Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Aspectos Históricos y Didácticos del Cálculo Diferencial e Integral

TESIS

Que como requisito para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Fabiola Hernández Hernández

Dirigida por:

M. en C. Roberto Torres Hernández

Santiago de Querétaro, Qro. Septiembre de 2006.

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Secretaría Académica

ACUERDO 166/06

C. U. 22 de junio de 2006

C. FABIOLA HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ
Pasante de la Licenciatura en
Matemáticas Aplicadas.
Presente.

Con relación a su oficio enviado al H. Consejo Académico de la Facultad en el que solicita titularse bajo la opción de tesis individual, me permito informarle que en la sesión ordinaria del 22 de junio del año en curso, este cuerpo colegiado acordó aceptar la opción de titulación por lo que deberá trabajar en el tema **"Aspectos Históricos y Didácticos del Cálculo Diferencial e Integral"**, bajo la dirección del M en C. Roberto Torres Hernández.

El Contenido Aceptado por el H. Consejo Académico es el siguiente:

CONTENIDO

1. **Introducción**

2. **Límites**
   2.1. Eudoxo, Euclides, Arquímedes y secuencias infinitas
   2.2. Series
      2.2.1. La cuadratura de la parábola
      2.2.2. Método geométrico de Oresme
   2.3. Ejercicios

3. **Integrales**
   3.1. La cuadratura de la espiral de Arquímedes
   3.2. Kepler
   3.3. Integración de potencias enteras
      3.3.1. Principio de Cavalieri
      3.3.2. Una demostración de la fórmula $\int_0^a x^k\,dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$
   3.4. Wallis y la integración de potencias fraccionarias
   3.5. Ejercicios

Centro Universitario
[C]erro de las Campanas
[San]tiago de Querétaro
México C.P. 76010
01 (442) 192 12 00
Exts. 6024 y 6011

4. **Derivadas**
   4.1. Construcción de tangentes
   4.2. Método del círculo de Descartes
   4.3. Método de la "Seudo Igualdad de Fermat"
   4.4. Ejercicios

5. **Sobre los ejercicios**
   5.1. Sugerencias a los ejercicios
      5.1.1. Límites
      5.1.2. Integrales
      5.1.3. Derivadas
   5.2. Una respuesta a los ejercicios
      5.2.1. Límites
      5.2.2. Integrales
      5.2.3. Derivadas

BIBLIOGRAFÍA

También hago de su conocimiento las disposiciones de nuestra Facultad, en el sentido que antes del Examen profesional deberá cumplir con los requisitos de nuestra legislación y deberá imprimir el presente oficio en todos los ejemplares de su tesis.

Atentamente
"EL INGENIO PARA CREAR NO PARA DESTRUIR"

DR. GILBERTO HERRERA RUIZ
Director

c.c.p. Archivo

*GHR/DHM.

EL INGENIO PARA CREAR NO PARA DESTRUIR
FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCIÓN

entro Universitario
de las Campanas
iago de Querétaro
México C.P. 76010
1 (442) 192 12 00
Exts. 6024 y 6011

CU., 26 de julio del 2006

Dr. Gilberto Herrera Ruiz
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada "**Aspectos Históricos y Didácticos del Cálculo Diferencial e Integral**", de la Pasante de la licenciatura de Matemáticas Aplicadas, Fabiola Hernández Hernández, de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,
"EL INGENIO PARA CREAR, NO PARA DESTRUIR"

M. en C. Roberto Torres Hernández
Director de Tesis

c.c.p Archivo
*GHR/sar

CU., 26 de julio del 2006

Dr. Gilberto Herrera Ruiz
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada "**Aspectos Históricos y Didácticos del Cálculo Diferencial e Integral**" de la pasante de la licenciatura de Matemáticas Aplicadas, Fabiola Hernández Hernández, de acuerdo al artículo 20 inciso h) del Reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,
"EL INGENIO PARA CREAR, NO PARA DESTRUIR"

M. en D. Carmen Sosa Garza
Sinodal

c.c Archivo
*GHR/sar

CU., 26 de julio del 2006

Dr. Gilberto Herrera Ruiz
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada "**Aspectos Históricos y Didácticos del Cálculo Diferencial e Integral**" de la pasante de la licenciatura de Matemáticas Aplicadas, Fabiola Hernández Hernández, de acuerdo al artículo 20 inciso h) del Reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,
"EL INGENIO PARA CREAR, NO PARA DESTRUIR"

M. en D. Alexander Bell Mejía
Sinodal

c.c Archivo
*GHR/sar

CU., 26 de julio del 2006

Dr. Gilberto Herrera Ruiz
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada "**Aspectos Históricos y Didácticos del Cálculo Diferencial e Integral**" de la pasante de la licenciatura de Matemáticas Aplicadas, Fabiola Hernández Hernández, de acuerdo al artículo 20 inciso h) del Reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,
"EL INGENIO PARA CREAR, NO PARA DESTRUIR"

Mtra. Georgina Infante Izaguirre
Sinodal

c.c Archivo
*GHR/sar

ÍNDICE

1 Introducción

Cuando se habla sobre la dificultad que tiene el estudiante de Bachillerato para aprender matemáticas, se llega a tocar el tema de la motivación que él tiene para llevar a cabo esa tarea, la tarea de aprender contenidos matemáticos.

El papel que el profesor juega, en cuanto a la motivación del alumno para el aprendizaje, es un tema que conduce, de manera casi inmediata , al del material didáctico que utiliza para lograr el fin.

A este respecto, no podemos negar que una práctica común, en la enseñanza de las matemáticas, consiste en presentar los temas de forma aislada, lo que conduce al estudiante a pensar que no hay ninguna relación entre un tema y otro, más aún, que la matemática es una serie de recetas o reglas sin sentido que deben memorizar. Esto, no sólo no lo motiva, si no le provoca un desinterés por aprenderla. Como profesores, debemos pensar en lograr el objetivo ideal, el objetivo, de provocar aquella motivación para el estudiante; aquella que, entre paréntesis, le permita impulsar su aprendizaje significativo; ese que, a su vez, le conduce a la creación de estructuras de conocimiento mediante la relación sustantiva entre la nueva información y sus ideas previas.

Este es uno de los contextos en el que nacen ideas acerca de materiales didácticos que apoyen al profesor a que sus cursos sean integrales, articulados, potencialmente significativos para el aprendizaje de sus estudiantes, que incluyan situaciones que le den vida a esos contenidos que, tradicionalmente, se presentan abstractos, áridos y faltos de aquellos aspectos que pueden ser el tan buscado detonador que motive al estudiante al aprendizaje de esta ciencia tan dinámica, tan llena de vida y tan relacionada con el mundo que les rodea.

Nosotros creemos que el camino a seguir, en la búsqueda de un material didáctico con tales características, lo constituye la historia de la matemática, y ésta es el eje que guía nuestro trabajo. Ya que, la Historia de la Matemática, al ser utilizada como fuente de situaciones didácticas, además de constituir un material potencialmente motivador para el estudiante, también constituye, para el profesor, un referente del cómo se desarrollaron históricamente ciertos conceptos matemáticos, lo que permite tener una perspectiva más amplia acerca del proceso de aprendizaje por el cual transitan sus estudiantes durante su formación. Ya que así como los alumnos van construyendo poco a poco su propio conocimiento, con errores y aciertos, de una manera análoga la matemática se fue desarrollando al paso de los años.

Centrándonos en la enseñanza del Cálculo principalmente en el Bachillerato, nuestra idea general es, apoyarse en la Historia de la Matemática recurriendo a métodos antiguos que resuelven ciertos problemas y los cuales, se abordan hoy en día dentro de los principales temas de Cálculo, pero con cierto carácter ahistórico (alejados del contexto en el cual se plantearon, de quiénes y porque era necesario resolverlos, cuáles fueron las consecuencias de resolverlos). Una de las intenciones de este trabajo es la de mostrarle al profesor algunos elementos que pueda llevar al salón de clase para que le permitan abordar los temas de Cálculo de una manera que logre despertar el interés de sus alumnos. Se pretende, además, proporcionar material suficiente para que el profesor prepare el andamiaje necesario para que sus alumnos, en un principio se acerquen de una manera intuitiva, pero clara , a los nuevos conceptos y, posteriormente, se pueda pasar a la formalización de los métodos que en la actualidad se estudian.

Es importante comentar que el uso de la historia de la matemática, para su didáctica, no es algo nuevo, aunque los objetivos que se han perseguido, en momentos distintos han sido diferentes. Dar muestra de ello sin pretender ser exhaustivos, es la intención del siguiente párrafo.

En los años 50's los matemáticos D. Julio Rey Pastor y D. Pedro Puig Adam incluyeron en sus libros de texto algunas notas históricas adaptadas para los alumnos -Sin embargo, la reforma educativa denominada "matemática moderna" (60's y 70's) fue en cierto sentido una reforma antihistórica- Después, en los años 80's puede observarse una reorientación hacia el uso de la Historia de la Matemática, con fines didácticos; son las publicaciones en los IREMs (Institutes de Recherche pour L'Enseigment des Mathematiques) cuyo objetivo principal es utilizar la Historia de las Matemáticas en las aulas. A finales del siglo pasado, los congresos celebrados en Montpellier (Francia 1993) y Braga (Portugal 1996) y organizados por HPM (International Study Group on The Relations Between History and Pedagogy of Mathematics) se centraron en el estudio de las relaciones entre la historia y la pedagogía de las matemáticas en el aula. Cabe destacar, que en los últimos Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME) es notorio el interés creciente por la enseñanza y aplicación de la Historia de la Matemática en el aula.

Para finalizar estas líneas introductorias, a continuación comentaremos algunos aspectos puntuales concernientes a los contenidos de este trabajo.

En él se estudian tres ideas centrales: el concepto de Límite, el de Integral y por último el de Derivada. Para cada concepto, se presenta una serie de problemas que refuerzan las ideas mostradas, se abordaran de tal manera que el método utilizado, y la solución correspondiente, se ponen en relieve como antecedentes importantes de esta rama de las matemáticas. Los métodos aquí discutidos, son una versión de los métodos que grandes matemáticos desarrollaron, y que por ello, son considerados como precursores del Cálculo que hoy en día conocemos. Dentro de esas contribuciones de notables matemáticos, anteriores a Newton y Leibniz, analizamos algunas de Eudoxo, Arquímedes, Oresme, Kepler, Cavalieri, Descartes, Fermat, entre otros. El conocer los métodos de solución, previos a las herramientas actuales del Cálculo, seguramente, proporcionará un panorama más amplio acerca del desarrollo de los conceptos centrales de esta área de la Matemática.

La forma en que aquí presentamos los conceptos centrales, permitirá tratar de manera interesante aquellos problemas tradicionales que, de manera natural, preparan el camino para iniciar un estudio formal, en un contexto que puede resultar motivador para el estudiante. Se abordará, por ejemplo la suma de series y sucesiones infinitas, lo que permitirá dar paso al concepto de límite; el problema de encontrar áreas, para introducir al concepto de integral; y el de obtener rectas tangentes para el concepto de derivada. Cabe aclarar que, la separación en capítulos sólo tiene la intención de mostrar congruencia con la mayoría de programas actuales para los cursos de Cálculo a nivel Bachillerato. Pero es fácil darse cuenta de que algunos de los problemas pueden discutirse en más de uno de los tres temas. Así, por ejemplo, la "Cuadratura de la parábola" puede abordarse como un problema de series infinitas o, bien, como problema de áreas.

Por último, cabe señalar que este trabajo es una primera aproximación de un material que le proporcione al profesor las herramientas necesarias para impulsar la motivación en el estudiante, y aunque estamos convencidos que al ser discutido en un salón de clases motivará, a los alumnos del Bachillerato, al aprendizaje del Cálculo. Naturalmente, complementar este material y la parte creativa del profesor serán ingredientes fundamentales en la búsqueda de este objetivo.

2 Límites

2.1 Eudoxo, Euclides, Arquímedes y secuencias infinitas

A los estudiantes les cuesta trabajo entender las ideas que involucran procesos infinitos, más aun, que esos procesos sirven para verificar o resolver ciertos problemas matemáticos uno de ellos, por ejemplo, es el de aproximar áreas de ciertas figuras.

En este apartado nos basaremos en una antigua proposición encontrada en los *Elementos* de Euclides, que nos dará una condición suficiente para que una sucesión de números positivos tienda a cero. La cual, utilizaremos para aproximar, mediante polígonos, el área del círculo y para probar que el lado del cuadrado y su diagonal son segmentos inconmensurables.

En la famosa obra de Euclides *Los Elementos* (300 A.C), aparece una definición atribuida a Eudoxo (quien vivió alrededor del año 370 A.C.) y que será nuestro punto de partida:

Definición (libro V): Dos magnitudes tiene razón entre sí, cuando cada una puede ser multiplicada en modo de superar a la otra.

Arquímedes de Siracusa (287-212 A.C.), casi cien años después, interpretó y usó esta definición de la siguiente manera:

Dados dos números positivos a y b, existen números naturales n y m tales que $na > b$ y $mb > a$.

Por esta razón, a esta forma se le llama *Axioma de Arquímedes o Axioma de Eudoxo-Arquímedes.*

Un poco más adelante, en los mismos *Elementos,* encontramos la siguiente:

Proposición (Libro X):Dadas dos magnitudes distintas, si de la mayor se sustrae una magnitud mayor que su mitad, del resto se sustrae una magnitud mayor que su mitad (del resto) y si este proceso se repite continuamente, quedará alguna magnitud más pequeña que la menor de las magnitudes dadas inicialmente.

Interpretando esta situación en términos algebraicos, podemos decir que:

Si M_0 y ε son las magnitudes (positivas) dadas, con M_0 mayor, y tenemos una sucesión de magnitudes $M_1, M_2, M_3, ...$ tales que

$$M_1 < \frac{M_0}{2}, M_2 < \frac{M_1}{2}, M_3 < \frac{M_2}{2}, ..., M_{n+1} < \frac{M_n}{2}, ...$$

entonces $M_n < \varepsilon$ para todo número natural $n > N$.

A partir de este momento, para identificar da alguna forma esta interpretación, le llamaremos *proposición de convergencia.*

Cabe destacar que esta *proposición de convergencia* (en términos modernos) dá una condición suficiente (que no necesaria) para que una sucesión de números positivos tienda a cero.

Es importante observar que, esta *proposición de convergencia* la podemos demostrar, usando el *Axioma de Arquímedes* como sigue:

Dadas M_0 y ε, dos magnitudes positivas tal que $M_0 > \varepsilon$ tenemos que, por el axioma de Arquímedes existe un número natural N tal que $N\varepsilon > M_0$. Ahora, como M_0 es mayor que ε, tenemos que,

$$N \geq 2$$

si multiplicamos esta desigualdad por $\frac{\varepsilon}{2}$ tenemos

$$\frac{N}{2}\varepsilon \geq \varepsilon$$

o equivalentemente

$$N\varepsilon - 2\varepsilon \geq 0.$$

sumando $N\varepsilon$ a ambos lados obtenemos $2N\varepsilon - 2\varepsilon \geq N\varepsilon$.

Por hipótesis, sabemos que $M_0 < N\varepsilon$, de donde sustituyendo obtenemos,

$$2N\varepsilon - 2\varepsilon = 2(N-1)\varepsilon \geq N\varepsilon > M_0.$$

despejando, obtenemos finalmente

$$(N-1)\varepsilon > \frac{1}{2}M_0 > M_1$$

Repitiendo el argumento con la desigualdad $(N-1)\varepsilon > M_1$ como base, tenemos lo siguiente:

Como $M_1 > \varepsilon$, (en caso contrario quedaría demostrada la proposición) y $(N-1)\varepsilon > M_1$, entonces:

$$N - 1 \geq 2$$

y multiplicando esta desigualdad por $\frac{\varepsilon}{2}$ tenemos

$$\frac{(N-1)}{2}\varepsilon \geq \varepsilon$$

o bien

$$(N-1)\varepsilon - 2\varepsilon \geq 0$$

y sumando ahora $(N-1)\varepsilon$ en ambos lados

$$2(N-1)\varepsilon - 2\varepsilon \geq (N-1)\varepsilon$$

de donde, por hipótesis tenemos que $(N-1)\varepsilon > M_1$ entonces

$$2(N-1)\varepsilon - 2\varepsilon = 2(N-2)\varepsilon \geq (N-1)\varepsilon > M_1$$

y despejando, finalmente llagamos a

$$(N-2)\varepsilon > \frac{M_1}{2} > M_2$$

de donde $(N-2)\varepsilon > M_2$.

Aquí podemos ver que después de $N-1$ pasos llegaremos a que

$$[N-(N-1)]\varepsilon > M_n$$

o bien

$$\varepsilon > M_n$$

para todo $n \geq N$, que es lo que se quería probar.

2.1.1 Dos aplicaciones geométricas

Como aplicaciones de nuestra *proposición de convergencia*, mostraremos dos bellos teoremas que ilustran como se enlazan aspectos elementales de álgebra y geometría sobre el problema del infinito.

Teorema. *Dado un círculo C y $\varepsilon > 0$, existe un polígono regular inscrito P tal que $a(C) - a(P) < \varepsilon$, donde $a(X)$ denota el área de la figura X.*

Esto quiere decir que la diferencia entre el área del círculo y del polígono P es tan pequeña como se quiera, lo cual significa que el área del polígono aproxima el área del círculo.

Demostración: Consideremos los polígonos regulares P_i inscritos en C con 2^{2+i} lados y sea $M_i = a(C) - a(P_i)$ la diferencia entre las áreas del círculo y cada uno de los polígonos.

Observemos que el teorema quedará demostrado si logramos probar que $M_n < \varepsilon$ para algún número natural n.

Para esto, lo que demostraremos es que

$$M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2}M_n$$

pues si esta desigualdad es cierta, reacomodando términos, tenemos que

$$M_n - \frac{1}{2}M_n > M_{n+1} \text{ es decir } \frac{1}{2}M_n > M_{n+1}$$

con lo cual tenemos la hipótesis de la *proposición de convergencia* y cuya conclusión es precisamente que $M_n < \varepsilon$ para algún número natural n y así quedará demostrado el teorema.

Dado que la prueba es esencialmente la misma para cada i, trabajaremos sólo el caso $n = 0$.

Consideremos entonces la siguiente figura:

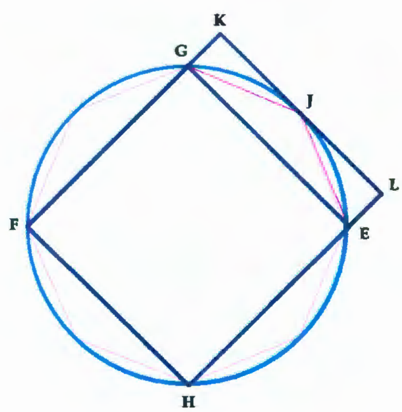


figura 1

Deseamos demostrar que

$$M_0 - M_1 > \frac{1}{2}M_0$$

observemos primero que

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &= [a(C) - a(P_0)] - [a(C) - a(P_1)] \\ &= a(P_1) - a(P_0) \end{aligned}$$

donde P_0 es el cuadrado $GFHE$ y P_1 es el octágono que conseguimos al bisecar cada uno de los lados de P_0. En la figura sólo se ilustra el vértice J de dicho octágono. Además, hemos completado el triángulo JGE al rectángulo $KGEL$ que claramente tiene el doble de su área, así:

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &= a(P_1) - a(P_0) = 4 \cdot a(JGE) \\ M_0 - M_1 &= 2 \cdot a(KGEL). \end{aligned}$$

pero el área del rectángulo $KGEL$ es mayor que el área del segmento circular GEJ (denotado por $\widehat{GEJ}$) de donde

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &= 2 \cdot a(KGEL) > 2 \cdot a(\widehat{GEJ}) = \frac{1}{2}. \cdot 4 \cdot a(\widehat{GEJ}) \\ M_0 - M_1 &> \frac{1}{2}. \cdot 4 \cdot a(\widehat{GEJ}) \end{aligned}$$

Pero el área de los cuatro segmentos circulares $\widehat{GEJ}$ son iguales a la diferencia entre el área del círculo y el área del cuadrado P_0 por lo que

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &> \frac{1}{2}[a(C) - a(P_0)] = \frac{1}{2}M_0 \\ M_0 - M_1 &> \frac{1}{2}M_0 \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.

Nuestra siguiente aplicación habla de segmentos inconmensurables, por lo que necesitamos la siguiente:

Definición. Dos segmentos de recta son *conmensurables* si existe una unidad (tercer segmento) que quepa un número entero n de veces en el primer segmento y un número entero m de veces en el segundo.

figura 2

Dados los dos segmentos en la parte izquierda de la figura anterior, podemos ver que el segmento más pequeño en la parte derecha cabe cuatro veces en el primero y seis veces en el segundo. De esta forma decimos que dichos segmentos son conmensurables.

Notemos en este momento que para afirmar que dos segmentos no son conmensurables (y que a partir de aquí los llamaremos *inconmensurables*) debemos estar seguros que ninguna unidad cabe un número entero de veces en dichos segmentos.

Un ejemplo de la situación anterior se da al considerar el lado de un cuadrado y su diagonal. Justificar la inexistencia de un segmento unidad, que pueda caber un número entero de veces en el lado y la diagonal del cuadrado, involucra un proceso infinito, en el que interviene nuevamente la *proposición de convergencia* mencionada al inicio del capitulo y se muestra en la siguiente demostración.

Teorema: *El lado y la diagonal de un segmento cualquiera son segmentos inconmensurables.*

Demostración: Supongamos que existe una unidad U que cabe un número entero de veces en el lado del cuadrado $ABCD$ y otro número entero de veces en la diagonal AC. A partir de aquí, diremos simplemente que la unidad *mide* al lado y *mide* a la diagonal. De ser así, consideremos el siguiente esquema:

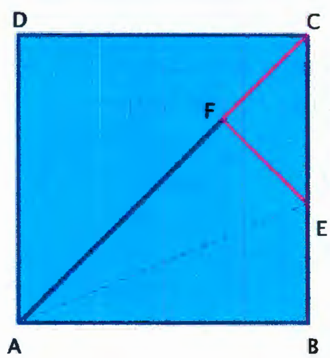


figura 3

Consideerando el lado AB y la diagonal AC, construyamos el punto F sobre AC tal que $AF = AB$. Sea E el punto en CB tal que EF es perpendicular a AC. Observemos ahora que los triángulos EFA y EBA son congruentes, por ser ambos triángulos rectángulos con la misma hipotenusa (AE) y un cateto igual ($AF = AB$). Esto nos dice que $EF = EB$.

Claramente, $\measuredangle ECF = 45°$ por ser AC la diagonal de un cuadrado, ahora, como el ángulo en F es recto y la suma de los ángulos interiores debe ser $180°$, se tiene que $\measuredangle FEC = 45°$. Todo esto nos dice que el triángulo CFE es isósceles y por lo tanto $CF = FE$.

Así,

$$CF = EB$$

Ahora, como la unidad U fijada en un principio mide a AC y a $AF = AB$, debe de suceder que mide también a la resta de estos segmentos, es decir, mide a $AC - AF = CF$.

Análogamente, como la unidad U mide a BC (lado del cuadrado) y a $CF = EB$, mide también a la resta $BC - EB = EC$.

Resumiendo, tenemos que la unidad mide a CF y a EC.

Pero si observamos esta situación, tenemos que EC es la diagonal del cuadrado con lados EF y CF, que es un cuadrado más pequeño que el original y al que también mide la unidad U con la que empezamos.

Si llamamos M_0 a la longitud de BC que es el lado de nuestro cuadrado original, y M_1 a la longitud CF,que es el lado del cuadrado pequeño, afirmamos que $M_1 < \frac{1}{2}M_0$.

Para ver esto observemos que $CE > CF$, ya que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre el mayor de sus lados. Y como ya probamos que $CF = EB$, es claro entonces que

$$\begin{aligned} M_0 &= CE + EB = CE + M_1 > M_1 + M_1 \\ M_0 &> M_1 + M_1 \end{aligned}$$

esto demuestra que $M_1 < \frac{1}{2}M_0$.

