



Universidad Autónoma de Querétaro  
Facultad de Informática  
Maestría en Sistemas de Información

ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE TIPOS DE TRANSFORMADA WAVELET PARA SU USO EN  
RECONSTRUCCIÓN TRIDIMENSIONAL.

**TESIS**

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de  
Maestro en Sistemas de Información

**Presenta:**

Claudia Victoria López Torres

**Dirigido por:**

Dr. Jesús Carlos Pedraza Ortega

SINODALES

Dr. Jesús Carlos Pedraza Ortega  
Presidente

\_\_\_\_\_

Firma

Dr. Juan Manuel Ramos Arreguín  
Secretario

\_\_\_\_\_

Firma

Dr. Marco Antonio Aceves Fernández  
Vocal

\_\_\_\_\_

Firma

Dr. Efrén Gorrostieta Hurtado  
Suplente

\_\_\_\_\_

Firma

Dr. Saúl Tovar Arriaga  
Suplente

\_\_\_\_\_

Firma

**M. C. Ruth Angélica Rico Hernández**  
Directora de la Facultad

**Dr. Irineo Torres Pacheco**  
Director de Investigación y  
Posgrado

Centro Universitario  
Querétaro, Qro.  
Noviembre de 2012

**México**

## RESUMEN

Tomando en cuenta la importancia que hoy en día han adquirido las técnicas en reconstrucción 3D y las valiosas características con las que la Transformada Wavelet cuenta para el análisis de señales no estacionarias, se presenta el siguiente trabajo de investigación, el cual muestra un estudio comparativo entre los tipos diferentes de transformada Wavelet, determinando la transformada que nos brinda el mejor resultado para la reconstrucción 3D. Este trabajo de tesis parte de investigaciones anteriores como el método de perfilometría de Fourier que es el que, conjuntamente con la investigación realizada en 2007 y 2009 por el Dr. Pedraza, quien propuso una técnica de reconstrucción en 3D al hacer la comparación de dos técnicas (Fourier y Wavelet), nos da la pauta para que en esta investigación la técnica de la Transformada Wavelet sea implementada debido a que con ella es posible obtener la información de profundidad de los objetos. El tipo de transformadas wavelet implementado en la investigación fue el de las que más se utilizan en el proceso de reconstrucción 3D; proyectando en la imagen un número variado de franjas y obteniendo de esta forma resultados experimentales óptimos basados en la conjugación del número de franjas y el tipo de transformada implementada. Esta investigación involucró conceptos matemáticos, mostrando la parte continua y la parte discreta, además de la parte compleja; explicando también qué es un patrón de fase y la ecuación por la cual está dado, así como cuáles son los algoritmos de extracción de cresta y función de costos, descritos cada uno de ellos por su función dada. Como una etapa introductoria, esta investigación presenta los fundamentos de la wavelet madre, la cual es la base para dar origen a wavelets más complejas, tales como: la Morlet, la Shannon y la B-Spline. A continuación se expone la parte compleja de las transformadas ya mencionadas, y los resultados obtenidos con MatLab para cada una de las imágenes tanto digitales como reales.

A través de este análisis es posible obtener resultados que nos proveen elementos para determinar el mejor método para la reconstrucción 3D de procesamiento de imágenes. De esta manera se concluye qué transformada cubre eficientemente las características para obtener el resultado esperado, considerando el número de franjas proyectadas y la imagen usada.

**(Palabras Clave:** Perfilometría, Transformada Wavelet, Shannon, Morlet, B Spline.)

## SUMMARY

Taking into account the importance 3D reconstruction techniques have acquired and the valuable characteristics of the wavelet transform for non-stationary signal analysis, we present the following comparative study between different types of wavelet transforms, determining with this study the transform that provides the best outcome for 3D reconstruction. This thesis work builds on previous research such as the Fourier profilometry method, which gives us the pattern for how this technique is implemented, through which it is possible to obtain object depth information. The previous research was conducted in 2007 and 2009 by Dr. Pedraza, who proposed a 3D reconstruction technique comparing two techniques—Fourier and Wavelet. The type of wavelet transform implemented is one the most commonly used in the 3D reconstruction process. A number of fringes are projected on the image, and optimal experimental results are obtained based on the conjugation of the number of fringes and the type of transformation implemented. This research involved mathematical concepts showing the continuous, discrete, and complex parts, and explaining the phase pattern, the equation for which is given, and the peak extraction algorithms and cost functions, each described by its given function. The development of this research began with the introduction of the mother wavelet information, which is the base for more complex wavelets such as: the Morlet, the Shannon wavelet, and the B-Spline wavelet. We show the complex part of these transforms, showing the results obtained with MatLab for each of the digital and real images. Through this analysis it is possible to obtain results to determine the best method for 3D reconstruction image processing. We conclude showing which transform efficiently fulfills the characteristics to obtain the desired result, taking into account the number of projected fringes y the image used.

**(Key words:** Profilometry, Wavelet Transform, Shannon, Morlet, B Spline.)

## **DEDICATORIA**

**Dedico este trabajo al Dr. Kevin Kells con admiración, respeto y cariño.  
A mis padres, quienes me vieron dar los primeros pasos.**

## AGRADECIMIENTOS

A Dios, por su linda sonrisa y su tierna mirada.

A las personas que amo, gracias por existir y creer en mí.

A mi asesor, el Dr. Pedraza, por su paciencia y el apoyo que me brinda para que las cosas se vean más fáciles de lo que son.

*Hay dos modos fundamentales de saludar a la vida:  
uno es la aceptación y otro el reto.  
Los demás son meros compromisos entre ambos,  
o falsos equilibrios que resultan de su combinación.*

Dilucidaciones casuísticas, Alfonso Reyes

## ÍNDICE

Resumen	i
Summary	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Índice	v
Índice de tablas	vi
Índice de figuras	vii
I. Introducción	1
Definición del proyecto de investigación	1
Justificación	1
Objetivos	4
Alcances y limitaciones	4
Organización de la tesis	5
II. Procesamiento de imágenes	8
Antecedentes	8
Procesamiento digital de imágenes	10
Filtros, convolución y binarización	14
Técnicas de procesamiento de imágenes	20
III. Perfilometría de Wavelet	24
Técnicas de reconstrucción tridimensional	24
Transformada Wavelet	25
Método propuesto de perfilometría Wavelet	40
IV. Resultados experimentales	56
Objetos creados por computadora	56
Objetos reales	79
Validación de ambos métodos	84
V. Conclusiones y trabajo futuro	88
Trabajo Futuro	89
Referencias	90
Anexo I	93
Anexo II	95
Características de los equipos	95

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla</b>		<b>Página</b>
3.1	Familia de Wavelets	37
4.1	Error calculado Morlet	85
4.2	Tiempo de procesamiento equipo sony, usando Transformada Morlet	85
4.3	Tiempo de procesamiento equipo dell, usando Transformada Morlet	85
4.4	Error calculado Shannon	86
4.5	Tiempo de procesamiento equipo sony, usando Transformada Shannon	86
4.6	Tiempo de procesamiento equipo dell, usando Transformada Shannon	86
4.7	Error calculado B-Spline	87
4.8	Tiempo de procesamiento equipo sony, usando Transformada B-Spline	87
4.9	Tiempo de procesamiento equipo dell, usando Transformada B-Spline	87

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura</b>		<b>Página</b>
2.1	Pasos fundamentales en el procesamiento digital de imágenes	21
3.1	Índice de Semejanza de la señal en comparación con la Transformada Wavelet.	31
3.2	Transformada Wavelet “Mexican Hat”	35
3.3	Transformada Wavelet Morlet	36
3.4	Transformada Wavelet Daubechies	36
3.5	Método WTP modificado incluyendo el análisis de desdoblamiento de fase.	38
3.6	Ejemplos de Transformadas Wavelets madre (a) Haar, (b) Paul, (c) Shannon, (d) Gaussiana primera derivada, (e) B-spline, (f) Morlet	42
3.7	Transformadas Wavelets Complejas: (a) Morlet, (b) Shannon, (c) B-Spline, (d) Gaussiana.	48
3.8	Wavelet B-Spilne Compleja	54
3.9	Wavelet Shannon Compleja	55
4.1	Transformada Morlet 8 franjas	57
4.2	Transformada Morlet 16 franjas	58
4.3	Transformada Morlet 32 franjas	59
4.4	Transformada Morlet 64 franjas	60
4.5	Transformada Morlet 128 franjas	61
4.6	Transformada B-Spline 8 franjas	62
4.7	Transformada B-Spline 16 franjas	62
4.8	Transformada B-Spline 32 franjas	63
4.9	Transformada B-Spline 64 franjas	63
4.10	Transformada B-Spline 128 franjas	64
4.11	Transformada Shannon 8 franjas	64



<b>Figura</b>		<b>Página</b>
4.12	Transformada Shannon 16 franjas	65
4.13	Transformada Shannon 32 franjas	65
4.14	Transformada Shannon 64 franjas	66
4.15	Transformada Shannon 128 franjas	66
4.16	Transformada Morlet 8 Franjas	67
4.17	Transformada Morlet 16 Franjas	68
4.18	Transformada Morlet 32 franjas	68
4.19	Transformada Morlet 64 franjas	68
4.20	Transformada Morlet 128 franjas	69
4.21	Transformada B-Spline 8 franjas	69
4.22	Transformada B-Spline 16 franjas	69
4.23	Transformada B-Spline 32 franjas	70
4.24	Transformada B-Spline 64 franjas	70
4.25	Transformada B-Spline 128 franjas	70
4.26	Transformada Shannon 8 franjas	71
4.27	Transformada Shannon 16 franjas	71
4.28	Transformada Shannon 32 franjas	71
4.29	Transformada Shannon 64 franjas	72
4.30	Transformada Shannon 128 franjas	72
4.31	Transformada Morlet 8 franjas	73
4.32	Transformada Morlet 16 franjas	73
4.33	Transformada Morlet 32 franjas	74
4.34	Transformada Morlet 64 franjas	74
4.35	Transformada Morlet 128 franjas	74
4.36	Transformada Shannon 8 franjas	75
4.37	Transformada Shannon 16 franjas	75
4.38	Transformada Shannon 32 franjas	75
4.39	Transformada Shannon 64 franjas	76

<b>Figura</b>		<b>Página</b>
4.40	Transformada Shannon 128 franjas	76
4.41	Transformada B-Spline 8 franjas	76
4.42	Transformada B-Spline 16 franjas	77
4.43	Transformada B-Spline 32 franjas	77
4.44	Transformada B-Spline 64 franjas	77
4.45	Transformada B-Spline 128 franjas	78
4.46	Transformada Morlet 32 franjas	79
4.47	Transformada Shannon 32 franjas	80
4.48	Transformada B-Spline 32 franjas	81
4.49	Transformada Morlet 32 franjas	82
4.50	Transformada Shannon 32 franjas	83
4.51	Transformada B-Spline 32 franjas	84

## **1. INTRODUCCIÓN**

El presente trabajo tiene como objetivo realizar el comparativo de tres tipos diferentes de transformadas wavelets usando la metodología denominada perfilometría Wavelet 1D, la cual consta de 6 pasos y nos permitirá aplicar los tipos de Transformada Wavelet a analizar para obtener cuál de ellas cumple mejor el proceso de reconstrucción tridimensional, permitiéndonos, con base en las propiedades de dichas transformadas, obtener un resultado funcional para nuestro trabajo de investigación.

### **Definición del proyecto de investigación**

Tomando en cuenta que la transformada de Fourier no es una función adecuada para el análisis no estacionario de las señales en los patrones de franjas, y además considerando que el análisis de Fourier, presenta signos de inestabilidad con respecto a la perturbación en la aplicación de dichas señales, propongo en esta investigación el uso de la Transformada Wavelet, la cual se ha convertido en una valiosa herramienta para el análisis de las señales no estacionarias por sus propiedades de multi-resolución tanto en su dominio del tiempo así como de la frecuencia.

El uso de la Transformada Wavelet hace que los problemas de resolución encontrados en otras transformadas sean reducidos. Este análisis permite que la proyección de una imagen o señal de una familia de funciones elementales obtenidas por translación o dilatación de origen a una simple función llamada wavelet madre.

### **Justificación**

La reconstrucción 3D de objetos utilizando procesamiento digital de imágenes utiliza los siguientes métodos:

*Activos.* Este método también se conoce como de contacto, en el cual se emite alguna clase de la radiación y discernen su reflejo para tentar un objeto o el ambiente. Los tipos posibles de la radiación usada incluyen la luz, ultrasonido o radiografía.

*Pasivos.* A este método se le conoce como de no contacto, debido a que no se emite ninguna clase de radiación, sino que detecta la radiación reflejada del ambiente. El procedimiento es detectar la luz visible porque es una radiación ya disponible en el ambiente. Otros tipos de radiación, tal como el infrarrojo, podrían ser utilizados también. Los métodos pasivos pueden ser muy baratos ya que en la mayoría de los casos estos no necesitan hardware particular.

Ahora bien, dentro de los métodos activos que utilizan proyección de franjas, podemos encontrar aquellos que utilizan la transformada de Fourier (perfilometría de Fourier) y la transformada Wavelet (perfilometría Wavelet).

El método de perfilometría de Fourier (FTP) es uno de los algoritmos más importantes dentro del conjunto de técnicas que existen para la adquisición de imágenes 3D. El Método pasivo, basado en medición de fase, fue desarrollado a principios de los años 80's por Mitsuo Takeda y Kazuhiro Mutoh (Takeda M. and Mutoh K., 1983).

La idea básica del método consiste en proyectar un patrón de franjas sobre el objeto del que se quiere obtener su imagen; al grabar con una cámara la imagen de la escena obtenemos un patrón distorsionado que lleva consigo toda la información 3D del objeto particular (A. Asundi, Z. Wensen, 1998).

Además de la Transformada de Fourier, existen técnicas basadas en proyección de luz estructurada (franjas) que consideran a la Transformada Wavelet para la obtención de la información de profundidad de los objetos. Los trabajos más recientes en este campo se mencionan a continuación.

Paz en 2001 propuso algoritmos de filtrado basados en Transformada Wavelet –Daubechies–, los cuales suprimen el ruido en imágenes de resonancia magnética. Con la Transformada Wavelet se estima la potencia del ruido que presenta la señal y de esta forma es introducida a dichos algoritmos, los cuales disminuyen el nivel de ruido contenido en la señal.

Yagnik et al., en 2005 propusieron el desarrollo de la perfilometría wavelet utilizando la transformada Morlet, el cual era aplicado a la reconstrucción 3D de rostros, haciendo uso de una sola imagen. Dentro de su método, propuso el uso de filtrado pasa-baja para estimar la textura del rostro de la misma imagen.

Quan et al, en 2005 propusieron el uso de la Transformada Wavelet continua (CWT) para un conocimiento a priori de una distribución de densidad de patrón de franjas; este método de estimación de densidad de franjas está basado en una Transformada Wavelet continua, tanto para una señal unidimensional, como para una señal dimensional.

L.R. Watkins en 2006 propuso la técnica de la Transformada Wavelet continua (CWT) para la técnica óptica –interferometría– codificada como la fase de una variable periódica, tomando las propiedades de localización espacio-espacial- y frecuencia de las ondas utilizando el módulo máximo de la wavelet y obteniendo de forma instantánea la frecuencia de desplazamiento espacial de la franja.

Gdeisat et al, en 2006 propusieron una nueva técnica dimensional utilizando la transformada de wavelet continua (CWT) para la fase demoduladora de patrones de franjas propuesta, comparando este algoritmo con el de CWT unidimensional.

Finalmente en 2007 y 2009, Pedraza et al., propusieron una técnica de reconstrucción 3D utilizando y comparando dos técnicas (Fourier y Wavelet). Se consideró un método modificado en el caso de perfilometría de Fourier y Wavelet Morlet en el caso de perfilometría Wavelet 1D.

Como se podrá observar, en el análisis preliminar se utilizan algunas de las Transformadas Wavelet de manera unilateral, sin considerar a las demás. Por lo que la idea central de este proyecto de investigación es llevar a cabo un estudio comparativo de las transformadas wavelet más utilizadas en el proceso de reconstrucción tridimensional, utilizando proyección de franjas con la finalidad de detectar cuál es la transformada que nos proporciona la mejor opción para su implementación en computadora y posteriormente en algún sistema embebido.

## **Objetivos**

### ***Objetivo general***

Desarrollar un estudio comparativo sobre los tipos de Wavelets que existen en la técnica llamada perfilometría Wavelet.

### ***Objetivos parciales o específicos:***

- a) Desarrollar un estudio de las transformadas Wavelet existentes.
- b) Implementar el método de perfilometría Wavelet.
- c) Desarrollar un algoritmo de desdoblamiento de fase.
- d) Programar un algoritmo en Matlab.
- e) Caracterizar el método de perfilometría de Wavelet considerando las diferentes wavelets.
- f) Llevar a cabo diferentes experimentos con la finalidad de analizar resultados, realizar una comparación y validar el método.

## **Alcances y limitaciones**

### ***Resultados generales que se pretenden con el proyecto de investigación:***

- Uso y caracterización del método de perfilometría de Fourier.
- Digitalización de objetos creados en computadora utilizando perfilometría de Fourier.
- Digitalización de objetos reales utilizando perfilometría de Fourier.
- Desarrollo de un algoritmo de perfilometría Wavelet.
- Digitalización de objetos creados en computadora utilizando perfilometría Wavelet.
- Digitalización de objetos reales utilizando perfilometría Wavelet.
- Comparación entre los métodos de perfilometría de Fourier y Wavelet para llevar a cabo una validación de los métodos.
- Publicación de un artículo en un congreso internacional arbitrado.

## ***Participación en el proyecto de investigación***

La participación en el proyecto estará enfocada al análisis de tres diferentes tipos de Transformada Wavelet, –Morlet, Shannon y B-Spline–, considerando su naturaleza matemática; además de llevar a cabo una comparación compleja de estos tipos de Wavelet, se obtendrá el más apropiado en el tratamiento de las imágenes para reconstrucción tridimensional. Se utilizará como apoyo al desarrollo del trabajo la herramienta MatLab.

