

Universidad Autónoma de Querétaro  
Facultad de Ingeniería  
Doctorado directo en Ingeniería

## TESIS

### Mejoramiento del contraste e índice de contraste en imágenes con deficiente iluminación

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

### Doctor en Ingeniería

Presenta:

M.M.A. Angélica Rosario Jiménez Sánchez

Dirigido por:

Dr. Jorge Domingo Mendiola Santibáñez

#### SINODALES

Dr. Jorge Domingo Mendiola Santibáñez  
Presidente

Dr. Damián Vargas Vázquez  
Secretario

Dr. Iván R. Terol Villalobos  
Vocal

Dr. Gilberto Herrera Ruíz  
Suplente

Dra. Rebeca del Rocío Peniche Vera  
Suplente

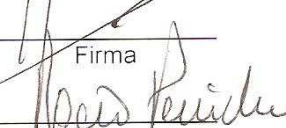
Dr. Gilberto Herrera Ruíz  
Director de la Facultad

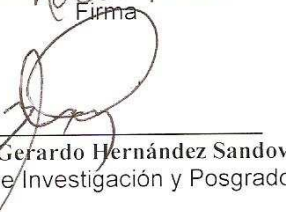
  
Firma

  
Firma

  
Firma

  
Firma

  
Firma

  
Firma

Dr. Luis Gerardo Hernández Sandoval  
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario  
Querétaro, Qro.  
Enero, 2011  
México

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
QUERÉTARO  
FACULTAD DE INGENIERÍA**

---

Mejoramiento del contraste e índice de  
contraste en imágenes con deficiente  
iluminación

---

QUERÉTARO, QRO., ENERO DE 2011.

# RESUMEN

La presente tesis se enfoca a la propuesta de operadores de mejoramiento de contraste bajo la noción de la ley de Weber, la cual hace uso de un parámetro correspondiente al fondo de la imagen. De esta manera se presentan dos propuestas de aproximación a este parámetro, en primer lugar se realiza una aproximación al analizar por bloques la información de la imagen de entrada; mientras que una segunda propuesta considera una aproximación mediante operadores morfológicos en donde interviene la erosión de la apertura por reconstrucción. El objetivo de los operadores de contraste consiste en normalizar los niveles de intensidad de los píxeles de la imagen de entrada con la finalidad de evitar cambios bruscos de intensidad entre las diferentes regiones.

Además se propone un índice para cuantificar el contraste de una imagen, de esta manera es posible identificar la imagen que presenta un mejor contraste visual sin recurrir a una evaluación subjetiva. Este índice de contraste involucra operadores morfológicos de uso común, siendo esto una ventaja importante al ser implementado.

Finalmente se hace la propuesta de un operador definido como gradiente morfológico viscoso.

**Palabras clave:** (Ley de Weber, contraste morfológico, fondo de la imagen, índice de contraste, gradiente morfológico viscoso).

# SUMMARY

The present thesis is focused in the proposal of operators of enhancement contrast under the notion of the Weber's Law, which use a parameter corresponds to the background of the image. In this way two proposals of approximation to this parameter are presented. In the first place an approximation is carried out when the information of the input image is analyzed by blocks, while that a second proposal considers an approximation by means of morphological operators, where the erosion of the opening by reconstructions takes part. The objective of the contrast operators consists in normalizes the grey level of the input image with the finality of avoiding abrupt changes of intensity between the different regions.

Furthermore an index to quantify the contrast of an image is proposed, in this way is possible identify the image which presents a good visual contrast without a subjective evaluation. This contrast index involves morphological operators of common use, which is a main advantage to be implemented.

Finally, an operator named morphological viscous gradient is proposed.

**Key words:** (Weber Law, morphological contrast, image background, contrast index, viscous morphological operators, morphological viscous gradient).

## Dedicatorias y Agradecimientos

*A mi Familia que durante todo este tiempo me ha comprendido y apoyado incondicionalmente. A mi hijo Omar Alejandro y a mi bebita Regina por el maravilloso cariño que me brindan y por que son mi inspiración. A mi esposo Felipe Baltazar por ser tan bueno conmigo. A mis Padres que siempre me han apoyado Maria Sánchez y J. Concepción Jiménez, a mis hermanos Araceli, Joel, Manuel y Leticia y a sus respectivas familias. También a todos mis amigos y amigas quienes han sido de gran apoyo para mi. Gracias a todos por su amor, confianza, motivación y compañía que me han ayudado a lograr este objetivo.*

*Quiero agradecer a Dios por darme la vida y esta oportunidad de seguir estudiando, de sentir su presencia en cada etapa de mi vida y por permitirme concluir este ciclo de formación profesional.*

*A mi director de tesis el Dr. Jorge D. Mendiola Santibáñez, por haberme guiado durante mi formación académica, por su paciencia, comprensión y apoyo.*

*Al Dr. Gilberto Herrera Ruíz que siempre busca un bien para todos y que es un verdadero ejemplo a seguir, al que admiro y agradezco sus consejos y motivaciones que me ha dado. A la Dra. Rocío Peniche Vera quien confió en mí y me apoyó en todo para la realización del Doctorado.*

*A mis coasesores el Dr. Damián Vargas Vázquez y el Dr. Iván Terol a quienes les agradezco de manera muy especial por su apoyo brindado y por las sugerencias, comentarios y aportaciones para este trabajo de tesis. A todos mis maestros de los cuales me siento muy orgullosa y quienes me enseñaron a amar la investigación y con su ejemplo y sabiduría me han formado para poder enfrentar las dificultades profesionales.*

*A las secretarias de la Dirección de la Facultad de Ingeniería por la atención brindada durante los diferentes trámites realizados en esta Facultad.*

*Al CONACYT por la beca otorgada durante la realización del Doctorado en la Universidad Autónoma de Querétaro, sin la cual no hubiera sido posible este trabajo.*

*A la Universidad Autónoma de Querétaro por el apoyo prestado durante mi estancia en el Doctorado.*

# Índice general

<b>1. Introducción y objetivos</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Hipótesis de trabajo . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	3
1.4. Material y equipo de trabajo . . . . .	4
1.5. Organización de la tesis . . . . .	4
<b>2. Revisión de la literatura</b>	<b>6</b>
2.1. Contraste de una Imagen . . . . .	6
2.1.1. Mejoramiento del contraste . . . . .	6
2.1.2. Índice de contraste . . . . .	9
2.1.3. Teoría de la conectividad . . . . .	10
<b>I Fundamentos teóricos</b>	<b>13</b>
<b>3. Antecedentes y marco conceptual de la MM</b>	<b>14</b>
3.1. Antecedentes e introducción a la MM . . . . .	14
3.2. Bases de la MM . . . . .	15
3.2.1. Representación de una imagen . . . . .	15
3.2.2. Principios y definiciones básicas . . . . .	16
3.2.3. Operadores de conjuntos aplicados en imágenes . . . . .	17
3.2.4. El elemento de estructura . . . . .	18
3.2.5. Caso binario de la erosión y dilatación morfológica . . . . .	21
3.2.6. Caso niveles de gris de la erosión y dilatación morfológicas . . . . .	24
3.2.7. Propiedades de la erosión y la dilatación . . . . .	24
3.2.8. Filtros morfológicos basicos. Apertura y cierre morfológico . . . . .	27
3.2.9. Gradiente morfológico . . . . .	30

3.2.10. Transformaciones por top-hat . . . . .	32
3.3. Filtros por reconstrucción . . . . .	32
3.4. Mapeos de contraste . . . . .	36
3.5. Teoría de la conectividad . . . . .	38
3.6. Operadores viscosos . . . . .	41
<b>II Propuestas</b>	<b>44</b>
3.7. Luz, luminancia, brillo y contraste . . . . .	45
3.8. Ley de Weber . . . . .	46
3.9. El caso de la ley de Weber en imágenes . . . . .	47
3.9.1. Propuesta: Aproximación al fondo de la imagen por bloques . . . . .	49
3.10. Propuesta: Determinación del fondo de la imagen usando la apertura por reconstrucción . . . . .	53
3.11. Propuesta: Medida del contraste . . . . .	58
3.12. Propuesta: Gradiente morfológico viscoso . . . . .	59
<b>4. Resultados</b>	<b>64</b>
4.1. Una aplicación a la mejora de contraste en imágenes con mala iluminación . . . . .	64
4.1.1. Introducción . . . . .	64
4.1.2. Definición del problema . . . . .	65
4.2. Comparación con otros operadores de contraste . . . . .	68
4.3. Aplicación del índice de contraste . . . . .	75
<b>5. Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>
<b>6. Apendice</b>	<b>92</b>
6.1. Código . . . . .	92
6.1.1. Programa para el mejoramiento del contraste . . . . .	92
6.1.2. Programa del índice de contraste . . . . .	94
6.2. Artículos publicados . . . . .	95

# Índice de figuras

3.1. Supremo e ínfimo de dos funciones. . . . .	18
3.2. Diferentes elementos de estructura. . . . .	20
3.3. Ejemplos de aplicación de dos elementos de estructura. . . . .	20
3.4. Punto de vista geométrico de la erosión y dilatación binaria . . . . .	23
3.5. Punto de vista geométrico de la apertura y el cierre morfológico . . . . .	28
3.6. Aplicación del gradiente a una imagen . . . . .	31
3.7. Aplicación de los operadores top-hat a una imagen . . . . .	33
3.8. Cierre por reconstrucción. . . . .	36
3.9. Apertura conexa puntual. . . . .	40
3.10. Dilatación morfológica. . . . .	42
3.11. Aproximación al fondo de la imagen . . . . .	49
3.12. Fondo desigual de una imagen . . . . .	50
3.13. Fondo como una función continua . . . . .	51
3.14. Generación de nuevos contornos . . . . .	54
3.15. Criterio del fondo como la apertura por reconstrucción . . . . .	55
3.16. Fondo de la imagen obtenida de la apertura por reconstrucción . . . . .	56
3.17. Representación gráfica de una imagen y la aproximación al fondo de la imagen . . . . .	57
3.18. Erosión y dilatación viscosa . . . . .	61
3.19. Gradiente Morfológico viscoso . . . . .	62
3.20. Gradientes Morfológicos viscosos . . . . .	63
4.1. Detección del fondo de la imagen por bloques y mejora del contraste . . . . .	66
4.2. Detección del fondo de la imagen usando la erosión y la dilatación morfológicas . . . . .	67
4.3. Fondo de la imagen usando la apertura por reconstrucción con diferentes tamaños del elemento de estructura $\mu$ . . . . .	69
4.4. Fondo de la imagen usando la erosión de la apertura por reconstrucción con diferentes tamaños para el elemento de estructura $\mu$ . . . . .	70
4.5. Comparación de histogramas . . . . .	71



4.6. Comparación entre una metodología de contraste y la propuesta dada en este trabajo . . . . .	73
4.7. Comparación entre operadores de contraste . . . . .	74
4.8. Aplicación de la ecuación 3.65 a una imagen normal . . . . .	75
4.9. Aplicación del índice de contraste . . . . .	77
4.10. Aplicación del índice de contraste . . . . .	78
4.11. Gráficas correspondientes al índice de contraste . . . . .	82
4.12. Contornos de la imagen . . . . .	84

# Capítulo 1

## Introducción y objetivos

### 1.1. Introducción

La Morfología Matemática (MM) es una metodología de procesamiento de imágenes que tuvo sus orígenes en Francia a finales de los años 60's. Dicha metodología fue propuesta por G. Matheron y J. Serra (1967), ambos investigadores de la escuela de Minas de París en Fontainebleau, quienes trabajaron en problemas de petrografía, disciplina que estudia la estructura, composición y origen de las rocas, y mineralogía, disciplina que tiene como objeto el estudio de los minerales.

La MM surge con la teoría de conjuntos y con el tiempo se convierte en una rama de estudio que cuenta con sus propias definiciones y teoremas, mismas que son aplicables en diferentes condiciones para la resolución de diversos problemas como, por ejemplo, la segmentación, reconstrucción, detección de bordes, el aumento de contraste, análisis de texturas, la determinación de los objetos presentes, etc. Entre las múltiples áreas de aplicación en las cuales la MM ha sido aplicada exitosamente se encuentran la medicina, biología, aplicaciones militares, robótica, ciencia de materiales, identificación, reconocimiento de documentos, oceanografía, geografía, etc.

Entre las líneas de investigación de la MM se encuentran la segmentación y la mejora del contraste que son dos técnicas útiles en el procesamiento de imágenes. La segmentación es

el proceso de particionar una imagen en sus regiones significativas, mientras que la mejora del contraste busca realzar contornos y acentuar regiones.

La segmentación de imágenes digitales es el área de investigación que más ha sido abordada en MM. Por ejemplo, una prueba de segmentación típica es la teledetección que consiste en descomponer una imagen aérea o satelital en áreas urbanas y rurales.

Es importante destacar que no existe una manera única para segmentar una imagen, pues depende de la calidad visual y de las características de los objetos que contiene. Dentro de la MM el método de vertientes más marcadores (watershed en inglés) junto con la reconstrucción en escala de grises son herramientas poderosas para segmentar imágenes. Para aplicar el método de watershed es necesario conocer las diferentes herramientas para extraer los marcadores. Entre estas herramientas los filtros morfológicos juegan un papel fundamental. Particularmente, los filtros conexos por reconstrucción han sido utilizados exitosamente no sólo en el filtrado sino en la segmentación de imágenes. Una de las características más importantes de los filtros por reconstrucción es que permiten la extracción completa de los objetos marcados sin generar nuevos contornos.

En la segmentación, la conectividad juega un papel muy importante. En matemáticas, una área que aborda este tema es la topología en la cual se formaliza este concepto y se establecen sus definiciones y teoremas. La conectividad se establece en un conjunto y, como se ha mencionado anteriormente, la MM está basada en la teoría de conjuntos. Intuitivamente, un conjunto conexo es aquel formado por una sola "pieza" que no se puede dividir.

Con la introducción de este concepto en MM, se han establecido diferentes maneras de caracterizar un conjunto conexo con las definiciones de los operadores morfológicos. Con el objetivo de identificar aquellos objetos conexos en una imagen y realizar la segmentación bajo el reconocimiento de estas formas, Matheron y Serra (Serra, 1988a) profundizaron el concepto de conectividad estableciendo el concepto de clase conexa. Además otros tipos de conectividad han sido propuestas en Ronse y Heijmans (1991), Heijmans (1997) y Serra

(1988a).

La conectividad es un concepto que ha sido empleado en diferentes transformaciones morfológicas con la finalidad de proveer un mejor tratamiento a las componentes de la imagen. Por ejemplo, en el trabajo de (Santillan et al., 2009) se propone una serie de transformaciones morfológicas viscosas. Para llevar a cabo esta caracterización, el espacio de trabajo usual  $P(E)$ , es decir el conjunto de todos los subconjuntos, es sustituido por el conjunto formado de las dilataciones de los subconjuntos.

En cuanto al problema de segmentación, en este trabajo se presenta una metodología basada en operadores morfológicos viscosos, principalmente de la apertura y cierre viscoso. Estos operadores han sido descritos en los trabajos de Terol-Villalobos (1996), Terol-Villalobos (1998), Terol-Villalobos y Vargas-Vázquez (2001) y Terol-Villalobos y Vargas-Vázquez (2002).

También se presenta la formalización bajo un esquema matemático de los algoritmos propuestos.

## 1.2. Hipótesis de trabajo

Por medio de operadores morfológicos es posible aproximar al fondo de la imagen para construir operadores de mejoramiento de contraste basados en la ley de Weber. De esta manera es posible obtener un índice de cuantificación de contraste que permita determinar la imagen con el mejor contraste visual. Por otra parte, es posible construir operadores gradientes viscosos con la teoría de conectividad.

## 1.3. Objetivos

Esta Tesis se centra fundamentalmente en dos objetivos principales:  
Proponer operadores de mejoramiento de contraste en imágenes con deficiente iluminación, así como un índice de cuantificación del contraste percibido basados en la Ley física de Weber.

## 1.4. Material y equipo de trabajo

Para la realización de este trabajo se utilizó la base de datos desarrollada por Peter Belhumeur y Athos Georgiades, en el centro de visión y control computacional de la Universidad de Yale (<http://cvc.yale.edu/projects//yalefacesB/yalefacesB.html>). Además de imágenes de peces las cuales fueron adquiridas manualmente mediante una cámara digital Samsung de 6 mp de resolución, un trípode para cámara, una pecera cuyas medidas son: 80 cms de largo, 35 cms de ancho y 60 cms de alto y peces tilapia.

Para la programación de los algoritmos se utilizó el programa de Matlab 6.0 debido a que cuenta con un toolbox de imágenes. También se utilizó la plataforma para procesar imágenes desarrollada por el Dr. Iván R. Terol Villalobos.

## 1.5. Organización de la tesis

En el capítulo segundo se exponen los diferentes trabajos que se han reportado en la literatura y que están relacionados con el tema de esta investigación. Se discuten las diferencias entre las metodologías más empleadas en la actualidad, así como su aplicación en visión por computadora.

En el capítulo tercero se realiza una revisión teórica de la MM. Se presentan las operaciones básicas de la morfología desde la teoría de conjuntos hasta la definición de filtros morfológicos. En este capítulo todas las operaciones quedan definidas formalmente, así como sus propiedades.

El capítulo cuarto es la parte central de esta tesis, ya que presenta un amplio y detallado estudio de las propuestas sobre los algoritmos para el mejoramiento del contraste e índice de contraste.

En el capítulo quinto, se presentan las aplicaciones sobre imágenes de los algoritmos propuestos.

En el apéndice se presenta la demostración de las propiedades de los operadores propuestos, también los algoritmos desarrollados en Matlab y una aplicación de los operadores viscosos para segmentar.

Finalmente, en el apartado de la bibliografía, se presentan todas las referencias em-

pleadas y comentadas a lo largo de la tesis.

# Capítulo 2

## Revisión de la literatura

### 2.1. Contraste de una Imagen

En este trabajo, el contraste es la diferencia entre las zonas claras y oscuras de una imagen. Ésta es sólo una definición de contraste, aunque existen otras definiciones como la diferencia en propiedades visuales que hacen que un objeto se distinga o sólo la diferencia en color de un punto a otro.

#### 2.1.1. Mejoramiento del contraste

Las variaciones en la dirección y la intensidad de la iluminación, son factores que modifican significativamente la apariencia de los objetos en una imagen digital. La iluminación ambiental puede variar a lo largo del día en ambientes interiores y exteriores. Debido a la forma tridimensional de los objetos, una fuente de iluminación puede generar sombras que acentúan o disminuyen ciertos rasgos de la imagen. Más aún, distintas condiciones de iluminación pueden producir representaciones desiguales de un mismo objeto. Dichas variaciones son indeseables ya que dificultan, por ejemplo, el proceso de segmentación, el reconocimiento de patrones, entre otros.

Las técnicas de realce de contraste de imágenes han recibido mucha atención y abarcan un amplio rango de aplicaciones entre las cuales se incluyen el mejoramiento de la calidad

visual de retratos adquiridos con iluminación deficiente, su aplicación en el área de materiales, hasta su aplicación en imágenes médicas.

El problema del realce o mejoramiento de contraste en imágenes digitales se puede abordar desde distintas metodologías, una de ellas es la MM.

En MM, el estudio del contraste se basa en la noción de mapeo de contraste, como se describe en el trabajo presentado por Meyer y Serra (1989). La idea principal en este tipo de mapeo consiste en comparar todo punto de la imagen original con dos patrones, subsecuentemente se elige el valor más cercano de estos patrones respecto a la imagen de entrada. Esta idea fue sugerida por Kramer y Bruckner (1975), sin embargo, la transformación original de Kramer y Bruckner presenta algunos problemas debido a inestabilidades cuando esta transformación es iterada. El principal problema es el uso de transformaciones no idempotentes como son la erosión y la dilatación para su construcción (Serra, 1988b).

Los primeros trabajos de la teoría del contraste en MM fueron realizados por Meyer y Serra (1989). Ellos proponen el empleo de primitivas idempotentes en los mapeos de contraste morfológico de dos y tres estados para no degradar a la imagen de salida. Sin embargo, no es totalmente cierto que la degradación en las imágenes de salida pueda ser evitada solo por el empleo de transformaciones idempotentes, ya que la forma del elemento de estructura aparece a medida que se incrementa su tamaño.

Cuando la erosión o la dilatación se emplean como patrones para construir los mapeos de contraste morfológicos, aparece el riesgo de degradar la imagen cuando se iteran estos operadores. Transformaciones básicas como la dilatación y la erosión fueron utilizadas de manera separada, dando como resultado una clase de filtros basados en la noción de los gradientes morfológicos externo e interno llamados filtros morfológicos por pendiente. Estos conceptos se describen en (Terol-Villalobos, 1996), (Terol-Villalobos, 1998), (Terol-Villalobos, 2001) y (Terol-Villalobos y Cruz-Mandujano, 1998). Esta opción permite tener un mejor control sobre la imagen de salida y atenuar la degradación de la imagen bajo itera-



ciones de los operadores.

Sin embargo, algunas veces los filtros morfológicos por pendientes son sensibles a algunas configuraciones de contornos ruidosos. Con el objeto de atenuar este inconveniente, en Terol-Villalobos (2001) se propuso una clase de filtros morfológicos por pendientes conexos. Estos filtros tienen la característica de no generar nuevos contornos en la imagen de salida. El empleo de transformaciones conexas permite controlar mejor el contraste de la imagen procesada, evitando la degradación de la imagen aún bajo iteraciones del operador. Sin embargo, el criterio de gradiente en los filtros morfológicos por pendiente no ha sido tratado a profundidad, siendo éste una alternativa importante para controlar el contraste final por medio de estos filtros.

Existen también técnicas basadas en el análisis estadístico de los datos; por ejemplo, las técnicas de ecualización del histograma global y local son comúnmente usadas. Durante el procesamiento de ecualización del histograma se reordena la distribución de los niveles de gris de una imagen para obtener un histograma uniformemente distribuido. Aunque, la principal desventaja de la ecualización del histograma es que las propiedades globales de la imagen no pueden ser aplicadas apropiadamente en un contexto local.

De hecho, las modificaciones inducidas por la ecualización del histograma tratan todas las regiones de la imagen de igual manera y, en consecuencia, frecuentemente conduce a un desempeño local pobre en términos de preservación de detalles. De esta forma, aún cuando son varios los algoritmos reportados para compensar los cambios en la iluminación, dependiendo de la aplicación final a la que se destinen, algunos pueden no ser los más adecuados. Tal es el caso de las metodologías basadas en modelos donde éstos por lo general suelen ser más complejos y demandar una capacidad de cálculo elevada que en determinado caso pudiera ser prohibitiva. Otras, por su parte, son de implementaciones más sencillas, tienen dificultad para preservar ciertas características de la imagen las cuales pueden ser fundamentales en etapas de procesamiento posteriores, tales como, la preservación de contornos o de extremos regionales.

También se ha tratado el problema de mejora de contraste en imágenes como menciona

Zhixin (2005), quien propone un conjunto de transformaciones para mejorar las imágenes digitales de documentos históricos que corresponden a los manuscritos en hojas de palma escritos en el siglo XV a.c. encontrados en el sureste de Asia en el siglo XIX. Este estudio está basado en el método de la normalización del fondo de la imagen para mejorar imágenes de los documentos en escala de grises.

Por otra parte, entre los autores que han trabajado con algoritmos para mejora del contraste en imágenes con mala iluminación podemos citar a Jianyu et al. (2006), quien presenta un algoritmo de procesamiento de imágenes para cuantificar el promedio de la velocidad del movimiento de una escuela de peces tilapia en un acuario. Este método está basado sobre la alteración en el área proyectada causada por el movimiento del pez, se capturan diferentes fragmentos de imágenes en intervalos de tiempo dados. El método de realce de la imagen consiste en separar los componentes de la imagen RGB y verificar el contraste de cada componente. Mientras que la corrección e iluminación se realizó mediante la aplicación de transformaciones morfológicas Top-Hat.

De aquí surge el interés de proponer algoritmos para mejorar el contraste de imágenes mal iluminadas, los cuales hacen uso del fondo de la imagen con la finalidad de aclarar el nivel de gris del píxel tratado.

Hasta el momento dentro de la MM la problemática de una pobre iluminación no ha sido abordada mediante los operadores de contraste morfológicos existentes.

### 2.1.2. Índice de contraste

Las imágenes digitales están sujetas a una serie de transformaciones que afectan su contraste ya sea durante el proceso de adquisición, procesamiento, almacenamiento, transmisión y reproducción, la manera más usual para determinar la calidad visual de la imagen es por medio de una evaluación subjetiva; la cual es inconveniente debido al tiempo en que se realiza.

La medida del contraste involucra directamente el concepto de luminancia. Por ejemplo, en la literatura las leyes de Weber y Michelson han sido utilizadas de manera común como

modelos físicos, mientras que numerosos modelos basados en el sistema visual humano han sido propuestos; la mayoría de estos modelos se refieren a la habilidad de percibir formas geométricas básicas e ilusiones ópticas.

Pocos de estos modelos trabajan apropiadamente, principalmente porque el sistema visual humano es enormemente complejo. A pesar de esto, existen algunos modelos que trabajan razonablemente bien; por ejemplo Barten (1992), Blommaert y Martens (1990), Horn (1997), Peli (1990) y Stockham (1972). La mayoría de estos modelos se refiere a la predicción visual, tal como sensibilidad del contraste Barten (1992), inducción/asimilación de luz y efectos de bordes Blommaert y Martens (1990), determinación de luminosidad Horn (1997), Peli (1990) y Stockham (1972). Entre otros trabajos que analizan medidas de contraste esta el desarrollado por Zhang y Wandell (1998) quienes descubrieron que el S-Cielab tiene problemas con imágenes con contraste negativo (es decir, el valor de la luminancia de un punto es mayor que la media local del punto). Además Wang et al. (2004) propone el modelo SSIM el cual incorpora una comparación de contraste para predecir la calidad de la imagen. Taylor incorpora una medida de contraste en su cuantificador de fidelidad de una imagen. McCann (1995) también establece la importancia de una métrica de contraste en orden para calcular la imagen con mejor apariencia visual.

En nuestro caso, se introduce un índice de contraste que permite determinar la imagen de salida que presenta un mayor contraste desde un punto de vista percepción visual humana. Este índice está basado en la ley de Weber en la cual se considera el parámetro correspondiente al fondo de la imagen. En Mendiola-Santibáñez y Terol-Villalobos (2005) se consideró dicho parámetro como un valor constante igual a cero.

También en el trabajo de Wang y Bovik (2009) se propone un índice para medir la calidad de una imagen considerando una imagen de referencia y otra imagen modificada. Esta técnica es útil en imágenes comprimidas, sin embargo el método requiere a la imagen de referencia para compararla con la imagen obtenida.

### 2.1.3. Teoría de la conectividad

Los primeros estudios sistemáticos sobre operadores conexos fueron llevados a cabo por Serra y Salembier (1993). Aunque el concepto de apertura por reconstrucción, uno de los

primeros operadores morfológicos conexos estudiados en la literatura, surgió aproximadamente 10 años antes en los inicios de los años 80's.

El concepto de conectividad es fundamental en el análisis de imágenes y en problemas de visión por computadora, particularmente en problemas de segmentación y detección de objetos. Técnicas para extraer regiones conexas u objetos conexos en una imagen han sido desarrollados y adaptados en problemas de segmentación y detección de objetos. En el análisis y procesamiento de imágenes, la conectividad ha sido definida desde el punto de vista topológico o de la teoría de gráficas.

Además de las incompatibilidades entre estas aproximaciones existen limitaciones que restringen el tipo de objeto para los cuales la conectividad puede ser aplicada. Estos problemas de conectividad clásica inspiraron a Serra (1988a) para proponer un enfoque de conectividad puramente algebraico, conocido como clases conexas. Se han realizado varias investigaciones relacionadas con este tema para resolver problemas como el filtrado de imágenes. Particularmente, la clase de filtros conexos, llamados por reconstrucción, ha sido aplicada exitosamente no sólo en el filtrado de imágenes sino también en la segmentación.

También en el trabajo de Braga-Neto y Goutsias (2003) se propone un enfoque de conectividad multiescala en imágenes en escala de grises. La idea de la conectividad multiescala surge naturalmente de la observación de que la conectividad de un objeto depende sobre la escala particular en la cual es observada. La dependencia de conectividad sobre la escala puede ser equivalentemente caracterizada ya sea por una medida de conectividad, la cual cuantifica el grado de conectividad de un objeto o por una conectividad piramidal que es una secuencia anidada de clases conexas que dependen de una escala.

Por otra parte, los operadores conexos a nivel zona plana se han aplicado en el análisis de imágenes, los cuales son definidos usando criterios de conectividad. Un operador conexo preserva información de formas y contornos, conservando la mayoría de la información percibida por el observador.

Braga-Neto (2005) propone el estudio de operadores conexos en el contexto de conectividad multiescala, definiendo la noción de un operador  $\sigma$ -conexo que es un operador

conexo en la escala  $\sigma$ .

**Parte I**

**Fundamentos téoricos**

# Capítulo 3

## Antecedentes y marco conceptual de la MM

El presente capítulo se encuentra dividido en dos partes, la primera de ellas consiste en presentar las definiciones básicas de la MM y la notación que se usará en el documento; mientras que la segunda parte corresponde a las propuestas de algoritmos para el mejoramiento de contraste, índice de contraste y su formalización.

### 3.1. Antecedentes e introducción a la MM

La MM es una metodología de procesamiento de imágenes con fundamentos matemáticos que tienen vínculos al álgebra abstracta, topología, geometría discreta, geometría integral, probabilidad geométrica, ecuaciones diferenciales, etc. Y constituye una alternativa al procesamiento tradicional de señales tradicionales (Ronse, 2005).

El objetivo inicial de sus fundadores G. Matheron y J. Serra era caracterizar propiedades mecánicas y físicas de ciertos materiales (secciones de roca, cerámica policristalina), tales como porosidad, en los cuales se examinaba la estructura geométrica de la muestra; siendo formalizados estos trabajos a partir de conjuntos aleatorios cerrados. Posteriormente se presentaron nuevas transformaciones morfológicas así como su formalización. Fue en 1966 cuando Matheron y Serra decidieron llamar *Morfología Matemática* a la nueva disci-

plina: morfología porque estudia la forma y la estructura de la imagen y matemática al ser una técnica de procesamiento no lineal. En abril de 1968 fundaron el Centre de Morphologie Mathématique, el cual desde ese tiempo se localiza en Fontainebleau (Francia), en la Escuela Nacional Superior de Minas de París (ENSMP) (Vargas, 2007).

La MM ha evolucionado y es un campo en expansión. Entre los diferentes esfuerzos en la investigación, el filtrado morfológico y las técnicas de segmentación son áreas importantes en esta disciplina.

## 3.2. Bases de la MM

### 3.2.1. Representación de una imagen

La MM fue desarrollada en un principio para espacios euclidianos y la teoría correspondiente se refiere a morfología euclidiana. La MM fue extendida a espacios discretos debido a que la mayoría de la tecnología de análisis de imágenes dependen del procesamiento de datos discretos (especialmente de manera digital). La versión discreta del espacio bidimensional euclidiano  $\mathbb{R}^2$  es  $Z^2$ . El paso desde el espacio continuo  $\mathbb{R}^2$  al caso discreto  $Z^2$  se logra muestreando  $\mathbb{R}^2$  y es conocido este proceso como digitalización.

Al referirnos a una imagen (bidimensional), por lo general se piensa en una función de dos variables  $F(x, y)$  cuyos valores se corresponden al nivel de gris en el punto  $(x, y)$ , pensando en que  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Para poder ser procesada  $F$  es digitalizada, aproximándola por muestras igualmente espaciadas almacenadas en un arreglo de tamaño  $n \times m$ .

Generalmente,  $F(x, y) \in [l, L]$ , donde  $0 < l$  y  $L < \infty$ . Se acostumbra en la práctica trasladar el intervalo  $[l, L]$  al intervalo  $[0, 1]$ , considerando que  $F(x, y) = 0$  es negro y  $F(x, y) = 1$  es blanco. Las imágenes que toman únicamente los valores blanco y negro se les llama binarias.

Una imagen digital en escala de grises es una matriz de  $n \times m$  elementos numéricos cuyos valores posibles van desde el 0 (negro) al 255 (blanco). Donde este número representa la intensidad luminosa en el determinado punto o pixel. Una imagen con niveles de gris



puede representarse por una función  $F : D \rightarrow L$ , donde  $D$  es un subconjunto de  $Z^2$  y  $L$  es un subconjunto de  $Z$ . Una imagen en color estará formada por 3 matrices de  $n \times m$  elementos numéricos cuyos valores posibles van del 0 al 255. Las imágenes a color requieren de la combinación de esas 3 bandas para representar el color de un pixel. Por ejemplo, un sistema de color bastante utilizado es el denominado RGB (Rojo, Verde, Azul), en el que cada banda corresponde a un color.

Aunque en este trabajo se hablará de aplicaciones y ejemplos para el caso unidimensional (señales) y bidimensional (imágenes), otros casos pueden considerarse: 3D (imágenes volumétricas, video), 4D (video volumétrico), etc. Las imágenes binarias y numéricas (niveles de gris) se considerarán como funciones. Asimismo, los conjuntos se pueden considerar como imágenes binarias (son conceptos isomorfos).

### 3.2.2. Principios y definiciones básicas

Originalmente la MM fue desarrollada para el análisis de las imágenes binarias. Consideremos entonces como punto de partida para la morfología a las operaciones definidas en la teoría de conjuntos: unión  $\cup$ , intersección  $\cap$  y complemento  $\complement$ .

Para las siguientes definiciones, se denotará a los conjuntos con letras mayúsculas  $A, B, C, \dots$ , y a sus elementos con minúsculas  $a, b, c, \dots$

**Definición 3.2.1** Dado un conjunto no vacío  $X$  y una relación binaria denotada por " $\leq$ " en  $X$ . " $\leq$ " es una relación de orden parcial para el conjunto  $X$  si cumple las siguientes propiedades  $\forall x, y, z \in X$ :

*Reflexiva:*  $x \leq x$

*Antisimétrica:*  $x \leq y$  y  $y \leq x \Leftrightarrow x = y$

*Transitiva:*  $x \leq y$  y  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Un conjunto con un orden parcial se llama conjunto parcialmente ordenado (o poset del inglés partially ordered set). Un conjunto es un retículo completo si tiene una relación de orden parcial y posee las operaciones ínfimo (*inf*) y supremo (*sup*) que se definen de la siguiente manera (Birkhoff, 1984), (Serra, 1982b):

Sea  $X$  un conjunto  $X$  y  $A$  un subconjunto no vacío de  $X$  ( $A \subset X$ ) y sean  $x, y$  elementos de  $X$  ( $x, y \in X$ ):

**Definición 3.2.2** *Un elemento  $cs \in X$  es cota superior de  $A$  si  $x \leq cs \forall x \in A$ . Un elemento  $y \in X$  es el supremo (denotado por  $\bigvee$ ) de  $A$  si y sólo si es cota superior de  $A$  y para toda cota superior  $cs$  de  $A$  se verifica que  $y$  es la menor de las cotas inferiores ( $y \leq cs$ ).*

**Definición 3.2.3** *Un elemento  $ci \in X$  es cota inferior de  $A$  si  $ci \leq x \forall x \in A$ . Un elemento  $y \in X$  es el ínfimo (denotado por  $\bigwedge$ ) de  $A$  si y sólo si es cota inferior de  $A$  y para toda cota superior  $ci$  de  $A$  se verifica que  $y$  es la mayor de las cotas inferiores ( $ci \leq y$ ).*

En conjuntos, el supremo  $\bigvee$  y el ínfimo  $\bigwedge$  corresponden, respectivamente, a la unión  $\bigcup$  e intersección  $\bigcap$  de conjuntos.

El concepto anterior de retículo completo es la base para la formulación de muchas propuestas dadas dentro de la MM.

### 3.2.3. Operadores de conjuntos aplicados en imágenes

Los principales retículos usados en el procesamiento morfológico de imágenes son el caso de conjuntos (imágenes binarias), y el caso numérico (niveles de gris). Usando el marco de trabajo del procesamiento morfológico en retículos donde hay que establecer la relación de orden y saber cómo se obtiene el supremo e ínfimo de cada par de elementos para el caso que nos ocupe.

Las relaciones de orden juegan un papel importante. Cuando se trata con conjuntos, la relación de inclusión permite determinar si dos conjuntos son o no ordenados, y en caso de que lo sean, cuál de ellos está incluido en el otro.

La relación de orden parcial en el caso numérico se define como sigue: Una imagen  $f$  es menor o igual a una imagen  $g$  si el valor de  $f$  es menor o igual al valor de  $g$  en todos los píxeles  $x$  de sus definiciones comunes de dominio.

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x, f(x) \leq g(x) \quad (3.1)$$

Considerando dos imágenes  $f$  y  $g$  que tengan definiciones de dominio idénticas, podemos definir el supremo  $\bigvee$  y el ínfimo  $\bigwedge$  como:

$$(f \bigvee g)(x) = \max[f(x), g(x)] \quad (3.2)$$

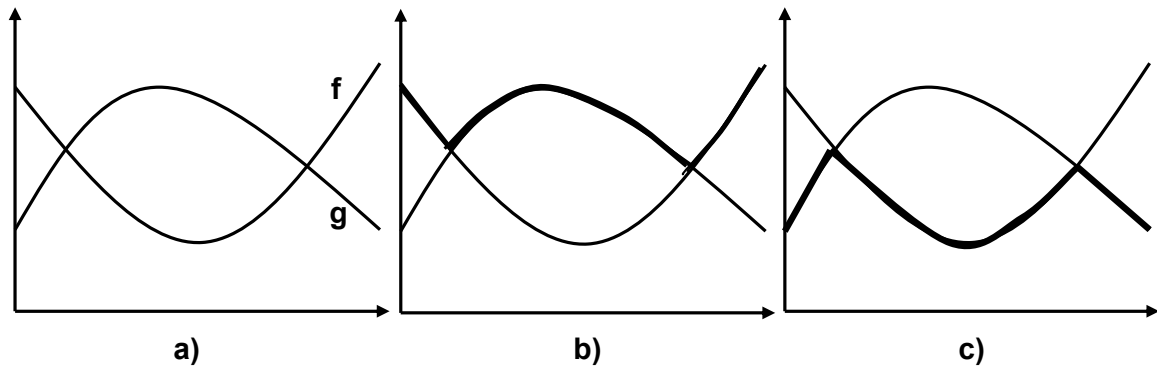


Figura 3.1: Supremo e ínfimo de dos funciones. a) Funciones  $f$  y  $g$ . b) Supremo de  $f$  y  $g$ . c) Ínfimo de  $f$  y  $g$ .

$$(f \wedge g)(x) = \min[f(x), g(x)] \quad (3.3)$$

donde  $\max$  y  $\min$  son el valor máximo y el valor mínimo respectivamente punto a punto entre imágenes. Esta idea se ilustra en la figura (3.1).

El transpuesto de un conjunto  $B$  corresponde a su conjunto simétrico con respecto a su origen:

$$\hat{B} = \{-b | b \in B\} \quad (3.4)$$

### 3.2.4. El elemento de estructura

Las transformaciones en MM utilizan un conjunto geométrico conocido como elemento de estructura el cual posee forma, tamaño definido a priori y un origen.