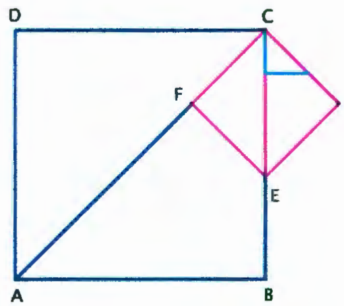
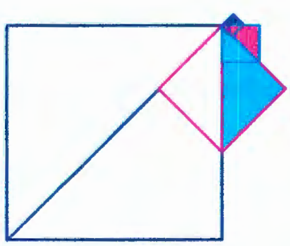


Figura 4

Repitiendo todo el argumento anterior sobre este nuevo cuadrado llegaremos a un tercer cuadrado (mucho más pequeño) y al que la unidad U deberá medir, tanto a su lado, al que llamaremos M_2 como a su diagonal. Y siguiendo un razonamiento análogo al desarrollado hasta ahora, tenemos que:

$$M_2 < \frac{1}{2}M_1$$



Fígura 5

Repitiendo este argumento, formaremos una sucesión de magnitudes $M_0, M_1, M_2, \ldots$ tal que $M_{i+1} < \frac{1}{2}M_i$, . de donde por la *proposición de convergencia*, tenemos que, existe algún

M_n tal que

$$M_n < U$$

donde U es la unidad fijada en un principio. Pero la unidad U deberá caber un número entero de veces en el segmento M_n lo cual es absurdo y el teorema queda probado. Ahora, aprovechemos la demostración anterior observando lo siguiente:

El triángulo ABC, es un triángulo rectángulo y aplicando el teorema de Pitágoras en la figura 4, tenemos:

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (CA)^2$$

como $AB = BC$

$$(BC)^2 + (BC)^2 = (CA)^2$$

$$2(BC)^2 = (CA)^2$$

de donde se obtiene que

$$\frac{CA}{BC} = \sqrt{2}$$

Esto es, la razón entre la diagonal y el lado del cuadrado es $\sqrt{2}$, que es irracional y no se puede escribir de la forma $\frac{p}{q}$, por lo que a $\frac{CA}{BC}$ lo podemos escribir como un proceso infinito de fracciones continuas, donde el límite es $\sqrt{2}$. Actividad que se propone como ejercicio para el lector.

Hasta este momento hemos estado desarrollando una serie de ideas que giran al rededor de la *proposición de convergencia*, que se planteó al iniciar este tema, ya en su momento se advirtió que dicha proposición nos daba una condición suficiente para encontrar el límite de una sucesión pero no necesaria, esto es, si una sucesión cumple la propiedades de la proposición, también cumple la definición actual de límite de una sucesión, pero al contrario no es cierto. Para verificar la suficiencia veamos lo siguiente:

Tenemos una sucesión (M_i) de números positivos y $\varepsilon > 0$ tal que cumpla con

$$M_1 < \frac{M_0}{2}, M_2 < \frac{M_1}{2}, M_3 < \frac{M_2}{2}, ...$$

por la *proposición de convergencia* dada tenemos que $M_n < \varepsilon$ para todo número natural $n > N$. Lo que debemos demostrar es que esta sucesión cumple con la definición actual que dice:

Dada una sucesión (M_i) converge hacia l (en nuestro caso hacia 0) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n que cumplan: $n > N$, entonces

$$| M_n - l | < \varepsilon$$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$, existe un número natural n tal que $M_n < \varepsilon$ (por la *proposición de convergencia*).

Por otro lado, como $M_i > 0$ para toda i se tiene

$$| M_i - 0 | = | M_i | = M_i$$

luego

$$| M_N - 0 |= M_N < \varepsilon.$$

Dado $n > N$ debe cumplir que $| M_n - 0 |< \varepsilon$ pero esto se tiene inmediatamente del hecho que

$$M_{N+1} < \frac{M_N}{2}, M_{N+2} < \frac{M_{N+1}}{2}, ..., M_n < \frac{M_{n-1}}{2}, ...$$

por lo cual

$$M_n < \varepsilon$$

por lo tanto

$$| M_n - 0 |< \varepsilon$$

y esto se cumple para toda $n > N$ con lo que completa la demostración.

Para ver que no es una condición necesaria (es decir, si una sucesión tiende a cero con la definición actual, no necesariamente va a cumplir la proposición dada), tomemos como ejemplo la siguiente sucesión:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

a_n tiende a cero pero no cumple la hipótesis de la proposición, esto es, no cumple que

$$a_2 < \frac{a_1}{2}, a_3 < \frac{a_2}{2}, ...$$

Para verificarlo, basta con que probemos lo siguiente:

$$n + 1 \leq 2n,$$

pues, si esto sucede entonces, tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &\geq \frac{1}{2n} \\ \frac{1}{n+1} &\geq \frac{\frac{1}{n}}{2} \\ a_{n+1} &\geq \frac{a_n}{2} \end{aligned}$$

La prueba es inmediata, basta que sumemos n en ambos lados en la desigualdad $n \geq 1$

$$\begin{aligned} n + n &\geq 1 + n \\ 2n &\geq n + 1 \end{aligned}$$

luego $a_n = \frac{1}{n}$ no cumple con la hipótesis de que para cada n, $a_{n+1} < \frac{a_n}{2}$.

Por otra parte, $\frac{1}{n}$ tiende a cero y la demostración es la siguiente:

Demostración: Sea 1 y $\varepsilon > 0$, por el axioma de Arqímedes tenemos que, existe un número natural N tal que

$$1 < N\varepsilon$$

de donde

$$\frac{1}{N} < \varepsilon$$

para algún N.

Falta ver que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para todo $n > N$, pero esto es cierto pues como $n > N$ implica que $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$. Luego

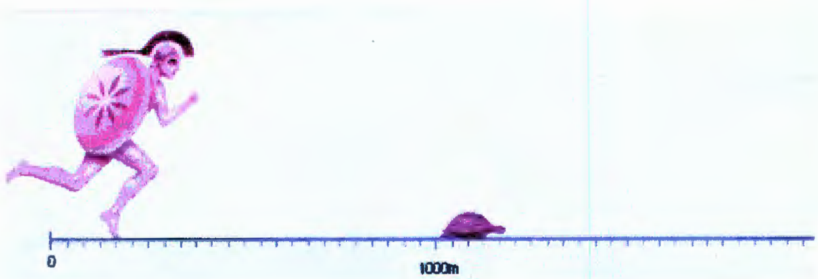
$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n > N$$

por lo tanto $\frac{1}{n}$ tiende a cero.

2.2 Series

Iniciemos con la historia de "Aquiles y la tortuga", una de las paradojas de Zenón de Elea(aprox. 450 a.C.). Resulta que Aquiles era el corredor más veloz de su época y un día, a una tortuga se le ocurrió competir contra él, sabiendo que Aquiles era 10 veces más veloz que ella, pero con la esperanza de que si Aquiles le daba cierta ventaja, le podría ganar.

Llegado el día de la competencia Aquiles acepta darle una ventaja de 1Km. Así, cuando Aquiles ya ha recorrido el kilómetro que le dio de ventaja, la tortuga habrá recorrido una décima parte de éste, o sea, 100 metros; después que Aquiles ha recorrido esos 100 metros que avanzó la tortuga, ella ya se habrá adelantado 10 metros más, y si Aquiles vuelve a recorrer esos 10 metros que avanzó la tortuga, ella avanzará un metro más y así sucesivamente.



Fígura 7

Esto quiere decir que siempre que Aquiles avance una distancia, la tortuga habrá avanzado una décima parte de ésta, por lo que siempre la tortuga irá adelante de Aquiles. Y con esto se puede concluir que Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.

Pero intuitivamente sabemos que esto no es cierto, pues llegará un momento en que Aquiles pase a la tortuga. La paradoja, en el razonamiento dado anteriormente, está en el hecho de que, como se tiene implícita una suma infinita de distancias, se podría pensar que el resultado no es un número finito, es decir, que está suma infinita no se puede realizar.

Da acuerdo con el razonamiento realizado hasta ahora, analicemos las distancias recorridas por ambos en la siguiente tabla

Tiempo/Corredores	Tortuga	Aquiles
1	$\frac{1}{10}$	1
2	$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$	$1+\frac{1}{10}$
3	$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$	$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$	$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots$

Aquí, puede uno darse cuenta que, para que Aquiles alcance a la tortuga, debe recorrer
$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots$ kilómetros
pero esta suma infinita es

$$1+.1+.01+.001+\ldots=1.\overline{11}$$

que es un número periódico, por lo que es racional y se puede escribir como fracción, luego

$$1.\overline{11}=\frac{10}{9}=1+\frac{1}{9}$$

de aquí podemos decir que Aquiles debe recorrer $1+\frac{1}{9}$ kilómetros para alcanzar a la tortuga. Esto quiere decir que, cuando la tortuga sea alcanzada, ésta solo habrá recorrido $\frac{1}{9}$ kilómetros (esto también puede calcularse, procediendo de manera análoga, sumando las distancias recorridas por la tortuga al momento de ser alcanzada).

Generalmente, cuando los alumnos estudian series infinitas hay algunos a los que no les queda claro por qué algunas sumas infinitas dan, como resultado un número finito o, bien esas sumas tienen un "límite" del cual no van a pasar. Algunos pensarían que si se están sumando un número infinito de términos, no es posible llegar a un resultado.

La intención es, que se den cuenta que esto si es posible y que hay maneras de encontrar el resultado de algunas sumas, siempre y cuando este exista.

2.2.1 La cuadratura de la parábola

Uno de los problemas con que se enfrentaron los matemáticos griegos fue el hecho de trabajar con sumas infinitas. Arquímedes fue uno de ellos en afrontar este problema al querer cuadrar la parábola, esto es, dado un segmento parabólico cortado por una recta, delimitando cierta área en el interior, encontrar un cuadrado que tenga la misma área que el segmento parabólico dado.

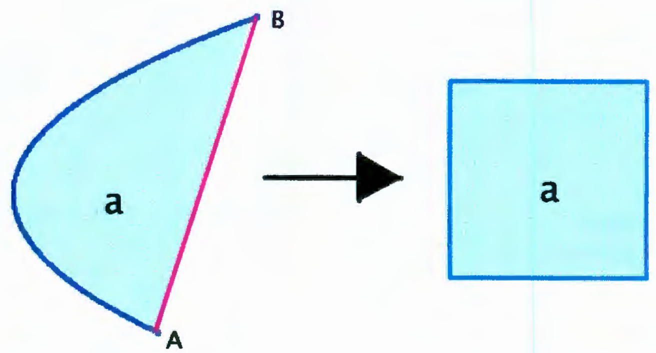


Figura 8

Arquímedes, demuestra que dado un segmento parabólico con base AB y altura PM, donde P es el punto más alejado a la base, su área es igual a $\frac{4}{3}$ el área del triángulo inscrito APB. (fig. 9)

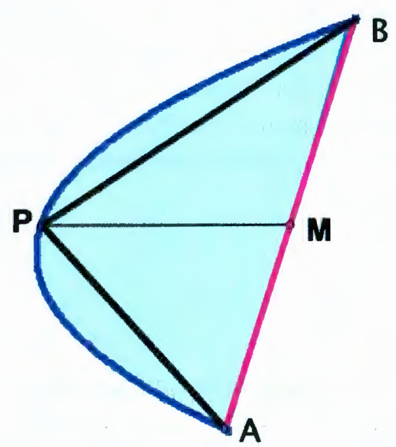


figura 9

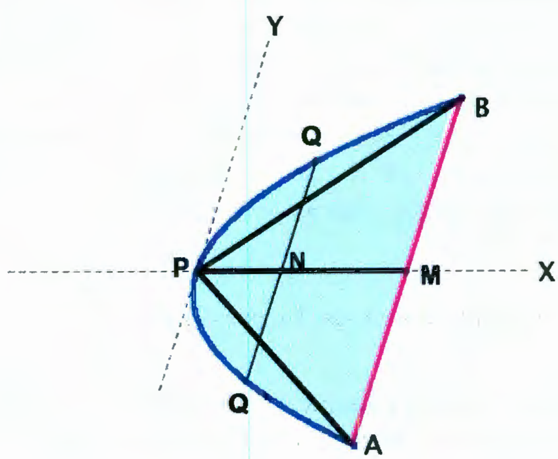


figura 10

Antes de estudiar esta idea, hacemos un paréntesis para comentar dos aspectos:
Aspecto 1: Algunas propiedades de la parábola que Arquímedes ya conocía son:

1. La línea tangente que pasa por P es paralela a la base AB.
2. La línea que pasa por PM es paralela al eje X y M es el punto medio de AB.
3. Cada segmento QQ' paralelo a la base AB es bisecado por PM.

4. Si N es el punto de intersección entre PM y QQ', entonces:

$$\frac{PN}{PM} = \frac{NQ^2}{MB^2}$$

-

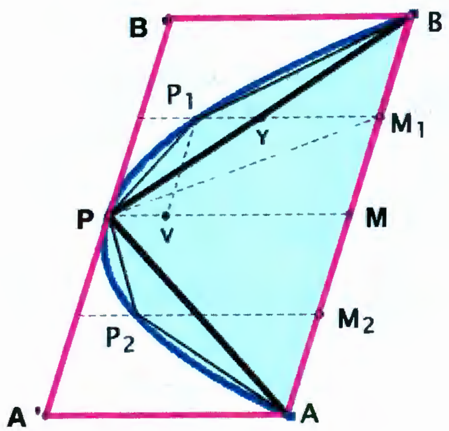


Figura 11

Aspecto 2: si trazamos el paralelogramo circunscrito al segmento parabólico, teniendo como un lado AB y base AA' o BB' (*figura* 11), podemos ver que

$$a(AA'B'B) > c(AB)$$

donde $a(x)$ es el área del polígono x y $c(AB)$ es el área del segmento parabólico. Luego

$$a(APB) = \frac{1}{2}a(AA'B'B) > \frac{1}{2}c(AB)$$

de donde tenemos que el área del triángulo APB es más de la mitad que el área del segmento parabólico.

Trazamos los triángulos AP_2P y PP_1B inscritos a los segmentos parabólicos con base AP y PB, respectivamente, donde los puntos P_1 y P_2 son los puntos más alejados de su base respectiva.

Haciendo el mismo razonamiento que con el triángulo APB, tenemos que el área del triángulo AP_2P es más de la mitad que el área del segmento parabólico AP y el área del triángulo PP_1B es más de la mitad que el área del segmento parabólico PB.

De este modo, tenemos que APB es el primer polígono inscrito en el segmento parabólico AB y AP_2PP_1B es un segundo polígono inscrito en ese mismo segemento parabólico y si se sigue así, donde en cada paso se le sumen las áreas de los triángulos inscritos en los segmentos parabólicos a los triángulos que ya se tenían, podemos hacer una sucesión M_n, en la que $M_i = c(APB) - a(P_i)$ donde $c(APB)$ es el área del segmento parabólico y $a(P_i)$ el área del polígono i. Y aplicando la *proposición de convergencia* vista al principio del capítulo, podemos aproximar el área de un polígono al área del segmento parabólico. Actividad que se propone como ejercicio para el lector.

Una vez comentados estos aspectos, reanudamos nuestro estudio y, para ello, demostraremos que el área del segmento parabólico es $\frac{4}{3}$ el área del triángulo APB.

Primero probaremos que

$$a(AP_2P) + a(PP_1B) = \frac{1}{4}a(APB)$$

y posteriormente generalizaremos esta idea.

Sea M_1 el punto medio de MB, Y el punto de intersección de P_1M_1 y PB, y sea P_1V el segmento paralelo a MM_1, donde V interseca a PM.

Como $BM = 2M_1M$, se tiene que

$$BM^2 = 4M_1M^2 \quad o \quad \frac{M_1M^2}{BM^2} = \frac{1}{4}$$

por la propieadad 4 de parábolas, escrita anteriormente,

$$\frac{PV}{PM} = \frac{P_1V^2}{MB^2}$$

como

$$P_1V^2 = M_1M^2$$

entonces

$$\frac{PV}{PM} = \frac{M_1M^2}{MB^2} = \frac{1}{4}$$

de donde

$$PM = 4PV$$

Ahora, como

$$P_1M_1 = VM = PM - PV$$

$$P_1M_1 = 4PV - PV = 3PV$$

y, además, los triángulos PMB yYM_1B son semejantes en razón $\frac{1}{2}$, tenemos que

$$YM_1 = \frac{1}{2}PM = 2PV$$

resulta que

$$\begin{aligned} P_1Y &= P_1M_1 - YM_1 = 3PV - 2PV = PV \\ P_1Y &= PV \end{aligned}$$

y

$$YM_1 = 2P_1Y$$

de donde

$$a(PYM_1) = 2a(PP_1Y)$$

y

$$a(YM_1B) = 2a(P_1YB)$$

luego

$$\begin{aligned} a(PP_1B) &= a(PP_1Y) + a(P_1YB) = \frac{1}{2}\left[a(PYM_1) + a(YM_1B)\right] = \frac{1}{2}a(PM_1B) \\ a(PP_1B) &= \frac{1}{2}a\left(PM_1B\right) = \frac{1}{4}a(PMB) \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo razonamiento en AP_2P tenemos:

$$a(AP_2P) = \frac{1}{4}a(APM)$$

por lo que

$$a(AP_2P) + a(PP_1B) = \frac{1}{4}a(APM) + \frac{1}{4}a(PMB) = \frac{1}{4}a(APB)$$

Que es lo que, como primer paso, se propuso demostrar. Ahora, para terminar nuestra tarea, basta generalizar este análisis. Ya que si seguimos este mismo razonamiento podemos probar que la suma de las áreas de los triángulos inscritos en el siguiente paso será igual a $\frac{1}{4}$ de la suma de las áreas de los triángulos del paso anterior.

De este modo, si llamamos

$$\alpha = a(APB)$$

y le nombramos p_n al polígono obtenido del paso n, tenemos que

$$a(p_n) = \alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4^2} + ... + \frac{\alpha}{4^n}$$

Si resolvemos la suma infinita

$$\alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4^2} + ... + \frac{\alpha}{4^n} + ...$$

sabremos el área del segmento parabólico. Así,

$$\alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4^2} + ... + \frac{\alpha}{4^n} + ... = \frac{4}{3}\alpha \qquad \text{¿Por qué?}$$

por lo que el área del segmento parabólico es $\frac{4}{3}$ el área del triángulo inscrito APB

que es lo que, siguiendo a Arquímedes, queríamos probar. Con esta relación, podemos obtener el área de un cuadrado que sea igual al área del segmento parabólico, el cual, era nuestro problema original. Actividad, que se deja como ejercicio para el lector

La idea de aproximar el área delimitada por una curva, mediante polígonos inscritos o circunscritos a dicha curva, fue un procedimiento muy usado por Arquímedes y se le conoce como "Método de Exhaución". Esta forma de demostrar es útil, en el sentido, que es más fácil calcular áreas de polígonos que de curvas.

2.2.2 Método geométrico de Oresme

Hasta este momento hemos usado series infinitas que dan como resultado un número finito, la pregunta es, ¿cómo sabemos que serie infinita es un número finito, más aún, cuál es dicho número?

En este apartado mostraremos, cómo encontrar el resultado de algunas series infinitas, de una forma geométrica muy interesante. Método usado, por un notable matemático de la edad Media de nombre Oresme.

Durante la edad Media, Bradwardine (aprox. 1290-1349) plantea el siguiente afirmación.

Si un punto se mueve a través de la primera mitad de un cierto intervalo de tiempo con una velocidad constante, en el siguiente cuarto del intervalo con el doble de la velocidad inicial, y el siguiente octavo con el triple de la velocidad inicial, y así al infinito, la velocidad promedio durante todo el intervalo de tiempo será el doble de la velocidad inicial

Suponiendo que el punto se mueve con velocidad uno durante la primera mitad, entonces demostrar tal afirmación equivale a demostrar que:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+....+\frac{n}{2^n}+...=2$$

Dado que, la velocidad media es

$$\text{velocidad media}=\frac{\text{distancia total recorrida}}{\text{tiempo total}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+....+\frac{n}{2^n}+...}{1}$$

Oresme (¿1323?-1382), quien nace más o menos 30 años después que Bradwardine, utiliza un método geométrico para demostrarlo.

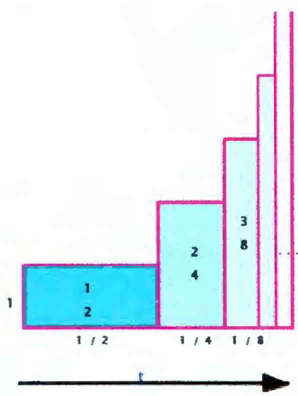


figura 12(a)

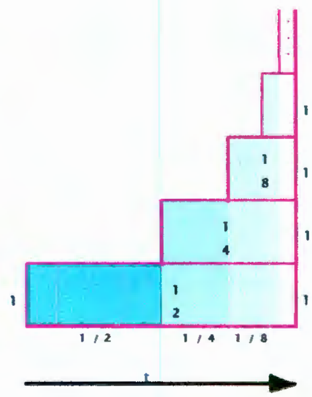


figura 12(b)

Los diagramas de la figura 12 estan conformados por áreas rectangulares, y la suma de las áreas rectángulares en la figura 12 (a) podemos considerarla como la representación geométrica de la suma dada anteriormente que, según la afirmación, es igual a 2. Además, observemos que el área de cada rectángulo que hay en ella es $\frac{n}{2^n}$, y que cada rectángulo de la figura 12 (b) tiene área igual a $\frac{1}{2^n}$, para cada $n \in N$

Luego

$$A_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + ... + \frac{n}{2^n} + ...$$

$$A_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

Donde $A_1 = A_2$ es el área total de las graficas, por lo que

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + ... + \frac{n}{2^n} + ... = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

de este modo, si demostramos que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = 2$$

el problema queda resuelto.

Con tal intención, tomemos un cuadrado de lado 1, si lo dividimos por la mitad, el área de los rectángulos que obtenemos es $\frac{1}{2}$. Si tomamos uno de ellos y lo dividimos a la mitad, los rectángulos que resultan tiene, de área, $\frac{1}{4}$. Si, nuevamente, uno de estos últimos lo dividimos por la mitad, el área de los que resultan es $\frac{1}{16}$, y si se sigue este mismo proceso de manera indefinida, se obtiene algo como lo que se ilustra en la figura 13(b).

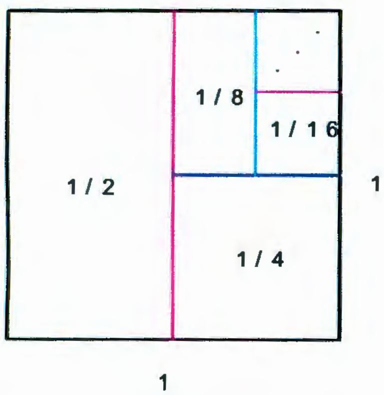


Figura 13(a)

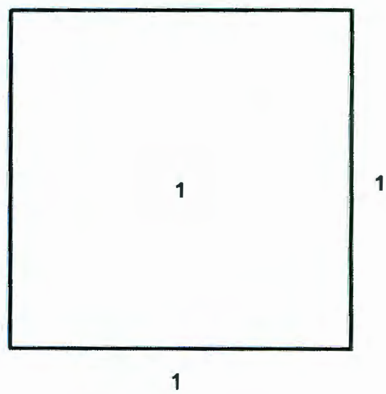


Figura 13(b)

Con este proceso, se dividirá por completo el cuadrado original, por lo que la suma de las áreas de los rectángulos dará el área total del cuadrado, de donde obtenemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = 1,$$

sumando 1(área de la figura 13(b)) en ambos lados,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = 1 + 1 = 2$$

que es lo que queríamos probar.

Oresme también, estructura otra serie geométrica a partir de la siguiente:

Proposición: si se toma una parte alícuota (una k-ésima parte) de alguna cantidad a y a partir del primer residuo tal parte es tomada, y a partir del segundo residuo la misma parte es tomada y así hasta el infinito, tal cantiadad se consumirá exactamente,ni más ni menos por alguna manera de sustracción.