Se implementará el algoritmo de perfilometría Wavelet, considerando las transformadas analizadas anteriormente –Morlet, Shannon y B-Spline–, enfocándose en sus características matemáticas.

Como se mencionó en el punto anterior, la participación en el proyecto va desde el uso del método de perfilometría de Wavelet, su mejora e implementación en MatLab, tomando en cuenta la descripción matemática del proceso y la relación con el fenómeno físico para poder llevar a cabo la reconstrucción tridimensional de objetos.

Además, se desarrollará el algoritmo del método de perfilometría Wavelet, también utilizando MatLab y considerando las características matemáticas que describen la transformada Wavelet y su interpretación física.

Se llevarán a cabo diferentes experimentos con la finalidad de analizar los resultados, se realizarán comparaciones y se validarán ambos métodos. Los resultados obtenidos se podrán utilizar como base para el envío de diferentes publicaciones (congresos y revistas arbitradas).

## **Organización de la tesis**

La tesis consta de cinco capítulos y dos anexos; el capítulo I nos presenta la definición del proyecto, así como la justificación y objetivos. En este primer capítulo se desarrolla una breve explicación sobre el método de perfilometría de Fourier (FTP), siendo éste uno de los algoritmos más importantes desarrollado en los años 80's, y se introduce brevemente a la perfilometría Wavelet.

El capítulo II nos introduce al concepto del procesamiento de imágenes y la reconstrucción en 3D, el cual nos define el método óptico y el método digital que son las dos formas en las que una imagen puede ser procesada. La aplicación del proceso de imágenes se fundamenta en dos áreas principales descritas dentro de este capítulo: la calidad para la interpretación humana y el procesamiento de datos de la escena para la percepción de las máquinas de forma autónoma.

Este capítulo también muestra la transformada de Fourier como una función continua e integrable, brindándonos con esto las características que dicha función nos da para la reconstrucción 3D. Se explica brevemente el filtrado espacial de imágenes digitales y se define a cada una de las propiedades de Fourier, tales como separabilidad, rotación, simetría, entre otras; las cuales son importantes y necesarias para llevar a cabo los dos tipos de filtrado de paso alto y paso bajo.

En el capítulo III podemos encontrar información específica sobre la perfilometría Wavelet, describiendo la ventaja que este tipo de perfilometría tiene con respecto a la de Fourier; tomando en cuenta la característica más importante de la Transformada Wavelet, la cual es que no sólo es local en tiempo sino también en frecuencia, característica con la que la transformada de Fourier no cuenta, dándole con esto una ventaja a la Transformada Wavelet. Se describe las características generales de los diferentes sistemas de wavelets y sus fundamentos y se puntualiza, específicamente, en algunas de las Wavelets tales como la Daubechies, Morlet; entre otras, partiendo de la “wavelet madre”.

La metodología propuesta también es presentada dentro de este capítulo; en general es el capítulo III el que nos brinda una explicación extensa sobre la importancia de la transformada Wavelet y sus características útiles y por qué es utilizada como una opción óptima para la implementación del procesamiento de imágenes y la reconstrucción 3D.

Asimismo, con el desarrollo de las características de la familia de las wavelets dentro de este capítulo, se logró definir qué transformadas se utilizarían para brindar un mejor resultado en las pruebas realizadas en el capítulo IV.



En el capítulo IV se presentan los resultados experimentales del procesamiento de imágenes con la proyección de franjas mostrando las diferentes imágenes con la variación de franjas en cada una de ellas, implementadas en los tres tipos diferentes de wavelets que fueron seleccionadas para este estudio comparativo, permitiéndonos observar cuál es la mejor transformada de las tres elegidas para la reconstrucción.

El último capítulo concluye con el resultado, fundamentándose en las pruebas realizadas en el capítulo anterior.

## 2. PROCESAMIENTO DE IMÁGENES

El objetivo del procesamiento de imágenes es el mejoramiento del aspecto de la imagen, haciendo posible con esto resaltar detalles en ella que se requieren hacer notar; esta imagen puede haberse obtenido por diferentes medios tales como fotografía, medios electrónicos o por medio de monitores de televisión. Sin importar el medio de obtención de la imagen, ésta puede ser procesada de dos formas: 1) Por métodos ópticos o 2) Por métodos digitales.

1. **Métodos ópticos:** basada en la difracción de Fraunhofer; la imagen es iluminada por un haz de luz paralelo de un láser sobre el plano focal de una lente formando una distribución luminosa, la cual representa la transformada de Fourier de la transparencia.
2. **Métodos digitales:** es un arreglo rectangular de elementos y cada elemento de la imagen se conoce como píxel.

Los pasos de este tipo de procesamiento están dados por:

- La imagen es dividida en un arreglo rectangular de elementos.
- Se asigna un valor numérico a la luminosidad promedio de cada píxel. De este modo, los valores de la luminosidad de cada píxel, con sus coordenadas de posición, definen la imagen en su totalidad.
- A través de operaciones o transformaciones matemáticas, se altera los valores de luminosidad de los píxeles para resaltar los detalles convenientes de la imagen.
- Introducir estos píxeles a un monitor de alta definición.

### **Antecedentes**

#### ***Importancia del tema***

La reconstrucción tridimensional está basada en la geometría de múltiples vistas; para lograr esta reconstrucción es necesario realizar diferentes pasos de extracción de puntos y el emparejamiento de los mismos.

El proceso de reconstrucción tridimensional puede ser reproducido a través de sistemas computacionales, partiendo de las entidades geométricas de la imagen (vértices, aristas, etc.), este conjunto de condiciones da lugar a un sistema de ecuaciones que son resueltas a través de diferentes métodos numéricos computacionales como splines, nurbs, etc.

Las aplicaciones que se emplean, hoy en día, en reconstrucción tridimensional son muy amplias; tales como las militares, las relacionadas con el tráfico, médicas, etc. existiendo también casos no tan usuales como son la geodesia, la química, la cristalografía, la astronomía y la biología, entre otras.

Gracias al gran avance tecnológico se puede llegar a obtener un procesamiento de reconstrucción tridimensional de más alta calidad, aplicando algoritmos útiles para ello con un costo computacional cada vez menor.

Además, la reconstrucción 3D es el proceso mediante el cual los objetos reales son reproducidos en la memoria de una computadora, manteniendo sus características físicas (dimensiones, volumen y forma). Existen dentro de la visión artificial, multitud de técnicas de reconstrucción y métodos de mallado 3D, cuyo objetivo principal es obtener un algoritmo que sea capaz de realizar la conexión del conjunto de puntos representativos del objeto en forma de elementos de superficie, ya sean triángulos, cuadrados o cualquier otra forma geométrica. Los algoritmos desarrollados hasta el momento se debaten entre el costo computacional y la calidad del mallado obtenido.

El desarrollo de técnicas eficientes de reconstrucción 3D ha sido objeto de estudio durante muchos años y, con el crecimiento exponencial de la tecnología, se pueden llevar a cabo algunos de los algoritmos creados hace años que no pudieron ser implementados debido a esas limitaciones tecnológicas.

La industria cada día demanda más sistemas de adquisición de objetos en 3D debido a su imperante necesidad de mejorar la calidad de la producción. Se busca que estos sistemas provean de información exacta y completa acerca de fallas o errores en la superficie de diversos objetos. Otra de las aplicaciones es la adquisición de modelos

tridimensionales de piezas históricas; en todas las aplicaciones se busca que los sistemas de adquisición de modelos tridimensionales no degraden los productos o piezas originales.

Por lo antes mencionado, es conveniente diseñar escáneres de reconstrucción tridimensional rápidos y precisos. La aportación principal realizada en el trabajo es el diseño del algoritmo de perfilometría Wavelet, con la finalidad de probarlo y compararlo con diferentes tipos de wavelet.

### **Procesamiento digital de imágenes**

El procesamiento de imágenes está fundamentado en dos áreas principales de aplicación:

- La mejora de la calidad para la interpretación humana.
- El procesamiento de los datos de la escena para la percepción de las máquinas de forma autónoma.

El campo de procesos de imagen se ha acrecentado considerablemente gracias a que las técnicas de procesamiento son usadas hoy en día para la resolución de problemas –una gama extensa–.

La visión artificial es la capacidad que tiene una máquina de interpretar una imagen, –mundo a su alrededor–; todo esto para la deducción de un mundo tridimensional a través de imágenes bidimensionales. Esta visión tridimensional es representada por una, dos o más cámaras, las cuales reproducen las imágenes monocromáticas o a color; las imágenes pueden ser segmentadas con la finalidad de tener ciertas características de dichas imágenes tales como: bordes o regiones.

Para la obtención de imágenes digitales se requieren dos elementos básicos

1. Un dispositivo físico sensible a una determinada banda de energía electromagnética (rayos X, ultravioleta, visible, infrarrojo) que produce una

señal eléctrica de salida proporcional al nivel de la energía incidente en cualquier instante de tiempo.

2. Un digitalizador, es decir, un dispositivo para convertir la señal eléctrica de salida continua del dispositivo 1 (físico) en forma digital.

Para la generación de la imagen en un tiempo particular se determina primero el valor de la imagen continua en cada una de las diferentes localizaciones discretas de la imagen (a cada valor localizado de forma discreta se denomina muestra de la imagen); así, posteriormente se asigna una etiqueta entera a cada muestra, representando de esta manera el rango en el que varía la muestra.

La imagen es presentada de manera digitalizada, espacialmente en forma de matriz con una resolución de  $M \times N$  elementos (denominados píxeles).

La segmentación es el proceso por el cual se extrae cierta información de la imagen para ser usada posteriormente y se basa en dos principios fundamentales:

1. Discontinuidad y
2. Similitud (Fu 1985),

donde la discontinuidad implicará los bordes y la similitud las regiones; siendo los bordes líneas que separan las regiones y las regiones las áreas de la imagen en las que sus píxeles tienen propiedades similares, tales como: Intensidad, color, etc.

Para poder detectar bordes, existen algunos tipos de operadores que son: Operadores 1ª Derivada, operadores 2ª Derivada y operadores morfológicos.

La forma de detectar regiones puede ser por: Binarización, basada en el uso de umbrales y crecimiento de regiones; adición de píxeles; división de regiones; y similitud de textura, color o niveles de grises.

Para mejorar la calidad de imagen, tomando en cuenta que no siempre es la óptima, existen dos procesos a tomar en cuenta:

1. Suavizado: Suprime el ruido y

## 2. Realzado: Elimina falsos reflejos y sombras.

Estas operaciones pueden enfocarse en dos perspectivas distintas:

- Dominio espacial, el cual se lleva a cabo mediante operaciones, considerando los píxeles en sus posiciones espaciales dentro del plano de la imagen y los niveles de intensidad asociados.
- Dominio de la frecuencia –espectral, para lo que es preciso realizar un tipo de transformación de tal forma que pueda trabajarse con los componentes de frecuencia; tal como la transformada de Fourier, transformada del coseno, Transformada de Walsh-Hadamard.

El filtrado de imágenes es un proceso previo a la segmentación de las mismas; un filtrado es aquel que opera sobre una determinada señal de entrada para producir una señal de salida diferente.

Una imagen con alta frecuencia espacial cambia abruptamente los niveles de grises, en tanto que una de baja frecuencia espacial lo cambia de forma lenta.

Otra transformada muy considerada, especialmente en la compresión de imágenes, es la así llamada Wavelet, donde el filtrado espacial juega un papel importante.

### *Transformada de Fourier<sup>1</sup>*

La transformada de Fourier  $F(u, v) \rightarrow$  imagen  $f(x, y)$  está dada por:

---

<sup>1</sup> Anexo I

$$F(u, v) = \mathfrak{F}\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-2\pi i (ux + vy)) dx dy \quad (2.1)$$

De forma análoga la transformada inversa de Fourier  $f(x, y) \rightarrow F(u, v)$  está dada por:

$$f(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(u, v)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp(2\pi i (ux + vy)) du dv \quad (2.2)$$

Tomando en cuenta la ecuación (2.2), podemos empatarla con el concepto de la expansión de la función imagen  $f(x, y)$  como una suma generalizada con exponenciales complejos.

Siendo  $u$  y  $v$  frecuencias espaciales implica que  $F(u, v)$  son coeficientes de peso si y sólo si se satisface la ecuación (2.1). Por lo tanto, la ecuación (2.2) determina que la función de intensidad  $f$  está dada por la suma de exponenciales de dichos coeficientes de peso.

- Si el período disminuye, aumenta la frecuencia
- Altas frecuencias espaciales denotan bordes abruptos
- Bajas frecuencias implican ausencia de bordes, lo que implican regiones de niveles de intensidad casi uniformes

Las imágenes digitales vienen de una cuantificación de imágenes analógicas.

Teorema de Shannon: Existe una correspondencia entre los cambios abruptos en la intensidad de una imagen y las altas frecuencias en su transformada de frecuencia. Por otro lado, si una imagen no tiene componentes de alta frecuencia implica que dicha imagen no posee transiciones abruptas en los niveles de grises, por lo que ésta no necesita una cuantificación muy fina.

Por otro lado, se dice que una función imagen  $f(x, y)$  está limitada en banda si su transformada de Fourier  $F(u, v)$  es cero; siempre que  $|u|$  ó  $|v|$  es mayor que un número determinado  $W$ .

Al tomar intervalos de muestras de valor  $1/2 W$  se puede obtener la reconstrucción de una imagen analógica; donde  $W$  es el ancho de banda.

Así, entre mayor es el ancho de banda  $W$ , más pequeño debe ser el intervalo de muestreo.

- Ancho de banda grande = Frecuencias altas

⇒ Cambios bruscos en la intensidad de la imagen.

Para el tratamiento de imágenes digitales la unidad adoptada de distancia es el píxel y la frecuencia espacial está dada<sup>2</sup> por  $pixel^{-1}$  por lo tanto la mayor frecuencia representada en una imagen digital es  $1/2$  de ciclos por píxel; así los ejes  $u$  y  $v$  varían de  $-1/2$  a  $1/2$  ciclos por píxel.

## **Filtros, convolución y binarización**

### ***Filtrado espacial de imágenes digitales***

Dominio de frecuencia la operación está dada por:

$$[f * h](x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(m, n)h(x - m, y - n)\delta m \delta n \quad (2.3)$$

### ***Teorema de Convolución***

Tomando dos funciones de imagen dada  $f$  y  $h$  con las transformadas de Fourier  $F$  y  $H$ ; se denota  $f^*h$ .

Así la transformada de Fourier está determinada por:

---

<sup>2</sup> Anexo I



$$F_0(u, v) = \mathfrak{F}\{f * h(x, y)\} = \mathfrak{F}\{f(x, y)\} \mathfrak{F}\{h(x, y)\} = F(u, v) H(u, v) \quad (2.4)$$

donde,

$$h(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)\} \quad (2.5)$$

Siendo esta función la respuesta de impulso.

Con base en el teorema de convolución, un filtro puede estar definido por su función de transferencia  $H$  o por su respuesta de impulso  $h$ .

Una interpretación de  $h(x, y)$ , suponiendo una función de entrada  $f(x, y)$  como función delta de Dirac  $\delta(x, y)$ , tenemos:

$$f_0(x, y) = \delta(x, y) * h(x, y) = \iint \delta(m, n) h(x - m, y - n) \delta m \delta n = h(x, y) \quad (2.6)$$

Donde  $h(x, y)$  es la respuesta del filtro de un punto de luz intenso por medio de una función delta de Dirac<sup>3</sup>.

Con el teorema de convolución<sup>4</sup> se puede interpretar el filtrado desde dos puntos:

1. Puede ser concebido como la convolución de la imagen de entrada con la respuesta impulso del filtro.
2. La transformada inversa del producto de la función del filtro. La transformada de la imagen de entrada.

---

<sup>3</sup> Anexo I

<sup>4</sup> Anexo I

Tomando en cuenta que se está tratando de imágenes digitales y sabiendo que el teorema de convolución puede expresarse en el dominio discreto de integrales por sumatorias; reemplazando en (2.6), tenemos:

$$f_0(x, y) = f * h = \sum_m \sum_n f(m, n)h(x - m, y - n)\delta m \delta n \quad (2.7)$$

Esta suma es tomada donde el área se solapa.

### ***Propiedades de Fourier:***

#### Separabilidad:

Esta propiedad de la Transformada de Fourier discreta bidimensional TFD está relacionada con la posibilidad de calcularse con una combinación de dos transformadas de Fourier discretas, calculando la TFD sobre la variable de uno de los ejes y a este resultado aplicarle el cálculo de la TFD sobre la variable del otro eje.

La ventaja de esta propiedad es la de obtener la transformada  $F(x, y)$  o la inversa  $f(x, y)$  en dos pasos.

$$F(u, v) = \frac{1}{N} + \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v)e^{-2\pi i u x / N} \quad (2.8)$$

donde

$$F(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)e^{-2\pi i v y / N} \quad (2.9)$$

La transformada de la matriz  $f(x, y)$  se ha realizado calculando primero la transformada unidimensional a cada una de las filas y multiplicando el resultado por  $N$ , para después calcular la transformada para las columnas de la matriz  $F(x, v)$ .

### Traslación:

Tanto la Transformada discreta de Fourier como su inversa son periódicas en un periodo  $N$ .

Esta propiedad consiste en mover el origen de la TF de  $f(x, y)$  al centro de la matriz  $N \times N$  correspondiente; es decir, al punto  $(N/2, N/2)$ . Para ello se hace uso de:

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \text{ se hace corresponder con } F(u-n/2, v-N/2) \quad (2.10)$$

En la siguiente ecuación podemos apreciar que un desplazamiento en la función  $f(x, y)$ , no genera un cambio en la magnitud de su transformada de Fourier.

$$|F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0+vu_0)/N}| = |F(u, v)| \quad (2.11)$$

### Simetría:

La transformada de Fourier de una función  $f(x)$  real es simétrica conjugada:

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| \quad (2.12)$$

Gracias a esta propiedad se puede calcular la magnitud de los puntos de un periodo completo, con solo calcular los  $N/2+1$  primeros puntos, tomando en cuenta que el origen de la transformada estará centrado en el punto  $(N/2, N/2)$ ; usando para ello la propiedad de traslación.