El elemento de estructura se traslada sobre la imagen bajo estudio con la finalidad de determinar el conjunto de puntos (respecto al origen del elemento de estructura) que intervendrá en cada operación que se efectúe con los componentes de la imagen.

La forma que adquiere el elemento de estructura puede ser variada; por ejemplo, para el caso bidimensional, puede ser un disco, un cuadrado, una línea recta entre otros. Sin embargo no se limita su forma al caso bidimensional, en tridimensional se definen diferentes

clases de poliedros por ejemplo el cubo, el prisma hexagonal, etc.

La ubicación del origen del elemento de estructura juega un papel fundamental al efectuarse las transformaciones correspondientes en la imagen, ya que a partir de la ubicación de dicho punto, se obtendrá una forma precisa de la imagen procesada.

Se dice que un elemento de estructura es isotrópico, si el conjunto geométrico que lo constituye posee características idénticas en todas las direcciones que es posible considerar dentro del espacio en que se localiza.

En este trabajo se considera un círculo de radio variable mayor que cero como el elemento de estructura con el cual se aplicarán los algoritmos morfológicos. Este elemento de estructura es simétrico lo que garantiza que las propiedades de algunas transformaciones se cumplan. Al elemento de estructura con origen en  $p$  se le denota regularmente como  $B_p$ , para simplificar la notación se considera que  $B_p = B$ . La figura (3.2) muestra algunas de las formas del elemento de estructura, junto con su centro u origen ( $p$ ).

La talla del elemento de estructura que se denota como  $\mu$  donde  $\mu$  es un factor de escala o tamaño. La talla del elemento de estructura es un escalar que determina el tamaño de la estructura geométrica de  $B$

Observe en las imágenes de las figuras 3.3 b) y 3.3 c) como cambia la imagen resultante dependiendo del elemento de estructura empleado.

Debido a que se usan elementos de estructura simétricos, se aplican muchas de las propiedades definidas en la MM. Sí el elemento de estructura no es simétrico, por ejemplo la propiedad creciente, no se asegura.

La talla del elemento de estructura involucra a la suma de Minkowski. Consideremos la suma de Minkowski entre dos conjuntos  $X$  y  $A$  (Serra, 1982a).

**Definición 3.2.4 (Suma y resta de Minkowski)** Sea  $E$  un conjunto y  $\wp(E)$  el conjunto de todos los subconjuntos de  $E$ . Sea  $E = R^n$  o  $E = Z^n$ . La adición y substracción de Minkows-

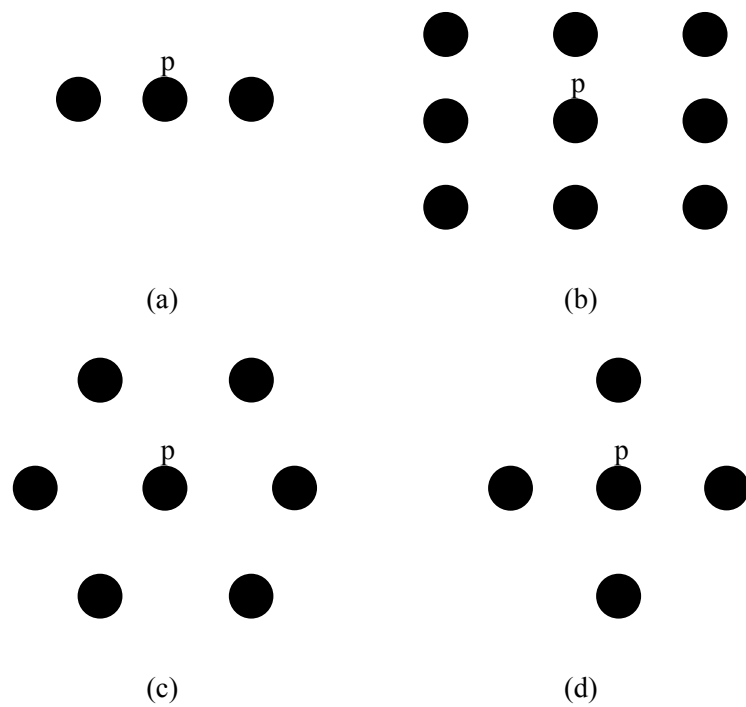


Figura 3.2: Diferentes elementos de estructura. (a) línea horizontal como elemento de estructura, con origen en el punto p, (b) cuadrado como elemento de estructura con origen en el punto p, (c) hexágono como elemento de estructura, con origen en el punto p, (d) círculo como elemento de estructura, con origen en el punto p.

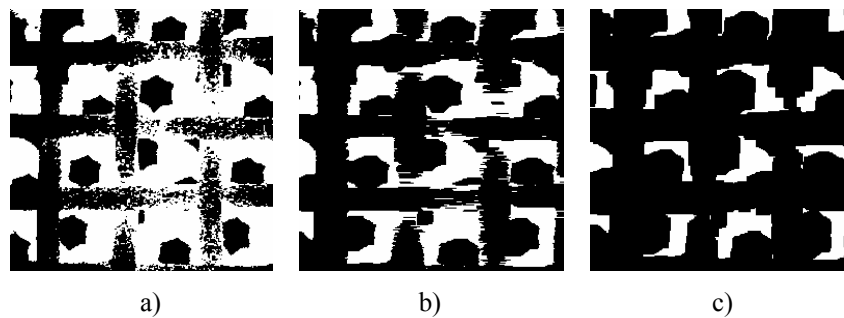


Figura 3.3: Ejemplos de aplicación de dos elementos de estructura. (a) Imagen original, (b) Imagen modificada con una recta como elemento de estructura de tamaño 10, (c) Imagen modificada con un elemento de estructura cuadrado de tamaño 10,

ki para subconjuntos  $X, A$  de  $E$  esta dada por:

$$X \oplus A = \bigcup_{a \in A} X_a \quad y \quad X \ominus A = \bigcap_{a \in A} X_{-a}$$

donde

$$X_a = \{x + a : x \in X\}$$

Es la traslación de  $X$  por el vector  $a \in E$ ,  $x + a$  es la suma de  $x$  y  $a$ ; y  $-a$  es la reflexión de  $a$ .

Los símbolos  $\oplus$  y  $\ominus$  representan la suma y substracción de Minkowski respectivamente.

Empleando la definición 3.2.4, la talla de un elemento de estructura se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\mu B = B \oplus \underbrace{\check{B} \dots \check{B}}_{\mu-1 \text{ sumas}} \quad \text{con} \quad \check{B} = \{-b : b \in B\}$$

### 3.2.5. Caso binario de la erosión y dilatación morfológica

La erosión y la dilatación morfológica son definidas de una manera general a partir de funciones de estructura. En el caso de imágenes binarias, la dilatación y la erosión morfológica se definen a continuación.

**Definición 3.2.5** Sean  $X, B \subseteq E$ ; se define la dilatación del conjunto  $X$  por el elemento de estructura  $\mu B$ , denotado por  $\delta_{\mu B}(X)$ , como el operador sobre  $\wp(E)$  dado por:

$$\delta_{\mu B}(X) = \{x | \mu \check{B}_x \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup_{b \in \mu B} X_b \quad (3.5)$$

**Definición 3.2.6** Sean  $X, B \subseteq E$ ; se define la erosión del conjunto  $X$  por el elemento de estructura  $\mu B$ , denotado por  $\varepsilon_{\mu B}(X)$ , como el operador sobre  $\wp(E)$  dado por:

$$\varepsilon_{\mu B}(X) = \{x | \mu B_x \subseteq X\} = \bigcap_{b \in \mu B} X_{-b} \quad (3.6)$$

Donde  $\check{B}$  representa el transpuesto de B respecto del origen.

La dilatación y la erosión morfológica cumplen ser transformaciones crecientes, es decir, para todo conjunto X e Y, tal que  $X \subset Y$  tenemos que:

$$\varepsilon_{\mu B}(X) \subset \varepsilon_{\mu B}(Y) \quad \text{y} \quad \delta_{\mu B}(X) \subset \delta_{\mu B}(Y)$$

La dilatación es una transformación extensiva y la erosión es antiextensiva; es decir, para todo X :

$$\varepsilon_{\mu B}(X) \subset X \quad \text{y} \quad X \subset \delta_{\mu B}(X)$$

Desde un punto de vista geométrico, la dilatación morfológica de un conjunto X por  $\mu B$ , es el lugar definido por el complemento del origen  $x$  de los trasladados de  $\mu B$  cuando dicho conjunto  $\mu B_x$  no toca al conjunto X. Mientras que la erosión morfológica es el lugar de centros de los trasladados de  $\mu B_x$ , cuando este se encuentra completamente al interior de X.

La Fig. 3.4 muestra estas nociones desde un punto de vista geométrico.

De aquí en adelante se considera que las siguientes expresiones son iguales con la finalidad de simplificar la notación

$$\varepsilon_{\mu B} = \varepsilon_{\mu}, \quad \delta_{\mu B} = \delta_{\mu}$$

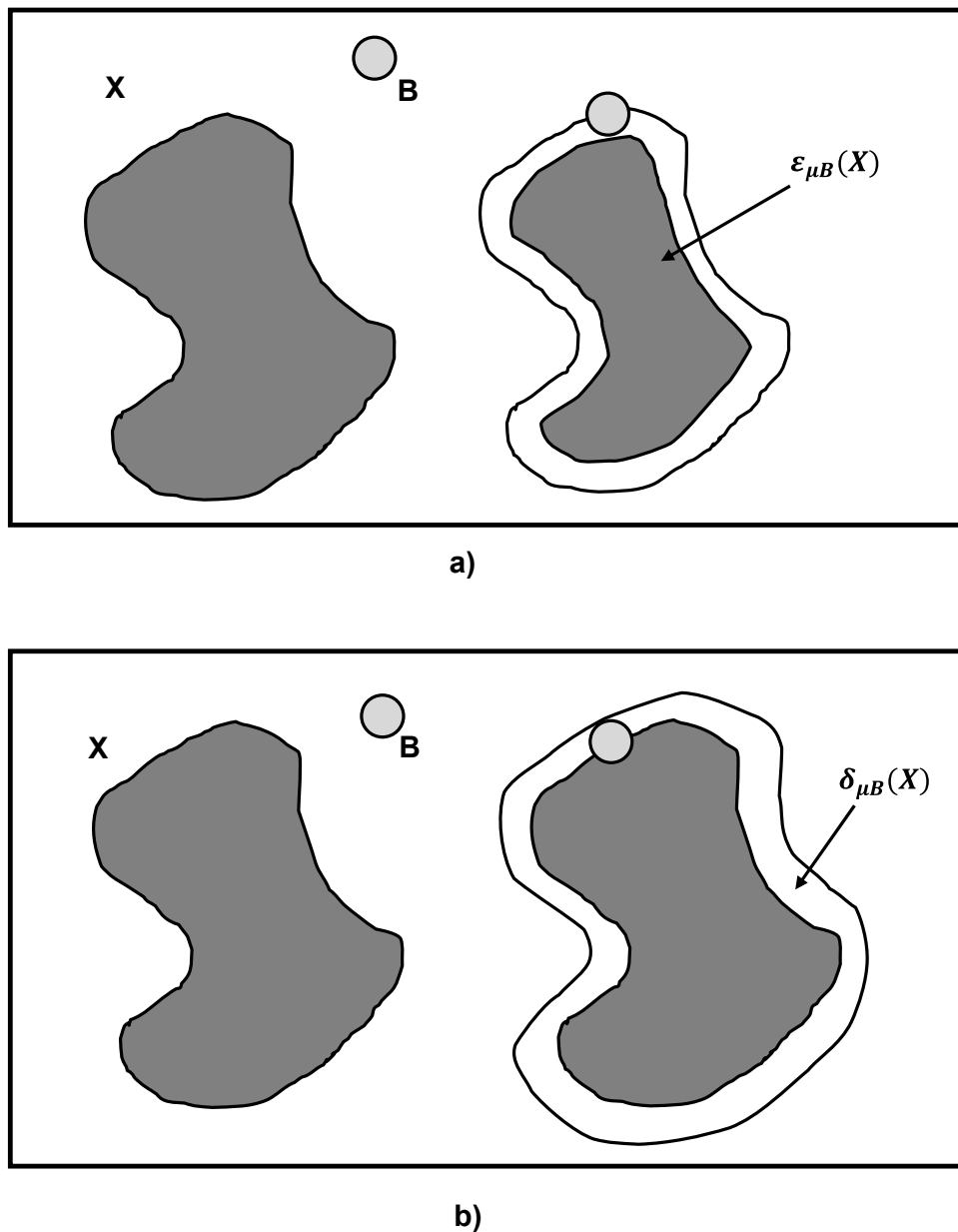


Figura 3.4: Punto de vista geométrico de la erosión y la dilatación binaria. Estas transformaciones se interpretan desde un punto de vista geométrico (a) la erosión morfológica de un conjunto  $X$  por  $\mu B$  es el lugar de centros de los trasladados de  $\mu B_x$ , cuando éste se encuentra completamente al interior de  $X$ , (b) la dilatación de un conjunto  $X$  por  $\mu B$ , es el lugar definido por el complemento del origen  $x$  de los trasladados de  $B$  cuando dicho conjunto  $\mu B_x$  no intersecta al conjunto  $X$ .



### 3.2.6. Caso niveles de gris de la erosión y dilatación morfológicas

La erosión  $\varepsilon_{\mu B}$  y dilatación  $\delta_{\mu B}$  morfológicas en niveles de gris se definen como:

$$\varepsilon_{\mu B}(f(x)) = \bigwedge \{f(y); y \in \mu \check{B}_x\} \quad (3.7)$$

El dual de la ecuación 3.7 es la dilatación morfológica,

$$\delta_{\mu B}(f(x)) = \bigvee \{f(y); y \in \mu \check{B}_x\} \quad (3.8)$$

La dilatación sobre funciones es extensiva, mientras que la erosión es antiextensiva, es decir,

$$f(x) \leq \delta_{\mu B}(f)(x) \quad y \quad f(x) \geq \varepsilon_{\mu B}(f)(x)$$

Y cumplen ser transformaciones crecientes, es decir:

$$\forall f, g, \text{ con } g \leq f \quad \varepsilon_{\mu B}(g)(x) \leq \varepsilon_{\mu B}(f)(x) \quad y \quad \delta_{\mu B}(g)(x) \leq \delta_{\mu B}(f)(x)$$

### 3.2.7. Propiedades de la erosión y la dilatación

Antes de enumerar las propiedades del operador dilatación y erosión, se darán algunas definiciones importantes.

La transformación identidad, denotada por  $id$  da como resultado la misma imagen, y se define de la siguiente manera:

$$\forall f, id(f) = f \quad (3.9)$$

**Definición 3.2.7 (Idempotencia)** : *Por definición un operador idempotente transforma la imagen original en una invariante ante el mismo operador. En otras palabras, una transformación  $\Phi$  es idempotente si aplicándola dos veces a cualquier imagen  $f$  es equivalente a aplicarla una única vez:*

$$\Phi \text{ es idempotente} \Leftrightarrow \Phi = \Phi(\Phi) \quad (3.10)$$

Esto hace entonces que no tenga sentido aplicar más de una vez un operador idempotente (Vargas, 2007). La idempotencia es una propiedad clave en la MM.

**Definición 3.2.8 (Extensiva)** : Una transformación  $\Phi$  es extensiva, si para toda imagen  $f$ , la imagen transformada es mayor o igual que la imagen original. Esto es, si  $\Phi$  es mayor o igual que la transformación identidad  $id$ :

$$\Phi \text{ es extensiva} \Leftrightarrow id \leq \Phi \quad (3.11)$$

**Definición 3.2.9 (Antiextensiva)** : Una transformación  $\Phi$  es antiextensiva, si para toda imagen  $f$ , la imagen transformada es menor o igual que la imagen original. Esto es, si  $\Phi$  es menor o igual que la transformación identidad  $id$ :

$$\Phi \text{ es antiextensiva} \Leftrightarrow id \geq \Phi \quad (3.12)$$

**Definición 3.2.10 (Creciente)** : Una transformación  $\Phi$  es creciente, si preserva la relación de orden entre imágenes, esto es:

$$\Phi \text{ es creciente} \Leftrightarrow \forall f, g : f \leq g \Rightarrow \Phi(f) \leq \Phi(g) \quad (3.13)$$

**Definición 3.2.11 (Dualidad)** : Dos transformaciones  $\Psi$  y  $\Phi$  son duales con respecto al complemento si aplicando  $\Psi$  a una imagen, es equivalente a aplicar  $\Phi$  al complemento de la imagen y aplicando el complemento nuevamente al resultado. Esto es:  $\Psi$  y  $\Phi$  son duales con respecto al complemento  $\complement \Leftrightarrow \Psi = \complement \Phi \complement$

**Definición 3.2.12** Un filtro morfológico es cualquier transformación que sea creciente e idempotente.

**Definición 3.2.13** Un filtro morfológico es llamado fuerte, si cumple.

$$\Psi(id \vee \Psi) = \Psi(id \wedge \Psi) = \Psi \quad (3.14)$$

donde  $\text{id}$  representa el operador identidad.

Esta propiedad define que las funciones dentro de un rango dado nos producen el mismo resultado. Ejemplo: para cualquier función  $h$  que cumpla  $f \wedge \Psi(f) < h < f \vee \Psi(f)$ , tenemos que  $\Psi(f) = \Psi(h)$ .

Sean  $f$  y  $g$  dos imágenes y sea  $B$  el elemento de estructura empleado, la erosión y la dilatación son transformaciones crecientes, pues cumplen con:

$$g \leq f \Rightarrow \delta_B(g) \leq \delta_B(f) \quad (3.15)$$

$$g \leq f \Rightarrow \varepsilon_B(g) \leq \varepsilon_B(f) \quad (3.16)$$

Si el origen de coordenadas  $(0, 0)$  pertenece a  $B$ , entonces se dice que la erosión es antiextensiva:

$$\varepsilon_B(f) \leq f \quad (3.17)$$

y la dilatación es extensiva

$$\delta_B(f) \geq f \quad (3.18)$$

Por otro lado, la erosión y la dilatación son operadores duales con respecto al complemento, usando el mismo elemento de estructura:

$$\varepsilon_B(f) = \mathbb{C}(\delta_B \mathbb{C}(f)) \quad (3.19)$$

y

$$\delta_B(f) = \mathbb{C}(\varepsilon_B \mathbb{C}(f)) \quad (3.20)$$

La anterior proposición es importante, ya que algunas propiedades de una transformación son directamente heredadas a partir de su transformación dual (y viceversa), si la tiene. Por ejemplo, las siguientes reglas se aplican en transformaciones duales:

Si  $\Psi$  y  $\Phi$  son dos transformaciones duales con respecto al complemento, se cumple,

$\Phi$  idempotente  $\Rightarrow \Psi$  idempotente

$\Phi$  extensiva  $\Rightarrow \Psi$  extensiva

$\Phi$  antiextensiva  $\Rightarrow \Psi$  antiextensiva

$\Phi$  creciente  $\Rightarrow \Psi$  creciente

### 3.2.8. Filtros morfológicos básicos. Apertura y cierre morfológico

Las definiciones formales de la apertura y cierre morfológico están dadas tanto para el caso binario como para el caso numérico. En el caso binario, la apertura y el cierre morfológico se definen como:

$$\gamma_{\mu B}(X) = \delta_{\mu\check{B}}\varepsilon_{\mu B}(X) = (X \ominus \mu B) \oplus \mu\check{B} \quad (3.21)$$

y

$$\varphi_{\mu B}(X) = \varepsilon_{\mu\check{B}}\delta_{\mu B}(X) = (X \oplus \mu B) \ominus \mu\check{B}$$

La figura 3.5 muestra la interpretación geométrica de la apertura y el cierre morfológico. El cierre de X por B será el complemento del área barrida por B cuando éste se encuentre al exterior de X. Mientras que la apertura de X por B será el área de barrida por B cuando éste se encuentre completamente al interior de X.

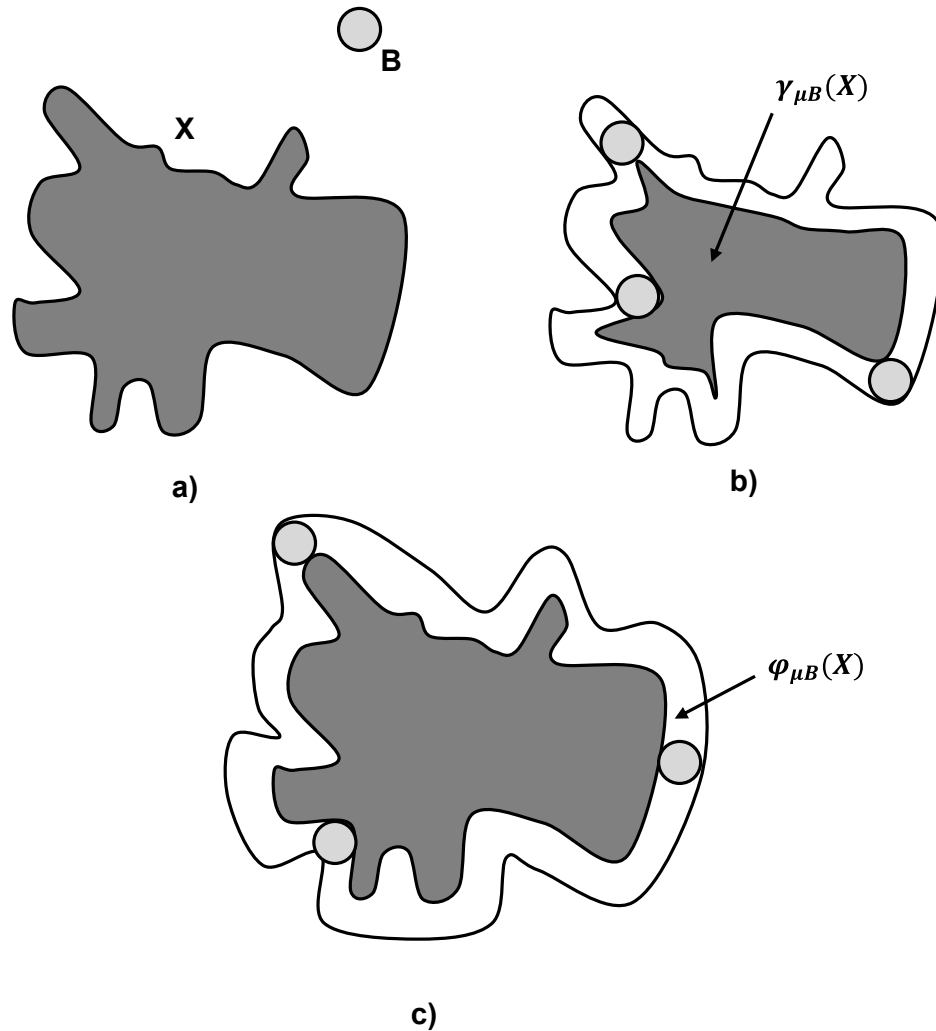


Figura 3.5: Punto de vista geométrico de la apertura y el cierre morfológico. Se realiza una interpretación desde un punto de vista geométrico. (a) El conjunto  $X$  y el elemento de estructura  $B$ , (b) La apertura de  $X$  por  $\mu_B$  será el área barrida por  $\mu_B$  cuando éste se encuentre completamente al interior de  $X$ , (c) El cierre de  $X$  por  $\mu_B$  será el complemento del área barrida por  $\mu_B$  cuando éste se encuentra completamente al exterior de  $X$ .

En el caso numérico:

$$\gamma_{\mu B}(f)(x) = \delta_{\mu \check{B}}(\varepsilon_{\mu B}(f))(x) \quad (3.22)$$

y

$$\varphi_{\mu B}(f)(x) = \varepsilon_{\mu \check{B}}(\delta_{\mu B}(f))(x)$$

Las siguientes propiedades son verificadas por estas transformaciones (caso de conjuntos). Sean  $X$  y  $Y$  dos conjuntos.

- (a) La  $\gamma_{\mu B}$  es antiextensiva, mientras que la  $\varphi_{\mu B}$  es extensiva.

$$\gamma_{\mu B} \subseteq X \quad y \quad X \subset \varphi_{\mu B}$$

- (b) Son transformaciones crecientes

$$X \subset Y \Rightarrow \gamma_{\mu B}(X) \subset \gamma_{\mu B}(Y) \quad y \quad X \subset Y \Rightarrow \varphi_{\mu B}(X) \subset \varphi_{\mu B}(Y)$$

- (c) Son transformaciones idempotentes

$$\gamma_{\mu B} \cdot \gamma_{\mu B}(X) = \gamma_{\mu B}(X) \quad y \quad \varphi_{\mu B} \cdot \varphi_{\mu B}(X) = \varphi_{\mu B}(X)$$

En el caso de funciones.

- (a) La  $\gamma_{\mu B}$  es antiextensiva, mientras que la  $\varphi_{\mu B}$  es extensiva.

$$\gamma_{\mu B}(f) \leq f \quad y \quad f \leq \varphi_{\mu B}(f)$$

- (b) Son transformaciones crecientes

$$\forall f, g \text{ con } g \leq f \text{ se cumple que } \gamma_{\mu B}(g) \leq \gamma_{\mu B}(f) \quad y \quad \varphi_{\mu B}(g) \leq \varphi_{\mu B}(f)$$

- (c) Son transformaciones idempotentes

$$\gamma_{\mu B} \cdot \gamma_{\mu B}(f) = \gamma_{\mu B}(f) \quad y \quad \varphi_{\mu B} \cdot \varphi_{\mu B}(f) = \varphi_{\mu B}(f)$$

### 3.2.9. Gradiente morfológico

Una suposición común en análisis de imágenes consiste en considerar las estructuras de la imagen como regiones con niveles de gris homogéneas. A partir de este supuesto, los bordes de las regiones se localizan buscando grandes variaciones en los niveles de gris.

El gradiente morfológico es un operador que aproxima el módulo de la derivada. Este operador resalta las variaciones de intensidad de píxeles en una vecindad determinada por un elemento de estructura. Algunos gradientes usuales son los siguientes:

Gradiente morfológico: Diferencia aritmética entre una dilatación y una erosión, conocido como gradiente simétrico (Rivest et al., 1993)

$$\rho_B(f) = \delta_B(f) - \varepsilon_B(f) \quad (3.23)$$

Gradiente interno

$$\hat{\rho}_B(f) = f - \varepsilon_B(f) \quad (3.24)$$

Gradiente externo

$$\tilde{\rho}_B(f) = \delta_B(f) - f \quad (3.25)$$

En la figura 3.6 se muestra el efecto de los tres tipos de gradiente sobre una imagen en niveles de gris.

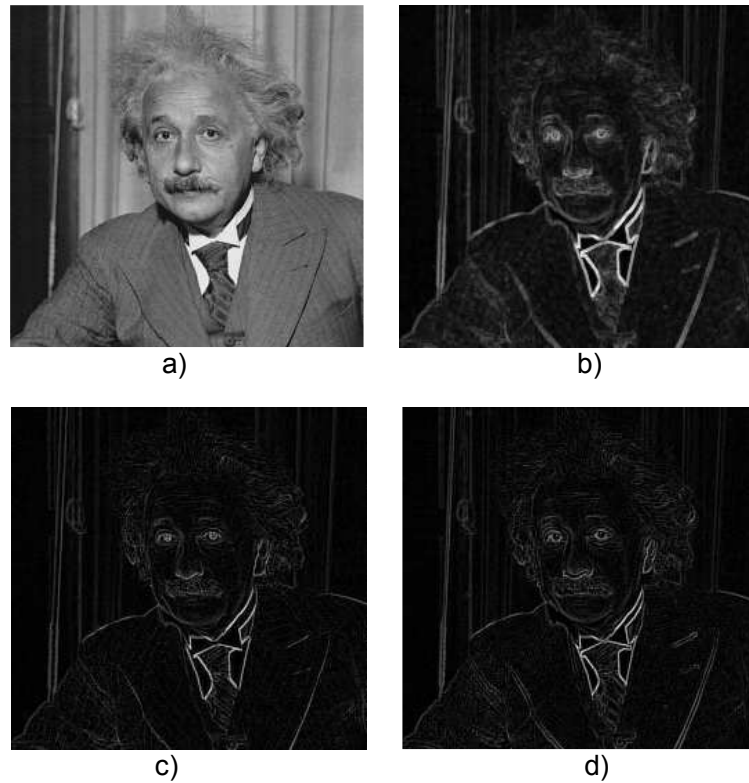


Figura 3.6: Aplicación del gradiente a una imagen. a) Imagen original, b) Efecto de la aplicación del gradiente morfológico  $\rho_B(f)$ , c) Efecto de la aplicación del gradiente  $\hat{\rho}_B(f)$  y d) Efecto de la aplicación del gradiente  $\tilde{\rho}_B(f)$ .



### 3.2.10. Transformaciones por top-hat

El top-hat fue propuesto por Meyer y Serra (1989) este operador permite detectar picos de cierta altura y cierto espesor. Esta transformación tiene características granulométricas, debido a esto, es posible clasificar las regiones de la imagen tanto por tamaño como por altura. La transformación top hat se divide en top-hat de blancos (ecuación 3.26) y top-hat de negros (ecuación 3.27).

$$Thw_{\mu} = f - \gamma_{\mu}(f) \quad (3.26)$$

$$Thb_{\mu} = \varphi_{\mu}(f) - f \quad (3.27)$$

En el caso de tratar con regiones claras, el top-hat es el residuo entre el conjunto original y la apertura, mientras que para regiones oscuras, el top-hat es el residuo entre la cerradura y el conjunto original. Para el caso de funciones, la transformación top-hat es simplemente la diferencia aritmética punto a punto entre la función cerradura y la imagen original (o la diferencia punto a punto de la imagen original con la función apertura). Generalmente estas transformaciones son seguidas por una umbralización.

El top-hat es idempotente, pero no creciente por lo tanto no es un filtro morfológico. Debido a que la apertura es anti-extensiva; la función  $f - \gamma_{\mu}(f)$  es no negativa (debido a que la cerradura es extensiva; la función  $\varphi_{\mu}(f) - f$  es no negativa, respectivamente). En la figura 3.7 se ilustra la aplicación de los operadores top-hat para una imagen.

## 3.3. Filtros por reconstrucción

Para algunas aplicaciones de análisis de imágenes es conveniente restringir el campo de acción de una transformación a ciertas regiones de interés. Esta idea dió origen a una nueva clase de transformaciones conocidas como geodésicas. A diferencia de las transformaciones morfológicas que actúan sobre toda la imagen, las geodésicas sólo actúan sobre parte de la imagen, i.e, sobre un subconjunto denominado máscara geodésica.

Las transformaciones por reconstrucción o geodésicas son filtros que permiten modificar los mínimos y máximos de la imagen sin cambiar considerablemente la estructura de

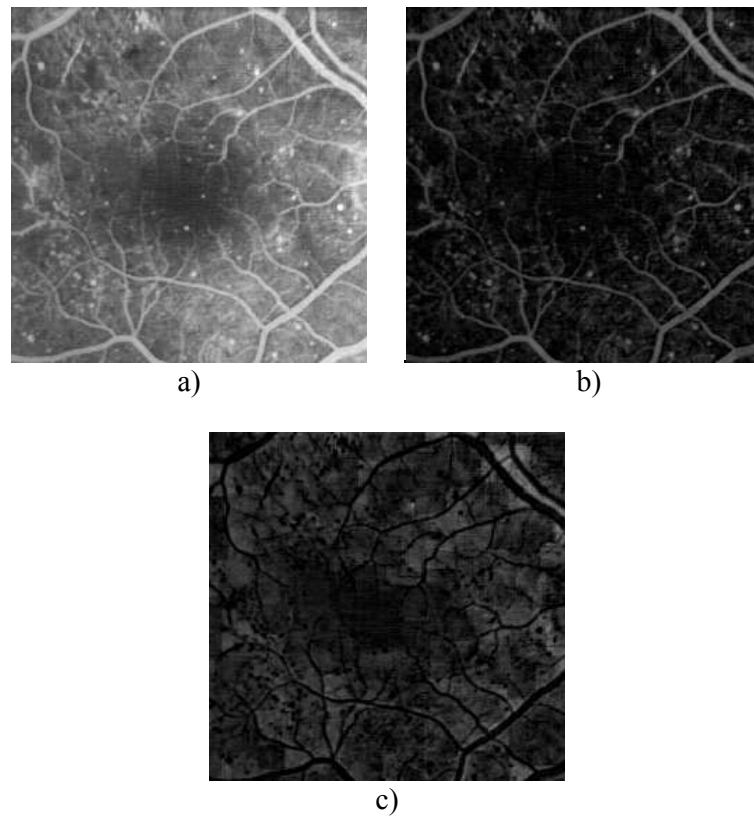


Figura 3.7: Aplicación de los operadores top-hat a una imagen. a) Imagen original, b) Top-hat sobre regiones claras, c) Top-hat sobre regiones oscuras

las demás componentes (Beucher y Lantuejoul, 1979).

Las transformaciones por reconstrucción utilizan transformaciones geodésicas, las cuales son iteradas hasta la estabilidad, de tal manera que las componentes se reconstruyen fielmente de acuerdo al criterio creciente. A continuación se definen estas transformaciones para el caso binario.

- (i) Sea  $X \subseteq Y$ , la erosión geodésica de tamaño 1 del conjunto Y sobre el conjunto X se define como:

$$\varepsilon_X^1(Y) = \varepsilon_B(Y) \bigvee X \quad (3.28)$$

- (ii) Sea  $Y \subseteq X$ , la dilatación geodésica de tamaño 1 del conjunto Y dentro del conjunto X se define como:

$$\delta_X^1(Y) = \delta_B(Y) \bigwedge X \quad (3.29)$$

La reconstrucción geodésica y su reconstrucción dual para el caso binario se definen como:

$$R(X, Y) = \underbrace{\delta_X^1 \delta_X^1 \dots \delta_X^1(Y)}_{\text{hasta la estabilidad}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_X^n(Y) \quad (3.30)$$

$$R^*(X, Y) = \underbrace{\varepsilon_X^1 \varepsilon_X^1 \dots \varepsilon_X^1(Y)}_{\text{hasta la estabilidad}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_X^n(Y) \quad (3.31)$$

De las ecuaciones 3.30 y 3.31, si Y es igual a la erosión o dilatación morfológica se obtiene el cierre y la apertura por reconstrucción respectivamente.

La apertura y cierre por reconstrucción se definen como:

$$\tilde{\gamma}_{\mu B}(X) = \underbrace{\delta_X^1 \delta_X^1 \dots \delta_X^1(\varepsilon_{\mu B}(X))}_{\text{hasta la estabilidad}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_X^n(\varepsilon_{\mu B}(X)) \quad (3.32)$$

$$\tilde{\varphi}_{\mu B}(X) = \underbrace{\varepsilon_X^1 \varepsilon_X^1 \dots \varepsilon_X^1(\delta_{\mu B}(X))}_{\text{hasta la estabilidad}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_X^n(\delta_{\mu B}(X)) \quad (3.33)$$

Para el caso de niveles de gris:

$$\varepsilon_f^1(g) = f \bigvee \varepsilon_B(g) \quad \text{con } g \geq f \quad (3.34)$$

$$\delta_f^1(g) = f \bigwedge \delta_B(g) \quad \text{con } g \leq f \quad (3.35)$$

A continuación se define la reconstrucción geodésica y su dual para el caso numérico:

$$R(f, g) = \underbrace{\delta_f^1 \delta_f^1 \dots \delta_f^1(g)}_{\text{hasta la estabilidad}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_f^n(g) \quad (3.36)$$

$$R^*(f, g) = \underbrace{\varepsilon_f^1 \varepsilon_f^1 \dots \varepsilon_f^1(g)}_{\text{hasta la estabilidad}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_f^n(g) \quad (3.37)$$

De las ecuaciones 3.36 y 3.37, si  $g$  es igual a la erosión o dilatación morfológica, entonces el cierre y la apertura por reconstrucción se definen como:

$$\tilde{\gamma}_{\mu B}(f) = \underbrace{\delta_f^1 \delta_f^1 \dots \delta_f^1(\varepsilon_{\mu B}(f))}_{\text{hasta la estabilidad}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_f^n(\varepsilon_{\mu B}(f)) \quad (3.38)$$

$$\tilde{\varphi}_{\mu B}(f) = \underbrace{\varepsilon_f^1 \varepsilon_f^1 \dots \varepsilon_f^1(\delta_{\mu B}(f))}_{\text{hasta la estabilidad}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_f^n(\delta_{\mu B}(f)) \quad (3.39)$$

La apertura y cierre por reconstrucción fusionan los máximos y mínimos de la imagen a medida que se incrementa el tamaño del elemento de estructura.

En la figura 3.8 se muestra el efecto de el cierre por reconstrucción. La figura 3.8 muestra la función original  $f$ , así como el marcador  $g$  obtenido por medio de una dilatación morfológica. En la figura 3.8 (b) se muestra el resultado del cierre por reconstrucción  $\tilde{\varphi}_{\mu}$ . Nótese como determinadas regiones asociadas con los mínimos regionales de la imagen original son fusionadas, mientras otras permanecen sin cambio.

En el caso de la apertura por reconstrucción, los máximos son extendidos; mientras que los mínimos son extendidos para el cierre por reconstrucción. En ambos, los valores extremos se fusionan; pero no se crean nuevos contornos. En este trabajo, los mínimos y

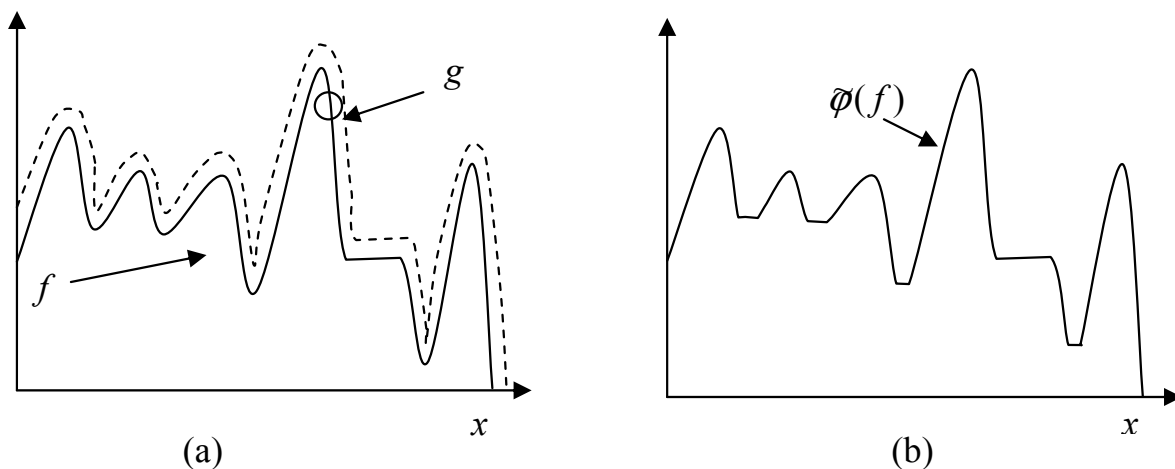


Figura 3.8: (a) Imagen original  $f$  y el marcador  $g = \delta(f)$ , (b) Cierre por reconstrucción.

máximos de la imagen se definen como sigue:

**Definición 3.3.1 (Mínimo y máximo regional)** *Un mínimo regional  $M_{in}$  (máximo regional  $M_{ax}$  respectivamente) en una imagen  $f$  en niveles de gris, es un conjunto de píxeles conexos con un cierto valor  $h$  (región a una altura  $h$ ), tal que cada píxel en la vecindad de  $M_{in}$  ( $M_{ax}$  respectivamente), tienen un valor más alto ( más bajo respectivamente).*

### 3.4. Mapeos de contraste

El mejoramiento del contraste morfológico está basado en la noción de mapeos de contraste. La idea principal en este tipo de mapeos es comparar todo punto de la imagen original con dos patrones, y se elige el valor más cercano en los patrones respecto de la imagen original. La noción de los mapeos de contraste se desarrolló en la forma sugerida por la transformación de Kramer y Bruckner, la cual se describe a continuación.

$$W^{\delta\varepsilon}(f(x)) = \begin{cases} \delta_{\mu B}[f(x)] & \text{si } \delta_{\mu B}[f(x)] - f(x) < \varepsilon_{\mu B}[f(x)] - f(x) \\ \varepsilon_{\mu B}[f(x)] & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.40)$$

Siendo  $\delta_{\mu B}$  y  $\varepsilon_{\mu B}$  la dilatación y erosión morfológica definidas en las ecuaciones (3.7) y (3.8). Algunos problemas en la transformación de Kramer y Bruckner son las oscilaciones y saltos producidos cuando ésta es iterada.