Esto es que, si le quitamos a a una $k-\acute{e}sima$ parte, y el residuo lo volvemos a dividir en k partes y le quitamos una $k-\acute{e}sima$ parte, y a lo que sobra lo volvemos a dividir en k partes y le quitamos una $k-\acute{e}sima$ parte, y así sucesivamente, entonces, si sumamos las $k-\acute{e}simas$ partes que quitamos el resultado será, otra vez a.

Esto es

$$\frac{a}{k}+\frac{a}{k}(1-\frac{1}{k})+...+\frac{a}{k}(1-\frac{1}{k})^{n}+...=a$$

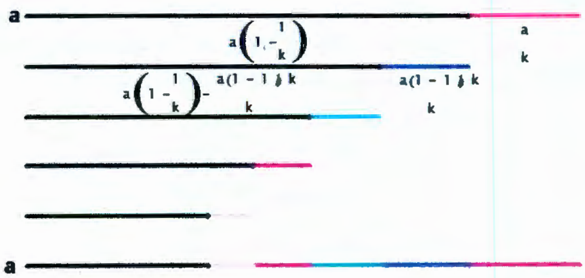


Figura 14

Para probar esta afirmación basta observar que, después que la primera parte es sustraída, el residuo es $a(1-\frac{1}{k})$, después de que una k-ésima parte de ésta es sustraída, el segundo residuo es $a(1-\frac{1}{k})^{2}$, continuando con este proceso, cada sustracción multiplica al residuo anterior por $1-\frac{1}{k}$, esto significa que

$$\left[\frac{a}{k}+\frac{a}{k}(1-\frac{1}{k})+...+\frac{a}{k}(1-\frac{1}{k})^{n-1}\right]+a(1-\frac{1}{k})^{n}=a$$

$$\frac{a}{k}\left[1+(1-\frac{1}{k})+...+(1-\frac{1}{k})^{n-1}\right]+a(1-\frac{1}{k})^{n}=a$$

dado que $a(1-\frac{1}{k})^{n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, tenemos entonces el resultado deseado.

$$\frac{a}{k}+\frac{a}{k}(1-\frac{1}{k})+...+\frac{a}{k}(1-\frac{1}{k})^{n}+...=a$$

Esta serie se conoce como serie geométrica general

Ejemplos

1) Demostrar que:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}+...+\frac{3}{4^{n}}+...=1$$

esta serie la podemos escribir de la siguiente manera

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)+...$$

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^2+...+\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^n+...$$

utilizando la serie geométrica general

$$\frac{a}{k}+\frac{a}{k}(1-\frac{1}{k})+...+\frac{a}{k}(1-\frac{1}{k})^n+...=a$$

tenemos que $\frac{1}{k}=\frac{3}{4}$, luego $k=\frac{4}{3}$ como $\frac{a}{k}=\frac{3}{4}$, sustituyendo el valor de k, obtenemos que $\frac{a}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$. Luego, $a=1$, por lo que

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^2+...+\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^n+...=1$$

con lo que queda demostrado.

2) Demostrar que

$$\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{64}+...+n\cdot\frac{3}{4^n}+...=\frac{4}{3}$$

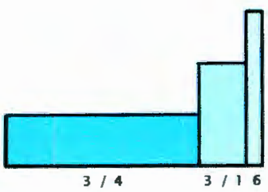


Figura 15(a)

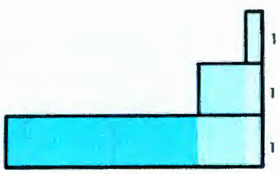


figura 15(b)

Utilizando el método geométrico de Oresm, y utilizando como referencia la figura 15, podemos observar que el área de cada rectángulo de la figura 15(a) es $n\cdot\frac{3}{4^n}$, mientras que el área de cada rectángulo de la figura 15(b) es $\frac{1}{4^n}$,por lo que al comparar las áreas totales tenemos que

$$\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{64}+...+n\cdot\frac{3}{4^n}+...=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+....+\frac{1}{4^n}+...$$

pero la serie

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+....+\frac{1}{4^n}+...=\frac{4}{3}$$

esto lo podemos ver utilizando la serie general vista anteriormente, donde

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+....+\frac{1}{4^n}+...=1+1\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+1\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)^2+...+1\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)^n+...$$

de aquí tenemos que $k = \frac{4}{3}$, y como $\frac{a}{k} = 1$ resulta que

$$a = k = \frac{4}{3}$$

por lo tanto

$$\frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{3}{64} + ... + n \cdot \frac{3}{4^n} + ... = \frac{4}{3}$$

2.3 Ejercicios

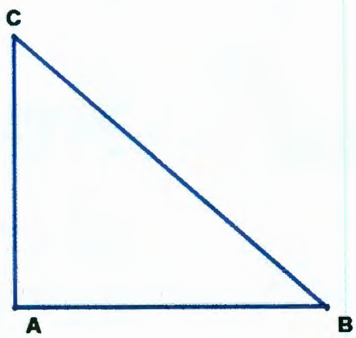
1. Prueba que dados M, ε y $r \leq \frac{1}{2}$, números positivos, entonces $Mr^n < \varepsilon$, para algún n suficientemente grande.

2. Muestra que el segmento de parábola se puede aproximar por un polígono inscrito de n lados, para n suficientemente grande.

3. Demuestra, con argumentos puramente geométricos, que la diagonal y el lado del pentágono regular, son magnitudes inconmensurables

4. Escribe a $\sqrt{2}$ como el límite de un proceso infinito.

5. Sean AB y BC dos magnitudes tales que $AB = a$ y $BC = \frac{5}{4}a$ como se muestra en la figura.



Realiza un proceso parecido al desarrollado en este capítulo, referente a la inconmensurabilidad del lado y la diagonal del cuadrado construyendo figuras semejantes, de tal manera que se obtenga una sucesión que cumpla la hipótesis de la proposición, esto es:

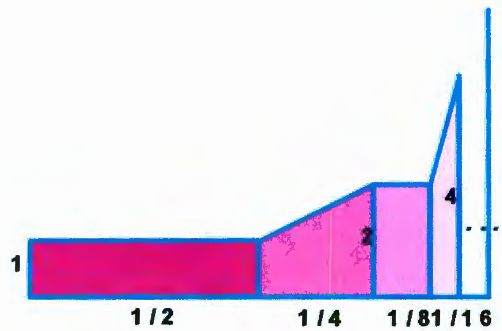
$$M_{n+1} < \frac{M_n}{2}.$$

¿Que puede decir de las magnitudes iniciales?. Este análisis, ¿Contradice el resultado sobre la inconmensurabilidad del lado y la diagonal?

6. De las propiedades descritas en la cuadratura de la parábola, verifica la cuarta propiedad

$$\frac{PN}{PM} = \frac{NQ^2}{MB^2}$$

7. Una partícula se mueve en un cierto intervalo de tiempo (de longitud 1) donde, en la primera mitad se mueve con una velocidad constante, en el siguiente cuarto del intervalo con una velocidad uniformemente acelerada, la cual, termina en el doble de la velocidad inicial, en el siguiente octavo, al doble da la velocidad inicial, en el siguiente dieciseisavo con velocidad uniformemente acelerada, hasta alcanzar cuatro veces la velocidad inicial, y así sucesivamente (véase la figura). Verifique que la velocidad promedio es $\frac{7}{4}$ la velocidad inicial.



8. Prueba de manera geométrica que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{3^n} + ... = \frac{1}{2}$$

9. Verifica que

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ... + \frac{1}{4^n} + ... = \frac{1}{3}$$

10. Verifica de manera geométrica que

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + ... + \frac{1}{5^n} + ... = \frac{1}{4}$$

11. Prueba que

$$\alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4^2} + ... + \frac{\alpha}{4^n} + ... = \frac{4}{3}\alpha$$

12. Verifica de manera geométrica que

$$r + r(1-r) + r(1-r)^2 + ... = 1 \text{ para } 0 < r \leq 1$$

13. Encuentra el valor de esta suma

$$48 \cdot 1 + 48 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 2 + 48 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 4 + ... + 48 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 2^n + ...$$

14. Grafica la serie $27 \cdot \frac{1}{4} + 27 \cdot \frac{1}{16} + ... + 27 \cdot \frac{1}{4^n} + ...$ de la siguiente manera. Al 1 asígnale el primer término, al 2 la suma del primero y segundo término, al 3 la suma del primero, segundo y tercer término, así sucesivamente, de manera que a n le asígnales la suma de los primeros n términos. ¿cuál es el valor de la suma total?

15. Grafica la siguiente secuencia de números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}$. De tal manera que al 1 le corresponda el 1, al 2 le corresponda el $\frac{1}{2}$, al 3 el $\frac{1}{3}$ y así sucesivamente, de tal forma que a n le corresponda el $\frac{1}{n}$.¿Existirá algún valor de n al que le corresponda el cero?. ¿Cuál es el "límite" de ésta secuencia cuando n es suficientemente grande?

3 Integrales

3.1 La cuadratura de la espiral de Arquímedes

El problema de encontrar áreas es muy antiguo, ya que siempre se ha tenido la necesidad de medir superficies como es, pedazos de tierra, construcciones, entre otras cosas. Cuando no se tienen las herramientas necesarias para calcular áreas de alguna forma se tiene que recurrir a los conocimientos que se tienen hasta ese momento. Encontrar relaciones entre áreas de figuras conocidas y áreas de figuras que se quieren conocer fue algo muy utilizado, por lo que en este apartado iniciaremos con un resultado dado por Arquímedes que ilustra esta idea de relación.

Arquímedes fue uno de los matemáticos griegos más importantes en el desarrollo matemático, en particular en la obtención de ciertas áreas.

En su tratado *"sobre las espirales"*, encuentra una relación entre el área de la espiral que lleva su nombre y el área de una circunferencia.

Arquímedes define la espiral como una composición de movimientos de la siguiente manera.

Si una línea recta trazada en un plano gira un número cualquiera de veces con movimiento uniforme, permaneciendo fijo uno de sus extremos, y vuelve a la posición inicial, mientras que, sobre la línea en rotación, un punto se mueve uniformemente como ella a partir del extremo fijo, el punto describirá una espiral en el plano.

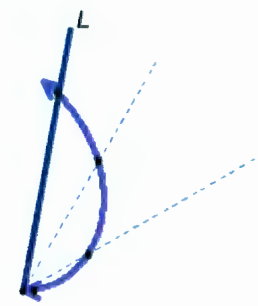


Figura 16

También define respecto de la primera vuelta de la espiral

La primera recta (llamada H) : Es la que une el punto inicial con el punto final de la espiral.

La primer área (llamada E): Es la región determinada por la curva y la primera recta.

El primer círculo (C): Su centro es el origen de la espiral y su radio es la primera recta.

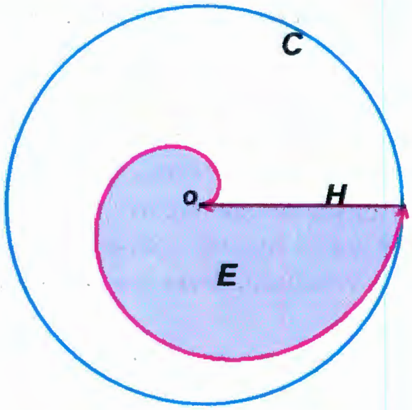


Figura 17

Un resultado importante es el siguiente: *La primer área E es un tercio del área del primer círculo, esto es,*

$$a(E) = \frac{1}{3}a(C)$$

La prueba de éste hecho es utilizando dos resultados importantes sobre series ya conocidos por Arquímedes

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

y

$$1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + ... + n^2$$

Y, para verificarlo, probaremos que el área de E no esmayor ni menor que un tercio del área del círculo. Iniciemos dividiendo el círculo C en n sectores que intersequen a la espiral en los puntos

$$o, A_1, A_2, ..., A_n$$

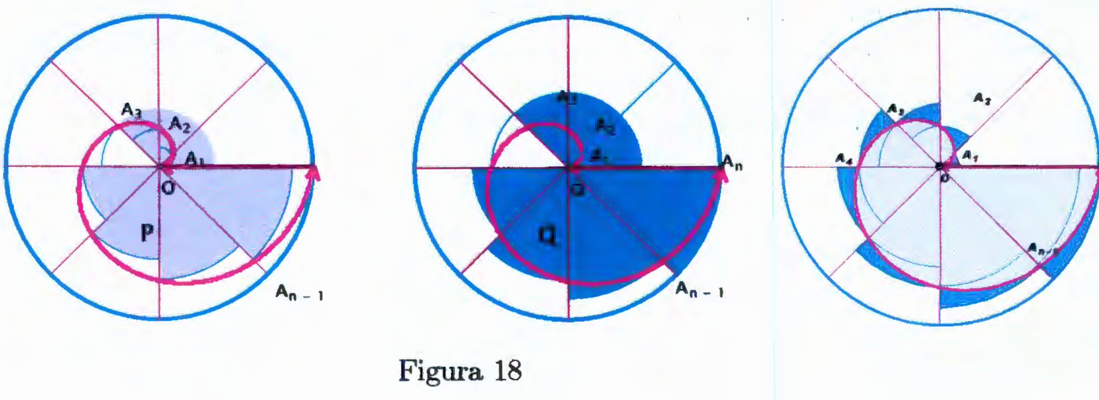


Figura 18

Tomemos $oA_1 = c$, podemos ver que la región E contiene una región P de sectores circulares inscritos, P_i de radios

$$o, c, ..., (n-1)\,c$$

y está contenida en una región Q, formada por sectores circulares circunscritos, Q_i de radios

$$c, 2c, ..., nc$$

Podemos ver que el área de P es menor que el área de Q, además, el área de E cumple lo siguiente

$$a(P) < a(E) < a(Q)$$

Ahora, supongamos que $a(E) < \frac{1}{3}a(C)$, tomemos n suficientemente grande tal que se cumpla que

$$a(Q) - a(P) < \frac{1}{3}a(C) - a(E)$$

esto es posible, ya que podemos ver que $a(Q) - a(P)$ es igual al área de un sector circular, si n es cada ves más grande, el área del sector será más pequeña.

Como

$$a(P) < a(E)$$

entonces

$$a(Q) < \frac{1}{3}a(C)$$

Ahora bien, como la razón de las áreas de los sectores circulares semejantes es igual a la razón de los cuadrados de sus radios, se tiene que

$$\frac{a(Q_i)}{a(C_i)} = \frac{r_i^2}{r^2} = \frac{(ic)^2}{(nc)^2}$$

donde C_i son los sectores del círculo C con radio r_i.

A partir de aquí obtenemos lo siguiente:

$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{c^2 + (2c)^2 + ... + (nc)^2}{n\,(nc)^2} = \frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n^3} > \frac{1}{3}$$

la última desigualdad es utilizando la segunda propiedad de series mencionada anteriormente. De esto último obtenemos:

$$a(Q) > \frac{1}{3}a(C)$$

pero esto es una contradicción, pues sabíamos que $a(Q) < \frac{1}{3}a(C)$.

Esto implica que no es cierta nuestra hipótesis de que

$$a(C) < \frac{1}{3}a(C)$$

Ahora, supongamos que $a(E) > \frac{1}{3}a(C)$, nuevamente tomando n suficientemente grande para que se verifique que

$$a(Q) - a(P) < a(E) - \frac{1}{3}a(C)$$

y como

$$a(Q) > a(E)$$

tenemos,

$$a(P) > \frac{1}{3}a(C)$$

razonando de la misma manera que el caso anterior podemos ver que

$$\frac{a(P)}{a(C)} = \frac{c^2 + (2c)^2 + ... + [(n-1)c]^2}{n(nc)^2} = \frac{1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3}$$

de donde resulta

$$a(P) < \frac{1}{3}a(C)$$

que también es una contradicción, pues sabíamos que

$$a(P) > \frac{1}{3}a(C)$$

por lo que tampoco es cierto que,

$$a(E) > \frac{1}{3}a(C)$$

esto quiere decir que

$$a(E) = \frac{1}{3}a(C)$$

Desde luego que, este resultado que acabamos de probar se puede obtener con las herramientas actuales del Cálculo ya conocidas.

Sea v la velocidad constante de rotación de *la primera recta,* y sea w la velocidad constante del punto que se mueve a lo largo de ella. Entonces, las coordenadas polares del punto en movimiento, al instante t, son:

$$r = wt \text{ y } \theta = vt$$

luego, la ecuación de la espiral en coordenadas polares es

$$\begin{aligned} r &= w\frac{\theta}{v} = \frac{w}{v}\theta \\ r &= a\theta \quad \text{donde } a = \frac{w}{v} \end{aligned}$$

Recordando, que la fórmula del área de la región R, acotada por una curva $r = f(\theta)$ entre θ_1 y θ_2 es

$$a(R) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(f(\theta))^2}{2} d\theta$$

entonces, el área determinada por la espiral en la primera vuelta será

$$\begin{aligned} a(E) &= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\theta)^2\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}a^2\pi^3\right) = \frac{1}{3}4\pi^3a^2 \\ &= \frac{1}{3}\pi\,(2\pi a)^2 \\ &= \frac{1}{3}a(C) \end{aligned}$$

Como ya hemos visto, el método de exhaución fue utilizado por Arquímedes para demostrar varios resultados, que relacionan el área entre ciertas figuras. Este método también lo utilizó para el análisis de volúmenes. Por ejemplo, la demostración dela siguiente afirmación, que se deja como ejercicio para el lector.

(Proposición II de *El método*) Una esfera es cuatro veces mayor que el cono con base igual al círculo máximo de la esfera y altura igual al radio de esta.

Cabe resaltar el hecho de que este resultado fue un modelo en el que se basaron algunos matemáticos para varias cuadraturas aritméticas.

3.2 Kepler

Durante mucho tiempo se buscaron formas para determinar áreas; a través del tiempo llegaron a deducir ciertas fórmulas que utilizamos hasta el momento; otras, por su complicación, no se usan, aunque sean ciertas; y hasta existen deducciones que no necesariamente son ciertas, pero que al final de ellas se obtuvo algo verdadero y utilizable, tal es el caso de una de las aportaciones de Kepler.

Empecemos recordando las tres leyes de Kepler referentes al movimiento de los planetas

- **Primera Ley:** La órbita de todo planeta es una elipse con el sol en uno de sus focos.
- **Segunda Ley:** El radio vector que enlaza un planeta con el sol, recorre áreas iguales en tiempos iguales.
- **Tercera Ley:** El cuadrado del periodo de cualquier planeta es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al sol.

Hablaremos de la forma en que Kepler deduce su segunda ley que, aunque cometió dos errores importantes dentro de su demostración, al final se compensaron y llegó al resultado correcto. La segunda ley dice que, si S representa la posición del sol y si el planeta tarda un tiempo t en recorrer el arco OP, y el mismo tiempo t en recorrer RQ, entonces el área del sector elíptico OPS es la misma que la del sector RQS.

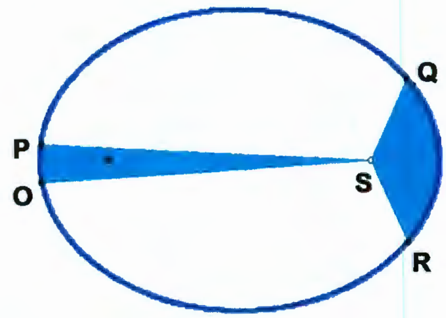


Figura 19

Kepler publicó las dos primeras leyes en su trabajo titulado *Astronomía Nova* (1609), tratado que dedica a calcular la órbita de Marte, donde por observaciones directas se da cuenta que, si un planeta estaba en cualquiera de sus áspides (puntos de la órbita más cercano y más lejano al sol), su velocidad v era inversamente proporcional a su distancia r al sol.

Es decir, si v_1 es la velocidad en el punto P_1, que es el afelio de la órbita (punto más cercano al sol) y v_2 es la velocidad en P_2, el perihelio (punto mas lejano) de la órbita, entonces existe una constante k tal que:

$$v_1 = \frac{k}{r_1} \text{ y } v_2 = \frac{k}{r_2}$$

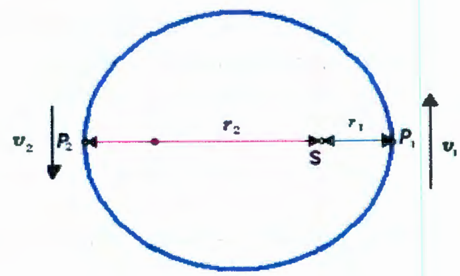


Figura 20

Con estas observaciones, Kepler generaliza el resultado, estableciendo que en todo punto P de la órbita, si v es la velocidad del planeta y r su distancia al sol:

$$v = \frac{k}{r}$$

esta suposición constituye el primer error dentro de la argumentación de la segunda ley. Lo que en realidad se verifica es que:

La velocidad del planeta en P_i es inversamente proporcional a la distancia d_i (perpendicular) desde el sol S a la recta tangente a la elipse en P_i.

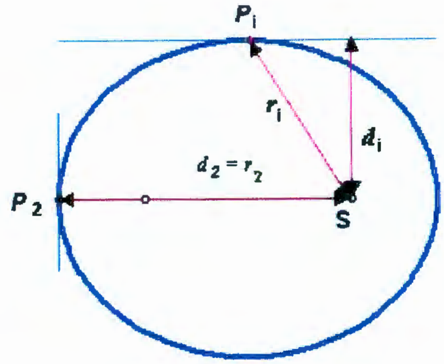


Figura 21

Podemos darnos cuenta que esta distancia d es igual a la distancia r, del planeta al sol, solo en los áspides ya que, en este caso, la recta tangente y el radio vector son perpendiculares entre sí. Quizá el razonamiento seguido por Kepler fue: Si la la relación se verifica en el punto más cercano y en el más lejano, podemos suponer que se verifica en cualquier punto de la órbita. Hemos de admitir que el razonamiento no es tan descabellado. De cualquier modo, la argumentación de la ley continua:

Para calcular el tiempo t requerido por un planeta para recorrer un arco PQ de su órbita, Kepler divide el arco en un número n de subarcos de igual longitud Δs.

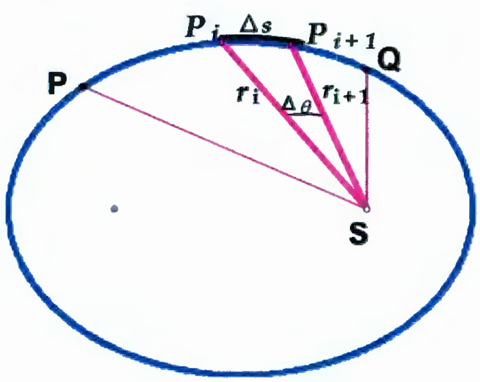


Figura 22

De este modo, si r_i es la distancia SP_i desde el sol hasta el punto inicial P_i del i-ésimo subarco P_iP_{i+1}, v_i la velocidad del planeta en P_i y t_i el tiempo requerido por el planeta para recorrer este subarco, se obtiene que

$$t = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

pero, por la fórmula elemental de velocidad, se tiene que esta es igual a distancia sobre tiempo, lo que en nuestro caso significa

$$v_i = \frac{\Delta s}{t_i} \text{ o equivalentemente } t_i = \frac{\Delta s}{v_i}$$

En este momento, Kepler emplea la relación (no válida) que ya se ha mencionado

$$v = \frac{k}{r} \text{ y que en nuestro caso queda como } v_i = \frac{k}{r_i}$$

Luego, tenemos

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta s}{v_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta s}{\frac{k}{r_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i \Delta s}{k} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} r_i \Delta s \end{aligned}$$

Por otro lado, Kepler considera el área de la sección i-ésima, P_iSP_{i+1} como el área de un triángulo con base r_i y altura Δs y como justificación de esta consideración nos dice:

Ya que me he percatado que existe un número infinito de puntos en la órbita y por consiguiente un número infinito de distancias (desde el sol) se me ocurre que la suma de estas distancias está contenida en el área de la órbita. Porque recuerdo, que de la misma manera Arquímedes, también dividió el círculo en un número infinito de triángulos.