### Rotación:

Si la función  $f(x, y)$  es rotada un determinado ángulo, la transformada de Fourier también se verá afectada por dicha rotación; lo mismo ocurre con la transformada inversa de Fourier.

Teniendo:

$$X = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = w \cos \phi \quad v = w \sin \phi \quad (2.13)$$

Así  $f(x, y)$  se convierte en  $f(r, \theta)$  y  $F(u, v)$  en  $F(w, \phi)$ . Por ello tenemos lo siguiente:

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(w, \phi + \theta_0) \quad (2.14)$$

### Distributividad y escalado:

La Transformada de Fourier y su inversa son distributivas en su suma pero no en su multiplicación.

$$\mathfrak{F} \{ f_1(x, y) + f_2(x, y) \} = \mathfrak{F} \{ f_1(x, y) \} + \mathfrak{F} \{ f_2(x, y) \} \quad (2.15)$$

$$\mathfrak{F} \{ f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) \} \neq \mathfrak{F} \{ f_1(x, y) \} \cdot \mathfrak{F} \{ f_2(x, y) \} \quad (2.16)$$

### Valor Medio:

EL valor promedio de una función de dos dimensiones es:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (2.17)$$

Esta expresión se puede obtener a partir de la transformada de Fourier sustituyendo en la función  $F(u, v)$  para el punto  $(0, 0)$ , teniendo lo siguiente:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N} F(0, 0) \quad (2.18)$$

### ***Filtrado en Frecuencia***

#### Filtrado Paso Bajo:

Tomando en cuenta que los bordes y otras transacciones bruscas, (ruido); contribuyen significativamente en la frecuencia alta de su TF en los niveles de gris de una imagen. Por ello el suavizado se consigue cuando se tiene un dominio de la frecuencia, atenuando un rango específico de componentes de frecuencia basada en la transformada de la imagen; teniendo:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) \quad (2.19)$$

donde  $F(u, v) \Rightarrow$  Transformada de Fourier

Se debe seleccionar una función de transferencia  $H(u, v)$  de tal forma que  $G(u, v)$  atenúe los componentes de alta frecuencia de  $F(u, v)$ . La imagen suavizada  $g(x, y)$  estará dada por la transformada inversa.

Los filtros de fase cero afectan de igual manera la parte real, así como la imaginaria; estos filtros son llamados así porque no alteran la fase de la transformada.

El filtro ideal para 2D, está dado por:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Siendo  $D_0$  una cantidad específica 0 o mayor; (no negativa), y  $D(u, v)$  la distancia de  $(u, v)$  al origen del plano de frecuencia.

$$\therefore D(u, v) = (u^2 + v^2)^{1/2} \quad (2.21)$$

El punto de transición  $H(u, v) = 1$  y  $H(u, v) = 0$  se llama frecuencia de corte en un filtro de paso bajo ideal; esto indica que todas las frecuencias dentro del círculo con radio  $D_0$  pasan sin atenuación, en tanto que todas las frecuencias fuera del círculo son eliminadas.

#### Filtro Paso Bajo de Butterworth (FPBB)

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}} \quad (2.22)$$

Denota una función de transferencia de orden  $n$  y frecuencia de corte  $D_0$ ; donde  $D(u, v)$  está dado por la ecuación (2.21).

### Filtro Paso Alto:

La extracción de bordes puede lograrse en el dominio de la frecuencia de un filtro de paso alto; mismo que atenúa los componentes de baja frecuencia sin alterar la información de la alta frecuencia en la transformada de Fourier.

### Filtro Ideal de Paso Alto:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Siendo  $D_0$  la distancia de corte media desde el origen de plano de frecuencias, y  $D(u, v)$  dada por (2.21).

Este filtro es el opuesto al filtro de paso bajo ideal porque atenúa todas las frecuencias dentro del círculo de radio  $D_0$ , mientras que las que están fuera del círculo pasan sin atenuación.

### Filtro paso Alto de Butterworth (FPBB)

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}} \quad (2.24)$$

### Filtros Paso Banda:

Filtra sólo las frecuencias de una banda determinada del espectro de Fourier de una imagen; el resultado estará establecido con base a la banda seleccionada.

## **Técnicas de procesamiento de imágenes**

Pasos fundamentales en el Procesamiento de Imágenes.

Se definen dos categorías:

1. Método donde tanto la entrada como la salida son imágenes.
2. Método donde la entrada es una imagen y la salida son los atributos extraídos de esta imagen.

Regularmente la salida de estos procesos son imágenes

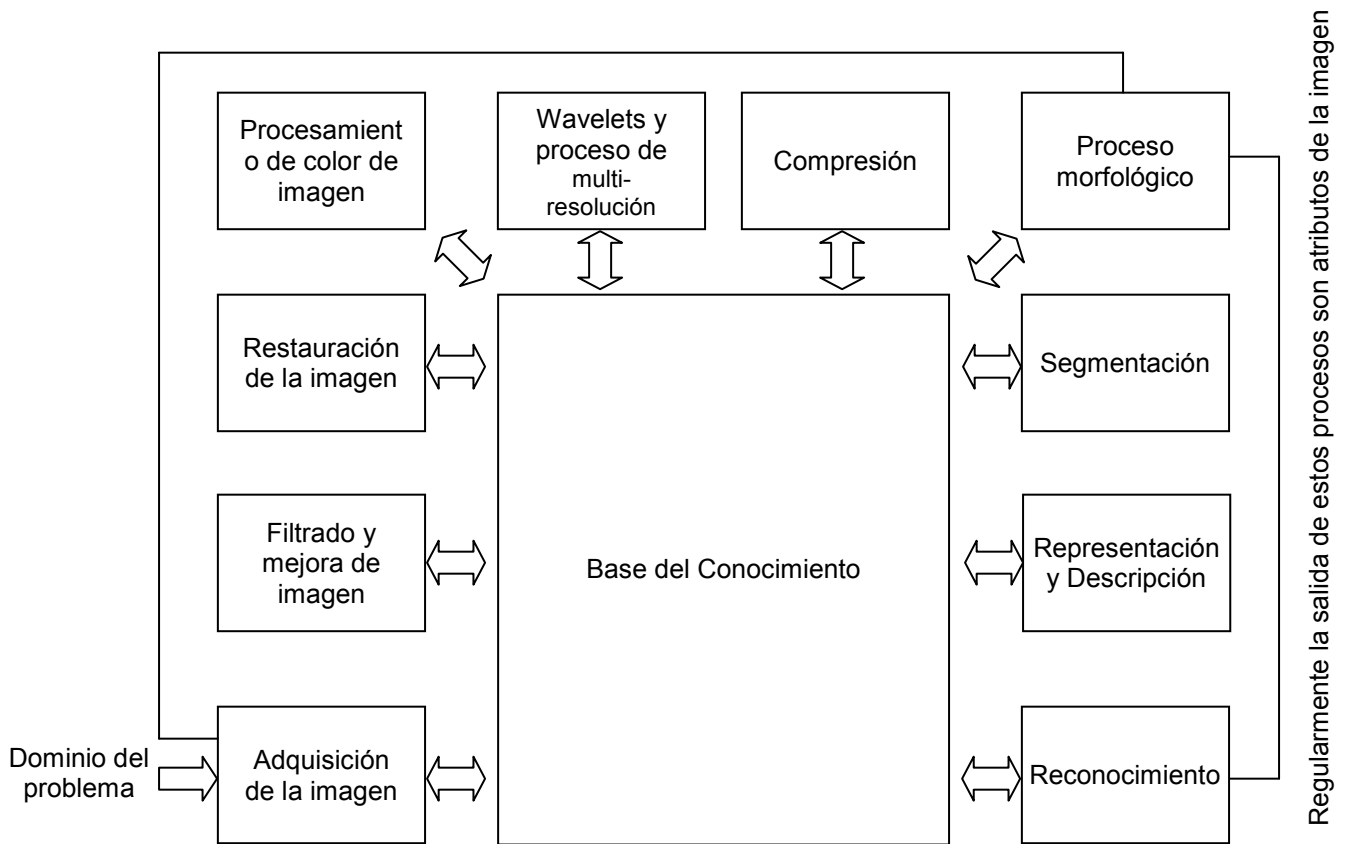


Figura 2.1 Pasos fundamentales en el procesamiento digital de imágenes

Ambas categorías se muestran en la Figura 2.1. La Figura 2.1 no necesariamente se aplica a cada proceso aplicado a la imagen. La intención es transmitir la idea de que todas las metodologías pueden ser aplicadas a imágenes para diferentes propósitos y posiblemente con diferentes objetivos.

- Adquisición de la imagen: Siendo ese el primer proceso en nuestra Figura 2.1; la adquisición de la imagen es obtener una imagen que ya está en forma digital. La etapa de adquisición de la imagen involucra el procesamiento de la misma tanto como la escala.
- La mejora de la imagen: es el proceso de manipulación de la imagen de tal forma que el resultado de la misma sea más apropiada que la imagen original para la aplicación especificada, siendo esto importante a tomar en

cuenta porque eso implica que el mejoramiento de la imagen sí está orientado al problema. Es importante mencionar que no existe una teoría general de mejoramiento de imágenes, si la imagen es interpretada de forma visual, el observador es el que juzga el mejor método; tomando en cuenta que las técnicas de mejoramiento son muchas y muy variadas, esto nos presenta una dificultad para determinar una técnica adecuada para la mejora de la imagen.

- Restauración de la imagen: Área que también se enfoca en mejorar la apariencia de la imagen. Sin embargo, cabe mencionar que la mejora de la imagen es subjetiva y la restauración de la imagen es objetiva; en este sentido las técnicas de restauración tienden a basarse en matemáticas o en modelos probabilísticos de degradación de imagen; mientras que la mejora en las preferencias subjetivas humanas.
- Procesamiento de color de imagen: Esta área ha cobrado cada vez más importancia por el incremento significativo del uso de imágenes digitales en internet.
- Wavelets y proceso de multi-resolución: Éstas están fundadas para la representación de imágenes en varios grados de resolución.
- Compresión: Técnica utilizada para reducir la imagen para el almacenamiento necesario. Una extensión de compresión conocida es JPEG (compresión estándar).
- Proceso morfológico: Trata con herramientas de extracción de componentes de imagen los cuales son usados en la representación y la descripción de la forma.
- Segmentación: Procedimientos de partición de las partes más importantes de una imagen u objeto. Una de las tareas más difíciles en el procesamiento digital de imágenes es la segmentación autónoma. La segmentación escabrosa es un proceso que brinda un largo camino a la solución óptima de imágenes, la cual necesita que el objeto sea identificado individualmente.



- Representación y descripción: Después de la etapa de la segmentación viene la representación y la descripción, la cual es usualmente datos de los píxeles brutos, constituyendo el borde de una región, (es decir, el grupo de píxeles separando una región de la imagen de la otra); o todos los puntos en su propia región. Es importante definir si los datos representan el borde o la región completa. La representación de bordes es apropiada cuando se enfoca a las características externas del objeto, tales como las esquinas e inflexiones; por otro lado la representación regional se implementa cuando el objetivo son las propiedades internas, tales como la textura o estructura del objeto. A veces ambos pueden complementarse. Otra forma de referirnos a la descripción es la selección de rasgos.
- El reconocimiento, es el proceso que asigna la etiqueta al objeto fundamentándose en sus propias características
- El conocimiento: con respecto al dominio del problema es codificado dentro de un sistema de procesamiento de imagen sobre la forma de la base de datos del conocimiento; este conocimiento puede ser tan simple como ir desde los detalles de las regiones de una imagen donde la información es conocida para ser localizada y tan compleja como una lista de todos los posibles defectos en la inspección de problema de materiales; la base del conocimiento también controla la interacción entre módulos

### 3. PERFILOMETRÍA DE WAVELET

Es utilizada para resolver señales no estacionarias; las cuales no pueden ser resueltas por la Transformada de Fourier. La TW descompone una función de entrada por medio de versiones escaladas, desplazada por una wavelet básica la cual puede ser obtenida utilizando métodos ópticos. Así, cada función obtenida de estas versiones escaladas es conocida con el nombre de componente wavelet CW

#### **Técnicas de reconstrucción tridimensional**

La adquisición de datos 3D y reconstrucción de objetos se obtiene a través de modelos espacio-temporales o tridimensionales desde un sensor, estos sensores pueden ser ópticos, acústicos, escaneo por láser, radares, etc.

Existen variadas técnicas de reconstrucción tridimensional, sin embargo la mayoría de éstas surgen de la combinación de las pocas técnicas básicas, comunes a todas las estaciones de reconstrucción donde el objetivo principal es generar un algoritmo capaz de conectar el conjunto de puntos representativos de la imagen en forma de elementos de superficie. La eficiencia de cada técnica está definida por la calidad final en que la imagen fue reconstruida.

Las siguientes son técnicas de reconstrucción tridimensional:

- Técnica multivista, la cual extrae la información 3D por medio de la información bidimensional de dos o más captores de imagen. Como su término lo indica, en esta técnica existe más de una vista de escena de la misma escena, las cuales son tomadas a través de diferentes puntos para obtener las características tridimensionales y dependiendo del número de imágenes manejado es el nombre de la visión utilizada por ejemplo si son dos vistas se le nombra bifocal, se puede tener n número de vistas, llamándole n-focal.
- Cámara móvil, conocida también como técnica de visión activa, la cual extrae la información tridimensional, el flujo de imagen de un sensor denominado flujo de velocidades de la cámara. Esta técnica permite

detectar objetos en movimiento a través de sensores que permiten a la cámara moverse en las escenas generando una correspondencia entre el mundo real y el virtual.

- Técnica de luz estructurada, es un método directo activo, que trabaja con la modificación de las condiciones del entorno y se basa en el estudio de deformación que sufre el patrón de luz al ser interceptado por cualquier objeto; para mejores resultados se debe emplear un haz láser como un ideal para este tipo de sistema, además de una cámara que capte las imágenes de la deformación del plano láser.
- Telemetría láser. Determina el mapa de profundidad de la escena basándose en el tiempo transcurrido y la emisión del láser, es decir; mide el tiempo que recorre la luminosidad del rayo láser hasta la superficie a la que se está proyectando
- Control de parámetros ópticos (análisis enfoque/desenfocado) determina el mapa de profundidad de la escena partiendo del nivel de enfoque de cada píxel.

De esta forma podemos determinar que existen diferentes técnicas y que cada una será aplicable de acuerdo al fin de reconstrucción con el que se trabaje para obtener el mejor resultado, considerando que cada una de ellas tiene ventajas y desventajas.

Este trabajo de investigación se centra específicamente en el uso de la técnica de luz estructurada.

## **Transformada Wavelet**

### ***Transformada Wavelet***

Es una forma de onda de duración limitada y tiene un valor medio cero; su análisis consiste en la descomposición de una función de entrada en versiones escaladas y trasladadas de la wavelet original.

La Transformada Wavelet tiene concentrada su energía finita en el tiempo. La forma de onda de la Wavelet tiene la característica de ser oscilante en tiempo y frecuencia.

La Transformada Wavelet es eficiente para el análisis de señales no estacionarias y de rápida transitoriedad, mapeando la señal en una representación de tiempo-escala; se diferencia de la Transformada de Fourier por proveer un análisis de multi-resolución con ventanas dilatadas. Las ventanas angostas son utilizadas para realizar el análisis de frecuencias altas y las frecuencias bajas son analizadas por ventanas anchas.

No sólo es local en tiempo sino también en frecuencia.

Las wavelets son generadas a través de una función wavelet básica por medio de dilataciones y traslaciones; permitiendo así que la señal original pueda reconstruirse utilizando la Transformada Wavelet inversa.

La Transformada Wavelet funciona generando bloques de información en escala y tiempo de una señal; estos bloques son generados por una única función llamada Wavelet madre, la cual es en realidad una función Gaussiana, multiplicada por un término de modulación.

Análisis: Es el proceso de Transformada Wavelet de una señal.

Síntesis: Es el proceso inversa de reconstrucción de la señal.

En el proceso de transformación se generan diferentes sub-bandas; donde estas sub-bandas en el plano de frecuencias no son uniformes y se encuentran divididas logarítmicamente, en donde para un rango de 0 a  $f_n$  las muestras de una señal son la mitad para cada nivel de escalamiento.

La onda de la Transformada Wavelet es limitada en dominio, es irregular y puede ser asimétrica. Las ondas Wavelet son la base para la expansión de la transformada de Fourier, la cual es invariable en el tiempo o estacionaria, la

transformada Wavelet es útil para el análisis de señales más naturales no estacionarias o invariantes en el tiempo, proveyendo más información tanto en tiempo como en frecuencia.

Las Wavelet son usadas en la implementación del procesamiento de señales gracias a sus características, con ellas se obtiene la mejor concentración simultánea posible en tiempo y frecuencia. La función Wavelet es una de las pocas funciones donde la transición de una a más dimensiones es inmediata.

La modulación que anteriormente era realizada con funciones exponenciales complejas, ahora con la transformada Wavelet se implementa con la operación de escalamiento; es decir el concepto de frecuencia es sustituido por el de escalamiento.

Las características generales de los diferentes sistemas Wavelet están representadas por las siguientes características:

Un sistema wavelet puede ser descrito como 'amigable', es decir son como un conjunto de ladrillos; -para cada sistema pueden tener diferente forma-, los cuales sirven para reconstruir o representar una función o señal; pueden servir también como base para cualquier clase de señal de una o más dimensiones; (expansión bi-dimensional  $L^2(\mathbb{R})$ ).

La expansión de la transformada Wavelet brinda una localización tiempo-frecuencia instantánea de la señal, como ejemplo puede ponerse el de un pentagrama musical, donde la localización y forma de la figura musical indica cuándo ocurre el tono y cuál es su frecuencia. Por otro lado un coeficiente de expansión Wavelet representa un componente bien definido en un intervalo de tiempo, lo que implica que el componente Wavelet es bien localizado en el tiempo.

Los sistemas Wavelet satisfacen las condiciones de multi-resolución.

