UNIVERSIDAD AUTONOMA DE QUERETARO

División de estudios de Postgrado
Facultad de Ingeniería

Maestría en Docencia de las Matemáticas

"FORMAS EN QUE ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO RESUELVEN SITUACIONES PROBLEMA QUE INVOLUCRAN EL CONCEPTO DE VECTOR. UN ESTUDIO DE CASO."

T E S I S

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

MAESTRO EN DOCENCIA DE LAS MATEMATICAS

Presenta:

HECTOR PELAEZ PEREZ

Dirigido por:

M. en C. JOSEFINA ONTIVEROS QUIROZ

SINODALES

M. en C. Josefina Ontiveros Quiroz
Presidente
Firma

M. en C. Alejandro Padilla González
Secretario
Firma

Dr. Alejandro Diaz-Barriga Casales
Vocal
Firma

M. en C. Jorge Martínez Sánchez
Suplente
Firma

M. en C. Maria R. G. Hernández Mondragón
Suplente
Firma

M. en I. José Jesús Hernández Espino
Director de la Facultad de Ingeniería

Dr. Sergio Quesada Aldana
Director de Investigación y Postgrado

Centro Universitario
Queretaro, Qro
Junio 1999
México

RESUMEN

La presente tesis tiene como objetivo general investigar las formas en que estudiantes de nivel medio operan el concepto de vector. Se trata de indentificar los modos que utilizan para reconocer, describir y dar significado a este concepto en una situación-problema en contexto escolar. Se inspira en los estudios de Demetriadou y Gagatsis (1995), cuyas investigaciones reportan las dificultades que estudiantes griegos adolescentes enfrentan en la construcción de este concepto. La investigación se efectuó en dos escuelas privadas de nivel Secundaria, con 161 alumnos de 13 a15 años de edad, a los cuales, después de que habían tomado un curso sobre vectores en la asignatura de física, se les planteó un problema. Posteriormente, en función de sus respuestas, se seleccionó un grupo para realizar una entrevista clínica. El diseño de la investigación se realizó en una perspectiva constructivista y el análisis de resultados se enfocó a la forma en que los estudiantes construyeron el enunciado del problema, la manera en que reconocieron y utilizaron el concepto en el planteamiento, sus estrategias de solución y la forma en que argumentaron sus respuestas en las entrevistas clínicas. Se concluye, entre otras cosas, que no existe una forma de operación típicamente formal pero que tampoco la excluye, sino que se encuentran rasgos de todos los niveles de desarrollo piagetianos. Otro hallazgo es la separación existente entre el contexto físico y el contexto matemático en la construcción del concepto de vector, sin que, aparentemente, el estudiante tenga necesidad de una conceptualización matemática para operar eficazmente el concepto en la física.

(Palabras clave: nivel medio, concepto, vector)

ABSTRACT

The general objective of this thesis is to investigate the ways in which secondary level students handle the concept of vector. We attempt to identify the manner in which they recognized, describe and give meaning to this concept in a problem situation within a scholastic context. The study was inspired by the works of Demetriadou and Gagatsis (1995) whose research deals with the difficulties adolescent Greek students experience in the construction of this concept. Research was conducted in two private junior high schools with 161 students between the ages of 13 and 15 who were given a problem after having taken a course on vectors in physics class. A clinical interview was set up with a group selected on the basis of their ansvers. The research design was carried out from a constructivist perspective, and analysis of the results fosused on the way in which students worked the problem, recognized and used the concept in the execution phase, the strategies used to solve the problem and the manner in which they defended their answers in the clinical interview. Among other conclusions, we found that there was no typically formal operating procedure employed, but neither was such a procedure excluded. Characteristics of all Piagetian levels of development are encountered. It was also found that a separation exist between the physics contect and the mathematics context in the construction of the vector concept. Apparently the students have no need of mathematical conceptualization to efficiently use the concept in physics.

(Key words: secondary level, concept, vector)

A mis padres Héctor y Ma. Piedad
A mis abuelos Joaquín, Rosa, Angel y Teresa
A mi bisabuela Rosa
A mi tía Dra. Irma Deleón Rodriguez
A mi hermano Angel
A mis alumnos

"...para el bueno todo es bueno... para el malo todo es malo..."
Sta. Teresa de Jesús

AGRADECIMIENTOS

En el presente apartado, quiero externar mi ilimitado agradecimiento a la Dra. Sofía Josefina Ontiveros Quiroz, quien en forma desinteresada tuvo la enorme gentileza de dirigir el presente trabajo. Muchas gracias Doctora por su asesoría, críticas, correcciones, acompañamiento, paciencia, amabilidad, y ejemplo. De *nueva* cuenta mil gracias.

INDICE

INDICE DE CUADROS

INDICE DE FIGURAS

I. INTRODUCCION

La presente tesis tiene por objetivo general aportar conocimiento en el campo de los estudios sobre la construcción de conceptos. Se basa en las investigaciones de Demetriadou, 1994; y Demetriadou y Gagatsis 1995; quienes han reportado el conflicto que se presenta a estudiantes entre los 14 y 17 años, en el sistema educativo griego, al ser introducidos al tema de vectores. Algunas de las preguntas que han guiado estas investigaciones son:

¿Cuándo debe introducirse el concepto de vector en el currículo de secundaria? ¿Cómo influye en la mente del estudiante el hecho de que el concepto de vector sea enseñado tanto en física como en matemáticas y la manera en que se aborda? ¿La existencia, como ocurre en Grecia, de dos aproximaciones en la resolución de problemas geométricos tiene una influencia positiva en la evolución del pensamiento de los estudiantes? ¿Será posible identificar obstáculos didácticos relacionados con el concepto de vector?

Lo anterior hace patente el problema que los sistemas educativos de otros países encaran en el proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de vector. Este problema también puede observarse fácilmente en nuestro medio. En la práctica docente del nivel medio básico es usual que los estudiantes tengan dificultades tanto en el reconocimiento como en el uso operatorio del concepto. A juzgar por los conocidos problemas que se presentan en las matemáticas universitarias, específicamente en el álgebra vectorial, estas dificultades no se limitan a los niveles anteriores. De aquí la importancia de indagar cómo se aproxima el estudiante a esta noción e identificar la génesis de los obstáculos que muestra para operar con ella eficazmente.

Por lo que toca a la bibliografía, aunque la referencia principal remite a contextos escolares bastante lejanos –los estudiantes de Grecia de Gimnasio y Liceo- la tesis se basó en ella debido a que la revisión de literatura nacional evidenció una notable ausencia de reportes de investigación en la temática de vectores (cfr. Block et al, 1993), sin embargo, se encontró una profusión de trabajos en la construcción de conceptos.

En el presente caso, siguiendo la línea establecida por los investigadores citados, desde una perspectiva constructivista predominantemente piagetiana se analizan las formas en que estudiantes del nivel medio básico resuelven una situación-problema que involucra el concepto de vector en una situación común de clase. La metodología sigue los lineamientos de la entrevista clínica propia de los estudios de corte piagetiano. Resaltamos que no se trata de un diseño pretest-intervención-postest. El núcleo del diseño no es una situación de enseñanza preparada *ex profeso* cuyos efectos serán medidos. Por el contrario, el análisis se enfoca en una situación-problema que no se sale de la expectativas del alumno en un curso normal de física en el nivel secundaria. Interesa para el análisis una observación cuidadosa del fenómeno, por ello, la descripción tiene un peso importante en el trabajo.

Para dar cumplimiento a los propósitos de la presente investigación se trabajó con 161 alumnos de 13 a 15 años de segundo año de secundaria, se les impartió un curso sobre vectores y se seleccionó una situación-problema que involucrara un planteamiento vectorial como una <u>representación gráfica</u> de la solución y que tuviera las condiciones en que los estudiantes son requeridos en niveles superiores de conocimiento. En el desarrollo de la investigación se analizó cómo los estudiantes construyeron el enunciado del problema, la manera en que hicieron el planteamiento y la solución, y finalmente la forma a partir de la cual argumentaron sus respuestas en las entrevistas clínicas. La manera en que los resultados fueron reportados en la presente tesis dependió de las respuestas obtenidas durante el desarrollo de la investigación.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Uno de los problemas más graves e importantes del sistema educativo de nuestro país, que desde hace muchos años, ha quedado implantado en el mismo como algo aparentemente inamovible e insoluble, ha sido precisamente todo el conjunto de elementos que de uno u otro modo han constituido el llamado fracaso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el cual se ha venido acentuando cada vez con más fuerza en los últimos años y cuyo principal indicativo ha sido el alto índice de reprobación.

Este fenómeno se ha masificado en todos los niveles de la enseñanza, donde las matemáticas son señaladas como las causantes del bajo nivel académico y del alto índice de reprobación de los estudiantes. Además, estos hechos han repercutido notablemente en el nivel superior, en donde por una parte, se aprecia el desperdicio escolar, ya sea por deserción o por expulsión del sistema; la población flotante se incrementa, comprendiendo a todos aquellos que permanecen dentro de las instituciones educativas adeudando cursos de matemáticas; por otro lado, también es frecuente la elección sesgada de profesiones, que como la misma población estudiantil hace referencia: "no tengan nada que ver con las matemáticas".

Todo esto ha dado un lugar en la sociedad al papel que han venido jugando las matemáticas en las instituciones educativas, dado los múltiples comentarios que en torno a ellas se hacen. De entre los cuales podemos tomar el del Dr. Juan José Rivaud (citado por Ontiveros, 1994, p. 25), quien al respecto dijo: "Parecería que en carreras como la ingeniería, el objetivo de las matemáticas fuera eliminar a los alumnos para reducir el porcentaje que les sobra, y que por ello están concentradas en los primeros semestres". Además él mismo señala que las matemáticas del nivel medio superior y del inicio de la licenciatura han tenido y siguen teniendo una utilidad muy específica: "sirven para hacerles tremendamente difícil la vida a los estudiantes" (p.25), la información que se les da es poco importante e innecesaria para la formación de un buen profesionista.

El rechazo a las matemáticas tanto tradicionales como modernas se debe no sólo a su mayor o menor nivel de abstracción, ni a la capacidad de los estudiantes para aprenderlas o a la de los profesores para impartirlas, sino también al hecho de que han sido utilizadas como un mecanismo de discriminación socialmente legitimado; mecanismo que se ha encargado de depurar a la población estudiantil preservando "a los más aptos" para las mismas.

En cuanto a la enseñanza se refiere cabe señalar, que se han realizado múltiples esfuerzos por mejorar la didáctica de la disciplina, pero éstos se han concentrado, en su mayor parte, en aspectos técnicos o instrumentales. Existen numerosos sondeos y encuentros donde se trata de conocer las habilidades matemáticas de los estudiantes, pero la mayoría de las veces no se ha realizado una evaluación clara y consistente de los mismos. De manera semejante, se cuenta con una gran producción de propuestas didácticas y curriculares, a nivel nacional y local que circulan en el medio, pero sin una perspectiva totalizadora e integradora de los aspectos epistemológicos, lógicos, psicológicos, pedagógicos e inclusive ideológicos del problema, (además de resultar insuficientes, superficiales y descontextuadas). Lo que ha traído como consecuencia una cultura de enseñanza de la matemática cada vez más árida, donde los mismos profesores no conocen de las aplicaciones de lo que enseñan o, lo que es peor, muchas veces ni siquiera están convencidos de la importancia de lo que están impartiendo a sus alumnos.

Aunado a esto, por iniciativa de los mismos profesores, y en razón de la fuerte presión tanto social como institucional por abatir los altos índices de reprobación en esta materia, han surgido técnicas que se han exaltado por facilitar la acreditación de la misma como las señaladas por Soto Martínez en el Séptimo Congreso Nacional De La Confederación Nacional De Escuelas Particulares

(1997) (datos sin publicar) , pero que al ser analizadas más rigurosamente ponen de manifiesto que lo que generan únicamente son rebosamientos por mecanización continua de lo menos abstracto, es decir, automatismo o hábitos que no corresponden al pensamiento operatorio propio de las matemáticas; y que falsamente producen la ilusión de haber encontrado soluciones al problema del aprendizaje en matemáticas, sin duda, esta confusión va paralela a la falta de precisión sobre lo que realmente significa aprender matemáticas.

Como resultado de todo esto, seguimos teniendo, generaciones de analfabetos en matemáticas, con un temor sin precedentes a este campo de la enseñanza, y cuya formación apenas les permite realizar operaciones elementales de aritmética y a veces álgebra, constituyendo una de las pruebas más palpables del fracaso de la enseñanza de la matemática en nuestros días; y no es que la matemática moderna esté únicamente reservada a una fracción reducida de estudiantes, sino que como se ha venido mencionando, falta hacer más investigación en el campo de la <u>enseñanza</u> de esta disciplina, del cual hay bastante desconocimiento.

De acuerdo con Ontiveros (1994), un ejemplo de esto vienen a ser los exámenes, que son: "un mecanismo cotidiano para medir el conocimiento concibiendo a éste como un mero resultado. En estos los procesos de construcción de dicho conocimiento no son tomados en cuenta para la asignación de la nota, y es seguramente porque los mismos profesores no tienen conciencia o conocimiento de tales procesos". (p. 29).

Es importante mencionar también que aún cuando existen una gran cantidad de propuestas didácticas, como anteriormente se comentó, estas no han sido las adecuadas, puesto que en la mayoría de ellas se reprimen los aprendizajes espontáneos, o por descubrimiento, impidiendo la generalización de los conceptos por los mismos estudiantes.

Corroborando esto D'Ambrosio (citado por Ontiveros, 1994) menciona que: "Los enfoques de las matemáticas que la escuela presenta crean un "bloqueo psicológico" frente a otros modos de pensamiento matemático, este bloqueo impide la adquisición de lo que debiera aprenderse en la escuela al mismo tiempo que degrada, reprime o hace olvidar los aprendizajes espontáneos" (p.23). En las circunstancias del Tercer Mundo D'Ambrosio concluye que el estudiante es alineado de su realidad, y de ahí que la posibilidad de que sea creativo, a través de reflexionar y actuar sobre esta realidad, esté severamente restringida. Follari (1988), reflexiona sobre la problemática curricular de las instituciones educativas, y converge en este punto señalando que: "en general, podemos hablar de una ruptura entre la compresión cotidiana, originada en el mundo de la cultura informal, de los valores y las costumbres correspondientes a la clase social de que se trate, con la cultura formalizante ligada a las necesidades de la conceptualización científica y el ordenamiento tecnológico" (p. 24). Afirma que "la cultura de la ciencia choca con la cultura previa de los sujetos y cuando intenta imponerse a esta, a menudo, simplemente se superpone de manera difusa, configurando una esquizoide convivencia de mundos no reconciliables". (p. 24).

Todo esto ha traído como consecuencia, la desarticulación por parte de los mismos estudiantes, de la matemática con otras ramas de la ciencia, o lo que pudiera decirse, con las ciencias a las que sirve de herramienta. Lo cual la ha convertido, a los ojos de la mayor parte de la población estudiantil, como una ciencia terriblemente árida e inhóspita.

Como señala el mismo Follari (1988): "La actividad científica, la práctica de la ciencia como construcción de conocimientos sistemáticos o como transmisión de éste, es realizada por sujetos ya puestos en el mundo de la cotidianidad y que precomprenden en ella sus relaciones con el mundo. Está puesta en juego una subjetividad donde existe construcción de sentido (a partir del inconsciente y de las fuentes y aparatos objetivos de producción de significaciones) que se articula, de manera generalmente conflictiva, con el sentido sistemático, ordenado y formalizado de las significaciones aportadas desde el campo de la ciencia" (p. 24).

Además de esto encontramos también, múltiples acusaciones hacia al nivel medio y medio superior, por parte de los profesores de niveles superiores, como los principales culpables del mediocre desempeño de los estudiantes; argumentando que las grandes lagunas y deficiencias que acarrean los estudiantes de licenciatura, vienen como consecuencia del mal manejo de conceptos, la falta de integración de contenidos y el nulo fomento de habilidades, en los niveles anteriormente mencionados.

Deficiencias que no deberían existir, dado que los temas que inauguraron la modernización en las matemáticas escolares fueron incrustados en los planes tradicionales incluyendo en sus programas temas de mayor nivel de abstracción. Pero la verdad es que en muchas de las instituciones educativas de nivel medio aún cuando hay una gran cantidad de propuestas didácticas, estas no tienen mayor fundamento sino que solo se limitan, como ya se mencionó, a un mero rebosamiento exhaustivo de las mecanizaciones sin dar atención ni importancia a los procesos cognoscitivos de los estudiantes.

Es por eso que la gran mayoría de los alumnos del nivel medio, son promovidos a niveles superiores, con un desarrollo intelectual a nivel de operaciones concretas muy marcado, dado que en su nivel, no son estimulados a dar los primeros pasos a la abstracción.

Tratando de dar solución a todo esto y frente a la problemática que ha venido representando la enseñanza de las matemáticas, han surgido múltiples intentos para resolverla. Aunque el estudio sistemático del aprendizaje de las matemáticas es relativamente reciente, se han generado investigaciones de diversa índole acerca de los problemas psicológicos, pedagógicos y sociales, involucrados en la construcción de conocimientos matemáticos, según López

(1996) "estas investigaciones han surgido desde la matemática misma así como desde la psicología, la pedagogía, la didáctica, y la psicolingüistica, etc." (p.18).

Problemática de la investigación

Es importante resaltar que independientemente de la marcada separación entre matemáticos, psicologos, pedagogos, y otros investigadores, con respecto al estudio de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en los años recientes se ha notado un interés creciente en conjuntar esfuerzos puesto que, como afirma Begle (1989): "mientras no se trabaje de manera integrada, los resultados serán escasos". (p. 11)

A este respecto cabe señalar que no solamente hay diferencias y desarticulaciones entre investigadores, sino también entre los distintos niveles de la enseñanza, aún cuando se han tratado de uniformar y unificar criterios, estas diferencias han resultado ser muy marcadas y casi puede decirse imposibles de articular; las cuales, año con año, se van fortaleciendo más. Todo esto ha dado lugar a las diversas formas de ordenar, orientar e impartir la educación en las distintas instituciones educativas, proceder que se encuentra firmemente establecido en la sociedad y que ha marcado la notable desarticulación, de la que ya se ha hablado, en los distintos niveles de la enseñanza y que ha dejado pasar de un nivel a otro una gran cantidad de problemas o deficiencias que acarrean los estudiantes desde la primaria hasta la licenciatura.

Dentro de las deficiencias más marcadas que acarrea el alumno desde el nivel medio hasta el nivel superior; se encuentra, lo que de manera general podemos llamar la falta de reconocimiento de los conceptos y definiciones aprendidas de la teoría y sus aplicaciones en la resolución de problemas-texto o situaciones cotidianas frente a las cuales el alumno se siente incapaz de dar respuesta.

En este tipo de situaciones muy comunes, el alumno, tras de haber estudiado una determinada teoría, se siente incapaz e inútil para aplicarla, de hecho ni siquiera reconoce que en sus manos han sido puestas las herramientas, se le ha enseñado a usarlas, y frente a una situación a resolver no sabe que hacer, puesto que no aplica los elementos que se le han dado a conocer para responder a las preguntas que se le plantean.

Este problema es muy frecuente en disciplinas como las matemáticas y ciencias como la Física y la Química, puesto que exigen un mayor grado de abstracción. Grado de abstracción con el que muchas veces no cuentan los estudiantes, porque en la mayoría de los casos no son estimulados a ello desde los niveles antecedentes puesto que sólo realizan mecanizaciones concretas y continuas que no permiten su desarrollo intelectual de manera armónica y en función de su edad y que muchas veces hasta es reprimido en instituciones donde la disciplina es excesiva.

Como ya se mencionó este problema llega con frecuencia hasta el nivel superior, lo cual viene a constituir entre otras muchas razones, causa de los altos índices de reprobación, que sobre todo en matemáticas se dan.

Pero ¿qué es lo que en realidad se quiere decir con la falta de reconocimiento? A través de entrevistas y pláticas informales hemos podido constatar, cómo muchos profesores han advertido la frecuencia de situaciones en donde el alumnado responde adecuadamente frente a la resolución de ejercicios en torno a una teoría dada, casi puede decirse que el alumno capta cuál es el algoritmo a seguir, pero no hay asimilación del porqué, y en razón de qué, está siguiendo toda esa serie de pasos, que finalmente sólo le permiten cumplir su objetivo personal, es decir, llevar a feliz término la resolución del ejercicio y satisfacer de esta manera al profesor.

En este tipo de trabajo el alumno en la mayoría de los casos se desempeña excelentemente, pero cuando se le plantea una situación problemática, ya sea, teórica o práctica, no es capaz de reconocer que la teoría, es precisamente la herramienta que le permitirá dar respuesta a sus interrogantes; y en muchos otros casos, la situación es más grave, puesto que aún sabiendo qué teoría debe aplicar para resolver el problema, estos no logran ajustar la información con la que cuentan al problema que deben resolver.

Tratando de aterrizar y concretar más éste problema, y revisando los currícula de los distintos niveles de enseñanza, cabe señalar, que no encontramos ningún tema de interés que no haya sido estudiado desde este punto de vista, es decir, como un problema de la enseñanza de las matemáticas, sobre todo los relacionados con la aritmética y temas de primaria muy estudiados ya por otros autores, entre ellos los que se mencionaran más adelante, en cambio el tema de vectores llamó nuestra atención e interés por las razones que se exponen a continuación:

1.- Este tema se imparte por primera vez, en el historial académico de los estudiantes en el nivel medio; nivel en donde teóricamente (de lo cual se hablará más adelante) ocurre el pasaje del sujeto de operaciones concretas a operaciones formales, nivel de operar en el que se trabaja con vectores.

2.- Moon y Spencer (citados por Demetriadou, 1995) subrayan la efectividad de los vectores como herramientas que proveen de una representación matemática compacta de un fenómeno, por complejo que éste sea y además permiten su fácil manipulación y visualización. En la actualidad los vectores tienen múltiples aplicaciones en astronomía, álgebra, geometría, mecánica, electromagnetismo, ingeniería, psicología, biología e incluso en la enseñanza de la geometría tridimensional, por lo que su lugar dentro de los currícula y como parte de la enseñanza tradicional, está plenamente justificado así como la necesidad de saber la manera como el alumnado construye y opera estas magnitudes.

3.- Por la forma en que se enseñan, puede decirse, que estos conceptos se presentan de manera aislada.

4.- Aún en el nivel medio, el trabajar con vectores supone un alto grado de abstracción, aparte de que son cantidades completamente nuevas para los estudiantes, que sólo están acostumbrados a operar con escalares.

5.- Al hacer la revisión bibliográfica sobre el tema y los fines particulares de la presente investigación, encontramos como las aportaciones más importantes los trabajos de Demetriadou y Gagatsis (1995) quienes hacen referencia a las dificultades de los estudiantes griegos para manejar métodos vectoriales en la resolución de problemas de geometría, a este respecto, comentan que en la enseñanza elemental los estudiantes aprenden geometría euclidiana y posteriormente son forzados a abandonar esos métodos para resolver los mismos problemas, pero ahora, utilizando métodos vectoriales, a partir de lo cual se deriva una serie de dificultades cuyo común denominador viene a ser las concepciones erróneas del concepto y por consiguiente la incapacidad del estudiante para utilizar dicha herramienta debidamente. En función de este problema, los mismos autores, hacen hincapié en la necesidad de conocer cómo construyen y reconocen los estudiantes dicho concepto.

6.- Buscando mayor información al respecto pudimos percatarnos de que actualmente este campo de investigación resulta estar prácticamente abandonado; hecho que fue corroborado por el experto del centro de Investigaciones y Estudios Avanzados (CINVESTAV) en Educación Matemática, Dr. D. Block (datos sin publicar), en entrevista privada enfatizando la necesidad de investigar en este sentido, dado que, (como él mismo menciona), por un lado, la mayor parte de las investigaciones están principalmente orientadas al nivel básico, mientras que en los niveles medio, medio superior y superior es poco lo que hasta ahora se ha hecho, y por otro lado hay problemas que no han sido suficientemente investigados y otros que no se han advertido siquiera, tal es el caso, de todo lo relacionado a la enseñanza y el aprendizaje de los vectores, de lo cual pudiera decirse hay un desconocimiento total y una necesidad imperiosa por indagar en la formación de estos conceptos y su aplicabilidad por los estudiantes, ya que evidentemente forman parte de los temas que en las licenciaturas se les dificultan más.

7.- Desde la perspectiva misma del autor de la presente investigación, apoyado en sus experiencias frente a grupo y en función de su interés personal; al impartir el tema, se ha notado de manera constante cómo el alumnado de 12 a 14 años, entiende con cierta dificultad todo lo que sobre vectores se le imparte, tratando en una primera instancia de relacionarlos con algo conocido, sin mayor éxito. Sobre la marcha aprende a sumarlos y a resolver problemas muy específicos sin realmente asimilar el concepto. Finalmente, resulta de sobre manera interesante resaltar, que es notable cómo el alumnado no parece estar completamente convencido de los resultados que obtiene y de la manera de operar de dichas magnitudes, por lo que se limita solamente a satisfacer lo que el profesor le exige sin mayor cuestionamiento, y al término del tema, cuando se comprueba experimentalmente que existen magnitudes que operan de manera distinta a las ampliamente utilizadas por ellos, (magnitudes escalares), es cuando los estudiantes se tornan dubitativos, frente a la importancia de dicho conocimiento, el cual realmente modela algunos fenómenos de la naturaleza, y que, lo que se obtuvo teóricamente es aplicable a su experiencia.

8.- Desde la perspectiva de otros docentes, los puntos comentados con anterioridad encuentran respaldo, como lo manifiestan en los talleres de actualización, también son dificultades vividas por ellos mismos; dificultades que no han podido ser resueltas. Cabe abundar que de entre los temas que para los maestros representan mayor dificultad para ser impartidos, se encuentra el de vectores, por lo cual existe una marcada necesidad de saber cómo lo percibe el alumno en su instrucción y como realiza su conceptualización, para poder diseñar alguna estrategia eficaz en la enseñanza del mismo. Más aún, es importante señalar que tanto en la bibliografía recomendada para el docente de nivel medio por parte de las autoridades educativas, como en los contenidos de los cursos de actualización, este tema es pasado por alto, dejando al docente, sin recursos extras para mejorar su didáctica y poder salvar las dificultades que la enseñanza de este concepto y conceptos semejantes o afines representa.

9.- En relación al punto anterior, es importante mencionar de manera aparte, las opiniones de los catedráticos de licenciatura, quienes, por decirlo así, son los que más padecen las deficiencias de sus alumnos, en este caso, estudiantes de reciente ingreso al nivel superior y en quienes se supone existe un historial académico sólido; pero que en realidad, como ellos mismos comentan, parecería que el cambio de nivel lleva consigo la desaparición total o parcial de lo aprendido en niveles anteriores, como si en cada caso se tratara de un nuevo inicio, donde lo ya aprendido no tuviera ni aplicación ni importancia, fortaleciendo un olvido cada vez más acentuado en todos aquellos estudiantes que inician la licenciatura. En el caso particular del manejo y aplicación de la teoría vectorial las opiniones de los catedráticos caen en dos categorías importantes: la primera de ellas tiene mucho que ver con la falta de habilidad para operar dichos conceptos, a este respecto, los estudiantes, inclusive llegan a sostener que esos temas nunca los vieron, y la segunda, no menos importante que la anterior, es lo que tiene que ver con la falta de reconocimiento de la aplicabilidad de dichos conceptos en las situaciones-problema, ya sean teóricas o prácticas que se les plantean.

Establecido el problema que da pie a la presente investigación, procederemos a explicitar los referentes teóricos.

La investigación que en la presente tesis se aborda, está inscrita, dentro de la postura constructivista, con la intención de propiciar un acercamiento mayor a la forma en la que los adolescentes hacen suyo el conocimiento matemático. Se pretende indagar la conceptualización del vector por los alumnos de nivel medio básico, y describir algunas de las formas gráficas en que dan sentido al concepto, la manera en que lo reconocen, así como los obstáculos que enfrentan para operarlo en una situación usual de clase.

III. REVISION DE LITERATURA

Haciendo una revisión de investigaciones realizadas sobre formación de conceptos y desarrollo de habilidades matemáticas se orientó la metodología a seguir para la presente investigación. Entre los autores consultados destacan: Avila y Mancera (1989) y Avila (1993); Orozco (1990); Dávila (1992); De la O et al (1992); Hoyos (1994); Ursini (1994); Rouche y Soto (1995); Rosas (1995). Alsina (1990) aporta sobre la resolución general de problemas; Parra (1989) y Parra (1990), respecto a la resolución inteligente de problemas no estereotipados; Wenzelburger (1991) sobre la construcción del concepto de función; Castro (1993) aporta sobre la adquisición de conceptos de probabilidad; Waldegg (1996) sobre la construcción del concepto de número; Albaladejo (1996) aporta sobre el concepto de irracionalidad en secundaria; Trinidad (1996) hace referencia a la conceptualización y simbolización de ecuaciones diferenciales.

Estos trabajos constituyen una referencia, tanto en resolución de problemas como en construcción de conceptos, para la problemática que se abordará en la presente investigación, donde se indagará sobre estrategias y dificultades de los estudiantes en la resolución de un problema que involucra el concepto de vector en una situación de clase.

IV. MARCO TEORICO

Para abordar el problema de investigación, nos apoyaremos en un marco teórico constructivísta tomando dos ejes: a) Construcción de conceptos y b) resolución de problemas.

Constructivismo y aprendizaje de conceptos.

Etapas del desarrollo intelectual.

Como ya se ha establecido, en la presente tesis, interesa indagar la forma en que los estudiantes reconocen y operan el concepto de vector en la resolución de un problema.

Para ello, consideramos importante establecer en una primera instancia, cual es la situación, respecto al desarrollo intelectual del estudiante, que se enfrenta por primera vez, a estas cantidades que operan de manera distinta a las que utiliza cotidianamente.

Teóricamente se espera, que el estudiante de doce a catorce años se desenvuelva a nivel de operaciones formales. Cabe aclarar que, en realidad, no existe una correspondencia total entre la edad y la etapa del desarrollo intelectual del sujeto. En el Congreso Regional sobre Educación realizado en Querétaro (1997) el Dr. Luis González Martínez (datos sin publicar) en su ponencia magistral "*Estrategias para aprender a pensar*", resaltó que no existe una correspondencia total entre la edad y la madurez intelectual, aunque de manera general se identifica una progresión como lo señala el propio ponente remitiéndose a Piaget.

A esta edad el sujeto:

1.- Tiende a percibir su mundo de estímulos en términos más generales, abstractos y categóricos y en contextos menos tangibles, ligados al tiempo y particularizados.

2.- Muestra creciente habilidad para comprender y manipular símbolos y relaciones verbales abstractos y a emplear esquemas clasificatorios abstractos.

3.- Es más capaz de entender relaciones ideáticas sin necesidad de experiencias tangibles y directas, de imágenes concretas, ni tampoco de la exposición empírica a numerosos casos particulares de un concepto de proposición dados.

4.-Tiende más a inferir las propiedades de los objetos basándose en su pertenencia a clases y no en la experiencia directa de los datos sensoriales y próximos.

