Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Psicología
Doctorado en Psicología y Educación

EL PRINCIPIO DE IDENTIDAD ¿LEY SUPREMA DEL PENSAR? REPERCUSIONES EN EL ÁMBITO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Doctora en Psicología y Educación

Presenta:
Andrea Leticia López Pineda

Dirigido por:
Dra. Sonia Ursini Legovich

SINODALES

Dra. Sonia Ursini Legovich
Presidente — Firma

Dra. Jacqueline Zapata Martínez
Secretario — Firma

Dra. Raquel Toral Calo
Vocal — Firma

Dr. Jorge Armando Reyes Escobar
Vocal — Firma

Dr. Tomás Vázquez Arellano
Vocal — Firma

Dr. Miguel Ángel Ocampo Mortera
Suplente — Firma

Dr. Ricardo Quintero Zazueta
Suplente — Firma

Lic. en Ec. Jorge Antonio Lara Ovando
Director de la Facultad

Dr. Luis Gerardo Hernández Sandoval
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Abril, 2008.
México

RESUMEN

En el presente trabajo se indaga sobre las implicaciones del principio de identidad en el ámbito de la educación matemática. Dicho principio se ha considerado en los espacios educativos como una verdad absoluta, incluso desde diversas perspectivas filosóficas, se ha afirmado su veracidad, la misma matemática formalizada y axiomática, parte de dicho principio. Sin embargo, se asume desde un saber matemático más general, que dicho principio es convencional y por tanto socialmente constituido. Por otra parte, la perspectiva psicogenética, de gran relevancia en la conformación de planes y programas de estudio en México, fundamentalmente en los niveles básico y medio, genera su propuesta teniendo como trasfondo la existencia de dicho principio. Filósofos como Heidegger (1964), consideran que las matemáticas constituyen *una* manera de pensar el mundo, sin embargo no pueden ser consideradas como la *única* manera de pensar, por ello cabe considerar que en los espacios educativos, se abrirían diversas posibilidades. En este trabajo se indaga, particularmente, si este principio es evidente y asequible para los estudiantes de bachillerato, o conlleva otras posibles interpretaciones. Para ello se realizaron cuestionarios y entrevistas con 154 estudiantes de dos instituciones de nivel medio superior en la ciudad de Querétaro, a fin de aproximarse a la forma en que interpretan dicho principio en expresiones algebraicas y a partir de figuras geométricas básicas. Los resultados muestran que el principio de identidad no parece ser asumido como verdad absoluta por parte de los estudiantes y no puede por tanto representar un logro del desarrollo cognitivo de los jóvenes en la etapa formal. Sin embargo la escuela parece ignorar las múltiples interpretaciones de los jóvenes, abriendo una brecha entre el discurso del profesor y los estudiantes. Lo que pone de manifiesto un conflicto entre la normatividad establecida, convencional e históricamente y las formas de pensar el mundo y la realidad por parte de los estudiantes. Lo anterior invita a pensar si estas interpretaciones pueden representar una alternativa de explicación a la dificultad de aprendizaje de los contenidos matemáticos, expuestos de manera canónica, convencional, formal y unidireccional en los ámbitos educativos.

(**Palabras clave**: principio de identidad, variable, bachillerato)

SUMMARY

This work examines the implications of the principle of identity in the area of education in mathematics. This principle has been considered in educational circles as an absolute truth. Its veracity has even been affirmed from different philosophical perspectives. Mathematics themselves, formalized and axiomatic, are based on said principle. Nevertheless, from a more general mathematical knowledge, it is assumed that this principle is conventional and, therefore, socially constituted. On the other hand, the psychogenetic perspective, which has great relevance in the establishment of study plans and programs in Mexico, especially at elementary and secondary school levels, sets forth its proposal with the existence of this principle as a background. Philosophers such as Heidegger (1964), believe that mathematics constitute *a* way of conceiving of the world; nevertheless, it cannot be considered the *only* way. As a result, it can be postulated that in educational areas, mathematics would open different possibilities. In this work we particularly investigate whether or not this principle is evident and attainable for high school students, or if it includes other possible interpretations. In order to do this, we used questionnaires and interviews among 154 high school students from two different institutions in the City of Queretaro with the objective of ascertaining the way in which they interpret the principle in algebraic expressions and from basic geometric figures. Results show that the principle of identity does not seem to be assumed as an absolute truth on the part of the students and cannot, therefore, represent an achievement in the cognitive development of young people in the formal stage. However, the school appears to ignore the multiple interpretations given by the students, thus creating a gap between the teacher's discourse and the students. This exposes a conflict between the established norms, both conventionally and historically, and the ways in which students conceive of the world and reality. The above makes us wonder whether these interpretations could represent an alternative explanation for learning difficulties related to the contents of mathematics which are presented in a canonical, conventional, formal and unidirectional way in educational areas.

(**Key words:** Principle of identity, variable, high school)

A mi familia que es la fuerza de mi trabajo, de mi ser…

Carlos Miguel, Aura Daniela y Andrea Fernanda.

José Miguel Selvas

A mis padres Antonio López (†) y Lila Pineda

A mis hermanos:

José Antonio, Felipe Gerardo (†),
Leobardo, Ma. del Rocío,
Oscar Alfredo, Héctor Armando,
Alejandro, Ma. Lila.

A mis queridos sobrinos

AGRADECIMIENTOS

Quiero manifestar mi mayor agradecimiento a todas aquellas personas que permitieron la realización del presente trabajo, en primer lugar a tres queridas y admiradas amigas y maestras –*magíster*- la Dra. Jacqueline Zapata Martínez que a partir del ejemplar trabajo que lleva a cabo, motivó la iniciación y seguimiento de este escrito, además de ser una fuente de inspiración para leer de otra manera las propuestas sobre educación matemática; a la Dra. Sonia Ursini Legovich que con su sensibilidad dio cabida y cuidadoso seguimiento a este documento, igualmente quiero agradecer su paciencia, ante los vaivenes del trabajo. A la doctora Raquel Toral Calo que con sus incisivas preguntas y atinadas observaciones, lograron que pudiera moverme de lugar cuando fue necesario.

Igualmente importante, fue la participación de Ing. Beatriz Moreno Carrillo compañera de interminables noches de trabajo en la definición de instrumentos, aplicación de cuestionarios y análisis de resultados y discusiones sobre el sentir y acercamiento de los estudiantes de bachillerato a nociones matemáticas.

Así mismo quiero agradecer a la profesora Q. en A. Ma. de los Ángeles Núnez, Coordinadora del Plantel Sur de la Escuela de Bachilleres por las facilidades proporcionadas para la realización de entrevistas y cuestionarios, así como a los estudiantes de ese plantel y del Colegio de Bachilleres de Querétaro, quienes desinteresadamente participaron con sus opiniones, y visiones sobre el tema, las cuales espero hayan quedado consignadas en este documento

También quiero dar las gracias a las compañeras psicólogas Verónica Álvarez Álvarez, Alma Delia Galván Román, Arely Aguilar Flores, Fátima Gónzalez Patiño, participantes del programa de servicio social, que apoyaron el inicio del trabajo, y que se comprometieron a fondo con las preguntas fundamentales expuestas en este trabajo.

A los doctores Jorge Reyes Escobar y Raymundo Mier Garza por sus espléndidos seminarios, de inagotables matices y una fuente de interrogantes que abrieron la pauta al desarrollo de este documento, al doctor Miguel Ángel Ocampo cuyos cuestionamientos y amenas pláticas dieron fuerza a algunas argumentaciones. A los doctores Dr. Ricardo Quintero y Tomás Vázquez por su excelente disposición para la revisión de este trabajo.

Finalmente quiero agradecer a la Sra. Susana Olvera, que con su gran espíritu de servicio, hizo nuestro hogar más confortable y a todos mis compañeros y amigos que siempre estuvieron al pendiente de los avances en la investigación y que con su amistad y apoyo incondicional impulsaron la realización del mismo. Y muy particularmente a una adolescente que preguntó alguna vez: “¿Por qué A = A?”

El mayor hechicero (escribe memorablemente
Novalis) sería el que hechizara hasta el punto
de tomar sus propias fantasmagorías por
apariciones autónomas. ¿No sería ése nuestro
caso? Yo conjeturo que así es. Nosotros (la
indivisa divinidad que opera en nosotros)
hemos soñado
el mundo. Lo hemos soñado resistente, misterioso,
visible, ubicuo en el espacio y firme en el tiempo;
pero hemos consentido en su arquitectura
tenues y eternos intersticios de sinrazón
para saber que es falso.

Jorge Luis Borges

INDICE

INTRODUCCIÓN

Una de las características de la sociedad actual es su alto grado de matematización, las actividades de los ciudadanos del orbe, se encuentran generalmente bajo un esquema de medición: el número de nacimientos, la cantidad de kilovatios necesarios para satisfacer las necesidades de las poblaciones, horarios en los que trabajan y descansan los individuos, insumos, gastos, economías globalizadas, salarios, costos, entre muchos más. ¿Cómo fue que la matemática se introdujo en el centro del ser y del pensar cotidiano? Interrogante de gran trascendencia para entender las fuerzas motrices de la sociedad contemporánea y con ello de su comportamiento.

Asumir que las matemáticas son un pilar de nuestras sociedades, trae como consecuencia la necesidad de que los Estados formen a sus nuevas generaciones con una base fundamentalmente matemática. Un cálculo de gran precisión política pretende que *todos* los estudiantes aprendan cuando menos las bases matemáticas que se han generado históricamente. Desde un pensamiento calculador se argumenta que la educación matemática es necesaria no sólo por sus fines utilitarios sino también por su carácter formativo.

No obstante, a pesar de la importancia de su inclusión en el proceso educativo, y del espacio curricular que ocupa, es de sobra conocido que justamente constituye una de las áreas que presenta mayor dificultad para su aprendizaje. Las repercusiones del insuficiente desempeño en esta área son costosas, tanto económica, política y socialmente, como personal y afectivamente para los estudiantes, padres de familia y sociedad en general

Ante esa situación se ha generado un campo de investigación específico constituido por la educación matemática, que ha permitido el diseño de novedosas estrategias didácticas, el rediseño de planes curriculares, el surgimiento de asociaciones, la realización de congresos, la publicación de revistas y libros. Sin embargo, a pesar de múltiples esfuerzos, los estudiantes siguen teniendo dificultades para acercarse a este saber, sobre todo en países como México, en donde tal situación se ve agravada por condiciones socioeconómicas, políticas, culturales contrarias al bienestar nacional. No obstante, los resultados de las investigaciones y actividades en el campo de la educación matemática, han permitido reflexionar sobre la dimensión de la problemática, y por supuesto reconocer la existencia de prácticas exitosas, aunque en un plano particular, sin posibilidad de hacer extensivos sus resultados.

La problemática de la educación matemática tiene un sinfín de aristas, se podría señalar que la investigación en este campo, en gran medida, se ha dirigido a las metodologías para favorecer el aprendizaje o “construcción del conocimiento”, así mismo, se ha orientado a encontrar los procesos bajo los cuales se genera el conocimiento matemático. Se ha intentado dar solución a la problemática en la educación matemática a partir de la comprensión de los procesos involucrados en el proceso de adquisición o construcción del conocimiento y la intervención didáctica o psicopedagógica.

Un aspecto que consideramos fundamental, en el acercamiento a esta problemática, es saber qué clase de saber está contenido en las matemáticas. Si consideramos que enseñamos matemáticas o pretendemos que los estudiantes aprendan matemáticas, una cuestión que se torna fundamental es ¿qué entendemos por matemáticas?, ¿qué son las entidades matemáticas?, ¿qué principios lógicos están en la base de los contenidos matemáticos?

En este trabajo, se vislumbra la existencia de posibles vertientes de indagación que rebasan el plano metodológico, entre los que se puede mencionar aquellos relacionados con los fundamentos mismos del contenido matemático, como lo son por ejemplo los principios lógicos y axiomas que subyacen en esta área del saber y particularmente el principio de identidad (A = A).

Este principio tiende a establecerse como ley universal del pensar, ley que define cómo hay que pensar, tal modo es por antonomasia, lógico, racional, forma de pensar que se ha vuelto canon en la sociedad contemporánea, constituyéndose igualmente, como uno de los fundamentos en el quehacer matemático.

Ante ello, cabe preguntarse si los estudiantes asumen este principio lógico, subyacente en el quehacer matemático, y emanado de la lógica clásica, como elemento necesario y suficiente por sí mismo; y si conciben que este principio es pertinente para dar sustento a su conocimiento de las matemáticas o si por el contrario, otras formas de pensar alternativas están imponiéndose al trabajar con contenidos matemáticos, específicamente algebraicos, las cuales tensionan su comprensión en esta área del saber.

Ante tales cuestionamientos, el presente trabajo tiene como objetivo indagar la forma en la que los estudiantes asumen el principio de identidad y cómo influye en la comprensión de los contenidos escolares, especialmente referidos al álgebra.

La suposición de este trabajo es que los estudiantes tienen formas de pensar alternativas a las leyes de la lógica clásica, que, en un momento histórico y aún hoy, en muchos medios, se concibe como *la* forma en las que el ser humano piensa, de tal manera que esta lógica se ha considerado un paradigma de la forma de raciocinio del ser humano. Asumimos que el principio de identidad lógico es *convencional*, emanado de una cultura particular, y que se difunde en los espacios educativos, fundamentalmente a través de la instrucción -no educación- matemática.

Se plantea igualmente si la educación y particularmente la educación matemática al imponer una forma de pensamiento (lógico), lleva a los estudiantes con formas de pensamiento alternativos, al fracaso en esta área del saber, y por ende a la segregación o marginación. Se postula que la instrucción al privilegiar el pensamiento lógico va limitando otras formas de pensamiento.

A partir de las interrogantes anteriores, en el presente trabajo abordaremos específicamente aquella referida a las posibles interpretaciones que realizan los estudiantes sobre el principio de identidad, indagamos si asumen una interpretación canónica o presentan interpretaciones diversas, esto último permitiría, en primer lugar, vislumbrar una posible fuente de dificultad para acercarse a los contenidos matemáticos escolares, y en segundo lugar, impulsaría una posible vertiente de investigación sobre sus posibles alcances en la formación del pensamiento,.

Como base de nuestro trabajo, en el primer capítulo presentamos un panorama de algunos de los discursos en torno a la naturaleza de las entidades matemáticas, así como de los programas de investigación en educación matemática. En ese capítulo ponemos de manifiesto que posturas denominadas posmodernas, falibilistas, dialógicas y no descriptivistas, aluden como características del saber matemático, su contextualización cultural e histórica y, por ende, consideran que el saber matemático es falible, convencional y situado, estas propuestas surgen como respuesta a posturas absolutistas, modernas y descriptivistas Ernest (1994,1996 y 2004), Moslehian (2003, 2004), Sierpinska y Lerman (1996), Handal (2003), Alemán (2001), Tymoczko (1994). En las primeras, los principios lógicos son susceptibles de cuestionamiento. De ahí que los programas de investigación en educación matemática puedan coincidir con algunas de ellas en su formulación teórica al exponer la forma en la que se genera el saber matemático en los estudiantes.

En el segundo capítulo mostramos que el principio lógico de identidad, como elemento fundamental en el desarrollo del quehacer matemático y por tanto esencial para su comprensión, tiene una amplia trayectoria histórica. Trataremos de seguir la genealogía del principio de identidad, de apreciar como se fue conformando un discurso alrededor de este principio hasta ser considerado incuestionable, y de como algunos pensadores abrieron interrogantes en torno a éste (Heidegger, 1964, Deleuze, 1983). No obstante, advertiremos que en dicha travesía los significados, sentidos y alcances han sido muy variados, generando un sinfín de acepciones respecto a dicho principio.

En el tercer capítulo se intentará mostrar, a partir de la lectura de Heidegger (1964) la emergencia de la matemática como el área del saber por excelencia, cuyo sustento lo constituye el principio de identidad, y cómo la matemática va conformando una realidad específica. Su conocimiento y dominio proporciona el fundamento de toda ciencia denominada “moderna”, de la cual forman parte actualmente las “ciencias de la educación”, que son finalmente las que orientan el carácter de la educación a nivel global.

Aún cuando pensadores y filósofos contemporáneos asumen la dificultad para establecer verdades absolutas, ya que la producción humana es histórica, y por tanto cualquier ley, principio o teoría debe ser considerada en su relatividad cultural, en la práctica educativa generalmente se pretenden enseñar como verdades últimas los saberes matemáticos. En estos escenarios generalmente no se cuestiona su veracidad ni se asume su relatividad en cuanto a su participación en la concepción del mundo.

Sobre todas las “verdades” enseñadas en las aulas, las matemáticas son las más incuestionables, pero cabe aclarar que se trata de “las matemáticas escolares”. Entre éstas últimas y las matemáticas generadas por la actividad de los matemáticos existen diferencias importantes.

Ahora bien: ¿Qué matemáticas se enseñan en las aulas? Para acercarnos a esta interrogante, traemos a colación nuestra propia experiencia académica. Las matemáticas que aprendimos en los primeros años escolares hasta bachillerato, se referían fundamentalmente a contar, a operar con los algoritmos básicos, a resolver ecuaciones de primer y segundo grado, resolver problemas con trigonometría, y tal vez algo de cálculo. De este aprendizaje, lo que la mayoría de los estudiantes parecen recordar es la dificultad de su comprensión, una gran parte de los estudiantes aprendió sólo a operar con ellas y, en general, de manera limitada. Ello podría explicarse en la medida en que las matemáticas que se enseñan, generalmente se restringen a su carácter instrumental, y no siempre clarifican la pertinencia de estos instrumentos en diferentes campos del saber ni su estructura conceptual. Lo anterior nos lleva a reflexionar sobre las condiciones que han dado lugar a esta incomprensión.

En el concierto de perspectivas para explicar la construcción de conocimiento, surge la propuesta psicogenética piagetiana, de gran influencia en los ámbitos educativos contemporáneos, y particularmente en nuestro país, que parece asumir los fundamentos filosóficos de la ciencia moderna. Esta perspectiva da por sentado que el intelecto humano evoluciona recorriendo una vía regia que conduce a un pensamiento lógico, hipotético deductivo. Este último representaría la culminación del desarrollo del intelecto, y con ello el conocimiento científico. A este discurso subyace una postura metafísica en dos sentidos, en el primero al señalar la existencia de una "naturaleza humana" –de carácter racional-, y en el segundo, al considerar una línea de desarrollo humano particular.

Abordamos la propuesta psicogenética y algunas de sus implicaciones en el cuarto capítulo, en el cual también exponemos cómo en esta perspectiva teórica, quedan entrelazadas la psicología del desarrollo, la matemática y la lógica, en donde cada una de ellas representa el fundamento de las otras. Sin embargo los postulados de donde se parte para dicha conjunción parecen quedar sustentados en una visión moderna (Skovsmose y Nielsen, 1996).

Considerando que las matemáticas son, como sostiene Heidegger (1964), una manera de pensar el mundo, y no pueden ser consideradas como la única manera de pensar, y por tanto, pueden entenderse como un fenómeno social, como construcciones culturales y por ende falibles, cabe suponer que en los espacios educativos se abrirían diversas posibilidades de interpretación.

No obstante, desde la perspectiva psicogenética, se afirma que la asunción del principio de identidad generalizado se lograría en la etapa de las operaciones formales (Piaget, et. al., 1985a). Por tal motivo, se aduce desde tal posición, que un joven, en este nivel de desarrollo, asumiría de manera obvia la identidad. Sin embargo, cabe preguntarse, ¿qué tan evidente y asequible es en realidad el principio de identidad para los jóvenes estudiantes de bachillerato, quienes se encuentran precisamente, según esta propuesta teórica, en la etapa de asimilación del lenguaje formal de la matemática?

Para responder a la interrogante planteada, nos planteamos por un lado, determinar si en matemáticas, el principio de identidad (A=A), puede ser evidente y asequible para los estudiantes de bachillerato, y si éstos interpretan tal principio de manera unívoca y canónica o conlleva otras posibles interpretaciones. Por otro lado, proponemos explorar si estas interpretaciones tienen relación con su desempeño en la materia. El análisis de este cuestionamiento se expone en los capítulos quinto y sexto.

En los capítulos mencionados, se muestran los resultados y las argumentaciones de aproximadamente 150 estudiantes de nivel medio superior. Considerando que estos jóvenes han tenido ya una experiencia mínima de tres años con el Álgebra, y dando por supuesto, de acuerdo a una perspectiva psicogenética, que se encontrarían en una etapa formal del pensamiento, indagamos si los jóvenes tendrían la posibilidad de interpretar canónicamente el principio de identidad de la literal en expresiones algebraicas.

Desarrollamos el trabajo de indagación en tres momentos. El primero consistió en una entrevista cuya finalidad fue acercarse a la manera en que los estudiantes interpretan el principio de identidad en objetos concretos, así como en su representación aritmética o algebraica. En un segundo momento examinamos a través de un cuestionario, la interpretación que dan los jóvenes a este principio cuando se les pide relacionar figuras geométricas con expresiones algebraicas y deducir expresiones algebraicas a partir de datos relacionados con figuras geométricas. Finalmente en el tercer momento exploramos las posibilidades de reconocimiento del principio de identidad (x=x), aplicado a la literal en una expresión algebraica. Esto es, si el joven podría reconocer que una literal es la misma, independientemente del número de veces que aparece en dicha expresión o se encuentre acompañada de cualquier otro elemento (coeficiente, exponente o signo).

En estos dos últimos capítulos mostramos la manera en que los estudiantes se acercan a dicho principio, particularmente, cuando este principio se aplica a la literal dentro de una expresión algebraica.

Las interpretaciones de las respuestas obtenidas por los jóvenes muestran que dicho principio no parece ser evidente en una primera instancia, antes bien, éstas parecen indicar que la identidad de las literales es confusa.

En los capítulos quinto y sexto también exponemos las diferentes interpretaciones a las que dan cabida expresiones como “$x=x$”, “$x=y$” y “ $x \neq y$”;

reportamos que algunas interpretaciones parecen quedar alejadas de la interpretación canónica necesaria para operar los contenidos matemáticos escolares.

En el presente trabajo, en su conjunto, pretendemos mostrar que el principio de identidad, aunque ampliamente aceptado en los ámbitos educativos, no es una verdad incuestionable para los estudiantes, y por consiguiente, no representa para ellos una proposición obvia. Esta observación identifica un problema para acceder a los contenidos matemáticos, ya que la dificultad para establecer la identidad de los elementos empleados en el planteamiento de expresiones y enunciados genera conflictos al interpretar el contenido de las expresiones que conforman los contenidos matemáticos revisados en clase.

Nuestro trabajo intenta dar muestra de la dificultad por parte de los estudiantes para interpretar canónicamente el principio de identidad, y con ello poner en evidencia la dificultad para saber: a) cómo debe ser interpretado dicho principio cuando se trata de trabajar con literales dentro de las expresiones algebraicas y b) cuándo tienen que atender al aspecto que cambia y cuándo al que se mantiene estable.

Por tanto, es una invitación a girar la mirada hacia la distancia entre las reglas establecidas por la disciplina, situadas histórica y culturalmente, y por tanto convencionales, y las diversas interpretaciones que realizan los jóvenes sobre las mismas.

Consideramos que de no apreciar el sentido que el principio de identidad tiene para ellos (así como el que adviene en la matemática y/o filosofía que lo constituye), se obstaculiza la posibilidad de aprender matemáticas, en especial cuando se aborda el saber algebraico. Así mismo, vislumbramos que en esta orientación a través de la “instrucción” hacia formas de pensamiento matemático formalizado, se cancelan algunas formas de pensamiento divergentes a un pensamiento lógico formal. Pensamiento que efectivamente no es único, ni total, -aunque la civilización occidental contemporánea imponga la creencia contraria-. Pensar es de muchas, de múltiples, de infinitas maneras, tantas como de ser, de vivir, de crear. En los escenarios educativos es primordial admitirlo, reconocerlo para abrir así una verdadera interlocución entre profesores y estudiantes.

CAPÍTULO PRIMERO

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y SUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICOS

En este primer capítulo abordaremos en un primer momento, algunas perspectivas filosóficas en torno a la naturaleza del saber matemático. En segundo lugar, expondremos algunos programas de investigación en educación matemática y su posible vínculo con las primeras. Esta exposición tiene como finalidad señalar que si bien existen posturas filosóficas que abren la posibilidad de entender a la matemática como una producción cultural, falible y contextuada, estas perspectivas han impactado de manera limitada en los programas de investigación en la educación matemática. Particularmente trataremos de señalar que dichos programas han dejado al margen un aspecto que pudiera ser de interés en la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas, nos referimos a la multiplicidad de interpretaciones a que pueden dar cabida los principios lógicos, y muy específicamente, el principio de identidad.

La mayor parte de los estudios en educación matemática tienen, entre otros objetivos, la búsqueda de estrategias o nuevas metodologías que puedan favorecer el aprendizaje de las matemáticas escolares, sin embargo cabe señalar que esta búsqueda no ha puesto en cuestión la propia enseñanza de esta área del saber, se asume sin ningún cuestionamiento la enseñanza de las matemáticas como una prioridad para el desarrollo de los estudiantes, y específicamente de una matemática en particular, es decir formal y axiomática Ello implica una posición filosófica con respecto a la naturaleza de las matemáticas.

La cuestión acerca de qué son las entidades matemáticas es fundamental en el proceso educativo, en la determinación del currículo, de su importancia en la formación de los estudiantes, así como en las propuestas de estrategias empleadas para su aprendizaje. Igualmente los programas de investigación en educación matemática tienen de manera esencial una visión específica de la naturaleza de las matemáticas. Consideramos conveniente indagar sobre estas posiciones filosóficas y su impacto en los diversos programas de investigación en educación matemática. Esta revisión nos permitirá ubicar el papel de los principios lógicos, entre los que se encuentra el principio de identidad, en el despliegue de las diversas propuestas.

1.1. Posturas en Filosofía de las Matemáticas.

Existen varias posiciones dentro de la filosofía de las matemáticas, las cuales han sido abordadas por investigadores como Ernest (1994,1996 y 2004), Moslehian (2003, 2004), Sierpinska y Lerman (1996), Handal (2003), Alemán (2001), Tymoczko (1994), entre otros.

A pesar de las diversas denominaciones a las que aluden, encontramos como coincidencia, el que la mayor parte de ellos exponen las diferentes perspectivas en relación a una posición que había sido dominante hasta mediados del siglo pasado, es decir una posición que podría denominarse absolutista. Los trabajos de los autores mencionados, señalan así, en su descripción dos conjuntos de visiones filosóficas acerca de la naturaleza de las matemáticas y su forma de proceder. Estas perspectivas reciben denominaciones variadas, como Absolutistas, Fundacionalistas vs. Falibilistas, cuasi-empiricistas (Handal, 2003); Monológicas vs. Dialógicas (Ernest, 1994, Skovsmose y Nielsen, 1996); Modernas vs. Posmodernas; Descriptivistas vs No Descriptivistas (Alemán, 2001), dependiendo del aspecto considerado en su abordaje.

Las aproximaciones absolutistas, fundacionalistas, monólogicas, descriptivistas y modernas son diferentes designaciones de una posición en la que las matemáticas son concebidas como verdades absolutas, independientemente del hombre, y cuya certeza de verdad no puede ser objetada. Su verdad está sustentada de diversas maneras, según la particularidad de las variantes de cada posición. La distinción entre ellas, radica en el aspecto que se enfatiza por el autor proponente.

Así, podemos señalar que las perspectivas **absolutistas,** de acuerdo a Ernest (1994:35), están sustentadas en las siguientes tesis:

1. Las bases en las que el conocimiento matemático se funda son verdaderas y seguras.
2. se puede lograr deducciones enteramente fiables a partir de premisas explícitas.
3. se tiene como ideal lograr un conocimiento matemático basado en pruebas impecables
4. las propiedades lógicas de las pruebas matemáticas son suficientes para establecer el conocimiento matemático, sin necesidad de mediación humana o de aspectos sociales

Esta postura, expresa Ernest (1994), tiene un carácter eminentemente monológico, y está fundada en la racionalidad cartesiana y el modernismo.

Por otra parte la **fundacionalista**, siguiendo a Ernest (1994), incluye las escuelas *logicista*, *formalista* e *intuicionista*, movimientos muy populares en la primera mitad del siglo pasado, las cuales trataron de reconstruir una estructura racional del pensamiento, fuera de todo cuestionamiento, basado en un plan maestro es decir, el paradigma euclidiano. Esta aproximación se vio cuestionada, por una parte, en la propia imposibilidad de lograr sus objetivos, y por la otra, por el trabajo mismo de los matemáticos que derribaron las limitaciones impuestas por este paradigma.

Handal (2003) describe al *logicismo* como una forma de realismo platónico, en el cual las matemáticas son vistas como un conjunto de dominios abstractos que existen externamente a la creación humana. Los conceptos pueden ser reducidos a propiedades abstractas que pueden ser derivadas mediante principios lógicos. Esta postura fue cuestionada, ya que su obsesión por un estricto razonamiento lógico, deja fuera a la intuición y la conjetura, las cuales parecen ser poderosas generadoras del pensamiento creativo.

El *formalismo* por otra parte, y siguiendo a Handal (2003), comparte con el logicismo el punto de vista lógico, sin embargo también considera que el conocimiento matemático se genera a través de la manipulación de símbolos, operación que es prescrita por un conjunto de reglas y fórmulas las cuales son aceptadas aprioristicamente.

El *intuicionismo* por último concibe el conocimiento matemático como el resultado de una actividad mental regulada por leyes naturales.

La denominación de visiones o aproximaciones monológicas o dialógicas propuesta por Ernest (1994), surge empleando la metáfora de la conversación, ya que este autor considera que las bases para adoptarla, tiene un fundamento doble: el primero, señala Ernest, se encuentra en la suposición de Wittgenstein de que "las formas de vida", son compartidas por las personas a través de actividades en común sobre el mundo, y es ontológicamente primitiva, ésta es una condición *sine qua non* de la vida humana; y subsecuentemente que el discurso y el lenguaje (desplegado en juegos del lenguaje de Wittgenstein) juegan un papel esencial en la génesis, adquisición, comunicación, formulación y justificación de virtualmente todo el conocimiento, incluyendo el conocimiento matemático.

De manera particular la visión **monológica,** asume que las pruebas matemáticas están basadas en una fundación única y firme, y que ni la conversación, ni el diálogo o dialéctica son necesarios.

Cabe señalar que Skovsmose (1994:203-205) afirma que la postura piagetiana cae dentro de esta aproximación monológica ya que el desarrollo del pensamiento y específicamente del pensamiento matemático obedece a lo que Piaget denomina la abstracción reflexiva o reflexionante, que el sujeto epistémico realiza de manera aislada, no requiere la comunicación con otros. Ello implica que la fuente del desarrollo del conocimiento es la deducción por el racionalismo y la inducción por el empiricismo. De esta manera el constructivismo de Piaget, viene a ser monólogico. No obstante que otros autores, por ejemplo Handal (2003), argumentan que la posición constructivista, caería dentro de las posturas falibilistas o cuasi empíricas.

Nuestra lectura coincide con la propuesta de Skovsmose, de acuerdo al análisis que se realizará más adelante.

En lo que respecta a las posturas denominadas **modernas**, se puede señalar que surgen con la filosofía cartesiana en la cual se privilegia la razón para acceder al conocimiento. Esta propuesta se constituye en una búsqueda de algo que pudiera sustentar la verdad del conocimiento. En esta línea Kant propone que la lógica racional es el fundamento de la verdad, su propuesta sostiene y a su vez consolida los principios lógicos aristotélicos.

Moslehian, (2004:3) a su vez, afirma que las posturas modernas tienen como componentes: a) su racionalismo, es decir, que el conocimiento puede lograrse mediante la razón; b) su empiricismo, que indica que el conocimiento puede lograrse mediante el método científico; y c) su materialismo, que se refiere a la creencia de un universo puramente físico. Componentes derivados de las propuestas cartesianas y kantianas.

Por otra parte Alemán (2001:15-45) argumenta que las posturas **descriptivistas** conciben a las entidades matemáticas como existentes de suyo, independientemente del hombre, están en la naturaleza, en el mundo circundante, o en otro plano de realidad, por ello son susceptibles de conocerse.

Dentro de los descriptivistas se encuentran aquellos que consideran una posición platónica, los cuales manifiestan que las matemáticas constituyen una realidad abstraída, no perceptible por los sentidos, sino accesibles mediante una facultad especial de la razón denominada “intuición intelectual”. Esto es, las entidades matemáticas no existen en nuestro mundo sino en un mundo insustancial.

También entre las aproximaciones descriptivistas existen propuestas que consideran que las matemáticas tienen una existencia propia dentro de nuestra realidad material. A éstos se les puede denominar empiristas, y dentro de éstos existen dos posiciones, el empirismo radical, entre sus principales representantes se encuentran Maddy y T. Tymoczko, y el empirismo holista, sostenido por Quine (Alemán, 2001).

No obstante, en el siglo XX surgen una serie de cuestionamientos en torno a la tendencia absolutista y fundacionalista de la matemática, los cuales permiten el desarrollo de nuevas aproximaciones a la naturaleza y modo de proceder de la matemática, aunque, como señala Ernest (1994:33-34) estas posturas provienen de un grupo de "inconformes". Los trabajos de Lakatos, Kitcher, Davis y Hersh, Wittgenstein, entre otros, muestran esta otra perspectiva denominada de diversas maneras: posmodernas, cuasi-empiricistas, dialógicas, falibilistas, no descriptivistas, etc.

Ernest (1994), señala que en conjunto, estas aproximaciones cambian e intentan eliminar algunas de las dicotomías tradicionales propuestas en filosofía de las matemáticas incluyendo:

1. la afirmación de que el conocimiento matemático es *a priori* como opuesto de *a posteriori*
2. la afirmación de que el conocimiento matemático es analítico como opuesto a sintético en el sentido kantiano, el conocimiento matemático es de naturaleza lógica.
3. la afirmación de que el conocimiento matemático involucra el contexto de justificación como opuesto al contexto de descubrimiento.
4. la afirmación de que las matemáticas son monológicas como opuestas a dialógicas.

Moslehian (2004:3-5) argumenta que la aproximación **posmoderna**, se caracteriza por negar las verdades absolutas basadas en la racionalidad, igualmente refuta la objetividad, por ende, acepta la ambigüedad y el desorden, va del escepticismo al nihilismo, rechaza tanto el determinismo y el dogmatismo, como las oposiciones: bueno-malo, verdad-ficción y ciencia y mito. Esta posición posmoderna, dice Moslehian deja fuera cualquier ingenua confianza en el progreso.

El conocimiento posmoderno tiene un carácter esencialmente plural, en el sentido de que las interpretaciones diversas, divergentes y contradictorias e inconmensurables se contestan entre sí, sin cancelarse mutuamente.

En el caso de las matemáticas, una interpretación posmoderna implica que el conocimiento matemático ha sido socialmente construido y es aceptado por motivos sociales en lugar de por cualquier sentido de verdad objetiva. Se admiten las contradicciones y paradojas, asimismo se reconoce que el orden no es la base para el conocimiento, ni el desorden es enemigo de la verdad.

El posmodernismo cuestiona la lógica aristotélica cuando alude que algo puede ser falso o verdadero, pero no ambas, y asume una lógica difusa en el cual las decisiones están basadas en "grados de verdad" en lugar de "falso-verdadero", esta lógica difusa, es más parecida a la forma del razonamiento humano (Moslehian, 2004, p.4).

El conocimiento, de acuerdo a esta perspectiva, se caracteriza por su utilidad y funcionalidad.

Compartiendo estas premisas el **cuasi-empiricismo** concibe a las matemáticas como una actividad socialmente construida y por lo tanto, práctica, falible y situada histórica y culturalmente. Las matemáticas son una creación humana que surge y es fomentada por la experiencia práctica, siempre creciendo y cambiando, abierta a la revisión y al cambio, -de acuerdo a Lakatos citado por Handal (2003). También señala Handal, retomando a Ascher, que los métodos son dependientes del espacio ya que diferentes culturas y diferentes personas tienen formas diversas de hacer y validar su conocimiento matemático.

En esta línea de pensamiento Putnam (citado en Handal, 2003), argumenta que el poder de las matemáticas reside no solamente en su habilidad para ir más allá del dominio de las entidades concretas, ni en la belleza de sus pruebas, sino en su poder para proporcionar soluciones útiles a la confusión del hombre en su colonización sobre la tierra.

Por otra parte, la perspectiva **dialógica**, de la cual, de acuerdo con Ernest (1994:38) el *socio-constructivismo* forma parte, señala que las matemáticas son dialógicas, de diversas maneras:

1. Las matemáticas son necesariamente dialógicas, ya que la comprensión es una actividad primariamente textual o simbólica.

2. La clase sustancial de conceptos y contenidos matemáticos modernos son constitutivamente dialógicos o dialécticos.
3. La dialéctica proporciona los orígenes de la prueba y la lógica matemática en la Grecia Antigua, y una fundación filosófica con toda seguridad para las concepciones modernas de lógica y prueba.
4. La epistemología y metodología de las matemáticas pueden ser tomadas en cuenta de una manera explícita y constitutivamente dialéctica, haciendo frente tanto a la justificación del conocimiento matemático objetivo, como a la ratificación del conocimiento personal.

Esta postura dialógica está basada fundamentalmente en el trabajo de Wittgenstein y Lakatos. Wittgenstein, señala Ernest, ofrece las bases de una teoría social del significado, conocimiento y matemáticas que descansan en “juegos del lenguaje” dialógicos encajados en “formas de vida”. Lakatos, por otra parte, ofrece una filosofía de las matemáticas multifacética e incompletamente formulada.

El socio-constructivismo se incluye también dentro de un programa falibilista al igual que el *humanismo o matemáticas humanísticas*, (Moslehian, 2004 y Brown, S., 1996, 2002,). Este último fue introducido por Reuben Hersh cerca de los 80’s, y señala que **la realidad matemática ni es física, ni mental, las entidades matemáticas no tienen sentido o existencia más allá de su significado cultural.**

Las matemáticas para esta perspectiva, son construidas, no descubiertas, y son contextuales no fundacionales, intentan explorar el lado humano del pensamiento matemático.

Por otra parte, de acuerdo a la clasificación realizada por Alemán (2001:15-45), las perspectivas **no descriptivistas** consideran a las entidades matemáticas como producto de la actividad humana, sólo existen como obra de la creación del hombre.

Esta postura a su vez conlleva una distinción entre los intuicionistas y los convencionalistas, entre estos últimos, según Alemán (2001), se encuentra

Wittgenstein. Para los primeros existe un tipo general de construcciones y para los segundos puede existir una gran variedad de construcciones lógico matemáticas.

Sierpinska y Lerman en el artículo “Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education” (1996:827-828), hacen la distinción entre epistemologías del contexto de justificación y epistemologías del contexto de descubrimiento. Esta división, argumentan, sirve de contexto para ubicar las diferentes epistemologías de las matemáticas y a su vez dar cuenta de las diferentes posiciones de lo que denominan epistemologías en educación matemática. En el caso de las epistemologías del *contexto de justificación*, señalan que Carnap y Reichenbach propusieron que la epistemología se ocupa de la ‘reconstrucción racional’ de los proceso de pensamiento de los científicos, cuando intentan comunicar y justificar sus descubrimientos, en tanto que el ‘*contexto de descubrimiento*’ se referiría a los procesos de hechos del descubrimiento científico y del impacto sobre ellos de los factores cognitivos, sociales e histórico-culturales, esta área no sería perteneciente a la epistemología sino a la psicología, sociología e historia del conocimiento. Sin embargo cabe la inquietud sobre si el contexto de justificación no está también influido por aspectos sociales, históricos, culturales y cognitivos.

A continuación se presenta un cuadro que resume las diferentes posturas y denominaciones recibidas por los autores revisados, en este trabajo:

PERSPECTIVAS SOBRE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

MODERNISMO (Moslehian, 2003)
- Logicismo
- Formalismo
- Intuicionismo
- Platonismo

MONOLÓGICA (Ernest, 1994; Skovsmose, 1996)
- Epistemología genética (Piaget)

ABSOLUTISTA (Ernest, 1996)
- Logicismo
- Formalismo
- Intuicionismo
- Platonismo

FUNDACIONALISTA (Ernest, 1994; Handal, 2003)
- Logicismo
- Formalismo
- Intuicionismo

DESCRIPTIVISTA (Alemán, 2001)
- Platonismo
- Empirismo
  - Radical (Maddy y T. Tymozcko)
  - Holista (Quine)

APECTOS RELEVANTES

- Racionalismo. La lógica racional es el fundamento de la verdad.
- Existe una estructura racional de pensamiento incuestionable basado en un plan lógico maestro: el paradigma euclidiano.
- Empiricismo. Se funda en bases verdaderas y seguras.
- Tienen una fundación única y firme, en las que ni la conversación ni el diálogo son necesarios.
- Materialismo. Existencia física o insubstancial independiente del hombre

POSMODERNISMO(Moslehian, 2003)
- Humanismo (Reuben Hersch)

DIALÓGICA (Ernest, 1994; Skovsmose, 1996)
- Filosofía social-constructivista (Lakatos y Wittgenstein)

FALIBILISTA (Ernest, 1996) (Lakatos)

CUASI-EMPIRICISMO (Ernest, 1994; Handal, 2003) (Lakatos)

NO DESCRIPTIVISTAS (Alemán,2001)
- Intuicionismo (Brower)
- Convencionalistas (Wittgenstein)

ASPECTOS RELEVANTES

- Las matemáticas son esencialmente un fenómeno social, construidas socialmente y por ende son prácticas, falibles, situadas.
- Es necesariamente una actividad textual o simbólica es decir, dialógica
- Acepta contradicciones y paradojas
- Cuestiona los principios lógicos aristotélicos.
- Las matemáticas pueden ser entonces: una cultura, un sistema social, un lenguaje, una conversación...