## ***Método de investigación.***

### Fundamentos de Transformada Wavelet.

Cuando se procesan señales, muy comúnmente se suelen encontrar fenómenos oscilantes, casi monocromáticos, localizados en el tiempo; de igual forma se encuentran ondas perdurables, las cuales presentan amplitudes casi estacionarias que exhiben patrones de frecuencia variable en el tiempo.

De esta forma nace en sentido natural la noción de fenómenos localizados en tiempo y frecuencia; es decir, objetos que para su descripción requieren información conjunta de ambos dominios; tomando en cuenta esto, Fourier no es la solución aplicable ó adecuada para expresar de forma explícita este tipo de información conjunta debido a que las funciones elementales representadas son las ondas estacionarias y monocromáticas  $e^{i\omega t}$

Para su contraparte se requiere de patrones elementales capaces de localizar la información conjunta de ambos dominios, esto representará dichos fenómenos.

El planteamiento del problema se basa entonces en la representación de *tiempo - frecuencia*; en principio, esto es un problema no natural ya que debido al *Principio de Incertidumbre de Heisenberg* no pueden existir señales que a la vez sean casi monocromáticas y casi instantáneas.

Si sólo queremos tratar fenómenos aislados en el tiempo, entonces no existe complicación debido a que estos pueden analizarse de forma separada y con base en sus respectivos dominios temporales, extraer la información en frecuencia que nos brinda el uso de la Transformada de Fourier (FFT); es decir, podemos tratar ondas con patrones relativamente simples, moduladas por funciones relativamente largas.

El problema se presenta cuando nos enfrentamos a señales en donde conviven múltiples fenómenos localizados en el tiempo y en la frecuencia, superponiéndose bajo complejas estructuras.

La Transformada Wavelet (WT) desarrollada en los años'80, es eficiente para el análisis de señales no estacionarias y de rápida transitoriedad; de la misma forma que la Transformada de Fourier (FFT), mapea la señal con una representación tiempo-escala; la señal es preservada temporalmente, la diferencia radica en que la Transformada Wavelet (WT) brinda un análisis de multi-resolución con ventanas dilatadas; así el análisis de las frecuencias de mayor rango se lleva a cabo usando ventanas angostas y el de menor rango se realiza usando ventanas anchas.

Así las funciones base de la Transformada Wavelet (WT) son generadas a partir de una función básica de la misma, por medio de traslaciones y dilataciones; esto permite reconstruir la señal original a través de la Transformada Wavelet (WT) inversa.

La Transformada Wavelet (WT) permite representar una señal tanto en tiempo como en frecuencia simultáneamente; permite la comprensión y procesamiento de imágenes y patrones; así como también es usada para el análisis de señales electrocardiográficas, sísmicas, de sonido, de radar, etc.

La Transformada Wavelet se deriva en tres tipos de los cuales tenemos: Continua (CWT), Semi-discreta (SWT) y Discreta (DWT); esto se basa en la forma en que los parámetros de desplazamiento y escala son discretizados.

La Transformada Wavelet continua se obtiene al someter una señal con la fórmula base de la Transformada Wavelet llamada función madre; es decir, es la convolución de la señal con la wavelet conjugada, desplazada y escalada; la cual consta de un par de variables  $a$  y  $b$ ; donde  $a$  es la variable que permite hacer dilataciones y contracciones a la señal y  $b$  es la variable que permite cambiar la posición de la señal en el tiempo; donde  $a$  y  $b$  deben ser números reales y en la escala igual a cero la señal se indetermina. Cabe mencionar que la CoWT es reversible a través de su Transformada Wavelet Inversa.

La Transformada Wavelet Continua, se utiliza para el análisis de señales.

### Transformada Wavelet:

La Transformada Wavelet de una función  $f(t)$  es la descomposición de  $f(t)$  en un conjunto de funciones  $\psi_{s,\tau}(t)$ , que forman una base y son llamadas las “Wavelets”. La Transformada Wavelet se define como:

$$W_f(S, \tau) = \int f(t) \psi_{S,\tau}^*(t) dt \quad (3.1)$$

Las Wavelets son generadas a partir de la traslación y cambio de escala de una misma función wavelet  $\psi(t)$ , llamada la “Wavelet madre”, y se define como:

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (3.2)$$

donde  $s$  es el factor de escala, y  $\tau$  es el factor de traslación.

Las Wavelets  $\psi_{s,\tau}(t)$  generadas de la misma función Wavelet madre  $\psi(t)$  tienen diferente escala  $s$  y ubicación  $\tau$ , pero tienen todas la misma forma. Se utilizan siempre factores de escala  $s > 0$ . Las Wavelets son dilatadas cuando la escala  $s > 1$ , y son contraídas cuando  $s < 1$ . Así, cambiando el valor de  $s$  se cubren rangos diferentes de frecuencias. Valores grandes del parámetro  $s$  corresponden a frecuencias de menor rango, o una escala grande de  $\psi_{s,\tau}(t)$ . Valores pequeños de  $s$  corresponden a frecuencias de menor rango o una escala muy pequeña de  $\psi_{s,\tau}(t)$ .

Wavelet significa onda pequeña; donde:

Pequeña, se refiere a que la función es de longitud finita (compactamente soportada)

Onda, porque define que la condición de la función es de naturaleza oscilatoria.

De todo esto tenemos que la Wavelet madre es un prototipo que sirve para generar otras funciones.



Así, la CWT calcula el índice de semejanza de la señal que se está analizando y la wavelet, como se muestra en la Figura 3.1

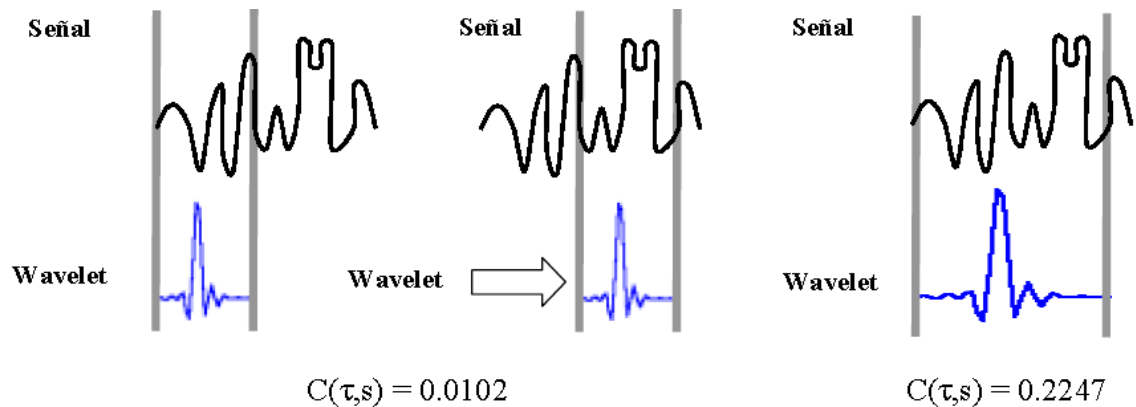


Figura 3.1 Índice de Semejanza de la señal en comparación con la Transformada Wavelet.

Aquí se toma la wavelet y se calcula la correlación con cierta parte de la señal, posteriormente se traslada en el eje temporal y se calcula nuevamente con la siguiente parte de la señal, de esta forma se escala la wavelet y se repite el proceso, (tercera imagen).

Aquí la representación ofrece la máxima libertad en la elección de la Transformada Wavelet, siempre y cuando esta elección satisfaga la condición de un valor medio cero. Con esta restricción se puede obtener la CWT invertible en rango y está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{k_\psi} \iint c(\tau, s) \frac{\psi(\tau, s)}{\tau^2}, d\tau ds \quad (3.3)$$

donde  $\psi$  satisface la condición de un valor medio cero, con  $K_\psi$  entonces tenemos que:

$$k_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(w)|^2}{w}, dw < \infty \quad (3.4)$$

siendo  $\psi(w)$  la Transformada de Fourier de  $\psi(t)$

### Transformada de Wavelet Semi-discreta.

Es conveniente, considerar en la práctica WT en algunos discretos de  $a$  y  $b$ ; por ejemplo, en asociación a la red diádica se definen los parámetros:

$$a = 2^j, b = 2^j k$$

Con  $(j, k) \in \mathbb{Z}$  la cual es denominada Transformada de Wavelet Semidiscreta – SWT–

Así esto será reversible, si se cumple:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{ab} |\langle f, \psi(\tau, s) \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (3.5)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes positivas y  $f(t)$  sigue siendo una función continua, como se puede observar en la Ecuación (3.5).

### Transformada Wavelet Discreta

La Transformada Wavelet Discreta no es más que la Transformada Wavelet continua en un tiempo discreto, esta Transformada Wavelet discreta puede ser vista en su estructura como la Transformada discreta de Fourier. En este punto también cabe mencionar que la DWT es reversible.

La Transformada Wavelet Discreta es usada para la codificación de señales.

Dentro de la Transformada Wavelet se requiere que para que la Continua sea Discreta se realice un muestreo, el cual está basado en el Análisis Multi-Resolución; que como su nombre lo indica es el análisis de la señal a estudiar; donde el número de resolución es el número de niveles de descomposición en el dominio Wavelet; este muestreo es realizado con una serie de filtros pasa bajas y pasa altas, así, con ello las frecuencias altas y bajas son obtenidas. Dentro de este proceso existen términos importantes para ser tomados en cuenta, los cuales son el decimado –downsampling y el undecimado –upsampling los cuales referencian el sentido en el que es llevado a

cabo el muestreo; donde el decimado es el que decrementa el número de muestras y el undecimado las incrementa.

La DWT filtra la señal mediante estas parejas de filtros, pasa altas y pasa bajas; y genera una diezmado por dos de la señal. La descomposición de la señal por medio de la DWT coincide con el número de veces que el proceso es realizado.

Desventajas de la DWT:

Sensibilidad a corrimientos; dado cuando la señal de entrada tiene una variación inesperada en sus coeficientes.

Poca direccionalidad: Tiene limitaciones de orientación en el dominio, por ejemplo; la 2-D DWT cuenta con tres sub-bandas direccionables: Horizontal –H-, Vertical-V- y Diagonal –HH-, pero las imágenes reales tienen suaves regiones y contornos de orientación aleatoria, así que el que la Transformada no sea direccionable genera que la imagen no contenga una representación natural óptima.

Ausencia de Información sobre la Fase: La DWT no puede proporcionar información sobre la fase; para ello se requiere de filtros que evalúen valores complejos. Esto debido a que las implementaciones para la DWT emplean filtros con coeficientes reales que a su vez son asociados a wavelets reales los cuales arrojan aproximaciones y detalles solo para valores reales.

### Discreta Compleja

La Transformada Wavelet Compleja surge de la limitación a las que se ve sujeta la Transformada Wavelet con respecto a la “ausencia de información sobre la fase”. La CWT es un valor complejo filtrado de forma analítica que descompone las señales puras reales en componentes complejos con partes reales e imaginarias dentro del dominio de la Transformada. Estos componentes se usan para el manejo de la información de amplitud y fase; la cual es requerida para describir exactamente la localización de la energía de las fuentes de oscilación.

Una versión Discreta de Transformada de Wavelet define esencialmente una red apropiada discreta de parámetros  $\{(a_j; b_{jk})\}$ , de escalas y traslaciones, respectivamente; de modo que la familia de wavelets  $\psi_{a_j, b_{jk}}$  sea admisible; las cuales son: wavelets spline, las wavelets de Daubechies y otras análogas, así mismo entre estas se encuentran diversas variantes; principalmente aquellas que generan bases ortonormales de wavelets; así con esto tenemos:

$$a_j = 2^{-j}; \quad b_{jk} = 2^j k$$

donde  $j, k \in \mathbb{Z}$

dada esta elección de parámetros tendremos entonces la expresión normal de las wavelets:

$$\psi_{j, k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad (3.6)$$

donde  $j, k \in \mathbb{Z}$

Por otro lado podemos definir tomando en cuenta la wavelet madre y una señal  $s(t)$  la siguiente ecuación:

$$DW_{\psi} s(j, k) = \langle s, \psi_{jk} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{jk}(t) dt \quad (3.7)$$

para todos los valores enteros de  $j$  y  $k$ . Simplificando entonces tenemos que:

$$s(t) = \sum_j \sum_k c_{jk} \psi_{jk}(t) \approx \sum_j \sum_k \langle s, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}(t) \quad (3.8)$$

con coeficientes  $c_{jk}$  apropiados en wavelets

Dentro de las variedades de Transformada Wavelet utilizadas para el análisis de señales existen en primera instancia:

### Mexican Hat – Segunda derivada de una Gaussiana-

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{\pi}} (1 - t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (3.9)$$

la cual posee una fase lineal y su gráfica es la siguiente

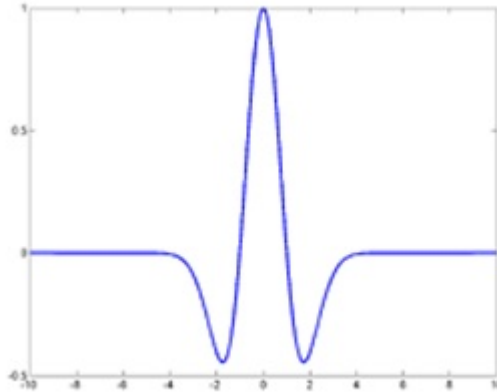


Figura 3.2 Transformada Wavelet “Mexican Hat”

La Mexican Hat proviene de la segunda derivada de la función de densidad de probabilidad Gaussiana; es simétrica, lo cual permite analizar la señal de un modo simétrico y lineal en la fase.

### Morlet

Siendo esta simétrica, solo útil para realizar la Transformada Continua de wavelets; definida por la siguiente ecuación:

$$morl(x) = e^{-x^2/2} \cdot \cos(5x) \quad (3.10)$$

Teniendo como gráfica:

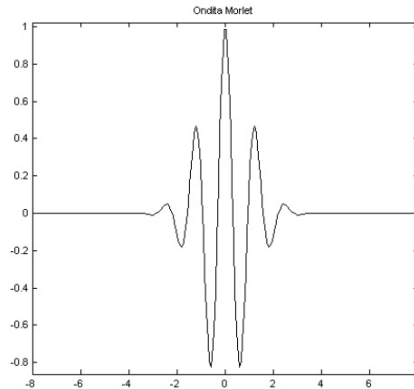


Figura 3.3 Transformada Wavelet Morlet

Daubechies:

La wavelet Daubechies puede tener un orden  $N$ , dependiendo del número de momentos que se desee; donde  $N$  es un entero positivo y determina el número de coeficientes de filtro que tiene la wavelet. Un claro ejemplo es la wavelet Haar que vendría representando una wavelet Daubechies de orden 1 –db1-.

La wavelet Daubechies cuenta con las características de ortogonalidad y bi-ortogonalidad, además de poder realizar wavelets discretas y continuas.

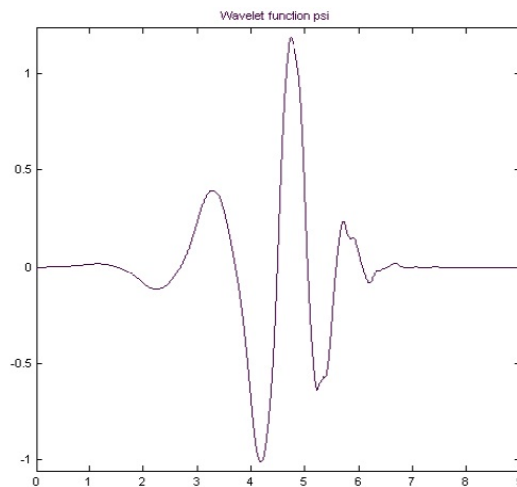


Figura 3.4 Transformada Wavelet Daubechies

La transformada Daubechies tiene la propiedad de formar bases ortogonales, y posee soporte compacto.

Este trabajo mostrará diferentes tipos de Transformada Wavelet que existen limitándonos a tres de ellas; Morlet, Shannon y B-Spline, para realizar una comparación y seleccionar cual es la Wavelet apropiada para la realización del análisis que se quiere desarrollar.

### Familia de Wavelets

Tabla 3.1 Familia de Wavelets

Wavelet	Nomenclatura	Tipo	Normal	Compleja	Uso
Haar + -db1-	“haar”	NC			Geoestadística/ Análisis de señales con transiciones repentinas
Daubechies +	“db”	C		✓	Procesamiento de señales discretas
Coiflet +	“coif”				
Symlet +	“sym”			✓	
Biortogonal +	“bior”				
Morlet +	“morl”	C		✓	Análisis de padrones de voz
Mexican Hat +	“mexh”			✓	Reconocimiento de imágenes
Shannon +	“shan”	C		✓	Reconocimiento de imágenes
Meyer +	“meyr”	C		✓	
Discreta de Meyer	“dmeyr”	D			
Gaussiana	“gaus”			✓	
B-spline	“fbsp”	C		✓	

### **Metodología Propuesta**

En la Figura 3.5 se observa la metodología propuesta que consiste básicamente en seis pasos. Como primer paso se obtiene la imagen que contiene al objeto a digitalizar.

Es importante mencionar que se deben tener 2 imágenes, siendo la primera el patrón de franjas que se toma como referencia, y la segunda es el mismo patrón pero proyectado sobre el objeto a digitalizar. Como segundo paso tenemos que aplicar la Transformada Wavelet a ambas imágenes. Además, como se mencionó anteriormente, únicamente se tomarán en cuenta los tipos más comunes de Transformada Wavelet que existen en aplicaciones de reconstrucción tridimensional, considerando las propiedades (alcances y limitaciones) que cada una de estas transformadas presentan.