Cuando la erosión o la dilatación son usadas como primitivas (patrones) para construir mapeos de contraste, aparece el riesgo de degradar la imagen cuando se iteran estos operadores de contraste. Para atenuar este inconveniente Serra (1988b) propone el uso de primitivas idempotentes. En (Terol-Villalobos, 1995) y (Terol-Villalobos, 1996), las primitivas son utilizadas de manera separada, generando una nueva familia de mapeos de contraste denominada filtros morfológicos por pendiente.

Sin embargo, este enfoque es un ejemplo particular donde se utilizan la erosión y dilatación morfológicas como primitivas; no obstante pueden considerarse otras transformaciones para generar otros tipos de mapeos de contraste.

A continuación se presenta un mapeo de contraste de tres estados

$$W_{\mu_1, \mu_2, \alpha, \beta}^3(f)(x) = \begin{cases} \varphi_{\mu_1}[f(x)] & 0 \leq \rho(x) < \alpha \\ f(x) & \alpha \leq \rho(x) < \beta \\ \gamma_{\mu_2}[f(x)] & \beta \leq \rho(x) \leq 1 \end{cases} \quad (3.41)$$

El criterio de proximidad para seleccionar las primitivas se presenta a continuación:

$$\rho(x) = \frac{\varphi_{\mu_1} f(x) - f(x)}{\varphi_{\mu_1} f(x) - \gamma_{\mu_2} f(x)} \quad (3.42)$$

Los valores de esta relación se encuentran entre 0 y 1. Cuando el nivel de gris de la cerradura es igual al de la imagen original el valor del criterio es igual a 0, mientras que cuando el valor del nivel de gris de la apertura es igual al de la imagen original, el criterio tiene valor 1. En la ecuación 3.41 nótese que  $\mu_1$  y  $\mu_2$  representan el tamaño del elemento de estructura para la apertura y la cerradura respectivamente, mientras que  $\alpha$  y  $\beta$  definen el intervalo para el mapeo de contraste. El problema de algunos trabajos actuales consiste en encontrar los valores adecuados de  $\alpha$  y  $\beta$  tales que la imagen de salida presenta un mejor contraste (Mendiola-Santibañez y Terol-Villalobos, 2002).

## 3.5. Teoría de la conectividad

La teoría de la conectividad ha sido originalmente propuesta por Serra (1982a) y Serra (1988a) como un acercamiento a la conectividad de un conjunto como es definido en una rama de las matemáticas conocida como Topología, y posteriormente extendida por J. Serra al caso de los retículos completos.

La conectividad es un concepto matemático muy importante, el cual es directamente aplicable al análisis de imágenes, debido a que frecuentemente es usado para definir regiones u objetos de interés en una imagen. Existen técnicas para extraer regiones conexas u objetos conexos dentro de una imagen las cuales son desarrolladas y aplicadas en problemas de segmentación de imágenes y detección de objetos.

Como punto de partida para el estudio de transformaciones conexas se analiza el concepto de arco-conectividad, el cual es incluido dentro de la definición de clase conexa.

**Definición 3.5.1** *Se dice que un conjunto  $X \subseteq E$  es arco-conexo, si para cada par de puntos  $x$  y  $y$  en  $X$  existe una ruta de puntos vecinos  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , tales que  $x = p_0$  y  $y = p_n$ .*

**Definición 3.5.2** *Una componente arco-conexa  $M$  de un conjunto  $X$  es un subconjunto arco-conexo maximal de  $X$ , es decir,  $M$  es arco-conexo y no es subconjunto propio de ningún subconjunto arco-conexo de  $X$ .*

Obsérvese que las componentes arco-conexas de un conjunto  $X$  forman una partición de  $X$ . Una consecuencia inmediata de las definiciones anteriores es que si la distancia geodésica entre dos puntos  $x$  y  $y$  de  $X$  es finita, entonces ambos pertenecen a la misma componente arco-conexa.

A continuación se discutirá la teoría de clases conexas. Esta teoría ha sido originalmente propuesta por G. Matheron y J. Serra como un acercamiento general orientado de conjuntos a conectividad y posteriormente extendido por J. Serra al caso de retículos completos. Tanto en el caso topológico como en el caso arco-conexo. La familia  $C$  de todos los conjuntos conexos de  $E$  satisface la siguiente definición.

**Definición 3.5.3** Una familia  $C \subseteq P(E)$  es llamada una clase conexa si las siguientes condiciones se satisfacen:

- $\emptyset \in C$
- $\{x\} \in C$ , para todo  $x \in E$
- Para toda familia  $\{C_\alpha\}$  en  $C$  tal que  $\bigcap C_\alpha \neq \emptyset$ , se tiene que  $\bigcup C_\alpha \in C$ .

Los elementos de  $C$  se dicen que son conexos. Las condiciones anteriores requieren que el conjunto vacío y los puntos sean conexos y la unión de los conjuntos conexos traslapados sea conexa. Se dice que  $c$  es una componente conexa de  $A \in P(E)$ , el cual se denota por  $c \prec A$  si  $c \in C$ ,  $c \subseteq A$  y no existe  $c' \in C$  diferente de  $c$  tal que  $c \subseteq c' \subseteq A$ . A partir de ahora denominaremos clase conexa a cualquier colección  $C$  de conjuntos de un espacio  $E$  que satisfaga las dos afirmaciones anteriores.

**Teorema 3.5.1** La definición de una clase conexa  $C$  es equivalente a la definición de una familia de aperturas  $\{\gamma_x, x \in E\}$  tal que

- $\forall x \in E, \gamma_x(\{x\}) = \{x\}$ ,
- $\forall x, y \in E, y A \subset E, \gamma_x(A) = \gamma_y(A)$  o  $\gamma_x(A) \cap \gamma_y(A) = \emptyset$
- $\forall x \in E$  y  $A \subset E, \forall x \notin A \Rightarrow \gamma_x(A) = \emptyset$

Cuando la transformación  $\gamma_x$  es asociado con la conectividad usual en  $Z^2$ , la apertura  $\gamma_x(X)$  puede ser definida como la unión de todas las rutas que contienen a  $x$  y que están incluidas en  $X$ . En la figura 3.9 se ilustra el desarrollo de esta apertura. La componente conexa de la imagen original  $X$  a la cual pertenece el punto  $x$  (figura 3.9 (a)) es el resultado de la apertura puntual  $\gamma_x$ , mientras que las otras componentes son eliminadas (figura 3.9 (b)).

De acuerdo al teorema anterior, un operador conexo es uno que se ocupa de cada uno de los componentes de la imagen procesada y que no son modificados o se fusionan con el fondo de la imagen, sin crear nuevos contornos durante el proceso.



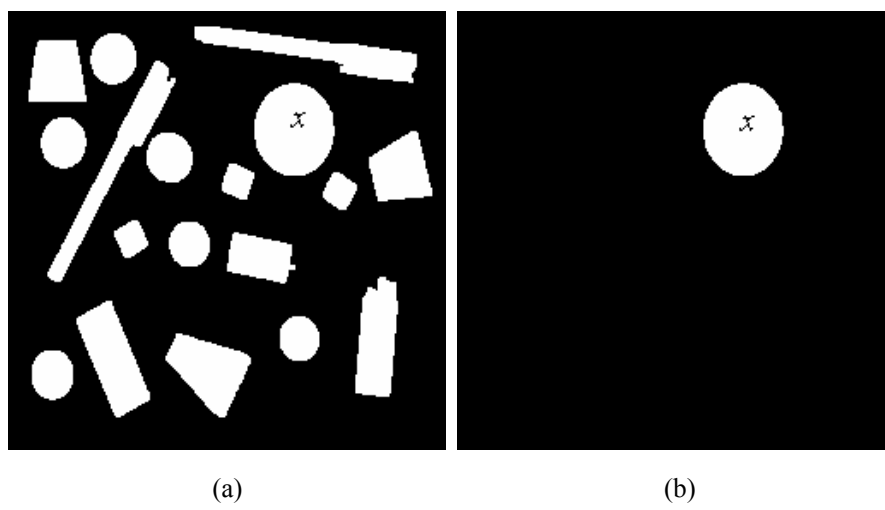


Figura 3.9: (a) Imagen binaria original  $X$ ; (b) La apertura conexa puntual  $\gamma_x$  extrae la componente a la cual pertenece el punto  $x$ .

### 3.6. Operadores viscosos

Los operadores viscosos han sido abordados en diferentes estudios. Por ejemplo, (Serra, 2005) desarrolló trabajos sobre retículos viscosos. Posteriormente Maragos y Vachier continuaron con un enfoque diferente de lo que son los operadores viscosos (Maragos y Vachier, 2008). En estos trabajos la idea de los operadores viscosos es combinar los efectos de una familia completa de aperturas o cerraduras de actividad creciente (tamaño del elemento de estructura) de tal manera que las áreas de baja luminancia son severamente suavizados (smoothed) mientras que los puntos de alta luminancia quedan sin alterar. Este acercamiento permite la reconexión de líneas de cresta delgadas puenteadas. En contraste a estos operadores viscosos Santillan et al. (2009) propone operadores viscosos los cuales procesan los niveles de gris de la imagen de la misma forma usando dos parámetros, la viscosidad y el tamaño de criterio. Las componentes conexas de la imagen dependen del parámetro de viscosidad el cual es vinculado a la conexión sobre retículos viscosos. Entonces esta conexión es más pequeña que la usual y permite la separación de componentes arco-conexas dentro de un conjunto de formas elementalmente conexas, el cual es el objetivo en la segmentación de imágenes.

A continuación se muestra la definición del latice viscoso.

**Proposición 3.6.1 (retículo viscoso (Serra, 2005))** *Sea  $L$  un retículo completo respecto al orden de inclusión. En esta retículo el supremo coincide con el conjunto unión, mientras que el ínfimo coincide con la apertura respecto a  $\gamma_\lambda = \delta_\lambda \varepsilon_\lambda$  de la intersección.*

$$\bigwedge \{X_i, i \in I\} = \gamma_\lambda \left( \bigcap \{X_i, i \in I\} \right), X_i, i \in I \in L \quad (3.43)$$

Los límites de  $L$  son el conjunto  $\emptyset$  y  $E$ . A  $L$  se le denomina retículo viscoso de la dilatación  $\delta_\lambda$ .

De acuerdo a la definición de retículo viscoso dado en la ecuación 3.43,  $L$  denota la imagen de  $P(E)$  bajo la apertura (o el dilatado), tamaño  $\lambda$  y  $L$  la imagen de  $P(E)$  bajo la apertura (o el dilatado) para toda  $\lambda > 0$ . La figura 3.10 b)-d) muestra tres imagenes en la viscosidad 5, 10 y 15, respectivamente. El dilatado es extensiva por definición y para cada

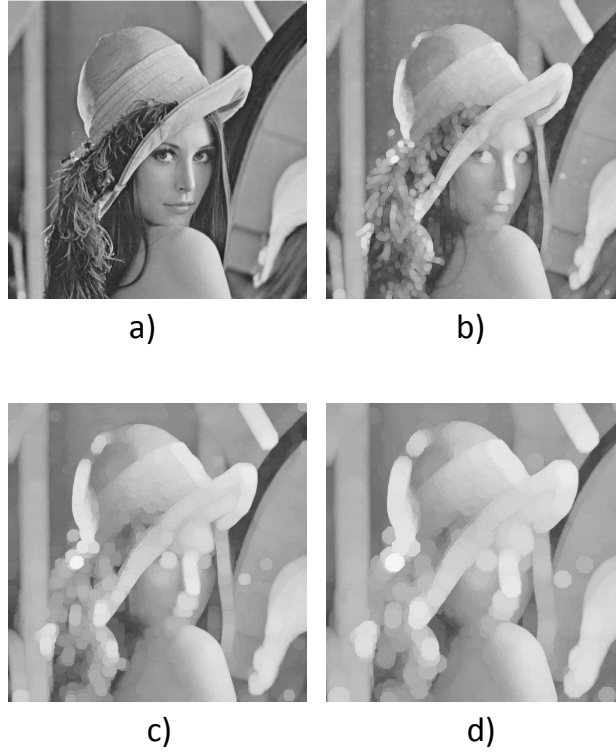


Figura 3.10: a) Imagen original; b), c) y d) Dilatación morfológica de tamaños 5, 10 y 15 respectivamente;

punto de  $x$ ,  $\delta_\lambda(x) \in C$ , entonces preserva la clase conexa completa  $C$  y la erosión adjunta  $\varepsilon$  trata las componentes conexas independientemente de las otras, es decir.

$$X = \bigcup \{X_i, X_i \in C\} \Rightarrow \varepsilon_\lambda(X) = \bigcup \varepsilon_\lambda(X_i) \quad (3.44)$$

Dado que Serra define las conexiones conexas sobre  $P(E)$ , estas conexiones pueden ser definidas como sigue:

**Teorema 3.6.1** (Serra, 2005) Sea  $C$  una conexión sobre  $P(E)$  y  $\delta_\lambda : P(E) \rightarrow P(E)$  una dilatación extensiva sobre la adjunción de la erosión, que genera el retículo  $L = \delta_\lambda(P)$ . Si el cierre  $\varepsilon_\lambda \delta_\lambda$  preserva la conexión  $C$ , es decir,  $\varepsilon_\lambda \delta_\lambda(C) \subseteq C$ , entonces la imagen  $C' = \delta_\lambda(C)$  del conjunto conexo bajo  $\delta_\lambda$  es una conexión sobre el retículo  $L$ .

A continuación se describe la apertura y el cierre en el retículo viscoso.

**Definición 3.6.1** Una apertura  $\tilde{\gamma}_{\lambda,0}$  (cierre  $\tilde{\varphi}_{\lambda,0}$ ) es una apertura viscosa (cierre) en la viscosidad  $\lambda$  si y sólo si este es conexo en el sentido del retículo viscoso

$$\tilde{\gamma}_{\lambda,0}(X) = \bigvee_x \delta_\lambda \gamma_0 \gamma_x \varepsilon_\lambda(X) = \delta_\lambda \bigvee_x \gamma_0 \gamma_x \varepsilon_\lambda(X) = \delta_\lambda \tilde{\gamma} \varepsilon_\lambda(X) \quad (3.45)$$

$$\tilde{\varphi}_{\lambda,0}(X) = \bigwedge_x \varepsilon_\lambda \gamma_0 \gamma_x \delta_\lambda(X) = \varepsilon_\lambda \bigwedge_x \gamma_0 \gamma_x \delta_\lambda(X) = \varepsilon_\lambda \tilde{\varphi} \delta_\lambda(X) \quad (3.46)$$

La reconstrucción viscosa  $\delta_\lambda R(\varepsilon_\lambda(f), \varepsilon_\mu(f))$  ha sido propuesta por Serra (2005) y estudiada en Santillan et al. (2009). El parámetro  $\lambda$  determina la viscosidad de la transformación y  $\mu$  el criterio de tamaño. Entonces al calcular  $\tilde{\gamma}_{\lambda,\mu}$ , se selecciona de la erosión  $\varepsilon_\lambda(f)$ , la región máxima de tamaño mayor que o igual a  $\mu - \lambda$ , lo cual es equivalente a aplicar una apertura por reconstrucción de este tamaño, mientras que al calcular  $\tilde{\varphi}_{\lambda,\mu}$ , la mínima estructura de tamaño mayor que o igual a  $\mu - \lambda$  es seleccionada de  $\delta_\lambda(f)$  usando una cerradura por reconstrucción. De esta manera se obtiene:

$$\tilde{\gamma}_{\lambda,\mu}(f) = \delta_\lambda \tilde{\gamma}_{\mu-\lambda} \varepsilon_\lambda(f) \quad (3.47)$$

$$\tilde{\varphi}_{\lambda,\mu}(f) = \varepsilon_\lambda \tilde{\varphi}_{\mu-\lambda} \delta_\lambda(f) \quad (3.48)$$

Por otro lado, el residuo viscoso se define como (Santillan et al., 2009)

**Definición 3.6.2 (Residuo viscoso)** Sea  $\tilde{\gamma}_{\lambda,\mu_1}$  y  $\tilde{\gamma}_{\lambda,\mu_2}$  dos aperturas viscosas conexas con la propiedad  $\mu_1 \leq \mu_2$ . El residuo entre  $\tilde{\gamma}_{\lambda,\mu_1}(f)$  y  $\tilde{\gamma}_{\lambda,\mu_2}(f)$  está dado por:

$$\tilde{\gamma}_{\lambda,\mu_1}(f) \div \tilde{\gamma}_{\lambda,\mu_2}(f) = \delta_\lambda[\varepsilon_\lambda(\tilde{\gamma}_{\lambda,\mu_1}(f)) - \varepsilon_\lambda(\tilde{\gamma}_{\lambda,\mu_2}(f))] \quad (3.49)$$

# **Parte II**

## **Propuestas**

La segunda parte de este capítulo consiste en la propuesta de operadores que permiten modificar y cuantificar el contraste en las imágenes procesadas. Estas transformaciones de contraste tienen como base la ley de Weber la cual nos indica que el sistema visual humano es sensible a las variaciones locales en la luminancia (Jain, 1989).

La Ley de Weber es una medida del contraste en función de una variación relativa de la luminancia. En términos generales, el contraste se refiere a la diferencia de luminancias entre un objeto y sus alrededores.

### **3.7. Luz, luminancia, brillo y contraste**

La mayor parte de la información que se percibe a través del mecanismo de la visión procede de las diferentes luminosidades que emiten los objetos situados en el campo visual. Estas diferencias dan lugar a la aparición del contraste. El contraste entre las luminancias de los objetos y, en menor medida, el contraste entre los colores de los mismos, nos permiten distinguir objetos entre otros.

La luminancia de un objeto es independiente de las luminancias de los objetos a su alrededor. El brillo de un objeto es la luminancia percibida y esta si depende de la luminancia de sus alrededores. Por consiguiente, dos objetos con diferentes alrededores pueden tener luminancias idénticas pero diferentes brillos. El brillo y la luminancia de los objetos son importantes en el momento de capturar la imagen, pues estos factores intervienen en el contraste percibido en la imagen.

En términos generales, el contraste se refiere a la diferencia de luminancia entre un objeto y sus alrededores.

La iluminación es uno de los factores más significativos que afectan la apariencia de una imagen. Este hecho frecuentemente conduce a una variación del contraste debido a la presencia de sombras y regiones extremadamente claras; de tal manera que se encuentran

transiciones importantes de luminancia al pasar de una zona oscura a una clara o viceversa.

En el tratamiento de las imágenes, frecuentemente es necesario segmentar y detectar características de interés que pueden ser utilizadas para un análisis posterior. Por ello, es necesario ajustar la apariencia de la imagen, mejorando las condiciones de iluminación, y de esta manera poder visualizar mejor los objetos de interés para posteriormente realizar la correcta detección o segmentación de las regiones bajo estudio. En este trabajo presentamos una estrategia para realizar una compensación en los cambios de iluminación utilizando la ley de Weber.

De acuerdo a la ley de Weber, si se modifica el fondo de la imagen, entonces existirá un cambio en el contraste percibido. De esta manera decimos que existen dos planos, uno de ellos es el fondo de la imagen, mientras que el otro plano consiste del resto de las componentes. A partir de estos conceptos, concluimos que la detección del fondo de la imagen es fundamental para mejorar el contraste; sin embargo cuando existen regiones con poca o mala iluminación, el fondo de la imagen se ve alterado; mientras que una imagen bien iluminada presenta un fondo uniforme. De este modo, una imagen ideal  $f$  es alterada por un fondo de imagen desigual  $r$  tal que la imagen observada será  $I = f + r$ . Recuperar la imagen original  $f$ , desde la imagen observada  $I$ , no es sencillo debido a que  $r$  no es uniforme (Mendiola et al., 2007).

Las imágenes están compuestas por zonas claras, medias y oscuras denominadas áreas de luminosidad, de semitonos y de sombras respectivamente. Este espacio entre luces y sombras se conoce como rango tonal de una imagen.

### 3.8. Ley de Weber

La ley de Weber establece una relación cuantitativa entre la magnitud de un estímulo físico y cómo es percibido. Estos y otros descubrimientos llevaron a la convicción de que era posible explicar mediante principios físico-químicos todos los actos humanos. La ley establece que el menor cambio discernible en la magnitud de un estímulo es proporcional a la magnitud del estímulo.

Matemáticamente la ley de Weber es (Jain, 1989):

$$dp = k \frac{dS}{S}$$

donde  $dp$  corresponde al cambio percibido en el estímulo,  $dS$  corresponde al cambio de magnitud del estímulo y  $S$  corresponde a la magnitud del estímulo, integrando la ecuación anterior se tiene:

$$p = k \log S + C$$

Para determinar el valor de  $C$ , se asigna a  $p = 0$ , es decir no hay percepción; y entonces:

$$C = -k \log S_0$$

donde  $S_0$  es el nivel de estímulo por debajo del cual no se percibe sensación. Por lo tanto la ecuación resultante:

$$p = k \log \frac{S}{S_0}$$

La relación entre el estímulo y la percepción corresponde a una escala logarítmica.

La magnitud de una percepción es proporcional al logaritmo de la magnitud de un estímulo físico. Si denotamos la magnitud del sentido como  $p$  y  $S$  como la magnitud del estímulo físico, entonces podemos expresar la ley de Weber en la siguiente forma:

$$p(S) = \begin{cases} k \log \left( \frac{S}{S_0} \right) & \text{si } S \geq S_0 \\ 0 & \text{si } S < S_0 \end{cases}$$

donde  $k$  es constante con  $S, S_0 \neq 0$ , y  $S_0$  es el umbral de la magnitud del estímulo físico.

### 3.9. El caso de la ley de Weber en imágenes

Como portadoras de información, todas las imágenes eventualmente son percibidas e interpretadas por el sistema de visión humano. De esta manera, el entendimiento del proceso de percepción visual es importante como auxiliar para el desarrollo de algoritmos en el área de procesamiento de imágenes. Acorde a la *ley de Weber* el contraste está dado por la siguiente expresión:



$$\frac{|L_s - L_0|}{L_0} = C \quad (3.50)$$

donde  $C$  es el valor del contraste de luminancias,  $L_0$  es la luminancia del objeto a observar y  $L_s$  la luminancia del fondo. Este contraste puede ser positivo, con valores entre 0 e  $\infty$ , correspondiendo a un objeto claro sobre un fondo oscuro, como por ejemplo, una estrella brillante sobre el fondo oscuro del cielo, o bien se pueden tener contrastes negativos con valores entre  $-1$  y 0, que corresponde al caso de un objeto oscuro sobre un fondo claro, por ejemplo, un texto escrito en negro sobre un papel blanco.

Haciendo  $L = L_0$ ,  $L_s = L + \Delta L$ , entonces la ecuación (3.50) puede ser reescrita como:

$$\Delta C = \frac{\Delta L}{L}$$

La ecuación anterior nos indica que,  $\Delta(\log L)$  es proporcional al  $\Delta C$  el cambio en el contraste. Por consiguiente la ley de Weber se puede expresar como:

$$C = k \log L + b \quad L > 0 \quad (3.51)$$

Donde  $C$  es el contraste,  $L$  la luminancia, mientras que  $k$  y  $b$  son constantes; siendo  $b$  el fondo de la imagen.

Como una primera aproximación para el fondo de la imagen, en el trabajo de Rivas et al. (2007) se propone el promedio entre el mínimo regional más pequeño y el mínimo regional más grande de la imagen, esto puede ser considerado como un umbral entre las regiones claras y oscuras de la imagen de tal manera que al utilizarse este promedio como el fondo de la imagen en la ley de Weber se obtiene una mejora en el contraste. Es decir:

$$\tau = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

la función constante  $\tau$  es la aproximación al fondo de la imagen.

Para determinar los valores extremos de la imagen, Rivas et al. (2007) hace uso de los filtros por reconstrucción en particular del cierre por reconstrucción que permite eliminar

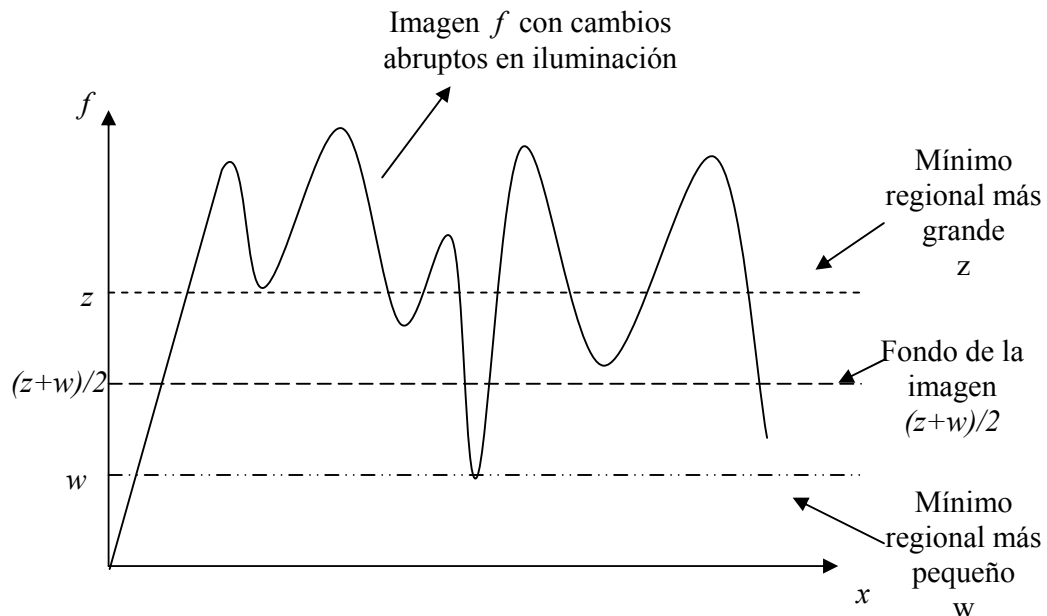


Figura 3.11: Detección del fondo de la imagen como un promedio entre el mínimo regional más pequeño y el mínimo regional más grande de la imagen

mínimos regionales falsos. En la figura 3.11 se muestra la aproximación al fondo de la imagen mediante esta metodología. Sin embargo, la principal desventaja de esta propuesta es que el fondo de la imagen no es detectado de manera local. Como resultado, el contraste no es mejorado correctamente en imágenes con deficiente iluminación, debido a que los cambios considerables se producen en el fondo de la imagen debido a los cambios abruptos de luminancia como se ilustra en la figura 3.11 .

En la siguiente sección, se describe una propuesta para aproximar el fondo de la imagen de manera local.

### 3.9.1. Propuesta: Aproximación al fondo de la imagen por bloques

La imagen  $f$  es dividida en  $n$  bloques  $w^i$  de tamaño  $l_1 \times l_2$ . Cada bloque es una subimagen de la imagen original. Los valores de intensidad mínimo y máximo en cada subimagen

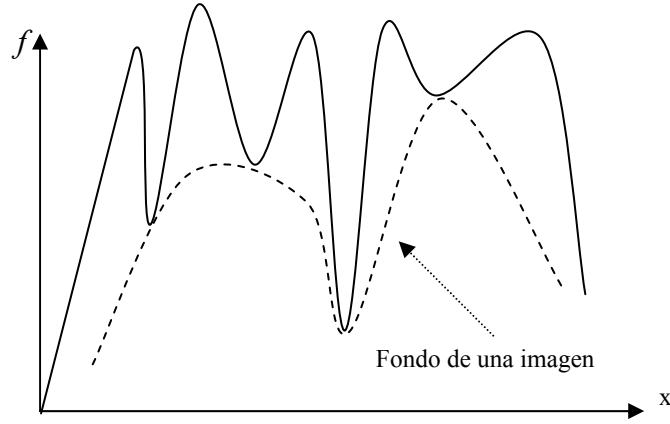


Figura 3.12: Fondo desigual de una imagen con deficiente iluminación

son denotados como:

$$m_i = \wedge w^i(x) \quad \forall x \in D_{w^i} \subseteq D \quad (3.52)$$

$$M_i = \vee w^i(x) \quad \forall x \in D_{w^i} \subseteq D \quad (3.53)$$

Los valores máximo y mínimo son usados para determinar el criterio del fondo de la imagen  $\tau_i$  para cada bloque analizado de la siguiente manera:

$$\tau_i = \frac{m_i + M_i}{2} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (3.54)$$

En el caso unidimensional, la figura 3.13 ilustra la aproximación, el cual es obtenido por medio de la siguiente expresión:

$$\nu(x) = \begin{cases} \tau_1 & x \leq L_1 \\ \tau_2 & L_1 < x \leq L_2 \\ \tau_3 & L_2 < x \leq L_3 \\ \vdots & \\ \tau_n & L_{n-1} < x \leq L_n \end{cases}$$

El valor de  $\tau_i$  representa una línea de división entre los niveles de intensidad claros ( $f > \tau_i$ ) y oscuros ( $f \leq \tau_i$ ). Una vez que,  $\tau_i$  es calculado, este valor es usado para seleccionar el parámetro del fondo de la imagen asociado al análisis de bloques. De esta

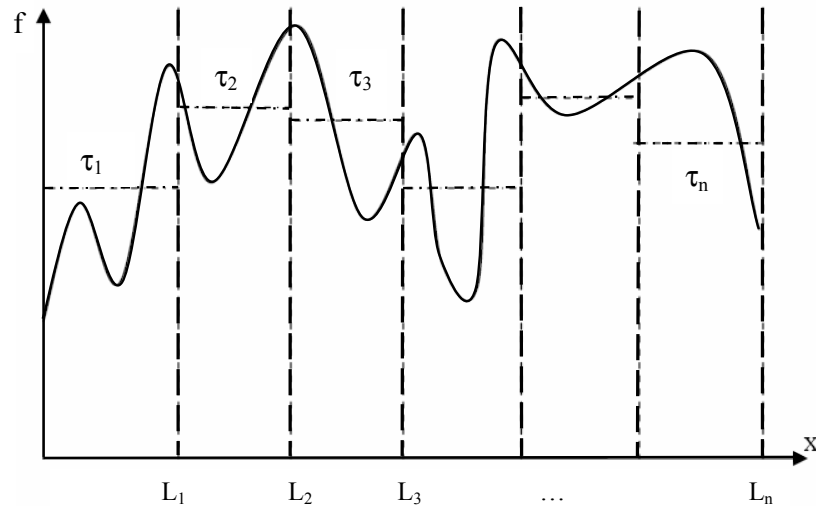


Figura 3.13: Fondo obtenido por un análisis por medio de bloques

manera, una expresión para mejorar el contraste se propone a continuación:

$$\Gamma_{\tau_i}(f) = \begin{cases} k_i \log(f + 1) + M_i & f \leq \tau_i \\ k_i \log(f + 1) + m_i & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.55)$$

Note que, el parámetro del fondo depende del valor de  $\tau_i$ . Si  $f \leq \tau_i$  (región oscura) el parámetro del fondo toma el valor de la máxima intensidad  $M_i$  dentro del bloque analizado, y la intensidad mínima  $m_i$  en otro caso. Además, la unidad es añadida en la ecuación (3.55) en la función logaritmo para evitar cualquier indeterminación. Por otra parte, debido a que, las imágenes en niveles de grises son usadas en este trabajo, la constante  $k_i$  en la ecuación (3.55) es obtenida como sigue:

$$k_i = \frac{255 - m_i^*}{\log(256)} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

con

$$m_i^* = \begin{cases} m_i & f > \tau_i \\ M_i & f \leq \tau_i \end{cases}$$

La transformación  $\Gamma_{\tau_i}(f)$  satisface las siguientes propiedades:

- a) No es una transformación creciente, i.e., para cualesquiera dos imágenes  $f_1$  y  $f_2$  con  $f_1 \leq f_2$ ,  $\Gamma_{\tau_i}(f_1) \geq \Gamma_{\tau_i}(f_2)$ ;
- b) No es una transformación idempotente, i.e.:  $\Gamma_{\tau_i}\Gamma_{\tau_i}(f) \neq \Gamma_{\tau_i}(f)$ ;
- c) Es una transformación extensiva, i.e.:  $f \leq \Gamma_b(f)$ ;
- d) Es posible clasificar el dominio de definición de  $f$  en dos conjuntos: el conjunto  $S_b$  compuesto por zonas de alto contraste, donde para cualquier punto  $x \in S_{\tau_i}$ ,  $f > \tau_i$ , y el conjunto  $S_{\tau_i}^c$  compuesto por zonas de bajo contraste, donde para cada punto  $x \in S_{\tau_i}^c$ ,  $f \leq \tau_i$ ;
- e) La composición de mapeos de contraste usando la ecuación (3.55), provoca imágenes que son más claras en cada iteración, alcanzado un límite impuesto por el valor del nivel más alto de intensidad de la imagen,  $maxint = 255$ , i.e.,

$$\underbrace{\Gamma_{\tau_i} \dots \Gamma_{\tau_i}}_{n \text{ times}}(\Gamma_{\tau_i}(f)) \rightarrow maxint \quad (3.56)$$

- f) Si la imagen  $f$  es subdividida cada vez en bloques más pequeños, la función del fondo  $b(x)$  tiende a ser similar a la función original  $f$ .

Por otra parte, debido a que los valores máximo y mínimo son analizados para cada bloque, se puede considerar la siguiente aproximación.

Sea  $I_{max}(x)$  e  $I_{min}(x)$  los valores máximo y mínimo considerados de un conjunto de píxeles contenidos en la ventana (B) de tamaño elemental ( $3 \times 3$  elementos), y  $x \in D$ . Notesé que la ventana corresponde al elemento de estructura  $B$ . Por simplicidad; considerese que:

$$I_{max}(x) = max\{f(x + b) : b \subseteq B\} \quad (3.57)$$

y

$$I_{min}(x) = min\{f(x + b) : b \subseteq B\} \quad (3.58)$$

Entonces la ecuación (3.54), puede ser reescrita como:

$$\tau(x) = \frac{I_{min}(x) + I_{max}(x)}{2} \quad (3.59)$$

Donde  $I_{max}(x)$  y  $I_{min}(x)$  corresponden a los valores de la dilatación y erosión morfológicas definidas en Maragos y Schafer (1987). De esta manera, la ecuación (3.59) es expresada como:

$$\tau(x) = \frac{\varepsilon(f)(x) + \delta(f)(x)}{2} \quad (3.60)$$

Notese que  $\tau_i$  es sustituido por  $\tau(x)$ , de esta manera  $\tau(x)$  tiene un caracter local dado por el elemento de estructura  $B$ . Así, el operador de contraste (3.55) es escrito como:

$$\Gamma_{\tau(x)}(f) = \begin{cases} k_i \log(f + 1) + \delta_{\mu}(f)(x) & f \leq \tau(x) \\ k_i \log(f + 1) + \varepsilon_{\mu}(f)(x) & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.61)$$

y

$$k_{\tau(x)} = \frac{255 - \tau(x)}{\log(256)} \quad (3.62)$$

### 3.10. Propuesta: Determinación del fondo de la imagen usando la apertura por reconstrucción

Es deseable obtener una función que aproxime al fondo de la imagen sin dividir la imagen en bloques; y sin usar la dilatación y la erosión morfológica, debido a que estas transformaciones generan nuevos contornos cuando el tamaño del elemento de estructura aumenta.

En la figura 3.14 se ilustra esta situación. Sin embargo, dentro de la MM, existe otra clase de transformaciones que permiten filtrar la imagen sin generar nuevas componentes, las cuales son llamadas transformaciones por reconstrucción (sección 3.3). En nuestro caso, la apertura por reconstrucción es de nuestro interés debido a que es antiextensiva y pasa por las regiones mínimas (Vincent, 1993).

De esta manera, la apertura por reconstrucción es considerada, entonces la ecuación (3.54), puede ser reescrita como:

$$\tau(x) = \tilde{\gamma}_{\mu}(f)(x) \quad (3.63)$$

La ecuación 3.55 se mantiene y solamente se cambia la manera de detectar el fondo. Un ejemplo de la aplicación de la ecuación 3.63 se muestra en la figura 3.15. Las imágenes de entrada son las figuras (a) y (c), mientras que las imágenes mejoradas son las figuras (b) y

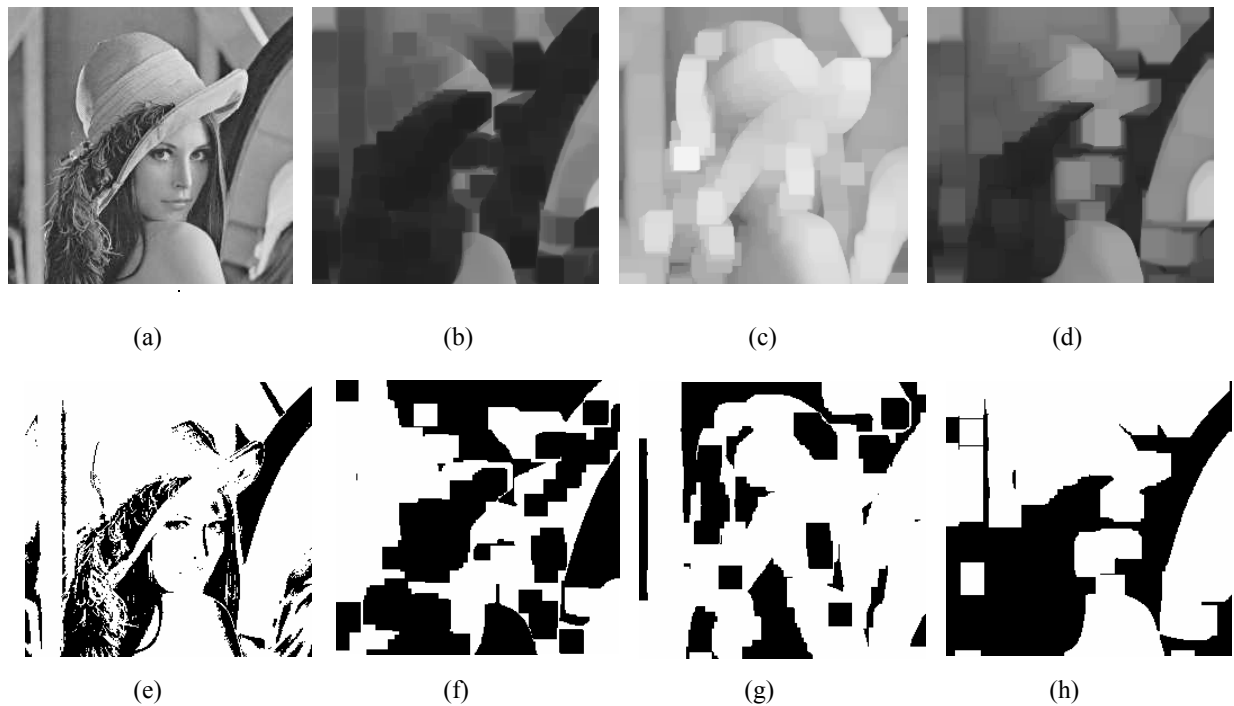


Figura 3.14: Imágenes que ilustran la generación de nuevos contornos. a) Imagen original, b) Erosión tamaño  $\mu = 20$ , c) Dilatación tamaño  $\mu = 20$ , d) Apertura tamaño  $\mu = 20$ , e), f), g) y h) Umbralización de las imágenes en a), b), c) y d).