La discusión entre estas dos corrientes de aproximación sobre la naturaleza de las matemáticas está vigente y difícilmente podríamos negar cualquiera de ellas. Sin embargo esta discusión o diálogo entre propuestas filosóficas no parece reflejarse en las prácticas escolares, en la medida en que los programas de estudio tienden, no a la construcción de nuevos saberes, sino al aprendizaje o reconstrucción de lo ya establecido, sin tener un espacio para reflexionar o cuestionar los contenidos y formas de pensamiento impulsados por el trabajo matemático en la escuela, así entonces, las prácticas escolares parecen insertarse más bien en posturas modernas, monológicas, absolutistas, fundacionalistas, descriptivistas, como trataremos de mostrar a continuación.

1.2 Programas de Investigación en Educación Matemática

Al igual que existen diferentes formas de clasificar los acercamientos a la naturaleza de las matemáticas, también encontramos una diversidad en las formas de abordar los programas de investigación en educación matemática, los cuales a su vez coinciden con ciertas posturas filosóficas de las matemáticas, como se muestran en los trabajos de Fischbein, (1990), Sierpinska y Lerman (1996), Handal (2003), Skovsmose y Nielsen (1996), Moslehian (2003,2004), Dossey, (1992), Ernest, (2004), entre otros. Igualmente algunos autores como Gascón, Bosch y Bolea, (2001) y Resnick y Ford, (1998), proponen algunas clasificaciones de las investigaciones en educación matemática, considerando aspectos específicos. En el caso de Gascón, Bosch y Bolea (2001), muestran un panorama general de los programas de investigación referente al Álgebra, sin embargo, dada la naturaleza de la aproximación de estos últimos autores, estimamos que es pertinente al campo de la educación matemática más allá del Álgebra. En tanto que la intención de Resnick y Ford (1998), fue mostrar los fundamentos psicológicos de la enseñanza de las matemáticas,

A continuación bosquejamos dichas aproximaciones a los programas de investigación en educación matemática, en función de su relación con los fundamentos filosóficos expuestos anteriormente.

De acuerdo a la perspectiva de Fischbein (1990), las investigaciones en educación matemática, podrían trazarse en las siguientes tendencias: La primera considera la relación que existe entre procesamiento de información y la forma que tiene el sujeto para pensar, así como las posibles aplicaciones de las computadoras en el aprendizaje de las Matemáticas, es decir, consideran las semejanzas entre la forma de razonamiento del ser humano con la forma de programar las computadoras.

La segunda está constituida por la posición constructivista que parte fundamentalmente de la postura de Piaget y que trata de investigar la forma en la que el individuo construye su propio conocimiento. Esta perspectiva es de gran relevancia, ya que es la propuesta teórica que subyace en los diferentes planes curriculares actuales en México, principalmente en los niveles básico, medio básico, y en algunos correspondientes al medio superior y superior. Dada su importancia, esta perspectiva será abordada con mayor detalle en el capítulo cuarto.

La tercera tendencia se refiere a la relación que existe entre los aspectos de la actividad matemática como el formal, el algorítmico y el intuitivo, considerando a la intuición como la creencia intrínseca que tiene el sujeto para integrar los conceptos y operaciones.

Finalmente la etnomatemática se refiere a la forma en que diversas culturas han generado el conocimiento matemático, sus ideas con respecto a éstas en función de su ideología, costumbres, necesidades etc.

Como podrá notarse, en las primeras dos tendencias se asume una posición enfocada al aspecto psicológico, estableciendo una relación entre las posibilidades de conocimiento y las entidades matemáticas, sin mediar aspectos sociales e históricos. En tanto que la tercera asumiría la naturaleza propiamente dicha de la matemática. Estas tres podrían quedar comprendidas en una postura absolutista o moderna. Contrariamente a la tendencia de la etnomatemática que abre la posibilidad de comprender a las matemáticas enseñadas en la escuela como un producto falible, histórico y culturalmente situado.

Otra clasificación notable la constituye la presentada por Sierpinska y Lerman (1996), quienes dan cuenta de las diferentes aproximaciones en educación matemática, denominándolas “Epistemologías de la Educación matemática”, entre las que exponen se encuentran:

a) Constructivismo. El cual afirma que no se enseña, sino que se genera la oportunidad de modificar estructuras, de manera que lleguen a ser compatibles con las expectativas y fines del instructor. Para esta postura, la cuestión de autonomía es crucial contrariamente a una visión tradicionalista que conciben al estudiante de manera pasiva. Conceptos importantes en esta perspectiva es la de estructura y función.

b) Visiones socio-culturales, cuyo representante lo encontramos en Vygotsky, quien señala que el mundo y los individuos dentro de él, son producto de su tiempo y lugar. La conciencia, elemento fundamental de este acercamiento, se forma mediante la mediación de herramientas, que son expresiones de la situación histórica y cultural.

c) Perspectivas interaccionistas. Las interacciones no sólo son útiles en el desarrollo, sino que interacción y desarrollo son inseparables. Las matemáticas son vistas como un tipo particular de discurso, son un modo de ver el mundo y pensar sobre él, rechazando el lenguaje como representación asumido por los constructivistas así como la visión de herramienta cultural de Vigotsky.

d) Aproximación antropológica de la didáctica francesa. En ella se incluye la postura tanto de Chevalland, “Antropología del conocimiento”, “transposición didáctica”, como la teoría de las situaciones de Brousseau.

e) Aproximaciones basadas en la epistemología del significado. En ésta se asume una reflexión sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos, referidos a los procesos y condiciones de su desarrollo. El problema fundamental para esta visión es la comunicación de significados matemáticos, en tanto que el significado es una tríada de pensamiento, palabras y cosas.

f) Epistemología y teoría de la instrucción, cuyo objeto de estudio es el conocimiento y su funcionamiento en un 'sujeto arbitrario', dicho conocimiento depende de un sistema cognitivo el cual puede ser de un sujeto individual, una cultura o cualquier sistema que pueda asignar un significado a un objeto o a un evento.

Las tendencias marcadas con los incisos a, b y f, podrían ubicarse dentro de posturas filosóficas modernas, absolutistas, ya que aún cuando aluden a la construcción del conocimiento, como es el caso de la primera; a la cultura y a la producción del conocimiento en función del tiempo y lugar, en el segundo caso; argumentan la existencia de un proceso de desarrollo del intelecto, que pareciera estar fuera de dichas limitaciones culturales e históricas.

En tanto que las perspectivas correspondientes a los incisos c y e parecen abrir la posibilidad de considerar la naturaleza del quehacer matemático desde una posición más cercana a las posturas posmodernas, falibilistas o dialógicas, al contemplar la participación de la cultura y momento histórico en el establecimiento de conceptos y discurso matemático.

Por último con respecto a la aproximación antropológica de la didáctica francesa, si bien ha tenido gran relevancia dentro del campo de la educación matemática, no aborda de manera particular la naturaleza de la matemática, antes bien, parece considerar la existencia de este saber, y su preocupación fundamental se dirige a los problemas que conlleva su didáctica.

Handal, (2003), por otra parte, establece una relación y caracterización de cómo las posturas filosóficas de las matemáticas guardan un paralelismo con la pedagogía de esta área. Así el fundacionalismo, entre los que se encuentran el logicismo, el formalismo y el intuicionismo, se corresponden a una pedagogía conductista. En tanto que una perspectiva cuasi empiricista se corresponde a una pedagogía constructivista, que como mencionamos anteriormente, a esta caracterización se opone Skovsmose y Nielsen (1996)

Existen dos aproximaciones que no han sido incluidas de manera general en las presentaciones anteriores, éstas se refieren a la educación crítica de las matemáticas (Skovsmose y Nielsen,1996), y la matemática humanista (Brown, 1996).

Aún cuando la educación crítica de la matemática y la matemática humanista, no han sido contempladas en las clasificaciones expuestas anteriormente, consideramos importante incluirlas en el panorama de los programas de investigación en educación matemática, ya que han recobrado especial relevancia en las más recientes aproximaciones en el campo.

La educación crítica de la matemática, señala que las matemáticas juegan un papel crucial en el desarrollo social y tecnológico, que la educación matemática mantiene igualmente un papel crítico en la distribución del poder y bienestar y que, si la discusión en educación matemática se reduce a cuestiones de contenido entonces tanto las matemáticas como la educación matemática actuarán "ciegamente" (Skovsmose y Nielsen, 1996:1260).

Algunos aspectos que conciernen a esta visión son:

a) La ciudadanía identifica la enseñanza como una preparación de los estudiantes para formar parte activa de la vida política.

b) Las matemáticas pueden servir como una herramienta para analizar e identificar los aspectos críticos de la sociedad. Tanto de manera global como particular al contexto de los estudiantes.

c) El interés de los estudiantes enfatiza que el enfoque principal de la educación no puede ser la transformación (pura) del conocimiento; sino que la práctica educativa debe ser comprendida en términos de personas actuantes.

d) La cultura y el aumento de conflictos promueven cuestiones básicas sobre la discriminación, o sea, el papel de la educación matemática ha jugado un papel notable como reproductora de inequidad.

e) Las matemáticas en sí mismas pueden ser problemáticas, ya que su función como parte de la tecnología moderna, no es vista con optimismo de manera general. Las matemáticas no solamente son una herramienta para la crítica, sino también es objeto de crítica.

f) La educación crítica de las matemáticas se concentra en la vida del salón de clases para determinar como la comunicación entre profesor y estudiantes puede reflejar relaciones de poder.

Estimamos que cabe reconsiderar también que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no sólo son una herramienta de segregación social por la selección de contenidos y de la forma en que éstos se presentan, sino que también existe la inquietud sobre si la naturaleza misma de los contenidos, productos de una sociedad particular, así como el tipo de pensamiento requerido para trabajar con ellos, no sólo es un obstáculo en su “adquisición” o “reconstrucción” sino que también implica que dicha formación impacte en la producción de un pensamiento particular.

En lo que respecta a la perspectiva de la educación humanística de las matemáticas, Brown (1996) señala que las matemáticas son generadas y pensadas por el hombre, y que no es que la lógica deductiva sea irrelevante o no sea un componente crítico del pensamiento matemático, sino que el estatus lógico y despersonalizado es más frágil de lo que generalmente se cree. El programa de investigación bajo esta perspectiva aborda dos aspectos:

1) La enseñanza de las matemáticas humanísticamente (como el trato a los estudiantes con dignidad y respeto) y
2) La enseñanza de las matemáticas humanísticas, esto es enseñar un punto de vista de las matemáticas como una empresa significativamente humana.

En esta visión se asume que la naturaleza de las matemáticas es falible, y que el estudiante es generador de su propio aprendizaje.

Otra clasificación de los programas de investigación dentro de la educación matemática es la proporcionada por Gascón, Bosch y Bolea (2001), quienes han propuesto un panorama general de los diversos acercamientos, particularmente con relación al Álgebra, sin embargo considero que, como se señaló anteriormente, podría extenderse a la Educación Matemática en general, por tal motivo recurrimos a ellos para ofrecer dicha panorámica.

Estos autores señalan que se pueden identificar dos programas de investigación, estos son el Programa Cognitivo y el Programa Epistemológico y entre ellos, los programas intermedios.

En lo que respecta al programa cognitivo se señala que los procesos son reductibles en última instancia a fenómenos cognitivos, en el cual el papel del profesor es el de mediador entre los conceptos a construir y el proceso cognitivo que permita tal construcción, encontramos en ésta, dos posturas una de ellas denominada posturas conceptualistas primitivas y otra la perspectiva psicolingüística.

Las perspectivas conceptualistas primitivas interpretan a la matemática como un “sistema o red de conceptos que el alumno va a construir a través de su experiencia en el aula” estas perspectivas tuvieron mayor auge en la década de los setenta y gran parte de los ochenta, de acuerdo a Gascón, Bosch y Bolea (2001), sin embargo, cabe señalar que es una postura que impacta actualmente en el currículo escolar en diversos niveles educativos en México.

La perspectiva psicolingüística, por otra parte, surge en la década de los ochenta y particularmente dentro en el estudio del Álgebra. Esta propuesta se interesa por incluir aspectos semánticos y sintácticos del lenguaje matemático, se trata de “analizar el discurso” considerado como el resultado de una actividad conceptual.

Entre los programas intermedios se encuentran la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la perspectiva semiótica-antropológica de Godino y

Batanero y la perspectiva cognitivo-antropológica de Boero. En la primera, que se localizaría en una posición cognitiva y epistemológica se abre la idea de concepto para incluir el conjunto de situaciones o tareas en la que se encuentra inmerso dicho concepto, el conjunto de invariantes operatorios y las formas de representación simbólica del concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos útiles para tratar tales situaciones. En la segunda, se “pretende relacionar los significados personales de los objetos matemáticos con los correspondientes significados institucionales. En tanto que la tercera atiende a la concordancia entre los desarrollos cognitivos del estudiante, las técnicas y clases de problemas que dichas técnicas permiten resolver.

Cabe señalar que Godino y Batanero (1994) aseguran que los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo, no pudiendo reducir este significado del objeto a su mera definición matemática.

Esto es, un objeto matemático es concebido como “un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro corporal, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.) es decir, registro de lo escrito” (Godino y Batanero, 1994)

A partir de lo anterior podríamos concluir que el objeto matemático solamente existe a partir de una serie de prácticas significativas por parte de un individuo, grupo o institución social. Considerado de esta manera, no existiría un objeto matemático puro, sino que éste siempre estaría ligado a un tipo de práctica particular de un grupo de personas y por ende, el significado de dicho objeto es particular y especifico al tipo de práctica ejercida.

Lo anterior nos lleva a determinar que el significado (S) de un objeto matemático (O) es pertinente en función del tipo de prácticas significativas (P) de un individuo, grupo o institución social en un campo de problemas particulares (C) (Godino y Batanero, 1994).

$$S\ (O) \quad = \quad P(C)$$

Por tanto un objeto matemático para la institución matemática denominada disciplina matemática, tendrá necesariamente un carácter algo diferente al objeto matemático abordado por una institución académica llámese escuela, en la cual por consiguiente tendrá que traducirse, recortarse, linealizarse para ser enseñado (denominado por Chevallard transposición didáctica), y a su vez tendría un significado también algo diferente al otorgado por el profesor que lo trata en clase, así como será distinto al estudiante que participa en dicho proceso educativo, aún cuando el docente intentara conservar fielmente el significado del objeto matemático.

Esta perspectiva recibe actualmente la denominación de enfoque ontosemiótico (EOS):

> El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con el fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática a que hemos aludido, y por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia (Godino, Batanero y Font, 2007)

En lo que respecta al denominado por Gascón, Bosch y Bolea (2001), “programa epistemológico”, se refiere fundamentalmente a la didáctica francesa que considera que los procesos de aprendizaje no son reductibles a procesos cognitivos, sino que abarca toda la situación didáctica bajo la cual se trabajan los contenidos matemáticos.

Este programa, a su vez, conlleva dos variantes: la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau y la teoría antropológica de la Didáctica de Chevallard.

La teoría de las situaciones en particular destaca, que cada conocimiento matemático específico se modela, mediante una situación, un conjunto de aspectos situacionales. La teoría antropológica marca que dichos conocimientos son específicos en la institución escolar, un término clave en esta perspectiva lo constituye la transposición didáctica, es decir la traducción de los contenidos de la disciplina matemática a la linealidad académica requerida para ser abordada en la institución escolar (Gascón, Bosch y Bolea 2001).

En el plano psicológico, Resnick y Ford (1998), formulan una aproximación principalmente bajo dos aspectos: el computacional y el conceptual, en cada uno de ellos abordan la forma de razonamiento y la resolución de problemas, describiendo la forma en la que las diferentes concepciones teóricas de la psicología dan cuenta del aprendizaje de las matemáticas escolares. Así por ejemplo en la aproximación de la matemática como cálculo incluyen las perspectivas derivadas fundamentalmente del conductismo, en tanto que en el segundo enfoque incluyen aproximaciones teóricas cognoscitivas, gestaltistas, constructivistas y del procesamiento de información.

Un programa que ha incidido de manera significativa en México es la propuesta socioepistemológica, la cual asume que el “objeto” es una construcción social, sin embargo su énfasis no se dirige tanto en la naturaleza del objeto, “sino más bien se interesa por modelar el papel de la práctica social en la producción de conocimiento a fin de diseñar situaciones para la intervención didáctica” (Cantoral, et. al., 2006).

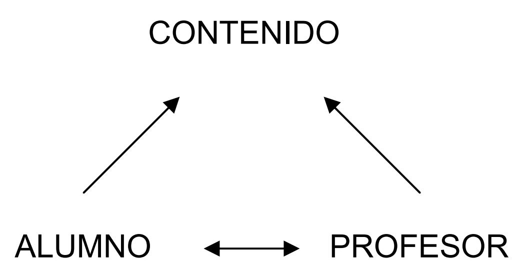
El siguiente cuadro expone de manera sintética algunas clasificaciones abordadas en este apartado.

Panorama de los programas de investigación en educación matemática	Autores proponentes de la clasificación
Procesamiento de información Constructivismo Relaciones entre aspectos algorítmicos, formales e intuitivos. Etnomatemática	Fischbein (1990)
Constructivismo (Piaget, von Glasersfeld y Steffe) Perspectiva socio-cultural (Vygotsky, Bishop. Lerman) Aproximaciones interaccionistas (Bruner, Gergen, Bauersfeld) Aproximación antropológica. Didáctica francesa (Chevallard y Brousseau) Aproximaciones basadas en la epistemología del significado (Sfard) Teoría de la instrucción	Sierpinska y Lerman (1996)
Conductismo Constructivismo	Handal (2003)
Educación crítica de las matemáticas	Skosmose y Nielsen (1996)
Matemáticas humanísticas	Brown (2002), Moslehian (2004)
Programas cognitivos Conceptualistas primitivos (Piaget) Psicolingüístas (Sfard) Programas intermedios Teoría de los campos conceptuales (Vergnaud) Semiótica antropológica (Godino y Batanero) Cognitivo antropológica (Boero) Programas epistemológico Teoría de las situaciones didácticas (Brousseau) Teoría antropológica de la didáctica (Chevallard)	Gastón, Bosch y Bolea, (2001)
Las matemáticas como cálculo. Las matemáticas comprensión conceptual y resolución de problemas	Resnik y Ford (1998)
Socioepistemología	Cantoral (2006)

1.3. Perspectiva psicopedagógica.

La pertinencia de incluir la perspectiva psicopedagogía en el campo de la educación matemática, resulta del impacto de dicha vertiente en los cambios curriculares, particularmente en México, sobre todo en los niveles de educación básica y media.

Desde la Psicología de la educación se intenta dar cuenta de los elementos que conforman el proceso educativo y a partir de ello conocer, por ejemplo, la forma que tiene el aprendiz de procesar la información, de reconstruir el conocimiento, de la influencia del marco social en dicho proceso, etc. Incluso podríamos afirmar que desde la psicopedagogía se ha tratado de analizar el fenómeno de la enseñanza-aprendizaje desde la tríada pedagógica (Flores Ochoa, 1994)) esto es:



De tal manera que se señalan a partir de esta tríada, las características que debe poseer el profesor, así como los aspectos tanto cognitivos como del desarrollo del alumno que intervienen en el proceso educativo. Igualmente se proponen cómo deben organizarse los contenidos a fin de facilitar un "aprendizaje significativo", como señala por ejemplo Ausubel et al. (1983), desde una perspectiva cognoscitivista.

Ante este modelo surgen algunas consideraciones. Una de ellas se refiere a la incuestionabilidad del contenido, esto es, se define como problema de la psicopedagogía la forma en que éste debe presentarse, graduarse, o los obstáculos que impiden un "aprendizaje" o "reconstrucción del conocimiento". Sin embargo, en contadas ocasiones se pone en tela de juicio la pertinencia de su inclusión, o cualquier cuestionamiento acerca de estos contenidos.

Pareciera que estas tendencias de abordaje de la enseñanza de las Matemáticas han implicado generalmente una forma particular que tiene el aprendiz de procesar la información, de reconstruir, de aprender, asimilar y dejan de lado la posibilidad de creación o de participación por parte del estudiante, en el entramado de dicho saber. Se espera que el niño o joven reproduzca o reconstruya el saber matemático pero se ignora en casi todos los programas educativos de matemáticas, vistos desde la psicología educativa, la posibilidad de que los estudiantes puedan ser creadores de nuevos saberes, lo cual tiene como posible lectura el que la Matemática está acabada, que no hay nada que descubrir o crear. Con ello pareciera ser que posturas tan diferentes como la conductista, por un lado y la cognoscitivista, y la constructivista, por otro, coinciden en atender los procesos que hacen posible la incorporación, asimilación o reconstrucción del saber matemático, cual si fuera alcanzable a partir de ciertos procesos didácticos, sin embargo esta lectura es puesta en duda, ya que este saber como producto de la trayectoria histórica y cultural, no siempre es accesible y aceptable de manera natural por parte de los estudiantes, además la práctica educativa parece cancelar la oportunidad de cuestionar sus fundamentos. La materia se imparte como si fuera natural y asequible la forma de pensar específica que requiere esta disciplina, por ello consideramos que parecería acercarse más a perspectivas modernas, al proponer *una* forma única de pensar del individuo.

En el currículo escolar matemático se considera, dentro de la cultura occidental moderna, que la matemática se ha erigido, como una base importante para interpretar la realidad, sin embargo, atendiendo a posturas denominadas falibilistas, posmodernas o dialógicas existirían otras formas de hacerlo, pero que el método axiomático de la matemática, trasladado a la ciencia, ha impedido avalar cualquier otra forma de pensamiento que no sea el lógico-axiomático.

“Generalmente, se ha creído que los axiomas son autoevidentes o que los postulados son totalmente firmes, pero nunca podremos saber si los axiomas son “verdaderos”; ‘lo más que podremos esperar es que algunas de sus consecuencias resulten razonablemente compatibles con la evidencia empírica’ (Bunge citado en Martínez Mígueles, 1999:109).

Una intención de este trabajo es llamar la atención sobre la procedencia de tales contenidos y la forma de pensamiento requerido, a fin de determinar si las características de las nociones y pensamiento matemáticos de los estudiantes pueden influir en la forma de acercamiento a este saber.

Planteamos en este trabajo que las matemáticas como producto de la actividad humana y por tanto, socialmente construidas, se constituyen como un lenguaje que permite una visión de mundo específica, la cual tiene, social, cultural, económica y políticamente, un necesario recorte y dirección sobre la actividad del hombre. Coincidimos con la perspectiva de la educación crítica de la matemática cuando menciona la necesidad de poner a la educación matemática misma, como objeto de la crítica, así mismo, convenimos en que la práctica educativa además de implicar una relación de poder, no puede explicarse sólo al interior del proceso educativo sino que se deben atender factores externos que determinan la naturaleza misma de la educación matemática, ya que, coincidiendo igualmente con Horkheimer y Adorno (2004) y Foucault (1997a, 1997b) reconocemos que la educación reproduce las formas sociales de dominación y explotación, no solamente en las relaciones de poder que se dan en el ámbito educativo, sino por la formación del pensamiento que se disciplina a través del manejo y determinación de los contenidos escolares.

El reconocimiento de la falibilidad y del carácter social y situado de la actividad matemática abre por consiguiente nuevas posibilidades de aproximación en la educación matemática y sobre la aproximación por parte de los estudiantes a esta área del saber, fundamentalmente en los niveles educativos, básico y medio.

Por ello, nos parece importante atender a la forma de aproximación a los contenidos matemáticos incluidos en los programas y planes de estudios, ya que consideramos que la matemática incluida en los programas educativos impacta en la orientación y dirección del pensamiento de los escolares, y responde a los objetivos de la inserción del contenido matemático, en el sentido de disciplinar el pensamiento de los estudiantes, para conducirlos a un pensamiento lógico, racional, científico, porque pareciera suponerse que este tipo de pensamiento es la culminación del desarrollo humano, no obstante, con ello se olvida que esta perspectiva en tanto histórica y cultural, es falible, que el pensar va más allá de toda caracterización o tematización racional (Heidegger, 1958, Gabilondo, 1996).

Las aproximaciones psicopedagógicas señaladas, aún cuando difieran entre sí, coinciden en un punto central para este trabajo y que se refiere a la inobjetable necesidad de enseñar matemáticas, aunque difieran en la forma en la que deben enseñarse. Desde una lectura foucaultiana y retomando a Heidegger (1964, 1990 y 1997), uno tendría que reconocer que las matemáticas mismas son una forma discursiva, una forma de interpretación del mundo, y por ello cabría interrogarse sobre las implicaciones de que dicha área del saber sea un contenido imprescindible y prioritario en los niveles básicos y generalmente en casi todos los niveles educativos de todas las instituciones escolares – nivel básico medio, medio superior, superior- en la mayor parte del mundo.

Aún cuando en el currículo escolar del área de matemáticas, los principios lógicos, difícilmente se hacen explícitos, generalmente se asumen como el fundamento de toda actividad matemática. Comprometiéndose así con una perspectiva absolutista en el currículo de matemáticas en la mayor parte de las instituciones de educación básica y media superior en México. En este posicionamiento, se considera que la perspectiva psicogénetica ha tenido una gran influencia, al defender no sólo la pertinencia de tales principios, sino al fundamentar el desarrollo cognitivo en función de los mismos.

En la escuela estos principios, consideramos, se tornan incuestionables, la matemática presentada en el currículo escolar está sustentada en los principios lógicos aristotélicos: identidad, no contradicción y tercero excluido. Más aún, la formación de los estudiantes no se circunscribe a los contenidos y formas disciplinares del comportamiento, sino que se puede afirmar, inciden también al direccionar las formas de pensamiento (Foucault, 1997a) y de imponer un discurso que orienta hacia una visión de mundo particular:

> El poder y el saber se implican mutuamente… no hay relación de poder alguna sin la constitución correlativa de un campo de saber, como tampoco un saber que no presuponga y constituya, al mismo tiempo, "relaciones de poder". Por tanto, no hay que analizar estas "relaciones poder-saber" sobre la base de un sujeto que sepa y sea o no libre respecto del sistema de poder, sino, al contrario, el sujeto que sabe, los objetos que hay que conocer y las modalidades del saber deben considerarse como otros tantos efectos de estas implicaciones fundamentales del poder-saber y sus transformaciones históricas (Foucault:, 1997a:34)

Así entonces, como hemos señalado, la investigación en educación matemática se ha centrado en gran medida en las metodologías didácticas adecuadas para su aprendizaje, sin embargo se vislumbra la existencia de posibles vertientes de indagación, entre los que se puede mencionar, entre otros aspectos, aquellos relacionados con los fundamentos mismos de la matemática implicada en los planes de estudio, como lo son por ejemplo los principios lógicos y axiomas de los que parte esta área del saber y entre éstos el Principio de identidad (A = A).

El principio de identidad ha sido cuestionado por aproximaciones filosóficas falibilistas, posmodernas o no descriptivas, sin embargo, sustenta el currículo escolar, principalmente a través de posturas psico-pedagógicas –de manera primordial por la teoría constructivista psicogenética. Ante ello, surge el cuestionamiento acerca del cómo se fue generando la supremacía de este principio en los ámbitos escolares. Para abordar tal cuestionamiento, en el capítulo siguiente se intentará dar un bosquejo de la genealogía del mismo, a fin de vislumbrar su impacto en la educación.

CAPÍTULO SEGUNDO

UN TRAZO DE LA GENEALOGÍA DEL PRINCIPIO DE IDENTIDAD

En este capítulo tratamos de mostrar de manera breve, el surgimiento de la formalización del principio de identidad, cómo se fue constituyendo en “suprema ley del pensar” (Heidegger, 1990), y su incidencia en la conformación del pensamiento matemático. Igualmente intentamos presentar algunos cuestionamientos en torno a dicho principio. En esta revisión pretendemos, así mismo, dar cuenta de la mutabilidad del mismo, su indefinición en la diversas interpretaciones a lo largo de la historia, pero que, a fuerza de obnubilar la incertidumbre de sus orígenes se vuelve algo aparentemente intocable y actualmente, en muchos ámbitos, particularmente en la educación matemática, se asume como verdad absoluta, aún cuando en el mismo discurso matemático, se tienen algunas interpretaciones excepcionales o connotaciones que invitan a su apertura.

Incluimos las propuestas de algunos filósofos y matemáticos que han intervenido en la instauración del principio de identidad. Consideramos que desde Parménides hasta Kant, se va articulando una trayectoria que va configurando el papel que juega hoy dicho principio en la sociedad contemporánea.

Advertimos al lector, que el trazo de la genealogía que proponemos, no pretende realizar una exposición exhaustiva de los filósofos presentados, ni tampoco intentamos una discusión de sus respectivas propuestas filosóficas, ya que consideramos rebasaría con mucho la intención del presente trabajo. Queremos aludir particularmente aquellos aspectos referidos a la identidad y particularmente a la constitución del principio lógico de identidad y mostrar la dificultad de establecer la propia identidad de tal principio.

2.1. Los albores del principio de identidad (A = A)

Al rastrear varios puntos de origen de este principio, Heidegger (1990) encuentra en Parménides (510/540 a. C. - Mediados del siglo V /470a. C), uno de ellos, ante lo cual señala:

> La llamada identidad habla desde el ser de lo ente. Pero donde el ser de lo ente toma voz por vez primera y propiamente dentro del pensamiento occidental, en Parménides, allí habla το αυτο lo idéntico, en un sentido casi excesivo. Una de las frases de Parménides dice así:
>
> το γαρ αυτο νοειν εστιν τε και ειναι.
>
> "Lo mismo es en efecto percibir (pensar) que ser" (Heidegger, 1990: 67-69)

Este último enunciado aparece en el Poema Ontológico de Parménides, en el siguiente fragmento, en donde la Diosa Dike le habla de esta manera:

> "Pues bien, yo te diré -cuida tú de la palabra escuchada- las únicas vías de indagación que se echan de ver son: La primera, que es y que no es posible no ser... La otra, que no es y que es necesario no ser... Porque no hay nada que pudiera hacerle dejar de extenderse por igual, ni hay manera de que lo que es pueda ser aquí más y allí menos que lo que es, ya que es todo inexpoliable. Pues aquello desde lo que por todas partes es igual, impera del mismo modo entre los límites".
>
> La primera forma de conocimiento, es inaccesible a los mortales, constituido por el Ser, único, inmutable, eterno, ilimitado, inmóvil, indivisible...Lo mismo es en efecto percibir (pensar) que ser" (Parménides, 1970).

Retomamos esta cita para marcar con ello, lo que parece ser el origen del principio de identidad, sin embargo en la misteriosa última oración: "lo mismo es en efecto percibir (pensar) que ser" parece aludir a un "Ser", inaccesible a los mortales, inexpoliable, inaplicable al mundo sensible. Hace alusión a una forma de "informarse", "saber", "conocer"– en función de las diversas traducciones-, así planteado originalmente pareciera referirse a "lo mismo" y no precisamente a una cosa idéntica a sí misma como posteriormente se ha concebido. Resaltamos igualmente que el ser es señalado como lo mismo que pensar, de ahí que pareciera que ambos son inaccesibles a los mortales. El principio de identidad como se entiende actualmente, entre otros ámbitos, en los educativos, se refiere a una representación de las cosas en sí, pareciera que ya no se refiere al Ser, sino a los objetos de conocimiento. Así dicho principio pareciera, se ha generalizado como una ley o principio lógico, en donde se ha escindido el ser y el pensar, el mundo y el pensar.

Parménides plantea que este mundo sensible es ilusorio, que la verdad se encuentra en el mundo inteligible, lo que lleva a la interrogante sobre la existencia misma de la *verdad*. Pareciera que en el texto de este autor se asevera la posibilidad de *"una verdad"*, planteamos como interrogante si es una verdad como entidad comprendida por nuestra acepción de "verdad" o, se referiría a "*aletheia*", un develar, como Heidegger en varios textos muestra (1964, 1997, 2001). Ambas interpretaciones difieren notablemente. Con la interpretación de verdad como *"aletheia"* se abren los caminos al pensar y por ende al ser, en tanto que la "*verdad*" entendida desde una acepción positiva moderna, nos lleva a la lógica clásica, a la afirmación del principio de identidad.

El poema de Parménides establece una relación entre el ser y el pensar, no expresadas como idénticas sino como lo mismo. De acuerdo a la lectura de Heidegger (1990), el principio de identidad parmenídeo, no tiene la misma connotación del principio lógico de identidad vigente, en tanto que la mismidad difiere de la identidad, en la primera cabe el movimiento, el devenir, mientras que la segunda proclama algo estático, inamovible

Un comienzo menos señalado, pudiera sin embargo, encontrarse en la obra de Pitágoras (530 A c. – Principios del Siglo V a C), autor de gran trascendencia tanto en filosofía como en matemáticas, además de influir en gran medida en la obra de Platón. Funda la secta de los pitagóricos, para la cual el misticismo y la superstición están estrechamente relacionados con la geometría y la aritmética. Para los pitagóricos el mundo fue ordenado de acuerdo a principios de armonía numérica, matemáticamente. Siendo así que comprender matemáticas era encontrar la clave de la creación divina. Por ello a través de una disciplina intelectual y moral podríamos empezar a descubrir los misterios de la naturaleza y el alma humana. Para los pitagóricos el número es el sostén del origen del mundo y de las cosas, es decir, el principio desde el punto de vista ontológico, como testimonia Nicomaco de Gerasa, un pitagórico posterior:

> All that has by nature with systematic method been arranged in the universe seems both in part and as a whole to have determined and ordered in accordance with number, by the forethought and the mind of him that created all things; for the pattern was fixed, like a preliminary sketch, by the domination of number preexistent in the mind of the world-creating God, number conceptual only and immaterial in every way, but at the same time the true and the eternal essence, so that with reference to it, as to an artistic plan, should be created all these things time, motion, the heavens, the stars…[1]

Es importante resaltar que la relación entre religión y matemáticas fue una característica esencial en la fundación de esta última, aunque en los posteriores desarrollos esta estrecha relación se va desdibujando mediante su formalización, hasta parecer inexistente en nuestra época.

La influencia de los pitagóricos fue decisiva en el desarrollo de ulteriores propuestas, ya que plantearon la existencia del mundo como producto de un ideal divino, en donde los cielos, las estrellas y la naturaleza son resultado de un orden numérico, por ello, pareciera, se empieza a bosquejar la existencia de una diferencia entre el plan divino y la realidad material física, que alude a un orden erigido matemáticamente, lo que pudiera dar pauta a siguientes distinciones declaradas entre dos mundos, uno material, físico, sensible y otro inmaterial, metafísico, supraterrenal.

Pitágoras establece una relación entre el número como objeto real y la creación de la realidad, encuentra una relación entre la realidad y los números, el número como origen de toda realidad. Una anécdota que da muestra de la importancia del número en la constitución de mundo y sus contradicciones la encontramos en la muerte de Hipasus quien al divulgar la existencia de los números irracionales es arrojado al mar. Estos números generan la perplejidad de los pitagóricos ya que escapan al supuesto ordenamiento numérico (Perero, 1994).

En Parménides como en Pitágoras, parece asumirse que existe algo como unidad “A” a la cual se le garantizara su existencia, el Ser inexpoliable en el primer caso y el número en el segundo, y por consiguiente susceptibles de aplicárseles el principio de identidad, así, el principio de identidad se transforma, en un primer

[1] Nicomaco de Gerasa (100 DC) citado en Reuben Hersh. (1997) What is mathematics, really? pág. 94

momento de una realidad fundada discursivamente, a la proposición que pudiera afirmar la existencia de un ente "A", y con ello, posteriormente, su identidad.

Por otra parte, Heráclito (536/540 – 475/470), después de meditar las ideas antecedentes sobre el principio (*arké*), afirma que:

> "No podemos bañarnos dos veces en el mismo río y no se puede tocar dos veces una sustancia mortal en el mismo estado, sino que a causa de la impetuosidad y la velocidad de la mutación, se dispersa y se recoge, viene y va"..."Bajamos y no bajamos al mismo río, nosotros mismos somos y no somos", proclamando así el fluir de la realidad" (Eggers y Juliá, 1978: 57).

Heráclito argumenta que el ser en sí es un fluir, todas las cosas que se nos aparecen son el verdadero ser, pero un ser que deja de ser para ser en cada momento, es y no es.

Con esta propuesta Heráclito parece contradecir la idea de identidad, al señalar la imposibilidad de establecer algo como estático, ni siquiera algo que pueda ser, Reale y Antisieri (1991) indican sin embargo que esta visión de mutabilidad radical, va acompañada al mismo tiempo de una unidad: "Cuando se escucha, no a mí, sino al λογοζ (*logos*), es sabio convenir en que todas las cosas son una". "El perenne fluir de las cosas y el devenir universal se revelan como una armonía de contrarios...y de las cosas diferentes nace la más bella armonía, y todo se engendra por medio de contrastes". Lo que es diferente concuerda consigo mismo. Y en la armonía coinciden los opuestos. Esta armonía y unidad de los opuestos es el principio (*arké*) y, por lo tanto Dios y lo divino (Reale y Antisieri, 1991).

Parece que Heráclito alude a un principio universal (*arké*) el cual sería la armonía de contrarios, al hacer el señalamiento de que las cosas que se nos aparecen son y no son. Este decir abre la posibilidad de una interpretación del mundo como un devenir, acaecer, no un estado sino el ser mismo en su imposibilidad de establecerse, de determinarse.

Podríamos señalar que tanto Heráclito como Parménides aluden a un ser absoluto, en donde el *logos* es inaccesible porque se encuentra como sustrato mismo de cualquier comprensión, sin embargo, posteriormente esta inaccesibilidad se va desvaneciendo, al declarar válidos estos principios en el mundo físico o material. En la trayectoria del principio de identidad comprendida en un primer momento como mismidad –entre pensar y ser- de Pármenides hasta su significación como principio lógico -una cosa es igual a sí misma-, estimamos que Aristóteles, Descartes, Lebniz y Kant tuvieron un papel relevante.

En algunos textos, (García Morente, 1992 y Reale y Antisieri, 1991), el principio de identidad generalmente aparece como resultado de la disputa acerca de la naturaleza de la *physis*, es decir entre la disyuntiva de lo móvil –sustentado por Heráclito -, y lo estático – por Parménides. Encontramos también un fragmento en el Diálogo platónico entre Teetetes y Sócrates (Platón, 1990), en donde Sócrates asume las perspectivas de Heráclito y de Parménides, como posturas contrarias, pero deja abierta esta discusión, sin ahondar en las argumentaciones correspondientes para apoyar la propuesta parmenídea. En el decir de Sócrates, tanto la movilidad heracliteana como la inmovilidad pamenídea parecen estár referidos al mundo sensible. Sin embargo, Sócrates alude a la dificultad de penetrar en el enigmático poema.

Cabe la reconsideración hecha por Gadamer (1995) en el sentido de la inexistencia de la disputa entre Heráclito y Parménides, ya que pareciera que esta aparente diferencia entre ambos filósofos se debe a una interpretación posterior y sobre todo por la lectura de Hegel en relación a la *Physis*:

> ...estoy convencido que todo el problema “Parménides y Heráclito” proviene del abrumador influjo del pensamiento de Hegel...en las descripciones históricas de los presocráticos se suele dar por sentado que existió un debate crítico entre los defensores del devenir y los partidarios de la estabilidad. Sin duda, algo de esto es cierto, pero –a mi entender- no en la forma de una oposición polémica entre Heráclito y Parménides...El destinatario de la crítica parmenídea –se creía- sería Heráclito, porque había equiparado de manera contradictoria el ser con el no ser. Como ya he dicho, esta interpretación me parece insostenible, en tanto que se tenga en cuenta el estilo épico del texto (Gadamer, 1995:43,114).

García Morente (1992), por su parte, juzga a Parménides como el “culpable” de una concepción estática al referirse al mundo material en términos de un mundo absoluto, cuando hace la transferencia del principio del Ser al ente. Sin embargo, como hemos señalado anteriormente, caben otras interpretaciones.

Según Horkheimer y Adorno (2004), la postura estática aventajó a su contraria, tal vez porque lo dinámico, lo móvil, escapaba a la razón, era inaprensible y el hombre, para enfrentar su inaccesibilidad al mundo, encontró como camino posible la de-terminación de la naturaleza, y en la necesidad de ubicarse en el mundo, se asumiría no ya como integrante de éste, sino como sujeto observador, controlador y dominador del mismo.

Con Platón (428/427 - 347 a. C.) parece ahondarse la concepción de la existencia de dos mundos, vislumbrada en Parménides y Pitágoras. Platón describe el mundo de la "segunda navegación", como un mundo intangible, pero que da coherencia al mundo físico, el mundo de las ideas, en la cual existe la perfección y cuyo sustrato se encuentra en lo matemático.

Platón habla de la existencia de un elemento adicional, de un *plus*, esto es, vemos en la realidad cosas imperfectas, pero tenemos la posibilidad de acceder a la perfección de las ideas originales. Esa posibilidad es lo que Platón llamó el *plus*, al que sólo puede acceder el alma y no los sentidos y es la única manera en que concibe el conocimiento.

Este filósofo plantea algo que parece crucial en posteriores propuestas, me refiero a la búsqueda de la verdad absoluta. En los Diálogos, se expresa en términos de lograr un camino en esa búsqueda. Es importante resaltar que la idea de verdad absoluta implicaría la propia idea de identidad, es decir hay un A (la verdad), idéntica a sí misma, la cual podría descubrirse dada su existencia.

Según Gadamer (1995), para Platón y sus seguidores, una demostración de la existencia del mundo ideal lo constituían precisamente las matemáticas, éstas eran concebidas como entidades existentes de suyo, y que el hombre tendría acceso a ese mundo ideal y por consiguiente al conocimiento matemático, a través de la rememoración:

> Sócrates dice que el conocimiento tiene que ser un recuerdo, ya que cosas tales como los conceptos matemáticos – como por ejemplo το ισον (la igualdad)- no se pueden obtener a partir de la experiencia, en la que jamás se encuentran dos entes exactamente iguales... El concepto matemático de igualdad es el de la igualdad perfecta, que no podemos hallar en la experiencia sensible (Gadamer, 1995:54-55).

De acuerdo con Platón, los seres humanos tenemos dichas ideas, pero las hemos olvidado al ubicarnos en este mundo físico, que es una sombra de ese mundo ideal, αυτο το ισον (lo igual en si), sólo sería posible en ese mundo de las ideas, Con ello encontramos aquí dos acepciones de igualdad, la igualdad perfecta, concebida en un mundo ideal y su reflejo imperfecto en el mundo físico.