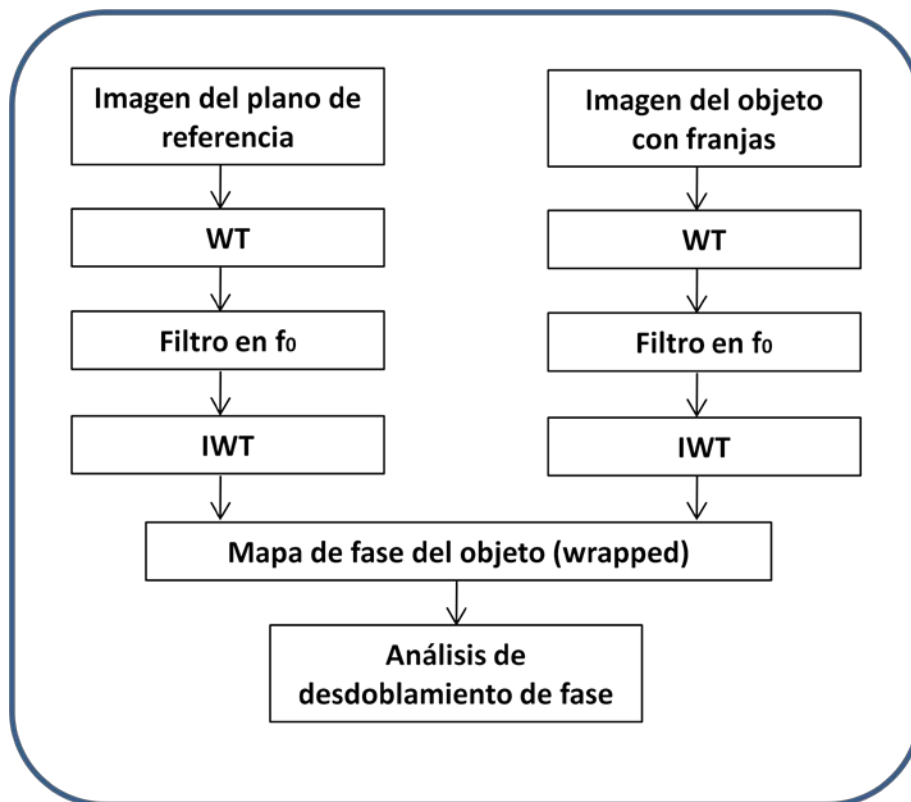


Figura 3.5 Método WTP modificado incluyendo el análisis de desdoblamiento de fase.

El tercer paso de la metodología es la determinación del número de franjas que contiene la imagen, este número es importante debido a que sirve para encontrar la frecuencia espacial  $f_0$ , la cual se utiliza en el proceso de filtrado. El cuarto paso es que una vez que se ha llevado a cabo el filtrado en la frecuencia  $f_0$ , se obtiene la transformación inversa wavelet. Mediante la detección del valor de amplitud mayor en



cada posición de los coeficientes de la Transformada Wavelet, la fase modulante del patrón de franjas proyectado se puede recuperar, obteniendo de esta forma la información deseada. En el caso de la Transformada Wavelet se considera a la frecuencia  $\omega_0$ , la cual está relacionada directamente con la frecuencia  $f_0$ . Una vez que se obtienen las transformadas inversas correspondientes, se lleva a cabo el quinto paso, que es la obtención del mapa de fase del objeto mediante la comparación entre las imágenes obtenidas después de la aplicación de los pasos 1 al 4. El resultado de la aplicación de los pasos 1 al 5 es una imagen que tiene características especiales, como lo es el que la información de la profundidad de los objetos en cada punto. Esta información se encuentra envuelta entre los valores de  $-\pi$  a  $\pi$ , por lo que será necesario aplicar un análisis de desdoblamiento de fase.

Finalmente, el paso final es la implementación del análisis de desdoblamiento de fase mencionado. Se considerarán algoritmos de desdoblamiento de fase ya existentes debido a que ya han sido validados en trabajos previos y además queda fuera del alcance de este trabajo de investigación. Como ejemplo, tenemos el algoritmo de desdoblamiento de fase propuesto por [Itoh, 1982], el cual permite obtener la profundidad del objeto.

En el desarrollo de la tesis se aprovecharán todas las características de algunas transformadas wavelet, así como la comparación de resultados de trabajos previos [Jay Yagnik et al, 2005], [Pedraza et al, 2009], con la finalidad de mejorar el análisis de las variaciones de frecuencias cercanas así como identificar y separar las frecuencias que se traslapan

El método propuesto en la Figura 3.5, se desarrollará utilizando algunas transformadas de wavelet diferentes que existen como: Haar, Daubechies, Morlet, etc. [Lokenath Debnath, 2002], con la finalidad de ver cuál de ellas presenta un mejor desempeño para la reconstrucción tridimensional. Se tomará como herramienta de desarrollo de software el programa Matlab.

## **Método propuesto de perfilometría Wavelet**

La transformada Wavelet ha sido investigada, aplicada y usada en el análisis de patrón de franjas para obtener información para la información de fase 2D, - interferogramas-.

La transformada de Fourier es reversible; es decir, permite ir atrás y adelante entre la señal original y la transformada; sin embargo solo una de ellas es disponible en el tiempo; por ejemplo,

- La información de frecuencia no está disponible en el tiempo de dominio de la señal.
- La información de tiempo no está disponible en la frecuencia de dominio

Por otro lado sabemos que para una señal no estacionaria se requiere que la información tanto de tiempo como de frecuencia, estén disponibles al mismo tiempo.

He de aquí que la precisión de la información obtenida está determinada por el tamaño de la ventana.

## ***Uso de Transformada Wavelet Morlet***

La transformada Wavelet es una herramienta utilizada para el análisis de las señales no estacionarias; además tiene la propiedad de multi-resolución en el dominio espacial y de frecuencia.

La wavelet divide la señal dentro de sus diferentes escalas.

“Mother Wavelet” obtiene su nombre de dos importantes propiedades del análisis wavelet;

1. Wavelet es una pequeña onda de duración limitada.
2. Wavelet puede ser un dato de tipo real o complejo

Sin embargo existen dos condiciones que cualquier Wavelet debe cumplir:

- a) Wavelet debe tener un promedio de valor cero y una energía infinita
- b) El término “madre” significa que las wavelets hijas, -funciones usadas en el proceso de transformación-; son derivadas de la wavelet madre.

*La wavelet Morlet brinda una mejor localización en la frecuencia y el dominio espacial para señales sinusoidales.*

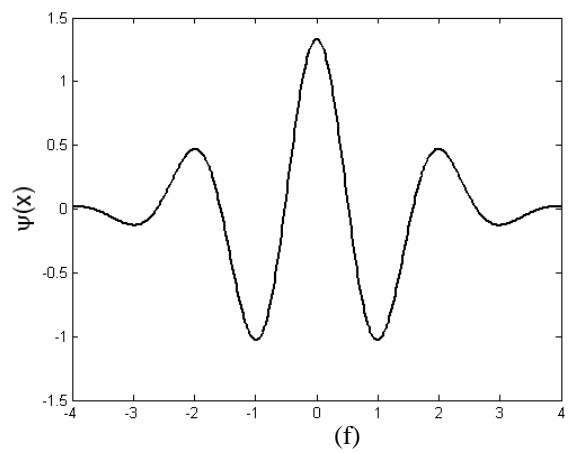
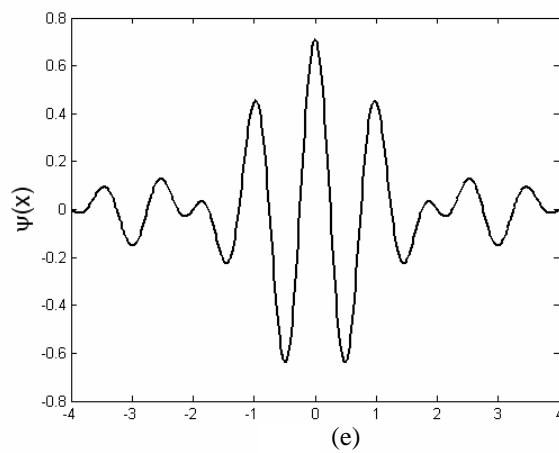
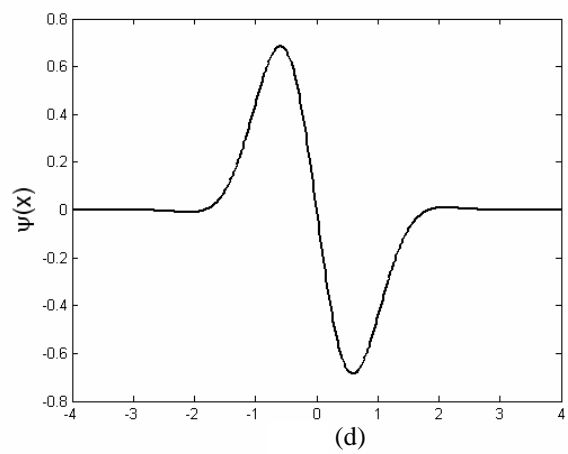
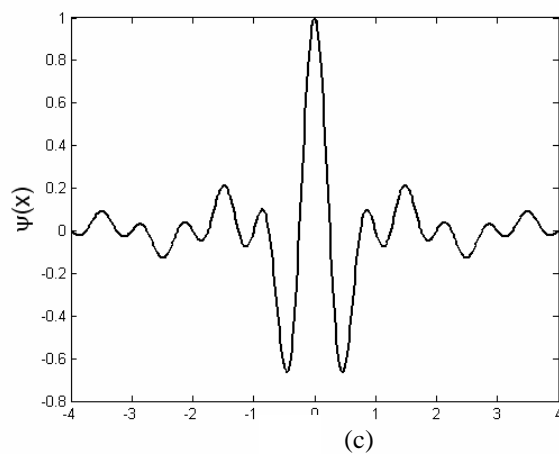
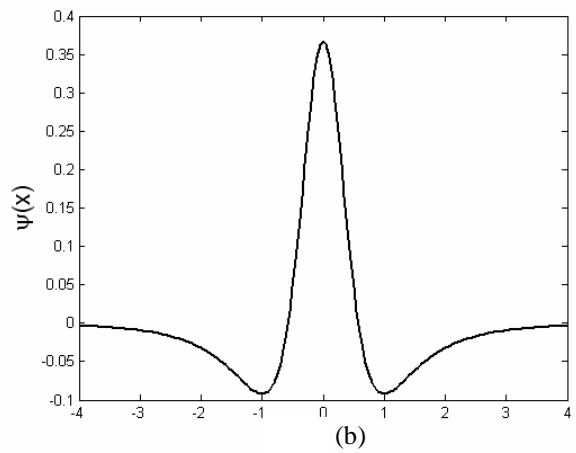
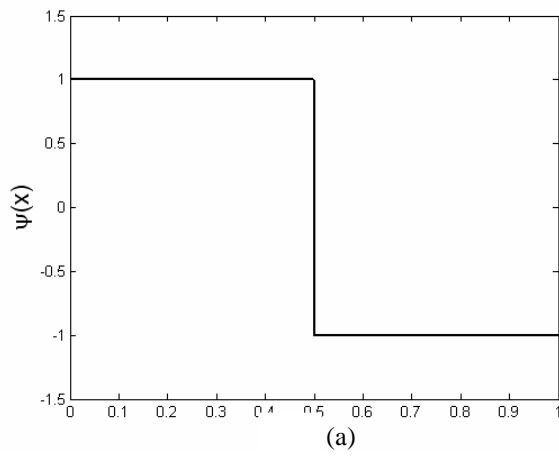


Figura 3.6 Ejemplos de Transformadas Wavelets madre (a) Haar, (b) Paul, (c) Shannon, (d) Gaussiana primera derivada, (e) B-spline, (f) Morlet

La Wavelet Morlet es una onda sinusoidal modulada para una función Gaussiana y se define como:

$$\Psi(x) = \pi^{1/4} \exp(iw_0x)\exp(-x^2/2) \quad (3.11)$$

donde:

$$\text{morl}(x) = e^{-x^2/2} \cdot \cos(5x) \quad (3.12)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$w_0 =$  *Frecuencia de la Wavelet Morlet*

La Morlet hija  $\Psi_{b,s}$  se construye por translación en el eje x por  $b$  y por dilatación por  $s$  de la Morlet madre y queda de la siguiente forma:

$$\Psi_{b,s} = \frac{1}{s} \Psi \left[ \frac{x-b}{s} \right] \quad (3.13)$$

La 1D-CWT está definida por la suma de todos los valores en el tiempo de una señal dimensional  $f(x)$  multiplicada por la escala con versiones cambiadas de la wavelet madre. Estos procesos producen coeficientes wavelets, los cuales son funciones de escala  $s$  y traslación  $b$ , y está dado por:

$$W(s,b) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi^* \left[ \frac{x-b}{s} \right] dx \quad (3.14)$$

donde:

f(x)	Renglón del patrón de Franjas
*	Conjugación Compleja
s	Escala
b	Traslación

Esto demuestra que existe una similitud entre las hijas wavelets y la señal misma; la localización en tiempo y frecuencia de las wavelets en los dominios de tiempo y frecuencia, son controlados por la traslación de la wavelet sobre el eje x y el cambio de la escala.

Cuando se usa 1D-CWT para procesar una señal unidimensional, el resultado CWT es un arreglo dimensional complejo; es decir, la función es un parámetro de escala s y traslación b.

La cresta del CWT se define como el lugar donde la magnitud de la CWT alcanza su local máximo de la dirección de escala s [Liu, 2004 et al].

La distribución de intensidad se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 G(x) &= A(x) + B(x) \cos(\varphi(x)) \\
 &= A(x) + \frac{1}{2}B(x)\exp(j\varphi(x)) + \frac{1}{2}B(x)\exp(-j\varphi(x))
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

La fase puede ser expandida a la serie de Taylor alrededor de la traslación b

$$\varphi(x) = \varphi(b) + \varphi'(b)(x - b) + \frac{\varphi''(b)}{2!} (x - b)^2 + \dots
 \tag{3.16}$$

Asumiendo una pequeña variación de A(x) y B(x), comparado a la propia frecuencia espacial del patrón de franjas, podemos decir:

$$\begin{aligned}
 A(x) &\approx A \\
 B(x) &\approx B
 \end{aligned}$$

Si  $\varphi'(b)$  varía lentamente tendríamos:

$$\varphi''(b) \approx \varphi'''(b) \approx \dots \approx 0$$

Así la transformada continua de G(x) se aproxima a:

$$\begin{aligned} W(s, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A + \frac{1}{2} B \exp \left( i(\varphi(b) + \varphi'(b)(x-b)) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} B \exp \left( -i(\varphi(b) + \varphi'(b)(x-b)) \right) \right\} \Psi_{s,b}^*(x) dx \\ &= A\sqrt{2\pi} \exp \left( -\frac{w_0^2}{2} \right) + \frac{1}{2} B\sqrt{2\pi} \exp \left( -\frac{(w_0 + sw_s)^2}{2} \right) \exp(-iw_s b) \\ &\quad + \frac{1}{2} B\sqrt{2\pi} \exp \left( -\frac{(w_0 - sw_s)^2}{2} \right) \exp(iw_s b) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Porque los valores son mayores a cero; el valor máximo está en:

$$s = w_0/w_s$$

donde:

$w_0$  Frecuencia de la wavelet madre

$w_s$  Frecuencia de la señal

Por lo tanto, queda simplificada como:

$$W(s_0, b) = \frac{1}{2} B\sqrt{2\pi} \exp(\pm i w_s b) \quad (3.18)$$

La parte real es:

$$ReW(s_0, b) = \frac{1}{2} B\sqrt{2\pi} \cos(w_s b) \quad (3.19)$$

Se puede observar en la ecuación (3.19) está contenida la información de fase de la señal original.

## Transformada Wavelet Continua Algoritmo Unidimensional.

Existen dos formas para extraer la fase de un patrón de franjas usando el 1D-CWT:

1. Algoritmo de estimación de fase
2. Algoritmo de estimación de frecuencia (Gdeisat, et al., 2006)

El algoritmo de estimación de fase emplea wavelets madre complejas para estimar la fase del patrón de franjas.

La distribución de la fase está dada por:

$$\varphi(x, y) = 0.1[(x - 256)^2 + (y - 256)^2]^{1/2} \quad (3.20)$$

El patrón de franjas es:

$$I(x, y) = \cos(2\pi f_0 x + \varphi(x, y)) \quad (3.21)$$

donde:

$f_0$  Frecuencia espacial

La fase a través del patrón de franjas es monótonamente creciente

Algoritmo Estimación de Fase: Demodula el patrón de franjas. La CWT es un arreglo bidimensional complejo; el arreglo de módulo y fase que expresado como:

$$Modulus = |W(s, b)| = \sqrt{[Re(W(s, b))]^2 + [Im(W(s, b))]^2} \quad (3.22)$$

$$Phase = \arctan \left\{ \frac{Im(W(s, b))}{Re(W(s, b))} \right\} \quad (3.23)$$

donde:



Im      Imaginario  
Re      Real

En una imagen de escala de grises el color blanco indica los valores largos y el negro los valores pequeños.

El eje horizontal es la traslación  $b$  y el eje vertical es la escala  $s$

### Wavelet Morlet Compleja

Correlación entre la señal  $f(x)$ , que implica el renglón bidimensional del patrón de franjas y las wavelet Morlet con valores de escala diferentes; la transformada estará en su valor máximo en la región de  $(2\pi f_0/s, b)$ ; la cual determina el espacio en que la wavelet hija y la señal son muy similares. El módulo es máximo cuando la frecuencia analizada se sitúa muy cerca a la frecuencia de la señal; esto nos muestra en que región está la fase de la señal y la frecuencia. Por otro lado la parte real e imaginaria determinan la fase de la señal; por ejemplo, si la fase está muy cerca a la parte real; la parte real de la transformada alcanza su máximo valor y la parte imaginaria en muy cercana a cero. El radio entre la parte real e imaginaria determina la fase de la señal.

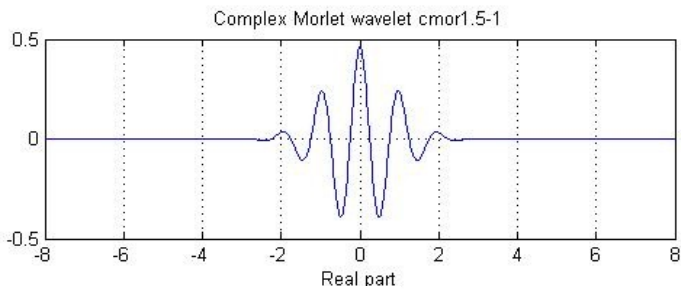
Algoritmo Estimación de Frecuencia: Extrae la fase del patrón de franjas por la estimación de las frecuencias instantáneas en el patrón de franjas.

