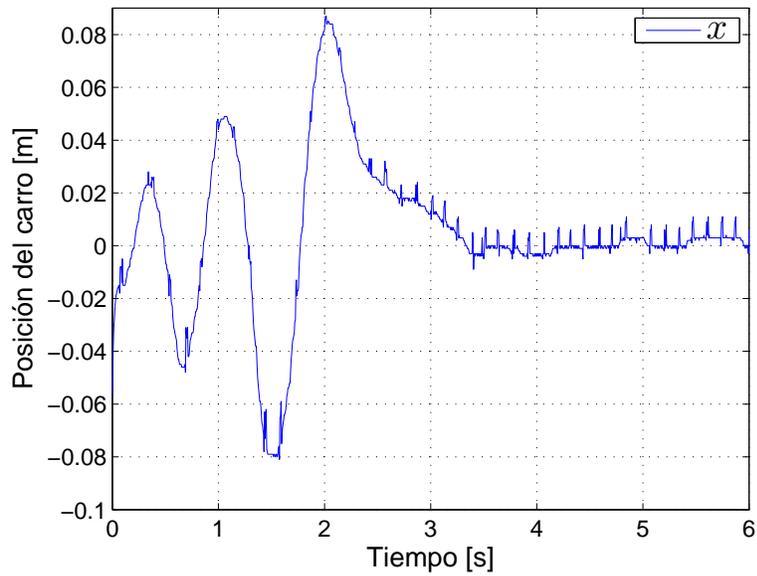


Figura 6.3: Gráfica de la posición del carro.

Otra variable que también fue guardada en un archivo de texto durante el experimento, para después ser graficada, es la velocidad del carro, medida en $[m/s]$; ésta variable, como ya se mencionó anteriormente, es calculada numéricamente en el programa que ejecuta la computadora y como se puede ver en la Figura 6.3 sigue la misma dinámica de la posición del carro solo que en este caso se ve perfectamente el ruido del sensor amplificado por la derivada numérica.

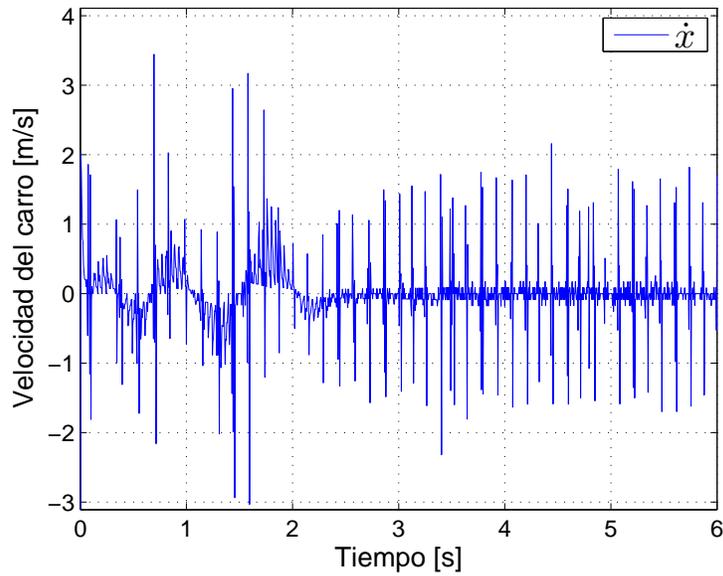


Figura 6.4: Gráfica de la velocidad del carro.

La posición del péndulo, es la variable más representativa del experimento, ya que es dicha variable la que demuestra que los tres controladores están funcionando adecuadamente. Como se observa en la Figura 6.5 la posición del péndulo hace tres oscilaciones antes de llegar a la posición y velocidad adecuada para que el controlador lineal sea relevado y lleve al péndulo a $0[rad]$ en donde se mantiene sin caerse; el tiempo que tarda en llegar a la posición de 0, es de aproximadamente $3.25[s]$; por otro lado, el tiempo que tarda el controlador no lineal en levantar al péndulo, es de aproximadamente $2.34[s]$, es decir, el controlador lineal tarda $0.91[s]$ en llevar al péndulo a su posición de cero.