Platón privilegió el mundo de las ideas, marcando así la escisión entre dos mundos. Igualmente le quita la posibilidad al hombre de ser y pensar libremente, dejándolo sólo en condiciones de recordar, rememorar, ese mundo *supraceleste* de donde ha partido.

Platón entonces, consideramos, sería uno de los filósofos que contribuyó en gran medida, como antecedente inmediato del principio lógico de identidad, al señalar la identidad perfecta en el mundo de las ideas, del cual el mundo material y físico, sería un reflejo imperfecto del correspondiente mundo de las ideas. Pareciera proponer un mundo estático, inmóvil de este mundo suprasensible en donde el ser se convierte en mundo ideal, que a su vez representaría el mundo verdadero.

A partir de lo anterior, podemos señalar la inquietud por tratar de comprender el mundo y la existencia del hombre, en donde la identidad emerge como un elemento significativo al establecer la existencia de algo, Ser, armonía, mundo supraceleste. Vemos así como la propuesta de la identidad se va abriendo camino y abre también un camino en la comprensión del mundo y del hombre mismo.

Cabe señalar que hasta este momento no se enuncia el principio de identidad como tal, no es sino con Aristóteles (384/322 a.C.) quien habla de principios, uno de ellos referido a los idénticos.

2.2. Enunciación del principio de identidad

Aristóteles es reconocido generalmente como el padre de la lógica, posteriormente denominada aristotélica, en la cual se enuncian tres principios fundamentales: el principio de identidad, el principio de no contradicción y el tercero excluido, este filósofo afirma que la identidad tiene varias acepciones:

> "se llaman idénticas, unas cosas por accidente...porque son accidentes de lo mismo ...Unas cosas se llaman idénticas de este modo; pero otras se llaman idénticas por sí, en los mismos sentidos en que se dice por sí lo uno. En efecto, aquellas cuya materia es una o por la especie o por el número se dicen idénticas, y aquellas cuya substancia es una. Por consiguiente, es claro que la identidad es cierta unidad, o bien del ser de varios o bien cuando se toman como varios, por ejemplo cuando se dice que una cosa es idéntica a sí misma, pues entonces se toma una cosa como dos.-*Otras* se llaman aquellas cosas de las cuales son más de uno las especies, o la materia, o el enunciado de la substancia; y, en general, otro se dice en sentido opuesto a idéntico" (Aristóteles, 1998:248-250).

En el *Tratado de Lógica* (2001:313-314), Aristóteles, también se refiere a los distintos sentidos que puede tener lo idéntico:

> "§ 5. Lo que en el lenguaje ordinario se dice que es uno numéricamente es lo que todo el mundo toma en primer término por idéntico.
>
> § 6. Pero en este caso, aún lo idéntico puede tener muchas significaciones. La más especial y la primera tiene lugar cuando la identidad es expresada por un nombre o por una definición; por ejemplo, cuando vestido se hace idéntico de capa, y animal terrestre bípedo de hombre.
>
> § 7. En segundo lugar, cuando la identidad es expresada por un propio, como, por ejemplo, cuando se identifica susceptible de ciencia con hombre, y cuerpo que naturalmente se dirige hacia arriba con fuego.
>
> § 8. En tercer lugar, cuando se saca la identidad del accidente; por ejemplo, cuando estar sentado o ser músico se hace idéntico con Sócrates; porque todo esto sólo trata de expresar una cosa que numéricamente es una."

A partir de los fragmentos anteriores podemos entonces reiterar que lo idéntico no puede entenderse sólo de una manera, ya que puede ser (Aristóteles, 2001:313-314):

1. La misma "cosa" :"cuando hay muchos nombres, pero en el fondo sólo expresan una misma cosa";
2. la misma "especie": "porque se dice que cosas como éstas son idénticas en especie cuando están incluidas en la misma especie"

3. el mismo "género": "... y de igual modo se dice que las cosas son idénticas en género cuando pertenecen al mismo género; el caballo es idéntico en género al hombre".
4. El mismo accidente: "se saca la identidad del accidente; por ejemplo, cuando estar sentado o ser músico se hace idéntico con Sócrates"
5. La misma unidad numérica: "...o por el número se dicen idénticas" (Aristóteles, 1998:250), "porque todo esto sólo trata de expresar una cosa que numéricamente es una".

Por lo anterior podemos afirmar que el principio de identidad, posteriormente enunciado como A = A, implicaría diferentes connotaciones, y que éstas estarían sujetas necesariamente al contexto de su enunciación.

Aristóteles, para nuestro trabajo se configura como uno de los autores principales, ya que además de ser considerado el padre de la lógica clásica, y con ello de los tres principios fundamentales (principio de identidad, no contradicción y tercero excluido) es también a quien se le atribuye la constitución del ente al traer al discurso la esencia de las cosas: *"esencia se dice de las cosas que se dan en la cosa en tanto que ella es lo que es"* (Aristóteles, 2001:220), lo cual es muy significativo en la trayectoria filosófica de occidente, ya que con dicha constitución, el ente toma el lugar privilegiado.

García Morente (1992) atribuye a Aristóteles el desplazamiento de la interpretación de la mismidad a la identidad propia de un ente. De forma semejante Nicol (2001) señala a Aristóteles como el que da pauta a la transferencia del ser: "Aristóteles rebaja el principio de no contradicción del nivel absoluto y totalitario del Ser, al nivel determinado, que es el ente" (Nicol, 2001:304) . Sin embargo esta lectura parece dejar de lado el lugar del ente que propone Aristóteles, porque el ente es una manifestación del ser, no como algo estático, sino como producto del movimiento del ser, que va acompañado de otros elementos que conforman su propuesta. Aunque cuando al establecer las categorías, va conformando la existencia del ente como una parte esencial, propiciando en posteriores interpretaciones la delimitación o constitución del ente (Gadamer, 1995).

Con Aristóteles de acuerdo a Gadamer, surge el término de materia, sin embargo, habría que:

> ...considerar que la materia carece de la función autónoma y que es algo completamente distinto de la naturaleza. Ciertamente es algo, [ ] en cierto sentido un ente. En otro sentido es un no ente.... porque la materia en cierto sentido, no existe, en el caso de que “existir” “ser” signifique lo mismo que “ser aquí...sino que es algo formado, estructurado, un producto de la *techne* (Gadamer, 1995:96-97).

La idea de sustancia tiene su origen, siguiendo a Gadamer, de *substantia* traducción del término υποκειμενον (lo que está puesto debajo, el sustrato), vocablo que correspondía más claramente a la idea de causa material (υλη, es decir, bosque o madera, proveniente del mundo de la artesanía)

Es comprensible entonces que la incorporación del término, materia, sustancia, estuviera asociado a los principios lógicos en donde A, en posteriores desarrollos fuera considerada como una materia, sustancia, ente material.

Es interesante notar cómo se fue transformando la idea de lo matemático: para los pitagóricos las matemáticas son el ser mismo, origen del mundo, lo concreto; en tanto que para Platón la matemática no corresponde al mundo físico, ella es la verdadera esencia del mundo, pero distingue el mundo de las ideas al mundo sensible, aunque alude a la existencia de una relación de correspondencia imperfecta del primero en el segundo; Aristóteles, por otra parte, no sólo acepta la separación entre estos dos mundos, sino que parece inclinarse más por el mundo físico, la naturaleza, pero considerando como aspectos centrales: la *energeia*, y la *dynamis,* que se manifiestan a través de la materia *hilé* (υλη), la cual es producto de la *techné.*

En posteriores desarrollos, como se mostrará adelante, el vocablo sustancia, y luego materia, adquirirá un sentido diferente, aislado de la *techné* y separado del artesano, se transformará en la materia, ente, algo, “A”

De lo expuesto anteriormente cabe mencionar varios aspectos relevantes para la discusión posterior. El primero es la instauración de lo material, del ente cuyas categorías van circunscribiéndolo para constituir un ente material, materia, sustancia, lo cual favoreció una interpretación en la cual el ente tenía existencia propia, constituyendo un mundo material independiente del hombre. Cabe reiterar que en Aristóteles no conlleva esta notación, ya que el ente va más allá de lo que interpretaciones posteriores aludieron al ente.

El segundo se refiere a los principios lógicos que Aristóteles propone y de éstos el propio Aristóteles identifica que el principio de no contradicción es el principio primero "el más firme de todos...que todo tiene que ser afirmado o negado y que es imposible ser y no ser al mismo tiempo" (Aristóteles, 1998:167-169). Este principio considerado como el primero y más firme, es, de acuerdo con Heidegger (1964), el mismo principio de identidad expresado positivamente.

Así, una vez enunciados dichos principios como universales, éstos quedan sin sujeto que los enuncie, y con ello establecen una "verdad" que posteriormente será considerada absoluta.

Aristóteles contribuyó de manera decisiva en el pensamiento de occidente. Una de las aportaciones que es fundamental considerar para este trabajo fue la instauración de los principio lógicos, los cuales dan lugar a la lógica clásica, aristotélica que tuvo vigencia prácticamente durante 2000 años –de la misma manera que la geometría euclidiana-, hasta bastante finalizada la Edad Media. Estos principios, si bien han sido refutados, ampliados y reconsiderados en el plano lógico, filosófico y matemático; en la vida cotidiana, en la formación escolar y en múltiples aspectos de nuestra cultura persisten como los únicos y como fundamento de la llamada razón.

Estos principios necesariamente implican la existencia de algo sobre lo cual pudieran aplicarse, esto es, una cosa, un ente, algo existente de suyo, generando la posibilidad de interpretación de la existencia de un mundo independiente del hombre.

2.3. La Matematización de A = A

La lógica aristotélica fue decisiva también en la formulación de los "*Elementos*" de Euclides, obra de gran trascendencia en el saber matemático, dicha obra fue tan importante que cualquier matemática se hacía en función de ella y fundamentalmente con el método axiomático propuesto en ésta.

Si bien los *Elementos* no fue el primer trabajo en Matemáticas, si fue una compilación, por demás importante para el desarrollo posterior de la matemática y de la forma de hacer matemáticas. Estos *Elementos*, "desplazaron a todos los manuales de geometría hasta entonces en uso y, como sabemos, durante dos milenios reinaron por dondequiera que se enseñaba geometría" (Kagán,1984:121), e impactaron de tal manera que se convirtieron en la forma de proceder para toda demostración rigurosa en matemáticas, siendo vigentes durante más de veinte siglos. Incluso en la matemática moderna y en la lógica matemática. Los *Elementos* han tenido una gran repercusión en la enseñanza de las matemáticas en general y de la geometría específicamente, en todas las escuelas del mundo.

El texto de Euclides responde a las exigencias de Platón y a la lógica de Aristóteles, como señala Kagán:

> Euclides se ajusta a las exigencias de Platón y al esquema de Aristóteles de la siguiente forma. Cada libro comienza por la definición de todas las nociones que figuran en él...La cuestión de saber cómo Euclides (e incluso Aristóteles) distinguen los postulados de los axiomas, no ha sido todavía aclarada. En el fondo, esa distinción consisten en lo siguiente: los axiomas, que Euclides llama patrimonios comunes de nuestro espíritu, son verdades comunes de todas las magnitudes, no sólo de las geométricas...En cuanto a los postulados, éstos son exigencias de carácter geométrico, que el lector debe aceptar para poder admitir todas las deducciones ulteriores (Kagán, 1984:123)

Como podrá notarse, se establece así un conjunto de aseveraciones, denominadas axiomas que establecen la mecánica para proceder matemáticamente, es decir, se sientan las bases del método axiomático, el cual puede describirse de la siguiente manera:

> Probar un teorema en un sistema deductivo consiste en hacer ver que el teorema es una consecuencia lógica y necesaria de ciertas proposiciones previamente establecidas, que a su vez deben ser probadas, y así sucesivamente (Courant y Robins, 1979:226-227).

En los *Elementos*, el discurso axiomático, deductivo sigue de manera precisa la lógica aristotélica, al enunciar definiciones, principios o axiomas y postulados. Sin embargo, ha existido gran controversia acerca de la compatibilidad y suficiencia de los axiomas, de tal suerte que han existido diferentes posiciones filosóficas al respecto.

En matemáticas se asume que los axiomas o postulados son proposiciones que no pueden ser demostrados y que hay que aceptar como verdaderos (Perero, 1994), sin embargo, esta forma de proceder se generaliza a otros ámbitos de la realidad, de tal manera que se asume implícitamente que es "*el modo*" de pensar en general.

En relación al método axiomático y su pertinencia para hacer matemáticas, Courant y Robbins (1979) consideran que si bien éste es un ideal, sería un gran error creer que este método constituye la esencia de la matemática, proponiendo a la intuición como esencia del desarrollo de la matemática. Igualmente mencionan el carácter no deductivo e irracional de la "intuición constructiva" de los matemáticos que la hace comparable con la música y el arte" (Courant y Robins, 1979:228).

La naturaleza estética de la matemática pareciera haber sido dejada de lado - en la ciencia y tecnologías modernas, sobre todo en los ámbitos educativos- en pos del carácter utilitario exigido por la sociedad contemporánea, transformando esta área de saber en herramienta esencial en el dominio y control del mundo. Y también, podemos señalar, de selección en los procesos educativos.

Así entonces, el método axiomático pareciera ser el punto de partida para responder al ideal platónico acerca de la posibilidad del hombre para

> "alcanzar conocimientos universalmente válidos, cuya validez sea independiente de la latitud y del tiempo, que mantengan su verdad a pesar de las variaciones psicológicas de los individuos, que sean independientes, incluso, de las determinaciones culturales que impone la historia... Platón... en La República... plantea de manera definitiva el ideal del conocimiento absoluto, como la meta de todo conocimiento racional" (Guiber, 1991:108)

Dicho conocimiento debiera ser racional e independiente de la experiencia, lo cual quedaría garantizado por el establecimiento de principios evidentes (axiomas) que los relevaría de toda demostración (Guiber, 1991:110).

Euclides, con sus *Elementos* “parte de principios evidentes cuya verdad no requiere demostración, que una vez aceptados sirven de base para la deducción de todo el árbol de teoremas. La geometría fue así la primera rama de las matemáticas que fue ordenada de manera rigurosa, sistemática y progresiva, y llegó a ser el primer sistema axiomático que construyó el hombre” (Guiber, 1991:111).

Existe la tesis por demás interesante que la obra de Euclides surge ante el conjunto de propuestas acerca de la naturaleza de *physis* y sobre todo ante las propuestas de los eleatas que pareciera rompen con la razón, llevándola al extremo, por ejemplo las paradojas de Zenón, ante las cuales Platón y el propio Aristóteles tratarían de remediar considerándolas “embriaguez” o “locura” de la razón (Reale y Antisieri, 1991:63).

No obstante, también los *Elementos* fueron siempre motivo de críticas, sobre todo en cuanto a sus fundamentos, en las definiciones iniciales, axiomas y postulados. Tales críticas darían origen posteriormente, al surgimiento de nuevas geometrías denominadas no euclideanas.

Por otra parte, cabe señalar que el predominio de los *Elementos* como manual recaía en la intención de disciplinar la forma de acercarse al conocimiento, como afirmó Schrader, a finales del siglo XIX “La tarea no consiste en enseñar las matemáticas, sino que por intermedio de ellas, disciplinar el conocimiento”[2]. Con esta aseveración se pone en evidencia las intenciones de la enseñanza de la matemática, de ese tiempo, es decir, su finalidad no se refería únicamente a enseñar los productos de la matemática, sino que constituía una forma de orientar los procesos de pensamiento, Y como señala Kagán:

> Es evidente que en virtud de su rigor formal, y cualesquiera que fuesen sus lagunas aclarados por su comentadores, el sistema de Euclides estaba más apto que cualquier otro para servir a este fin (Kagán, 1984:95).

[2] Schrader citado en Kagán, V. F. Lovachevski. Editorial Mir. Moscú, pág. 121

Considerando las características y señalamientos de los diferentes programas educativos de nuestro tiempo, podríamos afirmar que aún hoy, se intenta con la enseñanza de la matemática “orientar” y “disciplinar el pensamiento”.

2.4. Fundación racional y soberanía de A=A

Hemos visto hasta aquí una trayectoria del principio de identidad, desde sus antecedentes presocráticos con Parménides, hasta su enunciación como principio lógico y su indiscutible trascendencia en la fundación de una matemática axiomática. Sin embargo, queda por esbozar cómo este principio lógico se va transformando en la “suprema ley del pensar” y cómo esta ley transita en la constitución de ciencia moderna, del pensamiento ilustrado, a fin de entender las formas en las que se conciben tanto el pensamiento de manera actual, así como su trascendencia en la pedagogía contemporánea, vía las ciencias de la educación.

Por tal motivo se considera necesario bosquejar, la influencia de Descartes como uno de los fundadores de la era moderna, y cómo el principio de identidad va siendo resignificado por Leibniz y erigido por Kant como fundamento de la razón en la Ilustración.

Descartes (1596-1650), filósofo matemático, de gran trascendencia, y considerado un pensador fundamental de la era denominada moderna, aún cuando no alude al principio de identidad como elemento esencial en su propuesta filosófica, está íntimamente vinculado con éste ya que con el “*cogito ergo sum*” propone ya una forma de ser en el mundo, establece la existencia del hombre como ser consciente y la conciencia en sí misma como indubitable. Este filósofo marca así una diferencia con respecto a los pensadores griegos, para quienes el hombre como totalidad no está fuera del mundo sino que es parte del mundo, no está ante el mundo.

El “acto del pensar” de Descartes, implica tener representaciones, la representación tiene que aparecer en un espacio de lo mental, tiene por ello, que radicar en el sujeto, fundamento de toda verdad. Por lo cual, un elemento esencial estaría constituido por el principio de identidad, el cual podría enunciarse como una representación de la existencia misma del objeto y coincidiendo con Deluze (1983), el "*cogito ergo sum*" nos lleva a una expresión de tal principio en la forma de Yo = Yo, como "identidad del pensador, es decir ustedes o yo -la identidad del pensador en tanto que tal, es decir la identidad del sujeto del pensamiento", convirtiendo el juicio hipotético A = A a un juicio categórico, trasladando ese principio que se refería a un mundo conceptual, a un mundo real existente hasta el momento.

En el *Discurso del Método*, Descartes, a la par que propone las reglas para la dirección del espíritu, funda la geometría analítica. Las matemáticas para este filósofo son cruciales en su obra:

> Las ciencias matemáticas eran las que más me agradaban, por la certeza y evidencia de sus razonamientos; pero no comprendía todavía su verdadera aplicación, y al pensar que no servían más que a las artes mecánicas, me admiraba de que sobre tan firmes y sólidos fundamentos no se hubiera edificado algo de mayor trascendencia que esas artes mecánicas (Descartes, 1972:11).

Isaac Beeckman visitó a Descartes en 1628. En esa visita Descartes le dijo que con el Álgebra que había descubierto, no solamente había llegado al conocimiento perfecto de la geometría, sino que afirmaba abarcaba todo el pensamiento humano (Hersh, 1997:112). Descartes consideraba que las matemáticas era la herramienta principal para revelar las verdades de la naturaleza.

Según afirma Hersh (1997), Descartes, a pesar de adoptar el ideal euclidiano, en sus propias investigaciones sobre la geometría analítica, se olvidó de dicho ideal, en ninguna parte señala axiomas, teoremas o pruebas. Su forma de proceder no obedeció a su propio método deductivo, propuesto, sino más bien siguió un método heurístico, estilo pragmático normal en la investigación matemática. Con lo cual contradice su propio método.

No obstante, la argumentación del *"cogito ergo sum"* es un punto crucial en la formulación del principio de identidad al darle garantía de existencia al sujeto -

sujeto que existe en el pensar-, que posteriormente Leibniz extendería a la identidad ya no sólo del sujeto que conoce, sino a todas las cosas existentes, como lo señala Deleuze (1983).

Con Leibniz, se establece como ley universal que A = A. Esta ley, como ley es una manifestación de una forma de pensar, forma de pensar que se ha vuelto canon en Occidente.

Sin embargo, cabe señalar que la identidad de Leibniz conlleva una visión diferente a la identidad lógica establecida por Aristóteles. En Aristóteles la identidad se refiere, como se ha señalado en sus diversas interpretaciones, a la cosa, sustancia, accidente, número o género. Es decir a algunas de las múltiples manifestaciones del ente, en donde la verdad está referida por la correspondencia del pensamiento con los hechos, la naturaleza. Mientras que en Leibniz la verdad está fundada en la adecuación o inadecuación de las ideas, por ello, aún cuando ambos se refieran al principio de identidad, de hecho son dos concepciones diferentes de identidad. En el primer caso la identidad se refiere al ente, algo es idéntico a sí mismo, en tanto que en el segundo es un principio que no corresponde al mundo, a la naturaleza, a la *physis*, sino a una intuición del espíritu. Ello implica ya un desplazamiento notable de dicho principio.

Dentro del movimiento de la Ilustración, el racionalismo crítico de Immanuel Kant continúa de cierta manera en la tradición filosófica de Descartes. Su argumentación se basa en la existencia de un sujeto existente frente a un objeto, en el cual la orientación en el pensamiento, sería posible a través de la lógica, función de la razón a la que enaltece como

> “la última piedra de toque de verdad... pensar por sí mismo significa buscar en uno mismo (es decir, en su propia razón) la suprema piedra de toque de la verdad; y la máxima de pensar siempre por sí mismo es la Ilustración” (Kant, 1995:26-27).

De hecho, se podría argumentar que tanto el principio de identidad como el de no contradicción y el tercero excluido, propuestos inicialmente por Aristóteles, subyacentes en el discurso de Descartes y retomados por Leibniz y Kant, impactaron en la visión de mundo de nuestra cultura, como lo ponen de manifiesto Horkheimer y Adorno (2004):

> "La Ilustración opera según el principio de identidad: no soporta lo diferente o desconocido. Y ello marca el curso de la desmitologización de la Ilustración, que termina reduciendo todo a la 'pura inmanencia'...El hombre de la ciencia conoce las cosas en la medida en que puede hacerlas. De tal modo, el *en sí* de las mismas se convierte *para él.* En la transformación se revela la esencia de las cosas siempre como lo mismo: como materia o substrato de dominio. Esta identidad constituye la unidad de la naturaleza" (Horkheimer y Adorno, 2004:64-70)

Las pro-puestas racionales representan la búsqueda del fundamento de "algo" de una "esencia", que pudiera satisfacer el propio principio de identidad, es decir del fundamento de la razón por ella misma. Al hablar de "razón" se postula algo que es. La búsqueda implicaría la existencia de algo que fuera igual a sí mismo, que pudiera estatizarse para su comprensión y, partir de algo indubitable para fundamentar nuestra existencia. Búsqueda del fundamento de la razón que se vislumbra inalcanzable por medio de sí misma, como se ha puesto de manifiesto a partir del surgimiento de la fenomenología, con Husserl.

2.5. Resquebrajamiento del principio de identidad como verdad absoluta.

La propuesta de Husserl es por demás pertinente porque marca una diferencia en las formas discursivas, ya que si bien considera como principio, la crítica de todas aquellas teorías que se proponen ofrecer una explicación única del mundo, ofrece una visión que intenta dar cuenta del proceder de las ciencias de la naturaleza y del espíritu. Sin embargo, esta perspectiva se abre en sí misma, en lo que considera "conjunto de posibilidades de sentido", en donde razón ya no es la capacidad de representarse el mundo, sino como "el momento auto-reflexivo del horizonte de sentido en el sujeto finito que piensa su lugar en ese horizonte"[3]

Propuesta parecida a los dibujos de Escher, en la medida que se está afuera para dar cuenta de cómo se vislumbra el proceder de las ciencias, pero al mismo tiempo se está adentro al ser en sí misma el resultado de las condiciones de posibilidad. En donde el observador se movió de un afuera a un adentro, para estar en ambos de su esquema producido.

[3] Jorge Reyes. Notas del Seminario Filosofía de la Ciencia. Doctorado en Psicología y Educación. Facultad de Psicología. UAQ. México. Junio.2005

En la propuesta de Husserl se atisba el quiebre del principio de identidad al señalar el modelo mediante el cual se gesta el desarrollo de los distintos saberes tanto de la naturaleza como de las ciencias del espíritu. Si bien parte de la existencia de un modelo que pudiera dar cuenta del desarrollo de los saberes logrados en ambas ciencias, este modelo se resquebraja y deja de ser estático, ya que no está ahí afuera del sujeto fundante, sino que al fundar dicho modelo se incluye en él, de tal manera que no existe aquí un A = A, ya que ese "A" nunca es asible por medio de la tematización, esto es, del discurso lógico resultado de la razón, sino que en la enunciación se compromete el propio sujeto.

Sin embargo, el filósofo que advertimos decisivo en el rompimiento con dicho principio de identidad es Martín Heidegger en "*La pregunta por la cosa*" (1964), ya que de manera sorprendente va resquebrajando toda posibilidad de establecer una cosa como "cosa" o como "ente". Muestra la imposibilidad de la existencia de algo, de la cosa, de "A", ajeno ya no al sujeto que enuncia, sino al ser que es en el mundo. La ruptura que se vislumbra implica develar el fundamento de la razón, que se muestra en lo matemático, a partir de ello devela como la filosofía kantiana asume el principio de identidad y su atravesamiento en la ciencia moderna.

Heidegger franquea el trasfondo de la razón enunciada por Kant, y la deja al descubierto, no sin reconocer la obra monumental de éste, pero al develarla pone en cuestión la estructura misma de la razón y por consiguiente de la ciencia moderna.

Dada la trascendencia de Heidegger en la conformación del presente trabajo, en el capítulo siguiente, se abordará el proyecto matemático de la naturaleza y como éste ha impactado en la instauración de la ciencia moderna, de la cual las teorías cognitivas vigentes constituyen un ejemplo.

CAPÍTULO TERCERO

EL PROYECTO MATEMÁTICO DE LA NATURALEZA Y EL PRINCIPIO DE IDENTIDAD.

En el primer capítulo describimos algunos de los principales programas de investigación en educación matemática, los cuales se desprenden de diferentes visiones filosóficas sobre el carácter de la matemática, cuya finalidad es comprender su naturaleza. Señalábamos en ese capítulo que la mayor parte de los programas de investigación en matemáticas tienen, entre sus objetivos fundamentales, procurar que los estudiantes, niños y jóvenes tengan acceso a dicha área del saber, ya que se afirma, constituye un elemento importante en la comprensión del mundo que nos rodea, además de ser una materia que se caracteriza por potenciar el pensamiento, especialmente el racional, porque al parecer no habría otro.

Encontramos en lo general, casi como verdad absoluta, una aceptación de la necesidad de incluir esta materia en el currículo escolar y no registramos posturas en las cuales se cuestionara su inclusión. Los cuestionamientos surgen en términos de la mejor manera de acercar dicho saber a los estudiantes, pero no en el sentido de qué visión se genera con dicha inclusión. Cuestionamiento, este último que podría surgir al vislumbrar el tipo de formación en el pensamiento generado a expensas de limitar, reducir o eliminar otras formas de pensar que no sea lógico.

Por otra parte, en el segundo capítulo hemos seguido un trazo de la genealogía del principio de identidad (A = A), principio que en una primera instancia nace dentro de la filosofía, para ser proseguido en las matemáticas, donde pasa a ser un axioma necesario en cualquier proposición matemática. Sin embargo consideramos que donde se arraiga más profundamente es en el saber matemático formalizado y es desde donde impacta al pensamiento occidental, denominado moderno, y particularmente en la formación de nuevas generaciones a través de la educación.

Este principio, como se ha mostrado, es expuesto e interpretado de múltiples formas, y conlleva un gran número de acepciones. Se ha venido señalando, que el principio de identidad, A = A, puede en algunos casos, ser aceptado como verdad absoluta, o considerado como propuesta preliminar, o regla convencional, lo cual lleva a una no muy clara acepción en los medios educativos de lo que pueda constituir la expresión A = A. Por consiguiente, tampoco quedan unívocamente comprendidos los elementos que la componen, esto es, tanto la primera como la segunda “A”, así como el signo de “=”.

En matemáticas se afirma que no importa lo que sea “A”, se establece una “A” sin contenido, no obstante es irrealizable trabajar con ella fuera de un contexto matemático específico, ya que para que dicha afirmación se cumpla tendría que determinarse tanto el dominio de la primera como el de la segunda “A”. Igualmente sería necesario especificar si el signo “=” se refiere a una igualdad, equivalencia o a una identidad. Por lo tanto asumimos que la expresión “A = A” por sí misma abre un conjunto de posibilidades de interpretación, sujetas al contexto bajo el cual se plantee, máxime cuando se modela la realidad a partir del lenguaje matemático, y específicamente, cuando se trabaja en los espacios educativos.

El presente capítulo tiene como intención mostrar una lectura de la propuesta de Heidegger en relación a tres aspectos cruciales en la comprensión del principio de identidad, el primero se refiere al mismo principio de identidad, el segundo a la disertación sobre la “cosa”, la cual quedaría implicada en “A” y el tercero se refiere a la articulación del principio de identidad con el tratado sobre la “cosa”, en lo que este filósofo denomina el “proyecto matemático”.

La lectura de este filósofo constituye el soporte primordial para la exposición de este trabajo, ya que Heidegger asume que el principio de identidad rebasa los límites impuestos por la concepción moderna, esto es, “A=A”, entendida como una cosa es igual a sí misma, para abrirle otras interpretaciones que aluden a una mediación. En este trabajo consideramos que dicho principio, no tiene una lectura unívoca, ni puede considerarse como una verdad absoluta. Pero que en la enseñaza de la matemática se ignoran las múltiples interpretaciones de dicho principio, llevando al estudiante a la creencia de su universalidad.

Al desconocer las múltiples interpretaciones del principio de identidad y presentarse de manera unívoca y sin mayor cuestionamiento en los ámbitos educativos, conllevaría varias implicaciones. Una de ellas y tal vez la más notoria, se refiere a que podría generar un obstáculo en la comprensión de los contenidos matemáticos. Sin embargo, aún cuando pudiera ser menos evidente, el principio trae consigo la pretensión de orientar el pensamiento de los estudiantes, a través de la formación educativa, hacia el encumbramiento del pensamiento lógico, racional, excluyendo otras formas de pensamiento, lo que implicaría dirigir hacia una forma particular de ser en el mundo.

Indagar sobre los efectos de una formación primordialmente matemática, consideramos, abriría un espacio para reflexionar sobre los fundamentos de la ciencia y por ende de la sociedad contemporánea, y así reconocer y valorar otras formas de pensar y ser en el mundo.

3.1. El principio de identidad. ¿Ley Suprema del pensar?

El principio de identidad se ha mostrado como una ley del pensar. Cabe preguntarse entonces qué implica esta ley, y a qué puede aludir dicho principio.

Con respecto al principio de identidad, Heidegger inicia el texto "Identidad y Diferencia" (1990), de la siguiente manera:

> Según la fórmula usual, el principio de identidad reza así: A = A. Se considera este principio como la suprema ley del pensar.

Y más adelante, continúa:

> ¿Qué dice la fórmula A = A con la que se suele presentar el principio de identidad? La fórmula menciona la igualdad de A y A. Para una igualdad se requiere al menos dos términos. Un A es igual a otro. ¿Es esto lo que quiere enunciar el principio de identidad? Evidentemente no. Lo idéntico, en latín ídem, es en griego το αυτο (Heidegger, 1990:61).

$\tau o\ \alpha\upsilon\tau o$, que significa lo mismo no se ve reflejada en la expresión A = A, ya que dicha expresión apunta a la igualdad que no es lo mismo que la mismidad:

> Para que algo pueda ser lo mismo, basta en cada caso un término. No precisa de un segundo término como ocurre con la igualdad…
>
> La fórmula A = A habla de igualdad. No nombra a A como lo mismo. Por consiguiente, la fórmula usual del principio de identidad encubre lo que quiere decir el principio: A es A, esto es, cada A es él mismo lo mismo. (Heidegger: 1990:63)

De acuerdo a este filósofo, existe una diferencia entre las expresiones: A es A; y A = A, en la primera se rescata la mismidad de A, en tanto que en la segunda se encubre esta mismidad y se estatiza al ente. Cuando hablamos de identidad, como se entiende actualmente, establecemos la quietud, la estática del ente, de un ente, de una representación, de algo, lo paramos. Leyte señala en la Introducción de “Identidad y Diferencia” (Heidegger, 1990:37) que:

> Para Heidegger, [ ] cuando pensamos de acuerdo con la identidad, que presuponemos para todo objeto le damos mayor prioridad a la identidad que a la cosa y seguimos así siendo platónicos. El modelo (sea técnico, social o económico) tiene más peso que la propia realidad a la que se refiere. Evidentemente, este mundo es más dinámico que el estático mundo de las ideas, lo que se refleja en un cambio constante de cosas (objetos) y modelos (objetos) exigidos por la necesidad de desarrollar y aumentar la producción. Pero la misma noción de objeto (cosa o modelo), comprensible por la identidad, no varía.

Esto es, la idea de identidad se asume con mayor fuerza que la cosa misma, rechazamos la cosa, para dar cuenta de la idea de la cosa a través de la identidad, de esta manera somos platónicos de entrada, al resaltar y valorar más la idea que la cosa. Queda claro que nuestras concepciones de mundo, generados por las diversas disciplinas son fundamentalmente modelos de ese mundo, pero que olvidamos su carácter modélico, para asumirlo como lo que “*es*”, entonces el mundo deja de ser lo que “*es*” para convertirse en el modelo, y nos movemos entre modelos Esto es lo que parece señalar Heidegger cuando habla de que estamos en la metafísica.

Así Heidegger da cuenta del olvido del ser, de ser metafísicos al modelar el mundo, si dejáramos el mundo de las ideas podríamos reencontrarnos con el ser.

Al establecer el principio de identidad hemos configurado un mundo de ideas, un mundo ordenado; ordenado sólo en el plano ideal. Primero establecemos la identidad, la representación de algo como idéntico, esto es como estático y a partir de este principio se genera un mundo unificado.

Un ejemplo de ello lo encontramos en la tematización del tiempo, cuando el tiempo mismo se ha considerado un objeto, un ente y por tanto un objeto a ser representado, el tiempo pasa entonces a ser idea... "Desde sus comienzos, la metafísica se extrañó del tiempo.... se hizo del tiempo lo que justamente no es: un tema" (Leyte en Heidegger, 1990:38).

Cabe mencionar que en el principio de identidad el tiempo no existe, ha quedado fuera, porque la relación A = A requiere la omisión del tiempo, aún cuando el tiempo pueda ser A, siguiendo a Leyte:

> El tiempo llegó a ser, bien el tema de la física, bien el tema de la historia. Con la realización de la metafísica, ¿qué queda del tiempo? Él mismo, bajo una u otra forma, se convierte también en objeto manipulable, tratable, controlable. Se convierte en velocidad y forma parte de la subjetividad, del plan y la planificación (Heidegger, 1990:38).

Al tiempo se le ha sujetado, convirtiéndolo en cálculo, en medio de dominación, en algo sujeto a control: "el tiempo es el tiempo del trabajo, el tiempo de la producción, y nada más". El tiempo como tal ha perdido su esencia, ha dejado de ser tiempo para ser cálculo, cálculo importante para la sujeción del hombre.

Se podría argumentar que así como el tiempo se ha convertido en tema, la vida y el hombre mismo se han vuelto cálculo, objetos manipulables, caben estos señalamientos para el caso de la Psico.-pedagogía en la cual se da existencia a los procesos cognitivos (A), se les explica, y se generan una serie de prácticas para su supuesto desarrollo.

En esta elaboración y constitución del "objeto de conocimiento" el principio de identidad constituye un pilar fundamental, ya que para poder darle existencia, sería reconocer que una cosa es igual a sí misma, esto es, el proceso cognitivo es igual al proceso cognitivo, de tal manera que el cuestionamiento sobre la existencia del mismo pasa al olvido. Así entonces se asume que A = A, tiempo = tiempo, proceso cognitivo = proceso cognitivo; en donde se olvida preguntarse por A (tiempo, proceso cognitivos, etc.). Así, el principio de identidad entendido como A = A, y no como A es A, constituye su fundamento.

Heidegger señala:

> Así, la fórmula más adecuada del principio de identidad, A es A, no dice sólo que todo A es él mismo lo mismo, sino, más bien, que cada A mismo es consigo mismo lo mismo. En la mismidad yace la relación del "con", esto es, una mediación, una vinculación, una síntesis: la unión en una unidad. Este es el motivo por el que la identidad aparece a lo largo de la historia del pensamiento occidental con el carácter de unidad. (Heidegger, 1990:63-67).

Argumenta Heidegger que en torno a una identidad no cabe la unicidad del ente, es decir su existencia ajena al entorno del ser, sino que la identidad se rescata en la medida en que se implica una mediación, un ser lo mismo en la pertenencia, o porque se pertenecen mutuamente son lo mismo, pero en una lectura metafísica se entendería la representación de una cosa igual a sí misma, independiente del ser. En tanto que en el enunciado "A *es* A" existe la posibilidad de reencuentro con el si mismo, mientras que con la identidad entendida metafísicamente (A = A), se declara la existencia del ente, se funda la existencia de "algo", ya alejado de quien enuncia, para darle existencia propia.

> Lo que expresa el principio de identidad, escuchado desde su tono fundamental, es precisamente lo que piensa todo el pensamiento europeo occidental, a saber, que la unidad de la identidad constituye un rasgo fundamental en el ser de lo ente Heidegger, 1990:67).

Con ello parece señalar que la unidad de la identidad pensada en occidente es una característica del ser, lo que implica necesariamente la existencia del ser como tal, es decir un ser particular, es decir sustantivo y no como un acaecer, esto es, verbo.

> En todas partes, donde quiera y como quiera que nos relacionemos con un ente del tipo que sea, nos encontramos llamados por la identidad. Si no tomase voz esta llamada, lo ente nunca conseguiría aparecer en su ser. En consecuencia, tampoco se daría ninguna ciencia. Pues, si no se le garantizara de antemano la mismidad de su objeto, la ciencia no podría ser lo que es. Mediante esta garantía, la investigación se asegura la posibilidad de su trabajo. Con todo, la representación conductora de la identidad del objeto no le aporta nunca a las ciencias utilidad tangible. Así el éxito y lo

> fructífero del conocimiento científico, reposan en todas partes sobre algo inútil (Heidegger, 1990:67).

Diríamos inútil en sí, pero extremadamente útil en la fundamentación de la ciencia, dicho con palabra de Novalis[4], sería "el hechizo que se hechiza a sí mismo", al asegurar la existencia del ente, traducido en la ciencia moderna como objeto de conocimiento. Es la producción misma del ser como entidad antes que como *ser*.

> El ser se halla determinado, a partir de una identidad, como un rasgo de ésta. Por el contrario, la identidad pensada posteriormente en la metafísica, es representada como un rasgo del ser (Heidegger, 1990:69).

Heidegger marca aquí una clara distancia en la identidad con el pensar como pertenecientes a lo mismo, es decir, una aproximación a la identidad, en contraposición a la identidad occidentalizada, metafísica, que la señala como un rasgo del ser, un elemento o característica del ser, entendido este último, como una entidad específica. Así entonces, Heidegger muestra un camino que va del principio de identidad, A = A, de una cosa es igual a si misma de la interpretación occidental moderna, al principio de identidad como el acontecimiento de traspropiación.

> En el camino que va desde el principio entendido como un enunciado sobre la identidad, hasta el principio entendido como un salto al origen de la esencia de la identidad, el pensar se ha transformado; por ello mirando de frente la actualidad, pero pasando su mirada por encima de la situación del hombre, ve la constelación de ser y hombre a partir de aquello que los hace propios el uno del otro, a partir del acontecimiento de transposición.
> …en el acontecimiento de transposición habla la posibilidad de sobreponerse al mero dominio de la com-posición para llegar a un acontecer más originario.
> ....en el acontecimiento de transposición oscila la esencia de lo que habla como lenguaje (Heidegger, 1990:89-93).

Así entonces, el principio de identidad se reconoce "como ley del pensar en la medida en que es una ley del ser que dice que cada ente en cuanto tal le pertenece la identidad, la identidad consigo mismo...*La llamada de la identidad*

[4] Citado en Galimberti (1995)

habla desde el ser de lo ente"[5] , esto es, el principio de identidad es, en tanto *es* enunciación del ser.

Muy lejos de concebir la identidad como la existencia de un objeto que es igual a sí mismo, y que este razonar sea por tanto la ley suprema del pensar, su propuesta se puede atribuir en otra dirección como la identidad que existe entre el pensar y el ser, en tanto que pertenecen a lo mismo, se copertencen en la mismidad.

Sin embargo en la cultura occidental moderna, tal principio enuncia que A = A, A es igual a si misma, una cosa es igual a sí misma y en esta enunciación se esconde la fundación de la *cosa*, es decir "A", quedando un mundo instaurado en donde se olvida del ser.

3.2. La pregunta por la cosa, la pregunta por "A" del principio de identidad.

Cuando se enuncia que "A = A", se refiere a una cosa, algo que no es nada, es decir, algo, si bien puede ser algo concreto, también podría referirse a cualquier algo. En filosofía de las matemáticas destaca una cuestión en torno a la naturaleza de lo que podrían ser las entidades matemáticas, o en algunos casos, antes que las entidades, la actividad matemática que produce tales entidades o expresiones matemáticas. Entre las respuestas dadas a la cuestión referida sobresalen las que provienen de posturas que consideran a las entidades matemáticas existentes de suyo independientemente del hombre, así como las que asumen que son construidas por el hombre.

Heidegger propone un camino diferente en relación con la pregunta por la cosa. Intentaremos aproximarnos a algunas interpretaciones de "A", a partir de la lectura de Heidegger. En varios textos Heidegger (1964, 1997, 2001) se ocupa de "la pregunta por la cosa". Esta cuestión resulta muy significativa para la enunciación del principio de identidad ya que, cuando se enuncia "*A = A"*, pareciera que "*A"* no se refiere a algo en particular, sino a la generalidad en su más amplia expresión.

[5] Ibidem (las cursivas son propias)

El libro de Heidegger *"La pregunta por la cosa"* (1964) es sustancial para nuestro trabajo, por ello, seguiremos su hilo textual, dado que por sí dejará mostrar la relación entre "A" como cosa, su incidencia en el surgimiento del proyecto matemático y el impacto de dicho proyecto en la conformación del pensar contemporáneo.