(d). El fondo de la imagen es calculado con un elemento de estructura de tamaño 10 para todas las imágenes.

Por otra parte es posible usar la apertura por reconstrucción para generar el fondo de la imagen similar a la imagen presentada en 3.12

En la figura 3.11 se muestra un fondo desigual correspondiente a una imagen con variaciones importantes en iluminación. Observe que el fondo pasa por las regiones mínimas, mientras que las otras regiones contienen información local de la función original. Es importante mencionar que de esta información local y de los puntos extremos se obtiene información importante de la imagen.

Si se considera el fondo de la imagen como la apertura por reconstrucción es necesario

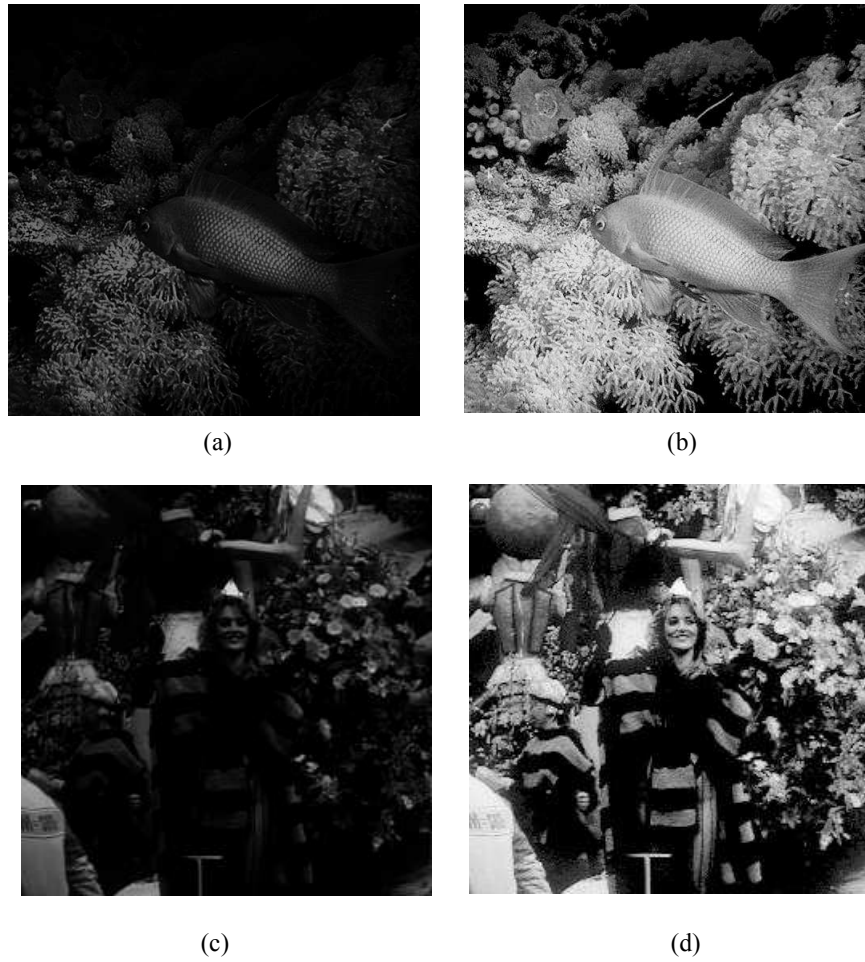


Figura 3.15: Criterio del fondo como la apertura por reconstrucción. a) y c) Imágenes originales, b) y d) imágenes mejoradas con la apertura por reconstrucción como el criterio del fondo de la imagen



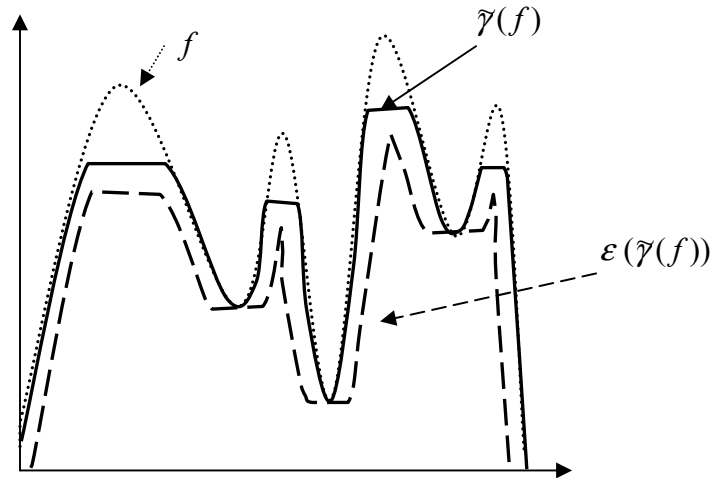


Figura 3.16: Fondo de la imagen obtenida de la apertura por reconstrucción

añadir una operación para detectar la información local dada por la función original (los extremos son contenidos debido al desarrollo de la apertura por reconstrucción). La transformación propuesta para llevar a cabo este propósito es la erosión morfológica con un elemento de estructura de tamaño  $\mu = 1$ .

$$b(x) = \varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_\mu(f)](x) \quad (3.64)$$

En la figura 3.16 se ilustra esta idea. Debido a que la erosión morfológica tiende a generar nueva información si el tamaño del elemento de estructura aumenta, en este estudio se usa la erosión morfológica de tamaño 1.

Así, se propone la siguiente expresión para mejorar el contraste en imágenes con deficiente iluminación:

$$\xi_{\tilde{\gamma}_\mu}(f) = k(x)\log(f + 1) + \varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_\mu(f)] \quad (3.65)$$

y

$$k(x) = \frac{\maxint - \varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_\mu(f)](x)}{\text{Log}(\maxint + 1)} \quad (3.66)$$

En nuestro caso, el nivel de gris máximo es  $\maxint = 255$ . Si el fondo de la imagen aumenta, la imagen tiende a ser más clara, debido a que el fondo de la imagen es un efecto

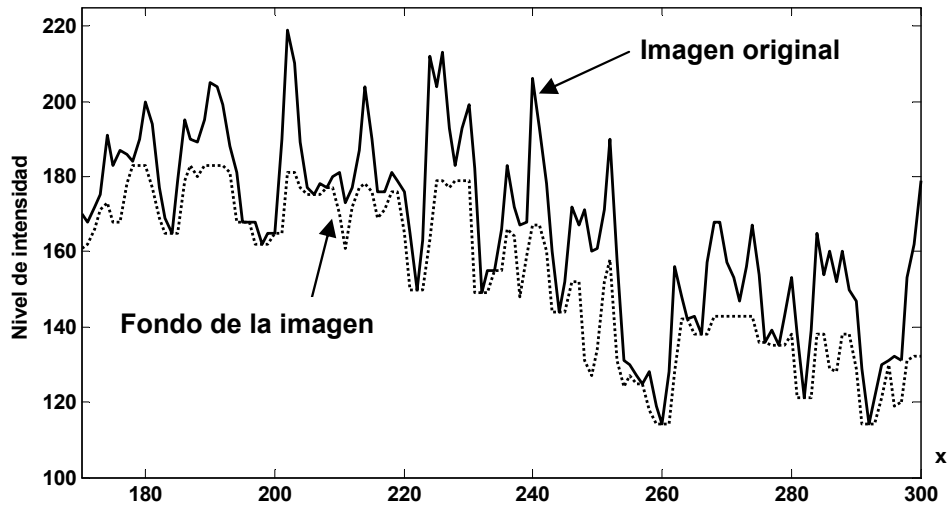


Figura 3.17: Representación gráfica de una imagen y la aproximación al fondo de la imagen por medio de  $\varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_\mu(f)]$

aditivo. Formalmente, se tiene:

$$\lim_{\varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_\mu(f)](x) \rightarrow \maxint} \xi_{\tilde{\gamma}_\mu}(f) = \maxint \quad (3.67)$$

Considerando que, la erosión morfológica de tamaño  $\mu = 1$  es fija en la ecuación (3.65), el operador  $\xi_{\tilde{\gamma}_\mu}(f)$  satisface las propiedades a), b), c) y d). Sin embargo, debido al desarrollo de la apertura por reconstrucción se obtiene una propiedad interesante llamada Multibackground, y se presenta a continuación:

**Definición 3.10.1 (Multibackground)** Para todo  $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ , con  $\mu_1 < \mu_2 \Rightarrow \tilde{\gamma}_{\mu_1}(f) \geq \tilde{\gamma}_{\mu_2}(f)$ , entonces

$$\varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_{\mu_1}(f)](x) \geq \varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_{\mu_2}(f)](x) \quad (3.68)$$

Esta idea se ilustra en la figura 3.17.

### 3.11. Propuesta: Medida del contraste

La ecuación (3.51) se usa en esta sección para introducir un método para cuantificar el contraste usando operadores morfológicos. Considerando una imagen procesada por un operador y un elemento de estructura cuadrado centrado en su origen. Cada píxel de esta imagen de salida tiene cierto nivel de intensidad el cual es denotado como  $I$ . Para cada conjunto de píxeles cubiertos por el elemento de estructura se considerarán los elementos máximo y mínimo, esto es  $I_{max}(\mu B_x)$  e  $I_{min}(\mu B_x)$ , de tal manera que una aproximación al parámetro  $L$  en la ecuación (3.51) puede expresarse como:

$$L = \frac{I_{max}(\mu B_x)}{I_{min}(\mu B_x)} \quad (3.69)$$

con  $I_{max}(\mu B_x) \neq 0$  e  $I_{min}(\mu B_x) \neq 0$ . Nótese que el parámetro  $L$  es detectado localmente. Sustituyendo la expresión (3.69) en la ecuación (3.51) se obtiene la siguiente ecuación:

$$C_{\mu,\lambda}(f)(x) = k \log \frac{I_{max}(\mu B_x)}{I_{min}(\mu B_x)} + \varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_\lambda(f)](x) \quad (3.70)$$

con  $I_{min}(\mu B_x) \neq 0$  e  $I_{max}(\mu B_x) \neq 0$ . Donde  $\lambda$  representa el tamaño del elemento de estructura para realizar la apertura por reconstrucción. Nótese que los valores de  $I_{max}(\mu B_x)$  e  $I_{min}(\mu B_x)$  pueden ser sustituidos por  $\delta_{\mu B}(f)(x)$  y  $\varepsilon_{\mu B}(f)(x)$  respectivamente en el punto  $x$ . Esto se debe a que en los filtros de orden, la erosión y dilatación morfológicas se obtienen de esta manera (Maragos y Schafer, 1987), entonces

$$C_{\mu,\lambda}(f)(x) = k \log \frac{\delta_{\mu B}(f)(x)}{\varepsilon_{\mu B}(f)(x)} + \varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_\lambda(f)](x) \quad (3.71)$$

con  $\varepsilon_{\mu B}(f)(x) \neq 0$  y  $\delta_{\mu B}(f)(x) \neq 0$ . El operador gradiente ha sido definido en la MM como en la ecuación 6. Considerando que  $\log(\delta_{\mu B}(f)) = \delta_{\mu B}(\log(f))$  y  $\log(\varepsilon_{\mu B}(f)) = \varepsilon_{\mu B}(\log(f))$  (Serra, 1992), la ecuación (3.71) se escribe como:

$$C_{\mu,\lambda}(f)(x) = k * \text{grad}(\log(f))(x) + \varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_\lambda(f)](x) \quad (3.72)$$

con  $f(x) \neq 0$ . Para tener un índice global del contraste de la imagen, se considera la suma de los valores de  $C_{\mu,\lambda}(f)(x)$  y es denota como  $\Theta_{\mu,\lambda}$ :

$$\Theta_{\mu,\lambda}(f) = k \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{grad}_{\mu}(\log(f))(x_{i,j}) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_{\lambda}(f)](x_{i,j}), \text{conf}(x_{i,j}) \quad (3.73)$$

Donde  $f(x_{i,j})$  representa el valor de la intensidad en niveles de gris en el punto  $x_{i,j}$ , mientras que  $m$  y  $n$  denotan las dimensiones de la imagen. El parámetro  $k$  se especificó en la ecuación 14, donde el nivel máximo de intensidad es 255 en las imágenes procesadas en este trabajo.

Finalmente, la ecuación se divide por el volumen de la imagen original, que esta definido como  $Vol[f] = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} f(x_{i,j})$ , con esto se evita trabajar con numeros grandes del contraste global. De está manera, el índice de contraste  $X_{\mu,\lambda}$  se obtiene a partir de la siguiente ecuación

$$X_{\mu,\lambda} = \frac{\Theta_{\mu,\lambda}}{Vol[f]} \quad (3.74)$$

### 3.12. Propuesta: Gradiente morfológico viscoso

En Santillan et al. (2009) se presenta la teoría para definir el gradiente morfológico viscoso conexo. En Serra (Serra, 2005) el espacio usual  $P(E)$  es reemplazado por una estructura de retículo viscoso. El espacio utilizado se define por:

$$\mathfrak{S}_{\lambda} = \{\delta_{\lambda}, X \in P(E)\} \quad (3.75)$$

con  $\lambda > 0$ . Es decir, los elementos del retículo viscoso son todos las dilataciones de los elementos de  $P$ .

Denotemos como  $\mathbf{X} = \tilde{\gamma}_{\mu} \tilde{\varphi}_{\mu} \tilde{\gamma}_{\mu}(X)$  para asegurar que las componentes del fondo y de la imagen pertenezcan a la viscosidad  $\mu$ . Posteriormente se aplica una erosión tamaño  $\mu$  que permite descubrir la componente viscosa  $X$ .

Así se puede definir el gradiente interno en  $\mathfrak{S}_{\lambda}$  como.

$$\nabla_{\mu}^{-} = \varepsilon_{\mu}(\mathbf{X}) - \varepsilon_{\mu+1}(\mathbf{X}) \quad (3.76)$$

En la ecuación 3.76 el operador  $-$  corresponde a la diferencia aritmética, mientras que

$$\nabla_{\mu}^v = \delta_{\mu}[\varepsilon_{\mu}(\mathbf{X}) - \varepsilon_{\mu+1}(\mathbf{X})] \quad (3.77)$$

denota el gradiente interno viscoso, pues al aplicar  $\delta_{\mu}$  es un elemento de  $\mathfrak{S}_{\lambda}$ .

Para introducir el parametro  $\lambda$ , se define la erosión viscosa como:

$$\varepsilon_{\mu,\lambda} = \varepsilon_{\mu} \tilde{\gamma}_{\lambda,\mu} \quad (3.78)$$

Y la dilatación viscosa como:

$$\delta_{\mu,\lambda} = \delta_{\mu} \tilde{\varphi}_{\lambda,\mu} \quad (3.79)$$

Usando 3.78 y 3.79 es posible definir el gradiente morfológico viscoso, el gradiente morfológico interno viscoso y el gradiente morfológico externo viscoso. Una vez filtrada la imagen se puede aplicar el gradiente morfológico viscoso que se define como:

$$\nabla_{\mu,\lambda}^m = \delta_{\mu}[\delta_{\mu,\lambda}(\mathbf{X}) - \varepsilon_{\mu+1,\lambda}(\mathbf{X})] \quad (3.80)$$

y el gradiente morfológico interno viscoso es

$$\nabla_{\mu,\lambda}^i = \delta_{\mu}[\varepsilon_{\mu,\lambda}(\mathbf{X}) - \varepsilon_{\mu+1,\lambda}(\mathbf{X})] \quad (3.81)$$

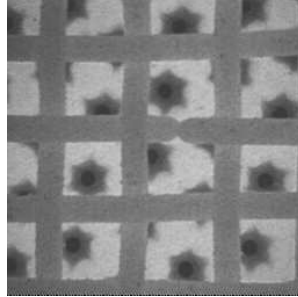
mientras que el gradiente morfológico externo viscoso es

$$\nabla_{\mu,\lambda}^e = \delta_{\mu}[\delta_{\mu,\lambda}(\mathbf{X}) - \varepsilon_{\mu,\lambda}(\mathbf{X})] \quad (3.82)$$

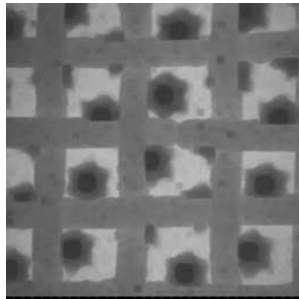
En la figura 3.18 se muestra una comparación de la aplicación de la erosión morfológica con  $\mu = 2$  y la erosión morfológica viscosa con  $\lambda = 2$  y  $\mu = 1$ , así como de la dilatación morfológica con  $\mu = 2$  y la dilatación viscosa con  $\lambda = 2$  y  $\mu = 1$ .

En la figura 3.19 se muestra una comparación del operador gradiente morfológico, interno, externo y viscoso.  $\nabla_{4,2}^i = \delta_4[\varepsilon_{4,2}(\mathbf{X}) - \varepsilon_{5,2}(\mathbf{X})]$ .

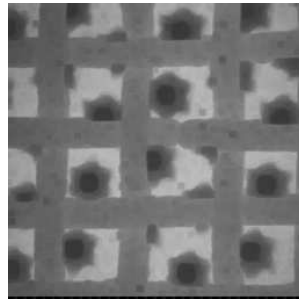
Finalmente en la figura 3.20 se muestra la aplicación de los operadores gradientes viscosos.



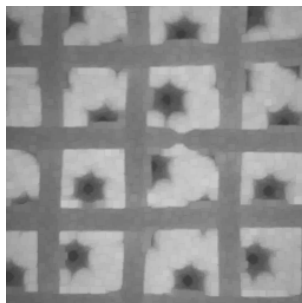
a)



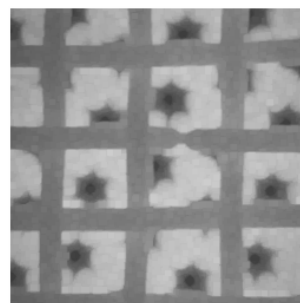
b)



c)



d)



e)

Figura 3.18: a) Imagen original; b) Erosión morfológica con  $\mu = 2$ ; c) Erosión viscosa con  $\lambda = 2$  y  $\mu = 1$ ; d) Dilatación morfológica con  $\mu = 2$ ; e) Dilatación viscosa con  $\lambda = 2$  y  $\mu = 1$ ;

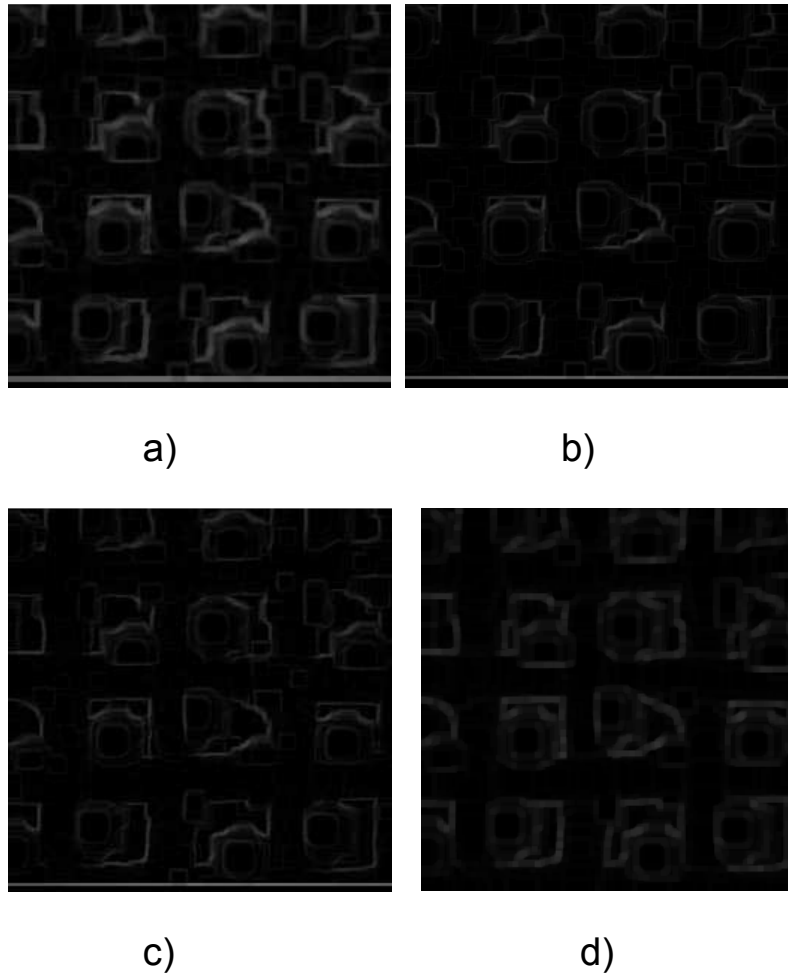


Figura 3.19: a) Aplicación del operador gradiente morfológico con  $\mu = 4$ ; b) Aplicación del operador gradiente interno con  $\mu = 4$ ; c) Aplicación del operador gradiente externo con  $\mu = 4$ ; d) Aplicación del operador gradiente morfológico viscoso con  $\mu = 4$  y  $\lambda = 2$ .

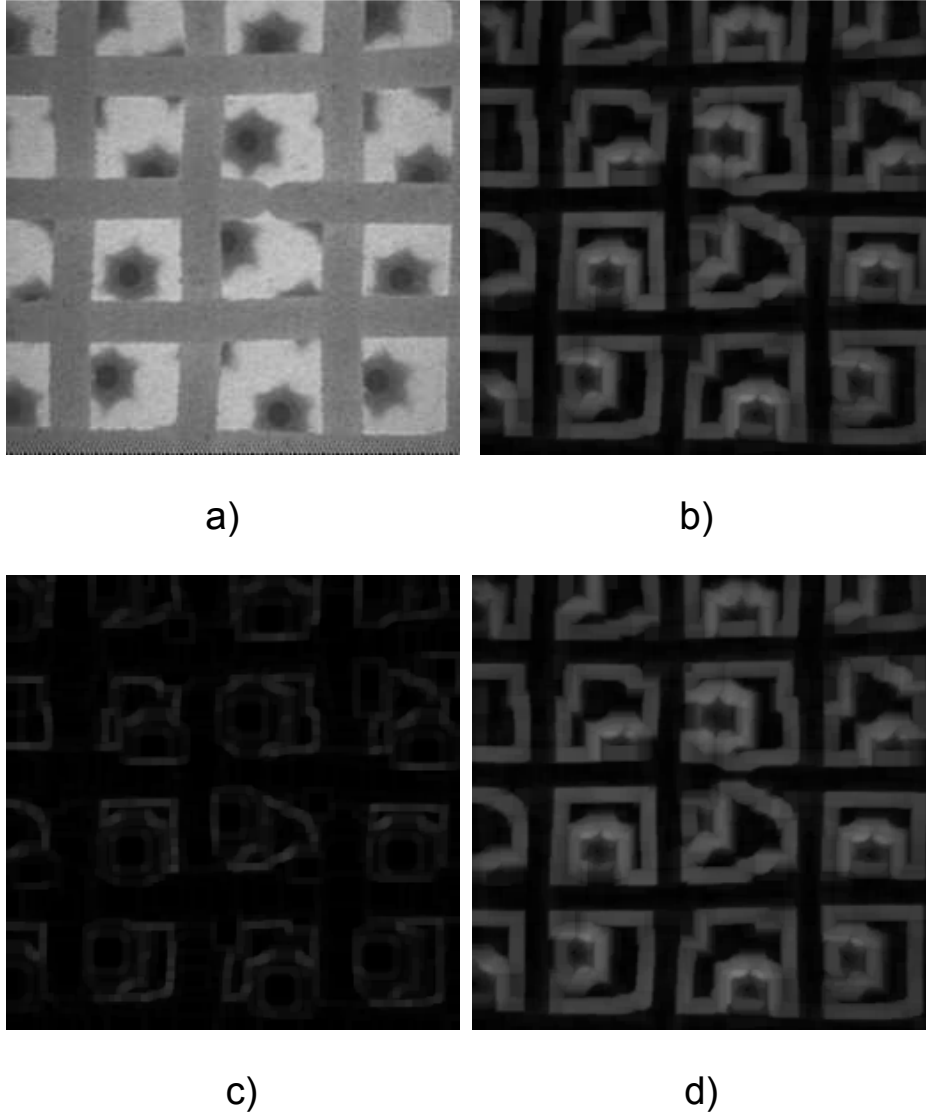


Figura 3.20: a) Imagen Original; b) Aplicación del operador gradiente morfológico viscoso  $\nabla_{3,2}^m$ ; c) Aplicación del operador gradiente interno viscoso  $\nabla_{3,2}^i$ ; d) Aplicación del operador gradiente externo viscoso  $\nabla_{3,2}^m$ .



# Capítulo 4

## Resultados

Para ilustrar el desempeño de los algoritmos propuestos en este trabajo, se presenta a continuación la aplicación de tales operadores en imágenes con diferentes objetos, así como el procesamiento en imágenes de rostros de personas, algunas de estas imágenes tienen la característica de tener mala iluminación; otras fueron capturadas para esta investigación.

### **4.1. Una aplicación a la mejora de contraste en imágenes con mala iluminación**

#### **4.1.1. Introducción**

En el capítulo III fueron presentados diferentes operadores de contraste morfológicos; estas transformaciones permiten dar un procesamiento a la imagen a tratar de manera general. Cuando una imagen es procesada se busca realzar o modificar ciertas regiones, esto con la finalidad de mejorar su apariencia o para destacar algún aspecto de la información contenida en la misma o bien, si se requiere medir, contrastar o clasificar algún elemento contenido en la imagen.

Actualmente uno de los campos de aplicación de la MM es la mejora y cuantificación del contraste en imágenes. En particular, en esta tesis se realizó el procesamiento de imágenes mal iluminadas.

### 4.1.2. Definición del problema

Antes de presentar la definición del problema, es importante mencionar que el capítulo IV (resultados) consiste básicamente en la aplicación de los operadores para mostrar el desempeño de los operadores de contraste morfológicos que fueron introducidos en las secciones anteriores.

Para ilustrar el desarrollo de la ecuación (3.55) y (3.65) se muestra algunas imágenes obtenidas.

**Ecuación (3.55) Ejemplo de aplicación:** Considere la imagen de entrada en la figura 4.1(a1). Los valores de  $\tau$  para cada bloque en la figura 4.1(a2) son:  $\tau_1 = 10$ ,  $\tau_2 = 1$ ,  $\tau_3 = 2$  y  $\tau_4 = 1$ . La imagen mejorada se presenta en la figura 4.1(a3).

Otro ejemplo es presentado en la figura 4.1 (a4)-(a7). Las imágenes originales son localizadas en las figuras. 4.1(a4) y 4.1(a6), mientras en las figuras. 4.1(a5) y 4.1(a7), se muestran las imágenes mejoradas. Por otra parte, la imagen en la figura 4.1(b1) fue considerada de una base de datos desarrollada por Georghiades y Belhumeur (2001).

La imagen en la figura 4.1 (b2) ilustra el fondo de la imagen considerando 20 bloques, mientras que la imagen mejorada es presentada en la figura 4.1 (b3). Notese que, en la imagen mejorada, los cambios abruptos de iluminación son evitados, apareciendo objetos los cuales no eran visible en la función original.

**Ecuación (3.61) Ejemplo de aplicación:** El análisis local es llevado a cabo de una mejor manera cuando la ecuación (3.61) es aplicada en lugar de la ecuación (3.55) para detectar el criterio del fondo de la imagen  $\tau(x)$ . Esta situación ocurre debido a que el elemento de estructura  $\mu B$ , permite analizar conjuntos de 9 vecinos en cada punto de la imagen cuando  $\mu = 1$ , (que es el elemento de estructura elemental). Si el tamaño  $\mu$  se incrementa, mas píxeles serán considerados para calcular tal parámetro.

La figura 4.2 ilustra el desarrollo de la ecuación (3.61). Las imágenes originales son mostradas en la figuras 4.2 (a), (b), (e), y (f), mientras que las imágenes mejoradas son mostradas en las figuras 4.2 (c), (d), (g), y (h). Estas imágenes mejoradas fueron obtenidas con  $\mu = 1$ .

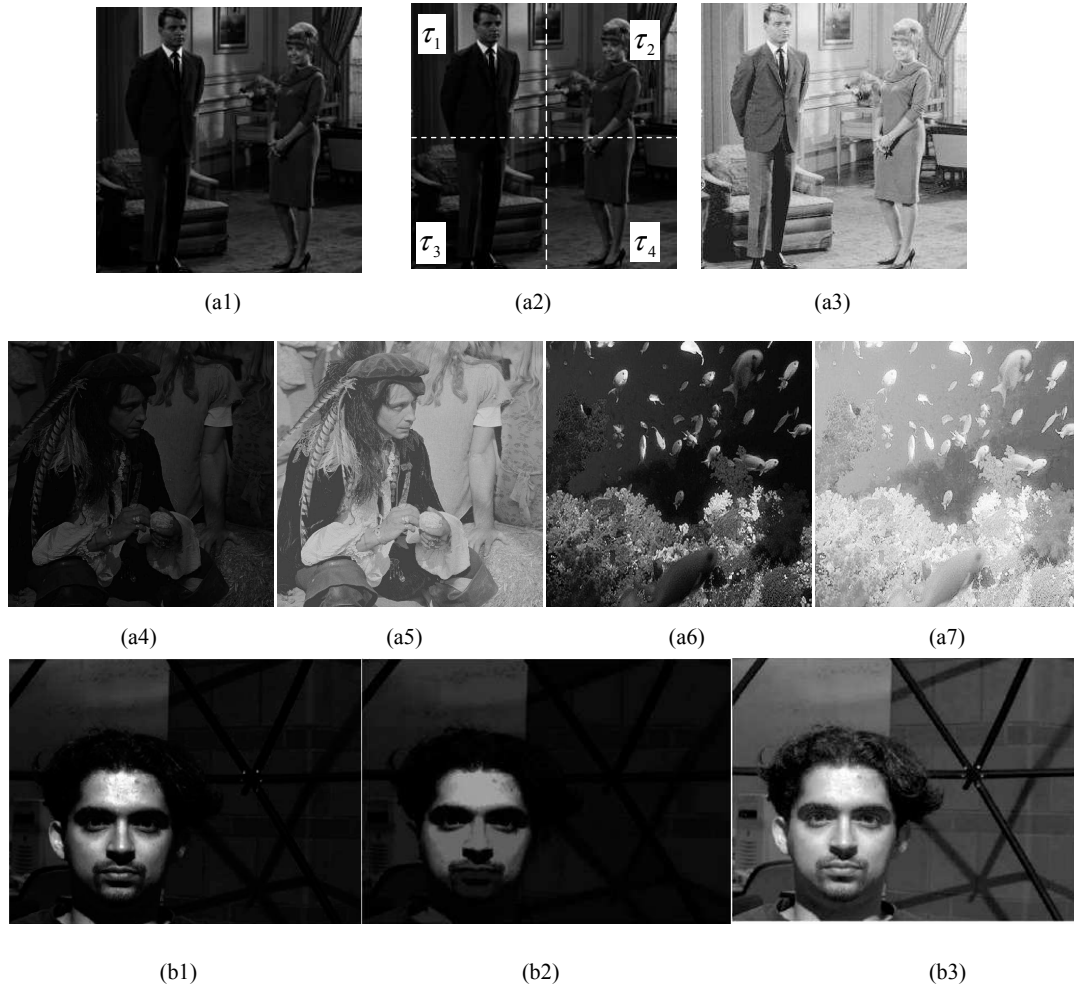


Figura 4.1: Detección del fondo de la imagen por bloques y mejora del contraste. a1) Imagen original, a2) Imagen dividida en cuatro bloques. Los valores de  $\tau$  para cada bloque son  $\tau_1 = 3$ ;  $\tau_2 = 2$ ;  $\tau_3 = 2$  y  $\tau_4 = 2$ ; a3) Imagen mejorada después de aplicar la ecuación(3.55); a4) y a6) Imágenes originales; a5) y a7) Imagen mejorada después de aplicar la ecuación (3.55); b1) Imagen original; b2) Fondo de la imagen considerando 20 bloques; b3) Imagen mejorada despues de aplicar la ecuación (3.55).



Figura 4.2: Detección del fondo de la imagen usando la erosión y la dilatación morfológica. a) y b) Imágenes originales, c) y d) imágenes mejoradas despues de aplicar la ecuación (3.61).

La propiedad *Multibackground* permite generar una familia de backgrounds cuando el tamaño del elemento de estructura  $\mu$  aumenta.

Esta situación se ilustra en la figura 4.3 donde la ecuación (3.64) es aplicada. La imagen original es presentada en la figura 4.3(a). Un conjunto de fondos de imagen es presentada en la figura 4.3 (b1), (b2), (b3), (b4), (b5) y (b6). Estas imágenes son obtenidas de la ecuación (3.64) con diferentes tamaños del elemento de estructura  $\mu = 10, 20, 30, 40, 50$  y  $60$ ; mientras que las imágenes obtenidas después de aplicar la ecuación (3.65) se muestran en la figura 4.3 c1), c2), c3), c4), c5), y c6).

Otro ejemplo se presenta en la figura 4.4. las imágenes originales son 4.4 a), b), c) y g), mientras que las imágenes mejoradas obtenidas de la ecuación (3.64) pueden observarse en las figuras 4.4 d), e), f) y h).

Los histogramas de algunas imágenes mejoradas se ilustran en la figura 4.5, cuyo propósito consiste en mostrar los cambios producidos en las imágenes obtenidas cuando el fondo de la imagen es modificado.

## 4.2. Comparación con otros operadores de contraste

Dos metodologías para mejorar el contraste, se describen en Majunder y Irani (2007) y Liu y Zhang (2007). La figura 4.6 muestra una comparación entre la propuesta dada en la ecuación (3.65) y la propuesta dada en (Liu y Zhang, 2007). En este trabajo los autores proponen mejorar el contraste por medio de una base de imágenes con buen contraste. De esta manera, el contraste es mejorado considerando la información del rostro seguido de un procedimiento de aprendizaje. La imagen original es localizada en la figura 4.6 (a), mientras que las obtenidas con la propuesta de Liu y Zhang (2007) y nuestra propuesta son las imágenes en las figuras 4.6(b) y (c) respectivamente. La imagen en la figura 4.6 (c) (obtenida con la ecuación (3.65)) presenta efectos de sobre iluminación en algunas regiones, esta situación ocurre debido a que la imagen no fue capturada con condiciones de deficiente iluminación y la razón es por que la función logaritmo incrementa los niveles de intensidad. Debido a este hecho, la imagen mejorada en la figura 4.6 (b) es mejor que la figura 4.6 (c).

Por otra parte en la figura 4.7, la realización de la ecuación (3.65) es comparada con otras transformaciones reportadas en la literatura. La imagen original se presenta en la figu-

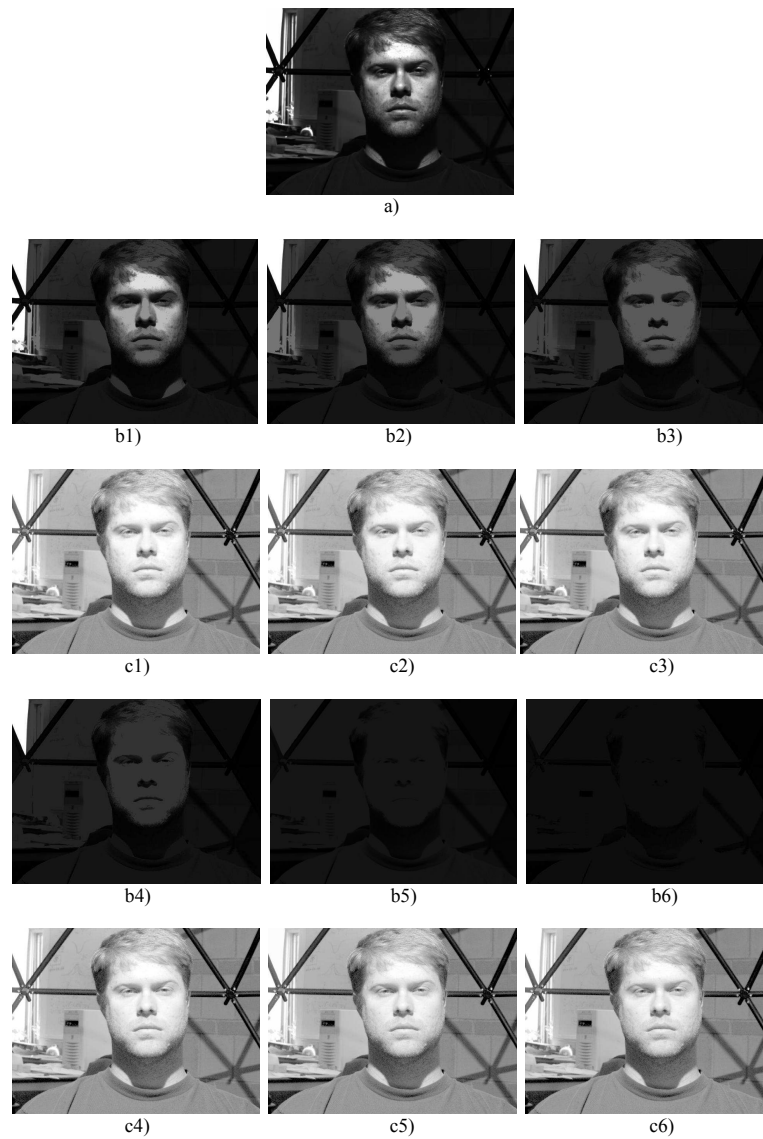


Figura 4.3: Fondo de la imagen usando la apertura por reconstrucción con diferentes tamaños para el elemento de estructura  $\mu$ . a) Imagen original; b1), b2), b3), b4), b5) y b6) fondo de la imagen obtenida después de aplicar la ecuación (3.64) con un elemento estructural de tamaño  $\mu = 10, 20, 30, 40, 50, \text{ y } 60$ ; c1), c2), c3), c4), c5), y c6) Imágenes mejoradas con la aplicación de la ecuación (3.65).