5.- Está más dispuesto a emplear atributos de criterio remotos y abstractos en lugar de inmediatos y concretos al clasificar fenómenos, y a emplear símbolos abstractos en lugar de imágenes concretas para representar conceptos nuevos.

6.- Adquiere un repertorio en aumento constante de abstracciones más inclusivas y de orden superior. (Piaget, 1969)

En relación a lo mismo, Piaget (1969) menciona que con el aumento de edad, "el campo cognoscitivo de los sujetos tiende a extenderse tanto espacial como temporalmente. Se vuelven más capaces de hacer inferencias, basándose en datos empíricos y sus productos cognoscitivos tienden a volverse de naturaleza más esquemática y menos subjetiva y egocéntrica.

Para la práctica educativa, el más importante de los cambios mencionados del desarrollo intelectual es el paso gradual del funcionamiento cognoscitivo concreto al abstracto, el cual define las diferencias principales entre los procesos de aprendizaje y pensamiento respectivos de los alumnos de primaria y de enseñanza media básica.

Pero en realidad, las fases de desarrollo no implican otra cosa que fases sucesivas identificables, en una progresión ordenada de desarrollo, que son cualitativamente discriminables de las fases adyacentes y, en general, características de la mayor parte de los miembros de un límite de edad definido con amplitud.

A diferencia de la situación en el desarrollo físico, emocional y de la personalidad, el desarrollo cognoscitivo no está marcado por la aparición súbita y tangible de determinantes nuevos y discontinuos. Más bien, hay mayores posibilidades de que ocurran cambios cualitativamente discontinuos en el desarrollo cognoscitivo cuando se ha alcanzado cierto grado decisivo de cambios cuantitativos.

Tampoco es razonable insistir en que una etapa dada deba ocurrir siempre en la misma edad en cada cultura. Cuando se distingue respecto a cierta etapa, ésta se referirá obviamente a un valor medio que significa que prevalece un límite normal de variabilidad en torno al promedio.

Así pues, los niveles de edad de Piaget, no son otra cosa que aproximaciones promedio, establecidas por conveniencia. Por lo que no puede esperarse en un individuo congruencia y generalidad absolutas en su conducta correspondiente a una etapa, de una semana o un mes a otro, y de una materia de estudio o nivel de dificultad al siguiente. Es inevitable que haya cierta coincidencia y cierta especificidad, toda vez que el desarrollo está determinado por factores múltiples y variables.

Ya que las transiciones a nuevas fases no ocurren instantáneamente, sino que requieren de cierto tiempo, las fluctuaciones entre etapas son comunes hasta que la nueva etapa que surge se consolida. Por otra parte, por las diferencias intrínsecas de nivel de dificultad de la materia de estudio, y por las diferencias de perfiles de capacidad y de experiencias antecedentes dentro y entre individuos, apenas sorprende que las transiciones de una etapa a otra no ocurran simultáneamente en todas las áreas y subáreas de estudio; por ejemplo, el pensamiento abstracto surge generalmente antes en ciencia que en estudios sociales.

Con todo esto queda establecida la posibilidad de que una de las primeras dificultades y obstáculos a los que el estudiante se puede enfrentar, ante el aprendizaje y aplicación de vectores es el hecho de que independientemente de su edad, sólo sea capaz de operar a nivel concreto y que su capacidad operatoria formal esté apenas comenzando a desarrollarse.

La conceptualización

Piaget (1936) demostró, que los recién nacidos no creen en la existencia permanente de los objetos o que incluso tienen dificultades para percibir un objeto situado en distintas posiciones como el mismo objeto. También comprobó que, a una edad bastante mayor, los niños siguen teniendo problemas para comprender que los cambios perceptivos aparentes no modifican la naturaleza ni la cantidad de las cosas o que el tiempo se conserva por encima de esas mismas apariencias. Estas investigaciones nos muestran que aún las más simples y universales creencias que sobre la realidad se puedan concebir, no son más que una elaboración cognitiva de las mismas, en la que la construcción de invariantes evita que el mundo adquiera una naturaleza particular y caótica por su complejidad.

Lo verdaderamente fascinante de la historia piagetiana de las conservaciones (Piaget, 1936) es mostrar, que algunas de las categorías fundamentales de la realidad no están en la realidad, sino en nuestras propias mentes. Es decir, que sin tales categorías se viviría en la confusión total, puesto que tanto los hechos, como los estímulos, serían en todo momento nuevos para nosotros.

Al no poder advertir la existencia de invariantes y categorizar la realidad, según Bruner et at (1996) nos convertiríamos en esclavos de lo particular, por lo que percibiríamos en todo momento, tanto a los sujetos como a los objetos con que interactuamos, como total y particularmente nuevos, esto es, con características que sólo pertenecen a ellos y que no los relacionan con los demás. Así pues, sin la posibilidad de categorizar el mundo, el aprendizaje no sería posible y sin él tampoco la adaptación.

Con todo esto queda establecido el carácter necesario de la categorización, o lo que es lo mismo en términos de Pozo (1989) la conceptualización del entorno; ya que, como el mismo hace referencia "el aprendizaje de conceptos es un hilo conductor que permite conocer la adquisición de significados" (p. 64).

De acuerdo con Bruner (1996) y colaboradores los conceptos cuentan con una serie de funciones básicas, de entre ellas podemos mencionar que: "sirven para reducir la complejidad del entorno, identificar sus objetos, reducir la necesidad de un aprendizaje constante, proporcionar una dirección a la actividad instrumental, así como ordenar y relacionar clases de hechos". Además de estas, Pozo (1989) sostiene que los conceptos parecen cumplir también con otras funciones de igual importancia como son las de "organizar y predecir". Ordenan nuestro universo, y predicen la conducta de los objetos que nos rodean.

Los conceptos aparte de cumplir con funciones claras y diferenciadas, cuentan además con una serie de rasgos particulares; uno de éstos es precisamente el poder contar con una definición propia, donde: "la referencia del concepto, viene a estar dada por los hechos y los objetos del mundo que designa, mientras que el sentido viene dado por su relación con otros conceptos" o lo que de manera semejante definen Miller y Johnson-Laird. (p.65).

<u>Tipos de conceptos</u>

Existen varios tipos de conceptos, unos son los conceptos científicos que se caracterizan porque en ellos se acentúa más la estructura relacional, además, de que pueden organizarse jerárquicamente en redes, de tal manera que aquellos conceptos que se encuentran en niveles inferiores, están por ende, incluidos en los niveles superiores de tales redes.

Por otra parte, los atributos concretos que definen un concepto para un sujeto dependen del lugar que tal concepto ocupe en la estructura de conocimientos de dicho sujeto. Esto es, el significado depende del esquema de asimilación del que disponga el sujeto.

Los conceptos poseen una estructura interna, que puede ser de dos tipos: estructura clásica y probabilística.

En la concepción clásica "un concepto está constituido por una serie de atributos necesarios y suficientes, de tal modo que todos los ejemplos del concepto tienen atributos comunes y ningún no-ejemplo del concepto posee esos atributos", (Pozo, 1989, p.66). Un ejemplo claro de esto vienen a ser los conceptos científicos quienes en su mayoría suelen responder a esta concepción.

Sin embargo, la mayoría de los conceptos cotidianos, incluso algunos referidos a fenómenos científicos se adecuan más a la concepción probabilística.

En esta, los conceptos tienen una estructura difusa, sus límites son borrosos, y en la mayoría de los casos, no existen atributos necesarios ni suficientes que los definan.

Pozo (1989) señala a este respecto que apoyados "en una serie de experimentos que arrojaban datos incompatibles con la posición clásica, se han ido desarrollando diversos modelos de formación de conceptos que asumen la concepción probabilística, según la cual la posesión de los atributos de concepto por parte de un ejemplar y su pertenencia a la categoría no son una cuestión de todo o nada, sino de grados o probabilidades" (p. 66), es decir, que parece que existe un mecanismo automático de categorización de estímulos basado en prototipos, en lugar de clases lógicamente definidas.

De manera semejante Wittgenstein (1993) rechaza la concepción clásica de que todos los ejemplares de un concepto tienen una serie de atributos comunes, y propone: "que lo que une a esos ejemplares dentro de un mismo concepto es un cierto parecido familiar, basado en una semejanza no transitiva entre los miembros de la categoría" (p. 93).

Sin duda son los estudios de Rosch (1988) sobre la materia los más revolucionarios, ella afirma que "las categorías no son homogéneas, sino que tienen un centro, ocupado por los ejemplares típicos o prototipos, y una periferia en la que estarían los ejemplares menos representativos" (p. 96). Para Rosh el prototipo de un concepto sería aquél que tuviera el mayor "parecido categorial"

Existe otra diferencia en cuanto a la creencia en la realidad de los conceptos; es decir, para algunos, éstos "están" en la realidad y el sujeto solamente se limita a "extraerlos"; mientras que para otros, los conceptos son invenciones útiles que no están en la realidad.

Esta diferencia tiene importantes implicaciones en los enfoques sobre el aprendizaje de conceptos. Mientras que para la psicología asociacionista los conceptos son "entidades reales" para la psicología constructivísta los conceptos son construidos por el sujeto mediante complejos procesos de reestructuración de conceptos previos. Para la primer postura, en la adquisición de conceptos sólo es necesario contar con mecanismos que detecten las covariaciones existentes en el medio, en cambio para la segunda postura el aprendizaje tiene que ver con procesos de interiorización de las acciones y de su toma de conciencia.

Cabe señalar que de las concepciones diferentes que sobre las unidades de análisis se puedan elaborar, surgen otras distinciones. Por un lado, las relacionadas con las teorías asociacionistas que siendo elementalistas, consideran que un todo puede descomponerse en sus partes; mientras que por otro lado, la psicología estructuralísta toma como punto de partida a dichas unidades y las analiza como tales. A este respecto, puede sostenerse que el análisis de una determinada unidad debe realizarse tal cual y como es, es decir, no considerando los elementos que la componen uno por uno y de manera aislada, sino todo el conjunto, ya que dichas unidades de elementos, conservan las propiedades básicas del todo, situación que no se presenta en los elementos aislados del mismo.

Estas consideraciones, según Rosch (1988) ponen en evidencia que al estudiar la formación de conceptos a partir de unidades o globalidades supone rechazar la idea de que los conceptos quedan definidos por sus rasgos o atributos y se favorece el enfoque que adoptan las teorías de la reestructuración; en las que "el establecimiento del significado de un concepto se da a partir de otros conceptos dentro de una teoría o estructura general" (p. 96) lo que exige pasar de investigar la identificación de conceptos a los mecanismos de su adquisición y/o formación.

Considerando a los conceptos como rasgos que forman parte de estructuras amplias y complejas, el aprendizaje de estos, es pues, el proceso mediante el cual tales estructuras van cambiando. La adquisición de un nuevo concepto puede modificar toda la estructura conceptual precedente. Piaget y Garcia (citados por Pozo 1989, p. 64) sostienen que: "el desarrollo de toda teoría o conjunto de esquemas organizados del sujeto implica una reorganización jerárquica progresiva: intraobjetal (descubrimiento de propiedades en los objetos), interobjetal (establecimiento de relaciones entre los objetos) y transobjetal (establecimiento de relaciones entre las relaciones construidas)". Como puede constatarse, esos niveles de análisis de complejidad creciente, tienen que ver con una evolución desde el estudio de los objetos en sí mismos, hacia la reflexión sobre la propia teoría que uno mantiene con respecto a los objetos, así como, su comparación y posible integración con otras ideas.

Este progreso particular se caracteriza por una toma de conciencia progresiva, comenzando con las cualidades de los objetos y, más adelante, con las operaciones o acciones virtuales que se pueden aplicar a dichos objetos dentro de un mismo sistema de transformaciones. Como puede verse esta toma de conciencia conceptual viene a ser uno de los núcleos fundamentales del modelo piagetiano del cambio conceptual.

Para Piaget, la toma de conciencia en la conceptualización y el cambio conceptual están ligados a la abastracción reflexiva, la que conduciría a niveles de equilibrio, desequilibrio, y reequilibrio cada vez más complejos. Es importante señalar que es precisamente la abstracción reflexiva el mecanismo de construcción del conocimiento matemático. Por otro lado, mientras en el aprendizaje asociativo/reproductivo, centrado en el éxito, se aprende sobre todo de los aciertos, en el aprendizaje comprensivo o productivo, vienen a ser los fracasos los que resultan más informativos, puesto que proporcionan mayor información sobre la insuficiencia asimiladora del conocimiento.

La teoría Vygotskiana no rechaza el asociacionismo de manera tan radical como lo hace Piaget. Dentro de sus análisis, Vygotsky advierte que, no niega la importancia de este tipo de aprendizaje pero sí lo califica de insuficiente, dando mayor importancia a la actividad, sobretodo de carácter social. Para Vygotsky, la sistematización y la toma de conciencia son inseparables en el aprendizaje de conceptos científicos, para el caso de la adquisición de conceptos espontáneos la toma de conciencia está dirigida a los objetos mientras que en la de los conceptos científicos ésta se orienta sobre los conceptos mismos. Es por esto que se adquieren por vías opuestas; a saber, los conceptos espontáneos van de lo concreto a lo abstracto, mientras que los científicos van de lo abstracto a lo concreto. Unos se adquieren por abstracciones realizadas sobre los propios objetos; otros, por abstracciones realizadas sobre los propios sistemas o pirámides de conceptos. Es por ello que conciencia y sistematización pueden ser considerados como sinónimos, dado que los conceptos se adquieren tomando conciencia de su relación con otros conceptos, por su sentido.

Es en el análisis de las relaciones entre conceptos donde se llega a captar la esencia del concepto. Por ello, el aprendizaje de un concepto, o para ser más precisos, la adquisición de su significado o sentido, sólo es posible por restructuración del sistema de conceptos del sujeto, aún cuando los referentes de un concepto sí pueden determinarse por vía asociativa.

Una vez habiendo establecido todo esto, es importante resaltar de acuerdo con Vygotsky que no todos los caminos que recorren la pirámide de conceptos para su reestructuración son igualmente fáciles de seguir, es decir, la toma de conciencia de las diferencias es, según él, más fácil que la de semejanzas, ya que esta última requiere una estructura de generalización más avanzada. Por ello, es más fácil diferenciar los conceptos que integrarlos generando un nuevo concepto de nivel jerárquicamente superior.

Si bien Vygotsky argumenta que los conceptos científicos sólo pueden aprenderse cuando los conceptos espontáneos se hallan desarrollados y que unos influyen sobre los otros, no puede llegarse a los conceptos científicos por una mera evolución de los conceptos espontáneos.

Así pues, la reestructuración que lleva a la formación de conceptos científicos sólo se da si se apoya en asociaciones previas, o lo que es lo mismo, el significado de los conceptos científicos no se construye sin hacer referencia a los conceptos cotidianos. En este punto Vygotsky, a diferencia de Piaget, cree que el aprendizaje asociativo puede ser un agente facilitador de la reestructuración.

Podemos concluir que los conceptos científicos sólo pueden adquirirse mediante la instrucción, es decir, mediante procedimientos intencionales, planteados y sistematizados donde los mediadores culturales (maestros, libros, lenguajes, etc.) apoyen procesos de internalización semántica.

<u>Constructivismo social y conceptos matemáticos</u>

De acuerdo a la visión contructivista del conocimiento éste es siempre contextual, esto es, se trata de una actividad de la sociedad. Lo que viene a ser el núcleo de dicha actividad, consiste en construir significados asociados a la experiencia del sujeto, en este caso una experiencia cultural, sociohistórica. El conocimiento nunca existe separado del sujeto. "En el proceso de conocer, el sujeto va asignando al objeto una serie de significados, cuya multiplicidad determina conceptualmente al objeto" (Moreno y Waldegg,1992, p. 184). Es importante aclarar que el atribuir significados no es un acto meramente individual, es decir, "conocer es actuar, pero conocer también implica comprender de tal forma que permita compartir con otros el conocimiento y formar así una comunidad. En esta interacción, de naturaleza social, un rol fundamental lo juega la negociación de significados", (Moreno y Waldegg, 1992, p. 184). Buckley (1988) comenta a este respecto que "en general, los significados se generan en un proceso de interacción social de un número de individuos relacionados con un ambiente más o menos común " (p. 125). Es precisamente en esta interacción en donde los significados se negocian y una vez negociados sirven de base para la toma de decisiones que posibilita la conducta social organizada.

Así es como la adquisición de significados toma carácter de actividad social. En el caso de la elaboración de conceptos en el aula, tanto lo que se enseña como lo que se aprende viene a ser un producto de la negociación que ocurre entre los estudiantes y el profesor mismo, de allí, que la objetividad de este conocimiento sea relativa a dicha comunidad.

A este respecto es importante distinguir aquí entre "concepciones" y "conceptos". Para Moreno y Waldegg (1992): "La experiencia del estudiante, es una red de información, de imágenes, de relaciones, anticipaciones e interferencias alrededor de una idea. Este complejo cognoscitivo es lo que llamamos su concepción". Así pues, el trabajo del estudiante consiste, en formular dicha concepción, establecer relaciones, patrones y generar algoritmos. En términos de los mismos autores se concluye que: "el proceso de construcción de significados es gradual, pues el concepto queda, por así decirlo 'atrapado' en una red de significados". (Moreno y Waldegg, 1992, p184.).

Para el estudiante, la búsqueda de sentido es una necesidad cognoscitiva, cuando construye significados en la situación didáctica, puede verse forzado a recurrir a nociones más primitivas o más cercanas a su experiencia para darle sentido a esa situación. Para el caso de la adquisición de conceptos matemáticos, en tanto que objetos ideales, mentales, abstractos, esta construcción de sentido resultará más fácil en función de la predominante experiencia del sujeto con objetos concretos.

Es indudable que el lenguaje juega un importante papel en la construcción de significados. Las acciones que se realizan en el plano de lo material sobre objetos concretos son abordadas mediante representación, mientras que las realizadas en el plano ideal se abordan mediante símbolos. Es el lenguaje, como sistema de símbolos, quien permite operar un cambio en el plano de representación y, de esa manera, acceder a niveles de mayor abstracción. De manera semejante el lenguaje formal permite cambiar el plano de representación del leguaje natural. Pero los objetos de la matemática se manipulan, y se operan al nivel de lo simbólico. Todas estas acciones vienen a generar una red de relaciones entre diversos objetos, tanto objetos ideales como objetos conceptuales. Así pues, la actividad operatoria permite construir el concepto, el cual tendrá bajo esta visión una naturaleza dual; esto es, simbólica y operatoria. (Vergnaud, 1990) Respecto a la elaboración de conceptos Vergnaud (1991) señala: "el pensamiento no es meramente percepción interiorizada o lenguaje interiorizado sino también, y más bien esencialmente, acción interiorizada, Un concepto es operacional o no es concepto". (p. 77)

En el ámbito de las matemáticas, se diferencia a los conceptos en paramatemáticos, protomatemáticos y matemáticos, según Vergnaud (1990) esta distinción expresa una graduación que va de lo implícito a lo explícito. Para él los conceptos paramatemáticos son aquellos que no son enseñados explícitamente aún cuando el profesor tiene conciencia de ellos, los conceptos protomatemáticos se refieren a habilidades básicas como las de descubrir patrones y semejanzas, puede decirse que son estos quienes actúan como condiciones necesarias para la enseñanza de los conceptos matemáticos y paramatemáticos, pero ellos no son ni explícitamente enseñados, ni el profesor tiene conciencia de ellos, solo se percata de ellos por ausencia, es decir cuando no sirven como antecedentes para la enseñanza de conceptos matemáticos. De acuerdo a lo comentado con anterioridad, solo los matemáticos serían conceptos mientras que los otros dos serían concepciones".

Sobre la resolución de situaciones en matemáticas

¿Qué son y cómo se resuelven problemas de matemáticas?

La teoría historicista pregona que el individuo debe pasar por todas las experiencias que ha tenido la raza en su desarrollo, en forma rápida pero sin omitir alguna. Esto implica que al estudiante se le debe iniciar con temas sencillos llevándolo lentamente hacia formulaciones abstractas tal como avanzó la humanidad en el desarrollo de las matemáticas. La historia enseña que los descubrimientos en matemáticas no se deben a la lógica deductiva; interviene la imaginación, la intuición, la experimentación, el tanteo y las analogías; el papel de la lógica aquí es secundario. (cfr Sánchez, 1990)

De acuerdo con Kline (1988), en la enseñanza de la matemática y la ciencia, hay que justificar al estudiante la introducción de cada tema; "además de que la motivación debe ser natural, apoyada por el estudio de temas reales, en gran parte físicos, y finalmente, junto con cada nuevo concepto se debe explicar porqué motivo es importante e interesante". (p. 31)

Por lo que respecta al problema de la traducción de información verbal a la forma matemática, éste queda resuelto cuando las matemáticas surgen de problemas reales; además, estas deben desarrollarse constructiva y deductivamente, permitiendo al estudiante pensar de modo intuitivo y adquirir confianza en su propia capacidad; así como de no ocultar a los estudiantes la existencia de tanteos y esfuerzos infructuosos. (cfr Atiyah, 1988).

En función de esto mismo es importante mencionar que las matemáticas se comprenden a través de los sentidos, y que por tanto hay que usar un dibujo o esquema como un recurso didáctico, que la analogía puede emplearse con gran utilidad, que la intuición puede facilitarse mediante argumentos físicos, que la motivación es prioritaria en el momento de determinar los contenidos de enseñanza, y por ende, se deben incluir aquellos temas cuyo interés y significado se puedan justificar, además de que, dado la naturaleza secuencial de las matemáticas, éstos sean enseñados en varios niveles. (Atiyah, 1988, p.76)

Una vez habiendo establecido la tónica en la que se deberían presentar situaciones a resolver a los estudiantes, es conveniente abundar en lo que realmente es el planteamiento adecuado de un problema.

Bouvier (1991) señala que el problema es el corazón de la actividad matemática y Brousseau (1993) hace otro tanto:, un alumno no hace matemáticas si no se le plantean y no se resuelven problemas.

Pero, ¿qué es un problema?. "Un problema plantea una situación que debe ser modelada para encontrar la respuesta a una pregunta que se deriva de la misma situación". (Parra, 1989, p. 49). Pero también, según Bouvier (1991) un problema debería permitir derivar preguntas nuevas, pistas nuevas, ideas nuevas.

Sin embargo un problema lo es, en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se lo plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera casi inmediata. Ciertamente, lo que es un problema para un individuo, puede no serlo para otro, sea porque está totalmente fuera de su alcance, o sea porque, para el nivel de conocimientos del individuo, el problema ha dejado de serlo; entonces, ¿en qué consiste la resolución de problemas?, podemos decir que un problema ha sido resuelto por un individuo cuando éste cree, explícita o implícitamente, que ha obtenido la "verdadera" solución.

Así pues, la resolución de problemas se refiere a la coordinación de experiencias previas, conocimiento e intuición, en un esfuerzo para encontrar una solución que no se conoce. A grandes rasgos, puede decirse que, al resolver un problema, el sujeto aborda los siguientes puntos:

a) Formula el problema en sus términos propios.
b) Experimenta, observa y tantea.
c) Emite conjeturas.
d) Valida su respuesta.

La etapa de validación es central en este proceso porque a través de ella la conjetura puede ser reformulada o ajustada para dar mejor cuenta de la situación planteada por el problema; o puede mostrarse falsa, al encontrarse un contraejemplo que la invalide, por lo que será necesario construir una nueva conjetura teniendo en cuenta los errores anteriores, que son válidos como ensayos. Dentro de la actividad matemática, la validación se da en un proceso dialéctico entre el que resuelve y el conocimiento matemático establecido.

Entre las características de la resolución de problemas escolares encontramos que el proceso de resolución descrito se traduce, para los problemas escolares, en un proceso de tres pasos, los cuales son:

a) Entender el problema.
b) Desarrollar y llevar a cabo una estrategia para resolverlo.
c) Evaluación de la solución obtenida.

Mucho se ha discutido acerca de la importancia de la resolución inteligente de problemas en la enseñanza elemental. Esto es, la importancia de permitir que los alumnos construyan sus propios caminos de razonamiento, sus propias estrategias de resolución y, sobre todo la importancia de que puedan explicitar el porqué de esa resolución (ctr Alarcón, 1988). Al mismo tiempo que ponen en juego los conceptos que interesa afianzar.

También se ha mostrado que cuando esta actividad se les propone a los alumnos, el tiempo que tardan en abandonar los esquemas de resolución tradicionales no es corto, y que la variedad de estrategias correctas que resultan es muy grande y permite detectar diferentes momentos en la construcción de un concepto. (cfr Parra, 1989)

La detección de éstos momentos es posible merced a que en la resolución del problema no se considera solamente el resultado de manera dicotómica (correcto-incorrecto), sino que se observan, analizan y validan los caminos de resolución que han seguido los alumnos. Evidentemente, para que esto sea posible, se debe abandonar el modelo de resolución datos-operación-resultado para permitir la libre deducción de estrategias y utilización de recursos. (cfr Charles, 1992).

Por otra parte, uno de los aspectos que se presentan en el proceso, de la resolución de problemas, y que se debe considerar como parte inherente a él, es el error. El error que el alumno comete al resolver un problema o llevar a cabo una algoritmo merece ser considerado como fuente de conocimiento. Al maestro, le permite detectar dificultades conceptuales de las que no había sido consciente y que pueden afectar a buena parte de sus alumnos, o dificultades de comprensión en la lectura, términos desconocidos a los alumnos y que admiten una significación distinta de la que el contexto del problema supone. Por su parte, si al alumno se le invita a discutir su resolución, si se le permite explicar sus concepciones, sus estrategias, buscar la manera de validar su resultado -en un ambiente propicio para el diálogo-, es capaz de percatarse del error cometido y de buscar y proponer una resolución o una estrategia alternativa, y en esta búsqueda puede aclararse un concepto; además de que el error puede también esconder una estrategia valiosa (cfr Dávila, 1992).

Debe reiterarse que el desarrollo de estrategias y la observación, análisis y validación de las mismas sólo son posibles si se proponen a los alumnos problemas interesantes desde el punto de vista de lo que demandan de él.

El concepto de vector, su naturaleza y aplicación.

En psicología, se habla de procesos de construcción del conocimiento, pero la explicación de tales procesos es muy general y dejan de lado comúnmente la naturaleza del contenido, por esta razón cuando los profesores requieren de apoyo para la elaboración de estrategias didácticas, los modelos teóricos existentes resultan insuficientes para favorecer la apropiación de tales contenidos. Por ello se considera que se debe particularizar en el estudio de la construcción del conocimiento, esto es, se necesita indagar sobre la forma en que los alumnos construyen los conocimientos escolares y en este caso particular, el conocimiento del concepto de vector.

Así pues, respecto a su naturaleza, cabe señalar, que en estudios de física es frecuente encontrar vectores, dado que a través de estos se modelan una serie de fenómenos del mundo, hecho que permite ser explotado, para hacer más accesible este conocimiento a los estudiantes[1], exhibiendo su importancia y funcionalidad en la experiencia física concreta.

En el nivel medio resulta difícil abordar de manera formal este conocimiento, esto es, con definiciones estrictas y formales del concepto, en cambio si es posible hacer hincapié en determinados puntos medulares de la concepción que sobre el mismo pudieran desarrollar los estudiantes.

El concepto de vector, su reconocimiento y operatividad se introduce en el nivel medio a través de la física. Conviene, por tanto, resaltar la forma en que se hace acceder a los estudiantes a tales contenidos a través de los cursos tradicionales[2].

---

[1] M. Kline en su libro **"El fracaso de la matemática moderna (porque Juanito no sabe sumar)"** Mexico: siglo XXI: comenta respecto a la necesidad de combinar la enseñanza de la matemática con la ciencia, para de esta manera justificar y motivar al estudiante, en la introducción de cada tema; apoyándose en el estudio de temas reales, en gran parte físicos.

[2] Entiéndase por curso tradicional a aquel que se imparte con un temario predeterminado por las autoridades educativas correspondientes y que resulta ser representativo dado que se imparte en todas las instituciones educativas de nivel medio.

Inicialmente, cabe señalar la diferenciación que sobre los distintos tipos de magnitudes se hace, definiendo a éstas como "todo aquello que se puede medir", y dividiéndolas en escalares y vectoriales, en donde las primeras para ser definidas sólo requieren de un valor numérico y una unidad, a saber 1s, 4kg, etc...; mientras que las segundas requieren de manera semejante del valor numérico y la unidad, pero además de dirección, sentido y punto de aplicación, relacionándolas inmediatamente con fenómenos físicos tales como los del **movimiento**. Es importante resaltar el hecho de que los estudiantes de nivel medio con quienes se realizó la presente investigación cuentan con una familiaridad bastante arraigada en el reconocimiento y manejo de magnitudes escalares, dado que han sido aquellas que hasta ahora han manejado y que les han ayudado a resolver las situaciones y/o problemas que se les han planteado. Es por ello que a través de diversas actividades sobre todo experimentales debe tratarse de "convencer" a los estudiantes que existen situaciones en donde los escalares resultan ser insuficientes para resolverlas; y que son los vectores los que presentan una serie de ventajas, constituidas en sus términos, que sí permiten abordar tales problemas.

Así pues, es en la concepción que sobre cada término del vector, se tenga como se irá construyendo el concepto en cuestión, y la solidez de éste será función, del entendimiento que sobre cada término tenga el estudiante, esto es, constituyéndolo como un conjunto de imágenes, ideas, inferencias o anticipaciones que bajo una serie de relaciones puedan constituir una red conceptual, y, por ende, permita establecer patrones y generar algoritmos.

Una de las actividades que se ponen en marcha para lograr este convencimiento es aquella en donde el alumnado en forma experimental va afrontando una serie de situaciones anómalas diseñadas para establecer conflictos cognoscitivos que permitan lograr los fines deseados, en los términos planteados con anterioridad; en éstas se muestra una situación en la que un alumno permanecerá quieto en un punto determinado mientras que otro tendrá libertad de movimiento, se denomina punto fijo al primero y móvil al segundo; posteriormente se pide al alumnado testigo cierre los ojos e imagine su movimiento; al advertir el alumnado que las posibilidades son abundantes es menester acotar, las condiciones en las que se ha de imaginar tal movimiento, es decir, hablar de una condición que informe que tanto se ha de mover el punto móvil respecto al fijo referido en términos de valor numérico y una unidad.

En un segundo momento, se repite el ejercicio anterior estableciendo ahora el valor numérico y la unidad que se ha de mover el alumno móvil respecto al fijo. Advirtiendo que esa condición, aún no es suficiente dado que el móvil puede moverse en un radio del tamaño igual al valor señalado alrededor del punto fijo o de referencia, es necesario hablar en términos de dirección, estableciendo ésta como una recta sobre la que se desarrolla el movimiento referida a un ángulo determinado o a los puntos cardinales. Posteriormente, se desarrolla el ejercicio estableciendo las condiciones del valor numérico, la unidad y la dirección, corroborando ahora que para cualquier dirección es posible desarrollar el movimiento del estudiante en uno de dos posibles sentidos, se procede a replantear la situación en forma más completa, empleando como datos al valor numérico, unidad, dirección y sentido y pidiendo que el alumnado imagine el movimiento pero sin haber establecido en esta última parte respecto a quién, por lo que finalmente queda evidenciada la necesidad de no pasar por alto el punto de partida del movimiento, denominado punto de aplicación. (cfr, Braun, 1993)

Finalmente, se establece que así como una magnitud escalar puede ser escrita a partir de la representación de sus términos, también una magnitud vectorial puede serlo de la misma manera, definiendo a la dirección como la línea sobre la que se ha de dibujar el vector, el valor numérico y la unidad como el tamaño del vector, el sentido como una punta de flecha sobre la dirección indicando hacia dónde se produce el movimiento y finalmente el punto de aplicación como el lugar de donde parte el movimiento.