Heidegger al preguntar sobre la *cosidad* de la cosa, inicia con el señalamiento de la diferencia entre la forma de preguntar filosófica y científica, asumiendo que su forma de preguntar quedaría comprendida en la primera ya que la ciencia de manera clara y abierta declara su objeto de estudio, esto es, enuncia "A" y lo analiza, como tal, sin embargo el advierte que su preguntar filosófico va más allá, podríamos decir, al fundamento mismo del fundamento científico.

> *No queremos ni sustituir ni mejorar las ciencias con nuestra pregunta*...Sin embargo, quisiéramos colaborar en la preparación de una decisión. Esta decisión reza: ¿Será la ciencia una medida para el saber, o habrá un saber en el que se determinará el fundamento y el límite de la ciencia y con ello *su* verdadera eficiencia? ¿Este auténtico saber será necesario, para un pueblo histórico, o se podrá prescindir de él y reemplazarlo con otro?
>
> ... Pero con nuestra pregunta estamos fuera de las ciencias, y el saber al que tiende nuestra pregunta no es ni mejor ni peor, sino completamente diferente. Distinto de la ciencia, pero también de aquello que se llama "concepción de mundo" (*Weltanschauung*) (Heidegger, 1964:19)

Heidegger inicia su disquisición con la distinción entre las cosas concretas y la distancia entre la concepción sobre estas cosas concretas y aquellas determinadas por la ciencia, lo que indica que las cosas están en el ámbito de distintas verdades.

El interrogar sobre la cosa" puede ser entendido, de acuerdo a Heidegger, como una pregunta sobre la "cosa" en un "significado estrecho que nos remite a lo presente fáctico", Heidegger (1964:15) señala, en un primer momento, tres significados de "cosa":

> Diferenciamos los tres significados, aún cuando el modo de delimitación queda todavía indeterminado:
>
> 1. Cosa en el sentido de lo objetivamente presente (*des Vohandenen*): piedra, trozo de madera, tenaza, reloj, manzana, pedazo de pan; las cosas animadas y las inanimadas, rosa, arbusto, haya, pino, lagarto, avispa...

2. Cosa en el sentido de lo antedicho pero además, planes, decisiones, reflexiones, mentalidad, hechos, lo histórico...
3. Todo esto, y además todo lo otro que es un algo cualquiera y no nada.

Así, el sentido más amplio este último, correspondería a la propuesta kantiana de la “cosa en sí” en donde “cosa” significa” algo tal que no es nada”, en donde “el número es una cosa... Del mismo modo es “algo” el signo “> <,”

Pareciera en un primer momento que la pregunta de Heidegger por la cosa, se quedara en lo fáctico, a lo que está a nuestro alrededor, y en donde no cabría la “cosa” en el sentido amplio, esto es la “cosa en sí”, sin embargo ante la advertencia dicha “aún cuando el modo de delimitación queda todavía indeterminado”, y a la continuidad de la lectura para señalar que la “cosa” que se nos presenta a nuestro alrededor, podría desvanecerse esta limitación hasta encontrarse e ir más allá de la “cosa en sí”.

En el camino de la pregunta por la cosa, Heidegger se detiene en la particularidad de la cosa, como “particularidad y estidad concreta”[6], que conlleva necesariamente su ubicación en el tiempo y el espacio, dando lugar al problema espacio-temporal. Sin embargo no habría manera de establecer la naturaleza del espacio, ni del tiempo, y se plantea entonces como pregunta el cómo determinar la cosa en función del tiempo y del espacio, si no podemos dar cuenta de éstos y que además pareciera, son exteriores a la cosa, de ahí continúa interrogando “¿dónde empieza el interior [de la cosa] y dónde termina lo exterior?”.

Después de mostrar la imposibilidad de establecer la cosidad de la cosa, mediante su ubicación en el espacio-tiempo, aborda otra proposición de la cosa, como “esta concreta”, en tanto se puede señalar, sin embargo al señalar no se puede prescindir del sujeto que enuncia, por tanto el “esto” implica un “agregado subjetivo”

[6] Estidad es un neologismo introducido por los traductores García Belsunge y Szankay, para referirse al término alemán Jediesheit, compuesto de dies, esta/e/o, je, que significa la individualidad temporal y heit, -idad., según consignan en la nota de pie de página. No. 3 pag. 23, Heidegger (1964)

Esta disertación le lleva a analizar la siguiente proposición usual con respecto a la cosa, como la determinación “objetiva” y “subjetiva”, ante lo cual se plantea como pregunta esencial para esta determinación:

> ¿Cómo pretendemos saber algo acerca de la verdad propia de la cosa, si no conocemos la cosa misma para poder decidir qué verdad puede y debe corresponderle? (Heidegger, 1964:33).

Si no hay manera de establecer la naturaleza de la cosa de esta manera, entonces podría asumirse que la cosa es “algo que tiene siempre tales o cuales propiedades, algo que tiene tal o cual conformación. Este algo es el soporte de las propiedades” (Heidegger, 1964:38). Esta última caracterización ya estaba dicha por Platón y Aristóteles y aún Kant, “con otras palabras” dice Heidegger, también coincide con este punto de vista. La interrogante por la cosa surge a partir justamente de esta proposición, en cuanto se considera “natural”, sin embargo nos lleva al cuestionamiento de lo que se considera “natural” señalando que “lo natural” es siempre histórico” y por tanto el texto devela el surgimiento de la determinación de la esencia de la cosa, ubicándola en la filosofía kantiana:

> Con la filosofía de Kant todo el pensamiento y la existencia moderna entran por primera vez en la claridad y la transparencia de una fundamentación. Esta fundamentación determina desde entonces toda actitud del conocimiento, las delimitaciones y valoraciones de las ciencias desde el siglo XIX hasta el presente (Heidegger, 1964:58)

Así mismo la posición contemporánea de una cosa como algo independiente del ser que lo enuncia tiene su trasfondo en el decir de una época, tal fundación de la cosa, de acuerdo a Heidegger, se encuentra igualmente en Kant:

> ...en Kant lo que *es* pasa a ser objeto del representar que ocurre en la autoconciencia del yo humano. La cosa en sí significa para Kant el objeto en sí. El carácter de “en si” significa para Kant que el objeto en sí es objeto sin relación al representar humano, es decir, sin el “*ob*” (“enfrente”) por medio del cual, antes que nada, está para este representar. En sentido estrictamente kantiano, “cosa en si” significa un objeto que para nosotros no es objeto alguno, porque tiene que estar sin un posible “*ob*” (enfrente”): para el representar humano que se enfrenta a él. (Heidegger, 2001:130).

En esta fundación encontramos una relación muy sugerente en relación con la cosa a partir de τα μαθηματα (lo matemático), como “las cosas, en cuanto ellas...; lo aprensible. A partir de esta acepción Heidegger argumenta que lo matemático son las cosas en cuanto "la introducimos en el conocimiento, introduciéndolas en el conocimiento como lo que de ellas ya es conocido de antemano"

> Las μαθηματα, lo matemático, es aquello "de" las cosas, que en verdad ya conocemos; por consiguiente no es algo que extraemos de las cosas sino algo que, en cierto modo llevamos nosotros mismos (Heidegger, 1964.:75).

De ahí que los números sean lo más inmediato que conozcamos sobre las cosas, sin obtenerlo a partir de ellas, por tal motivo es lo más notable y por tanto se torna como lo "matemático"

De acuerdo a Heidegger, la diferencia entre la ciencia medieval y la moderna radica precisamente en que esta última tiene como rasgo fundamental lo matemático (Heidegger, 1964: 77), entendido en un sentido amplio, esto es:

> "... la posición de una determinación de la cosa que no se ha obtenido de ella por la experiencia y que, sin embargo, fundamenta todas las determinaciones de las cosas, las posibilita y le abre camino (Heidegger, 1964:89)

Siguiendo a Heidegger, se aclara de manera nítida, que lo matemático determina entonces la ciencia natural moderna, la matemática moderna y la metafísica moderna, en el sentido de que "lo matemático" se fundamenta a sí mismo, y se establece como "norma de *todo* pensar y [al] formular las reglas que derivan de ello" (Heidegger, 1964:99), esta manera de proceder es lo que denomina como *proyecto matemático*.

3.3. El proyecto matemático, canon del pensar contemporáneo.

Heidegger señala que lo matemático es el distintivo fundamental del pensamiento y el saber modernos. Pone en claro la esencia del proyecto matemático, en seis rasgos que cabe mencionar (Heidegger, 1964:91-93):

> 1. Lo matemático, como mente *concipere*, es un *proyecto* de la cosidad, que en cierto modo pasa encima de las cosas. Sólo el proyecto abre el ámbito en el que se muestran las cosas, es decir, los hechos.

Esto es, en el proyecto matemático se abandona la cosa misma para instaurar un nuevo ámbito de la *cosidad*, único ámbito donde podría vislumbrarse la cosa misma. Las cosas dejan su terrenal ubicación para ubicarse en otro plano, el de la razón, el de la metafísica.

> 2. Las determinaciones y enunciados prefijados en el proyecto son αξιωματα.(axiomata)…El proyecto es axiomático. Los axiomas son principios (Gruñid-Sätze= proposiciones fundamentales).

Con ello se señala el carácter axiomático de dicho proyecto, de tal manera que todo conocimiento se constituye como tal, en la medida de que está fundado de antemano por los principios - fundamentos, es decir los axiomas.

> 3. El proyecto matemático como axiomático es la pre-aprehensión de la esencia de las cosas, de los cuerpos; con ello se prefigura en esquema fundamental [ ] la estructura de cada cosa y de sus relaciones con toda otra cosa.
>
> 4. Este esquema fundamental da al mismo tiempo la medida para la delimitación del ámbito, que en lo futuro abarcará todas las cosas de esa naturaleza...Naturaleza es ahora el ámbito configurado por el proyecto axiomático de la conexión de movimientos uniformes espacio-temporales. Los cuerpos sólo pueden ser cuerpos en tanto están incluidos y entretejidos en ese ámbito.

Conviene resaltar la prefiguración de un *esquema fundamental* que determinará la naturaleza de las cosas y las formas en las que éstas se relacionarán y la delimitación del ámbito donde se ubicarán las cosas, así los cuerpos sólo pueden existir bajo ese ámbito, lo cual repercute de manera inevitable en las metas de la educación en general.

> 5. El ámbito de la naturaleza determinado axiomáticamente en su esquema fundamental, por el proyecto, exige ahora un modo de acceso para los cuerpos y corpúsculos que hay en ese ámbito adecuado sólo para los objetos determinados axiomáticamente predeterminados...Los cuerpos no tienen propiedades, ni fuerzas, ni facultades ocultas. Los cuerpos naturales son tal como se muestran en el ámbito del proyecto...Sobre la base de lo matemático la *experientia* se transforma en experimento en el sentido moderno. La ciencia es experimental sobre la base del proyecto matemático

Derivado del punto cuatro, señala la exigencia de un modo de acceso para las cosas existentes, esto es, sólo existen aquellas predeterminadas axiomáticamente.

> 6. Puesto que el proyecto pone por sí mismo una uniformidad de todos los cuerpos según relaciones de espacio, tiempo, y movimiento, posibilita y exige al mismo tiempo, como modo de determinación esencial de las cosas, la medida continuamente uniforme, es decir, la medición numérica. El modo del proyecto matemático [ ] lleva a la formación de una determinada "matemática", en el sentido más limitado.

Este último rasgo resulta sobresaliente para este trabajo, en cuanto que se refiere a la uniformidad que se proyecta y que pone como modo de determinación bajo este esquema la medición numérica. Por ello

> El hecho de que la matemática llegara a ser un medio de determinación esencial, no fue el fundamento y la razón de la nueva forma de la ciencia moderna. Antes bien, fue *consecuencia* del proyecto matemático el hecho de que pudiera y debiera entrar en juego una matemática, y en verdad una matemática de ese especial carácter

La instauración de la normativa a partir del proyecto matemático como señala Heidegger, no queda sólo en la matemática, sino que se traslada a la filosofía misma, al fincar en ésta lo pensable. Esta fundación de lo matemático, se expresa claramente en Descartes, Newton, Leibniz y posteriormente en Kant, alcanzando con este filósofo una importancia notable.

Si bien, "lo matemático" como forma de pensar y de "conocer" implica, por un lado, una nueva forma de ser en el mundo, una "configuración de la libertad misma" (Heidegger, 1964:96), por otra parte también restringe dicha libertad a los principios emanados por éste, de tal manera que no puede *saberse* sin tener presente lo matemático. Ello ha constituido una característica de la forma de proceder de las ciencias modernas.

Sin embargo, señala Heidegger, lo matemático en el sentido cartesiano, es decir como *mathesis universalis*, para configurar y fundamentar la totalidad del saber requerirá de la enunciación de unos axiomas indubitables

> Éstos deben ser: 1. Absolutamente primeros, evidentes en sí, por sí, es decir absolutamente ciertos. Esta certeza co-determina su verdad. 2. Los axiomas supremos deben en cuanto absolutamente matemáticos, fijar de antemano con respecto al ente en su totalidad qué es existente y que significa ser, desde dónde y cómo se determina la cosidad de las cosas...
>
> Sin embargo para la proposición fundamental matemática no puede haber cosas dadas previamente. La proposición no puede ser arbitraria. La misma proposición –precisamente ella- debe estar colocada sobre su fundamento. Debe ser un principio, *el* principio absoluto (Heidegger, 1964:104)

El principio absoluto se constituye por la razón, dada por el "yo pienso" cartesiano, el cual es el fundamento que determina así toda certeza y verdad.

> La pregunta acerca de la cosa está anclada ahora en la razón pura, es decir, en el desarrollo matemático de sus principios (Heidegger, 1964:106).

Los principios de la razón pura son: el principio del yo, el principio de contradicción y el principio de razón suficiente. El principio de contradicción se constituye como el "principio supremo de todos los juicios analíticos", sin embargo, para Kant, a decir de Heidegger (1964), "el principio de contradicción usado positivamente es el principio de identidad" y como tal se asume entonces que el principio de identidad se constituye como el principio supremo de los juicios analíticos, para la metafísica moderna.

Así entonces, lo matemático se instituye como *la* manera de comprender el mundo, mediante una concepción particular de ciencia, manifestada claramente por Kant: "Afirmo que en cada doctrina particular de la naturaleza sólo se encontrará tanta ciencia *auténtica* cuanta *matemática* haya en ella"[7].

3.4. El proyecto matemático en la configuración del ser del mundo moderno.

En este apartado, abrimos un espacio para mostrar algunas de las implicaciones de una visión de mundo, fundamentado en la ciencia moderna, en la cual subyacen la tecnología, las matemáticas y el principio de identidad. Desde nuestra perspectiva, el mundo actual, con su alto nivel de tecnificación, es una configuración de esta visión.

Así entonces se puede afirmar que si bien los adelantos científico-tecnológicos han propiciado un mejor nivel de vida, así como su prolongación, este beneficio no ha redituado a toda la población en el orbe, podemos afirmar que su impacto favorable se encuentra geográficamente delimitado en función de la propia distribución económica.

Esta situación se ha acentuado en los últimos siglos. A partir de la Ilustración, cuya bandera ha sido la razón. En ese tiempo, los ilustrados pensaron que se había encontrado el camino para el progreso de la humanidad, este posicionamiento tuvo efectos en todas las áreas del saber, en el desarrollo de la actividad científica, podríamos incluso decir que actualmente y sobre todo en los ámbitos educativos, nos encontramos dentro de esta visión de mundo.

[7] Kant, citado en Heidegger (1964) pag. 70. Las cursivas son mías.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos entonces aventurar algunas preguntas, como ¿qué implicaciones tiene este fundamento en la existencia contemporánea? ¿Hacia dónde nos dirigimos? ¿Qué proyecto de mundo establece? ¿Qué relación tiene con la educación matemática? Sin intención de agotar dichas interrogantes, y a sabiendas de la complejidad que implican, coincidimos con Horkheimer y Adorno (2004), cuando afirman que dicho acercamiento no ha impedido que nos encontremos en un mundo cercano a la “barbarie”, que no se logró el progreso prometido por esta visión ilustrada.

Así la “barbarie” contemporánea se ve reflejada en la cotidianeidad de nuestra existencia, cuando observamos las imágenes de niños africanos, asiáticos, latinoamericanos, morir de hambre; con guerras “preventivas” que ocultan intereses económicos; a una buena parte de la población entrampada en un sinnúmero de adicciones, lo que hace florecer un tipo de actividad que atenta contra todo valor humano y que al coludirse con ciertos grupos en las más altas esferas de poder capturan el presente de los individuos y el futuro de las generaciones venideras.

Las formas de producción violentan la dignidad humana, no sólo por el tipo de participación que se solicita de los individuos sino por sus consecuencias, a corto, mediano y largo plazo.

Tecnificación, automatización y ordenadores incrementan la tasa de desempleo, aumentan la productividad, incrementan las ganancias de los grandes capitales, reduciendo los costos. “Desplazar”, “simplificar”, “eliminar”, “rescindir” el personal laboral, es la fórmula para generar ganancias, la economía de alto rendimiento y la alta tecnología arrebata el trabajo a la sociedad de bienestar y despide a sus consumidores (Martin y Schumann, 2000:130), lo que lleva a recortes masivos de personal en organizaciones de producción y de servicios.

Los índices de desempleo, sobre todo en países de América Latina, Asia y África, generan una población “precaria”, “superflua”, ya que “no reditúa beneficios”. Las políticas internacionales parecen estar dirigidas a reducir la importancia de sistemas educativos formales, generales y públicos, para instituir una capacitación técnica que favorezca los cuadros de mano de obra necesaria para la producción. Y el gran mito de que a mayor productividad mayor bienestar social se desvanece para dar lugar a una aberrante realidad: a mayor productividad, mayor empobrecimiento de la población en general. Con ello se pone en cuestión la teoría del capital humano que tiene como tesis fundamental que dicho capital humano cuando se mejora, sobre todo a través de la educación y capacitación, tiene un efecto causal positivo sobre variables como: el ingreso, el empleo, el crecimiento económico y la equidad social entre otros. La concepción "racional" de mundo ha llevado al surgimiento de ideas y proyectos que no benefician ni siquiera en lo material a las mayorías (Martin y Schumann, 2000).

> El personaje del siglo XXI ha de ser en el aspecto real cotidiano de su vida, un trabajador productor de ganancias y un ente consumidor, con un horizonte mental fijado en la inmediatez (Martin y Schumann, 2000:151).

A ello se suman las políticas coincidentes de los gobernantes con los grandes capitales. Como un ejemplo, en nuestro país podemos encontrar los rescates bancarios y carreteros que

> ...solamente para este año, la deuda pública interna incrementada por el rescate del Fobaproa devengará intereses superiores al 6% del PIB, dos veces la captación fiscal por Impuesto al Valor Agregado (IVA) y muy por encima del presupuesto público destinado a la educación[8]

La estructura de producción actual, es capaz de destruir en muy poco tiempo una dinámica social solidaria, sistemas políticos reguladores entre productores y sociedad en general, y fundamentalmente pone en riesgo los sistemas ecológicos que han requerido de millones de años para formarse, y que determinan a su vez el clima y la fisonomía de la tierra. Esta estructura de producción es incapaz de crear un entorno que sea benéfico para la supervivencia del hombre en su conjunto, antes bien nos lleva a la destrucción

[8] http://www.hemerodigital.unam.mx/ANUIES/unam/problems/114/sec_25.html

del planeta y con ello a la de la humanidad, en aras del enriquecimiento extremo de ciertos grupos.

Estas concepciones modernas de mundo dan lugar a un ser racional lógico, frío, calculador, lo cual coincide perfectamente con los intereses del capital. Modo de pensar que se fomenta en las instituciones educativas, a fin de formar hombres “científicos” “racionales” “críticos” que antepongan los beneficios económicos y materiales susceptibles de control a los lazos de solidaridad, filiación y conciencia histórica. La desaparición de otras formas de pensar parece ser una condición necesaria para la implementación definitiva de una supremacía del mercado.

El proyecto matemático ha jugado un papel fundamental al favorecer una forma de pensamiento que atienda a lo calculable, a ver solamente una “cosidad” determinada por la lógica, dejando de lado toda consideración ética, e ignorando o subvalorando cualquier aspecto del entorno que no cumpla con el “esquema fundador de realidades”.

El discurso tecno-científico y anti-ético, en el campo formal educativo, laboral y de convivencia social ha tomado un papel preponderante, y como señalamos anteriormente, coincide con las formas de producción dominante, es decir con el mercado de capitales imperante en la actualidad, promoviendo una desigualdad social cada vez mayor.

Ante esta situación cabe la exigencia y la necesidad de que todos los actores sociales y fundamentalmente educadores, universitarios, académicos e intelectuales se hagan cargo de la responsabilidad social e histórica que les compete. Una gran parte de estos actores sociales han caído en el juego de la ideología dominante, retomando la petición de principio de optimizar los procesos de producción y de adaptación del hombre a los sistemas productivos y acomodamiento a su vida cotidiana, de valores, expectativas e intereses en función de dichas formas de producción y de la grotesca e inequitativa repartición de la riqueza. En ello, la educación juega un papel preponderante.

Es apremiante repensar sobre el derrotero de nuestra existencia, sobre los fundamentos filosóficos, la ideología y las formas de actividad humana que nos han conducido a la situación actual, los procesos educativos, en la que el dominio de algunos grupos sobre la humanidad y el mundo, pone en peligro la dignidad de la existencia del hombre en su conjunto y de la misma *tierra* - *fisis* que es “aquello sobre y en lo que el ser humano funda su morada” (Heidegger, 1997:35).

La enseñanza de la matemática como se lleva a cabo desde siglos atrás - derivada de la matematización del mundo, cuyo principio esencial lo configura, el principio de identidad-, constituye un factor determinante de la visión occidental dominante en la llamada modernidad.

Un elemento fundamental de dicha modernidad está puesta de manifiesto por Descartes, al afirmar que por medio del conocimiento racional dibujado desde el sujeto, el hombre sería capaz de hacerse amo y poseedor de la naturaleza (Frank, 1996:127), meta que se lograría a través de un pensamiento racional, y por consiguiente matemático. Con Descartes toma impulso el pensamiento racional, lógico, matemático

En los procesos educativos, se violenta cualquier forma de pensamiento ajena a dicho proyecto, mientras que por el contrario se privilegia su seguimiento.

Los mecanismos para garantizar su seguimiento son múltiples: organización y determinación de los contenidos a revisar curricularmente, los modos disciplinarios, el diseño de los exámenes y formas de evaluación, dentro de la normatividad institucional. Este control se extiende a otros ámbitos: Un caso ejemplar se refiere a la medición de la inteligencia, en la medida en que las pruebas diseñadas para este fin privilegian fundamentalmente un pensamiento lógico, en donde en términos generales resaltan aspectos cuantitativos. Estos instrumentos son, en muchos casos determinantes para establecer las posibilidades de las personas para integrarse al campo de trabajo y a las instituciones educativas, para decidir si son o no objeto de intervención clínica o educación especial, si son o no aptas para cualquier actividad laboral, educativa, clínica, etc. Así podríamos señalar que cuando se habla de la persona más inteligente del mundo evaluada por centros reconocidos mundialmente se manifieste la supremacía del pensamiento lógico.

Consideramos que, los estudiantes pueden resistirse a pensar sólo en términos lógicos, de ahí que este trabajo se proponga como tesis fundamental que los problemas que se aluden en el aprendizaje de las matemáticas, no son en realidad un problema, sino la resistencia de los jóvenes y niños a restringir su pensar a una única manera, es decir a un pensamiento lógico formalizado. Los estudiantes, pueden pensar de múltiples maneras, por ello se oponen a las exigencias normativas que implica la enseñanza de las matemáticas, es decir, a asumir sin más dicho proyecto matemático.

En los espacios educativos se pretende justamente formar a las nuevas generaciones en función de un ideal racional, en donde el pensamiento lógico es uno de los baluartes a seguir en dicha formación y en esta visión la perspectiva constructivista piagetiana ha contribuido en gran medida, sin embargo cabe preguntarse si esta lectura, tanto del desarrollo del pensamiento, como de ser en el mundo es sólo *la* manera de pensar y ser, o cabrían otras posibilidades. Por ello en el siguiente capítulo se abordarán las implicaciones y el trasfondo de la perspectiva psicogenética y algunas críticas formuladas desde el enfoque de la educación crítica de la matemática y del posicionamiento de Walkerdine (1995) en torno a esta postura.

CAPÍTULO CUARTO

EL CONSTRUCTIVISMO Y EL PRINCIPIO DE IDENTIDAD EN LA NORMALIZACIÓN DEL PENSAMIENTO.

Hemos mencionado en capítulos anteriores que la perspectiva psicogenética no sólo ha tenido gran influencia en la planeación de los currículos escolares en diversos niveles educativos en nuestro país, sino que también ha sido una postura teórica que ha permitido fundamentar una visión moderna de ciencia en las instituciones educativas. Lo cual ha impulsado una forma particular de concebir el desarrollo del intelecto, y por consiguiente ha generado una propuesta de "naturaleza humana". Dicha naturaleza, se dice desde esta perspectiva, lograría su culminación al lograr un pensamiento formal, lógico, racional, hipotético deductivo.

Piaget (1896-1980) fundador de esta perspectiva, aborda la historia y génesis de diferentes áreas del saber científico y propone una teoría muy estructurada que se irradia a cuando menos dos campos: a la epistemología, generando la denominada "epistemología genética", y a la psicología, surgiendo así lo que se designa como psicología genética o constructivismo.

El trabajo de este prolífico investigador está enmarcado en un período posterior a la 1ª Guerra Mundial, así como durante y después de la 2ª Guerra Mundial, este contexto es decisivo en su obra. Estos acontecimientos y su formación como biólogo, marcan la naturaleza de sus investigaciones y propuestas. Por un lado, la búsqueda de la racionalidad para evitar la barbarie, representada por la guerra y, por otro, los fundamentos biológicos que extrapola al plano cognitivo. La guerra constituía para Darwin y Lamarck una consecuencia inevitable de la lucha por la supervivencia, mientras que Piaget consideraba que podría ser evitada mediante una racionalidad naturalizada y el amor platónico (*caritas*). Pensaba que la inteligencia y la razón podrían ser las que llevarían al hombre al control de sus pasiones (Walkerdine, 1995:113). Para Piaget la educación es decisiva en esa nueva conformación de individuos.

4.1. La necesidad de la educación y la pedagogía para dirigir el pensamiento.

Desde el punto de vista de Piaget, el hombre en la actualidad no se encuentra totalmente adaptado a las condiciones sociales imperantes

> No entendemos ni moral ni intelectualmente el mundo actual. Aún no hemos encontrado el instrumento intelectual que nos sirva para coordinar los fenómenos sociales, ni la actitud moral que nos permitirá dominarlos con la voluntad y el sentimiento (Piaget, 1985b:73)

Por ello, esta incomprensión debe considerarse como un "hecho fundamental" para empezar a construir una educación que lleve al hombre a una adaptación más acorde a las condiciones histórico-sociales (Piaget, 1985b:73).

Lo anterior sería posible gracias al instrumento intelectual constituido por el razonamiento científico ya que la ciencia "es una de las más logradas adaptaciones del espíritu humano y una victoria de la razón sobre el mundo material" (Piaget, 1985b:74), ello implicaría una manera de pensar diferente sobre el mundo, no sólo un nuevo hábito ni una creencia

A partir de lo anterior se pone en evidencia lo que Horkheimer y Adorno (2004) han caracterizado como postura moderna, en el sentido de la búsqueda del hombre por el control de sí mismo y del universo, en donde la herramienta fundamental sería la razón realizada a través de la ciencia.

Sin embargo, señala Piaget

> ...el obstáculo esencial que se opone al progreso de la coordinación intelectual y a la reciprocidad moral no es otro que la actitud más espontánea y más inseparable de cualquier conciencia individual e incluso colectiva; es el egocentrismo, intelectual y afectivo, anclado en cada espíritu en la medida que es más primitivo y aún no descentrado por las interacciones sociales; y es el sociocentrismo intelectual y afectivo, que reaparece a su vez en cada unidad colectiva en la medida que de nuevo no se consigue efectuar una descentración necesaria....esta liberación indispensable en relación al "yo" y al "nosotros" exige incluso un esfuerzo intelectual y moral considerable, a veces una especie de heroísmo. (Piaget,1985b:75)

Lo anterior implicaría que el hombre tendría que luchar contra su egocentrismo, intelectual y afectivo, así como contra el sociocentrismo, esta lucha se daría en el campo de la educación.

Así, en el análisis que hace sobre el artículo 26 de la Declaración Universal de los Derechos del Hombre, en lo que se refiere a "apuntar al pleno desarrollo de la personalidad humana y a un refuerzo de los derechos del hombre y de las libertades fundamentales" Piaget (1985b:71) lo interpreta como lograr la descentración del individuo para permitirle desechar su egocentrismo primitivo –tanto en el plano intelectual como moral- y así llevarlo a "la reciprocidad [con el otro] y "(lo cual es prácticamente un sinónimo) a la *objetividad*[9]" (Piaget, 1985b:71) Una forma de lograrlo sería a través de una educación libre para accionar y [re]construir el conocimiento.

La educación se convierte así en un proceso imprescindible en la formación de la personalidad humana, que llevaría al niño a una descentración paulatina, hasta lograr un pensamiento intelectual potente, cuyos rasgos fundamentales implicarían el ser lógico, hipotético deductivo, característica esencial del pensamiento científico, y éste a su vez como lo más logrado de la humanidad.

Ahora bien, esta educación no debería ser coercitiva, verbal, expositiva, como describía Piaget a la educación tradicional, sino activa, cuya finalidad sería el formar científicos. Señalaba que la educación vigente no propicia el que una buena parte de los estudiantes elijan carreras científicas, por tal motivo plantea la necesidad de reestructurar la enseñanza. Dicha reestructuración cuestiona no solamente la manera de abordar la enseñanza científica, sino otras áreas más generales como el papel de la enseñanza preescolar, la utilización de los conocimientos psicológicos adquiridos, el carácter interdisciplinario necesario de las iniciaciones en lugar de la atomización imperante en la educación tradicional. (Piaget, 1985b:92)

---

[9] La cursiva es mía con la intención de resaltar lo que en incisos más adelante se abordará como la posibilidad para este autor de lograr, si bien no la objetividad, si un proceso de objetivación, en función de una postura materialista.

Cabe reasaltar la importancia que concede este autor al desarrollo de los conocimientos psicológicos logrados en la nueva educación.

> “Es por ello que la proclamación de un derecho de la persona humana a la educación implica, si se tiene la voluntad de darle un significado que supere el nivel de las declaraciones verbales, la utilización de los conocimientos psicológicos y sociológicos de que disponemos acerca de las leyes del desarrollo mental y la elaboración de métodos y técnicas ajustadas a los innumerables datos que estos estudios ofrecen al educador” (Piaget, 1985b:pág. 18)

Los métodos activos no tienen, desde su punto de vista, otra posibilidad que no sea el considerar la historia de las ciencias, es decir, la generación del conocimiento a través de la invención o la reconstrucción por invención, sólo de esta manera, señala, se puede pensar en individuos que sean capaces de crear y producir y no sólo de repetir (Piaget, 1985b:98)

Desde el punto de vista de Piaget, con la enseñanza tradicional esto no se puede lograr porque involucra necesariamente prácticas de sumisión y obediencia, no del ejercicio pleno de las libertades del niño. Afirmando que es más un ritual anclado en el pasado.

En contraste, los métodos denominados “activos” serían los *únicos* aptos para desarrollar la personalidad y el intelecto. Éstos requieren un ambiente colectivo que propicie intercambios intelectuales organizados y a su vez constituyan un elemento esencial de la formación moral (Piaget,1985b:55)

> ...Únicamente una vida social entre los mismos alumnos, es decir, un autogobierno llevado lo más lejos posible y que sea paralelo al trabajo intelectual en común, conseguirá el doble desarrollo de personalidades dueñas de sí y de su mutuo respeto. (Piaget, 1985b:57)

En las comunidades en donde existe el autogobierno por parte de jóvenes, señala Piaget, se evidencia la posibilidad de encontrar nuevas maneras de ser, ya que se ha observado que en ellas priva una atmósfera de libertad, afecto y responsabilidad autónoma y no de obediencia característica de las escuelas tradicionales (Piaget, 1985b:58)

En el plano intelectual, estos métodos propiciarían en el niño el hacer funcionar la razón por él mismo y permitiría construir libremente sus propios razonamientos. (Piaget, 1985b: 45)

Ante esta declaración surge de nuestra parte un señalamiento acerca de la propuesta piagetiana en torno a dos aspectos, el primero se refiere a la dinámica de intercambio entre estudiantes, sugerencia que tiene su fuente en la revisión de diversas experiencias (el autor cita *Le self-government á l'école*, y Le travail par équipes á l'école. Bureau international d'Education, entre otras), y el segundo en relación a su propias investigaciones. La sugerencia indica la necesidad de propiciar un ambiente libre tanto a nivel social como intelectual en la construcción del conocimiento, en donde el profesor tiene un papel esencial como…

> animador para crear las situaciones y construir los dispositivos iniciales susceptibles de plantear problemas útiles al niño, y además para organizar ejemplos contrarios que obliguen a reflexionar y a controlar las soluciones demasiado precipitadas......sería absurdo pensar que sin un proceso de dirección referente a la toma de conciencia de las cuestiones centrales el niño pueda planteárselo claramente por su cuenta (Piaget, 1985b:95)

Y más adelante continua señalando que el papel de la enseñanza "moderna", sería el hablar el mismo lenguaje del niño y favorecer que éste "invente de nuevo" el conocimiento logrado por la humanidad.

Lo anterior nos lleva a los siguientes cuestionamientos: la libertad a la que alude pareciera no ser tal en la medida en que la presencia del educador se torna necesaria para guiar a los educandos a un punto particular, y no hacia cualquier punto, la meta deseable sería, por un lado, reconstruir el conocimiento científico y por otro la formación del pensamiento hacia un pensamiento científico y no otro tipo de pensamiento. En segundo lugar queda implícito que el conocimiento logrado sólo tiene una posible forma de reconstrucción, es decir, que si se dejara en libertad a la actividad intelectual de los niños y jóvenes, permitiendo la manipulación concreta y mental sobre ciertos objetos, éstos tendrían necesariamente que reconstruir dicho conocimiento. Ante la advertencia de la imposibilidad de la reconstrucción por parte de los estudiantes de manera independiente, se impone la participación del educador para guiar hacia ese camino, impidiendo, tanto otros caminos para su consecución, como el arribo a verdaderamente nuevos conocimientos, Así lo que parece querer evitarse con la enseñanza tradicional, aparece nuevamente, aunque en otro nivel: si bien no se reproduce de memoria, no se repite lo que se enseña de manera verbal; y a pesar de que se experimenta, se participa activamente para reproducir dichos conocimientos logrados de antemano, el resultado esperado sería conocer lo ya conocido.

Por otra parte, es pertinente mencionar que la valoración que hace Piaget sobre el conocimiento científico, racional, no deja lugar a dudas sobre que éste *es* el conocimiento por excelencia, dejando fuera cualquier otra posibilidad de conocer. Sin embargo como se expuso en el primer capítulo, no cabrían aseveraciones de esta naturaleza como absolutas y debiéramos considerar tal afirmación desde su procedencia histórica concreta, y en el contexto del pensamiento en el cual se desarrolló el trabajo de este gran investigador.

Podríamos señalar entonces que una de las ideas centrales de la obra de Piaget es la importancia de la educación como formadora de personalidades, en la cual la educación racional está en estrecha relación con la postura sobre el desarrollo mental. En donde el conocimiento de dicho desarrollo se vuelve imprescindible para determinar la naturaleza y características de la educación. Parece obvio que Piaget estaría pensando entre otros, en el conocimiento derivado de su trabajo en torno al desarrollo mental.

> En resumen, ya se trate de una educación de la razón y de sus funciones intelectuales o de una educación de la conciencia moral, si el "derecho a la educación" implica que ésta apunte "al pleno desarrollo de la personalidad humana y a un refuerzo del respeto por los derechos del hombre y por las libertades fundamentales", es importante comprender que un ideal de este tipo no puede alcanzarse con cualquiera de los métodos corrientes: ni la autonomía de la persona, que supone este pleno desarrollo, ni la reciprocidad que evoca este respeto por los derechos y las libertades del prójimo, pueden desarrollarse en una atmósfera de autoridad y de coacción intelectual y moral; ambas reclaman imperiosamente, por el contrario, para su misma formación, la experiencia vivida y la libertad de investigación fuera de las cuales la adquisición de cualquier valor humano no pasa de mera ilusión. (Piaget, 1985b:68)

Cabe abordar entonces la concepción que plantea Piaget en torno al desarrollo intelectual.

4.2. La metáfora del desarrollo intelectual.

La concepción de desarrollo mental que propone Piaget, parte de la asignación de una doble naturaleza de la inteligencia: biológica y lógica. Así mismo puede concebirse esta perspectiva como estructural funcionalista, ya que considera una continuidad funcional en la medida en que toda conducta, tanto interior como exterior constituye una adaptación, o mejor dicho, una readaptación al medio, a través de equilibraciones sucesivas y una discontinuidad estructural, ya que los intercambios con el medio implican una "forma o una estructura determinante de los diversos circuitos que se establecen entre el sujeto y los objetos" (Piaget, 1977a:15). Estas estructuras en relativo equilibrio, serían los estadios (sensoriomotriz, preoperacional, operacional concreto y operacional formal) mediante los cuales el individuo opera con y en el medio. (Piaget, 1977a:14-17, Piaget, 1988)

De esta manera la inteligencia quedaría definida como:

> El estado de equilibrio hacia el cual tienden todas las adaptaciones sucesivas de orden sensomotor y cognoscitivo, así como todos los intercambios asimiladores y acomodadores entre el organismo y el medio. (Piaget, 1977a:21)

Piaget asume que su propuesta es una teoría operatoria de la inteligencia en la cual:

> Las operaciones intelectuales cuya *forma superior es lógica y matemática*[10], constituyen acciones reales, bajo el doble aspecto de producción propia del sujeto y de una experiencia posible sobre la realidad... [Las operaciones] lejos de ser estáticas y dadas desde el principio, son móviles, reversibles y no se encierran en sí mismas, sino al término del proceso genético a la vez individual y social que las caracteriza (Piaget, 1977a: 26)

A partir de esta cita se pone en evidencia el punto culminante al cual el desarrollo intelectual apuntaría, es decir, a una *inteligencia lógica y matemática como forma superior de las operaciones intelectuales*.

Una acción se vuelve operatoria cuando "dos acciones del mismo tipo pueden componer una tercera acción que pertenezca todavía al mismo tipo, y

[10] Cursivas mías.

estas diversas acciones pueden invertirse o dar vueltas del revés" (Piaget, 1988:76)

El desarrollo es concebido por este autor como una progresiva equilibración que va de un estado de menor equilibrio a uno de equilibrio superior más flexible, un "equilibrio móvil".

Así entonces, el desarrollo del intelecto comenzaría con periodo sensoriomotor caracterizado por un egocentrismo inconsciente, es decir, podríamos caracterizarlo como un pensamiento difuso, en los cuales no hay en un primer momento un reconocimiento ni del mundo exterior, ni interior. Posteriormente se lograría un pensamiento mágico, para desembocar al término de este periodo en un pensamiento intuitivo culminando esta fase con la construcción cognitiva de un mundo objetivo (noción de objeto permanente NOP), y el reconocimiento tanto del mundo exterior e interior como tales.

El siguiente periodo denominado preoperacional partiría de un pensamiento intuitivo para al término del mismo lograr un pensamiento lógico, y lograr el siguiente estadio nominado operacional concreto, esto es, el niño sería capaz de realizar operaciones que implicarían reversibilidad, esta etapa se desarrollaría en varios aspectos durante la infancia hasta llegar a la adolescencia marcando el periodo de las operaciones formales, caracterizado por la iniciación del pensamiento formal, es decir hipotético deductivo, cuyo rasgo esencial es arribar al grupo de reversibilidades (INCR), en dicha etapa se constituiría la culminación del desarrollo del intelecto, es decir de la estructura mental más flexible, móvil y estable que le permita al individuo lograr su adaptación al medio, de manera racional y con ello al control de su egocentrismo intelectual y afectivo (Piaget, 1988)

Con respecto a esta posición Walkerdine (1995) ha señalado de una manera profunda y documentada los fundamentos que permiten el surgimiento de esta teoría y señala que al ser una práctica discursiva, marca la pauta, tanto para recortar la visión en torno al niño, como al imponer una forma específica de generar una practica educativa, la cual produce el tipo de sujeto que fue instaurado por la misma teoría.

El problema central desde el punto de vista de Walkerdine estriba en la premisa implícita de asignar algunas capacidades en “el interior” del niño, y con ello orientar el estudio al dominio de la psicología, desplazando el aspecto social y contextual a un segundo plano. En la lectura de la psicología del desarrollo, las investigaciones evolucionistas de Darwin tienen una importancia crucial, en la medida en que se considera que los niños humanos pueden ser estudiados y analizados de la misma manera que otras “especies”, fundamentando la idea de “desarrollo del niño natural”

Zapata (2003) por otra parte expone, que en el campo de la psico/pedagogía la metáfora del desarrollo, en lo que denomina la *metáfora evolutiva*, propia de las psicologías del desarrollo, representa el relanzamiento de la naturalización del desarrollo en el plano cognitivo. Esta metáfora evolutiva se refiere al…

> artilugio que lleva a suponer la necesidad de paso del ‘pensamiento precientífico’ al ‘pensamiento científico’. De ahí que la formación de conceptos, como función cognitiva se presente, según la psico/pedagogía sociocultural e histórica, por una parte, y por la constructivista, por otra, fuertemente entrelazada con el argumento que señala la necesidad de la evolución del pensamiento hasta que funcione lógica, coherente, racionalmente. (Zapata, 2003:57-58)

Walkerdine y Zapata coinciden en que la psicología del desarrollo pro-pone como axiomática la existencia del desarrollo psicológico de los niños como un fundamento de verdad, “empíricamente demostrable”, cuando la demostración se refiere a una artefactualización para hacer visible tal propuesta.