Las frecuencias estimadas son integradas a la fase del patrón de franjas y además el desenvolvimiento de fase no es necesario.

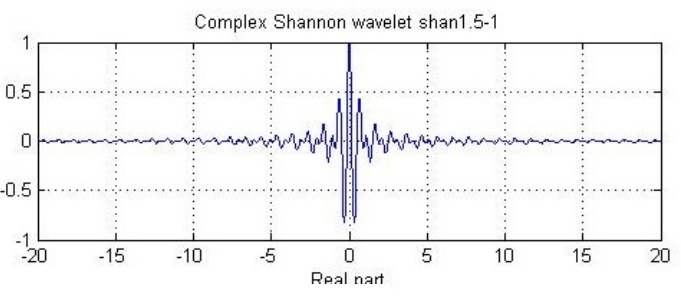
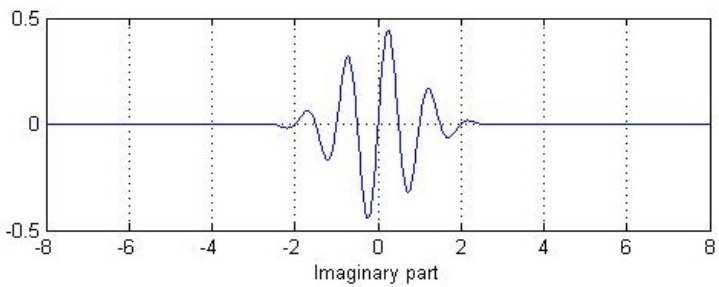
La wavelet Morlet compleja y real son empleadas para extraer la información de la fase del patrón de franjas.

Si se usa una Morlet compleja y el 1D-CWT para demodular el patrón de franja; el resultado es un arreglo complejo bidimensional.

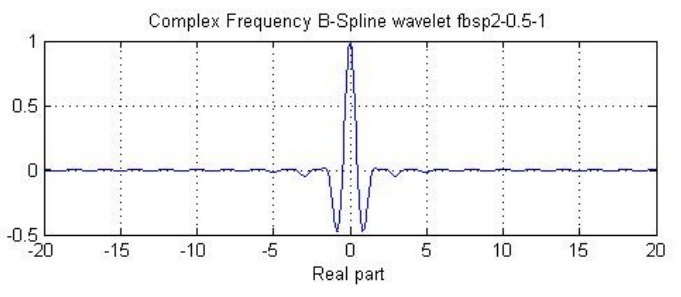
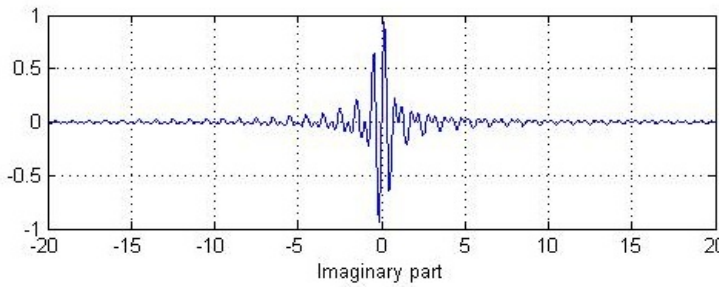
La escala de valor  $s_{max}(b)$  y su valor máximo en cada columna están determinados por:



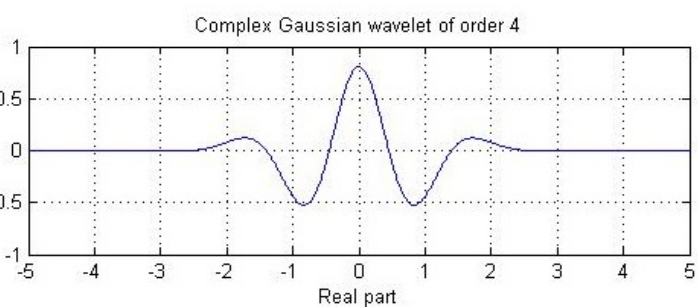
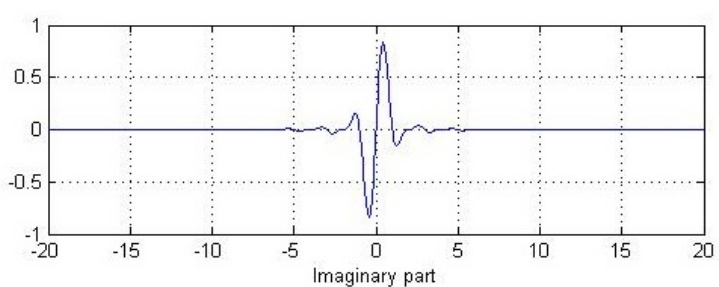
(a)



(b)



(c)



(d)

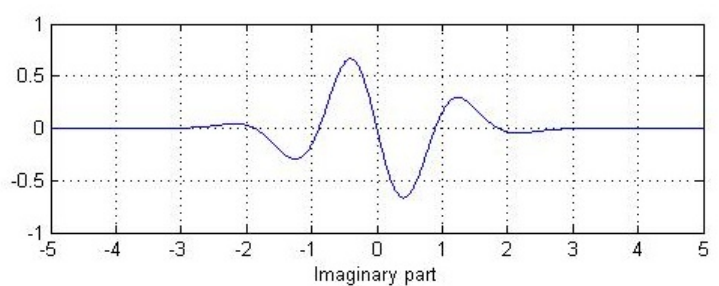


Figura 3.7 Transformadas Wavelets Complejas: (a) Morlet, (b) Shannon, (c) B-Spline, (d) Gaussiana.

$$\hat{f}(b) = \frac{w_0 + \sqrt{w_0^2 + 2}}{2s_{max}(b)} - 2\pi f_0 \quad (3.24)$$

⇒ Estimación de Frecuencias Instantáneas, [Dursun 2004, et al]

### Algoritmo Extracción de Cresta

Este algoritmo juega un rol importante en el proceso de análisis de franjas con el uso de transformadas wavelets; siendo una herramienta fundamental en la extracción de la fase. La cresta corresponde al máximo de módulos de la CWT; pero éste se dará cuando la frecuencia de la transformada Morlet se encuentre muy cerca de la frecuencia de la señal original. También puede ser obtenida del arreglo del módulo o del arreglo de la fase.

Algoritmo Máximo Directo: Se determina el valor máximo de cada columna del módulo; después el valor de la fase correspondiente es elegido del arreglo de la fase; éste proceso se repite para cada renglón del patrón de franjas y al final el resultado es una fase de mapa envuelto, que necesita ser desenvuelta –desdoblamiento de fase-

Este algoritmo es usado en el proceso de demodulación libre de ruido; por otro lado si le sumamos ruido se genera la siguiente ecuación:

$$I(x, y) = \cos(2\pi f_0 x + \varphi(x, y)) + Noise \quad (3.25)$$

donde:

Noise Distribución aleatoria – 0 –  
Desviación estándar – 1.0 –

[Colonna De Laga 1997]

Algoritmo Función de Costos: Para mejorar el performance del ruido de la 1D-CWT [Liu et al] formalizó el problema de extracción de cresta como una función de costo e implementó su algoritmo usando optimización de programación dinámica; la técnica busca la ruta óptima en el módulo de la CWT.

Una función de costos ha sido introducida en 1D-CWT como una herramienta para determinar la cresta; de ello tenemos que:

$$Cost[\phi(b), b] = -C_0 \int_b |S[\phi(b), b]|^2 db + C_1 \int_b \left| \left[ \frac{\partial \phi(b)}{\partial b} \right] \right|^2 db \quad (3.26)$$

donde:

$\phi(b)$	Cualquier valor del parámetro de escala S
$b$	Parámetro de traslación en el eje x
$S[\phi(b), b]$	Valor del módulos
$C_0$	Coficiente del peso del módulos
$C_1$	Coficiente de peso del gradiente $\phi(b)$

El costo de la variación está dada por:

$$Cost = \sum_{b=2}^W \{-|S[\phi(b), b]|^2 + |\phi(b) - \phi(b - 1)|^2\} \quad (3.27)$$

donde:

$W$	Ancho de patrón de franjas en pixeles
$C_0$	Adquiere el valor de 1, para simplificar la ecuación
$C_1$	Adquiere el valor de 1, para simplificar la ecuación

Asumiendo que la ruta óptima va del punto  $(p, j)$ ; es decir,  $\phi(j) = p$ , entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
Cost = & \sum_{b=2}^j \{-|S[\phi(b), b]|^2 + |\phi(b) - \phi(b-1)|^2\} \\
& + [-|S[(p, j)]|^2 + |p - \phi(j-1)|^2] \\
& + \left( \sum_{b=j+1}^W \{-|S[\phi(b), b]|^2 + |\phi(b) - \phi(b-1)|^2\} \right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

La ruta completa puede ser dividida en dos partes:

$$\begin{array}{ccc}
\phi(b=1) & a & \phi(b=j) \\
\phi(b=j) & a & \phi(b=W)
\end{array}$$

Al conocer el principio y el final se obtiene: El costo (p, j)

$$\begin{aligned}
Cost(p, j) = \min_{\phi} & \left[ \sum_{b=2}^{j-1} \{-|S[\phi(b), b]|^2 + |\phi(b) - \phi(b-1)|^2\} \right. \\
& \left. + [-|S[(p, j)]|^2 + |p - \phi(j-1)|^2] \right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

El costo de (q, j+1) es:

$$Cost(q, j+1) = \min\{Cost(p, j) - |S[q, j+1]|^2 + |q - p|^2\} \tag{3.30}$$

La minimización de la ruta completa está formada por múltiples minimizaciones de sub-rutas finalizando cada nodo en cada columna.

Este algoritmo toma los puntos máximos de cada columna del módulo; además de un simple máximo global; éstos son considerados puntos potenciales, (candidatos); para la cresta. Se puede construir una matriz con estos puntos para poder encontrar diferentes rutas potenciales evaluadas por la función de costos, para finalmente extraer la mínima óptima definiéndola así como la cresta de la CWT.

Algoritmo Mapa de Fase: Basado en un algoritmo de fase de la Transformada Wavelet más que en el módulo; sus estimaciones son más precisas.

El método está basado en los siguientes principios:

$$w = w_0/s \quad \text{Análisis de Frecuencia, es casi igual a la señal de la frecuencia } w_s$$

El algoritmo comienza con:

- a) Un valor inicial de un factor de escala  $s_0$ .
- b) Una frecuencia nueva  $w_1$ , es determinada por  $d\phi w_{(s_0,b)}/db$ .
- c) El valor de escala correspondiente  $s_1 = w_0/w_1$ , se usa para encontrar  $w_2 = d\phi w_{(s_1,b)}/db$ .
- d) La iteración es obtenida cuando  $(s_{i+1} - s_i)/s_i$ , el valor es más bajo que el umbral predeterminado.
- e) Cuando  $w_s(b)$  es encontrada el algoritmo continúa en el tiempo  $b+1$  con  $s_0 = w_0/w_s(b)$

### Modificación Wavelet Madre - Morlet Compleja

Se modificó para ordenar las variaciones las grandes variaciones en la fase que típicamente ocurren dentro del patrón de franjas. La Morlet compleja modificada tiene una mejor localización del dominio espacial que la convencional compleja.

Morlet:

$$\Psi(x) = \pi^{1/4} \exp(iw_0x) \exp(-mx^2) \quad (3.31)$$

En la convencional  $m = 0.5$

En la modificada  $m = 2.0$

### **Uso de Transformada Wavelet Wavelet B-Spline**

Las aplicaciones de procesamiento de señales, en su mayoría toman un determinado rango de datos; el cual está descrito mejor por un grupo de características locales que por una sola característica global. En el procesamiento de imágenes, por

ejemplo, la región de una imagen que contiene numerosas aristas es mejor para describir la región; debido a que los valores de los píxeles de color cambian abruptamente; es decir, no son valores continuos de color. Una región de valor constante, o que cambia de color de forma gradual, puede describirse como una región cuyos valores de píxel son constantes, o se incrementan linealmente por algún factor. Es una ventaja representar este dato con señales capaces de adaptación para estos tipos de características locales, en oposición para elegir la mejor característica global. Aquí, la relación de recurrencia de la Wavelet B-Spline es presentada. Esta relación de recurrencia permite a la Wavelet de orden  $n + 1$  ser construida de una Wavelet de orden  $n$ . La relación de recurrencia provee una herramienta matemática capaz de variar localmente su grado de continuidad. El orden de diferenciabilidad de una Wavelet B-Spline incrementa en la medida que la Wavelet B-Spline incrementa y el rango de valores va desde discontinuos a un grado arbitrario de continuidad.

La B-Spline tiene sus raíces en una generación de curvas y asistido de un diseño geométrico de computadora. La B-Spline está definido para un polinomio por partes con un soporte compacto

Estas Wavelets pueden ser clasificadas en cuatro categorías: Ortogonal (Battle-Lemarié), semi-ortogonal (B-Spline), traslado-ortogonal, y, biortogonal (Cohen-Daubechies-Feauveau) a diferencia de las Wavelets más básicas, splines tiene fórmulas explícitas en ambos dominios de tiempo y frecuencia los cuales facilitan en mucho su manipulación. Permitiendo una transición progresiva entre los dos casos extremos de una multiresolución: Tramos constantes de la representación de Haar – spline de grado cero (versus el modelo de banda limitado de Shannon; el cual corresponde al spline de orden infinito). Las Wavelets Spline son extremadamente regulares y usualmente simétricas o anti-simétricas. Éstas pueden ser designadas para tener un soporte compacto y para lograr una localización óptima en tiempo-frecuencia (Wavelet B-Spline). Las funciones de escala subyacentes son las B-Spline, las cuales son las más cortas y con funciones de escala más regulares de orden  $L$ . Finalmente, Splines tienen las mejores propiedades de aproximación entre todas las wavelets.

conocidas de un orden L dado. En otras palabras ellas son las mejores para la aproximación de funciones continuamente diferenciables.

La Wavelet B-Spline Compleja está dada por:

$$\Psi(x) = \sqrt{f_b} \exp(2\pi i f_c x) \left[ \text{sinc} \left( \frac{f_b x}{m} \right) \right]^m \quad (3.32)$$

El algoritmo que MatLab implementa para la función anterior está representado por:

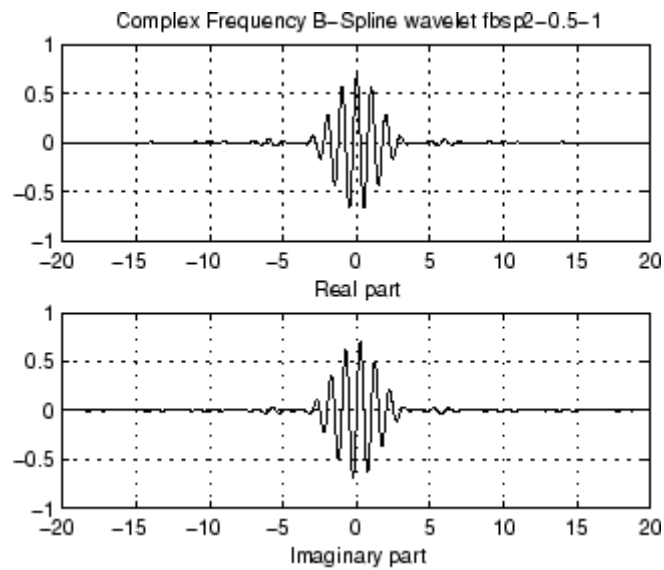


Figura 3.8 Wavelet B-Spilne Compleja

### **Uso de Transformada Wavelet Shannon**

La Wavelet Shannon es estudiada conjuntamente con sus propiedades diferenciales; conocidas como la conexión de sus coeficientes; esto muestra que el Teorema de muestreo de Shannon puede ser considerado en un enfoque general más adecuado para el análisis de funciones que van en bandas de multifrecuencia. Esta generalización coincide con la reconstrucción de las funciones  $L_2(\mathbb{R})$  de Wavelet Shannon, siendo las propiedades diferenciales de la Wavelet Shannon estudiadas también a través de su conexión de coeficientes.



La Función de la Transformada Wavelet Shannon Compleja está dada por:

$$\Psi(x) = \sqrt{f_b} \exp(2\pi i f_c x) (\sin c(f_b x)) \quad (3.33)$$

Referenciado en el artículo Shannon Wavelets Theory (Carlo Cattani, 2008).

El algoritmo que MatLab implementa para esta función está representado por:

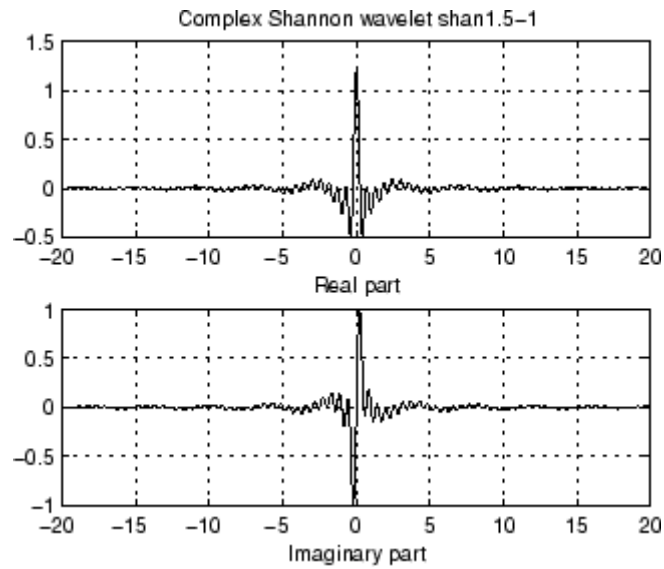


Figura 3.9 Wavelet Shannon Compleja

#### **4. RESULTADOS EXPERIMENTALES**

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos del procesamiento de imágenes virtuales y reales; además de la comparación de dichos resultados.