Figura 4.4: Fondo de la imagen usando la erosión de la apertura por reconstrucción con diferentes tamaños para el elemento de estructura  $\mu$ . a), b), c) y g) Imágenes originales; d), e), f), y h) Imágenes mejoradas después de aplicar la ecuación (3.65).

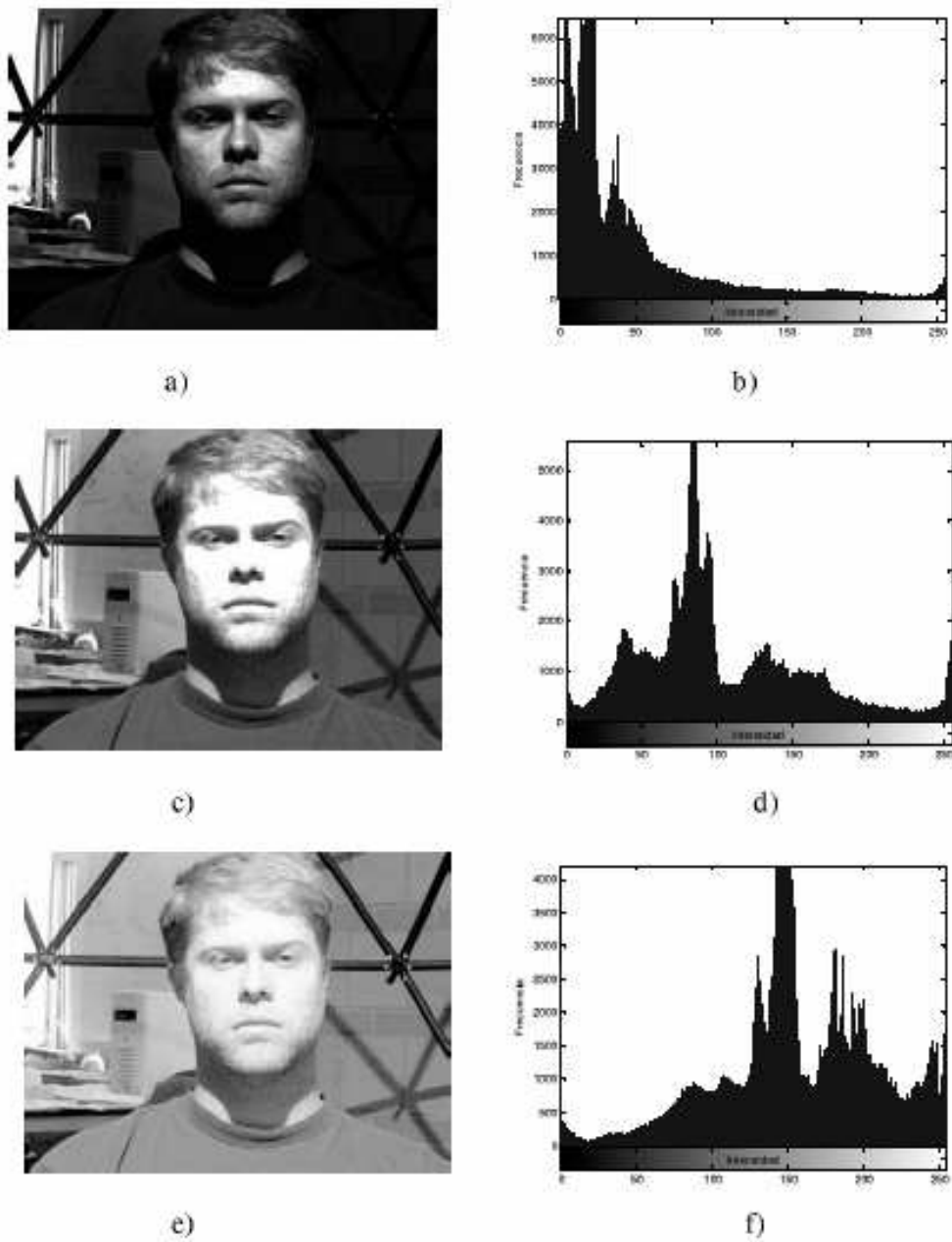


Figura 4.5: Comparación de histogramas (a1) imagen original, (b1) histograma de la imagen (a1), (a2), (a3) y (a4) imágenes mejoradas usando  $\varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_\mu] (f)$  como el parámetro del fondo de la imagen con  $\mu = 10, 20$  y  $30$ : (b2), (b3) y (b4) histogramas correspondientes a las imágenes en las figuras (a2), (a3) y (a4) respectivamente.



ra 4.7 (a), mientras que la imagen en la figura 4.7 (b) se obtiene de la ecualización del histograma. Esta técnica se usa para mejorar imágenes con deficiente iluminación. Como se mencionó en la introducción, la ecualización del histograma es una técnica que consiste en reordenar las intensidades de niveles de gris dentro de la imagen para obtener un histograma uniformemente distribuido.

La imagen obtenida en la figura 4.7 (c) se obtiene de una transformación morfológica introducida por Meyer y Serra (1989); a continuación se describe el mapeo de contraste que fue aplicado

$$W_{\mu}f(x) = \begin{cases} a_1\varphi_{\mu}(f)(x) & 0 \leq \rho(x) < \beta \\ f(x) & \beta \leq \rho(x) < \alpha \\ a_2\gamma_{\mu}(f)(x) & \alpha \leq \rho(x) \leq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\rho(x) = \frac{\varphi_{\mu}(f)(x) - f(x)}{\varphi_{\mu}(f)(x) - \gamma_{\mu}(f)(x)} \quad (4.2)$$

donde  $a_1$  y  $a_2$  son constantes, con  $a_1=a_2=2$ , la apertura y el cierre fueron calculados con un elemento de estructura de tamaño  $\mu = 3$ , mientras que los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  son iguales a 0.125. Por otra parte, la imagen obtenida en la figura 4.7 (d) se obtiene al aplicar la metodología propuesta en Majunder y Irani (2007) con  $\tau = 2$  (el parámetro  $\tau$  empleado en Majunder y Irani (2007) tiene diferente significado al empleado en este trabajo). Finalmente la figura 4.7 (e) fue obtenida aplicando la ecuación (3.65) (transformación propuesta en este trabajo).

Analizando la imagen en la figura 4.7, nótese que la imagen en la figura 4.7 (b) la presencia de regiones sobre iluminadas en la parte del rostro. En la figura 4.7 (c), algunas regiones han sido degradadas, mientras que otras áreas son sobre iluminadas. La imagen obtenida en la figura 4.7 (d) fue obtenida con la metodología propuesta en Majunder y Irani (2007) con  $\tau = 2$ .

Finalmente, la imagen en la figura 4.7 (e) fue obtenida con la ecuación (3.65). Notese que en la figura 4.7 (e), los cambios abruptos en iluminación son evitados (lo cual no ocurre en las figuras 4.7 (b), (c) y (d)), además de que algunas características del rostro son visibles.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.6: Comparación entre la metodología de contraste propuesta en Liu y Zhang (2007) y este trabajo. (a) Imagen original, (b) Imagen mejorada obtenida al aplicar la metodología propuesta en Liu y Zhang (2007), y (c) Imagen obtenida después de la aplicación de la ecuación (3.65) (propuesta introducida en este trabajo).

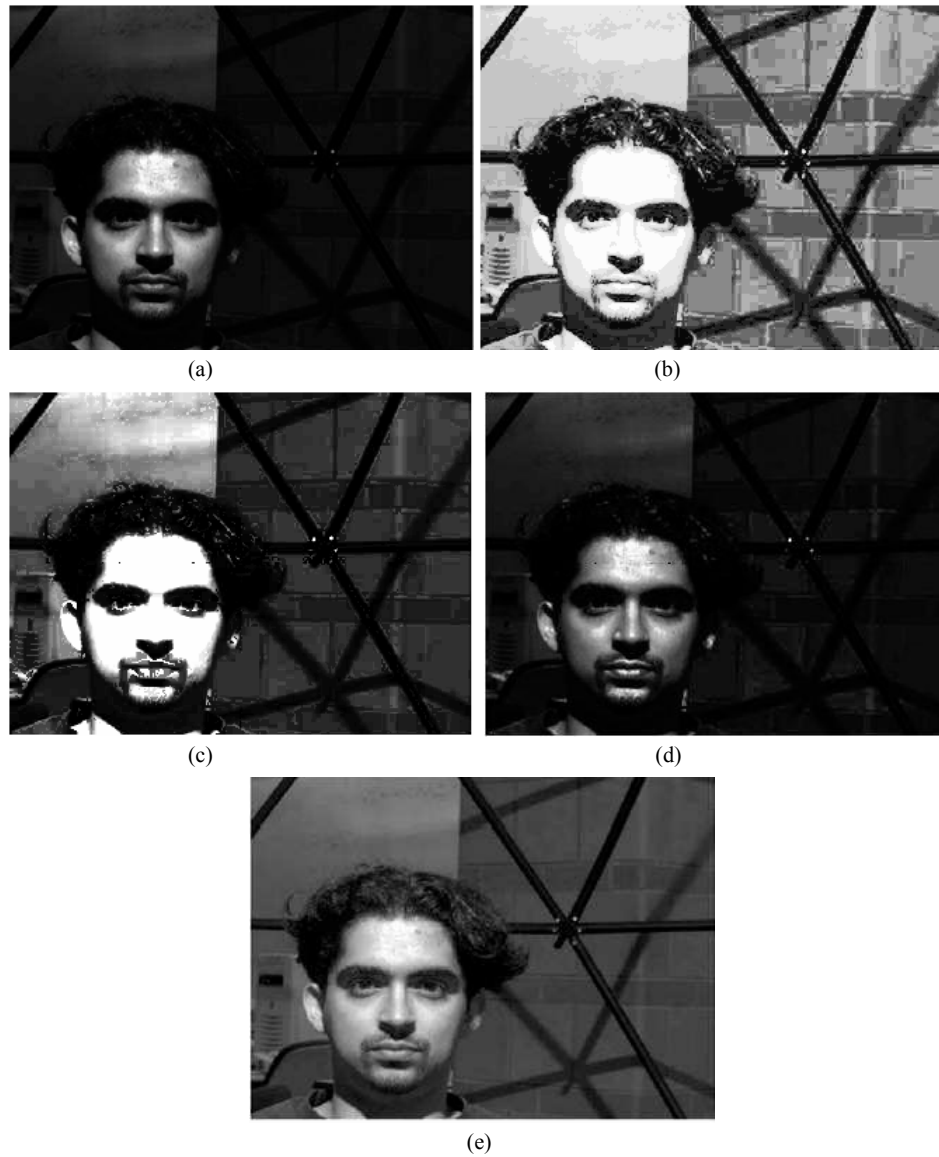


Figura 4.7: Comparación entre operadores de contraste. (a) Imagen original; (b) Ecuación del histograma, (c) Ecuación (4.1) (transformación propuesta en (Meyer y Serra, 1989)), (d) imagen obtenida al aplicar la metodología propuesta en (Majunder y Irani, 2007), y (e) Ecuación (3.65) (propuesta introducida en este trabajo).

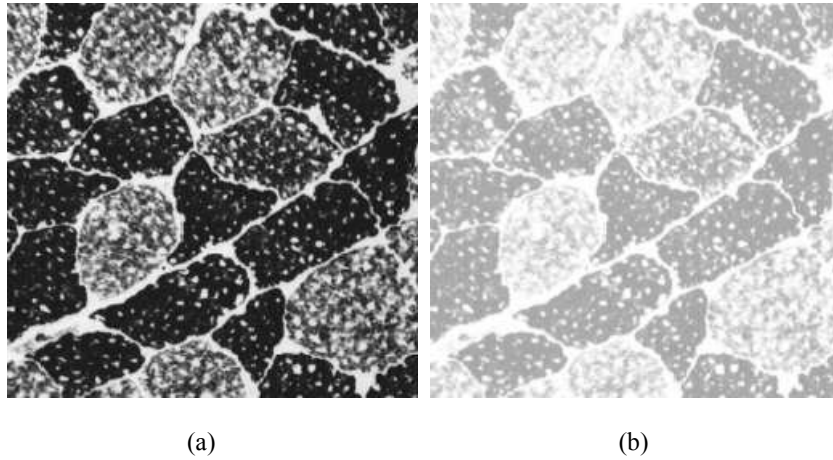


Figura 4.8: Aplicación de la ecuación 3.65 a una imagen normal. (a) Imagen en condiciones de iluminación normales, y (b) Imagen mejorada obtenida de la aplicación de la ecuación (3.65) (propuesta introducida en este trabajo).

### 4.3. Aplicación del índice de contraste

El contraste se define como la diferencia en intensidad entre un punto de una imagen y sus alrededores. Bajo esta definición el contraste percibido en una imagen con tonalidades similares es menor que el percibido en una imagen con tonalidades más intensas. Es importante contar con un índice del contraste percibido, por ejemplo, para medir la calidad de una imagen o bien para indicar cuándo es necesario corregirlo. La medida del contraste involucra directamente el concepto de luminancia como lo indican las leyes de Weber y Michelson, las cuales son leyes físicas utilizadas para modelar el contraste percibido (Jain, 1989). Por definición, la luminancia de una superficie es la intensidad luminosa emitida por unidad de superficie en una dirección dada y se mide en candelas por metro cuadrado ( $\text{cd}/\text{m}^2$ ). Sin embargo, en el procesamiento de imágenes y en particular en imágenes en niveles de gris, la luminancia se asocia con el nivel de gris que corresponde a cada pixel, por lo que cambios importantes de la luminancia se encontraran alrededor de los contornos de la imagen. Mientras que en los espacios a color existen ecuaciones específicas para el cálculo de la

luminancia.

Por otro lado, medir la mejora de una imagen después de que esta ha sido procesada por algún operador no es una tarea fácil, ya que es algo subjetivo y depende de la aplicación. En (Mendiola et al., 2007) se introduce un índice de medida de contraste que involucra a un operador que trabaja de manera similar al laplaciano, sin embargo la propuesta tiene la desventaja de no considerar el fondo de la imagen dentro de la medida.

Partiendo de este punto y de que en Jiménez-Sánchez et al. (2009) se propuso un operador que permite obtener el fondo de la imagen a diferentes escalas (multi-background en inglés); en la presente investigación se introduce un índice de contraste que indica cual de las imágenes procesadas por cierto operador presenta el mejor contraste visual. Dicho índice basa su funcionamiento en la ley de Weber y considera el fondo de la imagen. El índice propuesto utiliza solamente operadores morfológicos, además de ser simple de implementar y aplicar.

En la figura 4.9 se muestra un ejemplo donde se determina la imagen con mejor contraste. La imagen original se encuentra en la figura 4.9 a), mientras que las imágenes en las figuras 4.9 b)-d) se obtuvieron a través del mapeo de contraste definido en la ecuación 3.41 con los siguientes parámetros:  $\mu_1 = 4$ ,  $\mu_2 = 4$ ,  $\alpha = 0,04$ ,  $\beta = 0,08$ ;  $\mu_1 = 4$ ,  $\mu_2 = 8$ ,  $\alpha = 0,06$ ,  $\beta = 0,1$ ; y  $\mu_1 = 4$ ,  $\mu_2 = 12$ ,  $\alpha = 0,08$ ,  $\beta = 0,5$ . Observe que a medida que se aumenta el valor del elemento de estructura en la apertura morfológica, se obtiene una mayor detección de las regiones claras. Los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  se obtuvieron de la siguiente manera: se considera un intervalo de valores entre 0 y 1, se aplico una regla de 3, considerando que el valor de 1 corresponde a 255. Además, se tomaron incrementos de  $\alpha$  y  $\beta$  de 10 unidades. También observese que  $\alpha$  y  $\beta$  toman valores diferentes para cada mapeo de contraste. Una vez determinados los valores que se involucra en cada mapeo, la imagen de la figura 4.9 a) se modifica. Posteriormente se encuentra el índice de contraste definido en la ecuación 3.74, se observa que la imagen con mejor contraste se encuentra en la figura 4.9 c). La figura 4.9 c) presenta el mejor contraste debido a que el parámetro toma en consideración dos aspectos: i) Se analiza el gradiente de la imagen, el cual tiene una relación directa con la luminancia de la imagen, y ii) toma en cuenta el fondo de la imagen. En otras palabras, los mejores

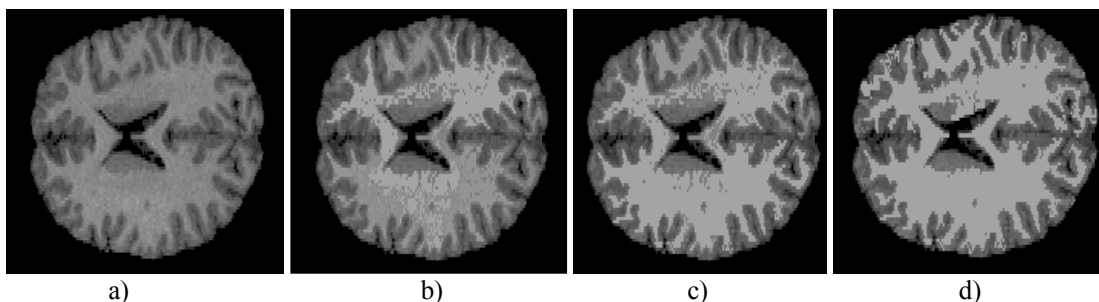


Figura 4.9: Aplicación del índice de contraste. a) Imagen original, b)  $X_{\mu,\lambda} = 1,1110$ , c)  $X_{\mu,\lambda} = 1,1258$ , y d)  $X_{\mu,\lambda} = 1,1237$

contornos y el mejor fondo de la imagen se localizan en la figura 4.9 c).

Otro ejemplo de ilustra en la figura 4.10 para determinar la imagen con mejor contraste. La imagen original se encuentra en la Fig. 4.10(a), mientras que las imágenes en las figuras 4.10(b)-(l) se obtuvieron a través del mapeo de contraste definido en la ecuación 3.41 considerando los valores mostrados en la tabla 4.1.

El índice de contraste  $X_{\mu,\lambda}$  se obtiene al aplicar la ecuación 3.74 a cada imagen procesada de la figura 4.10 y los valores respectivos se muestran en la tabla 4.2.

Para comparar el desempeño del índice de contraste propuesto en este trabajo los valores del cuadro 4.2 se compararán con otros valores obtenidos por medio de dos métodos para cuantificar el contraste, el primer método fue introducido en Morrow et al. (1992), mientras que el segundo método fue propuesto en Rizzi et al. (2004) y Rizzi et al. (2008). En Morrow et al. (1992) la medida de contraste se obtiene al aplicar la ecuación 4.3, seguida de una cuantificación del ancho del histograma considerando el segundo momento alrededor del nivel de contraste 0. El segundo momento M2 esta dado por la ecuación 4.4, es decir:

$$C = \frac{L_{max} - L_{min}}{L_{max} + L_{min}} \quad (4.3)$$

$$M2 = \sum_{i=1}^N C_i^2 * p(C_i) \quad (4.4)$$

Donde  $L_{max}$  y  $L_{min}$  son las luminancias máxima y mínima en la región analizada,  $p(C_i)$  es el número normalizado de ocurrencias del pixel con contraste  $C_i$ . Para evaluar el contraste

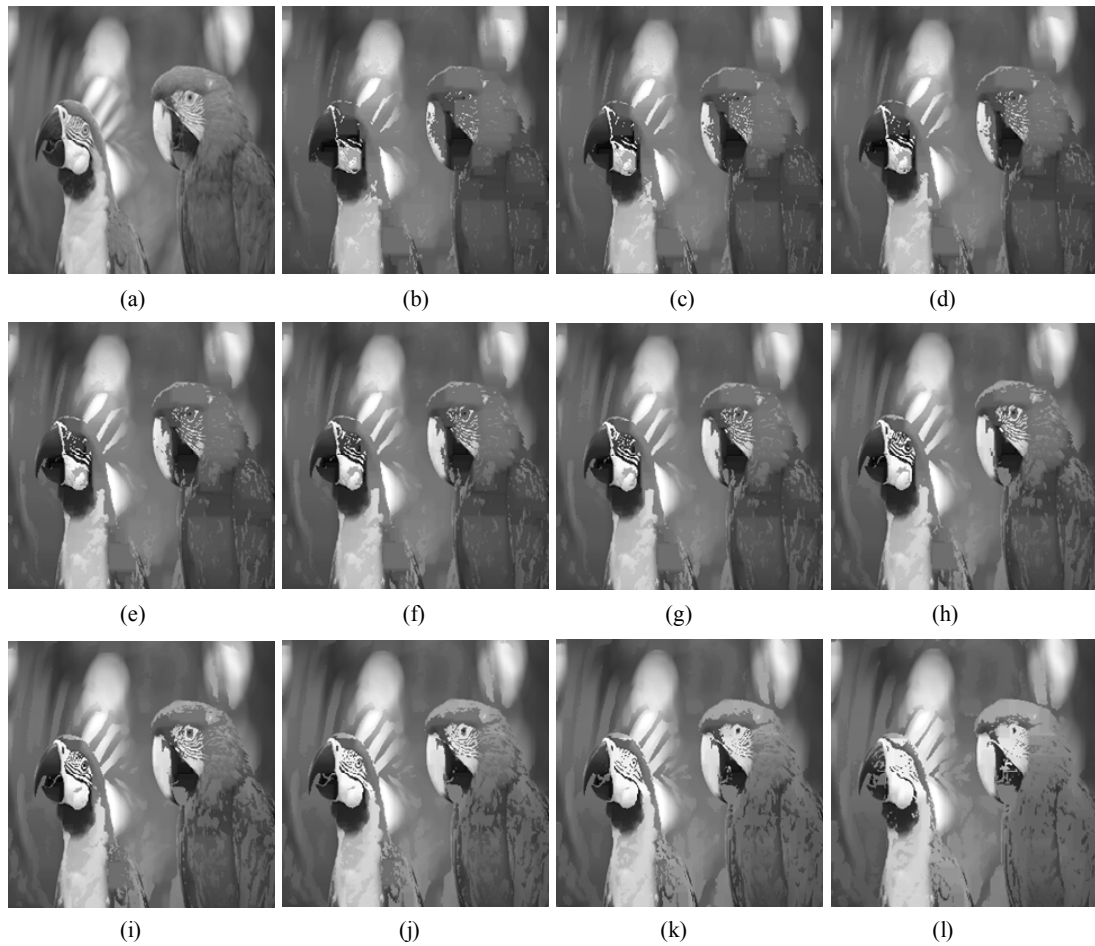


Figura 4.10: Aplicación del índice de contraste. (a) Imagen original, (b)-(l) Imágenes obtenidas al aplicar el mapeo de contraste definido en la ecuación 3.41 utilizando los parámetros que se muestran en la tabla 4.1.

Cuadro 4.1: Parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ 

Imagen	$\alpha$	$\beta$	$\mu_1$	$\mu_2$
4.10 (b)	0	0.039	12	9
4.10 (c)	0.039	0.078	12	9
4.10 (d)	0.078	0.117	12	9
4.10 (e)	0.117	0.156	12	9
4.10 (f)	0.156	0.196	12	9
4.10 (g)	0.196	0.235	12	9
4.10 (h)	0.313	0.352	12	9
4.10 (i)	0.431	0.470	12	9
4.10 (j)	0.549	0.588	12	9
4.10 (k)	0.666	0.705	12	9
4.10 (l)	0.823	0.862	12	9

Cuadro 4.2: Valores del parámetro  $X_{\mu,\lambda}$  para las imágenes de la figura 4.10

Imagen	$X_{\mu,\lambda}$
4.10 (b)	0.6183
4.10 (c)	0.5956
4.10 (d)	0.6070
4.10 (e)	0.6191
4.10 (f)	0.6242
4.10 (g)	0.6279
4.10 (h)	0.6341
4.10 (i)	0.6422
4.10 (j)	0.6427
4.10 (k)	0.6281
4.10 (l)	0.6001



Cuadro 4.3: Valores del parámetro  $M2$  para las imágenes de la figura 4.10

Imagen	$M2$
4.10 (b)	6.393e-5
4.10 (c)	5.35e-5
4.10 (d)	6.57e-5
4.10 (e)	6.95e-5
4.10 (f)	7.2e-5
4.10 (g)	7.41e-5
4.10 (h)	7.63e-5
4.10 (i)	8.08e-5
4.10 (j)	8.32e-5
4.10 (k)	8.40e-5
4.10 (l)	8.2e-5

de manera local en la imagen procesada, se emplea un elemento de estructura  $\mu B$  que al estar centrado en un punto de la imagen se localizan  $I_{max}(\mu B_x) = L_{max}$  e  $I_{min}(\mu B_x) = L_{min}$  al considerarse una aproximación a la luminancia como el nivel de gris de cada píxel. Posteriormente, el contraste se evalúa al usar la ecuación 4.3, y finalmente se calcula  $M2$  a partir de la ecuación 4.4. En la tabla 4.3 se muestran los valores de  $M2$  calculados para las imágenes de la figura 4.10.

Los pasos a seguir para medir el contraste basado en el promedio de diferencias propuesto por Rizzi et al. (2004) y Rizzi et al. (2008) se presentan a continuación:

- i) *Obtener una pirámide de imágenes submuestreadas.* En nuestro caso particular, las imágenes utilizadas fueron de los siguientes tamaños:  $205 \times 205$ ,  $154 \times 154$  y  $103 \times 103$ , partiendo de una imagen original de tamaño  $256 \times 256$ .
- ii) *Para cada imagen del inciso i) se calcula la suma del valor absoluto de la diferencia de cada pixel de la imagen con sus 8 vecinos. La suma final se divide por el tamaño de la imagen procesada. El resultado de este paso es el contraste global de la imagen analizada.*

Cuadro 4.4: Medida del contraste usando la ecuación 4.5 para las imágenes de la figura

4.10	
Imagen	$C$
4.10 (b)	9.46
4.10 (c)	10.37
4.10 (d)	10.89
4.10 (e)	11.93
4.10 (f)	12.07
4.10 (g)	12.48
4.10 (h)	13.03
4.10 (i)	13.66
4.10 (j)	14.15
4.10 (k)	14.23
4.10 (l)	13.22

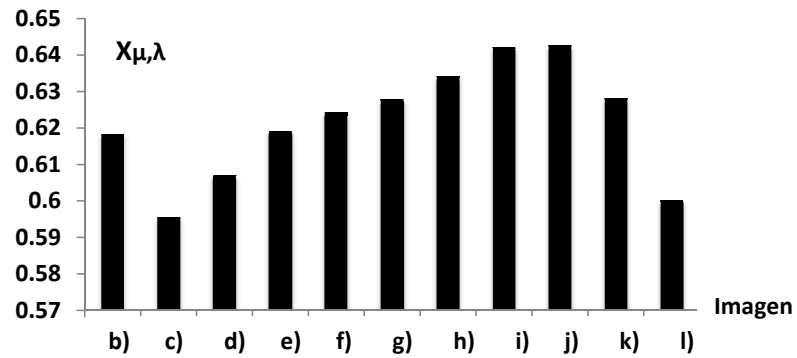
iii) El contraste total es el promedio de los contrastes globales obtenidos para la imagen original y las imágenes submuestreadas.

La siguiente expresión resume los pasos anteriores:

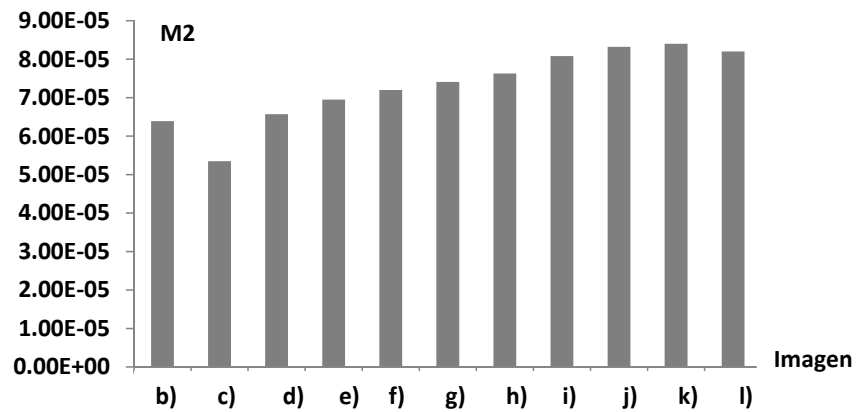
$$C = \sum_{\forall \text{ nivel}} \left[ \frac{\sum_{\forall \text{ pivel}} \left[ \frac{\sum_{8\text{-vecinos}} \frac{|P_i - P_j|}{8}}{\# \text{ piveles}} \right]}{\# \text{ niveles}} \right] \quad (4.5)$$

El resultado de aplicar la ecuación 4.5 al conjunto de imágenes de la figura 4.10 se muestra en el cuadro 4.4

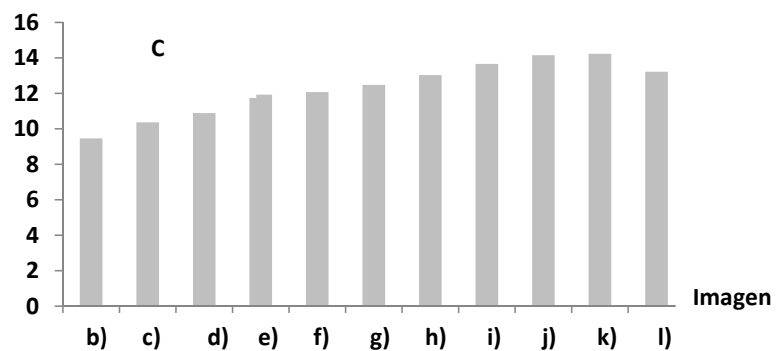
Para comparar los resultados de los cuadros 4.2, 4.3 y 4.4 se presentan sus gráficas respectivas en la figura 4.11. Observe en las gráficas de la figura 3 que la imagen con un mejor contraste utilizando el índice  $X_\mu$ , corresponde a la imagen 4.10(j), mientras que las medidas  $M2$  y  $C$  revelan que la imagen 4.10(k) es la imagen con mejor contraste.



a)



b)



c)

Figura 4.11: Gráficas correspondientes al índice de contraste. a) Gráfica de los valores de la tabla 4.2 correspondientes al índice de contraste  $X_{\mu,\lambda}$ , b) Gráfica de los valores de la tabla 4.3 correspondientes al parámetro  $M2$ , c) Gráfica de los valores de la tabla 4.4 correspondientes al parámetro  $C$ .

Observe en las gráficas de la figura 4.11 que la imagen con un mejor contraste utilizando el índice  $X_{\mu,\lambda}$  corresponde a la imagen 4.10(j), mientras que las medidas  $M2$  y  $C$  revelan que la imagen 4.10(k) es la imagen con mejor contraste.

Establecer de manera perceptual cual contraste es mejor entre las imágenes 4.10(j) y 4.10(k) no es sencillo. Sin embargo, analizando las gráficas en la figura 4.11 se puede determinar lo siguiente. En la Fig. 4.11(a) se encuentra que la imagen 4.10(j) posee importantes cambios de intensidad entre los contornos y las regiones alrededor de ellos, ya que tiene el valor más alto de contraste. Note que la imagen original en 4.10(a) es modificada por un mapeo, el cual realza el contraste a través de los valores de la apertura, del cierre y de la imagen original de acuerdo al criterio de proximidad. El comportamiento de la curva en la gráfica 4.11(a) indica que existen cambios importantes en la intensidad de los píxeles a medida que se realiza el contraste en la imagen procesada y se obtiene que las dos imágenes con mejor contraste son las imágenes en las Figs. 4.10(j) y 4.10(k). Posteriormente debido al comportamiento del mapeo de contraste se van fusionando las regiones por lo que la cantidad de contornos disminuye. Debido a este comportamiento del mapeo de contraste, las propuestas dadas en (Morrow et al. (1992)), (Rizzi et al. (2004)) y (Rizzi et al. (2008)) detectan que la mejor imagen es aquella donde existen esas regiones planas y que tienen importantes cambios en las intensidades de los píxeles de la imagen. Esta situación se ilustra en la Fig. 4.12, donde pueden observarse como resaltan mejor los contornos de la imagen que fue detectada por el índice  $X_{\mu}$ , Fig. 4.10(j),  $M2$  y  $C$ , Fig. 4.10(k). Note que los contornos son más gruesos en la Fig. 4.12(b) que en la Fig. 4.12(a).

De esta manera, al observar los contornos de las imágenes en la Fig. 4.12, se concluye que los contornos están mejor preservados en la Fig. 4.12(a) que en la Fig. 4.12(b). Esta diferencia es un criterio que permite determinar que la imagen en la Fig. 4.10(j), presenta un mejor contraste.

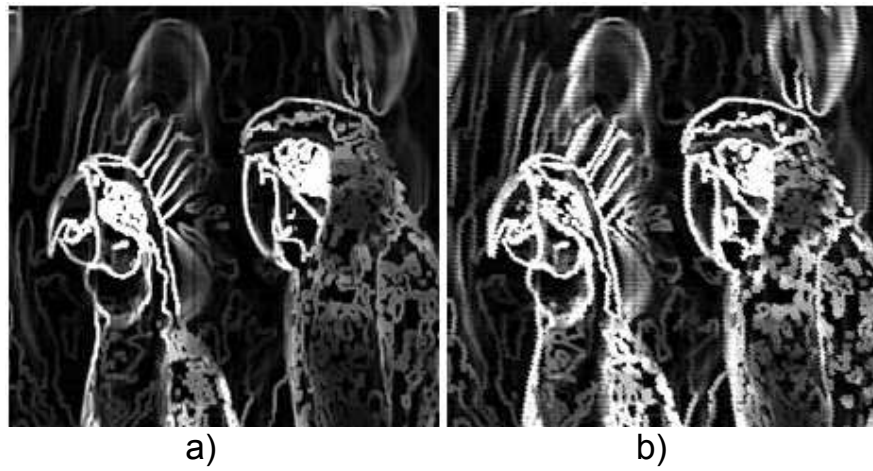


Figura 4.12: Contornos de la imagen. a) Contornos de la imagen de la figura 4.10(j) (parámetro  $X_{\mu,\lambda}$ ), b) Contornos de la imagen de la figura 4.10(k) (parámetro  $M2$ ).

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se ha experimentado con una serie de transformaciones y herramientas basadas en MM para el mejoramiento, cuantificación del contraste y la segmentación en imágenes digitales.

Las propuestas planteadas en esta investigación pretenden ser técnicas y métodos generales, sin circunscribirse a una problemática específica. En el caso de los operadores para el mejoramiento del contraste en imágenes con deficiente iluminación. Se trata de herramientas que realzan las zonas más oscuras de la imagen modificando en menor grado las zonas claras, obteniéndose una imagen de mejor calidad.

Por otra parte, aunque las técnicas de ecualización del histograma y los mapeos de contraste morfológicos, entre otros, permiten mejorar el contraste; las metodologías introducidas en este trabajo son apropiadas para imágenes cuya principal característica es la deficiente iluminación. En el caso de aplicar los operadores propuestos a imágenes en condiciones normales de iluminación, se obtiene como resultado imágenes sobre iluminadas (vease la figura 4.8). Esto se debe a la aplicación de la función logaritmo, la cual normaliza las intensidades en niveles de gris.

Se mostraron diferentes aplicaciones de los operadores de mejora de contraste donde con las transformaciones propuestas se obtienen resultados satisfactorios en las imágenes

de interés (imágenes de rostros, de peces, etc.)

La propuesta de índice de contraste basada en la Ley de Weber, operadores morfológicos de uso común e involucrando una aproximación hacia el fondo de la imagen resulta ser un buen cuantificador de contraste. Este índice se comparó con dos medidas de contraste reportadas en la literatura. El resultado de la comparación es que no es simple decir cual imagen es mejor visualmente, ya que ambas imágenes detectadas por los dos métodos presentan un buen realce en el contraste; sin embargo, al visualizar los contornos es posible tener un criterio para elegir la imagen con mejor contraste, y que en el ejemplo dado corresponde a la imagen detectada por el índice de contraste propuesto.

# Bibliografía

- Barten, F. (1992). Physical model for the contrast sensitivity of the human eye. *Proceedings of SPIE*, 1666:57–62.
- Beucher, S. y Lantuejoul, C. (1979). Use of watershed in contour detection. *In Proc. Int. Workshop Image Processing, Real-Time Edge and Motion Detection/Estimation*.
- Birkhoff, G. (1984). *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence.
- Blommaert, F. y Martens, J. B. (1990). An object-oriented model for brightness perception. *Spatial vision*, 5:15–41.
- Braga-Neto, U. (2005). Multiscale connected operators. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22:199–216.
- Braga-Neto, U. y Goutsias, J. (2003). A multiscale approach to connectivity. *Computer Vision and Image Understanding*, 89:70–103.
- Georghiades, A. y Belhumeur, P. (2001). From few to many: Illumination cone models for face recognition under variable lighting and pose. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23:630–660.
- Heijmans, H. (1997). Connected morphological operators for binary images. Technical Report PNA-R9708, Stichting Mathematisch Centrum.
- Horn, B. (1997). Determining lightness from an image. *Computer Graphics and Image Processing*, 3:277–299.



- Jain, A. K. (1989). *Fundamentals of Digital Image Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Jianyu, X., Ying, L., Shaorong, C., y Xiangwen, M. (2006). Behavioral responses of tilapia (*Oreochromis niloticus*) to acute fluctuations in dissolved oxygen levels as monitored by computer vision. *Aquacultural engineering*, 35:207–217.
- Jiménez-Sánchez, A. R., Mendiola-Santibañez, J. D., Terol-Villalobos, I. R., Herrera-Ruíz, G., Vargas-Vázquez, D., García-Escalante, J. J., y Lara-Guevara, A. (2009). Morphological background detection and enhancement of images with poor lighting. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18:613–623.
- Kramer, H. P. y Bruckner, J. B. (1975). Iterations of a non-linear transformations for enhancement of digital images. *Pattern Recognition*, 7:53–58.
- Liu, Z., Z. C. y Zhang, Z. (2007). Learning-based perceptual image quality improvement for video conferencing.
- Majunder, A. y Irani, S. (2007). Perception-based contrast enhancement of images. *ACM Trans. Appl. Percpt*, 4.
- Maragos, P. y Schafer, R. (1987). Morphological filters-part i: Their set-theoretical analysis and relations to linear shift invariant filters,. *IEEE trans. Acoust. Speech Signal Processing*, 35:1153–1169.
- Maragos, P. y Vachier, C. (2008). A pde formulation for viscous morphological operators with extensions to intensity-adaptive operators. In: *Pro. 15th IEEE-International Conference in Image Processing*, pages 2200–2203.
- McCann, J. (1995). A comparison of color metrics. In *4th SID Color Imaging Conference*.
- Mendiola, J., Terol, I., Herrera, G., y Fernández, A. (2007). Morphological contrast measure and contrast enhancement: One application to the segmentation of brain mri. *Science Direct*, 87:2125–2150.