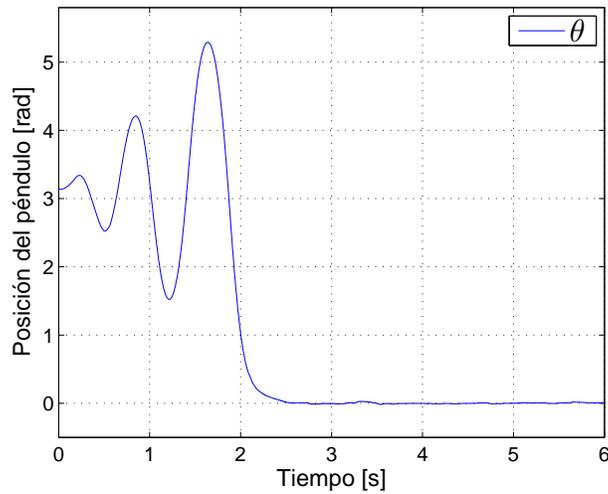


Figura 6.5: Gráfica de la posición del péndulo.

Como se puede observar en la Figura 6.6 la velocidad del péndulo oscila a la par del péndulo, solo que en esta gráfica se observa que la derivada numérica de la posición del péndulo, aumenta el ruido de la señal, sobretodo para velocidades pequeñas.

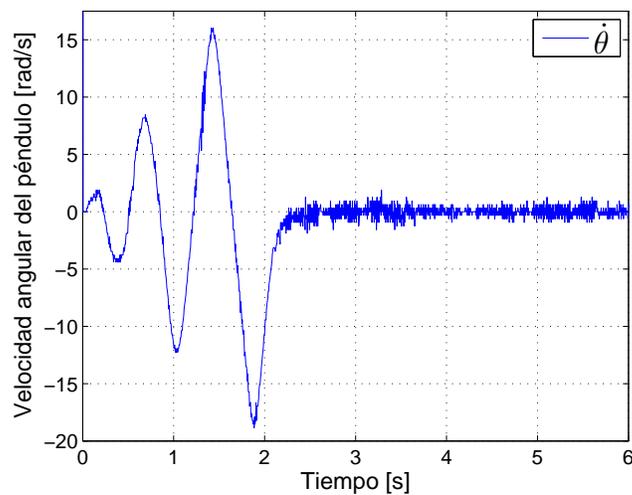


Figura 6.6: Gráfica de la velocidad del péndulo.

Una gráfica que también es de bastante interés, es la gráfica de corriente que se muestra en la Figura 6.7. Para generar las gráficas se guardaron en un archivo de texto los valores de la corriente medida cada $5[m.s]$ y la corriente calculada en base a la fuerza que el

controlador lineal o el no lineal solicitaban, es decir, la corriente deseada calculada según la ecuación (4.2). En la gráfica se muestra en rojo la corriente deseada y en azul la corriente medida.

Como se puede observar el controlador PI de corriente hace que la corriente en el motor siga de cerca a la corriente deseada a pesar de los cambios bruscos que se calculen; por otro lado, se observa al principio del experimento que la corriente deseada se satura en valores positivos y negativos de $0.9[A]$, ésta saturación fue programada intencionalmente debido a que la corriente máxima mantenida que se pudo obtener del motor en todas las pruebas fue de $0.8[A]$, por lo cual, esta saturación se utiliza para limitar la corriente deseada.

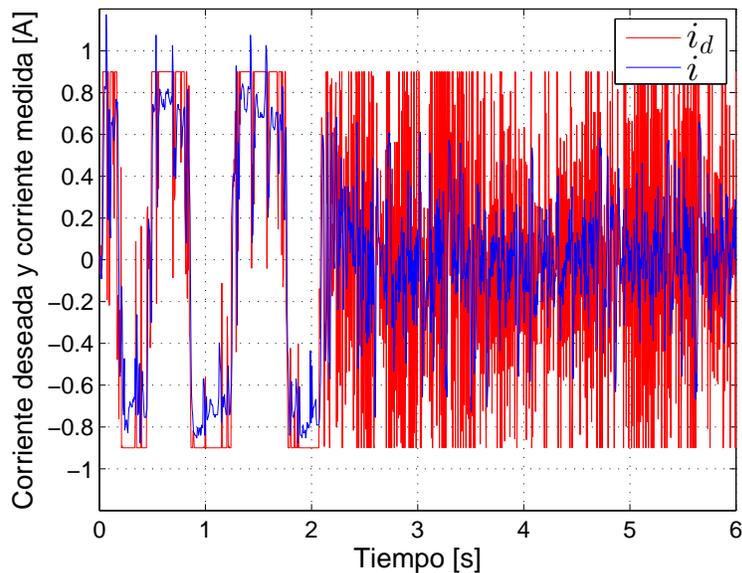


Figura 6.7: Gráfica de la corriente aplicada y la corriente deseada.