> [Así]... la psicología del desarrollo y la pedagogía centrada en el niño forman un binomio: los aparatos de la pedagogía no son meras aplicaciones sino un lugar de producción por derecho propio (Walkerdine, 1995:91)

Walkerdine (1995) presenta una argumentación para dar cuenta de las condiciones que hicieron posible la clasificación y regulación del desarrollo en tanto ciencia y pedagogía validada científicamente, las cuales hacen posible el surgimiento de la propuesta piagetiana. Estas condiciones las encuentra en primer lugar en la escuela en tanto aparato de regulación y clasificación, originada como una necesidad ante el surgimiento de grupos sociales marginados, los cuales representaban un problema de control social y político a comienzos de la revolución industrial. En segundo lugar en las formas concretas de regulación y clasificación establecidas en la psicología a través de la medición mental, lograda con la elaboración de los artefactos estadísticos a principios del siglo XX que permitirían la producción de normalización.

> … es importante anotar que la transformación en la forma de regulación pedagógica fue simultáneamente una transformación discursiva y una transformación de aparatos y prácticas: un nuevo régimen de verdad incluía un campo de administración. Y la psicología penetró por primera vez en el escenario pedagógico, relacionada con la nueva forma de regulación producida científicamente (Walkerdine, 1995:102)

Así el trabajo de Piaget surge en una época en la que se creía en el progreso a través de la ciencia, de la racionalidad y en donde la libertad tiene un valor fundamental. La libertad desde el punto de vista de Piaget es entendida como la posibilidad de reconstruir el conocimiento (científico) y tener las condiciones para arribar a un pensamiento lógico formal, que llevaría a los ciudadanos a relaciones más solidarias y filiales. Sin embargo, en su perspectiva, se asumiría implícitamente que habría una sola dirección en el pensamiento y un camino en la construcción del conocimiento científico, y por ende la libertad paradójicamente estaría acotada. El trabajo de Piaget surge igualmente en el marco de una tradición en la cual el desarrollo infantil normalizado y biologizado estaba cimentado y avalado científicamente. También aparece en una época en la que se desatiende la mirada hacia la dinámica social propiciadora de las condiciones de desventaja de ciertos grupos, centrando el interés en lo individual, en lo psicológico, lo que implica descuidar las formas de producción que originan las problemáticas sociales, mismas que dieron lugar al surgimiento de la planeación social mediante la educación.

4.3. La lógica, elemento necesario en el discurso constructivista.

No se podría caracterizar el desarrollo concebido por Piaget, sin aludir a la importancia que este autor otorga a la lógica. En esta perspectiva la lógica es considerada como un resultado de los procesos constructivos en el niño, y no determinada de manera innata, lo cual explicaría muchos de los hallazgos experimentales en torno a la necesidad lógica identificada por parte de los niños a partir de ciertos estadios y no en otros (Piaget, 1985b:14). Por tal motivo este investigador plantea que el derecho a la educación, conllevaría al derecho a "estar situado, durante su formación, en un ambiente escolar tal que consiga elaborar hasta el fondo los instrumentos indispensables de adaptación que constituyen las operaciones de la lógica" (Piaget, 1985b: 15)

Piaget afirma que la lógica está en la base misma de la matemática, y es también el producto de la reflexión. Así entonces para este autor, la relación entre la lógica, la psicología y la matemática es muy estrecha. Siguiendo a Piaget, la lógica es el "espejo del pensamiento" es una "axiomática de la razón, mientras que la psicología de la inteligencia es la ciencia experimental correspondiente" (Piaget, 1977a:37), es decir, la lógica representa el modelo construido para mostrar la forma en la que opera el pensamiento; la axiomática es el esquema de la realidad, por tal motivo representa el modelo de la inteligencia misma. En cuanto que la lógica ha constituido un lenguaje propio, libre de las imprecisiones del lenguaje verbal, se asume como logística, un lenguaje que comparable al de las matemáticas, se transforma en una técnica axiomática. "Los principios lógicos son el producto de un esquema teórico formulado inmediatamente, una vez construido el pensamiento, y no el producto de esta construcción viviente." (Piaget, 1977a:41). Ello quiere decir que la lógica conocida no es propiamente el sustento del pensamiento, sino que el pensamiento en tanto proceso constructivo, va generando modelos de su propia reflexión constituidos por los principios lógicos, los cuales además de permitirle reflexionar sobre su propia creación establecen la posibilidad de modelar la realidad misma.

> La técnica logística no aporta pues solamente un lenguaje preciso, es esencialmente un método de pensamiento y reflexión: es el único método que garantiza el análisis reflexivo contra la especulación, es decir justamente, contra esa forma de pensamiento incapaz de evitar las trampas del lenguaje corriente (Piaget, 1971:46).

Tal axiomática supone una construcción proactiva anterior, por ello sólo cabría en tanto toma de conciencia. (Piaget, 1999: 229)

Piaget al tratar la relación entre la Psicología y la Lógica señala a esta última como "...la teoría formal de las operaciones del pensamiento" (Piaget, 1971:30). Más adelante argumenta que la lógica clásica "...Al enunciar los 'principios' de lo verdadero, no contradicción, identidad y tercero excluido, los formuló no a título de axiomas de partida de una construcción formal autónoma, sino como 'hechos normativos' observados en la conciencia individual o colectiva" (Piaget, 1971:34). Con ello se afirma que dichos principios son un producto generalizado por parte de la humanidad, dando por hecho la existencia de formas de proceder del pensamiento del "hombre".

Así entonces la educación debe concebirse como el proceso mediante el cual el individuo debería acceder a un pensamiento operatorio formal, con ello nuevamente se pone en evidencia el objetivo de lograr individuos cuyo pensamiento sea racional, lógico, hipotético deductivo que es el que representa el último peldaño del desarrollo intelectual.

4.4. La identidad que no puede ser idéntica a sí misma.

Uno de los principios lógicos por excelencia se refiere al principio de identidad. Al realizar los diversos experimentos sobre la identidad, reportados en el texto *Epistemología y Psicología de la Identidad*, Piaget y colaboradores (1985a), parecen aceptar sin más la existencia y validez de dicho principio lógico, pero no de manera natural o innata, sino que dicho principio, desde su punto de vista, se va construyendo genéticamente por reestructuraciones operatorias, hasta asumir sin más que la identidad subyace también en la conservación cuantitativa, sin ser equivalentes.

En tanto que la identidad está en función de cualidades directamente accesibles a la verificación, la conservación implica relaciones cuantitativas que deben ser construidas mediante acciones, y a través de las acciones sobre las acciones, por tal motivo existe entre ambas una "verdadera integración", de tal modo que la conservación sigue siendo irreductible a la identidad. (Piaget, 1985a). Este "desarrollo" se da de manera semejante al de las operaciones lógicas, (clasificación, seriación, entre otras), de las cuales da cuenta en diversos textos (Piaget e Inhelder, 1991, Piaget y Szeminska 1996).

Con tal línea de pensamiento indica que el primer indicio de identidad lo constituye la Noción de Objeto Permanente, que posteriormente y en función de nuevos esquemas de acción y del desarrollo de ciertas estructuras se transformará en conservaciones operatorias lo cual permitirá un nivel superior en la formación de la identidad.

> "Luego la permanencia del objeto es quizá la primera forma de identidad que se desprende de la acción, o mejor dicho, que es otorgada por la propia acción y sus esquemas a un objeto que puede servirle como punto de aplicación" (Piaget, 1985a:36)

Piaget define a la identidad cualitativa del objeto como el reconocimiento de que…

> un objeto permanece idéntico si sólo cambia *x* o *y* mientras que *a*, *b* y *c* permanecen invariables, pero según los casos ya no se lo afirmaría si *x* cambia y se lo dirá todavía si son *a* o *b* los que se modifican. (Piaget, 1985a:24).

En esta cita encontramos ya una apertura a las vicisitudes que conlleva dicho principio, ya que al establecer que, "un objeto es idéntico si sólo cambia *x* ó *y* mientras que *a*, *b* y *c* permanecen invariables", parece subyacer la idea de que se tiene un consenso invariable acerca de cuáles serían los atributos *x* e *y* (variables), y *a*, *b*, o *c* (invariables), sin embargo no se declara como afirmación absoluta al poner de manifiesto la siguiente parte de la cita "*pero según los casos*[11] ya no se lo afirmaría si *x* cambia", es decir lo que se consideraba una posible variante, es ahora un elemento para señalar la no identidad; "y se lo dirá todavía si son *a* o *b* los que se modifican", de esta manera parece quedar de manera incierta qué caracterizaría la identidad. No obstante, dicha caracterización se va estableciendo tácitamente en el desarrollo del trabajo, en cuanto parece entenderse la identidad cuando se reconoce que una "cosa" o un "objeto" es idéntico cuando cambian algunos aspectos *x* e *y*, pero permanecen iguales otros (*a*, *b* o *c*).

[11] Cursivas mías

La naturaleza de los trabajos para indagar sobre la identidad se refieren efectivamente a objetos cambiantes en alguna cualidad que podríamos considerar no sustantiva (*x* y *y* como la forma, la posición etc.) en tanto *a*, *b* o *c:* (el objeto en sí, la sustancia, el volumen, etc.), permanecen estables. La definición proporcionada por Piaget, consideramos, atiende solamente una interpretación de dicho principio, ya que dicho principio podría apuntar también en otra dirección, esto es, una cosa es igual a sí misma, sin necesidad de modificación, esto es, los trabajos sobre identidad realizados por Piaget y colaboradores se centran en objetos cambiantes y movimientos, en tanto que el principio de identidad lleva implícita la identidad de un objeto en sí mismo, sin necesidad de cambio o modificación, lo cual consideramos, no está trabajado en dichas investigaciones.

Incluso se podría afirmar que la postura adoptada en la conceptualización de la identidad implica una postura "esencialista", en la medida en que los investigadores asumen que un objeto, planta o humano es "lo mismo" aún cuando algunos elementos "no esenciales" como la forma, distribución, localización, etc., pueden alterarse sin cambiar el objeto, aún en casos, como por ejemplo el de la vela que se consume, el ser humano en crecimiento, o gotas de agua que se escurren o combinan con otras, fenómenos en los que se podría cuestionar la "identidad" (Deutsch, 2002).

El trabajo de Piaget y colaboradores se ubica fundamentalmente en la definición referida a objetos que cambian en algún aspecto "no esencial", mientras que conserva los atributos "esenciales", tanto en objetos u organismos, como en movimientos. Con respecto a los objetos, las modificaciones podían ser reversibles (por ejemplo un alambre en forma recta y curva) o irreversibles (un vela consumiéndose, el crecimiento de una planta, del propio niño o del experimentador, etc.). En los ejemplos mostrados en esta obra, el objeto sobre el cual se interrogaba su identidad, cambia de forma, y en algunos casos de naturaleza (collar a perlas sueltas o la vela en cera).

A partir de la lectura de esta obra surgen algunas interrogantes acerca de la construcción misma de la identidad cuando se cuestiona sobre materiales o eventos cambiantes, ya que como indicábamos anteriormente la idea de identidad puede ser entendida en varios sentidos. Por otra parte, en algunos de los trabajos experimentales, las interrogantes se formulan en función de una representación gráfica de los materiales empleados y no con relación al material en sí, lo que implica ya una diferencia significativa.

Los trabajos de Piaget y colaboradores presentan entre sus conclusiones que la identidad comienza por ser una identidad individualizada cualitativa. Esta se refiere a la identidad reconocida en un objeto identificando las cualidades invariables perceptivas, con la desatención de las cualidades variables, para pasar a una identidad semigenérica, anclada en los esquemas de acción, esto es, lo que puede hacerse con el objeto para posteriormente arribar a una ejemplaridad conceptualizada, haciendo la aclaración de que "la identidad, incluso la cualitativa e individualizada, siempre es solidaria de sistemas de conjunto" (Piaget, 1985a:63). Cabe señalar que la identidad cualitativa sería entonces un elemento necesario para lograr las conservaciones operatorias.

Este investigador señala que la identidad cuantitativa no prosigue directamente de la cualitativa sino que involucra nuevos elementos como son: su integración a un sistema más complejo, el cual no puede reducirse a la identidad cualitativa; la reversibilidad, en donde la identidad cualitativa es un elemento necesario pero no suficiente. Así la identidad se integra a la conservación, pero esta última no es reductible a la identidad.

Se señala en esta postura que la identidad, de acuerdo con estas investigaciones no puede bastarse a sí misma, "ni encuentra su equilibrio final más que en el seno de las estructuras operatorias" (Piaget y col. 1985a: 112).

Piaget considera que el principio de identidad no es uno, sino que está en función de las operaciones alcanzadas por el niño o el joven, es un principio lógico, pero sólo a nivel teórico, ya que su correspondencia con la realidad o con la visión sobre los objetos físicos dependería del nivel de desarrollo alcanzado.

Por otra parte, si consideramos que el principio lógico es básicamente una propuesta de los teóricos de la lógica y de la matemática, el uso de este principio podría considerarse como un punto de conflicto para los estudiantes, entre su aplicación a objetos prácticos y su interpretación desde estas áreas del saber. Incluso en la intervención educativa la interpretación de la identidad de un objeto lleva una contradicción en sí misma ya que en términos generales la interpretación de dicha identidad se inclina hacia una interpretación teórica o canónica, sin relación con la realidad del niño y en otras intenta, para lograr “aprendizajes significativos”, relacionarse estrechamente con la realidad cotidiana. Lo consideramos contradictorio, ya que cuando se plantea teóricamente, puede ser interpretado de múltiples maneras, y al hacerla corresponder con una “realidad concreta” deja de tener validez teórica. Deja de tener validez teórica, considerando las propuestas de Heidegger, en la medida en que ningún objeto concreto es igual a sí mismo en el sentido de no existir un objeto concreto; la “cosa” existe en tanto es “cosa” para alguien, y sólo sería igual a sí mismo desde una formulación particular.

Si como se ha revisado en el texto, la identidad no puede ser referida de una sola manera, y esta identidad es lo menos idéntica a si misma en el transcurso del desarrollo del niño, entonces podemos hablar de un sinnúmero de identidades, y en el momento de interpretar la identidad cuando se presenta en los contenidos matemáticos, ésta se vuelve, por decir lo menos, multifacética o con varios significados. Significados que tienen que ser aportados por el adolescente para darle sentido a las contenidos revisados en clase. Sin embargo, cuando el significado está dado desde una perspectiva canónica, y sin posibilidad de diálogo para que el estudiante pueda darle sentido –lo que sucede en un gran número de casos-, termina siendo aprendido de memoria y lo que es más delicado, acallando una propia forma de pensar para apropiarse de la manera canónica expuesta en el salón de clase.

4.5. Algunas consideraciones sobre la perspectiva constructivista.

Considerando la propuesta psicogenética, se puede afirmar que existen algunas concepciones subyacentes, que si bien no se hacen explícitas, quedan en el trasfondo de sus discursos. Una de ellas se refiere a la existencia de un sujeto (fundamentalmente epistémico) y de un objeto sobre el cual acciona. Ambos, tanto el sujeto como el objeto, son dos entidades separadas, que aún cuando se encuentran en estrecha interrelación, se asumen con una existencia propia, lo cual, desde la lectura de Heidegger, como se ha mostrado en el capítulo anterior, sería artificiosa, ya que no habría tal sujeto ni objeto, no habría forma de establecer la objetividad del objeto, por tanto no habría sujeto (Heidegger, 1964:33-37).

Así mismo el discurso psicogenético parte de una posición metafísica materialista que ha sido cuestionada por posturas falibilistas y dialógicas. Skovsmose señala a la postura psicogenética como monológica:

> La epistemología genética de Piaget sostiene una interpretación monológica de desarrollo del conocimiento. Las operaciones del sujeto no son definidas en relación a otros sujetos sino como manipulaciones individuales sobre los objetos físicos. También las abstracciones reflexivas, ejecutadas por el sujeto epistémico, son aisladas (Skovsmose, 1994:204)

Este autor también señala que la postura psicogenética refina las posturas racionalista y empiricista, ya que considera que el conocimiento matemático es producido por la reflexión, ya no sobre el objeto, sino sobre la acción que el sujeto realiza sobre el objeto (abstracción reflexiva o reflexionante). Otro aspecto a considerar de la crítica de Skovsmose a la postura psicogenética se refiere a que dicha postura, de gran influencia en la enseñanza de matemáticas, particularmente a nivel primario, genera una práctica especifica, en la cual uno de los aspectos más importantes es la organización y planeación del entorno educativo para favorecer la construcción del conocimiento, omitiendo la posibilidad de observar o comprender el papel de la matemática en el entorno social y de cuestionarse con respecto a la inclusión de dichos contenidos y su forma de aproximación.

Otro aspecto a considerar se refiere a una suposición, entrañable a la Psicología, como es el *desarrollo humano*. Como señalábamos en parágrafos anteriores, la idea de *desarrollo* es una idea generada históricamente, en función, argumenta Walkerdine (1995), de elementos como la medición, y con ello la estandarización y “normalización” de aspectos psicológicos, y la caracterización del niño como objeto de estudio derivado de posturas evolucionistas, además de la necesidad del control de la población juvenil a partir de edades tempranas a través del sistema de escolarización. Esa idea de desarrollo, conveniente a la psicología científica, conlleva una concepción de niño como un ser humano en proceso de formación, inacabado, inconcluso, también equivale a pensar en una sola línea de desarrollo por la cual transitaría todo ser humano. Estas premisas se constituyen como aparatos discursivos que al pro-ponerse definen y fundan una realidad sólo legible desde las posturas teóricas en cuestión. Estos aparatos discursivos orientan el quehacer educativo por una parte, pero, por otra, también, al concebir al niño o joven, caracterizado por la teoría, impiden una verdadera relación con cada niño o joven en su propia individualidad y el reconocimiento de su infinita diversidad.

La postura de la psicología científica de la cual el discurso piagetiano forma parte, sería representante contemporánea de una visión “moderna” al afirmar que existe algo como la “naturaleza humana”, como si ésta existiera como tal y además pudiera ser independiente de quien la postulara.

4.6 El desarrollo del intelecto y las estructuras matemáticas en el discurso psicogenético.

Un elemento central en el desarrollo del conocimiento matemático, desde una postura constructivista, lo constituye la abstracción reflexiva, la cual se puede describir como la acción sobre las acciones, es decir a las coordinaciones generales de las acciones del sujeto sobre los objetos, implicando necesariamente dos aspectos: la proyección del conocimiento a un plano superior del pensamiento y la organización y reconstrucción de dicho conocimiento como fuente de nuevas estructuras, es decir “un proceso de reflexión” y un “producto de reflexión”: “proceso de reflexión” en el sentido de una proyección en un nivel superior de lo extraído del nivel precedente y un “producto de la reflexión” en el sentido de una reconstrucción o reorganización cognitiva (más o menos consciente o no) de lo que de este modo ha sido transferido.” (Piaget, 2000: 40).

La noción de abstracción reflexiva o reflexionante, es central en el discurso psicogenético en un doble sentido: en primer lugar porque no sólo se argumenta que constituye la fuente del conocimiento matemático sino que también es la generadora del desarrollo cognitivo.

De esta manera se pone en evidencia, la estrecha relación entre el desarrollo del intelecto con las estructuras matemáticas.

Piaget señala que las estructuras lógico matemáticas tienen, por un lado el mismo origen que las estructuras cognitivas, pero también que las estructuras matemáticas constituyen un modelo de las estructuras cognitivas, fundamentalmente refiriéndose a las estructuras de la matemática moderna representado por el grupo de Bourbaki. Por tal motivo, incluso, señaló que se lograrían mejores resultados en la enseñanza si en la matemática abordada en la escuela se incluyeran nociones matemáticas y físicas más próximas a las estructuras operatorias naturales, asegurando que los trabajos de investigación mostraban que los niños operaban de manera más cercana a las estructuras de la matemática moderna que a las nociones de la matemática clásica. Tal coincidencia de planteamientos aunado a las situaciones mundiales imperantes, da origen a un cambio significativo en la enseñanza de la matemática, es decir al movimiento denominado didáctica de la matemática moderna.

Así entonces, encontramos un paralelismo entre las estructuras: lógico-matemáticas y las operatorias del pensamiento. Tal paralelismo es comprensible en el sentido de que provienen de la misma fuente, la abstracción reflexionante, y porque tanto el desarrollo cognitivo como el conocimiento matemático son a su vez tanto procesos como productos de la reorganización y reconstrucción cognitiva. Por tal motivo considera que la forma superior de las operaciones intelectuales es lógica y matemática.

Esta posición relanza la afirmación de Kant en el sentido de que una ciencia sería tan autentica como haya en ella matemáticas y ratifica así, el denominado por Heidegger (1964), *"proyecto matemático"* en la configuración del mundo moderno.

De esta manera, al retomar la matemática como modelo del desarrollo del pensamiento se justifica la psicología genética en cuanto tiene como sustento las estructuras matemáticas y la “verdad” matemática, -nunca asumida como tal- queda fundamentada por la psicología genética al señalar que las “estructuras operatorias naturales” dan por resultado el conocimiento matemático. Así la matemática justifica el discurso psicogenético del desarrollo y viceversa.

Desde esta perspectiva la identidad es comprendida como un logro del desarrollo del pensamiento lógico, es decir una manifestación de la culminación de dicho pensamiento. Así la teoría psicogenética justifica y hace incuestionable la existencia y validez del principio de identidad, pilar de las estructuras matemáticas que a su vez son el fundamento de la explicación de las estructuras cognitivas.

Sin embargo, consideramos que dicha posición minimiza la parte convencional de la matemática y su origen social e histórico. Y lo que parece “natural” en la enseñanza de la matemática, es fundamentalmente convencional. Nos referimos específicamente a la definición de los principios o axiomas de los que parte la formalización, en un primer momento, pero igualmente en el manejo del lenguaje matemático en el aula, así como los procedimientos o algoritmos derivados de dicha axiomatización. Contrariamente, el proceder de la actividad matemática como creación, arte y despliegue del pensamiento, queda al margen e imposibilitado ante la concepción de la matemática formal como el mayor logro de la humanidad y por consiguiente el ideal del “aprendizaje” o “reconstrucción”.

La matematización del mundo, la formalización de la matemática, y la desmundanización de la matemática a decir de Souza da Fonseca:

> “retira al sujeto de lo social, para aprisionarlo en su estructura, en su red de conceptos, donde cualquier movimiento suyo, una vez dado el punto de partida inicial, está completamente determinado y ubicado...la matemática....se dobla ella misma y fija al sujeto en su tela...el sujeto de la matemática debe ser aislado, matematizado y desmundanizado” (Souza da Fonseca, 2005:133).

Al minimizar el aspecto convencional de las matemáticas, se pasa por alto la parte esencial de la misma, se orienta entonces a una visión absolutista de ésta, y como tal se asume el contenido matemático como una verdad que tiene que ser aprendida, con lo cual se niega cualquier posibilidad de participación de los estudiantes que no sea la reconstrucción de dicho conocimiento. Las interpretaciones de éstos son por consiguiente dejadas al margen y consideradas como “errores constructivos” necesarios en la orientación correcta de la reconstrucción del conocimiento matemático compatible con una matemática, ya no digamos moderna, sino clásica principalmente en los niveles básicos y medio superior.

Esta perspectiva teórica ha tenido una influencia decisiva en la elaboración de los planes curriculares en México a partir de la última década del siglo pasado y todavía se encuentra en una fase de expansión. En la educación primaria, los programas, textos, y documentos de apoyo entre otros, tienen una orientación expresamente constructivista. Sin embargo, la formación de profesores en esta línea ha quedado completamente desfasada de las políticas establecidas desde el gobierno a través de la Secretaría de Educación, lo cual ha generado un conjunto de prácticas muy diversas. En el nivel universitario, específicamente en la Universidad Autónoma de Querétaro esta teoría ha sido una de las fuentes de referencia para la planeación del “Modelo Educativo” que se pretende seguir en los próximos años. No obstante, al igual que en la educación básica, existe una gran separación entre los lineamientos establecidos institucionalmente y la práctica docente.

A pesar de ello un aspecto que se observa con gran frecuencia en la práctica docente es la presentación de contenidos matemáticos como verdades absolutas, en donde se consideran los principios lógicos como incuestionables y se trabaja con la pretensión de su validez y con la seguridad de que los estudiantes los asumen de manera unívoca.

Lo anterior pone de manifiesto, por un lado, el predominio en las instituciones educativas de un discurso incuestionable, es decir, el discurso matemático, y por otro, la formación de los estudiantes, no sólo en términos del contenido considerado aprehendible, sino también en la formación del pensamiento.

Considerando lo expuesto en los capítulos anteriores, se plantea que la enseñanza de las matemáticas parece estar dirigida a reproducir los contenidos matemáticos desarrollados en esa área del saber. Igualmente al interior de la práctica educativa matemática, se asumen los principios lógicos como principios incuestionables, aún cuando desde diferentes discursos filosófico-matemáticos (por ejemplo, Skovsmose, 1994, Ernest, 1994, 1996, 2004) han sido refutados como verdades absolutas, reconociendo su relatividad cultural e histórica.

Por otro lado la relación entre la lógica y las matemáticas ha sido uno de los fundamentos en la caracterización del desarrollo del pensamiento, y esta caracterización del desarrollo del pensamiento constituye asimismo la fundamentación de la incuestionabilidad de los principios lógicos.

Así entonces, se argumenta que el desarrollo del intelecto tendría su plena realización en el pensamiento lógico hipotético deductivo, y con tal afirmación se sustenta la pertinencia e incuestionabilidad de la lógica, - en la cual un aspecto esencial de la misma sería la identidad-, y, por otro lado, el reconocimiento de las estructuras lógico-matemáticas como el mayor "logro" de la humanidad.

No obstante, como se ha señalado, el desarrollo mismo puede ser considerado como una trama discursiva imperante a partir de finales del siglo XIX, que, junto con las concepciones evolucionistas y la sustentación en mediciones estadísticas, ha determinado una "normalidad" y sobre todo la "normalización del desarrollo".

La noción de desarrollo es medular en la pespectiva psicogenética, y ésta última ha tenido gran influencia en los ámbitos educativos en nuestro país.

Ante ello, la intención de los próximos capítulos es acercarse a la interpretación que realizan los estudiantes de bachillerato y determinar si existe una relación entre estas interpretaciones con el rendimiento de los estudiantes de bachillerato en esta asignatura.

CAPÍTULO QUINTO

MÚLTIPLES FORMAS DE PENSAR Y DECIR LA MATEMÁTICA.

En capítulos anteriores hemos expuesto que existen diversas posiciones con respecto al saber matemático, una de tales posiciones considera este saber como una verdad absoluta, inconmovible, e incuestionable (Ernest, 1994). De manera paralela, también existe otra postura que concibe a las matemáticas como falibles, contextualizadas y situadas culturalmente, como una forma de proceder de la humanidad para encontrar sentido en el mundo (Brown, 2002; Skovsomse, 1994).

La ciencia y la tecnología modernas, cuyos despliegues no hubieran sido posible sin la matemática, le han dado al hombre la posibilidad de “trastocar” la naturaleza, han dado origen a un mundo impensable para nuestros antepasados, una realidad que lejos de dominar o controlar, presenta cada vez nuevos desafíos, tanto para su comprensión como para la sobrevivencia del hombre, de las especies sobre la tierra y de los ecosistemas que hacen posible la vida en la tierra.

Las matemáticas han mostrado tener una influencia trascendente. De acuerdo a Heidegger, constituyen *una* manera de pensar el mundo. Sin embargo *no* pueden ser consideradas como la *única* manera de pensar, y por tanto, pueden entenderse como un fenómeno social, como construcciones culturales y por ende falibles.

A pesar de ello en el ámbito escolar pareciera darse una visión de las matemáticas como algo acabado e infalible y que éstas son únicas. Lo cual se desdibuja, y se pone en tela de juicio con los trabajos de, entre otros, la educación crítica de la matemática y de la etnomatemática, (Skovsmose, 1994,1996; Bishop, 1996, 1999; Walkerdine, 1995, Gates, 2004). Cabe señalar que, no obstante las diferentes finalidades de la educación matemática, pareciera existir un consenso universal sobre la necesidad de enseñar matemáticas “*a todos*” (Gates, 2004), y pocas investigaciones han cuestionado el trasfondo de tal “necesidad”.

Si las matemáticas son, como pensamos, una forma de interpretar el mundo y éstas no son la única manera de pensar, cabe considerar que en los espacios educativos se abrirían diversas posibilidades, sin embargo al presentarse como únicas, pareciera que se dirige a los estudiantes a continuar con esta única manera de interpretar el mundo.

Un aspecto que difícilmente se pone en cuestión en la enseñanza, se refiere al tipo de pensamiento que se genera al dar un gran peso a las matemáticas en la formación de las nuevas generaciones, a pesar de que en varias investigaciones, (Gates (2004), Skovsmose (1996), Walkerdine (1995) entre otros, se ha demostrado el carácter selectivo y discriminatorio de dicha formación.

Uno de los pilares en el pensamiento matematizado -contemporáneo – lo constituye la asunción del principio de identidad, el cual a pesar de asumirse en ocasiones como principio universal, divino o absoluto, al determinar su propia naturaleza, éste escapa de cualquier definición, y comprensión de manera universal[12].

Ante la multiplicidad de interpretaciones a través de la historia, encontramos que dicho principio no puede sostenerse de manera absoluta[13]. A pesar de las vicisitudes encontradas para establecer la identidad como un principio fundamental, ésta se ha impuesto en nuestra cultura como fuente de razón, así en el segundo capítulo, veíamos en la trayectoria Descartes- Leibnitz - Kant, cómo este principio se va enraizando primero dentro de la filosofía para situarse en el trasfondo del pensamiento moderno.

[12] Por ejemplo, Aristóteles parece interpretarlo como una expresión de la naturaleza del mundo, en tanto que para Leibnitz es una “intuición del espíritu”, para Heidegger la identidad es una identidad originaria que habla más de la “mismidad”, en la cual el ser y el pensar se pertenecen mutuamente, intentando salir de la metafísica, es decir del espacio representacional.

[13] Cabe mencionar la posición de Deutsch (2002) quien ante la imposibilidad de sostener la identidad absoluta, propone una identidad relativa, lo cual consideramos que coincide con la propuesta misma de identidad absoluta, ya que ambas parecen intentar una explicación de los acontecimientos, es decir conciben hechos susceptibles de tematización, esto es, volver a la metafísica enunciada por Heidegger.

La manera en que ello se ha posibilitado es expuesta por Heidegger, quien señala que un acercamiento a la fundamentación de las cosas, asibles mediante la razón, se encuentra históricamente situado en la propuesta kantiana. Este filósofo argumenta igualmente que a partir de "lo matemático", se propulsó el proyecto matemático de la naturaleza, permitiendo el surgimiento, tanto de la matemática moderna, como de la metafísica moderna. "Lo matemático" se fundamenta a sí mismo y se instaura como "rasgo fundamental del pensamiento y el saber modernos" (Heidegger, 1964: 77-109).

Este canon de pensamiento se ha irradiado a la psicología, particularmente es notorio en el trabajo de Piaget y colaboradores, quienes al ahondar sus investigaciones sobre la construcción del conocimiento en los seres humanos, intentan definir la identidad. Cabe señalar que la identidad abordada por estos autores, presupone implícitamente el principio lógico de identidad como una forma de pensar propia del ser humano, pero se enfrentan a su movilidad y a la dificultad de asirla. Dichos investigadores, atribuyen que la noción de identidad está asociada al desarrollo, argumentan que las variantes de la misma, están en función del desarrollo de las estructuras cognitivas y cuya culminación –identidad lógica- sería posible en la etapa de las operaciones formales, cuando el grupo de reversibilidades se haya logrado. Las variantes de la identidad, desde la propuesta psicogenética –esto es, la identidad presente en la noción de objeto permanente, la conservación operatoria, por ejemplo-, representarían una de las condiciones para el pensamiento formal y con ello, la identidad lógica.

Sin embargo, como se muestra en los trabajos experimentales realizados por Piaget y colaboradores (1985a), la noción de identidad -del objeto, del movimiento, etc.- mostrada por los niños participantes en dichos experimentos se dirige a múltiples aspectos, de los objetos o situaciones, presentados en estas investigaciones. Pareciera que estos autores consideran que se va logrando la noción de identidad en la medida en que las respuestas se van acercando a las respuestas que den cuenta de dicho principio lógico. Se argumenta que el individuo conforme se desarrolla, va alcanzando la identidad lógica, en tanto que se evalúa la misma presencia de la identidad considerando y afirmando su existencia (Piaget, et. al.1985).

Siguiendo con esta perspectiva, se esperaría que los jóvenes, a partir de las operaciones formales, asumieran de manera apropiada la noción de identidad, es decir, fueran capaces de reconocer el principio lógico de identidad. Sin embargo, cabe preguntarse ¿Qué tan evidente y asequible es en realidad el principio de identidad para los jóvenes estudiantes de bachillerato?

Desde la perspectiva psicogenética, como se ha afirmado, los jóvenes en este ciclo educativo, no tendrían dificultad para reconocer dicho principio, dado que estando en las operaciones formales, han conseguido arribar a, por ejemplo el grupo de reversibilidades, lo que conlleva necesariamente la asunción de tal principio, sin embargo, en un trabajo anterior (López, 1996) aparecen algunos indicios que ponen en duda tal construcción.

La intención de este trabajo es doble, por un lado, determinar si en matemáticas, particularmente en expresiones algebraicas, el principio de identidad (A=A) puede ser evidente y asequible para los estudiantes de bachillerato, y si éste se interpreta de manera unívoca y canónicamente o conlleva otras posibles interpretaciones, y por otro, explorar si esta aprehensión tiene relación con su desempeño en la materia.

Particularmente indagaremos en tres momentos: el primero estará referido a reconocer cómo se acercan los jóvenes a este principio en relación a objetos cotidianos, así como a su representación aritmética o algebraica. En el segundo momento tratando de aproximarnos más al contenido matemático, indagaremos sobre el principio de identidad en figuras geométricas elementales y por último, en el tercer momento, estudiaremos sobre la posibilidad de los jóvenes para reconocer la identidad de la literal (x=x) en una expresión algebraica, es decir, cuándo pueden asumir que la literal en una expresión es la misma, que independientemente del número de veces que aparece en dicha expresión o de si está acompañada de cualquier otro elemento –coeficiente, exponente o signo- la literal tendría el mismo valor, jugaría el mismo papel o rol, o tendría una relación específica con los otros elementos en una expresión dada. Como puede observarse la identidad de la literal en una expresión, puede interpretarse de diversas maneras, así “x es igual x” cuando:

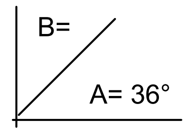
1) tiene el mismo valor numérico dentro de la expresión ($2x + 2 = 3x – 5$)
2) juega el mismo papel en la expresión: como incógnita ($x + 4 = 6x - 2$), número generalizado ($s – 5s^2$) o en relación funcional ($y = -3x$)
3) guarda la misma relación con los otros elementos de la expresión ($m+n= 5$).

La interpretación de la identidad de la literal en la expresión, por tanto no es una cuestión fácil de resolver para el estudiante, ya que tiene que considerar todas las posibilidades para decidir cuándo la literal tiene que conservar el mismo valor, y cuando tiene que cambiar dicho valor para atender al papel que juega o a la relación con los otros elementos.

La aceptación del principio de identidad, en alguna de estas interpretaciones, se torna necesaria en el quehacer escolar matemático, ya que, por ejemplo, para despejar cualquier ecuación, es necesario concebir la identidad de la literal, entendida en su valor numérico, de tal manera que ésta no puede asumir diferentes valores o funciones dentro de la expresión, ya que de ser así, no se podría operar con ella. Las reglas mismas, las leyes y postulados, dan por supuesta la identidad, sin embargo, como se mencionó anteriormente, tal identidad puede referirse a diversos aspectos y en el trabajo escolar la identidad se desdibuja de una expresión a otra, como se muestra en el siguiente registro de clase, tomado de un trabajo anterior (López, 1996:80-81):

La profesora expone el tema de los ángulos complementarios

Maestra: "Entonces, si tenemos dos ángulos complementarios y uno de ellos mide 36° ¿cuánto mide el otro? –escribe en el pizarrón:



(Aquí la profesora señala la letra B, en tres acepciones:

B = el nombre del ángulo

B = una variable en la relación funcional A + B = 90°

B = una variable como incógnita 36° + B = 90°)

En otro momento de la clase la profesora expresa:

M: "Bien, vamos a ver otro caso, ¿qué sucede si los ángulos A y B no están en grados, sino que están en función de una variable? Pero quiero saber en grados, cuánto vale. A partir de esta expresión (escribe en el pizarrón)

3x + 2x = (mientras escribe los estudiantes responden a coro "5x")

la profesora ignora esta respuesta y completa su expresión

M: "a 90°, 3x + 2x = 90° "

En este pasaje se ponen de relieve las diferentes acepciones de la literal, en este caso B, en donde los estudiantes requieren tener la flexibilidad suficiente, para identificar cuando la literal B es idéntica a ella misma y cuando deja algunas de sus características para desplazarse a otro plano en expresiones semejantes, por ejemplo de nombre a variable en relación funcional ("tenemos dos ángulos complementarios" –nombre- y uno de ellos mide 36º", – A+B = 90º, relación funcional-) y de relación funcional a incógnita "(¿cuánto mide el otro?"- 36º + B = 90º). El pasaje anterior muestra la variabilidad de acepciones de una literal en el discurso de la profesora, lo que implica que los estudiantes deben considerar las diversas acepciones en los momentos correspondientes.

Por otra parte, es importante resaltar que la interpretación de las expresiones algebraicas está dada en función de su contexto, pero para algunos estudiantes estas expresiones algebraicas no son sólo símbolos matemáticos, sino que no dejan de ser grafías o letras. De ahí que ello pueda ser una posible explicación más de la dificultad en la comprensión del contenido algebraico, la cual se remite, al problema que consideramos más primario y que se refiere al paso de la experiencia física a un modelo abstracto, en el cual juega un papel esencial, el principio de identidad, es decir, algo concreto se simboliza como algo que sólo lo representa "A", y posteriormente como consecuencia del pensar filosófico se desprende el principio A = A.

Este es, desde nuestro punto de vista, un modo de proceder matemático, es decir, se crea algo (A), se le da una existencia en un plano discursivo, se establecen ciertas reglas para operar con ello y se asume que la realidad puede ser descrita por este modelo.

En esta forma de proceder se puede correr el riesgo de asumir que la realidad ya no sólo es modelada por dicho discurso matemático, sino que la realidad en sí misma obedece a la normatividad "matemática".

A fin de indagar si el principio de identidad es asequible e interpretado canónicamente en matemáticas por parte de los estudiantes, y si dicha interpretación se relaciona con su desempeño en matemáticas, realizamos una serie de entrevistas y cuestionarios a jóvenes de bachillerato, sobre este principio aplicado a la literal en expresiones algebraicas.

El principio de identidad aplicable a la literal, específicamente indagada en este trabajo, se entenderá como la identificación de que, una misma literal en una expresión algebraica, tendrá el mismo valor, independientemente del número de veces que aparezca en la expresión.

Advertimos que la identidad en matemáticas rebasa en gran medida esta situación, sin embargo para fines de este trabajo, nos centraremos en la limitación señalada anteriormente

Para acercarse a las interpretaciones de los estudiantes sobre la identidad de la variable, diseñamos un conjunto de actividades y materiales, que fueron trabajados con un total de 154 estudiantes de diferentes semestres de bachillerato procedentes de dos instituciones públicas del Municipio de Querétaro durante el período comprendido entre febrero de 2004 a junio de 2007[14].

Elegimos a los estudiantes de este nivel educativo porque desde una perspectiva psicogenética, estarían en términos generales en el estadio de las operaciones formales, además de que en este ciclo, los estudiantes tendrían una experiencia escolar, mínima de tres años, en el trabajo con contenidos algebraicos. Dadas estas condiciones, teóricamente, tendrían la posibilidad de interpretar de manera canónica el principio de identidad, sin embargo, de acuerdo a nuestra perspectiva, cabría interrogar sobre dicha interpretación.

Las actividades realizadas consistieron en:

1. Entrevistas acerca de la identidad, tanto en objetos cotidianos como en expresiones algebraicas
2. Cuestionario sobre la identidad en relaciones entre figuras geométricas y expresiones algebraicas: Cuestionario A
3. Cuestionario sobre el número de valores de la literal en expresiones algebraicas: Cuestionario B
4. Entrevistas con 10 estudiantes a fin de ahondar las argumentaciones esgrimidas en las respuestas al cuestionario B.

En este capítulo se presentarán los resultados relativos a las entrevistas acerca de la identidad (punto uno) y del cuestionario A (punto dos). Los concernientes al cuestionario B (puntos tres) y entrevistas sobre ese cuestionario (punto cuatro) serán descritos en el capítulo siguiente.

Exponemos a continuación los primeros resultados sobre las entrevistas en torno a la identidad.

[14] En el Anexo 1 se muestra la composición de la población estudiada, por institución y semestre

5.1 Entrevistas acerca de la identidad, tanto en objetos cotidianos como en expresiones algebraicas

En una primera aproximación con el fin de explorar la forma en la que los estudiantes interpretan el principio de identidad en objetos concretos de su entorno cotidiano, realizamos entrevistas a 15 jóvenes de preparatoria de una institución pública en la ciudad de Querétaro. Estas entrevistas hacían alusión fundamentalmente a los conceptos de igualdad e identidad, con y sin herramienta convencional de matemática. Así mismo, las entrevistas tuvieron como intención determinar si este principio es asequible para los estudiantes y si existe alguna diferencia en su aplicación a objetos concretos en contraste a su empleo al trabajar con la simbología matemática. Las entrevistas se llevaron a cabo con cinco estudiantes por cada grado de bachillerato.

Para efectuar las entrevistas empleamos un muestreo selectivo, no probabilístico, en función de los recursos materiales, humanos y temporales con los que se contó para el desarrollo de este trabajo.