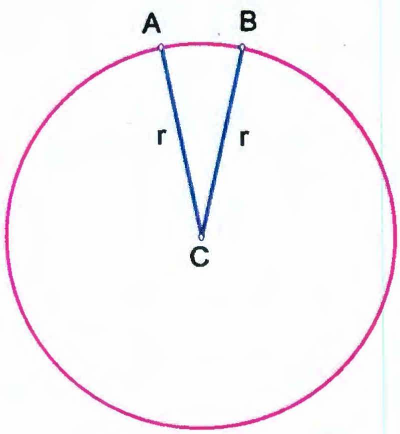


Figura 23

Sin embargo, al imitar este argumento en el caso de la elipse, Kepler comete el segundo error en la justificación de su ley ¿ Por qué? (Véase la sección de ejercicios).

Siguiendo con la argumentación de Kepler, el área del sector SPQ en la órbita del planeta puede calcularse entonces como la suma de las áreas de las rebanadas P_iSP_{i+1}, que como ya se dijo, pueden aproximarse por $\frac{r_i \cdot \Delta s}{2}$, que son las áreas de triángulos con base r_i y altura Δs, luego:

$$\begin{aligned} \text{área del sector } SPQ &= \sum_{i=1}^{n} \text{area del sector } P_iSP_{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i \cdot \Delta s}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \Delta s \end{aligned}$$

pero recordemos que

$$t = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \Delta s$$

de donde, sustituyendo, llegamos a que

$$\text{área del sector } SPQ = \frac{k}{2} t$$

Es decir, el área recorrida depende solo del tiempo empleado (salvo por la constante $\frac{k}{2}$). De esta manera se llega a la conclusión de que a tiempos iguales corresponden áreas iguales, argumentando de esta manera la segunda ley.

Como puede verse entonces, en el caso de Kepler, se pueden llegar a cosas verdaderas, aunque los métodos para llegar a ellas no hayan sido los correctos.Situación que muchas veces se presenta en un salón de clases. A veces los estudiantes, cuando no tienen alguna herramienta y necesitan llegar a un resultado, lo hacen siguiendo procesos incorrectos.

3.3 Integración de Potencias enteras

3.3.1 Principio de Cavalieri

Entre los más importantes precursores del Cálculo se considera al profesor de matemáticas de la Universidad de Bolonia, Bonaventura Cavalieri (1598-1647). El cual desarrolla un método para integrar x^n para n entero.

Iniciemos considerando un cuadrado $OABC$ de lado a, sobre cada punto P de la base OA construimos de manera perpendicular un segmento PR de longitud a:

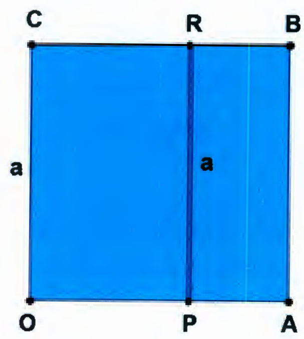


Figura 24

El área de este cuadrado lo podemos interpretar como "suma" de estos segmentos, a los que Cavalieri llama *indivisibles* de la figura. En terminología moderna, esto quiere decir que

$$\sum_{O}^{A} a = a^2$$

Esta manera de "sumar", es el punto clave de todo el argumento. Al respecto podemos señalar al menos los dos siguientes aspectos, por demás interesantes:

- La cantidad de "sumandos" involucrados en esta expresión es no numerable (pues existe uno por cada punto del segmento OA), esto es, se intenta trascender la idea de suma usual, en un contexto geométrico.

- Existe un cambio de dimensión en los objetos involucrados, pues la "suma" de segmentos de longitud a (que son de dimensión 1) dan como resultado el área del cuadrado, que es de dimensión 2.

Ahora, intentemos calcular el área del triángulo OAB con los argumentos de Cavalieri. Pensemos en el área del triángulo, formada por una multitud de segmentos de línea PQ de longitud variable x, uno por cada punto sobre la base.

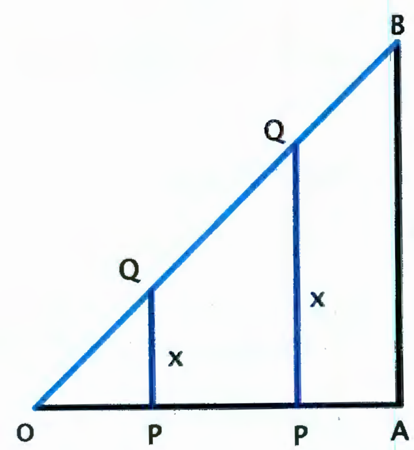


Figura 25

Luego, el área puede interpretarse como

$$\sum_{O}^{A} x$$

Para calcular esta suma, consideremos la siguiente figura:

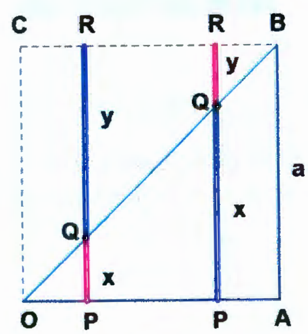


Figura 26

Como se ha dicho, x es la longitud de los segmentos PQ y si llamamos y a la de los segmentos QR, tenemos que

$$x + y = a$$

Además, para cada longitud x, se corresponde una longitud y por la simetría de los triángulos OAB y BCO, lo cual quiere decir que

$$\sum x = \sum y$$

luego, se tiene que

$$\begin{aligned} a^2 &= \sum a \\ &= \sum (x + y) \\ &= \sum x + \sum y \\ &= 2\sum x \end{aligned}$$

de donde obtenemos finalmente que

$$\sum_{O}^{A} x = \frac{a^2}{2}$$

En este momento hagamos un cambio de símbolos (¡solo de símbolos!). En lugar de $\sum$, pongamos $\int$ y sigamos pensando que significan la misma suma que hemos venido considerando. También, en vez de considerar los puntos O y A, pensemos que en esos puntos, las longitudes de los segmentos varían de 0 hasta a. Entonces, nuestra última fórmula se convierte en

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$$

esta última es la fórmula de la integral que hoy conocemos.

Con estas mismas ideas ¿Cómo podemos calcular la $\int_0^a x^2 dx$?. Es decir, $\sum\limits_{O}^{A} x^2$

Para hacer esto según Cavalieri, consideremos un cubo de lado a,donde su volumen será la "suma" sobre el segmento OA, de planos cuadrados $WXYZ$ de lado a

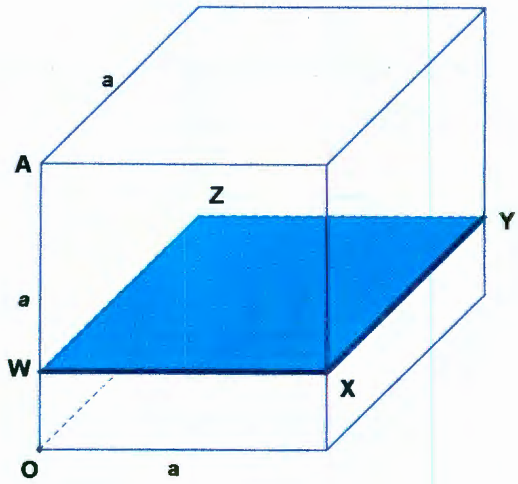


figura 27

ya que cada cuadrado tiene área a^2, el volumen del cubo será

$$V = \sum_{o}^{A} a^2 = a^3$$

Ahora, consideremos un cuadrado $ABCD$ de lado a. Sobre cada punto P del segmento AB instalamos de manera perpendicular un segmento PR de longitud a y consideremos el segmento EG a la mitad del cuadrado, como se muestra en la siguiente ´figura, en la siguiente figura, esto es, la longitud del segmento AE es $\frac{a}{2}$.

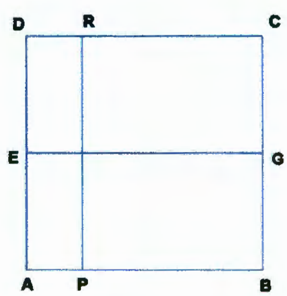


Figura 28

De acuerdo con la siguiente figura, sobre cada segmento PR, a la distancia de P a Q le llamamos x y a la distancia de Q a R le nombramos y. Las longitudes z quedan determinadas de la diagonal AC al segmento EG.

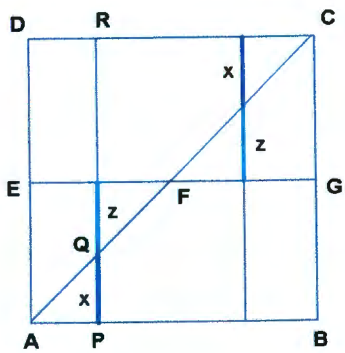


Figura 29

Observemos entonces que $x + y = a$ de donde se tiene

$$\sum_A^B a^2 = \sum_A^B (x+y)^2 = \sum_A^B x^2 + 2\sum_A^B xy + \sum_A^B y^2$$

pero cada longitud x tiene una longitud simétrica y, por lo que

$$\sum_A^B x^2 = \sum_A^B y^2$$

esto es

$$\sum_A^B a^2 = 2\sum_A^B x^2 + 2\sum_A^B xy$$

además, podemos escribir

$$x = \frac{a}{2} - z \text{ y } y = \frac{a}{2} + z$$

Sustituyendo y simplificando, tenemos finalmente que

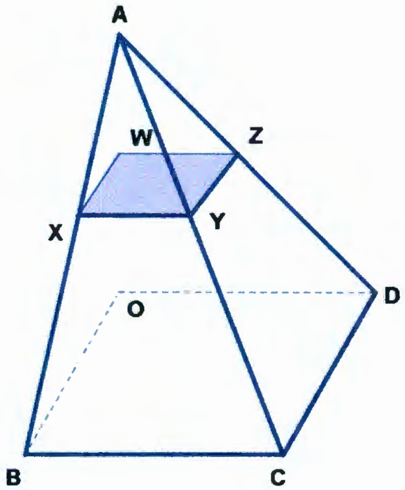
$$\begin{aligned}
\sum_A^B a^2 &= 2\sum_A^B x^2 + 2\sum_A^B \left(\frac{a}{2} - z\right)\left(\frac{a}{2} + z\right) \\
&= 2\sum_A^B x^2 + 2\sum_A^B \left(\frac{a^2}{4} - z^2\right) \\
&= 2\sum_A^B x^2 + \frac{2}{4}\sum_A^B (a^2 - 4z^2) \\
&= 2\sum_A^B x^2 + \frac{1}{2}\sum_A^B a^2 - 2\sum_A^B z^2
\end{aligned}$$

Despejando la sumatoria de a^2 tendríamos

$$\sum_A^B a^2 = 4\sum_A^B x^2 - 4\sum_A^B z^2$$

Aquí, la sumatoria de z^2 es la suma sobre los cuadrados de las líneas en los dos triángulos AEF y CFG.

Pero, la $\sum z^2$ sobre uno de los dos triángulos (AEF o FCG) la podemos ver como el volumen de una pirámide cuyas dimensiones son la mitad de las dimensiones de la pirámide cuyo volumen es la $\sum x^2$.



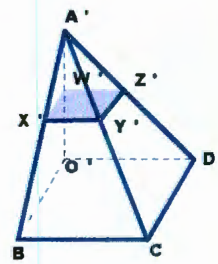


Figura 30

Por lo que la relación entre ambas es la siguiente:

La pirámide de la izquierda $OABCD$ es tal que los segmentos OA, OB y OD son mutuamente perpendiculares y de longitud a y las secciones transversales $WXYZ$ son cuadrados cuyo lado tiene longitud variable x. Con esto, tenemos que el volumen de esta pirámide viene dado por la suma

$$v\,(OABCD) = \sum_O^A x^2$$

Igualmente, la pirámide de la derecha $O'A'B'C'D'$ es tal que los segmentos $O'A'$, $O'B'$ y $O'D'$ son mutuamente perpendiculares y de longitud $\frac{a}{2}$ y las secciones transversales $W'X'Y'Z'$ son cuadrados cuyo lado tiene longitud variable z. Análogamente, su volumen viene dado también como

$$v\,(O'A'B'C'D') = \sum_{O'}^{A'} z^2$$

Como las dimensiones de los segmentos $O'A'$, $O'B'$ y $O'D'$ se han reducido a la mitad, el volumen se ha reducido en una octava parte con respecto a la primera pirámide, esto es

$$\sum_{O'}^{A'} z^2 = \frac{1}{8}\sum_{O}^{A} x^2$$

Y recordemos que nuestro problema original es calcular

$$\sum_{O}^{A} x^2$$

como la observación anterior la hicimos solo en una mitad del segmento AB, ya que sólo tomamos uno triángulos que estan determinados por las lineas de longitud z, entonces:

$$\sum_{A}^{B} z^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{8}\sum_{A}^{B} x^2\right) = \frac{1}{4}\sum_{A}^{B} x^2$$

y sustituyendo, en la ecuación

$$\sum_{A}^{B} a^2 = 4\sum_{A}^{B} x^2 - 4\sum_{A}^{B} z^2$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{A}^{B} a^2 &= 4\sum_{A}^{B} x^2 - 4\sum_{A}^{B} z^2 \\ \sum_{A}^{B} a^2 &= 4\sum_{A}^{B} x^2 - 4\left(\frac{1}{4}\sum_{A}^{B} x^2\right) \\ \sum_{A}^{B} a^2 &= 3\sum_{A}^{B} x^2 \end{aligned}$$

Finalmente, despejando la sumatoria de x^2 y recordando que $\sum_{A}^{B} a^2 = a^3$ tenemos que

$$\sum_{A}^{B} x^2 = \frac{1}{3}\sum_{A}^{B} a^2 = \frac{1}{3}a^3$$

Así, en términos modernos, hemos determinado que

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3$$

Curiosamente, en el texto original de Cavalieri, él calcula estas sumatorias hasta $n = 9$ y de allí generaliza la fórmula

$$\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$$

Cavalieri utiliza en sus demostraciones algo muy particular que es la comparación de figuras, este es un principio que hoy lleva su nombre y dice lo siguiente:

"Si los segmentos de dos figuras planas son iguales en longitud en cada altura dada, entonces las figuras planas tienen la misma área"

De la misma manera

"Si las secciones de dos sólidos en cada altura intermedia son iguales en área, entonces los cuerpos sólidos tiene el mismo volumen"

Ilustremos este principio con un ejemplo aplicado al cálculo de áreas.

"Cálculo del volumen de una esfera"

Ya Arquímedes había encontrado el volumen de la esfera y nos apoyaremos en su construcción para verificar el volumen utilizando el principio de Cavalieri.

Construyamos en una esfera de radio r un cilindro circunscrito con base igual al círculo mayor de la esfera y altura igual al diámetro de esta, es decir, $2r$.

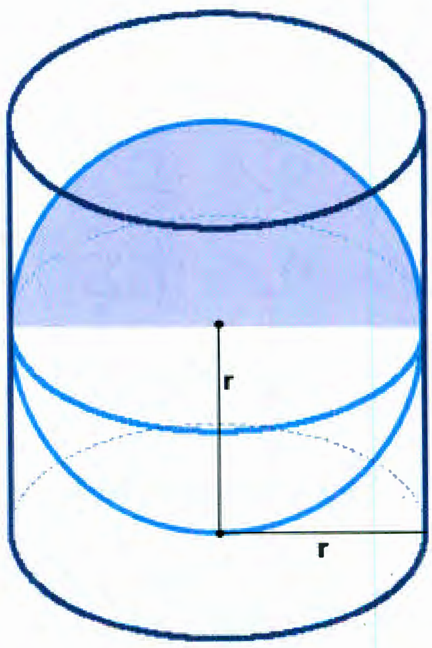


Figura 31

Si cortamos esta construcción por la mitad y nos quedamos con alguna de las dos partes, obtendremos una semiesfera de radio r inscrita en un cilindro de base πr^2 y altura r.

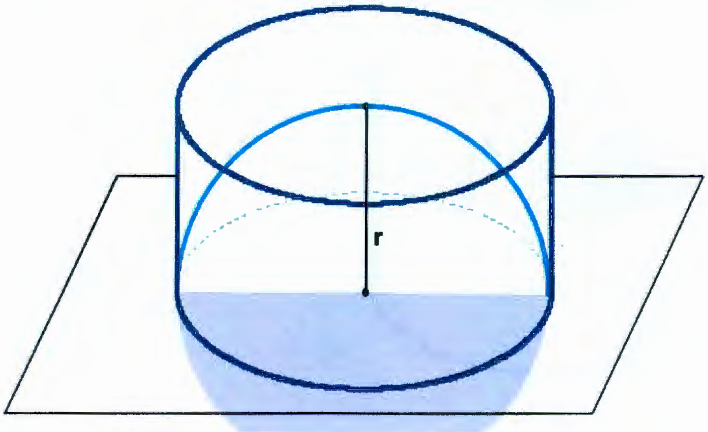


Figura 32

Ahora, construyamos un cono invertido con igual base que la del cilindro y altura r como se muestra en la figura 33.

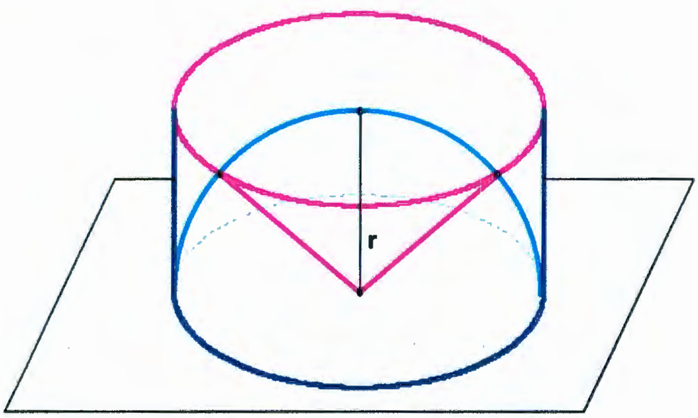


Figura 33

Primero probaremos que, el volumen del cono es igual al que se encuentra entre el cilindro y la semiesfera.

Para esto, hagamos un corte paralelo a la base a una altura h y llamemos A_1 y A_2 a las áreas correspondientes a la intersección del plano con la esfera y el plano con el anillo que queda entre el cono y el cilindro respectivamente.

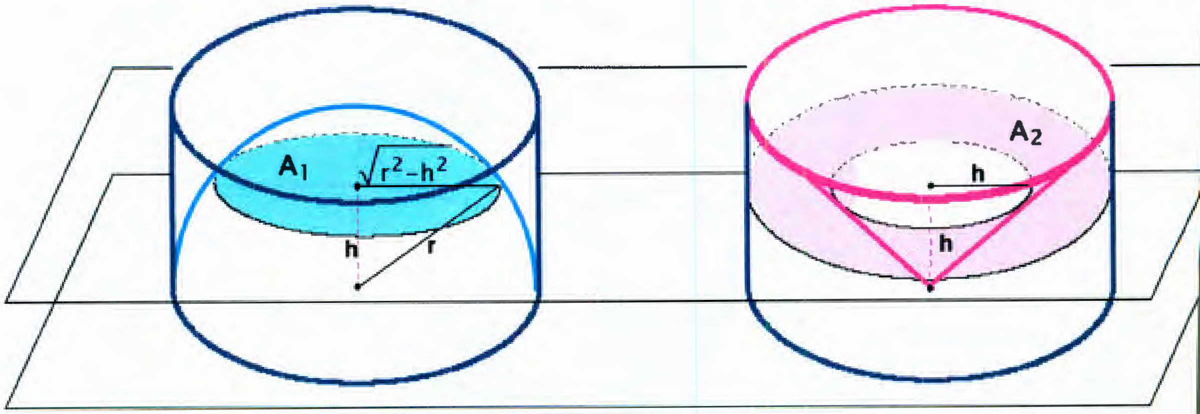


Figura 34

Luego, podemos ver que A_1 es una circulo de radio $\sqrt{r^2 - h^2}$ por lo que

$$\begin{aligned} A_1 &= \pi\left(\sqrt{r^2-h^2}\right)^2 = \pi\left(r^2 - h^2\right) \\ &= \pi r^2 - \pi h^2 \end{aligned}$$

También, A_2 es el área de un círculo de radio r menos el área de un círculo de radio h, esto es,

$$A_2 = \pi r^2 - \pi h^2$$

luego,

$$A_1 = A_2$$

puesto que h es arbitraria, esto se cumple para toda $0 \leq h \leq r$

Esto quiere decir, por el principio de Cavalieri, que dichos volúmenes son iguales, es decir

$$\text{Volumen de la semiesfera} = \text{ volumen del cilindro} - \text{ volumen del cono}$$

pero el volumen de cilindro es igual a $base \times altura$, donde base es un circulo de radio r y la altura mide r por lo que

$$\text{volumen del cilindro} = \pi r^2 * r = \pi r^3$$

También, el área del cono es igual a $\frac{1}{3}base \times altura$, esto es

$$\text{volumen del cono} = \frac{1}{3}\left(\pi r^2 * r\right) = \frac{1}{3}\pi r^3$$

luego

$$\begin{aligned} \text{Volumen de la semiesfera} &= \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\text{volumen de la esfera} &= 2\,(\text{Volumen de la semiesfera}) \\
&= 2\left(\frac{2}{3}\pi r^3\right) \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}$$

3.3.2 Una demostración de la fórmula $\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$

Después de las publicaciones de Cavalieri, hubo matemáticos interesados en demostrar sus resultados y en dar generalizaciones sobre estos. Fermat, Roberval y Pascal son los que dan demostraciones más rigurosas de la formula general:

$$\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

En sus demostraciones hacían uso del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + ... + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

ya para esa época se conocían algunas fórmulas de sumas como

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3... + n &= \frac{n}{2}(n+1) \\
1^2 + 2^2 + ... + n^2 &= \frac{2}{6}(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

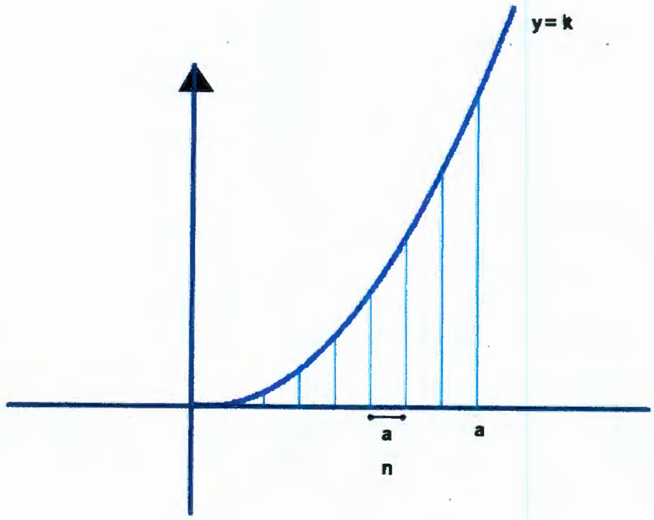
dividiendo la primera entre n^2 y la segunda entre n^3 y tomando el límite cuando n tiende a infinito se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 3... + n}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{6}(n+1)(n+2)}{n^3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

en general,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + ... + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

Para encontrar el valor de la integral tomemos la curva $y = x^k$ y dividamos el intervalo $[0, a]$ en n subintervalos iguales de longitud $\frac{a}{n}$



Y construyamos polígonos inscritos P_n y circunscritos Q_n tal que para cada rectángulo P_i su base es $\frac{a}{n}$ y su altura es $\left(\frac{(i-1)a}{n}\right)^k$ y para cada rectángulo Q_i su base es $\frac{a}{n}$ y su altura $\left(\frac{(ia)}{n}\right)^k$

