



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
QUERÉTARO

---

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DINÁMICA DE LA PENETRACIÓN CAPILAR EN  
ESTRUCTURAS COMPLEJAS.**

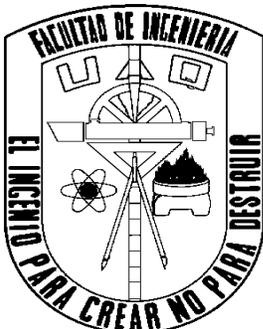
**T E S I S**

QUE COMO PARTE DE LOS REQUISITOS PARA OBTENER  
GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA**  
(Simulación Analítica y Experimental de Sistemas Físicos)

PRESENTA:

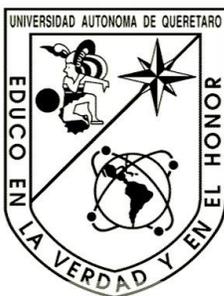
**MÁXIMO PLIEGO DÍAZ**



DIRECTOR: **DR. CARLOS FUENTES RUIZ.**

QUERÉTARO, MÉXICO.

MAYO, 2012.



# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO



## FACULTAD DE INGENIERÍA

### DINÁMICA DE PENETRACIÓN CAPILAR EN ESTRUCTURAS COMPLEJAS.

#### TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener grado de

#### DOCTOR EN INGENIERÍA (Simulación Analítica y Experimental de Sistemas Físicos)

Presenta

**MÁXIMO PLIEGO DÍAZ**

Dirigida por

**DR. CARLOS FUENTES RUIZ.**

Sinodales

Dr. Carlos Fuentes Ruiz  
Presidente

Dr. Enrique González Sosa  
Secretario

Dr. Eduardo Álvarez Mendiola  
Vocal

Dr. Domingo Gómez Meléndez  
Suplente

Dr. Abraham Medina Ovando  
Suplente

Dr. Aurelio Domínguez  
Director de la Facultad

Firma

Firma

Firma

Firma

Firma

Dr. Jined Torres Pacheco  
Director de Investigación de Posgrado

Centro Universitario  
Querétaro, Qro.  
Mayo 2012.  
México.

*Dedicatoria*

**A MÍ, MADRE.**

**A**

**RODRIGO Y FERNANDA**

**A MIS PADRES**

**ERNESTINA Y AARÓN**

**A MIS HERMANOS**

**DAVID, FRANCISCO, CESAR, LUISA Y ROBERTO**

**A TODOS MIS AMIGOS**

**PRESENTES, PASADOS Y FUTUROS**

**EN ESPECIAL A**

**ABRAHAM MEDINA OVANDO**

**A MI PANTEÓN PARTICULAR**

**EN ESPECIAL A LA MEMORIA DE**

**MI ABUELITA CARMEN,**

**MI AMIGO DANIEL ALEJANDRO ESCALANTE GRIS**

**MI PRIMO VÍCTOR SILVESTRE CASTILLO DÍAZ**

## *Agradecimientos*

Esta tesis fue elaborada en la Facultad de Ingeniería de la U.A.Q., bajo la dirección del **Dr. Carlos Fuentes Ruiz**, y la asesoría externa del **Dr. Abraham Medina Ovando**, a quienes agradezco su apoyo para ver realizado este proyecto.

Agradezco a los **Dres. Enrique González Sosa** (DIP-FI-UAQ), **Eduardo Álvarez Mendiola** (DIP-FI-UAQ) y **Domingo Gómez Meléndez** (Dpto. de Mecatrónica, UPQ), por sus valiosas críticas y comentarios al realizar la revisión de este trabajo.

Agradezco a la División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, todo el apoyo que se me brindo para poder realizar mis estudios de doctorado.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México, por haberme distinguido con el otorgamiento de una beca para realizar esta investigación doctoral.

Finalmente quiero agradecer al **Dr. Nicolás Caballero Guerrero** (q.p.d.), quien amablemente revisó la primera versión de este trabajo y fungió como evaluador en la presentación mi preexamen doctoral, en enero de 2011.

*“Lo importante es el Evangelio, no la persona que lo predica ni sus formas.”*

Anthony de Mello,  
Autoliberación interior,  
Ed. Lumen, Buenos Aires, 1988.

# Resumen

En esta tesis presentamos un estudio teórico de la penetración capilar de un líquido en micro y nanocanales rectos de sección transversal arbitraria, orientados tanto vertical como horizontalmente. También se estudia la conductividad hidráulica que interviene en la ley de Darcy generalizada para los suelos no saturados. Dichos estudios arrojan como resultado que la penetración capilar en micro y nano-canales rectos puede ser estudiada analíticamente por medio de los modelos generalizados de flujo unidimensional. Tales flujos de Poiseuille generalizados obedecen a la ecuación de Poisson; y los dos parámetros más importantes, es decir, la compacidad  $C$  y el factor de corrección geométrico  $\epsilon$ , pueden ser determinados explícitamente para secciones transversales complejas. Además vemos que la ley de penetración capilar  $l(t) \propto \sqrt{t}$  describe correctamente la penetración capilar espontánea en nanocanales de sección transversal rectangular [70]. Por otro lado, es posible encontrar todas las alturas de equilibrio, mediante el método de extrémales de la energía, que un líquido alcanza al penetrar de manera espontánea dentro de un tubo capilar de sección recta variable (se utilizan como parámetros de análisis el número de Bond ( $Bo$ ), el ángulo de mojado ( $\theta$ ) y el ángulo de inclinación  $\alpha$ , que ofrece la generatriz al frente de penetración). Finalmente se estudia la conductividad hidráulica mediante un modelo conceptual, lo que a su vez ha permitido establecer cuatro modelos particulares, que mediante una simplificación permiten reencontrar los cuatro modelos clásicos propuestos en la literatura especializada. Estos modelos han sido generalizados, de forma tal que las correcciones empíricas aportadas a los modelos clásicos de la conductividad hidráulica, relativa a la saturación, han encontrado una justificación en el formalismo de la geometría fractal. Dichas correcciones dependen del valor de la dimensión fractal de cada suelo.

*Descriptor:* Fenómenos de flujo a micro y nano escala; efectos capilares; flujo en capilares; porosidad areal y volumétrica; relación fractal área-volumen; factor de tortuosidad.

# Abstract

In this work, a theoretic study the filling kinetics of liquids in straight micro and nano-channels of arbitrary cross-sections and oriented in vertical or horizontal direction, is presented. Likewise, the hydraulic conductivity in the generalized Darcy's law on the non-saturated porous media is studied, too. The aforementioned studies provide as a result than the capillary penetration in right micro and nano-channels can be analytically studied by means of the generalized models of one-dimensional flow. The generalized Poiseuille's flows are described by the Poisson's equation. The two more important parameters, the dimensionless compactness  $C$  and the dimensionless geometrical correction factor  $\epsilon$ , can be determined explicitly for complex cross sections. Additionally, it is showed that spontaneous capillary liquid penetration in rectangular cross-section nano-channels is fine describe by the law  $l(t) \propto \sqrt{t}$ . On the other hand, it is showed that, by the method to energy's extremes, it is possible to find all the equilibrium liquid heights, for a liquid that rise spontaneously against gravity in capillary tube whit axisymmetric cross-section (it is used like parameters of analysis, the number of Bond ( $Bo$ ), the wetting or contact angle  $\theta$ , and the inclined angle that the generatrix line offer to the penetration front,  $\alpha$ ). Finally, it is studied the hydraulic conductivity by means by a conceptual model. This model allows establishing four particular models, and these models have allowed obtain the four classical models proposed in the specialized literature, by means of a simplification. The new four models have been generalized, and the empiric corrections introduced in the classical models for the hydraulic conductivity, relative to saturation, have found their justification in the fractal geometry formalism. And such corrections depend of the fractal dimension value for every porous media.

*Keywords:* Micro and nano- scale flow phenomena; capillary effects; capillary flows; areal and volumetric porosity; fractal area-volume relationship; tortuosity factor.

# Índice general

List of Figures	XIII
List of Tables	XVIII
Glossary	XIX
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Motivacion</b>	<b>6</b>
<b>3. Imbibición de flujos unidimensionales</b>	<b>15</b>
3.1. Fundamentos de la mecánica de fluidos . . . . .	15
3.1.1. Descripción de un fluido . . . . .	15
3.1.2. Ecuaciones de movimiento . . . . .	16
3.1.3. Condiciones a la frontera . . . . .	18
3.1.4. Números adimensionales. . . . .	19
3.1.5. El teorema Pi . . . . .	22

*Índice general*

3.1.6. Lubricación Fluidodinámica [43]. . . . .	25
3.2. Penetración Capilar Horizontal . . . . .	38
3.2.1. Ecuación de Poiseuille para una sección transversal arbitraria. . . . .	38
3.2.2. Flujo capilar en microcanales . . . . .	49
3.2.3. Flujo en nanocanales [77] . . . . .	58
3.3. Autoimbibición en canales verticales de sección transversal ejesimétrica . . . . .	62
3.3.1. Análisis del ascenso capilar en tubos de sección transversal ejesimétrica . . . . .	64
3.3.2. Alturas de equilibrio en capilares cónicos [81] . . . . .	75
<b>4. Flujo del agua en suelos</b>	<b>88</b>
4.1. Introducción . . . . .	88
4.2. La emergencia de la ley de Darcy. . . . .	90
4.2.1. Forma clásica . . . . .	91
4.2.2. Forma probabilística . . . . .	95
4.3. Relaciones entre las curvas de retención de humedad y de conductividad hidráulica de los suelos . . . . .	104
4.3.1. La curva de retención de humedad del suelo . . . . .	106
4.3.2. Curva característica de humedad del suelo. . . . .	108
4.3.3. Modelo conceptual de conductividad hidráulica . . . . .	112
4.3.4. El concepto de tortuosidad . . . . .	114

## *Índice general*

4.4. El suelo como un objeto fractal . . . . .	121
4.4.1. Definiciones . . . . .	121
4.4.2. Relación entre la dimensión fractal y la porosidad . . . . .	128
4.4.3. Las densidades . . . . .	131
4.4.4. Las porosidades parciales. . . . .	134
4.4.5. La semi-porosidad areal. . . . .	136
4.4.6. La tortuosidad local o capilar. . . . .	138
4.5. Modelos fractales de la conductividad hidráulica . . . . .	139
4.5.1. Modelo del 'poro pequeño' . . . . .	139
4.5.2. Modelo de la media geométrica . . . . .	140
4.5.3. Modelo del 'poro neutro' . . . . .	141
4.5.4. Modelo del 'poro grande' . . . . .	142
4.5.5. Modelos de la conductividad. . . . .	143
4.5.6. Comparación de los modelos. . . . .	147
4.6. Los modelos clásicos dentro de la geometría fractal . . . . .	149
4.6.1. La correlación global. . . . .	149
4.6.2. La tortuosidad global. . . . .	150
4.7. Formas cerradas de la conductividad hidráulica . . . . .	155

## **5. Conclusiones**

**158**

*Índice general*

**References**

**161**

# Índice de figuras

1.1.	<i>S</i> interfase fluida, <i>W</i> superficie de soporte; $\gamma$ es el ángulo existente entre las normales a las dos superficies [3]. . . . .	2
1.2.	Configuración de un tubo capilar [3]. . . . .	3
2.1.	Etapas del moldeo por microinyección de prepolímeros para construir microtelas (ver Fig. 2.2). Tomado de [25]. . . . .	10
2.2.	Microtelas de polímero hechas por moldeo por microinyección. Nótese la variedad de formas y de ángulos en estos materiales. Tomado de [25]. . . . .	11
2.3.	Esquema del mecanismo de penetración capilar, $l(t)$ es la longitud de penetración al tiempo $t$ . El microcanal tiene altura $h$ y la responsable de la penetración es la fuerza capilar $F_\sigma$ , $F_\mu$ es la fuerza de fricción viscosa. . . . .	11
2.4.	Sección transversal típica de un microcanal. En este caso el microcanal tiene altura $h$ y ancho $w$ y ambos tienen dimensiones de micras. . . . .	12
2.5.	Esquema del mecanismo de penetración capilar, $h$ es la altura de penetración capilar de equilibrio. El balance entre las fuerzas capilar $F_\sigma$ y gravitacional $F_g$ son las que la determinan. . . . .	12

## Índice de figuras

2.6.	Cuando la fuerza capilar provoca el ascenso de un líquido entre dos placas esquinadas, la superficie libre de éste adquiere una forma hiperbólica (Problema de Taylor). . . . .	13
2.7.	La interface se estabilizada por pilares fijadores (pin) con bordes: la presión en el agua (parte superior) es mayor que la que existe en el solvente (fondo). Este tipo de mecanismos se utiliza para mantener separadas sustancias que circulan por microcanales. . . . .	14
3.1.	Condiciones de contorno típicas para el análisis del flujo de un fluido viscoso y conductor del calor. . . . .	20
3.2.	Cojinete hidrostático. . . . .	26
3.3.	Patín bidimensional. . . . .	27
3.4.	Geometría de la capa tridimensional. . . . .	33
3.5.	Ejes y factores de escala. . . . .	35
3.6.	Volumen de contorno para la determinación de la ecuación de Reynolds. . . . .	36
3.7.	Sección transversal arbitraria $\Omega$ y la frontera $\partial\Omega$ de un tubo recto. En la frontera interior del tubo $\partial\Omega$ la velocidad se anula por la condición de adherencia. . . . .	39
3.8.	Gráfica de $\epsilon(C)$ para las tres geometrías de canal aquí consideradas: a) elipses ( $\circ$ ), b) rectángulos ( $\square$ ) y c) triángulos ( $\blacklozenge$ ). . . . .	45
3.9.	Canal de placas paralelas bajo (a) flujo capilar espontáneo en donde el ángulo de contacto $\theta < 90^\circ$ . (b) Flujo bajo la presión inicial $p_{in}$ en donde el ángulo de contacto es $\theta > 90^\circ$ . $\sigma$ es la tensión superficial. . . . .	52

Índice de figuras

3.10.	Frente de penetración capilar en un capilar cilíndrico circular bajo (a) flujo espontáneo $\theta < 90^\circ$ y (b) flujo capilar bajo la presión $p_{in}$ en cuyo caso $\theta > 90^\circ$ . $\theta$ es el ángulo de contacto entre el sólido y el líquido. . . . .	53
3.11.	Esquema del sistema de inyección de fluido en los microcanales, $H$ es el nivel de llenado. . . . .	55
3.12.	(a) Esquema de la salida del líquido de los microcanales. (b) Vista superior del microcanal rectangular, el liquido al salir es empujado por la presión $p_{in}$ y forzado a cambiar su ángulo de contacto hasta hacerse igual a $180^\circ$ ; en el límite el radio de curvatura se hace $R_1 = w/2$ . (c) Lo mismo ocurre en la vista lateral, en cuyo caso $R_2 = h/2$ . . . . .	56
3.13.	Imágen de microscópio electrónico de exploración (SEM) de las sección transversal de un nanocanal, tomada de Han et al [70]. La zona negra y delgada de enmedio mide 900 nanómetros de largo y 50 nanómetros de ancho. . . . .	59
3.14.	Gráfica de $l$ vs $t$ : la línea continua corresponde a la ley de Washburn utilizando el radio hidráulico $R_H$ (ecuación 3.114); $\square$ datos experimentales tomados del artículo de Han <i>et al</i> [70]; $\circ$ curva para una sección transversal elíptica, obtenida mediante la ecuación (3.113); y finalmente la curva discontinua se obtien de considerar una sección transversal rectangular de ancho $w = 900$ nm y altura $h = 50$ nm ecuación (3.97). . . . .	61
3.15.	Gráfica de la función $\xi^{n+1} + \xi$ (perfiles divergentes, i.e. $m > 0$ ), para $n = 1, n = 2, n = 3$ y $n = 4$ . . . . .	70
3.16.	Gráfica de la función $\xi^{n+1} - \xi$ (perfiles convergentes, i.e. $m < 0$ ), para $n = 1, n = 2, n = 3$ y $n = 4$ . . . . .	72

Índice de figuras

3.17. Forma esquemática de un capilar cónico de radio inicial  $r_0 = r(0)$  y ángulo interior  $\phi$  (ángulo entre el eje  $z$  y la generatriz del cono). La altura de equilibrio, que alcanza el líquido al penetrar desde  $z = 0$ , es  $h$ . (a) Cono divergente con buen mojado:  $m > 0$ ,  $0 \leq \theta < \pi/2$ ,  $h > 0$ ; (b) cono divergente con mal mojado:  $m > 0$ ,  $\pi/2 \leq \theta < \pi$ ,  $h < 0$ ; (c) cono convergente con buen mojado:  $m < 0$ ,  $0 \leq \theta < \pi/2$ ,  $h > 0$ ; (d) cono convergente con mal mojado:  $m < 0$ ,  $\pi/2 \leq \theta < \pi$ ,  $h < 0$ . . . . . 76

3.18. Gráfica de energía adimensional  $E^*$  en función de  $\xi$ , para un líquido que moja las paredes de un capilar cónico divergente ( $\phi > 0$ ).  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi_3$  son las alturas de equilibrio. . . . . 79

3.19. Gráficas de energía adimensional  $E^*$  en función de  $\xi$ , para un líquido que moja las paredes de un capilar cónico convergente ( $\phi < 0$ ): línea gruesa continua  $Bo = 0,10$ , línea delgada continua  $Bo = 0,139\ 62$ , (que es el número de Bond crítico), línea punteada  $Bo = 0,17$  y línea de círculos  $Bo = 0,20$ . . . . . 81

3.20. Gráfica de energía adimensional  $E^*$  en función de  $\xi$ , para un líquido que no-moja las paredes de un capilar cónico convergente ( $\phi < 0$ ). . . . . 82

3.21. Gráficas de energía adimensional  $E^*$  en función de  $\xi$ , para un líquido que no-moja las paredes de un capilar cónico divergente ( $\phi > 0$ ): línea gruesa continua  $Bo = 0,08$ , línea delgada continua  $Bo = 0,108\ 52$ , (número de Bond crítico), línea punteada  $Bo = 0,16$  y línea de círculos  $Bo = 0,20$ . . . . . 83

3.22. Diagrama de fase en el plano  $\phi - \theta$  (ángulo de inclinación de la generatriz del cono vs. ángulo de mojado), con  $Bo = 0,08$  y  $|\phi^*| = 1^\circ$ . 86

Índice de figuras

3.23. Representación esquemática de las alturas o depresiones de equilibrio estable, deducidas mediante el método de balance de presiones  $h_p$  [32] ( $\xi_2$  en este trabajo), y su contraste con la nueva altura o depresión de equilibrio estable deducida aquí mediante el método de extremales de la energía  $h_e$ , ( $\xi_1$  en este trabajo). (a) Conos convergentes ( $\phi < 0$ ), con buen mojado ( $0 \leq \theta < \pi/2$ ),  $h > 0$ . (b) Conos divergentes ( $\phi > 0$ ), con mal mojado ( $\pi/2 \leq \theta < \pi$ ),  $h < 0$ . . . . . 87

4.1. Presión superatmosférica y subatmosférica abajo y arriba de una superficie libre de agua (Hillel [111]). . . . . 108

4.2. Curva característica de humedad (curva frontera de mojado) para sable de l'isere (Haverkamp [116]) . . . . . 110

4.3. La Histéresis: a) curva frontera de mojado; b) curva frontera de secado; c) curvas primarias de secado; d) curvas primarias de mojado; e) curvas interiores (Childs [115]) . . . . . 111

4.4. Un corte en el suelo perpendicular a la dirección macroscópica de flujo. Los radios de los poros son caracterizados en cada cara por  $r$  y  $\rho$ . 113

4.5. El concepto de tortuosidad: i) la velocidad  $v$  es referenciada a la trayectoria  $z$  del movimiento; ii) la velocidad  $v_f$  es referenciada a la trayectoria "tortuosa" del movimiento. . . . . 116

4.6. Los triángulos semejantes formados por los radios y las velocidades. 118

# Índice de cuadros

4.1.	La potencia $p$ de corrección de los modelos de la conductividad hidráulica, que resulta de los efectos de la correlación de los poros ( $p_1$ ) y del factor de tortuosidad ( $p_2$ ), de acuerdo con la ecuación (4.155), para algunos valores de la porosidad volumétrica total. . . . .	154
------	---	-----

# Glosario

## Nomenclatura y símbolos

$a$	radio del orificio de salida del fluido o semieje mayor de una elipse
$A$	área superficial
$b$	semieje menor de una elipse
$Bo$	número de Bond
$c_p$	calor específico
$C$	compacidad
$Ca$	número Capilar
$\mathbf{F}_\sigma$	fuerza capilar
$\mathbf{F}_\mu$	fuerza de fricción viscosa
$g$	aceleración gravedad (magnitud)
$\mathbf{g}$	vector aceleración de la gravedad
$h$	altura de capilaridad
$\mathbf{j}$	vector densidad de flujo másico

## Glosario

$l$	longitud de penetración capilar horizontal
$L$	dimensión característica del microaparato
$Ma$	número de Mach
$\mathbf{n}$	vector normal
$p$	presión
$P$	perímetro
$q_i$	componente $i$ -ésima del flujo de calor
$Q$	gasto
$r$	radio
$R_i$	radio de curvatura $i$ -ésimo
$R_{hid}$	resistencia hidráulica
$Re$	número de Reynolds
$S$	interface fluida
$t$	tiempo
$T$	temperatura
$u$	campo de velocidades adimensional
$v$	velocidad del fluido (magnitud)
$\mathbf{v}$	velocidad del fluido (vector)
$V$	volumen

## Glosario

$w$	ancho de canal
$W$	superficie de soporte
$We$	número de Weber
$(x, y, z)$	coordenadas cartesianas
$(r, \theta, z)$	coordenadas cilíndricas
$df$	elemento diferencial de superficie (magnitud)
$d\mathbf{f}$	elemento diferencial vectorial de superficie
$dV$	elemento de volumen
$dt$	variación con respecto del tiempo
$\nabla$	operador nabra
$\delta_{ij}$	delta de Kronecker
$\epsilon$	factor de corrección geométrica
$\mu$	viscosidad dinámica o porosidad areal total
$\gamma$	ángulo entre normales a dos superficies
$\theta$	ángulo de contacto o razón de volumen de los poros a volumen total del suelo
$\kappa$	difusividad térmica
$\varkappa$	razón de fuerza de cuerpo a viscosa
$\rho$	densidad volumétrica

## Glosario

$\varrho$	razón entre las dimensiones longitudinales de las secciones transversales
$\sigma$	tensión superficial
$\sigma_{ij}$	tensor de esfuerzo
$\pi$	número adimensional
$\phi$	porosidad volumétrica total
$\Pi_{ij}$	tensor simétrico
$\Omega$	sección transversal arbitraria

### Subíndices:

$i, j, k$	componentes de vectores y tensores, según sea el caso
$n$	componente normal
$\tau$	componente tangencial

# Capítulo 1

## Introducción

Las observaciones registradas de la penetración espontánea de líquidos en tubos finos bajo la acción de la gravedad se pueden remontar por lo menos a las épocas medievales; el fenómeno que desafiaba inicialmente su explicación se designó por el término en latín *capillus*, que significa pelo [1, 2]. En siglos posteriores se entendió claramente que la mayoría de los fenómenos capilares comparten la característica de ser algo que sucede siempre que dos materiales se sitúan de manera adyacente y no se les permite mezclarse. Se utiliza el término *superficie capilar* para describir la interfaz (o entre cara) que ocurre cuando uno de los materiales es un líquido y el otro un líquido o un gas. Para configuraciones físicas tales como los tubos capilares, las interfaces ocurren también entre éstos materiales y las paredes de los sólidos rígidos.

Thomas Young fue el primero (en 1805, [3]), que introdujo el concepto matemático de la curvatura media  $H$  de una superficie y quién demostró su importancia para la capilaridad relacionándola con el cambio de la presión a través de la superficie:  $\nabla p = 2\sigma H$ , con  $\sigma$  igual a la tensión de la superficie. Young también razonó que si el líquido descansa sobre una superficie de soporte  $W$ , entonces la superficie fluida  $S$  se encuentra con  $W$  a un ángulo que dependía solamente de los materiales y no del

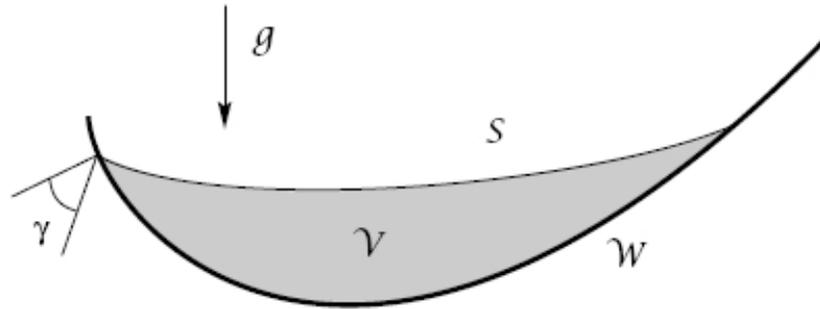


Figura 1.1:  $S$  interfase fluida,  $W$  superficie de soporte;  $\gamma$  es el ángulo existente entre las normales a las dos superficies [3].

campo de la gravedad, la forma de la superficie, o la forma o el grueso de  $W$ ; véase la Fig. 1.1.

Young derivó con estos conceptos y de las leyes de la hidrostática la primera aproximación correcta para la altura de la subida en el centro de un tubo capilar circular de radio pequeño  $a$  inmerso verticalmente en un baño líquido grande:

$$h_0 = \frac{2 \cos \gamma}{\kappa a}, \quad \kappa = \frac{\rho g}{\sigma} \quad (1.1)$$

aquí  $\rho$  es el cambio de densidad a través de la superficie libre, y  $g$  la magnitud de la aceleración gravitacional.

El fenómeno de la penetración capilar despertó un gran interés a finales del siglo diecinueve debido a que, mediante el filtrado en papel se podía separar el soluto del solvente en algunas soluciones, o que se podría explicar la permeabilidad de determinados fluidos en ciertos medios, como el agua o el aceite en la tierra o la impregnación de la lana u otros materiales con líquidos, o la determinación de la porosidad y verdadera densidad de los materiales porosos; además de que ofrecía un

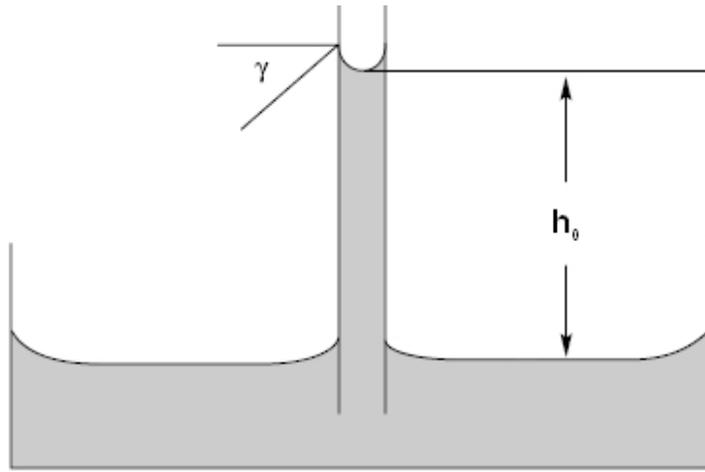


Figura 1.2: Configuración de un tubo capilar [3].

nuevo método para medir la tensión superficial o la viscosidad en los líquidos.

En la actualidad se considera que el fenómeno de la penetración de un líquido viscoso en un tubo capilar vertical es la base para entender los anteriores fenómenos [1, 4, 5, 6, 7], por lo cual, su estudio bajo diversas condiciones geométricas [8, 9, 10, 11], de temperatura [12], concentración [13] y de tamaño físico de los sistemas [14, 15, 16] es muy importante.

Los primeros estudios de la dinámica de la penetración capilar en cilindros de sección transversal circular y en medios porosos hechos de papel o arena fueron realizados a principios del siglo pasado por Bell y Cameron [4] en 1906, Lucas [5] en 1918 y Washburn [6] en 1921. Todos ellos realizaron estudios en capilares verticales y horizontales y encontraron que, para alturas de penetración pequeñas en capilares verticales, o para cualquier longitud de penetración en los capilares horizontales, la posición del frente del líquido,  $l$ , se correlaciona con el tiempo transcurrido,  $t$ , de manera que

$$l \propto \sqrt{t}. \tag{1.2}$$

La constante de proporcionalidad es una función de la viscosidad dinámica del líquido, de la tensión superficial, del ángulo de contacto y de la forma geométrica y tamaño de la sección transversal del capilar.

En esta tesis presentamos un estudio teórico que generaliza este resultado para a) diferentes tipos de formas geométricas de secciones transversales de tubos o canales capilares y b) sistemas de dimensiones micro y nanométricas. Ambos aspectos son muy importantes en una nueva área de la mecánica de fluidos llamada la *microfluidica* porque cada vez más los aparatos y los procesos se miniaturizan llegando inclusive a tener flujos en la escala micro ( $10^{-6}$  m) y nano ( $10^{-9}$  m). Esta motivación física será discutida en el siguiente capítulo, pero lo que cabe que señalemos aquí es que los resultados que encontramos concuerdan muy bien con diferentes aspectos experimentales de los microflujos capilares en canales micrométricos de sección transversal no circular, los cuales fueron realizados por otros autores [14, 15, 16]. De hecho, los resultados que no concuerdan con nuestras predicciones teóricas (ver capítulo 5, sección 5.5), pueden servir como motivación para explorar más cuidadosamente aspectos ambiguos de los resultados experimentales como la existencia de varios ángulos de contacto en microcanales con partes hechas de diferentes materiales.

La división de esta tesis es la siguiente: en el capítulo 2 presentamos la motivación que da origen a este trabajo y brevemente algunos ejemplos relevantes de aplicaciones tecnológicas en las que el fenómeno de la penetración capilar a escala micrométrica es de gran utilidad. En el capítulo 3 desarrollamos la teoría de la imbibición de fluidos unidimensionales en capilares rectos, de sección transversal variable y orientados tanto horizontal como verticalmente, mostrando los fundamentos de la mecánica de fluidos necesarios su análisis. En el capítulo 4 desarrollamos un estudio teórico de la conductividad hidráulica que interviene en la ley de Darcy generalizada a los suelos

## *Capítulo 1. Introducción*

no saturados, partiendo del hecho de que las leyes de Poiseuille y Darcy describen el movimiento del agua en los niveles microscópico y macroscópico, respectivamente. Mostramos un par de vías para la emergencia de la ley macroscópica a partir de la ley microscópica. Así mismo desarrollamos los fundamentos la geometría fractal con el fin de obtener un modelo conceptual y a partir de ella se obtienen diferentes modelos particulares de la conductividad hidráulica. Tanto en el capítulo 3, como en el 4, se presentan de forma extensa los resultados mencionados, referentes a las tres principales aplicaciones que se desarrollaron en este trabajo y que consistieron en la cinética del llenado de líquidos en nano canales horizontales de sección transversal arbitraria, la obtención de ecuaciones que determinan las alturas de equilibrio para la auto-imbibición de líquidos en tubos capilares eje simétricos y la determinación de cuatro modelos teóricos de la infiltración en el medio poroso. Finalmente, en el capítulo 5 presentamos las principales conclusiones y posible trabajo futuro relacionado con el flujo capilar en microcanales.

# Capítulo 2

## Motivacion

Los microaparatos tienden a comportarse de forma diferente a los objetos macroscópicos que manejamos en nuestra vida diaria. Las fuerzas volumétricas, por ejemplo, son por lo general muy pequeñas, y los efectos superficiales tienden a dominar el comportamiento de los sistemas pequeños. Las fuerzas electrostáticas y los efectos viscosos debidos al aire o al líquido de los alrededores se hacen cada vez más importantes cuando los aparatos se hacen más pequeños. En general, las propiedades ( $p$ ) que son función del área de interacción ( $A$ ) decrecen más lentamente que las propiedades que dependen del volumen ( $V$ ), como se expresa por la *ley del cuadrado y el cubo* [17]

$$\frac{p_1(A)}{p_2(V)} \propto \frac{L^2}{L^3} \propto \frac{1}{L}, \quad (2.1)$$

donde  $L$  es la dimensión característica del microaparato; por ejemplo, si  $L = 1 \mu\text{m}$ , un orden típico de ésta magnitud es  $10^6 \text{ m}^2/\text{m}^3$ . Los efectos de tensión superficial son dominantes a estas escalas y sistemas como las microbombas y microválvulas se fabrican usando este principio [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. En el moldeado por microinyección con un micromolde de inserción se desarrolla un flujo con estas características el cual es muy importante en las industrias de microsistemas debido

## Capítulo 2. Motivación

a la producción económica y en masa de microcomponentes para las más diversas aplicaciones. Reportes recientes [14, 17, 25] indican que microproductos, tales como, microtelas, conectores de cinta de fibra óptica, cubiertas de microbombas, envases celulares, y otros más, se producen por tecnología de moldeo por microinyección.

A manera de ejemplo, en la Fig. 2.1 mostramos esquemáticamente el proceso de moldeo de microtelas ideado por Whitesides y sus colaboradores en la Universidad de Harvard [25]. En el esquema se observa cómo un molde de Polidimetilsiloxano (PDMS) es cortado y montado sobre un sustrato de Si/SiO<sub>2</sub>. Después una gota de prepolímero (fluido newtoniano de baja viscosidad, es decir, un líquido similar al agua fluyendo) de poliuretano es puesta a la entrada de los microcanales de dimensiones  $3 \times 1.5 \mu\text{m}$  la cual, por capilaridad (penetración espontánea), entra en los microcanales formando (después de la cura por calentamiento) microfibras de polímero.

En la Fig. 2.2 mostramos una variedad de microtelas visualizadas por medio de un microscopio electrónico. En tal figura es notable la variedad de formas lo cual es indicativo de la amplia variedad de microcanales que pueden ser empleados para obtener dichos materiales. Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos, los flujos que dan origen a estas formas llenan bien a los microcanales y son muy eficientes ya que a dicha escala no se observan defectos.

Como se puede ver del proceso de fabricación de microtelas, el diseño de las microcavidades y de los microcorredores requiere de un buen conocimiento del flujo que los habrá de llenar. El problema típico es ilustrado en la Fig. 2.3, en donde ya sea una cierta cantidad de líquido, o un líquido proveniente de un gran recipiente (en cuyo caso habrá una presión inicial  $p_{in}$ ) entra por capilaridad al canal de altura  $h$  y ancho  $w$  (ver Fig. 2.4) debido a la fuerza capilar  $\mathbf{F}_\sigma$ , la fuerza de fricción viscosa  $\mathbf{F}_\mu$  limita (frena) el flujo y el problema es determinar el frente de avance,  $l$ , en función del tiempo transcurrido,  $t$ , para una amplia variedad de geometrías de canal.

## Capítulo 2. Motivación

Lo común en estos casos ha sido realizar estudios numéricos con software comercial [14, 15, 26] en donde no es claro el tipo de ecuaciones que se usan ni las condiciones de frontera, las cuales son muy importantes porque son ellas las que determinan, como veremos en esta tesis, las características principales del flujo.

Recientemente Kim et al [14, 15] propusieron, acelerar la inyección de los líquidos en los microcanales aprovechando la presión hidrostática de los depósitos de líquido que se conectan a los microcanales. Dichos experimentos [14, 15] y estudios recientes de otros autores [16] muestran que esto es posible si el nivel de llenado es suficientemente alto como para vencer a la presión capilar, originada por el goteo justo a la salida de los microcanales, y la cual puede llegar a ser muy alta y provocar el fenómeno de bloqueo, esto es, la interrupción del flujo hacia afuera de los microcanales. Los estudios numéricos de Kim et. al. [14, 15], efectuados en los estudios mencionados aquí, sólo permiten encontrar el resultado obvio de que, la presión de inyección debe de superar a la presión capilar. Sin embargo en dichos artículos no se hace ningún análisis de los aspectos geométricos o de la evolución del ángulo de contacto que lleva a resultados físicos generales inherentes a tales sistemas. Aspectos de este tipo son considerados en el presente trabajo, a partir de las ecuaciones de flujo unidimensional de Poiseuille para geometrías complejas y de las condiciones de frontera, a través de la presión capilar.

Por otro lado la penetración capilar de un líquido que moja, bien o mal, a las paredes de un tubo capilar vertical o, en el caso más general, a las diversas paredes de un espacio capilar [1, 8, 9, 11, 25, 27, 30, 28, 29], es un fenómeno muy común y de gran interés en áreas de estudio tan diversas como son la micro y nonofluídica [1, 25, 78], el mojado de medios porosos [27, 28, 31], la creación de superficies hidrófilas o hidrófobas [32, 33], la recuperación de petróleo [34, 35], el transporte de líquidos en plantas [36], etc. El ascenso capilar está relacionado con la diferencia de presión a través del menisco del líquido, de manera que es posible alcanzar alturas de equilibrio

## Capítulo 2. Motivación

cuando la presión hidrostática iguale a la presión capilar.

El problema típico es ilustrado en la Fig. 2.5, en donde ya sea una cierta cantidad de líquido, o un líquido proveniente de un gran recipiente (en cuyo caso habrá una presión inicial  $p_{in}$ ) entra por capilaridad al canal debido a la fuerza capilar  $\mathbf{F}_\sigma$ , la cual compensa a la fuerza de gravedad  $\mathbf{F}_g$ , la cual limita (frena) el flujo, produciéndose así el equilibrio de las mismas y con ello determinando las alturas de equilibrio.

Sin embargo, las alturas de equilibrio pueden determinarse también por medio de métodos de extrémales de la energía [37, 38], aunque éstos son de utilidad sólo cuando los líquidos pueden considerarse como no viscosos o cuando el efecto de las pérdidas viscosas es despreciable. En particular, en la caracterización de las alturas de equilibrio éste es el caso porque justo en los puntos críticos ocurre también un balance entre la fuerza gravitatoria y la capilar sin consideración del valor de la viscosidad del líquido [1, 28, 29, 37, 38]. En sistemas donde los efectos disipativos son importantes éste método requiere de modificaciones sustanciales las cuales están fuera del alcance de este trabajo.

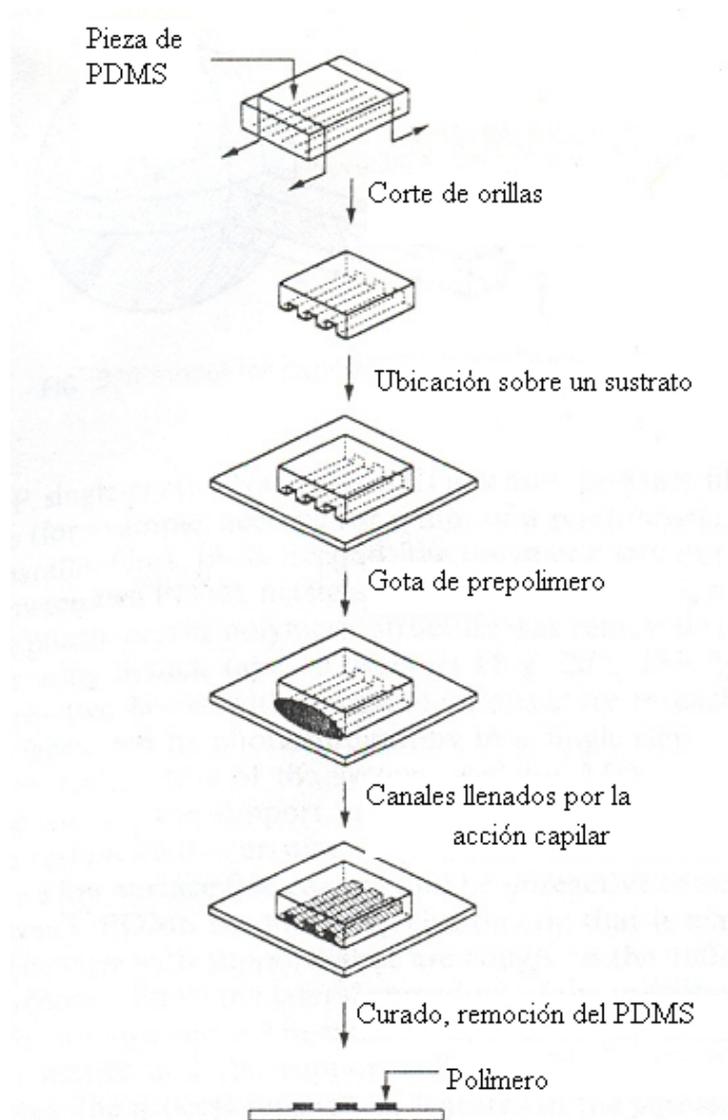


Figura 2.1: Etapas del moldeo por microinyección de prepolímeros para construir microtelas (ver Fig. 2.2). Tomado de [25].

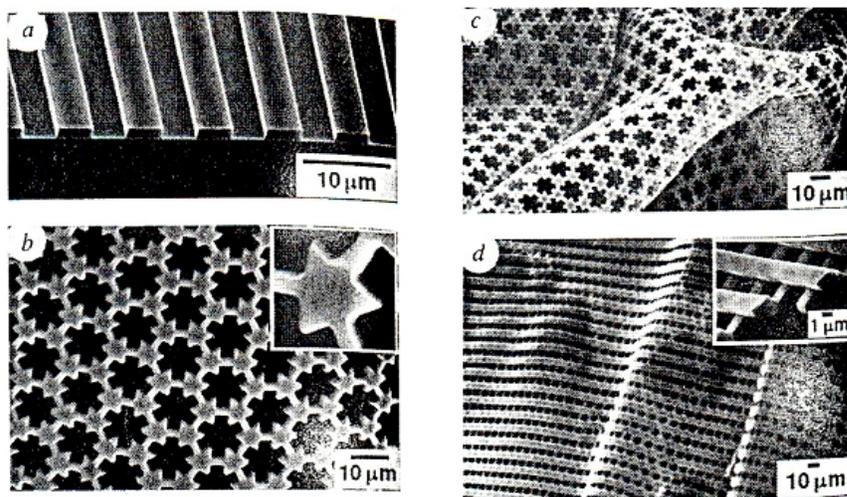


Figura 2.2: Microtelas de polímero hechas por moldeo por microinyección. Nótese la variedad de formas y de ángulos en estos materiales. Tomado de [25].