En una segunda etapa de ésta instrucción, se pone en evidencia que para los diversos fenómenos de la naturaleza que pueden ser modelados por medio de vectores, estos no actúan solos, es decir, por lo general se encuentran combinados formando sistemas vectoriales. Los vectores empleados en física son representaciones gráficas y compactas que permiten manipular y representar fenómenos naturales como la velocidad, aceleración y fuerza, y realizar operaciones con ellos dentro de sistemas[3].

Para un sistema vectorial existen métodos de resolución en busca del vector resultante. A saber, un sistema vectorial se denominará colineal si en éste los vectores involucrados tienen entre sí un ángulo de separación de 0° o 180°, concurrente o angular si el ángulo de separación está entre 0° y 180°. (cfr Rincón, 1996).

Para el primer caso, el de un sistema vectorial colineal, el vector resultante es calculado por medio de la suma aritmética de los vectores involucrados, tomando en cuenta sus sentidos, es decir, si los vectores tienen el mismo sentido, el vector resultante estará dado en su magnitud por la suma aritmética de los vectores involucrados, y su dirección, sentido y punto de aplicación será el mismo. Por otro lado si en el sistema colineal, los vectores tiene sentidos opuestos, entonces la magnitud del vector resultante estará dada por la diferencia entre las magnitudes de los vectores involucrados, la dirección y el punto de aplicación serán los mismos y el sentido igual al del vector mayor. (cfr Rincón, 1996).

Para el segundo caso, cuando los vectores forman un sistema angular o concurrente, es necesario advertir en primera instancia, si los vectores involucrados tiene el mismo punto de aplicación, de ser así, la suma de estos estará dada por la aplicación del llamado método del paralelogramo, en donde trasladando los vectores por medio de escuadras o compás se ha de formar un

[3] En el nivel medio sólamente se imparten las operaciones de suma y resta empleando métodos gráficos y connotando la operación realizada por medio de variables algebráicas.

paralelogramo y el vector resultante de tal efecto estará dado por la diagonal trazada a partir del punto de aplicación de los vectores del sistema. Por otro lado, si el punto de aplicación de los vectores del sistema no es común, esto es que se encuentren trasladados, del origen, para el caso del nivel medio se emplea el llamado método del triángulo que consiste en formar precisamente un triángulo, uniendo el punto de aplicación del primer vector con la punta de flecha del segundo. (cfr Rincón, 1996).

Como se puede advertir, éstos métodos permiten obtener en forma gráfica la resultante dependiendo del sistema vectorial considerando a los vectores involucrados por parejas. Para el caso en donde se han de presentar más de dos vectores, se emplea el llamado método del polígono que no es más que la combinación de los métodos anteriores, utilizando el que corresponda de acuerdo a las características del sistema vectorial formado por cada dos de ellos, considerando resultantes parciales que se han de ir sumando hasta terminar con todo los vectores del sistema hasta obtener la resultante final.

A este respecto cabe señalar, que la enseñanza y justificación de tales operaciones no es meramente declarativa, sino que la instrucción de tales métodos va acompañado de actividades experimentales, en donde, por medio de materiales tales como dinamómetros, los estudiantes van captando los distintos sistemas vectoriales y van corroborando la correspondencia entre el resultado propuesto por el método y la realidad tangible de la actividad experimental.

Así sobre la mecanización de tales métodos, es como se va poniendo en evidencia el hecho de que la búsqueda y existencia de un vector resultante es actividad prioritaria en la interpretación de los fenómenos involucrados, siendo precisamente éste vector resultante quien informa sobre el efecto final de los vectores involucrados en el sistema vectorial de la situación a resolver. de esa manera, el vector puede ser considerado como una magnitud desconocida y específica, es decir, una incógnita cuyo valor está determinado por el contexto. (cfr Demetriadou, 1995).

Abundando en la teoría a este respecto, se sabe que a partir de cualquier vector se pueden encontrar sus componentes, esto nos proporciona la relación entre los vectores empleados en matemáticas y los vectores empleados en física. Como puede verse, todo vector físico se puede representar por medio de un par o de una terna de coordenadas, sin embargo, los vectores definidos en matemáticas, no tienen necesariamente una interpretación física. Este es un ejemplo de un concepto matemático que surge como una generalización de un objeto físico concreto. (cfr Allendoerfer, 1994).

V. METODOLOGIA

El método clínico

Parafraseando un tanto lo escrito por Ontiveros (1994), explicitamos la metodología de nuestra investigación. Se decidió utilizar el método clínico de exploración crítica que combina el método psicogenético y el método clínico en una dimensión experimental.

Los procedimientos de este método se dejan orientar por las conductas espontáneas e imprevistas de los sujetos entrevistados. Se platean continuamente hipótesis sobre los diversos significados cognoscitivos de las conductas observadas. Se interroga haciendo hincapié en los aspectos conflictivos de la situación presentada, registrando los comportamientos con los cuales el sujeto afronta la contradicción o la incoherencia, mediante grabaciones de imagen o sonido. Se realizan diversas modificaciones a los problemas planteados y se registran los cambios en las estrategias de solución en función de los resultados que de manera preliminar se van obteniendo.

Estos interrogatorios están destinados a poner de manifiesto el origen del pensamiento del sujeto entrevistado, registrando, analizando e interpretando las acciones y argumentos que acompañan a sus juicios e intentos por establecer una interpretación vectorial a una situación planteada. Es a través del análisis de tales argumentos, explícitos o implícitos, que se intenta extraer la naturaleza de los obstáculos inherentes a tales construcciones.

Los propósitos de esta investigación requerieron que la situación problema que se seleccionó involucrara un planteamiento vectorial como representación gráfica de la solución, y se mantuvieran condiciones similares a aquéllas en que el estudiante de matemáticas es requerido en niveles superiores de enseñanza para situaciones semejantes. Se decidió no "inventar" una situación, sino de aquéllas que eran usuales en el transcurso de una clase normal de nivel secundaria, seleccionar la que mejor sirviera a los propósitos de la investigación.

Diseño de la investigación

La investigación se desarrolló en tres etapas:

1.- Presentación del problema.

2.- Planteamiento y resolución del problema.

3.- Entrevistas clínicas.

La enseñanza de la teoría, en este caso sobre vectores, se impartió de manera tradicional y con apego a los programas oficiales. A este respecto, consideramos conveniente aclarar que la denominación "tradicional" la empleamos únicamente para referirnos a aquel curso programado oficialmente para todos los estudiantes del nivel medio, con un temario previamente diseñado por las autoridades educativas correspondientes, y no con un temario diseñado exprofeso para la presente investigación. Al finalizar ésta, se planteó al alumnado un problema relativo para ser abordado y resuelto de manera libre; posteriormente se hizo una revisión y clasificación de las formas generales en que los estudiantes trataron de dar respuesta a dicho problema, a partir de las cuales se escogieron las más ricas en información y se realizó una entrevista con dichos alumnos para conocer más a fondo su conceptualización sobre vectores, es decir, información que nos permitiera conocer la forma en que elaboraron sus hipótesis, manejaron, interpretaron y simbolizaron el concepto de vector. Finalmente se plantearon una serie de preguntas a los estudiantes elegidos mostrándoles figuras de apoyo y haciéndoles observaciones en función de sus respuestas para reorientar de manera guiada su concepción de vector.

Sujetos de estudio

El grupo de sujetos estuvo constituido por un total de 161 alumnos con edad promedio de 13 a 15 años de edad, que cursaban el segundo año de educación secundaria, y pertenecían a dos escuelas particulares de la ciudad de Querétaro. A todos ellos se les impartieron los mismos temas sobre vectores, con apego a los programas oficiales y por el mismo maestro. Además el diseño de problemas en las tareas y ejercicios de clase, fueron iguales. Finalmente los tiempos de cada sesión y el número de sesiones impartidas fueron los mismos.

Se decidió abordar el problema en este grado, dado que es donde se imparte el primer curso sobre teoría de vectores en todo el currículo escolar, cabe señalar que el docente a cargo de dicha enseñanza es el propio investigador del presente trabajo, quien desde hace cuatro años había observado la problemática que en la enseñanza de estos temas se da, dando origen a la presente investigación.

Procedimiento:

Como ya se mencionó, el desarrollo de la presente investigación constó de tres partes:

Como antecedente a la primera etapa cabe mencionar que se impartió al alumnado un curso tradicional sobre vectores, en éste, aparte de abordar los contenidos que marca el programa oficial, como son los métodos de resolución gráfica (triángulo, paralelogramo, suma o resta aritmética, polígono) y las condiciones que cada uno de ellos exige para ser empleado (punto de aplicación, dirección, sentido,), se hizo hincapié en el reconocimiento o búsqueda de tales requisitos y la ejercitación de dichos métodos. En todo momento, el docente a cargo insistió, a través de la resolución de situaciones diversas, en propiciar una actitud de comprensión más que de memorización de algoritmos de resolución, tales situaciones fueron problemas, en primera instancia aislados, y posteriormente de aplicaciones sencillas o planteamientos interconectados. Estos estuvieron diseñados, con la intención de motivar al estudiante con ejemplos relacionados con la naturaleza, tomando en cuenta situaciones físicas. Se llevó al estudiante, a través de situaciones simples hacia formulaciones abstractas, se indujo la imaginación, intuición, experimentación, el tanteo y las analogías con otros problemas, se ejercitó la traducción de información verbal al lenguaje matemático, se elaborarón esquemas o dibujos para propiciar la comprensión a través de los sentidos. Mediante cuestionamientos, evaluaciones breves y otras dinámicas de clase, se buscó la comprensión operativa del concepto.

En la primera etapa, después que el alumnado recibió dicho curso sobre vectores, en las condiciones y con las intenciones ya señaladas, se procedió a la resolución de una situación problema, la cuál se extrajo de una fábula presentada en la **Física Recreativa de Y. Perelman (1988)**. La elección de ésta, estuvo en función de la experiencia del docente, en el sentido de haber notado que éste tipo de situaciones fantásticas eran más atractivas a los estudiantes de esa edad, hecho advertido desde que se les impartía el curso general y corroborado por otros profesores. De este modo se dió satisfacción al requisito de que el problema de investigación en clase, fuera atractivo para la mayoría de los estudiantes, pudiendo en la medida de sus posibilidades adueñarse de él, y comprometerse en la solución del mismo, para lo cual habían adquirido conocimientos suficientes.

Con la intención de abandonar el esquema datos-operación-resultado y propiciar el desarrollo de otras estrategias de resolución, que enfatizarán el análisis y la validación de respuestas, se procedió de la siguiente manera:

Primeramente, se informó a los sujetos investigados sobre la intención del trabajo, se les dieron instrucciones y se les leyó lo siguiente: Un fabulista Ruso de nombre I. A. Krilov escribió esta fábula :

"Un cisne, un cangrejo y un lucio se pusieron de acuerdo para tirar de un carro cargado, que se encontraba abandonado en la playa. El cisne tiró hacia las nubes, el cangrejo hacia atrás, y el lucio hacia el agua, para ellos, liviana parecía la carga; pero sin embargo entre los tres no la pudieron mover, hasta ahora está en el mismo sitio. Moraleja: Cuando entre amigos no hay acuerdo, sus obras no tienen éxito" (Perelman, 1988)

A continuación se les preguntó si les parecía posible tal situación, es decir, si efectivamente, el carro no pudo ser puesto en movimiento tal y como lo argumenta el autor. En este punto, el docente trató de mantener una postura neutral, con la intención de no influir en la respuesta de sus alumnos, limitándose solamente a sembrar la duda de si la carreta se movería o no. Se procuró hacer todas las aclaraciones pertinentes respecto a que los estudiantes tenían que abordar el problema contestando lo que ellos consideraran correcto y que lo fundamentaran debidamente en función de su creatividad y conocimiento.

Para ello, tenían primero que formular por escrito, con sus propias palabras, la fábula presentada oralmente por el profesor. A continuación debían argumentar, ofrecer evidencia, representar gráficamente la situación, recurrir a notación matemática, operar conceptos físicos, todo esto según la estrategia que eligieran, a fin de fundamentar su aceptación o su rechazo acerca de la factibilidad de que la carreta no se moviera pese a que de ella tiraron tres animales. Básicamente las preguntas eran: ¿ustedes creen que la carreta se mueve o no? ¿qué explicaría que se moviera?

En la segunda etapa se recolectaron los trabajos, y se clasificaron de acuerdo a la semejanza existente en las formas de abordar la cuestión y proponer respuestas, la manera en que las formulaban y las operaciones que siguieron para proponer y justificar sus puntos de vista. Los protocolos que se juzgaron con mayor riqueza se seleccionaron para entrevistar a los sujetos que los produjeron.

La tercera etapa se desarrolló en dos partes. En la primera se interrogó por separado a los autores de cada trabajo en una entrevista clínica. Cada entrevista comenzó con una plática preliminar acerca del objetivo del trabajo. Esto se realizó con la intención de que el alumno recordara la situación-problema que se estaba abordando, así como a grosso modo, lo que había contestado.

En esa misma etapa, se desarrolló un interrogatorio con preguntas referentes al "por qué" de la metodología de resolución elegida y al fundamento de sus conclusiones. Conforme al método clínico la manera de cuestionar a los estudiantes fue diferente para cada caso y estuvo en función de las respuestas que iban ofreciendo. Cada cuestión planteada al estudiante fue orientada con la intención de detectar su concepto de vector y el grado en que era operatorio. Para esto se observaron con detenimiento las formas de interpretación, simbolización y operación a fin de desvelar su concepto de vector. Se consideró a la interpretación del problema como la forma de asignarle significado, de construirle un sentido. Se entendió por simbolización la representación mediante el lenguaje matemático-vectorial; en lo que respecta a la operatividad se consideró la habilidad para utilizar el concepto de vector en el planteamiento y resolución del problema. Se atendió en la observación tanto a la posibilidad de reconocer como producir operaciones con vectores. Además, de manera general, se puso atención a la capacidad del estudiante para identificar, comparar, analizar, sintetizar, clasificar, codificar, decodificar, diferenciar, representar y transformar ideas.

Finalmente, en la segunda parte de esta tercera etapa, el entrevistado fue nuevamente cuestionado, pero ahora de manera guiada, es por esta razón que la consideramos una etapa aparte, con respecto a la entrevista clínica. En esta, el investigador se auxilió con el enunciado original de la fábula, dándolo a leer en una primera instancia al alumno, y posteriormente, mostrándole una figura representativa de la situación descrita en el enunciado, (Figura 5.1) haciendo hincapié en el punto medular del problema, es decir, la posibilidad de moverse o no de la carreta en cuestión. En ésta se le hacía ver la representación gráfica e interpretación vectorial que al problema se le podía dar y la correspondencia que guardaba o no con sus interpretaciones mostradas tanto en su trabajo escrito como en la entrevista clínica. Cabe señalar que tanto las entrevistas clínicas como las guiadas, fueron grabadas en cinta de audio para ser estudiadas con detenimiento.

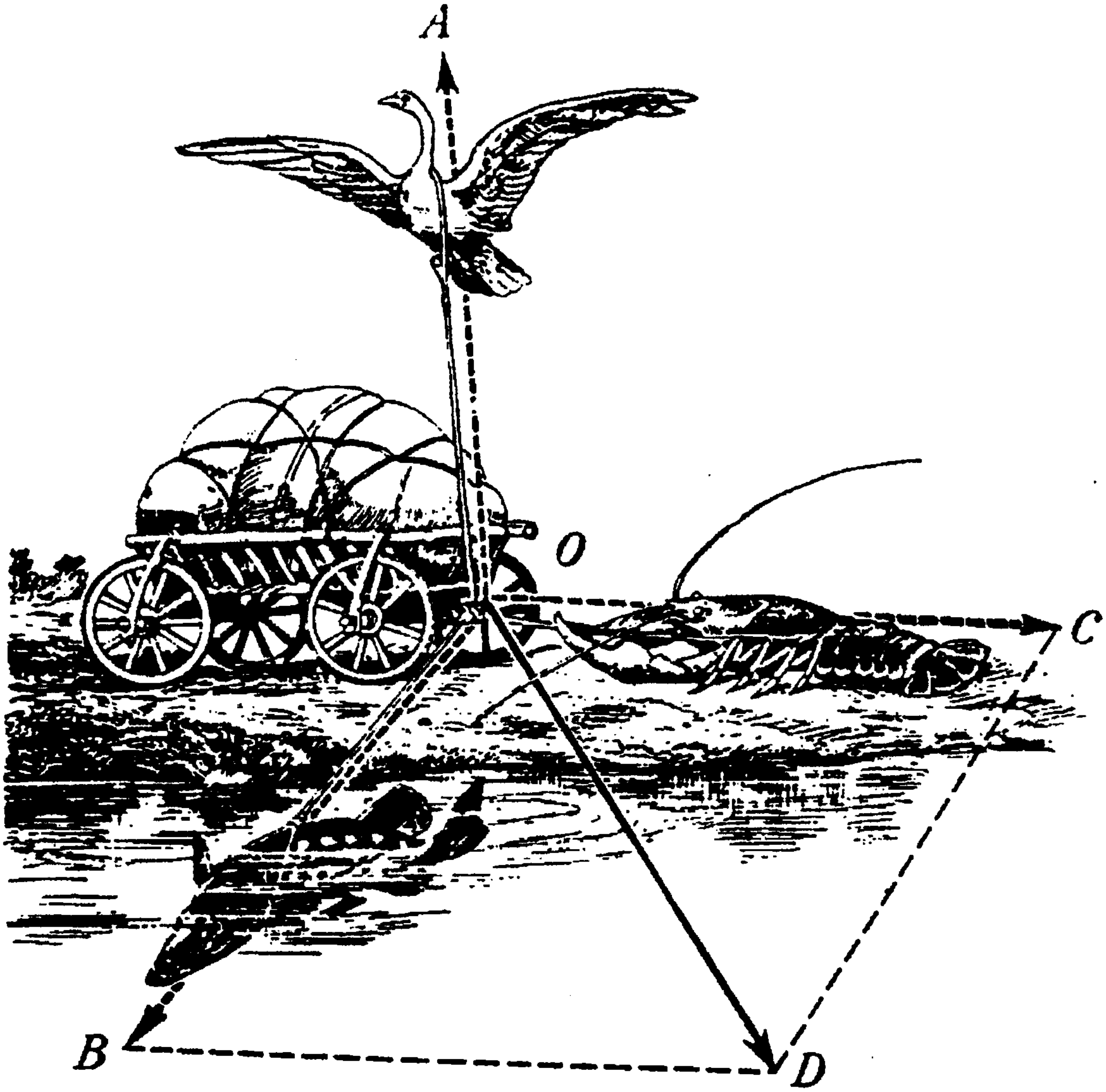


Figura 5.1. Representación esquemática y vectorial propuesta por Y. Perelman (1988)

El problema del cisne, el cangrejo y el lucio

A continuación, mostramos la solución que propone Y. Perelman (1988) a la fábula de I. A. Krilov, considerando a ésta como un problema de mecánica.

Apoyándonos en el enunciado de la fábula y la representación que Perelman hace de la misma (ver Figura 5.1) señalamos lo siguiente:

La fábula en cuestión plantea un problema de mecánica en el que hay que componer varias fuerzas que actúan formando determinados ángulos entre sí. Las direcciones de estas fuerzas vienen definidas por la propia fábula:

... el cisne tiró hacia las nubes, el cangrejo hacia atrás, y el lucio al agua.

Esto puede ser interpretado, considerando a una fuerza (la del cisne) dirigida hacia arriba, otra (la del lucio) hacia un lado, y la tercera (la del cangrejo) hacia atrás. Para simplificar denominaremos OA, OB y OC a estas tres fuerzas respectivamente. Por otro lado existen dos fuerzas más involucradas, esto es, el peso del carro cargado, que está dirigida verticalmente hacia abajo y la fuerza de fricción.

De acuerdo con el fabulísta "*el carro hasta ahora está en el mismo sitio*", esto quiere decir que la resultante de todas las fuerzas aplicadas a él es igual a cero. Respecto a este punto Perelman comenta que el cisne al tirar hacia las nubes ejerce una fuerza que no influye directamente sobre las del cangrejo y el lucio, sino que al estar dirigida en sentido contrario al de la gravedad, alivia o equilibra por completo el peso del carro, además de disminuir el rozamiento. Admitiendo para simplificar, este último caso, vemos que quedan únicamente dos fuerzas, OB y OC, las cuales forman un sistema angular o concurrente. La aplicación de métodos geométricos permite ver con mayor claridad el efecto resultante, y así justificar la respuesta obtenida. De acuerdo al sistema formado, no resta más que completar el paralelogramo cuya diagonal OD nos da la dirección y la magnitud del vector resultante, a la cual finalmente se le restaría la fuerza de fricción (si es que no se considera nula), obteniéndose así el vector resultante final. De este modo, podemos decir que el sentido y la magnitud del movimiento dependerá del ángulo de separación y de la magnitud de las fuerzas involucradas.

Por otro lado en el caso de que la fuerza OA no equilibrara completamente el peso del carro, el vector resultante, estaría dado por la suma de los efectos de los vectores involucrados, esto es, el vector arrojado por la diferencia entre el peso del carro y OA, OB y OC, generando de igual manera un vector OD, con magnitud dirección y sentido diferente obtenido en la explicación del párrafo anterior, finalmente un último caso puede pasar por alto tanto el peso del carro cargado como la fuerza de fricción, trabajando únicamente con un sistema vectorial formado por tres fuerzas, cuya suma arrojará de manera semejante a los casos anteriores un vector resultante OD; consideramos conveniente mencionar este último caso dado que el alumnado sujeto de estudio no conoce el peso ni la fuerza de fricción como magnitudes vectoriales, dado que dichos temas se imparten bajo otras consideraciones en momentos posteriores de su instrucción.

Finalmente, al obtener bajo estos argumentos un vector resultante, puede sostenerse que el movimiento es posible contrariamente a lo narrado por el fabulista.

Así pues, solamente existe un caso en el que carro no se movería, esto es, en aquella situación en donde la fuerza de fricción fuera mayor o igual a la del vector resultante OD, hecho que debe ser pasado por alto, dado que el enunciado menciona: "para ellos liviana parecía la carga", de donde es posible considerar que la fuerza resultante OD es mayor a la de fricción.

VI. PRESENTACION DE RESULTADOS

A continuación mostraremos los resultados obtenidos en la presente investigación. Cabe señalar que la manera de reportarlos, dependió íntegramente de las respuestas que en cada una de las etapas de la misma se fueron obteniendo.

Presentación y formulación del problema

En esta primera etapa, se presentan las diversas formas en que los estudiantes construyeron el enunciado de la situación problema que se les planteó. A partir de las mismas se decidió agruparlas en tres categorías, dado que el contenido de los enunciados resultó ser claramente diferenciable para ser clasificado en alguna de éstas. En la primera, mostraremos aquellos enunciados donde el estudiante introduce en de su propia redacción, algún término propio de vectores, particularmente desde una perspectiva geométrica (magnitud, dirección, sentido, punto de aplicación etc...). Términos, que como se puede constatar en la redacción original de la fábula, no existen explícitamente enunciados como tales. En la segunda categoría se muestran aquellos enunciados que son contextualmente más fieles a la fábula, en el sentido de que aún cuando no muestran términos vectoriales explícitamente enunciados en la redacción, como en la categoría anterior, no pasan por alto aquellas partes donde indirectamente se ponen en evidencia las condiciones del problema a analizar[1]. Finalmente, en una tercera categoría agrupamos aquellos casos, en los que en la redacción del enunciado, no aparece ningún término propio de vectores, directa o indirectamente insertado como en las categorías anteriores.

Para facilitar la lectura de los mismos, hemos suprimido todo aquello que en la redacción fue constante y sólo mostramos las partes de interés para el presente análisis.

[1]Distintos lados para hacer referencia a las direcciones y los sentidos.

a) Términos vectoriales directamente insertados en el enunciado:

i) Punto de aplicación: En los casos que se presentan a continuación mostramos la inserción en la redacción del problema de un elemento del que el alumnado echó mano, y que es propio de vectores: el punto de aplicación, punto del cual parten los vectores.

Rossana (12 años)

... le amarraron una cuerda del mismo punto de apoyo y empezaron a jalar y la carreta nunca se movió...

Cristian (14 años)

... entonces amarraron una cuerda de un mismo punto y jalaron sin conseguir nada...

Bruno (13 años)

...amarraron tres cuerdas a un mismo punto y jalaron hasta que el punto en que la carreta no se movió...

Ismael (13 años)

... y le amarraron cuerdas en el mismo punto, jalaron...

Paulina (13 años)

...se la llevaron pero jalaron de un *<u>mismo punto</u>* *tres cuerdas...*

Roberto (13 años)

...amarraron tres cuerdas en el *<u>mismo punto</u>* *y se la querían llevar...*

Lorena (13 años)

...así que amarraron una cuerda del *<u>mismo punto</u>* *y comenzaron a jalar...*

Ricardo (13 años)

...para llevársela cada uno ató una cuerda a un *<u>mismo punto</u>* *en la carreta y empezaron a jalar...*

Juan (13 años)

...así que cada quien la amarró con una cuerda del *<u>mismo punto</u>* *y ...*

Jorge Miguel (13 años)

...y la ataron de un *<u>mismo punto</u>* *y jalaron...*

ii) <u>Dirección del vector</u>: Otro de los elementos reconocibles por un número aún menor de alumnos, que en el caso anterior, es el de la dirección que han de tomar los vectores representados por la acción ejercida de los animales sobre la carreta. Recordando la redacción original: "*El cisne tiró hacia las nubes, el cangrejo hacia atrás, y el lucio hacia el agua...*", podemos darnos cuenta de que estas condiciones sugieren en el alumno la posibilidad de decir de manera general: "diferentes direcciones" y pasar de ello a la simbolización propia de las mismas como vectores, con condiciones específicas a satisfacer.

Anabel (13 años)

...pero el pez la quería jalar con una cuerda hacia el mar, el cangrejo amarró otra cuerda y se fue caminando como siempre, y el cisne amarró otra cuerda y se la quiso llevar volando, ninguno pudo ya que iban a <u>diferentes direcciones</u>...

Erick (12 años)

...cada uno de los animales ató una cuerda y jalaron en <u>direcciones diferentes</u> y no se movió...

Teresa (13años)

...tomaron una cuerda y la empezaron a halar pero se fueron en <u>distintas direcciones</u>...

Isaac (13 años)

...encontraron una carreta cada quien quedó en jalar la carreta, según su <u>dirección</u> de cada quién...

iii) <u>Dirección y punto de aplicación</u>: A continuación mostraremos aquellos casos en que los alumnos reconocen los dos elementos analizados con anterioridad y los insertan en la redacción propia que hacen del problema.

Abner (13 años)

...los tres de un mismo punto amarraron cuerdas a la carreta, pero fueron en diferentes direcciones y no pudieron llevársela...

Adriana (13 años)

...amarraron tres cuerdas en el mismo punto. El cangrejo jaló hacia atrás, el cisne, hacia arriba y el pez al mar. La carreta no avanzó porqué era jalada a distintas direcciones...

Guillermo (13 años)

...entonces ellos ataron tres cuerdas en un punto de la carreta y empezaron a jalar... ellos nunca pudieron mover la carreta, pues jalaban en diferentes direcciones.

Mariana (13 años)

...cada uno ató una cuerda al mismo punto, y comenzaron a jalar....tal como era su dirección.

iv) Fuerza: En este inciso, mostraremos dos casos donde llama la atención, la manera en que se reconoce la presencia de fuerzas como magnitudes vectoriales.

Eduardo (12 años)

...cada quien jaló para un lado y debido a la fuerza distinta de cada uno, se desplomó la carreta.

Krystal (13 años)

...pero no pudieron mover la carreta porque como era la misma <u>*fuerza*</u> *no se pudo mover nada...*

v) Este ultimo caso es único, pero decidimos que era conveniente mencionarlo, dado que la situación problemática a analizar por los estudiantes, y planteada de manera general bajo el estilo de la fábula, es traducida a la forma de un problema resaltando los elementos vectoriales reconocibles involucrados en la misma.

Paola (13 años)

...pero cada uno de ellos tenía <u>*diferente dirección*</u>, <u>*sentido*</u> *y su* <u>*fuerza*</u> *era contraria...*

De acuerdo con todo esto, cabe señalar lo siguiente:

En una primera instancia la inserción de algún elemento vectorial, sea este cualquiera de los señalados con anterioridad, revela y exterioriza claramente la necesidad del alumno de comprender cuales son, en términos de los mismos estudiantes, los "datos disfrazados", que de algún modo revela el enunciado del problema construido libremente por ellos mismos, con base en la idea central de éste. Aunado a esto, esos llamados "elementos" vienen a ser en realidad concepciones, o de acuerdo con Seeger (1985), conceptos protomatemáticos[2],

---

[2] En el ámbito de las matemáticas, Chevallard (1985) diferencia a los conceptos en paramatemáticos, protomatemáticos y matemáticos, según Seeger (1985), esta distición expresa una graduación que va de lo implícito a los explícito. Para él los conceptos paramatemáticos son aquellos que no son enseñados explícitamente aún cuando el profesor tiene conciencia de ellos, los conceptos protromatemáticos se refieren a habilidades básicas como las de descubrir patrones y semejanzas, puede decirse que son éstos quienes actúan como condiciones necesarias para la enseñanza de los conceptos matemáticos y paramatemáticos, pero ellos no son ni explícitamente enseñados, ni el profesor tiene conciencia de ellos, sólo se percata de ellos por ausencia, es decir, cuando no sirven como antecedentes para la enseñanza de conceptos matemáticos.

dado que fueron obtenidos por los estudiantes por medio de una comparación, en una primera instancia semántica y posteriormente operacional, entre los términos expuestos en la redacción del enunciado y dichas concepciones; poniendo en evidencia la igualdad operacional de los términos, y su utilidad como sinónimos para los fines deseados.

Este establecimiento de tales concepciones, por medio de la comparación, sólo pudo llevarse a cabo, a través del planteamiento de hipótesis previas, respecto a las condiciones de la situación a resolver, esto es, se forma un esquema anticipador sobre los requerimientos que la situación exige para ser entendida y resuelta, y desde tales concepciones es como se comienza a esbozar la posible estrategia de resolución, la cual hasta este punto, podemos suponer que estará orientada hacia el aspecto geométrico.

Si bien, el concepto de vector, cuenta con una serie de atributos claros y específicos que lo definen de acuerdo al carácter clásico de su estructura, estas concepciones vienen a ser precisamente esos atributos, puestos en evidencia por los estudiantes, es decir, de acuerdo a como los estudiantes plantean la situación a resolver; de una manera previa queda comprendida la necesidad de reconocer y exponer, tales concepciones para poder operar el concepto con posterioridad.