Finalmente se muestra en la Figura 6.8 la gráfica del voltaje calculado que se tiene que aplicar en las terminales del motor; dicho voltaje se calcula con el control PI de corriente, es decir, según el análisis de la sección 4.1, el voltaje es la señal de salida del control PI de corriente. Por lo tanto, la salida del control PI de corriente se satura entre los niveles máximos de voltaje (positivos y negativos) que puede entregar el puente H, en este caso $11.47[V]$. Cabe mencionar que la integral numérica que se calcula para el control PI también es saturada en estos niveles de voltaje.

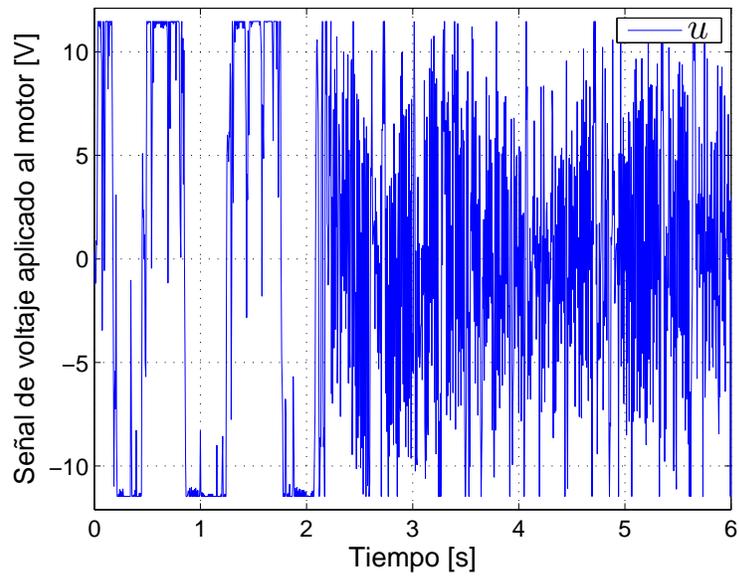


Figura 6.8: Gráfica del voltaje aplicado al motor.

Como se observa en la Figura 6.8 el voltaje se satura justo cuando la corriente en el motor también lo hace, lo que significa que la señal de control si se está aplicando correctamente. La manera en que se aplica la señal es escalándola en un número de 8 bits (1 bit de signo y 7 bits de magnitud) que después se envían al microcontrolador para que los aplique en una función que genera el PWM para el puente H.

Capítulo 7

CONCLUSIONES

El prototipo PISC construido para esta tesis, se diseñó basándose en el modelo matemático analizado en la sección 2.2, de tal forma que la teoría coincidió en buena medida con la práctica; es decir, el carro con el péndulo casi no tiene fricción seca debido a que en todos los puntos de contacto del carro con la estructura se procuró evitarla (con baleros). Por otro lado, el carro se construyó con materiales ligeros para que el motor de CD que lo mueve no tenga que vencer una inercia muy grande al inicio del movimiento y en cada cambio de dirección.

Parte de la aportación de esta tesis, es la nueva tecnología que se utilizó en la instrumentación del proyecto; por ejemplo, el sensor infrarrojo usado para medir la posición del carro funcionó adecuadamente a pesar de la reducción en la frecuencia de corte de su filtro pasa bajas debido al ruido que el propio sensor genera en consecuencia a la luz ambiental.

Se encontró que la luz del ambiente afecta al sensor generando algunos picos de voltaje montados sobre la señal analógica que el sensor entrega; sin embargo, con el filtro pasa bajas se arregló el problema y la señal no tuvo algún retardo considerable.