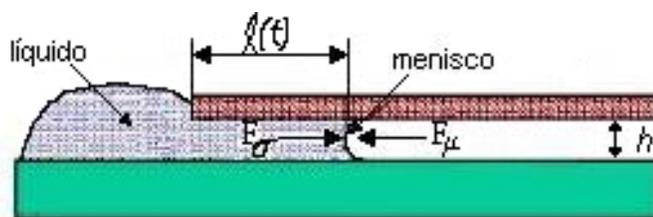


Figura 2.3: Esquema del mecanismo de penetración capilar,  $l(t)$  es la longitud de penetración al tiempo  $t$ . El microcanal tiene altura  $h$  y la responsable de la penetración es la fuerza capilar  $F_\sigma$ ,  $F_\mu$  es la fuerza de fricción viscosa.

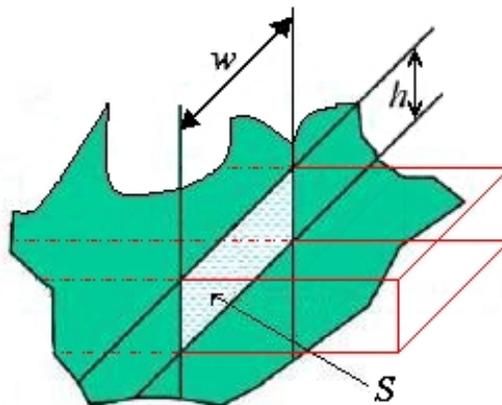


Figura 2.4: Sección transversal típica de un microcanal. En este caso el microcanal tiene altura  $h$  y ancho  $w$  y ambos tienen dimensiones de micras.

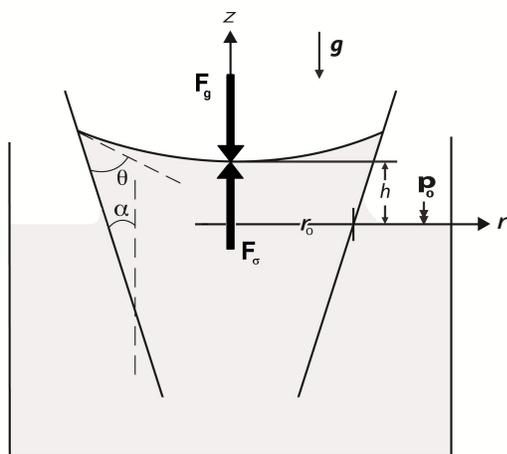


Figura 2.5: Esquema del mecanismo de penetración capilar,  $h$  es la altura de penetración capilar de equilibrio. El balance entre las fuerzas capilar  $F_\sigma$  y gravitacional  $F_g$  son las que la determinan.

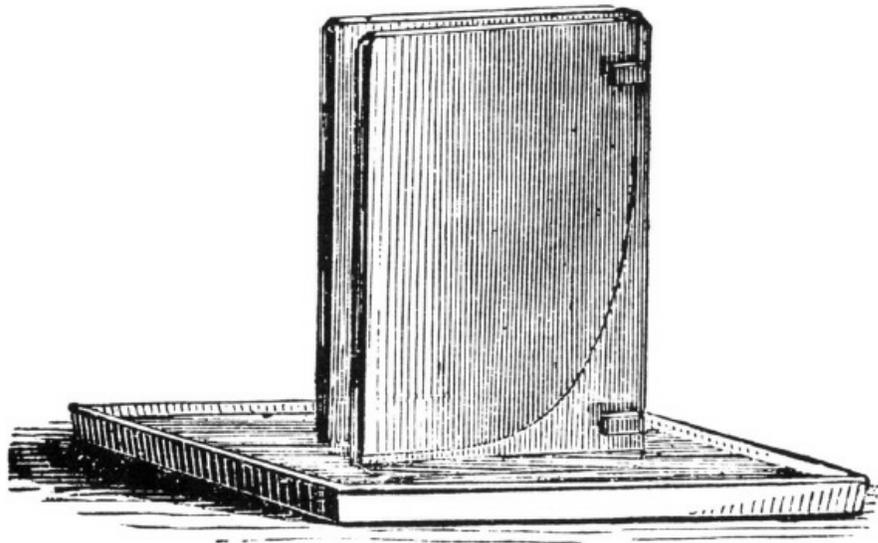


Figura 2.6: Cuando la fuerza capilar provoca el ascenso de un líquido entre dos placas esquinadas, la superficie libre de éste adquiere una forma hiperbólica (Problema de Taylor).

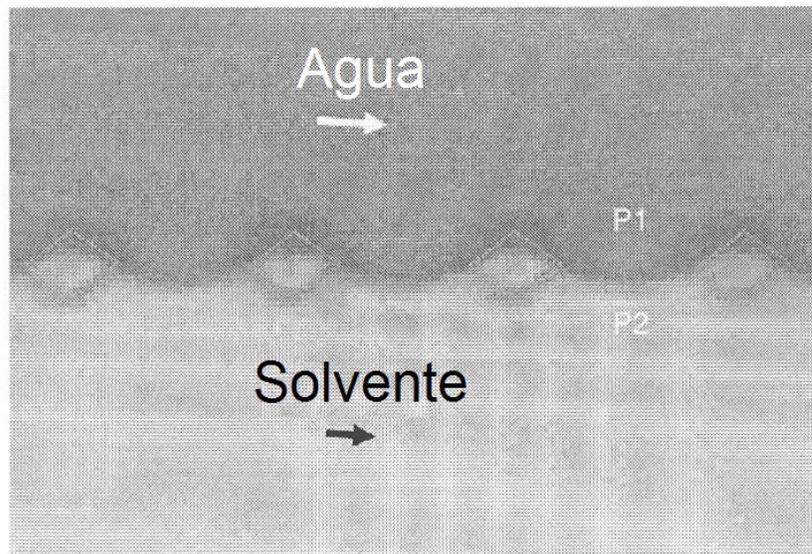


Figura 2.7: La interface se estabilizada por pilares fijadores (pin) con bordes: la presión en el agua (parte superior) es mayor que la que existe en el solvente (fondo). Este tipo de mecanismos se utiliza para mantener separadas sustancias que circulan por microcanales.

# Capítulo 3

## Imbibición de flujos unidimensionales

### 3.1. Fundamentos de la mecánica de fluidos

#### 3.1.1. Descripción de un fluido

El estudio de los fluidos (líquidos y gases) y los fenómenos que ocurren en ellos constituye la esencia de lo que se denomina mecánica de fluidos [39, 40, 41, 42, 43]. Los fenómenos ocurren a escala mucho mayor que la longitud de camino libre medio (distancia media entre colisiones moleculares [40]), por lo que un fluido se considera como un medio continuo. Esto nos indica que cualquier elemento de volumen pequeño de fluido es suficientemente grande para contener un número elevado de moléculas. En otras palabras, en esta tesis, cuando hablemos de volúmenes muy pequeños, con lo que comparamos dichos volúmenes, es contra volúmenes de paralelepípedos con lados mucho mayores que la longitud del camino libre medio entre moléculas. De la misma manera, cuando hablamos de las partículas o los puntos en un fluido, no nos

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

referimos a una molécula en particular sino a sistemas muchas moléculas juntas.

Cuando describimos el estado de un fluido en movimiento, dicha descripción se realiza con funciones que dan la distribución de velocidades del fluido  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  y de dos magnitudes termodinámicas cualesquiera que pertenezcan al fluido, por ejemplo, la presión  $p(x, y, z, t)$  y la densidad  $\rho(x, y, z, t)$ . Lo anterior se debe a que todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas, al ser dadas dos cualesquiera de ellas junto con una ecuación de estado; de aquí que, si se tienen cinco magnitudes determinadas, en este caso las tres componentes de la velocidad  $\mathbf{v}$ , la presión  $p$ , y la densidad  $\rho$ , queda totalmente determinado el estado del fluido en movimiento.

En general, todas las magnitudes son funciones de las coordenadas espaciales  $x, y, z$  y del tiempo  $t$ ; a menos que se diga algo diferente, ésta es la manera como se van a manejar las magnitudes de aquí en adelante. También es necesario resaltar que la velocidad  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  se refiere a la velocidad del fluido en un punto determinado por las coordenadas y a un instante de tiempo determinado; es decir, se refiere a puntos fijos en el espacio y no a partículas fijas del fluido; en el curso del tiempo, estas últimas se estarán moviendo en el espacio. Lo mismo hay que decir para  $p$  y  $\rho$ .

#### 3.1.2. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos son las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía. La ecuación que expresa la conservación de la materia se llama ecuación de continuidad. La densidad  $\rho$  del fluido y su campo de velocidades  $\mathbf{v}$  obedecen la relación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.1)$$

Para un flujo incompresible ( $Ma^2 \ll 1$ , donde  $Ma = v/a$ , es el *número adimensional de Mach* del flujo; el límite comúnmente aceptado es  $Ma \leq 0.3$  [40]), la ecuación de

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

continuidad toma la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.2)$$

La ecuación del movimiento de un fluido viscoso, newtoniano e incompresible, que expresa el principio de conservación del momento lineal es

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad (3.3)$$

en donde  $\mathbf{g}$  es el vector de aceleración de la gravedad, . En esta última ecuación  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido.

El cociente

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (3.4)$$

se denomina viscosidad cinemática y a la ecuación vectorial (3.3) se le denomina la ecuación de Navier-Stokes.

La ecuación de conservación de la energía puede expresarse, para un fluido newtoniano e incompresible como

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = -\kappa \nabla^2 T + \frac{\nu}{2c_p} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right)^2, \quad (3.5)$$

en esta última ecuación  $T$ ,  $\kappa$  y  $c_p$ , son la temperatura, la difusividad térmica y el calor específico a presión constante del fluido, respectivamente.

Cuando en un sistema dado el flujo es isotérmico ( $T = cte.$ ) y la fricción viscosa no produce cambios significativos en la temperatura, la ecuación de conservación de energía se anula idénticamente y para la descripción del flujo sólo se requieren las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes. Si éste no es el caso, es necesario entonces resolver el sistema planteado por el conjunto de ecuaciones ( 3.2), (3.3) y (3.5).

### 3.1.3. Condiciones a la frontera

Las ecuaciones de continuidad, de Navier-Stokes y de energía deben de satisfacer un conjunto de condiciones a la frontera para tener un problema bien formulado en términos de ecuaciones diferenciales parciales. Para la velocidad, debe de satisfacerse que

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

sobre una superficie sólida sin movimiento, a esta condición para la velocidad se le conoce como la condición de adherencia o no deslizamiento.

Cuando hay una superficie de separación entre dos zona de un fluido, debe haber igualdad de velocidades normales a través de esta superficie, de modo que no aparezcan huecos entre las zonas del fluido, así como continuidad en las velocidades tangenciales de cada una de las zonas. También debe haber equilibrio mecánico en la interfase. Lo cual implica que los esguerezos viscosos tangenciales a la superficie de separación deben ser iguales

$$\sigma'_{nj,1} = \sigma'_{nj,2}, \text{ con } n \text{ fija y } j \neq n,$$

así como el echo de que en dicha superficie, también debe satisfacerse la continuidad de los esfuerzos normales

$$-(\sigma'_{nn,1} - \sigma'_{nn,2}) - (p_1 - p_2) = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (3.7)$$

donde  $p_i$  es la presión en el fluido  $i = 1, 2$ ,  $\sigma'_{nn,i}$  es la componente normal del esfuerzo viscoso en el fluido  $i$ ,  $\sigma$  es la tensión superficial entre el fluido 1 y el 2 y  $R_1$  y  $R_2$  son

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

los radios principales de curvatura de la superficie de separación. La forma explícita de  $\sigma'_{ik}$  para un fluido newtoniano compresible es

$$\sigma'_{ik} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right). \quad (3.8)$$

En caso de que el flujo ocurra también con diferentes temperaturas en cada uno de los fluidos adyacentes a la interfase de separación, las condiciones de frontera serán entonces, respectivamente, la de continuidad de la temperatura en cada zona fluida y la de continuidad de la componente normal del flujo de calor, *i.e.*,

$$T_1 = T_2, \quad (3.9)$$

donde  $T_i$  es la temperatura en la zona  $i$  y

$$(q_1)_n = (q_2)_n, \quad (3.10)$$

donde  $(q_i)_n = -k(\partial T/\partial n)_i$  es la componente normal del flujo calor en la zona  $i$  y  $k$  es la conductividad térmica. Esto debido a que no se puede almacenar calor en una superficie de espesor infinitesimal [41].

En los capítulos que siguen utilizaremos estas ecuaciones de flujo viscoso para describir la penetración capilar en micro canales, la base de esta descripción será el llamado flujo de Poiseuille en diversos tipos de canales.

#### 3.1.4. Números adimensionales.

En Ingeniería, el comportamiento de líquidos es frecuentemente descrito en términos de número sin dimensiones los cuáles comparan la importancia de propiedades físicas diferentes. El número Bond  $Bo = \Delta\rho g L^2 / \sigma$ , con  $\Delta\rho$  la diferencia en la

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

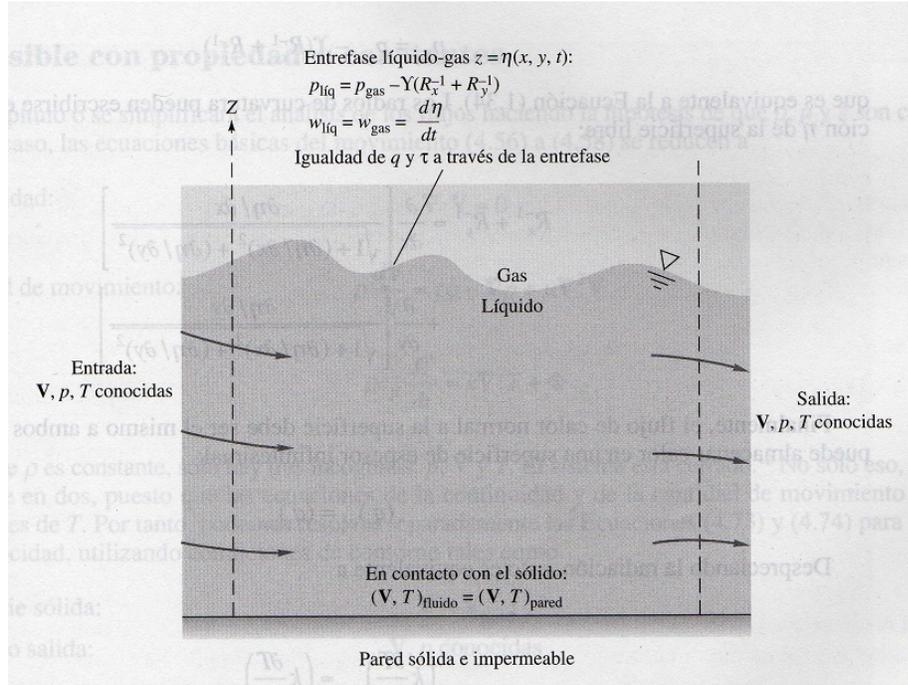


Figura 3.1: Condiciones de contorno típicas para el análisis del flujo de un fluido fluido viscoso y conductor del calor.

densidad de masa entre los dos fluidos,  $g$  la aceleración gravitacional,  $L$  una escala característica de longitud, y  $\sigma$  el coeficiente de tensión superficial, compara las fuerzas gravitacionales y de superficie [44]. En aplicaciones del microfluidica,  $Bo \ll 1$  generalmente, esto quiere decir que los efectos gravitacionales pueden estar ignorados. El número Reynolds  $Re = \rho\nu L/\mu$ , dónde  $\rho$  es la densidad de masa,  $\mu$  la viscosidad dinámica y  $\nu$  la velocidad promedio del fluido, compara las fuerzas de inercia y viscosa. Generalmente, en microfluidica  $Re < 1$  [45]. Una tercera cantidad es el número de Weber, el cual compara fuerzas de inercia y la de superficie:  $We = \rho\nu^2 L/\sigma$ . También  $We < 1$  en la mayoría de aplicaciones en la microescala. A partir de las definiciones y magnitudes típicas de  $Re$  y  $We$ , se deduce que la inercia generalmente se vuelve poco importante cuando la geometría de flujo está por debajo de las dimensiones del rango de las micras [46]. Las excepciones incluyen flujos

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

con velocidades muy altas como algunas veces ocurran en el flujo enfocando y los dispositivos de co-flujo [46], y en el momento de la desintegración de gotas. De otra manera las fuerzas dominantes en la microescala son las fuerzas de superficie y las viscosas.

La magnitud relativa de estas dos últimas fuerzas es representada por el número Capilar  $Ca$  (sin dimensiones), expresado por  $Ca = \mu\nu/\sigma$ . Aquí  $\mu$  es generalmente la viscosidad del fluido más viscoso en el sistema bifásico,  $\nu$  es la velocidad de esta fase, y  $\sigma$  es la tensión superficial entre las fases, como antes. Intrínsecamente, la tensión en la interfaz tiende a reducir el área interfacial, lo cual es crucial en la formación de gotas y también para su subsiguiente estabilidad. En muchas situaciones de flujo, las fuerzas viscosas actúan para extender y contraer la interfaz [47]. Para  $Ca$  bajos ( $< 1$ ) la tensión de la interfaz domina, y las gotitas obtenidas son esféricas. En el contraste, Para  $Ca$  altos ( $\gg 1$ ) las fuerzas viscosas juegan un papel importante, conduciendo a la deformación de las gotas y algunas veces generan formas asimétricas. En corrientes líquidas de co-flujos, los números altos de  $Ca$  pueden inducir una transición entre panoramas diferentes de la generación de gotas [48, 49]. En algunos casos de  $Ca$  alto, una arquitectura completamente diferente de flujo, llamado flujo estratificado, puede ocurrir [50, 51].

Históricamente, la primera persona en escribir extensamente sobre unidades y el razonamiento dimensional en las relaciones físicas fue Euler en 1765. Las ideas de Euler estaban muy adelantadas a su tiempo, como lo fueron aquellas de Joseph Fourier, quién en su libro de 1822 *Teoría Analítica del Calor* esbozó lo que es ahora llamado el *principio de homogeneidad dimensional* y aun desarrolló algunas leyes de similitud para el flujo del calor. No hubo más avances significativos hasta el libro de Lord Rayleigh de 1877, *Teoría del Sonido*, donde propuso un “método de dimensiones” y dio varios ejemplos de análisis dimensional. El gran adelanto final que estableció el método como le conocemos hoy es generalmente atribuido a E.

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

Buckingham en 1914 [52], cuyo escrito esbozó lo que ahora se denomina el *Teorema Pi de Buckingham* para describir parámetros sin dimensiones. Sin embargo, ahora se sabe que un francés, A. Vaschy, en 1892 y un ruso, D. Riabouchinsky, en 1911 publicaron escritos independientes reportando resultados equivalentes al teorema pi. Siguiendo el escrito de Buckingham, P. W. Bridgman publicó un libro clásico en 1922 [53], esbozando la teoría general del análisis dimensional. El tema sigue siendo controversial porque hay mucho arte y sutileza al utilizar el análisis dimensional. Así, desde Bridgman han sido publicados muchos libros sobre el tema [54, 55]. La utilidad del análisis dimensional no se limita a la mecánica de los fluidos o a la ingeniería. Se han escrito libros especializados donde el análisis dimensional ha sido aplicado a la metrología [56], astrofísica [57], economía [58], construcción de modelos a escala [59], química [60], hidrología [61], medicación [62], medicina clínica [63], plantas piloto de procesado químico [64], ciencias sociales [65], ciencias biomédicas [66], farmacia [67], geometría fractal [68], e incluso al crecimiento de las plantas [69]. Claramente éste es un tema que conviene aprender para muchas carreras profesionales.

#### 3.1.5. El teorema Pi

Existen muchos métodos para reducir una serie de variables dimensionales en un número más reducido de grupos adimensionales. El procedimiento que se expone aquí fue propuesto por Buckingham [52] en 1914 y se conoce como el *Teorema Pi de Buckingham*. El término pi proviene de la notación matemática  $\Pi$ , que significa un producto de variables. Los parámetros adimensionales encontrados con el teorema son productos de potencias denominadas  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ , etc. El método permite determinar estos parámetros en orden secuencial sin necesidad de recurrir a exponentes libres.

La primera parte del teorema Pi explica cuál es la reducción de variables esperada:

Si un proceso físico satisface el PHD y relaciona  $n$  variables dimensionales, se

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

puede describir mediante una relación entre sólo  $k$  variables adimensionales. La reducción  $j = n - k$  es igual al máximo número de variables que no pueden formar un grupo adimensional entre ellas y es siempre menor o igual que el número de dimensiones que describen estas variables.

La segunda parte del teorema muestra cómo encontrar los parámetros adimensionales:

Para encontrar la reducción  $j$ , se seleccionan  $j$  variables que no puedan formar un parámetro adimensional entre ellas. Cada parámetro adimensional deseado estará formado por el producto de potencias de estas  $j$  variables con una variable adicional a la que se le asigna un exponente conveniente no nulo. Todos los grupos adimensionales así determinados son independientes.

Con objeto de aclarar lo dicho, suponga que el proceso establece una relación entre cinco variables:

$$v_1 = f(v_2, v_3, v_4, v_5). \quad (3.11)$$

Suponga además que hay tres dimensiones  $\{MLT\}$  y después de una inspección adecuada se encuentra que  $j = 3$ . Entonces,  $k = 5 - 3 = 2$  y, por tanto, habrá dos, y sólo dos, grupos adimensionales. Elegimos tres variables, por ejemplo,  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$ , que no puedan formar un grupo adimensional entre ellas. Según esto, los dos grupos adimensionales estarán formados por esas tres variables más una variable adicional distinta para cada uno,  $v_1$  y  $v_5$ , respectivamente

$$\Pi_1 = (v_2)^a (v_3)^b (v_4)^c v_1 = M^0 L^0 T^0 \quad \Pi_2 = (v_2)^a (v_3)^b (v_4)^c v_5 = M^0 L^0 T^0$$

Se ha escogido, arbitrariamente, exponente unidad para  $v_1$  y  $v_5$ . Agrupando los exponentes de las distintas dimensiones e igualándolos a cero, el teorema Pi garantiza un valor único de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para cada grupo adimensional. Además son independientes,

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

porque  $v_1$  sólo aparece en  $\Pi_1$ , y  $v_5$  sólo en  $\Pi_2$ . Es un procedimiento claro y sistemático una vez que uno se ha acostumbrado al mismo.

Normalmente, hay que dar seis pasos:

1. Hacer una lista de las  $n$  variables que aparecen en el problema. Si se omite alguna variable importante, fallará el análisis dimensional.
2. Escribir las dimensiones de cada variable de acuerdo con el sistema utilizado  $\{MLT\Theta\}$  o  $\{FLT\Theta\}$ .
3. Determinar  $j$ . Se elije inicialmente  $j$  igual al número de dimensiones diferentes que aparecen en el problema y se buscan  $j$  variables que no puedan formar un grupo adimensional. Si no se les encuentra, se reduce  $j$  en una unidad y se busca de nuevo. Con cierta práctica, se encontrará  $j$  rápidamente.
4. Se selecciona un grupo de  $j$  variables que no puedan formar un grupo adimensional, tratando de que parezcan las satisfactorias y, a ser posible, que tengan bastante generalidad, porque aparecerán en la mayoría de los grupos adimensionales. Se elije la densidad, velocidad o longitud. No se elije la tensión superficial, por ejemplo, ya que en caso contrario se obtendrán varios números de Weber independientes, lo que será molesto.
5. Se añade una variable adicional a las  $j$  variables y se forma un producto de potencias. Se determinan algebraicamente los exponentes que hacen al producto adimensional. Se intenta disponerlos de forma que las variables *dependientes* (fuerza, incremento de presiones, par, potencia) aparezcan en el numerador, de modo que su representación gráfica sea más sencilla. Se repite esto secuencialmente, con una variable nueva cada vez y encontrará todos los  $n - j = k$  grupos adimensionales buscados.
6. Se escribe la función adimensional resultante y se comprueba que todos los

grupos son realmente adimensionales.

### **3.1.6. Lubricación Fluidodinámica [43].**

#### **Caso bidimensional.**

Se conoce desde hace mucho tiempo que la presencia de una película de lubricante entre dos superficies que se mueven una respecto a la otra, reduce apreciablemente la fricción entre ambas. Las películas de lubricante se encuentran, normalmente, entre dos superficies sólidas sometidas a fuerzas que tienden a juntarlas. Para soportar esta fuerza, sin que exista contacto entre ambas superficies, la película de lubricante debe realizar un esfuerzo normal que, salvo casos triviales, es la parte más significativa del tensor de esfuerzos. Esta capacidad de soportar esfuerzos normales está generada por la propia viscosidad del fluido.

Hay muchos tipos de cojinetes lubricados con fluidos, pero básicamente se dividen en dos: los cojinetes de empuje, también llamados hidrostáticos, y los cojinetes hidrodinámicos.

Los cojinetes hidrodinámicos obtienen su capacidad de carga por el movimiento relativo de sus superficies. Los tipos básicos de estos cojinetes son los deslizantes (o patines) en los que el movimiento relativo consiste en el desplazamiento de una superficie sobre la otra; otras veces el movimiento relativo es un desplazamiento normal de ambas superficies (a veces pulsantes); y en general es un movimiento transversal y longitudinal de una superficie relativa a otra, como es el caso de cojinetes formados por un eje que gira en el interior de una carcasa.

Analicemos el movimiento de un líquido que separa dos superficies sólidas de

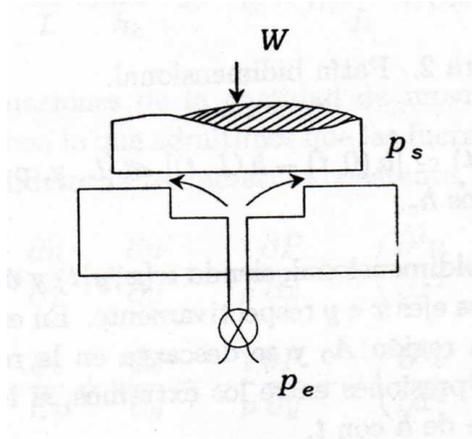


Figura 3.2: Cojinete hidrostático.

dimensión infinita en la dirección  $z$  normal al plano (Fig. 3.3). Una de las superficies es plana (plano  $x - z$ ) y se mueve con velocidad constante  $U_0$  en la dirección del eje  $x$ . La otra superficie puede desplazarse en la dirección del eje  $y$  y de modo que la distancia que la separa del plano  $x - z$  es  $h(x, t)$ .

Si  $h(0, t) \sim h(L, t)$ , entonces  $[h(0, t) - h(L, t)] \ll L$ . Para abreviar, al orden de magnitud  $h(x, t)$  le denominaremos  $h_c$ . El movimiento de este sistema es bidimensional, siendo  $u(x, y, t)$  y  $v(x, y, t)$  las componentes de la velocidad en la dirección de los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente. En este movimiento el líquido entra en la película procedente de la región  $A_0$  y se descarga en la región  $A_1$ , forzado por el arrastre de la placa, la diferencia de presiones entre los extremos, si la hubiese, y el efecto de “aplastamiento” debido a la variación de  $h$  con  $t$ .

Como es fácil de ver, el orden de magnitud de las variaciones de velocidad  $u$  a lo largo del eje  $x$

$$\Delta_x u = |u(0, y, t) - u(L, y, t)|, \quad (3.12)$$

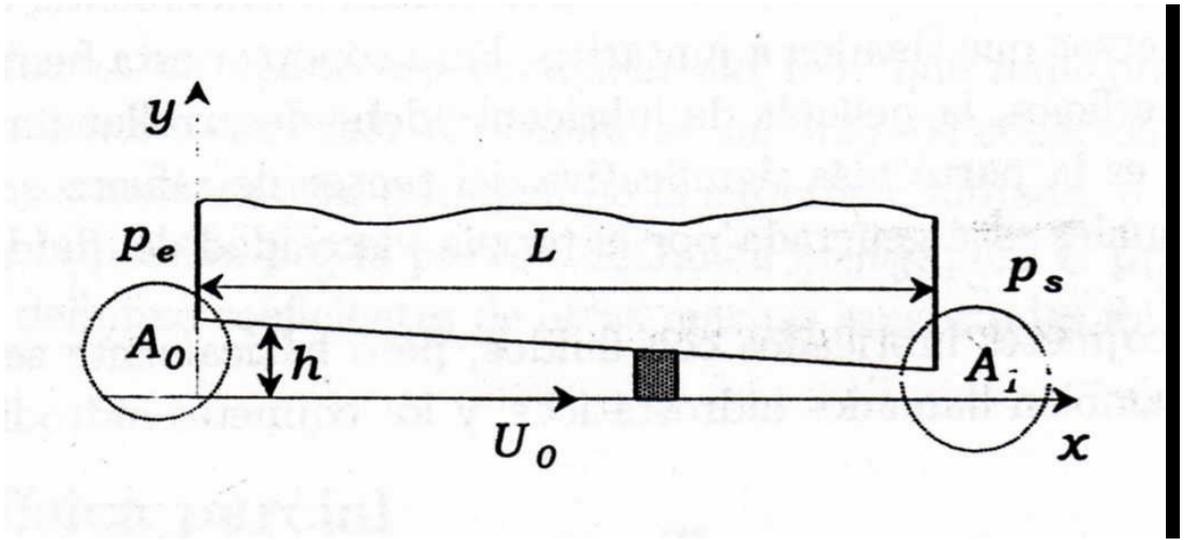


Figura 3.3: Patín bidimensional.

son del mismo orden que la propia velocidad  $U_c$ , y por el principio de conservación de masa

$$u(0, y, t) h(0, t) \sim u(L, y, t) h(L, t) \quad (3.13)$$

por lo que

$$\frac{u(L, y, t) - u(0, y, t)}{u(0, y, t)} \sim \frac{\Delta_x u}{U_c} \sim \frac{h(0, t) - h(L, t)}{h_c} \sim 1 \quad (3.14)$$

Del mismo modo, el orden de magnitud de las variaciones de velocidad  $u$  a lo largo del eje  $y$

$$\Delta_y u = |u(x, 0, t) - u(x, h, t)|, \quad (3.15)$$

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

es también del orden de  $U_c$ , ya que  $u(x, 0, t) = U_0$  y  $u(x, h, t) = 0$ . Si  $U_0$  fuese nula (no hay arrastre de la placa)  $u$  sería nula en  $y = 0$  y en  $y = h$  y, en este caso, la velocidad  $U_c$  sería debida a la variación de  $h$  con  $t$ , o la diferencia de presiones impuesta  $p_e - p_s$ .

Análogamente, las variaciones de velocidad  $v$  a lo largo del eje  $y$  son del orden de la propia velocidad transversal, que denominaremos  $v_c$ , ya que se anula en  $y = 0$  y vale  $\partial h / \partial t$  en  $y = h$ .

El gasto volumétrico a través de cualquier sección transversal a la película líquida debe ser constante. El gradiente de presiones que aparece por el denominador “efecto cuña” (variación de  $h$  con  $x$ ) es el que proporciona las sobrepresiones necesarias para mantener las superficies separadas (si  $h$  decrece en la dirección del movimiento). De aquí que:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.16)$$

lo que nos indica que

$$\frac{U_c}{L} \sim \frac{v_c}{h_c} \implies v_c \sim U_c \frac{h_c}{L} \ll U_c. \quad (3.17)$$

Escribiendo las ecuaciones de la cantidad de movimiento según los dos ejes, con  $P = p + \rho U$  la presión motriz (las fuerzas gravitacionales derivan del potencial  $U$ ) y con  $\mu$  constante, al considerar la temperatura constante, tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.18)$$

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (3.19)$$

donde los órdenes de magnitud de cada uno de los términos de la ecuación de cantidad de movimiento según el eje  $x$  son

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{U_c/t_c} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}}_{U_c^2/L} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}}_{\Delta_L P/\rho L} + \underbrace{v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{vU_c/L^2} + \underbrace{v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{vU_c/h_c^2} \quad (3.20)$$

donde podemos observar que el término viscoso más importante es  $\partial^2 u/\partial y^2$ . Por otro lado para el fenómeno de la lubricación el número de Reynolds efectivo es mucho menor que la unidad (salvo en casos excepcionales), lo cual es consecuencia de que  $h_c/L \ll 1$ , por lo que para que los efectos viscosos sean dominantes, es necesario que

$$\frac{\rho U_c h_c^2}{\mu L} \ll 1 \text{ y que } \frac{h_c^2}{v t_c} \ll 1, \quad (3.21)$$

Por lo que si referimos todos los términos de la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección  $x$ , al más importante de los viscosos tenemos que

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{h_c/vt_c} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\rho U_c^2 h_c^2/\mu L} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}}_{(\Delta_L P)h_c^2/\rho U_c L} + \underbrace{v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{(h_c/L)^2} + \underbrace{v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{O(1)}, \quad (3.22)$$

de modo que la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección del eje  $x$  queda reducida a

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.23)$$

donde el gradiente de presiones según el eje  $x$ , tan importante como el que más, es del orden de

$$\Delta_L P \sim \frac{\mu U_c L}{h_c^2}. \quad (3.24)$$

Procediendo de forma análoga con la ecuación de cantidad de movimiento según el eje  $y$ ,

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{h_c^2/vt_c} + u \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}}_{\rho U_c^2 h_c^2 / \mu L} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}}_{(\Delta_L P) h_c^2 / \rho U_c L} + v \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{(h_c/L)^2} + v \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{O(1)}, \quad (3.25)$$

donde se hace uso de la condición  $v_c = U_c (h_c/L)$ . Las variaciones transversales en la presión  $\Delta_T P$  son del orden

$$\Delta_T P \sim \frac{\mu U_c}{L}, \quad (3.26)$$

que comparadas con las variaciones longitudinales nos proporcionan

$$\frac{\Delta_T P}{\Delta_L P} \sim \frac{\mu U_c / L}{\mu U_c L / h_c^2} \sim \left( \frac{h_c}{L} \right) \ll 1 \quad (3.27)$$

se obtiene que las variaciones espaciales de presión motriz en el sentido transversal son despreciables frente a las que encontramos a lo largo de la capa, por lo que en

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

primera aproximación la presión motriz no varía transversalmente, de modo que diremos que  $P = P(x, t)$  y el sistema de ecuaciones que determina la dinámica de este fenómeno será

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad (3.28)$$

Dado que  $P$  no depende de  $y$  en primera aproximación, la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección de  $x$  puede integrarse con respecto a  $y$ , obteniéndose

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y(y-h) + U_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right), \quad (3.29)$$

ecuación a la que se han impuesto las condiciones de contorno  $u(x, 0, t) = U_0$  en  $y = 0$  y  $u(x, h, t) = 0$  en  $y = h$ .

La distribución de velocidades resultante, dada por la ecuación anterior, es la superposición de una corriente de Couette, asociada al movimiento de la placa, y una de Poiseuille proporcional al gradiente de presiones local, este es el denominado efecto cuña que se indicó anteriormente.

Si utilizamos ahora el principio de la conservación de la masa en forma integral aplicado a un volumen de control (por unida de longitud perpendicular al plano del movimiento), formado por la parte de la película situada entre  $x$  y  $x + dx$ , de modo que

$$dx \frac{\partial h}{\partial t} + q(x + dx, t) - q(x, t) = 0, \quad (3.30)$$

obtendremos que

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (3.31)$$

Siendo

$$q = \int_0^h u(x, y, t) dy = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{U_0 h}{2}, \quad (3.32)$$

resultando

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{U_0 h}{2} \right) = 0, \quad (3.33)$$

que es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden para determinar  $P(x, t)$ , y que se denomina ecuación de Reynolds de la lubricación en dos dimensiones. Esta última ecuación debe integrarse con las condiciones de contorno  $P(0, t) = P_e$  y  $P(L, t) = P_s$ .

Observe que la ecuación (3.33) es lineal en  $P$  y que no se necesitan condiciones iniciales puesto que no aparece  $\partial P/\partial t$  en la ecuación y  $h(x, t)$  es conocida.

La solución de la ecuación (3.33) con las condiciones de contorno proporciona la distribución de presiones en la capa de lubricante y, por lo tanto, la de velocidades  $u(x, y, t)$  dada en (3.29). Conocidos estos valores se pueden determinar las fuerzas ejercidas por el lubricante sobre las superficies sólidas. Las componente de la velocidad transversal,  $v(x, y, t)$ , se pueden determinar de la ecuación de continuidad, pero no es necesario calcularlas porque no interviene en la determinación de las fuerzas.

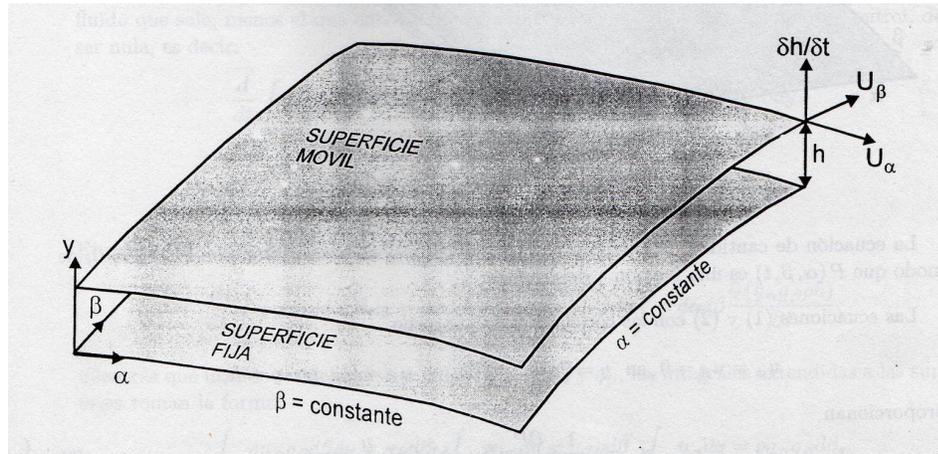


Figura 3.4: Geometría de la capa tridimensional.

### Caso tridimensional (Ecuación de Reynolds de la lubricación).

Suponga dos superficies sólidas curvadas que se encuentran en movimiento relativo una con respecto a la otra y separadas por una capa fluida muy delgada, como muestra la Fig. 3.4.

Lígrese a una de las superficies, un sistema de referencia de coordenadas curvilíneas ortogonales, en las cuales  $\alpha$  y  $\beta$  son las coordenadas sobre la superficie fija y donde  $y$  es la distancia a la misma. La distancia de la superficie móvil es  $h(\alpha, \beta, t)$ , y la película fluida ocupa la región  $0 < y < h$ . Esta segunda superficie deformable, se mueve con respecto a la primera a una velocidad de componentes,  $U_\alpha(\alpha, \beta, t)$  y  $U_\beta(\alpha, \beta, t)$  y  $\partial h/\partial t$  en las direcciones  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $y$ . Las funciones  $h$ ,  $U_\alpha$ ,  $U_\beta$ , están determinadas por el movimiento de la superficie móvil. La velocidad característica  $U_c$  en el sentido longitudinal a la película y el espesor  $h_c$  característico de la capa satisfacen las relaciones

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

$$\frac{\rho_c U_c h_c^2}{\mu L} \ll 1; \quad \frac{h_c^2}{vt_c} \ll 1; \quad \frac{h_c}{L} \ll 1, \quad (3.34)$$

donde  $L$  es la longitud característica de la película y  $\rho_c$  es el valor característico de la densidad del fluido. Lo cual conduce a que las ecuaciones de cantidad de movimiento, en este caso, tomen la forma

$$-\frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \mu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} = 0, \quad (3.35)$$

$$-\frac{1}{g_\beta} \frac{\partial P}{\partial \beta} + \mu \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2} = 0, \quad (3.36)$$

que expresan el equilibrio entre las fuerzas de presión y de viscosidad por unidad de volumen. En estas ecuaciones  $P$  es la presión motriz ( $P = p + \rho U$ ) en el caso de líquidos y la presión estática ( $P = p$ ) en el caso de gases. Los elementos diferenciales de longitud en este caso son  $g_\alpha d\alpha$  y  $g_\beta d\beta$ , en las direcciones  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Los parámetros métricos  $g_\alpha$  y  $g_\beta$  son funciones conocidas de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $t$ .

Las ecuaciones de cantidad de movimiento según el eje  $y$  pueden sustituirse por  $\partial P / \partial t = 0$ , de modo que  $P(\alpha, \beta, t)$  es una función a determinar.