Tratando de tener un horizonte más claro respecto a la construcción del concepto, resulta interesante comentar, que dichas concepciones no parecen ser completamente claras, dado las distintas formas de nombrar al punto de aplicación, hecho que muestra la presencia de un concepto borroso, como si se tratara de una concepción de tipo probabilística, cuando en realidad, como ya se mencionó al tratar con un concepto científico, su concepción debería ser netamente de carácter clásico, es decir, con limites y atributos claros y diferenciables. (Pozo, 1989)

De acuerdo a lo comentado con anterioridad, sólo los matemáticos serían conceptos mientras que los otros dos serían concepciones.

b) Términos vectoriales indirectamente insertados en el enunciado:

Está clasificación se basa en el hecho de que si bien las concepciones vectoriales no aparecen como tales, es decir, explícitamente enunciadas, y con la nomenclatura propia de su naturaleza geométrica como en el apartado anterior, existen términos que son interpretados como sinónimos por los estudiantes, esto es, términos equivalentes que aparecen en la redacción y que dan un carácter borroso del concepto como si tuviera una estructura probabilística, pero que a su vez dan idea de los elementos necesarios para, en una primera instancia, plantear y posteriormente resolver la situación.

i) Direcciones y sentidos sin punto de aplicación.

Belinda (12 años)

...decidieron jalarla para repartirse el contenido de ella, el cisne la jalaba hacia arriba, el pez para el <u>lado contrario</u> que el cangrejo...

María (13 años)

...como iban jalando en <u>lados contrarios</u> nunca se movió la carreta. Moraleja: Cuando no hay acuerdo entre amigos todo sale mal.

Viviana (14 años)

Era una vez tres animalitos que encontraron una carreta llena de objetos útiles y decidieron llevarla con ellos y repartir el contenido. Primero el cangrejo ató la cuerda a la carreta y caminó hacia atrás, segundo, el ave ató la cuerda y se dirigió hacia arriba, tercero, el otro animalito ató la cuerda y se dirigió al lago o mar. Obteniendo como resultado que no se mueva la carreta. Moraleja: Sin comunicación, nunca nos vamos a entender.

Gerardo (13 años)

En la orilla del mar se encontraba una carreta con cosas útiles dentro de ella, después llegó un cangrejo, un lucio y un cisne, y se pusieron de acuerdo con el cangrejo en jalar la carreta. El cangrejo jaló hacia atrás, el lucio hacia el mar y el cisne emprendió el vuelo, pero no se movió.

Norma (12 años)

Esta era una vez un cisne, un lucio y un cangrejo, una vez vieron una carreta con cosas útiles, entonces a ellos se les ocurrió atar unas cuerdas a la carreta, y como no había nadie quien reclamara la carreta se la llevaban y luego se repartían las cosas. El cangrejo agarro su cuerda y la empezó a jalar a su estilo, o sea, hacia atrás, el cisne también tomó su cuerda y la agarró y la jaló hacia el cielo, y por último el lucio agarró su cuerda y la empezó a jalar hacia el mar, ninguno la pudo jalar y la carreta sigue en el mismo lugar.

Jimena (13 años)

Había una carreta en la arena que adentro tenía cosas útiles en eso un cangrejo, un cisne y un pez la vieron y se pusieron a decir que la jalaran y ya que la tuvieran se repartían las cosas adentro. El cangrejo, el cisne y el pez ataron a la carreta una cuerda y así jalaron, pero el cangrejo jaló como de costumbre para atrás, el cisne emprendió su vuelo y el pez nadó hacia el mar, jalaron y jalaron y la carreta no se movió.

Julio Cesar (13 años)

Había en el mar una canoa con muchas cosas útiles entonces el cangrejo que iba llegando, decidió llevársela, fue cuando llegó un pez y un delfín que *también pensaron llevársela. El cangrejo jaló por su lado, el pez hacia el otro, y el delfín hacia arriba.*

Octavio (13 años)

...el cangrejo por su naturaleza camina hacia atrás, el cisne levanta el vuelo hacia el cielo y el lucio hacia el mar y no consiguieron llevársela nunca.

José Gabriel (13 años)

Había una carreta en la playa, estaba llena de cosas útiles. Llegó un cisne, llegó un cangrejo y después un lucio. El cisne ató una cuerda a la carreta, también el cangrejo y el lucio. Empezaron a jalar y ni la pudieron mover. El cisne salto hacia arriba, el cangrejo jaló hacia atrás y el lucio se fue hacia el mar.

Como se puede constatar en las ilustraciones, indirectamente se hace referencia a dos condiciones necesarias para poder plantear el sistema vectorial derivado de esta situación, esto es, las direcciones y los sentidos, cuando se refieren a que cada personaje parte a lugares distintos. En este punto es conveniente aclarar, que si bien en el enunciado mismo de la fábula no se encuentran explícitamente redactados dichos términos vectoriales, esto no quiere decir que no puedan ser reconocidos como tales, cuando se tiene una concepción clara de ellos,

ii) Punto de aplicación, direcciones y sentidos.

Ludy (13 años)

Era una vez una carreta que estaba llena de cosas útiles y que estaba sola, unos amigos que eran un cisne, un pez, y un cangrejo la encontraron y no vieron a nadie cerca, estaba sola y ellos decidieron llevarse cada uno de ellos ató *la cuerda donde el otro, y el cisne voló, el cangrejo se fue para atrás y el pez hacia el agua y ninguno de los tres pudo mover la carreta.*

Este segundo caso es único. En él de manera semejante al inciso anterior en términos familiares para el estudiante se implanta la condición que indica, las direcciones y los sentidos, y además una expresión que hace referencia al punto de aplicación.

c)Ausencia de términos vectoriales.

Daniel (13 años)

Había una carreta sola en la playa con cosas útiles se acercó un cangrejo, un cisne y un pez dijeron: hay que llevárnosla y luego nos la repartimos, ataron tres cuerdas, y se la llevaron.

Raquel (13 años)

Estaba una carreta abandonada en la playa, de pronto un cangrejo la vio, después se acercó un cisne y un pez; el cangrejo les dijo que se lo llevaran y luego que se repartieran su contenido.

Juan Carlos (13 años)

Esta una carreta a la orilla del mar, en eso tres animales llegaron: un cangrejo, cisne y un pez. Es eso dijo el cangrejo, vamos a llevarnos la carreta y nos repartimos las cosas. Después amarraron cuerdas y jalaron pero nunca la pudieron mover.

Alan (12 años)

Un día había una carreta en la orilla de la playa entonces llegó un cangrejo después del cielo bajo un cisne y después llegó un pez, entonces el cangrejo les dijo que se llevaran la carreta y que después se repartieran el contenido y todos estuvieron de acuerdo y agarraron una cuerda y empezaron a jalar pero no la pudieron mover y la carreta se quedó en el mismo sitio

Federico (13 años)

Un cangrejo, dijo a un pez y a un pato, vamos a llevamos la carreta y nos repartimos las cosas. Jalaron pero no la pudieron mover.

Gustavo (12 años)

Había una vez un carro en la playa, llegó un cangrejo un cisne y un pez, el cangrejo les dijo que se llevaran la carreta y estando de acuerdo la arrastraron pero no la pudieron mover.

Estos casos, muestran en la redacción a los elementos involucrados de una manera muy desarticulada, hecho que pone en evidencia su dificultad para manipular y percibir hechos y contextos poco tangibles y más abstractos, dificultad característica de un pensamiento concreto, lo que en una primera instancia no ayuda a la formación del concepto a analizar. Por otro lado, resulta interesante, el hecho de que en los enunciados, no se hace referencia al lugar donde ha de atarse la cuerda, es decir, lo que para los estudiantes del apartado anterior resultó ser reconocido como el "punto de aplicación", condición imprescindible para el trazo de un sistema vectorial, para los de éste, pasó desapercibido. Así mismo, podemos darnos cuenta, que de manera semejante tampoco se advierten las direcciones y los sentidos, como se verá en las siguientes ilustraciones donde se ponen en evidencia de manera indirecta.

Como se puede constatar en las ilustraciones mostradas sobre los casos representativos para el segundo apartado; las formas en que los alumnos advierten términos vectoriales y la concepción que tienen de ellos no es tan clara como en el primero, esto es, mientras en el primer apartado el estudiante, como ya se mencionó, intuye y precomprende las condiciones necesarias para el análisis del problema, las reconoce como términos vectoriales y las inserta con los límites que el estima pertinentes en la redacción, los del segundo apartado se mantienen más apegados a la redacción original del enunciado pero sin dejar de lado una serie de términos, que si bien no son tan precisos, como en el apartado anterior, no pasan por alto las condiciones de carácter geométrico que impone el problema en cuestión.

A este respecto podemos decir que el esquema anticipador formado por estudiantes cuyas aportaciones cayeron en este apartado, es muy pobre, esto es, aún cuando no existe una carencia total de hipótesis previas que justifiquen la inserción de términos semejantes que en mayor o menor grado se mencionan, la naturaleza de éstos resulta ser difusa y de límites borrosos, como si inconscientemente se le restara formalidad al concepto mismo, advirtiendo en él una estructura de naturaleza probabilística, esto es, más apegada a lo cotidiano, hecho que aunado a la dificultad para manipular relaciones y percibir contextos menos tangibles característicos de un pensamiento concreto nos da la idea sobre la dificultad para construir el concepto en cuestión.

De acuerdo con esto, para Vygotsky (Pozo, 1989) la presencia de estos términos tiene que ver con la formación de complejos o agrupaciones de rasgos comunes, en este caso rasgos semánticos y operativos, mientras que Seeger (1985) les daría la calidad de conceptos paramatemáticos, dado que si bien estos términos semejantes no son enseñados explícitamente como tales, su valor y alcance funcional, permite que la construcción del concepto ocurra a través de la maduración de los mismos.

Finalmente, presentamos el porcentaje de alumnos que de la totalidad de los sujetos entrevistados cayeron en cada una de las dos situaciones, (ver Cuadro 6.1) mostrando que el grueso del alumnado no fue capaz de reconocer el carácter vectorial de la metodología de resolución que el problema exigía, y por lo tanto, no fue expuesta desde la redacción del enunciado (ver Figura 6.1).

Cuadro 6.1. Formulación del problema.

Condiciones observadas	Porcentajes
Términos vectoriales directamente insertados en el enunciado.	18.6%
Términos vectoriales indirectamente insertados en la redacción del enunciado.	64.6%
Ausencia de términos vectoriales.	16.8%

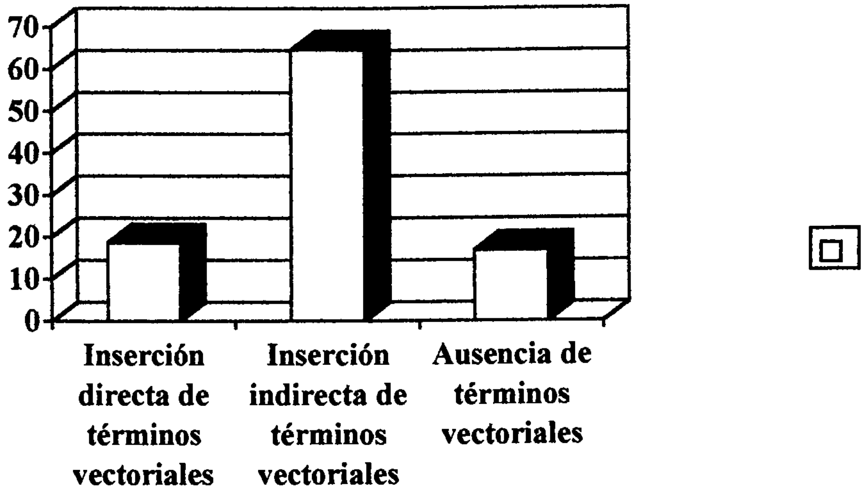


Figura 6.1. Formulación del problema.

Interpretación del problema y posible solución

En esta segunda etapa se pretendió indagar la manera en que el estudiante articulaba, con sus propios medios, la posible estrategia de resolución a la situación planteada, esto es, en una primera instancia, la manera en que interpretó su propio enunciado y posteriormente la forma en que esquematizó y/o representó las condiciones, advertidas por él mismo, en la situación a resolver, así como la explicación que sobre éste proceder dio.

a) Construcción gráfica de la solución:

De acuerdo con la metodología, después de haber planteado el problema en sus propios términos, los estudiantes debían construir un esquema que representara tal situación y a partir del mismo tratar de resolver, lo que se les pedía; esto es, si los personajes de la fábula podían mover o no la carreta.

A partir de los resultados obtenidos, dado su morfología general, decidimos agruparlos en tres clases. Consideramos a la clase A, formada por todos aquellos dibujos y representaciones, donde, a partir de un esquema general, se elaboró un sistema vectorial, si bien tal cual, no se le da solución ni mayor interpretación, esta forma de traducción del esquema al sistema, muestra el reconocimiento de elementos vectoriales en la situación planteada desde la perspectiva del esquema mismo elaborado y traducido por el propio estudiante.

En lo que llamamos clase B, agrupamos a aquellos casos, que no sólo muestran el esquema de la situación y su traducción al sistema vectorial, sino que por así decirlo, llegan más lejos, en el sentido de que los estudiantes establecen condiciones particulares, que utilizan tanto para comprender mejor el problema como para sustentar sus respuestas posteriores.

Para facilitar la presentación de los resultados de esta etapa, hemos decidido, mostrar sólo algunos de los esquemas más representativos de la clase A, los de la clase B serán mostrados en su totalidad, y los correspondientes a la clase C serán excluidos, dada la ausencia de representación alguna. En el apéndice de la presente investigación, se muestran las figuras representativas a dichas clases.

Así como en la etapa anterior se pretendió conocer el grado y la forma en que el estudiante reconoce el concepto de vector, orientando la atención a la manera de considerar sus términos en la redacción del problema, sustentado en el planteamiento de hipótesis previas y el establecimiento de un esquema anticipador de la situación propio de un razonamiento de tipo formal, necesario para manipular el concepto en cuestión, dada sus características; en esta etapa, la atención estará orientada, como una continuación de la anterior, a la forma en que el estudiante esquematiza dichos términos reconocibles para él. A este respecto es conveniente aclarar que dicha esquematización puede ser tanto de naturaleza algebraica como geométrica, lo cual dependerá del esquema de asimilación del que disponga el sujeto.

A continuación haremos hincapié y discutiremos algunos puntos importantes que sobre los esquemas elaborados pudimos detectar, en el presente análisis.

i) Clase A: Representación esquemática y traducción al lenguaje vectorial.

Como puede constatarse en las figuras A.1-A.8 del apéndice, resaltan los siguientes elementos comunes:

1.- Correspondencia entre representaciones: Las representaciones hechas en las figuras A.1 a A.6 parten de un esquema pictográfico, el cual, es traducido fielmente en un sistema vectorial; hecho que no es corroborado en las figuras A.7 y A.8 donde, aún cuando se establece de manera semejante a los casos anteriores un esquema pictográfico, en el momento de traducirlo a un sistema vectorial, ya no existe correspondencia con los ángulos. A razón de esto, podemos decir que ésta diferencia puede deberse a la ausencia de construcción conceptual de los antecedentes, es decir, no puede intuirse la metodología de carácter vectorial a ser empleada desde el planteamiento mismo del problema, si ni siquiera se cuenta con una concepción clara de los términos que anteceden a la formación del concepto, en este caso el ángulo, que como ya se comentó en el marco teórico, dependiendo del ángulo será el sistema vectorial y dependiendo de este último, la metodología operacional. Este hecho puede estar sustentado en el muy marcado razonamiento de carácter concreto, puesto en evidencia en la forma de hacer las representaciones donde el sujeto no advierte la diferencia entre las mismas.

2.- Representación de términos vectoriales: Así como en la sección anterior fueron puestos en evidencia los términos vectoriales que el estudiante reconoció e insertó en la redacción directa o indirectamente, en este punto, dicha evidencia la expondrán las representaciones esquemáticas mismas. Como se puede corroborar en las figuras A.1 a A.8, tal como lo marca la teoría misma, el estudiante tiende a apoyarse en una representación de carácter geométrico, donde claramente muestra el reconocimiento del punto de aplicación, como el sitio de donde en común parten los vectores, las direcciones, como las líneas rematadas con la punta de flecha indicando el sentido y el ángulo de separación. Aún más, también se pueden advertir, en la diversidad de representaciones, partes medulares del problema como son las diferentes direcciones, puestas de manifiesto en los distintos ángulos de separación. Cabe señalar al respecto, que para el caso particular del problema a trabajar en la presente investigación, la representación no implicaba en sí, mayores dificultades, por otro lado, la manera de representar del estudiante, muestra la forma, en que éste traduce el lenguaje escrito, primero al pictográfico y de éste, al vectorial. En este proceso de traducción, el grado de completez en la representación, va aunado al grado de reconocimiento de lo representable, esto es, el estudiante selecciona, apoyado en sus concepciones, qué del enunciado puede ser esquematizado y en un segundo momento qué de dicho esquema puede ser llevado a términos vectoriales representables y que no, lo que de algún modo da idea de la búsqueda de los posibles datos que el enunciado aporta, es decir, seleccionan del todo lo que reconocen como términos vectoriales con base en la concepción, como ya se mencionó, que de éstos tengan. De manera semejante al punto anterior, pensamos que esta gradación depende también del grado de madurez en la concepción que de los antecedentes del concepto se tengan.

3.- El manejo de literales para nombrar a los vectores: En cada una de las representaciones elaboradas por los estudiantes, pudimos advertir formas particulares para nombrar a los vectores en los sistemas terminados, así pues, decidimos agruparlas en tres categorías básicas. Primeramente, aquellas en donde no se les da nombre alguno a los vectores, ilustradas en las figuras A.6 y A.7, segundo, aquellas en donde se les da el nombre de los personajes de la fábula, dada la acción que estos ejercen, (figuras A.2 y A.4) y tercero, aquellas en donde se emplean letras del alfabeto para designarlos (figuras A.1, A.3, A.5 y A.8). Hemos decidido mostrar estos resultados de esta manera, dado que dan idea del grado con que los estudiantes intuyen la forma en que han de abordar la situación a ser resuelta, esto es, en la primer categoría, no se hace explícita mayor referencia sobre los vectores dibujados, es decir, no se advierte más información sobre ellos, en la segunda, aunque en forma poco clara, en los nombres se indica que cada uno corresponde a una acción distinta, y finalmente en la tercera, las literales que utiliza el estudiante, dan idea, de la representación que éste hace sobre las magnitudes, poniendo en claro que se trata de magnitudes distintas, indicándolo con letras diferentes y además que el valor de dichas magnitudes se desconoce, a este respecto cabe señalar que aún cuando estas ideas no aterrizan, muestran claramente el grado de abstracción que sobre la situación a resolver hace el estudiante, dando tratamiento formal a la información que como datos reconoce y representa, aún más, en este punto se advierte con mayor claridad, como el estudiante, dando sus primeros pasos a la abstracción en este terreno, va esbozando a partir de un planteamiento geométrico de la solución, un posible planteamiento algebraico de la misma, esto es, da el carácter de "incógnita" a resolver, a la solución que se le encomendó buscar. Así pues, aún cuando tal planteamiento no se llevó a cabo, las tres categorías mostradas en el presente apartado, de manera semejante a los apartados anteriores, dan clara idea del carácter gradual con el que el concepto es adquirido por los estudiantes, así como las dificultades que enfrentan para continuar, en esas distintas etapas, y que sólo pueden ser libradas, de acuerdo con Piaget (1969) por medio del desequilibrio o conflicto cognoscitivo que con posterioridad genere el aprendizaje del concepto.

ii) Clase B: Establecimiento de condiciones particulares y planteamiento de la solución.

En ésta segunda clase mostraremos los casos particulares (ver apéndice) de aquellos estudiantes, que si bien cumplieron con las condiciones expuestas en la clase A, llegaron aún más lejos, analizando con mayor profundidad la situación a abordar.

1.- <u>Establecimiento de condiciones particulares</u>: Al hablar de establecer o imponer condiciones particulares, nos referimos a aquellos casos en que el estudiante, se ve en la necesidad de acotar algunos de los datos del problema con ángulos o magnitudes particulares, que él considera le ayudaran tanto a entender, como a resolver mejor el problema, lo cual muestra un retroceso en la forma de plantear su razonamiento, por la necesidad de trabajar en lo concreto y al no poderlo hacer en lo abstracto; los casos ilustrados en las figuras A.11 y A.12, son un claro ejemplo de esto, en el primero a manera de puntos cardinales el estudiante impone ángulos particulares, mientras que en el segundo los signos indican la posible utilización de un sistema de ejes coordenado, intuyendo, así, una resolución de carácter algebraico para la situación en cuestión; condiciones que como puede verse no resultaron ser suficientes para poder continuar con lo que sería el planteamiento de la posible solución. En relación con esto mismo, como se puede observar en las figuras A.9 y A.10, en el sistema vectorial se encuentran magnitudes particulares para los vectores, esto es, valores para las fuerzas ejercidas por los personajes. Si bien el estudiante ha podido advertir a *la fuerza* como una concepción vectorial involucrada, no ha podido concebir una situación sin un valor particular para las magnitudes. Resulta de sobre manera interesante, el hecho de que ambos estudiantes imponen el mismo valor para las tres fuerzas y plantean un sistema vectorial semejante. Independientemente de que si realizaron el razonamiento juntos, o no, ambos, posiblemente no advirtieron (dado que no lo argumentaron) que las fuerzas colineales de su sistema, al tener la misma magnitud y un ángulo de 180º se anulan mutuamente, quedando por consiguiente una sola fuerza que pondría en movimiento a la carreta. Independientemente de la ausencia de argumentos que justificaran tal proceder, pensamos que la imposición de magnitudes iguales no es consecuencia de un simple tanteo o una mera casualidad, dado que de haber sido así, por tanteo los valores posibles tendrían mayor probabilidad de ser diferentes, además de que tal operación propia de una razonamiento concreto, contradice, el grado de formalidad con que fue esbozado el planteamiento de la solución, esto es, los estudiantes, debieron haber planteado una serie de hipótesis previas respecto a la resolución geométrica del sistema, imponiendo condiciones de colinealidad en las fuerzas e igualdad en las magnitudes, e intuyeron el efecto de tales condiciones en la resultante. Finalmente, estas ideas no son aterrizadas, en la resolución geométrica y sus efectos tampoco son interpretados, quedando el planteamiento en estado estacionario sin ocurrir el aprendizaje completo del concepto.

2.- Planteamiento e interpretación de la solución: En los casos que se muestran a continuación, se ilustra la manera en que los estudiantes, combinando tanto métodos algebraicos como geométricos, plantean la posible solución, en términos de operaciones. Cabe señalar que éste apartado constituye la fase terminal, por así decirlo, de los razonamientos que sobre la resolución gráfica hicieron los estudiantes, si bien no existe un caso en que estos contestaran adecuadamente, aún habiendo hecho un razonamiento correcto y habiendo llegado a la solución, estas situaciones nos informan tanto de los razonamientos elaborados como de los alcances y límites que tuvieron, respecto al planteamiento de las operaciones. Así pues, el caso ilustrado en la figura A.13, gradualmente nos permite comenzar con el análisis operatorio. En éste, a partir del sistema vectorial, el estudiante toma dos vectores e indica la operación de suma, cabe señalar que por métodos geométricos esa suma en realidad es incorrecta, pero en contraposición con este error operacional, que nos advierte la falta de reconocimiento del sistema como angular y la aplicación del método del paralelogramo para realizar su suma; esta operación nos indica la forma en que el estudiante precomprende que el efecto final de las tres fuerzas sólo puede estar dado por la suma de cada uno de los efectos por separado, esto es, el estudiante advierte el procedimiento a seguir, pero no lo concretiza. De manera semejante, los casos ilustrados en las figuras A.14 y A.15, hacen el planteamiento de la operación a realizar. En estos casos el autor escribe en términos algebraicos: $\underline{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{r}}$, o lo que es lo mismo: para encontrar la solución o el efecto resultante, es necesario sumar los tres vectores. Así pues, tal concepción algebraica no aterrizada en acciones concretas, porque aún teniendo el sistema vectorial correctamente dibujado a un lado de su planteamiento, la operación inteligentemente indicada, no es llevada a cabo. En los casos que siguen (ver figuras A.16 y A.17), sí se realiza la operación, pero no se da interpretación del resultado. Como se puede constatar en el primero, advirtiendo un sistema concurrente, el estudiante emplea el método del paralelogramo y realiza la suma $\underline{\vec{a}+\vec{b}=R_1}$ pero posteriormente no efectúa acción alguna con el otro vector ni da interpretació del resultado obtenido. En el segundo, apegado al esquema el estudiant plantea un sistema vectorial, y dado el acomodo de estos y la operación qu realizó, pone de manifiesto la advertencia de un sistema concurrente y realiza l suma dos a dos empleando el método del paralelogramo, esto es, obtiene do resultantes, a partir de las sumas: $\vec{b}+\vec{c}=R_2$ y $\vec{a}+\vec{c}=R_1$, lo procedente en est caso, quizá sería sumar ambas resultantes y obtener una tercera qu sustentaría, la conclusión de que la carreta puede ser movida; hecho que no e llevado a cabo, dado que como lo muestra la figura, el estudiante no pud continuar, dejando su planteamiento en esos términos. El último caso de est sección, comprende a los anteriores, desde el punto de vista operativo, y d manera semejante, teniendo la solución el estudiante no es capaz de percibirl y argumentar sus conclusiones. En este (figura A.18), en un primer momento, e sujeto traduce fielmente su esquema a términos vectoriales, posteriorment plantea la suma de las tres fuerzas a la que decidió darles las misma magnitudes (3N), emplea una escala adecuada, y descompone la sum principal: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ en dos sumas parciales $\vec{a}+\vec{c}=\vec{r}$ y $\vec{r}+\vec{b}=\vec{x}$, cabe señal que este estudiante decide operar empleando una combinación de métod algebraicos y vectoriales, al plantear la suma algebraica y posteriormen sustituir los valores que va obteniendo en la suma geométrica. Finalment encuentra la resultante de las sumas parciales y pasando por alto este hech apela a su sentido común y termina contestando que el movimiento no e posible.

Así pues, en estas ilustraciones, puede constatarse, a través d planteamiento gradatorio que hemos presentado; como en menor o mayor grado estudiante advierte y asimila las redes propias de la estructura misma d concepto, pero que en distintas etapas de esta gradación, el alumnado se enfren a dificultades para continuar, remitiéndose, ya sea a no dar respuesta, detener en algún momento o a encontrar la solución y no darse cuenta de ello. A es respecto puede decirse, que el hecho de que los estudiantes puedan librar o no tales obstáculos parciales, depende en gran medida, de la solidez del esquema de asimilación que sobre el concepto en cuestión tengan; y por ende de las concepciones de los términos del mismo; lo que exige, para ser logrado, un mayor grado de abstracción sobre la situación; propia del concepto mismo. (Pozo, 1989).

En el cuadro 6.2 se muestran los porcentajes de los estudiantes que cayeron dentro de alguna de las clases analizadas con anterioridad. Como puede verse el grueso del alumnado, se mostró sin elementos para abordar el problema dado que no respondieron nada respecto al mismo (ver gráfica 6.2).

b) Verbalización de la construcción de la solución:

En este apartado presentaremos la manera en que el alumnado respondió, en forma libre y personal con respecto a la posibilidad de dar solución al problema en cuestión. En función del contenido de las respuestas obtenidas decidimos clasificarlas en cuatro categorías, siendo estas las siguientes:

1.- Ausencia de respuesta.
2.- Carencia de datos suficientes.
3.- Desigualdad en las fuerzas como criterio de decisión.
4.- Consideración de casos particulares.

1.- <u>Ausencia de respuesta</u>: Donde un número de estudiantes no dio respuesta alguna.

Cuadro 6.2. Construcción gráfica de la solución.

Condiciones observadas	Porcentajes
Representación de clase A:	4.9%
Representación de clase B:	6.2%
Representación de clase C:	88.8%

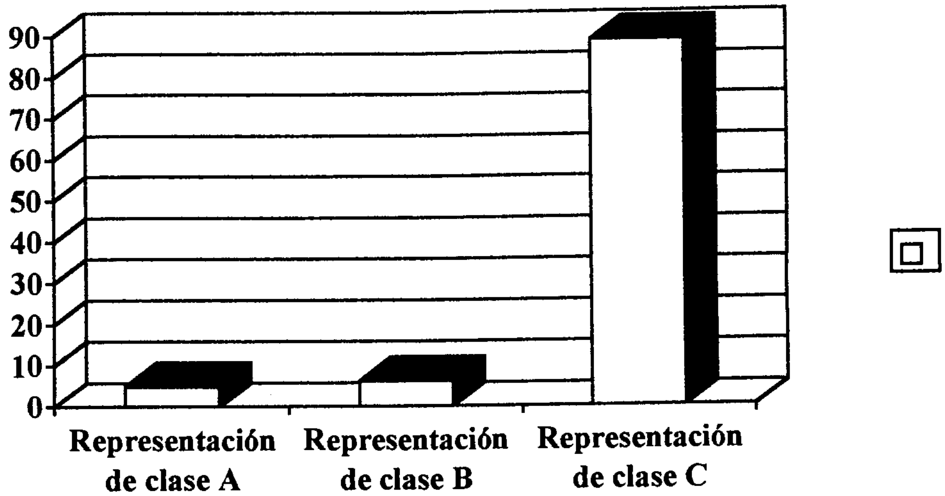


Figura 6.2. Construcción gráfica de la solución.

2.- Carencia de datos suficientes: Donde el alumnado adscrito indirectamente a este grupo, argumentó que la situación a analizar no podía ser resuelta, dado que para unos, no existía dato alguno, mientras que para otros éstos eran insuficientes.

Octavio (13 años)

No se sabe no hay suficientes datos, tal vez no puede mover la carretilla pues el cangrejo no lleva suficiente fuerza para impulsar; pero el cisne le ayuda , el cisne al impulsar hacia el norte pero el lucio contrarresta el esfuerzo del cangrejo y la fuerza del cisne y otro factor importante es el peso de la carretilla...por lo que no se sabe.

Juan Luis (13 años)

No se sabe. No son suficientes datos

Gabriel (13 años)

Mi conclusión es: No se sabe exactamente. Falta la fuerza que ejerce cada uno.

Ricardo (13 años)

Faltan datos

Octavio (13 años)

No sé porque no hay magnitud, ni dirección, además, cualquiera de los tres animales puede moverse a cualquier dirección, en cuanto a su sentido... Es decir, el cangrejo puede moverse en cualquier parte de la zona terrestre hacia el interior.

Al igual con el pato y el pez

Abner (13 años)

No sé porque tal vez se mueva un poco pero es más probable que no porque no hay magnitud y van en diferentes sentidos y como no se ponen de acuerdo cada quien ... Se moverán según su fuerza la cual no dice y además no dice que dirección, o tal vez sí.

Héctor (13 años)

... no dice a la dirección que van...