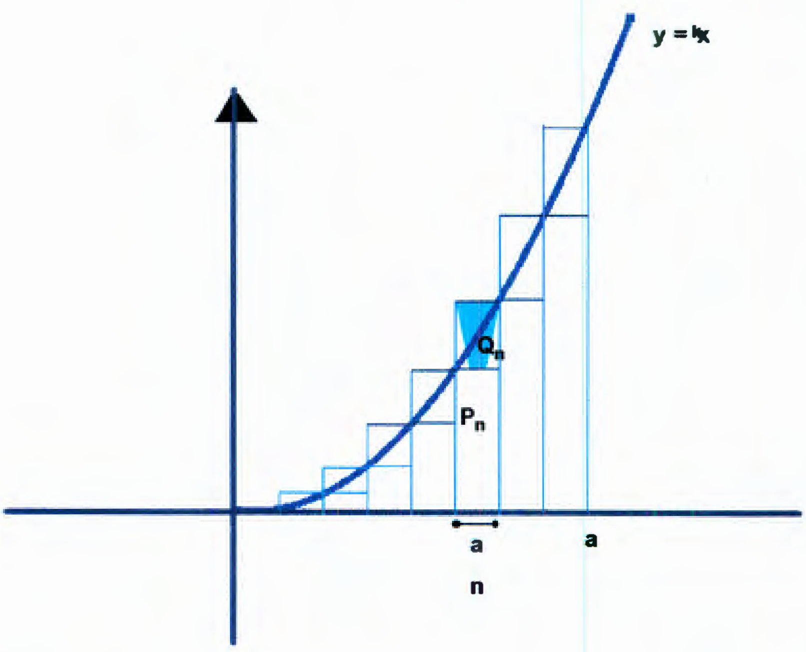


Figura 35

Sea $a(P_n)$ y $a(Q_n)$ la suma de las áreas de los rectángulos P_n y Q_n respectivamente, luego

$$\begin{aligned}
a(P_n) &= \frac{a}{n}\left(\frac{(1-1)\,a}{n}\right)^k + \frac{a}{n}\left(\frac{(2-1)\,a}{n}\right)^k + \ldots + \frac{a}{n}\left(\frac{(n-1)\,a}{n}\right)^k \\
&= 0 + \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^k + \ldots + \frac{a}{n}\left(\frac{(n-1)\,a}{n}\right)^k = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} + \ldots + \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}(n-1)^k \\
&= \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\left(1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(Q_n) &= \frac{a}{n}\left(\frac{(1)\,a}{n}\right)^k + \frac{a}{n}\left(\frac{(2)\,a}{n}\right)^k + \ldots + \frac{a}{n}\left(\frac{(n)\,a}{n}\right)^k \\
&= \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^k + \ldots + \frac{a}{n}\left(\frac{na}{n}\right)^k = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} + \ldots + \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}(n)^k \\
&= \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\left(1^k + 2^k + \ldots + (n)^k\right)
\end{aligned}$$

si denotamos por S la región bajo la curva $y = x^k$ en el intervalo $[0, a]$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\left(1^k + 2^k + \ldots + (n)^k\right) - \frac{a^{k+1}\left(n^k\right)}{n^{k+1}} &< a(S) < \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\left(1^k + 2^k + \ldots + (n)^k\right) \\
a^{k+1}\frac{\left(1^k + 2^k + \ldots + (n)^k\right)}{n^{k+1}} - \frac{a^{k+1}}{n} &< a(S) < a^{k+1}\frac{\left(1^k + 2^k + \ldots + (n)^k\right)}{n^{k+1}}
\end{aligned}$$

si ahora tomamos el límite cuando n tiende a infinito se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[a^{k+1}\frac{\left(1^k + 2^k + \ldots + (n)^k\right)}{n^{k+1}} - \frac{a^{k+1}}{n}\right] &< a(S) < \lim_{n\to\infty} a^{k+1}\frac{\left(1^k + 2^k + \ldots + (n)^k\right)}{n^{k+1}} \\
\lim_{n\to\infty} a^{k+1}\frac{\left(1^k + 2^k + \ldots + (n)^k\right)}{n^{k+1}} &< a(S) < \lim_{n\to\infty} a^{k+1}\frac{\left(1^k + 2^k + \ldots + (n)^k\right)}{n^{k+1}}
\end{aligned}$$

de donde se tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} a^{k+1}\frac{\left(1^k + 2^k + \ldots + (n)^k\right)}{n^{k+1}} = a(S)$$

pero sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} a^{k+1}\frac{\left(1^k + 2^k + \ldots + (n)^k\right)}{n^{k+1}} = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}$$

y que

$$a(S) = \int_0^a x^k dx$$

por lo que se tiene que

$$
\begin{aligned}
a(S) &= \int_0^a x^k dx = \lim_{n\to\infty} a^{k+1}\frac{\left(1^k+2^k+...+(n)^k\right)}{n^{k+1}} = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} \\
\int_0^a x^k dx &= \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}
\end{aligned}
$$

y es lo que queriamos probar.

3.4 Wallis y la integración de potencias fraccionarias

Uno de los matemáticos que abordo el problema de calcular integrales de curvas de la forma $y = x^k$, donde k no es necesariamente un entero fue, Jhon Wallis (1616-1703).

De igual manera, Wallis ya conocía el área bajo la curva $y = x^k$, k entero positivo sobre el intervalo unitario y verifica la siguiente relación

$$\int_0^1 x^k dx = \lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+...+n^k}{n^k+n^k+...+n^k}$$

La forma de calcular este límite era empírico, por ejemplo, tomemos el caso para $k = 3$ y observemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{0^3+1^3}{1^3+1^3} &= \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\
\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3} &= \frac{9}{24} = \frac{1}{4}+\frac{1}{8} \\
&\vdots \\
\frac{0^3+1^3+2^3+...+6^3}{6^3+6^3+6^3+...+6^3} &= \frac{441}{1512} = \frac{1}{4}+\frac{1}{24}
\end{aligned}
$$

en general

$$\frac{0^3+1^3+...+n^3}{n^3+n^3+...+n^3} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4n}$$

si tomamos el límite cuando n tiende a infinito se tiene que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{0^3+1^3+...+n^3}{n^3+n^3+...+n^3} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}\right) \\
\lim_{n\to\infty}\frac{0^3+1^3+...+n^3}{n^3+n^3+...+n^3} &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Tomando valores pequeños de k Wallis infiere que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+...+n^k}{n^k+n^k+...+n^k} = \frac{1}{k+1} \qquad \cdots\cdots\cdots(\clubsuit)$$

y como

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

entonces

$$\int_0^1 x^k dx = \lim_{n\to\infty} \frac{0^k + 1^k + ... + n^k}{n^k + n^k + ... + n^k}$$

A partir de estas deducciones Wallis resuelve el problema para el caso en que k no es un entero. Lo primero que hace es definir el índice $I\{\phi\}$ de una función ϕ por medio de la siguiente ecuación

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(0) + \phi(1) + ... + \phi(n)}{\phi(n) + \phi(n) + ... + \phi(n)} = \frac{1}{I\{\phi\}+1}$$

dando por hecho que éste límite existe. Esto quiere decir que en la ecuación (♣) la función ϕ esta dada por

$$\phi(x) = x^k$$

y

$$I\{\phi\} = I\{x^k\} = k$$

De aquí Wallis nota que dada una progresión geométrica de potencias positivas le corresponde una sucesión de índices de una progresión aritmética, por ejemplo:

La progresión

$$1, x^2, x^4, x^6, ..$$

le corresponde la sucesión

$$0, 2, 4, 6, ...$$

A partir de esta observación, da por hecho que también se cumple para progresiones geométricas como

$$1, \left(\sqrt[q]{x}\right), \left(\sqrt[q]{x}\right)^2, ..., \left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1}$$

donde a esta progresión le correspondería la sucesión de índices siguiente:

$$\left(I\{1\} = \left\{\left(\sqrt[q]{x}\right)^0\right\} = 0\right), I\left\{\sqrt[q]{x}\right\}, ..., I\left\{\left(\sqrt[q]{x}\right)^p\right\}, ..., \left(I\left\{\left(\sqrt[q]{x}\right)^q\right\} = 1\right)$$

por lo que

$$I\left\{\left(\sqrt[q]{x}\right)^p\right\} = \frac{p}{q}$$

y a partir de la ecuación definida por Wallis tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[q]{0}\right)^p + \left(\sqrt[q]{1}\right)^p + ... + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p}{\left(\sqrt[q]{n}\right)^p + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p + ... + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p} = \frac{1}{\frac{p}{q}+1} = \frac{q}{p+q}$$

pero

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[q]{0}\right)^p + \left(\sqrt[q]{1}\right)^p + ... + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p}{\left(\sqrt[q]{n}\right)^p + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p + ... + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p} &= \int_0^1 \left(\sqrt[q]{x}\right)^p dx \\
\int_0^1 \left(\sqrt[q]{x}\right)^p dx &= \frac{q}{p+q}
\end{aligned}$$

Podemos decir que es la forma en que Wallis resolvió esta integral, aunque, no se tiene la certeza de que haya relacionado el exponente p/q con la potencia $(\sqrt[q]{x})^p$. Y sólo verificó que ese límite es válido para el caso $p = 1$, basándose en la siguiente figura

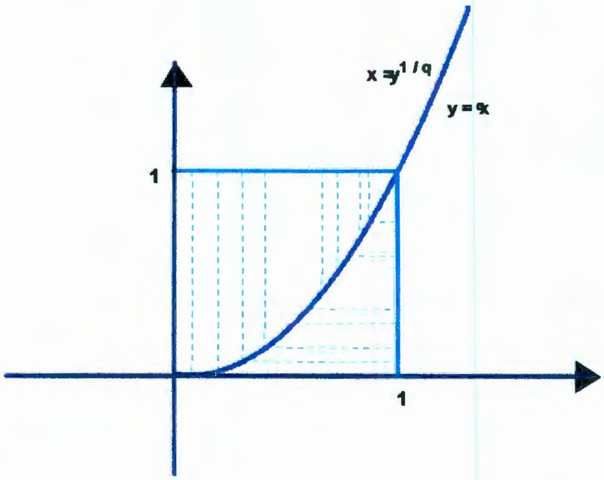


Figura 36

lo cual, es muy sencillo verificar y se deja como ejercicio.

3.5 Ejercicios

1. a) Prueba por el método de exhaución utilizado por Arquímedes que, el área de un círculo es igual al área del triángulo rectángulo en el cuál, uno de sus catetos, es igual al radio y el otro, a su circunferencia.

   b) Da la fórmula para el área del círculo, que incluye su radio y perímetro.

2. Prueba por medio del método de exhaución que el área de una elipse con semi-ejes mayor y menor de longitud a y b respectivamente, es:

$$A = \pi ab$$

3. Considera una función continua $r = f(\theta)$ descrita en coordenadas polares, donde S es el polo. Determina, de acuerdo con la idea de Kepler, que el área entre las rectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y la curva $r = f(\theta)$, es

$$A = \frac{1}{2} \int rds$$

   ¿Es cierta esta afirmación?

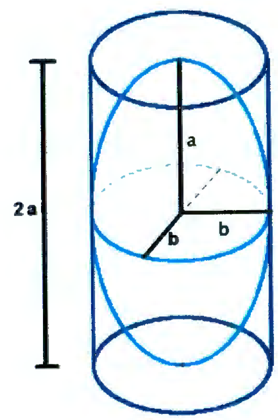
4. Investiga, ¿Cuál es la fórmula exacta para el área del ejercicio anterior?¿Cuál es la diferencia entre las dos fórmulas?

5. Muestra que, cuando las fórmulas de los dos ejercicios anteriores son iguales, entonces $r = f(\theta)$ es una circunferencia.

6. Expande la expresión $\sum a^3 = \sum (x+y)^3$ y verifica por el método de Cavalieri que

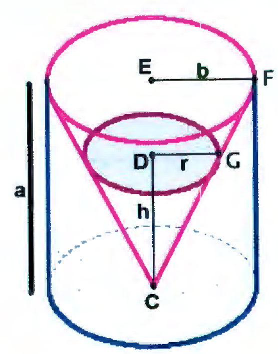
$$\sum x^3 = \frac{1}{4}\sum a^3 = \frac{1}{4}a^4$$

7. La siguiente figura es un elipsoide de revolución.



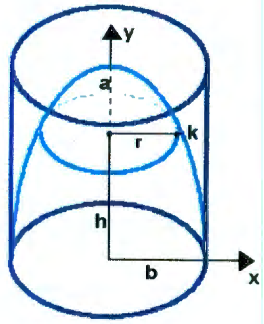
Corta la figura por la mitad, toma la parte superior y construye un cono invertido inscrito al cilindro con su misma base y altura a, posteriormente realiza un corte horizontal a una altura h y verifica lo siguiente.

a) La intersección del cono con el plano horizontal tiene área A_1 igual a $\pi\left(\frac{b}{a}h\right)^2$



b) La intersección del elipsoide con el plano horizontal tiene un área A_2 igual a $\pi b^2 -$

$\pi\left(\frac{b}{a}h\right)^2$



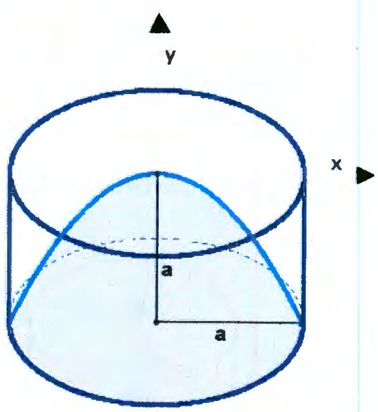
c)

$$A_2 = \text{intersección del cilindro con el plano horizontal} - A_1$$

8. Verifica mediante el principio de Cavalieri que el volumen del elipsoide del ejercicio anterior es

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

9. Prueba por el principio de Cavalieri, que el volumen de un segmento de paraboloide de revolución inscrito en un cilindro de base πa^2 y altura a, es $\frac{1}{2}$ del volumen del cilindro.



10. Dado un segmento de paraboloide como el del ejercicio anterior. Muestra que el volumen del cono de igual base e igual altura es, dos terceras partes, el volumen del paraboloide.

11. Comprueba que es correcta la fórmula de Wallis, siguiente:

$$\frac{0^2 + 1^2 + ... + n^2}{n^2 + n^2 + ... + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

para $n = 1, 2, 3, 4$.

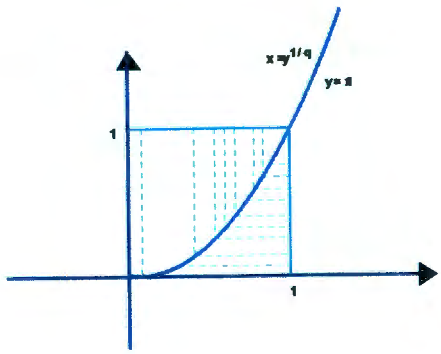
12. Dada la siguiente igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(0)+\phi(1)+\ldots+\phi(n)}{\phi(n)+\phi(n)+\ldots+\phi(n)} = \frac{1}{5}$$

¿Quién es $\phi(x)$?, ¿ Cuanto vale $I\{\phi(x)\}$?

13. De acuerdo a la siguiente figura, muestra que

$$\int_0^1 x^{1/q}dx = \frac{1}{1+1/q}$$



4 Derivadas

4.1 Construcción de tangentes

De entre los intentos más notables para calcular tangentes, destacan los trabajos de Apolonio, célebre matemático griego que vivió alrededor del año 200 antes de Cristo. A continuación describiremos, a grandes rasgos uno de sus métodos que, aunque es un caso particular, ilustra claramente el uso de matemáticas elementales en el trazo de tangentes.

Antes que nada, conviene aclarar que la definición de tangente que utiliza Apolonio es muy geométrica, pues define dicha línea como aquella que *toca* pero no *corta* (en otro punto cercano) a la curva.

Teniendo en mente esta definición intuitiva, consideremos la siguiente figura, donde se representa una parábola con parámetro p, vértice E y eje focal ES.

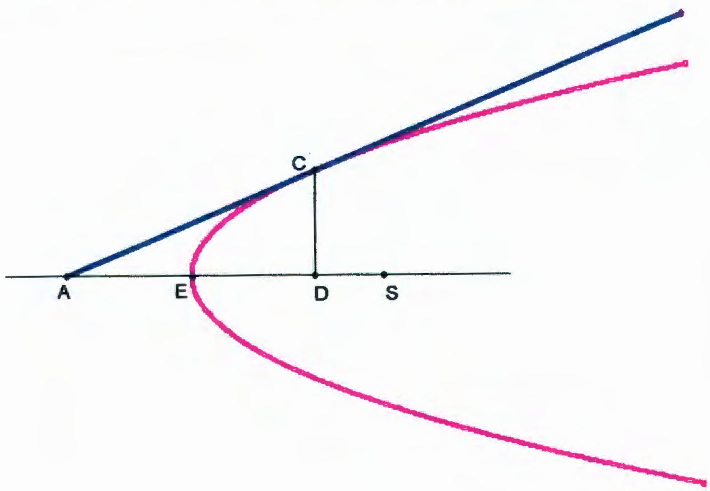


Figura 37

Así, si el problema es trazar la tangente a la parábola en el punto C, la estrategia (geométrica) de solución consiste en bajar del punto C una perpendicular al eje focal, hasta encontrar al punto D. Ahora, considerando al punto A sobre el mismo eje con la propiedad de que $AE = ED$, entonces AC es la recta buscada.

Algunas propiedades que utilizaremos para la demostración de este hecho son las siguientes

De las propiedades de la parábola sabemos que, en general, para cualquier punto C, se tiene que

$$CD^2 = p \cdot ED$$

Si a y b son dos cantidades positivas, se tiene que

$$4ab \leq (a+b)^2$$

Un caso particular importante en esta desigualdad es

$$a = b \Leftrightarrow 4ab = (a+b)^2$$

PROPOSICIÓN: Sea GCE una parábola con eje focal ES. Si CD es perpendicular a ES y el eje se extiende a A tal que $AE = ED$, entonces AC es tangente a la parábola en C.

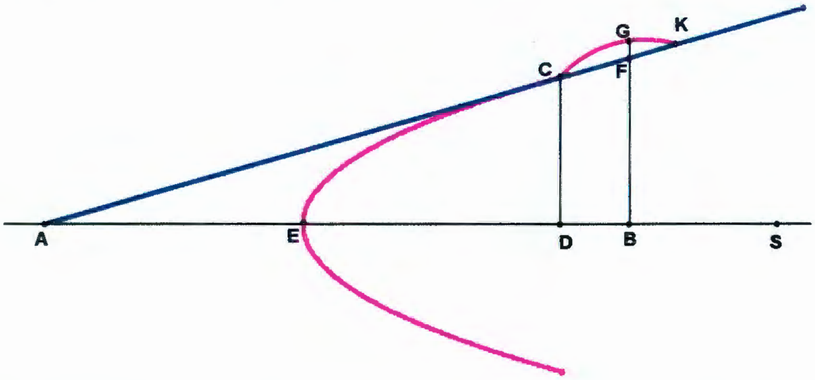


Figura 38

Para demostrar la proposición, supongamos que la recta no es tangente, esto es, corta a la parábola en algún otro punto K. Sea F en el segmento CK dentro de la parábola y constrúyase FB perpendicular a ED. Sea G la intersección de la prolongación de FB con la parábola.

Claramente, tenemos que

$$BG^2 > BF^2$$

Además, como los triángulos ADC y ABF son semejantes

$$\frac{BF}{CD} = \frac{AB}{AD}$$

de estas dos relaciones, llegamos a que

$$\frac{BG^2}{CD^2} > \frac{BF^2}{CD^2} = \frac{AB^2}{AD^2}$$

Como G y C son puntos de la parábola y llamando p al parámetro, tenemos

$$BG^2 = p \cdot EB \text{ y } CD^2 = p \cdot ED$$

dividiendo estas igualdades, obtenemos

$$\frac{BG^2}{CD^2} = \frac{EB}{ED}$$

Sabemos ya que

$$\frac{BG^2}{CD^2} > \frac{AB^2}{AD^2} \text{ y } \frac{BG^2}{CD^2} = \frac{EB}{ED}$$

por lo que

$$\frac{EB}{ED} > \frac{AB^2}{AD^2}$$

multiplicando y dividiendo el lado derecho de esta desigualdad por $4 \cdot EA$ obtenemos

$$\frac{4 \cdot EB \cdot EA}{4 \cdot ED \cdot EA} > \frac{AB^2}{AD^2}$$

lo que es equivalente con

$$\frac{4 \cdot EB \cdot EA}{AB^2} > \frac{4 \cdot ED \cdot EA}{AD^2}$$

En este momento, observemos que por construcción, $AE = ED$ y que $AE + ED = AD$, por lo que si utilizamos la identidad ya mencionada $4ab = (a+b)^2$ con $a = AE$ y $b = ED$, llegamos a que

$$\frac{4 \cdot EB \cdot EA}{AB^2} > \frac{4 \cdot ED \cdot EA}{AD^2} = 1$$

Por otra parte, como $AE < EB$, por la desigualdad $4ab < (a+b)^2$, haciendo $a = AE$ y $b = EB$ y observando que $AE + EB = AB$, obtenemos que

$$4 \cdot EB \cdot EA < AB^2$$

es decir

$$\frac{4 \cdot EB \cdot EA}{AB^2} < 1$$

De esta manera, tenemos que simultáneamente

$$\frac{4 \cdot EB \cdot EA}{AB^2} > 1 \text{ y } \frac{4 \cdot EB \cdot EA}{AB^2} < 1$$

lo que es un absurdo. Luego la recta AC no corta a la parábola y según la definición antigua, la recta es tangente.

4.2 Método del círculo de Descartes

Otra forma de encontrar tangentes se puede ver en los trabajos de Descartes, con su método del círculo. dicho método, se caracteriza por encontrar la recta tangente a partir de la recta normal, y consiste en lo siguiente:

Consideremos una función $y = f(x)$, para encontrar la recta tangente en el punto $P = (x, f(x))$ tomemos el punto $C = (v, 0)$ sobre el eje X que es la intersección de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto P (véase figura 4), esto quiere decir que la tangente será la recta perpendicular a la normal en el punto P.

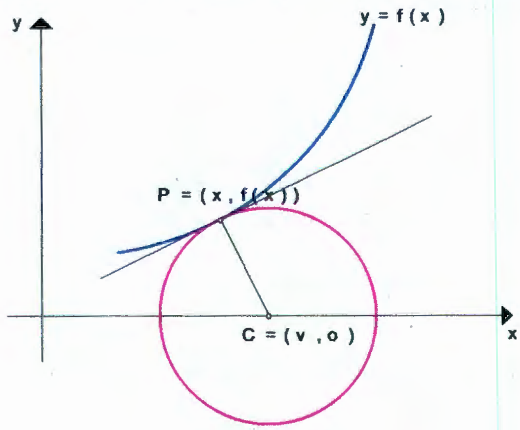


Figura 39

Ahora el problema es localizar el punto C y así se tendrá la tangente buscada, pero éste punto es el centro de una circunferencia tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P.

En general, una circunferencia con centro en $C = (v, 0)$ y radio $r = CP$ intersecará a la curva en P y en otro punto Q cerca de P (*figura 5*). Para que el radio CP sea normal a la curva (y la circunferencia sea tangente), P debe ser "*punto doble*" en la intersección de la curva $y = f(x)$ con la circunferencia mencionada la cual tiene como ecuación

$$(x - v)^2 + y^2 = r^2$$

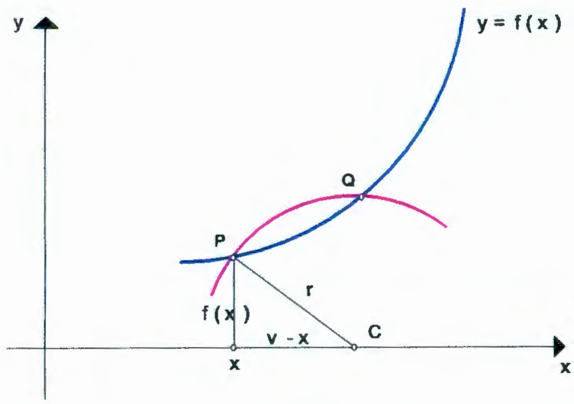


Figura 40

Consideremos a $f(x)$ como un polinomio. Luego, los puntos P y Q de la intersección de la curva y la circunferencia, los podemos calcular resolviendo de manera simultanea las ecuaciones $y = f(x)$ y la ecuación de la circunferencia, esto es, resolver

$$(x - v)^2 + [f(x)]^2 = r^2$$

Que P sea punto doble de ésta intersección, significa que la absisa x del punto P debe ser raíz doble de ésta igualdad, que por nuestra restricción deberá ser un polinomio.