Las ecuaciones (3.35) y (3.36) bajo las condiciones de contorno

$$u_\alpha = u_\beta = 0 \text{ en } y = 0; \quad u_\alpha = U_\alpha \text{ y } u_\beta = U_\beta \text{ en } y = h, \quad (3.37)$$

proporcionan

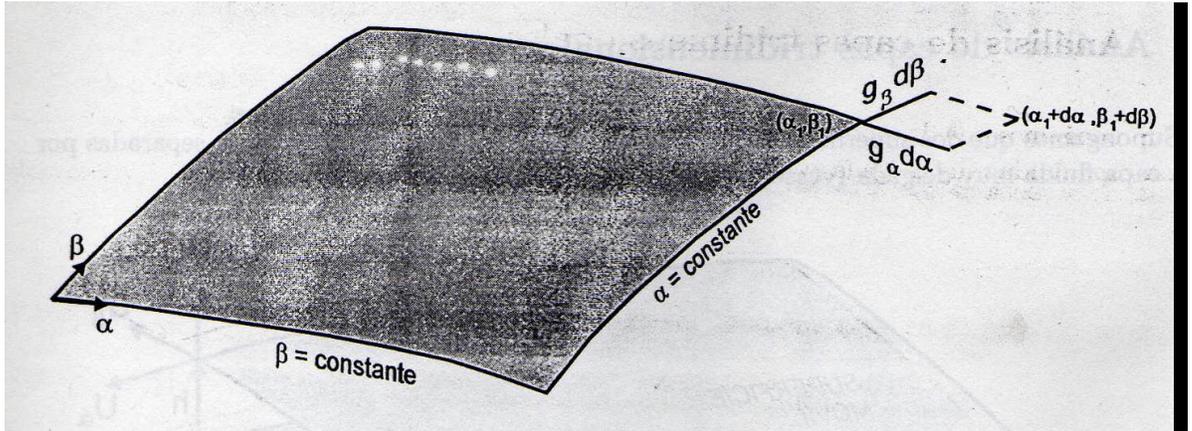


Figura 3.5: Ejes y factores de escala.

$$u_\alpha = \frac{1}{2\mu g_\alpha} \frac{\partial P}{\partial \alpha} y(y-1) + U_\alpha \frac{y}{h}, \quad (3.38)$$

$$u_\beta = \frac{1}{2\mu g_\beta} \frac{\partial P}{\partial \beta} y(y-1) + U_\beta \frac{y}{h}, \quad (3.39)$$

Los flujos volumétricos  $q_\alpha$  y  $q_\beta$  a través de secciones transversales a la película en las direcciones  $\alpha$  y  $\beta$ , por unidad de longitud en las mismas direcciones son, respectivamente

$$q_\alpha = \int_0^h u_\alpha dy = -\frac{h^3}{2\mu g_\alpha} \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{U_\alpha h}{2}, \quad (3.40)$$

$$q_\beta = \int_0^h u_\beta dy = -\frac{h^3}{2\mu g_\beta} \frac{\partial P}{\partial \beta} + \frac{U_\beta h}{2} \quad (3.41)$$

Por otro lado la ecuación de conservación de masa, aplicada en forma integral al volumen de control representado en la Fig. 3.6, que es el volumen de la película que

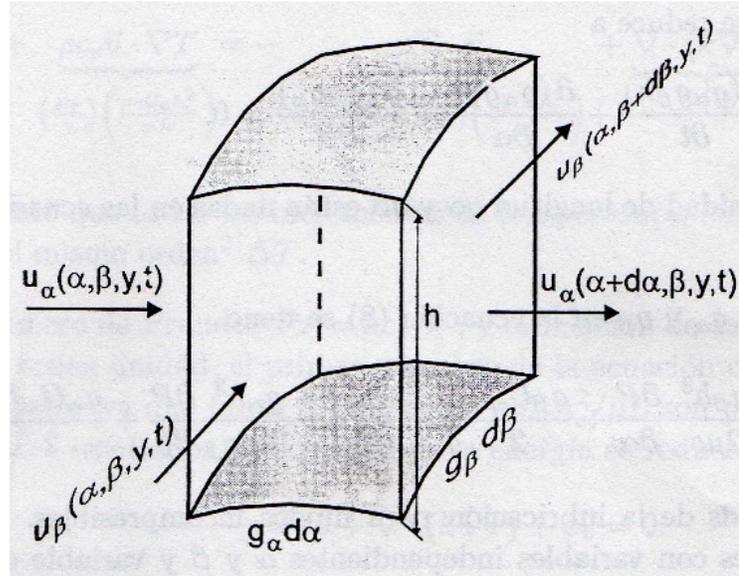


Figura 3.6: Volumen de contorno para la determinación de la ecuación de Reynolds.

se erige sobre un elemento rectangular diferencia de área  $g_\alpha g_\beta d\alpha d\beta$ , de la superficie fija. Este volumen contiene la masa,  $\rho h g_\alpha g_\beta d\alpha d\beta$ , cuya variación en la unidad de tiempo, más el flujo de masa de fluido que sale, menos el que entra a través de las caras laterales del volumen de control, debe ser nula; es decir:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V \rho g_\alpha g_\beta d\alpha d\beta dy - \int_{A(\alpha)} \rho u_\alpha g_\beta d\beta dy - \int_{A(\beta)} \rho u_\beta g_\alpha d\alpha dy \\ &= - \int_{A(\alpha+d\alpha)} \rho u_\alpha g_\beta d\beta dy - \int_{A(\alpha+d\alpha)} \rho u_\beta g_\alpha d\alpha dy \end{aligned} \quad (3.42)$$

Suponiendo que la densidad  $\rho$  es constante a través de la película, usando las definiciones anteriores de  $q_\alpha$  y  $q_\beta$  y el hecho de que el primer miembro de esta ecuación es

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho g_\alpha g_\beta d\alpha d\beta dy = d\alpha d\beta \frac{\partial (g_\alpha g_\beta \rho h)}{\partial t}. \quad (3.43)$$

La ecuación de continuidad toma la forma

$$\frac{\partial (g_\alpha g_\beta \rho h)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho q_\alpha g_\beta)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (\rho q_\beta g_\alpha)}{\partial \beta} = 0. \quad (3.44)$$

Que para un fluido incompresible se reduce a

$$\frac{\partial (g_\alpha g_\beta h)}{\partial t} + \frac{\partial (q_\alpha g_\beta)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (q_\beta g_\alpha)}{\partial \beta} = 0. \quad (3.45)$$

Sustituyendo los valores de  $q_\alpha$  y  $q_\beta$  en esta ecuación se tiene que

$$\frac{\partial (g_\alpha g_\beta h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( -\frac{g_\beta h^3}{2\mu g_\alpha} \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{g_\beta U_\alpha h}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( -\frac{g_\alpha h^3}{2\mu g_\beta} \frac{\partial P}{\partial \beta} + \frac{g_\alpha U_\beta h}{2} \right) = 0, \quad (3.46)$$

que es la ecuación de Reynolds de la lubricación para fluidos incompresibles en tres dimensiones. Esta ecuación es lineal en derivadas parciales con variable independientes  $\alpha$  y  $\beta$  y variable dependiente  $P$ . El tiempo juega el papel de un parámetro y no son necesarias condiciones iniciales.

## 3.2. Penetración Capilar Horizontal

### 3.2.1. Ecuación de Poiseuille para una sección transversal arbitraria.

Para modelar la penetración capilar en nanocanales asumimos, como lo muestran trabajos recientes [70], que la aproximación del continuo aún sigue siendo válida y el número de Reynolds es pequeño, es decir, es posible emplear al flujo de Poiseuille. Por lo tanto, en esta sección consideramos el flujo estacionario de un fluido viscoso, a presión constante, en canales rectos y rígidos, de sección transversal también constante  $A$ . En la Fig. 3.7 mostramos una forma arbitraria de sección transversal,  $\Omega$ , en el plano  $xy$  para un canal recto con eje a lo largo del eje  $z$ . Es bien sabido [41] que este flujo puede ser caracterizado por la resistencia hidráulica,  $R_{hid} = \Delta p/Q$ , donde  $\Delta p$  es la caída de presión a lo largo del canal y  $Q$  es el gasto en el canal. Por otro lado, una unidad natural para la resistencia hidráulica que se encuentra mediante el análisis dimensional es  $R_{hid}^* = \mu L/A^2$ , donde  $L$  es la longitud del canal y  $A = \int_{\Omega} dx dy$  es el área de la sección transversal. Normalmente, el flujo del fluido está sujeto a la condición de adherencia en las paredes  $\partial\Omega$ , por lo que la resistencia hidráulica real dependerá tanto del perímetro como del área de la sección transversal. Esta dependencia puede ser caracterizada por el factor de corrección geométrico sin dimensiones [71]

$$\epsilon \equiv \frac{R_{hid}}{R_{hid}^*}. \quad (3.47)$$

Otro factor geométrico que es útil para cuantificar secciones transversales complicadas es el cociente sin dimensiones,  $C$ , llamado compacidad,

$$C = \frac{P^2}{A}, \quad (3.48)$$

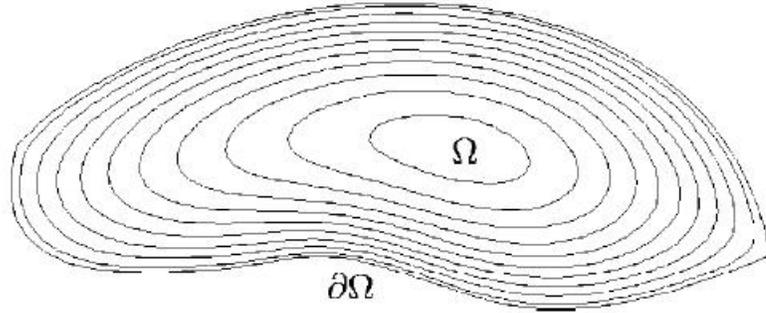


Figura 3.7: Sección transversal arbitraria  $\Omega$  y la frontera  $\partial\Omega$  de un tubo recto. En la frontera interior del tubo  $\partial\Omega$  la velocidad se anula por la condición de adherencia.

en donde  $P \equiv \int_{\partial\Omega} \partial\ell$ , es el perímetro de la frontera  $\partial\Omega$  que confina al fluido y  $A$  es el área transversal delimitada por dicha frontera (ver Fig. 3.7).

La intención ahora, es establecer una dependencia simple del factor de corrección geométrica  $\epsilon$  respecto de la compacidad  $C$ , dando con ello una medida sin dimensiones de las propiedades del flujo, así como de la fuerza y la eficacia de los fenómenos relacionados con la superficie en flujos laminares. Con este fin, se puede observar que en el flujo de Poiseuille, existe una invarianza de traslación a lo largo del eje de  $z$ , paralelo al eje del canal recto. Dicha invarianza se refleja en que el campo de velocidades debe de ser de la forma  $\mathbf{v} = u(x, y)\mathbf{e}_z$ , donde  $\mathbf{e}_z$  es el vector unitario a lo largo del eje. Por lo tanto, la ecuación de Navier-Stokes para un flujo desarrollado estacionario, donde el gradiente de presión es  $-(\Delta p/L)\mathbf{e}_z$ , proporciona una ecuación de Poisson para la velocidad  $u(x, y)$ , de la forma [39]

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = \frac{\Delta p}{\mu L}, \quad (3.49)$$

con la velocidad sujeta a la condición de no deslizamiento en la frontera  $\partial\Omega$  y  $\Delta p < 0$ . Por otro lado, podemos establecer fácilmente una relación entre  $\Delta p$ ,  $u(x, y)$  y  $\epsilon$  de la

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

forma

$$\Delta p = R_{hid}Q = \epsilon R_{hid}^*Q = \epsilon R_{hid}^* \int_{\Omega} u(x, y) dx dy. \quad (3.50)$$

Despejando de aquí  $\epsilon$  y recordando la definición de  $R_{hid}^*$  encontramos de inmediato que

$$\epsilon = \frac{A^2}{\left(\frac{\mu L}{\Delta p}\right) \int_{\Omega} u(x, y) dx dy}. \quad (3.51)$$

De esta última relación es obvio que debe poderse construir una forma adimensional de  $A^2$  y del gasto (denominador) tal que se simplifique ésta última forma de  $\epsilon$ . Con este fin, es necesario proponer una solución general a la ecuación (3.49) [43]. Para ello designese al tamaño característico de la sección transversal del canal por  $D$ , admitiéndose que su forma queda definida por un cierto número de parámetros adimensionales  $\epsilon_i$ , los cuales representan las relaciones existentes entre las distintas longitudes que caracterizan a la sección transversal y  $D$ .

Utilizando las variables adimensionales  $\xi = x/D$ ;  $\eta = y/D$  y  $v = u/u_c$ , donde  $u_c$  es una velocidad característica a determinar, de modo que se minimice el número de parámetros y sustituyéndolas en (3.49) se tiene que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = -1, \quad (3.52)$$

donde  $u_c = (D^2/\mu) [\Delta p/L]$ . La ecuación anterior debe integrarse bajo la condición  $v = 0$  en  $\Sigma(\xi, \eta, \epsilon_i) = 0$ , donde  $\Sigma$  es la ecuación adimensional del contorno y  $\epsilon_i$  son los parámetros que definen su forma.

El gasto  $Q$  a través del tubo es

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

$$Q = \int_{\Sigma} u dx dy = \frac{D^4 \Delta p}{\mu L} \int_{\Sigma} v d\xi d\eta = \frac{D^4 \Delta p}{\mu L} \Gamma(\varepsilon_i), \quad (3.53)$$

donde la integral

$$\Gamma(\varepsilon_i) \equiv \int_{\Sigma} v d\xi d\eta \quad (3.54)$$

depende de la forma del conducto pero no de su tamaño. De aquí que

$$Q = \frac{D^4 \Delta p}{\mu L} \Gamma(\varepsilon_i) \quad (3.55)$$

o bien, la caída de presión es

$$\Delta p = \frac{\mu L Q}{D^4 \Gamma(\varepsilon_i)}. \quad (3.56)$$

Usando ésto último en la definición de  $R_{hid}$  se encuentra que

$$R_{hid} = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{\mu L}{D^4 \Gamma(\varepsilon_i)}, \quad (3.57)$$

y consecuentemente, al utilizar las ecuaciones (3.47), (3.57) y la definición de  $R_{hid}^*$ , se tiene que

$$\epsilon = \frac{A}{D^4 \Gamma(\varepsilon_i)}, \quad (3.58)$$

Usando la adimensionalización, propuesta más arriba, para las coordenadas espaciales se tiene que

$$\frac{A}{D^4} \equiv \int_{\Sigma} d\xi d\eta, \quad (3.59)$$

y finalmente en forma simplificada,

$$\epsilon = \frac{\left( \int_{\Sigma} d\xi d\eta \right)^2}{\int_{\Sigma} v d\xi d\eta}, \quad (3.60)$$

en donde la integral del numerador es el cuadrado del área adimensional de la sección transversal del conducto, mientras que la integral del denominador es el gasto adimensional. Como el campo de velocidades adimensional  $v$  depende de la forma que tiene la sección transversal del canal, entonces resulta natural que tanto el gasto como el área adimensionales y el factor de corrección geométrica  $\epsilon$  dependan también de la forma y no del tamaño del conducto. En lo que sigue presentamos la relación que guardan el factor de corrección geométrico  $\epsilon$  y la compacidad  $C$  para varias geometrías.

**Canal de sección transversal circular** En este caso  $D = a$ , donde  $a$  es el radio del tubo, y se busca una solución de la forma  $v = v(\zeta)$ , donde  $\zeta = r/a = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ , ( $\xi = x/a$  y  $\eta = y/a$ ). La Ec. (3.52) se reduce entonces a

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) = -\zeta \quad (3.61)$$

con  $v(1) = 0$  y  $v(0) < \infty$ . Por lo que las soluciones para  $v$ ,  $\Gamma$ ,  $Q$  y  $\epsilon$  en este caso son

$$v = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2); \quad (3.62)$$

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1 - \zeta^2) \zeta d\zeta = \frac{\pi}{8}; \quad (3.63)$$

$$Q = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\mu L}, \quad (3.64)$$

$$\epsilon = \frac{(\pi)^2}{\frac{\pi}{8}} = 8\pi. \quad (3.65)$$

Y como es claro de la Ec. (3.48),  $C = 4\pi$ .

**Canal de sección transversal elíptica** La familia de canales con secciones transversales elípticas tiene como solución de la ecuación de Poisson (3.49), para elipses centradas en el origen con semiejes mayor  $a$  y menor  $b$ ,  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ , una velocidad de la forma

$$u(x, y) = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{(ab)^2}{(a^2 + b^2)} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (3.66)$$

La cual se obtiene al tomar  $D = a$ ,  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$  y  $\epsilon = b/a \leq 1$ , y las soluciones para  $v$ ,  $\Gamma$ ,  $Q$  y  $\epsilon$

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

$$v = \frac{\varepsilon^2}{2(1 + \varepsilon^2)} \left[ 1 - \xi^2 - \left( \frac{\eta}{\varepsilon} \right)^2 \right]; \quad (3.67)$$

$$\Gamma = \frac{\pi \varepsilon^3}{4(1 + \varepsilon^2)}; \quad (3.68)$$

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{4\mu L} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \quad (3.69)$$

$$\epsilon = \frac{\pi^2 \varepsilon^2}{\frac{\pi \varepsilon^3}{4(1 + \varepsilon^2)}} = 4\pi \left( \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (3.70)$$

Utilizando ahora la relación  $\gamma = a/b = 1/(b/a) = 1/\varepsilon$ , se puede conseguir una expresión explícita para el factor de corrección geométrico

$$\epsilon(\gamma) = 4\pi(\gamma + \gamma^{-1}), \quad (3.71)$$

Y su compacidad es

$$C(\gamma) = \frac{16}{\pi} \gamma \left( \int_0^{\pi/2} d\theta \sqrt{1 - (1 - \gamma^{-2}) \sin^2 \theta} \right)^2. \quad (3.72)$$

La relación entre  $\epsilon$  y  $C$  se obtiene al despejar  $\gamma(\epsilon)$  de (3.71) y sustituir el resultado en (3.72) e invertir la expresión para conseguir una forma aproximada para  $\epsilon(C)$ . Tal proceso lleva a que

$$C(\epsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \int_0^{\pi} d\theta \sqrt{\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - (8\pi)^2 \cos \theta}} \right)^2. \quad (3.73)$$

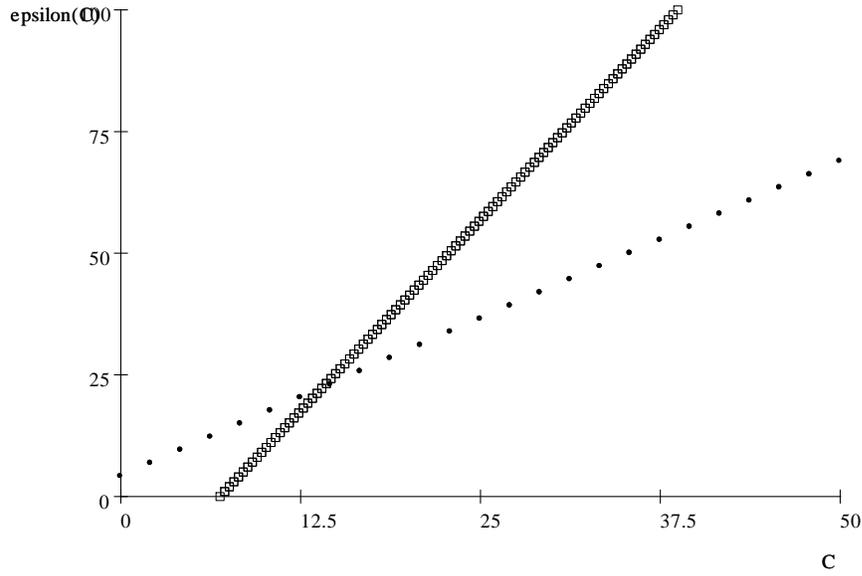


Figura 3.8: Gráfica de  $\epsilon(C)$  para las tres geometrías de canal aquí consideradas: a) elipses (o), b) rectángulos (□) y c) triángulos (◆).

Nótese que el mínimo valor de  $\epsilon$  es  $8\pi$ , de lo contrario el argumento de la integral elíptica (3.73) se hará complejo. Haciendo una expansión alrededor de  $\epsilon = 8\pi$  y luego invirtiendo la función  $C(\epsilon)$ , se obtiene que

$$\epsilon(C) = \frac{8}{3}C - \frac{8}{3}\pi + O([C - 4\pi]^2). \quad (3.74)$$

En la Fig. 3.8 graficamos la solución lineal aproximada (3.74) (símbolos o) para secciones elípticas y también se muestran las graficas aproximadas de  $\epsilon(C)$  para los casos de tubos de secciones transversales rectangulares (símbolos □, Ec. (3.83)) y triangulares (símbolos ◆, Ec. (3.89)). Estudios recientes en donde se grafican numéricamente las correlaciones entre  $\epsilon$  y  $C$  muestran que las aproximaciones lineales de  $\epsilon(C)$  son muy buenas [43].

**Canal de sección transversal rectangular** Para una sección transversal rectangular con el cociente de ancho( $w$ ) a alto( $h$ )  $\gamma = w/h$ , se tiene que

$$u(x, y) = \frac{\Delta p}{\mu L} \frac{4h^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x}{h}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi w}{h}\right)} \right) \sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right) \quad (3.75)$$

es la solución para la velocidad. Los ejes coordenados de este sistema se eligieron de forma que  $-w/2 < x < w/2$  y  $0 < y < h$ . Esta solución se obtiene de considerar una sección rectangular  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ , tomando a  $D = a$ ,  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$ ,  $\varepsilon = b/a \leq 1$ , por lo que las soluciones para  $v$ ,  $\Gamma$ ,  $Q$  y  $\epsilon$  son

$$v = \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{n\pi\xi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi\varepsilon}{2}\right)} \right] \frac{\cos\left(\frac{n\pi\eta}{2}\right)}{n^3}, \quad (3.76)$$

$$\Gamma = \frac{4\varepsilon}{3} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh\left[\frac{\pi\varepsilon}{2}(2n+1)\right]}{(2n+1)^5} \right\}, \quad (3.77)$$

$$Q = \frac{\Delta p 4ba^3}{3\mu L} \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5\varepsilon} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh\left(\frac{n\pi\varepsilon}{2}\right)}{n^5} \right], \quad (3.78)$$

$$\epsilon = \frac{\varepsilon^2}{\frac{4\varepsilon}{3} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh\left[\frac{\pi\varepsilon}{2}(2n+1)\right]}{(2n+1)^5} \right\}}, \quad (3.79)$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  se obtiene que  $\Gamma \rightarrow 4\varepsilon^3/3$  y  $\epsilon = 3/4\varepsilon = 3\gamma/4 = \gamma$ ,  $\gamma = \frac{4}{3}\epsilon$ .

De la Ec. (3.60) se sigue ahora que

$$\epsilon(\gamma) = \frac{\pi^3\gamma^2}{8} \left( \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\gamma}{\pi n^4} - \frac{2}{\pi^2 n^5} \tanh\left(\frac{n\pi\gamma}{2}\right) \right)^{-1}, \quad (3.80)$$

mientras que para la compacidad

$$C(\gamma) = 8 + 4\gamma + \frac{4}{\gamma}. \quad (3.81)$$

Usando el hecho de que  $\tanh(x) \approx 1$  para  $x \gg 1$  se consigue que

$$\epsilon(\gamma) \simeq \frac{12\pi^5\gamma^2}{\pi^5\gamma^2 - 186\zeta(5)}, \quad \gamma \gg 1, \quad (3.82)$$

y substituyendo  $\gamma(C)$  en esta expresión y expandiendola alrededor de  $C(\gamma = 2) = 18$  se obtiene que

$$\epsilon(C) \approx \frac{22}{7}C - \frac{65}{3} + O([C - 18]^2). \quad (3.83)$$

Para los dos coeficientes de Taylor se han utilizado los primeros tres términos en la fracción continua.

En la Fig. 3.8 se grafica la ecuación lineal aproximada (3.83) (símbolos  $\square$ ). Como ya se menciona, los resultados de una solución numérica de elemento finito de la Ec. (3.49) se ajustan muy bien a los puntos de la aproximación teórica [71].

**Canal de sección transversal triangular** Para secciones transversales en forma de triángulo equilátero de lados de longitud  $a$ , se obtiene que  $\epsilon = 20\sqrt{3}$ ,  $C = 12\sqrt{3}$  y velocidad de la forma

$$u(x, y) = \frac{a^2 \Delta p}{\mu L} \frac{\left(\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(3\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}\right)}{2\sqrt{3}}. \quad (3.84)$$

La cual se obtiene naturalmente de considerar ahora,  $D = a$ ,  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/a$ ; y las soluciones para  $v$ ,  $\Gamma$ ,  $Q$  y  $\epsilon$  son

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

$$v = \frac{\left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (3\xi^2 - \eta^2)}{2\sqrt{3}}, \quad (3.85)$$

$$\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{320}, \quad (3.86)$$

$$Q = \frac{\Delta p a^4 \sqrt{3}}{320 \mu L}, \quad (3.87)$$

$$\epsilon = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{\sqrt{3}}{320}} = 20\sqrt{3}. \quad (3.88)$$

En el caso general de un triángulo con las longitudes laterales  $a$ ,  $b$ , y  $c$  haremos referencia a las soluciones numéricas de la Ec. (3.49). En la Fig. 3.8 se muestran los puntos encontrados por medio de la correlación lineal (3.89) (símbolo  $\blacklozenge$  en la Fig. 3.8). Los demás puntos se obtuvieron de resolver mediante códigos de elemento finito la Eq. (3.49). Para el escalamiento de triángulos rectángulos, de triángulos isósceles, y de triángulos escálenos agudos/obtusos los puntos se ajustan a una línea de tendencia de la forma

$$\epsilon(C) = \frac{22}{17}C + \frac{40\sqrt{3}}{17}, \quad (3.89)$$

donde la pendiente se obtiene de un ajuste numérico y un subsecuente uso de los primeros tres términos en la fracción continuada de ese valor. Se ha encontrado [71] que los resultados para diversas clases de triángulos caen sobre la misma línea recta dada en la correlación lineal (3.89), es por ello claro que para los casos de triángulos no equiláteros se use dicha correlación.

### 3.2.2. Flujo capilar en microcanales

Como es conocido la penetración capilar en microcanales puede darse de manera espontánea y/o bajo gradientes de presión. La finalidad es construir un modelo válido para tubos o canales rígidos de sección transversal arbitraria. En tal caso, este flujo se puede modelar como un flujo de Poiseuille considerando un balance de fuerzas de presión, superficiales y viscosas. El modelo así desarrollado es una generalización para secciones transversales arbitrarias de los modelos empleados por Shalimov [72], Princen [8, 9] y de Gennes y su grupo [1, 11] en sus estudios de penetración capilar en canales circulares y de placas paralelas.

#### Flujo bajo presión inicial

El formalismo desarrollado antes tiene como principal motivación el describir la dinámica de la penetración capilar de líquidos viscosos en microcanales. Como ya se menciono, comúnmente, la penetración capilar en microcanales ocurre bajo presiones relativamente moderadas (del orden de kilo Pascales [14, 15]). Es conveniente, entonces, evaluar el número de Reynolds asociado con la velocidad a la entrada de los microcanales debida a tales presiones. Utilizando la ecuación de Bernoulli se encuentra de forma directa que velocidad a la entrada del canal es  $U = \sqrt{2gH}$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $H$  es el nivel de llenado de los recipientes de alimentación hacia los microcanales, bajo estas condiciones el número de Reynolds resulta ser

$$\text{Re} = \frac{aU}{\nu} = \frac{a\sqrt{2gH}}{\nu}. \quad (3.90)$$

Para los canales de 100 micras de ancho, alimentados por recipientes llenados con agua a una altura  $H = 30$  cm, se tiene que  $\text{Re} = 118.93$ , mientras que en los canales mas anchos, de 500 micras, el número de Reynolds resulta ser  $\text{Re} = 594.63$ . Es decir,

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

estos flujos son siempre laminares [40, 41] y es correcto entonces asumir la presencia de flujos de Poiseuille en los microcanales.

Como lo indicamos antes se modelar el flujo en los micro y nanocanales como un flujo de Poiseuille, considerando un balance de fuerzas de presión, superficiales, viscosas y de inyección. Es así que la ecuación de balance de fuerza para el flujo en un microcanal toma la forma

$$Ap_{in} + f_{\sigma} - f_{\mu} = 0, \quad (3.91)$$

donde  $A$  es la sección transversal del tubo capilar rígido,  $p_{in}$  es la presión a la entrada,  $f_{\sigma}$  es la fuerza debida a la tensión superficial y  $f_{\mu}$  es la fuerza viscosa friccional. La forma explícita de cada término es, respectivamente,

$$f_{\sigma} = P\sigma \cos \theta, \text{ y } f_{\mu} = \epsilon\mu vl, \quad (3.92)$$

en donde  $P$  es el perímetro interno del capilar,  $\theta$  es el ángulo de contacto,  $\epsilon$  es el término adimensional de resistencia hidráulica,  $v$  es la velocidad media del flujo y  $l$  es la posición del frente del líquido durante la penetración capilar. De forma explícita la ecuación de movimiento es

$$Ap_{in} + P\sigma \cos \theta - \epsilon\mu l \frac{dl}{dt} = 0, \quad (3.93)$$

donde hemos usado que  $v = dl/dt$ . La solución de la ecuación diferencial no lineal (3.93) bajo la condición inicial  $l = 0$  en  $t = 0$ , es

$$l = \sqrt{\frac{2 \left( \frac{P^2 p_{in}}{C} + P\sigma \cos \theta \right)}{\epsilon(C)\mu}} t, \quad (3.94)$$

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

donde hemos introducido explícitamente los parámetros  $\epsilon(C)$  y  $C(p)$  desarrollados en la sección anterior.

Para comparar directamente con algunas realizaciones experimentales de microcanales, se asume que un líquido puede entrar a un microcanal espontáneamente o bajo una presión  $p_{in}$ . Tal líquido, tiene viscosidad dinámica  $\mu$ , densidad  $\rho$  y tensión superficial  $\sigma$ . El ángulo de contacto entre el líquido y sólido es  $\theta$ . El ángulo de contacto puede ser mayor o menor que  $90^\circ$ . En general, si el líquido penetra espontáneamente al capilar el ángulo de contacto es menor que  $90^\circ$  ya que en este caso la componente horizontal de la presión capilar,  $p_c = \sigma \cos \theta / h$ , es la responsable de la entrada del líquido (ver Fig. 3.9a). En cambio, si hay una presión adicional a la presión capilar, es decir,  $p_{in}$ , entonces el ángulo puede ser mayor que  $90^\circ$  y en tal caso la presión capilar es negativa,  $p_c = \sigma \cos \theta / h < 0$  (ver Fig. 3.9b). En la Fig. 3.10a se muestra el frente de penetración capilar para un capilar cilíndrico circular bajo flujo espontáneo  $\theta < 90^\circ$  y en la Fig. 3.10b se muestra el flujo capilar bajo la presión inicial  $p_{in}$ .

Los casos de penetración capilar espontánea y penetración capilar bajo la presión inicial son considerados aquí durante el análisis

La ecuación (3.94), que describe el flujo capilar en canales de diferentes secciones transversales, tomara la forma

$$l = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{P^2 p_{in} + 4\pi P \sigma \cos \theta}{\mu}} t, \quad (3.95)$$

en el caso de círculos, mientras que la evolución del frente de penetración capilar esta dado por

$$l = \sqrt{\frac{3(P^2 p_{in} + CP \sigma \cos \theta)}{2(C^2 - C\pi)\mu}} t, \quad (3.96)$$

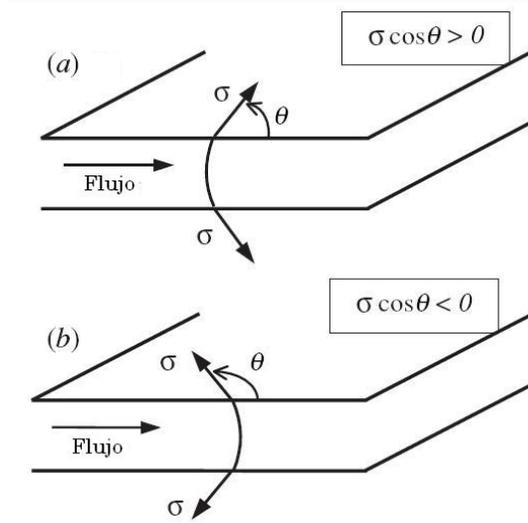


Figura 3.9: Canal de placas paralelas bajo (a) flujo capilar espontáneo en donde el ángulo de contacto  $\theta < 90^\circ$ . (b) Flujo bajo la presión inicial  $p_{in}$  en donde el ángulo de contacto es  $\theta > 90^\circ$ .  $\sigma$  es la tensión superficial.

para el caso general de elipses de semiejes mayor  $a$  y menor  $b$ . Para el caso de canales rectangulares, de altura  $h$  y grosor  $w$  con  $w \geq h$  (la razón  $\gamma = w/h \geq 1$ ), la longitud de penetración en función del tiempo tiene la forma

$$l = \sqrt{\frac{42(P^2 p_{in} + PC\sigma \cos \theta)}{(66C^2 - 455C)\mu}} t. \quad (3.97)$$

Finalmente para canales triangulares la longitud de avance es de la forma

$$l = \sqrt{\frac{P^2 p_{in} + 12\sqrt{3}P\sigma \cos \theta}{360\mu}} t. \quad (3.98)$$

La dinámica del llenado capilar es sustancialmente diferente entre los canales circulares (o elípticos) y los rectangulares con iguales dimensiones, los canales rectangulares oponen siempre mayor resistencia que los canales circulares y también el llenado cambia más lentamente cuando se cambia el tamaño (perímetro o área) de

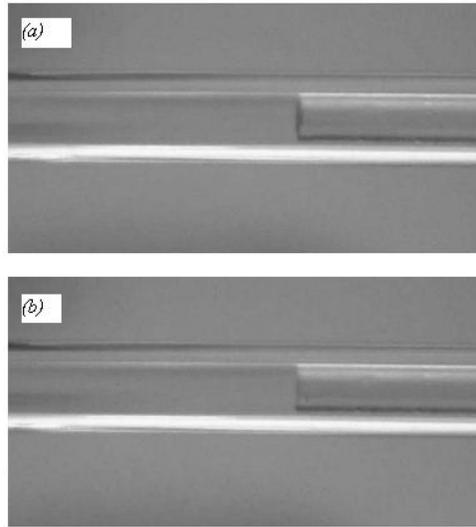


Figura 3.10: Frente de penetración capilar en un capilar cilíndrico circular bajo (a) flujo espontáneo  $\theta < 90^\circ$  y (b) flujo capilar bajo la presión  $p_{in}$  en cuyo caso  $\theta > 90^\circ$ .  $\theta$  es el ángulo de contacto entre el sólido y el líquido.

los canales. De hecho, para el canal mayor el flujo capilar en el canal circular es casi tres veces más rápido que en el canal rectangular mientras que para los canales más pequeños (ya sean circulares o rectangulares) la velocidad del flujo casi es la misma. Es conveniente insistir en que los órdenes de magnitud de los tiempos de llenado entre los experimentos y la teoría aquí presentada son iguales. Los resultados son muy similares para los casos de penetración espontánea.

Para calcular (en canales circulares equivalentes), la longitud de la penetración capilar,  $l$ , como función del tiempo,  $t$ , a partir de la ecuación (3.95) se utilizan las condiciones de los experimentos de Kim et al [14, 15] ya comentados. Por ello, la presión inicial es  $p_{in} = 2943$  Pa, también se usa agua como fluido de trabajo a temperatura ambiente  $T_{amb} = 15,6$  °C. Bajo estas condiciones la tensión superficial es  $\sigma = 0,07362$  N/m, la viscosidad dinámica  $\mu = 0,00114$  N s/m<sup>2</sup>, la densidad  $\rho = 999$  Kg/m<sup>3</sup> y el ángulo de contacto medido bajo esta presión tiene un valor de  $\theta = 90,7^\circ$ ,

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

por lo que  $\cos \theta = -1.2203 \times 10^{-2}$ . En los experimentos [14, 15], si no hay presión inicial  $\theta = 89,3^\circ$  y consecuentemente  $\cos \theta = 5.2360 \times 10^{-3}$ .

La conclusión inmediata es que los canales rectangulares son los de flujo capilar más lento mientras que los canales de sección transversal circular son los más rápidos. De hecho los sistemas con esquinas son en general más lentos que los sistemas con perímetros más suaves. Todos estos resultados también son validos para los casos de penetración capilar espontánea.

#### **El problema de la salida del líquido (bloqueo)**

Siguiendo con nuestro objetivo considerese ahora el problema del bloqueo. Se ha observado en los experimentos de Kim et al [14, 15] que en los canales muy pequeños puede haber bloqueo del flujo, es decir, que la fuerza debida a la presión inicial,  $p_{in}$ , no puede vencer a las fuerzas de tensión superficial y el flujo se detiene a la salida. En esta parte se da una explicación de este fenómeno. Lo que sigue es un análisis justo en el instante de la salida del líquido del capilar. Diversos estudios realizados desde la segunda mitad del siglo XIX por Tate [73] y Rayleigh [74] y más recientemente aquellos de Clanet y Lasheras [75] y Ambravaneswaran *et al.* [76] validan las hipótesis que se asumió, principalmente aquellas relacionadas con la forma del menisco.

Considerese la Fig. 3.11, ahí se observa que el nivel de llenado del recipiente es  $H$  y que tal recipiente inmediatamente se conecta a los microcanales con sección transversal rectangular. Esto implica que sobre dicho flujo siempre hay una presión  $p_{in}$  de magnitud  $p_{in} = \rho g H$ . Independientemente de la longitud de los microcanales, cuando el flujo llega a la salida, la superficie libre del líquido gradualmente cambiará su ángulo de contacto y sus radios de curvatura hasta el caso límite en el que  $\theta = 180^\circ$ ,  $R_1 = w/2$  y  $R_2 = h/2$ , donde  $R_1$  y  $R_2$  son los radios principales de curvatura, como se observa en la Fig. 3.12. Esto debe ser así porque el líquido se resiste a desprenderse

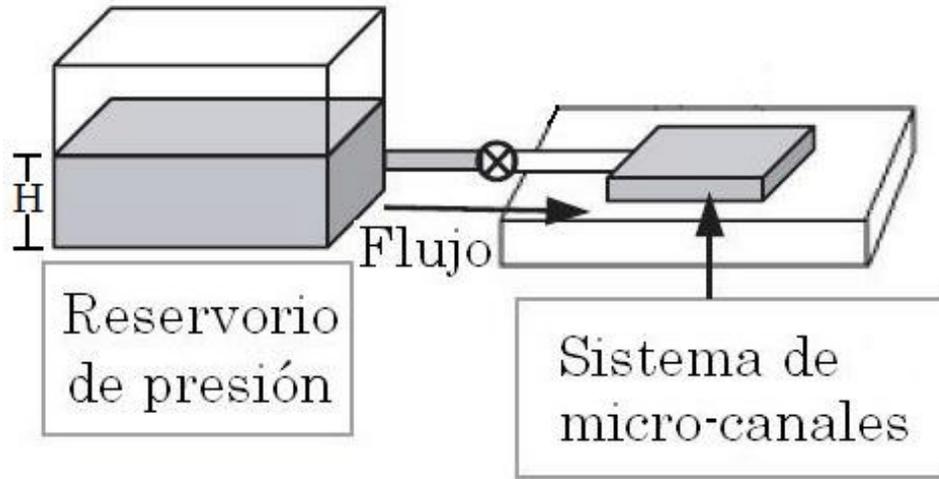


Figura 3.11: Esquema del sistema de inyección de fluido en los microcanales,  $H$  es el nivel de llenado.

de la salida oponiendo una presión capilar cada vez mayor hasta llegar al valor

$$p_c = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 2\sigma \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{w} \right), \quad (3.99)$$

la cual va en la dirección opuesta al flujo.

Justo en ese instante la presión que empuja al líquido hacia afuera es

$$p_a + p_{in} = p_a + \rho g H, \quad (3.100)$$

donde se considera el hecho de que todo el sistema está a la presión ambiente  $p_a$ . Por otro lado, la presión que frena al flujo justo en la orilla es la presión del menisco  $p_c$  más la presión atmosférica, es decir

$$p_a + 2\sigma \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{w} \right). \quad (3.101)$$

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

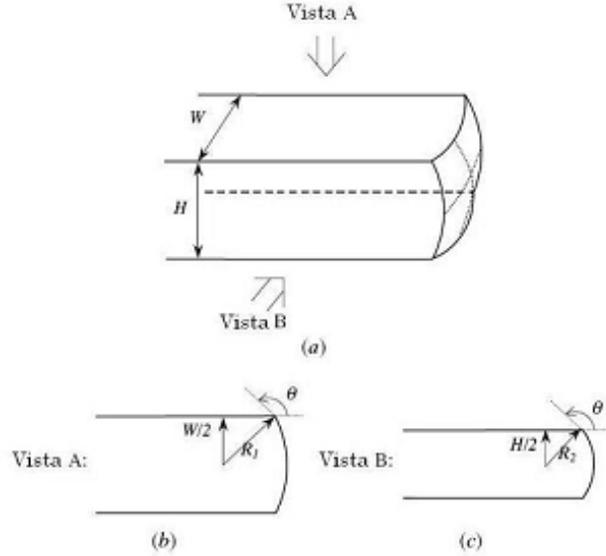


Figura 3.12: (a) Esquema de la salida del líquido de los microcanales. (b) Vista superior del microcanal rectangular, el líquido al salir es empujado por la presión  $p_{in}$  y forzado a cambiar su ángulo de contacto hasta hacerse igual a  $180^\circ$ ; en el límite el radio de curvatura se hace  $R_1 = w/2$ . (c) Lo mismo ocurre en la vista lateral, en cuyo caso  $R_2 = h/2$ .

Si hay flujo hacia afuera del microcanal esta última presión debe de ser vencida y entonces

$$p_a + \rho g H \geq p_a + 2\sigma \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{w} \right). \quad (3.102)$$

Es obvio que el bloqueo ocurre exactamente en el caso

$$p_a + \rho g H = p_a + 2\sigma \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{w} \right), \quad (3.103)$$

de aquí que la altura mínima para que ocurra el bloque es

$$H = \frac{2\sigma}{\rho g} \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{w} \right). \quad (3.104)$$

Introduciendo los datos de los experimentos de Kim et al [14, 15], donde  $h/2 = 20 \times 10^{-6}$  m,  $w/2 = 50 \times 10^{-6}$  m,  $\rho = 999$  kg/m<sup>3</sup> y  $\sigma = 0,073$  N/m, se encuentra que

$$H = 0,52 \text{ m} = 52 \text{ cm}, \quad (3.105)$$

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

la cual difiere de la altura que Kim et al. [14, 15] encontraron como el nivel de llenado ( $H = 20$  cm) para el bloqueo en los microcanales de  $100 \mu\text{m}$  de ancho. Mas adelante se discute sobre lo que origina esta diferencia Si no se introduce  $p_{in} = \rho g H$  en la ecuación (3.100), la presión para el bloqueo debe ser

$$p_{in} = 2\sigma \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{w} \right), \quad (3.106)$$

la cual nuevamente con los datos de Kim et al [14, 15] da el valor

$$p_{in} = 5110 \text{ Pa} = 5,11 \text{ kPa}, \quad (3.107)$$

que difiere del valor de 1.96 kPa que dichos autores reportaron para el bloqueo.