Así pues, como se puede constatar, en términos propios del alumnado, el hecho de no exhibir, en forma clara y concreta, la magnitud de los parámetros involucrados, trae como consecuencia que no se puede determinar si la carreta se mueve o no. Si bien el estudiante, hace una toma de conciencia de los términos vectoriales involucrados, necesarios y suficientes, para el planteamiento posterior de una estrategia de resolución, ésta es, por así decirlo, pobre e incompleta, dado que no articula, significados, relaciones y concepciones de éstos. Estas respuestas nos dan idea de la magnitud del esquema de asimilación que estos sujetos manejan, respecto al concepto, lo que a su vez sustenta la dificultad que implica para ellos, evolucionar a un razonamiento de naturaleza hipotético-deductiva, como el que exige la situación en cuestión.

3.- <u>Desigualdad en las fuerzas como criterio de decisión</u>: Donde, como se podrá constatar los estudiantes tienden a sostener argumentos apoyados en términos de sentido común.

Héctor (13 años)

No se mueve porque ellos necesitarían tener más peso que el de la carreta. No sé, porque la mayor fuerza sería de el ave y el pez.

Ricardo (14 años)

No se especifica la fuerza de cada animal.

Luis Fernando (13 años)

Sí se puede mover la carreta porque depende de la fuerza de cada uno.

Diego (13 años)

No se moverá la carreta debido al desacuerdo en sentido y el peso de la carreta fuese imposible que el ave que es la única que se dirige al pueblo lograra obtener la fuerza tan sólo para anular la fuerza de sus amigos y más imposible aún al ver que debe obtener la fuerza para mover una carreta llena de objetos útiles.

José Héctor (13 años)

Sí se mueven, porque el cisne tiene más fuerza que los otros dos.

Dulce (13 años)

Se puede mover la carreta aunque no mucho, pienso que toma más fuerza el cisne al volar, que el cangrejo y el pescado, por lo que sí se mueve aunque sea poco.

Oscar (13 años)

No se puede mover la carretilla pues el cangrejo no lleva suficiente fuerza para impulsar; pero el cisne le ayuda a impulsar hacia el norte pero el lucio contrarresta el esfuerzo del cangrejo y la fuerza de cisne y otro factor importante es el peso de la carretilla.

4.- <u>Consideración de casos particulares</u>: En donde el alumnado fija determinadas condiciones, construyendo un caso particular de la situación.

Este apartado es muy semejante al referido en el punto uno de la clase "B" para la solución gráfica, es decir, en dicho apartado, los estudiantes gráficamente implantaron condiciones que ellos consideraron necesarias, como ya se dijo, tanto para entender mejor el problema como para poder plantear la solución. En este apartado, la inserción de tales condiciones, se pone de manifiesto en la redacción de la solución propuesta por los estudiantes; dado que de ello obtenemos y corroboramos la misma información, sólo presentamos los casos más representativos.

Berenice (13 años)

No se puede porque el pescado va hacia el mar y el cangrejo va para atrás y el cisne va para el este.

Raúl (13 años)

El cangrejo jaló hacia el sur, el cisne hacia el norte y el pez hacia el oeste, lograron mover la carreta si los tres usaron la misma fuerza.

Myrna (13 años)

Sí se mueve porque las fuerzas del pez y del cangrejo son negativas y la suma da cero y entonces el cisne tiene que moverla un poco

Julian (13 años)

Sí hay movimiento para arriba. Pues el vector resultante debe dar hacia arriba.

Jimena (13 años)

Pues yo creo que se mueve, por que lo jalan y debe moverse. Al jalar debe moverse por la fuerza que ejercen los animales en la carreta.

Finalmente para concluir ésta sección mostramos los porcentajes (ver cuadro 6.3) obtenidos en esta fase de la investigación (ver gráfica 6.3).

Cuadro 6.3. Interpretación del problema y propuesta de solución.

Condiciones observadas	Porcentajes
No responden	14.8%
Faltan datos	19.8%
Sentido común	19.8%
Imposición de condiciones	45.6%

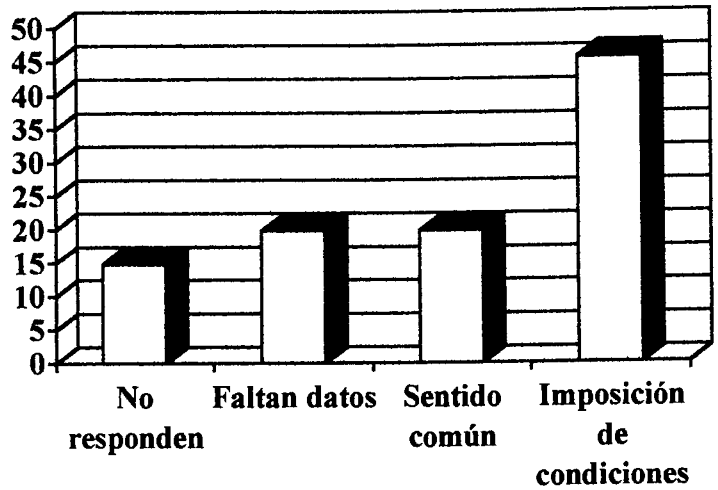


Figura 6.3. Interpretación del problema y propuesta de la solución.

III.- Entrevistas clínicas

Como ya se mencionó en la metodología, esta tercera etapa de la investigación fue dividida en dos partes, para facilitar su desarrollo e indagar con mayor profundidad los procesos de construcción del concepto que el estudiante desarrolló. En la primera se anota la explicación que va dando el alumno de su propio trabajo y como va respondiendo desde su lógica propia a las interrogantes que el entrevistador le plantea. En la segunda, después de haber visto la figura correcta, y haber leído el enunciado correcto y completo (ver apéndice), da su punto de vista al respecto. De manera semejante a las otras secciones, nos limitaremos a mostrar aquellos casos, que consideramos, dieron mayor información para el presentan análisis.

a) Representación de la solución:

Alfredo (14 años)

Yo pienso que la carreta no se puede mover de su lugar porque los tres animales pudieron ejercer la misma fuerza y el efecto no se puede ver en la carreta.

¿Porqué dices que ejercen la misma fuerza si en ninguna parte del problema lo dice?

pues...(se torna pensativo).

¿Porqué se te ocurrió esa condición?

no, pues no, no dice.

No dice, pero ¿por qué dices que jalan con la misma fuerza? O sea, ¿porqué se te ocurrió poner esa condición?

No contesta y continúa viendo su trabajo.

Bueno, también impones puntos cardinales, norte, sur, ¿por qué crees que debe ser así?

Lee y se queda pensativo.

¿Crees tú que bajo estas condiciones sería más fácil resolver el problema?

Dice "sí" con la cabeza.

Ricardo (13 años)

¿Crees tú que se pueda mover la carreta?

No porque todos ejercen la misma fuerza en la misma dirección.

¿En qué parte del enunciado dice eso?

Lee y cae en duda.

¿En qué parte del enunciado dice que tienen la misma fuerza?

Donde dice que ejercen una fuerza.

Los casos de Alfredo y Ricardo, muestran en un primer momento, una asimilación incompleta de las condiciones del problema, dado, que sin bien advierten la acción de la fuerza, pasan por alto el arreglo que pudiera tomar el sistema vectorial y por lo tanto, la justificación que éste pudiera dar a su respuesta. En un segundo momento, frente a los cuestionamientos, entran en un estado de conflicto con respecto a sus propias reflexiones, no alcanzan a coordinarlas y muestran dificultad para asimilar y verbalizar su respuesta.

Mirna (13 años)

Mi respuesta es que sí se mueve porque el pez y el cangrejo jalan hacia lados opuestos y entonces la fuerza se anula.

¿En qué parte del enunciado dice que esos dos animales jalan hacia lados opuestos?

En donde dice: el cisne jalaba hacia arriba, el pez hacia un lado y el cangrejo hacia el otro.

¿Esto significa que son lados opuestos?

No forzosamente, pero yo lo consideré así.

¿Usted lo consideró así?

Sí.

Después hace una operación con dos de ellos y le da cero.

Ajá.

Y al quedar uno, este es el único vector que ejerce fuerza para moverla.

Si, solo queda uno,..., bueno, hay dos y da cero,..., y..., solo queda uno.

¿Qué pasaría si los dos vectores no se anularan?

Se quedaría sin mover.

¿En qué parte del problema advirtió usted que los vectores para ser dibujados deben tener la misma dirección, sentido opuesto y su suma debe ser cero?

No dice.

Mirna, da una respuesta opuesta a la de Alfredo y Ricardo, pero en el mismo marco que ellos, esto es, ambos desarrollan una serie de acciones que les permiten dentro de su propia lógica, sostener su respuesta, la cual, como se puede constatar, muestra dificultades para ser verbalizada, y argumentos poco tangibles para los mismos autores. En el momento en que se les cuestiona, no se logra la toma de conciencia de la situación, dado que las condiciones o en este caso concepciones que manejan, no son articuladas en un todo ordenado, sino que, para cada caso insisten en desarrollar acciones para las cuales no prevén las transformaciones que éstas generan, es decir, no hay coordinación entre ellas, hecho que aumenta la dificultad de la formación del concepto, dado que no se propicia, la formación de su estructura reticular.

Octavio (13 años)

¿Por qué en tu respuesta pones que faltan datos?

Porque, éste no decía con qué fuerza iba a mover la carreta.

Entonces para ti el problema debe mostrar valores numéricos en el enunciado.

Sí.

Si no, ¿no se puede resolver?

Sí.

Eduardo (13 años)

Tu dices que no se puede resolver porque faltan datos, ¿por qué dices que faltan magnitud, dirección y sentido?

En el problema no lo plantean.

¿En qué parte no lo plantean?

Es que sólo nos dice hacia donde se dirige pero no nos dice cuanto..., el sentido.

Sin tener esa información, ¿pudiste dibujar una figura como se te ocurrió?

Este, pues la puse como dice el problema.

Alejandro (14 años)

No se movería porque no tiene dirección, tiene diferente dirección.

¿En que parte del enunciado dice que tienen diferente dirección?

No dice.

¿No dice?

No, no dice si es al norte o al sur.

¿Tú necesitas forzosamente puntos cardinales para indicar las direcciones?

No.

¿Con decir que son direcciones distintas será suficiente?

Sí.

Dices también que no hay magnitud en la fuerza, ¿en que parte del problema adviertes eso?

Nada más dice que tienen direcciones diferentes, no tiene magnitud.

¿No tiene magnitud?

No.

Es decir ¿no tiene un valor numérico?

No.

¿Tu crees que es necesario para resolverlo?

No.

Entonces ¿cuál es el problema?

Entonces la regué, sólo por las direcciones.

Jimena (13 años)

Se movería porque al jalar la carreta debe moverse.

Entonces ¿usted cree que si se puede mover?

Sí

¿Cree usted que su esquema muestra eso?

Sí.

¿No cree necesitar alguna otra información en el problema?

No.

Como se puede constatar en las entrevistas anteriores, resulta interesante ver como dentro de un mismo eje, en este caso, la supuesta carencia de datos en mayor o menor grado, el alumnado se orilla en común a sostener una situación de fracaso, esto es, un estado de incapacidad para poder establecer o en dado caso continuar con el razonamiento del problema, forma de proceder muy apegada a un pensamiento concreto. Esto mismo ya fue comentado en secciones anteriores, ahora, como continuación a ello, encontramos en estas entrevistas, en las aportaciones de los mismos estudiantes, el hecho de que para ellos, el no encontrar "valores numéricos" es sinónimo de "falta de datos" en el problema. Para nosotros esta manera de abordar la situación, muestra un retroceso a un sistema operatorio concreto muy pronunciado, lo que ocasiona en el estudiante un estado de conflicto al que no puede enfrentar y del que no puede salir; dificultando la abstracción del mismo.

b) Entrevista guiada:

Alfredo (14 años)

Después de haber leído el enunciado correcto ¿en alguna parte dice que se impongan puntos cardinales?

No.

¿Qué correspondencia hay entre tu figura y la figura correcta?

La observa y dice: son semejantes.

¿Qué quiere decir para ti que sean semejantes?

En que yo puse ésta fuerza para acá (señala en el dibujo) y aquí está más para abajo.

¿Crees ahora que la carreta se puede mover o no?

Pues,...no.

Mirna (13 años)

¿Qué diferencias y semejanzas encuentras entre las figuras?

Son diferentes porque yo dije que eran opuestas.

¿Té crees que esta figura es correcta?

Porque no.

¿Crees tú que estas dos fuerzas se puedan anular (señalando el dibujo)

No.

¿Habría movimiento?

No.

Ricardo (13 años)

¿Cómo es ésta figura, con respecto a la tuya, se parecen o no?

Algo.

¿En qué son diferentes?

En el sentido de la fuerza.

Roberto (13 años)

¿Como es la figura, con respecto a la tuya?

La ve y dice: no es igual.

Octavio (13 años)

Después de haber leído el enunciado y haber visto la figura, ¿crees que se pueda mover o no la carreta?

Sí.

¿Sí qué?

Si, o sea que no se puede mover.

Eduardo (13 años)

¿Cómo es ésta figura, con respecto a la tuya?

Más o menos.

¿Es semejante?

Sí.

¿Crees que al ver esta figura, puedas decir si se puede mover o no la carreta?

Sí.

¿Por qué?

Porque explica el lugar.

¿En que lugar lo explica?

En la playa.

No, me refiero a las fuerzas, direcciones y demás

Pues si, si tiene direcciones.

Tú contestaste que faltaban datos, ¿crees que después de haber leído el enunciado, siguen faltando, o será suficiente esa información?

No contesta.

Alejandro (14 años)

La dirección es igual y el cisne va al noreste.

¿Hacia dónde dice el problema?

Hacia las nubes.

¿Como lo pintaste?

Hacia arriba.

¿Tú crees que en la figura original los personajes pueden mover la carreta?

No.

¿Por qué?

Porque el pez jala para otro lado y el cisne hacia arriba, entonces no.

Jimena (13 años)

¿Cómo considera esta figura comparándola con la suya?

Se parecen mucho.

¿En esta figura, entonces, también se puede decir que la carreta puede ser movida?

Sí, creo.

¿Por qué?

Pues, es que todos están jalando.

En ésta última etapa de la investigación, las entrevistas mostradas con anterioridad, ponen en evidencia los siguientes aspectos: Primero, para los estudiantes, la figura original (ver figura A.19), y su propia figura no son iguales, para algunos son sólo parecidas o semejante, pero no iguales, esto es, no advierten que aún cuando pictograficamente son diferentes, la esencia de su contenido es la misma, dado que en todas ellas se ha satisfecho la condición: "diferentes direcciones", advertencia que para poder ser realizada, es claro que requiere de cierto grado de abstracción con el que los estudiantes, hasta este momento no cuentan. Segundo, se siguen obteniendo respuestas distintas, es decir, no hay un común denominador para los argumentos y las respuestas, en el sentido que el estudiante no intuye el efecto de las acciones realizadas, o sea, estas siguen siendo contempladas de manera desarticulada, no se prevé sus efectos, no hay toma de conciencia de tales acciones permaneciendo inconscientes a ellas, apoyándose para su argumentación en puntos y condiciones aisladas, esto puede resumirse, como que no se logra una concepción clara de los términos involucrados y sus relaciones, lo que dificulta la formación del concepto en cuestión.

IV.- Resolución conjunta:

En este cuarto apartado de la presente sección mostraremos en forma conjunta e integrada algunos de los protocolos que resultaron ser más ricos en información para el análisis en cuestión, con la intensión de mostrar en forma secuencial las habilidades, estrategias y dificultades que fue presentando el estudiante en sus procesos de resolución, así como los momentos en que sobre la marcha de estos se mostraron las inconsistencias y contradicciones.

Octavio (13 años)

a) Presentación del enunciado del problema

...el cangrejo por su naturaleza camina hacia atrás, el cisne levanta el vuelo hacia el cielo y el lucio hacia el mar y no consiguieron llevársela nunca.

En este fragmento del enunciado, redactado por el estudiante, puede advertirse en forma indirecta, o para este caso, en términos particulares y propios del estudiante que los elementos señalados como *hacia atrás, hacia el cielo y hacia el mar*, ponen en evidencia la condición de direcciones diferentes; y aparte de esto ninguna otra condición es resaltada.

b) Construcción gráfica de la solución.

En la figura 6.4 elaborada por el estudiante, observamos como la información que no se muestra de manera escrita en la redacción del enunciado, es mostrada en forma gráfica en la construcción gráfica de la solución, esto es, si bien del inciso anterior de advierte la diferencia de direcciones, en éste, tal diferencia se aterriza a través de los puntos cardinales y un ángulo en particular, además del reconocimiento y representación del punto de aplicación, y sentidos.

c) Verbalización de la respuesta

No se sabe no hay suficientes datos, tal vez no puede mover la carretilla pues el cangrejo no lleva suficiente fuerza para impulsar; pero el cisne le ayuda , el cisne al impulsar hacia el norte pero el lucio contrarresta el esfuerzo del cangrejo y la fuerza del cisne y otro factor importante es el peso de la carretilla...por lo que no se sabe.

Haciendo corresponder el esquema con el sistema y finalmente con la verbalización de su respuesta, es como podemos advertir lo siguiente, primero, toda la información que el estudiante ha revelado tanto en el enunciado del problema como en la construcción de su respuesta, parecería una lluvia de ideas sin articulación ni correspondencia alguna, esto es, si bien advierte en una primera instancia direcciones diferentes y las representa por medio de ángulos y puntos cardinales, por otro lado comenta que no existen datos en el problema, haciendo alusión principalmente a la fuerza, otro término, y al peso de la carreta. Segundo, habla de la anulación de las fuerzas, pero a diferencia del mismo tal hecho no está debidamente sustentado, dado que el arreglo que él muestra no permite tal posibilidad. Así pues, al no articular correctamente todo el cúmulo de información con el que cuenta el estudiante, es claro que bajo estas circunstancias le sería muy difícil visualizar la respuesta en la búsqueda de un vector resultante. Corroborando este punto, de la entrevista clínica mostramos lo siguiente:

d) Entrevista clínica

<u>Entrevistador</u>	<u>Octavio</u>
¿Porqué en tu respuesta pones que faltan datos?	

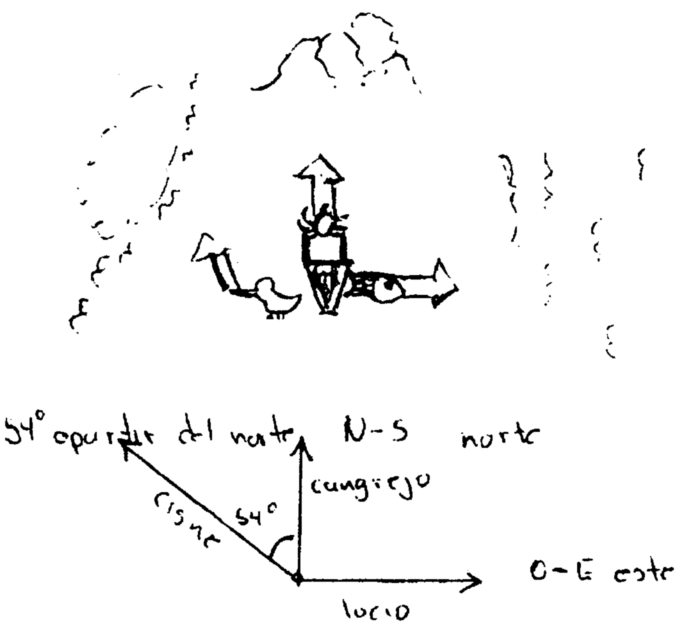


Figura 6.4. Resolución conjunta (ilustracion 1)

Porque, este no decía con que fuerza iba a mover la carreta.

Entonces para ti el problema debe mostrar valores numéricos en el enunciado.

Sí.

Si no, no se puede resolver

Sí.

Myrna (13 años)

a) Presentación del enunciado del problema

...el cisne la jalaba hacia arriba, el cangrejo hacia un lado, el pez hacia el otro. la carreta no se movió.

Como puede observarse, la estudiante, para argumentar su enunciado, pone en evidencia la condición relativa a la desigualdad en las direcciones, redactando en términos de lados diferentes, para los tres en conjunto y opuestos como condición impuesta para los dos últimos.

b) Construcción gráfica de la solución.

La figura 6.5 que se presenta a continuación muestra la manera de esquematizar y representar mediante un sistema vectorial las condiciones puestas de manifiesto en el enunciado, como ya se señaló, direcciones diferentes. En éste, como se puede corroborar, la estudiante inserta su esquema en un sistema de ejes

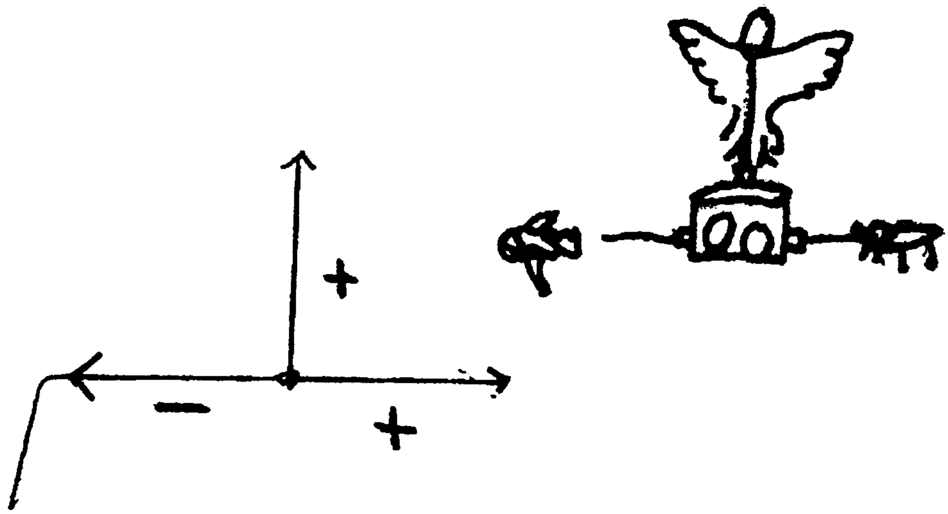


Figura 6.5. Resolución conjunta (ilustración 2)

coordenados y echa mano de los signos de esos en los cuadrantes señalados, para verbalizar la explicación de su respuesta, como una diferencia en el sentido, operando éste a través de la diferencia de los signos respecto a los ejes. Por otro lado, aún cuando no está explícitamente redactado, en el enunciado que formuló, en la figura puede apreciarse como para el trazo del sistema vectorial, dibuja a los vectores del mismo tamaño, lo que de algún modo, aún cuando no impone una condición particular para la magnitud de los mismos, como es el caso de algunos de los protocolos mostrados con anterioridad, puede ser tomado como un forma de abordar al problema empleando vectores de igual magnitud, o lo que es lo mismo considerar igualdad en la condición de la fuerza como se verá más adelante.

c) Verbalización de la respuesta

Complementando la información del inciso anterior explica su respuesta de la siguiente manera:

Sí se mueve porque la fuerza del pez y del cangrejo son negativos y la suma da cero y entonces el cisne tiene que moverla un poco

Esto es, al decir "son negativos", y posteriormente "la suma da cero", es como pone en evidencia en sus propios términos, no el que los vectores sean negativos, sino que uno es el negativo del otro, es decir, tienen la misma dirección, magnitud y punto de aplicación, pero sentido opuesto, por lo que su suma da cero, quedando de este modo, un sólo vector que es quien ejerce el efecto resultante. Finalmente habiendo advertido este hecho la estudiante propone por escrito, que el movimiento puede ser logrado, dada la existencia de un vector resultante, según las condiciones que manejó.

d) Entrevista clínica:

De la entrevista clínica tomamos el siguiente fragmento que apoya la información mostrada con anterioridad y que además permite llegar más lejos, respecto a la forma en que la estudiante construyó su respuesta.

Entrevistador	Mirna
Y al quedar uno, éste es el único vector que ejerce fuerza para moverla.	
	Si, sólo queda uno,..., bueno, hay dos y da cero,..., y..., sólo queda uno
¿Qué pasaría si los dos vectores no se anularan?	
	Se quedaría sin mover.

Es en este punto donde resulta interesante comentar el hecho de que aún cuando los vectores señalados con anterioridad no se anularan, podría ser construido un vector resultante a partir de la suma de los tres vectores involucrados, independientemente de sus magnitudes, direcciones, sentidos y ángulos, hecho en el que radica la génesis de la respuesta al problema en cuestión, y a su vez hecho no advertido por la estudiante dado que las condiciones que impuso no le permitieron visualizar tal situación. Finalmente para el caso ilustrado con anterioridad, merece la pena señalar que aún cuando la estudiante propone una respuesta correcta, de acuerdo a las condiciones que manejó, no puede hablarse de una construcción adecuada y completa del concepto, dada la no advertencia de la posibilidad de obtener un vector resultante bajo otras condiciones y el hecho de que la existencia de dicho vector va de la mano con la posibilidad del movimiento.

Jimena (13 años)

a) Presentación del enunciado del problema

Había una carreta en la arena que adentro tenía cosas útiles en eso un cangrejo, un cisne y un pez la vieron y se pusieron a decir que la jalaran y ya que la tuvieran se repartían las cosas adentro. El cangrejo, el cisne y el pez ataron a la carreta una cuerda y así jalaron, pero el cangrejo jaló como de costumbre para atrás, el cisne emprendió su vuelo y el pez nadó hacia el mar, jalaron y jalaron y la carreta no se movió.

Como ya se explicitó en el apartado correspondiente, la estudiante autora del texto mostrado arriba, no inserta directamente términos vectoriales, pero sí advierte la necesidad de reconocer parámetros de este tipo, evidenciándolos en los términos sinónimos a "diferentes direcciones" como *para atrás*, *emprendió su vuelo* y *hacia el mar*. Es en la construcción gráfica del problema y en la manera en como la sustenta donde se pone en evidencia el grado de avance de su proceso de construcción del concepto.

b) Construcción gráfica de la solución.

Si bien, este esquema no resulta ser tan rico como algunos otros, existe en él un punto sobresaliente, esto es, aparte de hacer corresponder el esquema con el sistema y nombrar con literales a los vectores correspondientes, la estudiante muestra que el eje central en torno al cual gira la respuesta está en la búsqueda de un vector resultante a través de la suma de los tres vectores involucrados como explícitamente muestra en la operación propuesta.

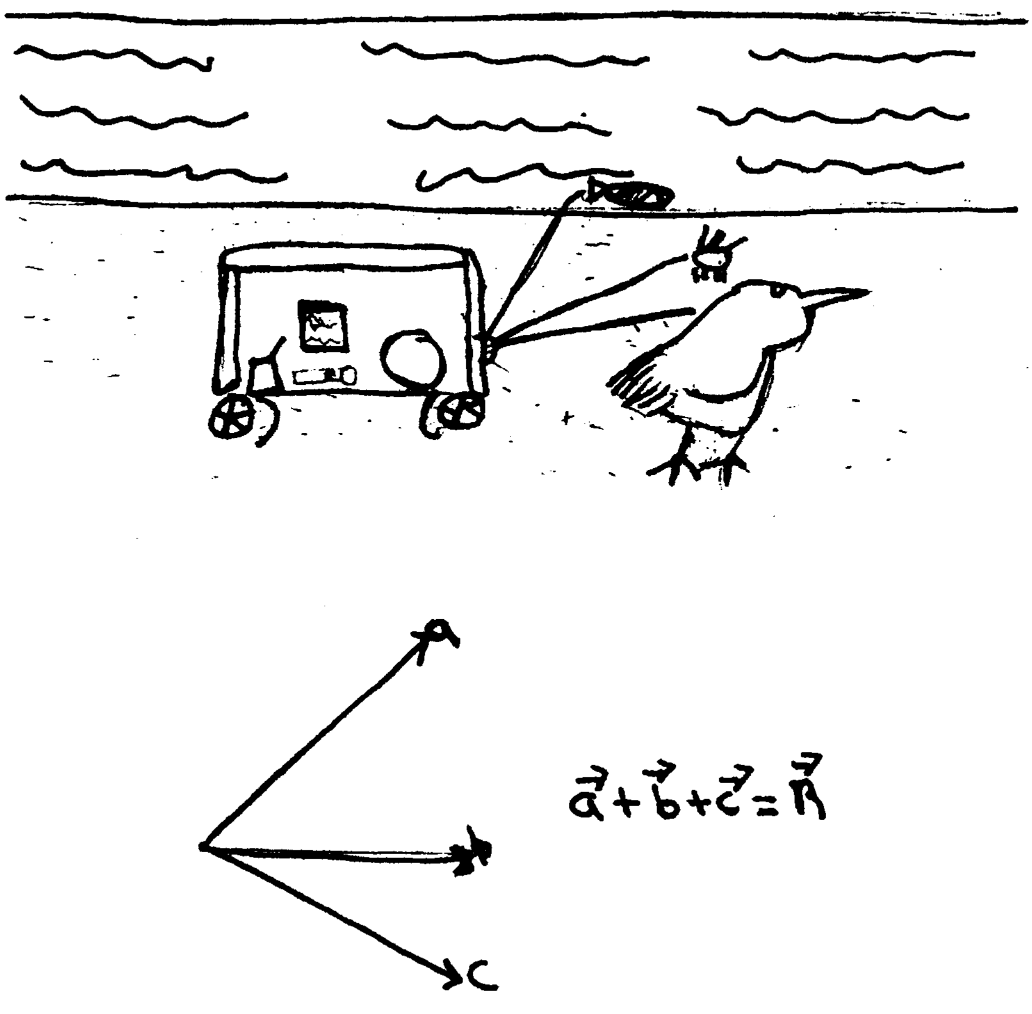


Figura 6.6. Resolución conjunta (ilustración 3)

c) Verbalización de la respuesta

... yo creo que se mueve, por que lo jalan y deber moverse. Al jalar debe moverse por la fuerza que ejercen los animales en la carreta.

Si bien la respuesta como tal, no muestra mayor evidencia escrita, al concatenarla, con la información obtenida de los puntos anteriores, es posible sostener el hecho de que sin serle importantes o quizá necesarias las magnitudes, y los ángulos, por el simple hecho de estar ejerciéndose una serie de acciones en términos vectoriales, es de esperarse que exista un efecto final, hecho que se corrobora en la respuesta obtenida durante la entrevista clínica.

d) Entrevistas clínicas:

<u>Entrevistador</u>	<u>Jimena (13 años)</u>
	Se movería porque al jalar la carreta debe moverse.
Entonces usted cree que sí se puede mover.	
	Sí.

VII. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La discusión sobre los resultados obtenidos se hizo teniendo en cuenta, en primer término, el objetivo general del trabajo, así como los elementos del marco teórico. En síntesis el objetivo fue: *indagar sobre las habilidades, estrategias y dificultades de los estudiantes frente a la resolución de problemas, y en particular, la manera en que construyen el sentido matemático de una comunicación coloquial, así como el modo en que reconocen, formulan y operan el concepto físico-matemático de vector.* A este respecto, cabe abundar en el hecho de que gracias al conocimiento de estos mecanismos y estrategias, puede replantearse una didáctica más adecuada del tema en cuestión para que de este modo pueda ser provocada intencionalmente la actividad cognitiva hacia el desarrollo de la formación intelectual del concepto mismo, por los estudiantes de los niveles en los que se imparte.