Se realizó proyección de franjas sobre los objetos mostrados, variando el número de franjas para determinar cuál es número de franjas que nos brinda una mejor reconstrucción 3D.

Este procesamiento fue realizado en dos equipos con características diferentes con la finalidad de evaluar el tiempo de respuesta en cada uno de los equipos y determinar que características favorecen el mismo.

##### **Objetos creados por computadora.**

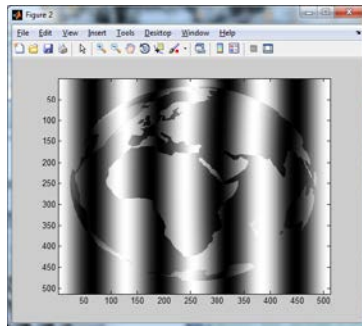
Pruebas con objetos virtuales (creados por computadora)

Pruebas de proyección de franjas sobre objetos 3D, con variación de franjas de 8, 16, 32, 64 y 128; se muestran la variación de las franjas sobre los objetos haciendo uso además de las diferentes transformadas y la reconstrucción que esta implementación da como resultado.

## Transformada Morlet (8 Franjas)



Imagen Virtual Original



Franjas proyectadas

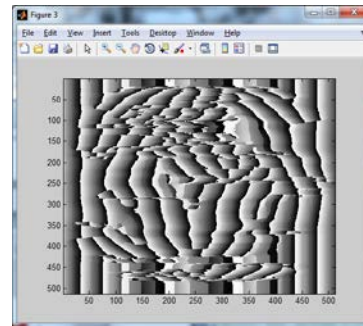
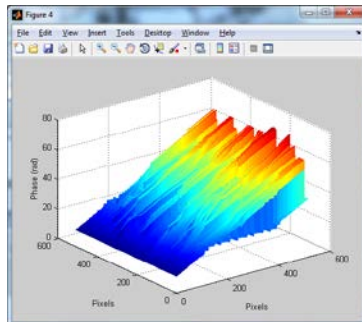
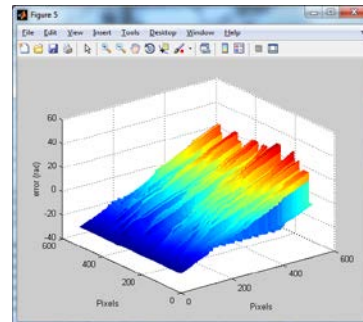


Imagen de Fase

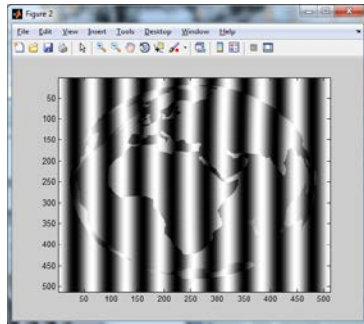


Reconstrucción 3D



Error

Figura 4.1 Transformada Morlet 8 franjas



Franjas proyectadas

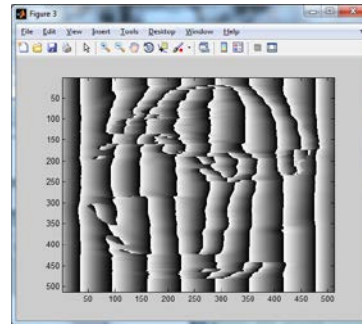
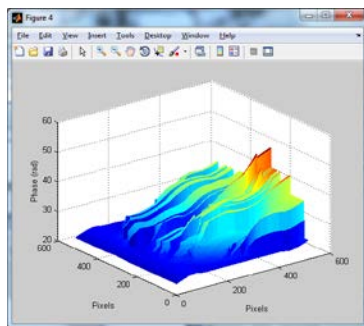
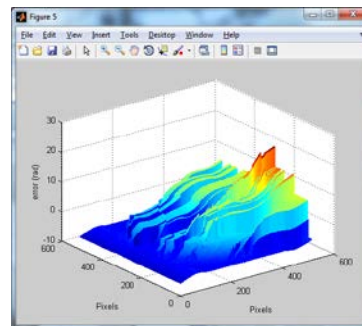


Imagen de Fase

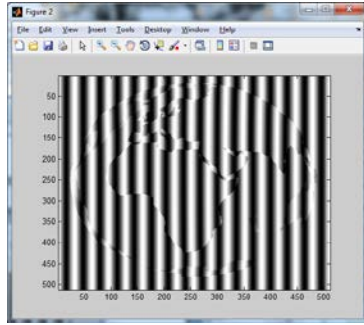


Reconstrucción 3D



Error

Figura 4.2 Transformada Morlet 16 franjas



Franjas proyectadas

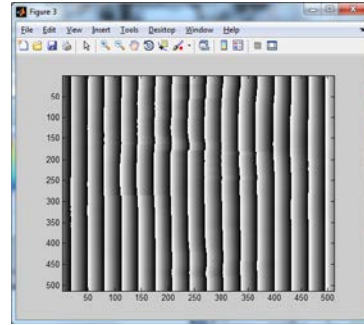
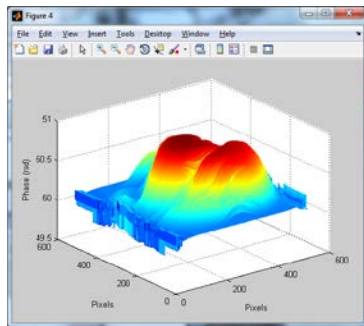
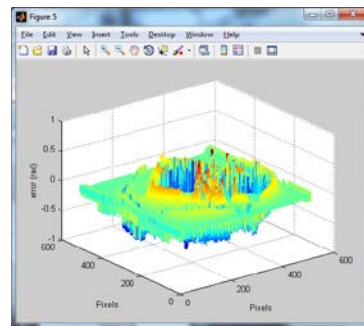


Imagen de Fase

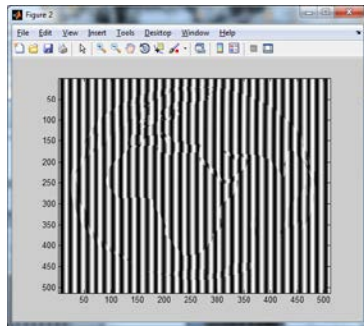


Reconstrucción 3D



Error

Figura 4.3 Transformada Morlet 32 franjas



Franjas proyectadas

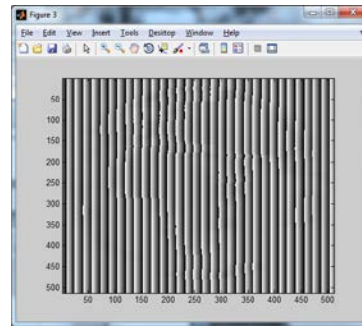
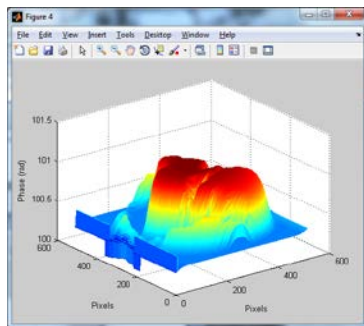
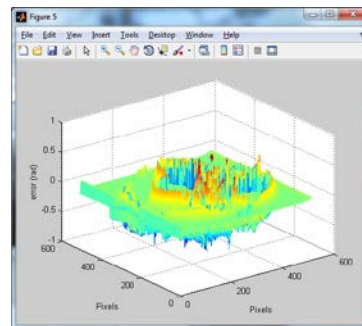


Imagen de Fase

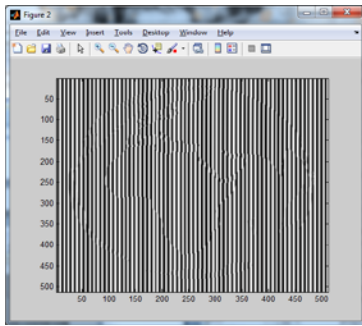


Reconstrucción 3D



Error

Figura 4.4 Transformada Morlet 64 franjas



Franjas proyectadas

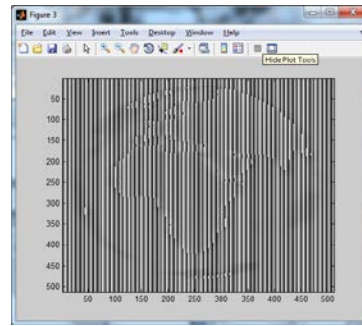
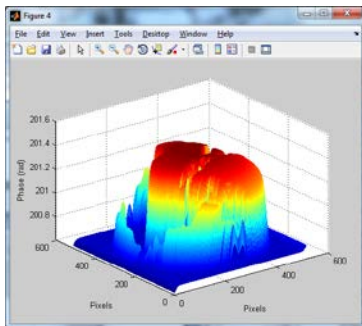
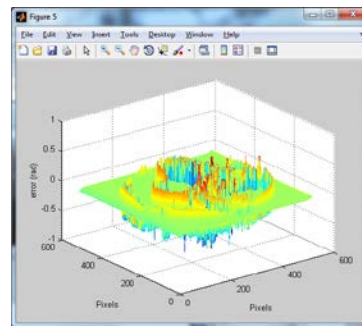


Imagen de Fase

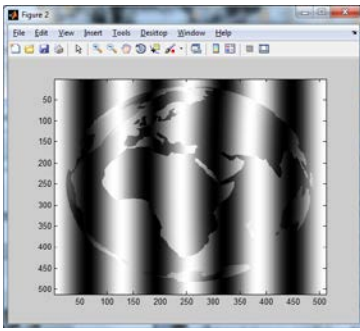


Reconstrucción 3D

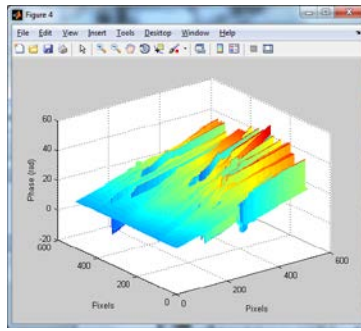


Error

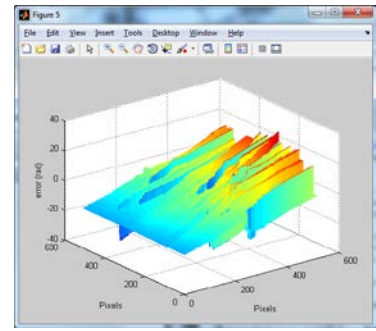
Figura 4.5 Transformada Morlet 128 franjas



Franjas proyectadas

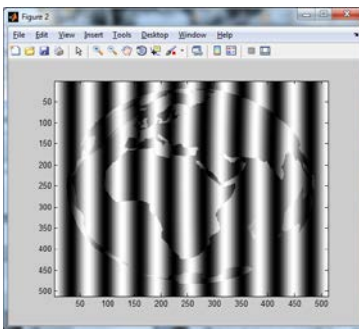


Reconstrucción 3D

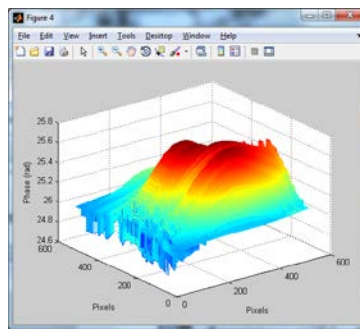


Error

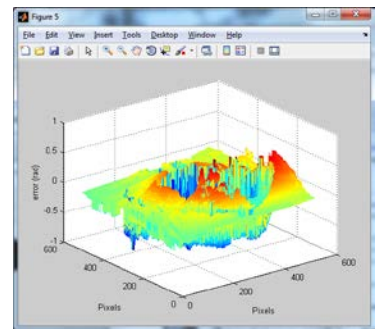
Figura 4.6 Transformada B-Spline 8 franjas



Franjas proyectadas



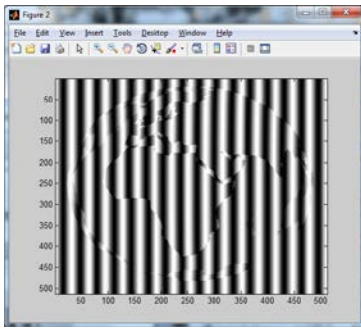
Reconstrucción 3D



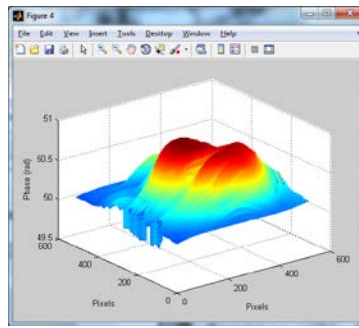
Error

Figura 4.7 Transformada B-Spline 16 franjas

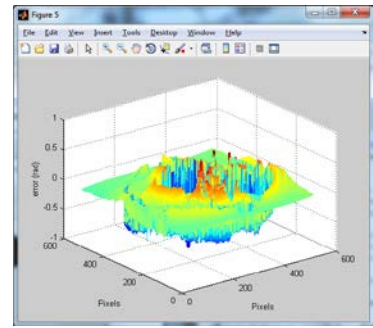




Franjas proyectadas

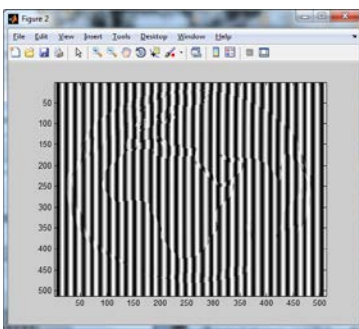


Reconstrucción 3D

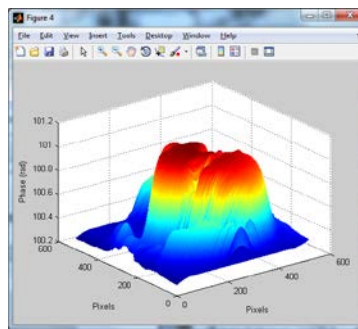


Error

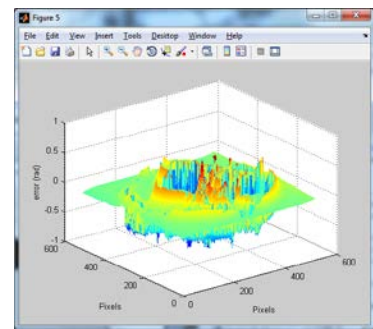
Figura 4.8 Transformada B-Spline 32 franjas



Franjas proyectadas

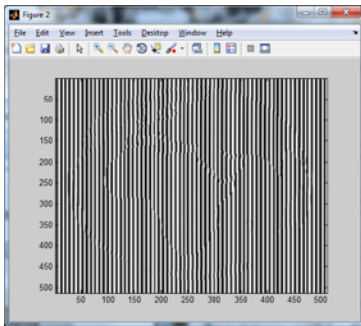


Reconstrucción 3D

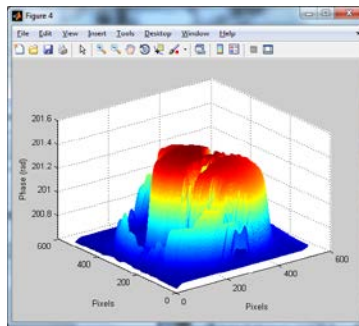


Error

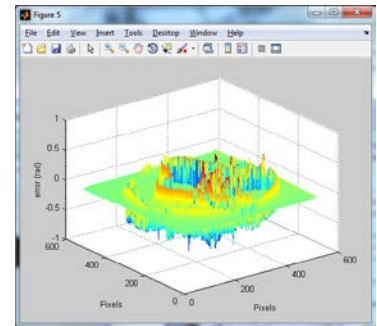
Figura 4.9 Transformada B-Spline 64 franjas



Franjas proyectadas

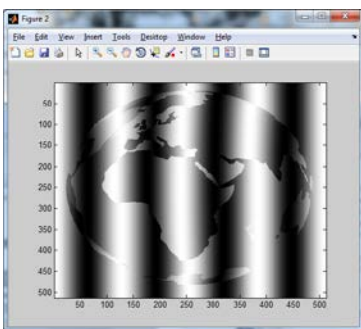


Reconstrucción 3D

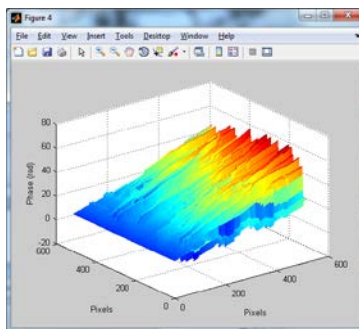


Error

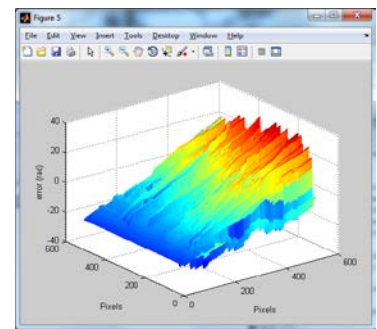
Figura 4.10 Transformada B-Spline 128 franjas



Franjas proyectadas

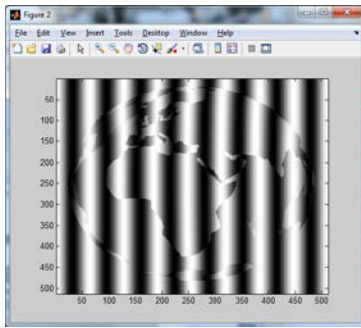


Reconstrucción 3D

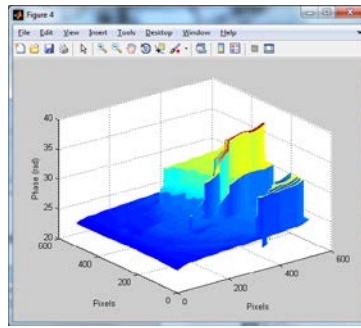


Error

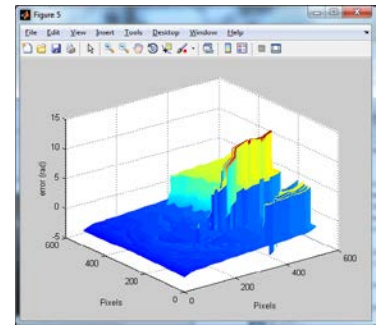
Figura 4.11 Transformada Shannon 8 franjas