Otra forma de obtener valores para el bloqueo en canales de sección transversal arbitraria se obtiene usando la ecuación (3.93). En tal caso, el bloqueo ocurrirá cuando

$$p_{in} A = P \sigma. \quad (3.108)$$

En este caso, para el capilar más pequeño de los experimentos de Kim et al [14, 15] ( $P = 280 \times 10^{-6} \text{ m}$   $A = 4000 \times 10^{-12} \text{ m}^2$ ), la presión de bloqueo es igual a

$$p_{in} = 5,11 \text{ kPa}, \quad (3.109)$$

que es el mismo valor que el encontrado especificando los radios de curvatura en los canales rectangulares. Si la presión  $p_{in}$  es conocida ( $p_{in} = 1960 \text{ Pa}$ ) y no fuera conocido el perímetro crítico para el bloqueo, éste, de la ecuación (3.109) resulta ser

$$P = 107,4 \mu\text{m}, \quad (3.110)$$

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

es decir, que si  $h = 40 \mu\text{m}$  entonces  $w = 13,7 \mu\text{m}$ .

Lo primero que se nota en estos resultados es que si bien, los ordenes de magnitud de la presión crítica o de la altura de llenado crítica son iguales a los de los resultados experimentales, los valores tal cual no coinciden. Es posible que tales diferencias se den porque en los experimentos en los cuales se basan, los materiales de los microcanales y los sustratos son diferentes. Los microcanales fueron hechos de un material fotoresistente denominado SU-8 (Microchem Corp) y fueron montados sobre un sustrato de silicón. Tales condiciones implican, necesariamente, diferentes condiciones de mojabilidad (ángulos de contacto) para cada una de las superficies y esto en resumen puede desestabilizar más rápidamente, en los experimentos, a los meniscos y romper (a menores valores de la presión  $p_{in}$  o menores alturas,  $H$ ) el bloqueo.

La coincidencia entre los valores de las presiones dados en (3.107) y (3.109) es notable y puede considerarse también una prueba más de que tal método es correcto.

#### 3.2.3. Flujo en nanocanales [77]

Recientemente Han et al. [70], estudiaron la cinética de la penetración capilar de diversos líquidos que llenan nanocanales, ver Fig. 3.13. Aunque la sección transversal es compleja, ellos supusieron que dichos nanocanales tenían secciones transversales rectangulares de ancho  $w = 50$  nanómetros. Utilizaron agua como fluidos de trabajo. En este caso la posición del menisco líquido móvil,  $l$ , fue observada como proporcional a la raíz cuadrada del tiempo, lo que está de acuerdo, en lo general, con la cinética clásica de Washburn [6]: la velocidad del menisco disminuyó tanto con la dimensión del canal como con el cociente entre la tensión superficial y la viscosidad. En dichos experimentos, sin embargo, la razón de llenado fue mayor de la que su modelo predice.

Sin embargo, y como una forma de apreciar las bondades de nuestro mod-

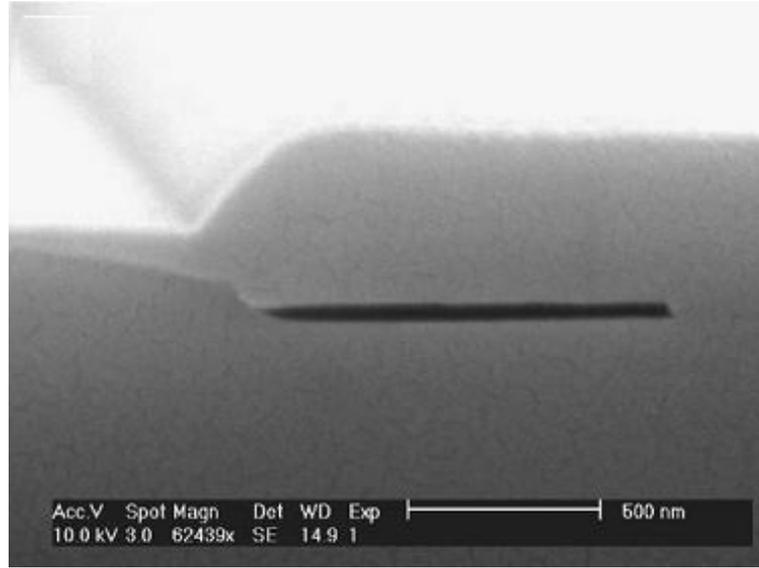


Figura 3.13: Imágen de microscópio electrónico de exploración (SEM) de las sección transversal de un nanocanal, tomada de Han et al [70]. La zona negra y delgada de enmedio mide 900 nanómetros de largo y 50 nanómetros de ancho.

elo de penetración capilar, hemos utilizado los datos obtenidos por Han et al [70], y encontrado los siguientes resultados al aproximar la sección transversal de sus nanocanales mediante elipses, en lugar de rectángulos como lo hicieron dichos autores. En particular para el canal mostrado en la Fig. 3.13, tomaremos que el semieje mayor  $a = w/2 = 500$  nm, mientras que el semieje menor  $b = h/2 = 25$  nm.

De donde obtenemos para el perímetro  $P$  y para el área  $A$ , que

$$P = \pi \left( 1,5 [a + b] - \sqrt{ab} \right) = 2.1228 \times 10^{-6} \text{ m y } A = \pi ab = 3.9270 \times 10^{-14} \text{ m}^2, \quad (3.111)$$

así que

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

$$C = \frac{P^2}{A} = 114,75. \quad (3.112)$$

La sustitución de este valor y de los valores para la tensión superficial  $\sigma = 0.0720$  N/m, la viscosidad dinámica  $\mu = 1$  centipoise y el ángulo de contacto  $\theta = 68^\circ$ , para agua (dados en Han et al [70]), en la ecuación (3.94) (con  $p_{in} = 0$  ya que en el citado espejamiento, no hay presión inicial), nos llevan a que el frente de penetración capilar avanza como

$$l = 6,2028 \times 10^{-5} t^{0,5} \text{ m}. \quad (3.113)$$

En la Fig. 3.14, se muestran varias curvas que describen la evolución del frente de penetración del agua,  $l$ . La curva hecha con  $\diamond$ , corresponde a los datos experimentales medidos por Han et al [70], la línea discontinua se construye suponiendo que la sección transversal del nanocanal es efectivamente un rectángulo de ancho  $w = 900$  nm y altura  $h = 50$  nm, con una compacidad  $C = 80,22$ . Para este caso hemos utilizado la ecuación (3.97) para graficar la evolución del frente de penetración. La curva hecha d los símbolos  $\bigcirc$  se constituye en base a la ecuación (3.113), la cual corresponde a una sección transversal elíptica como la que hemos descrito más arriba. Finalmente, la línea continua corresponde a una ley de Washburn, para un rectángulo de la forma

$$l = \sqrt{\frac{R_H \sigma \cos \theta}{2\mu}} t, \quad (3.114)$$

donde  $R_H = A/P = 2(w + h)/wh$ , es el radio hidráulico.

Como puede verse claramente de dicha figura, la mejor aproximación a los datos experimentales es la línea discontinua, que corresponde a una sección transversal

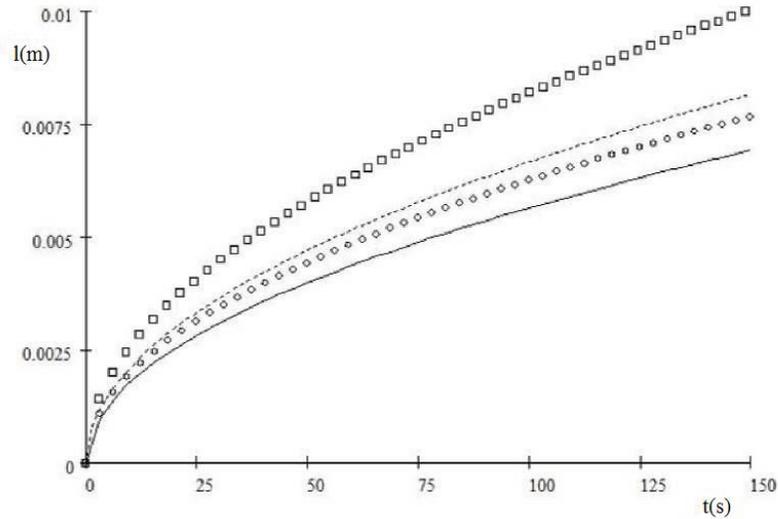


Figura 3.14: Gráfica de  $l$  vs  $t$ : la línea continua corresponde a la ley de Washburn utilizando el radio hidráulico  $R_H$  (ecuación 3.114);  $\square$  datos experimentales tomados del artículo de Han *et al* [70];  $\circ$  curva para una sección transversal elíptica, obtenida mediante la ecuación (3.113); y finalmente la curva discontinua se obtiene de considerar una sección transversal rectangular de ancho  $w = 900$  nm y altura  $h = 50$  nm ecuación (3.97).

rectangular del canal, mientras que la peor aproximación corresponde a la curva de trazo continuo, la cual corresponde a la ley de Washburn del radio hidráulico; lo cual es comprensible pues esta es una correlación muy simple. Debemos señalar que sorprendentemente para este caso, el flujo para una sección transversal elíptica del nanocanal, es mucho más resistiva que para el flujo en una sección transversal rectangular con las mismas dimensiones. La razón para este comportamiento es un muy elevado valor del factor de compacidad en el canal elíptico.

### 3.3. Autoimbibición en canales verticales de sección transversal ejesimétrica

La penetración capilar de un líquido que moja, bien o mal, a las paredes de un tubo capilar vertical o, en el caso más general, a las diversas paredes de un espacio capilar [1, 8, 9, 11, 27, 30, 28, 25, 29], es un fenómeno muy común y de gran interés en áreas de estudio tan diversas como son la micro y nonofluídica [1, 25, 78], el mojado de medios porosos [27, 28, 31], la creación de superficies hidrófilas o hidrófobas [32, 33], la recuperación de petróleo [34, 35], el transporte de líquidos en plantas [36], etc. El ascenso capilar está relacionado con la diferencia de presión a través del menisco del líquido, de manera que es posible alcanzar alturas de equilibrio cuando la presión hidrostática iguale a la presión capilar.

Las alturas de equilibrio pueden determinarse también por medio de métodos de extrémales de la energía [37, 38], aunque éstos son de utilidad sólo cuando los líquidos pueden considerarse como no viscosos o cuando el efecto de las pérdidas viscosas es despreciable. En particular, en la caracterización de las alturas de equilibrio éste es el caso porque justo en los puntos críticos ocurre también un balance entre la fuerza gravitatoria y la capilar sin consideración del valor de la viscosidad del líquido [1, 28, 29, 37, 38]. En sistemas donde los efectos disipativos son importantes éste método requiere de modificaciones sustanciales las cuales están fuera del alcance de este trabajo.

El problema que se estudia en este trabajo es el de encontrar las alturas de equilibrio en capilares cónicos divergentes (el radio del capilar crece conforme el líquido penetra en él) y capilares cónicos convergentes (el radio disminuye con la distancia de ingreso del líquido), bajo condiciones de buen y mal mojado, mediante un método variacional de la energía. Dicho método se basa en adimensionalizar la energía del sistema fluido y en encontrar las alturas adimensionales características

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

del problema. Ello permite formular, mediante la comparación entre el número de Bond,  $Bo$ , la pendiente de la generatriz de los conos,  $\phi$ , y el ángulo de mojado entre el líquido y las paredes del contenedor,  $\theta$ , un criterio para caracterizar a las alturas de equilibrio como estables, inestables o de pseudo-equilibrio. Se presentan ejemplos en donde se muestra la utilidad del método, así como otras propiedades de interés.

Se debe mencionar que el método aquí desarrollado es válido únicamente para tubos eje simétricos lisos, pues cuando la línea perimetral de la sección transversal del tubo tiene esquinas, aparecen otros fenómenos (como los dedos de líquido en las orillas agudas [11, 36, 79] o el desarrollo de intensos esfuerzos cortantes [80]), lo cual impide obtener una expresión analítica exacta de la energía  $E$  de la columna líquida. Así mismo, la rugosidad de las superficies de contacto, también genera gran influencia en el conformado de los perfiles de equilibrio [33, 36]. En este trabajo, estos aspectos no son considerados.

Recientemente Tsori [32] analizó el problema de las alturas de equilibrio en conos con “buen” y “mal” mojado usando para ello una ecuación de balance de presiones. Desafortunadamente, su método limita el número de soluciones posibles para las alturas de equilibrio y las condiciones bajo las cuales estas alturas pueden ocurrir. Aquí, con el método de extremales de la energía, se muestra que es posible encontrar todas las alturas de equilibrio y las condiciones físicas que las determinan.

A continuación se presenta el cálculo de la energía y de las alturas de equilibrio del líquido, dentro de un capilar vertical ejesimétrico sujeto a la acción de la gravedad y condiciones de buen y mal mojado. Después se hace un análisis de las alturas de equilibrio en función de las propiedades de mojado de los líquidos involucrados y del tipo de capilar.

### 3.3.1. Análisis del ascenso capilar en tubos de sección transversal ejesimétrica

Considérese que un tubo capilar vertical ejesimétrico, abierto por su parte superior, se pone en contacto con un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad dinámica  $\mu$ . De acuerdo a la experiencia, el líquido penetrará espontáneamente en el tubo capilar y alcanzará una cierta altura de equilibrio,  $h$ , respecto al nivel del líquido exterior. Se asume que el cono tiene una generatriz que forma un ángulo  $\phi$  respecto a la coordenada vertical  $z$ . Como se discutirá más adelante, dependiendo de las propiedades de mojado del líquido sobre la pared interior del cono pueden ocurrir al menos cuatro posibilidades para las alturas de equilibrio, las cuales son parecidas a aquellas que se muestran en la Fig. 3.17, donde  $\theta$  es el ángulo de mojado entre el líquido y la superficie sólida.

Para tubos capilares eje simétricos, la energía  $E$  de una columna líquida inmersa en él, puede ser escrita en términos de la altura alcanzada por la columna,  $h$ , y del radio del capilar  $r(z)$  a esa altura  $z$ , de la manera siguiente

$$E = \pi \rho g \int_0^h r^2(z) z dz - \pi \sigma c \int_0^h r(z) dz, \quad (3.115)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\sigma$  la tensión superficial del líquido, de aquí que el primer término representa la energía potencial gravitacional y el segundo la energía superficial [1, 37, 38]. Esta expresión es válida bajo la consideración que el menisco es una sección de esfera y en el límite cuando  $r(z)$  es mucho menor que  $h$ . Para un tubo capilar ejesimétrico el parámetro  $c = 2 \cos(\theta + \phi)$ , mientras que en el caso de un cilindro  $c = 2 \cos \theta$  [1].

La altura de la columna de líquido en un tubo, puede ser encontrada de la condi-

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

ción de equilibrio para la energía de la columna líquida [37, 38]

$$\frac{\partial E}{\partial h} = 0. \quad (3.116)$$

En la ecuación (3.115), la función  $r = r(z)$ , define la forma del capilar (superficie de revolución generada alrededor del eje que coincide con el eje central del tubo capilar). En los cálculos que siguen, se usaran estimaciones basadas en la aproximación de la lubricación ( $|dr/dz| < 1$ ), lo cual quiere decir que nos restringimos a estudiar capilares estrechos, esto es que  $\kappa r \ll 1$ , donde  $\kappa^{-1} \equiv (\sigma/g\rho)^{1/2}$  es la longitud capilar. Esto implica que la altura de ascenso es mayor que el radio del capilar para dicha altura, esto es  $h \gg r(z)$ , y las variaciones de altura de la superficie del menisco son despreciables comparadas con la altura  $h$  misma. Los tubos capilares están en contacto con un estanque de líquido a la presión ambiental  $p_0$ .

Las raíces reales y positivas  $h_1, h_2, \dots, h_i, \dots$  de la ecuación (3.116), con  $(\partial^2 E/\partial h^2)_{h=h_i} > 0$ , corresponden a las alturas responsables de un equilibrio estable, mientras que si  $(\partial^2 E/\partial h^2)_{h=h_i} < 0$ , las alturas serán responsables de un equilibrio inestable. El ascenso o descenso del líquido dentro del capilar se realiza para un intervalo de valores de  $z$  que va desde 0 hasta  $h_1$ , o desde  $h_i$  hasta  $h_{i+1}$ , si en dicho intervalo  $\partial E/\partial h < 0$ ; para los valores correspondientes a los intervalos donde  $\partial E/\partial h < 0$ , el ascenso del líquido en el capilar puede llevarse a cabo solamente a cuenta de trabajo externo. Para capilares cilíndrico o cónico divergente, se ha encontrado que, existe una única altura de elevación capilar, mientras que para tubos capilares de forma cónica convergente se encuentran dos o más, y en el caso de un capilar de sección periódica variable, las alturas encontradas serán múltiples. En todo caso, siempre se tiene un numero finito de alturas definido por el número de raíces reales y positivas de la ecuación (3.116), es decir, por la forma de la sección transversal del capilar, determinada por la función  $r = r(z)$ .

Las alturas de ascenso capilar del líquido para tubos de sección variable pueden

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

encontrarse también a partir de la solución simultánea sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{c\sigma}{R} &= -\rho gh, \\ r &= r(h),\end{aligned}\tag{3.117}$$

donde  $c$  depende de la geometría local y del ángulo de contacto que el líquido hace con el sólido, y  $1/R$  es la curvatura de la superficie del menisco en el punto de contacto a la altura  $h$ , la cual se encuentra relacionada con el radio  $r(h)$  de la sección transversal del tubo capilar, a la misma altura, de la siguiente manera

$$R(h) = -\frac{r(h)}{\cos(\theta + \phi)}.\tag{3.118}$$

Siendo  $\theta$  el ángulo de contacto de Young-Dupré, y  $\phi$  es el ángulo cuya tangente es la pendiente de la recta tangente a la superficie del tubo capilar a la altura  $h$ , esto es

$$\phi = \arctan \left[ \left( \frac{dr}{dz} \right)_{z=h} \right].\tag{3.119}$$

Por otro lado, y como se sabe, el líquido será succionado hacia arriba de los tubos si la superficie del capilar es hidrófila ( $\theta < \pi/2$ ), y hacia abajo en el caso de que la superficie sea hidrófoba ( $\theta > \pi/2$ ).

El radio del capilar puede variar de manera que genere conos o cilindros con estructuras más complejas. Para capilares ejesimétricos la ecuación de la generatriz es

$$r(z) = r_0 \pm mz^n,\tag{3.120}$$

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

donde  $r_0$  denota el radio del capilar a la altura de la superficie del líquido del recipiente en el que se sumerge y  $m$  es un parámetro cuyas dimensiones dependen del exponente  $n$  (la aproximación unidimensional de la teoría de lubricación requiere que  $n \geq 0$ ), y que determina la rapidez de apertura, (si  $m$  es positiva), o cierre, ( $m$  negativa), de los tubos capilares. De aquí que la ecuación 3.115 será

$$E = \pi \rho g \left\{ r_0^2 \frac{h^2}{2} \pm 2r_0 m \frac{h^{n+2}}{n+2} + m^2 \frac{h^{2n+2}}{2n+2} \right\} - \pi \sigma c \left\{ r_0 h \pm m \frac{h^{n+1}}{n+1} \right\} \quad (3.121)$$

donde  $c = 2 \cos(\theta + \phi)$ . El signo más es para apertura positiva y el menos para conos convergentes.

Haciendo los cambios de variables

$$\xi = \left( \frac{m}{r_0} \right)^{\frac{1}{n}} h, \quad Bo^* = \frac{\rho g r_0^{1+\frac{1}{n}}}{2\sigma m^{\frac{1}{n}}} \quad \text{y} \quad E^* = \frac{Em_n^{\frac{2}{n}}}{\pi \rho g r_0^{2+\frac{2}{n}}}, \quad (3.122)$$

obtenemos las siguientes expresiones adimensionales de para la energía y sus primeras dos derivadas con respecto a la altura adimensional  $\xi$

$$E^* = \left\{ \frac{1}{2} \xi^2 \pm \frac{2}{n+2} \xi^{n+2} + \frac{1}{2n+2} \xi^{2n+2} \right\} - \frac{\cos(\theta + \phi)}{Bo^*} \left\{ \xi \pm \frac{1}{n+1} \xi^{n+1} \right\}, \quad (3.123)$$

$$\frac{dE^*}{d\xi} = [1 \pm \xi^n] \left[ \xi (1 \pm \xi^n) - \frac{\cos(\theta + \phi)}{Bo^*} \right] \quad (3.124)$$

y

$$\frac{d^2 E^*}{d\xi^2} = 1 \mp \frac{n \cos(\theta + \phi)}{Bo^*} \xi^{n-1} \pm (2n+2) \xi^n + (2n+1) \xi^{2n}. \quad (3.125)$$

Las alturas de equilibrio se obtienen de la condición

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

$$\frac{dE^*}{d\xi} = 0, \quad (3.126)$$

como fue señalado al inicio. Ello implica que

$$[1 \pm \xi^n] \left[ \pm \xi^{n+1} + \xi - \frac{\cos(\theta + \phi)}{Bo^*} \right] = 0, \quad (3.127)$$

por lo que para encontrarlas tendremos que encontrar las raíces reales de

$$1 \pm \xi^n = 0, \quad (3.128)$$

o de

$$\pm \xi^{n+1} + \xi - \frac{\cos(\theta + \phi)}{Bo^*} = 0, \quad (3.129)$$

De la ecuación 3.128 podemos ver que para  $m > 0$

$$\xi = \sqrt[n]{-1}, \quad (3.130)$$

mientras que para  $m < 0$

$$\xi = \sqrt[n]{1}.$$

Como podemos ver la primera de estas ecuaciones sólo tiene solución real para  $n$  impares ( $\xi = -1$ ), mientras que la segunda tiene solución para toda  $n > 0$  (si  $n$  es par  $\xi = \pm 1$ , esto es, dos alturas de equilibrio, mientras que para  $n$  impar sólo

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

existe una, a saber,  $\xi = 1$ ). Además de la evaluación de la segunda derivada podemos establecer que para  $m > 0$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} E^* (\xi = -1) = -\frac{n}{Bo^*} \cos(\theta + \phi), \quad (3.131)$$

mientras que para  $m < 0$  y  $n$  impar

$$\frac{d^2}{d\xi^2} E^* (\xi = 1) = \frac{n}{Bo^*} \cos(\theta + \phi), \quad (3.132)$$

y para  $m < 0$  y  $n$  par

$$\frac{d^2}{d\xi^2} E^* (\xi = \pm 1) = \pm \frac{n \cos(\theta + \phi)}{Bo^*}. \quad (3.133)$$

Como se puede ver el que dichos puntos sean estables ( $(\partial^2 E / \partial h^2)_{h=h_i} > 0$ ), o inestables ( $(\partial^2 E / \partial h^2)_{h=h_i} < 0$ ) dependerá del valor tomado por la función  $\cos(\theta + \phi)$ .

Por otro lado la segunda parte de la ecuación (3.127), nos dice que

$$\xi^{n+1} + \xi = \frac{\cos(\theta + \phi)}{Bo^*}, \quad (3.134)$$

o

$$\xi^{n+1} - \xi = -\frac{\cos(\theta + \phi)}{Bo^*}. \quad (3.135)$$

Con el fin de analizar este par de ecuaciones, grafiquémoslas para algunos valores enteros de  $n$

Como podemos ver de esta primera gráfica, Fig. 3.15, para perfiles divergentes tendremos siempre una raíz real, en el caso de  $n$  par. De donde podemos deducir la siguiente relación entre  $\theta$  y  $\phi$  (para una  $\xi$  y un  $Bo^*$  dado)

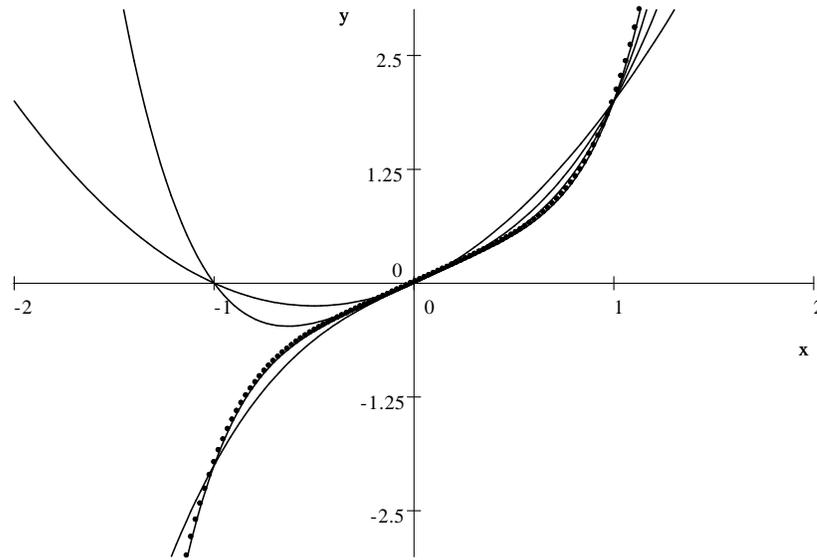


Figura 3.15: Gráfica de la función  $\xi^{n+1} + \xi$  (perfiles divergentes, i.e.  $m > 0$ ), para  $n = 1, n = 2, n = 3$  y  $n = 4$ .

$$\theta = \arccos (Bo^* (\xi^{n+1} + \xi)) - \phi. \quad (3.136)$$

Para el caso de  $n$  impar, podrá haber una o hasta dos raíces, siempre y cuando

$$\frac{\cos (\theta + \phi)}{Bo^*} \geq -n (n + 1)^{-\frac{n+1}{n}}. \quad (3.137)$$

En caso contrario, no existirán raíces reales, pues el punto crítico de la función

$$f(\xi) = \xi + \xi^{n+1}, \quad (3.138)$$

se encuentra en el punto

$$\xi^* = -(n + 1)^{-\frac{1}{n}}, \quad (3.139)$$

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

debajo del cual, la función no se encuentra definida.

Si definimos al ángulo de inclinación crítico  $\phi_c$ , como el ángulo de inclinación para el cual se cumple la igualdad

$$f(\xi^*) = \frac{\cos(\theta + \phi_c)}{Bo^*}, \quad (3.140)$$

para un ángulo de mojado  $\theta$  determinado, obtendremos que

$$\phi_c = \arccos\left(-Bo^*n(n+1)^{-\frac{n+1}{n}}\right) - \theta. \quad (3.141)$$

Podemos así mismo definir al ángulo crítico de mojado,  $\theta_c$ , como aquel para el que se sigue cumpliendo la ecuación(3.140), sólo que ahora el ángulo de inclinación  $\phi$  es fijo, esto es

$$\theta_c = \arccos\left(-Bo^*n(n+1)^{-\frac{n+1}{n}}\right) - \phi. \quad (3.142)$$

De la Fig. 3.16, se desprende que para perfiles convergentes, tendremos que para  $n$  impar, nuevamente podrá haber una o hasta dos raíces reales si

$$\frac{\cos(\theta + \phi)}{Bo^*} \leq n(n+1)^{-\frac{n+1}{n}}. \quad (3.143)$$

Y como antes, de no ocurrir lo anterior, no habrá raíces reales, pues el punto crítico de la función

$$f(\xi) = \xi^{n+1} - \xi, \quad (3.144)$$

se encuentra ahora en

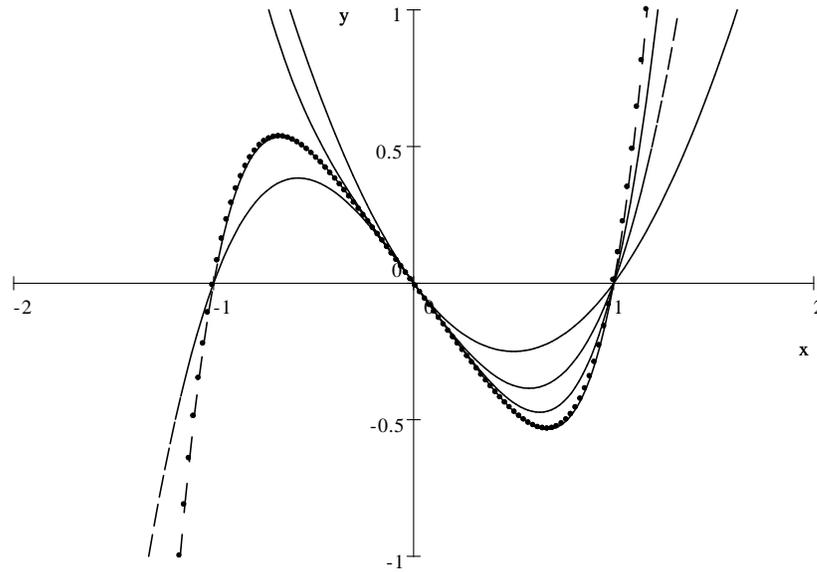


Figura 3.16: Gráfica de la función  $\xi^{n+1} - \xi$  (perfiles convergentes, i.e.  $m < 0$ ), para  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$  y  $n = 4$ .

$$\xi^* = (n + 1)^{-\frac{1}{n}}, \quad (3.145)$$

y debajo de este punto  $f(\xi)$  no está definida.

Al igual que antes definamos al ángulo de inclinación crítico  $\phi_c$ , como el ángulo de inclinación para el cual se cumple la igualdad

$$f(\xi^*) = -\frac{\cos(\theta + \phi_c)}{Bo^*}, \quad (3.146)$$

para un ángulo de mojado  $\theta$  determinado, obtendremos que

$$\phi_c = \arccos\left(Bo^* n (n + 1)^{-\frac{n+1}{n}}\right) - \theta. \quad (3.147)$$

Mientras que el ángulo crítico de mojado  $\theta_c$ , para un ángulo de inclinación  $\phi$  fijo, es

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

$$\theta_c = \arccos \left( Bo^* n (n+1)^{-\frac{n+1}{n}} \right) - \phi. \quad (3.148)$$

Sin embargo para el caso de  $n$  par, y perfiles convergentes, vemos que no importando el valor asumido por la función,  $-\cos(\theta + \phi)/Bo^*$ , siempre habrá una raíz real, pudiendo aparecer dos y hasta tres raíces reales siempre y cuando

$$n(n+1)^{-\frac{n+1}{n}} \geq \frac{\cos(\theta + \phi)}{Bo^*} \geq -n(n+1)^{-\frac{n+1}{n}}. \quad (3.149)$$

En este caso podemos definir los ángulos críticos,  $\phi_c$  y  $\theta_c$ , superiores si

$$\phi_c^s = \arccos \left( Bo^* n (n+1)^{-\frac{n+1}{n}} \right) - \theta, \quad (3.150)$$

y

$$\theta_c^s = \arccos \left( Bo^* n (n+1)^{-\frac{n+1}{n}} \right) - \phi. \quad (3.151)$$

E inferiores si

$$\phi_c^i = \arccos \left( -Bo^* n (n+1)^{-\frac{n+1}{n}} \right) - \theta, \quad (3.152)$$

y

$$\theta_c^i = \arccos \left( -Bo^* n (n+1)^{-\frac{n+1}{n}} \right) - \phi. \quad (3.153)$$

Ahora bien, como puede verse de la anterior deducción, el  $\cos(\theta + \phi)$  es una función de la altura, esto es  $\cos(\theta + \phi) = f(h)$  (que en el caso de variables adimensionales es  $f(\xi)$ ), la cual mide la razón de la curvatura de la sección transversal que

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

opone el canal al líquido, a la curvatura física del menisco embebido en dicho capilar, esto es

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \phi) &= -\frac{r(h)}{R(h)} & (3.154) \\ &= \frac{\text{radio de la sección transversal del tubo a la altura } h}{\text{inverso de la curvatura del menisco a la altura } h} \\ &= \frac{\text{curvatura física a la altura } h}{\text{curvatura geométrica a la altura } h}. \end{aligned}$$

Por otro lado, el radio de la sección transversal del tubo a la altura  $h$  es como ya dijimos  $r(h) = r_0 \pm mh^n$ , por lo que si  $\phi \rightarrow 0$ , la derivada de la función  $r(z)$ , en cualquier punto se haría cero y entonces tendríamos un capilar cilíndrico, de forma tal que  $r(h) = r_0$  y

$$E = \pi \rho g \left\{ r_0^2 \frac{h^2}{2} \right\} - \pi \sigma c \{ r_0 h \}; \quad (3.155)$$

$$\frac{\partial E}{\partial h} = \pi \rho g r_0^2 h - \pi \sigma c r_0; \quad (3.156)$$

y

$$\frac{\partial^2 E}{\partial h^2} = \pi \rho g r_0^2. \quad (3.157)$$

Que como se ve da la altura de equilibrio estable

$$h = \frac{\sigma c}{\rho g r_0}, \quad (3.158)$$

con  $c = 2 \cos \theta$ .

Analícemos ahora un caso de interés.

### 3.3.2. Alturas de equilibrio en capilares cónicos [81]

Considérese que un tubo capilar vertical cónico, abierto por su parte superior, se pone en contacto con un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad dinámica  $\mu$ . De acuerdo a la experiencia, el líquido penetrará espontáneamente en el tubo capilar y alcanzará una cierta altura de equilibrio,  $h$ , respecto al nivel del líquido exterior. Se asume que el cono tiene una generatriz que forma un ángulo  $\phi$  respecto a la coordenada vertical  $z$ . Como se discutirá más adelante, dependiendo de las propiedades de mojado del líquido sobre la pared interior del cono pueden ocurrir al menos cuatro posibilidades para las alturas de equilibrio, las cuales se muestran en la Fig. 3.17, donde  $\theta$  es el ángulo de mojado entre el líquido y la superficie sólida.

Para capilares cónicos la ecuación de la generatriz es

$$r(z) = r_0 + mz, \quad (3.159)$$

donde  $r_0 = r(z = 0)$  es el radio a la altura a la que se encuentra el nivel del líquido exterior al cono y  $m = \tan \phi$ , es decir, la pendiente de la generatriz. Sí el capilar es un cono divergente  $m > 0$  y sí es un cono convergente  $m < 0$ .

La altura de la columna de líquido en un tubo, (Fig. 3.17), puede ser encontrada mediante la Ec. (3.116), que determina la condición de equilibrio para la energía de la columna líquida. La sustitución de la Ec. (3.159) en (3.115) permite calcular la energía y al sustituirla en la Ec. (3.116) se determinan las raíces reales y positivas  $h_i$  [37].

Para capilares cilíndricos o cónicos divergente, se ha encontrado que, existe una única altura de elevación capilar, mientras que para tubos capilares de forma cónica convergente se encuentran dos o más, esto para el caso de "buen"mojado [32, 37]. Para los casos de "mal"mojado hay una única depresión de equilibrio en capilares cilíndricos o cónicos convergentes y dos o más en los capilares cónicos divergentes [32].

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

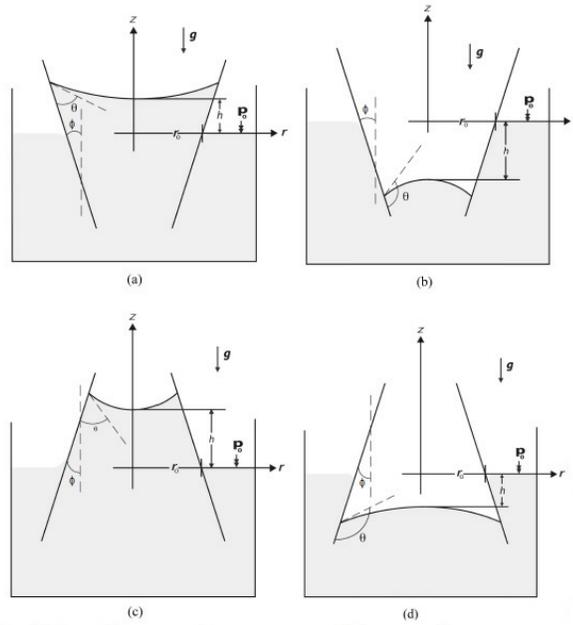


Figura 3.17: Forma esquemática de un capilar cónico de radio inicial  $r_0 = r(0)$  y ángulo interior  $\phi$  (ángulo entre el eje  $z$  y la generatriz del cono). La altura de equilibrio, que alcanza el líquido al penetrar desde  $z = 0$ , es  $h$ . (a) Cono divergente con buen mojado:  $m > 0$ ,  $0 \leq \theta < \pi/2$ ,  $h > 0$ ; (b) cono divergente con mal mojado:  $m > 0$ ,  $\pi/2 \leq \theta < \pi$ ,  $h < 0$ ; (c) cono convergente con buen mojado:  $m < 0$ ,  $0 \leq \theta < \pi/2$ ,  $h > 0$ ; (d) cono convergente con mal mojado:  $m < 0$ ,  $\pi/2 \leq \theta < \pi$ ,  $h < 0$ .

Substituyendo la Ec. (3.159) en la Ec. (3.115) e integrando se encuentra que la energía de la columna líquida en un tubo capilar cónico es

$$E = \pi \rho g \left\{ r_0^2 \frac{h^2}{2} + 2r_0 m \frac{h^3}{3} + m^2 \frac{h^4}{4} \right\} - 2\pi \sigma \cos(\theta + \phi) \left\{ r_0 h + m \frac{h^2}{2} \right\}. \quad (3.160)$$

Esta ecuación se puede escribir en forma adimensional escalando las alturas con el radio  $r_0$ , es decir, realizando el siguiente cambio de variables  $\xi = h/r_0$ ,  $Bo = \rho g r_0^2 / \sigma$  y  $E^* = E / \pi \rho g r_0^4$ , donde  $Bo$  es el número de Bond, el cual es el cociente de la presión hidrostática a la presión capilar.

Las expresiones adimensionales resultantes para la energía y su derivada con

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

respecto  $\xi$ , para un tubo capilar cónico, son

$$E^* = \left\{ \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{2m}{3}\xi^3 + \frac{m^2}{4}\xi^4 \right\} - \frac{2 \cos(\theta + \phi)}{Bo} \left\{ \xi + \frac{m}{2}\xi^2 \right\}, \quad (3.161)$$

y

$$\frac{\partial E^*}{\partial \xi} = [1 + m\xi] \left[ (\xi + m\xi^2) - \frac{2 \cos(\theta + \phi)}{Bo} \right]. \quad (3.162)$$

Las alturas de equilibrio, se obtienen ahora de la condición  $\partial E^*/\partial \xi = 0$ , lo que implica que las raíces de la Ec. (3.162) son en este caso

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1}{m}, \\ \xi_2 &= -\frac{1}{2m} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{8m \cos(\theta + \phi)}{Bo}} \right), \\ \xi_3 &= -\frac{1}{2m} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8m \cos(\theta + \phi)}{Bo}} \right). \end{aligned} \quad (3.163)$$

Las raíces  $\xi_2$  y  $\xi_3$  serán reales siempre y cuando

$$1 + \frac{8m \cos(\theta + \phi)}{Bo} \geq 0. \quad (3.164)$$

En caso de darse la igualdad vemos, de la Ec. (3.163), que  $\xi_2 = \xi_3 = -1/2m$ .

En lo que sigue se analizan sólo los casos en que el capilar es divergente o convergente ( $\phi \neq 0$ ), pues para el caso en el que  $\phi \rightarrow 0$ , se tiene un capilar cilíndrico, cuya generatriz tiene la forma  $r(z) = r_0$ , por lo que la Ec. (3.161) será en este caso

$$E^* = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{2 \cos(\theta)}{Bo}\xi \quad (3.165)$$

y la altura de equilibrio  $\xi = \cos \theta / Bo$ .

### Análisis de las alturas de equilibrio

La Fig. 3.17 muestra esquemáticamente lo que sucede en capilares divergente (Fig. 3.17a y 3.17b), o convergentes (Fig. 3.17c y 3.17d), según el líquido moje o no a las paredes del capilar. En ambos casos su eje de simetría está sobre el eje  $z$ . Para los casos 3.17a y 3.17b,  $m > 0$ , mientras que para 3.17c y 3.17d,  $m < 0$ . Como se mencionó más arriba el radio "inicial", o radio  $r_0$  es el radio a la altura a la que se encuentra el líquido en el exterior del capilar.