Entonces, si $x = e$ es raíz doble, la expresión anterior la podemos escribir como

$$(x - v)^2 + [f(x)]^2 - r^2 = (x - e)^2 \sum c_i x^i \quad \cdots\cdots (\bigstar\bigstar)$$

donde la sumatoria indica la parte que queda de la expresión polinómica después de factorizar la raíz doble.

En esta ecuación, igualamos los coeficientes de las mismas potencias de x y resolvemos para v en términos de la raíz $x = e$. Como la pendiente m de la recta normal CP la podemos calcular utilizando los puntos $C = (v, 0)$ y $P = (x, f(x))$ llegamos a

$$m = \frac{0 - f(x)}{v - x} = -\frac{f(x)}{v - x}$$

de donde la pendiente de la recta tangente deberá ser la recíproca y de signo contrario

$$f'(x) = \frac{v - x}{f(x)}$$

con lo que queda resuelto el problema.

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2$

Entonce, sustituímos $f(x)$ en

$$(x - v)^2 + [f(x)]^2 = r^2$$

y tenemos que

$$(x - v)^2 + [x^2]^2 = r^2$$

haciendo que e sea una raíz doble de $f(x)$ tenemos que

$$(x - v)^2 + [x^2]^2 - r^2 = (x - e)^2(x^2 + ax + b)$$

y reacomodando nos queda

$$x^4 + x^2 - 2vx + \left(v^2 - r^2\right) = x^4 + (a - 2e)x^3 + (b - 2ae + e^2)x^2 + (ae^2 - 2be)x + be^2$$

al igualar los coeficientes tenemos

$$a - 2e = 0$$

$$b - 2ae + e^2 = 1$$

$$ae^2 - 2be = -2v$$

resolvemos para v, y resulta

$$v = 2e^3 + e$$

sustituyendo $e = x$, obtenemos

$$v = 2x^3 + x$$

por lo que la pendiente de la recta tangente es

$$\frac{v - x}{f(x)} = \frac{(2x^3 + x) - x}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2} = 2x$$

Ya hemos mostrado una forma de encontrar la pendiente de la recta tangente, y hemos utilizado hecho de encontrar una raíz doble resolviendo la ecuación

$$(x - v)^2 + [f(x)]^2 - r^2 = (x - e)^2 \sum c_i x^i$$

esto no es tedioso cuando el grado del polinomio $f(x)$ es pequeño, pero cuando el grado del polinomio es muy grande ya los cálculos no son tan sencillos.

4.2.1 Regla de Hudde

Una forma de encontrar la raíz doble es utilizando la *regla de Hudde* la cual, nos facilita un poco este proceso cuando el grado del polinomio es grande.

Dado un polinomio

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Construimos un segundo polinomio $F^*(x)$ de la siguiente manera:

Tomemos una progresión geométrica arbitraria

$$a, a+b, a+2b, ..., a+nb$$

a cada término de $F(x)$ lo multiplicamos por un término de esta progresión, de manera que al $n-ésimo$ término de $f(x)$ le corresponda el $n-ésimo$ termino de la progresión, por lo que el polinomio resultante será

$$F^*(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(a+ib)x^i$$

Si tomamos la progresión donde $a = 0$ y $b = 1$ el término x^i quedará multiplicado por i, luego

$$F^*(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i i x^i = x \sum_{i=0}^{n} a_i i x^{i-1} = xF'(x)$$

$$F^*(x) = xF'(x)$$

donde $F'(x)$ es la derivada del polinomio $F(x)$.

Si regresamos al caso general de la progresión podemos ver que

$$F^*(x) = aF(x) + bxF'(x)$$

La *regla de Hudde* dice que una raíz doble de $F(x) = 0$ es raíz de $F^*(x) = 0$.

Esto es cierto ya que si e es una raíz doble de $F(x)$, entonces la podemos escribir de la siguiente manera

$$F(x) = (x-e)^2 \sum c_i x^i = \sum c_i \left(x^{i+2} - 2ex^{i+1} + e^2 x^i\right)$$

Sea $A_i = a + ib$, luego

$$\begin{aligned}
F^*(x) &= \sum c_i \left(A_{i+2}x^{i+2} - 2eA_{i+1}x^{i+1} + e^2A_ix^i\right) \\
&= \sum c_i \left(A_{i+2}x^2 - 2eA_{i+1}x + e^2A_i\right)x^i \\
&= \sum c_i \left([a+(i+2)b]\,x^2 - 2e\,[a+(i+1)b]\,x + e^2A_i\right)x^i \\
&= \sum c_i \left(A_i+2b)x^2 - 2e(A_i+b)x + e^2A_i\right)x^i \\
&= \sum c_i \left[A_i(x-e)^2 + 2bx(x-e)\right]x^i \\
&= (x-e)\sum c_i\left[A_i(x-e)+2bx\right]x^i
\end{aligned}$$

de ésta última expresión podemos ver que e es raíz de $F^*(x)$

Para el caso particular cuando $F^*(x) = xF'(x)$ también cumple que una raíz doble de $F(x)$ sea una raíz de $F'(x)$.

Veamos que lo que interesa no es encontrar explícitamente el valor de la raíz doble, más bien, es encontrar el centro de la circunferencia que sea tangente a la curva dada. Ilustremos esto mediante un ejemplo

Ejemplo: Encontrar la pendiente da la recta tangente a la curva $f(x) = x^4$, utilizando el método del círculo y la regla de Hudde

Partiendo de la condición del círculo

$$(x-v)^2 + [f(x)]^2 = r^2$$

tomemos el polinomio $F(x)$ como sigue

$$\begin{aligned}
F(x) &= (x-v)^2 + [f(x)]^2 - r^2 = 0 \\
&= (x-v)^2 + [x^4]^2 - r^2 \\
&= x^2 - 2vx + v^2 + x^8 - r^2 \\
&= x^8 + x^2 - 2vx + (v^2 - r^2)
\end{aligned}$$

a partir de aquí se construirá el polinomio $F^*(x)$para el caso particular donde $a=0$ y $b=1$, en la progresión geométrica, por lo que cada término de $F(x)$ quedará multiplicado sólo por su grado correspondiente, esto es

$$\begin{aligned}
F^*(x) &= (8)\,x^8 + (2)\,x^2 - (1)\,2vx + (0)\,(v^2 - r^2) = 0 \\
&= 8x^8 + 2x^2 - 2vx = 0
\end{aligned}$$

como v es una raíz doble de $F(x)$, también es una raíz de $F^*(x)$. Luego el valor de v es

$$v = 4x^7 + x$$

de donde la pendiente, de acuerdo al método del círculo de la recta tangente es

$$\frac{v-x}{f(x)} = \frac{(4x^7+x)-x}{x^4} = \frac{4x^7}{x^4} = 4x^3$$

Ejemplo Retomando nuevamente $f(x) = x^2$, encontrar la pendiente utilizando la *regla de Hudde*

Iniciando a partir de la ecuación del círculo

$$(x - v)^2 + [x^2]^2 = r^2$$

Por lo que

$$\begin{aligned} F(x) &= (x - v)^2 + [x^2]^2 - r^2 = 0 \\ &= x^2 - 2xv + v^2 + x^4 - r^2 \\ &= x^4 + x^2 - 2xv + v^2 - r^2 \end{aligned}$$

Tomando $a = 0$ y $b = 1$ en la progresión tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} F^*(x) &= (4)x^4 + (2)x^2 - (1)2vx + (0)v^2 - (0)r^2 = 0 \\ &= 4x^4 + 2x^2 - 2vx = 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$v = 2x^3 + x$$

por lo que la pendiente de la recta tangente es

$$f'(x) = \frac{v - x}{f(x)} = \frac{(2x^3 + x) - x}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2} = 2x$$

4.3 Método de la "seudo igualdad de Fermat"

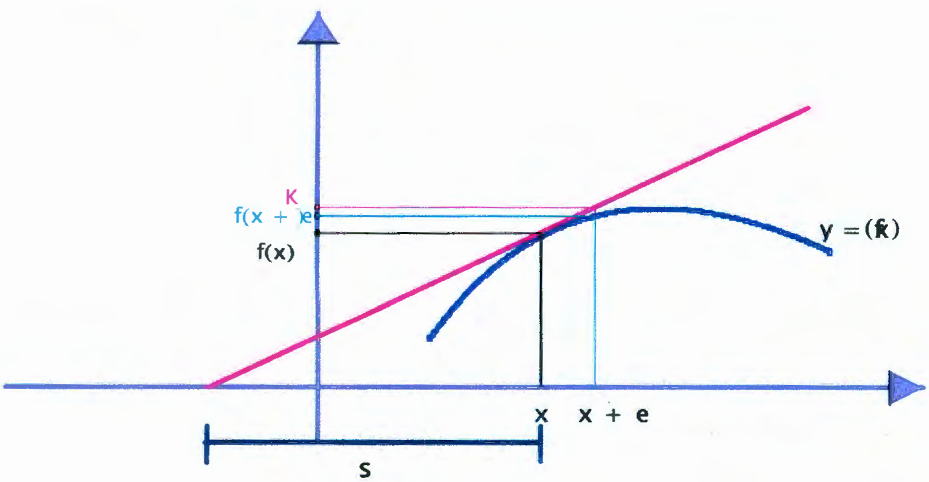


Figura 41

Siguiendo con el problema de las tangentes, nos encontramos con Fermat, que vivió en el siglo XVII (1601-1665), el cual utiliza una "seudo igualdad" para construir rectas tangentes. Es un método muy interesante ya que en su procedimiento involucra la idea intuitiva de limite, pero no hace ninguna justificación al respecto.

En la figura de arriba podemos ver que si trazamos la tangente a la curva en el punto $f(x)$ y si tomamos el punto $x+e$ cercano a x entonces $f(x+e)$ se encuentra cercano a $f(x)$.

Tomemos los triángulos rectángulos de base s y $s+e$ y altura $f(x)$ y k respectivamente, dichos triángulos son semejantes por lo que tenemos lo siguiente:

$$\frac{s+e}{s}=\frac{k}{f(x)}$$

si sustituimos k por $f(x+e)$ en la igualdad anterior tenemos

$$\frac{s+e}{s}\sim\frac{f(x+e)}{f(x)}$$

resolvemos para la *sub-tangente* s donde

$$s\sim\frac{ef(x)}{f(x+e)-f(x)}$$

Eliminamos e del numerador (en notación moderna es multiplicar el numerador y el denominador por $\frac{1}{e}$) y obtenemos lo siguiente

$$s\sim\frac{f(x)}{[f(x+e)-f(x)]/e}$$

Luego eliminamos del denominador e con los términos que lo contengan y el resultado será una expresión para la subtangente.

En términos modernos podemos decir que para eliminar e del denominador tomamos el límite cuando $e\to 0$, de donde llegamos a que

$$s=\frac{f(x)}{f'(x)}$$

como la pendiente de la tangente es

$$\frac{f(x)}{s}$$

de la ecuación anterior tenemos que

$$f'(x)=\frac{f(x)}{s}$$

que es la definición conocida para la tangente a la curva f en el punto x

Veamos con un ejemplo el procedimiento del método

Ejemplo: Sea $f(x)=x^2$ encontrar $f'(x)$.

Sustituyendo en la ecuación de la subtangente tenemos que

$$
\begin{aligned}
s &\sim \frac{ef(x)}{f(x+e)-f(x)} \\
&\sim \frac{ex^2}{(x+e)^2-x^2} = \frac{x^2}{2x+e}
\end{aligned}
$$

eliminamos los términos que contengan la e, luego

$$s = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f'(x)}{s} = \frac{x^2}{x/2} = 2x \\
f'(x) &= 2x
\end{aligned}
$$

4.3.1 Un problema de optimización

Otro de los problemas en cálculo es el de encontrar máximos y mínimos de una función, una solución a algunos problemas se encuentra en los trabajos de Fermat que a continuación se describe.

Supongamos que se tiene un segmento de longitud b y lo subdividimos en dos segmentos, x y $b-x$. El problema es encontrar el área máxima del rectángulo con lados x y $b-x$, para ello debemos encontrar el valor de x para el cual $x(b-x) = xb - x^2$ alcanza un valor máximo.

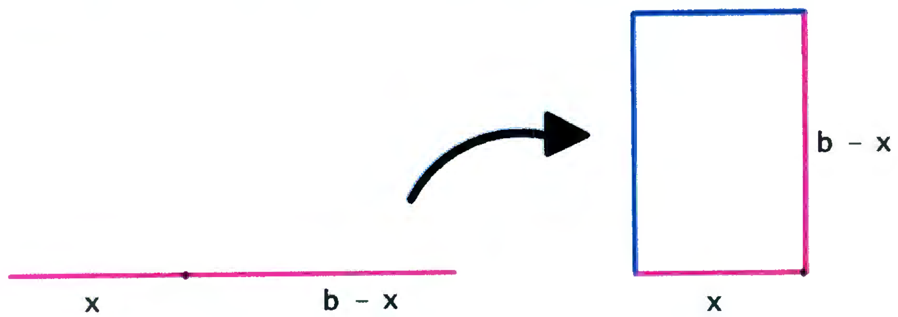


Figura 42

si sustituimos $x+e$ por x se tenemos

$$(x+e)\,b-(x+e)^2 = xb + be - x^2 - 2ex - e^2$$

y escribimos la siguiente "seudo igualdad"

$$xb + be - x^2 - 2ex - e^2 \sim xb - x^2$$

Esto quiere decir que el valor de $x+e$ es aproximadamente igual al valor de x y cancelando términos semejantes tenemos

$$be - 2ex - e^2 \sim 0$$

y dividiendo todo entre e tenemos

$$\frac{be - 2ex - e^2}{e} \sim \frac{0}{e}$$

$$b - 2x - e \sim 0$$

$$2x + e \sim b$$

Finalmente eliminamos el termino e y transformamos esta "seudo igualdad" en una igualdad verdadera, resultando

$$x = \frac{b}{2}$$

el cual dá el valor de x para el que $x(b-x)$, es máximo. Eso es cierto ya que el rectángulo que ocupa mayor área es el cuadrado, que debe tener como lado $\frac{b}{2}$.

Una objeción inmediata a estos métodos es lo particular que resultan, pero pueden dar una idea de como resolver problemas particulares de cálculo conociendo las herramientas del álgebra y la geometría.

Observemos el caso del rectángulo que los pasos que realizamos para encontrar el valor de x, se pueden escribir con terminología moderna tomando una función f, donde el valor de $f(x)$ y $f(x+e)$ cambia muy poco cuando x es un máximo (o mínimo) como lo podemos observar en la siguiente figura

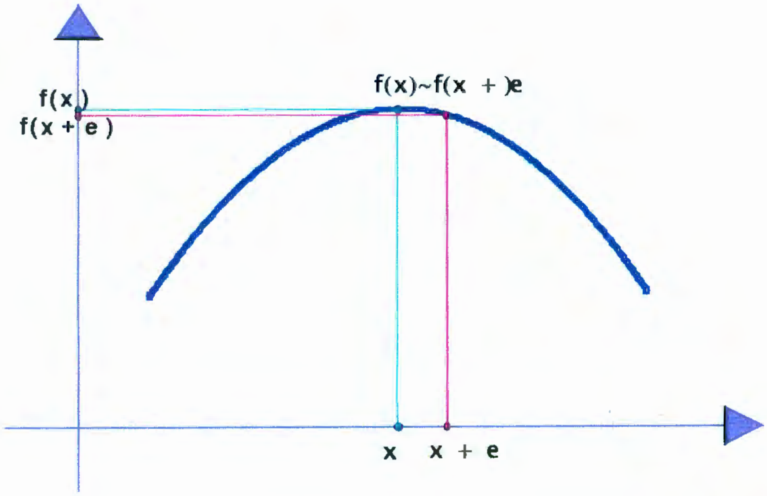


Figura 43

4.4 Ejercicios

1. Utiliza el método de Descartes para encontrar la normal a la curva $y^2 = 4x$ en el punto $(1, 2)$.
2. Aplica el método de Descartes para probar que la subnormal de $f(x) = x^{3/2}$ es $v - x = \frac{3}{2}x^2$. Y encuentra la pendiente de la recta tangente a la curva.
3. Aplica el método del círculo, usando la regla de Hudde, para encontrar la derivada de $f(x) = x^3 + 2x$
4. Utiliza el método de Fermat para hallar la tangente a la curva $x^2 = 4y$ en el punto $(2, 1)$
5. Utiliza el método de Fermat para encontrar la subtangente a $f(x) = x^2 + 3x$ y además encuentra la pendiente de la recta tangente.
6. Aplicar el método de Fermat para encontrar el valor máximo de $f(x) = bx^2 - x^3$ para $0 \leq x \leq b$.
7. Encuentra la tangente a la curva $y = x^{\frac{2}{3}}$ en el punto $(1, 1)$
8. Encuentra los valores máximos y mínimos de $(x + 1)(2x^2 + 5x - 7)$.
9. Encuentra la derivada de $(x^2 + 1)^{3/2}$, usando alguno de los métodos propuestos.
10. Demuestra que la derivada de $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$

5 Sobre los ejercicios

5.1 Sugerencias para los ejercicios

5.1.1 Límites

1. Utiliza el aximoma de Arquímedes para probar que

$$\frac{M}{N} < \varepsilon \text{ para algún } N \in \mathbb{N}$$

y utiliza que

$$r^n < \frac{1}{n}$$

2. Utiliza los polígonos inscritos usados en la demostración de la cuadratura de la parábola. Despues, usa la idea de la demostración de que el área del círculo se puede aproximar por un polígono inscrito.

3. Haz un procedimiento semejante a la demostración de que el lado y la diagonal de un cuadrado son inconmensurables, donde tu sucesión de longitudes M_n será que a cada M_i le corresponda el lado del pentágono formado en el paso i , ya que al construir todas las diagonales del pentágono original, sus intersecciones formarán un nuevo pentágono y las diagonales del nuevo pentágono formarán otro más pequeño y así sucesivamente.

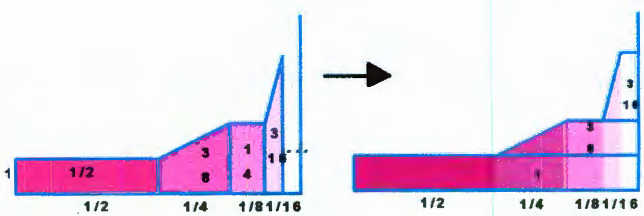
4. De acuerdo a la demostración de que el lado y la diagonal son inconmensurables se tiene que,$\sqrt{2} = \frac{CA}{BC}$, sea $D_0 = CA$ y se sabe que $BC = M_0$, ahora $D_0 = M_0 + M_1$ y $M_0 = M_1 + D_1$ y construye, también, la sucesión $\{D_n\}$, donde D_i es la diagonal del cuadrado i construido en la demostración.

5. Dibuja un punto Q sobre BC de tal forma que $BQ = AB$ y traza el triángulo PQC donde PQ es paralelo a AB y P se encuentra sobre AC.

6. Utiliza geometría analítica, tomando el vértice de la parábola en el origen, por lo que su ecuación es

$$y^2 = kx$$

7. Aplica el método geométrico de Oresme, cambiando la dirección de la figura de la siguiente manera



8. Has algo parecido a la demostración de que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}+...=1$, dividiendo de alguna forma el cuadrado unitario.

9. Hazlo de manera geométrica, tomando nuevamente el cuadrado unitario.

10. Utiliza la misma idea que en los ejercicios 8 y 9.

11. Parte del hecho que $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{4^n}+...=\frac{1}{3}$

12. Tome un cuadrado de lado 1 y empiece a dividirlo, de manera que el área de cada rectángulo sea un elemento de la sucesión.

13. Reacomode la serie de manera que

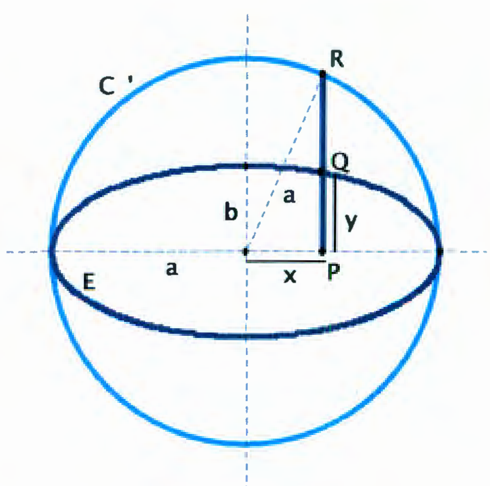
$$\begin{aligned} & 48\cdot 1+48\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot 2+48\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 4+...+48\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot 2^n+... \\ = \; & 48\left[1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}+...\right)\right] \end{aligned}$$

5.1.2 Integrales

1. Supón que el área de círculo es más grande que la del triángulo, después, inscribe polígonos regulares al círculo de tal manera que exista uno donde el área del círculo menos la del polígono, sea menor que un número suficientemente pequeño. prueba que ese polígono tiene área mayor y menor que la del triángulo y llega a una contradicción. Haz lo mismo, suponiendo que, el área del círculo es menor que la del triángulo.

2. *Paso 1:* Sea C' el círculo con centro en el centro de la elipse y radio a, a este círculo le llamaremos círculo auxiliar. Sea un punto P sobre el eje mayor de la elipse, la recta paralela al eje menor que pasa por P corta a la elipse en Q y al círculo auxiliar en P. Prueba que

$$\frac{PQ}{PR}=\frac{a}{b}$$



Paso 2: Toma el círculo C'' de radio $r = \sqrt{ab}$ este círculo tendrá área igual a πab lo que se quiere probar es que

$$a(C'') = a(elipse)$$

supóngase que $a(C'') > a(elipse)$ e inscribe en C' y C'' polígonos regulares con el número de lados igual a un múltiplo de 4 y uno de sus vértices sobre el eje x.

Paso 3: Construya un polígono inscrito a la elipse de tal forma que sus vértices sean la intersección de los segmentos perpendiculares al eje mayor y que pasan por los vértices del polígono inscrito en C'. Encuentre alguna relación de manera que se llegue a una contradicción

Paso 4: Haz algo parecido al paso anterior suponiendo que $a(C'') < a(elipse)$

3. Divide la curva $r = f(\theta)$ en n pedazos de longitud Δs y calcula el $\lim \Delta s \to 0$

4. .

5. Como s es la longitud de arco, exprésala en términos de θ con la siguiente relación $s = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$, deriva y después utiliza el hecho que las fórmulas son iguales.

6. Utiliza algunos resultados que usó Cavalieri en sus demostraciones.

7. *a)* Utiliza la semejanza de los triángulos CEF y CDG.

   b) Toma una sección del elipsoide que pase por el centro, perpendicular a la base. Esa sección será parte de una elipse, utiliza ese hecho.

8. Usa los resultados del ejercicio anterior

9. Pruebe que el área de una sección del paraboloide a una altura h es igual al anillo comprendido entre el cilindro y el paraboloide a una altura $a - h$.

10. Toma en cuenta que, el volumen del cono es una tercera parte del volumen del cilindro de igual base e igual altura.

11. .

12. Utiliza que y aplica la fórmula de Wallis $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1}$

13. Parte del hecho que el área que se encuentra por encima de la gráfica más el área que está por debajo, la suma es 1.

5.1.3 Derivadas

1. Por el método de Descartes resuelve la siguiente ecuación para v.

$$(x - v)^2 + \left(\sqrt{4x}\right)^2 - r^2 = (x - e)^2 c$$

2. Igual que en el ejercicio 1, resuelve la ecuación

$$(x-v)^2+\left(x^{3/2}\right)^2=r^2$$

para v.