Otra aportación de la tesis y probablemente la más importante, es el análisis teórico e implementación del lazo esclavo de control de corriente en el PISC, el cual se diseñó como un controlador PI y se demostró su estabilidad con el criterio de Routh. El control PI de corriente en las pruebas corroboró su eficiencia a pesar de ser implementado en una computadora portátil; es decir, los lazos esclavos de control de corriente que se utilizan actualmente en gran parte de la maquinaria de control numérico son analógicos y ocupan bastante hardware en los servo-amplificadores; con los resultados obtenidos en esta tesis se podría considerar quitar esa parte analógica de la tarjeta electrónica de los servo-amplificadores y en cambio

implementar el control de corriente en algunas líneas de código, con lo cual se reducirían costos de producción y espacio.

Uno de los problemas más grandes que se encontró en las primeras pruebas del prototipo, fue usar la consideración de $I \approx 0$ en el algoritmo de los controladores para levantar y atrapar al péndulo como sugieren Fantoni y Lozano (2002). Los controladores no funcionan adecuadamente sin una ganancia extra que amplifique la señal de salida del controlador no lineal; es decir, la fuerza que se debe aplicar al carro calculada con el controlador no lineal se debe amplificar aproximadamente seis veces antes de utilizarla en el siguiente controlador. En ese sentido, se replantearon las constantes utilizadas en la ecuación de estado del PISC y en los controladores, quedando como una versión extendida, en la cual influye la inercia del péndulo y se puede omitir la ganancia extra.

Todos los controladores fueron codificados en lenguaje C++ y compilados en Dev-C++; esto le da al proyecto portabilidad, flexibilidad y facilidad de uso, ya que Dev-C++ es un compilador libre que se puede descargar fácilmente de la red sin tener que pagar licencia. El código que se utiliza para la interfaz serial es el mismo código en donde se escribieron los controladores y se anexa en el apéndice.

Por último, cabe mencionar que el prototipo funciona adecuadamente y fue entregado al grupo de control de la UAQ, para que se apliquen nuevos controladores a dicho sistema y se puedan realizar publicaciones con resultados experimentales.

BIBLIOGRAFÍA

- Balbastre, Patricia, Manuel Lluesma and Ismael Ripoll. 2010. Análisis y compensación de los retardos de planificación en sistemas de control. *RIAI* 3(2):40–49.
- Beer, F.P. and E.R. Johnston. 1988. *Vector Mechanics for Engineers: Statics* (4th Ed.). McGraw-Hill, New York, USA.
- Bettayeb, M, C Boussalem, R Mansouri and U M Al Saggaf. 2014. Stabilization of an inverted pendulum car system by fractional PI state feedback. *ISA transactions* 53(2):16–508.
- El-Nagar, Ahmad M., Mohammad El-Bardini and Nabila M. EL-Rabaie. 2014. Intelligent control for nonlinear inverted pendulum based on interval type 2 fuzzy PD controller. *Alexandria Engineering Journal* 53(1):23–32.
- Fantoni, I. and R. Lozano. 2002. *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer, Great Britain.
- Hernández-Guzmán, Victor Manuel, Ramón Silva-Ortigoza and Roberto Valentín Carrillo-Serrano. 2013. *Control Automático: Teoría de Diseño, Construcción de Prototipos, Modelado, Identificación y Pruebas Experimentales*. COLECCIÓN CIDETEC México D.F.
- Kelly, R., V. Santibañez and A. Loria. 2005. *Control of robot manipulators in joint space*. Springer, London.
- López, C. U. 2011. *Construcción de un prototipo experimental del péndulo invertido sobre un carro para el área de control*. Tesis de licenciatura Universidad Autónoma de Querétaro Santiago de Querétaro, Qro. México.
- Mahmoodabadi, M.J., S. Arabani Mostaghim, A. Bagheri and N. Nariman zadeh. 2013. Pareto optimal design of the decoupled sliding mode controller for an inverted pendulum

- system and its stability simulation via Java programming. *Mathematical and Computer Modelling* 57(6):1070–1082.
- McRobie, A. and M. Thompson. 1990. Chaos, catastrophes and engineering: Applying chaos theory to engineering may seem odd. *New Scientist* 1720.
- Olfati Saber, Reza. 2001. *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles* Tesis de doctorado Massachusetts Institute of Technology.
- Polo, Manuel F. Pérez, Manuel Pérez Molina and Javier Gil Chica. 2012. Swing up and positioning control of an inverted wheeled cart pendulum system with chaotic balancing motions. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 47(6):655–665.
- Sanabria, Camilo A and Oscar M Hernández. 2012. Control de un péndulo invertido simple por métodos de realimentación de estados. *Revista Tecnura* 13(25):59–69.
- Subudhi, B., A. Ghosh and T.R. Krishnan. 2012. Robust proportional integral derivative compensation of an inverted cart pendulum system: an experimental study. *IET Control Theory and Applications* 6(8):1142–1152.
- Wang, Jia Jun. 2012. Stabilization and tracking control of XZ inverted pendulum with sliding-mode control. *ISA transactions* 51(6):70–763.
- Wells, D. A. 1972. *Teoría y problemas de dinámica de Lagrange*. McGraw-Hill, Colombia.