En los cálculos que siguen, se usaran estimaciones basadas en la aproximación de la lubricación ( $|dr/dz| < 1$ ), lo que implica estudiar capilares estrechos, esto es  $|h| \gg r(z)$  y que las variaciones de altura de la superficie del menisco son despreciables comparadas con la altura  $h$  misma. Se restringe el análisis a ángulos de apertura  $\phi$  pequeños, lo cual implica que  $m = \tan \phi \approx \phi$ . Un valor de  $\phi$  negativo corresponde a conos convergentes, mientras que para  $\phi$  positivos se tendrán conos divergentes. Bajo estas consideraciones las soluciones de la Ec. (3.162) son entonces

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1}{\phi}, \\ \xi_2 &= -\frac{1}{2\phi} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{8\phi \cos(\theta + \phi)}{Bo}} \right), \\ \xi_3 &= -\frac{1}{2\phi} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8\phi \cos(\theta + \phi)}{Bo}} \right). \end{aligned} \tag{3.166}$$

Mientras que la condición expresada en la Ec. (3.164) es

$$Bo \geq -8\phi \cos(\theta + \phi). \tag{3.167}$$

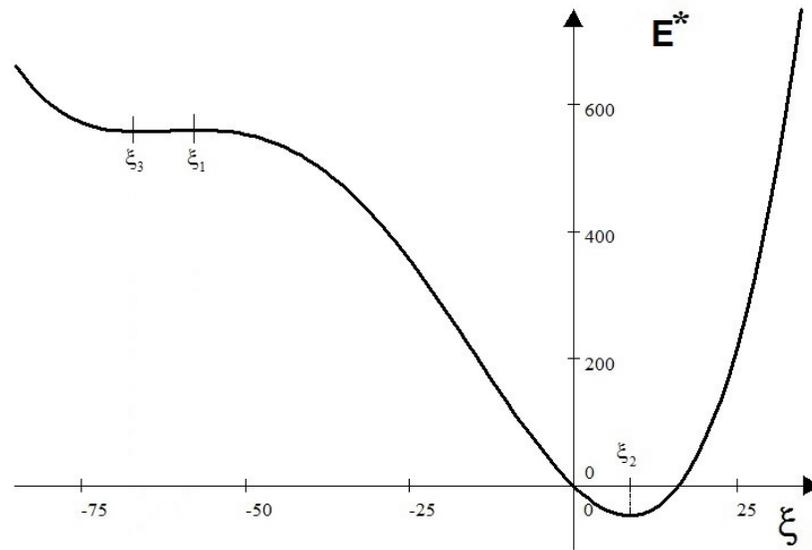


Figura 3.18: Gráfica de energía adimensional  $E^*$  en función de  $\xi$ , para un líquido que moja las paredes de un capilar cónico divergente ( $\phi > 0$ ).  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi_3$  son las alturas de equilibrio.

### Comportamiento de las alturas de equilibrio en función del número de Bond

**Líquidos que mojan las paredes del capilar ( $0 \leq \theta < \pi/2$ ).** Analicemos primeramente el caso de un líquido que moja las paredes del capilar, *i. e.*  $0 \leq \theta < \pi/2$ . Para  $\phi > 0$ , esto es, para conos divergentes, Fig. 3.17a, la relación (3.167) se cumplirá siempre y para cualquier valor de  $Bo$  mayor que cero. De las dos raíces  $\xi_2$  y  $\xi_3$  especificadas por la Ec. (3.166), sólo  $\xi_2$  tiene significado físico (si  $\theta + \phi < \pi/2$ ), y representa la altura de equilibrio estable alcanzada por el líquido en el capilar ( $\xi_1$  y  $\xi_3$  no tiene significado físico, pues son alturas negativas, ver Fig. 3.18, en donde se grafica la energía adimensional, Ec. (3.161), y sus respectivos puntos críticos  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi_3$ ).

Sin embargo, cuando  $\phi < 0$ , esto es, para capilares convergentes, (ver Fig. 3.17c),

### Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

las raíces  $\xi_2$  y  $\xi_3$  expresadas en la Ec. (3.166) tiene sentido físico sólo si el número de Bond es mayor que aquel que se encuentra determinado por la desigualdad (3.167) y  $\cos(\theta + \phi) > 0$ . Sí este es el caso,  $\xi_3$  representa un estado de equilibrio inestable (ya que  $\partial^2 E^*/\partial \xi^2 > 0$ ), y  $\xi_2$  uno estable ( $\partial^2 E^*/\partial \xi^2 < 0$ ). Estas dos raíces se colapsan en una sola, y con ello en un equilibrio inestable, cuando  $Bo = -8\phi \cos(\theta + \phi)$ . Por ello ahora la altura de equilibrio estable es la proporcionada por  $\xi_1$  (Fig. 3.19).

Como ejemplo de estos hechos, considerese la Fig. 3.18 en donde se grafica la energía  $E^*$  para  $\theta = 0^\circ$  (por ej. la interacción vidrio-agua, donde  $\sigma = 0,07362$  N/m,  $\rho = 999$  Kg/m<sup>3</sup> y  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>, para  $T_{amb} = 15,6$  °C [82]). Supóngase que  $\phi = 1^\circ$ , es decir, un cono divergente y  $Bo = 0,2$ . En tal caso  $r_0 = 1,2257$  mm y  $\xi_1 = -57.29$ ,  $\xi_2 = 8.6826$  y  $\xi_3 = -65.973$ . O sea  $\xi_1$  y  $\xi_3$  no tienen sentido físico, pues en este caso la altura debe ser positiva.

Por otra parte, si ahora  $\theta = 0^\circ$  y el capilar es convergente,  $\phi = -1^\circ$ , y se mantienen los valores de  $\sigma$ ,  $\rho$  y  $g$  ya mencionados, el número de Bond crítico es  $Bo_c = 0,13962$ . En tal caso  $r_0 = 0,69887$  mm y  $\xi_1 = 57.29$ , y  $\xi_2 = \xi_3 = 28.645$ . Bajo las mismas condiciones en  $\theta$  y  $\phi$ , pero con  $Bo = 0,2$ , se encuentra que  $\xi_1 = 57.29$ ,  $\xi_2 = 12.906$ , y  $\xi_3 = 44.384$ . Como se puede observar en la Fig. 3.19, para el número de Bond crítico, la altura de equilibrio estable está dada por  $\xi_1$ , mientras que cuando este mismo número es mayor que el crítico, la altura de equilibrio estable se da en  $\xi_2$ , esto es, en el extremo contrario.

Para  $0 < Bo < Bo_c$  en capilares convergentes, la única altura de equilibrio real es  $\xi_1 = -1/\phi$ . Para los datos graficados en la Fig. 3.19, este valor es  $\xi_1 = 57.29$ , como se muestra ahí.

**Líquidos que no mojan las paredes del capilar ( $\pi/2 < \theta \leq \pi$ )** Por otro lado, para el caso cuando el líquido no moja las paredes del capilar, *i.e.*  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ ,

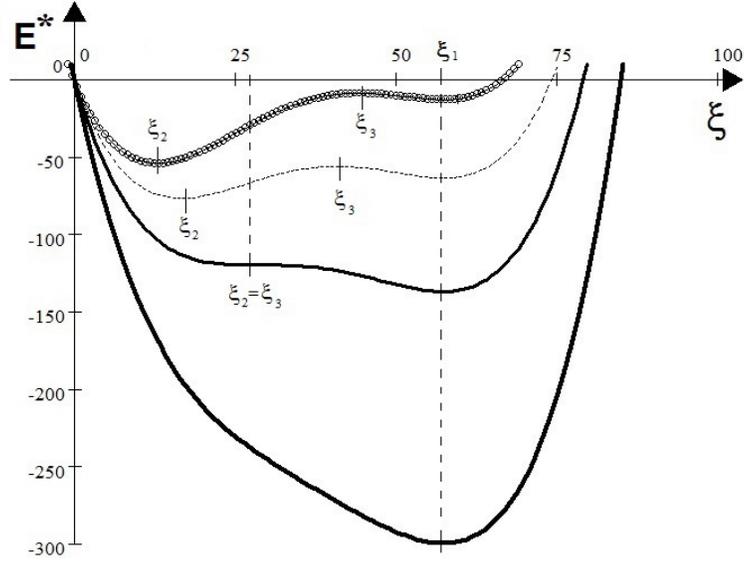


Figura 3.19: Gráficas de energía adimensional  $E^*$  en función de  $\xi$ , para un líquido que moja las paredes de un capilar cónico convergente ( $\phi < 0$ ): línea gruesa continua  $Bo = 0,10$ , línea delgada continua  $Bo = 0,13962$ , (que es el número de Bond crítico), línea punteada  $Bo = 0,17$  y línea de círculos  $Bo = 0,20$ .

los resultados encontrados en el caso anterior se invertirán. Sí ahora  $\phi < 0$ , conos convergentes, Fig. 3.17d, la Ec. (3.167) se cumplirá siempre y para cualquier valor de  $Bo$  mayor que cero. Y nuevamente, de las raíces determinadas por la Ec. (3.166), sólo  $\xi_2$  tiene significado físico, (si  $\theta + \phi > \pi/2$ ), y representa la altura de equilibrio estable alcanzada por el líquido en el capilar (ahora  $\xi_1$  y  $\xi_3$  son alturas positivas, lo que implica que no tienen significado físico, Fig. 3.20).

Para conos divergentes,  $\phi > 0$  (Fig. 3.17b), las raíces  $\xi_2$  y  $\xi_3$  de la Ec. (3.166) tienen sentido físico, sólo sí ahora el número  $Bo$  es mayor que aquel que se encuentra determinado por la Ec. (3.167) y  $\cos(\theta + \phi) < 0$ . En este caso  $\xi_2$  representa un estado de equilibrio estable ( $\partial^2 E^* / \partial \xi^2 < 0$ ), mientras que  $\xi_3$  uno de equilibrio inestable ( $\partial^2 E^* / \partial \xi^2 > 0$ ).  $\xi_2$  y  $\xi_3$  se colapsan en una sólo valor y en una altura de equilibrio inestable, cuando  $Bo = -8\phi \cos(\theta + \phi)$ . Lo que hace que la altura de equilibrio

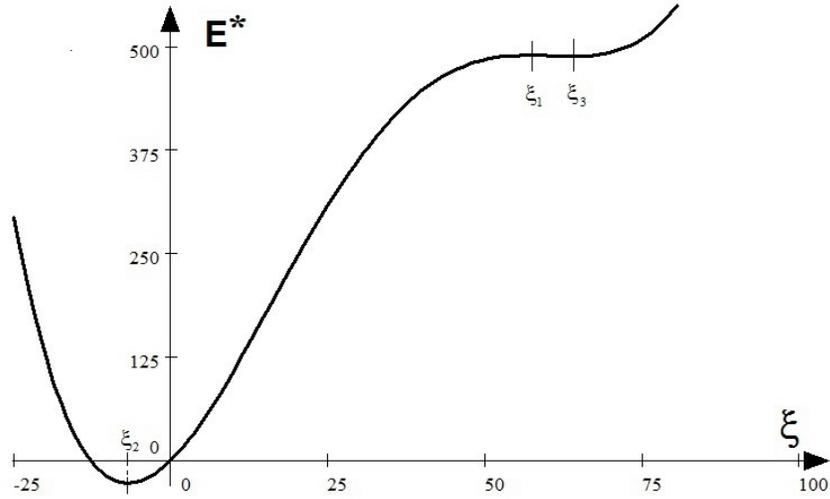


Figura 3.20: Gráfica de energía adimensional  $E^*$  en función de  $\xi$ , para un líquido que no-moja las paredes de un capilar cónico convergente ( $\phi < 0$ ).

estable sea  $\xi_1$  (Fig. 3.21).

Para ejemplificar los hechos mencionados, en la Fig. 3.20 se gráfica la energía  $E^*$  para  $\theta = 140^\circ$  (por ej. la interacción vidrio-mercurio, donde  $\sigma = 0,465$  N/m,  $\rho = 13,55 \times 10^3$  Kg/m<sup>3</sup> y  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>, para  $T_{amb} = 15,6$  °C [82]). Supongase ahora que  $\phi = -1^\circ$ , o sea un cono convergente y de nuevo  $Bo = 0,2$ . De aquí que  $r_0 = 0,83644$  mm y  $\xi_1 = 57,29$ ,  $\xi_2 = -6,7517$  y  $\xi_3 = 64,042$ .

Manteniendo los valores de  $\sigma$ ,  $\rho$  y  $g$ , pero tomando ahora  $\theta = 140^\circ$  y  $\phi = 1^\circ$  (cono divergente), resulta que  $Bo_c = 0,10852$ . Y entonces  $r_0 = 0,61614$  mm,  $\xi_1 = -57,29$  y  $\xi_2 = \xi_2 = -28,645$ . Si se cambia el Bond por un valor de  $Bo = 0,2$ , preservando  $\theta$  y  $\phi$ , se encuentra que  $\xi_1 = -57,29$ ,  $\xi_2 = -9,2735$ , y  $\xi_3 = -48,023$ . Como puede verse en la Fig. 3.21, para el número de Bond crítico, la altura de equilibrio está dada por  $\xi_1$ , mientras que cuando  $Bo > Bo_c$ , la altura de equilibrio se traslada a  $\xi_2$ , esto es, al extremo contrario.

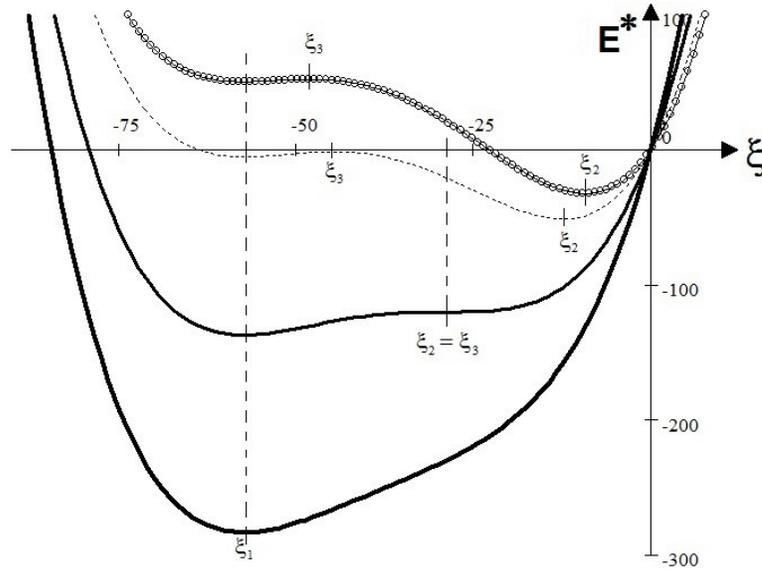


Figura 3.21: Gráficas de energía adimensional  $E^*$  en función de  $\xi$ , para un líquido que no-moja las paredes de un capilar cónico divergente ( $\phi > 0$ ): línea gruesa continua  $Bo = 0,08$ , línea delgada continua  $Bo = 0,10852$ , (número de Bond crítico), línea punteada  $Bo = 0,16$  y línea de círculos  $Bo = 0,20$ .

Para  $0 < Bo < Bo_c$ , en capilares divergentes, la única altura de equilibrio real sigue siendo  $\xi_1 = -1/\phi$ . Para los datos graficados en la Fig. 3.21,  $\xi_1 = -57.29$ .

### Espacio fase de $\theta$ vs. $\phi$

En los dos apartados anteriores se analizó el comportamiento de las alturas de equilibrio, mediante la desigualdad dada por la Ec. (3.167), haciendo variar  $Bo$ , y fijando valores en los parámetros  $\phi$  y  $\theta$ . Se puede, sin embargo, analizar el comportamiento de dichas alturas, mediante la Ec. (3.167), dando ahora valores al número de Bond  $Bo$  y al ángulo de mojado  $\theta$ , y con ello calcular un ángulo crítico de inclinación de la generatriz del cono  $\phi_c$ , o dando valores específicos a  $Bo$  y  $\phi$ , y calculando el ángulo crítico de mojado  $\theta_c$ , para estos valores. Al igual que en la sección anterior,

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

se denominan como críticos a los valores de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , que hacen que la Ec. (3.167) se haga una igualdad.

Para el primero de estos dos casos, se deduce de la Ec. (3.167) que

$$\frac{Bo}{8} = -\phi_c \cos(\theta + \phi_c). \quad (3.168)$$

Esta ecuación para el caso de líquidos que mojan las paredes de capilar, *i. e.*,  $0 \leq \theta < \pi/2$ , y  $\cos(\theta + \phi_c) > 0$ , sólo se cumplirá si  $\phi_c < 0$  (capilares convergentes). Para valores específicos de  $Bo$  y  $\theta$ , el valor de  $\phi_c$ , hace que de acuerdo con la Ec. (3.166),  $\xi_2 = \xi_3$ , por lo que la altura de equilibrio estable es  $\xi_1$ . Sí  $\phi < \phi_c$ ,  $-8\phi \cos(\theta + \phi) > -8\phi_c \cos(\theta + \phi_c) = Bo$ , haciendo que los valores de  $\xi_2$  y  $\xi_3$  no sean reales y que la altura de equilibrio estable siga siendo  $\xi_1$ . Sí ahora  $\phi_c \leq \phi < 0$ ,  $Bo = -8\phi_c \cos(\theta + \phi_c) \geq -8\phi \cos(\theta + \phi)$ , por lo que al cumplirse la condición enunciada en la Ec. (3.167), la altura de equilibrio estable es  $\xi_2$ , la cual es menor que  $\xi_1$ .

Para el caso de líquidos que no mojan las paredes del capilar ( $\pi/2 < \theta \leq \pi$ ), y  $\cos(\theta + \phi_c) < 0$ , la Ec. (3.168) se cumplirá únicamente sí  $\phi_c > 0$  (capilares divergentes). Dados  $Bo$  y  $\theta$ , este valor crítico  $\phi_c$  hace que  $\xi_2 = \xi_3$  y que la depresión de equilibrio estable sea  $\xi_1$ . Por otro lado, sí  $\phi > \phi_c$ , entonces  $-8\phi \cos(\theta + \phi) > -8\phi_c \cos(\theta + \phi_c) = Bo$ , haciendo que los valores de  $\xi_2$  y  $\xi_3$  no sean reales y que la altura de equilibrio estable siga siendo  $\xi_1$ . Pero, sí  $\phi_c \geq \phi > 0$ , entonces  $Bo = -8\phi_c \cos(\theta + \phi_c) \geq -8\phi \cos(\theta + \phi)$ . Esta condición, enunciada en la Ec. (3.167), establece que la depresión de equilibrio estable es  $\xi_2$ , que es menor en magnitud que  $\xi_1$ .

Debido al hecho de que se está trabajando con ángulos de inclinación de la generatriz del cono pequeños, se puede ver de las Ec. (3.168) que:  $\phi_c \simeq -Bo/8 \cos \theta$ .

Capítulo 3. Imbibición de flujos unidimensionales

Sí ahora se dan valores a  $Bo$  y a  $\phi$ , el ángulo crítico de mojado es

$$\theta_c = \arccos\left(-\frac{Bo}{8\phi}\right) - \phi. \quad (3.169)$$

Ahora bien, para que se cumpla la igualdad  $Bo = -8\phi \cos(\theta_c + \phi)$ , sí  $\phi > 0$  (conos divergentes), entonces  $\cos(\theta_c + \phi) < 0$ , lo que implica que  $\pi/2 < \theta_c \leq \pi$ , es decir, hay un mal mojado del líquido sobre las paredes del capilar. Como antes, este valor de  $\theta$  hace que  $\xi_2 = \xi_3$ , y que la depresión de equilibrio estable sea  $\xi_1$ . Por otra parte, sí  $\theta < \theta_c$ , la Ec. (3.167) se cumplirá y en dicho caso la depresión de equilibrio estable será  $\xi_2$ , que como ya se ha mencionado es tal que  $|\xi_2| < |\xi_1|$  (sí  $\theta > \theta_c$ ,  $\xi_1$  seguiría siendo la depresión de equilibrio estable).

Para el caso  $\phi < 0$  (conos convergentes), la igualdad  $Bo = -8\phi \cos(\theta_c + \phi)$  se cumplirá sólo sí  $\cos(\theta_c + \phi) > 0$ , lo cual implica que  $\pi/2 > \theta_c \geq 0$ , es decir, que el líquido moja las paredes del capilar. Nuevamente, al cumplirse dicha igualdad,  $\xi_2 = \xi_3$ , la altura de equilibrio estable es  $\xi_1$ . Para que la altura de equilibrio estable sea  $\xi_2$ , es necesario que  $\theta > \theta_c$ , pues sí  $\theta < \theta_c$ ,  $\xi_1$  sigue siendo la altura de equilibrio estable, con  $\xi_1 > \xi_2$ .

La Fig. 3.22 presenta la gráfica del diagrama de fase en el plano  $\phi - \theta$  (ángulo de apertura vs. ángulo de contacto), a partir de la Ec. (3.169).

Para la rama derecha de dicha gráfica, los ángulos  $\phi$  de la generatriz son positivos. Sí  $\theta + \phi > \pi/2$  (líquidos con mal mojado),  $\xi$  es negativa, mientras que sí  $\theta + \phi < \pi/2$ ,  $\xi$  es positiva y será cero cuando  $\theta + \phi = \pi/2$  (línea punteada diagonal).

Lo contrario a este comportamiento ocurre en la rama izquierda de esta gráfica, pues ahí  $\phi < 0$ , y si  $\theta + \phi > \pi/2$ ,  $\xi$  será positiva, mientras que sí  $\theta + \phi < \pi/2$ ,  $\xi$  es negativa e igual que antes  $\xi$  será cero cuando  $\theta + \phi = \pi/2$ .

Es importante mencionar los casos en los cuales el ángulo de mojado  $\theta$  es muy

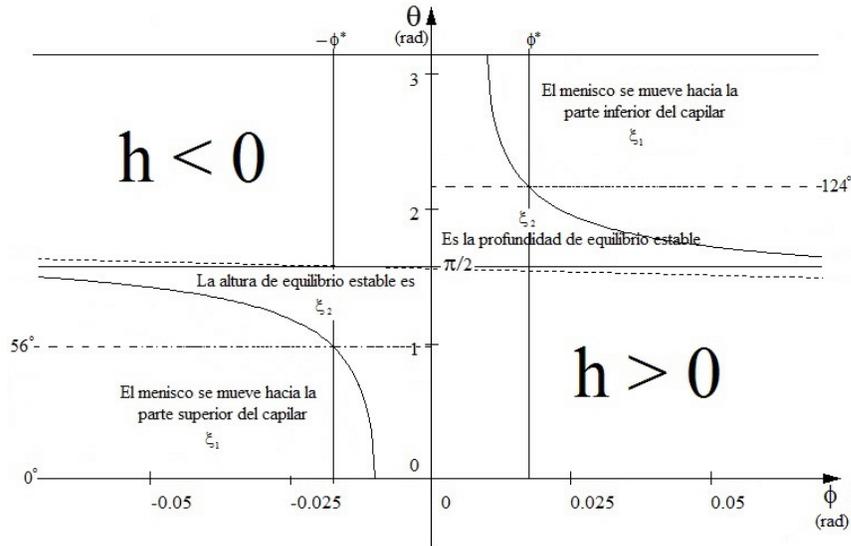


Figura 3.22: Diagrama de fase en el plano  $\phi - \theta$  (ángulo de inclinación de la generatriz del cono vs. ángulo de mojado), con  $Bo = 0,08$  y  $|\phi^*| = 1^\circ$ .

cercano al valor de  $\pi/2$ , pues cuando  $\theta < \pi/2$  (buen mojado) y  $\phi > 0^\circ$  (capilares divergentes), de manera que  $\theta + \phi > \pi/2$ , en lugar de tener alturas de equilibrio estable con respecto al nivel exterior, habra depresiones de alturas en el líquido que se encuentra en el interior del capilar. Si por otro lado  $\theta > \pi/2$  y  $\phi < 0^\circ$ , de forma tal que  $\theta + \phi \leq \pi/2$ , ahora las depresiones en altura, con respecto al nivel exterior, se transformarán en alturas de equilibrio para el líquido dentro del capilar.

Finalmente, la Fig. 3.23 muestra las alturas o depresiones de equilibrio estable  $\xi_1$ , que alcanza el líquido. Dichas alturas o depresiones, a las cuales Tsori [32] denomina "saltos"(jump), son mayores en magnitud que aquellas encontradas mediante el método de balance de presiones y que en este trabajo están dadas por  $\xi_2$ . Aún cuando esto pareciese un error cometido por Tsori, no es tal, debido a que el método de balance de presiones, no permite predecir cual será la altura de equilibrio estable, cuando los números de Bond son menores al crítico o cuando los ángulos de incli-

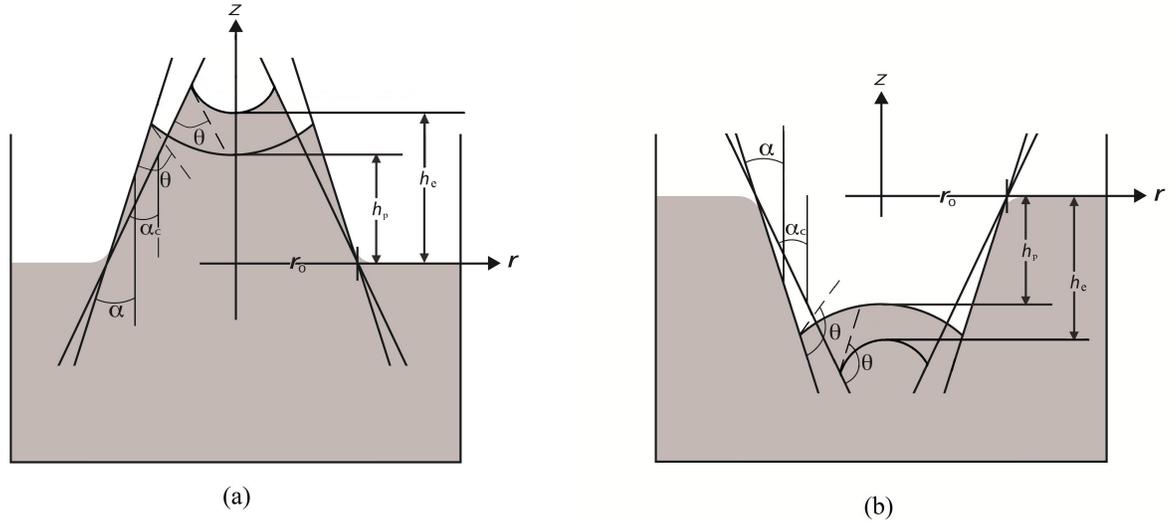


Figura 3.23: Representación esquemática de las alturas o depresiones de equilibrio estable, deducidas mediante el método de balance de presiones  $h_p$  [32] ( $\xi_2$  en este trabajo), y su contraste con la nueva altura o depresión de equilibrio estable deducida aquí mediante el método de extremales de la energía  $h_e$ , ( $\xi_1$  en este trabajo). (a) Conos convergentes ( $\phi < 0$ ), con buen mojado ( $0 \leq \theta < \pi/2$ ),  $h > 0$ . (b) Conos divergentes ( $\phi > 0$ ), con mal mojado ( $\pi/2 \leq \theta < \pi$ ),  $h < 0$ .

nación de la generatriz o de mojado, son mayores a sus valores críticos, resultado que como se muestra aquí, aparece de forma natural al utilizar el método de extremales de la energía.

A mediados de la década pasada Tsori [32], analizó el problema de las alturas de equilibrio en conos con “buen” y “mal” mojado usando para ello una ecuación de balance de presiones. Desafortunadamente, su método limita el número de soluciones posibles para las alturas de equilibrio y las condiciones bajo las cuales estas alturas pueden ocurrir. Aquí, con el método de extremales de la energía, se muestra que es posible encontrar todas las alturas de equilibrio y las condiciones físicas que las determinan.

# Capítulo 4

## Flujo del agua en suelos

### 4.1. Introducción

La penetración capilar de líquidos en los medios porosos ha sido de interés por largo tiempo, debido a sus numerosas aplicaciones en una variedad de campos tales como las ciencias del suelo, la recuperación de petróleo, la ingeniería química, y la farmacéutica ([84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91]). Es difícil, sin embargo, estudiar este proceso en medios porosos verdaderos, debido a su complejidad y la falta de medios para definir los parámetros estructurales locales. Por consiguiente, se han usados modelos simplificados, tanto para los estudios experimentales como también para los teóricos.

El modelo posiblemente más simple que ha sido estudiado es el de un capilar cilíndrico recto (e.g., ([92])). Éste representa, sin embargo, sólo un primer paso hacia la comprensión de la penetración capilar en los medios porosos reales. Para tomar en cuenta algunas de las propiedades geométricas de los medios porosos, se han ideados modelos termodinámicos de capilares con secciones transversales no-uniformes ([84, 85, 86, 88, 89, 93]). Estos modelos son capaces de describir los comportamientos

#### *Capítulo 4. Flujo del agua en suelos*

esenciales de la histéresis, los cuáles son característicos de la penetración capilar en los medios porosos, a saber, la dependencia de las posiciones de equilibrio del líquido sobre la dirección de movimiento (imbibición o drenado). El citado fenómeno de histéresis es diferente de la histéresis del ángulo de contacto, lo cual puede ocurrir tanto en un sistema real, como también en capilares cilíndricos simples. Otro paso hacia el modelado realista es el tratamiento de modelo de partículas empacadas, principalmente esferas ([84, 85, 87, 89, 94]). Dichos modelos son también capaces de predecir los fenómenos histéresis. La característica común entre los modelos, mencionados arriba, es el intento por definir en detalle la geometría del medio poroso. Esta aproximación está limitada ahora mismo a modelos muy simples.

Un acercamiento diferente fue realizado por White ([95]), quien trató al medio poroso en términos de su porosidad, área específica y densidad únicamente, sin tomar en cuenta detalles estructurales locales. Este modelo es muy apropiado para definir una analogía entre un medio poroso y un capilar cilíndrico; sin embargo, a diferencia de los modelos de capilares uniformes, este modelo no puede ocuparse de la histéresis. Así, los modelos existentes pueden ser clasificados en dos grupos de categorías: (a) un tipo de modelo de orden cero, el cual no considera detalles estructurales; (b) los modelos de alto orden, que se basan en formas específicas del poro, pero que están limitados a geometrías simples. El objetivo final, obviamente, sería el de desarrollar un modelo de alto-orden de geometría complicada, pero esto al parece no es sencillo. Sin embargo, sorprendentemente, los experimentos con sistemas bien definidos sobre un amplio rango de parámetros son escasos ([88, 96, 97]). Un estudio cuidadoso de tales sistemas fue llevado a cabo por Y-W Yang y sus colaboradores [96, 97], y cuya contribución principal es la elucidación del efecto del ángulo de contacto en el ciclo de la histéresis. Estas observaciones aún no han sido explicadas por la teoría.

Como puede observarse es de vital importancia el contar con modelos que den explicación, primero a la emergencia de la Ley de Darcy, partiendo de modelos mi-

microscópicos y luego desarrollar modelos, también microscópicos que den sustento a los modelos de la infiltración en el medio poroso, en este caso. La siguiente sección de este capítulo, tratan de realizar el primer objetivo, mientras que el resto de las secciones, se enfocaran al último.

## 4.2. La emergencia de la ley de Darcy.

La ley de Darcy [83], establece que el flujo de agua, en los medios porosos como el suelo, es proporcional al gradiente hidráulico; el coeficiente de proporcionalidad es denominado conductividad hidráulica ( $K$ ). La ley descubierta inicialmente en el flujo de agua en suelos saturados ha sido generalizada al flujo en suelos no saturados; en el primer caso la conductividad es independiente de la presión del agua, mientras que en el segundo es una función altamente no lineal de la presión ( $\psi$ ), o del contenido volumétrico de humedad ( $\theta$ ).

En el estudio de los acuíferos, el medio poroso se considera saturado y en la ley de Darcy aparece la conductividad hidráulica a saturación ( $K_s$ ); debido a la variabilidad espacial de las propiedades del medio, este parámetro es a lo más una función de las coordenadas espaciales. En la zona vadoza el medio es no saturado, la conductividad hidráulica a parte de ser una función de las coordenadas espaciales es una función de la presión del agua,  $K(\psi)$ ; aunado a lo anterior en esta zona es necesario conocer la curva de retención de humedad del suelo, la cual relaciona el contenido volumétrico de agua con la presión del agua,  $\theta(\psi)$ . Las dos curvas  $\theta(\psi)$  y  $K(\psi)$  son conocidas como las características hidrodinámicas del suelo y son de fundamental importancia para el estudio de las transferencias de masa y energía en el mismo, como en el estudio de los fenómenos de infiltración, drenaje, evaporación y la recarga de los acuíferos.

### 4.2.1. Forma clásica

La altura de ascenso capilar se puede determinar por la condición de equilibrio termodinámico de mínima energía libre del sistema. Esta se puede expresar por la siguiente ecuación general, la cual toma en cuenta las energías de gravedad e interfaciales

$$\rho gh dV + (\gamma_{sl} - \gamma_{sf}) dA_{sl} + \gamma_{lf} dA_{lf} = 0. \quad (4.1)$$

En esta ecuación,  $\rho$  es la diferencia de densidad entre el aumento líquido y el fluido que originalmente ocupa los poros;  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $h$  es la altura de ascenso capilar;  $V$  es el volumen del líquido infiltrado en el interior del medio poroso;  $\gamma_{sl}$ ,  $\gamma_{sf}$  y  $\gamma_{lf}$  son las tensiones interfaciales entre las fases sólido-líquido, sólido-fluido y líquido-fluido, respectivamente; y  $A_{sl}$  y  $A_{lf}$  son las áreas interfaciales correspondientes. Esta ecuación puede ser simplificada mediante la ecuación de Young para el ángulo de contacto local,  $(\theta)$ , en el sistema sólido-líquido-fluido, como

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{sf} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lf}}. \quad (4.2)$$

La sustitución de la Ec. (4.2) en la Ec. (4.1), seguido por algún reordenamiento, produce

$$h = \frac{\gamma}{\rho g} \frac{dA_{sl}}{dV} \left( \cos \theta - \frac{dA_{lf}}{dA_{sl}} \right), \quad (4.3)$$

que es la ecuación general para la altura de la penetración capilar en un sistema poroso. Para simplificar la notación,  $\gamma_{lf}$  se sustituye por  $\gamma$ .

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

En un capilar cilíndrico recto el área interfacial líquido-fluido es constante, por lo tanto  $dA_{lf} = 0$ . Por otro lado, el término  $dA_{sl}/dV$  se calcula suponiendo un menisco esférico, de manera que

$$\frac{dA_{sl}}{dV} = \frac{2}{r}, \quad (4.4)$$

donde  $r$  es el radio del capilar. La sustitución de la Ec. (4.4) en la Ec. (4.3) conduce a la ecuación de  $h_c$  (altura de penetración en un capilar),

$$h_c = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}. \quad (4.5)$$

De otra parte, el modelo más simple de un medio poroso utiliza sólo la porosidad total,  $\epsilon_0$ , y el área total específica del sólido,  $S_0$ , para definir el medio. Este modelo puede ser considerado como "microscópicamente uniforme", ya que no se tiene en cuenta los detalles estructurales del medio. En este modelo no se tienen en consideración las variaciones locales, por lo que  $dA_{lf} = 0$ , de manera similar al caso de un capilar cilíndrico. El término  $dA_{sl}/dV$  se expresa en términos de  $\epsilon_0$  y  $S_0$  como

$$\frac{dA_{sl}}{dV} = \frac{(1 - \epsilon_0) S_0 \gamma \cos \theta}{\epsilon_0 \rho g}. \quad (4.6)$$

Por lo tanto la altura de ascenso capilar,  $h_0$ , para un medio poroso es

$$h_0 = \frac{(1 - \epsilon_0) S_0}{\epsilon_0}. \quad (4.7)$$

La comparación entre la Ec. (4.4) y la Ec. (4.6), muestra que el radio capilar efectivo, que describe un medio poroso microscópicamente uniforme es ([95])

$$(r_0)_{eff} = \frac{\epsilon_0}{(1 - \epsilon_0) S_0}. \quad (4.8)$$

Ahora bien, el propósito aquí es estudiar los efectos de las variaciones locales en la estructura de un medio poroso en lo referente a su ascenso capilar. La Ec. (4.3), que es la ecuación general básica, muestra que para lograr este propósito los valores locales de  $dA_{sl}/dV$  y  $dA_{lf}/dA_{sl}$  necesitan ser conocido. El primero es desarrollado al reconocer que la Ec. (4.6) se mantiene a nivel local si las cantidades globales se sustituyen por las locales,

$$\frac{dA_{sl}}{dV} = \frac{(1 - \epsilon) S}{\epsilon}, \quad (4.9)$$

donde  $\epsilon$  y  $S$  son la porosidad local y el área específica, respectivamente. Si bien es evidente que la porosidad varía a nivel local, una explicación de la naturaleza local de  $S$  parece necesaria. Esto se deriva del hecho de que la inclinación de la superficie sólida con respecto a la vertical, así como la sección transversal del sólido, varían de un punto a otro. Como resultado,  $S$ , el área del sólido por unidad de volumen, se convierte también en una cantidad local. La comparación de las ecuaciones (4.6), (4.8), y (4.9) muestra que el radio efectivo local es

$$r_{eff} = \frac{2\epsilon}{(1 - \epsilon) S}. \quad (4.10)$$

Por lo tanto, la ecuación general para el ascenso capilar en un medio poroso llega a ser

$$h_0 = \frac{2\gamma \left( \cos \theta - \frac{dA_{lf}}{dA_{sl}} \right)}{\rho g r_{eff}}. \quad (4.11)$$

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

Se debe recalcar que tanto,  $r_{eff}$ , como  $dA_{lf}/dA_{sl}$ , en esta ecuación general son cantidades locales, las cuales varían en la dirección de la penetración. Dado que el modelo actual sólo tiene en cuenta la penetración en sólo una dimensión, estas cantidades representan un promedio sobre la dirección lateral. También es importante señalar que  $\theta$  es el ángulo de contacto real, el que se han medido a nivel local en el sistema habiendo sido el sólido perfectamente liso. Cualquier desviación del ángulo de contacto aparente del verdadero, se debe a los efectos geométricos locales los cuales deben ser explicados por  $dA_{lf}/dA_{sl}$ . La principal dificultad es de hecho el cálculo de este término.

Una solución aproximada para el problema puede ser desarrollada si se examina nuevamente la ecuación de un capilar cilíndrico. La expresión  $(r/\cos\theta)$  en la ecuación (4.5), representa el radio de curvatura del menisco, el cual determina la diferencia de presión capilar que equilibra la presión hidrostática. Si el capilar se vuelve tortuoso, el radio de curvatura del menisco varía de un punto a otro. El ángulo  $\theta$ , entonces debe ser reemplazado por  $(\theta + \alpha)$ , donde el ángulo de inclinación,  $\alpha$ , es el ángulo entre la tangente a la superficie sólida y la vertical. Del mismo modo, para un medio poroso se sugiere que uno reemplace la expresión entre paréntesis en la ecuación (4.11) por la aproximación  $\cos(\theta + \alpha)$ , de forma que, [92],

$$h_0 = \frac{2\gamma(\cos\theta + \alpha)}{\rho g r_{eff}} = \frac{\gamma(1 - \epsilon) S(\cos\theta + \alpha)}{\rho \epsilon g}. \quad (4.12)$$

La interpretación de  $\alpha$  en un medio poroso no es tan directa como para un capilar tortuoso, o uno con simetría axial, como los que se trabajaron en el capítulo anterior [81]. Por otra parte, tampoco debe interpretarse como un parámetro que está relacionado con un espacio de poro único. Más bien, debe ser tratada como una aproximación al promedio lateral de los ángulos de inclinación en todo el medio poroso.

## 4.2.2. Forma probabilística

### El problema físico y su transformación probabilística

Si se considera a un medio poroso como "homogéneo", la homogeneidad vista de esta manera, es un concepto de naturaleza macroscópica. Ello significa que dos muestras con el mismo tamaño, la misma forma y la misma orientación presentarán las mismas propiedades globales, con tal de que su tamaño sea lo suficientemente grande referido al tamaño de las partículas. En un sentido natural, la homogeneidad en cuestión es de naturaleza estadística. Sin embargo a la escala de la granulometría, dos muestras no son ciertamente idénticas. Sus granos y sus poros no tienen ni las mismas formas ni la misma dimensión realmente, es sólo desde un punto de vista estadístico que sus geometrías complejas se pueden comparar a nivel macroscópico, y es entonces que el efecto de la ergodicidad se reproduce, y ambas muestras presentan las mismas propiedades. Entre estas propiedades, una de las más importantes es la permeabilidad, descrita por la Ley de Darcy.

Por otro lado, si se toma una muestra con la forma de un cilindro de longitud  $L$  y sección transversal  $S$ , la cual se impermeabiliza en su superficie lateral, y las dos secciones terminales  $S_0$  y  $S_1$  se ponen en contacto con el mismo fluido, imponiéndose una diferencia de presión  $\Delta P = P_0 - P_1$  entre ellas (se puede también imponer el gasto  $Q$  y medir la diferencia de presión), y se espera a que se establezca un régimen permanente o estado estacionario y se mide el gasto  $Q$  de líquido a través de dicho cilindro, experimentalmente, se observa que

$$Q = C\Delta P. \tag{4.13}$$

Si se realiza el experimento con otras muestras cilíndricas de diferentes longitudes y secciones transversales, se encontrará que el coeficiente  $C$  de la relación anterior

varía en razón inversa a la longitud  $L$  y directa con la sección transversal  $S$ , esto es

$$C = \frac{KS}{L}. \quad (4.14)$$

Si el medio no es isótropo macroscópicamente, es importante no compararlos con las muestras que tengan la misma orientación in situ, pues el coeficiente  $K$  puede depender de esta orientación. De allí que la relación experimental encontrada se puede entonces escribir como

$$\frac{Q}{S} = \frac{K\Delta P}{L}. \quad (4.15)$$

Por lo tanto, a nivel macroscópico, se puede representar un flujo estacionario a través de un vector  $\mathbf{q}$ , que representa el flujo de fluido, y un gradiente macroscópico (constante) de presión (o carga) de  $\nabla P$ , relacionados por la ecuación

$$\mathbf{q} = -K \nabla P. \quad (4.16)$$

Esta es la ley de Darcy. Si el medio no es estadísticamente isotrópico, sin dejar de ser estadísticamente homogéneos, el coeficiente escalar  $K$  debe ser reemplazado por un tensor. El coeficiente  $K$ , escalar o tensorial, **es por definición la permeabilidad del medio** y es una característica macroscópica del medio.