3. A partir del polinomio

$$F(x)=(x-v)^2+\left(x^3+2x\right)^2-r^2=0$$

construye el polinomio $F^*(x)$ para el caso particular de la progresión $a+nb$ para el caso en que $a=0$ y $b=1$ y resuelve para v.

4. Encuentra la subtangente s sabiendo que

$$s\sim\frac{ef(x)}{f(x+e)-f(x)}$$

5. La misma idea que en el ejercicio anterior.

6. Aproxima x por $x+e$ y sustituye en la ecuación original, esto es

$$bx^2-x^3\sim b(x+e)^2-(x+e)^3$$

y resuelve para b.

7. Utiliza la ecuación del círculo $(x-v)^2+[f(x)]^2=r^2$ y aplica la regla de Hudde con el caso particular de la progresión.

8. Utiliza el método de Fermat aproximando a x por $x+e$

9. Utiliza la regla de Hudde con el caso particular de la progresión.

10. Aplica la regla de Hudde al polinomio $f(x)=x^n$.

5.2 Una respuesta a los ejercicios

5.2.1 Límites

Las respuestas a los ejercicios se basan en las sugerencias dadas anteriormente.

1. Por el axioma de Arquímedes sabemos que $M<N\varepsilon$ para algún $N\in\mathbb{N}$ luego

$$\frac{M}{N}<\varepsilon$$

como además, como $r \leq \frac{1}{2}$ entonces

$$\begin{aligned} r^n &< \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{r^n} &> 2^n > n \end{aligned}$$

luego

$$r^n < \frac{1}{n}$$

por lo que, para $n > N$ tenemos que

$$Mr^n < \frac{M}{n} < \frac{M}{N} < \varepsilon$$

2. Llamemos a_n a la suma de las áreas de los triángulos obtenidos en el paso n, el polígono p_n inscrito en el segmento parabólico es igual al polígono anterior más los triángulos obtenidos en el paso n, esto es

$$a(p_n) = a(p_{n-1}) + a_n$$

contrúyamos la sucesión

$$M_n = c(APB) - a(p_n)$$

recordemos que $c(APB)$ es el área del segmento parabólico, si mostramos que $M_n < \frac{M_{n-1}}{2}$

entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un M_N tal que

$M_n < \varepsilon$, y esto hace $c(APB) - a(p_N)$ tienda a cero y por lo tanto el área de p_n se aproxima al área del segmento parabólico.

Probemos que $M_n < \frac{M_{n-1}}{2}$

Sabemos que el área de los triángulos del paso n es más de la mitad del área de los segmentos parabólicos resultantes en el paso anterior, luego a_n es más de la mitad que la suma de las áreas de los segmentos parabólicos obtenidos en el paso n los cuales, los podemos escribir como

$$c(APB) - a(p_{n-1})$$

por lo mencionado anteriormente

$$a_n > \frac{1}{2}\left[c(APB) - a(p_{n-1})\right]$$

luego

$$\begin{aligned} a_n + \frac{1}{2}a(p_{n-1}) &> \frac{1}{2}c(APB) \\ -a_n - \frac{1}{2}a(p_{n-1}) &< -\frac{1}{2}c(APB) = -c(APB) + \frac{1}{2}c(APB) \\ -a_n - \frac{1}{2}a(p_{n-1}) &< -c(APB) + \frac{1}{2}c(APB) \end{aligned}$$

de donde

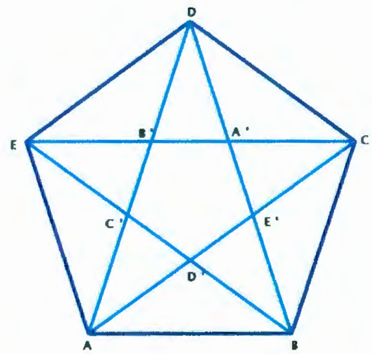
$$c(APB) - a(p_n) < \frac{1}{2}c(APB) + \frac{1}{2}a(p_{n-1})$$

por lo tanto

$$M_n < \frac{M_{n-1}}{2}$$

y tenemos lo que se quería probar.

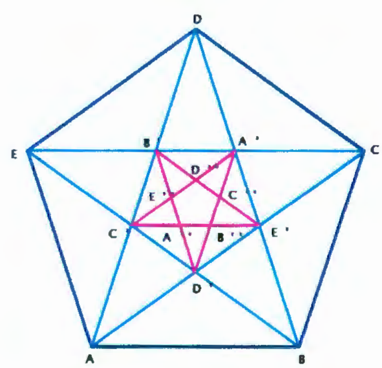
3. Dado el pentágono $ABCDE$ y sus diagonales, supongamos que el lado AB y la diagonal AC son conmensurables entonces, existe una unidad U que mide AB y a AC.



El triángulo ABE' es isósceles, pues como AB y EC son paralelas, el ángulo $ABE' = CA'B$ donde $CA'B = A'E'C$ pues el triángulo $E'CA'$ es isósceles ya que $E'C = CA'$ y esto se debe a que los triángulos $BE'C$ y $CA'D$ son congruentes.

Luego $AB = AE'$, como U mide a AC y a AE' entonces mide también a $E'C = AC - AE'$ pero $E'C = AD'$ por la congruencia de los triángulos ABD' y $BE'C$. Como U mide a AE' y a AD' entonces mide $D'E' = AE' - AD'$.

Hemos llegado a que U mide a AB y a $D'E'$ pero podemos ver que $D'E'$ es el lado de un nuevo pentágono regular más pequeño.



Si llamamos M_0 a la longitud AB y M_1 a la longitud $D'E'$ tenemos que

$$M_1 < \frac{M_0}{2}$$

esto es cierto pues como $AD' = BD'$ y $BD' > D'E'$ pues el ángulo $AE'B = 2D'BE' > D'BE'$ entonces

$$\begin{aligned} M_0 &= AB = AE' \\ &= AD' + D'E' \\ &> D'E' + D'E' \\ M_0 &> 2M_1 \\ \frac{M_0}{2} &> M_1 \end{aligned}$$

Repitiendo el mismo procedimiento para el nuevo pentágono $A'B'C'D'E'$ llegamos a que

$$M_2 < \frac{M_1}{2}$$

por lo que podemos construir una sucesión $M_0, M_1, ..., M_n, ...$ donde M_i es el lado del pentágono formado en el paso i tal que

$$M_{n+1} < \frac{M_n}{2}$$

luego existe algún $M_n < U$ donde U es la unidad tomada en un principio por lo que U deberá medir a M_n lo que es una contradicción.

Por lo tanto el lado y la diagonal de un pentágono son inconmensurables.

4. Tomemos D_i y M_i la diagonal y el lado del cuadrado i respectivamente, construido en la demostración de inconmensurabilidad.

   De acuerdo al la construcción dada tenemos que $\sqrt{2} = \frac{AC}{BC} = \frac{D_0}{M_0}$, pero también sabemos que

$$\begin{aligned} D_0 &= M_0 + M_1 \\ M_0 &= M_1 + D_1 \end{aligned}$$

   y en general

$$\begin{aligned} D_i &= M_i + M_{i+1} \\ M_i &= M_{i+1} + D_{i+1} \end{aligned}$$

por lo que haciendo una sucesión de la siguiente forma, tenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= \frac{D_0}{M_0} = \frac{M_0 + M_1}{M_0} \\
&= 1 + \frac{M_1}{M_0} = 1 + \frac{1}{\frac{M_0}{M_1}} = 1 + \frac{1}{\frac{M_1 + D_1}{M_1}} \\
&= 1 + \frac{1}{1 + \frac{D_1}{M_1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{M_1 + M_2}{M_1}} \\
&= 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{M_2}{M_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{M_1}{M_2}}} \\
&= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{M_2 + D_2}{M_2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{D_2}{M_2}}} \\
&= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{M_2 + M_3}{M_2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{M_3}{M_2}}} \\
&= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{M_3}{M_2}}} = \ldots
\end{aligned}$$

donde si continuamos con el proceso infinitamente, tenemos la expresión para $\sqrt{2}$ en fracciones continuas como sigue:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ldots}}}}}}$$

donde podemos ver que $\sqrt{2}$ se presenta como una situación límite de un proceso infinito.

5. Construyamos sobre el segmento BC, el punto Q de tal forma que $AB = BQ$ y tracemos un segmento paralelo a AB que pase por Q el cual, cortara al segmento AC en el punto P.

   Sea $M_0 = AB$ y $M_1 = PQ$, entonces

$$M_1 < \frac{M_0}{2}$$

   Esto es cierto ya que por semejanza de los triángulos ABC y PQC tenemos que

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QC}$$

   de donde

$$\begin{aligned}
AB &= \frac{PQ\,(BC)}{QC} \\
&= \frac{PQ\left(\frac{5}{4}AB\right)}{\frac{1}{4}AB} \\
&= \frac{20}{4}PQ > 2PQ
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} AB &> 2PQ \\ \frac{AB}{2} &> PQ \\ \frac{M_0}{2} &> M_1 \end{aligned}$$

Hagamos este mismo proceso para el triangulo PQC y obtenemos M_2 como la base del nuevo triángulo construido en este paso y de la misma forma

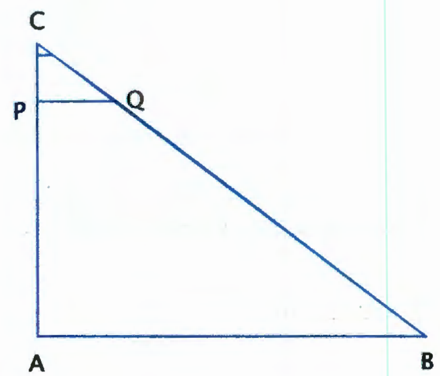
$$\frac{M_1}{2} > M_2$$

Repitiendo este procedimiento tenemos una sucesión $M_0, M_1, ..., M_n, ...$ que cumple

$$\frac{M_n}{2} > M_{n+1}$$

Eso significa que para cualquier unidad U que se tome $M_n < U$ para alguna n suficientemente grande.

Con este argumento se podría pensar que AB y BC no son conmensurables ¿Es cierto?



6. La ecuación de la parábola descrita es

$$y^2 = kx$$

tomemos el punto Q en la parábola como el punto (x_1, y_1) y B como el punto (x_2, y_2) ambos satisfacen que

$$\begin{aligned} (y_1)^2 &= kx_1 \\ (y_2)^2 &= kx_2 \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} x_1 &= PN \text{ y } x_2 = PM \\ y_1 &= NQ \text{ y } y_2 = MQ \end{aligned}$$

sustituímos estos valores en las ecuaciones anteriores tenemos:

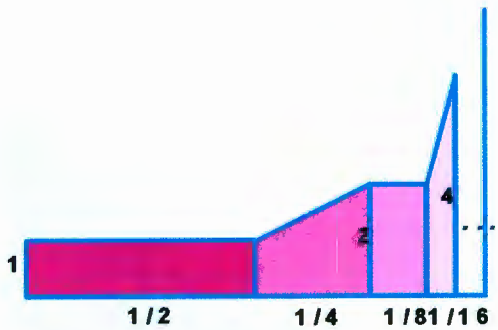
$$\begin{aligned} (NQ)^2 &= kPN \\ (MQ)^2 &= kPM \end{aligned}$$

luego

$$\frac{(NQ)^2}{(MQ)^2} = \frac{kPN}{kPM} = \frac{PN}{PM}$$

que es lo que queriamos probar

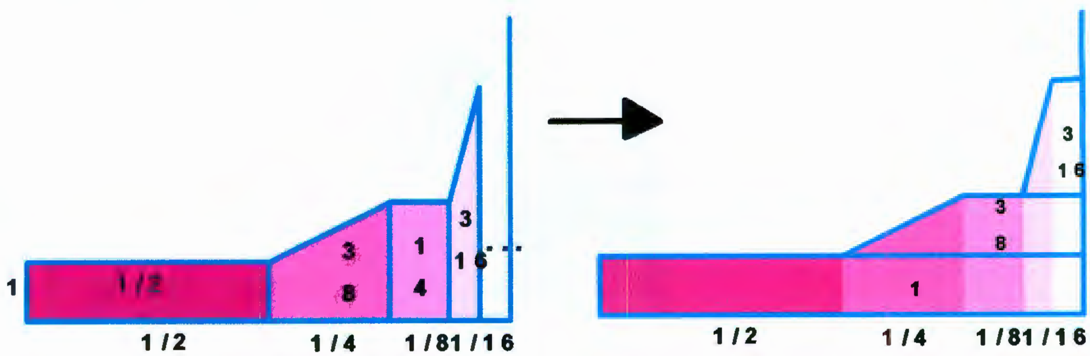
7.



El área total es representada por la suma de las áreas de cada cuadrilátero, las cuales dan la siguiente serie:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^{n+2}} + ...$$

aplicando el método geométrico de Oresme, en la misma figura podemos tomar la dirección de la siguiente manera



de donde tenemos que

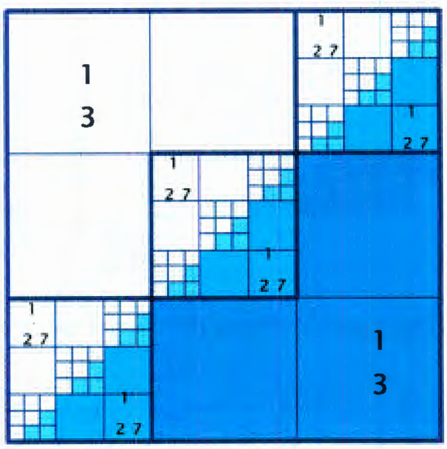
$$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^{n+2}}+...=1+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+...+\frac{3}{2^n}+...$$

pero

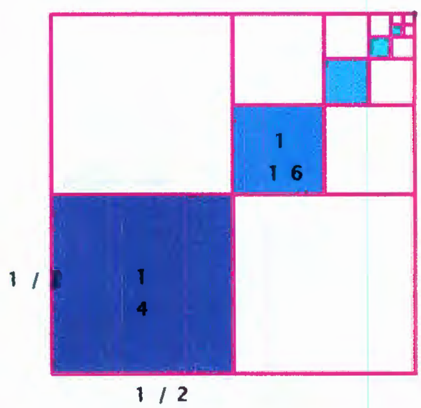
$$\begin{aligned}1+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+...+\frac{3}{2^n}+... &= 1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)...+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2^n}\right)+...\\ &= 1+\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}+...\right]\\ &= 1+\frac{3}{4}[1]\\ &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

con lo que el problema queda resuelto.

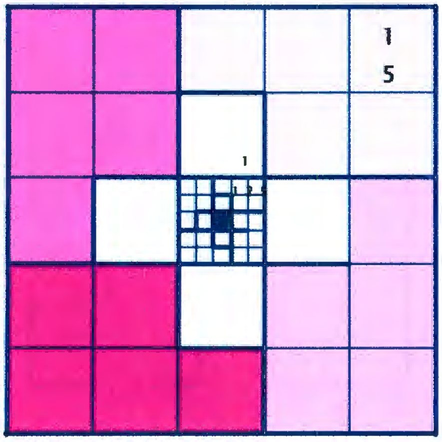
8.



9.



10.



11.

$$\alpha+\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{4^2}+...+\frac{\alpha}{4^n}+...=\frac{4}{3}\alpha$$

Como

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...+\frac{1}{4^n}+...=\frac{1}{3}$$

multiplicamos por α ambos lados

$$\alpha\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...+\frac{1}{4^n}+...\right]=\alpha\frac{1}{3}$$

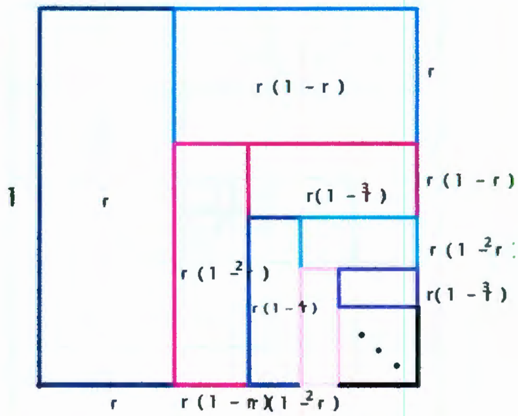
$$\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{16}+...+\frac{\alpha}{4^n}+...=\frac{1}{3}\alpha$$

sumamos α a ambos lados, entonces

$$\begin{aligned}\alpha+\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{16}+...+\frac{\alpha}{4^n}+... &= \alpha+\frac{1}{3}\alpha\\ \alpha+\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{16}+...+\frac{\alpha}{4^n}+... &= \frac{4}{3}\alpha\end{aligned}$$

y se tiene lo que queriamos probar

12.



13.

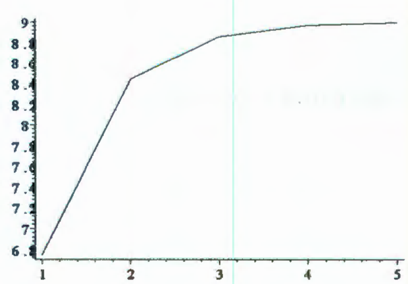
$$48 \cdot 1 + 48 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 2 + 48 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 4 + \ldots + 48 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 2^n + \ldots$$

De manera analítica podemos ver que

$$\begin{aligned}
& 48 \cdot 1 + 48 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 2 + 48 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 4 + \ldots + 48 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 2^n + \ldots \\
= \; & 48 \left[1 + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 4 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 2^n + \ldots\right] \\
= \; & 48 \left[1 + \left(\frac{1}{2^2}\right) \cdot 2 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \cdot 4 + \ldots + \left(\frac{1}{2^2}\right)^n \cdot 2^n + \ldots\right] \\
= \; & 48 \left[1 + \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^4} \cdot 4 + \ldots + \frac{1}{2^{2n}} \cdot 2^n + \ldots\right] \\
= \; & 48 \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right] = 48 \left[1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right)\right] \\
= \; & 48\,[1 + 1] = 96
\end{aligned}$$

14.

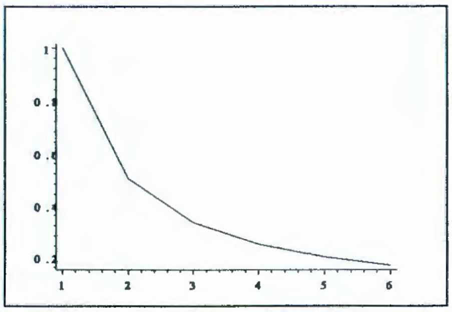
$$\begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{27}{4}\right) \\ 2 & \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{27}{4^i}\right) \\ 3 & \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{27}{4^i}\right) \\ 4 & \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{27}{4^i}\right) \\ 5 & \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{27}{4^i}\right) \end{bmatrix}$$



La suma total de $27 \cdot \frac{1}{4} + 27 \cdot \frac{1}{16} + \ldots + 27 \cdot \frac{1}{4^n} + \ldots = 9$

15.

1	1
2	1/2
3	1/3
4	1/4
5	1/5
6	1/6



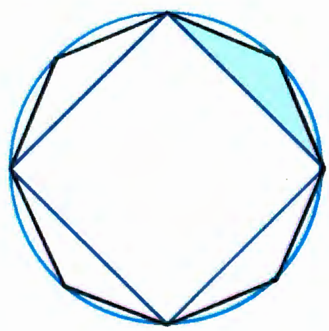
El límite de la sucesión es cero.

5.2.2 Integrales

1. *a)* Lo que queremos probar es que, si tenemos un círculo de radio r y una circunferencia de longitud s entonces, el área del triángulo rectángulo con base s y altura r es igual al área del circulo, esto es

$$A_{circulo} = A_{triángulo} = \frac{rs}{2}$$

Sea A_c el área del círculo y A_t el área del triángulo. Supongamos que $A_c > A_t$, inscribamos polígonos regulares en el círculo sucesivamente tal que la cantidad de lados sea cada vez más grande, como en la figura siguiente.



Sabemos que existe un polígono de área P tal que $A_c - P < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. (proposición(libro X) del capítulo de límites). Luego, como $A_c > A_t$, entonces $0 < A_c - A_t$ y para un ε suficientemente pequeño tal que $\varepsilon < A_c - A_t$ se tiene que $A_c - P < \varepsilon < A_c - A_t$, luego, $A_c - P < A_c - A_t$

Esto quiere decir que

$$P > A_t$$

Ahora, la perpendicular h que va del centro a un lado del polígono es menor que el radio, mientras el perímetro del polígono es menor que la longitud de la circunferencia y como el área del polígono es

$$\begin{aligned} P &= \frac{h \cdot \textit{perímetro}}{2} \quad \text{y} \\ \frac{h \cdot \textit{perímetro}}{2} &< \frac{r \cdot \textit{longitud de la circunferencia}}{2} = A_t \end{aligned}$$

entonces

$$P < A_t$$

lo que es una contradicción pues habíamos encontrado que $P > A_t$ luego,

$$A_c < A_t$$

De la misma manera, si suponemos que $A_c < A_t$ llegaremos a una contradicción, por lo que

$$A_c > A_t$$

Por lo tanto

$$A_c = A_t$$

b) $A_c = \frac{pr}{2}$, donde r es el radio y p el perímetro

2. *paso 1:*Esto es cierto, pues por la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenemos que

$$\begin{aligned} PQ &= y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a} PR \\ \frac{PQ}{PR} &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

*Paso 2 y 3:*Sea C'' el círculo de radio $r = \sqrt{ab}$ luego el área de C'' es

$$a\,(C'') = \pi ab$$

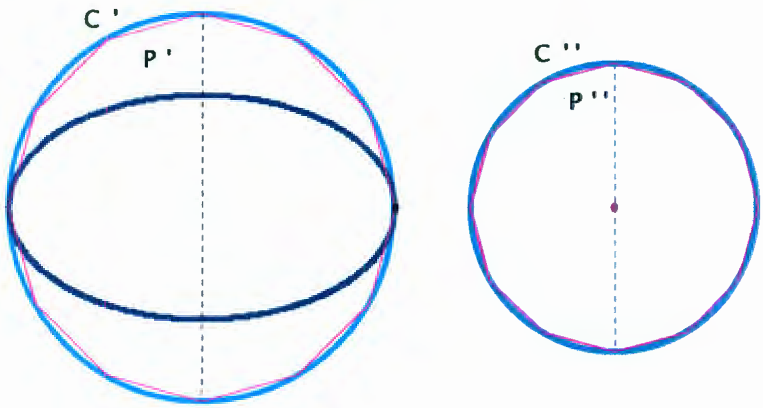
Lo que queremos probar es que

$$a\,(E) = a\,(C'')$$

donde $a\,(E)$ es el área de la elipse

Supongamos que $a\,(E) < a\,(C'')$ sea P'' el polígono regular inscrito en el círculo C'' donde el número de lados sea un múltiplo de 4 y tal que $a\,(E) < a\,(P'')$.