A. PROGRAMAS UTILIZADOS

A.1. Programa para el microcontrolador PIC16F877A

```
// Programa para comunicación serial entre PC y proyecto Control
// Con el PIC16F877A y el compilador PCWH V3.43
#include<16f877A.h>
#define adc=10 //manejar adc de 10 bits
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#define fuses HS,NOWDT,PUT,NOBROWNOUT,NOLVP,NOWRT,NOPROTECT,NOCPD
#define use delay(clock=2000000) //Base de tiempo para retardos (frecuencia del Xtal)
#define use rs232(baud=115200,XMIT=PIN_C6,RCV=PIN_C7,BITS=8,PARITY=N)//Config. P. Serie

//direcciones de los puertos y algunos registros
#define byte OPTION= 0x81
#define byte TMR0 = 0x01
#define byte CVRCON= 0x9D
#define byte ADCON1= 0x9F
#define byte ADCON0= 0x1F
#define byte PORTA = 0x05
#define byte PORTB = 0x06
#define byte PORTC = 0x07
#define byte PORTD = 0x08
#define byte PORTE = 0x09

#define bit PC0 = 0x07.0
#define bit PD0 = 0x08.0
#define bit PD1 = 0x08.1
#define bit PD2 = 0x08.2
#define bit PD3 = 0x08.3
#define bit PD4 = 0x08.4
#define bit PD5 = 0x08.5
#define bit PD6 = 0x08.6
#define bit PD7 = 0x08.7

//-----Declaracion de variables-----//
int16 inter,cuenta,Dt_1=0,Dt_2=0;
int8 pwm,cuentaH,cuentaL,puerto,AB,AB_1,aux,dato=0;
int8 convHIR=0,convLIR=0;
```

```

int8 convHCR=0,convLCR=0;
//-----Rutina de interrupción-----//
#int_rb
void rb_isr()
{
    puerto=PORTB;
    AB=( (puerto) & (0x30) ) >>4;
    aux=AB^AB_1;
    if (aux!=0)
        if (aux!=3)
            if ((AB_1<<1)^AB) & (0x02))
                cuenta--;
            else
                cuenta++;
    AB_1=AB;
}

//-----Programa principal-----//
void main(void)
{
    set_tris_a(0b11111111);
    set_tris_b(0b11111111);
    set_tris_c(0b10000000); //Configurando pines para comunicacion serial y uso de pwm
    set_tris_d(0b00000000);
    set_tris_e(0b11111111);
    PC0=0;
    OPTION=0x87; //prescaler asignado a timer0 con relación 1:256

    setup_ccpl(CCP_PWM); //configurando pwm
    setup_timer_2(T2_DIV_BY_16,255,1); //T=(1/clock)*4*t2div*(period+1)
    PORTC=0;
    TMR0=0;
    cuenta=0;
    set_pwm1_duty(0);
    AB=0;
    AB_1=0;
    setup_adc(ADC_CLOCK_INTERNAL); //Configurando el convertidor ADC con reloj interno
    setup_adc_ports(AN0_AN1_AN4_VREF_VREF);

    enable_interrupts(global);
    enable_interrupts(int_rb);
    PC0=1;
    PD2=0;

while (TRUE)