Los materiales para apoyar la entrevista con los participantes fueron: dos semillas de fríjol (habichuelas), dos hojas de ficus (buscamos que tanto las semillas como las hojas fueran extremadamente parecidas), y dos lápices nuevos. Elegimos estos objetos por tres motivos: el primero considerando que fueran objetos naturales en contraposición a objetos artificiales, en los cuales se identificaran características específicas, para el caso de los objetos naturales y características más similares en los objetos artificiales, el segundo motivo fue la cercanía con la experiencia de los jóvenes y en tercer lugar por la facilidad para conseguirlos. Con estos materiales trabajamos igualmente con sus posibles representaciones aritméticas y algebraicas.

Para la realización de las entrevistas formulamos una serie de preguntas guías. A partir de las respuestas dadas por los estudiantes ampliamos el interrogatorio para aclarar la intención o el carácter de su respuesta. Las preguntas fueron las siguientes:

Preguntas guía para la entrevista:

Ante de iniciar el interrogatorio se establece un diálogo preliminar, para favorecer la relación y se anotan los datos generales.

1. *¿Tú crees que estas dos hojitas son iguales?... (*Se le muestran al estudiante dos hojas de ficus muy semejantes*)*

¿Por qué?

Esta pegunta intentó acercarse a la interpretación de la igualdad o semejanza y de preámbulo a la identidad.

2. *¿tú crees que esta hoja* (se señala una de las hojas) *es igual con esta hoja?* (se señala la misma hoja,- es decir consigo misma-).

¿Por qué?

La pregunta anterior indagó la asunción de la identidad con respecto al objeto.

3. *Esta hoja ¿será igual a ella mañana?*

¿Por qué?

Estas preguntas se realizan también cuando se muestran a los estudiantes las dos semillas de fríjol, y los dos lápices, y tuvieron la finalidad de verificar si los estudiantes podrían reconocer la identidad, independientemente del tiempo.

Después de realizar las anteriores preguntas con las semillas de fríjol, se le presentan nuevamente los dos frijoles y se escribe en una hoja en blanco un 1(uno) debajo de un fríjol y otro 1 (uno) debajo del segundo fríjol (representación aritmética)

4. *Si le ponemos a este fríjol un uno y a este fríjol uno ¿podríamos decir que uno es igual a uno?*

¿Por qué?

Se contrasta su respuesta con la primera pregunta correspondiente a la igualdad entre frijoles.

En el caso de que señale que los frijoles son iguales y por tanto 1=1, se prosigue con el cuestionario.

En el caso de señalar que los frijoles son diferentes y acepta que 1 = 1, se le interroga sobre la diferencia entre la desigualdad entre los frijoles y la igualdad existente entre 1=1.

El propósito fue el de acercarse a la distinción de la identidad entre objetos materiales y su representación simbólica.

5. Después de marcar que 1 = 1, se le interroga sobre si puede ser A = A, (ó X=X), y, si existe diferencia –representación algebraica-..

En función de la respuesta a estas interrogantes, en el caso de existir diferencias, se le pregunta para determinar el sentido de esas diferencias, con la intención de determinar la generalización que implicaba su representación algebraica.

6. *¿X = X*?

¿Por qué X = X?

¿Cuándo es diferente X de X?

Esta pregunta se formuló con el propósito de vislumbrar las posibles Interpretaciones de la identidad en su fórmula más general.

4. ¿Tú crees que eres igual a ti mismo?

¿Por qué?

5. ¿Serás igual mañana?

¿Por qué?

La intención de estas preguntas fue verificar si concebían la distinción en el uso de la identidad, con respecto a sí mismos y su normatividad en matemáticas.

Los resultados muestran que sólo una tercera parte de los estudiantes reconoció la igualdad entre objetos naturales (2 hojas o 2 frijoles), En tanto que diez estudiantes consideraron las diferencias entre los objetos, haciendo alusión fundamentalmente a características físicas y algunos a aspectos de clase o categorías funcionales. El reconocimiento de la igualdad se incrementó cuando se trataba de objetos artificiales. Cabe señalar que cuando se hacía alusión a las características físicas, éstas fueron de muy diversa índole: tamaño, color, componentes, marca, tipo de madera, etc.

Cuando interrogamos sobre la identidad de un objeto consigo mismo, la mayoría (9) respondió en forma dubitativa, como se muestra a continuación:

ENTREVISTADOR	ESTUDIANTE
¿Este lápiz es igual a sí mismo? -¿Por qué?	Angelina, 1º de Preparatoria: ....mmmmm...... como? (se le repite la pregunta) siiiiií Por que........ no hay otro como él?
Este lápiz ¿es igual a sí mismo?	Javier, 1º de Preparatoria: Como que es igual a sí mismo..... yo digo que

…tu que piensas ¿es igual a sí mismo?	por que pues........no tiene fachas, pero, es complicada esta pregunta pero... pues debe de ser..¿no?.... si no de lo contrario no sería un lápiz....
¿Este fríjol es igual a sí mismo?	Mauricio, 1º de Preparatoria: ....(no entiendo)......... (bps)........ es que......... yo creo que sí por que .... el fríjol está solo y no lo puedo comparar con otro

A partir de las respuestas dadas se pone de manifiesto que la pregunta "este objeto (fríjol/hoja) ¿es igual consigo mismo?", no es una pregunta fácil, ni habitual para los jóvenes, que implica una serie de consideraciones sobre la naturaleza de la misma pregunta.

Podemos afirmar que, a los jóvenes no les resulta tan natural hacer aseveraciones contundentes acerca de la igualdad e identidad de los objetos. Tal pareciera que atienden a múltiples perspectivas a la vez, ya que son capaces de reconocer que son iguales bajo ciertas condiciones y también diferentes en otras. De la misma manera, en lo referente a la igualdad entre dos objetos, es visible que dicha igualdad tendría que tener un punto de referencia, al no tenerla, las respuestas se vuelven imprecisas, como se muestra en los siguientes fragmentos:

ENTREVISTADOR	ESTUDIANTE
¿Estos dos frijoles son iguales?	Sara 1º Preparatoria No porque uno es más chiquito que el otro, pero lo que es, como se ve, en la misma especie de frijoles si
¿Estos dos lápices son iguales? ¿Por qué?	Javier 1º Preparatoria Si. Pues porque, a ver… se siente alguna diferencia en la goma, buen pero, en cierta forma…son iguales tienen lo mismo, pues qué más… si son iguales.
	Joab 3º Preparatoria

Estos dos lápices ¿son iguales? ¿Por qué?	No Porque no tiene la misma punta, por lo tanto no escriben igual, tiene la misma forma

De modo que cabría reconsiderar cuándo se refieren a la identidad o igualdad y cuándo a la diferencia. Lo anterior pone de manifiesto la flexibilidad con la que pudieran emplear el principio de identidad. Lo mismo podría decirse con relación al tiempo como modificador de dicha identidad:

ENTREVISTADOR	ESTUDIANTE
¿Crees que este fríjol será igual a sí mismo mañana?	Miguel 3º Preparatoria Si no lo cocinan sí, si no lo utilizan seguirá siendo el mismo fríjol
¿Crees que este fríjol será igual a sí mismo mañana?	Claudia 2º Preparatoria Si, porque no creo que cambie para mañana…porque no lo voy a utilizar

Resulta importante señalar que parece que la lógica de los jóvenes no obedece a un si o no, a un cierto o falso, sino que pueden pensar de múltiples maneras, y en función de diversas condiciones pueden aceptar de manera provisional cualquiera de ellas pero nunca de manera definitiva, lo que puede llevar a múltiples interpretaciones cuando se intenta trasladar la identidad al contenido matemático.

Al presentárseles la expresión 1 = 1 referido a los objetos, 11 estudiantes consideraron que 1 era igual a 1, en tanto que los objetos correspondientes eran diferentes entre sí:

ENTREVISTADOR	ESTUDIANTE
¿A este fríjol le puedo poner un 1? ¿Este fríjol es igual a 1? (se le muestra el segundo fríjol) ¿1 es igual a 1? ¿Entonces porque me dijiste que los frijoles no eran iguales?	Mauricio 1º Preparatoria Si Si Si Pues porque…..los frijoles no son iguales, pero en símbolo, o sea en número sí, pero… 1 si es igual a 1.

En este caso Mauricio parece tener clara la distinción entre objetos reales y su representación simbólica, así mismo aplica distintivamente el principio entre ambos. Sin embargo, algunos (4) respondieron que 1 no era igual a 1 cuando se refería a la representación de dos objetos diferentes, y señalaban que 1 no era igual a uno sino que serían dos, como se ilustra con el caso de Juan Antonio:

ENTREVISTADOR	ESTUDIANTE
  ¿A este fríjol le puedo poner 1? ¿Y a este otro le puedo poner un 1? ¿Por qué?	Juan Antonio 2º Preparatoria Si No Porque cada fríjol es diferente y entonces no le puedo poner un uno porque no son iguales, son dos.

El resultado más notable lo constituyó el reconocimiento de la identidad con relación a expresiones algebraicas (x=x). Encontramos que todos los jóvenes (15) aceptan que “x = x”, de manera automática. Pero, al indagar el por qué son iguales, 11 justifican la igualdad al señalar que son símbolos matemáticos, como se ilustra con la respuesta de Leonardo:

ENTREVISTADOR	ESTUDIANTE
¿x es igual a x? ¿Por qué?	Leonardo 2º Preparatoria Si Por la simpleza de la palabra, si, y en términos matemáticos x siempre va a ser x, como 1 es igual a 1

Otros aluden a características físicas o gráficas (4).

ENTREVISTADOR	ESTUDIANTE
¿x es igual a x? ¿Por qué?	Sara 1º Preparatoria Si, porque las dos son unas tachitas iguales Porque es la misma figura, además en las matemáticas cuando te las manejan, x es igual a…, o sea que una figura es igual a si misma.
¿x es igual a x?	Claudia 2º Preparatoria Si. Porque son iguales en apariencia

Todos los estudiantes contestaron que "x= x" ya no se sostendría cuando se hiciera algún cambio en la letra, se acompañara de un símbolo o se le agregara un valor, como se observa en los extractos siguientes:

ENTREVISTADOR	ESTUDIANTE
¿x es igual a x? ¿Por qué? Y cuando x es diferente de x	Javier 1º Preparatoria Si No lleva alguna otra especie de letra sino--- o sea, diferente letra, ya no sería lo mismo, y digo que si porque es lo mismo. Cuando lleva otra literal, o algún número extra.
¿x es igual a x? ¿Por qué? ¿Y cuando x es diferente de x?	Julieta 2º preparatoria Si Porque no está acompañada de alguna variante (sic) Cuando se le agrega alguna variante
¿x es igual a x? ¿Por qué? ¿Cuándo x es diferente de x?	Juan Antonio 2º. Preparatoria Si Porque en una ecuación matemática se puede convertir en A o en Y Cuando es empleada en una ecuación matemática, cuando por ejemplo, es negativa o positiva, aquí ya es diferente x de x

Este mismo razonamiento lo encontramos en un trabajo sobre variable algebraica (López, 1996), en el cual se muestra que algunos jóvenes, sobre todo quienes tenían un desempeño limitado en la materia, afirmaban que el valor de la literal estaría dado por el coeficiente o exponente. Situación que resulta ser un indicador de la dificultad para reconocer la existencia de la identidad de la literal.

La matemática, entendida sólo como un modelo que permite un acercamiento con la “realidad”, es algo que parece no quedar muy claro para los estudiantes, quienes parecen asumir que la “realidad” es matemática, lo cual es coincidente con una postura en la discusión filosófica contemporánea de las matemáticas que implica este planteamiento, como es la denominada descriptivista (Alemán, 2001) o absolutista, perspectiva a la que se opone la falibilista, cuasiempírica, etc.

Podemos afirmar que los jóvenes, tratándose de objetos concretos, pueden dar cuenta de múltiples perspectivas al señalar la igualdad e identidad de dichos objetos. Los estudiantes parecen entender que pueden ser iguales si se consideran ciertas condiciones, pero que son diferentes al considerar otros aspectos. Ante el caso de símbolos matemáticos parecen tener esta misma actitud, son iguales e idénticos si atienden a algunas características, pero diferirían si se refieren a otras, aún tratándose de la misma expresión. Lo anterior lleva a considerar que los jóvenes pueden distinguir la igualdad y la identidad cuando se establecen las condiciones necesarias para establecerlas, sin embargo en el manejo de las matemáticas escolares, las condiciones se multiplican, haciendo difícil aclarar en cada momento estas condiciones.

En este primer acercamiento sobre la interpretación de los jóvenes acerca del principio de identidad en objetos concretos, encontramos que algo considerado como fundamental, es decir que “una cosa sea igual a sí misma”, no es tan absoluto, en la medida en que estaría dado en función del contexto, de los aspectos que se tomen en cuenta, depende por ello del entorno en donde se enuncie.

A partir de las respuestas dadas por los jóvenes cabría la pregunta acerca de si la dificultad para reconocer la identidad estaría dada por su relación con los objetos concretos. Ello tal vez pudiera explicarse por la dificultad que representa mezclar los dos ámbitos: el real y el matemático. Para dar respuesta a dicha interrogante la siguiente indagación estuvo referida en un contexto matemático pero todavía con una relación cercana a la experiencia de los jóvenes como es el campo de la geometría.

A fin de indagar las interpretaciones que realizan los jóvenes sobre el principio de identidad, específicamente en la relación entre expresiones aritméticas y algebraicas con figuras geométricas, aplicamos el cuestionario A, el cual describimos a continuación.

5.2 Relaciones entre figuras y expresiones algebraicas.

5.2.1. La omisión de la identidad.

Para determinar cómo los estudiantes interpretaban la identidad tanto en figuras geométricas como en su representación, -aritmética y algebraica-, elaboramos un cuestionario (A), el cual estuvo compuesto por cuatro reactivos de respuesta restringida. Se trataba de determinar si podrían marcar la identidad (expresada en 1=1 ó x=x) en figuras únicas, e igualmente saber qué relaciones podrían establecer entre figuras geométricas iguales y diferentes con diversas expresiones. Ante cada reactivo solicitamos la justificación de su(s) respuesta(s).

Presentamos a continuación las indicaciones para cada uno de los cuatro reactivos que componían la prueba, las figuras y las opciones de respuesta, seguidas de un análisis de las respuestas que se esperaría dieran los jóvenes:

"A continuación se presenta una serie de figuras y a su derecha un conjunto de expresiones, tacha el inciso o incisos que correspondan a la figura, puedes marcar una o más opciones. Proporciona la justificación".

Figura 1

a. $1 = 1$

b. 1

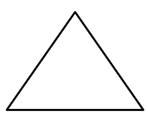
c. $x = x$

d. $x = y$

e. Otra (escríbela)________________

¿Por qué?

Figura 2



a) $1 = 1$

b) 1

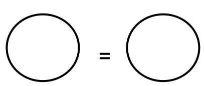
c) $x = x$

d) $x = y$

e) Otra (escríbela)_________________

¿Por qué?

Figura 3



a) $1 = 1$

b) 2

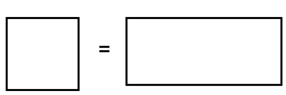
c) $x = x$

d) $x = y$

e) Otra (escríbela)___________________

¿Por qué?

Figura 4



a) $1 = 1$

b) 2

c) $x = x$

d) $x = y$

e) Otra (escríbela)___________________

¿Por qué?

Para la figura 1 esperaríamos que los estudiantes pudieran identificar las expresiones de los incisos a, b y c, como expresiones que podrían asociarse a la figura, dado que implica el reconocimiento de la identidad, por un lado, de la figura consigo misma, y por el otro, de la expresión de la identidad a través de su representación algebraica. También consideramos la o las respuestas “1 = 1” y “x = x” como indicador del reconocimiento de la identidad cuando se hiciera alusión a ésta en la justificación de dicha elección.

La sola elección del inciso b. “1” no daría cuenta de dicho principio, salvo aclaración en la justificación, ya que podría estar refiriéndose al hecho de que está dibujada sólo una raya y no más.

En el segundo reactivo, al igual que el anterior, esperaríamos que los jóvenes optaran por los incisos a, b y c, como muestra del reconocimiento de la identidad de la figura y su representación. Las justificaciones corroborarían si el joven reconocía o no la identidad.

Para el reactivo 3, supondríamos que los jóvenes señalarían los incisos a y c, con una justificación que pudiera ir en doble sentido: como identidad o como igualdad. La elección del inciso b, “2”, implicaría la ausencia de cualquiera de estas dos interpretaciones, y la selección del inciso d, “x=y”, cabría sólo con la justificación pertinente.

Para el reactivo 4, la respuesta que esperábamos era el inciso e, “Otra”, por ejemplo, x ≠ y”. La intención fue llevar a los estudiantes al reconocimiento de la desigualdad y apreciar si estaban impulsados a reconocer que ninguna de las expresiones daba cuenta de la figura.

Aplicamos este cuestionario a 40 estudiantes de 5º semestre, en uno de los planteles del Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro (COBAQ) después de que en el semestre anterior habían participado en una serie de pláticas sobre las matemáticas, su historia y utilidad así como una breve discusión sobre el principio de identidad.

Antes de abordad los resultados queremos hacer mención de algunos comentarios en trono al uso de los cuestionarios.

De manera general el análisis de un cuestionario implica describir cuales fueron las tendencias generales, y soslayar, y en algunos casos ignorar, las pequeñas diferencias, o ignorar aquellos estudiantes que “salen de la norma”. Sin embargo, consideramos que, tal vez, las respuestas de estos últimos podrían permitir vislumbrar cuál es la problemática para comprender el contenido matemático, y no nos referimos, como en el caso de Piaget a encontrar el error “sistemático” o “constructivo”, sino a mostrar toda la gama de posibilidades que se abren en la interpretación de dicho contenido. Es ahí donde, posiblemente cabe el replanteamiento de la problemática en el aprendizaje de las matemáticas, es decir, que tal vez el abanico de posibilidades de interpretación es tan amplio que dificulta abordar sin más la interpretación canónica por parte de los estudiantes. La investigación y presentación de resultados de la “generalidad” puede estar ocultando la diversidad manifiesta en la forma de acercarse al contenido matemático. Justo esta diversidad podría constituir un elemento importante para comprender la “problemática” en el rendimiento en matemáticas.

A partir de estas consideraciones presentaremos los resultados más frecuentes, en un primer momento, para posteriormente tratar de mostrar algunos de los casos particulares con respecto a las relaciones establecidas por los estudiantes entre las expresiones algebraicas y las figuras.

Los resultados son sorprendentes, en primer lugar porque a pesar de ser reactivos de respuesta cerrada, encontramos, considerando el cuestionario en su conjunto, una gran diferencia entre los estudiantes, así podríamos señalar que solamente hubo tres grupos de jóvenes –dos pares y un grupo de cuatro- que respondieron los mismos incisos, aunque las justificaciones variaban. Los restantes 36 jóvenes, respondieron de manera diferente entre sí,

Para el reactivo 1, 26 de los 40 estudiantes (65%) marcan como única respuesta la unidad, lo cual parece mostrar que una primera aproximación se refiriera a considerar como la expresión adecuada “1” para una “cosa”, “algo” en este caso una recta, sin embargo estos estudiantes no hacen referencia a la identidad, ya que en ninguno de estos casos se incluyó como posible respuesta

1=1 o x=x. Incluso sus justificaciones hacían alusión a que “no se estaba comparando con nada”, como se muestra en las siguientes justificaciones:

- *Porque es sólo una línea*
- *Porque no estas igualando nada y es solamente uno*
- *La figura no iguala nada sino solo representa una unidad*
- *Una línea recta = 1 porque sólo es una y no representa nada más*
- *Porque no se está igualando.*
- *Porque representa una sola figura y no es comparada con otra.*

Pareciera ser que estos estudiantes –salvo una[15]-, encuentran sentido a las expresiones 1=1 y x=x sólo cuando tienen dos elementos y no caben cuando se tiene únicamente un elemento, en este caso un segmento de recta. Esta situación es compatible con la lectura de Heidegger (1990), en relación a la primera interpretación de “A = A” (Ver cap. III). Estas respuestas son también coincidentes con las expresadas en las entrevistas descritas en el apartado anterior, en las cuales se argumenta que es “igual a sí mismo” porque “no se le compara con otro”. Por ello pareciera que las expresiones “1=1” y “x=x” están circunscritas a la igualdad entre dos objetos, cosas o elementos iguales, por tal motivo concluimos que la identidad no es un elemento de fácil acceso a considerar en primera instancia, y las expresiones 1 = 1 y x = x se entienden fundamentalmente como igualdad entre dos elementos.

Algunos estudiantes muestran un acercamiento a la identidad con respecto a la unidad, (1=1) pero no muestran una generalización de dicha identidad, expresada en “x=x”:

Jimena	1 y 1 = 1	Porque hay nada más una línea
Carolina	1 y 1 = 1	Hay una sola línea

[15] Cabe mencionar que una joven (Denice) a pesar de haber contestado únicamente la opción “1” parece considerar la identidad ya que expone como justificación: *“Porque es sólo una figura, aunque podría poner 1 = 1 pero para que dificultarnos más, si una ___ es sola así que opté por el 1”*

F. J.	1 y 1 = 1	Una figura hablando en cantidades es igual a otra similar
Miriam	1 y 1 = 1	Porque sólo es una figura por lo tanto sólo es una respuesta y uno es igual a una figura.

A pesar de que una estudiante marca como respuesta ”1”, “1 = 1” y “x=x”, no parece obedecer al principio de identidad en cuanto que su justificación hace referencia a la existencia de dos cantidades:

Ana	1, 1 = 1 y x = x	Los incisos mencionan dos cantidades que equivalen a lo mismo.

Otros toman en cuenta aspectos particulares de la figura como el ser una recta, en donde x = x serían los puntos en donde empieza y donde termina la recta, lo cual rompe con la expresión convencional tanto para la identidad e igualdad, como para la misma ecuación de la recta ya que el punto inicial no sería igual o idéntico al punto final. Sin embargo para algunos jóvenes esto podría ser así:

Estudiante	Respuestas ante la recta	Justificación
Alejandro	1 y Xi = Xf	Puede marcar un punto de inicio hasta un punto final, el 1 porque no se iguala nada
Brenda	1 = 1	Es algo que tiene continuidad
José	x = x	El segmento que nos presenta la figura 1; no sabemos de donde a donde termina la recta y por lo tanto “x” es cualquier número así que puede medir o terminar donde sea
Ángel	x = x	Porque es una línea

Por otra parte un estudiante mostró en su respuesta un acercamiento a la ecuación de una recta:

Benjamín	x = y	Es la que forma una línea recta

. El joven Alee parece considerar que una literal (x) sin tener coeficiente tiene el valor de 1 y por tanto para él parece que pudiera expresarse como 1=1 o x=x, que coincide con las argumentaciones mostradas por algunos estudiantes en otro trabajo (López, 1996), referidos a que la literal cuando no tiene coeficiente, o exponente vale 1:

Alee	1, 1=1 y x = x	Porque cada expresión sin algún valor corresponde a 1

Por último se podría afirmar que sólo dos de los 40 estudiantes muestran la posibilidad de expresar la identidad ante una figura determinada:

Liliana	1 y 1 = 1	Supongo que porque es solo una raya y no es igual a nada, por lo tanto es solo 1, pero también puede ser que esa figura es igual a esa figura
Sheila	1, 1 = 1 y x = x	Considero que únicamente se muestra un segmento, motivo por el cual lo relaciono con el # 1, y tomo en cuenta el signo = basándome en los principios de identidad. Este segmento (__) sólo puede ser igual a este mismo segmento.

Las respuestas de estas jóvenes hacen una clara alusión a la identidad y su representación, pero son las únicas entre los 40 estudiantes.

En relación al triángulo, sólo el 40% (16 estudiantes) marca como respuesta única la unidad. Si consideramos lo anteriormente expuesto, parece que para la mayor parte de los estudiantes se requiere tener dos elementos para comparar y no es evidente de entrada que algo pueda compararse consigo mismo. Así entonces las justificaciones para indicar que la expresión sería sólo “1” son entre otras:

- *Porque sólo es uno*
- *La figura no representa otras cantidades, no iguala nada y veo a la figura como un todo así que sólo representa 1 unidad.*
- *Porque es sólo un triángulo*
- *No especifica qué, pero a lo mejor es 1 de un triángulo*
- *Porque es sólo una figura (triángulo)*
- *Porque sólo existe el triángulo y no hay otro elemento con qué compararlo*

Posiblemente por este motivo, encontramos, en esta figura, que las respuestas que marcan como “1 = 1”, “x = x” u “Otra”, se refieran a “un lado igual a otro lado”, como se señala en los siguientes comentarios de los jóvenes:

Estudiante	Respuestas ante la recta	Justificación
Yanelit	1 = 1 y x = x	Todos los lados son iguales
Denice	x = x	Porque un lado es igual a los otros lados y así me imagino la representación de que un lado = lado, x = x
Víctor	x = x	Porque todos los lados son iguales
Ana	1 = 1, 1,y x = x	Son cantidades iguales y la figura tiene lados iguales.
Cinthia	Otra (x=x=x)	Porque siendo un triángulo equilátero, se supone que todos sus ángulos son iguales y no hay ninguna diferencia entre ello.

Otros estudiantes marcaron como opción “Otra”, haciendo alusión a la conjunción de los tres lados o ángulos, sin considerar la identidad simbolizada por las expresiones “1=1”y “x = x” como se muestra en las siguientes respuestas:

Berenice	Otra (1+1+1)	Sumados dan tres lados
Estefany	Otra (1+1+1)	Porque es un lado más otro lado más otro lado y si para mi la figura 1 vale uno, esta tiene que valer 1+1+1 para que se formen los tres lados del triángulo
Jimena	Otra (1+1+1)	Nada más hay 1 figura
Emmanuel	1 y Otra (∆ ABC)	Porque simplemente eso representa un triángulo (punto A, punto B puntoC) y el uno porque representa a un sólo elemento
Carolina	1 = 1 y Otra (1+1+1)	Porque 3 líneas conforman un triángulo
Fulgencio	Otra (x=3)	Porque tiene tres lados

Hubo dos respuestas que resultaron sorprendentes, ya que parecen involucrar la suma de incisos:

Benjamín	1=1, x=x y x=y	Creo que al juntar las tres expresiones puedes formar un triángulo
Cecilia	x = x y x = y	Con estas dos respuestas podría ser que diera la figura del triángulo

Otro estudiante –Alvaro- asigna la expresión x = y entendiendo que x correspondería a la figura e "y" a los lados.

Álvaro	x = y	Porque el triángulo tiene un valor determinado que es x y "y" depende de sus lados y ángulos

Consideramos que en el intento de encontrar una expresión que pueda representar la figura, llegan a formular expresiones que rompen con los cánones establecidos en la materia, pero que éstas no les resultan incongruentes, como son los casos de Miriam, F.J. y Esperanza.:

Miriam	Otra (3 = 1)	Porque son tres líneas que conforman una sola figura, por lo tanto 3 figuras o líneas son equivalentes a 1
F.J.	x = x	Una figura es similar a otra y no igual
Esperanza	1 y Otra (3 = 1)	Porque juntando 3 líneas se forma una sola figura

Entre los casos únicos encontramos quien no alcanzó a identificar el triángulo equilátero como tal:

Bertha	1=1, 1, x=x y x=y	Porque es un conjunto de 3 líneas o rectas formando un triángulo, que tiene dos rectas iguales y uno que no.

Por último sólo Liliana y Sheila continuaron señalando correctamente la identidad:

Liliana	1 = 1 y 1	Porque la figura sólo es una figura (triángulo y no es igual a nada aunque pudiera ser que esa figura es igual a su misma figura, así que puede ser la resp 1 y la 2
Sheila	1=1, 1 y x = x	Igual que la anterior (refieréndose a su respuesta a la figura 1

Para la igualdad entre los círculos 18 estudiantes (45%) dan dos respuestas 1=1 y x=x, indicando que puede ser una igualdad entre la unidad o entre cualquier valor. 7 jóvenes (17.5 %) marcan sólo x=x que indicaría que los círculos pueden tomar cualquier valor; 3 (7.5%) señalan la expresión 1 = 1 y dos; 5 % señalan tanto “2” como “x = x”.

Las respuestas anteriores muestran nuevamente que las expresiones 1 = 1 y x = x, son interpretadas por los jóvenes más como igualdad entre dos elementos que como la identidad de un elemento consigo mismo.

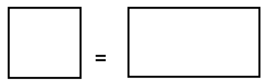
Las respuestas (de cinco estudiantes) que llamaron nuestra atención fueron las que incluyeron la expresión “x=y” entre las justificaciones que dieron se citan:

Sheila: “x=y” “Porque aunque tienen las mismas formas no son iguales (porque 1 fue diseñada a un tiempo y el otro a “otro” tiempo…por lo mismo NO son iguales
Karina: “x=y” no hay diferencia entre los dos y son iguales
F.J.: “x=y” es similar hablando en figura porque no es igual.
Alee: “x=y” porque si estuviera expresada en valores el valor o la expresión sería la misma.
Brenda: “x=y” una es igual a la otra

Entre estas respuestas observamos dos argumentos que parecen contrarios, uno de ellos manifiesta que son iguales pero pueden representarse como “x = y” (Karina, Alee y Brenda y otro en los que se asume que son semejantes pero no iguales (F.J.), y finalmente Sheila quien ya en los ejercicios anteriores había mencionado la identidad, aquí marca la inquietud por la imposibilidad de que fuera lo mismo, (por tiempo de diseño), a pesar de proporcionar diferentes argumentaciones, la expresión que utilizan es la misma (x=y).

En los resultados registrados hasta aquí, podemos observar que la identidad no es un elemento considerado de manera general al establecer las relaciones entre las figuras y las expresiones citadas. También cabe señalar que las posibilidades de interpretación por parte de los estudiantes son muy amplias y que en algunos casos muestran una clara divergencia con las normas canónicas del trabajo escolar en la materia.

La siguiente figura:



incluida en el reactivo 4, fue muy controvertida, ya que ante la igualdad entre dos figuras que no son iguales, la mayoría de los jóvenes (63%) da como respuesta “x=y”, justificada por una diferencia de tamaño entre las figuras e interpretan el signo de igualdad como una relación de cuadriláteros.

Sin embargo la presentación de este reactivo parece haber obligado a los estudiantes a proponer una expresión que involucrara la igualdad señalada. Creemos que el signo “=” en el cuestionario pudo haber sesgado las respuestas de los estudiantes, sin embargo, al atender a las respuestas en otro cuestionario semejante (López y Moreno, 2006), coinciden en señalar que la expresión “x=y” implica para los jóvenes dos cosas que se parecen o se relacionan de alguna manera pero que no son iguales, y su igualdad estaría en otro ámbito más general, por ejemplo: x (naranjas) = y (manzanas), en donde la igualdad está referida a que son frutas. Parecen, por ello, ignorar el signo igual, y atender sólo la diferencia entre las literales. Como se manifiesta en las siguientes justificaciones:

Estudiante	*Respuesta*	*Justificación*
Christian	*x= y*	*porque son distintas*
Sergio	*x= y*	*porque las figuras son geométricas y son figuras semejantes pero diferente por el tamaño y así sucede con la del inciso "x=y".*
José	*x= y*	*las figuras no son iguales y no representan cantidades, no es 1 = 1 sino x = y porque la figura "y" no es una figura proporcional a la figura "x".*
Susana	*x= y*	*porque (x) es el cuadrado y (y) es el rectángulo es como una diferencia entre una figura chica y una figura grande, obviamente no iguales.*
Alejandro	*x= y*	*Porque son diferentes en tamaño*
Daniel	*x= y*	*Son distintos y su expresión cambia*
Karina	*x= y*	*Una figura es más grande que la otra.*
José	*x= y*	*Como es diferente la letra señalada, las dos son diferentes*

		como el cuadro o rectángulo
Cinthia	x= y	Porque no son figuras iguales y por lo tanto no se pueden sumar ni dar un resultado idéntico.-
Yanelit	x= y	Uno es más grande que otro, se puede representar así
Fernando	x= y	x representa un valor distinto a la primera figura y la "y" representa un valor distinto a la figura
Esperanza	x= y	Porque si se tiene una figura te da otra más grande, o sea que si se tiene un valor inicial, el resultado es otro (¡!)

A partir de estas justificaciones podríamos pensar que los estudiantes interpretan en la expresión "x = y", no una igualdad, sino una relación de semejanza, en donde "x" representa un valor, una cantidad o una figura en tanto que "y" puede representar otra cantidad, valor o figura que se relaciona de alguna manera con "x" pero que no necesariamente es la misma, lo que lleva en algunos caso a contradicciones, como las señaladas y mayormente acentuadas en los siguientes casos:

Sheila	"2" y" x = y"	Son dos □ (aunque de diferente tamaño) y "x = y" por el tamaño.
F.J.	"1=1" , "x=x" y "x=y"	"1=1" y "x=x": hablando en cantidad son las mismas x = y hablando en figura exacta no son iguales
Denice	2, "x= y" y Otra: (1=1+1=2	Porque x = y quiere decir que obtienes un resultado diferente a x 2 porque el rectángulo de la derecha es el doble que el primer, por eso el resultado es 2
Benjamín	"2" y "x=y"	Uno de las dos es diferente y tiene diferentes medidas.
Francisco	1 = 1 y 2	Dos por dos cuadrados y 1=1, un cuadrado es igual a un cuadrado
Janet	2 y "x=y"	2 porque son dos figuras y también "x=y" porque una es mas grande que otra.
Catalina	2 y x=y	Porque son dos figuras y se representan con el número 2, pero estas figuras son diferentes la una de otra y se pueden describir muy bien con la ecuación x=y, ya que x no es igual a "y"

Pareciera que la misma forma de proceder les lleva también a una simbolización diferente (x=x) para elementos diferentes, como se muestra en las respuestas de las siguientes jóvenes:

Angela	x = x	Siguen siendo la misma figura, solo que con diferente tamaño
Laura	1=1 y x=x	Representan lo mismo aunque con diferente tamaño

También encontramos el caso de quienes consideran la cantidad como Ana:

Ana	*1=1, 2 y x=x*	*Las cantidades son iguales*

Para otros estudiantes las figuras sólo podrían ser representadas por el número dos, considerando las siguientes justificaciones:

Alee	*2*	*Porque existe una diferencia entre ellas ya que el valor cambia*
B. Monserrat	*2*	*Son dos figuras distintas*

Berenice por su parte entiende que la representación debiera ser otra, e ignora el signo de igualdad en la figura:

Berenice	*Otra (a+b)*	*La misma figura pero de diferente tamaño.*

Sólo una estudiante marca que x≠ y porque son de diferente tamaño:

Estefany	*x≠y*	*Porque no son ni del mismo tamaño ni medidas, así que no pueden ser iguales y para mi es x≠y*

Parece que los estudiantes identifican en una primera instancia la forma de la figura y sus lados y posteriormente las relaciones de igualdad o identidad.

Igualmente encontramos que la expresión “x=x” no siempre indica para los estudiantes una igualdad y aún en menor grado una identidad. Asimismo, la expresión “x=y” parece entenderse, en algunos casos, no como igualdad sino más bien como una relación de semejanza.

En particular en los grupos estudiados, se observa una influencia del entorno físico, y lenguaje común, que entra en conflicto con la normatividad de la formalización en matemáticas, en donde la identidad parece ser omitida, sin embargo si consideramos las justificaciones, encontramos que responden a un modo particular de simbolizar, en este caso las figuras geométricas, que no carecen de fundamento. No obstante en el modo de proceder matemático, estas interpretaciones quedan fuera de lo normativo.

Cabe señalar igualmente que la forma de proceder en la enseñanza de las matemáticas generalmente pasa por alto las posibles interpretaciones de los estudiantes. Asimismo, tanto en el discurso del profesor como en los contenidos incluidos en los programas, textos y apuntes, la diferencia entre igualdad e identidad pocas veces se aborda. Parece asumirse que los estudiantes han introyectado el principio de identidad sin mayor cuestionamiento y además con la flexibilidad suficiente para moverse entre identidad e igualdad en función del contexto en donde se encuentre, pero como acabamos de mostrar, los estudiantes de estos grupos revelan no sólo una omisión que pudiera ser del principio o de la necesidad de enunciarlo como $x = x$, sino también ante la expresión de igualdad ($x=y$) ya que no necesariamente la "leen" como una igualdad sino que parece ser interpretada como una semejanza, lo que se contrapone a la convencionalidad de dichos simbolismos.

Es importante resaltar que al igual que la literal puede implicar diferentes acepciones como lo hemos mencionado, incógnita, número generalizado, y relación funcional (Trigueros, Ursini y Lozano, 2000), el signo "=" también se utiliza para la identidad, para la igualdad y para la equivalencia (Kieran, 1981), es decir, no tiene un significado unívoco. Sin embargo estas posibilidades de significado generalmente se omiten en las clases de matemáticas; pareciera darse por hecho que los estudiantes podrían identificar de manera obvia cuando se refiere a un significado y cuando a otro. Por lo anterior cabe preguntarse ¿qué están entendiendo los jóvenes cuando se presentan una gran cantidad de expresiones, términos y signos algebraicos?

La interrogante surge no sólo para dirigir la atención a la gravedad del problema sino para señalar que dicha gravedad puede estar relacionada con la multiplicidad de interpretaciones que no son consideradas en el salón de clases y que además involucran diversos conflictos entre la normatividad establecida convencional, cultural e históricamente determinada y las formas de pensar el mundo y la realidad de los estudiantes.

Se podría argumentar que el contenido geométrico pudiera ser un distractor al señalar la identidad en expresiones algebraicas, particularmente en el caso de la literal y que posiblemente en un contexto netamente algebraico, lograrían tener referentes menos “móviles” y por ende reconocer con mayor facilidad la identidad de la literal en expresiones algebraicas. Una manera de responder a estas inquietudes fue la realización de una indagatoria en un contexto propiamente algebraico.

Así entonces, con la intención de indagar las aproximaciones de los estudiantes de bachillerato al principio de identidad en expresiones algebraicas procedimos a aplicar un cuestionario (B) en donde la literal se presenta en un contexto estrictamente algebraico, y bajo diferentes condiciones: con y sin coeficiente, con y sin exponente, como incógnita y cómo número generalizado.

Presentaremos en el capítulo siguiente los resultados obtenidos al cuestionario B con la intención de mostrar cómo los estudiantes se aproximan a las expresiones algebraicas y a partir de este acercamiento explorar su interpretación acerca del principio de identidad, aplicable canónicamente a la literal en una expresión algebraica dada. Posteriormente expondremos algunos aspectos de los resultados obtenidos en la realización de entrevistas sobre la identidad en expresiones algebraicas.

.

CAPÍTULO SEXTO

UNO, POCOS, MUCHOS, INFINITO, ¿QUÉ VALOR TIENE UNA VARIABLE?

Antes de iniciar con la descripción del cuestionario B, consideramos necesario señalar que, aún cuando es frecuente el empleo del análisis estadístico en trabajos de investigación dentro de la psicología educativa, y en algunas ocasiones se considere que, presentar cuantitativamente los resultados, y ser tratados estadísticamente, implica un mayor nivel de comprensión del mismo –visión que, como hemos señalado en los capítulos I y III, obedece a una perspectiva moderna del quehacer científico-, la perspectiva de este trabajo asume que la presentación de los resultados de manera cuantitativa puede dejar de lado u ocultar algunas cuestiones de gran importancia, en este caso, al proceder particular de los jóvenes cuando se enfrentan a contenidos matemáticos.

Igualmente se admite, en términos generales que las investigaciones "descubren" o "dan cuenta de una realidad existente, en donde el investigador puede ser capaz de extraer las leyes que gobiernan la "naturaleza"[16]. Esta perspectiva es resultado igualmente de la visión moderna y matematizada de la ciencia en donde el "fenómeno" puede ser mostrado, descrito, explicado y en el mejor de los casos predicho. Sin embargo, como se ha mencionado a lo largo del trabajo, otra interpretación posible, sería concebir a la ciencia y con ella la perspectiva matemática, sólo como una lectura o interpretación de "la realidad", y, coincidiendo con Walkerdine (1995), sólo como una versión textualizada que determina y crea "nuevas realidades". Así entonces, consideramos que la perspectiva estadística ofrece sólo un discurso particular, construyendo por tanto su objeto de estudio.

[16] Se parte de la idea de que la naturaleza tiene leyes susceptibles de conocerse no obstante, como cita Galimberti (p. 42, 1995): "La generalización es posible sólo sobre la base del presupuesto, no demostrado, de la uniformidad de la naturaleza, y de su conformidad a la estructura matemática impuesta por la razón que, por ello se arroga el poder de considerar los hechos no observados análogamente a los observados. Sin estos presupuestos, que están "puestos" por la razón y no "dados" por la experiencia, el análisis empírico no llegaría a ninguna ley y por tanto a ningún conocimiento sobre la naturaleza de las cosas"

En el intento de hacer visible lo anterior procederemos a hacer un análisis, en un primer momento cuantitativo-estadístico, para mostrar el tipo de afirmaciones derivadas de una interpretación estadística y, posteriormente, exponer la singularidad de las interpretaciones de los estudiantes y las implicaciones generadas a partir del análisis de sus comentarios o respuestas. Lo anterior tiene dos finalidades; la primera se refiere a mostrar cómo el tipo de acercamiento y fundamentos subyacentes derivan en diversas interpretaciones; la segunda, intenta mostrar específicamente la multiplicidad de interpretaciones a las que da lugar el principio de identidad en los estudiantes de este ciclo educativo.

6.1. La trama de un análisis cuantitativo-estadístico

En este apartado realizaremos un análisis cuantitativo con respecto a los resultados observados en el cuestionario acerca de las interpretaciones que realizan los estudiantes de la literal, contextualizada en diferentes tipos de expresiones algebraicas, en los que la literal conlleva diferentes acepciones, ya sea como incógnita o como número generalizado.