Por otro lado, a escala granulométrica, un flujo permanente (lo suficientemente lento como para que se puedan despreñar los términos relacionados con la energía cinética), se rige por las ecuaciones de continuidad, Eq. (3.2) y de Poisson, Eq. (3.49). La solución de esta última ecuación en poros (bajo condiciones de contorno muy estrictas: la presión (o flujo) se establece en las caras de los extremos; velocidad  $\mathbf{v}$  es nula sobre la superficie lateral y *sobre la superficie de los granos*), es muy difícil de obtener [135], dada la complejidad de la geometría de los poros, lo que contrasta fuertemente con la naturaleza simple de la ley a nivel macroscópico.

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

Dada la linealidad de la ecuación de Poisson, y suponiendo las condiciones de contorno dadas, la existencia y unicidad de la solución se tiene garantizada. La relación (4.13), es decir, la proporcionalidad entre el gasto y la diferencia de presión para un determinado dispositivo experimental es predecible. Sin embargo, la relación (4.16) es mucho menos trivial. De hecho, para un gasto  $\mathbf{q}$  y un gradiente de presión  $\nabla P$  macroscópicos dados, las propiedades estadísticas de la solución de las ecuaciones de Poisson son independientes de la forma de la muestra, y son características macroscópicas del medio. En particular, las condiciones de contorno en la superficie externa de la muestra, siempre que sea de tamaño suficientemente grande, no tienen un efecto apreciable en la estructura del flujo, excepto, por supuesto, en las inmediaciones de las paredes.

Dado que no existe, en la naturaleza, el medio poroso infinito, este sólo puede ser un modelo matemático. Sin embargo, este modelo puede ser de gran interés físico, en la medida en que sugieren relaciones experimentalmente controlables entre la permeabilidad y las características estadísticas específicas de la geometría de los poros.

Matemáticamente la noción física de un medio "estadísticamente.º "macroscópicamente" homogéneo, se trabaja mediante *un ensamble aleatorio estacionario y ergódico*. A escala granulométrica, el medio, ("los poros"), se puede representar como un ensamble aleatorio estacionario, definido por ejemplo por una función todo o nada, aleatoria, estacionaria y ergódica  $I(x)$ :  $I(x) = 1$  en el interior de los poros, y  $I(x) = 0$  en las superficies de los granos y en su frontera. En este modelo, el problema a resolver será el siguiente:

Encontrar un vector  $\mathbf{v}(x)$ , aleatorio y estacionario, que haga que se cumplan las

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

condiciones siguientes:

$$\begin{aligned}\mu \nabla^2 \mathbf{v} &= I(x) \nabla p; \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \\ \mathbf{v}(x) &= I(x) \mathbf{v}(x); \quad E(\mathbf{v}) = V = \frac{Q}{\rho}\end{aligned}\tag{4.17}$$

donde  $V = Q/\rho$  es un vector constante dado ( $Q$  es el flujo macroscópico dado, y  $\rho$  la densidad volumétrica del fluido). Bajo esta forma no es fácil establecer un teorema de existencia y unicidad.

Para establecer el significado físico de las ecuaciones (4.17), tómesese en cuenta que tanto  $\mathbf{v}(x)$ , como  $\nabla p$  son consideradas aquí como funciones aleatorias estacionarias, y que para la presión (o, más generalmente, la carga)  $p(x)$ , la estacionalidad del gradiente no implica que  $p(x)$  sea estacionaria en si misma, (esto no es compatible con la física del problema, ya que tendríamos que  $E(p(x)) = Cons.$ , es decir, una presión macroscópica constante). De hecho, la estacionalidad del gradiente sólo implica que  $p(x)$  es una función aleatoria *intrínseca*, es decir, tiene incrementos estacionarios. En particular,  $p(x)$  no tendrá, en general covarianza estacionaria, si no un variograma  $\gamma(h) = I/2E([p(x+h) - p(x)]^2)$ , el cual es, en general, indefinidamente creciente con respecto a  $h$ . Su esperanza, *i. e.* la presión macroscópica, será una función lineal de  $x$ , que corresponde a un gradiente macroscópico ( $\nabla P = E(\nabla p)$ ), constante. El resultado de todo esto es que el modelo (4.17) sólo describe un flujo *macroscópicamente uniforme* ( $Q$  y  $\nabla P$  constantes). Pero, de hecho, seguirá siendo válido, al menos en primera aproximación, en el caso de los flujos macroscópicos cuasi uniformes, es decir, que los flujos pueden ser considerados como uniformes sobre un dominio  $\delta V$  que puede ser pequeño en la escala macroscópica, pero lo suficientemente grande en comparación con las dimensiones granulométricas para las cuales el medio poroso aparece ya como homogéneo por el efecto de la ergodicidad, (en suma para un flujo cuasi uniforme, donde,  $Q$  y  $\nabla P$  ya no son constantes, sino que varían lentamente en el espacio a la escala de los poros). En la práctica, para los poros de dimensión

## Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

netamente milimétrica,  $\delta V$  será centimétrica o decimétrica.

Si se observa, el operador de la emergencia, o de cambio de escala, no es más la media espacial, si no la esperanza matemática. Desde el punto de vista de la claridad conceptual, se ha ganado mucho al remplazar una operación de estatus matemático poco satisfactoria por un operador bien definido. Pero el significado físico sigue siendo el mismo, debido a la suposición de la hipótesis de ergodicidad, ya que la esperanza es el límite de la media espacial tomada en dominios cada vez más grandes. En el caso de un flujo cuasi uniforme, uno ajusta la hipótesis de que este límite ergódico es casi alcanzado para un dominio  $\delta V$  sobre el cual el flujo macroscópico no difiere más que ligeramente de un flujo uniforme.

### La ley de Darcy

En un espacio de  $n$  dimensiones ( $n = 2$  ó  $3$ ), elíjanse  $n$  vectores macroscópicas constantes  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , linealmente independientes. Por ejemplo,  $\mathbf{e}_\ell$ , será el vector unitario del eje de la coordenada  $\ell$ , y sus componentes serán:  $e_\ell^i = \delta_\ell^i$ . De acuerdo con el teorema de existencia y unicidad, para cada índice  $\ell = 1, 2, \dots, n$ , existe una y sólo una solución de sistema (4.17), la cual es  $\mathbf{v}_\ell \cdot \nabla p_\ell$  con  $E(\mathbf{v}_\ell) = \mathbf{e}_\ell$ . Partiendo de la linealidad del sistema (4.17), cualquier otra solución posible sólo puede ser una combinación lineal de estas  $n$  soluciones. Por ejemplo, para un flujo macroscópico  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\ell \mathbf{e}_\ell$ , de componentes  $Q_\ell$  dadas, la solución será

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{Q}^\ell}{\rho} \mathbf{u}_\ell; \quad \nabla P = \frac{\mathbf{Q}^\ell}{\rho} \nabla p_\ell. \quad (4.18)$$

Por hipótesis, los componentes  $v_\ell^i$ , de  $\mathbf{v}_\ell$  son tales que  $E(v_\ell^i) = \delta_\ell^i$ .

Ahora bien, sea

$$H_{i\ell} = -\frac{1}{\mu} E(\partial_i p_\ell). \quad (4.19)$$

Tomando la esperanza de las ecuación (4.18), se obtendrá para el gradiente macroscópico  $\nabla P = E(\nabla p)$  la relación

$$\partial_i P = -\frac{\mu}{\rho} H_{i\ell} Q^\ell, \quad (4.20)$$

donde si además se denota por  $K$  la matriz inversa de  $H$ , se tendrá que

$$Q^\ell = -\frac{\rho}{\mu} K^{i\ell} \partial_i P \quad (4.21)$$

Esta es la ley de Darcy, que obtiene como una simple consecuencia de la linealidad del sistema (4.17) y del teorema de existencia y unicidad. El método en que se obtuvo esta Ley es general. Sin embargo esta ecuación sólo dice que existe una relación lineal entre el flujo y el gradiente macroscópicos, pero no permiten calcular de forma explícita el tensor  $K$  de las permeabilidades. Se debe mencionar aquí que, en el caso isotrópico, se obtiene la desigualdad

$$K \leq \frac{\phi}{12n} E(L^2) \quad (4.22)$$

donde  $\phi$  es la porosidad,  $n = 2$  ó  $3$  el número de dimensiones del espacio, y  $E(L^2)$  la esperanza del cuadrado de cruzar los poros (evaluado únicamente la granulometría en la medida).

### La composición de las permeabilidades

Después de estudiar la génesis de la permeabilidad de un medio poroso homogéneo, ahora se considerará el nivel en que esta permeabilidad aparece a un nivel puntual, y la propia permeabilidad como una propiedad puntual del medio. Pasando luego a una escala de observación aún mayor, se encontrará que el medio poroso no puede ser considerado más como homogéneo. Las permeabilidades puntuales aparecerán ahora como las funciones  $k^{ij}(\mathbf{x})$  extremadamente variables de punto a otro,  $\mathbf{x}$ , del espacio. Se dirá entonces que ellas están *regionalizadas*. Sin embargo, esta heterogeneidad observada a un nivel puntual, oculta una homogeneidad de naturaleza estadística, que se manifiesta en una escala superior. Esta homogeneidad, en un lenguaje preciso, asume que las permeabilidades regionalizadas  $k^{ij}(\mathbf{x})$  pueden ser consideradas como una realización de una función aleatoria (tensorial) ergódica y estacionaria.

En estas condiciones, lo primero que cabe preguntar es si hay una génesis de una nueva ley de Darcy, y si las propiedades hidrodinámicas de este medio, enmarcadas a una escala superior, puede ser completamente caracterizada por una constante de permeabilidad macroscópica  $K$ . En aquello que concierne a flujos no uniformes, tales como los flujos radiales, la respuesta a esta pregunta es negativa. Lo que no es de extrañar si se observa que la operación de cambio de escala y la transición a un nivel superior no son realmente efectuadas para tales flujos. Aquí la discusión se limita a flujo macroscópicamente uniforme o cuasi uniforme, es decir, una vez más, los flujos que pueden ser considerados como uniforme para una escala intermedia en función de las dimensiones del volumen, pueden ser pequeño a nivel macroscópico, pero lo suficientemente grandes a un nivel puntual, para que las propiedades del medio aparezcan ya como homogéneas por efecto de la ergodicidad. Al estudiar estos flujos, se observa que las líneas de corriente se despliegan en grandes capas, lo cual en efecto, hace que haya una permeabilidad macroscópica constante  $K$ .

### La ley de Darcy Macroscópica

Ahora bien, dada una permeabilidad  $k^{ij}(x)$  considerada una función aleatoria estacionaria y un gradiente macroscópicamente constante  $\partial_i P$  (o un flujo macroscópica constante  $\mathbf{Q}^i$ ), el problema es entonces buscar un gradiente aleatorio estacionario  $\partial_i P$  y un flujo estacionario  $q^i(\mathbf{x})$  tales que

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0; \quad q^i = -k^{ij} \partial_j p; \quad E(\partial_i p) = \partial_i P, \quad (4.23)$$

$$(\text{ó } E(q_i) = Q^i). \quad (4.24)$$

En las ecuaciones anteriores, para simplificar las notaciones, se ha normalizado a uno, tanto la viscosidad dinámica, como la densidad volumétrica de masa ( $\mu = \rho = 1$ ). Por otro lado, la energía disipada admite, como ya se ha visto, la expresión

$$W = -q^i \partial_i p, \quad (4.25)$$

pero  $W = W(\mathbf{x})$  es ahora una función aleatoria estacionaria. De acuerdo con la Ley de Darcy,  $W$  se expresa entonces en función del tensor de permeabilidades  $k$  o su inverso  $h$ , de acuerdo a la ecuación

$$W = \partial_i p k^{ij} \partial_j p = q^i h_{ij} q^j. \quad (4.26)$$

Por lo tanto las dos formulaciones equivalentes del principio variacional son:

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

-el mínimo de  $E(W) = E(\partial_i p k^{ij} \partial_j p)$ , bajo la condición  $E(\partial_i p) = \partial_i P$  dada, lo que es equivalente a la condición  $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$  con  $q^i = -k^{ij} \partial_j p$ ;

-o el mínimo de  $E(W) = E(q^i h_{ij} q^j)$  con  $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$  y  $E(q^i) = Q^i$  dadas, que es equivalente a  $h_{ij} q^j = -\partial_i p$  para un gradiente estacionario  $\partial_i p$ .

A partir del principio variacional anterior, (con algunas hipótesis adicionales sobre la función aleatoria  $k(\mathbf{x})$ ), no es muy difícil establecer entonces en un teorema de existencia y unicidad. Si se denota por  $\partial_i p^\ell$  y  $q^{i\ell}$  ( $\ell = 1, 2, \dots, n$ ), a las  $n$  soluciones particulares definidas como

$$E(\partial_i p^\ell) = \delta_i^\ell; \quad \partial_i q^{i\ell} = 0; \quad q^{i\ell} = -k^{ij} \partial_j p^\ell, \quad (4.27)$$

se puede ver que la solución asociada a un gradiente macroscópico constante  $\partial_i P$  es

$$\partial_i p = \partial_i p^\ell \cdot \partial_\ell P; \quad q^i = -q^{i\ell} \partial_\ell P. \quad (4.28)$$

Pidiendo que  $K^{i\ell} = -E(q^{i\ell})$ , y como  $Q^i = E(q^i)$ , se tendrá que

$$Q^i = -K^{i\ell} \partial_\ell P. \quad (4.29)$$

Ésta es la ley de Darcy macroscópica [99]. El nuevo tensor  $K$ , que representa las permeabilidades macroscópicamente constantes, siempre tiene el mismo significado energético. De hecho

$$W^{s\ell} = -q^{i\ell} \partial_i p^s = \partial_i p^\ell k^{ij} \partial_j p^s \quad (4.30)$$

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

es una matriz simétrica positiva definida, que describe la energía disipada en el nivel microscópico. Como  $q^{i\ell}$  es un flujo conservativo, y  $\partial_i p^s$  un gradiente, se encuentra que la esperanza es

$$E(W^{\ell s}) = -E(q^{i\ell} \partial_i p^s) = -E(q^{i\ell}) E(\partial_i p^s), \quad (4.31)$$

que no es otra cosa más que la energía. Como  $E(\partial_i p^s) = \delta_i^s$  y  $E(q^{i\ell}) = K^{i\ell}$  por definición, se tiene entonces que

$$E(W^{\ell s}) = K^{\ell s} \quad (4.32)$$

En particular, la matriz de permeabilidades macroscópicamente constante es entonces simétrica y positiva definida.

### 4.3. Relaciones entre las curvas de retención de humedad y de conductividad hidráulica de los suelos

En el estudio de los fenómenos de transferencias de agua a los suelos, (infiltración, drenaje, evaporación y recarga de acuíferos), mediante la ley de Darcy, es de fundamental importancia el conocimiento de las características hidrodinámicas, las cuales se conforman por la curva de retención de humedad del suelo,  $\theta(\psi)$ , y la curva de conductividad hidráulica,  $M(\psi)$ ; la primera de ellas, relaciona el contenido volumétrico de agua ( $\theta$ ) con la presión del agua en el suelo ( $\psi$ ) y la segunda la conductividad hidráulica ( $K$ ) con la misma presión del agua ( $\psi$ ). La relación entre estas dos curvas

#### *Capítulo 4. Flujo del agua en suelos*

queda bien establecida al utilizar conceptos de la teoría de las probabilidades y de la geometría fractal.

Por otro lado, la relación entre el contenido volumétrico de agua y la conductividad hidráulica se establece a partir de la hipótesis de que las leyes de Poiseuille y Darcy describen el movimiento del agua en los niveles microscópico y macroscópico, respectivamente. En la emergencia de la ley macroscópica a partir de la ley microscópica, se hace la distinción entre los radios de poro que definen el área del medio poroso y el volumen del mismo. Las relaciones entre los radios de poro y las características geométricas del medio poroso, se establecen a partir de los conceptos de la tortuosidad de las trayectorias del movimiento del agua y de la correlación entre los poros por donde circula. Estos conceptos tienen como base una relación entre el volumen total del medio poroso y la dimensión fractal del área superficial del suelo. Dicha relación permite obtener un modelo conceptual de la conductividad hidráulica, en el cual se introduce la hipótesis clásica relativa a los pesos de los radios en la resistencia ofrecida al movimiento del agua por el suelo, lo que a su vez permite obtener diferentes modelos particulares.

La mayor parte de los modelos conceptuales de la conductividad hidráulica, que aparece en la ley de Darcy generalizada a los suelos no saturados, están basados en la ley de Poiseuille. Existe una primera familia de modelos, desarrollados en los trabajos de Purcell [101], Gates y Lietz [102], y Childs y Collis-George [103], los cuales están fundados en imágenes de medios porosos asimilados a tubos cilíndricos o esferas, proporcionadas por la geometría de Euclides, o en consideraciones probabilísticas. Una segunda familia de modelos se encuentra desarrollada en los trabajos de Burdine [104], Fatt y Dykstra [105], Millington [106] y Quirk, Mualem [107], etc. Esta segunda familia es en términos generales similar a la primera pero con correcciones empíricas. Los autores justifican sus correcciones diciendo que la geometría del suelo es lo suficientemente irregular o "tortuosa" para que modelos geométricos

simplistas expliquen el todo.

Una tentativa de unificación de los modelos geométricos de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados es propuesta por Mualem y Dagan [108]. Estos autores consideran que *los 'modelos geométricos' son de hecho modelos probabilísticos que pueden ser deducidos a partir del modelo probabilístico propuesto por Childs y Collis-George [103].*

### 4.3.1. La curva de retención de humedad del suelo

El agua en el suelo, al igual que toda la materia, fluye de un punto con mayor energía potencial a otro de menor, esta energía se transforma en energía cinética si el agua se mueve de modo que su energía potencial disminuya o si para mover el agua se emplea trabajo que aumente su energía potencial (Baver [109]).

El potencial de agua en un punto cualquiera del suelo, se define como la energía potencial por cantidad unitaria de agua, es decir, es el trabajo requerido para llevar dicha unidad desde un estado de referencia estándar (generalmente el agua libre y pura) hasta el punto bajo consideración (Groenevelt y Kijne [110]).

El potencial puede ser expresado en tres formas, a saber: a) energía por unidad de masa  $[\psi_m] = \text{ergios}/g$ ; b) energía por unidad de volumen  $[\psi_V] = \text{ergios}/\text{cm}^3$ , cuyas unidades puede también interpretarse como unidades de presión ( $\text{dinas}/\text{cm}^2$ ) y, c) con base en peso  $\psi$ , que es el resultado de dividir el potencial con base en masa entre la aceleración de la gravedad  $\|\vec{g}\|$ , es decir,  $[\psi] = [\psi_m / \|\vec{g}\|] = \text{cm}$ . De aquí que  $\psi_V = \rho\psi_m$ , donde  $\rho$  es la densidad del agua.

Ahora bien, el agua en el suelo está sujeta a diversos campos de fuerzas que resultan de la atracción de la matriz sólida, la presencia de solutos, la acción de la presión externa de gas, la atracción gravitacional y otros. A cada uno de estos campos

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

puede asociarse un potencial de modo que la suma de todos ellos es el potencial total, i.e.

$$\psi_t = z + \psi_m + \psi_o + \dots \quad (4.33)$$

donde  $\psi_t$  es potencial total,  $z$  el potencial gravitacional,  $\psi_m$  el potencial de presión (mátrico o capilar),  $\psi_o$  el potencial osmótico y otros que se pueda adicionar (Hillel [111]).

Los potenciales gravitacional y de presión son los de mayor importancia en el flujo de agua en el suelo y a su suma se le conoce como el potencial hidráulico ( $H$ ). El potencial gravitacional se mide a partir de la superficie de los suelos ( $-z$ ) y el de presión, para el caso del flujo en suelos no saturados, es una función del contenido de humedad, es decir

$$H = \psi(\theta) - z \quad (4.34)$$

donde  $\theta$  es el volumen de agua por unidad de volumen de suelo ( $L^3L^{-3}$ ).

El potencial de presión puede cambiar de signo si el agua en el suelo está a una presión mayor que la atmosférica. Se le considerado positivo normalmente, a menos que el agua en el suelo este a una presión menor que la atmosférica, en cuyo caso se le considera negativo (es una subpresión comúnmente conocida como tensión o succión).

Como se muestra en la Fig. 4.1, el agua bajo la superficie libre del agua está a un potencial de presión positivo, en la superficie libre este potencial es cero, y el

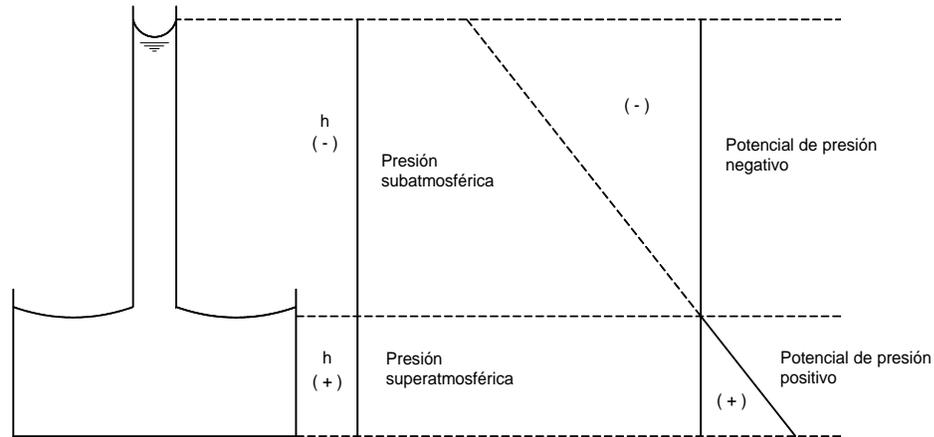


Figura 4.1: Presión superatmosférica y subatmosférica abajo y arriba de una superficie libre de agua (Hillel [111]).

agua que ha ascendido en el tubo capilar sobre la superficie libre del agua está a un potencial de presión negativo.

El potencial de presión negativo también es llamado potencial mátrico o potencial capilar Hillel [111], y cuando es tomado en valor absoluto se le denomina succión mátrica (Richards [112]). Este potencial resulta de las fuerzas capilares y de adsorción debido a la matriz del suelo.

### 4.3.2. Curva característica de humedad del suelo.

La Ley de Darcy generalizada, la cual ha sido verificada experimentalmente por Childs y Collis-George [103], y Vachaud [113], predice que la conductividad hidráulica  $K(\theta)$  decrece rápidamente cuando  $(\theta)$  disminuye a partir de su valor a saturación  $K_s$ , y de acuerdo con Philip [114], se debe a las siguientes razones:

- La sección transversal total, útil para el flujo, disminuye con  $\theta$ .
- Los poros grandes son los primeros en vaciarse cuando  $\theta$  disminuye, y como la

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

contribución  $K(\theta)$  por unidad de área varía bruscamente con el cuadrado del radio del poro, es de esperarse que  $K(\theta)$  disminuya más rápidamente que  $\theta$ .

c) A medida que  $\theta$  disminuye, aumenta la probabilidad de que exista agua en los poros y cuñas aisladas de la red general tridimensional del agua de los canales y las películas. De modo que una vez que deja de haber continuidad, no puede haber flujo en la fase líquida, excepto el flujo a través de las islas líquidas en series paralelas con el sistema de vapor.

En un medio no saturado el potencial ( $\psi$ ) es negativo y es una función del contenido de humedad ( $\theta$ ). Un comportamiento típico de  $\psi(\theta)$  se muestra en la Fig. 4.2, en la cual se puede observar que  $\psi$  se incrementa a medida que  $\theta$  también, a esta curva se le llama curva de retención de humedad del suelo o característica de humedad del suelo (Childs [115]).

La curva característica de humedad es fuertemente afectada por la textura y la estructura del suelo, de manera que, mientras mayor es el contenido de arcilla mayor es la retención de agua para un valor dado de  $\psi$  y la pendiente de la curva es más suave; por otro lado, los valores altos de  $\psi$  se ven afectados predominantemente por efectos capilares, mientras que la parte de los valores bajos de  $\psi$  (en donde predominan los fenómenos de adsorción) se ve menos afectada por la estructura que por la textura.

La pendiente de la curva característica de humedad del suelo, que representa la variación de su contenido de humedad por unidad de variación de potencial, se denomina generalmente *capacidad diferencial o específica de humedad*,  $C(\theta)$ , *i.e.*

$$C(\theta) = \frac{d\theta}{d\psi} \tag{4.35}$$

Esta es una propiedad importante para el almacenamiento de agua en el suelo y

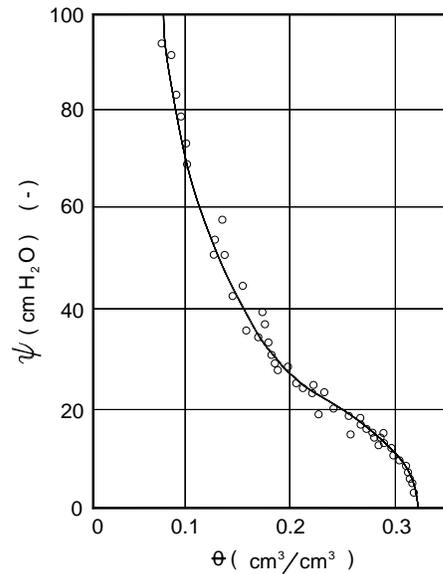


Figura 4.2: Curva característica de humedad (curva frontera de mojado) para sable de l'isere (Haverkamp [116])

a su disponibilidad para las plantas.

Una peculiaridad que presenta la curva característica de humedad, es su dependencia del tipo de proceso que se haya seguido para su determinación: mediante *humedecimiento* o *mojado* (sorción) o por el *secado* (desorción). Las curvas obtenidas con estos procedimientos no coinciden, provocando con ello el fenómeno conocido como *histéresis*.

Poulovassilis [117] dio una descripción de la histéresis en términos físicos: si una propiedad física  $Y$  depende de una variable independiente  $X$ , entonces puede ocurrir que la relación entre  $Y$  y  $X$  es única y en particular, independiente de que  $X$  aumente o disminuya; tal relación es irreversible. Muchas propiedades físicas son, sin embargo, irreversibles, y aún cuando los cambios de  $X$  sean pequeños, la curva obtenida cuando  $X$  incrementa no coincide con la curva obtenida cuando  $X$  disminuye. Así, la relación  $\psi$  vs  $\theta$  es una relación irreversible.

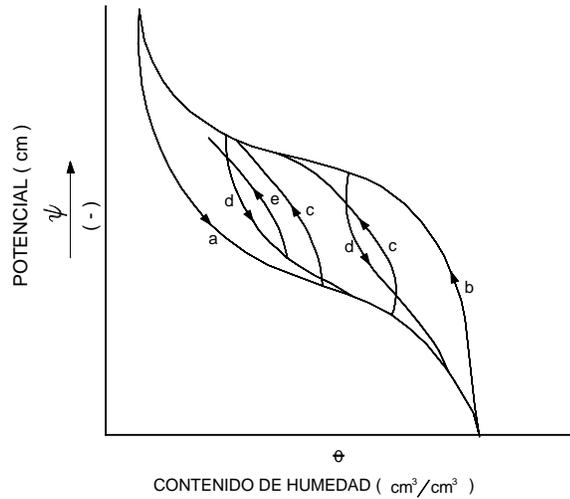


Figura 4.3: La Histéresis: a) curva frontera de mojado; b) curva frontera de secado; c) curvas primarias de secado; d) curvas primarias de mojado; e) curvas interiores (Childs [115])

La histéresis en la característica de humedad del suelo puede verse en la Fig. 4.3, donde se muestra una sucesión de curvas obtenidas según el proceso que se haya seguido. Las curvas completas entre los límites de potencial (suelo lo suficientemente seco y suelo saturado) son conocidos como las curvas de frontera, una rama es la curva frontera de humedecimiento o mojado y la otra la curva de frontera de secado.

La histéresis ha sido generalmente omitida en la teoría y en la práctica de la física de suelos, esto puede ser justificable en los procesos que envuelven sólo alguna rama de la curva como la infiltración (mojado) o evaporación (secado), pero el efecto de histéresis puede ser importante en el caso de procesos compuestos en lo que ocurre simultáneamente o secuencialmente el mojado y el secado en varias partes del perfil del suelo, como en el caso de la redistribución de la humedad después de un riego (Vachaud [113]). Así, es posible tener dos capas de suelo de la misma textura y estructura con diferente contenido de humedad pero con idéntico estado energético si sus historias de mojado o secado han sido diferentes.

### 4.3.3. Modelo conceptual de conductividad hidráulica

En la literatura se ha establecido un modelo conceptual de la conductividad hidráulica basado en la ley de Poiseuille del flujo del agua en tubos capilares (e.g. [108, 118, 119, 120, 121]). El modelo tiene la forma

$$K = \mathcal{F}C_f \int_{\Omega} (R/T)^2 d\omega \quad (4.36)$$

donde  $\Omega$  representa el dominio de los poros llenos de agua;  $\mathcal{F} = \rho_w g / \eta$  es la fluidez,  $\rho_w$  es la densidad del agua,  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad dinámica del agua,  $g$  la aceleración gravitacional;  $R$  es el radio de poro;  $C_f$  el coeficiente de forma adimensional, el cual toma en cuenta la forma irregular del perímetro de los poros; si  $R$  se toma como el radio hidráulico,  $C_f$  es llamado el coeficiente de Koseny (Bear [122]);  $T$  es el factor de tortuosidad definido por  $T = dz_f/dz \geq 1$ , donde  $z$  es la trayectoria rectilínea de las partículas de agua en la dirección macroscópica del movimiento y  $z_f$  es la trayectoria real de las partículas;  $\omega$  es el área efectiva de flujo o porosidad areal parcial.

*Fuentes y sus colaboradores ([118, 119, 120, 121]) han establecido una definición del área efectiva de flujo a partir de la idea probabilista de Childs y Collis-George [103] y de los conceptos de la geometría fractal.* Haciendo un corte perpendicular a la trayectoria macroscópica de flujo en el medio poroso se obtienen dos caras, las cuales son ubicadas en las posiciones  $x, y$  (Fig. 4.4); los radios de los poros en la cara de la posición  $x$  son denotados por  $r$  y los de la cara en la posición  $y$  por  $\rho$ . Una partícula de agua ubicada en un poro de la cara  $x$  puede continuar su trayectoria por el mismo poro capilar o cambiar a otro de igual o diferente tamaño. La modelación de estas posibilidades de cambio se puede realizar equivalentemente con la introducción de la probabilidad del encuentro de las caras en un punto intermedio  $z$ .

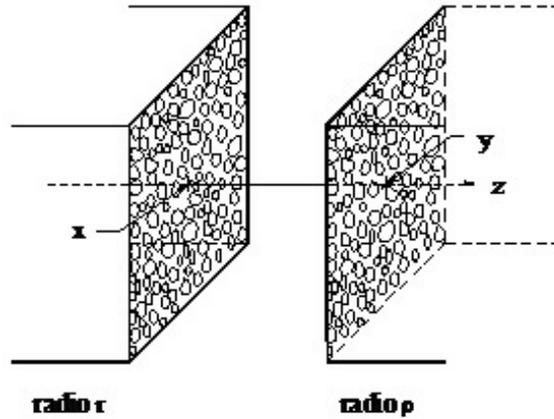


Figura 4.4: Un corte en el suelo perpendicular a la dirección macroscópica de flujo. Los radios de los poros son caracterizados en cada cara por  $r$  y  $\rho$ .

Considerando que la función de densidad de porosidad volumétrica  $f(r)$  es la misma en las dos secciones e iguales a la función densidad del área de flujo en cada sección, la probabilidad del intervalo que contiene  $r$  es precisamente igual al área representada por  $d\theta(r) = f(r) dr$  y la probabilidad del intervalo que contiene a  $\rho$  sobre la otra sección es igual a  $d\theta(\rho) = f(\rho) d\rho$ . La probabilidad de que los poros representados por estos intervalos se encuentren de una manera completamente aleatoria en una posición  $z$  es el producto de las dos probabilidades. El producto de las áreas elementales  $d\theta(r)$  y  $d\theta(\rho)$  representa el área común de flujo  $d\omega(r, \rho) = d\theta(r) d\theta(\rho) = f(r) dr f(\rho) d\rho$ ; la integración de esta ecuación sobre todo el rango del radio de poro permite obtener el área común total de flujo como  $\mu = \phi\phi = \phi^2$ , donde  $\mu$  representa la porosidad areal total y  $\phi$  la porosidad volumétrica total. En un sistema de capilares paralelos la partícula de agua continúa por el mismo poro, se trata de un evento totalmente correlacionado, la porosidad areal es igual a la porosidad volumétrica  $d\omega(r) = d\theta(r) = f(r) dr$ , con  $\mu = \phi$  ([101]).

En términos probabilísticos el modelo de Purcell representa una correlación completa entre las dos secciones, mientras que el de Childs y Collis-George representa una

decorrelación completa; estos dos modelos representan los comportamientos extremos posibles. Mualem y Dagan [108], señalan que el modelo de Purcell de la conductividad hidráulica puede ser formalmente deducido del modelo de Childs y Collis-George si el área común de flujo es redefinida como:  $d\omega(r, \rho) = f(r) dr \delta(\rho - r) d\rho$ , donde  $\delta$  designa la densidad de Dirac.

Es de esperarse que el comportamiento de los suelos se encuentra entre el comportamiento de los suelos de Purcell y Childs y Collis-George: generalmente el flujo del agua en el suelo no ocurre como en un sistema de capilares paralelos ni tampoco es completamente aleatorio (Millington y Quirk [106]), ya que hay una geometría del medio que determina el movimiento o una estructura jerarquizada en el suelo. Un comportamiento intermedio puede ser obtenido si el suelo es considerado como un objeto fractal ([118, 119, 120, 121, 123, 124, 125, 126]). Para esto se utilizará la relación entre el área y el volumen de Mandelbrot.

#### 4.3.4. El conceptyo de tortuosidad

Los modelos que relacionan la conductividad hidráulica con la geometría del medio poroso se fundamentan en dos leyes: *i*) la ley de Darcy en la escala "macroscópica", y *ii*) la ley de Poiseuille en la escala "microscópica". Adicionalmente, para definir el tamaño del capilar que interviene en esta última se utiliza la ley de Laplace.

La *ley de Darcy* unidimensional vertical establece que el gasto por unidad de superficie de suelo o flujo ( $q$ ), es proporcionado por

$$q = -K \frac{\partial H}{\partial z} \tag{4.37}$$

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

donde  $K$  es un coeficiente denominado conductividad hidráulica del suelo;  $H$  es el potencial hidráulico, igual a la suma del potencial de presión del agua en el suelo, expresado como la altura de una columna equivalente de agua ( $\psi$ ), y el potencial gravitacional, asimilado a la coordenada vertical ( $z$ ).

La *ley de Poiseuille* establece que la velocidad media ( $v$ ) en un tubo de radio  $R$  es proporcionada por

$$v = -\mathcal{F}C_f R^2 \frac{\partial H}{\partial z} \quad (4.38)$$

donde  $\mathcal{F}$  y  $C_f$  son los mismos parámetros definidos en la ecuación (4.36). Por otro lado, la *ley de Laplace* relaciona la presión del agua en el suelo  $\psi$  con un radio de poro, esto es

$$R = -\frac{2\sigma \cos(\alpha)}{\rho_w g \psi}, \quad (4.39)$$

donde  $\sigma$  es la tensión superficial en la interfaz agua-aire y  $\alpha$  es el ángulo de contacto formado por esta interfaz con las partículas del suelo.

El concepto de *tortuosidad* en la teoría clásica de la conductividad ha sido introducido para corregir la ley de Poiseuille (*p.e.*, Dullien [127]). La tortuosidad se define como

$$T = \frac{dz_f}{dz} \geq 1, \quad (4.40)$$

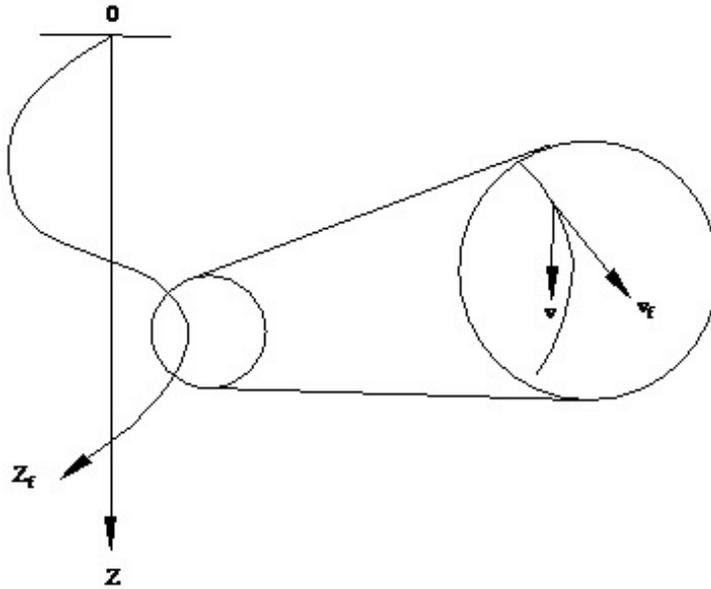


Figura 4.5: El concepto de tortuosidad: i) la velocidad  $v$  es referenciada a la trayectoria  $z$  del movimiento; ii) la velocidad  $v_f$  es referenciada a la trayectoria “tortuosa” del movimiento.

donde  $z_f$  representa la trayectoria “real” que sigue el agua en el medio poroso (ver Fig. 4.5).

Las velocidades en el sentido de Poiseuille sobre la trayectoria rectilínea ( $v$ ) y sobre la trayectoria tortuosa ( $v_f$ ) se definen como

$$v = \frac{dz}{dt}, \quad v_f = \frac{dz_f}{dt}, \quad (4.41)$$

donde  $t$  es el tiempo. De aquí que la ecuación (4.40), se puede reescribir como

$$T = \frac{v_f}{v} \geq 1. \quad (4.42)$$

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

La velocidad tortuosa se obtiene de la fórmula de Poiseuille, evaluando el gradiente hidráulico sobre la trayectoria tortuosa, es decir

$$v_f = -\mathcal{F}C_f R^2 \frac{\partial H}{\partial z_f}. \quad (4.43)$$

Ahora bien, de la ecuación (4.40):  $\partial H/\partial z = -T (\partial H/\partial z_f)$ . Con esta relación y considerando la ecuación (4.42), se encuentra que la velocidad rectilínea corregida por el efecto de tortuosidad

$$v = -\mathcal{F}C_f \left(\frac{R}{T}\right)^2 \frac{\partial H}{\partial z}. \quad (4.44)$$

La comparación de las ecuaciones (4.38) y (4.44) permite deducir que la velocidad rectilínea está de hecho determinada no por el radio del capilar ( $R$ ) que acompaña a la trayectoria tortuosa, sino por un radio perpendicular a la trayectoria rectilínea ( $R_s$ ). De la Fig. 4.6 se infiere que

$$T = \frac{v_f}{v} = \frac{R}{R_s}. \quad (4.45)$$

La ecuación (4.44) toma la forma

$$v = -\mathcal{F}C_f R_s^2 \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (4.46)$$

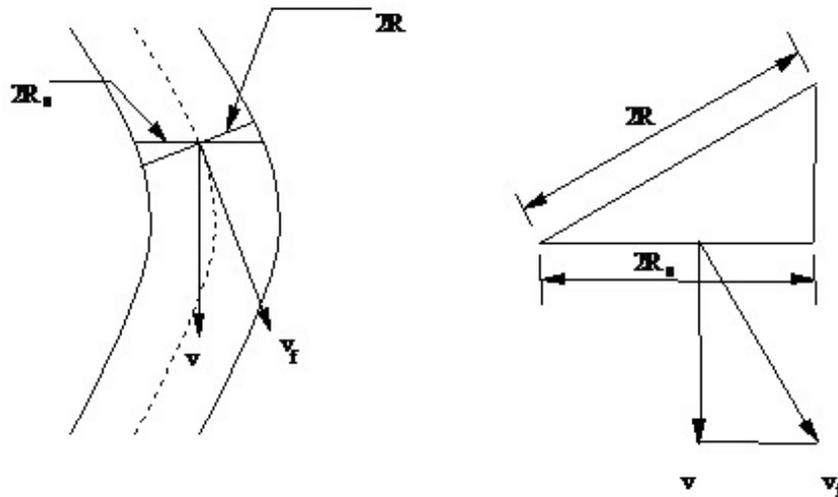


Figura 4.6: Los triángulos semejantes formados por los radios y las velocidades.

es decir, la corrección a la ley de Poiseuille original consiste simplemente en la introducción del radio perpendicular que le corresponde a la trayectoria rectilínea. Esta observación es muy importante ya que en ocasiones no se toma en cuenta que el radio que determina la presión del agua en el suelo es, en general, diferente del radio que determina la velocidad “macroscópica” del agua en el suelo.

La relación entre las escalas microscópica y macroscópica, es decir entre la ley de Poiseuille y la ley de Darcy, se obtiene bajo el razonamiento siguiente. Considérese el movimiento en la dirección del eje  $z$  y hágase un corte perpendicular al eje, se obtienen dos secciones, de área total  $A_T$  cada una. El gasto o volumen que atraviesa una área elemental  $dA$  en la unidad de tiempo es  $dQ = v dA$ , mientras que el gasto con respecto al área total correspondiente es proporcionado por  $dq = v d\omega$ , donde  $dq = dQ/A_T$  y  $d\omega = dA/A_T$ , de aquí que el flujo total es

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

$$q = \int_{\Omega} v d\omega = -\mathcal{F}C_f \frac{\partial H}{\partial z} \int_{\Omega} R_s^2 d\omega, \quad (4.47)$$

donde  $\Omega$  representa el dominio de los poros llenos con agua.