Sin la intención de presentar un resumen de los capítulos anteriores, retomaremos algunos aspectos importantes de los mismos para dar sustento a las conclusiones a las que se llegó reexaminando los resultados obtenidos.

Así pues, la estrategia que se siguió para el presente análisis fue distinguir primero las principales oposiciones que desde el marco teórico como desde los protocolos y entrevistas surgieron. Estas oposiciones fueron: **estadio concreto/estadio formal, concepto borroso/concepto lógico, magnitud escalar/magnitud vectorial, vector matemático/vector físico, reconocer/producir.**

La oposición concreto/formal.

Como se expuso en un principio, teóricamente el estudiante de doce años se desenvuelve a nivel de operaciones formales pero, como también se señaló, no existe una correspondencia total. En este sentido pudimos corroborar el hecho de que no se da una correspondencia automática entre edad y estadio intelectual del sujeto. Encontramos estudiantes que ciertamente fueron capaces de plantear el problema, identificar todos aquellos datos que a su juicio pudieran servir para responderlo y esbozar finalmente la solución. Así como también encontramos situaciones completamente opuestas donde ni siquiera pudo ser formulado el enunciado del problema en cuestión. Pero también reportamos un nivel intermedio, una fase de transición entre el estadio concreto y el estadio formal que no tiene una línea divisoria neta, como ya se ha reportado en muchas otras investigaciones de corte piagetiano.

A este respecto, cabe considerar que el grueso de la población estudiantil se encuentra en la etapa intermedia, siendo los casos extremos la minoría; no podemos aventurarnos a plantear como conclusión de este resultado la falta de madurez intelectual respecto al como "pensar" o "abordar" estas situaciones, dado la morfología de los procedimientos, como se puntualizará más adelante; tampoco podemos decir que estudiantes del nivel medio operan en su mayoría en forma concreta, dado los resultados obtenidos; más bien, en función del marcado carácter gradatorio con que los planteamientos y las respuestas van siendo formulados, cada vez más completos, pero sin llegar a visualizar, plantear y argumentar, por un lado el problema en cuestión y por otro la posible solución del mismo; en este sector de la población objeto de estudio, observamos que la forma de operar ciertamente no deja de lado un proceder formal, sino que más bien, pudiéramos decir que con un mínimo de experiencia formal, dentro de lo formal, los sujetos van pasando de un nivel operatorio a otro en este conocimiento particular en distintos grados.

Tratando de ser más explícitos a este respecto, queremos señalar también que los términos de los que se constituye el concepto en cuestión (magnitud, dirección, sentido, etc.) dado su naturaleza abstracta no son tangibles para el alumnado sujeto de estudio, hecho que, de manera semejante, dificulta la visualización de los mismos, y que genera la errónea concepción probabilística que en torno a ellos y al concepto mismo se tiene, dando origen en forma intuitiva, a la incapacidad de desarrollar una estrategia de resolución, a la imposibilidad para continuar una, o a recurrir al sentido común para sustentar la posible respuesta; hecho fortalecido por la hasta ahora marcada forma de trabajar en lo concreto, en lo que al historial académico del estudiante se refiere.

Por otro lado, haciendo una inferencia respecto a las aseveraciones de J. I. Pozo (1989), en función de que los conceptos, sirven para reducir la complejidad del entorno identificando sus objetos, podemos decir que la formación del concepto por los estudiantes comienza por la búsqueda de sus objetos, en un afán de volver concreto lo abstracto y así hacerlo tangible. Si bien como se puede apreciar en la parte de resultados sobre la redacción del enunciado, esta búsqueda, en la mayoría de los casos no es completa, obligando al sujeto a recurrir a su capacidad operatoria formal.

<u>La oposición concepto borroso, natural o probabilístico/concepto artificial, lógico o científico.</u>

Al analizar la construcción del concepto de vector bajo estas categorías encontramos, como se puede corroborar en los resultados obtenidos respecto a la redacción del enunciado del problema, que existe un subgrupo de esta población que inserta, ya sea en forma directa o indirecta términos vectoriales; si bien se advierte una concepción probabilística en estos casos como ya se señaló, también se advierte en ellos la necesidad de nombrar y reconocer tales términos para ser empleados como puntos de partida en el futuro planteamiento de la solución, esto es, infiere las propiedades de los objetos basándose en su pertenencia a clases y comienza a utilizar esquemas clasificatorios de los elementos involucrados, y los reconoce por comparación, aunque con un esquema anticipador pobre, como conceptos protomatemáticos; además cabe señalar que la pobreza de dicho esquema, radica en la naturaleza misma del concepto, esto es, mientras que por una parte, como todo concepto científico, cuenta con atributos necesarios y suficientes que lo definen y diferencian, por otro lado, no guarda relación de semejanza con otros conceptos; así pues, esta búsqueda de una analogía del concepto de vector con otros previamente estudiados, contribuyen a la formación de lagunas en el conocimiento y reconocimiento operatorio del concepto, las cuales, en distintos momentos y con distintos grados, van generando la imposibilidad de continuar en el análisis de la situación planteada hasta llegar al posible planteamiento de la solución.

Magnitud escalar/magnitud vectorial.

Tratando de contemplar esta oposición paralelamente desde el punto de vista de la psicología asociacionista y posteriormente de la constructivista, podemos decir lo siguiente: para la postura asociacionista, la construcción del concepto de vector estaría dado por medio de la detección de los invariantes existentes en el entorno, cabe preguntarnos, ¿cuales son esos invariantes?, y en este sentido, vendrían a ser todas aquellas situaciones que en la naturaleza ya no pueden ser contempladas y posteriormente resueltas por escalares, dado la necesidad frente a una situación de carácter vectorial de conceptualizar el entorno en términos más amplios y/o completos, sería evidente y justificada la operación de acuñar términos que bajo éste contexto, dieran completez y satisfacción a dicha necesidad, es decir, deben tenerse concepciones claras de los términos que amplían el concepto de escalar (ampliamente conocido y manejado por los estudiantes) y que les permite resolver nuevas situaciones, pero ahora como algo nuevo y diferente, esto es, el vector.

En forma paralela a lo expuesto en el párrafo anterior, pero ahora desde el punto de vista constructivista, la construcción del concepto de vector, sólo puede llevarse a cabo reestructurando conceptos previos, y de manera semejante al caso anterior, cabe preguntarnos, ¿cuales son esos conceptos previos? y como tales resultan ser los escalares, es decir, como ya se mencionó, las magnitudes pueden ser escalares o vectoriales, estando las primeras incluidas en las segundas, así pues, una vez que en el estudiante se propicie un desequilibrio que le permita por conflicto entender que los escalares, dado su estructura, no permiten representar una parte de los fenómenos de la naturaleza, entonces quedará justificada la necesidad de operar con vectores, pero la necesidad de propiciar este conflicto no es suficiente, sino que una vez creado, se presenten situaciones que propicien el aprendizaje de los términos que constituyen al concepto mismo, de lo contrario, sólo quedará justificado su uso, pero sin claridad en los atributos que lo hacen reconocible y útil.

Así pues, para cualquiera de las dos posturas, recae en la naturaleza de los términos del concepto, el problema del reconocimiento operatorio del mismo, hecho sustentado, en la falta de entendimiento de dichos términos como un todo. Al respecto pensamos, que si bien en forma gradatoria, el alumnado es capaz de mostrar los términos que constituyen al concepto, no lo hace en forma articulada o conectada y completa, lo que nos lleva a pensar en la no existencia de un núcleo central en lo que pudiera proponer éste como el concepto.

Respecto a esto es importante señalar lo siguiente: en los comienzos de la historia de estas magnitudes, existían muchas cantidades definidas sólo por su valor numérico y unidad, esto es, los escales, mientras que al mismo tiempo existían otras representadas por las mismas, además de la dirección: los vectores, es decir, se concebía a estos como segmentos de recta dirigidos, posteriormente, estos últimos permitían resolver situaciones que los primeros no podían abordar, más tarde el procedimiento de operar con ellos fue dado para la adición a través de la regla del paralelogramo, posteriormente uno de los hechos más importantes en la creación de sistemas vectoriales fue el extender estos elementos a la representación en una dimensión, como es el caso de los números negativos, representados como vectores de sentido contrario; dos dimensiones en un sistema de ejes coordenados y más tarde a tres dimensiones en el estudio de los números complejos. Estos hechos permitieron la idea de realizar operaciones algebráicas sobre estas entidades sin necesidad de representarlas, esto es, abandonar los métodos geométricos para abordar las mismas situaciones, pero ahora bajo la perspectiva del planteamiento y resolución algebráicas.

Consideramos que existe cierta analogía entre el desarrollo histórico de la evolución del concepto, y los resultados presentados por los estudiantes, en esta investigación. Como se puede corroborar en las figuras, en forma gradatoria, es posible advertir representaciones donde se establecen las magnitudes de los vectores, por lo que puede decirse que los autores de las mismas representan al vector echando mano de su concepción de número, y operándolo en forma aritmética, hecho que arroja resultados erróneos. Otras representaciones muestran a los vectores auxiliándose de los puntos cardinales o de un sistema de ejes coordenados, concibiendo al vector como una entidad representable en dos dimensiones, esta representación geométrica exige por ende la aplicación de métodos geométricos para encontrar la solución, lo cual es mostrado en forma parcial. Algunas de las representaciones muestran la posibilidad de contemplar la situación en tres dimensiones, hecho que exige operar con métodos geométricos en las mismas circunstancias aunque las operaciones mostradas hacen alusión a operar en dos dimensiones; finalmente, existe en las representaciones un planteamiento algebraico, que en forma sencilla, aunque sin llegar a la solución algebraica y su interpretación, muestra la manera de orientar las operaciones a seguir.

Tratando de abundar en éste sentido, es importante señalar que debido a que el desarrollo de toda teoría o conjunto de esquemas organizados del sujeto implica una reorganización jerárquica progresiva intraobjetal, interobjetal y transobjetal, cabe señalar que el desarrollo de dicha reorganización para los estudiantes, implica un esfuerzo de sobremanera especial, dado que como se ha venido evidenciando, el arraigo que en éstos existe, del concepto de escalar (número) es demasiado fuerte, puesto que durante su historial académico, éste ha sido necesario y suficiente como para resolver toda situación que se les ha planteado, además, podemos decir que esa dificultad inicial ésta dada también por el hecho de que el estudiante busca semejanzas entre el concepto antecedente y el nuevo, operación que exige una estructura de generalización más avanzada y mayor grado de abstracción, con el que aún no cuenta. Así pues, los objetos y relaciones a reorganizar resultan ser los significados de los términos propios del concepto de los que se ha venido hablando, y de los que se ha insistido no son siquiera advertidos en su totalidad como entidades operacionales y funcionales del concepto, ni tampoco son entendidos como núcleo del concepto respecto a su aplicación, y como consecuencia de esto puede decirse que la reorganización en cuestión se dificulta, dado que no se tiene como antecedente a ésta, en calidad y cantidad a los elementos y en este caso particular los términos a relacionar por lo que la toma de conciencia y el cambio conceptual no son desarrollados y el concepto es sólo parcialmente construido.

<u>Vector matemático/vector físico.</u>

Demetriadou y Gagatsis (1995) hacen una distinción entre la naturaleza física y la naturaleza matemática del vector. Esta última, es decir, la representación y operatividad del vector en forma algebraica como una entidad construida a partir de elementos independientes, en términos de los propios autores, no es enseñada a los estudiantes del nivel medio sino que se hace hincapié en los métodos geométricos a través de los cuales se da resolución a las situaciones-problema analizadas en los cursos de física. Partiendo de este punto, la representación geométrica del vector, permite satisfacer en forma parcial la necesidad de hacer tangibles los términos del concepto en esa búsqueda de objetos tratando de concretar la situación de carácter formal a resolver.

Es importante señalar que la representación geométrica de los vectores desde la antigüedad ha resultado ser una herramienta efectiva a partir de la cual se obtiene una representación compacta, simplificada y concreta de un fenómeno complejo y que ha permitido su visualización y manipulación en forma sencilla. Así pues, en función de estas características favorables, el estudiante tiende a representar el problema en los términos en los que fue entrenado en su curso de física, esto es, haciendo alusión a la naturaleza geométrica del vector, es decir, como ya se señaló, tratando de hacer concreto lo formal, en un proceso incompleto en la búsqueda de términos representables análogos a los practicados en clase, para poder ser operados con posterioridad.

Para el caso particular del concepto del vector, Demetriadou y Gagatsis (1995), señalan que la correcta operatividad de los vectores representados en forma geométrica, no indica necesariamente que se maneje el concepto, hecho sustentado en un número considerable de antecedentes históricos relacionados con la composición de fuerzas y velocidades en la navegación e ingeniería, en donde el interés estaba orientado a la búsqueda de resultados, frente a fenómenos bien conocidos. De acuerdo con esto, podemos decir, que aún cuando el alumnado operó con éxito los ejemplos de clase, en forma mecánica y concreta, es decir, tuvo conocimiento y dominio de los procedimientos del concepto, el núcleo del mismo no fue reconocido como tal, en la situación planteada, hecho que sustenta la dificultad inherente a la situación para poder inicialmente ser planteada en forma correcta y completa; y posteriormente resuelta.

Como ya se señaló, la mayor parte de los estudiantes prefirieron métodos geométricos. Ya desde el planteamiento mismo de un sistema vectorial, pudimos ver como antecedentes una primera necesidad de imponer condiciones particulares, esto es, el alumno estableció sus propios "valores numéricos" a las cantidades que entran en juego, como el establecimiento de puntos cardinales o sistemas de ejes coordenados para representar las direcciones en forma particular y no en forma general como el problema en cuestión lo exigía, hecho fundamentado en la, como él mismo lo argumenta en las entrevistas, carencia de datos o números.

A este respecto podemos decir que el estudiante, se ve en la necesidad de acotar algunos de los datos del problema con ángulos o magnitudes particulares, que él considera le ayudaran tanto a entender como a resolver mejor el problema, lo cual muestra un retroceso en la forma de plantear su razonamiento, por la necesidad de trabajar en lo concreto (métodos geométricos) y al no poderlo hacer en lo abstracto.

Si bien un grupo de estudiantes no pudo continuar después de hacer un planteamiento de este tipo, otro llegó más lejos, al reconocer a la "*fuerza*" como magnitud vectorial involucrada en el problema, pero de manera semejante al grupo anterior, la resolución del problema fue frenada por la imposibilidad de continuar, imposibilidad salvada en parte por algunos al imponer valores a las fuerzas, pero que como se puede corroborar en las ilustraciones correspondientes, se volvió a presentar la misma dificultad para continuar argumentando la falta de datos.

Frente a estos resultados en la representación de la solución cabe señalar que la imposición de las magnitudes, para algunos casos iguales y para otros diferentes, no es consecuencia de un simple tanteo o una mera casualidad, dado que de haber sido así, por tanteo los valores posibles tendrían mayor probabilidad de ser diferentes, además de que tal operación de carácter concreto, contradice, el grado de formalidad con que fue esbozado el planteamiento de la solución, esto es, los estudiantes debieron haber planteado una serie de hipótesis previas respecto a la resolución geométrica del sistema, imponiendo condiciones e intuyendo el efecto de tales en la resultante.

Reconocer/producir.

Respecto a esta oposición Pozo (1989) señala, como funciones de los conceptos, la organización y la predicción, así, tomando como una unidad secuencial, el trabajo elaborado por el alumnado desde la construcción del enunciado del problema, hasta lo que es la interpretación y resolución del mismo, podemos ver, cómo con distinto grado de completez se va cumpliendo la función de organización en el reconocimiento de los componentes del concepto y que de uno u otro modo van siendo expuestos tanto en la construcción del enunciado, como del sistema vectorial a resolver. Pero lo que respecta a la función de predicción no es satisfecha a razón de que no existen respuestas que permitan predecir en condiciones invariantes que ocurriría en la situación-problema en cuestión.

Si bien, como ya se ha mencionado, la consideración de términos vectoriales ocurre, aunque en forma parcial e incompleta, ésta no da cimiento suficiente para poder reconocer y abordar al concepto en cuestión, a este respecto pensamos que la inclusión por parte del alumnado de términos vectoriales en la construcción del enunciado y su representación posterior en los esquemas y sistemas, no es debida en su totalidad a un reconocimiento de éstos como tales, en función del papel que juegan en esta parte de la naturaleza de la situación-problema a abordar, o lo que es lo mismo, en función de los rasgos de los objetos que en ésta designa; sino que más bien su inserción es debida al sentido común, es decir, "si al terminó del curso de vectores se plantea un problema, lo más seguro es que se resuelva por medio de vectores", las ilustraciones al respecto obtenidas, corroboran este punto, dada la insistente estructura probabilística de la que se revisten las respuestas, hecho señalado con anterioridad, y la aparición de términos, que si bien son magnitudes vectoriales, nada tienen que ver con la resolución del problema en cuestión, además, de la manera en que, después de que el alumno plantea un problema no terminado (por llamarlo de algún modo) presenta esquemas y sistemas no terminados, para los cuales no tiene puntos de los cuales partir. Hacemos hincapié en estos hechos dado que pensamos, que si la problemática en el reconocimiento y aplicación del concepto de vector, aparece desde la redacción misma del enunciado, identificación de sus elementos y aplicación de estos, entonces no existe un entendimiento claro del concepto, esto es, en términos de Miller y Johnson-Laird (1988), el procedimiento de identificación y el núcleo del concepto, no son claros los hechos y los objetos del mundo que designa, además de que para el alumnado no existe sentido en el concepto, al no encontrar, como ya se mencionó relación alguna con otros conceptos.

En relación a esto mismo, es importante considerar lo siguiente: del mundo contidiano, el estudiante precomprende al vector de forma muy particular y personal, esto es, él ya cuenta con el conocimiento del significado de "*la flecha*" la cual en el uso común es empleada para asignar dirección y sentido, a razón de esto podemos decir que no construye el concepto sino que sólo hace reminiscencia al mismo asociándolo con lo ya aprendido en un contexto de sentido

Como continuación a este punto, después de contemplar la forma en que el estudiante asigna sentido y arma el enunciado, toca considerar la manera en que utiliza dichos antecedentes para esbozar, de manera semejante, en sus propios términos la posible solución, esto es, la forma en que advierte qué términos le son necesarios y cómo los representa o esquematiza. Cabe aclarar que dicha esquematización puede ser tanto de naturaleza algebraica como geométrica, como ya se mencionó con anterioridad. La preferencia por una de ellas, dependerá del esquema de asimilación del que disponga el sujeto.

Respecto a lo anterior, en una primera instancia podemos señalar que en correspondencia natural a la necesidad de hacer tangible el problema desde sus términos propios, la mayor parte de las representaciones mostradas apelaron al uso de métodos geométricos (operar en lo concreto), en las que de manera semejante a la situación de la construcción del enunciado, pudimos advertir, una serie de grados de completez en dichos esquemas, esto es, la presencia de sólo algunos términos involucrados en la representación de la solución, lo cual pone de nueva cuenta en evidencia la ausencia de una concepción clara de los antecedentes, lo que trae como consecuencia el hecho de que el estudiante no logra intuir una metodología de carácter vectorial para ser empleada desde el planteamiento mismo del problema, dado que ni siquiera se cuenta con una concepción clara de los términos que anteceden a la formación del concepto en cuestión, tal es el caso de los ángulos, que como ya se mencionó en el marco teórico, dependiendo de estos será el sistema vectorial a plantear y de este último dependerá la metodología operacional. En conjunción con esto, la forma en que el estudiante representa dicha información, pone en evidencia cómo traduce el lenguaje escrito, esto es, en un primer momento a un lenguaje pictográfico y posteriormente al vectorial. En este proceso de traducción, el grado de completez en la representación, va aunado al grado de reconocimiento de lo representable, así pues, el estudiante selecciona, apoyado en sus concepciones, qué del enunciado puede ser esquematizado y qué de dicho esquema es vectorialmente representable, lo que de algún modo da idea de la búsqueda de los posibles datos que el enunciado aporta, es decir, seleccionan del todo lo que reconocen como términos vectoriales con base en la concepción, como ya se mencionó, que de estos tienen. De manera semejante al caso de los ángulos, lo cuál también es aplicable para las direcciones, sentidos y terminología para nombrar a los vectores, ésta gradación, depende también del grado de completez que su esquema anticipador tenga en torno a esto.

Otro punto importante de comentar a este respecto, está dado por la manera en que el estudiante construye el sentido matemático del problema a partir de la comunicación coloquial mediante la cual se le planteó, retomando la metodología que se siguió, cabe recordar que después de que el alumnado fue sujeto a un curso sobre el tema, en forma oral se le planteó la situación problémica en cuestión, para que éste la resolviera con sus propios medios en un segundo momento. Estas dos actividades como ya se expuso, fueron diseñadas para que dentro del curso se desarrollara la construcción de significados, la cual inicialmente parte, de la experiencia del sujeto, experiencia que en realidad no es enteramente útil para la construcción del concepto de vector, dados los antecedentes de carácter escalar que en ésta existen,

En el proceso de conocer, a través del curso, el sujeto fue asignando al objeto una serie de significados, cuya multiplicidad determinó conceptualmente al objeto. Ciertamente, dado que esa conceptualización no es fácil, se propició el mayor grado de libertad para que el estudiante pudiera desarrollar dicha tarea, y que de esta manera el conjunto de significados asignados por éste, fueran enriquecidos por los de sus compañeros, mediante una actividad comunitaria de construcción de significados, esto es, generar significados en un proceso de interacción social con un número de individuos relacionados en un ambiente más o menos común y partiendo precisamente de los resultados obtenidos de dicha interacción, donde se desarrolló la negociación de significados los cuales sirvieron para la toma de decisiones.

En función de esto, caemos de nuevo en la cuenta de que dicha atribución de significados no es convencionalmente completa, las ilustraciones mostradas al respecto, sustentan una atribución parcial, para algunos casos y nula para otros, respecto a la significación de cada término y que trae como consecuencia una construcción fracturada del concepto, es decir, las concepciones que el estudiante, durante su instrucción va formulando y corrigiendo o enriqueciendo, según sea el caso, a través de intercambios de concepciones en una actividad social de este tipo, no son suficientes como para generar una red de significados lo suficientemente sólida como para construir correctamente el concepto.

Finalmente, considerando en forma ordenada, el planteamiento del sistema vectorial, la imposición de condiciones particulares en ángulos y magnitudes, y el planteamiento ya sea geométrico o algebraico de la solución, y en todos ellos una marcada y puntual imposibilidad para continuar al paso siguiente, podemos señalar que estas ideas y procederes no son aterrizadas, en la resolución final y sus efectos tampoco son interpretados, quedando el planteamiento en estado estacionario y poniendo en evidencia, aunque en forma gradatoria pero general, la falta de reconocimiento del concepto como tal, sus métodos y efectos.

Tratando de ser más explícitos al respecto, podemos decir, que, a través de los planteamientos presentados se observa cómo en menor o mayor grado el estudiante advierte y asimila las redes propias de la estructura misma del concepto, pero que en distintas etapas de dicha gradación jerárquica, el alumnado se enfrenta a dificultades para continuar, remitiéndose, a no dar respuesta, detenerse en algún momento o a encontrar la solución y no darse cuenta de ello. El hecho de que los estudiantes puedan librar o no tales obstáculos parciales, depende de la solidez del esquema de asimilación que sobre el concepto en cuestión tengan; y por ende de las concepciones de los términos del mismo; lo que exige, para ser logrado, un mayor grado de abstracción sobre la situación y el concepto mismo.

Finalmente, sería bueno que los profesores consideraran la semejanza entre estos protocolos y los obtenidos en sus clases, particularmente en la forma gradatoria con que el alumnado parcial y particularmente va creciendo en el conocimiento, reconocimiento y manejo de estos contenidos en función de la cantidad y calidad de los términos que de éstos pueda exhibir en sus reportes de trabajo.

Consideramos que para que la construcción del concepto pueda ser llevada a cabo de manera completa y satisfactoria, para este nivel escolar el alumnado debe elaborarlo, a través de problemas que involucren el concepto en cuestión, con una toma de conciencia paulatina de las transformaciones que sufre dependiendo de los marcos en juego: aritmético, algebráico, geométrico, gráfico, físico.

Hecho que no está direccionado al nivel operatorio del estudiante, sino al concepto mismo, si bien se pudo advertir la existencia de un razonamiento y planteamiento de carácter formal, los elementos de estos se muestran como islotes, desarticulados dado la falta de experiencia sobre el concepto enteramente nuevo y que no guarda relación ni semejanza operatoria con los ya existentes en la estructura reticular de conceptos y concepciones que sobre él, el estudiante pueda construir.

Después de haber considerado estos elementos sería deseable investigar en que grado el estudiante va abandonando estos esquemas, es decir, como dentro del mismo proceder formal se va reconociendo manejando e interpretando a estas magnitudes particulares, así como también, qué de estas estrategias y dificultades persisten èn niveles superiores para ser abordados desde el nivel medio.

Finalmente, en lo que al nivel medio respecta, resultaría de sobremanera interesante investigar:

1. ¿Cuándo debe introducirse el estudio de los vectores en el nivel medio?

2. ¿Debe enseñarse el concepto de vector tanto en Física como en Matemáticas, con la intención de evitar la distinción que existe entre la forma de operar con vectores en Física y la forma de operarlos en Matemáticas?

3. ¿La existencia de estas dos distinciones genera a los estudiantes dificultad para entender el concepto?

4. ¿Cuáles con las carencias de los profesores sobre la forma en qué los estudiantes construyen el concepto de vector?

VIII. CONCLUSIONES

Dado lo expuesto en el capítulo anterior las conclusiones a las que se llegó en la presente tesis fueron las siguientes:

1.- En función de la capacidad de inferir propiedades y formular esquemas clasificatorios, como una de las estrategias más comunes empleadas por los estudiantes para abordar el problema objeto de estudio podemos decir, que dichas estrategias no se circunscriben a un marco operatorio concreto sino presentan características propias del operatorio formal, y que el mayor o menor grado de dificultad que en éstos se presente para continuar sobre la resolución, dependerá del grado de evolución y maduración de estas condiciones: razonamiento hipotético-deductivo, toma de conciencia, abstracción reflexiva, etc.

2.- Aún siendo el concepto de vector un concepto científico, esto es, que contiene atributos propios lógicamente definidos, su naturaleza y estructura dificultan su reconocimiento dado que éste siempre se pretende realizar por comparación o analogía con otros conceptos previamente estudiados, pero que de hecho no forman parte de la red conceptual que contiene al vector.

3.- De acuerdo con su naturaleza abstracta los significados de los términos que constituyen el concepto son poco tangibles para los estudiantes hecho que explicaría la dificultad para reconocerlos en su totalidad y en forma completa en el problema planteado.

4.- No existe un entendimiento claro del concepto, en el proceso de identificación de su núcleo, en los fenómenos que modela. Parece que la preconcepción sobre el significado de una flecha para indicar dirección en el mundo cotidiano del alumno obstaculiza una construcción más abstracta del concepto. De hecho, esa idea resulta suficiente y eficaz para el manejo concreto, empírico, físico-geométrico de vector en el problema dado. Cabe señalar que además, la situación planteada ciertamente "carga" el concepto al campo físico de las fuerzas.

5.- A nivel operatorio y en el intento que los estudiantes hacen por formular el problema y tratar de proponer una solución para éste, se observa que en el proceso de lo que pudiéramos llamar búsqueda de datos, estos en la mayoría de los casos son mostrados en una lista incompleta, debido a que los estudiantes no cuentan con un entendimiento claro de los significados de los términos del vector como una unidad, así pues, en el proceso en cuestión, la atención de los estudiantes, está orientada en la mayoría de los casos a buscar la magnitud del vector, a partir de esto, al no encontrarla explícitamente enunciada, el alumnado se aventura a proponer a su juicio una o a argumentar la insolubilidad del problema en función de la carencia del dato en cuestión. Este hecho pone de manifiesto una jerarquización inconsciente desarrollada por el estudiante, quien de todos los términos que constituyen al vector, da mayor peso a la magnitud, hecho sustentado en la amplia experiencia con la que el alumnado cuenta en el uso de las magnitudes escalares, dado el éxito que hasta éste momento de su historial académico le han proporcionado en la resolución de problemas. Así pues, esta forma de abordar el problema por parte de los estudiantes, nos permite generalizar el hecho de que frente a la resolución de una situación vectorial, el alumnado en una primera instancia tenderá a operar con la magnitud, considerando a esta primer directriz de la metodología de resolución, y que dependiendo de la forma en que decida abordar el problema, éste podrá proponerla, argumentar insolubilidad al no encontrarla explícitamente enunciada, y posiblemente dado su experiencia y costumbre operar con ella en forma escalar.

6.- En el planteamiento de los distintos pasos de análisis de la situación a resolver, es decir, planteamiento del enunciado, construcción del esquema, elaboración del sistema vectorial, etc., existe un reconocimiento parcial de términos y procedimientos propios del concepto, pero que no están jerárquicamente justificados en el paso anterior, esto es, en los procesos que muestran los estudiantes revelan lo que pudiéramos llamar un continuo "ir y venir" entre lo concreto y lo abstracto, debido al carácter transitorio en el que el adolescente se encuentra.

7.- Estas dificultades para reconocer los datos en un primer momento, los métodos y finalmente interpretar los resultados tienen mucho que ver con la concepción que de cada uno de los ellos se tenga, esto es, algunos estudiantes reconocen todos los términos, otros sólo algunos y otro número no reconoce ninguno, si bien esto es función de la etapa de desarrollo intelectual en la que el estudiante se encuentra, también es razón que justifica el mayor o menor grado de completez con el que los estudiantes dan forma al concepto; el cual puede ser desde un cúmulo no organizado de ideas, hasta un complejo de términos con rasgos comunes no relacionados ni articulados; sin llegar nunca a ser mostrado como un concepto científico, como ya se dijo, con atributos claros, suficientes y necesarios. Así pues, a razón de los elementos que entiende y maneja el estudiante, es como va formando su propia caracterización del concepto, para unos más completa y clara, que para otros.

8.- En el nivel medio es aconsejable trabajar sólo en términos de una resolución de carácter geométrico, dado que ésta representación permite potenciar más los fenómenos, términos y métodos del concepto, desde luego es importante resaltar la necesidad de organizar debidamente tales términos sin pasar por alto el hecho de correr el riesgo de que en forma errónea el alumnado pudiera concebir al vector representándolo únicamente en forma geométrica, hecho que en el futuro presentaría dificultades para abordar la representación algebraica.

9.- Existe una estrategia de carácter gradatorio con que los estudiantes van construyendo la solución, tanto en el aspecto gráfico-geométrico como en el escrito. En este punto, interactuan los niveles de construcción del concepto con el nivel operatorio alcanzado con el sujeto, entre lo que destaca la insistencia de contemplar un concepto abstracto desde lo concreto, el no encontrar los términos involucrados y el utilizar argumentos apoyados en el sentido común, al no desarrollar un razonamiento hipotético-deductivo y al emprender acciones para las cuales no se prevén las transformaciones.

10.- Al igual que en otros problemas sobre la enseñanza de las matemáticas, una de las dificultades existentes consiste en la imposibilidad para aterrizar el concepto analizado, al no encontrar valores numéricos que permitan trazar los vectores en cuestión, argumentando la insolubilidad del problema en función, como ya se dijo de inexistencia de valores numéricos.