- Mendiola-Santibañez, J. D. y Terol-Villalobos, I. R. (2002). Morphological contrast enhancement using connected transformations. In *Proceedings of SPIE*, volume 4667, pages 420–424.
- Mendiola-Santibañez, J. y Terol-Villalobos, I. (2005). Quantifying contrast methods through morphological gradient. *Computación y sistemas*, 8:317–333.
- Meyer, F. y Serra, J. (1989). Contrast and Activity Lattice. *Signal Processing*, 16:303–317.
- Morrow, W., Paranjape, R., Rangayyan, R., y Desautels, J. (1992). Region based contrast enhancement of mammograms. *IEEE Trans Med Imag*, 11:392–406.
- Peli, E. (1990). Contrast in complex images. *Journal Optical society of America*, 7:2032–2040.
- Rivas, E., Mendiola, J., Herrera, G., González, C., Perea, M., y Moreno, G. (2007). Contrast enhancement and illumination changes compensation. *Computación y Sistemas*, 10(4):357–371.
- Rivest, J. F., Soille, P., y Beucher, S. (1993). Morphological gradient. *J. Electron, Imagin Eng.*, 2:326–336.
- Rizzi, T., Medeghini, G., y Marini, D. (2004). A proposal for contrast measure in digital images. In *CGIV 2004, Second European Conference on Color in Graphics, Imaging and Vision*.
- Rizzi, T., Simone, G., y Condone, R. (2008). A modified algorithm for perceived contrast measure in digital images. In *CGIV 2008, Second European Conference on Color in Graphics, Imaging and Vision*.
- Ronse, C. (2005). Guest editorial. *J. Of Mathematical Imaging and Vision, Special Issue on Mathematical Morphology after 40 years*, 22:103–106.
- Ronse, C. y Heijmans, H. (1991). The algebraic basis of mathematical morphology- part ii: Openings and closings. *Computer Vision, Graphics and Image Processing: Image Understanding*, 54:74–97.

- Santillan, I., Herrera, A., Mendiola, J., y Terol, I. (2009). Morphological connected filtering on viscous lattices. *Journal of Math Imaging Vis*, 36:254–269.
- Serra, J. (1982a). *Mathematical Morphology vol. I*. Academic Press., London.
- Serra, J. (1982b). *Mathematical Morphology. Volume I*. London: Academic Press.
- Serra, J. (1988a). *Mathematical Morphology for boolean lattices, image analysis and mathematical morphology, Vol. II*. Academic Press., London.
- Serra, J. (1988b). Toggle mappings. Technical Report N-18/88/MM, Centre de Morphologie Mathematique ENSMP, Fontainebleau France.
- Serra, J. (1992). *Anamorphoses and function lattices*, chapter 13, page 57. *Mathematical Morphology in Image Processing*, E. Dougherty, ed., Dekker, New York.
- Serra, J. (2005). Viscous lattices. *Journal of mathematical Imaging and vision*, 14:269–282.
- Serra, J. y Salembier, P. (1993). Connected operators and pyramids. In *Proc. SPIE Image Algebra Math Morphology, San Diego, CA.*, volume 2030, pages 65–76.
- Stockham, T. G. J. (1972). Image processing in the context of a visual model. In *Proc. IEEE*, volume 60, pages 420–424.
- Terol-Villalobos, I. R. (1995). Morphological slope filters. In *Intelligent Robots and Computer Vision XIV: Algorithms. Techniques, Active Vision, and Materials Handling*, volume 2588, pages 712–722.
- Terol-Villalobos, I. R. (1996). Nonincreasing filters using morphological gradient criteria. *Optical Eng.*, 35:3172–3182.
- Terol-Villalobos, I. R. (1998). *Toggle mappings and some related transformations: A study of contrast enhancement*, pages 11–18. *Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing*, H.J.A.M. Heijmans and J.B.T.M. Roerdink , Eds., Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

- Terol-Villalobos, I, R. (2001). *Morphological Image Enhancement and Segmentation*, pages 207–273. in *Advances in Imaging and Electron Physics*, Editor Peter W. Hawkes, Chapter 4, Academic Press.
- Terol-Villalobos, I, R. y Cruz-Mandujano, J, A. (1998). Contrast enhancement and image segmentation using a class of morphological nonincreasing filters. *Journal of Electronic Imaging*, 7:641–654.
- Terol-Villalobos, I, R. y Vázquez-Vázquez, D. (2001). *openings and closings by reconstruction using propagation criteria*, pages 502–509. *Computer analysis of image and patterns*, Springer, Berlin, Heidelberg,.
- Terol-Villalobos, I, R. y Vázquez-Vázquez, D. (2002). *A Study of Openings and Closings with Reconstruction Criteria*, chapter 4, pages 413–423. en *Mathematical Morphology*, Editores Hugues Talbot, Richard Beare, Melbourne Australia, Editorial CSIRO.
- Vargas, Vázquez, D. (2007). *Técnicas de reconstrucción en la segmentación de imágenes: análisis y aplicaciones*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, España.
- Vincent, L. (1993). Morphological Grayscale Reconstruction in Image Analysis: Applications and Efficient Algorithms. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2:176–201.
- Wang, Z. y Bovik, A. (2009). Mean squared error: love it or leave it? - a new look at signal fidelity measures. *IEEE Signal Processing Magazine*, 26:98–117.
- Wang, Z., Bovik, A., Sheikh, H., y Simoncelli, E. (2004). Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *IEEE TIP*, 13:600–612.
- Zhang, X. y Wandell, B. (1998). Color image fidelity metrics evaluated using image distortion maps. *Signal Processing Special issue on image and video quality metrics*, 70:201–214.
- Zhixin, S. (2005). Digital image enhancement using normalization techniques and their application to palm leaf manuscripts. *Center of Excellence for document analysis and Recognition (CEDAR)*.

# Capítulo 6

## Apendice

### 6.1. Código

#### 6.1.1. Programa para el mejoramiento del contraste

A continuación se muestra el código implementado en el programa de matlab, para mejorar el contraste en imágenes con deficiente iluminación. Este algoritmo corresponde a la ecuación 3.65.

```
close all; clear all;
—** ABRE LA IMAGEN Y LA CONVIERTE A ESCALA DE GRISES **—
[fname, dname]=uigetfile('*.','Open image file');
nombre=[dnamefname]; afm = imread(nombre);
I=afm; I=rgb2gray(I);
figure, imshow(I);          - I es la imagen original -
-* SE OBTIENE LA APERTURA POR RECONSTRUCCIÓN PARA FUSIONAR LOS
```

```
MINIMOS *-
temp = size(I); x = temp(1); y = temp(2);
se =strel('disk',2);
marker = imerode(I,se);
obr = imreconstruct(marker,I);
se2 = strel('disk',1);
obr1=imerode (obr, se2);
I2= ones (x,y,'uint8');
k= ones (x2,y2,'uint8');
k=((255* k)-obr1)/log(256);
for i = 1 :x
    for j = 1 : y
        I2(i,j) = uint8(k(i,j)*log(double(I(i,j)+1))+obr1(i,j)) ;
    end
end
figure, imshow(I2);          - I2 es la imagen mejorada -
```

### 6.1.2. Programa del índice de contraste

A continuación se muestra el programa que mide el contraste de una imagen (ecuación 3.74)

```

close all;
—** ABRE LA IMAGEN **—
[fname, dname]=uigetfile('*. *','Open image file');
nombre=[dname fname]; afm = imread(nombre); I=afm;
— CONVIERTE LA IMAGEN A GRISES —
I= rgb2gray(I); figure, imshow(I);
— SE OBTIENE LA APERTURA POR RECONSTRUCCIÓN —
temp = size(I); x = temp(1); y = temp(2);
se = strel('disk',2); —elemento estructural circular de tamaño 3
marker = imerode(I,se);
— CALCULA EL FONDO DE LA IMAGEN —
obr = imreconstruct(marker,I); —es la imagen de la apertura por reconstrucción—
se2 = strel('disk',2);
obr1=imerode (obr, se2);- es la imagen de la erosion de la apertura por reconstrucción -
grad=imdilate(I,se)-imerode(I,se); – calcula el gradiente de la imagen –
I2= ones (x,y,'uint8');
k=((255* ones (x,y,'uint8'))-obr1)/log(256); — calcula el valor de la constante k—
for i = 1 :x
    for j = 1 : y
        I2(i,j) = k(i,j)*uint8(log(double(grad(i,j)+1)));
    end
end
— CALCULA EL VOLUMEN DE LA IMAGEN —
medida=((sum(sum(I2))+mean(mean(obr1)))/(sum(sum(I)))) - medida obtenida -

```

## 6.2. Artículos publicados



# Morphological Background Detection and Enhancement of Images With Poor Lighting

Angélica R. Jiménez-Sánchez, Jorge D. Mendiola-Santibañez, Iván R. Terol-Villalobos, Gilberto Herrera-Ruíz, Damián Vargas-Vázquez, Juan J. García-Escalante, and Alberto Lara-Guevara

**Abstract**—In this paper, some morphological transformations are used to detect the background in images characterized by poor lighting. Lately, contrast image enhancement has been carried out by the application of two operators based on the Weber's law notion. The first operator employs information from block analysis, while the second transformation utilizes the opening by reconstruction, which is employed to define the multibackground notion. The objective of contrast operators consists in normalizing the grey level of the input image with the purpose of avoiding abrupt changes in intensity among the different regions. Finally, the performance of the proposed operators is illustrated through the processing of images with different backgrounds, the majority of them with poor lighting conditions.

**Index Terms**—Image background, morphological contrast, morphological filters by reconstruction, multibackground, Weber's law.

## I. INTRODUCTION

THE contrast enhancement problem in digital images can be approached from various methodologies, among which is mathematical morphology (MM). Initial studies on contrast enhancement in this area were carried out by Meyer and Serra [1], who introduced the contrast mappings notion. Such operators consist in accordance to some proximity criterion, in selecting for each point of the analyzed image, a new grey level between two patterns (primitives) [1]. Other works based on the contrast mapping concept have been developed elsewhere [2]–[4]. With regard to MM, several studies based on contrast multiscale criterion have been carried out [5]–[7]. In the work proposed by Mukhopadhyay and Chanda [6], a scheme is defined to enhance local contrast based on a morphological top-hat transformation. While Kasperek [7] implements a processing system in real time for its application in the enhancement of angiocardigraphic images, based on the work carried out by Mukhopadhyay.

Manuscript received March 29, 2008; revised October 04, 2008. Current version published February 11, 2009. This work was supported in part by CONACyT under Grant 62378. The associate editor coordinating the review of this manuscript and approving it for publication was Dr. Amy R. Reibman.

A. R. Jiménez-Sánchez, G. Herrera-Ruíz, D. Vargas-Vázquez, J. J. García-Escalante, and A. Lara-Guevara are with the Universidad Autónoma de Querétaro, Cerro de las Campanas CP. 76010, Querétaro, México (e-mail: rosariojs@uaq.mx; gherrera@uaq.mx; damianvv@uaq.mx; jjgarcia@uaq.mx; alara@uvmmnet.edu).

J. D. Mendiola-Santibañez is with the Universidad Autónoma de Querétaro, Cerro de las Campanas CP. 76010, Querétaro, México, and also with the Universidad Politécnica de Querétaro, Carretera Estatal 420 S/N, el Rosario, el Marqués, CP. 76240 Querétaro, México (e-mail: mendijor@uaq.mx).

I. R. Terol-Villalobos is with the CIDETEQ, S.C., San Fandila-Pedro Escobedo, 76700, Querétaro México (e-mail: famter@ciateq.net.mx).

Digital Object Identifier 10.1109/TIP.2008.2010152

Even though morphological contrast has been largely studied, there are no methodologies, from the point of view MM, capable of simultaneously normalizing and enhancing the contrast in images with poor lighting. On the other side, one of the most common techniques in image processing to enhance dark regions is the use of nonlinear functions, such as logarithm or power functions [8]; otherwise, a method that works in the frequency domain is the homomorphic filter [9]. In addition, there are techniques based on data statistical analysis, such as global and local histogram equalization. During the histogram equalization process, grey level intensities are reordered within the image to obtain an uniform distributed histogram [10]. However, the main disadvantage of histogram equalization is that the global properties of the image can not be properly applied in a local context [11], frequently producing a poor performance in detail preservation. In [12], a method to enhance contrast is proposed; the methodology consists in solving an optimization problem that maximizes the average local contrast of an image. The optimization formulation includes a perceptual constraint derived directly from human suprathreshold contrast sensitivity function. In [12], the authors apply the proposed operators to some images with poor lighting with good results. On the other hand, in [13], a methodology to enhance contrast based on color statistics from a training set of images which look visually appealing is presented. Here, the basic idea is to select a set of training images which look good perceptually, next a Gaussian mixture model for the color distribution in the face region is built, and for any given input image, a color tone mapping is performed so that the color statistics in the face region matches the training examples. In this way, even though the reported algorithms to compensate changes in lighting are varied, some are more adequate than others.

In this work, two methodologies to compute the image background are proposed. Also, some operators to enhance and normalize the contrast in grey level images with poor lighting are introduced. Contrast operators are based on the logarithm function in a similar way to Weber's law [8], [14]. The use of the logarithm function avoids abrupt changes in lighting. Also, two approximations to compute the background in the processed images are proposed. The first proposal consists in an analysis by blocks, whereas in the second proposal, the opening by reconstruction is used given its following properties: a) it passes through regional minima, and b) it merges components of the image without considerably modifying other structures [15], [16].

The proposals given in this paper are illustrated with several examples.

Finally, this paper is organized as follows. Section II presents a brief background on Weber's law and some morphological transformations. Section III gives an approximation to the background by means of block analysis in conjunction with transformations that enhance images with poor lighting. In Section IV, the multibackground notion is introduced by means of the opening by reconstruction. Section V shows a comparison among several techniques to improve contrast in images. Finally, conclusions are presented in Section VI.

## II. MORPHOLOGICAL TRANSFORMATIONS AND WEBER'S LAW

A background on morphological transformations is presented below.

### A. Definitions of Some Morphological Transformations

In mathematical morphology, increasing and idempotent transformations are frequently used. Morphological transformations complying with these properties are known as morphological filters [17]–[19]. The basic morphological filters are the morphological opening  $\gamma_{\mu B}(f)(x)$  and closing  $\varphi_{\mu B}(f)(x)$  using a given structural element. In this paper, a square structuring element is employed, where  $B$  represents the structuring element of size  $3 \times 3$  pixels, which contains its origin. While  $\tilde{B}$  is the transposed set ( $\tilde{B} = \{-x : x \in B\}$ ) and  $\mu$  is a homothetic parameter. Formally, the morphological opening  $\gamma_{\mu B}(f)(x)$  and closing  $\varphi_{\mu B}(f)(x)$  are expressed as follows:

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu B}(f)(x) &= \delta_{\mu \tilde{B}}(\varepsilon_{\mu B}(f))(x) \\ \text{and } \varphi_{\mu B}(f)(x) &= \varepsilon_{\mu \tilde{B}}(\delta_{\mu B}(f))(x) \end{aligned} \quad (1)$$

where the morphological erosion  $\varepsilon_{\mu B}(f)(x)$  and the morphological dilation  $\delta_{\mu B}(f)(x)$  are  $\varepsilon_{\mu B}(f)(x) = \wedge\{f(y) : y \in \mu \tilde{B}_x\}$  and  $\delta_{\mu B}(f)(x) = \vee\{f(y) : y \in \mu \tilde{B}_x\}$ , respectively. Here,  $\wedge$  is the inf operator and  $\vee$  is the sup operator.

On the other hand, throughout the paper, we will use either size 1 or size  $\mu$  for the structuring element. Size 1 means a square of  $3 \times 3$  pixels, while size  $\mu$  means a square of  $(2\mu+1)(2\mu+1)$  pixels. For example, if the structuring element is size 3, then the square will be  $7 \times 7$  pixels, to render an analysis of 49 neighboring regions. For any size of the structuring element, the origin is located at its center.

### B. Opening and Closing by Reconstruction

The reconstruction transformation notion is a useful concept introduced by MM. These transformations allow the elimination of undesirable regions without considerably affecting the remaining structures of the image. This characteristic arises from the way in which these transformations are built by means of geodesic transformations [20]. The geodesic dilation  $\delta_f^1(g)(x)$  and the geodesic erosion  $\varepsilon_f^1(g)(x)$  of size one are given by  $\delta_f^1(g)(x) = f(x) \wedge \delta(g)(x)$  with  $g(x) \leq f(x)$  and  $\varepsilon_f^1(g)(x) = f(x) \vee \varepsilon(g)(x)$  with  $g(x) \geq f(x)$ , respectively. When the function  $g(x)$  is equal to the erosion (dilation, respectively) of the original function, we obtain the opening

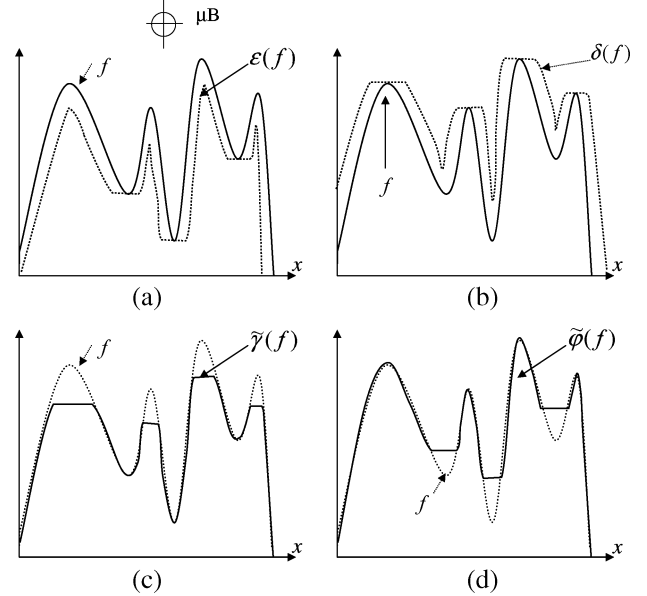


Fig. 1. (a) Original image  $f$  and marker  $g = \varepsilon(f)$ , (b) original image  $f$  and marker  $g = \delta(f)$ , (c) opening by reconstruction using erosion as marker, (d) closing by reconstruction using dilation as marker.

$\tilde{\gamma}_{\mu B}(f)(x)$  (closing  $\tilde{\varphi}_{\mu B}(f)(x)$  respectively) by reconstruction, i.e., [15], [16], [21]

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{\mu B}(f)(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_f^n(\varepsilon_{\mu B}(f))(x) \\ \text{and } \tilde{\varphi}_{\mu B}(f)(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_f^n(\delta_{\mu B}(f))(x). \end{aligned} \quad (2)$$

In Fig. 1, the performance of the opening and closing by reconstruction is illustrated. Note in Fig. 1(c) and 1(d) that some components have been eliminated, while the remaining are maintained equal to the original image. In this paper, regional maxima or minima are defined as follows [21].

**Definition 1:** A regional maximum  $M$  (regional minimum  $m$ , respectively) of a grayscale image  $f$  is a connected component of pixels with a given value  $h$  (plateau of altitude  $h$ ), such that every pixel in the neighborhood of  $M$  ( $m$ , respectively) has a strictly lower(upper, respectively) value.

### C. Weber's Law

In psycho-visual studies, the contrast  $C$  of an object with luminance  $L_{\max}$  against its surrounding luminance  $L_{\min}$  is defined as follows [22]:

$$C = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\min}}. \quad (3)$$

If  $L = L_{\min}$  and  $\Delta L = L_{\max} - L_{\min}$ , (3) can be rewritten as

$$C = \frac{\Delta L}{L}. \quad (4)$$

Equation (4) indicates that  $\Delta(\log L)$  is proportional to  $C$ ; therefore, Weber's law can be expressed as [8]

$$C = k \log L + b \quad L > 0 \quad (5)$$

where  $k$  and  $b$  are constants,  $b$  being the background.

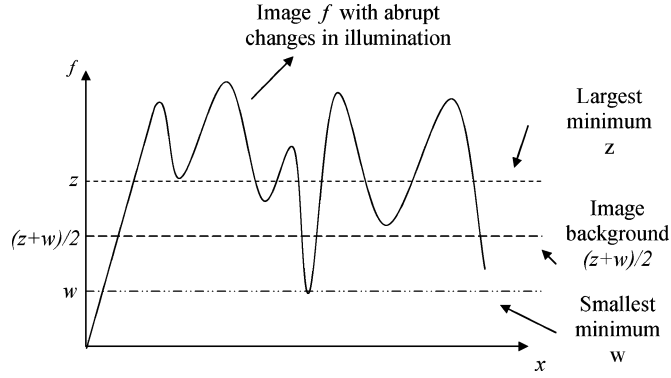


Fig. 2. Background detection from the smallest and largest minima of the image.

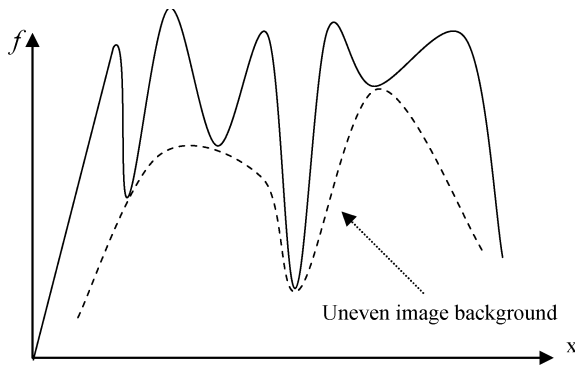


Fig. 3. Uneven background (dashed line) in images with poor lighting.

In our case, an approximation to Weber's law is considered by taking the luminance  $L$  as the grey level intensity of a function  $f$  (image); in this way, expression (5) is written as

$$C = k \log f + b \quad f > 0. \quad (6)$$

On the other hand, in [23], a methodology to compute the background parameter [ $b$  in (5)] was proposed. The methodology consists in calculating the average between the smallest and largest regional minima, as illustrated in Fig. 2. However, the main disadvantage of this proposal is that the image background is not detected in a local way. As a result, the contrast is not correctly enhanced in images with poor lighting, since considerable changes occur in the image background due to abrupt changes in luminance as illustrated in Fig. 3.

In the next section, a proposal to compute the image background by blocks is introduced.

### III. IMAGE BACKGROUND APPROXIMATION BY BLOCKS

In this paper,  $D$  represents the digital space under study, with  $D = Z^2$  and  $Z$  the integer set. In this way, let  $D$  be the domain of definition of the function  $f$ . The image  $f$  is divided into  $n$  blocks  $w^i$  of size  $l_1 \times l_2$ . Each block is a subimage of the original image. The minimum and maximum intensity values in each subimage are denoted as

$$m_i = \wedge w^i(x) \quad \forall x \in D_{w^i} \subseteq D \quad (7)$$

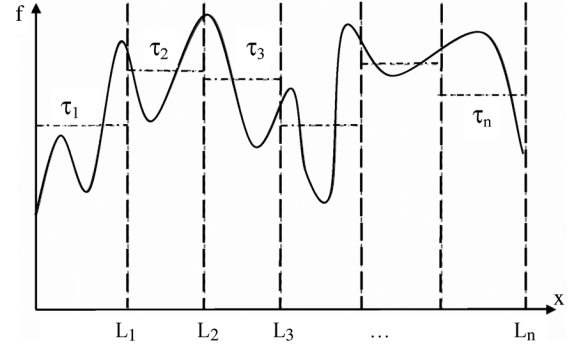


Fig. 4. Background criteria obtained by block analysis.

$$M_i = \vee w^i(x) \quad \forall x \in D_{w^i} \subseteq D. \quad (8)$$

For each analyzed block, maximum ( $M_i$ ) and minimum ( $m_i$ ) values are used to determine the background criteria  $\tau_i$  in the following way:

$$\tau_i = \frac{m_i + M_i}{2} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

In the 1-D case, as illustrated in Fig. 4, the following expression is obtained:

$$\nu(x) = \begin{cases} \tau_1 & x \leq L_1 \\ \tau_2 & L_1 < x \leq L_2 \\ \tau_3 & L_2 < x \leq L_3 \\ \vdots & \\ \tau_n & L_{n-1} < x \leq L_n. \end{cases}$$

The value of  $\tau_i$  represents a division line between clear ( $f > \tau_i$ ) and dark ( $f \leq \tau_i$ ) intensity levels. Once  $\tau_i$  is calculated, this value is used to select the background parameter associated with the analyzed block. As follows, an expression to enhance the contrast is proposed:

$$\Gamma_{\tau_i}(f) = \begin{cases} k_i \log(f + 1) + M_i, & f \leq \tau_i \\ k_i \log(f + 1) + m_i, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (10)$$

Note that the background parameter depends on the  $\tau_i$  value. If  $f \leq \tau_i$  (dark region), the background parameter takes the value of the maximum intensity ( $M_i$ ) within the analyzed block, and the minimum intensity ( $m_i$ ) value otherwise. Also, the unit was added to the logarithm function in (10) to avoid indetermination. On the other hand, since grey level images are used in this paper, the constant  $k_i$  in (10) is obtained as follows:

$$k_i = \frac{255 - m_i^*}{\log(256)} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

with

$$m_i^* = \begin{cases} m_i, & f > \tau_i \\ M_i, & f \leq \tau_i. \end{cases}$$

Equation (10) works similar to a contrast mapping [1], which modifies the intensity values depending on certain criterion. The criterion to modify the contrast in (10) is given by  $\tau_i$ . On the

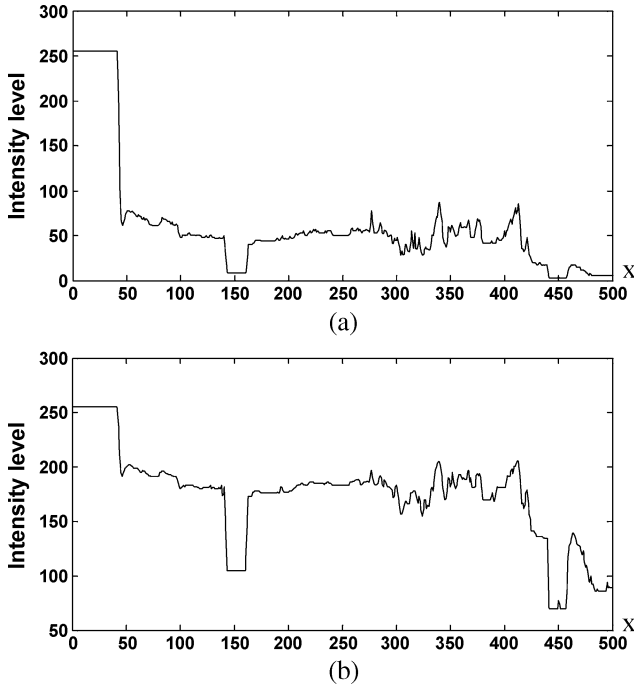


Fig. 5. Performance of equation (10) in a 1-D signal. (a) Original signal; (b) output signal after applying equation (10).

other hand,  $M_i$  and  $m_i$  values are used as background parameters to improve the contrast depending on the  $\tau_i$  value, due to the background is different for clear and dark regions. An example to illustrate the performance of (10) considering a 1-D signal is presented in Fig. 5. Notice that, in this figure, the intensity levels are stretched in an important way due to: i) the behavior of the logarithm function; and ii) the background parameter  $M_i$  or  $m_i$ .

In this way, the transformation  $\Gamma_{\tau_i}(f)$  fulfills the next properties.

**Property 1:** **a)** It is a nonincreasing transformation, i.e., for any two images  $f_1$  and  $f_2$  with  $f_1 \leq f_2$ ,  $\Gamma_{\tau_i}(f_1) \geq \Gamma_{\tau_i}(f_2)$ ; **b)** it is not an idempotent transformation, that is,  $\Gamma_{\tau_i}\Gamma_{\tau_i}(f) \neq \Gamma_{\tau_i}(f)$ ; **c)** it is an extensive transformation, i.e.,  $f \leq \Gamma_{\tau_i}(f)$ ; **d)** it is possible to classify the definition domain of  $f$  in two sets: the set  $S_{\tau_i}$  composed by high contrast areas, (for every point  $x \in S_{\tau_i}$ ,  $f > \tau_i$ ) and the set  $S_{\tau_i}^c$  composed by low contrast areas (for every point  $x \in S_{\tau_i}^c$ ,  $f \leq \tau_i$ ); **e)** the composition of contrast mappings using (10) will result in lighter images for each iteration, reaching a limit imposed by the value of the highest level of intensity of the image,  $\maxint = 255$  in our particular case, that is,  $\underbrace{\Gamma_{\tau_i} \dots \Gamma_{\tau_i}}_{n \text{ times}}(\Gamma_{\tau_i}(f)) \rightarrow \maxint$ ; and **f)** if image  $f$  is sub-

divided into smaller blocks each time, the background function  $b(x)$  tends to be similar to the original function  $f$ .  $\square$

On the other hand, given that, maximum and minimum values are analyzed for each block, an extension using morphological operators is presented as follows.

Let  $I_{\max}(x)$  and  $I_{\min}(x)$  be the the maximum and minimum intensity values taken from one set of pixels contained in a window ( $B$ ) of elemental size ( $3 \times 3$  elements),  $x \in D$ . Notice that the window corresponds to the structuring element  $B$ . For the sake of simplicity, let us consider  $I_{\max}(x) = \max\{f(x+b) :$

$b \subseteq B\}$  and  $I_{\min}(x) = \min\{f(x+b) : b \subseteq B\}$ ,  $x \in D$ . Then, from (9), a new expression is derived

$$\tau(x) = \frac{I_{\min}(x) + I_{\max}(x)}{2} \quad (11)$$

where  $I_{\max}(x)$  and  $I_{\min}(x)$  values correspond to the morphological dilation and erosion defined by the order-statistical filters [24]. Thus, (11) is expressed as

$$\tau(x) = \frac{\varepsilon_{\mu}(f)(x) + \delta_{\mu}(f)(x)}{2}. \quad (12)$$

Notice that  $\tau_i$  was substituted by  $\tau(x)$ , since  $\tau(x)$  has a local character given by the structuring element  $\mu B$ . In this way, the contrast operator in (10) is written as

$$\Gamma_{\tau(x)}(f) = \begin{cases} k_{\tau(x)} \log(f+1) + \delta_{\mu}(f)(x), & f \leq \tau(x) \\ k_{\tau(x)} \log(f+1) + \varepsilon_{\mu}(f)(x), & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{and } k_{\tau(x)} = \frac{255 - \tau(x)}{\log(256)}. \quad (13)$$

To illustrate the performance of (10) and (13), some output images are presented.

**Application example for (10):** Consider the input image in Fig. 6(a1). The  $\tau$  values for each block in Fig. 6(a2) are:  $\tau_1 = 10$ ,  $\tau_2 = 1$ ,  $\tau_3 = 2$  and  $\tau_4 = 1$ . The enhanced image is presented in Fig. 6(a3). Other examples are presented in Fig. 6(a4)–(a7). Original images are given in Fig. 6(a4) and (a6), while Fig. 6(a5) and (a7) are the enhanced images. On the other hand, image in Fig. 6(b1) was taken from a database developed by Belhumeur and Georgiades [25]. The image in Fig. 6(b2) illustrates the background image considering 20 blocks, while the improved image is presented in Fig. 6(b3). Notice that, in the enhanced images, abrupt changes in illumination are avoided. In addition, objects not visible in the original images are revealed.

**Application example for (13):** A better local analysis is achieved when (13) is applied instead of (10) to detect the background criterion  $\tau(x)$ . This situation occurs, because the structuring element  $\mu B$  allows the analysis of sets of neighboring pixels at each point in the image. If size  $\mu$  increases, more pixels will be taken into account to compute such parameter. Fig. 7 illustrates the performance of (13). Original images are located in Fig. 7(a) and (b) while enhanced images are presented in Fig. 7(c) and (d). These improved images were obtained with  $\mu = 1$ . Notice that several characteristics not visible at first sight appear in the enhanced images.

#### IV. IMAGE BACKGROUND DETERMINATION USING THE OPENING BY RECONSTRUCTION

It is desirable to obtain a function that resembles the image background without dividing the original image into blocks, and without using the morphological erosion and dilation, since these morphological transformations generate new contours when the structuring element is increased. This situation is illustrated in Fig. 8. When morphological erosion or dilation

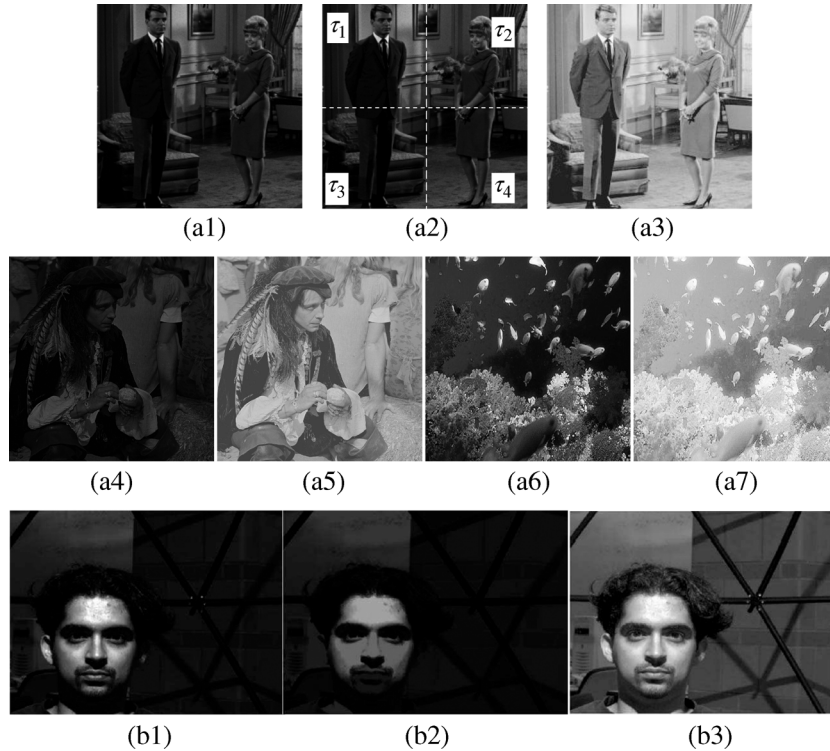


Fig. 6. Image background detection using block approach and contrast enhancement. (a1) Original image, (a2) image divided into four blocks. The values of  $\tau$  for each block are  $\tau_1 = 10$ ;  $\tau_2 = 1$ ;  $\tau_3 = 2$  and  $\tau_4 = 1$ ; (a3) enhanced image after applying equation (10); (a4), (a6) original images; (a5), (a7) enhanced images after applying equation (10); (b1) original image; (b2) image background considering 20 blocks; and (b3) enhanced image after applying equation (10).

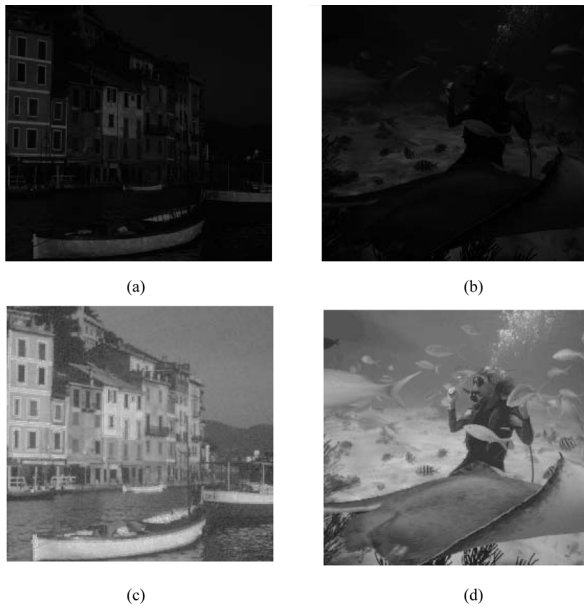


Fig. 7. Image background detection using the morphological erosion and dilation. (a), (b) Original images; (c), (d) enhanced images after applying equation (13).

are used with large sizes of  $\mu$  to reveal the background, inappropriate values may be obtained. However, in MM, there is other class of transformations that allows the filtering of the image without generating new components; these transformations are called transformations by reconstruction (see Section II-B). In our case, the opening by reconstruction is our choice because

touches the regional minima and merges regional maxima [21]. This characteristic allows the modification of the altitude of regional maxima when the size of the structuring element increases. This effect can be used to detect the background criteria ( $\tau(x)$ ) in (9), i.e.,

$$\tau(x) = \tilde{\gamma}_\mu(f)(x). \tag{14}$$

Equation (10) is maintained and only the way to detect the background is modified. An example of this modification is shown in Fig. 9. Input images are located in Fig. 9(a) and (c), whereas enhanced images are presented in Fig. 9(b) and (d). The image background criteria [ $\tau(x)$  in (14)] was calculated with a structuring element size 10 for all output images.

On the other hand, it is possible to use the opening by reconstruction to generate the image background similarly to that presented in Fig. 3, and not only, as a criterion to detect the background as was presented in (14).

An uneven background (dashed line) is illustrated in Fig. 3, which is detected from an image with important variations in lighting. Observe that the background touches only regional minima, while the other regions contain local information of the original function. From these extreme points and the local information provided by the original function (in other words the background), important information about the image can be acquired.

When considering the opening by reconstruction to detect the background, one further operation is necessary to detect

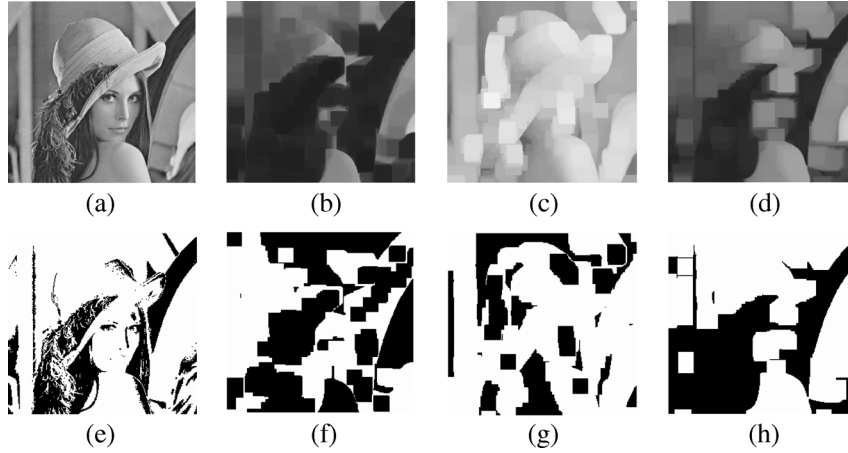


Fig. 8. Output images illustrating the generation of new contours. (a) Original image, (b) erosion size  $\mu = 20$ , (c) dilation size  $\mu = 20$ , (d) Opening size  $\mu = 20$ , (e), (f), (g), (h) Threshold of the images in (a), (b), (c), and (d).