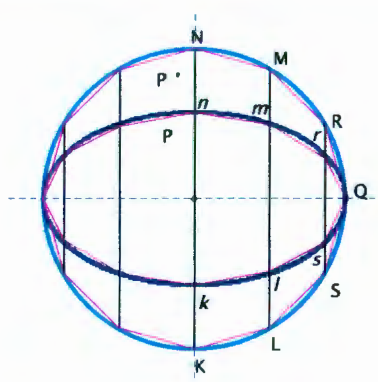
Sea P' un polígono inscrito en el circulo auxiliar C' con el número de lados múltiplo de 4.



luego

$$\frac{a\,(P'')}{a\,(P')} = \frac{r^2}{a^2} = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a}$$

Sea P el polígono inscrito en la elipse el cual, sus vértices son la intersección de los segmentos perpendiculares al eje mayor que pasan por los vértices de P' como se muestra en la siguiente figura



Podemos considerar a los polígonos P y P' como la unión de los correspondientes pares de triángulos Qrs y QRS y los correspondientes pares de trapezoides $klmn$ y $KLMN$. Ahora, por lo probado en el primer paso tenemos que

$$\frac{lm}{LM} = \frac{kn}{KN} = \frac{rs}{RS} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$$

de donde se sigue que

$$\frac{a\,(klmn)}{a\,(KLMN)} = \frac{a\,(Qrs)}{a\,(QRS)} = \frac{b}{a}$$

De la comparación hecha de los trapezoides y triángulos que forman a P y a P', vemos que

$$\frac{a(P)}{a(P')} = \frac{b}{a}$$

pero ya habíamos dicho que

$$\frac{a(P'')}{a(P')} = \frac{b}{a}$$

luego,

$$a(P'') = a(P)$$

lo cual es una contradicción ya que supusimos que

$$a(E) < a(P'')$$

pero P está inscrito en la elipse

Paso 4: Ahora supongamos que $a(E) > a(C'')$, iniciemos con un polígono P parecido al anterior inscrito en la elipse, tal que

$$a(P) > a(C'')$$

y sean P' y P'' polígonos parecidos a los tomados en el caso anterior y de la misma forma llegamos a que

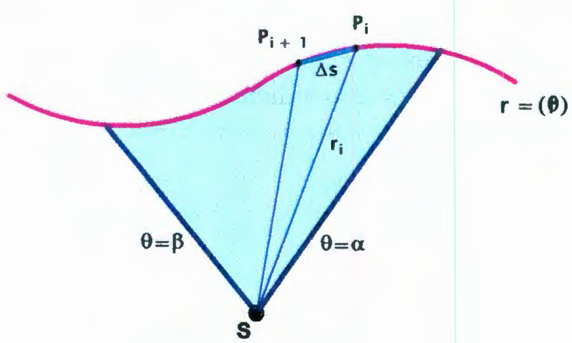
$$a(P'') = a(P) > a(C'')$$

lo que es una contradicción.

Por lo tanto

$$a(E) = a(C'') = \pi ab$$

3. Dividamos la curva $r = f(\theta)$ en n pedazos y llamemos Δs a la longitud sobre la curva del punto P_i al punto P_{i+1} y r_i a la distancia de S a P_i (Véase la figura).



Luego, aproximemos cada rebanada P_iSP_{i+1} con el área de un triángulo con altura r_i y base Δs; y tomando Δs cada ves más cercana a cero, tendremos una mejor aproximación, por lo que el área buscada la podemos escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\Delta s \to 0} \sum \frac{r_i \cdot \Delta s}{2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\Delta s \to 0} \sum r_i \cdot \Delta s \end{aligned}$$

Utilizando la definición de integral, esto se traduce en:

$$A = \frac{1}{2} \int r ds$$

4. La fórmula correcta es:

$$A = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta$$

La diferencia fundamental de esta fórmula con la anterior es el hecho de que la aproximación no se basa en las longitudes Δs, sino en los pequeños ángulos $\Delta\theta$ formados en S por P_i y P_{i+1}.

5. Derivando s con respecto de θ se tiene que

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

de donde

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

Tomando en cuenta el hecho que, las dos fórmulas son iguales, entonces, $ds = rd\theta$,por lo que

$$\frac{ds}{d\theta} = r \text{ o bien, } \quad \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = r^2$$

por lo que

$$r^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

esto quiere decir que

$$\frac{dr}{d\theta} = 0 \quad \text{o bien } r = f(\theta) \text{ es constante}$$

por lo tanto

$$r = f(\theta) \text{ es una circunferencia}$$

6. Desarrollando, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\sum a^3 &= \sum (x+y)^3 = \sum x^3 + 3\sum x^2y + 3\sum xy^2 + \sum y^3 \\ &= 2\sum x^3 + 6\sum x^2 y \qquad \left(\text{ya que } \sum x = \sum y\right)\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\sum a^3 &= a\sum a^2 \\ &= a\left(2\sum x^2 + 2\sum xy\right) \\ &= a\left(\frac{2}{3}\sum a^2 + 2\sum xy\right) && \left(\sum x^2 = \frac{1}{3}\sum a^2\right) \\ &= \frac{2}{3}\sum a^3 + 2\sum (x+y)\,xy && \left(\sum a = \sum (x+y)\right) \\ &= \frac{2}{3}\sum a^3 + 4\sum x^2 y && \left(\sum (x+y) = 2\sum x\right)\end{aligned}$$

despejando $\sum x^2 y$, tenemos

$$\sum x^2 y = \frac{\sum a^3}{12}$$

sustituyendo este resultado en

$$\sum a^3 = 2\sum x^3 + 6\sum x^2 y$$

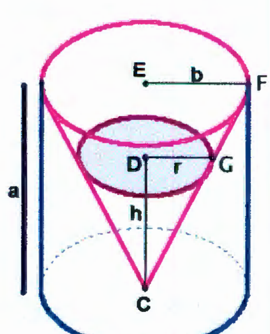
tenemos

$$\begin{aligned}\sum a^3 &= 2\sum x^3 + 6\frac{\sum a^3}{12} \\ \sum x^3 &= \frac{\sum a^3 - \frac{\sum a^3}{2}}{2} \\ \sum x^3 &= \frac{1}{4}\sum a^3 = \frac{1}{4}a^4\end{aligned}$$

que es lo que queriamos probar

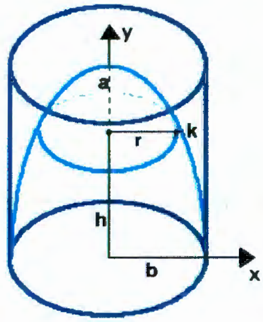
7. .

a)



De acuerdo con la figura los triángulos CEF y CDG son semejantes, luego $\frac{r}{b} = \frac{h}{a}$ luego $r = \frac{b}{a}h$, pero r es el radio del círculo formado por la intersección del cono con el plano horizontal. Luego, $A_1 = \pi (r)^2 = \pi \left(\frac{b}{a}h\right)$.

b)



Si tomamos una la sección del elipsoide que pase por el centro, perpendicular a la base, lo que resulta es una elípse con semi-ejes a y b donde, suponiendo que el centro se encuentra en el origen, su ecuación es

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Si sustituimos el valor de h en la ecuación y despejamos x, se tiene que

$$x = \sqrt{\frac{a^2b^2 - b^2h^2}{a^2}} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}h^2}$$

Pero este valor de x es el valor del punto k, como el centro de la elípse está en el origen, la longitud del radio de la sección A_2 es $r = k = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}h^2}$, luego $A_2 = \pi\left(\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}h^2}\right)^2$

$$A_2 = \pi\left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}h^2\right)$$

c) La intersección del cilindro con el plano horizontal tiene área igual a πb^2 y de los incisos a) y b) tenemos que $A_1 = \pi\frac{b^2}{a^2}h^2$ y $A_2 = \pi\left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}h^2\right)$, luego

$$A_2 = \pi\left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}h^2\right) = A_2 = \pi b^2 - \pi\frac{b^2}{a^2}h^2 = \text{intersección del cilindro } - A_1$$

8. Del ejercicio anterior tenemos

$$A_2 = \text{intersección del cilindro con el plano horizontal} - A_1$$

como el valor de h fue arbitrario, por el principio de Cavalieri, esto se vale para cualquier valor de h, tal que $0 \leq h \leq a$, luego

$$\begin{aligned}
\text{Vol. del elipsoide} &= \text{Vol. del cilindro} - \text{Vol. del cono} \\
&= \pi b^2 (2a) - \frac{1}{3}\pi b^2 (2a) \\
&= \frac{4}{3}\pi b^2 a
\end{aligned}$$

que es lo quequeriamos probar

9. Si tomamos una sección del paraboloide perpendicular a la base, lo que tenemos es un segmento de una parábola. Supongamos que el vértice se encuentra en el $(0,0)$, como abre hacia abajo su ecuación es

$$y = -4px^2$$

pero $p = \frac{1}{4a}$ luego,

$$y = -\frac{1}{a}x^2$$

Tomemos las alturas h y $a-h$, ambas tienen coordenadas sobre el eje y de $-a+h$ y $-h$ respectivamente, por lo que cuando y toma los valores $-a+h$ y $-h$, sus respectivas x en la parábola, son: $x = \pm\sqrt{a^2 - ha}$ y $x = \pm\sqrt{ha}$.

Luego, el área de la sección a la altura h es $\pi\left(\sqrt{a^2 - ha}\right)^2 = \pi\left(a^2 - ha\right)$ y el área de la sección a la altura $a-h$ es $\pi\left(\sqrt{ha}\right)^2 = \pi\left(ha\right)$.

Además, podemos ver que $\pi\left(a^2 - ha\right) = \pi a^2 - \pi ha$, pero esto es el área del anillo comprendido entre una sección del cilindro y la sección del paraboloide a la altura $a-h$, pero ya habíamos dicho que $\pi\left(a^2 - ha\right)$ es el área de la sección a la altura h.

Como h es arbitrario, por el principio de Cavalieri tenemos que,

$$\text{Volumen del paraboloide} = \text{Volumen del cilindro} - \text{Volumen del paraboloide}$$

esto es

$$2\text{Vol. paraboloide} = \text{volumen del cilindro}$$

por lo tanto,

$$\text{Vol. paraboloide} = \frac{1}{2}\text{Vol. cilindro.}$$

10. Puesto que ya sabemos que el área del cono es una tercera parte del área del cilindro de la misma base e igual altura, se tiene que

$$\text{Vol. cono} = \frac{1}{3}\text{Vol. cilindro} = \frac{1}{3}\pi a^3$$

pero el volumen del cilindro es el doble del volumen del paraboloide, luego,

$$\text{Vol. cono} = \frac{1}{3}\text{Vol. cilindro} = \frac{1}{3}\left(2\text{Vol. paraboloide}\right)$$

luego,

$$\text{Vol. cono} = \frac{2}{3}\text{Vol. paraboloide}$$

11.

$$\frac{0^2 + 1^2 + ... + n^2}{n^2 + n^2 + ... + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

para $n = 1, 2, 3, 4.$

para $n = 1$

$$\frac{0^2 + 1^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

para $n = 2$

$$\begin{aligned} \frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{2^2 + 2^2 + 2^2} &= \frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6(2)} \end{aligned}$$

para $n = 3$

$$\begin{aligned} \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2} &= \frac{14}{36} = \frac{7}{18} = \frac{6}{18} + \frac{1}{18} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6(3)} \end{aligned}$$

para $n = 4$

$$\begin{aligned} \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2} &= \frac{30}{80} = \frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{8}{24} + \frac{1}{24} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6(4)} \end{aligned}$$

12. tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\phi(0) + \phi(1) + ... + \phi(n)}{\phi(n) + \phi(n) + ... + \phi(n)} = \frac{1}{5} = \frac{1}{4+1}$$

por la fórmula de Wallis,

$$\frac{1}{4+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{0^4 + 1^4 + ... + n^4}{n^4 + n^4 + ... + n^4}$$

por lo que

$$\phi(x) = x^4 \quad \text{y} \quad I\{\phi(x)\} = 4$$

13. El área que se encuentra por encima de la curva es $\int_0^1 x^{1/q}dx$ y la que se encuentra por la parte de abajo es $\int_0^1 x^q dx$

ahora, estas dos áreas forman un cuadrado de lado uno, por lo que el área del cuadrado es 1, esto es,

$$\int_0^1 x^{1/q}dx + \int_0^1 x^q dx = 1$$

despejamos $\int_0^1 x^{1/q}dx$ y como ya sabemos que $\int_0^1 x^q dx = \frac{1}{q+1}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{1/q}dx &= 1 - \int_0^1 x^q dx \\ &= 1 - \frac{1}{q+1} = \frac{q}{q+1} = \frac{1}{1+1/q} \\ \int_0^1 x^{1/q}dx &= \frac{1}{1+1/q} \end{aligned}$$

que es lo que estabamos buscando

5.2.3 Derivadas

1. Aplicando el método de Descartes, el problema es resolver para v

$$(x-v)^2 + (f(x))^2 = r^2$$

donde $f(x) = \sqrt{4x}$. Tomamos e como la raíz doble, con lo que se tiene

$$\begin{aligned} (x-v)^2 + \left(\sqrt{4x}\right)^2 - r^2 &= (x-e)^2 c \\ x^2 - 2(v-2)x + v^2 - r^2 &= cx^2 - 2cex + e^2 c \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 1 &= c \\ -2(v-2) &= -2ce \\ v^2 - r^2 &= e^2 c \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} v &= 2+e \\ v &= 2+x \end{aligned}$$

Sabemos que la pendiente de la normal en el punto x es

$$-\frac{f(x)}{v-x}=-\frac{\sqrt{4x}}{2+x-x}=-\frac{\sqrt{4x}}{2}=-\sqrt{x}$$

Luego la pendiente de la normal en $x=1$ es $-\sqrt{1}$, por lo que la ecuación de la recta normal en el punto $(1,2)$ es

$$\begin{aligned} y-2 &= -(x-1) \\ x+y-3 &= 0 \end{aligned}$$

2. Aplicando el método de Descartes, tenemos:

$$\begin{aligned} (x-v)^2+\left(x^{3/2}\right)^2 &= r^2 \\ (x-v)^2+\left(x^{3/2}\right)^2-r^2 &= (x-e)^2(ax+b) \\ x^2-2xv+v^2+x^3-r^2 &= x^3a+bx^2-2ex^2a-2bex+e^2ax+be^2 \\ x^3+x^2-2vx+(v^2-r^2) &= ax^3+(b-2ea)x^2+(e^2a-2be)x+be^2 \end{aligned}$$

Igualando términos semejantes,

$$\begin{aligned} 1 &= a \\ 1 &= b-2ea \\ -2v &= e^2a-2be \\ v^2-r^2 &= be^2 \end{aligned}$$

Resolviendo para v, obtenemos

$$\begin{aligned} v &= \frac{3e^2}{2}+e \\ v &= \frac{3x^2}{2}+x \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} v-x &= \frac{3x^2}{2}+x-x \\ &= \frac{3x^2}{2} \end{aligned}$$

Por lo que la pendiente de la recta tangente es

$$\frac{v-x}{f(x)}=\frac{\frac{3x^2}{2}+x-x}{x^{3/2}}=\frac{\frac{3x^2}{2}}{x^{3/2}}=\frac{3}{2}x^{1/2}$$

3. Partimos del polinomio

$$F(x) = (x-v)^2 + [f(x)]^2 - r^2 = 0$$

sustituímos $f(x)$ en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} F(x) &= (x-v)^2 + \left(x^3+2x\right)^2 - r^2 = 0 \\ &= 5x^2 - 2xv + v^2 + x^6 + 4x^4 - r^2 \end{aligned}$$

Despues, construimos el polinomio

$$\begin{aligned} F^*(x) &= (2)\,5x^2 - (1)2xv + (0)\,v^2 + (6)\,x^6 + (4)\,4x^4 - (0)\,r^2 \\ &= 10x^2 - 2xv + 6x^6 + 16x^4 = 0 \end{aligned}$$

resolvemos para v resulta

$$v = \frac{10x^2 + 6x^6 + 16x^4}{2x} = 5x + 3x^5 + 8x^3$$

luego la derivada es

$$\frac{v-x}{f(x)} = \frac{5x+3x^5+8x^3}{x^3+2x} = \frac{(x^3+2x)\,(3x^2+2)}{x^3+2x} = \left(3x^2+2\right)$$

4. Primero, encontramos el valor de la pendiente, que es la derivada de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{4}$$

en el punto $(2,1)$. Aplicando el método de Fermat tenemos que, la sub-tangente es

$$\begin{aligned} s &\sim \frac{ef(x)}{f(x+e)-f(x)} = \frac{e\frac{x^2}{4}}{\frac{(x+e)^2}{4} - \frac{x^2}{4}} \\ &= \frac{e\frac{x^2}{4}}{\frac{1}{2}xe + \frac{1}{4}e^2} = \frac{e\frac{x^2}{4}}{e\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}e\right)} \\ &= \frac{\frac{x^2}{4}}{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}e\right)} \sim \frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}x \\ s &= \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

por lo que

$$f'(x) = \frac{f(x)}{s} = \frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}x$$

evaluando en $x = 1$, tenemos que, la pendiente de la recta tangente es

$$m = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

Luego, la ecuación de la recta tangente es

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{1}{2}(x-2) \\ 2y - x &= 0 \end{aligned}$$

5. Sustituyendo $f(x) = x^2 + 3x$ en la ecuación de la subtangente tenemos

$$\begin{aligned} s \sim \frac{ef(x)}{f(x+e) - f(x)} &= \frac{e(x^2+3x)}{(x+e)^2 + 3(x+e) - (x^2+3x)} \\ &= \frac{e(x^2+3x)}{x^2 + 2xe + e^2 + 3x + 3e - x^2 - 3x} = \frac{e(x^2+3x)}{2ex + e^2 + 3e} \\ &= \frac{e(x^2+3x)}{e(e+2x+3)} = \frac{(x^2+3x)}{(e+2x+3)} \sim \frac{(x^2+3x)}{(2x+3)} \\ s &= \frac{(x^2+3x)}{(2x+3)} \end{aligned}$$

de donde la derivada es

$$f'(x) = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^2+3x}{\frac{(x^2+3x)}{(2x+3)}} = \frac{(x^2+3x)(2x+3)}{(x^2+3x)} = 2x+3$$

6. Tomando $x \sim x + e$ tenemos

$$\begin{aligned} bx^2 - x^3 &\sim b(x+e)^2 - (x+e)^3 \\ bx^2 - x^3 &\sim bx^2 + 2bex + be^2 - x^3 - 3ex^2 - 3xe^2 - e^3 \\ 0 &\sim 2bex + be^2 - 3ex^2 - 3xe^2 - e^3 \\ 0 &\sim b(2ex + e^2) - 3ex^2 - 3xe^2 - e^3 \\ 0 &\sim b(2x+e) - 3x^2 - 3xe - e^2 \end{aligned}$$

resolvemos para b

$$b \sim \frac{3x^2 + 3xe + e^2}{2x + e}$$

y eliminamos los términos que contienen a e

$$b = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}x$$

por lo que el valor máximo es

$$x = \frac{2}{3}b$$

7. Sustituyendo en la ecuación del círculo tenemos que

$$\begin{aligned}(x-v)^2+[f(x)]^2 &= r^2\\ (x-v)^2+\left[x^{\frac{2}{3}}\right]^2 &= r^2\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}F(x) &= (x-v)^2+\left[x^{\frac{2}{3}}\right]^2-r^2=0\\ &= x^2-2xv+v^2+x^{\frac{4}{3}}-r^2=0\end{aligned}$$

de donde obtenemos el polinomio

$$\begin{aligned}F^*(x) &= (2)\,x^2-(1)\,2xv+\left(\frac{4}{3}\right)x^{\frac{4}{3}}+(0)\left(v^2-r^2\right)=0\\ &= 2x^2-2xv+\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}}=0\end{aligned}$$

por lo que

$$v=\frac{1}{3}\frac{3x^2+2x^{\frac{4}{3}}}{x}=x+\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$$

luego la derivada es

$$\begin{aligned}\frac{v-x}{f(x)} &= \frac{x+\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}-x}{x^{2/3}}\\ &= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\end{aligned}$$

sustituyendo en el punto $x=1$ tenemos que

$$m=\frac{2}{3}$$

por lo que la ecuación de la tangente es

$$\begin{aligned}y-1 &= \frac{2}{3}(x-1)\\ y &= \frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\end{aligned}$$

8. Utilizando el método de Fermat, tenemos:

$$\begin{aligned}(x+1)\left(2x^2+5x-7\right) &\sim [(x+e)+1]\left[2(x+e)^2+5(x+e)-7\right]\\ 2x^3+7x^2-2x-7 &\sim 2x^3+6ex^2+2xe^2+7x^2+14xe-2x+4xe^{2\times1}+2ee^2+5e^{2\times1}-2e+2e^2\\ 0 &\sim 6ex^2+2xe^2+14xe+4xe^2+2e^3+5e^2-2e+2e^2\\ 0 &\sim e\left(6x^2+6xe+14x+2e^2+7e-2\right)\\ 0 &\sim \left(6x^2+6xe+14x+2e^2+7e-2\right)\end{aligned}$$

Resolviendo para x

$$\begin{aligned}
x_1 &\sim -\frac{7}{6}-\frac{1}{2}e+\frac{1}{6}\sqrt{-3e^2+61} \\
x_2 &\sim -\frac{7}{6}-\frac{1}{2}e-\frac{1}{6}\sqrt{-3e^2+61} \\
x_1 &= -\frac{7}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{61} \\
x_2 &= -\frac{7}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{61}
\end{aligned}$$

Evaluando $f(x_1)$ y $f(x_2)$, tenemos que

x_1 es un mínimo

x_2 es un máximo

9. Sustituyendo $f(x)=(x^2+1)^{3/2}$ en el polinomio $F(x)$ tenemos

$$\begin{aligned}
F(x) &= (x-v)^2+\left[(x^2+1)^{3/2}\right]^2-r^2=0 \\
&= 4x^2-2xv+v^2+x^6+3x^4+1-r^2
\end{aligned}$$

de donde obtenemos que el polinomio

$$\begin{aligned}
F^*(x) &= (2)\,4x^2-(1)\,2xv+(0)\,v^2+(6)\,x^6+(4)\,3x^4+(0)\,1-(0)\,r^2=0 \\
&= 8x^2-2xv+6x^6+12x^4=0
\end{aligned}$$

y resolviendo para v

$$v=3x^5+6x^3+4x$$

por lo que la derivada es

$$\begin{aligned}
\frac{v-x}{f(x)} &= \frac{3x^5+6x^3+3x}{(x^2+1)^{3/2}}=\frac{3x\,(x^2+1)^2}{(x^2+1)^{3/2}}=3x\,(x^2+1)^{1/2} \\
f'(x) &= 3x\,(x^2+1)^{1/2}
\end{aligned}$$

10. Utilizando la regla de Hudde tenemos que el polinomio $F(x)$ es

$$\begin{aligned}
F(x) &= (x-v)^2+(x^n)^2-r^2=0 \\
&= x^2-2xv+v^2+x^{2n}-r^2
\end{aligned}$$

y el polinomio $F^*(x)$ es

$$\begin{aligned}
F^*(x) &= (2)\,x^2-(1)\,2xv+(0)\,v^2+(2n)\,x^{2n}-(0)\,r^2 \\
&= 2x^2-2xv+2nx^{2n}=0
\end{aligned}$$

resolviendo para v tenemos

$$v = nx^{2n-1} + x$$

por lo que la pendiente está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{v-x}{x^n} &= \frac{nx^{2n-1}+x-x}{x^n} = \frac{nx^{2n-1}}{x^n} = nx^{n-1} \\
f'(x) &= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

6 Bibliografía

1. BADILLO, Márquez Jaime. *Una aproximación al objeto de estudio del Cálculo.* Tesis Profesional. Universidad Autónoma de Puebla.
2. BOYER, Carl B. *Historia de la Matemática.* Alianza Editorial. Primera Edición. España. 1999
3. CANTORAL, Uriza Ricardo. *Procesos del Cálculo y su Desarrollo Conceptual.* Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México, D.F., 1983.
4. CANTORAL, Uriza Ricardo. FARFÁN, Márquez Rosa Maria. *Desarrollo Conceptual del Cálculo.* Ed. Thomson. México. 2004.
5. EDWARDS, C. H. Jr. *The historical Development of the Calculus.* Springer. USA. 1979.
6. EVES, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics.* Holt, Rinehart and Winston. 4ta. Edición. USA. 1976.
7. HAHN, Alexander J. *Basic Calculus.* Springer. USA. 1998.
8. KATZ, V. A History of Mathematics. *An Introduction. Adisson –Wesley.* USA. 2000.
9. NELSEN, Roger B. *Proofs Without Words.*The Mathematical Association of America. USA. 2000.
10. TORRES, Hernández Roberto. *Miscelánea Matemática.* Sociedad Matemática Mexicana. No. 35. Pags.41-48. México. Mayo 2002.
11. UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas. *Historia de las Matemáticas.* No. 26. Año VIII. España. Enero 2001.