Nuestra intención fue determinar si los estudiantes podrían, por un lado aceptar la identidad de una literal en una expresión algebraica, independientemente del número de veces que ésta aparece en una expresión y considerar que todas sus apariciones en una expresión específica representan el mismo valor (por ejemplo en la expresión $4m + m + 2m = 14$, la m representará en cualquiera de los términos el valor de 2). A partir de esta identificación, saber si pueden considerar que una misma literal puede interpretarse de diversas maneras en función del tipo de la expresión en la que se encuentre. Por ejemplo reconocer que el valor de la literal es único para el caso de ecuaciones lineales (por ejemplo en la expresión lineal “$3 + a + a = a + 10$” , la literal sólo tiene el valor de 7); la misma literal representa dos valores en el caso de ecuaciones cuadráticas (por ejemplo en la expresión $2a^2 + 5 = 23$, la literal “a” puede tener los valores de +3 y -3): representa cualquier valor en el caso de expresiones generales (por ejemplo en la expresión “$(x + 1)^2 = x^2 + 2x +1$”, en donde “x” puede asumir cualquier valor). No obstante que pudiera tener un determinado número de valores, los estudiantes deben aceptar que el valor sería el mismo dentro de la misma expresión.

El reconocimiento de que la literal en una expresión particular, asume el mismo valor independientemente del número de veces que aparece en la misma, es un indicador de que el estudiante puede reconocer la identidad de la literal en una expresión, asimismo esta identidad tiene particularidades en función del uso de la variable en las diferentes expresiones, por ello, los reactivos se diseñaron para saber si los estudiantes pueden reconocer dicha identidad en los diversos tipos de expresiones en donde la literal asume un papel determinado (incógnita, número general o relación funcional).

Este cuestionario se aplicó a 89 estudiantes de tres grupos de la Escuela Preparatoria de la UAQ de los semestre 1º, 3º y 5º (ver Anexo 1) a finales del semestre 2006-II, Noviembre 2006.

Dicho instrumento (Anexo 2) estuvo constituido por 10 reactivos, en los cuales los estudiantes tenían como indicación señalar para ciertas expresiones algebraicas “cuántos valores puede tomar cada letra”. De estos 10 reactivos, 5 correspondían a expresiones en las cuales la literal implicaba una incógnita, como por ejemplo: “$x + 5 = x + x$” , las restantes 5 se referían a expresiones en las cuales la literal representa un número generalizado, por ejemplo *“$4 + s$”.* En ambos tipos de expresiones se incluyeron expresiones de primer y segundo grado.

Veamos con más ejemplos, qué implica resolver las preguntas del cuestionario: Por ejemplo, ante la expresión *“$3 + a + a = a + 10$”,* - ecuación de primer grado-, hay que reconocer que la literal “a”, no importando el número de veces que aparece en la expresión, representa siempre el mismo valor, valor que es posible determinar. En la expresión *“$3 + a + a + a + 10$”,* la letra “a” representa siempre el mismo valor, a pesar de que su valor no se puede determinar porque no se han establecido las condiciones que lo definiría y, por tanto, se le puede asignar cualquier valor, pero tiene que ser el mismo en las tres apariciones de la literal.

En estas expresiones se vislumbra ya una dificultad relacionada con el principio de identidad, ya que, para determinar el valor de “a” en la expresión “$3 + a + a = a + 10$” se debe operar con ella, lo que implica asumir que “a” es idéntica a sí misma y, por lo tanto, representa el mismo valor, por más que ese valor aún no se conoce, para las tres *“a´s”.* Una vez que se llega a “$3 + a = 10$”, es cuando ya se puede determinar su valor, mismo que podría sustituirse en la expresión original, sin caer en contradicción.

Preguntas como las incluidas en el cuestionario no son comunes en los espacios educativos. Implican un cierto grado de dificultad ya que los jóvenes deben tomar en consideración, entre otros factores:

a) Que independientemente del número de veces que aparece la literal en una expresión, su valor será el mismo cuando se trate de la misma literal. Para determinar el número de valores que puede asumir dicha literal, se debe examinar tanto en la naturaleza de la expresión como el exponente de la literal.
b) Las características de la expresión, si se refiere a una ecuación o no, ello significaría el que la literal fuera una incógnita, un número generalizado o estuviera en una relación funcional.
c) El grado de la expresión, dado por el mayor exponente de cualquiera de las literales que aparezcan en la expresión.
d) Que una literal en una expresión en la que se encuentra como número generalizado, puede asumir un número infinito de valores.

Los puntos anteriores son los requisitos mínimos indispensables para poder interpretar, simbolizar y operar con expresiones algebraicas. De la misma manera se considera que el principio de identidad es fundamental en la comprensión del contenido matemático porque constituye un axioma básico dentro del álgebra, y controla junto con otros principios, las actividades relacionadas con el manejo de expresiones algebraicas y la solución de ecuaciones. El principio de identidad en álgebra se entiende como la ley reflexiva de la igualdad, “x = x”, esto es “x” es idéntica a “x” (Bernett, 1982).

Sin este principio ninguna de las demás propiedades de la igualdad, así como de la adición, multiplicación o los axiomas de los reales, podría establecerse para el trabajo canónico dentro de la matemática. De tal manera que para trabajar con cualquier expresión algebraica, se debe tener en cuenta tal principio:

Por ejemplo:

- Para realizar simplificaciones de expresiones algebraicas:

  $3x - 5y + 6x + 2y$ Se tiene que considerar que la x es igual a cualquier x que aparezca dentro de la expresión, para poder operar con ellas, sumando todos los términos de "x": $3x + 6x = 9x$, de igual manera para "y": $-5y+2y = -3y$, para llegar a la expresión simplificada: $9x-3y$.

- Para resolver ecuaciones:

  $x + (x + 2) + (x + 4) = (x + 6) +8$

  $3x + 6 = x + 14$

  $2x = 8$

  $x = 4$

  Ésta como cualquier ecuación, supone la existencia de la identidad de la literal, es decir, la literal sólo es una, tiene, en este caso sólo un valor, aún cuando aparezca varias veces dentro de la expresión, si no se considerara tal principio, la ecuación no podría ser resuelta, de hecho ninguna expresión matemática podría ser posible si no se asumiera este principio ($x=x$). Y no sólo para el caso de la literal, sino para cualquier término dentro de la expresión.

- En el caso de relaciones funcionales como por ejemplo: "$2x = y$" En esta expresión, a pesar de que las literales pueden asumir un conjunto infinito de valores, la identidad sigue siendo necesaria ya que "x" e "y" siempre serán iguales a sí mismas, sin embargo la identidad en esta expresión no sólo se asume con respecto al valor, sino al papel o la relación que tiene dentro de la expresión.

A pesar de lo anterior, también es necesario señalar que, como se ha expresado anteriormente, dicho principio, no puede ser interpretado de manera absoluta, ya que aún en esta materia, la identidad puede interpretarse de diversas maneras en función del contexto, dado que puede interpretarse como idéntico en cuanto al valor asumido o idéntico en cuanto a la relación con los otros elementos de la expresión.

Teniendo en cuenta lo anterior se propusieron los reactivos, a fin de que los estudiantes mostraran o no el reconocimiento, por un lado, de cuáles eran los valores que la literal representaba en cada caso y por otro, el papel que tiene la literal en la expresión.

Por ejemplo en la expresión "$x + 2 = 2 + x$" (reactivo 1), hay que reconocer que la literal puede asumir un conjunto infinito de valores. Esta respuesta implica el reconocimiento del papel de la literal como número general. Si un estudiante identifica un solo valor como posible, estaría confundiendo el papel de la literal viéndola ya no como número generalizado sino como incógnita, lo cual impediría la comprensión de la expresión. Si el estudiante señalara que tiene dos valores, ello representaría que: a) no asume la identidad de la literal dentro de esta expresión, identidad en este caso referida al valor numérico que representa y b) no reconoce la relación de la literal con los otros elementos de la expresión.

Otro ejemplo sería el del reactivo 2: en cuya expresión "$3 + a + a = a + 10$", la literal tiene el papel de incógnita, para este reactivo, la respuesta correcta sería el señalar que la literal tendría un solo valor, ello implicaría el reconocimiento de la literal como incógnita y la identidad de la variable, entendida como con el mismo valor numérico, así, cuando el estudiante señalara por ejemplo un conjunto de valores infinito, todos los reales, etc., implicaría el no reconocimiento de la literal como incógnita, en este caso no tendríamos elementos para decidir sobre el reconocimiento de la identidad. Si el joven señalara que la literal asumiría tres valores, sería clara la omisión de la identidad.

Tomando en cuenta lo anterior los resultados muestran que una tercera parte de los estudiantes que resolvieron el cuestionario, no reconocen que la literal tiene el mismo valor cuando se presenta en la misma expresión. En el cuadro siguiente (No. 1) se exponen los resultados por semestre del reconocimiento de que una misma variable tendría el mismo valor dentro de una expresión.

Cuadro No. 1
Porcentaje de estudiantes que reconocen la identidad de la variable en expresiones algebraicas.

SEMESTRE	RECONOCIMIENTO DE LA IDENTIDAD			
	SI	NO	INDETERMINADO	TOTAL
1ER SEMESTRE N	32.35 % 11	35.29 % 12	32.35 % 11	 34
3ER SEMESTRE N	33.33 % 10	23.33 % 7	43.33 % 13	 30
5º. SEMESTRE N	12.00 % 3	48.00 % 12	40.00 % 10	 25
TOTAL PORCENTAJE N	26.97 % 24	34.83 % 31	38.20 % 34	 89

Considerando estos resultados observamos que un número muy significativo de estudiantes no reconocen la identidad de la variable en una expresión, y resulta todavía más notable el que los estudiantes de quinto semestre tengan el mayor porcentaje de omisión del mismo, en tanto que en el primer y tercer semestre hay aproximadamente una tercera parte de estudiantes que reconocen la identidad.

Al hacer el análisis estadístico con la prueba chi cuadrada, en relación a las diferencias entre grupos, encontramos que no hay una diferencia significativa entre los grupos, con respecto al reconocimiento o no de que la literal tendría el mismo valor dentro de la misma expresión ($x^2 = 5.811$, $p = 0.214$, g..l. = 4). Lo sorprendente es que parece no haber diferencia a lo largo de la educación en este nivel. Es decir, el paso por los diferentes semestres no parecen tener incidencia en el señalamiento de la identidad de la literal como representando un valor específico, independientemente del número de veces que aparece en la expresión.

Este resultado muestra la dificultad de los jóvenes para reconocer, sobre todo en el primer y quinto semestre, que una literal es la misma, esto es, que tendría el mismo valor dentro de una expresión algebraica.

Con respecto a la relación entre el puntaje del cuestionario con las calificaciones obtenidas durante el semestre, observamos que si hay una correlación significativa cuando se analiza a toda la muestra en su conjunto (r= 0.313, p = 0.003, N = 89). Al determinar la correlación entre el puntaje obtenido en el cuestionario y las calificaciones semestrales para cada semestre, encontramos que fue significativa en los semestres primero y quinto: r= 0.388, p = 0.023, N = 34 y r = 0.458, p = 0.021, N = 25, respectivamente. Sin embargo dicha correlación no fue significativa en el tercer semestre (r = 0.143, p = 0.541, N = 30), estos resultados se muestran en el cuadro No. 2.

Cuadro No. 2
Correlación entre el puntaje obtenido en el cuestionario y las calificaciones semestrales

SEMESTRE	Correlación	Nivel de significancia
1er SEMESTRE N = 34	0.388	0.023*
3er SEMESTRE N = 30	0.143	0.451
5º SEMESTRE N = 25	.458	0.021*
Todos los semestres	0.313	0.003**

* Correlación significativa al nivel 0.05 ** Correlación significativa al nivel 0.01

Cabe señalar que una posible explicación de que en el tercer semestre no se encontrara una correlación significativa pudiera ser porque el contenido de la asignatura de matemáticas para este semestre fue el de Geometría, lo que implica un menor manejo de expresiones algebraicas.

Por otra parte, un resultado notable fue el de la dificultad por parte de los estudiantes para identificar el papel que juega la literal en los diferentes tipos de expresiones, esto es, cuando se asume como incógnita, número generalizado o en relación funcional. Los resultados de dicho reconocimiento se muestran a continuación:

Cuadro No. 3
Porcentaje de estudiantes que reconocen el papel de la variable en expresiones algebraicas.

SEMESTRE	RECONOCIMIENTO DEL PAPEL DE LA VARAIBLE DENTRO DE LA EXPRESION ALGEBRAICA			
	SI	NO	INDETERMINADO	TOTAL
1ER SEMESTRE N	2.9 % 1	85.3 % 29	11.8 % 4	34
3ER SEMESTRE N	26.7 % 8	66.7 % 20	6.7 % 2	30
5º. SEMESTRE N	20.00 % 5	72 % 18	8.00 % 2	25
TOTAL PORCENTAJE N	15.73 % 14	75.28 % 67	8.98 % 8	89

En este caso el porcentaje se eleva aproximadamente a dos terceras partes de los estudiantes. Lo anterior implica que los estudiantes cursan los tres años de bachillerato sin tener en cuenta el tipo de expresiones con las que están trabajando, lo cual pone en duda si efectivamente pueden trasladar lo aprendido en esta área del saber a otras áreas, dado que la comprensión de este contenido es esencial para poder construir un modelo matemático.

Se analizó igualmente la relación entre el reconocimiento de la identidad de la literal con el papel de la misma, observándose una correlación significativa ($r = 0.261$, $P = 0.013$, $N = 89$). Un dato relevante fue que ninguno de los estudiantes que omitía la identidad de la literal pudo reconocer el papel de la misma. Lo anterior podría señalar que para reconocer el papel que juega la literal en una expresión resulta fundamental en una primera instancia el reconocimiento de la identidad. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes puede operar, y desempeñarse en la asignatura de matemáticas sin tener claro qué papel juega la literal dentro de la expresión, y que como se mencionó en un trabajo anterior (López, 1996), los jóvenes parecen manipular u operar con las expresiones algebraicas solo mecánicamente, sin comprender el significado de dichas manipulaciones.

El principio de identidad se puede considerar, entonces, como un factor que incide en el desempeño adecuado en el manejo del contenido matemático, ya que para poder operar una expresión algebraica es necesario tener siempre presente que la literal en una expresión siempre representaría lo mismo, ya sea en cuanto a su valor o en cuanto a la función que tenga dentro de dicha expresión, y ello es imprescindible para saber el papel que juega la literal dentro de la expresión.

Así por ejemplo en la expresión: $3 + a + a = a + 10$, -en donde la literal es una incógnita-, si no se tiene en cuenta la identidad de la literal, se podría considerar que cada aparición de la "a" puede tener un valor distinto, con lo cual la expresión no tendría sentido, en tanto que si se asume que $a = a$ y que en cualquier aparición de esta literal dentro de la expresión el valor que representa es el mismo, entonces se podría proceder a la obtención del valor de "*a*".

En expresiones donde la literal es un número generalizado, como $(x+1)^2=x^2+2x+1$, la identidad de la literal, esto es, asumir que "x=x", es fundamental, ya que de no considerarse, dicho producto notable sería incomprensible.

Este principio es un postulado básico dentro de la normatividad en el área de las matemáticas. No obstante encontramos 12 casos en el primer semestre, 7 en el tercero y 12 en el quinto semestre, que representan aproximadamente la tercera parte de los estudiantes del estudio, que abiertamente señalan, cuando menos en una ocasión, que la misma literal dentro de una expresión algebraica puede asumir más de un valor. Casi una cuarta parte de los jóvenes contestan que la literal tiene el mismo valor dentro la expresión, independientemente del número de apariciones en ella, por tanto se asume que reconocen la identidad.

Por último, un poco más de la tercera parte de los estudiantes que respondieron al cuestionario, señalan de manera general, que tendría un conjunto infinito de valores –correctamente en expresiones en donde la literal denota un número generalizado, pero incorrecto cuando se trata de expresiones en las cuales la variable tiene el papel de incógnita-. Por ello, no tenemos elementos para determinar si reconoce o no la identidad, ya que la estructura de la pregunta se refería a identificar cuántos valores podría asumir la literal en las diferentes expresiones. No se puede identificar, en esta situación, si cuando aparece en varias ocasiones la literal en la misma expresión, los estudiantes reconocerían que tendría exactamente el mismo valor.

Por tanto la conclusión a la que nos lleva este tipo de análisis, sería la dificultad de los estudiantes, por un lado para reconocer la identidad de la variable, y del papel que tiene la variable en las expresiones algebraicas, por otro, estaría señalando su incidencia en el desempeño dentro de la materia.

Sin embargo, dadas las características de este instrumento, encontramos que los aciertos obtenidos por los estudiantes pueden encubrir un desconocimiento de las reglas canónicas, pero que su “regla no canónica”, en algunos casos, coincide con la respuesta correcta. A continuación exponemos algunos ejemplos:

1) Un estudiante podría creer que la literal, por definición, puede asumir cualquier valor, esto es, “un número infinito de valores”, “el campo de los reales” o “cualquiera”. Lo anterior es acertado, sin

embargo esta regla está condicionada al tipo de expresión de que se trate. Si un estudiante no considera las limitaciones de esta norma, responderá en todos los casos que la literal puede asumir “cualquier valor”, “el conjunto de los reales” o “un número infinito de valores”, ello sería correcto para la expresión 4 + s, pero incorrecto para la expresión “x + 5 = x + x”. Lo cual, de mantener esta hipótesis para la resolución del cuestionario, le llevaría a lograr algunos aciertos, cuando realmente no ha comprendido la particularidad de las expresiones, y por tanto se ignoraría si pueden reconocer que la literal tiene el mismo valor dentro de la expresión.

2) Hay casos en que los alumnos tienen el mismo puntaje, sin embargo las reglas a las que parecen obedecer son completamente diferentes y algunas son más cercanas al proceder canónico que otras, pero al considerar aciertos y desaciertos, estas “reglas” pueden quedar ignoradas.

3) En algunos reactivos como por ejemplo, cuando se presenta la expresión $7x^2 = 2x - 5$, el número de valores posible para la literal sería 2, pero 2 también el número de veces que aparece la literal, por ello cuando el estudiante responde que dos, no se puede determinar si considera efectivamente los valores posibles de la literal por tratarse de una ecuación de segundo grado o está atendiendo al número de veces que aparece la literal, el primer caso correspondería a la comprensión de la expresión, en tanto que el segundo muestra la omisión de la identidad.

Por ello podríamos considerar que el análisis cuantitativo, si bien parece ser un acercamiento al problema que nos ocupa, no nos permite saber qué formulaciones pueden hacer los estudiantes, ni de manera general ni particular, alrededor del principio de identidad. Lo que el análisis estadístico permite en un primer acercamiento es señalar la dificultad de reconocer tanto la identidad como el papel de la literal en una expresión algebraica, pero simultáneamente parece encubrir, la manera de proceder de los estudiantes al resolver situaciones algebraicas.

Se podría argumentar que la naturaleza del propio cuestionario empleado es una limitante para acercarse al uso que hacen los estudiantes del principio de identidad, sin embargo consideramos que si se elaborara un cuestionario que pudiera poner en evidencia la forma de pensar de los estudiantes, éste sería tan extenso que sería imposible aplicarlo, y aún así, en la misma aplicación habría cambios, influidos por el cuestionario mismo, que quedarían ignorados en un tratamiento cuantitativo. Las conclusiones obtenidas de la artefactualización cuantitativa[17], por consiguiente, son sólo creencias, ya que no habría un cuestionario, ni tratamiento estadístico que pudiera poner en evidencia la forma de pensar de los estudiantes, ya que ésta no puede asirse, dado que no es un estado, sino algo dinámico, móvil, en constante movimiento. En el momento en que creemos tenerlo sujetado, ya no existe, como tal. Se podría argumentar en contraparte que el análisis estadístico nos permite tener una visión general del acercamiento en este caso al contenido matemático, sin embargo, como se ha visto y como se mostrará más adelante, pareciera que no es la forma más idónea de saber acerca de la manera de proceder de los estudiantes. Cada estudiante responde al cuestionario de manera diferente y en un afán cuantitativo se ocultan tales diferencias para imponer una categorización, existente sólo para quien trata de encontrar una regularidad.

Los cuestionarios pueden ser retomados de diferente manera, es decir, como un camino para vislumbrar destellos del pensamiento de los estudiantes, como un medio que nos permitan acercarnos, como en este caso, a su manera de proceder con un contenido matemático. Es decir, “leer” e “interpretar” el decir de los estudiantes, ya no a través de la “herramienta matemática” sino con el afán de dejarse “decir” lo que ellos intentan mostrar en sus respuestas.

[17] Ya Michel Tort(1977) hace un análisis pormenorizado de las pruebas en el cual se vislumbra el trasfondo de este tipo de instrumentos.

Por tal motivo presentamos a continuación un ejercicio de interpretación con respecto al cuestionario para mostrar la particularidad de las respuestas de los estudiantes, ahora mediante la realización de una entrevista para ahondar en las argumentaciones de los jóvenes con respecto al principio de identidad de la literal (x=x).

6.2. El decir propio de los estudiantes acerca del principio de identidad

En un intento de dar la palabra a los estudiantes, se realizaron entrevistas con 10 estudiantes, 4 de segundo semestre, 3 de tercero y 3 de quinto. Se consideraron, en general, para cada semestre uno por cada tipo de desempeño (alto, medio y bajo). Se solicitó al profesor de matemáticas de un grupo de cada semestre, invitara a participar a algunos de sus estudiantes –que él considerara en el nivel de desempeño solicitado-. En cada grupo se invitó a los estudiantes señalados para una entrevista en un salón dispuesto para esta actividad en las instalaciones del plantel educativo. Las entrevistas se realizaron en las últimas semanas del semestre lectivo 2007/II, en el mes de mayo de 2007.

A partir del desempeño de estos estudiantes cabe señalar que tres de los jóvenes de segundo semestre y uno de cuarto, fueron los que claramente mostraron, cuando menos en algún momento, la omisión del principio de identidad al trabajar con expresiones algebraicas. Los restantes, tuvieron dificultades para entender el papel de la literal dentro de la expresión, o en los procedimientos para operar con dichas expresiones, sin embargo asumían en todos los casos que una misma literal tendría el mismo valor dentro de una expresión. Por tal motivo, presentamos a continuación solamente los casos de los estudiantes que no toman en cuenta u omiten el principio de identidad. Se trata de 4 de los 10 estudiantes entrevistados.

6.2.1. David

David es un joven de 15 años que actualmente cursa el segundo semestre, va mal en matemáticas, reprobó el primer semestre, que según sus palabras “fue por flojera”, porque no hace las tareas, pero que cuando “se aplica, le va bien”, incluso mencionó que obtuvo 10 en un parcial.

En la entrevista David afirma que el valor de una literal no es el mismo dentro de una expresión, ya que depende de las operaciones que realiza al despejar la expresión:

Entrevistador	Estudiante
Me puedes decir cuantos valores puede tomar la literal en cada una de las siguientes expresiones. Por ejemplo en ésta (x + 2 = 2 + x), ¿cuántos valores crees que puede tener ahí la letra x? Por ejemplo esta x ¿qué significa para ti? La incógnita, ajá. Entonces ¿qué valor tendría Ajá Ah, Ok, muy bien, entonces, tu crees que tenga, un solo valor, o puede tener muchos valores o cuantos crees tu que pueda tener (la literal) Varios? ¿En esta expresión puede tener varios? Y ¿cómo sabes cuáles pueden ser por ejemplo?, si son varios cuales pueden ser.. De 0 a infinito, ¿podría ser menos de 0? Entonces aquí (x+2=2+x) ¿cómo le harías para saber cuál valor tiene x? A ver ¿cómo le harías, en esta primera de x+2=2+x? ¿Entonces cuál es el valor de x? ¿En ambas -2? Aja, Ok, una pregunta David, esta x (del primer término), es exactamente igual a esta x (del segundo término) No? No sabes? Ok, ¿cómo podrías saberlo? En este caso? Si sería igual, muy bien. Ahora tenemos en esta 3+a+a=a+10, aquí ¿cuántos valores crees que tenga la a? Ah, Ok, o sea que ésta (primera *a* de la expresión) podría tener un valor, esta otro (segunda *a*) y esta otro?	(Inaudible) La incógnita Depende de la …operación que este aquí. Por ejemplo, quería saber el resultado? Depende el resultado de… restar a lo que se está sumando y ese sería el resultado. Pues si, varios (Afirma) Si Por ejemplo, sería… como la x no tiene un valor definido entonces podría ser de 0 a infinito Si, también Despejando x de cada resultado e igualando Pasando este acá (-2 al segundo término) Escribe x + 2 = 2 + x x = -2 = x = -2 En ambas sería -2 Si No No, ..e..je… no sé Resolviendo el problema no? En este caso si, si sería igual. Igual depende de…0 a infinito o menor a 0, pero aquí ya son varios valores, porque estamos tratando tres incógnitas diferentes.

(tercera *a* de la expresión) Ok, y ¿cómo podríamos saber el valor que tendría cada una? No?, alguna idea?	Si. Este… ahí si no sabría... Mh, igual despejando, pero es que no puedo despejar, por ejemplo una *a* cómo la despejo de acá., eso si no sé.

David considera que lo importante en una ecuación es el signo de igualdad, de tal manera que las literales incluidas, aún siendo la misma, tendrían un valor igual o diferente pero que permitan mantener la igualdad, y ello se debe, consideramos, al desconocimiento de las reglas canónicas para resolver las ecuaciones, entre las cuales se encuentra que una literal es igual a sí misma (x=x). Sin embargo parece existir una regularidad en las expresiones en donde la literal puede asumir diferentes valores dentro de la misma expresión, éstas coinciden en que presentan en dos ocasiones la literal en un mismo término como son :

$$3 + a + a = a + 10 \qquad x + 5 = x + x$$

$$\frac{x}{x^2 - 4} = 3 \qquad 4 + x^2 = x\,(x + 1)$$

Ejemplo de ello se muestra en los fragmentos siguientes:

Entrevistador	Estudiante
Por ejemplo ¿Podría ser en este caso ($X + 5 = X + X$) que yo le pusiera eh…3 (a la primera x) ésta vale tres y ésta (segunda x) puede valer cuatro? Si..si cabe? Aha.. Ya te confundió, o sea, ya … ¿cómo? A ver, platícame	Si Si, porque la estaría igualando Pero aquí ya me confundí, eso de que si sería diferente, también acá igual. (refiriéndose a ambos términos de la igualdad, parece reflexionar en las diferentes expresiones, sobre cuando son iguales y cuando son diferentes) O sea, ya me confundí, porque si la operación está igualando… en esta forma, con ésta (se refiere a los dos términos de la expresión $X + 5 = X + X$), entonces el

* * * A ver estás en la dos no? de 3 + a + a = a+ 10 O sea esta *a* valdría 5 (la primera *a* de la expresión), ésta 3 (la segunda) y ésta 1?	resultado tiene que ser igual, y como hay…por ejemplo aquí hay dos literales ($x + x$) al sumarlas, por ejemplo puede ser … un dos y un cinco y sería 3 + 5 igual a 10, o no mejor aquí 3 y 3, 6, no… a ver , este sería tres y este cinco… * * * Igual a +a 10, que podría ser estos dos y aquí podría ser 1, si.. y ya Escribe (3 + 5 +3 = 9 + 0 , y abajo escribe: 3 +5 + 3 = 1 +10 11 = 11) Si y ya igualando, el resultado sería 11 igual a 11
Ok, Y aquí cuántos crees que pueda tener? $\frac{x}{x^2 - 4} = 3$ ¿dos valores?	mm. ahí si pienso que dos si
Y en ésta, la número 10 tenemos $4 + x^2 = x(x+1)$,	Ahí este…yo pienso que es igual que en todas, bueno, es que en realidad pensé igual, que, pues la x puede ser un número de menos infinito a cero, y de cero a más infinito, … que este .., o sea, serían, pero serían iguales o diferentes, pero que también tendrían que igualar la operación.

Aunque cabe señalar que para el caso de $x + 5 = x + x$, cambia de opinión en varias ocasiones, primero señala que tendría un valor, posteriormente cuando intenta saber cuál sería ese valor y no resulta, señala que la literal tendría varios valores, para posteriormente señalar que los valores correspondientes a la literal podrían ser iguales o diferentes siempre que se mantuviera la igualdad.

Por otra parte, David muestra dificultad para darle sentido a las expresiones: x=x, x=y y x≠y como se observa en las siguientes intervenciones:

Entrevistador	Estudiante
Cuando tenemos este x = x, que es lo que representaría x? Me decías?	Sería una incógnita… por ejemplo si estamos hablando de no sé un problema sencillo, por ejemplo naranjas, hay cierto número de naranjas, que en el precio de otra….no ya me confundí, bueno yo tengo naranjas, tendría que ser un cierto número de naranjas

No obstante cuando se le pregunta más adelante "¿Cómo representarías un número igual a sí mismo?" Responde que "x = x" , pero al interrogarle si podría representar un número igual a si mismo con una sola "x", señala claramente que no.

¿podríamos representar un número igual a sí mismo con una sola x? Ajá	¿un número igual a si mismo con una sola x? Pues no, porque estamos hablando de dos, o sea, es un número que acá aparte hay otro, que es igual, entonces estamos hablando de dos cantidades, entonces sería x=x
	No porque nada más está representado una cantidad
Ah, ok, porque si no hiciéramos eso, si pusiéramos solo x, esto sería igual a sí mismo?	Mh..entonces no está, no está señalando que es igual a sí mismo
	Si
Ajá…Y puede ser cualquiera..	
Ah ok, ¿para que sea igual a sí mismo tiene que enmarcarse con otra x?	

Para el caso de la expresión x = y, las dificultades parecen ser mayores y el caso de x ≠ y no fue mencionado por David para señalar una cantidad diferente de otra por ejemplo.

Y por ejemplo si tengo $x = y$ que representaría, cada uno de ellos. Lo que se te ocurra, a ver escribe aquí	Ya sería …este…ya sería diferente el resultado, porque podría…por ejemplo un problema… es que no puedo…. (Escribe: x = naranjas y = manzanas) x sería igual a naranjas y y sería manzanas, y entonces como son diferentes signos, números, siempre va a ser diferente, porque están …
Por ejemplo, muy bien, escríbelo, cómo sería,	por ejemplo …no sé .. cierto número de naranjas multiplicado por dos sería igual a cierto número de manzanas multiplicado por cuatro, o algo así.
	Escribe 2(x) = 4(y)
Ah ok., ¿serían cantidades diferentes?	Si., es que una vez nos pusieron un problema parecido, pero sería…era con peso. Era: Cierto número de naranjas por cierto numero de, no menos cierto número de manzanas es igual a cinco kilos, o sea multiplicado por ésta, era igual a cinco kilos
	Escribe: 2(x) – 4(y) = 5
Y por ejemplo aquí, te voy a pedir de favor, si me escribes un ejemplo tu que pensarías si te dicen que x = y	Pues simplemente dos incógnitas diferentes, Si
Dos incógnitas diferentes	Que son diferentes, pero ya sería…depende del maestro, como pondría el problema, como, … si lo pone literalmente, y sería.. ya tendría, una imagen tendría en mi cabeza, pero si nada más lo pone así tal cual, pues es que… nada más me imaginaría números.
¿Que son iguales o que son diferentes?	
	Mh (afirma)

Nada más…Pero por ejemplo aquí, este podría ser 4 igual a 6, si decimos que x= y ¿Si puede ser 4 igual a 6? A ver (ríe) Entonces crees que serían iguales o no?	Si… ¡No!...no, o sea, sería un término, un número difere…un número igual, pero un término diferente. Por ejemplo *x* ese sería el término y el número sería el 4, y *y* sería otro término y el número sería el 6, o sea, estamos hablando de que estos términos son iguales pero los número son diferentes, pero ya me confundí por aquí, igual. (ríe) Pues no, (je)
… y una cantidad diferente de otra? ¿cómo lo pondrías?	Sería *x*, *x* igual a *y* (Escribe $x = y$)

Por último es preciso señalar que David tiene una manera de interpretar las expresiones y la relación entre sus términos, que para él resultan coherente, el parece saber que ignora muchos procedimientos, pero cree tener los elementos fundamentales, su acercamiento al contenido matemático es un tanto juguetón, trata de encontrar sentido entre los diferentes tipos de expresiones, pero parece que son muchos los elementos que se deben tomar en cuenta y él solamente tiene presentes algunos de ellos.

Al final termina el cuestionario con la pregunta: "¿Estaba mal en algo?", lo cual indica su desconocimiento y la imposibilidad de determinar que tan bien o mal ha contestado a las preguntas. Lo anterior parece estar en conflicto con la creencia de que el razonamiento lógico es natural y está dado por el desarrollo, ya que si así fuera el mismo David sabría cuándo es pertinente o cuando se está equivocado. Lo que realmente observamos es un conjunto de normas, canónicamente establecidas y que responden a una lógica muy particular que no coincide con la lógica, en este caso de David.

6.2.2. Gerardo.

Gerardo es un estudiante de segundo semestre, tiene un promedio de ocho en la materia y tiene 16 años.

En un primer momento Gerardo considera que hay expresiones en donde la literal pudiera tener dos valores o tres, éstos serían los correspondientes a cada término de la expresión:

Entrevistador	Estudiante
En ésta ($3+a+a=a+10$) cuántos valores puede tener a? Aja y Por qué	Tiene dos valores…, Y bueno, si, tiene dos valores, de acuerdo que, como estamos viendo que son tres más a más a, entonces vamos a buscar el valor de a (señala la a del primer término) y la otra a (del segundo término)y vamos a sumar los dos términos de la a para poder encontrar solamente un valor

pero al hacer las operaciones pertinentes para encontrar los valores de la literal en una expresión, observa que no pueden ser dos valores, sino que sólo tendría un valor para la misma literal, para el caso de una ecuación.

Entrevistador	Estudiante
Aquí me dijiste que tendría dos valores ¿verdad? ($3+a+a=a+10$) O sea, ¿dos… dos valores ¿Me podrías decir nuevamente..este… cómo le harías para saber cuál es el valor de a?… o los valores de a? Porque me dijiste que son dos, no? Una pregunta Gerardo… ¿esta a es exactamente igual a esta a? ¿es la misma? ¿si? Y esta (la primera a de la expresión y la a del segundo término) es la misma que esta? Estas dos (a's, del primer término de la expresión $3+a+a=a+10$) tendrían un mismo valor y ésta un valor diferente (la a del segundo término)? Y aquí me podrías comentar ¿cómo le harías para conocer los valores de a? A ver explícame	Mh Afirma Dos valores (confirma) Ajá Bueno podría ser el valor de a, nada más tendría un valor, … Sería de la misma manera Mm (duda) Es la misma ajá eh… se podría decir… bueno no… porque… porque después de…como tengo otro.. otro grupo de… (susurra cómo se llama?) de términos, entonces la a… tendría un valor diferente Si Escribe. $3+a+a=a+10$ $3+7+7=7+10$ $a+a-a=10-3$ $17 = 17$ $a = 7$ Si. Este es de la misma manera una ecuación, este…agrupando términos semejantes y términos independientes… como es el caso del 3 y del 10, igual el 3 pasa a ser negativo y a pasa al otro lado con la

	agrupación de a y pasa negativo, entonces, haciendo la operación, este, sería, a es igual a 7,... de esa manera.

La identidad de la literal no queda muy clara al inicio en la expresión: $3 + a + a = a + 10$, sin embargo, cuando analiza con mayor cuidado la expresión se da cuenta de que sólo puede tener un valor y con ello muestra asumir la identidad de la literal.

Cuando la expresión incluye una literal indicando un número generalizado indica que serían tantos valores como aparece la literal en la expresión, como se muestra en el siguiente fragmento, referido al primer acercamiento a la expresión "3 + a + a + a + 10":

Entrevistador	Estudiante
Aquí en ésta ($3 +a +a +a +10$) ¿cuántos valores crees tú que podría tener a, en la número 6? ¿Cuántos valores?	Silencio.... Tendría tres valores distintos....... De acuerdo a........tres valores distintos de acuerdo a la cantidad que vayamos a sacar, mientras sean positivos,

Cuando la literal va acompañada de un coeficiente puede considerar que el valor podría ser cualquiera, sin embargo cuando no tiene coeficiente, afirma que el valor de la literal sería solamente el uno, particularmente en expresiones en donde la literal juega un papel de número generalizado. Lo cual coincide con las argumentaciones mostradas por algunos estudiantes en otro trabajo (López, 1996), referidos a que la literal cuando no tiene coeficiente o exponente vale 1.

Entrevistador	Estudiante
O sea así como están ahorita (expresión original: $3+a+a+a+10$), por ejemplo, ésta es igual a ésta? (compara la primera *a* con la segunda *a*)	Sí
Ésta es igual a ésta (compara la segunda *a* con la tercera)	Si
Pueden valer diferente?	pueden valer diferente, bueno si tiene el valor de acá, (señala el espacio del coeficiente), pero si no vale 1
Ok, muy bien, por ejemplo en este caso ($3+a+a+a+10$) si esta a vale 1, a esta le puedo poner 2, a esta tres,	

podría ser cierto esto o tiene que ser 1, 1 y 1 ó puede ser +2 +2 +2 $3 + a + a + a + 10$ $+ 1 + 2 + 3$ $+ 1 + 1 + 1$ $+ 2 + 2 + 2$) Puede ser cierto ésta ($+ 1 + 2 + 3$), ésta ($+ 1 + 1 + 1$)ó ésta ($+ 2 + 2 + 2$) ó las tres? O cual puede ser cierto?	Agrega a lo escrito: $1a \quad 7a \quad 14a$ $3 + a + a + a + 10$
	Este… el de uno ($+ 1 + 1 + 1$), porque no conocemos el valor de a
Éste puede ser cierto? (señala +1+2+3)	No
No, Ok, y este puede ser cierto? (señala $+ 2 + 2 + 2$)	Tampoco
Tampoco, ¿por qué?	Porque, eh…como no conocemos el valor de a, entonces nos tenemos que basar en una sola cantidad de a, y esa cantidad..la cantidad sería…la cantidad correcta sería 1

Una observación pertinente se refiere a los cambios durante la entrevista en relación a si el valor de la literal sería la misma en la misma expresión.

Entrevistador	Estudiante
…aquí tenemos una x, en la número 1, Aquí tenemos una x y una x acá (se le señalan las dos x de cada término en $x+2 = 2+x$), ésta me habías dicho que tiene un valor, no?, … sigues pensando que es un valor?	
Por ejemplo aquí me dices que son dos valores ($3+a+a=a+10$), ¿por qué aquí ($x+2=2+x$) es uno y aquí son dos ($3+a+a=a+10$)	Silencio
O por qué crees tú que ¿arriba es uno y abajo son dos?	Se queda pensativo.
Ajá, dos valores en dónde?	Pensativo….pues si, pueden ser dos valores..no?, podemos tomarlo como una ecuación..
En la primera, Ok, y dos valores en la segunda?	En la primera ($x+2=2+x$)
	Ajá

La forma de aproximación de Gerardo a las expresiones algebraicas, parece al igual que David, en primera instancia para operar o manipular. Cuando se encuentra ante una dificultad en el despeje, es cuando vislumbra otras posibilidades de Interpretación tanto de la literal como idéntica a si misma, como al papel que juega dentro de la expresión. También trata de hacer coherente el valor de 1 para una literal que no tiene coeficiente y el posible valor de la literal como incógnita, pareciendo llegar a la conclusión de que cuando es incógnita su valor estaría dada por el resultado de la operación, lo cual no sucedería cuando la literal se asume como número generalizado.

6.2.3. Nancy

Nancy es una chica de segundo semestre que va bien en Matemáticas, tiene 15 años.

Nancy comienza a señalar atinadamente que cuando la misma literal aparece varias veces en una expresión tiene que tener el mismo valor:

Entrevistador	Estudiante
¿cabe alguna duda acerca de que puedan ser varios? (refiriéndose al valor de la literal a en la expresión 3 + a +a = a + 10)	… No, es que es la misma letra, entonces si es la misma letra en la misma ecuación, entonces el mismo resultado va a ser, que podría ser…bueno, si… siete

Sin embargo cuando se le presenta la expresión $7x^2 = 2x - 5$ empieza a dudar.

Y con la presentación de las demás expresiones de segundo grado parece que para ella, la literal puede asumir un valor diferente en cada caso dentro de la expresión, cuando se trata de expresiones de segundo grado.

Entrevistador	Estudiante
… y en este caso: $7x^2 = 2x - 5$, ¿cuántos valores podría tomar la letra, o cada letra?	Pues el mismo,
El mismo, ¿serían…cuántos valores crees tú?	Pues tendríamos que sacar o sea cuál es, para ya después la *x* multiplica…bueno, para poder sacar el cuadrado…y ya luego…
Muy bien, solamente sería un valor?	No (ríe)
No? ¿cuántos valores podrían ser?	No, si, porque es que…bueno.... es que ya me estoy confundiendo..
No dime adelante, lo que tú creas, no te dejes confundir (ríen)	Bueno.. yo es que siempr.. bueno…yo digo…que.. pues es el mismo valor, pero pues ahí también puede ser diferente… no sé

Ok, muy bien, y aquí en la número 8, también sería un mismo valor para aquí y acá? (refiriéndose a las dos x de la expresión : $\frac{x}{x^2-4} = 3$)	No, es diferente, no?
Ajá, aquí tendría un valor y aquí otro valor, la *x* tendría un valor diferente?	… pues si.. No sé
Ok, muy bien, y en esta 9 "$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$", igual qué opinas tú, cuántos valores puede tener cada letra?	Diferente
Ésta sería diferente de ésta y de ésta también?	
Aquí, por ejemplo cuando tú me decías, aquí tiene que ser el mismo valor porque es la misma *x*, ¿qué es lo que hace que aquí ya no sea el mismo caso que este? [Entre las expresiones *3+a+a+a+10* y $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$]	Porque aquí ya está diferente… o sea, solo es una suma o resta, o algo, así , bueno… eso digo yo, pero bueno podría ser, podría ser ese el factor, pero no sé

Parece ser que Nancy ante expresiones de segundo grado no acierta a señalar que la literal, aunque puede tener dos valores, la literal en todas sus apariciones dentro de la expresión, asume uno u otro valor. Tal pareciera que sabe que la literal en expresiones de segundo grado tendría más de un valor pero no parece tener claro como se relacionan con las dos apariciones de la literal en la expresión.

Por otra parte cuando se le interrogó sobre la relación entre las expresiones $x = x$, $x = y$ y $x \neq y$, Nancy considera que un número igual a sí mismo puede representarse como $x = x$ y $x = y$, pero se resiste inicialmente a aceptar que “x” pueda representar un número igual a sí mismo, ya que señala: falta algo que diga que sea igual.