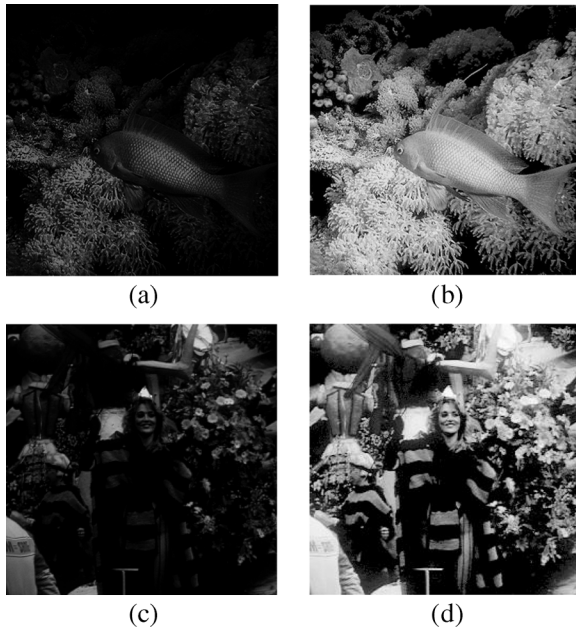


Fig. 9. Opening by reconstruction as background criteria. (a), (c) Original images; (b), (d) enhanced images considering the opening by reconstruction as background criterion.

the local information given by the original function (image extremes are contained in the opening by reconstruction because of its behavior). The morphological transformation proposed for this task is the erosion size  $\mu = 1$ , i.e. [see (6)]

$$b(x) = \varepsilon_1[\tilde{\gamma}_\mu(f)](x). \quad (15)$$

This idea is illustrated in Fig. 10. Given that the morphological erosion tends to generate new information when the structuring element is enlarged, in this study, the image background was computed by using only the morphological erosion size 1.

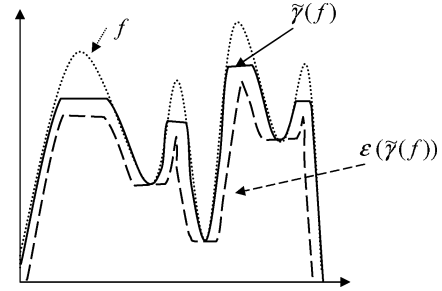


Fig. 10. Image background obtained from the erosion of the opening by reconstruction.

Thus, the following expression derived from (6) is proposed to enhance the contrast in images with poor lighting

$$\xi_{\tilde{\gamma}_\mu}(f) = k(x)\log(f+1) + \varepsilon_1[\tilde{\gamma}_\mu(f)] \quad \text{and} \quad k(x) = \frac{\max_{\text{int}} - \varepsilon_1[\tilde{\gamma}_\mu(f)]}{\text{Log}(\max_{\text{int}} + 1)}. \quad (16)$$

In our case, the maximum grey level is  $\max_{\text{int}} = 255$ . If the background image increases, the image tends to become lighter due to the additive effect of the image background. Formally, we have

$$\lim_{\varepsilon_1[\tilde{\gamma}_\mu(f)](x) \rightarrow \max_{\text{int}}} \xi_{\tilde{\gamma}_\mu}(f) = \max_{\text{int}}. \quad (17)$$

Considering that the morphological erosion size  $\mu = 1$  is fixed in (16), properties a), b), c), and d) mentioned in Properties 1 are also fulfilled by operator  $\xi_{\tilde{\gamma}_\mu}(f)$ . However, an interesting property is obtained from the behavior of the opening by reconstruction. This property is called *multibackground* and is presented as follows.

*Property 2 (Multibackground):* For all  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$ , and  $\mu_1 < \mu_2$  such that  $\tilde{\gamma}_{\mu_1}(f) \geq \tilde{\gamma}_{\mu_2}(f)$ , then  $\varepsilon_1[\tilde{\gamma}_{\mu_1}(f)](x) \geq \varepsilon_1[\tilde{\gamma}_{\mu_2}(f)](x)$ .

The multibackground property allows the generation of a family of image backgrounds when the size of the structuring element  $\mu$  is increased. This situation is illustrated in Fig. 11, where (15) is applied. The original image is presented in Fig. 11(a). A

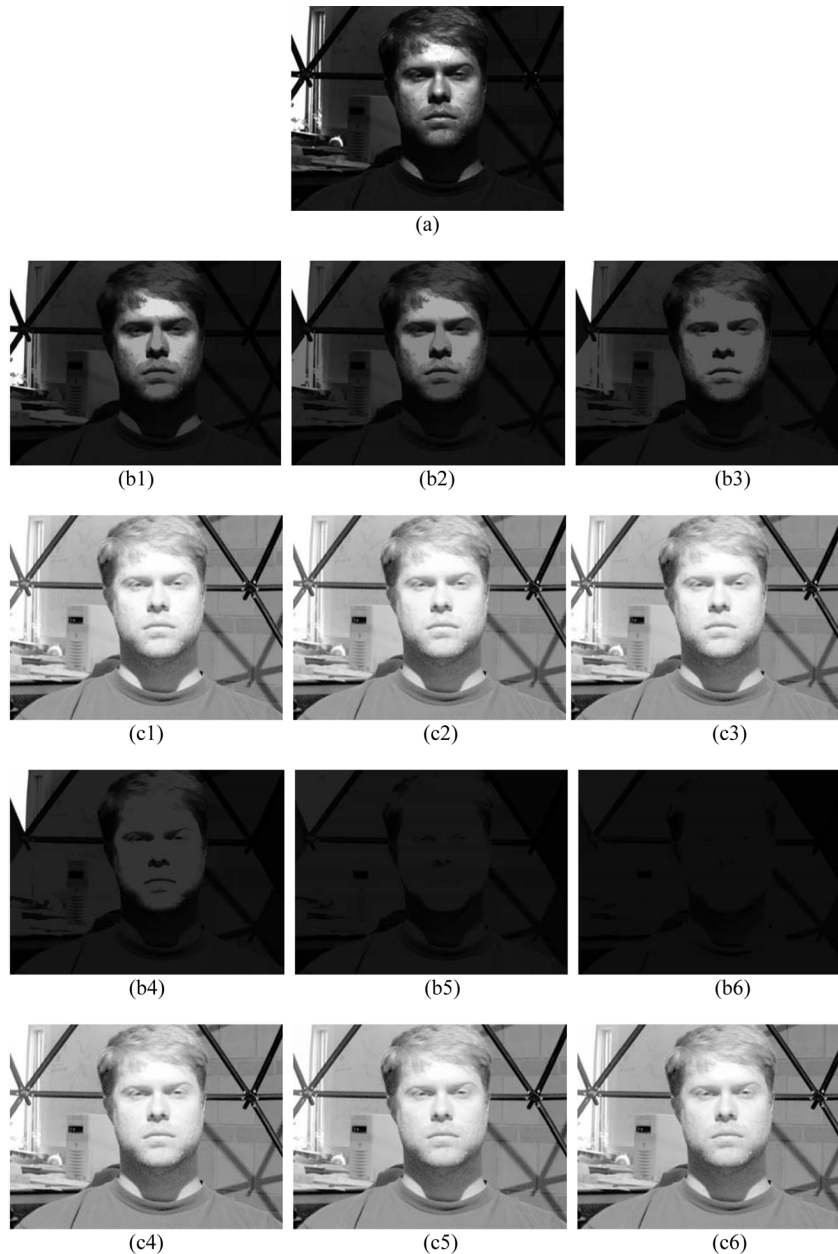


Fig. 11. Image background using the opening by reconstruction with different  $\mu$  sizes. (a) Original image; (b1), (b2), (b3), (b4), (b5), (b6) background images obtained after applying equation (15) with structuring element sizes  $\mu = 10, 20, 30, 40, 50$ , and  $60$ ; (c1), (c2), (c3), (c4), (c5), (c6) enhanced images obtained from the application of equation (16).

set of output background images is presented in Fig. 11(b1)–(b6). These output images are obtained from (15) with  $\mu = 10, 20, 30, 40, 50$ , and  $60$ , respectively, while the enhanced images, obtained after applying (16), are shown in Fig. 11(c1)–(c6).

Other example is presented in Fig. 12. Original images are shown in Fig. 12(a)–(c) and (g), whereas enhanced images obtained from (16) can be observed in Fig. 12(d)–(f) and (h).

The histograms of some images obtained from the picture located in Fig. 13(a1) are presented in Fig. 13. The purpose of Fig. 13 is to illustrate the changes produced in the enhanced image when the background is modified by the application of (16). The background of the image was detected for  $\mu = 10, 20$ , and  $30$ . The histograms of the processed images [see Fig. 13(a2)–(a4)] can be observed in Fig. 13(b2)–(b4). Notice that, for each size  $\mu$ , different histograms are obtained.

## V. COMPARISON WITH OTHER CONTRAST OPERATORS

Two methodologies to enhance the contrast have been proposed in [12] and [13]. In Fig. 14, a comparison between output image obtained from (16) and the output image provided in the paper by Liu *et al.* [13] was carried out. These authors propose to modify the contrast by means of a data base of images with good contrast; the contrast is enhanced basically by considering the information located in the face following a learning procedure. The original image is located in Fig. 14(a), whereas the output images obtained with the methodology given in [13] and our proposal are presented in Fig. 14(b) and (c), respectively. The image in Fig. 14(c) [obtained with (16)] presents an over-illumination effect in some regions; this situation occurs because the original image does not was captured in poor lighting conditions,

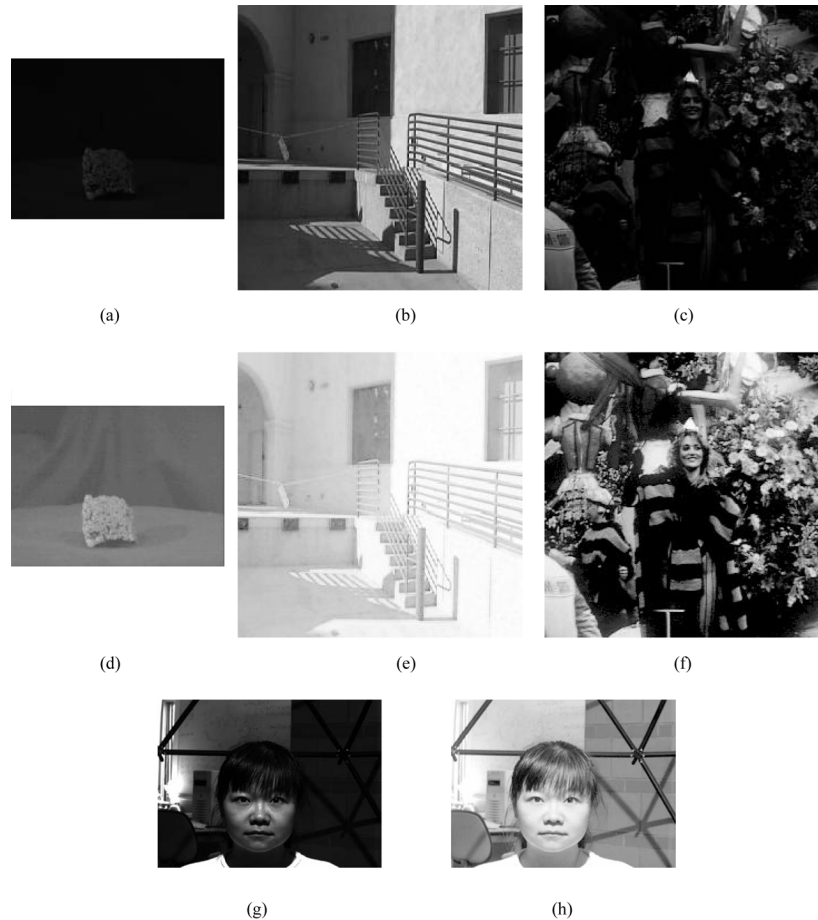


Fig. 12. Image background obtained from the opening by reconstruction. (a), (b), (c), (g) Original images; (d), (e), (f), (h) enhanced images after applying equation (16).

due to this, the logarithm function produces an over-illuminating effect when applied to the processed image. Due to this situation, contrast enhancement in Fig. 14(b) is better than in Fig. 14(c).

On the other hand, in Fig. 15, the performance of (16) is compared with other transformations provided in the literature. The original image is presented in Fig. 15(a), whereas the image in Fig. 15(b) is obtained from the equalization histogram. This technique is widely used to improve images with poor lighting. As mentioned in the introduction, the histogram equalization technique consists in reordering the grey level intensities within the image to obtain an uniformly distributed histogram [10].

The output image in Fig. 15(c) was obtained from a morphological transformation introduced by Meyer and Serra [1]; the following contrast mapping was applied:

$$W_{\mu}f(x) = \begin{cases} a_1\varphi_{\mu}(f)(x), & 0 \leq \rho(x) < \beta \\ f(x), & \beta \leq \rho(x) < \alpha \\ a_2\gamma_{\mu}(f)(x), & \alpha \leq \rho(x) \leq 1 \end{cases} \quad (18)$$

$$\rho(x) = \frac{\varphi_{\mu}(f)(x) - f(x)}{\varphi_{\mu}(f)(x) - \gamma_{\mu}(f)(x)} \quad (19)$$

where  $a_1$  and  $a_2$  are constants, with  $a_1 = a_2 = 2$ , the opening and closing size is  $\mu = 3$ , while parameters  $\alpha$  and  $\beta$  are equal to 0.125. On the other hand, the output image in Fig. 15(d) was

obtained by applying the methodology provided by Majumder and Irani [12] with  $\tau = 2$  (parameter  $\tau$  employed in [12] has a different meaning to that in our work). Finally, Fig. 15(e) was obtained by applying (16) (transformation proposed in this work).

In analyzing Fig. 15, notice in the image located in Fig. 15(b) the presence of over-illuminated regions on the face. In Fig. 15(c), several regions have been degraded, while other areas are over-illuminated. The output image in Fig. 15(d) was obtained with the methodology proposed in [12] with  $\tau = 2$ , this image was hardly enhanced, and remain many regions with poor lighting. Finally, the output image in Fig. 15(e) was obtained with (16). Notice in Fig. 15(e) that not only abrupt transitions of illumination are avoided [which do not occur in Fig. 15(b), (c), and (d)], but also several face characteristics are revealed. On the other hand, unlike techniques as histogram equalization and morphological contrast mappings, among others, the methodologies introduced in this paper are appropriate for images whose main feature is a deficient illumination. In the case of applying the proposed operators to images with correct lighting, over-illuminated images will be obtained (see Fig. 16). This effect is due to the logarithm function, which normalizes grey level intensities by dismissing changes in illumination. In a future work, this problem will be treated.



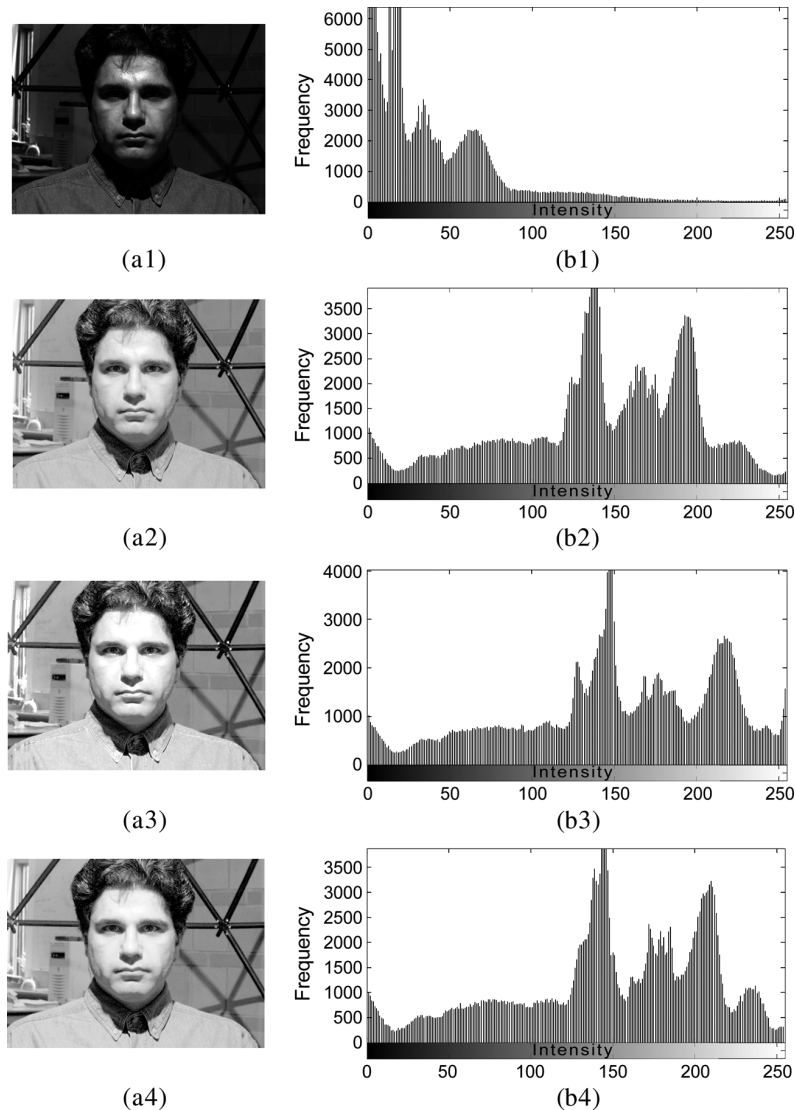


Fig. 13. (a1) Original image; (b1) histogram of the image in Fig. 13(a1); (a2), (a3), (a4) Enhanced images using  $\varepsilon_1[\tilde{\gamma}_\mu](f)$  as background with  $\mu = 10, 20$ , and  $30$ ; (b2), (b3), (b4) corresponding histograms of the images in Figs. 13(a2), (a3), (a4).

## VI. CONCLUSION

This paper presents a study to detect the image background and to enhance the contrast in grey level images with poor lighting. First, a methodology was introduced to compute an approximation to the background using blocks analysis. This proposal was subsequently extended using mathematical morphology operators. However, a difficulty was detected when the morphological erosion and dilation were employed; therefore, a new proposal to detect the image background was propounded, that is based on the use of morphological connected transformations.

Also, morphological contrast enhancement transformations were introduced. Such operators are based on Weber's law notion. These contrast transformations are characterized by the normalization of grey level intensities, avoiding abrupt changes in illumination. The performance of the proposals provided in this work were illustrated by means of several examples throughout the paper. Also, the operators performance employed in this paper were compared with others given in the literature. Finally, a disadvantage of contrast enhancement transformations studied in this paper is that they can only be used satisfactorily in images with poor lighting; in a future work this problem will be considered.

## APPENDIX A

Properties fulfilled by the morphological dilation  $\delta_\mu(f)(x)$ , erosion  $\varepsilon_\mu(f)(x)$ , and opening by reconstruction  $\tilde{\gamma}_\mu(x)$  [18], [19], [21].

- 1)  $\delta_\mu(f)(x)$  is an extensive transformation, i.e.,  $f(x) \leq \delta_\mu(f)(x)$ .
  - 2)  $\varepsilon_\mu(f)(x)$  is an antiextensive transformation, i.e.,  $f(x) \geq \varepsilon_\mu(f)(x)$ .
  - 3)  $\delta_\mu(f)(x)$  and  $\varepsilon_\mu(f)(x)$  are increasing transformations, that is, given  $f(x)$  and  $g(x)$  with  $g(x) \leq f(x)$ , then  $\varepsilon(g)(x) \leq \varepsilon(f)(x)$  and  $\delta(g)(x) \leq \delta(f)(x)$ .
  - 4) Property of the opening by reconstruction  $\tilde{\gamma}_\mu(f)(x)$ .
- Given  $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ , with  $\mu_1 < \mu_2$ , then

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1}(f) \geq \tilde{\gamma}_{\mu_2}(f). \quad (20)$$

*Properties of the Operator in (10):*

- 1) *It is a nonincreasing transformation.* Let  $f(x)$  and  $g(x)$  be two functions, with  $g(x) \leq f(x)$ . We suppose that the

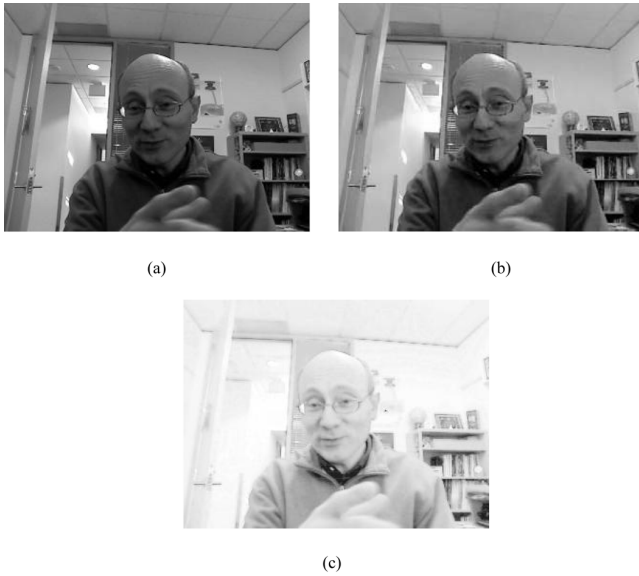


Fig. 14. Comparison between the contrast methodology provided in [13] and our work. (a) Original image, (b) enhanced image obtained from the methodology introduced in [13], and (c) output image obtained from the application of equation (16) (proposal introduced in this work).

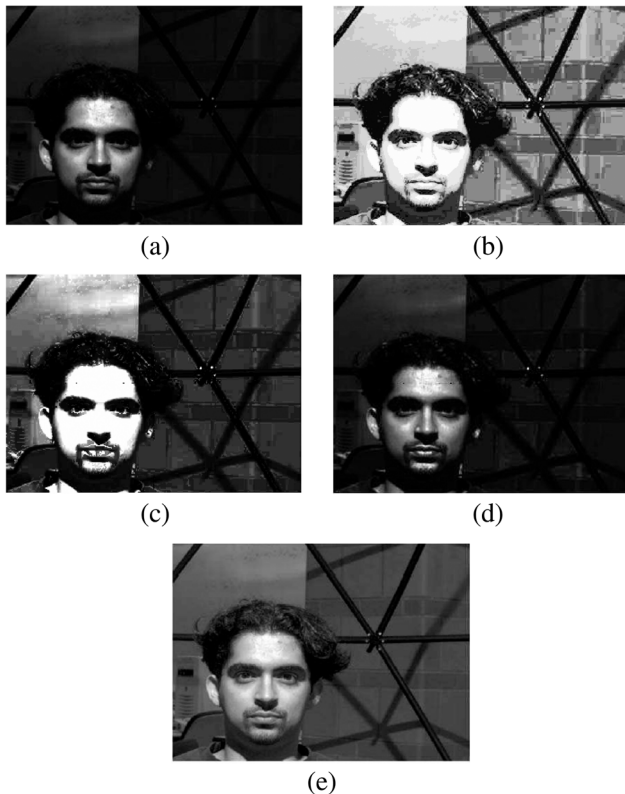


Fig. 15. Comparison among contrast operators. (a) Original image; (b) equalization histogram; (c) equation (18) (Meyer and Serra transformation [1]); (d) output image obtained from the proposal given by Majumder and Irani [12]; and (e) equation (16) (proposal introduced in this work).

number of blocks  $n$  is given and finite, and let  $i$  be the  $i^{\text{th}}$  block. Then

$$\begin{aligned} m_i(g) &\leq m_i(f) \\ M_i(g) &\leq M_i(f) \end{aligned} \quad (21)$$

so

$$\tau_i(g) = \frac{m_i(g) + M_i(g)}{2} \leq \frac{m_i(f) + M_i(f)}{2} = \tau_i(f). \quad (22)$$

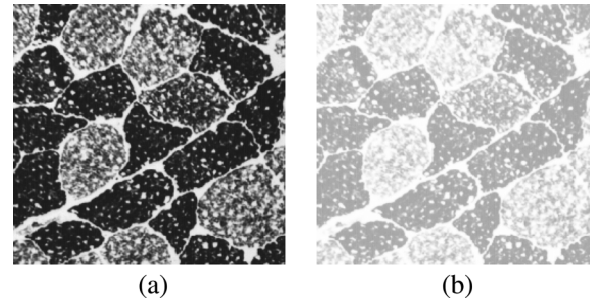


Fig. 16. Normal lighting. (a) Image with normal lighting, and (b) enhanced image obtained from the application of equation (16) (proposal introduced in this work).

On the other hand

$$m_i^*(g) \leq m_i^*(f)$$

$$-m_i^*(g) \geq -m_i^*(f)$$

$$255 - m_i^*(g) \geq 255 - m_i^*(f)$$

consequently

$$k_i(g) = \frac{255 - m_i^*(g)}{\log(256)} \geq \frac{255 - m_i^*(f)}{\log(256)} = k_i(f). \quad (23)$$

Also, since  $g \leq f$ , then

$$g + 1 \leq f + 1$$

$$\log(g + 1) \leq \log(f + 1)$$

however, the increasing property for (23) is not satisfied.

2) *It is not an idempotent transformation.* In fact

$$\Gamma_{\tau_i}(\Gamma_{\tau_i}(f)) \neq \Gamma_{\tau_i}(f).$$

3) *It is an extensive transformation.* In fact

$$f(x) \leq \Gamma_{\tau_i}(f)(x).$$

*Property of the Operator in (16):*

1) **Multibackground.** For all  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$ , and  $\mu_1 < \mu_2$ ,  $\Rightarrow \tilde{\gamma}_{\mu_1}(f) \geq \tilde{\gamma}_{\mu_2}(f)$ , then  $\varepsilon_1[\tilde{\gamma}_{\mu_1}(f)](x) \geq \varepsilon_1[\tilde{\gamma}_{\mu_2}(f)](x)$ . This property may be intuitively derived from (20).

#### ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank Dr. A. Majumder and Dr. Z. Liu for the images provided to complete this work.

#### REFERENCES

- [1] F. Meyer and J. Serra, "Contrast and Activity Lattice," *Signal Process.*, vol. 16, pp. 303–317, 1989.
- [2] I. R. Terol-Villalobos, "Morphological image enhancement and segmentation," in *Advances in Imaging and Electron Physics*, P. W. Hawkes, Ed. New York: Academic, 2001, pp. 207–273.
- [3] I. R. Terol-Villalobos, "Morphological connected contrast mappings based on top-hat criteria: A multiscale contrast approach," *Opt. Eng.*, vol. 43, no. 7, pp. 1577–1595, 2004.
- [4] J. D. Mendiola-Santibañez and I. R. Terol-Villalobos, "Morphological contrast mappings based on the flat zone notion," *Computación y Sistemas*, vol. 6, pp. 25–37, 2002.
- [5] A. Toet, "Multiscale contrast enhancement with applications to image fusion," *Opt. Eng.*, vol. 31, no. 5, 1992.
- [6] S. Mukhopadhyay and B. Chanda, "A multiscale morphological approach to local contrast enhancement," *Signal Process.*, vol. 80, no. 4, pp. 685–696, 2000.
- [7] J. Kasperek, "Real time morphological image contrast enhancement in virtex FPGA," in *Lecture Notes in Computer Science*. New York: Springer, 2004.

- [8] A. K. Jain, *Fundamentals of Digital Images Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [9] J. Short, J. Kittler, and K. Messer, "A comparison of photometric normalization algorithms for face verification," presented at the IEEE Int. Conf. Automatic Face and Gesture Recognition, 2004.
- [10] C. R. González and E. Woods, *Digital Image Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992.
- [11] R. H. Sherrier and G. A. Johnson, "Regionally adaptive histogram equalization of the chest," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. MI-6, pp. 1–7, 1987.
- [12] A. Majumder and S. Irani, "Perception-based contrast enhancement of images," *ACM Trans. Appl. Percept.*, vol. 4, no. 3, 2007, Article 17.
- [13] Z. Liu, C. Zhang, and Z. Zhang, "Learning-based perceptual image quality improvement for video conferencing," presented at the IEEE Int. Conf. Multimedia and Expo (ICME), Beijing, China, Jul. 2007.
- [14] E. H. Weber, "De pulsu, resorptione, audita et tactu," in *Annotationes anatomicae et physiologicae*. Leipzig, Germany: Koehler, 1834.
- [15] J. Serra and P. Salembier, "Connected operators and pyramids," presented at the SPIE. Image Algebra and Mathematical Morphology, San Diego, CA, Jul. 1993.
- [16] P. Salembier and J. Serra, "Flat zones filtering, connected operators and filters by reconstruction," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 3, no. 8, pp. 1153–1160, Aug. 1995.
- [17] J. Serra, *Mathematical Morphology Vol. I*. London, U.K.: Academic, 1982.
- [18] P. Soille, *Morphological Image Analysis: Principle and Applications*. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [19] H. Heijmans, *Morphological Image Operators*. New York: Academic, 1994.
- [20] L. Vincent and E. R. Dougherty, "Morphological segmentation for textures and particles," in *Digital Image Processing Methods*, E. R. Dougherty, Ed. New York: Marcel Dekker, 1994, pp. 43–102.
- [21] L. Vincent, "Morphological grayscale reconstruction in image analysis: Applications and efficient algorithms," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 2, no. 2, pp. 176–201, Feb. 1993.
- [22] E. Peli, "Contrast in complex images," *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 7, no. 10, pp. 2032–2040, 1990.
- [23] A. Edgar, R. Araiza, J. D. Mendiola Santibañez, G. Herrera Ruiz, C. A. G. Gutiérrez, M. T. Perea, and G. J. R. Moreno, "Contrast Enhancement and Illumination Changes Compensation," *Computación y Sistemas*, vol. 10, no. 4, pp. 357–371, 2007.
- [24] P. Maragos and R. Schafer, "Morphological filters—Part I: Their set-theoretical analysis and relations to linear shift invariant filters," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. 35, pp. 1153–1169, 1987.
- [25] A. S. Georghiadis, P. N. Belhumeur, and D. J. Kriegman, "Generative models for recognition under variable pose and illumination," in *Proc. IEEE Int. Conf. Automatic Face and Gesture Recognition*, 2000, pp. 277–284.



**Angélica R. Jiménez-Sánchez** received the B.S. and M.S. degrees in applied mathematics from the Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), México, in 2005 and 2007, respectively, where she is currently pursuing the engineering Ph.D. degree.

She is a Professor/Researcher at UAQ. Her research interests include computer vision and signal processing.



**Jorge D. Mendiola-Santibañez** received the B.S. degree in electronic engineering from the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, the M.S. degree in electronics from INAOE, México, and the Ph.D. degree from the Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), México.

He is currently a Professor/Researcher at the Universidad Politécnica de Querétaro. His research interests include morphological image processing, and computer vision.



**Iván R. Terol-Villalobos** received the B.Sc. degree from the Instituto Politécnico Nacional, México, the M.Sc. degree in electrical engineering from CINVESTAV, México, and the Ph.D. degree from the Centre de Morphologie Mathématique, Ecole des Mines de Paris, France.

He is currently a Researcher with CIDETEQU, Querétaro, México. His main current research interests include morphological image processing and computer vision.



**Gilberto Herrera-Ruíz** received the engineering Ph.D. degree from the Hungarian Academy of Sciences in 1992.

His research interests include image processing, manufacturing systems, machine tools, and technologies for greenhouses. He is currently a Professor/Researcher at the Universidad Autónoma de Querétaro and member of the National Research System (SNI) México.



**Damián Vargas-Vázquez** was born in Querétaro, México, in 1973. He received the diploma of Electronic Engineer from the Instituto Tecnológico de Querétaro, México, in 1995, and the M.S. degree in instrumentation and automatic control from the Universidad Autónoma de Querétaro, México, in 2000, and the Ph.D. degree in computer science from the Universidad Politécnica de Madrid, Spain, in 2007.

In 2007, he joined the School of Engineering, Universidad Autónoma de Querétaro, México, where he is a Researcher Professor in the image processing and analysis field, particularly in the mathematical morphology area and biomedical imaging applications.



**Juan J. García-Escalante** received the B.S. degree in communications and electronics from the Universidad Autónoma de Campeche in 1999 and the M.S. degree in instrumentation and automatic control from the Universidad Autónoma de Querétaro in 2004. He is currently pursuing the Ph.D. degree in engineering at the Bionics Lab, Universidad Autónoma de Querétaro.

He attended the 2005 Intel + UC Berkeley Entrepreneurship Challenge with the a project on climate control for greenhouse production. His research interests include on-chip stereo vision, pattern recognition using fractal descriptors, 3-D reconstruction, real-time 3-D scanning, and telepresence.

His research interests include on-chip stereo vision, pattern recognition using fractal descriptors, 3-D reconstruction, real-time 3-D scanning, and telepresence.



**Alberto Lara-Guevara** received the B.S. degree in mechanical and electrical engineering from the Universidad Autónoma de San Luis Potosí in 1975, the M.B.A. degree from the Universidad Autónoma del Estado de México in 1979, and he is currently pursuing the Ph.D. degree in materials engineering at the Universidad Autónoma de Querétaro.

He has 28 years of experience in new products, expansion and revamping projects for automotive, truck, and food factories. He has been also university professor in the engineering major during 33 years.

ISSN 1405-5546

*Aceptada en el Índice de  
Revistas Científicas y  
Tecnológicas del CONACYT*

## Editores en Jefe

**Juan Humberto Sossa  
Azuela**

Centro de Investigación en  
Computación (IPN), México

**Isaac Scherson**

Universidad de California,  
Irvine, USA

**Ulises Cortés**

Universidad Politécnica  
de Cataluña,  
España

**Angélica R. Jiménez Sánchez  
Jorge D. Mendiola Santibañez  
Gilberto Herrera Ruíz  
Israel Santillan**

Estimados Colegas,

Me complace notificarles que su artículo *“Índice de contraste morfológico basado en el análisis de los contornos y el fondo de la imagen”*, fue aceptado por el Comité Editorial para su publicación en la revista *Computación y Sistemas*.

Sin más por el momento y agradeciendo su participación, le invito a continuar colaborando con otros trabajos.

Se extiende la presente constancia en la Ciudad de México, Distrito Federal, a los veintidos días del mes de Agosto de 2011.

Atentamente



**Dr. Juan Humberto Sossa Azuela**  
Editor en Jefe, México

Apartado Postal 75-546  
C.P. 07738 México, D.F.  
Tel (+525) 729-6000  
Ext. 56642 y 56643  
Fax Ext. 56607  
computacion-y-sistemas@cic.ipn.mx

# Índice de contraste morfológico basado en el análisis de los contornos y el fondo de la imagen

## *Morphological contrast index based on the analysis of contours and the image background*

Angélica R Jiménez-Sánchez<sup>1</sup>, Jorge D Mendiola-Santibañez<sup>1,2</sup>, Gilberto Herrera-Ruíz<sup>1</sup>, Israel Santillan<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, Centro Universitario S/N. C.P. 76010, Querétaro, México.

<sup>2</sup>Universidad Politécnica de Querétaro, Carretera Estatal 420 S/N, El Rosario, El Marqués, C.P. 76240, Querétaro, México.

rosariojs@uaq.mx, mendijor@uaq.mx, gherrera@uaq.mx, santillis@gmail.com

**Resumen.** En este artículo se presenta un índice para cuantificar el contraste que se percibe en una imagen. El índice está basado en la ley de Weber y toma en consideración una estimación del fondo de la imagen mediante la erosión de la apertura por reconstrucción. El desempeño de la propuesta se ilustra con un conjunto de imágenes procesadas por un mapeo de contraste y se compara con dos medidas de contraste dadas en la literatura.

**Palabras clave:** Contraste morfológico, apertura por reconstrucción, índice de contraste, ley de Weber.

**Abstract.** In this work a contrast index for quantifying the perceived contrast in an image is shown. The index is based on the Weber's Law and considers background estimation through the erosion of the opening by reconstruction. The performance of the proposal given in this paper is illustrated with a set of images processed by a contrast mapping and compared with two contrast measures given in the literature.

**Keywords.** Morphological contrast, opening by reconstruction, contrast index, Weber's law.

## 1 Introducción

El contraste se define como la diferencia de intensidad luminosa entre un punto de una imagen y sus alrededores. Bajo esta definición el contraste que se percibe en una imagen con tonalidades similares es menor que el que se percibe en una imagen con tonalidades diferentes. En muchos campos es importante contar con un índice del contraste, por ejemplo, para medir la calidad de una imagen o bien para indicar cuándo es necesario corregirlo. La medida del contraste involucra directamente el concepto de luminancia como lo indican las leyes de Weber y Michelson (Jain, 1989). Estas leyes físicas son utilizadas para modelar el contraste. Por definición, la luminancia de una superficie es la intensidad luminosa emitida por unidad de superficie en una dirección dada y se mide en candelas por

metro cuadrado ( $\text{cd/m}^2$ ). Sin embargo, en el procesamiento de imágenes y en particular en imágenes en niveles de gris, la luminancia se asocia con el nivel de gris que corresponde a cada píxel, por lo que cambios importantes de la luminancia se encontrarán alrededor de los contornos de la imagen, mientras que en los espacios de color existen ecuaciones específicas para el cálculo de la luminancia que en este trabajo no revisamos.

Por otro lado, medir la mejora de una imagen después de que esta ha sido procesada por algún operador no es una tarea fácil, ya que esto es algo subjetivo y depende de la aplicación. En la práctica, existen varias definiciones que permiten medir el realce o mejora en las imágenes, como ejemplo ver: (Morrow *et al.*, 1992), (Kim *et al.*, 1997), (Beghcladi y Negrate, 1989), (Gordon y Rangayan, 1984), (Mendiola *et al.*, 2007) y (Agaian *et al.*, 2001), (Rizzi *et al.*, 2004), (Rizzi *et al.*, 2008).

En (Kim *et al.*, 1997) se menciona que no existe una medida universal que pueda validar tanto la parte objetiva y subjetiva del mejoramiento de la imagen, de aquí parte el surgimiento de diversas propuestas. Por ejemplo, en (Gordon y Rangayan, 1984) la medida se obtiene a través del promedio de los niveles de gris en dos ventanas rectangulares centradas en cierto píxel. En (Beghdadi y Negrate, 1989) se realiza la medida a partir del análisis de los contornos de la imagen. También existe una medida estadística propuesta en (Morrow *et al.*, 1992) en la cual se obtiene un parámetro a partir del histograma de la imagen. Otro trabajo interesante se presenta en (Agaian *et al.*, 2001) en el cual se analizan las intensidades máximas y mínimas dentro de una ventana que se desplaza a través de la imagen. Por otra parte, el contraste ha sido tratado de manera sistemática dentro del campo de la Morfología Matemática (MM), ver por ejemplo, mapeos de contraste (Meyer y Serra, 1989), (Serra, 1988b), (Terol, 2004), (Terol, 1998), filtros morfológicos por pendiente (Terol,

1996), (Terol y Cruz, 1998), el centro morfológico (Soille, 2003), (Serra, 1988a), y el *top-hat*. Sin embargo, existen pocos trabajos dentro de la MM en donde se cuantifica el mejoramiento de una imagen procesada. En (Mendiola *et al.*, 2007) se introduce un índice de medida de contraste que involucra a un operador que trabaja de manera similar al laplaciano, no obstante esta propuesta tiene la desventaja de no considerar el fondo de la imagen dentro de la medida. Partiendo de este punto y de que en (Jiménez *et al.*, 2009) se propuso un operador que permite obtener el fondo de la imagen a diferentes escalas (*multibackground* en inglés); en la presente investigación se introduce un índice de contraste que indica cual de las imágenes procesadas por cierto operador presenta el mejor contraste visual. Dicho operador basa su funcionamiento en la ley de Weber y considera el fondo de la imagen. El índice propuesto utiliza solamente operadores morfológicos, además de ser simple de implementar y de aplicar.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta una breve descripción acerca de algunas transformaciones morfológicas, la ley de Weber y un mapeo de contraste. En la sección 3 se muestra la aproximación al fondo de la imagen por medio de la erosión de la apertura por reconstrucción. En la sección 4 se introduce el índice para cuantificar el contraste. En la sección 5 se presenta un ejemplo donde se calcula el índice propuesto para un conjunto de imágenes y se realiza la comparación con otras medidas reportadas en la literatura. La sección 6 corresponde a las conclusiones.