Es importante observar que  $\omega$  es una medida del área perpendicular a la dirección macroscópica expuesta por los poros, es decir  $\omega$  está relacionada con  $R_s$ , mientras que la medida del volumen de los poros ( $V$ ) relativa al volumen total de suelo ( $V_T$ ), denotada por  $\theta$  y definida de manera que  $d\theta = dV/V_T$ , está relacionada con el radio perpendicular a la trayectoria tortuosa ( $R$ ). El área total de los poros expuestos, relativa al área total del corte perpendicular del suelo, o porosidad areal total ( $\mu$ ) es proporcionada por

$$\int_{\Omega_T} d\omega = \mu, \quad (4.48)$$

y el volumen total de los poros relativa al volumen total del suelo considerado, o porosidad volumétrica total ( $\phi$ ), es proporcionado por

$$\int_{\Omega_T} d\theta = \phi, \quad (4.49)$$

donde  $\Omega_T$  representa el dominio total de los poros.

La identificación de las ecuaciones (4.37) y (4.47) proporciona una expresión conceptual de la conductividad hidráulica

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

$$K = -\mathcal{F}C_f \int_{\Omega} R_s^2 d\omega. \quad (4.50)$$

Es cómodo separar los diferentes efectos sobre la conductividad hidráulica debidos a las propiedades del fluido y la geometría del suelo, introduciendo el coeficiente de permeabilidad ( $k$ ), denominado también permeabilidad intrínseca, definido de modo que  $K = k\mathcal{F}$ , esto es

$$k = C_f \int_{\Omega} R_s^2 d\omega. \quad (4.51)$$

El valor de la permeabilidad cuando el conjunto de los poros está totalmente lleno con agua es llamado permeabilidad total o saturada ( $k_s$ ) y definido por

$$k_s = C_f \int_{\Omega_T} R_s^2 d\omega. \quad (4.52)$$

La permeabilidad con respecto a este valor, o permeabilidad relativa ( $k_r$ ), se define por

$$k_r = \frac{k}{k_s} = \frac{\int_{\Omega} R_s^2 d\omega}{\int_{\Omega_T} R_s^2 d\omega}. \quad (4.53)$$

## Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

La interpretación de las diferentes variables en la ecuación (4.53) así como la manera de integrarla, han conducido a numerosos modelos que describen la conductividad hidráulica, como se puede constatar en la literatura (e.g. Purcell [101]; Gates y Lietz [102]; Childs y Collis-George [103]; Burdine [104]; Fatt y Dykstra [105]; Marshall [128]; Wyllie y Gardner [129]; Millington y Quirk [106]; Kunze *et al.* [130]; Mualem [107]). Una revisión de estos modelos es ofrecida por Mualem y Dagan [108].

En lo que sigue, y teniendo como marco de referencia la *geometría fractal* (Rieu y Sposito [124, 125]; Fuentes *et al.* [120]; Olescho *et al.* [126]), se analizarán las correcciones empíricas introducidas desde hace medio siglo en la búsqueda desenfrenada del "mejor modelo" de predicción de la permeabilidad. Los principales modelos clásicos de la conductividad presentados en la literatura, serán deducidos a partir de las condiciones utilizadas en los modelos propuestos por Purcell [101]-Gates y Lietz [102] y Childs y Collis-George [103], los cuales representan los extremos de este modelado.

### 4.4. El suelo como un objeto fractal

Para explicar las correcciones empíricas en los modelos clásicos de la conductividad hidráulica, se introducen algunos conceptos básicos de la geometría fractal.

#### 4.4.1. Definiciones

Se define el tamaño  $|U| = r$  de un subconjunto  $U$  no vacío de  $\mathfrak{R}^E$ , donde  $E$  es la dimensión de Euclides (aquí  $E = 3$ ) y  $\mathfrak{R}$  el conjunto de los números reales, como la distancia más grande entre un par de puntos  $x$  e  $y$  en  $U$ , i.e.:  $|U| = \sup \{|x - y| : x, y \in U\}$ . Si  $\{U_j\}_r$  es una colección contable (finita o infinita) de conjuntos, cuyos tamaños son inferiores o iguales a  $r$ , que cubre un conjunto  $F$ , i.e.  $F$  es un subconjunto de la unión de los conjuntos  $U_j$ , con  $0 < |U_j| = r_j \leq r$ , se

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

dice que  $\{U_j\}$  es una  $r$ -cubierta de  $F$ .

*La medida de Lebesgue.* Para un subconjunto  $F$  de  $\mathfrak{R}^E$  se define para cada  $r > 0$  la medida siguiente

$$L_r^E(F) = \inf \left\{ \sum_j r_j^E : r_j = |U_j|; \{U_j\}, r\text{-cubierta de } F \right\}. \quad (4.54)$$

La medida  $E$ -dimensional de Lebesgue del conjunto  $F$ , denotada por  $L^E(F)$ , se define como el límite de la ecuación (4.54) cuando  $r$  tiende a cero

$$L^E(F) = \lim_{r \rightarrow 0} L_r^E(F). \quad (4.55)$$

Existen subconjuntos del conjunto de los números reales, cuya cantidad de elementos es igual al propio conjunto de los números reales y que su medida de Lebesgue es cero. El ejemplo clásico es el conjunto perfecto de Cantor, un subconjunto del intervalo  $[0, 1]$ . Este conjunto tiene entre sus propiedades la de no contener ningún intervalo, esto es, el conjunto de Cantor está formado sólo por puntos y cada uno de ellos es de acumulación.

Se hace notar que la medida de Lebesgue no hace diferencia entre un punto aislado y el conjunto de Cantor, los dos conjuntos tienen medida de Lebesgue cero y es deseable poder hacer una diferencia entre estos dos conjuntos. También existen conjuntos que sin contener ningún intervalo tienen medida de Lebesgue positiva, ejemplos de estos conjuntos son los llamados conjuntos “gordos” de Cantor que están formados sólo por puntos de acumulación.

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

Es por lo tanto conveniente definir una medida mas “fina” que la de Lebesgue. Una medida que haga diferencia entre puntos aislados y el “polvo” de Cantor. Una medida capaz de diferenciar *fractales*.

*La medida de Hausdorff.* Para un subconjunto  $F$  de  $\mathfrak{R}^E$  se puede definir para cada  $r > 0$  la medida siguiente (Falconer [132])

$$H_r^S(F) = \inf \left\{ \sum_j r_j^S : r_j = |U_j|; \{U_j\}, r - \text{cubierta de } F \right\}, \quad (4.56)$$

donde  $S$  es un número no negativo, no necesariamente entero.

Cuando se está interesado en minimizar, para cada cubierta de  $F$  de tamaños inferiores o iguales a  $r$ , la suma de los tamaños de los conjuntos cubiertas a la potencia  $S$ , la clase de cubiertas admisibles de  $F$  se reduce a medida que  $r$  disminuye (Falconer [132]); esto implica que el infimum de la suma disminuye y tiende a un límite cuando  $r$  tiende a cero. Es decir

$$H^S(F) = \lim_{r \rightarrow 0} H_r^S(F), \quad (4.57)$$

donde  $H^S(F)$  es la medida  $S$ -dimensional de Hausdorff del conjunto  $F$ .

*La dimensión de Hausdorff-Besicovich.* Un gráfico de  $H^s(F)$  en función de  $S$  ( $0 \leq S \leq E$ ) muestra que existe un valor crítico de  $S$  donde la medida de Hausdorff salta de  $\infty$  a 0 (e.g. Falconer [132]). Este valor crítico  $D = \dim(F)$  es llamado dimensión de Hausdorff-Besicovitch del conjunto  $F$ .

*La dimensión fractal de Mandelbrot.* Si  $F$  es cubierto por una colección finita de

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

conjuntos ( $j = 1, 2, \dots, N_r$ ) de la misma forma y tamaño ( $r$ ), de las ecuaciones (4.56) y (4.57) se obtiene

$$H^D = \lim_{r \rightarrow 0} [N_r r^D]. \quad (4.58)$$

Usando esta relación y la continuidad de la función logaritmo, Mandelbrot [123] define una nueva dimensión como sigue

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{\log(N_r)}{\log\left(\frac{H}{r}\right)} \right]. \quad (4.59)$$

Se puede demostrar que se satisface la desigualdad siguiente:  $\dim(\text{Hausdorff-Besicovich}) \leq \dim(\text{Mandelbrot})$ . La dimensión de *Mandelbrot* es fácil de calcular y usualmente aproxima rápidamente la dimensión de *Hausdorff-Besicovich*, que es difícil de calcular.

La ecuación (4.58) indica que si el suelo se considera como un objeto fractal, el número de conjuntos cubiertos de tamaño  $r$  es inversamente proporcional a  $r^D$  cuando  $r \rightarrow 0$ , es decir

$$N_r = \left(\frac{H}{r}\right)^D. \quad (4.60)$$

*Volumen del Cuerpo Paralelo.* Se define el cuerpo  $r$ -paralelo  $P_r$  de un conjunto  $F$  por:  $P_r(F) = \{x \in \mathfrak{R}^E : |x - y| \leq r, y \in F\}$ . El volumen del cuerpo paralelo se

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

obtiene como el producto del volumen del conjunto cubierta, es decir  $cr^E$  donde  $c$  es un coeficiente de forma ( $c = 1$  si las cubiertas son paralelepípedos), y del número de cubiertas, es decir:  $vol_E(P_r) = N_r cr^E$ . Considerando la ecuación (4.60), se obtiene cuando  $r \rightarrow 0$

$$vol_E(P_r) = cH^E \left(\frac{r}{H}\right)^{E-D}. \quad (4.61)$$

La relación (4.61) puede ser utilizada para estimar la dimensión fractal a partir del volumen del cuerpo paralelo. Es decir

$$D = E - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \left[ \frac{vol_E(P_r)}{cH^E} \right]}{\log \left( \frac{r}{H} \right)}. \quad (4.62)$$

Se debe notar que el volumen del cuerpo paralelo del fractal no es igual al volumen de la cáscara, esta última definida por:  $C_r(F) = \{x \in \mathfrak{R}^E - F : |x - y| \leq r, y \in F\}$ .

*La masa contenida en los conjuntos cubiertas.* La masa en la geometría de Euclides es proporcional al volumen de los conjuntos cubiertas:  $m_r \propto r^E$ . En la geometría fractal  $E$  se reemplaza por la dimensión fractal (Mandelbrot [123]):  $m_r \propto r^D$ . De esta relación se puede inferir que la medida de Hausdorff, definida por las ecuaciones (4.56) y (4.57) con  $S = D$ , es de hecho una medida de masa. Esta proporción se transforma en una igualdad con el auxilio de la escala  $H$  definida por la ecuación (4.58):  $m_r = m_H (r/H)^D$ , donde  $m_H$  es la masa correspondiente a  $r = H$ . Puesto que en la ecuaciones (4.58) y (4.61) se han considerado conjuntos cubiertas de la misma forma, se tiene:  $m_H = \rho_H cH^E$ , donde la densidad  $\rho_H$  corresponde a  $r = H$ . De aquí se puede establecer que cuando  $r \rightarrow 0$

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

$$m_r = \rho_H c H^E \left( \frac{r}{H} \right)^D. \quad (4.63)$$

Si la masa se expresa como  $m_r = \rho_r c r^E$ , la densidad ( $\rho_r$ ), considerando la ecuación (4.63), queda definida por ( $r \rightarrow 0$ )

$$\rho_r = \rho_H \left( \frac{H}{r} \right)^{E-D}. \quad (4.64)$$

De acuerdo con las ecuaciones (4.60), (4.61), (4.63) y (4.64) se satisfacen los límites siguientes

$$\rho_H c H^E = \lim_{r \rightarrow 0} [N_r m_r], \quad (4.65)$$

$$\rho_H c H^E = \lim_{r \rightarrow 0} [\rho_r \text{vol}_E(P_r)]. \quad (4.66)$$

Se puede definir una densidad ( $\langle \rho_r \rangle$ ) de modo que la masa contenida en los conjuntos cubiertas sea obtenida a partir del volumen del cuerpo paralelo. Cuando  $r \rightarrow 0$

$$m_r = \langle \rho_r \rangle \text{vol}_E(P_r), \quad (4.67)$$

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

donde

$$\langle \rho_r \rangle = \rho_H \left( \frac{r}{H} \right)^{2D-E}. \quad (4.68)$$

*La relación Superficie-Volumen de Mandelbrot.* Puesto que el volumen ( $V$ ) es proporcional a  $L^3$  y el área ( $A$ ) a  $L^2$ , donde  $L$  representa una longitud,  $V^{1/3}$  es proporcional a  $A^{1/2}$  en la geometría de Euclides. De acuerdo con Mandelbrot, en la geometría fractal  $V^{1/3}$  es proporcional a  $A^{1/D}$ , donde  $D$  es la dimensión fractal (Mandelbrot [123]). Esta proporción puede ser generalizada de la manera siguiente

$$\sup_E(F) \propto [\text{vol}_E(F)]^{D/E}. \quad (4.69)$$

*La equivalencia Superficie-Masa.* El volumen de cada conjunto cubierta es proporcionado por  $cr^E$ . De la ecuación (4.69) se obtiene la proporción:  $\sup_E(U) \propto r^D$ . Considerando la ecuación (4.63) se establece la equivalencia siguiente

$$m_E(F) \propto \sup_E(F). \quad (4.70)$$

Cuando se reemplaza la masa por la superficie en las ecuaciones (4.63)-(4.68), la densidad  $\rho_H$ , en lugar de representar el contenido de masa en una unidad de volumen, representa el contenido de superficie en una unidad de volumen correspondiente a  $r = H$ .

#### 4.4.2. Relación entre la dimensión fractal y la porosidad

El enfoque de Millington y Quirk [106], es de gran ayuda en la explicación a las correcciones empíricas introducidas en los modelos de Purcell y Childs y Collis-George de la permeabilidad, especialmente en lo referente a la justificación de la expresión  $(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1$  en el contexto de la geometría fractal.

**Considerando al suelo como un objeto fractal**, se puede aplicar la ecuación (4.69) de la manera siguiente. Si  $\phi_s = 1 - \phi$  representa el volumen de los sólidos relativo al volumen total de suelo, (o "solidicidad volumétrica"), entonces el área de los sólidos relativa al área total del suelo, (o "solidicidad areal"),  $\mu_s$ , será igual a  $\phi_s^s$ , con  $s = D/E$ . Siguiendo una idea probabilística, se hace un corte perpendicular a la dirección macroscópica del movimiento para obtener dos secciones paralelas situadas en  $x$  e  $y$  del eje del escurrimiento. Sobre cada sección el área de los poros es, según la ecuación (4.63), igual a  $\phi^s$ . La probabilidad total del encuentro de las secciones ( $\mu$ ) en un punto intermedio es el área de flujo:  $\mu = \phi^s \phi^s = \phi^{2s}$ .

Puesto que  $\phi_s + \phi = 1$  y  $\mu_s + \mu = 1$  se establece la relación fundamental siguiente

$$(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1, \quad (4.71)$$

donde  $s = D/E$ . En otros términos se tiene:

solidicidad areal

$$\mu_s = 1 - \mu = (1 - \phi)^s = \phi_s^s, \quad (4.72)$$

porosidad areal

$$\mu = \phi^s \phi^s = \phi^{2s}. \quad (4.73)$$

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

A partir de la ecuación (4.71) se puede demostrar que  $\mu \leq \phi$  y:

Para  $\phi \rightarrow 0$

$$s(\phi) = \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2 \left[ 1 + \ln \left( \frac{1}{\phi} \right) \right]}. \quad (4.74)$$

Para  $\phi \rightarrow 1$

$$s(\phi) = 1 - \frac{\ln 2}{\ln \left( \frac{1}{1-\phi} \right)}. \quad (4.75)$$

De donde

$$\frac{1}{2} < s < 1. \quad (4.76)$$

Las ecuaciones (4.71) y (4.73) establecen que la dimensión fractal de los suelos ( $E = 3$ ) satisface:  $3/2 < D < 3$ . Según estos resultados se puede inferir que: i) el modelo de la permeabilidad de Purcell [la porosidad areal es igual a la porosidad volumétrica] es representativo de los suelos donde la porosidad es pequeña como en los suelos arenosos, y ii) el modelo de la permeabilidad de Childs y Collis-George [una decorrelación completa entre las secciones de interacción] es representativo de los suelos donde la porosidad es grande como en los suelos arcillosos.

Algunos valores importantes de la dimensión fractal y de la porosidad se obtienen en los siguientes casos.

1) Para el valor de Millington y Quirk  $s = 2/3$  ( $E = 3 \Rightarrow D = 2$ ), se puede demostrar, a partir de la ecuación (4.71), que la porosidad volumétrica ( $\phi$ ) satisface el polinomio siguiente

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

$$\phi^9 + 3\phi^7 - 6\phi^6 + 3\phi^5 - 12\phi^4 + 40\phi^3 - 60\phi^2 + 39\phi - 8 = 0. \quad (4.77)$$

La raíz en  $(0, 1)$  es  $\phi \cong 0,3671$  lo que conduce a  $\mu \cong 0,2628$ .

2) Si la porosidad volumétrica es igual a la solidicidad volumétrica, es decir,  $\phi = \phi_s = 1/2$  entonces de la ecuación (4.71)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} = \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s = 1, \quad (4.78)$$

haciendo  $x = (1/2)^s$ , se obtiene la ecuación que define la proporción áurea (Huntley, 1970):  $x^2 + x + 1 = 0$ . La raíz positiva proporciona:

solidicidad areal

$$\mu_s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0,6180,$$

dimensión fractal

$$s = \log_2 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \cong 0,6942. (E = 3 \Rightarrow D \cong 2,0827),$$

y porosidad areal

$$\mu = \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 \cong 0,3820.$$

3) Si la porosidad areal es igual a la solidicidad areal, es decir  $\mu = \mu_s = 1/2$ , entonces de la ecuación (4.71)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{s}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2s}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2s}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2s}} = 1, \quad (4.79)$$

haciendo  $x = (1/2)^{1/2s}$ , se obtiene de nuevo la ecuación  $x^2 + x + 1 = 0$  que define la proporción áurea. La raíz positiva proporciona:

porosidad volumétrica

$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0,6180,$$

dimensión fractal

$$s = \frac{1}{2 \log_2 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)} \cong 0,7202. (E = 3 \Rightarrow D \cong 2,1606),$$

y solidicidad volumétrica

$$\phi_s = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cong 0,3820.$$

### 4.4.3. Las densidades

Teniendo en cuenta la estructura de la ecuación (4.72) la superficie de los sólidos contenida en las cubiertas, considerando la ecuación (4.70), es proporcionada por

$$m_s(r) = \rho_s c H_s^E \left( \frac{r}{H_s} \right)^D, \quad (4.80)$$

cuando  $r \rightarrow 0$ , donde  $V_s = c H_s^E$  es el volumen total de los sólidos y  $\rho_s$  es la densidad total de los sólidos. La densidad de los sólidos correspondiente a  $r$  se obtiene de la ecuación (4.64) ( $r \rightarrow 0$ )

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

$$\rho_s(r) = \rho_s \left( \frac{H_s}{r} \right)^{E-D}, \quad (4.81)$$

Las ecuaciones (4.60) y (4.61) correspondientes a los sólidos se escriben, cuando  $r \rightarrow 0$ , como sigue

$$N_s(r) = \left( \frac{H_s}{r} \right)^D, \quad (4.82)$$

$$vol_E(P_r) = cH_s^E \left( \frac{r}{H_s} \right)^{E-D}. \quad (4.83)$$

De manera análoga, y de acuerdo con la estructura de la ecuación (4.73), la superficie de los poros contenida en las cubiertas, considerando la ecuación (4.70), es proporcionada por

$$m_v(r) = \rho_v c H_v^E \left( \frac{r}{H_v} \right)^{2D}, \quad (4.84)$$

cuando  $r \rightarrow 0$ , donde  $V_v = cH_v^E$  es el volumen total de los poros y  $\rho_v$  es la densidad total de los poros. La densidad de los poros correspondiente a  $r$ , cuando  $r \rightarrow 0$ , se obtiene de la ecuación (4.68)

$$\rho_v(r) = \rho_v \left( \frac{r}{H_v} \right)^{2D-E}. \quad (4.85)$$

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

Puesto que el volumen total de suelo ( $V_t = cH_t^E$ ) es igual a la suma de los volúmenes totales de los sólidos ( $V_s = cH_s^E$ ) y de los poros ( $V_v = cH_v^E$ ), se establece que

$$H_s^E + H_v^E = H_t^E, \quad (4.86)$$

$$\phi_s = \frac{H_s^E}{H_t^E}, \quad (4.87)$$

$$\phi = \frac{H_v^E}{H_t^E}. \quad (4.88)$$

De igual manera, la suma de la superficie total de los sólidos ( $M_s$ ) y la superficie total de los poros ( $M_v$ ) es igual a la superficie total del suelo ( $M_t$ ). Dada la equivalencia entre la superficie y la masa establecida en la ecuación (4.70), se tiene:  $M_s = \rho_s c H_s^E$ ,  $M_v = \rho_v c H_v^E$  y  $M_t = \rho_t c H_t^E$ , donde  $\rho_s$  es la densidad de los sólidos,  $\rho_v$  es la densidad de los poros y  $\rho_t$  es la densidad total del suelo. Las ecuaciones (4.86), (4.87) y (4.88) permiten establecer

$$\rho_s (1 - \phi) + \rho_v \phi = \rho_t. \quad (4.89)$$

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

La comparación de las ecuaciones (4.71) y (4.89), permiten obtener las definiciones siguientes de las densidades totales

$$\rho_s = \rho_t \phi_s^{s-1} = \rho_t \left( \frac{H_s}{H_t} \right)^{D-E}, \quad (4.90)$$

$$\rho_v = \rho_t \phi_s^{2s-1} = \rho_t \left( \frac{H_v}{H_t} \right)^{2D-E}. \quad (4.91)$$

Se puede ver que la ecuación (4.90) es análoga a la ecuación (4.81), y que la ecuación (4.91) es análoga a la ecuación (4.85).

#### 4.4.4. Las porosidades parciales.

*Relación entre las porosidades parciales volumétrica y areal.* Cuando los poros no se encuentran totalmente llenos con agua la relación entre las porosidades areal y volumétrica definida por la ecuación (4.73) debe ser generalizada a las porosidades parciales. Se define a  $\theta$  como la porosidad volumétrica parcial (o contenido volumétrico de humedad cuando los poros contienen alguna cantidad agua), y a  $\omega$  como la porosidad areal parcial (o área común de flujo) correspondiente. La relación entre la porosidad areal parcial ( $\omega$ ) y la porosidad volumétrica parcial ( $\theta$ ) se obtiene a partir de la ecuación (4.73)

$$\omega = \theta^{2s} \quad \text{con} \quad 0 \leq \omega < \mu \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \phi, \quad (4.92)$$

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

donde se puede definir

$$\omega(R_s) = \int_0^{R_s} g(r_s) dr_s. \quad (4.93)$$

en la cual  $g(r_s)$  es la función densidad de porosidad areal.

*La porosidad volumétrica parcial en el suelo.* En el trabajo pionero de Brooks y Corey [133], se argumenta experimentalmente que la relación entre el contenido volumétrico de agua y la presión del agua, llamada curva característica de humedad o curva de retención, es bien representada por una función potencia cuando la presión es pequeña, es decir:  $\theta(\psi) \propto 1/|\psi|^\lambda$ , cuando  $\psi \ll 0$ , y  $\lambda > 0$ . Considerando lo anterior y la ley de Laplace definida por la ecuación (4.39), la relación entre la porosidad volumétrica parcial y el radio de poro es bien representada por una función en potencia, es decir  $\theta(R) \propto R^\lambda$  cuando  $R \rightarrow 0$ ; la potencia es llamada ‘índice de poros’. Definiendo un tamaño de poro crítico  $R_0$ , asociado a una presión crítica en el sentido de Brooks y Corey, y la porosidad volumétrica parcial en función del tamaño de poro  $R$ , se puede escribir la porosidad volumétrica parcial de la manera siguiente

$$\theta(R) = \phi S\left(\frac{R}{R_0}\right), \quad (4.94)$$

donde la función  $S(\rho)$  está definida por

$$S(\rho) = \rho^\lambda, \quad (4.95)$$

y representa el grado de saturación en el suelo.

Puesto que  $R$  es el radio perpendicular a la trayectoria tortuosa y  $R_s$  es el radio perpendicular a la trayectoria rectilínea en un punto dado, es razonable suponer que la contribución relativa a la porosidad volumétrica por el primero, es la misma contribución relativa a la porosidad areal por el segundo. En otros términos, se puede escribir una relación análoga a la ecuación (4.94) para la porosidad areal

$$\omega(R_s) = \mu S \left( \frac{R_s}{R_{s0}} \right), \quad (4.96)$$

donde el radio  $R_{s0}$  corresponde al radio  $R_0$ .

La combinación de las ecuaciones (4.94), (4.95) y (4.96), considerando las ecuaciones (4.73) y (4.92), permite establecer la relación siguiente entre  $R_s$  y  $R$

$$\frac{R_s}{R_{s0}} = \left( \frac{R}{R_0} \right)^\lambda. \quad (4.97)$$

#### 4.4.5. La semi-porosidad areal.

Se introduce el concepto de ‘semiporosidad’ areal, útil para la integración del modelo (4.51). Según la ecuación (4.73) la porosidad areal o probabilidad en  $x$  e  $y$  es definida respectivamente por:  $\mu_x = \phi_x^{2s_x}$  y  $\mu_y = \phi_y^{2s_y}$ , donde  $s_x$  y  $s_y$  son las dimensiones fractales relativas a la dimensión de Euclides en los puntos  $x$  e  $y$  respectivamente, calculadas en función de  $\phi_x$  y  $\phi_y$  con la utilización de la ecuación (4.71); estas porosidades pueden ser diferentes si el suelo es heterogéneo. La porosidad areal en una  $z$  intermedia a  $x$  e  $y$  está dada por  $\mu = \sqrt{\mu_x} \sqrt{\mu_y}$ . En otros términos, la

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

porosidad areal o probabilidad en  $z$  es el resultado de una 'parte' de la probabilidad en  $x$  igual a  $\sqrt{\mu_x}$  y de otra 'parte' en  $y$  igual a  $\sqrt{\mu_y}$ . Se denomina a esta probabilidad una semiprobabilidad o semiporosidad areal, denotada por  $\varphi$  y definida como

$$\varphi = \sqrt{\mu} = \phi^s. \quad (4.98)$$

La relación entre la semiporosidad areal parcial, denotada por  $\bar{\omega}$ , y la porosidad volumétrica parcial ( $\theta$ ) se obtiene a partir de la generalización de la ecuación (4.98), es decir

$$\bar{\omega} = \sqrt{\omega} = \theta^s \quad \text{con} \quad 0 \leq \bar{\omega} \leq \varphi. \quad (4.99)$$

La semiporosidad areal total ( $\varphi$ ) satisface que

$$\int_{\Omega_T} d\bar{\omega} = \varphi. \quad (4.100)$$

Para caracterizar las dos secciones situadas en  $x$  e  $y$  sobre la trayectoria rectilínea, se utiliza la notación  $(r_s, \rho_s)$  para designar los tamaños que definen la porosidad areal parcial y la notación  $(\tilde{r}_s, \tilde{\rho}_s)$  para designar su raíz, que definen la semiprobabilidad parcial o semi-porosidad areal parcial ( $\bar{\omega}$ ). De acuerdo con las ecuaciones (4.97) y (4.99)

$$\frac{\tilde{R}_s}{\tilde{R}_{s0}} = \sqrt{\frac{R_s}{R_{s0}}} = \left( \frac{R}{R_0} \right)^s, \quad (4.101)$$

donde  $\tilde{R}_{s0}$  corresponde a  $R_{s0}$ .

De las ecuaciones (4.94), (4.95) y (4.101), se sigue

$$\bar{\omega}(\tilde{R}_s) = \varphi S(\tilde{R}_s/\tilde{R}_{s0}). \quad (4.102)$$

#### 4.4.6. La tortuosidad local o capilar.

La tortuosidad local o capilar, es decir la tortuosidad en función de cada tamaño de poro ( $r$ ), se deduce de la introducción de la ecuación (4.97) en la ecuación (4.45)

$$T(r) = T_0 \left( \frac{R_0}{r} \right)^\delta \quad \text{con} \quad 0 < \delta = 2s - 1 < 1, \quad (4.103)$$

donde  $T_0 = R_0/R_{s0}$ .

Se debe observar que la forma de la ecuación (4.103), justifica en el formalismo fractal la relación empírica de una dependencia en potencia entre la tortuosidad y el radio de los poros propuesta por Fatt y Dysktra [105]. Por otro lado también, se debe observar que para  $s = 1/2$  ( $\delta = 0$ ),  $T = T_0 = \text{const.}$ , resultado propuesto por Purcell para un sistema de capilares paralelos y aplicable cuando la porosidad tiende a cero. Mientras que para el modelo Childs y Collis-George (aplicable para los suelos en donde la porosidad tiende a la unidad), es necesario introducir la corrección por tortuosidad con  $s = 1$  ( $\delta = 1$ ). Es importante notar también que  $T^E(r)$  es inversamente proporcional a la densidad  $\rho_v(r)$ , definida por la ecuación (4.85).

## 4.5. Modelos fractales de la conductividad hidráulica

Las semiporosidades areales parciales en los puntos  $x$  e  $y$  sobre la trayectoria rectilínea son representadas respectivamente por  $\bar{\omega}_x$  y  $\bar{\omega}_y$ . El área de flujo en un punto intermedio es definida por

$$d\omega(\tilde{r}_s, \tilde{\rho}_s) = d\bar{\omega}_x(\tilde{r}_s) d\bar{\omega}_y(\tilde{\rho}_s). \quad (4.104)$$

La integral (4.51) que determina al coeficiente de permeabilidad o permeabilidad intrínseca, toma la forma

$$k = C_f \int_{\Omega} [R_s(r_s, \rho_s)]^2 d\bar{\omega}_x(\tilde{r}_s) d\bar{\omega}_y(\tilde{\rho}_s). \quad (4.105)$$

donde  $\tilde{r}_s$  (o  $\tilde{\rho}_s$ ) está relacionado con  $r_s$  (o  $\rho_s$ ) a través de la ecuación (4.101). Las interpretaciones del radio  $R_s$  que interviene en esta última expresión conducen a diferentes modelos de la permeabilidad, a saber.

### 4.5.1. Modelo del 'poro pequeño'

Utilizando la hipótesis de Childs y Collis-George [103], para los radios perpendiculares a la trayectoria rectilínea

$$R_s = \text{mín}(r_s, \rho_s). \quad (4.106)$$

La integración de (4.105) es

$$k = C_f \left[ \int_{\tilde{\rho}_s=0}^{\tilde{\rho}_s=\tilde{R}_s} \int_{\tilde{r}_s=0}^{\tilde{r}_s=\tilde{\rho}_s} r_s^2 d\bar{\omega}_x(\tilde{r}_s) d\bar{\omega}_y(\tilde{\rho}_s) + \int_{\rho_s=0}^{\tilde{\rho}_s=\tilde{R}_s} \int_{\tilde{r}_s=0}^{\tilde{r}_s=\tilde{R}_s} \rho_s^2 d\bar{\omega}_x(\tilde{r}_s) d\bar{\omega}_y(\tilde{\rho}_s) \right]. \quad (4.107)$$

Para un suelo homogéneo ( $\bar{\omega}_x = \bar{\omega}_y = \bar{\omega}$ ) las integrales son iguales, esto es

$$k = 2C_f \int_0^{\tilde{R}_s} [\bar{\omega}(\tilde{R}_s) - \bar{\omega}(\tilde{r}_s)] r_s^2 d\bar{\omega}(\tilde{r}_s). \quad (4.108)$$

### 4.5.2. Modelo de la media geométrica

Adoptando la hipótesis original debida a Mualem [107], que considera el radio volumétrico  $R$  como la media geométrica de  $r$  y  $\rho$ , para los radios areales

$$R_s^2 = r_s \rho_s. \quad (4.109)$$

La ecuación (4.105) de la permeabilidad se transforma en

$$k = C_f \int_0^{\tilde{R}_s} r_s d\bar{\omega}_x(\tilde{r}_s) \int_0^{\tilde{R}_s} \rho_s d\bar{\omega}_y(\tilde{\rho}_s). \quad (4.110)$$

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

Si el suelo es homogéneo ( $\bar{\omega}_x = \bar{\omega}_y = \bar{\omega}$ )

$$k = C_f \left[ \int_0^{\tilde{R}_s} r_s d\bar{\omega}(\tilde{r}_s) \right]^2. \quad (4.111)$$

### 4.5.3. Modelo del 'poro neutro'

Cuando se considera que no hay preferencia por los radios,

$$R_s = r_s \quad \text{o} \quad R_s = \rho_s, \quad (4.112)$$

se obtiene a partir de la ecuación (4.105)

$$k = C_f \bar{\omega}_x(\tilde{R}_s) \int_0^{\tilde{R}_s} \rho_s^2 d\bar{\omega}_y(\tilde{\rho}_s) = C_f \bar{\omega}_y(\tilde{R}_s) \int_0^{\tilde{R}_s} r_s^2 d\bar{\omega}_x(\tilde{r}_s). \quad (4.113)$$

Si el suelo es homogéneo se tiene ( $\bar{\omega}_x = \bar{\omega}_y = \bar{\omega}$ )

$$k = C_f \bar{\omega}(\tilde{R}_s) \int_0^{\tilde{R}_s} r_s^2 d\bar{\omega}(\tilde{r}_s). \quad (4.114)$$

#### 4.5.4. Modelo del 'poro grande'

Consideremos finalmente que el poro de radio más grande determina la resistencia al flujo

$$R_s = \rho_s \quad \text{si} \quad r_s < \rho_s, \quad (4.115)$$

o

$$R_s = r_s \quad \text{si} \quad \rho_s < r_s,$$

es decir  $R_s = \text{máx}(r_s, \rho_s)$ .

Con esta hipótesis la ecuación (4.105) conduce a

$$k = C_f \left[ \int_{\tilde{r}_s=0}^{\tilde{r}_s=\tilde{R}_s} \int_{\tilde{\rho}_s=0}^{\tilde{\rho}_s=\tilde{r}_s} r_s^2 d\bar{\omega}_x(\tilde{r}_s) d\bar{\omega}_y(\tilde{\rho}_s) + \int_{\tilde{\rho}_s=0}^{\tilde{\rho}_s=\tilde{R}_s} \int_{\tilde{r}_s=0}^{\tilde{r}_s=\tilde{\rho}_s} \rho_s^2 d\bar{\omega}_x(\tilde{r}_s) d\bar{\omega}_y(\tilde{\rho}_s) \right]. \quad (4.116)$$

y realizando la primera integral, a

$$k = C_f \left[ \int_0^{\tilde{R}_s} r_s^2 d\bar{\omega}_y(\tilde{r}_s) d\bar{\omega}_x(\tilde{r}_s) + \int_0^{\tilde{R}_s} \rho_s^2 d\bar{\omega}_x(\tilde{\rho}_s) d\bar{\omega}_y(\tilde{\rho}_s) \right]. \quad (4.117)$$

Para el suelo homogéneo ( $\bar{\omega}_x = \bar{\omega}_y = \bar{\omega}$ )

$$k = 2C_f \int_0^{\tilde{R}_s} r_s^2 \bar{\omega}(\tilde{r}_s) d\bar{\omega}(\tilde{r}_s). \quad (4.118)$$

#### 4.5.5. Modelos de la conductividad.

La conductividad de cada poro capilar es

$$K_C(r) = K_{C0} \left( \frac{r}{R_0} \right)^{4s}, \quad (4.119)$$

donde

$$K_{C0} = \frac{\rho_w g}{\eta} C_f R_{S0}^2 = \frac{\rho_w g}{\eta} C_f \frac{R_0^2}{T_0^2}, \quad (4.120)$$

y  $K_{C0}$  es la conductividad del poro de radio  $R_0$ .

A partir de las ecuaciones (4.108), (4.111), (4.114) y (4.118), considerando las ecuaciones (4.39), (4.97) y (4.103), se pueden obtener los modelos de la conductividad hidráulica correspondientes a las hipótesis de poro pequeño, de media geométrica, neutro y grande respectivamente y como sigue

$$K(R) = 2 \int_0^R [\theta^s(R) - \theta^s(r)] K_C(r) d\theta^s(r); \quad K_C = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta^s} \left( \frac{dK}{d\theta^s} \right), \quad (4.121)$$

$$K(R) = \left[ \int_0^R \sqrt{K_C(r)} d\theta^s(r) \right]^2; \quad K_C = \frac{1}{4K} \left( \frac{dK}{d\theta^s} \right)^2, \quad (4.122)$$

$$K(R) = \theta^s(R) \int_0^R K_C(r) d\theta^s(r); \quad K_C = \frac{d}{d\theta^s} \left( \frac{K}{\theta^s} \right), \quad (4.123)$$

$$K(R) = 2 \int_0^R K_C(r) \theta^s(r) d\theta^s(r); \quad K_C = \frac{1}{2\theta^s} \frac{dK}{d\theta^s}, \quad (4.124)$$

En estos modelos se puede incorporar el contenido volumétrico de agua residual ( $\theta_r$ ), definido por Brooks y Corey [133], de manera que  $K(\theta_r) = 0$ , reemplazando a  $\theta$  y a  $\phi$  por  $\theta_{ef} = \theta - \theta_r$  y  $\phi_{ef} = \phi - \theta_r$ , que son el contenido volumétrico de agua y la porosidad volumétrica efectivos, respectivamente; si en un suelo saturado queda aire atrapado en los intersticios, la porosidad total  $\phi$  se reemplaza por  $\theta_s$ , el contenido a saturación. La dimensión fractal relativa correspondiente se deberá calcular reemplazando  $\phi$  en la ecuación (4.71) por la porosidad efectiva. En consecuencia, el contenido volumétrico de agua residual y de aire atrapado se adiciona a la solididad volumétrica total.

Ahora bien, si se introduce el grado efectivo de saturación definido por

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (4.125)$$

donde  $\theta_s$  es el contenido de humedad a saturación asimilado generalmente a la porosidad total ( $\phi$ ),  $\theta_r$  es el contenido de humedad residual definido de modo que la succión del agua es muy grande o que la presión del agua es muy pequeña ( $\Psi \rightarrow -\infty$ ); los modelos anteriores se reescriben de la siguiente manera

$$K(R) = 2\phi_{ef}^{2s} \int_0^R [\Theta^s(R) - \Theta^s(r)] K_C(r) d\Theta^s(r); \quad K_C = \frac{1}{2\phi_{ef}^{2s}} \frac{d}{d\Theta^s} \left( \frac{dK}{d\Theta^s} \right); \quad (4.126)$$

$$K(R) = \phi_{ef}^{2s} \left[ \int_0^R \sqrt{K_C(r)} d\Theta^s(r) \right]^2; \quad K_C = \frac{1}{4\phi_{ef}^{2s} K} \left( \frac{dK}{d\Theta^s} \right)^2; \quad (4.127)$$

$$K(R) = \phi_{ef}^{2s} \Theta^s(R) \int_0^R K_C(r) d\Theta^s(r); \quad K_C = \frac{1}{\phi_{ef}^{2s}} \frac{d}{d\Theta^s} \left( \frac{K}{\Theta^s} \right); \quad (4.128)$$

$$K(R) = 2\phi_{ef}^{2s} \int_0^R K_C(r) \Theta^s(r) d\Theta^s(r); \quad K_C = \frac{1}{2\phi_{ef}^{2s} \Theta^s} \frac{dK}{d\Theta^s}. \quad (4.129)$$

Para calcular las integrales en los diferentes modelos existen varias posibilidades como: i) proporcionar la curva de retención de humedad y una relación entre los radios de poros y de curvatura, ii) proporcionar la variación de la conductividad capilar con respecto al contenido de humedad o la dependencia de ésta con respecto al radio de poro.

En la literatura se asume en la ley de Laplace que el ángulo de contacto es independiente del tamaño de poro lo que es equivalente a asumir que los radios de poro y de curvatura son iguales o proporcionales en cada poro capilar. En esta situación la ecuación (4.119) será

$$K_C(r) = K_{C0} \left[ \frac{\Psi_0}{\Psi(r)} \right]^{4s}, \quad (4.130)$$

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

donde  $\Psi_0$  es la presión asociada a  $R_0$ .

Los modelos resultantes considerando la ecuación anterior, que requieren la curva de retención  $\Psi(\Theta)$ , son:

El modelo del 'poro pequeño'

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \frac{\int_0^\Theta \frac{\Theta^s - \tilde{\Theta}^s}{|\psi(\tilde{\Theta})|^{4s}} \tilde{\Theta}^{s-1} d\tilde{\Theta}}{\int_0^1 \frac{\Theta^s - \tilde{\Theta}^s}{|\psi(\tilde{\Theta})|^{4s}} \tilde{\Theta}^{s-1} d\tilde{\Theta}}. \quad (4.131)$$

El modelo de la 'media geométrica'

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \left[ \frac{\int_0^\Theta \frac{\tilde{\Theta}^{s-1} d\tilde{\Theta}}{|\psi(\tilde{\Theta})|^{2s}}}{\int_0^1 \frac{\tilde{\Theta}^{s-1} d\tilde{\Theta}}{|\psi(\tilde{\Theta})|^{2s}}} \right]^2. \quad (4.132)$$

El modelo del 'poro neutro'

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \Theta^s \left[ \frac{\int_0^\Theta \frac{\tilde{\Theta}^{s-1} d\tilde{\Theta}}{|\psi(\tilde{\Theta})|^{4s}}}{\int_0^1 \frac{\tilde{\Theta}^{s-1} d\tilde{\Theta}}{|\psi(\tilde{\Theta})|^{4s}}} \right]. \quad (4.133)$$

El modelo del 'poro grande'

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \frac{\int_0^\Theta \frac{\tilde{\Theta}^{2s-1}}{|\psi(\tilde{\Theta})|^{4s}} d\tilde{\Theta}}{\int_0^1 \frac{\tilde{\Theta}^{2s-1}}{|\psi(\tilde{\Theta})|^{4s}} d\tilde{\Theta}}. \quad (4.134)$$

Si se proporciona la función  $K_C(\Theta)$ , la integración de los cuatro modelos, ecuaciones (4.126)- (4.129), proporcionará los modelos respectivos de la conductividad hidráulica.