11.- Existe analogía entre el desarrollo histórico de la evolución del concepto, y los resultados presentados por los estudiantes. En forma gradatoria, es posible advertir representaciones donde se establecen las magnitudes de los vectores, poniendo en evidencia la representación del vector a partir de la concepción de número, hecho que arroja resultados erróneos al operarlo en forma aritmética. Otras representaciones se auxilian de los puntos cardinales o de un sistema de ejes coordenados, concibiendo al vector como una entidad representable en dos dimensiones, representación que exige la aplicación de métodos geométricos en forma parcial. Algunas de las representaciones muestran la posibilidad de contemplar la situación en tres dimensiones, hecho que exige operar con métodos geométricos en las mismas circunstancias aunque las operaciones mostradas hacen alusión a operar en dos dimensiones; otras representaciones muestran un planteamiento algebraico, que en forma sencilla, exhiben la manera de orientar las operaciones a seguir.

12.- Finalmente, cabe señalar que los protocolos de la presente investigación y la discusión que sobre los resultados obtenidos se hizo, muestran la posibilidad de analizarlos desde otros puntos de vista, dejando de esta manera abiertas otras posibilidades de análisis.

LITERATURA CITADA

Alarcon, J. 1988. Cómo los niños resuelven problemas. SME-CINVESTAV. México.

Albaladejo, R. 1996. Sobre la introducción del concepto de irracionalidad en enseñanza secundaria. Educación matemática, 8 (2), 18-32

Allendoerfer, C. 1994. Fundamentos de matemáticas universitarias. U.S.A.:Mc Graw Hill.

Alsina, Y. 1990. La resolución de problemas matemáticos por estudiantes mexicano-norteamericanas. Educación matemática, 2 (3), 47-54.

Atiyah, M. 1988. Discurso presidencial dirigido a la London Math. Society. Cambridge University Press (Abstr.)

Avila, A., Mancera, E. 1989. Diagnóstico de habilidades computacionales y actividades para remediar los errores. Educación matemática, 1 (1), 4-9.

Avila, A. 1993. El saber matemático extraescolar en los libros para la educación de adultos, Educación matemática, 5 (3), 60-78.

Begle, E. 1989. Critical variables in mathematical education. Mathematical association of american and national council teachers of mathematics. 9-25

Bouvier, A. 1991. La mysficatión mathématique. París: Hernan.

Braun, E. 1993. El universo de la ciencia. Física. Ed. Trillas.

Bruner, J.S., Goodnow, J. Y Austin, G. A. 1996. El proceso mental en el aprendizaje. Madrid: Narcea.

Brousseau, G. 1993. Obstacles epistemologiques en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques. 4. Grenoble: La Pensee Sauvage. (Abstr.)

Buckley, Walter. 1988. La sociología y la teoría moderna de los sistemas. Buenos Aires: Amorrourtu.

Castro, F. 1993. Conflictos cognitivos en la adquisición de conceptos de probabilidad. Educación Matemática, 5 (3), 7-10

Charles, I. 1992. An instructional system for mathematical problem solving in Problem solving in the mathematics classroom. (Abstr.)

Chevallard, Y. 1985. La trasposicition didactique du savoir savant su savoir enseigne. Grenoble.

Dávila, M. 1992. El reparto y las fracciones. Educación matemática, 2 (1), 32-45.

De la O, J., Díaz, M., Mendez-Villamil, C. 1992. Dificultades y alternativas en la resolución de problemas matemáticos. Educación matemática, 8 (1), 40-52.

Demetriadou, H., 1994. The teaching of the concept of vector in Greece. Some remarcks on the history of this concept and on the errors of the Greek pupils, M. A. Dissertation in Mathematics Education, Rohampton Institute, London.

Demetriadou, H., Gagatsis, A, 1995 . On the history of the concept of vector and its introduccion in elementary geometry textbooks, en Didactics and History of Mathematics, p. 371. Erasmus.

Follari, R. 1988. El currículum como práctica social. Foro universitario, (27),58

Hoyos, V. 1994. Un estudio exploratorio sobre la asignación de sentido a las representaciones Básicas de la variación, el término de la primaria y el inicio de la secundaria. Educación matemática, 6 (3), 65-81.

Kline, M. 1988. El fracaso de la matemática moderna (Porqué Juanito no sabe sumar).México: Siglo XXI.

Lopez, A. 1996. Construcción de la variable algebráica en alumnos del nivel medio superior. Tesis de grado de maestría, Universidad Autónoma de Queretaro, México.

Miller, G., Johnson-Laird, P. 1988 Language and perception. Cambridge: Cambridge University Press. (Abstr.)

Moreno, A. L. y Waldegg, G., 1992. Constructivísmo y educación matemática. Educación matemática. 4 (2),7-15.

Ontiveros, J. 1994. El fracaso de la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. México: Ed. U.A.Q.

Orozco, M. 1990. Patrones de solución de problemas multiplicativo. Educación matemática, 2 (1), 51-52.

Parra, B. 1989. Acerca del papel de la representación en la resolución de problemas. Pedagogía. 6 (17), 47-54.

Parra B. 1990. Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas. Educación Matemática 2(3), 22-31.

Perelman, Y. 1988. Física recreativa. Moscu: Mir Moscú.

Piaget, J. 1936. El nacimiento de la inteligencia del niño. Madrid: Ed. Aguilar.

Piaget, J. 1969. Psicología y pedagogía. México: Sarpe.

Pozo, J.I. 1989. Teorías cognitivas del aprendizaje. Madrid: Morata.

Rincon, A. 1996. A B C de Física. Ed. Herrero.

Rosas, R. 1995. La comprensión del algebra y los números racionales. Educación Matemática, 7 (2), 44-59.

Rosch, E. 1988. Thinking in congnitive science. Cambridge: Cambridge University Press. (Abstr.)

Rouche, N., Soto, I. 1995. Problemas de proporcionalidad resueltos por campesinos Chilenos. Educación Matemática, 4, (2), 77-96.

Sanchez, C. 1990. La matemática en la síntesis del panorama científico. Educación Matemática. 2(3),7-14.

Seeger, F. 1985. Activity Self-organization and Habitus. Theoretical Concepts in Mathematical Education Proceedings. 2nd. TME-Conference. Biefeld: Alemania. (Abstr.)

Trinidad, M. 1996. Análisis de errores en la conceptualización y simbolización de ecuaciones diferenciales en alumnos de química. Educación matemática, 8 (2), 90-101

Ursini, S. 1994. Los niños y las variables. Educación matemática, 6 (3), 90-108.

Vergnaud, G. 1990. Epistemology and Psycology of Mathematics Education. Mathematics and Cognition, ICMI Study Series. (Abstr.)

Vergnaud, G. 1991. El niño, las matemáticas y la realidad. México: Trillas.

Waldegg, G. 1996. La contribución de Simon Stevin a la construcción del concepto de número. Educación Matemática, 5 (2), 5-32

Wenzelburger, E. 1991. Ambientes graficos en microcomputadoras para la construcción del concepto de función en matemáticas. Educación matemática, 3 (1), 66-79

Wittgenstein, L. 1993. Investigaciones filosóficas. N. York: Macmillan.

APENDICE

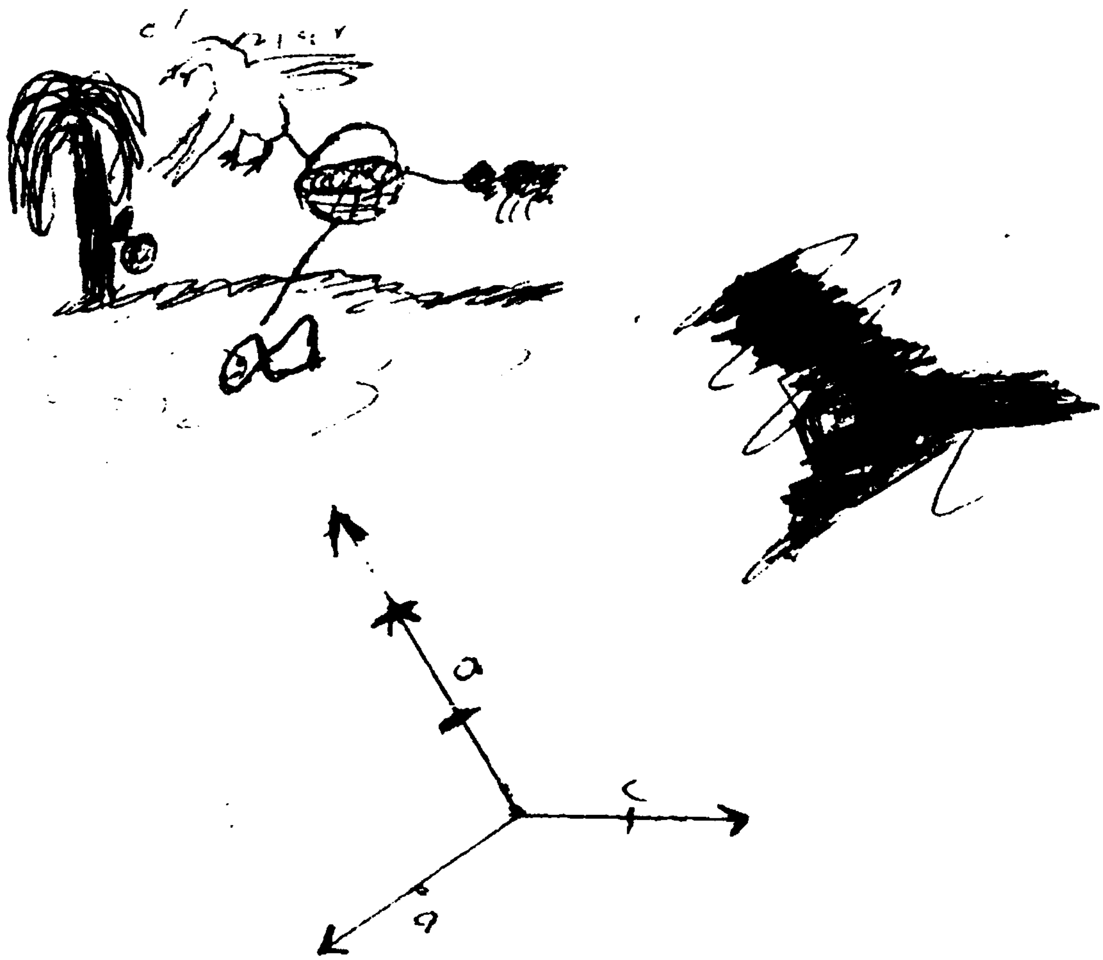


Figura A.1. Construcción gráfica de la solución. Representación esquemática y traducción al lenguaje vectorial. Correspondencia entre representaciones. Ilustración 1.

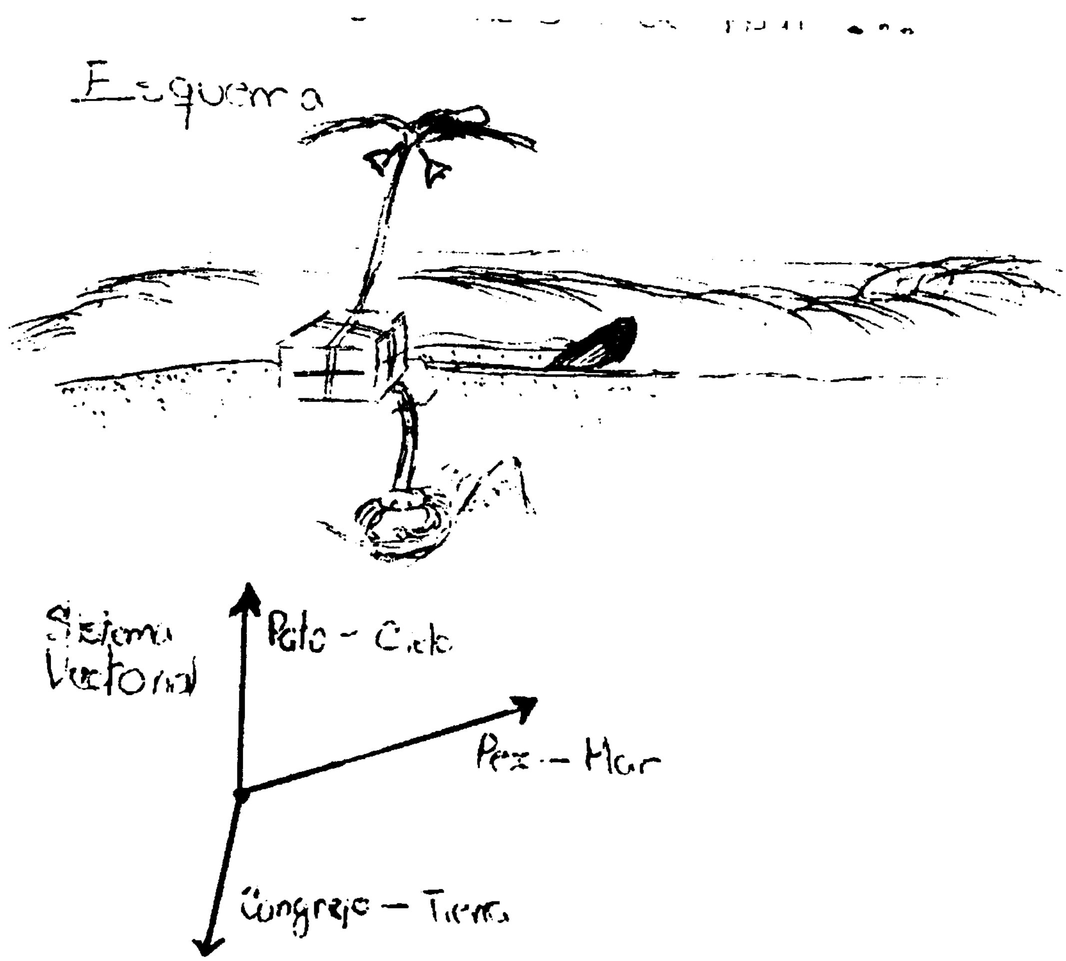


Figura A.2. Construcción gráfica de la solución. Representación esquemática y traducción al lenguaje vectorial. Correspondencia entre representaciones. Ilustración 2.

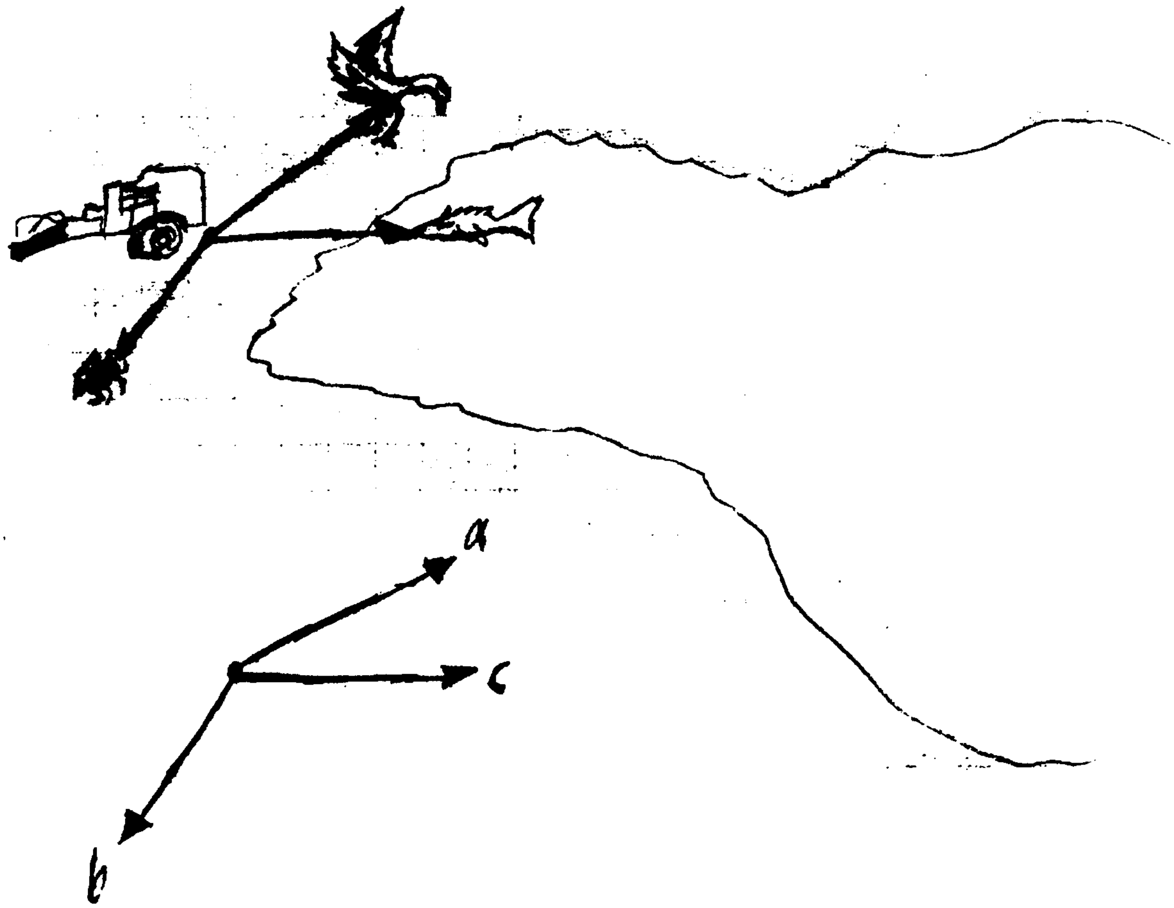


Figura A.3. Construcción gráfica de la solución. Representación esquemática y traducción al lenguaje vectorial. Correspondencia entre representaciones. Ilustración 3.

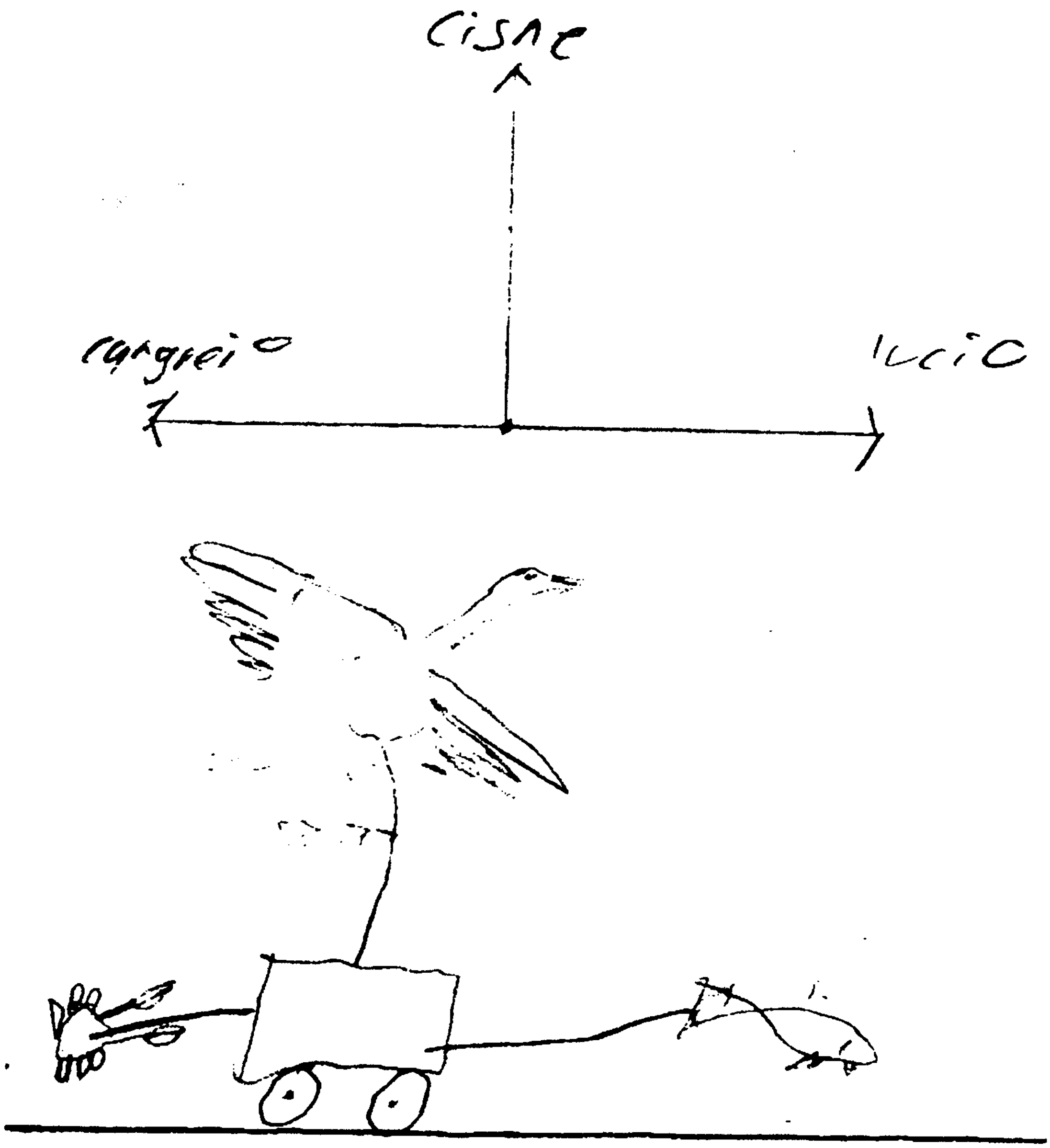


Figura A.4. Construcción gráfica de la solución. Representación esquemática y traducción al lenguaje vectorial. Correspondencia entre representaciones. Ilustración 4.

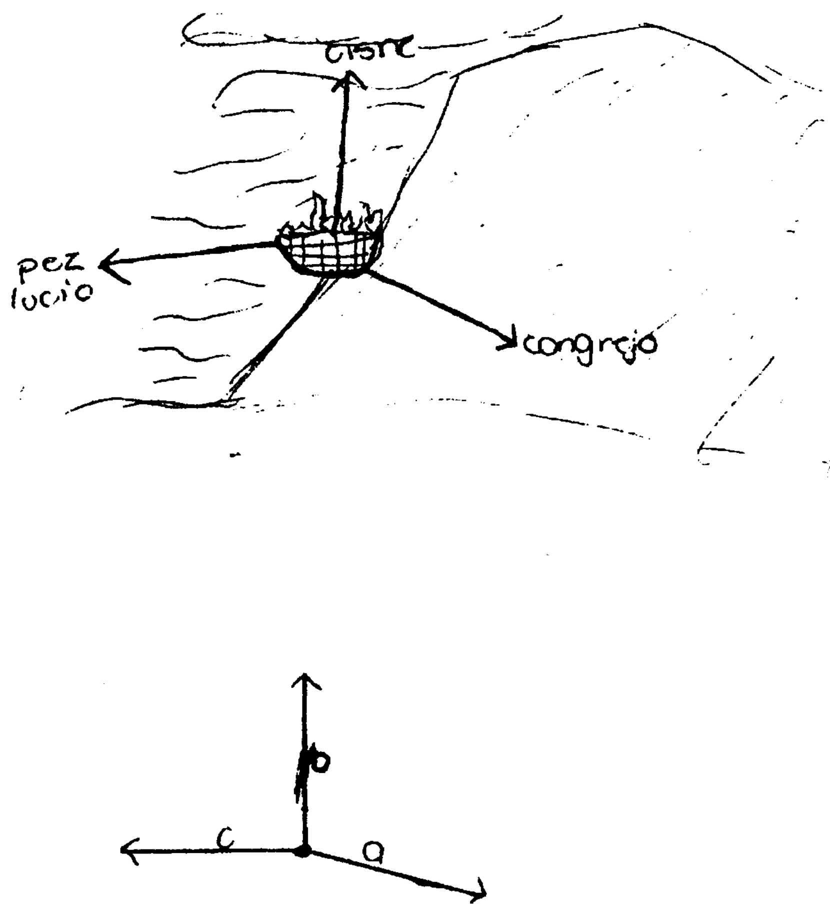


Figura A.5. Construcción gráfica de la solución. Representación esquemática y traducción al lenguaje vectorial. Correspondencia entre representaciones. Ilustración 5.

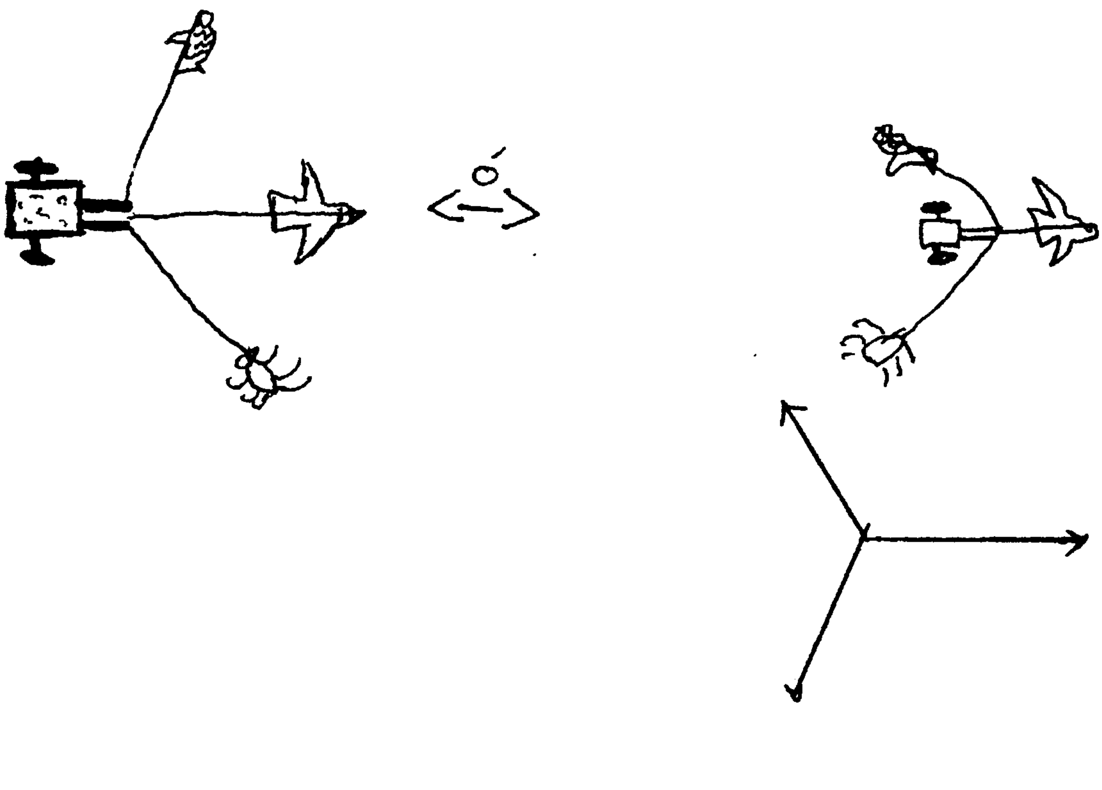


Figura A.6. Construcción gráfica de la solución. Representación esquemática y traducción al lenguaje vectorial. Correspondencia entre representaciones. Ilustración 6.

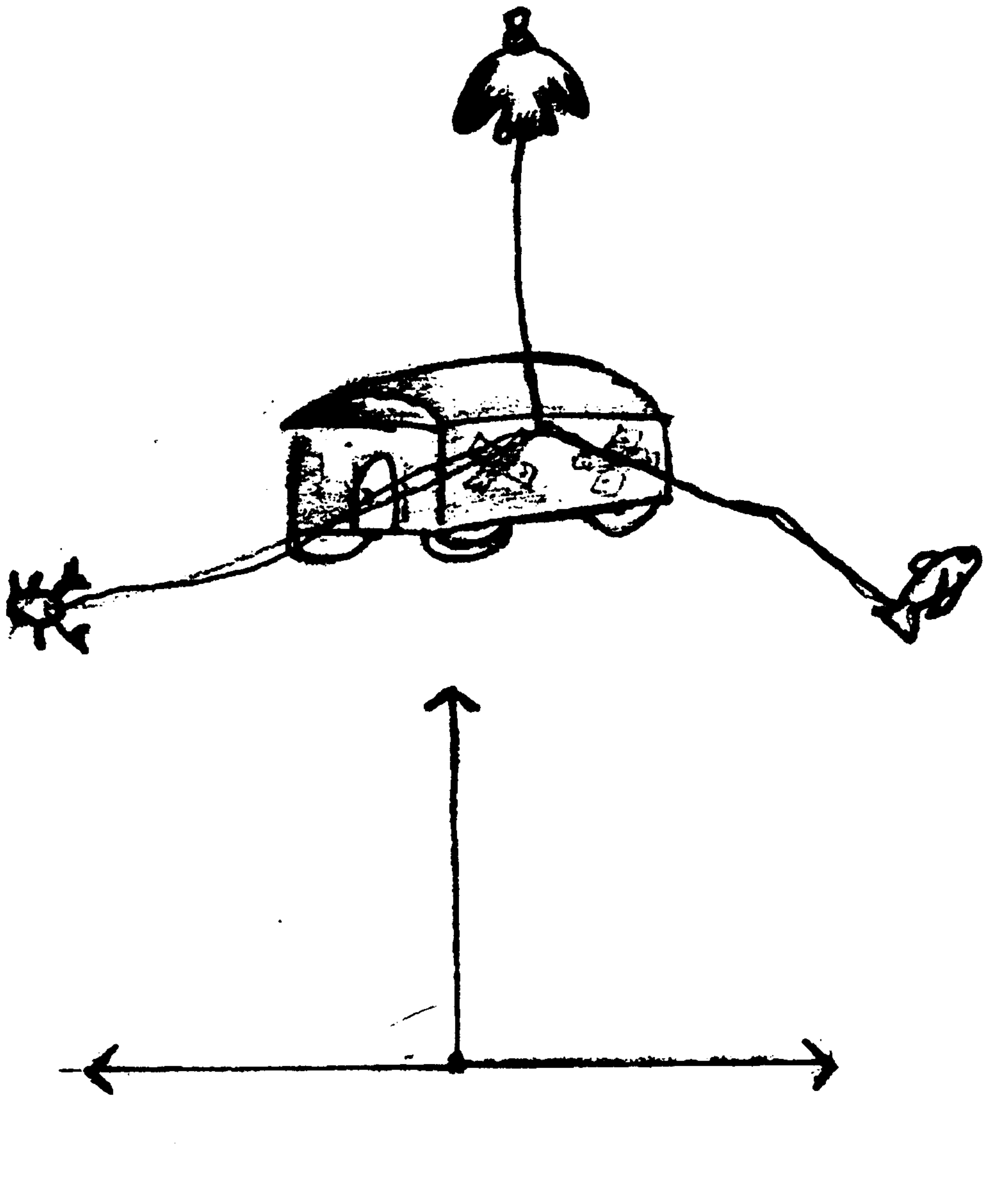


Figura A.7. Construcción gráfica de la solución. Representación esquemática y traducción al lenguaje vectorial. No correspondencia entre representaciones. Ilustración 1.