## 2 Transformaciones morfológicas y ley de Weber

La MM es una metodología de procesamiento de imágenes que surge a finales de los años 60 en Francia (Serra, 1982). La descripción básica de la MM se apoya en la teoría de conjuntos, es decir, toda operación morfológica es el resultado de una o más operaciones de conjuntos (unión, intersección, complementación, etc.). Las transformaciones en MM utilizan un conjunto geométrico conocido como elemento de estructura, el cual posee forma, tamaño definido a priori y un origen. El elemento de estructura se traslada sobre la imagen bajo estudio con la finalidad de determinar el conjunto de puntos,

respecto al origen del elemento de estructura, que intervendrán en cada operación que se efectúe con las componentes de la imagen.

La forma que adquiere el elemento de estructura puede ser variada, por ejemplo, en el caso bidimensional, puede ser un disco, un cuadrado, una línea recta, entre otros. En el caso tridimensional se definen diferentes clases de poliedros, por ejemplo, el cubo, el prisma hexagonal, etc. La talla del elemento de estructura se denota como  $\mu$  o  $\lambda$ , los cuales son un factor de tamaño que determina la dimensión de la estructura geométrica de  $B$ . En este artículo se usa un elemento de estructura cuadrado  $B$  de  $3 \times 3$  píxeles, el cual contiene su origen en el centro, es decir, un elemento de estructura simétrico. También se define  $\bar{B} = \{-x : x \in B\}$  como el conjunto transpuesto de  $B$  respecto a su origen.

A continuación se presentan algunas definiciones de ciertas transformaciones morfológicas extendidas a niveles de gris.

### 2.1 Operadores morfológicos básicos: erosión y dilatación

La erosión morfológica está dada por el conjunto de los orígenes de  $B$  siempre que  $B$  está incluido en el conjunto  $X$ . Cuando esto no ocurre el resultado de la erosión es el conjunto vacío. La definición anterior puede extenderse directamente al caso de imágenes en escala de grises. La erosión de una imagen  $f$  por un elemento de estructura  $B$  se denota por  $\varepsilon_{\mu B}(f)(x)$  y se define como:

$$\varepsilon_{\mu B}(f)(x) = \wedge \{f(x) : x \in \mu \bar{B}_x\} \quad (1)$$

Donde,  $\wedge$  es el operador ínfimo, que en el caso práctico corresponde al elemento mínimo del conjunto analizado. La dilatación  $\delta_{\mu B}(f)(x)$  es la operación dual de la erosión  $\varepsilon_{\mu B}(f)(x)$ , es decir:

$$\delta_{\mu B}(f)(x) = (\varepsilon_{\mu B}(f^c)(x))^c \quad (2)$$

Donde  $c$  es el operador complemento. Las transformaciones morfológicas que cumplen con las propiedades de ser crecientes e idempotentes también se conocen como filtros morfológicos (Serra, 1982; Soille, 2003; Heijmans, 1994). Los filtros morfológicos básicos son la apertura  $\gamma_{\mu B}(f)(x)$  y el cierre

$\varphi_{\mu B}(f)(x)$  usando un elemento de estructura dado. Formalmente, la apertura  $\gamma_{\mu B}(f)(x)$  y el cierre  $\varphi_{\mu B}(f)(x)$  morfológicos se expresan como sigue:

$$\gamma_{\mu B}(f)(x) = \delta_{\mu B}(\varepsilon_{\mu B}(f))(x) \quad (3)$$

$$\varphi_{\mu B}(f)(x) = \varepsilon_{\mu B}(\delta_{\mu B}(f))(x) \quad (4)$$

## 2.2 Apertura y cierre por reconstrucción

Para algunas aplicaciones de análisis de imágenes es conveniente restringir el campo de acción de una transformación a ciertas regiones de interés. Esta idea dio origen a una nueva clase de transformaciones conocidas como geodésicas. A diferencia de las transformaciones morfológicas que actúan sobre toda la imagen, las geodésicas sólo actúan sobre alguna parte de la imagen, es decir, sobre un subconjunto denominado máscara geodésica. Las transformaciones por reconstrucción se obtienen a partir de las transformaciones geodésicas, y son filtros que permiten modificar los mínimos y máximos de la imagen sin cambiar considerablemente la estructura de las demás componentes (Serra y Salembier, 1993), (Serra y Salembier, 1995), (Vincent, 1993).

La dilatación geodésica  $\delta_f^1(g)$  y la erosión geodésica  $\varepsilon_f^1(g)$  de tamaño uno están definidas como  $\delta_f^1(g) = f(x) \wedge \delta(g)$  con  $g(x) \leq f(x)$  y  $\varepsilon_f^1(g) = f(x) \vee \varepsilon(g)$  con  $g(x) \geq f(x)$ , respectivamente. Cuando la función  $g(x) = \varepsilon(f)$  (o  $g(x) = \delta(f)$ ), se obtiene la apertura  $\tilde{\gamma}_{\mu B}(f)$  (o cierre  $\tilde{\varphi}_{\mu B}(f)$ ) por reconstrucción, es decir:

$$\tilde{\gamma}_{\mu B}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_f^n(\varepsilon_{\mu B}(f)) \quad (5)$$

$$\tilde{\varphi}_{\mu B}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_f^n(\delta_{\mu B}(f))$$

## 2.3 El gradiente

El gradiente es una medida de cambio en una función, y una imagen puede considerarse como un arreglo de muestras de alguna función continua dada en términos de los niveles de intensidad de la imagen

Por analogía, los cambios significativos en los valores de gris en una imagen pueden ser detectados mediante una aproximación discreta del gradiente. A continuación se presenta la definición del gradiente morfológico (Rivet *et al.*, 1992):

$$gradm_{\mu B}f(x) = \delta_{\mu B}(f)(x) - \varepsilon_{\mu B}(f)(x) \quad (6)$$

## 2.4 Mapeo de contraste

Un mapeo de contraste selecciona para cada punto de la imagen un valor de nivel de gris entre los diferentes patrones (primitivas) utilizados de acuerdo a un criterio de proximidad. A continuación se presenta el criterio de proximidad  $\rho(x)$  ( $\rho(x) \in [0,1]$ ) junto con un mapeo de contraste de tres estados (Serra, 1988b), (Meyer y Serra, 1989):

$$\rho(x) = \frac{\varphi_{\mu_1}(f)(x) - f(x)}{\varphi_{\mu_1}(f)(x) - \gamma_{\mu_2}(f)(x)} \quad (7)$$

el mapeo está definido como:

$$W_{\mu_1, \mu_2, \alpha, \beta}^3(f)(x) = \begin{cases} \varphi_{\mu_1}(f)(x) & 0 \leq \rho(x) < \alpha \\ f(x) & \alpha \leq \rho(x) < \beta \\ \gamma_{\mu_2}(f)(x) & \beta \leq \rho(x) \leq 1 \end{cases} \quad (8)$$

Cuando el nivel de gris del cierre es igual al de la imagen original el valor del criterio es igual a 0, mientras que cuando el valor del nivel de gris de la apertura es igual al de la imagen original, el criterio tiene valor 1. En la ecuación 8 note que  $\mu_1$  y  $\mu_2$  representan el elemento de estructura para la apertura y el cierre respectivamente, mientras que  $\alpha$  y  $\beta$  definen el intervalo  $[\alpha, \beta]$  para el mapeo de contraste. El problema a resolver en algunos trabajos recientes consiste en encontrar los valores adecuados de  $\alpha$ ,  $\beta$  y de  $\mu_1, \mu_2$  tales que la imagen de salida presente un mejor contraste (Mendiola y Terol, 2002).

## 2.5 Ley de Weber

La ley de Weber es una ley bien conocida relacionada directamente con el estudio de la percepción (Jain, 1989). Ernst Heinrich Weber formuló esta ley que establece lo siguiente: “*El incremento en la intensidad del estímulo necesario*

para provocar un cambio en la sensación es proporcional a la intensidad del estímulo inicial<sup>p</sup>.

Matemáticamente la ley de Weber se representa como sigue:

$$dp = k \frac{dS}{S}$$

donde  $dp$  corresponde al cambio percibido en el estímulo  $S$ ,  $dS$  corresponde al cambio de magnitud del estímulo y  $k$  es una constante.

Integrando la ecuación anterior se obtiene que:

$$p = k \log S + Cte$$

El parámetro  $Cte$  se obtiene cuando  $p=0$  y  $S=S_0$  en la ecuación anterior, con  $S_0$  el nivel de estímulo por debajo del cual no se percibe sensación, es decir:

$$Cte = -k \log S_0$$

por lo tanto,

$$p = k \log S - k \log S_0 = \log\left(\frac{S}{S_0}\right) \quad (9)$$

La ley de Weber se utiliza en estudios psicovisuales para medir el contraste percibido  $C$ . El contraste  $C$  de un objeto con luminancia  $L_{\max}$  y luminancia de sus alrededores  $L_{\min}$  es definida como sigue (Peli, 1990):

$$\Delta C = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\min}}$$

Si  $L = L_{\min}$  y  $\Delta L = L_{\max} - L_{\min}$ , la ecuación anterior puede reescribirse como:

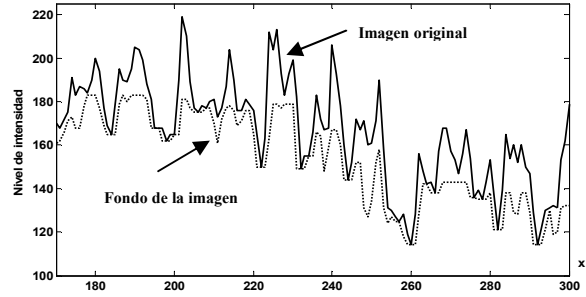
$$\Delta C = \frac{\Delta L}{L} \quad (10)$$

Aplicando la ley de Weber, el contraste percibido  $C$  puede expresarse como sigue (Jain, 1989):

$$C = k \log L + b, \text{ y } L > 0 \quad (11)$$

Donde  $k$  y  $b$  son constantes, siendo  $b$  el fondo de la imagen. Con base en lo anterior, es importante notar que se requiere del parámetro  $b$  para dar una estimación más precisa del contraste.

### 3. Fondo de la imagen



**Fig. 1.**-Representación gráfica de parte de una imagen y aproximación al fondo de la misma mediante la ecuación 12.

En (Jiménez-Sánchez *et al.*, 2009) se hace una propuesta para obtener una aproximación al fondo de la imagen utilizando transformaciones morfológicas. Las curvas generadas por tal operador tienen la característica de tocar los mínimos regionales, además de poder controlar la profundidad con el parámetro de tamaño  $\lambda$ . La ecuación para calcular el fondo de la imagen es:

$$b = \varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_\lambda(f)] \quad (12)$$

Donde  $b$  representa el fondo de la imagen,  $\varepsilon_1$  es el erosionado tamaño 1 de la apertura por reconstrucción  $\tilde{\gamma}_\lambda(f)$  tamaño  $\lambda$  y  $f$  representa a la imagen de entrada. En la figura 1 se ilustra la idea de detección del fondo de la imagen usando la ecuación 12. Sustituyendo la ecuación 12 en la 11 se obtiene:

$$C[f(x)] = k \log L + \varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_\lambda(f)](x), \text{ } L > 0 \quad (13)$$

Debido a que el valor máximo de intensidad en las imágenes procesadas en este trabajo es 255, se propone detectar los valores del contraste de la imagen procesada en el intervalo  $0 < C \leq 255$ . De esta forma, el valor de  $k$  en la ecuación 13 se obtendrá de la siguiente manera:

$$k[f](x) = \frac{255 - \varepsilon_1 [\tilde{\gamma}_\lambda(f)](x)}{\log(255)} \quad (14)$$

### 4. Índice de contraste



La ecuación 13 se usa en esta sección para introducir un método para cuantificar el contraste usando operadores morfológicos. Considere una imagen procesada por un operador y un elemento de estructura cuadrado  $\mu B_x$  con su origen en el centro. Para cada conjunto de píxeles cubiertos por el elemento de estructura se consideran los elementos máximo y mínimo, esto es  $I_{\max}(\mu B_x)$  e  $I_{\min}(\mu B_x)$ , de tal manera que una aproximación al parámetro  $L$  en la ecuación 13 puede expresarse como:

$$L = \frac{I_{\max}(\mu B_x)}{I_{\min}(\mu B_x)} \quad (15)$$

con  $I_{\max}(\mu B_x) \neq 0$  e  $I_{\min}(\mu B_x) \neq 0$ . Nótese que el parámetro  $L$  es detectado localmente. Sustituyendo la expresión 15 en la 13 se obtiene la siguiente ecuación:

$$C_{\mu,\lambda}(f)(x) = k \log\left(\frac{I_{\max}(\mu B_x)}{I_{\min}(\mu B_x)}\right) + \varepsilon_1[\tilde{\gamma}_{\lambda B}(f)](x) \quad (16)$$

Con  $I_{\max}(\mu B_x) \neq 0$  e  $I_{\min}(\mu B_x) \neq 0$

Debe notarse que los valores de  $I_{\max}(\mu B_x)$  e  $I_{\min}(\mu B_x)$  pueden ser sustituidos por  $\delta_{\mu B}(f)(x)$  y  $\varepsilon_{\mu B}(f)(x)$  respectivamente en el punto  $x$ . Esto se debe a que en los filtros de orden, la erosión y dilatación morfológicas se obtienen de esta manera (Maragos y Schafer, 1987), por lo tanto  $I_{\max}(\mu B_x) = \delta_{\mu B}(f)(x)$  e  $I_{\min}(\mu B_x) = \varepsilon_{\mu B}(f)(x)$ , entonces

$$C_{\mu,\lambda}(f)(x) = k \log\left(\frac{\delta_{\mu B}(f)(x)}{\varepsilon_{\mu B}(f)(x)}\right) + \varepsilon_1[\tilde{\gamma}_{\lambda B}(f)](x) \quad (17)$$

Con  $\varepsilon_{\mu B}(f) \neq 0$  y  $\delta_{\mu B}(f) \neq 0$

El operador gradiente ha sido definido en la ecuación 6, considerando que  $\log(\delta_{\mu B}(f)) = \delta_{\mu B}(\log(f))$  y  $\log(\varepsilon_{\mu B}(f)) = \varepsilon_{\mu B}(\log(f))$  (Serra, 1992), la ecuación 17 se escribe como:

$$C_{\mu,\lambda}(f)(x) = k \text{grad}_{\mu}(\log(f))(x) + \varepsilon_1[\tilde{\gamma}_{\lambda B}(f)](x) \quad (18)$$

Con  $f(x) \neq 0$ . Para tener un índice global del contraste de la imagen, se considera la suma de los valores de

$C_{\mu,\lambda}(f)(x)$  y se denotada como  $\Theta_{\mu,\lambda}$ :

$$\Theta_{\mu,\lambda} = k \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{grad}_{\mu}(\log(f))(x_{i,j}) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \varepsilon_1[\tilde{\gamma}_{\lambda B}(f)](x_{i,j}) \quad (19)$$

con  $f(x_{i,j}) \neq 0$

Donde  $f(x_{i,j})$  representa el valor de la intensidad en niveles de gris en el punto  $x_{i,j}$ , mientras que  $m$  y  $n$  denotan las dimensiones de la imagen. El parámetro  $k$  se especificó en la ecuación 14.

Posteriormente, la ecuación 19 se divide por el volumen de la imagen original  $\text{Vol}[f] = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} f(x_{i,j})$ ;

con esto se evita trabajar con números grandes del contraste global. De esta manera, el índice de contraste  $X_{\mu,\lambda}$  se obtiene a partir de la ecuación 20.

$$X_{\mu,\lambda} = \frac{\Theta_{\mu,\lambda}}{\text{Vol}[f]} \quad (20)$$

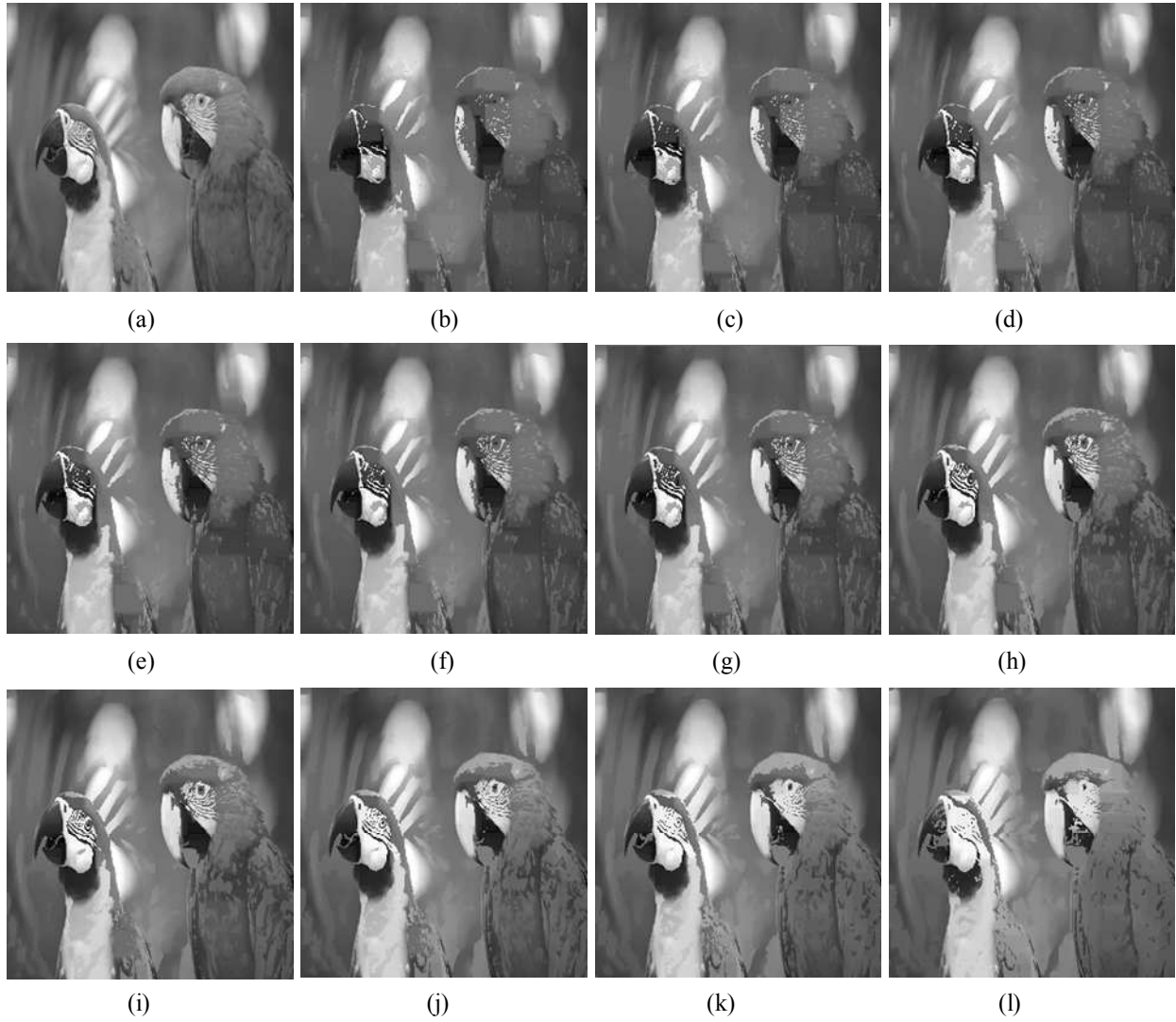
## 5 Experimentos

Se utilizará la Fig. 2 para determinar la imagen con mejor contraste. La imagen original se encuentra en la Fig. 2(a), mientras que las imágenes en las figuras 2(b)-2(l) se obtuvieron a través del mapeo de contraste definido en la ecuación 8 considerando los valores mostrados en la tabla 1.

Se consideran los siguientes valores para los parámetros del mapeo de contraste:  $\mu_1=12$  y  $\mu_2=9$ . En este ejemplo la elección de los valores de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son grandes y diferentes para poder observar mejor el desempeño del mapeo de contraste. Los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  se obtuvieron de la siguiente manera: se considera un intervalo de valores entre 0 y 255. Como  $\alpha$  y  $\beta$  deben tomar valores entre 0 y 1, se aplicó una regla de 3, considerando que el valor de 1 corresponde a 255.

Además, se tomaron incrementos de  $\alpha$  y  $\beta$  de 10 unidades. También observe que  $\alpha$  y  $\beta$  toman valores diferentes para cada mapeo de contraste.

Una vez determinados los valores que se involucran en cada mapeo, la imagen de la Fig. 2(a) se modifica,



**Fig 2.** (a) Imagen original, (b)-(l) Imágenes obtenidas al aplicar el mapeo de contraste definido en la ecuación 8 utilizando los parámetros que se muestran en la tabla 1.

**Tabla 1.** Parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ 

Imagen	$\alpha$	$\beta$	$\mu_1$	$\mu_2$
2 (b)	0	0.039	12	9
2 (c)	0.039	0.078	12	9
2 (d)	0.078	0.117	12	9
2 (e)	0.117	0.156	12	9
2 (f)	0.156	0.196	12	9
2 (g)	0.196	0.235	12	9
2 (h)	0.313	0.352	12	9
2 (i)	0.431	0.470	12	9
2 (j)	0.549	0.588	12	9
2 (k)	0.666	0.705	12	9
2 (l)	0.823	0.862	12	9

**Tabla 2.** Valores del parámetro  $X_{\mu,\lambda}$  para las imágenes de la Fig. 2

Imagen	$X_{\mu,\lambda}$
2 (b)	0.6183
2 (c)	0.5956
2 (d)	0.6070
2 (e)	0.6191
2 (f)	0.6242
2 (g)	0.6279
2 (h)	0.6341
2 (i)	0.6422
2 (j)	0.6427
2 (k)	0.6281
2 (l)	0.6001

y se obtiene el conjunto de imágenes que se muestran en las figuras 2(b)-2(l). Posteriormente se calcula el índice de contraste  $X_{\mu,\lambda}$  para las imágenes de las Figs. 2(b)-2(l), los valores respectivos se muestran en la tabla 2.

Los valores de la tabla 2 se compararán con otros valores obtenidos por medio de dos métodos para cuantificar el contraste, el primer método fue introducido en (Morrow *et al.*, 1992), mientras que el segundo método fue propuesto en (Rizzi *et al.*, 2004), (Rizzi *et al.*, 2008).

a) *Cuantificación de contraste basada en el análisis del histograma.* En (Morrow *et al.*, 1992) la medida de contraste se obtiene al aplicar la ecuación 21, seguida de una cuantificación del ancho del histograma considerando el segundo momento alrededor del nivel de contraste 0. El segundo momento M2 está dado por la ecuación 22, la cual se muestra a continuación.

$$C = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\max} + L_{\min}} \quad (21)$$

$$M2 = \sum_{i=1}^N C_i^2 p(C_i) \quad (22)$$

Donde  $L_{\max}$  y  $L_{\min}$  son las máxima y mínima luminancias en la región analizada,  $p(C_i)$  es el número normalizado de ocurrencias del píxel con contraste  $C_i$ .

Para evaluar el contraste de manera local en la imagen procesada, se emplea un elemento de estructura  $\mu B_x$  que al estar centrado en un punto  $x$  de la imagen se localizan  $I_{\max}(\mu B_x) = L_{\max}$  e  $I_{\min}(\mu B_x) = L_{\min}$  al considerarse una aproximación a la luminancia como el nivel de gris de cada píxel.

Posteriormente, el contraste se evalúa al usar la ecuación 21, y finalmente se calcula M2 a partir de la ecuación 22. En la tabla 3 se muestran los valores de M2 calculados para las imágenes de la Fig. 2.

**Tabla 3.** Valores del parámetro M2 para las imágenes de la Fig. 2

Imagen	M2
2 (b)	6.39e-5
2 (c)	5.35e-5
2 (d)	6.57e-5
2 (e)	6.95e-5
2 (f)	7.2e-5
2 (g)	7.41e-5
2 (h)	7.63e-5
2 (i)	8.08e-5
2 (j)	8.32e-5
2 (k)	8.40e-5
2 (l)	8.2e-5

b) *Cuantificación del contraste basado en el promedio de diferencias.* Los pasos a seguir para medir el contraste en imágenes digitales usando el método propuesto por Rizzi *et al.* (2004,2008) se presentan a continuación:

i) *Obtener una pirámide de imágenes submuestreadas.* En nuestro caso particular, las imágenes utilizadas fueron de los siguientes tamaños: 205×205, 154×154 y 103 ×103, partiendo de una imagen original de tamaño 256×256.

ii) *Para cada imagen del inciso i) se calcula la suma del valor absoluto de la diferencia de cada píxel*

de la imagen con sus 8 vecinos. La suma final se divide por el tamaño de la imagen procesada. El resultado en este paso es el contraste global de la imagen analizada.

iii) El contraste total es el promedio de los contrastes globales obtenidos para la imagen original y las imágenes submuestreadas.

La siguiente expresión resume los pasos anteriores (Rizzi *et al.*, 2004), (Rizzi *et al.*, 2008):

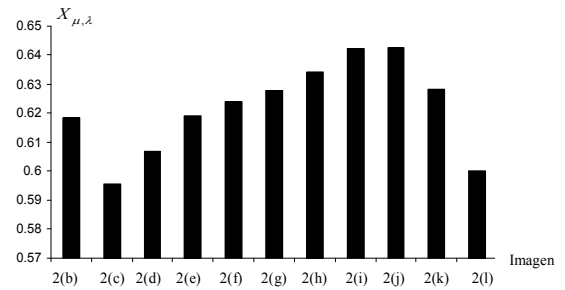
$$C = \sum_{\forall \text{nivel}} \left[ \frac{\sum_{\forall \text{pixel}} \left[ \frac{\sum_{8\text{-vecinos}} \frac{|P_i - P_j|}{8}}{\# \text{pixeles}} \right]}{\# \text{niveles}} \right] \quad (23)$$

El resultado de aplicar la ecuación 23 al conjunto de imágenes de la Fig. 2 se muestra en la tabla 4. Para comparar los resultados de las tablas 2, 3 y 4 se presentan sus gráficas respectivas en la Fig. 3.

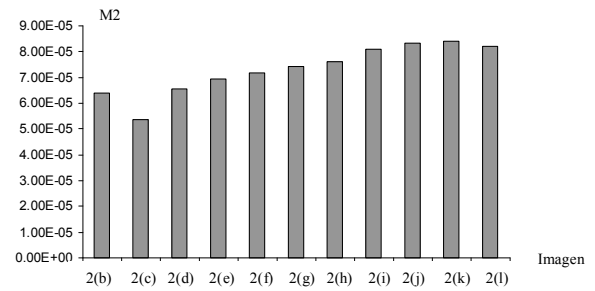
Observe en las gráficas de la Fig. 3 que la imagen con un mejor contraste utilizando el índice  $X_{\mu,\lambda}$  corresponde a la imagen 2(j), mientras que las medidas M2 y C revelan que la imagen 2(k) es la imagen con mejor contraste.

**Tabla 4.** Medida del contraste usando la ecuación 23

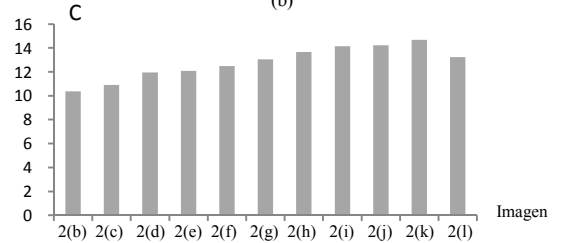
Imagen	C
2 (b)	9.46
2 (c)	10.37
2 (d)	10.89
2 (e)	11.93
2 (f)	12.07
2 (g)	12.48
2 (h)	13.03
2 (i)	13.66
2 (j)	14.15
2 (k)	14.23
2 (l)	13.22



(a)



(b)



(c)

**Fig 3.** (a) Gráfica de los valores de la tabla 2 correspondiente al índice de contraste  $X_{\mu,\lambda}$ , (b) Gráfica de los valores de la tabla 3 correspondiente al parámetro M2, (c) Gráfica de los valores de la tabla 4 correspondiente al parámetro C.

Establecer de manera perceptual cul contraste es mejor entre las imágenes 2(j) y 2(k) no es sencillo. Sin embargo, analizando las gráficas en la Fig. 3 se puede determinar lo siguiente. En la Fig. 3(a) se encuentra que la imagen 2(j) posee importantes cambios de intensidad entre los contornos y las regiones alrededor de ellos, ya que tiene el valor más alto de contraste. Note que la imagen original en 2(a) es modificada por un mapeo, el cual realza el contraste a través de los valores de la apertura, del cierre y de la imagen original de acuerdo al criterio de proximidad. El comportamiento de la curva en la gráfica 3(a) indica que existen cambios importantes en la intensidad de los píxeles a medida que se realiza

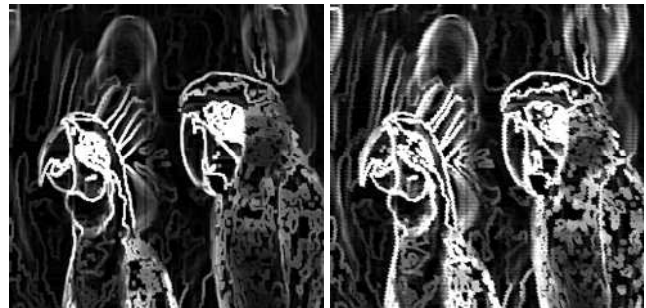
el contraste en la imagen procesada y se obtiene que las dos imágenes con mejor contraste son las imágenes en las Figs. 2(j) y 2(k). Posteriormente debido al comportamiento del mapeo de contraste se van fusionando las regiones por lo que la cantidad de contornos disminuye. Debido a este comportamiento del mapeo de contraste, las propuestas dadas en (Morrow *et al.*, 1992) y (Rizzi *et al.*, 2004), (Rizzi *et al.*, 2008) detectan que la mejor imagen es aquella donde existen esas regiones planas y que tienen importantes cambios en las intensidades de los píxeles de la imagen. Esta situación se ilustra en la Fig. 4, donde pueden observarse como resaltan mejor los contornos de la imagen que fue detectada por el índice  $X_{\mu,\lambda}$ , Fig. 2(j), M2 y C, Fig. 2(k). Note que los contornos son más gruesos en la Fig. 4(b) que en la Fig. 4(a).

De esta manera, al observar los contornos de las imágenes en la Fig. 4, se concluye que los contornos están mejor preservados en la Fig. 4(a) que en la Fig. 4(b). Esta diferencia es un criterio que permite determinar que la imagen en la Fig. 2(j), presenta un mejor contraste.

## 6 Conclusiones

En este trabajo se presentó un índice de contraste basado en la ley de Weber, el cual se implementó a través de operadores morfológicos de uso común.

Dicho índice involucra a los contornos y al fondo de la imagen. Los contornos se obtuvieron a través del gradiente morfológico, mientras que el fondo de la imagen se detectó mediante la erosión de la apertura por reconstrucción. Finalmente la propuesta dada en este trabajo se comparó con dos medidas de contraste reportadas en la literatura. El resultado de la comparación es que no es simple decir cual imagen es mejor visualmente, ya que ambas imágenes detectadas por los dos métodos presentan un buen realce en el contraste; sin embargo, al visualizar los contornos es posible tener un criterio para elegir la imagen con mejor contraste, y que en el ejemplo dado corresponde a la imagen detectada por el índice de contraste propuesto en este trabajo.



**Fig 4.** (a) Contornos de la imagen de la Fig. 2(j), parámetro  $X_{\mu,\lambda}$ ; (b) Contornos de la imagen en la Fig. 2(k), parámetros M2 y C.

## Agradecimientos

Los autores Angélica Jiménez Sánchez e Israel Santillan agradecen a CONACyT por la beca de doctorado otorgada.

## Referencias

1. **Agaian, SS, Panetta, K, y Grigoryan, AM,** "Transform-based image enhancement algorithms with performance measure", *IEEE Transactions on Image Processing*, **10**, pp.367-382, (2001).
2. **Beghladi, A, y Negrate, AL,** "Contrast enhancement technique based on local detection of edges", *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, **46**, pp. 162-274, (1989).
3. **Gordon, R, y Rangayan, RM,** "Feature enhancement of film mammograms using fixed and adaptive neighbourhoods", *Applied Optics*, **23**, pp.560-564, (1984).
4. **Heijmans, H,** "Morphological image operators", *Academic Press, USA*, (1994).
5. **Jain, AK,** "Fundamentals of digital images processing", *Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall*, pp.51-52, (1989).
6. **Jiménez-Sánchez, AR, Mendiola-Santibáñez, JD, Terol-Villalobos, IR, Herrera-Ruiz, G, Vargas-Vázquez, D, García-Escalante, J J, Lara-Guevara, A,** "Morphological background detection and

- enhancement of images with poor lighting”, *IEEE Transactions on Image Processing*, **18** (3), pp.613-623, (2009).
7. **Kim, JK, Park, JM., Song, KS, y Park, HW**, “Adaptive mammo-graphic image enhancement using first derivative and local statistics”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **16**, pp.495–502, (1997).
  8. **Maragos, P, y Schafer, R**, “Morphological filters—Part II: their relations to median, order-statistic, and stack filters”, *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, **35**, pp.1170–1184, (1987).
  9. **Meyer, F, y Serra, J**, “Contrast and Activity Lattice”, *Signal Process*, **16**, pp.303-317, (1989).
  10. **Mendiola-Santibáñez, JD, y Terol-Villalobos, IR**, “Mapeos de contraste morfológicos sobre particiones basados en la noción de zona plana”, *Computación y sistemas*, **6** (6), pp.25-37, (2002).
  11. **Mendiola-Santibáñez, JD, Herrera-Ruíz, G, Terol-Villalobos, IR, y Fernández-Bouzas, A**, “Morphological contrast measure and contrast enhancement: one application to the segmentation of brain mri”, *Signal Processing*, **87**(9), pp.2125–2150, (2007).
  12. **Morrow, WM, Paranjape, R B, Rangayyan, RM, y De-Sautels, JE**, “Region-based contrast enhancement of mammograms”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **11**, pp. 392–406, (1992).
  13. **Peli, E**, “Contrast in Complex Images”, *Journal of the Optical Society of America*, **7**, pp.2032-2040, (1990).
  14. **Rizzi, TA, Medeghini G, y Marini D**, “A proposal for contrast measure in digital images”, *In CGIV 2004 – Second European Conference on Color in Graphics, Imaging and Vision*, (2004).
  15. **Rizzi TA, Simone G, y Cordone R**, “A modified algorithm for perceived contrast measure in digital images”, *in CGIV*, (2008).
  16. **Rivest, J F, Soille, P, y Beucher, S**, “Morphological gradients”, *In E. Dougherty, J. Astola, and G. Boncelet, editors, Nonlinear image processing III, Society of Photo-Instrumentation Engineers*, **1658**, pp.139-150, (1992).
  17. **Serra, J**, “Mathematical Morphology Vol. I”, *London Academic*, (1982).
  18. **Serra, J**, “Image Analysis and Mathematical Morphology vol. II”, *Academic Press, New York*, (1988a).
  19. **Serra, J**, “Toggle mapings”, *Technical report N-18/88/MM, Centre de morphologie mathématique, ENSMP, Fontainebleau, France*, (1988b).
  20. **Serra, J**, “Anamorphoses and function lattices”, *in Mathematical Morphology in Image Processing, E. Dougherty, ed., Dekker, New York*, (1992).
  21. **Serra, J, y Salembier, P**, “Connected operator and pyramids”, *Proc. Of SPIE. Image Algebra and Mathematical Morphology’93, San Diego, Julio*, (1993).
  22. **Serra, J, y Salembier P**, “Flat zones filtering, connected operators and filters by reconstruction”, *IEEE Transactions on Image Processing*, **3**(8), pp.1153-1160, (1995).
  23. **Soille, P**, “Morphological image analysis: principle and applications”, *Springer-Verlag*, (2003).
  24. **Terol-Villalobos, IR**, “Nonincreasing filters using morphological gradient criteria”, *Optical Engineering*, **35**, pp.3172–3182, (1996).
  25. **Terol-Villalobos, IR, y Cruz-Mandujano JA**, “Contrast enhancement and image segmentation using a class of morphological nonincreasing filters”, *Journal of Electronic Imaging*, **7**, pp.641–654, (1998).
  26. **Terol-Villalobos, IR**, “Toggle mappings and some related transformations: a study of contrast enhancement”, *in: H.J.A.M. Heijmans, J.B.T.M. Roerdink (Eds.), Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands*, (1998).
  27. **Terol-Villalobos, IR**, “Morphological connected contrast mappings based on top-hat criteria: a multiscale contrast approach”, *Optical Engineering*, **43**(7), pp. 1577–1595, (2004).
  28. **Vincent, L**, “Morphological grayscale reconstruction in image analysis: applications and efficient algorithms”, *IEEE Transactions on Image Processing*, **2**(2), pp.176-201, (1993).



**Angélica R Jiménez-Sánchez** realizó sus estudios de licenciatura y maestría en Matemáticas aplicadas en la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ) en 2005 y 2007, actualmente realiza sus estudios de doctorado en esta misma institución. Es profesora-investigadora de la UAQ. Sus intereses en la investigación incluyen a la morfología matemática y visión por computadora.



**Jorge D Mendiola-Santibañez** recibió el grado de licenciado en electrónica por parte de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México y el grado de maestría en electrónica por parte del INAOE, México. El grado de doctor fue otorgado por la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), México. Actualmente es profesor-investigador en la UPQ y es miembro del sistema nacional de investigadores (SNI), México. Sus intereses en la investigación incluyen a la morfología matemática y visión por computadora.



**Gilberto Herrera-Ruiz** recibió el grado de doctor en ingeniería de la Academia Húngara de Ciencias en 1992. Sus intereses en la investigación incluyen el

procesamiento de imágenes, sistemas de manufactura, máquinas y herramientas, así como tecnologías para invernaderos. Actualmente es profesor-investigador en la Universidad Autónoma de Querétaro y es miembro del sistema nacional de investigadores (SNI) México.



**Israel Santillán** realizó sus estudios de licenciatura en el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey y la maestría en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, México. Actualmente realiza sus estudios de doctorado en esta misma institución. Es profesor-investigador de la UPQ y es miembro del sistema nacional de investigadores (SNI), México. Sus intereses en la investigación incluyen a la morfología matemática, y visión por computadora.