#### 4.5.6. Comparación de los modelos.

La integración analítica de los cuatro modelos expuestos es elemental con las ecuaciones (4.102) y (4.103), considerando las ecuaciones (4.94)-(4.99) o con el formalismo de Brooks y Corey. Estas ecuaciones ponen en evidencia de una manera simple las principales diferencias entre los modelos de la permeabilidad. A partir de la ecuación (4.119), se puede demostrar, mediante las ecuaciones (4.131)-(4.134), que la conductividad hidráulica relativa resultante es la misma, las diferencias entre los modelos radican en las expresiones para la conductividad saturada. En otros términos se obtiene:

- 1) La permeabilidad relativa

$$K(\Theta) = K_s [\Theta]^\beta \quad \text{con} \quad \beta = 2s \left( \frac{2}{\lambda} + 1 \right). \quad (4.135)$$

- 2) La permeabilidad total

$$K_s = K_{C0} \phi_{ef}^{2s} \Lambda, \quad (4.136)$$

en donde el factor de ponderación  $\Lambda$  es diferente para cada modelo. Denotando a  $\Lambda$  por  $\Lambda_p$  para el modelo del poro pequeño [ecuación (4.108)],  $\Lambda_g$  para el modelo de la media geométrica de los tamaños de los poros [ecuación (4.111)],  $\Lambda_N$  para el modelo del poro neutro [ecuación (4.114)],  $\Lambda_G$  para el modelo del poro grande [ecuación (4.118)], se tiene

$$\Lambda_p = \frac{1}{2\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{\lambda} + 1\right)}, \quad \Lambda_g = \frac{1}{\left(\frac{2}{\lambda} + 1\right)^2}, \quad \Lambda_N = \frac{1}{2\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{2}\right)}, \quad \Lambda_G = \frac{1}{\frac{2}{\lambda} + 1}. \quad (4.137)$$

Se puede verificar que:  $\Lambda_p \leq \Lambda_g \leq \Lambda_N \leq \Lambda_G$  (las igualdades corresponden a los extremos,  $\lambda \rightarrow 0$  ó  $\infty$ ). Cuando  $\lambda \rightarrow 0$ :  $\Lambda_p = \lambda^2/8 < \Lambda_g = \lambda^2/4 < \Lambda_N = \lambda/4 < \Lambda_G = \lambda/2$ . Los valores de  $K_s$  correspondientes satisfacen

$$K_{sp} \leq K_{sg} \leq K_{sN} \leq K_{sG}. \quad (4.138)$$

Se debe observar que la ecuación (4.135) generaliza la ecuación deducida por Irmay [134],  $\beta = 3$ , a partir de la teoría de Koseny para el flujo saturado. La forma había sido ya obtenida anteriormente por Averyanov [135], a partir de la resolución de la ecuación de Navier-Stokes para el movimiento del agua en un tubo, en el cual el agua es ubicada sobre la pared del tubo y el aire en su centro, la solución formal correspondiente es:  $K_r(\Theta) = \Theta(3\Theta - 2) - 2(1 - \Theta)^2 \ln(1 - \Theta)$ . Suponiendo que la integral total de esta solución es igual a la integral total de la función (4.135) Averyanov obtiene  $\beta = 7/2 = 3,5$ . Yuster [136], deduce  $\beta = 2$  suponiendo que el aire se mueve con el mismo gradiente que el agua en el modelo de Averyanov. Corey [137],

sugiere un valor empírico de  $\beta = 4$ . Brooks y Corey [133] establecen la misma forma con la introducción de su modelo de  $\theta(\psi)$  en el modelo de Burdine, ellos obtienen:  $\beta = 2/\lambda + 3$ .

## 4.6. Los modelos clásicos dentro de la geometría fractal

A continuación se establecen los modelos clásicos de la literatura a partir de los cuatro modelos conceptuales expuestos líneas arriba.

### 4.6.1. La correlación global.

Para obtener la estructura de los modelos clásicos vamos a introducir una hipótesis simplificadora. Observemos que la porosidad areal dada por la ecuación (4.106) puede ser expresada en función de los radios volumétricos  $(r, \rho)$ , es decir:  $d\omega(r, \rho) = s^2 \theta^{s-1}(r) \theta^{s-1}(\rho) d\theta(r) d\theta(\rho)$ . Bajo la hipótesis de que la función multiplicativa de las diferenciales de  $\theta(r)$  y  $\theta(\rho)$ , puede ser reemplazada por una media que depende sólo del límite superior, es decir de  $R$ , se obtiene

$$d\omega(r, \rho; R) = \theta^{2s-2}(R) d\theta(r) d\theta(\rho) = \theta^{2s-2}(R) f(r) f(\rho) dr d\rho, \quad (4.139)$$

en donde se ha eliminado el término  $s^2$  para satisfacer las ecuaciones (4.48) y (4.92), a saber

$$\int_0^R \int_0^R d\omega(r, \rho; R) = \omega = \theta^{2s}. \quad (4.140)$$

### 4.6.2. La tortuosidad global.

La hipótesis compatible con la anterior es la hipótesis de que la tortuosidad es una función solamente del radio mayor, es decir solamente de la humedad. Esta tortuosidad global resulta de la combinación de las ecuaciones (4.94), (4.95) y (4.103)

$$T(R) = T_0 \left[ \frac{\phi}{\theta(R)} \right]^\gamma, \quad (4.141)$$

donde  $\gamma = \delta/\lambda$ . En varios trabajos reportados en la literatura (*e.g.* Rieu y Sposito [124, 125]) se ha sugerido que la porosidad volumétrica parcial es proporcional al volumen del cuerpo paralelo, es decir:  $\theta(R) \propto R^{E-D}$ . Si tal es el caso, se deduce que

$$\lambda = E - D = E(1 - s). \quad (4.142)$$

Se debe notar sin embargo que el resultado (4.97) es independiente del significado de  $\lambda$  proporcionado por la ecuación (4.142).

De la ecuación (4.45) se tiene:  $R_s(r, \rho; \theta) = R(r, \rho) / T(\theta)$ . La ecuación (4.141) conduce a

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

$$R_s(r, \rho; \theta) = \frac{1}{T_0} \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^\gamma R(r, \rho). \quad (4.143)$$

La introducción de las ecuaciones (4.139) y (4.143) en la ecuación (4.51) permite expresar la permeabilidad de la manera siguiente

$$k = \frac{C_f}{T_0^2} \phi^{2s-2} \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^p \int_{\Omega} [R(r, \rho)]^2 d\theta(r) d\theta(\rho), \quad (4.144)$$

donde

$$p = (2s - 2) + (2\gamma), \quad (4.145)$$

en esta potencia, el primer sumando representa los efectos globales de la correlación de los poros, mientras que el segundo representa los efectos globales debidos a la tortuosidad de las trayectorias de flujo.

La conductividad de cada poro capilar, introduciendo el contenido de humedad residual como en los modelos precedentes, es proporcionada por

$$K_C(r) = K_{C0} \left[ \frac{r}{R_0} \right]^2, \quad (4.146)$$

donde  $K_{C0}$  definida por la ecuación (4.120).

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

Los modelos clásicos de conductividad hidráulica, en el contexto de la geometría fractal, que resultan al introducir las hipótesis sobre los radios que definen el volumen de los poros, correspondientes al poro pequeño, poro geométrico, poro neutral y poro grande, son respectivamente

$$K(R) = 2\phi_{ef}^{2s}\Theta^p(R) \int_0^R [\Theta(R) - \Theta(r)] K_C(r) d\Theta(r), \quad (4.147)$$

$$K(R) = \phi_{ef}^{2s}\Theta^p(R) \left[ \int_0^R \sqrt{K_C(r)} d\Theta(r) \right]^2, \quad (4.148)$$

$$K(R) = \phi_{ef}^{2s}\Theta^{1+p}(R) \int_0^R K_C(r) d\Theta(r), \quad (4.149)$$

$$K(R) = 2\phi_{ef}^{2s}\Theta^p(R) \int_0^R K_C(r) \Theta(r) d\Theta(r). \quad (4.150)$$

Los modelos propuestos en la literatura para estimar la conductividad hidráulica relativa se deducen de las ecuaciones (4.147), (4.148), (4.149) y (4.150) asumiendo que el radio de poro es igual al radio de curvatura y éste a su vez calculado a partir de la curva de retención vía la ley de Laplace; de donde:

El modelo de Childs y Collis-George [103] generalizado

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \Theta^p \frac{\int_0^\Theta \frac{\Theta - \tilde{\Theta}}{\psi^2(\tilde{\Theta})} d\tilde{\Theta}}{\int_0^1 \frac{1 - \tilde{\Theta}}{\psi^2(\tilde{\Theta})} d\tilde{\Theta}}. \quad (4.151)$$

El modelo de Mualem [107] generalizado

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \Theta^p \left[ \frac{\int_0^\Theta \frac{d\tilde{\Theta}}{\psi(\tilde{\Theta})}}{\int_0^1 \frac{d\tilde{\Theta}}{\psi(\tilde{\Theta})}} \right]^2. \quad (4.152)$$

El modelo de Burdine [104] generalizado

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \Theta^{p+1} \frac{\int_0^\Theta \frac{d\tilde{\Theta}}{\psi^2(\tilde{\Theta})}}{\int_0^1 \frac{d\tilde{\Theta}}{\psi^2(\tilde{\Theta})}}. \quad (4.153)$$

El modelo de Fuentes [118]

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \Theta^p \frac{\int_0^\Theta \frac{\tilde{\Theta}}{\psi^2(\tilde{\Theta})} d\tilde{\Theta}}{\int_0^1 \frac{\tilde{\Theta}}{\psi^2(\tilde{\Theta})} d\tilde{\Theta}}. \quad (4.154)$$

En varios trabajos reportados en la literatura (Rieu y Sposito, [124, 125]) se ha sugerido que la porosidad volumétrica parcial es proporcional al volumen del cuerpo

Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

paralelo  $\theta(R) \propto R^{E-R}$ , resultado que es plausible cuando la porosidad tiende a la unidad, en tal caso  $\lambda = E - D$ , o sea  $\lambda = 3(1 - s)$  con  $E = 3$ . Debe notarse sin embargo que el resultado de la ecuación (4.97) es independiente del significado de proporcionado por esta situación extrema. La potencia de la ecuación (4.145), considerando la ecuación (4.141), y esta aproximación es la siguiente

$$p = p_1 + p_2, \quad p_1 = 2s - 2, \quad y \quad p_2 = \frac{2(2s - 1)}{3(1 - s)}. \quad (4.155)$$

La potencia  $p$  que aparece en las ecuaciones (4.151)-(4.154), se ha considerado clásicamente como un parámetro empírico. La teoría expuesta en este trabajo ha permitido su justificación en el contexto de la geometría fractal. Esta potencia es el resultado de los efectos de correlación entre poros ( $p_1$ ) y de la tortuosidad ( $p_2$ ) [ecuación (4.155)]. En la Tabla 4.1 se muestran los valores extremos de estas potencias correspondientes a los valores extremos de la porosidad volumétrica total. Asimismo se muestran resultados intermedios correspondientes a los valores indicados por las ecuaciones (4.77), (4.78) y (4.79).

Cuadro 4.1: La potencia  $p$  de corrección de los modelos de la conductividad hidráulica, que resulta de los efectos de la correlación de los poros ( $p_1$ ) y del factor de tortuosidad ( $p_2$ ), de acuerdo con la ecuación (4.155), para algunos valores de la porosidad volumétrica total.

$\phi$	$s = D/3$	$p_1$	$p_2$	$p = p_1 + p_2$
0	1/2	-1	0	-1
0,3671	2/3	-2/3	2/3	0
1/2	0,6942	-0,6115	0,8470	0,2355
0,6180	0,7202	-0,5596	1,0494	0,4898
1	1	0	$\infty$	$\infty$

## 4.7. Formas cerradas de la conductividad hidráulica

Los modelos de Burdine [104] y de Mualem [107] han sido utilizados por van Genuchten [138], para estimar la conductividad hidráulica a partir de la curva de retención, cuando ésta es representada por la función

$$\Theta(\psi) = \left[ 1 + \left( \frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^{-m}, \quad (4.156)$$

en donde  $m$  y  $n$  son dos parámetros positivos,  $\psi_d$  es un valor característico de la presión.

Para obtener formas analíticas cerradas, van Genuchten impone relaciones entre  $m$  y  $n$ . En el modelo de Burdine  $m = 1 - (2/n)$ , y en el modelo de Mualem  $m = 1 - (1/n)$ . Un procedimiento similar puede ser utilizado en el modelo de Fuentes [118] [ecuación (4.155)], y en los modelos definidos por las ecuaciones (4.132)-(4.134).

La introducción de la ecuación (4.156) en las ecuaciones (4.132)-(4.134) permite obtener respectivamente, las siguientes expresiones de la conductividad en función del grado de saturación efectiva

$$K(\Phi) = K_s \left[ 1 - \left( 1 - \Theta^{\frac{1}{m}} \right)^{sm} \right]^2, \quad 0 < sm = 1 - \frac{2s}{n} < 1, \quad (4.157)$$

$$K(\Theta) = K_s \Theta^s \left[ 1 - \left( 1 - \Theta^{\frac{1}{m}} \right)^{sm} \right], \quad 0 < sm = 1 - \frac{4s}{n} < 1, \quad (4.158)$$

$$K(\Theta) = K_s \left[ 1 - \left( 1 - \Theta^{\frac{1}{m}} \right)^{2sm} \right], \quad 0 < 2sm = 1 - \frac{4s}{n} < 1. \quad (4.159)$$

La utilización de la ecuación (4.156) con alguno de los modelos definidos por las ecuaciones (4.157)-(4.159), requiere del valor de la porosidad del suelo en estudio, para calcular la dimensión fractal relativa ( $s$ ) con la ecuación (4.41), y así obtener la relación entre los parámetros  $m$  y  $n$  correspondiente a cada modelo. Luego se estiman sobre la curva de retención experimental, con el método de los mínimos cuadrados por ejemplo, los parámetros  $(m, \psi_d)$  de la ecuación (4.156). La conductividad hidráulica a saturación ( $K_s$ ) deberá ser proporcionada.

La introducción de la ecuación (4.156) en los modelos clásicos definidos por las ecuaciones (4.151)-(4.153) permite obtener respectivamente, las siguientes expresiones

$$K(\Theta) = K_s \Theta^p \left[ 1 - \left( 1 - \Theta^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^2, \quad 0 < m = 1 - \frac{1}{n} < 1, \quad (4.160)$$

$$K(\Theta) = K_s \Theta^{p+1} \left[ 1 - \left( 1 - \Theta^{\frac{1}{m}} \right)^m \right], \quad 0 < m = 1 - \frac{2}{n} < 1, \quad (4.161)$$

$$K(\Theta) = K_s \Theta^p \left[ 1 - \left( 1 - \Theta^{\frac{1}{m}} \right)^{2m} \right], \quad 0 < m = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2}. \quad (4.162)$$

#### Capítulo 4. Flujo del agua en suelos

En las relaciones entre los parámetros  $m$  y  $n$  de las ecuaciones (4.156) y (4.160)-(4.162) no interviene la dimensión fractal relativa; ésta interviene en el parámetro  $p$ . El valor correcto de  $p$  depende de la buena estimación del parámetro  $p_2$  [ver ecuación (4.155)], es decir de la ecuación (4.142). Dada la estructura de la ecuación (4.156), y de acuerdo con las ecuaciones (4.94) y (4.95), se puede también utilizar  $\lambda \cong mn$ ; es decir  $p_2 \cong 2(2s - 1) / mn$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

Las principales conclusiones de este trabajo son las siguientes:

La penetración capilar en micro y nano-canales rectos horizontales puede ser estudiada analíticamente por medio de los modelos generalizados de flujo unidimensional. Tales flujos de Poiseuille generalizados obedecen a la ecuación de Poisson y los dos parámetros más importantes, es decir, la compacidad  $C$  y el factor geométrico de corrección  $\alpha$  pueden ser determinados explícitamente para secciones transversales muy complejas. De hecho, encontramos que hay una relación lineal entre  $\alpha$  y  $C$  para las diferentes formas de canales aquí estudiadas. Como se mostró, el cálculo del frente de penetración capilar es directo y los resultados, ya sea en términos de las distancias o de los tiempos de penetración capilar son del mismo orden que los que se encuentran en los experimentos. Por ejemplo, en los microcanales rectangulares de Kim et al [14, 15] los tiempos y las distancias de penetración son del mismo orden que las encontradas teóricamente. Algunas posibles diferencias en lo que se refiere a los valores de  $l(t)$ , podrían surgir en trabajos donde se analizara la penetración capilar en microcanales con secciones transversales diferentes, sobre todo en canales angulados. Estudios de penetración capilar en sistemas macro (del orden de milímetros) dejan

## Capítulo 5. Conclusiones

ver que los modelos generalizados en los que se usa el perímetro como un parámetro importante llegan a tener errores del orden del 6% al calcular las longitudes de penetración [11]. Aunque esto no es algo determinante, se debe de tomar en cuenta para propósitos de diseño y comparación.

Experimentalmente se observa que la ley de penetración capilar  $l(t) \propto \sqrt{t}$  describe correctamente la penetración capilar espontánea en nanocanales de sección transversal rectangular [70], aunque en dicho trabajo se usó el concepto de radio hidráulico (radio equivalente al de un canal circular que ofrece la misma resistencia viscosa) y éste difiere del concepto aquí empleado en relación con el factor de corrección geométrica,  $\alpha$ . Estas diferencias, motivaron la aplicación del modelo teórico aquí desarrollado, a nanocanales rígidos de sección transversal compleja. El acuerdo resultante entre teoría y experimento es muy bueno e incluso da un criterio para ajustar la geometría óptima a un canal real y con ello nos motiva a realizar experimentos de validación a dicha escala para estimar las posibles defectos que arroje el modelo en sistemas de esta escala. El estudio presentado puede ser extendido o completado en sistemas más realistas y acordes a las condiciones experimentales, como los son, la posible existencia de gradientes de temperatura [12], o de concentración de diferentes sustancias [13], ya que parece no ser difícil extender el modelo generalizado (aquí desarrollado), de la penetración capilar a dichos casos.

Las alturas de equilibrio que un líquido, al penetrar de manera espontánea en contra de la fuerza gravitacional, dentro de un tubo capilar de sección recta ejesimétrica variable (conos rectos divergentes o convergentes), alcanza, pueden ser caracterizadas de manera precisa utilizando como parámetros de análisis el número de Bond ( $Bo$ ), el ángulo de mojado ( $\theta$ ) y el ángulo de inclinación de la generatriz del cono ( $\phi$ ). El número de alturas o depresiones de equilibrio que adquiera el líquido, se obtienen al comparar los valores que se asigne a estos parámetros, contra los valores críticos de los mismos. Estos últimos se encuentran al resolver la relación  $Bo = -8\phi \cos(\theta + \phi)$

## *Capítulo 5. Conclusiones*

y son de gran utilidad, pues nos permiten entender hacia donde se desplazarán las alturas o depresiones de equilibrio estable y de qué manera. Además de la utilidad intrínseca del problema discutido, este tipo de análisis puede ser de importancia en el estudio de tubos capilares con secciones transversales aún más complejas, como podrían ser los poros en medios empacados, o inclusive también, para sistemas bajo gradientes longitudinales de temperatura en donde la teoría aquí utilizada se modifica ligeramente.

La aplicación de los conceptos de infiltración capilar en el medio poroso, partiendo de la idea probabilista de Childs y Collis-George [103] y de los conceptos de la geometría fractal (relación entre el área y el volumen de Mandelbrot [132, 123]), han permitido a Fuentes y sus colaboradores [118, 119, 120, 121], establecer una definición del área efectiva de flujo y con ello la conformación de cuatro modelos conceptuales para la conductividad hidráulica, a saber: modelo de poro grande, de poro pequeño, de poro neutro y de media geométrica. Dichos modelos dan explicación formal a las correcciones empíricas introducidas desde hace medio siglo en la búsqueda del "mejor modelo" de predicción de la permeabilidad hidráulica y que dan origen a los denominados modelos clásicos de la conductividad en la literatura [101, 102, 103, 104, 105, 106, 107]. Finalmente, la introducción de los modelos conceptuales desarrollados por Fuentes dentro del formalismo de estudio propuesto por van Genuchten [138], para estimar la conductividad hidráulica a partir de la curva de retención, permite obtener formas cerradas de la conductividad hidráulica, las cuales predicen con muy buenos resultados los resultados obtenidos experimentalmente en el estudio de la infiltración de agua en suelos.

# Bibliografía

- [1] P. G. De Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, Capillarity and wetting phenomena, Springer Verlag, New York (2004).
- [2] Cyril Isenberg, The science of soap films and soap bubbles, Dover, New York (1992).
- [3] R. Finn, Capillary Surface Interfaces, Notices of the AMS, **46-7**, (1999) 770.
- [4] J. M. Bell, F. K. Cameron, The flow of liquids through capillary spaces, J. Phys. Chem. **10** (1906) 658.
- [5] G. R. Von Richard Lucas, Physik. Zeitschr. (1918) 15.
- [6] E. W. Washburn, Physical Review **17**, 3 (1921) 273.
- [7] Stanley Middleman, Modeling axisymmetric flows: dynamics of films, jets, and drops, Academic Press, San Diego (1995).
- [8] H. M. Princen, Capillary phenomena in assemblies of parallel cylinders I. Capillary rise between two cylinders, J. Colloid Interface Sci. **30** (1969) 69.
- [9] H. M. Princen, Capillary phenomena in assemblies of parallel cylinders II. Capillary rise in systems with more than two cylinders, J. Colloid Interface Sci. **30** (1969) 359.
- [10] R. Lenormand and C. Zarcone, Role of roughness and edges during imbibition in square capillaries, SPE paper No. 13264 (1984) 1.
- [11] J. Bico, D. Quéré, Rise of liquids and bubbles in angular capillary tubes, J. Colloid Interf. Sci. **247** (2002) 162.
- [12] A. Medina, A. Pineda, C. Treviño, Imbibition driven by a temperature gradient, Jour. Physical Society Japan **72** (2003) 979.

## *Bibliografía*

- [13] V. M. Starov, Surfactant solutions and porous substrates: spreading and imbibition, *Adv. Colloid Interf. Sci.* **111** (2004) 3.
- [14] D. S. Kim, K-Ch. Lee, T. H. Kwon, S. S. Lee, Micro-channel filling flow considering susrface tensión effect, *J. Micromech. Microeng.* **12** (2002) 236.
- [15] D. S. Kim, K-Ch. Lee, T. H. Kwon, S. S. Lee, Reporte Interno, Dept. of Mechanical Engineering, Pohang University of Science and Technology, (2002).
- [16] L-J. Yang, T-J Yao, Y-Ch. Tai, The marching velocity of the capillary meniscus in a microchannel, *J. Micromech. Microeng.* **14** (2004) 220.
- [17] G. Karniadakis, A. Bestok, N. Alura, *Microflows and nanoflows*, Springer, New York (2005).
- [18] K. B.Lee, L. Lin, Surface micromachined glass and polysilicon microchannels using MUMPs for BioMEMS applications, *Sensors and Actuators A* **111** (2004) 44.
- [19] K. Takahashii, K. Seio, M. Sekine, O. Hino, M. Esashi, A photochemical/chemical direct method of synthesizing high-performance deoxyribonucleic acid chips for rapid and parallel gene analysis, *Sens. Actuators B* **38** (2002) 67–76.
- [20] R.-L. Chien, J.W. Parce, Multiport flow-control system for lab-on-a-chip microfluidic devices, *Fresenius J. Anal. Chem.* **371** (2) (2001) 106–111.
- [21] M. Lee, M. Wong, Y. Zohar, Design, Fabrication and characterization of an integrated micro heat pipe, in: *Proceeding of the Fifteenth IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems*, Las Vegas, Nevada, USA, January 20–24, 2002, pp. 85–88.
- [22] M.J. DeBar, D. Liepmann, Fabrication and performance testing of a steady thermocapillary pump with no moving parts, in: *Proceeding of the Fifteenth IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems*, Las Vegas, Nevada, USA, January 20–24, 2002, pp. 109–112.
- [23] L. Lin, A.P. Pisano, Silicon-processed microneedles, *IEEE J. Microelectro-Mech. Systems* **8** (1) (1999) 78–84.
- [24] D. Bhusari, H.A. Reed, M. Wedlake, A.M. Padovani, S.A.B. Allen, P.A. Kohl, Fabrication of air-channel structures for microfluidic, microelectromechanical, and micro-electronic applications, *IEEE J. Microelectro-Mech. Systems* **10** (3) (2001) 400–408.

## Bibliografía

- [25] E. Kim, Y. Xia, G. M. Whitesides, Polymer microstructures by moulding in capillaries, *Nature* **376** (1995) 581.
- [26] O. Kemmann, L. Weber, Tech. Paper Ann. Tech. Meet. Conf.– SPEI, **1**, (2000) 576-80.
- [27] M. Francisco, A. Medina, F. A. Sánchez, F. J. Higuera, Alturas de equilibrio de líquidos en celdas de Hele-Shaw corrugadas bajo penetración capilar espontánea, *Rev. Mex. Fís.* **54** (2008) 247.
- [28] A. Marmur, Capillary Rise and Hysteresis in Periodic Porous Media, *J. Colloid Interface Sci.* **129** (1989) 278.
- [29] T. Liu, K. F. Choi, Y. Li, Capillary rise between cylinders, *J. Physics D: Appl. Phys.* **40** (2007) 5006.
- [30] D. Langbein, *Capillary Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin (2002).
- [31] G. Kaptay, Interfacial criteria for stabilization of liquid foams by solid particles, *Colloids and Surfaces A* **230** (2004) 67.
- [32] Y. Tsori, Discontinuous Liquid Rise in Capillaries with Varying Cross-Sections, *Langmuir* **22** (2006) 8860.
- [33] Y. Tsori, Discontinuous Meniscus Location in Tapered Capillaries Driven by Pressure Difference and Dielectrophoretic Forces, *Langmuir* **23** (2007) 8028.
- [34] G. J. Kramer, Static liquid hold-up and capillary rise in packed beds, *Chem. Eng. Sci.* **53** (1998) 2985.
- [35] C. Quilliet, B. Berge, Electrowetting: a recent outbreak, *Curr. Opin. Colloid Interface Sci.* **6** (2001) 34.
- [36] M. de Meijer, K. Thurich, H. Miltz, Comparative study on penetration of modern wood coatings, *Wood Science and Technology* **32** (1998) 347.
- [37] M. M. Kusakov, D. N. Nekrasov, Ascenso de líquidos en capilares de sección variable e histéresis capilar, *Dokladi Akademi Nauk URSS* **119** (1958) 107.
- [38] D. N. Nekrasov, M. M. Kusakov, *Dokladi Akademi Nauk URSS* **133** (1960) 100.
- [39] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluids Mechanics*, Pergamon, New York (1959).
- [40] F. M. White, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1994).

## *Bibliografía*

- [41] F. M. White, *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, Singapore (1991).
- [42] D. J. Achelson, *Elementary Fluid Dynamics*, Clarendon Press Oxford, London (1990).
- [43] A. Linán Martínez, F. J. Higuera et al., *Mecánica de Fluidos (primera parte)*, Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid España (2003).
- [44] L. Shui, J C.T. Eijkel, A. van den Berg, Multiphase flow in microfluidic systems - Control and applications of droplets and interfaces, *Adv. Colloid Interf.* **133** (2007) 35.
- [45] T.M. Squires, S.R. Quake, Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale, *Rev. Mod. Phys.* **77** (2005) 977.
- [46] A.S. Utada, A. Fernandez-Nieves, H.A. Stone, D.A. Weitz, Dripping to jetting transitions in coflowing liquid streams, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 4.
- [47] H.A. Stone, Dynamics of Drop Deformation and Breakup in Viscous Fluids, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26** (1994) 65.
- [48] P. Guillot, A. Colin, A.S. Utada, A. Ajdari, Stability of a jet in confined pressure-driven biphasic flows at low reynolds numbers, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 4.
- [49] P. Guillot, A. Colin, A. Ajdari, Stability of a jet in confined pressure-driven biphasic flows at low Reynolds number in various geometries, *Phys. Rev. E* **78** (2008) 13.
- [50] S.T. Thoroddsen, Y.K. Tan, Free-surface entrainment into a rimming flow containing surfactants, *Phys. Fluids* **16** (2004) 13.
- [51] A. Serizawa, Z.P. Feng, Z. Kawara, Two-phase flow in microchannels, *Exp. Therm. Fluid Sci.* **26** (2002) 703.
- [52] E. Buckingham, On Physically Similar Systems: Illustrations of the Use of Dimensional Equations, *Phys. Rev.*, **4** (1914) 345.
- [53] P. W. Bridgman, *Dimensional Analysis*, Yale University Press, New Haven (1922).
- [54] A. W. Porter, *The Method of Dimensions*, Methuen, London (1933).
- [55] G. I. Barenblatt, *Dimensional Analysis*, Gordon and Breach, New York (1987).

## *Bibliografía*

- [56] R. Esnault-Pelterie, *L'Analyse dimensionnelle*, F. Rouge, Lausanne, Switzerland (1946).
- [57] R. Kurth, *Dimensional Analysis and Group Theory in Astrophysics*, Pergamon, New York (1972).
- [58] F. J. de-Jong, *Dimensional Analysis for Economists*, North Holland, Amsterdam (1967).
- [59] D. J. Schuring, *Scale Models in Engineering*, Pergamon Press, New York (1977).
- [60] R. Nakon, *Chemical Problem Solving Using Dimensional Analysis*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ (1990).
- [61] D. R. Maidment (ed), *Hydrologic and Hydraulic Modeling Support: With Geographic Information Systems*, Environmental Systems Research Institute, Redlands, CA (2000).
- [62] A. M. Curren y L. D. Munday, *Dimensional Analysis for Meds*, Delmar Thomson Learning, Albany, NY (1998).
- [63] G. P. Craig, *Clinical Calculations Made Easy: Solving Problems Using Dimensional Analysis*, Lippincott Williams and Wilkins, Baltimore, MD (2001).
- [64] M. Zlokarnik, *Dimensional Analysis and Scale-Up in Chemical Engineering*, Springer-Verlag, New York (1991).
- [65] W. G. Jacoby, *Data Theory and Dimensional Analysis*, Sage, Newbury Park, CA (1991).
- [66] B. Schepartz, *Dimensional Analysis in the Biomedical Sciences*, Thomas, Springfield, IL (1980).
- [67] A. J. Smith, *Dosage and Solution Calculations: The Dimensional Analysis Way*, Mosby, St. Louis, MO (1989).
- [68] J. B. Bassingthwaite et al., *Fractal Physiology*, Oxford Univ. Press, New York (1994).
- [69] K. J. Niklas, *Plant Allometry: The Scaling of Form and Process*, Univ. of Chicago Press, Chicago (1994).
- [70] A. Han, G. Mondin, N. G. Hegelbach, N. F. de Rooij, U. Staufer, Filling kinetics of liquids in nanochannels as narrow as 27 nm by capillary force, *J. Colloid Interf. Sci.* **293** (2006) 151.

## Bibliografía

- [71] N. A. Mortensen, F. Okkels, H. Bruss, Reexamination of Hagen-Poiseuille flow: Shape dependence of the hydraulic resistance in microchannels, *Phys. Rev. E* **71** (2005) 057301.
- [72] V. P. Shalimov, Flujo de líquido en capilares bajo microgravedad (traducción del ruso por el Prof. Pedro Tamayo de la ESIME-Azcapotzalco) 143-150.
- [73] T. Tate, On the magnitude of a drop of liquid formed under different circumstances, *Phil Mag.* **27** (1864) 176.
- [74] Lord Rayleigh, Investigations in capillarity: the size of drops.- The liberation of gas from supersaturated solution.- Colliding jets.- The tension of contaminated water-surfaces, *Phil Mag.* **48** (1899) 321.
- [75] C. Clanet, J. Lasheras, Transition from dripping to jetting, *J. Fluid Mech.* **383** (1999) 307.
- [76] B. Ambravaneswaran et al, Dripping-jetting transitions in a dripping faucet, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 034501.
- [77] M. Pliego, G.J. Gutiérrez, A. Medina, Nano-channels filling flow of arbitrary cross-sections, *Rev. Mex. Fís.* **57** (2011) 1.
- [78] J. Berthier, F. Loe-Mie, V. M. Tran, S. Schoumacker, F. Mittler, G. Marchand, N. Sarrut, On the pinning of interfaces on micropillar edges, *J. Colloid Interface Sci.* **in press** (2009), doi:10.1016/j.jcis.2009.06.007.
- [79] K. S. Birdi, D. T. Vu, A. Winter, A. Norregard, Capillary rise of liquids in rectangular tubings, *Colloid Polym Sci.* **266** (1988) 470.
- [80] F. J. Higuera, A. Medina, A. Liñán, Capillary rise of a liquid between two vertical plates making a small angle, *Physics of Fluids* **20** (2008) 102102.
- [81] M. Pliego, C. Fuentes, G.J. Gutiérrez, A. Medina, M. R. Aguilar, Múltiples alturas de equilibrio en capilares cónicos, *Rev. Mex. Fís.* **56** (2010) 475.
- [82] A. D. Myshkis, V. G. Babskii, N. D. Kopachevskii, L. A. Slobozhanin, A. D. Tyuptsov, *Low-Gravity Fluid Mechanics: Mathematical Theory of Capillary Phenomena* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987).
- [83] H. Darcy, Les fontaines publiques de la ville de Dijon, Dalmont, Paris (1856).
- [84] W.O. Smith, P. D. Foote, P. F. Busang, Capillary rise in sands of uniform spherical grains, *Physics* **1** (1931) 18.

## *Bibliografía*

- [85] W. O. Smith, Minimum capillary rise in an ideal uniform soil, *Physics* **4** (1933)184.
- [86] N. K. Adam, Principles of penetration of liquids into solids, *Discuss. Faraday Soc. No. 3* (1948) 5.
- [87] Melrose, J. C., Wettability as related to capillary action in porous media, *Soc. Pet. Eng. J.* **5** (1965) 259.
- [88] N. R. Morrow, Physics and thermodynamics of capillary action in porous media, *Ind. Eng. Chem.* **62** (1970) 32.
- [89] J. van Brakel, Porespace models for transport phenomena in porous media, *Powder Technol.* **11** (1975) 205.
- [90] D. H. Everett, J. M. Haynes, The Thermodynamics of Fluid Interfaces in a Porous Medium, *Z. Phys. Chem.* **97** (1975) 301.
- [91] D. H. Everett, *J. Colloid Interface Sci.* **52** (1975)189.
- [92] A. Marmur, Penetration of a small drop into a capillary, *J. Colloid Interface Sci.* **122** (1988) 209.
- [93] S. Levine, J. Lowndes, Reed, P., *J. Colloid Interface Sci.* **77** (1980) 253.
- [94] S. Ban, E. Wolfram, S. Rohrsetzer, The condition of starting of liquid imbibition in powders, *Colloids Surf.* **22** (1987) 301.
- [95] L. R. White, *J. Colloid Interface Sci.*, **90** (1982) 536.
- [96] Y–W Yang, G. Zografi, E. E. Miller, Capillary flow phenomena and wettability in porous media: I. Static characteristics, *J. Colloid Interface Sci.* **122** (1988) 24.
- [97] Y–W Yang, G. Zografi, E. E. Miller, Capillary flow phenomena and wettability in porous media: II. Dynamic flow studies, *J. Colloid Interface Sci.* **122** (1988) 35.
- [98] A. Marmur, Capillary rise and hysteresis in periodic porous media, *J. Colloid and Interface Sci.* **129** (1989) 278.
- [99] G. Matheron, L'émergence de la Loi de Darcy, *Annales des Mines* **Mai-Juin** (1984) 11.
- [100] G. Matheron, L'émergence de la Loi de Darcy, *CGMM Fontainebleau* (1979).

## *Bibliografía*

- [101] W. R. Purcell, Capillary pressures- their measurement using mercury and the calculation of permeability therefrom, *Petr. Trans. Amer. Inst. Mining Metallurgical Engrs.* **186** (1949) 39.
- [102] J. I. Gates y W. T. Lietz, Relative permeabilities of California cores by the capillary-pressure method, *Drilling and Production Practique, Amer. Petrol. Inst.* **1** (1950) 285.
- [103] E. C. Childs y N. Collis-George, The permeability of porous materials, *Proc. Roy. Soc., Ser. A* **201** (1950) 392.
- [104] N. T. Burdine, Relative permeability calculation from size distribution data, *Trans. AIME*, **198** (1953) 71.
- [105] I. Fatt, H. Dykstra, Relative permeability studies, *Trans Am. Inst. Min. Eng.* **192** (1951) 249.
- [106] R. J. Millington, y J. P. Quirk, Permeability of porous solids, *Trans. Faraday Soc.* **57** (1961) 1200.
- [107] Y. Mualem, A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media, *Water Resources Res.* **12** (1976) 513.
- [108] Y. Mualem, y G. Dagan, Hydraulic conductivity of soils: unified approach to the statistical models, *Soil Sci. Soc. Am. J.* **42** (1978) 392.
- [109] L. D. Baver, W.H. Gardner, W.R. Gardner, *Física de suelos*, UTEHA, México (1972).
- [110] P.H. Groenevelt, J.W. Kijne, *Physics of soil moisture*, ILRI, Wageningen (1979).
- [111] D. Hillel, *Soil and Water: Physical principles and processes*, Academic Press, New York (1971).
- [112] L. A. Richards, *Trans. 7th Inter. Congr. Soil Sci., Madison, Wisconsin. Vol. 1* (1961) 67.
- [113] G. Vachaud, Verification de la loi de darcy généralisée et détermination de la conductivité capillaire á partir d'une infiltration horizontale, *Symposium 1966, Water in the unsaturated zone, Proc. Unesco/IASH* (1969) 277.
- [114] J. R. Philip, *Theory of infiltration, Advances in hydroscience, Vol. 5, V. T. Chow, ed., Academic, New York* (1969).

## *Bibliografía*

- [115] E.C. Childs, Soil moisture theory, Adv. Hydrosc. 5, Academic Press, New York (1967).
- [116] R. Haverkamp, C. Zammit, F. Bouraoui, K. Rajkai, J.L. Arrúe y N. Heckmann, GRIZZLY, Grenoble Soil Catalogue: Soil survey of field data and description of particle size, soil water retention and hydraulic conductivity functions. Laboratoire d'Étude des Transferts en Hydrologie et Environnement (LTHE), Grenoble Cedex 9, Francia (1997).
- [117] A. Poulouvalis, Hysteresis of pore water. An application of the concept of independent domains, Soil Sci. **93** (1962) 405.
- [118] C. Fuentes. Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés, Tesis de Doctorado por la Université Joseph Fourier de Grenoble, France (1992).
- [119] C. Fuentes, M. Vauclin, J.-Y. Parlange y R. Haverkamp, A note on the soil-water conductivity of a fractal soil, Transport in Porous Media **23** (1996) 31.
- [120] C. Fuentes, M. Vauclin, J.-Y. Parlange y R. Haverkamp, Soil-water conductivity of a fractal soil, Fractals in Soil Science, editado por Ph. Baveye, J.-Y. Parlange y B.A. Stewart. CRC press, Boca Raton 333 (1998).
- [121] C. Fuentes, F. Brambila, M. Vauclin, J.-Y. Parlange y R. Haverkamp, Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados, Ingeniería Hidráulica en México, **16-II** (2001) 119.
- [122] J. Bear, Dynamics of fluids in porous media, Dover Publications, Inc., New York (1972).
- [123] B. B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature, Freeman, San Francisco (1983).
- [124] M. Rieu, y G. Sposito, Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: I. Theory, Soil Sci. Soc. Am. J. **55** (1991) 1231.
- [125] M. Rieu y G. Sposito, Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: II. Applications, Soil Sci. Soc. Am. J. **55** (1991) 1239.
- [126] K. Oleschko, C. Fuentes, F. Brambila, R. Álvarez, Linear fractal analysis of three mexican soils in different management systems, Soil Technology **10** (1997) 185.
- [127] F. A. L. Dullien, Porous Media, fluid transport and pore structure, Academic Press, New York (1979).

## *Bibliografía*

- [128] T. J. Marshall, A relation between permeability and size distribution of pores, *Soil Sci.* **9** (1958) 1.
- [129] M. R. J. Wyllie, y G. H. F. Gardner, The generalized Koseny-Carman equation, *World Oil* (Houston, Tex.), **March-April** (1958) 210.
- [130] R. J. Kunze, G. Uehara y K. Graham, Factors important in the calculation of hydraulic conductivity, *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.* **32** (1968) 760.
- [131] W. Brutsaert, Some methods of calculating unsaturated permeability, *Trans. ASAE* **10** (1967) 400.
- [132] K. Falconer, *Fractal geometry, mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons, England (1990).
- [133] R. H. Brooks y A. T. Corey, Hydraulic properties of porous media, *Hydrol. Pap., Colo. State Univ.* **3** (1964) 45.
- [134] S. Irmay, On the hydraulic conductivity of saturated soils. *Trans. Amer. Geophys. Union* **35** (1954) 463.
- [135] S. F. Averyanov, Permeabilidad hidráulica en los suelos con presencia de aire en los poros. *Doklady AN SSSR* **2** (1949) 46.
- [136] S. T. Yuster, Theoretical considerations of multiphase flow in idealized capillary systems, *Proc. Third World Petroleum Congress*, **Vol. II** (1951) 437.
- [137] A.T. Corey, The Interrelation Between Gas and Oil Relative Permeabilities, *Prod. Monthly* **19-1** (1954) 38.
- [138] M.Th. Van Genuchten, A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, *Soil Sci. Soc. Am. J.* **44** (1980) 892.