```

```

{
    set_adc_channel(0);
    delay_us(15);
    Dt_1=read_adc();

    set_adc_channel(1);
    delay_us(15);
    Dt_2=read_adc();

    inter=(Dt_1)&(0xFF00);
    convHIR=inter>>8;
    convLIR=(Dt_1)&(0x00FF);

    inter=(Dt_2)&(0xFF00);
    convHCR=inter>>8;
    convLCR=(Dt_2)&(0x00FF);

    inter=(cuenta)&(0xFF00);
    cuentaH=inter>>8;
    cuentaL=(cuenta)&(0x00FF);

    PD4=1;           //inicia envío

    putc(0xAA);      //mandando dato de reconocimiento al puerto serial
    putc(convHIR);
    putc(convLIR);
    putc(convHCR);
    putc(convLCR);
    putc(cuentaH);   //mandando cuenta al puerto serial
    putc(cuentaL);

    PD4=0;           //termina envío
    PD5=1;           //inicia espera del timer
    PD2=0;
    do
    {
        if(kbhit())
        {
            dato=getc();//obteniendo el dato
            if(dato>=128)
            {
                PD3=1;
                dato=dato-128;
                pwm=dato<<1;
            }
        }
    }
}

```

```

        else
        {
            PD3=0;
            pwm=dato<<1;
        }
        set_pwm1_duty(pwm); //actualizando el valor del pwm
    }

}

while(TMR0<98);
PD5=0; //termina espera del timer
TMR0=0;
} //cierre del while infinito
} //cierre del main

```

A.2. Programa de los controladores e interfaz serial en Dev-C++

```

#include <iostream>
#include <string.h>
#include <dos.h>
#include <windows.h>
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define Ts 0.005
#define _Pi 3.1415926535
#define fte 12.27
#define cpH 0.8
#define VM 11.47
#define IM 0.9
#define M 0.4735
#define m 0.01055
#define l 0.0865
#define I 0.00002631524
#define km 0.0637
#define radioR 0.032
#define g 9.81

#define kva 0.015
#define delta 0.6

#define ke 8.1
#define kv 0.1

```

```

#define kx 55.5
#define kd 1.55

#define k1 2.771
#define k2 3.6695
#define k3 19.2914
#define k4 2.0432

#define kpi 2.9
#define kii 1800.0

int main(){
    char r,signo_sal,pwm;
    float id,ei,intei,propi,uf;
    float t=0.0,x=0.0,vlt_1=0,a=314.159;// (a=2*pi*f)
    float vltIR=0.0,vltCR=0.0,curr=0.0,theta=0.0;
    float x_1=0.0,theta_1=0.0,thetap=0.0,xp=0.0;
    float E=0.0,ctheta=0.0,stheta=0.0,f=0.0;
    float MmS2T=0.0,gCT_1Tp2=0.0,u=0.0;
    float xf_1=0.0,xf=0.0,iTs=1.0/Ts,norma2=0.0,thetad=0.0;
    float a_1=0.0,a_2=0.0;
    float aCT_mlTp2=0.0,a2_alC2T=0.0;
    int i=0,flgcomm=0,dataIR=0,dataCR=0,dataTH=0;

    a_1=(m*m*1*1)/(m*1*1+I);
    a_2=M+m;

    FILE *fp;
    HANDLE h; /*handler, sera el descriptor del puerto*/
    DCB dcb; /*estructura de configuracion*/
    DWORD dwEventMask; /*mascara de eventos*/

    if((fp=fopen("PISC.txt","w+"))==NULL){
printf("No se puede abrir el archivo.\n");
exit(1);
}

    printf("\n\t\t\t PISC...");
    printf("\n\n");

    /*abrimos el puerto*/
    h=CreateFile("COM1",GENERIC_READ|GENERIC_WRITE,0,NULL,OPEN_EXISTING,0,NULL);

    if(h == INVALID_HANDLE_VALUE) {
        /*ocurrio un error al intentar abrir el puerto*/
    }
}

```

```

/*obtenemos la configuracion actual*/
if(!GetCommState(h, &dcb)) {
/*error: no se puede obtener la configuracion*/
}

/*Configuramos el puerto*/
dcb.BaudRate = 115200;
dcb.ByteSize = 8;
dcb.Parity = NOPARITY;
dcb.StopBits = ONESTOPBIT;
dcb.fBinary = TRUE;
dcb.fParity = TRUE;

/* Establecemos la nueva configuracion */
if(!SetCommState(h, &dcb)) {
/* Error al configurar el puerto */
}

/* Para que WaitCommEvent espere el evento RXCHAR */
SetCommMask(h, EV_RXCHAR);

i=0;
DWORD n;
char enviar;
int recibido=0;
enviar = 'f';

flgcomm=0;
while(1) {
recibido=0;
while(1) {
ReadFile(h, &recibido, 1/* leemos un byte */, &n, NULL);
if(!n){break;}
else{
if(flgcomm==0 && recibido==0xAA){
dataIR=0;
dataCR=0;
dataTH=0;
vltIR=0.0;
vltCR=0.0;
recibido=0;
flgcomm=1;
}
else if(flgcomm==1){