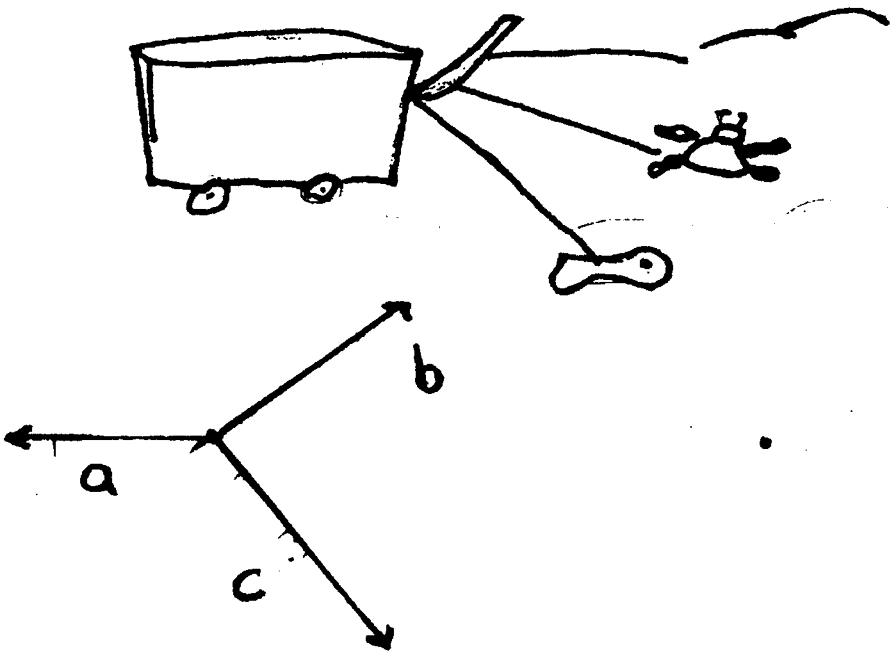


Figura A.8. Construcción gráfica de la solución. Representación esquemática y traducción al lenguaje vectorial. No correspondencia entre representaciones. Ilustración 2.

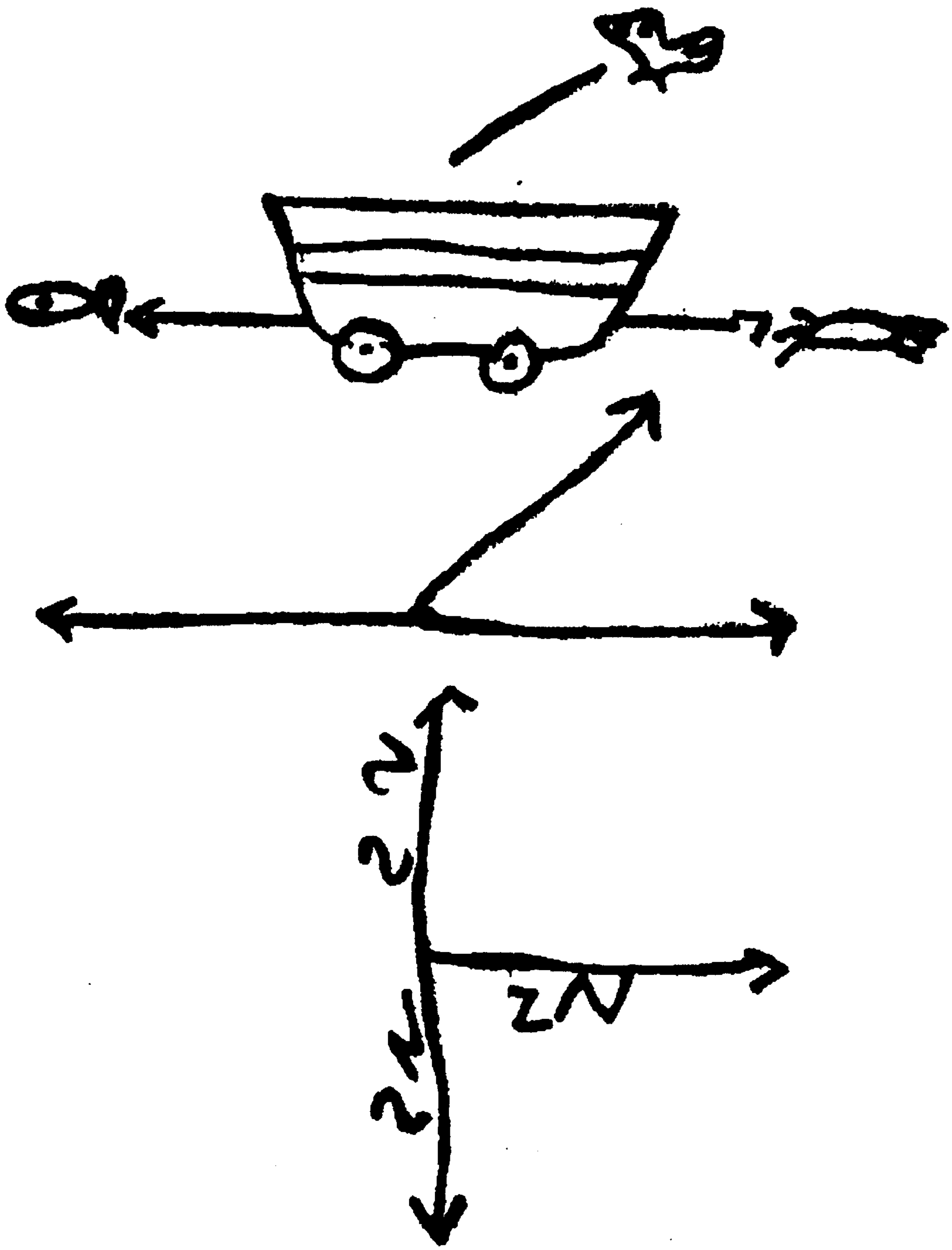
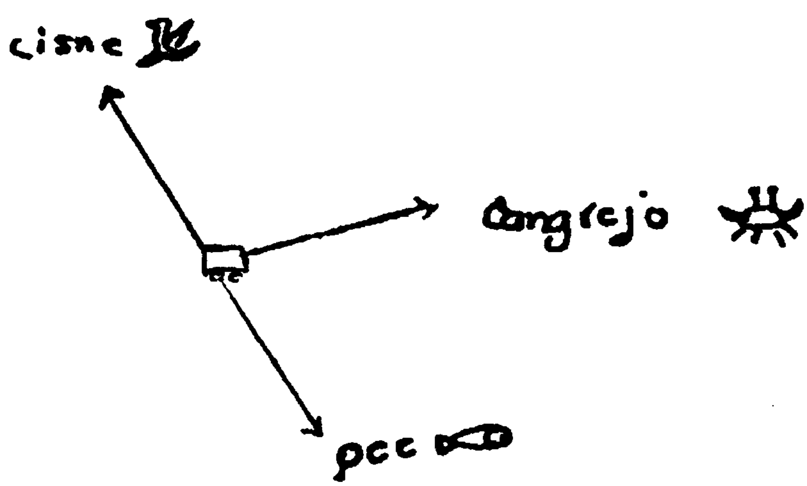


Figura A.9. Construcción gráfica de la solución. Establecimiento de condiciones particulares y planteamiento de la solución. Ilustración 1.



Sistema vectorial.

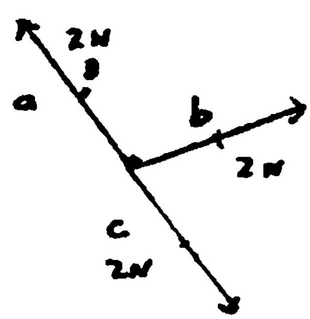


Figura A.10. Construcción gráfica de la solución. Establecimiento de condiciones particulares y planteamiento de la solución. Ilustración 2.

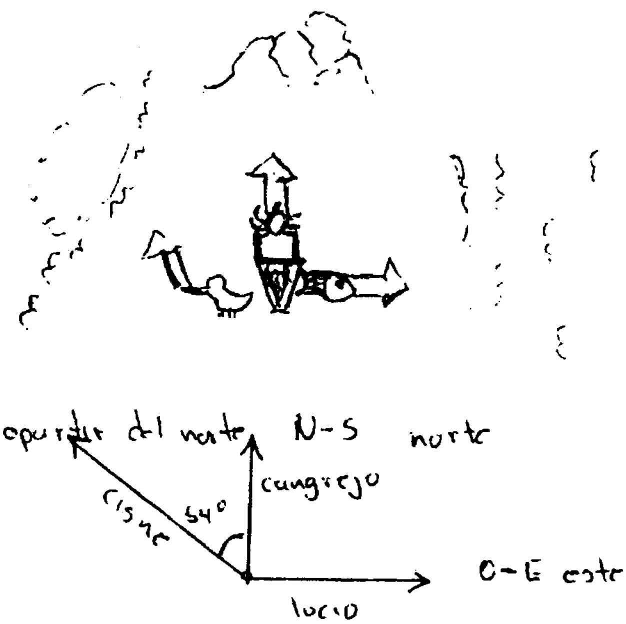


Figura A.11. Construcción gráfica de la solución. Establecimiento de condiciones particulares y planteamiento de la solución. Ilustración 3.

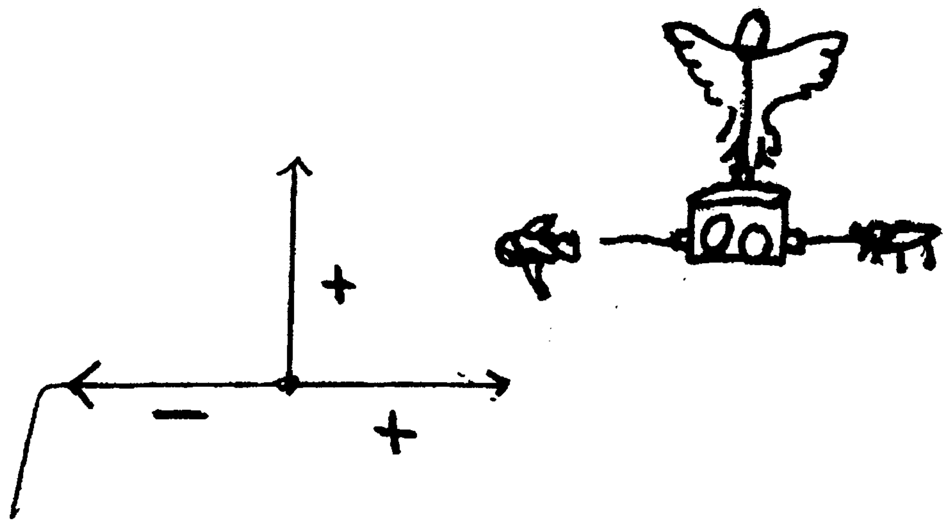


Figura A.12. Construcción gráfica de la solución. Establecimiento de condiciones particulares y planteamiento de la solución. Ilustración 4.

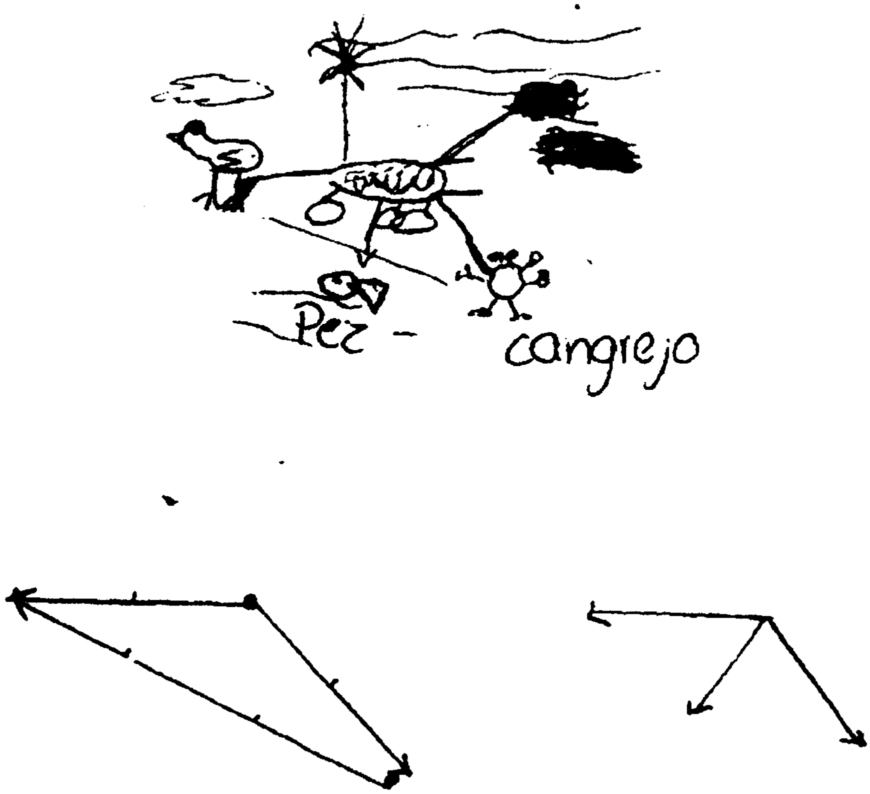


Figura A.13. Construcción gráfica de la solución. Planteamiento e interpretación de la solución. Ilustración 1.

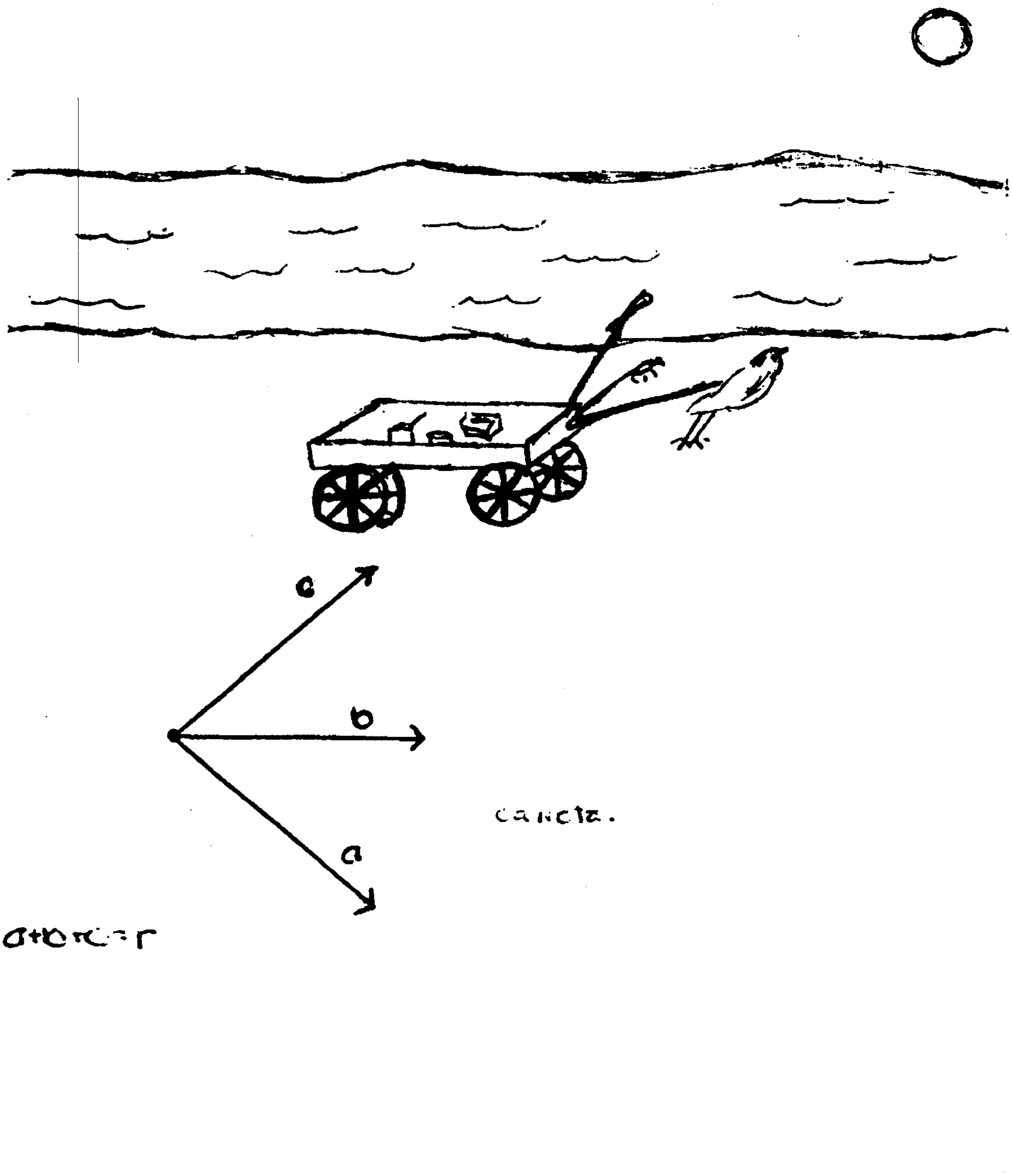


Figura A.14. Construcción gráfica de la solución. Planteamiento e interpretación de la solución. Ilustración 2.

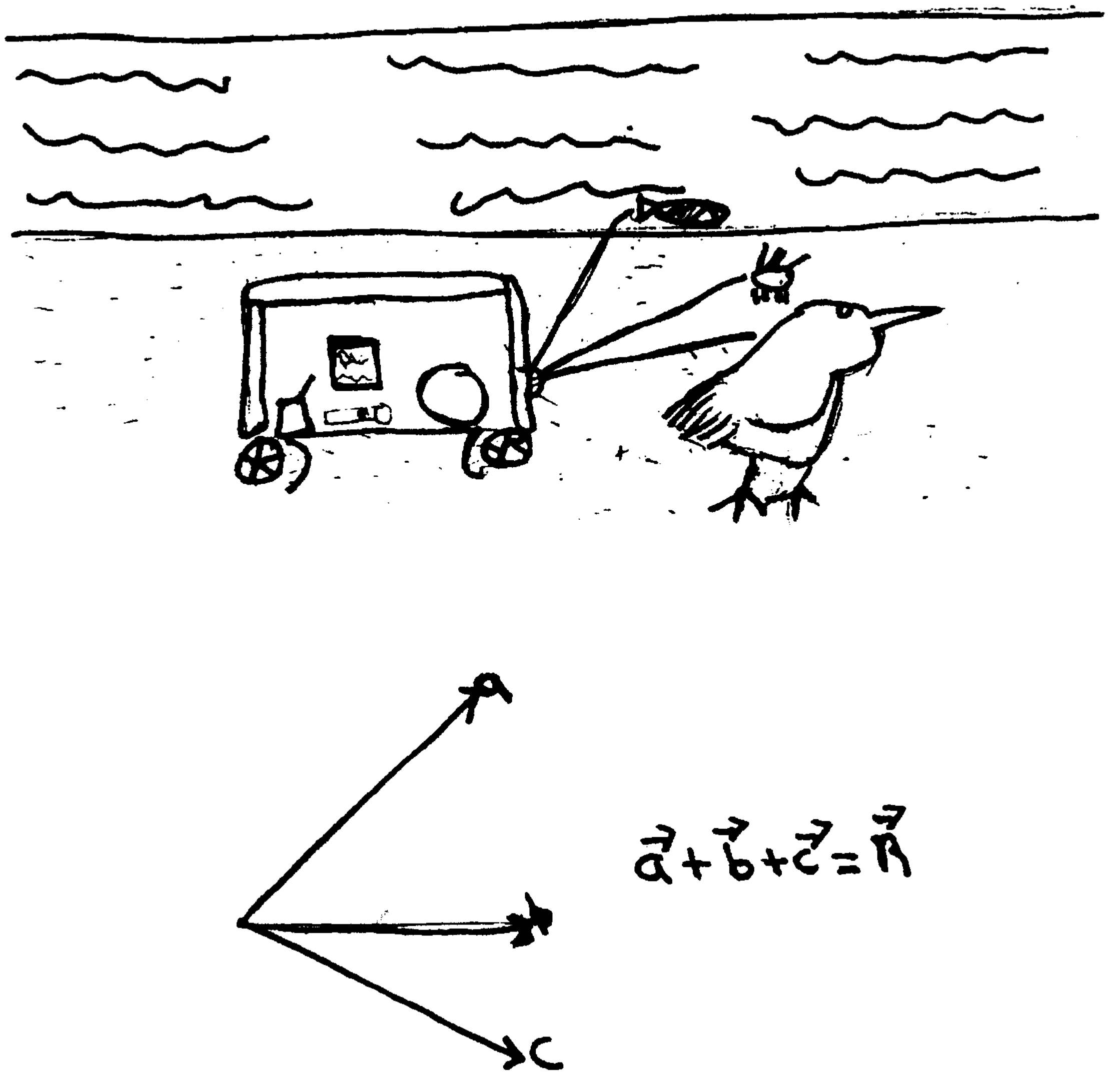


Figura A.15. Construcción gráfica de la solución. Planteamiento e interpretación de la solución. Ilustración 3.

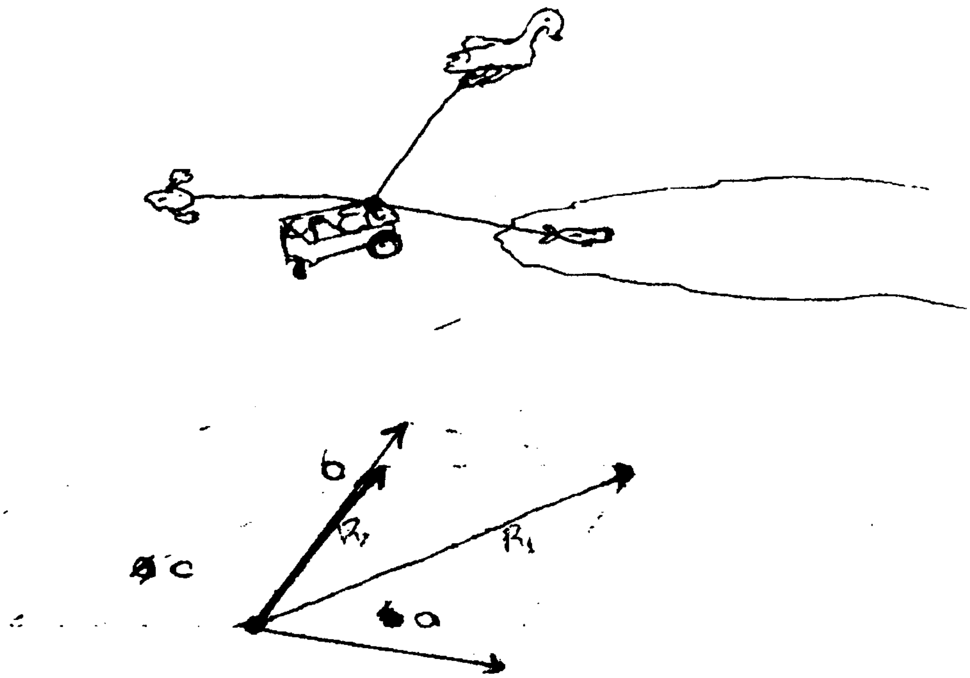


Figura A.16. Construcción gráfica de la solución. Planteamiento e interpretación de la solución. Ilustración 4.

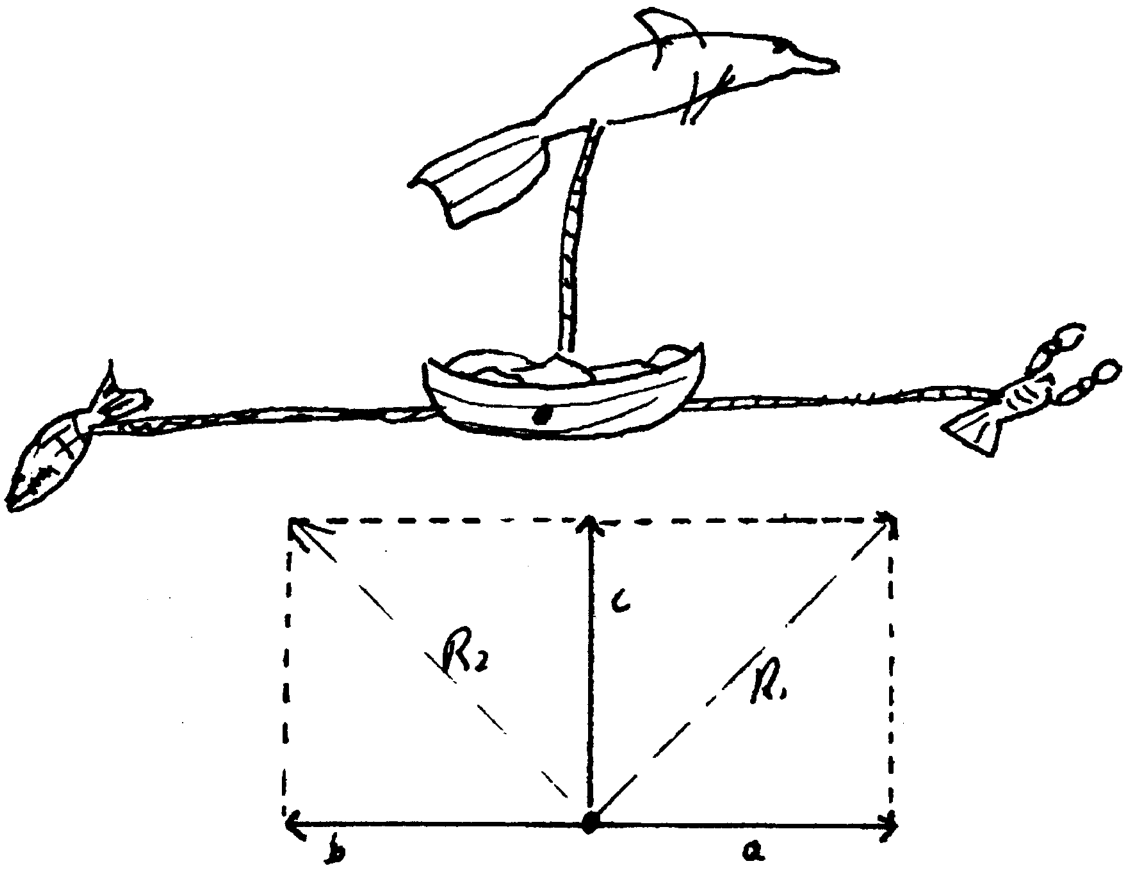
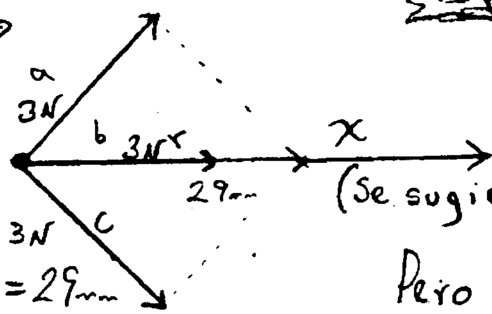


Figura A.17. Construcción gráfica de la solución. Planteamiento e interpretación de la solución. Ilustración 5.

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$\vec{a}+\vec{c}=\vec{r}$

$20_{mm}+20_{mm}=29_{mm}$



$\vec{r}+\vec{b}=x$

$\vec{29}+\vec{20}=\vec{49}_{mm}$

(Se sugieren cantidades indistintas)

Pero ni en mil años un cisne un cangrejo y un lucio moverían una carreta. Aunque, por ser una fábula...

Figura A.18. Construcción gráfica de la solución. Planteamiento e interpretación de la solución. Ilustración 6.

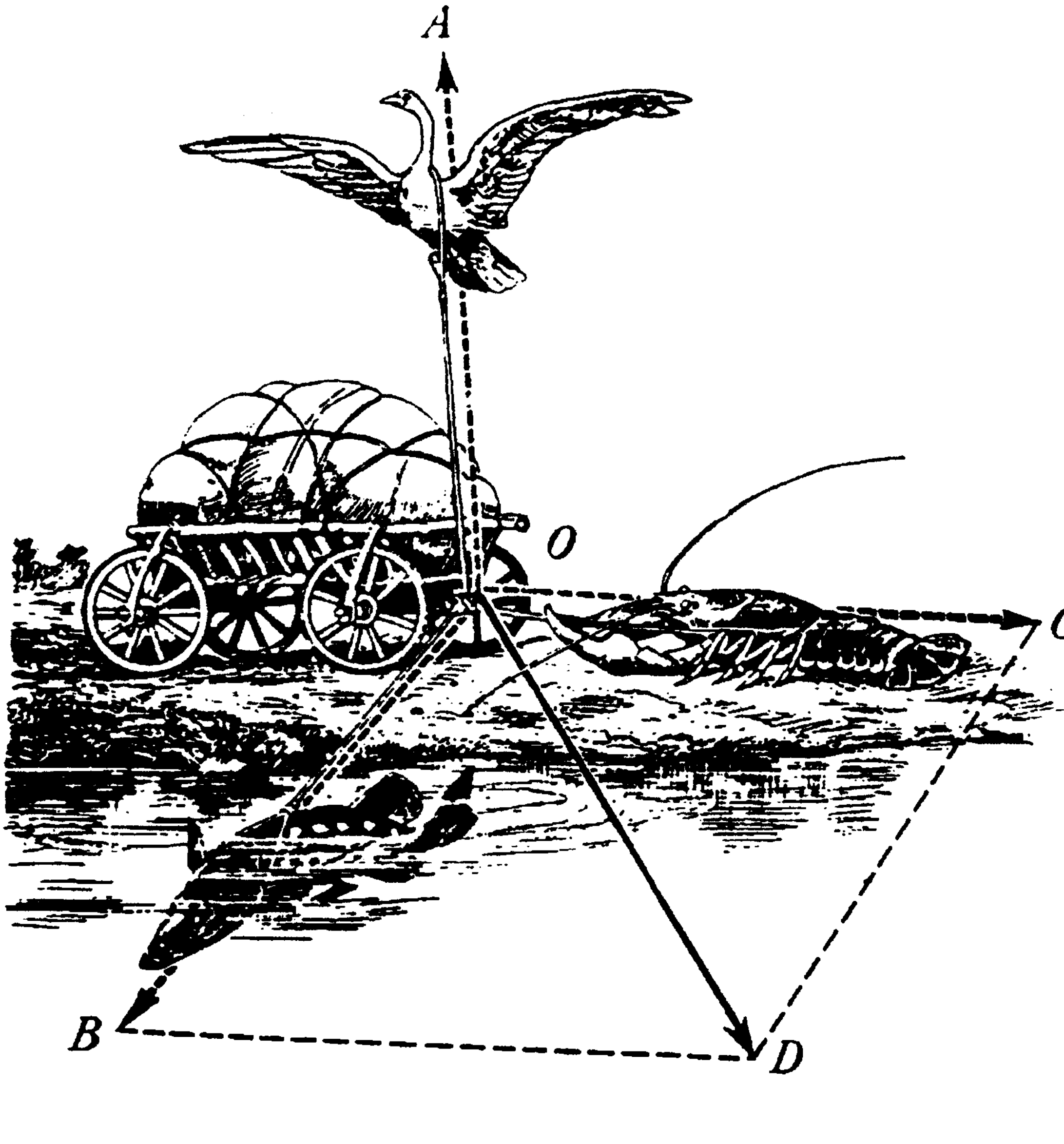


Figura A.19. Representación esquemática y vectorial de la solución propuesta por Y. Perelman (1988)