Entrevistador	Estudiante
… por ejemplo podría ser con ésta un número igual a sí mismo? (escribe *x*)	¿Cómo?
Esto puede ser, puede expresar un número igual a si mismo. (*x*)	Pero no tiene, no tiene con cuál se va a relacionar, no? Ahí nada más es un número, no podría decir, *x* es igual…necesitas…bueno yo digo que necesitas el igual, o algo es igual… o algo así

En el caso de Nancy, podemos afirmar que la identidad de la literal puede ser aceptada, cuando se trata de expresiones de primer grado, pero cuando se refiere a expresiones de segundo grado, ésta deja de ser evidente. Por otro lado, al igual que David y otros estudiantes que respondieron al cuestionario A, encontramos la dificultad de aceptar que un número igual a sí mismo se pueda expresar con “x”, ya que argumentan de manera general que falta la otra parte “=x”.

6.2.4. Guillermo

Guillermo es señalado por su maestra como uno de los más adelantados de la clase, tiene 16 años y cursa el 4º semestre.

La manera de abordar la pregunta sobre el número de valores que puede tomar la literal en cada expresión es operar con ellas, y en función de su manipulación llega a establecer el papel de la literal, ya sea como incógnita, es decir, que puede asumir un solo valor, o como número generalizado al señalar que pude tener un número cualquiera de valores. Igualmente sabe que en las ecuaciones cuadráticas la literal podría asumir dos valores.

Sin embargo, en dos de las expresiones, al no encontrar el valor de la incógnita titubea y señala que la misma literal en una expresión tendría valores diferentes, las expresiones en la que considera que tendrían valores diferentes fueron: $3 + a + a = a + 10$ y la expresión $4 + x^2 = x(x + 1)$

Entrevistador	Estudiante
…en el caso, de la número dos tenemos *3+a+a=a+10,* aquí ¿cuántos valores crees que pueda tomar cada letra? Mh.. (afirma) Si quieres escribir eh. Como te sientas más cómodo. Claro! Claro! Lo que tú necesites	Son iguales verdad? Valor .... Podría hacer… (señalando las hojas) …(Escribe: *3 + 2a = a + 10* *a = 5*) em… ..... (no se ve muy satisfecho)

	Bueno, lo que es aquí es que ... por ejemplo… que no puede tomar…este… un mismo valor para cumplir la igualdad, porque por ejemplo, si toma,….como…bueno como yo lo estoy tomando como lo entiendo, por ejemplo, tomamos un valor o valores para esta variable y …este… para cumplir una igualdad, sin despejar nada y pienso que si… como aquí son *2a* más, más todavía *3* unidades, y aquí.. y del segundo miembro hay solamente una, entonces pienso que no puede tomar un mismo valor en esa ecuación, para llevar acabo esta igualdad
Ah, ya, ok, muy bien, entonces ésta, la primera *a* tendría un valor diferente a la segunda, y éstas dos a su vez serían diferentes a ésta (la tercera)? Si?	Si, para llegar a cumplir una igualdad, porque si por ejemplo la tomamos como..dos… serían…serían *9* de esa igualdad, y aquí solamente tenemos un *2*, serían *12*, o sea, no… y…por ejemplo ahora con un número negativo, *-3*, serían *-3* mas *-3* menos *6* más *3* serían , eh,*-3* y por ejemplo aquí tomamos un *-3* más *10* pues serían *7* y es por eso que digo que las tres, las tres variables deberían de ser diferentes. (el hecho de no poder pasar la *a* de un lado al otro del signo igual(=), parece llevarle a "olvidar" el principio de identidad)

y en esta última, $4 + x^2 = x\,(x + 1)$,	(suspira)… este…. …. Aquí si sería un valor solo positivo, porque no es una, no es una, no son equivalentes en primer lugar, ya… ya multiplicando y este, y aquí vamos a tomar de nuevo este ejemplo (escribe mientras explica: $4 + x^2 = x^2 + x$ $4 + 16 = 16 - 4$ $20 = 12$) Sería $4 + x$ y aquí sería signo negativo, y aquí sería 16, igual a 16, pero aquí sería menos 4 y aquí sería 20 y aquí 12, y no se podría establecer, entonces…
Pero esta, pensamos en que tiene, esta, esta parte no?, o sea *4 + x* cuadrada igual a *x* +… esta, esta solamente (señalando la expresión) por ejemplo ahí ¿cuántos valores crees tu que tendría *x*? Ah? El número o cuántos valores, tú dime, si es uno, dos o infinito, dime cuántos tendría…	El número? El número …. …. Escribe $4 + x^2 = x^2 + x$ $4 + 25 =$ 29 30
Y si sería igual cada una de las *x*,	Pues yo pienso que no serían igual las *x*, bueno , lo acabo de, bueno voy a tomar una fracción, voy a usar 3 cuartos (escribe: : ¾ $\frac{4}{1} + \frac{9}{16} = -\frac{3}{4} +$ $\frac{64 + 9}{16}$ $\frac{9 + 12}{16}$

      Y positivas ok, bueno	$\frac{73}{16} = \frac{21}{16}$ Si pienso que deberían de ser iguales, no diferentes, perdón y este…y positivas, Si porque aquí, bueno porque aquí el número es positivo y, y por ejemplo… si, eh… si fuera nega… por ejemplo si utilizáramos un negativo, pues aquí se eliminaría porque no hay una *x* simple, y aquí también se eliminaría, pero no sería el caso de este, aquí si alteraría la ecuación, y este… (titubea) … ….. ….. (Hace cálculos en voz baja) Si, deberían de ser diferentes las tres *x* y positivas. (Vemos nuevamente que no puede pasar de un lado al otro del signo igual, sin embargo da valores iguales a la literal, lo que señala asumir la identidad, sin embargo ante la dificultad de mantener la igualdad duda sobre dicha identidad.

Con respecto a la expresión x = x, Guillermo no tiene ninguna duda sobre al señalar que es un número igual a sí mismo, tampoco en afirmar que un número diferente de otro número se expresaría como x ≠ y, sin embargo cuando se le pregunta por el significado de x = y parece no sentirse seguro en cuanto a su interpretación.

Entrevistador	Estudiante
x = y ¿que significaría? Ah, ok, Por ejemplo… ¿cómo sería un ejemplo de eso?	*x = y* (suspira)… que … variables en un mismo sistema, que diferentes variables dentro de un mismo sistema tienen valores iguales. Por ejemplo *7x + 8y* y menos 20 igual, igual a 40, este… que… que… ah….si que, que esta variable *x* y esta *y* , tienen el mismo valor. … si

En relación a si una sola x podría representar un número igual a sí mismo, Guillermo asegura que no.

…¿crees que podríamos poner el que un número es igual a sí mismo solamente con *x*, lo podríamos hacer? Aja No?	¿Que un número es igual a sí mismo? Eh… no, Porque pues, porque no hay una, bueno, aquí, viéndola, con la simple vista, pues no nos diría nada, hay una sola *x* y pues, como dice usted, *x* igual a o sea, a un mismo valor, no se podría.

Al considerar las entrevistas en su conjunto observamos que la identidad de la literal, entendida de manera muy específica, como el señalamiento de que una misma literal en una expresión tendría el mismo valor, no puede ser asumida total y absolutamente por los jóvenes entrevistados, ya que para algunos se pierde cuando no pueden tener acceso al valor de la literal en una ecuación (Guillermo y David), en tanto que para otros las ecuaciones de segundo grado implicarían valores diferentes de la literal en la misma expresión (Nancy) y para otro la diferencia entre las literales se encuentra en el número de veces que aparece en algún término (Gerado y David).

También observamos que la afirmación sobre el número de valores posibles de la literal en una expresión es muy lábil, cambia, conforme intentan dar sentido a sus afirmaciones y a las posibles diferencias entre las expresiones –de primer y segundo grado, ecuaciones o expresiones con literal como número generalizado-. Igualmente encontramos un rechazo a considerar que un número igual a si mismo pudiera ser representado solamente con una "x", recordemos las disertaciones de Heidegger en cuanto al sentido de incluir A = A y no solamente A, en el capítulo tercero.

Los resultados anteriores ponen en evidencia la dificultad para reconocer, en algunos casos, el principio de identidad referido a la literal en las expresiones algebraicas. Esto puede estar en el trasfondo de lo que Gallardo y Rojano (1988) denominaron como "polisemia". Agregaríamos que un aspecto que podría subyacer a dicha "polisemia" la encontramos en la omisión de la identidad.

Otro aspecto de gran relevancia lo encontramos en la expresión $x = y$, ya que como pudimos observar no es una expresión accesible para los estudiantes, en tanto que para algunos puede significar un número igual a sí mismo, o dos números diferentes, ambas afirmaciones quedan fuera de su interpretación canónica.

Cabe mencionar que justamente este tipo de expresiones ponen en evidencia la dificultad que tienen los estudiantes para considerar la identidad de la literal en una expresión algebraica, dado que cuando aparece la literal en varias ocasiones dentro de la expresión, parece que los jóvenes asumen que dicha literal pudiera tener un valor diferente en cada caso, lo cual desde un punto de vista canónico sería completamente improcedente, pero que para algunos jóvenes cabría dicha forma de operar. Si esto es así, sería pertinente en conjunción con la interpretación de la expresión “x=y”, en donde admitiría que “x” e “y” fueran diferentes. Situación que contraviene los principios matemáticos, pero concuerda con las posibilidades de Interpretación de los jóvenes. Es pertinente mencionar que habitualmente, los profesores no son enfáticos en señalar que la misma literal en una expresión tiene el mismo valor.

Podríamos señalar además, que de manera general, como se comenta al inicio de este análisis, los estudiantes no parecen distinguir entre las diferentes acepciones de la variable. Por otra parte, pareciera que los estudiantes responden de manera mecánica sin hacer un análisis de las diferencias entre las expresiones. Igualmente se observa que al operar con las expresiones no consideran si dichas operaciones son pertinentes o no en una situación específica, parecen impulsados a operar con las expresiones sin pensar en si la operación elegida puede ser pertinente o no, además de no contar con un objetivo en particular al operar con dichas expresiones.

Algo notorio fue que para algunos de los estudiantes el hecho de presentar un signo de igualdad no representa necesariamente que ambos términos sean iguales y terminan por asignar valores arbitrarios que no corresponderían a una igualdad.

Como se manifiesta en los resultados en estas indagaciones, puede observarse en las entrevistas que a los estudiantes les resulta un tanto confuso hablar de la identidad, es decir de algo que puede ser igual a si mismo, en tanto que en el cuestionario B, una parte considerable de los estudiantes ignora la identidad de la variable, tanto en cuanto mantener un valor único para la literal, como para identificar el rol de la identidad dentro de la expresión. Así mismo, la necesidad mostrada por los jóvenes de señalar que una expresión como 1=1, x=x implicaría dos elementos que fueran iguales, nos lleva a afirmar nuevamente que dicho principio no parece ser muy evidente en una primera aproximación, ello quiere decir que las expresiones x = x, o 1 = 1 implican para una gran parte de los jóvenes dos elementos y no un elemento igual a si mismo, como se vio reflejado en el cuestionario A y en las entrevistas. Pareciera que un número considerable de estudiantes omite o no percibe de manera evidente, el principio de identidad, a pesar de ser considerado como un principio fundamental en el trabajo de contenido matemático.

Se puede señalar que al abordar las clases de matemáticas pareciera ser un lugar común suponer que los estudiantes asumen sin ningún asomo de duda el principio de identidad, sin embargo como se ha mostrado en las entrevistas y en las respuestas a los diferentes cuestionarios, parece que no es tan claro para los jóvenes dicho principio.

De la misma manera podemos encontrar una serie de casos que ilustran una posible dificultad para acceder a los contenidos matemáticos, derivados del conflicto que implica la imposibilidad de aplicar los principio fundamentales entre los que se encuentra el principio de identidad en matemáticas al revisar o manejar los contenidos revisados en clase.

Estos resultados, por tanto, coinciden con una postura posmodernista de las matemáticas, en el sentido de señalar que éstas son creadas en un momento histórico, culturalmente situadas, en las cuales se establecen una serie de principios (axiomas) que son fundamentales para trabajar dentro de esta disciplina, sin embargo estas reglas, si bien son pertinentes para esta área del saber, no parecen responder a la forma en la que los estudiantes piensan comúnmente, a pesar de que posturas cognitivas como el constructivismo lo hagan parecer.

Los estudiantes no parecen pensar en algo definitivo, en un si o un no determinado de manera absoluta, sino que en cada momento ven la multiplicidad de condiciones.

La identidad por consiguiente no puede establecerse de manera absoluta, se habla de identidad en la medida en que se contextualiza en un momento o discurso específico, depende desde donde se aborde y para qué fines, de ahí la dificultad por parte de los estudiantes para saber cuando tienen que atender al aspecto que cambia y al que se mantiene estable.

Lo cual abre la necesidad de girar la mirada hacia la distancia entre las reglas establecidas por la disciplina, situadas histórica y culturalmente, y por tanto convencionales, con respecto a las interpretaciones que realizan los jóvenes de las mismas.

Pareciera ser igualmente que, para los estudiantes, el principio de identidad entre los objetos, las figuras geométricas y en los símbolos algebraicos, no puede ser considerado de manera absoluta, éste no representa una necesidad lógica o natural. Consideramos que de no apreciar el sentido que este principio tiene para ellos (así como el que adviene en la matemática y/o filosofía que lo constituye), se obstaculiza la posibilidad de aprender matemáticas, en especial cuando se aborda el saber algebraico.

CONCLUSIONES

Los programas de investigación en educación matemática, de manera general, asumen la necesidad de enseñar matemáticas “a todos”, con argumentos referidos fundamentalmente a su utilidad en la sociedad contemporánea, así mismo en relación a la formación del pensamiento, considerando que esta área del saber “disciplina” la forma de pensar. Las propuestas en el campo, coinciden, en la conveniencia de que las nuevas generaciones cuenten con una formación matemática.

Ello pareciera deberse a que la sociedad actual se caracteriza por su alto grado de matematización, sin embargo con Heidegger mostrábamos que la matemátización se instituyó como una forma de pensar el mundo, aún cuando este autor muestra que es sólo *una* manera de pensar, pero no es la única, y que dicha manera de pensar implica ya una metafísica particular. Así mismo, el pensar matemático conlleva una visión platónica, ya que mediante esta visión, se descontextualiza la realidad, se trabaja con ella y posteriormente se aplica nuevamente a la realidad. No obstante en ese tránsito, como señala Souza (2005), la realidad ya no se concibe más que matemáticamente, se ha matematizado el mundo, y en ese mismo juego se ha desmundanizado la matemática.

Se considera que en este proceso, se omiten otras formas de *pensar* y de *ser*, particularmente, de niños y jóvenes en los espacios educativos. Estimamos que las matemáticas, si bien constituyen un modelo que nos permite modelar una “realidad”, no se refieren a “la realidad”, porque no hay una realidad libre del observador. Se trata de una realidad construida por el hombre y como tal, las matemáticas, producto de un hombre histórico, generan una realidad particular, realidad que en los espacios educativos se asume como la única, la verdadera, dejando de lado la posibilidad de que los estudiantes puedan vislumbrar la convencionalidad de dicha interpretación.

Se ha aludido a la matemática como una de las asignaturas más útiles en la segregación escolar (Gates, 2004), sin embargo cabe reconsiderar también que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no sólo son una herramienta de segregación social por la selección de contenidos y de la forma en que éstos se presentan, sino que también, dada la naturaleza misma de los contenidos, productos de una sociedad particular, así como el tipo de pensamiento requerido para trabajar con ellos, no sólo es un obstáculo en su “adquisición” o “reconstrucción” sino que dicha formación pueda impactar en la formación de un pensamiento particular. Por tanto, coincidiendo con Skovsmose y Nielsen (1996), cabe considerar la necesidad de poner a la matemática misma como objeto de la crítica,

Pareciera ser que la dificultad con la que se encuentran los estudiantes al acercarse a las matemáticas, es debida justamente al carácter convencional de la disciplina, al ser una construcción situada, histórica y culturalmente. Esta construcción no parece ser tan natural para ellos, ellos tienen sus propias interpretaciones sobre el contenido matemático. Si bien se intenta compartir estas construcciones a través del lenguaje, éste último no siempre es unívoco, los jóvenes, no asumen de manera inicial tal visión del mundo. Esto precisamente lleva a las instituciones escolares a la necesidad de tratar de “educar” a los jóvenes para que puedan acceder a esta visión o lectura del mundo.

Uno de los pilares del pensamiento matematizado contemporáneo lo constituye la asunción del principio de identidad (A = A), el cual, a pesar de asumirse en ocasiones como principio universal o absoluto, al tratar de determinar su propia naturaleza escapa de cualquier definición y comprensión de manera universal.

Como señalamos en los capítulos II y III, el principio de identidad, a pesar de ser fundamento del quehacer matemático formalizado, no representa de ninguna manera la única manera de pensar. El principio lógico de identidad está acotado o limitado, y es admitido convencionalmente. Por tanto, es necesario enmarcar el contexto desde el cual se trabaja. Ello lleva a pensar que este principio sería válido pero sólo de manera circunscrita, como propuesta para generar nuevos desarrollos, y dentro de un contexto particular. No obstante, en el salón de clases, esta convencionalidad desaparece como tal, se asume como verdad absoluta, sin posibilidad de cuestionamiento y sin aclarar sus alcances y limitaciones.

Por otra parte el contexto, en el cual se abordan los contenidos matemáticos, es por demás variable. Un ejemplo de ello como veíamos, lo constituye la propia acepción de variable (cuando se emplea como número generalizado, como incógnita o como relación funcional). Al trabajar con las variables es cuando los jóvenes tienen que atender y dilucidar cuándo es pertinente dicho principio y cuándo deben advertir sus variaciones para proseguir el desarrollo de lo expuesto en clase. La literal, en una expresión algebraica, asume diferentes interpretaciones, pero se admite que ésta es idéntica a sí misma, lo cual parece difícil de aceptar por parte de los jóvenes ante el peso de una definición general, como el que la variable puede asumir cualquier valor. Esta definición se delimita cuando se opera la variable como incógnita, ya que la variable admitiría un valor únicamente en caso de ecuaciones lineales o varios en función de grado de la expresión, mientras que en una expresión donde se encuentra en relación funcional, si bien puede adoptar cualquier valor, una vez que se establece el valor para cualquiera de ellas, la otra no puede entonces tener cualquier valor.

Por otra parte, el principio de identidad, al señalar que A es igual consigo misma, o es lo mismo, es ella misma lo mismo, o algunas otras interpretaciones posibles, conlleva una posición fundante de A, que puede entenderse como un ente, limitado, cercado. Al establecer A se habla de algo, una cosa, un evento, una idea, “algo” entendida con el mayor nivel de abstracción, es tan general que puede ser cualquier cosa, y por ello se abre un abanico de posibilidades de interpretación.

Teniendo como trasfondo el advenimiento de las cosas por el lenguaje, una vez trasformada en “cosa”, esa “cosa” no puede estatizarse, si su referente es lingüístico y, como toda referencia lingüística ésta sólo puede proseguir.

El conocimiento científico parte de la existencia de “algo”. Ese “algo” se encuentra en el camino ya definido por categorías lingüísticas, por tanto, no se puede acercar a nada denominado como “cosa” sin un referente, ya establecido en el propio discurso académico o científico.

En este trabajo, se pone en evidencia que los estudiantes parecen tener dificultades para reconocer el principio de identidad particularmente referido a la literal en una expresión algebraica, en donde tendrían que reconocer que ésta, siempre sería idéntica a sí misma, esto es, tendría el mismo valor, o mantendría la misma relación con los otros elementos de la expresión. A pesar de que en una expresión algebraica el principio de identidad es fundamental tanto para operar con la expresión, así como para comprender la relación entre los otros elementos contenidos en la misma, los estudiantes muestran ciertas reservas en el reconocimiento de la identidad de la variable al trabajar con el contenido algebraico.

La dificultad para el reconocimiento de la identidad de la variable en una expresión, contradice la creencia generalizada en los ámbitos educativos, cuando se establece como obvia y como resultado de la construcción cognitiva de los jóvenes. Esta dificultad no parece ser sólo atribuible a una deficiente enseñanza, o limitaciones conceptuales del estudiante, sino que puede ser un indicador del conflicto entre la propia naturaleza del principio de identidad, dada por su convencionalidad, y las múltiples interpretaciones generadas por los estudiantes. En la medida en que este principio no puede establecerse de manera unívoca, e implica diversas interpretaciones, dichas interpretaciones corresponderían entre otros aspectos, al contexto en el cual se trabaje, sin embargo las particularidades en el empleo de tal principio no parecen quedar muy claras al estudiante, y generalmente es algo que difícilmente se aborda en los espacios educativos.

Se piensa que los estudiantes no solamente asumirían este principio sin ninguna duda, sino que lo harían con tal libertad que les permitiría reconocer cuándo se tiene que admitir que en una expresión algebraica, la literal es la misma y cuándo tendrían que atender a algunas características que permitan el desplazamiento de significado o sentido, a fin de continuar con el trabajo en matemáticas. Un ejemplo de lo anteriormente dicho sería, cuando al proponerse una expresión como “x = y + 2”, el estudiante debiera reconocer en un primer momento que cualquier literal es siempre igual a sí misma y, particularmente en esta expresión, que “x” estaría en función de “y”, así como que el valor de “y” también dependería de “x”. Igualmente tendría que reconocer que cualquiera de las variables puede asumir cualquier valor, pero en cuanto se le asigna un valor a cualquiera de ellas, la otra necesariamente tendría el valor en función del valor dado a la primera, es decir, la variable “x” en un primer momento se encontraría en relación funcional con “y”, pero al darle un valor a “y”, la literal “x” pasa a ser una incógnita. No obstante que en cada expresión “x” sería siempre igual a sí misma, el significado de la variable se ha desplazado. De la misma manera y continuando con la expresión “x = y + 2” se podría proponer que es semejante a “x = 5 + 2”, en donde esta última representaría un caso de la primera, si bien existe una relación entre ambas, no son idénticas a sí mismas, pero al operar con ellas, en el salón de clases, se asumen como idénticas.

Otro aspecto que llama la atención a partir de las argumentaciones dadas por los estudiantes se refiere a la multiplicidad de interpretaciones a las expresiones “x = x”, “x = y” y “x ≠ y”. Así, por ejemplo, encontramos que para los estudiantes “x = x” podría ser la simbolización de dos cosas iguales, dos cosas semejantes, una cosa igual a sí misma, e incluso encontramos interpretaciones de dos cosas diferentes pero que pertenecen a la misma clase o se relacionan entre sí. La expresión “x = y” conlleva todavía un mayor conjunto de interpretaciones.

Esta diversidad de interpretaciones no representa de ninguna manera una concepción errónea por parte de los estudiantes, ya que dichas expresiones se utilizan para representar varias relaciones, a ello se suman las posibles interpretaciones influenciadas por el lenguaje cotidiano.

Otro aspecto que entra en juego en el establecimiento de la identidad (A = A), es justamente que la “cosa A” que se va a identificar consigo misma, para ser igual a sí misma tendría que ubicarse en un tiempo diferente al tiempo que experimentamos de manera cotidiana, para este principio el tiempo necesariamente debe quedar fuera. Desde una perspectiva humana el tiempo no puede quedar estático. El tiempo es una categoría esencial en la vivencia cotidiana del estudiante, lo cual pudiera contraponerse con el tiempo y espacio matemático. Ambos son variables comprendidas dentro de la matemática con las características de cualquier variable, nunca como contexto en el cual se crean. Ello consideramos, pudiera agregarse a la dificultad para acercarse al campo matemático y para tratar con este principio, el cual es ya de suyo convencional y arbitrario.

Como se ha mostrado en los dos últimos capítulos, una gran parte de los estudiantes no parecen reconocer el principio lógico de identidad al acercarse a los contenidos matemáticos, lo cual implica, en primera instancia, un conflicto entre sus particulares formas de aproximación y las formas canónicas necesarias para la comprensión de los contenidos abordados en esta asignatura.

Esto nos lleva a pensar que en los espacios educativos, al ignorar, o sancionar las interpretaciones alternativas de los estudiantes, se obligue a estos últimos a acallar o desechar sus propias argumentaciones, en pos de una clarificación de lo expuesto en clase. Esto requiere por consiguiente un doble esfuerzo, por un lado omitir aquello que no concuerda con el discurso escolar matemático, y por otro comprender la lógica de dicho discurso, que como apuntábamos arriba, obedece a un muy particular modo de proceder establecido convencionalmente. Aquellos estudiantes que no reconozcan esta manera de conducirse, quedarán marginados, primero en lo académico y posteriormente en el ámbito social.

Por otra parte, en el campo educativo la teoría psicogenética, ha tenido un importante papel, cuando menos en lo que se refiere a nuestro país. Los planes y programas de estudio están basados en gran medida en esta perspectiva teórica.

Tal propuesta ha entramado finamente el discurso lógico, matemático y psicológico. Estableciendo una estrecha relación entre las estructuras lógico-matemáticas y las estructuras operatorias del pensamiento, al afirmar que las operaciones intelectuales son lógicas y matemáticas.

Un aspecto de esta propuesta psicogenética, es la comprensión de la identidad como una conquista del desarrollo. De esta manera asume sin cuestionar la existencia del principio de identidad, el cual así mismo representa el fundamento de las estructuras cognitivas.

En esta perspectiva, la relación entre la lógica y las matemáticas ha sido uno de los fundamentos en la caracterización del desarrollo del pensamiento, y esta caracterización del desarrollo del pensamiento constituye asimismo la fundamentación de la incuestionabilidad de los principios lógicos.

El resultado de este entramado, es la omisión de cualquier otra posible manera de abordar el pensamiento, en tanto expone un camino único en el desarrollo del pensamiento, hacia un pensamiento lógico, hipotético deductivo, y por tanto, la finalidad a la cual debieran acceder los estudiantes en su conjunto con las consiguientes implicaciones en la educación. En los espacios educativos pueden variar los contenidos, su ordenamiento, las estrategias didácticas, pero la meta u objetivo tiende a la culminación en un pensamiento formal, científico.

No obstante aún cuando se pretenda dirigir el pensamiento hacia una lógica clásica, en donde el principio de identidad es asumido como verdad absoluta, paradójicamente este principio se ve resquebrajado, tanto en el discurso del profesor como en las múltiples interpretaciones de los estudiantes al tratar de comprender el contenido matemático expuesto en clase.

Si suponemos que el trabajo en el salón de clases impacta en la forma de pensar de los estudiantes, podemos aceptar que repercutirá en la conformación de los individuos como integrantes de una sociedad particular.

Sin embargo, si atendemos a las múltiples interpretaciones que caben tanto del principio de identidad como en las diversas maneras de pensar, y no sólo consideramos la existencia de un pensamiento lógico, racional, cabría la posibilidad de que esta fuente de diversidad tenga como virtud, la oportunidad de abrir un espacio de creación y participación propia por parte de los estudiantes en esta área del saber, posibilidad que les está vetada a partir de la forma en la que se lleva a cabo la enseñanza y particularmente la enseñanza de las matemáticas.

Finalmente ante la interrogante sobre si el principio de identidad constituye la ley suprema del pensar, podemos afirmar que mientras se piense este principio como una caracterización del ente, la respuesta sería negativa.

El principio lógico de identidad pareciera llevar por tanto a una cierta manera de pensar y razonar. Así entonces, las implicaciones de una creación generada por el principio de identidad y la aceptación de su arbitrariedad, por consiguiente, abrirían mundos diferentes.

BIBLIOGRAFÍA

Aleksandrov, A. D. y otros. 1994. *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Alianza Universidad. Madrid, España.

Alemán, Anastasio. 2001. *Lógica, matemáticas y realidad*. Edit. Tecnos. España.

Aristóteles. 1998. *Metafísica* Edición trilingüe por Valentín García Yebra.2ª edición revisada.3ª reimpresión. Editorial Gredos. España.

Aristóteles. 2001. *Tratado de Lógica*. (El Organón). Porrúa. México.

Ausubel, D., Novak y Hanesian. 1983. *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. 2ª ed. Trillas. México.

Ball, S. J. 2001. *Foucault y la Educación. Disciplinas y saber*. Ediciones Morata. España.

Barnett, R. A. 1982. *Álgebra y trigonometría*. Mc Graw Hill. México.

Bishop, A. J. 1996. *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publisher, Netherlands. 827-876.

Brousseau, G. 2000. Educación y didáctica de las matemáticas. En *Educación Matemática*. Vol. 12. No. 1. Abril. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Brown. S. I. 1996. Towards Humanistic Mathematics Education. *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publisher. Netherlands. 1289-1321.

Brown, S. I. 2002. Humanistic Mathematics: Personal Evolution and Excavations. The Humanistic Mathematics. *Network Journal on line*. Spring-Winter 2003. Recuperado el 20 enero de 2007. http://www2.hmc.edu/www_common/hmnj/.

Brown, Tony. 2002. Towards a Hermeneutical Understanding of Mathematics and Mathematical Learning. En *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education*. Edited by Paul Ernest. The Falmer Press. London. 141-150

Brousseau, G. 2000. Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*. 12,1, 5-38

Campos Hernández, Miguel Ángel. 1999. La investigación educativa en Educación Matemática. *Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática*. Elfriede Wenzelburger. Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V. México.

Cantoral, R., Farfán, R, Lezama J., Martínez-Sierra, G. 2006. Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México.

Courant, Richard y Robins, Herbert. I979. *¿Qué es la matemática?* 2ª. Reimpresión. Ed. Aguilar. Madrid.

Descartes. 1972. *Discurso del Método*. Porrúa. México.

Deleuze, G. 1983. Les cours de Gilles Deleuze. Image Mouvement Image Temps.17/05/1983. Cours Vincennes. trad. Ernesto Hernández B. En

http://www.webdeleuze.com/php/texte.php?cle=205&groupe=Image+Mouvement+Image+Temps&langue=3. Recuperado 12 Octubre 2006.

Deutsch, H. 2002. Relative Identity. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* April, 22.

Dossey, J. A . 1992. The nature of Mathematics: its role and its influence In G. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM.

Eggers Lan, Conrado y Juliá, Victoria E. 1978. *Los filósofos presocráticos*. Gredos. Madrid.

Ernest, Paul. 1994. The Dialogical Nature of Mathematics. En *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*. Paul Ernest. The Falmer Press. U.K.

Ernest, Paul. 1996. The Nature of Mathematics and teaching. En *Philosophy of Mathematics and Education Journal.* No. 9, November, 1996.

Ernest, Paul. 2004. What is the Philosophy of Mathematics Education?. En *Philosophy of Mathematics and Education Journal.* No. 18, October 2004.

Fichsbein, E. 1990. *Psychology and mathematics.* En Nesher & Kilpatrick. Mathematics and Cognition. Cambridge University Press. Cambridge.

Flores Ochoa, R. 1994. *Hacia una Pedagogía del conocimiento*. Mc. Graw Hill. Colombia

Foucault, M. 1997a. *Vigilar y castigar*. Siglo XXI. 26ª edición. México.

Foucault, M. 1997b. *La arqueología del saber*. Siglo XXI. México.

Frank, M. 1996. Identity and subjectivity. En *Desconstructive subjetivities*. Editores Simon Critchley y Peter Dews. State University of New York. USA.p- 127-148

Gabilondo P., A. 1996. ¿Qué significa pensar? Acerca del problema de la filosofía. *Tarbiya. Revista de investigación e innovación educativa*. No. 13.39-52

Gadamer, H. G. 1995. *Inicio de la filosofía occidental*. Paidós. España.

Galimberti, U. 1995. La voluntad de dominar. *Archipiélago.* No. 20. primavera 95. Madrid, España. p. 41-44.

Gallardo y Rojano 1988. Áreas de dificultades en la adquisición del Lenguaje Aritmético-Algebraico. En *Recherches en Didaqtique des Mathematics*. Vol. 9/2. Centre Nacional de la Recherche Scientifique. La Pensée Sauvage. Francia.

García Morente, M. 1992. *Lecciones preliminares de Filosofía***.** 4ª reimpresión Editores Unidos. México

Gascón, J., Bosch, M. y Bolea, Pilar. 2001. ¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas? En *Educación Matemática.* Vol. 13.No. 3. Diciembre, 2001. Grupo Editorial Iberoamérica. México.22-63

Gates, P. 2004. Lives, *Learning and Liberty. The impact and responsibilities of mathematics education*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. I pp. 71-80.

Godino, Juan D. y Batanero, M. Carmen. 1994 Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* Vol. 14, n° 3, pp. 325-355. Editions La Pensee Sauvage. Francia.

Godino, J., Batanero, C y Font, V. 2007. *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 7 de junio de 2007.http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_1mayo06.pdf.

Grondin, Jean. 1999 .*Introducción a la hermenéutica filosófica*. Edit. Herder. Barcelona.

Guiber, Nair Teresa. 1991. El texto sobre la ciencia. Desandando la ciencia. En Guiber, N. T. (com). *La razón científica, su texto y su contexto.* Edit. Biblos. Buenos Aires, Argentina.

Guzmán, Miguel de. *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática.* Organización de los Estados Iberoamericanos para la Educación, la ciencia y la cultura. OEI. Recuperado el 24 noviembre de 2006 http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm.

Handal, B. 2003. Philosophies and Pedagogies of Mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal*. 17.

Martin, H. y Schumann. 2000. *La trampa de la globalización*. Taurus. México.

Heidegger, M. 1958. *¿Qué significa pensar?* Nova. Buenos Aires.

Heidegger, M. 1964. *La pregunta por la cosa*. Sur. Buenos Aires.

Heidegger, M. 1990. *Identidad y diferencia*. Anthropos. Barcelona.

Heidegger, M. 1997. *Caminos de bosque***.** Editorial Alianza Universidad. España.

Heidegger, M. 2001. *Conferencias y Artículos*. Serbal. Barcelona.

Hersh, Reuben. 1997. *What is Mathematics really?* Oxford University Press. Oxford.

Hoffmann, M. 1998. ¿Hay una lógica de la abducción? ***Analogía Filosófica*.** XII, pp. 51-55. http://www.unav.es/gep/AN/ANIndice.html. Recuperado 15 de enero 2007.

Horkheimer, M. y Addorno, T. W. (2004). *Dialéctica de la Ilustración. Fragmentos Filosóficos.* Editorial Trotta. Sexta edición. España

http://www.jornada.unam.mx/2002/ago02/020817/02an1cul.php?printver=0. Recuperado 19 Junio 2006.

http://www.observatorio.org/comunicados/comun067.html. Recuperado 26 de Julio 2006.

Kagán, V. F. 1984. *Lovachevski.* Mir. Moscú.

Kant, I.(1995). ¿Qué significa orientarse en el pensamiento? *Excerpta Philosophica*. Facultad de Filosofía de la Universidad Complutense. España.

Kieran, C. 1981. Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.

Kilpatrick, Jeremy y otros. 1995. *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. México.

Kirk-Raven. 1970. *Los filósofos presocráticos.* Gredos, Madrid.

Lerman, Stephen y otros. 2002. Developing Theories of Mathematics Education Research: The ESM Story. *Educational Studies in Mathematics.* 51: pp.23-40. Kluwer Academic Publisher.

López, A. 1996. *Construcción de la noción de variable algebraica en alumnos de nivel medio superior*. Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Querétaro. México.

López A. y Moreno, B. 2006. *Visión absolutista del principio de identidad en el currículo escolar de matemáticas.* XX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Cuba.

Martínez Mígueles, Miguel. 1999. *La Nueva Ciencia. Su desafío, la lógica y método***.** Edit.Trillas. México.

Max-Neef. Manfred. 2003. *Fundamentos de la transdisciplinaridad.* 24/09/03. http://max-neef.cl/publicaciones/trans.htm. Recuperado 15 de julio, 2004.

Morales Luna, Guillermo. 2002. El pensamiento natural y las limitantes formales. *Avance y Perspectiva*. Vol. 21 pp. 355-360. Noviembre-Diciembre 2002.

Moslehian, M. S. 2003. A Glance at postmodern Pedagogy of Mathematics. *Philosophy of Mathematics and Education Journal* May 2003.

Moslehian, Mohammad S. 2004. Posmodern View of Humanistic Mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal*. No. 18 October 2004.

Nicol, Eduardo. 2001. *Los principios de la ciencia*. Fondo de Cultura Económica. México.

Parménides. Poemas del Ser. 1970. Traducción española de Jesús García Fernández en Kirk Raven: *Los filósofos presocráticos*. Edit. Gredos. Madrid.

Perero, Mariano 1994. *Historia e historias de matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Piaget, Jean. 1971. *Ensayo de Lógica Operatoria.* Guadalupe. Buenos Aires.

Piaget, J. 1977a. *Psicología de la inteligencia.* Psique. Buenos Aires, Argentina.

Piaget, J. 1977b. *Psicología y Pedagogía.* Ariel. Barcelona.

Piaget, J. 2000. *La equilibración de las estructuras cognitivas.* 6ª ed. Siglo XXI. México.

Piaget, Jean y otros. 1985a. *Epistemología y Psicología de la Identidad***.** Paidós. Psicologías del Siglo XX. 1ª reimpresión. México.

Piaget, J. 1985b. *A dónde va la educación*. Teide. Col. Hay que saber. México.

Piaget, J. 1988. *Seis estudios de psicología*. Planeta. México.

Piaget, Jean e Inhelder, Bärbel. 1991. *Génesis de las Estructuras Lógicas Elementales. Clasificaciones y Seriaciones.* Guadalupe. 6ª edición. Buenos Aires.

Piaget, J. y Szeminska 1996. *Génesis del número en el niño.* Guadalupe. Buenos Aires.

Piaget, J. 1999. *De la pedagogía.* Paidós. Buenos Aires, Argentina.

Platón. 1990. *Diálogos*. Porrúa. México.

Reale, G. y Antisieri, D. 1991. *Historia del pensamiento filosófico y científico.* Vol. I. Herder. España.

Resnick, Lauren B. y Ford, Wendy W. 1998. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Paidós. Barcelona, España.

Sfard, Anna. 2001. *Learning mathematics as developing a discourse*. Proceedings of the XXIII Annual Meeting.PME.- NA Vol. 2, October. Utha.

Sierpinska, A y Lerman, S. 1996. Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. Bishop, A. J. *International Handbook of Mathematics Education*, 827-876. Kluwer Academic Publisher, Netherlands.

Skovsmose, O. y Nielsen, L. 1996. Critical Mathematics Education. En Bishop, A. J. *International Handbook of Mathematics Education*, 827-876. Kluwer Academic Publisher, Netherlands.

Skovsmose, O. 1994. *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Souza Da Fonseca. 2005. *Sobre a matematização do mundo e a desmundanização matemática*. Tesis doctoral. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Brasil.

Tort, Michel. 1977. *El cociente intelectual.* Editorial Siglo XXI. México

Tymoczko. 1994. Structuralism and Pos-modernism in the Philosophy of mathematics. *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective.* Paul Ernest. The Falmer Press.

Trigueros, M. Ursini, S y Lozano D. 2000. La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática*. Vol. 12. No. 2. Agosto2000. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Walkerdine, V. 1995. Psicología del desarrollo y pedagogía centrada en el niño: la inserción de Piaget en la educación temprana. En *Escuela, Poder y Subjetivación* de Jorge Larrosa. Ediciones de la Piqueta. Madrid

Zapata M., Jacqueline. 2003. *Saber Científico y Arte lector en escenarios educativos.* Facultad de Psicología. Universidad Autónoma de Querétaro. México.

Anexo 1. Composición de la población estudiantil participante.

Actividad/Instrumento	No. de estudiantes	Grado	Total de estudiantes por actividad/ Instrumento	Institución
Entrevistas acerca de la identidad, tanto en objetos concretos cotidianos como en expresiones algebraicas	5 5 5	1º 2º 3º	15	Colegio de Bachilleres, Querétaro
Cuestionario (A) sobre la identidad en relaciones entre figuras geométricas y expresiones algebraicas	40	5º semestre	40	Colegio de Bachilleres, Querétaro
Cuestionario (B) sobre el número de valores de la literal en expresiones algebraicas.	34 30 25	1er. Semestre 3er. Semestre 5º. Semestre	89	Escuela de Bachilleres. Universidad Autónoma de Querétaro.
Entrevistas sobre cuestionario B	4 3 3	2º. Semestre 4º. Semestre 6º. Semestre	10	Escuela de Bachilleres. Universidad Autónoma de Querétaro.
TOTAL DE ESTUDIANTES PARTICIPANTES			154	

Anexo 2. Instrumentos

A.1. Cuestionario sobre el principio de identidad en relaciones entre figuras y expresiones algebraicas.

"A continuación se presenta una serie de figuras y a su derecha un conjunto de expresiones, tacha el inciso o incisos que correspondan a la figura, puedes marcar una o más opciones. Proporciona la justificación".

Figura 1

f. 1 = 1

g. 1

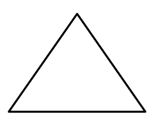
h. x = x

i. x = y

j. Otra (escríbela)________________

Por qué?

Figura 2



f) 1 = 1

g) 1

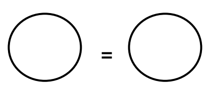
h) x = x

i) x = y

j) Otra (escríbela)_________________

Por qué?

Figura 3



f) 1 = 1

g) 2

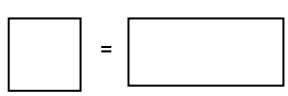
h) x = x

i) x = y

j) Otra (escríbela)___________________

Por qué?

Figura 4



f) 1 = 1

g) 2

h) x = x

i) x = y

j) Otra (escríbela)___________________

Por qué?

A.2. Cuestionario (B) sobre el número de valores de la literal en expresiones algebraicas.

CUESTIONARIO

Para cada una de las siguientes expresiones ¿cuántos valores puede tomar cada letra?

1. $x + 2 = 2 + x$
2. $3 + a + a = a + 10$
3. $x = x$
4. $4 + s$
5. $x + 5 = x + x$
6. $3 + a + a + a + 10$
7. $7x^2 = 2x - 5$
8. $\frac{x}{x^2 - 4} = 3$
9. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
10. $4 + x^2 = x\,(x + 1)$