```

```

    dataIR=recibido;
    dataIR=dataIR<<8;
    recibido=0;
    flgcomm=2;
}
else if(flgscomm==2){
    dataIR=dataIR+recibido;
    recibido=0;
    flgcomm=3;
}
else if(flgscomm==3){
    dataCR=recibido;
    dataCR=dataCR<<8;
    recibido=0;
    flgcomm=4;
}
else if(flgscomm==4){
    dataCR=dataCR+recibido;
    recibido=0;
    flgcomm=5;
}
else if(flgscomm==5){
    dataTH=recibido;
    dataTH=dataTH<<8;
    recibido=0;
    flgcomm=6;
}
else if(flgscomm==6){
    dataTH=dataTH+recibido;
    vltIR=((float)dataIR)*(2.514/1024.0)+0.595;// 5/1024
    vltCR=((float)dataCR)*(2.514/1024.0)+0.595;// 5/1024    0.325    2.555

    x_1=x; //actualizando valores previos para cálculos de velocidad
    theta_1=theta;

    theta=(signed short int)dataTH;
    theta=((_Pi*theta)/2000.0)+_Pi;

    x=-0.2451*pow(vltIR,-1.069)+0.20;//0.23
    curr=(vltCR*5.0)-12.555; //12.58

    thetap=(theta-theta_1)*iTs; //calculando velocidad del péndulo
    xp=(x-x_1)*iTs; //calculando velocidad del carro

    if(theta<_Pi)

```

```

{
    thetad=0.0;
}
else
{
    thetad=6.2832;
}

norma2=(theta-thetad)*(theta-thetad)+kva*thetap*thetap;

if(norma2<delta) //escogiendo controlador a calcular
{
    //calculando control lineal
    f=k1*x+k2*xp+k3*(theta-thetad)+k4*thetap;
}
else
{
    //calculando control no lineal
stheta=sin(theta);
ctheta=cos(theta);
E=0.5*(M+m)*xp*xp+m*l*xp*thetap*ctheta+
    0.5*(I+m*l*l)*thetap*thetap+m*g*l*(ctheta-1);

    //MmS2T=M+m*stheta*stheta;
    //gCT_1Tp2=g*ctheta-1*thetap*thetap;

    aCT_mlTp2=a_1*g*ctheta-m*l*thetap*thetap;
    a2_a1C2T=a_2-a_1*ctheta*ctheta;

    //f=(kv*m*stheta*(gCT_1Tp2)-(MmS2T)
    //*(kx*x+kd*xp))/(kv+(MmS2T)*ke*E);

    f=(kv*stheta*(aCT_mlTp2)-(a2_a1C2T)*
        (kx*x+kd*xp))/(kv+(a2_a1C2T)*ke*E);

    //f=0.0;
}

id=f*(radioR/km);
//Lazo PI de corriente-----
//id=0.15*sin(2.0*_Pi*20.0*t);
//id=0.1;
if(id>IM)
    id=IM;
if(id<-IM)

```



```

        }
        else{
            recibido=0;
            flgcomm=0;
            break;
        }
    }
}
if(kbhit()){r=getch();}
if(r==27){break;}
}

fclose(fp);
return 0;
}

```

A.3. Programa en MATLAB para validar condiciones de los controladores

```

%programa para validar condiciones de controladores del PISC
clc;
clear all;
close all;
ke=9.1;
kv=0.08;
alfa=1.0;
M=0.4735;
m=0.01055;
l=0.0865;
I=0.00002631524;
g=9.81;
a1=(m*m*l*1)/(m*l*1+I);
a2=M+m;

if(kv/ke)>(2*m*g*l*(M+m))
    disp('Si cumple');
else
    disp('NO CUMPLE');
end
A=[0 1 0 0;0 0 -(a1*g)/(a2-a1) 0;0 0 0 1;0 0 (a1*a2*g)/(m*l*(a2-a1)) 0]
B=[0;1/(a2-a1);0;-a1/(m*l*(a2-a1))]

```