Franjas proyectadas

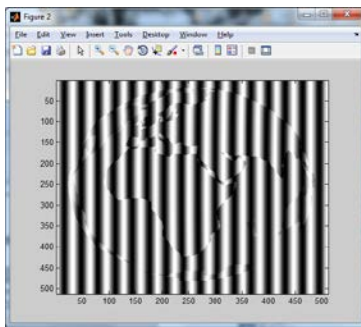


Reconstrucción 3D

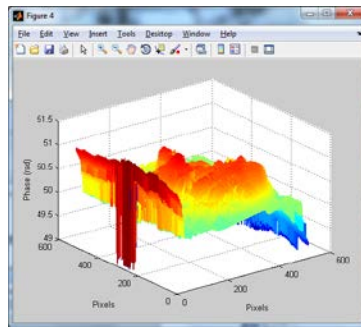


Error

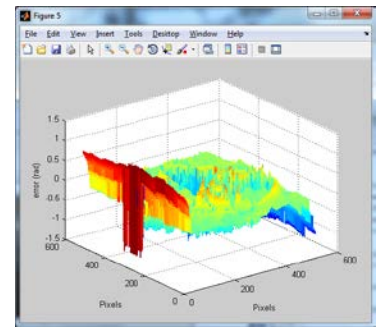
Figura 4.12 Transformada Shannon 16 franjas



Franjas proyectadas

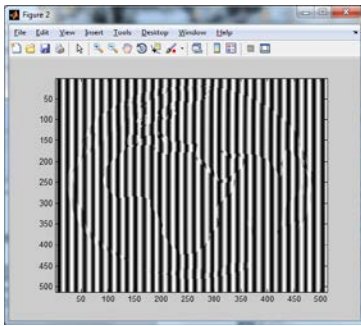


Reconstrucción 3D

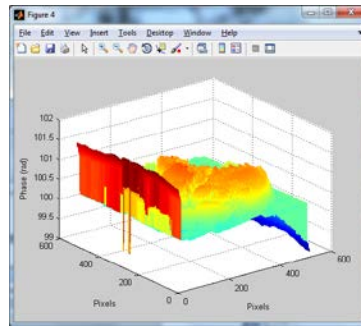


Error

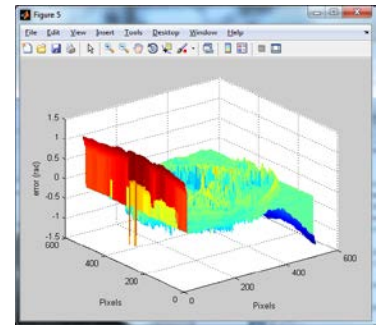
Figura 4.13 Transformada Shannon 32 franjas



Franjas proyectadas

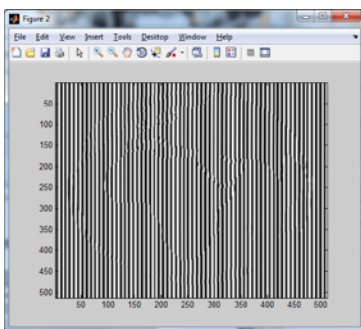


Reconstrucción 3D

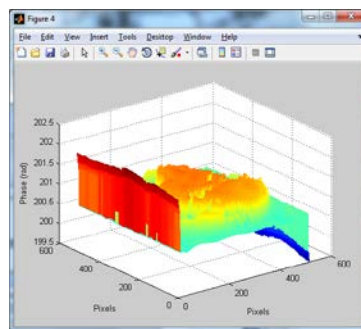


Error

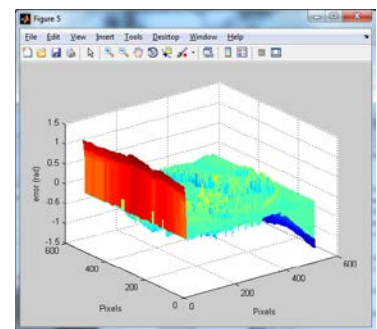
Figura 4.14 Transformada Shannon 64 franjas



Franjas proyectadas



Reconstrucción 3D



Error

Figura 4.15 Transformada Shannon 128 franjas

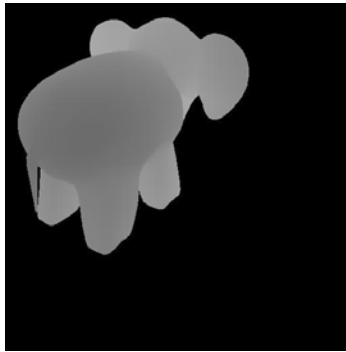
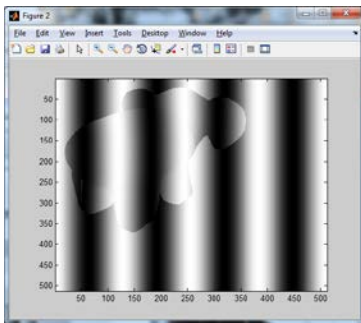
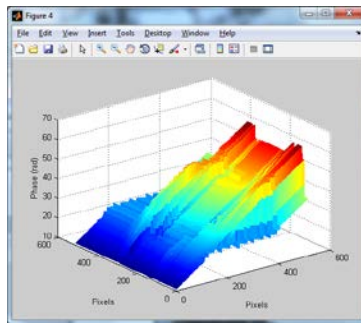


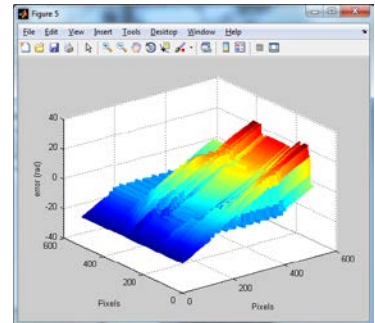
Imagen Virtual Original



Franjas proyectadas

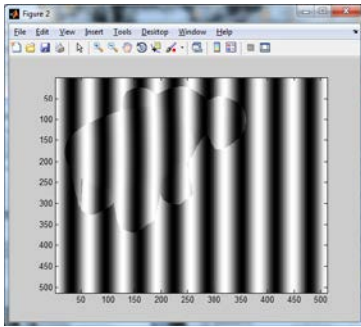


Reconstrucción 3D

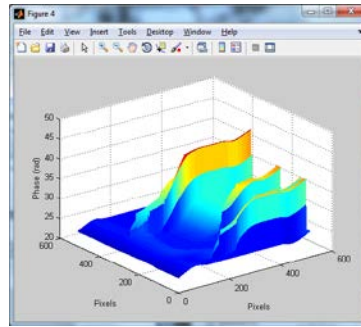


Error

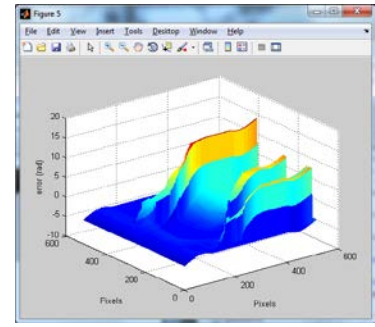
Figura 4.16 Transformada Morlet 8 Franjas



Franjas proyectadas

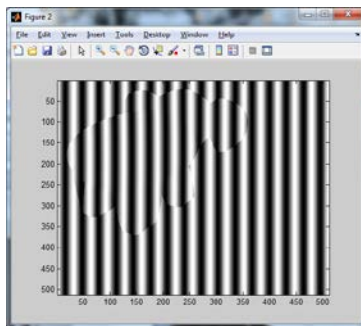


Reconstrucción 3D

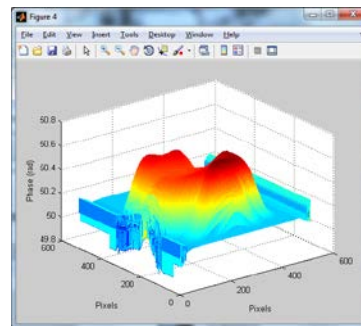


Error

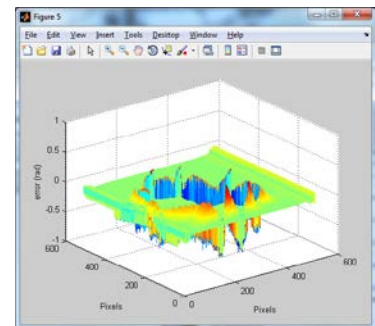
Figura 4.17 Transformada Morlet 16 Franjas



Franjas proyectadas

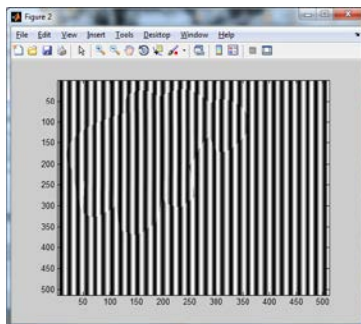


Reconstrucción 3D

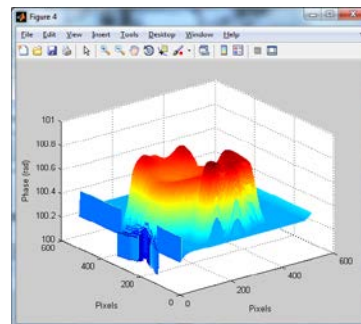


Error

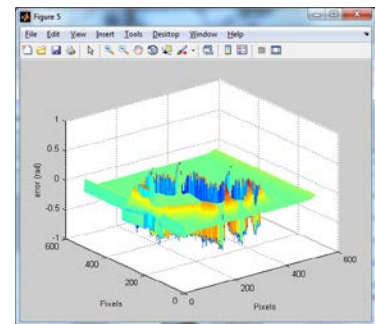
Figura 4.18 Transformada Morlet 32 franjas



Franjas proyectadas

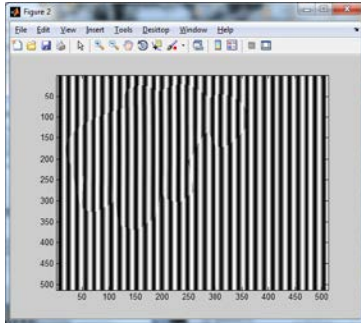


Reconstrucción 3D

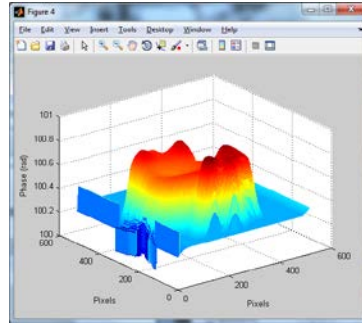


Error

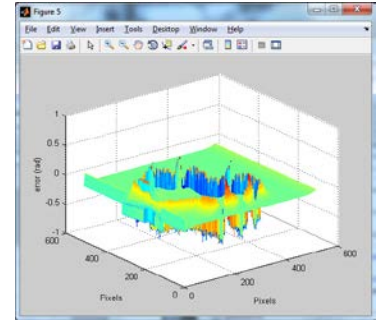
Figura 4.19 Transformada Morlet 64 franjas



Franjas proyectadas

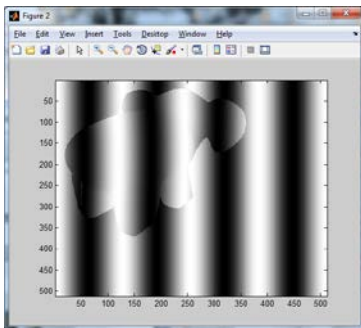


Reconstrucción 3D

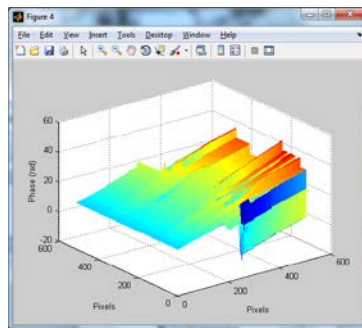


Error

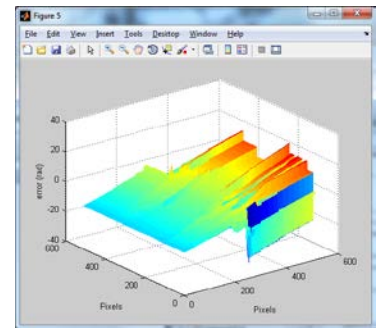
Figura 4.20 Transformada Morlet 128 franjas



Franjas proyectadas

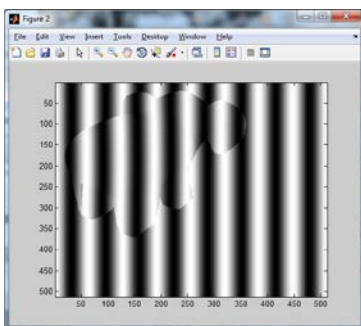


Reconstrucción 3D

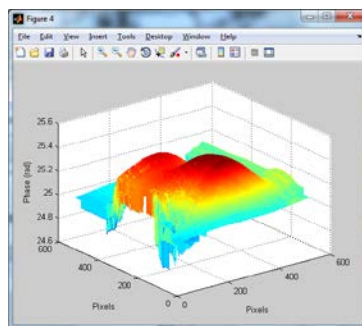


Error

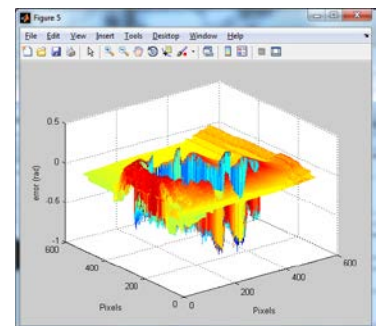
Figura 4.21 Transformada B-Spline 8 franjas



Franjas proyectadas

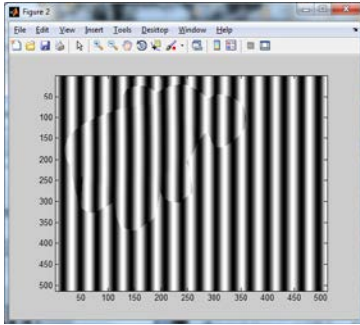


Reconstrucción 3D

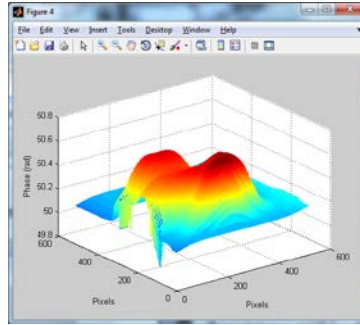


Error

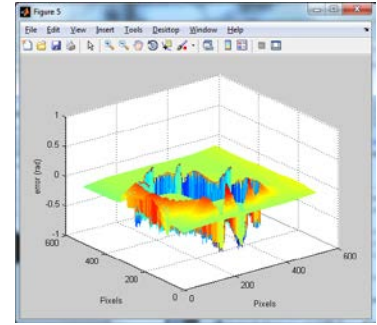
Figura 4.22 Transformada B-Spline 16 franjas



Franjas proyectadas

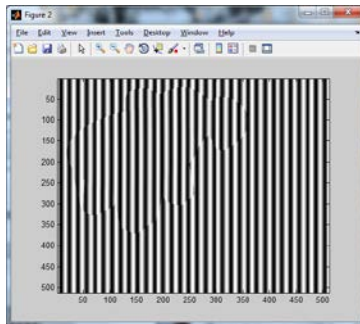


Reconstrucción 3D

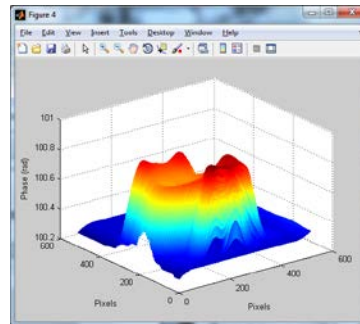


Error

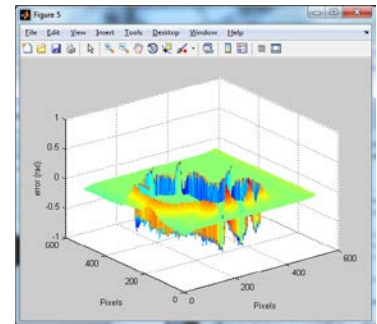
Figura 4.23 Transformada B-Spline 32 franjas



Franjas proyectadas

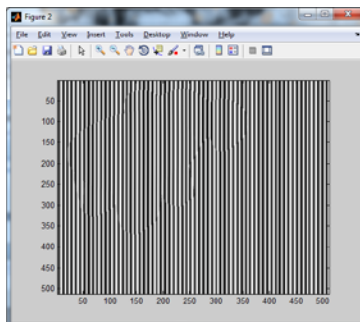


Reconstrucción 3D

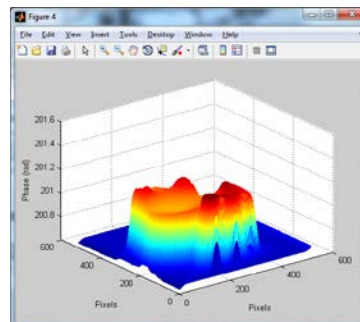


Error

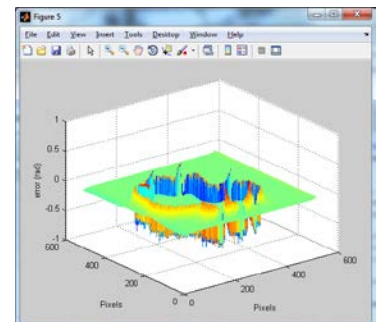
Figura 4.24 Transformada B-Spline 64 franjas



Franjas proyectadas



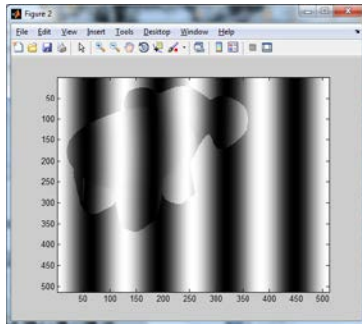
Reconstrucción 3D



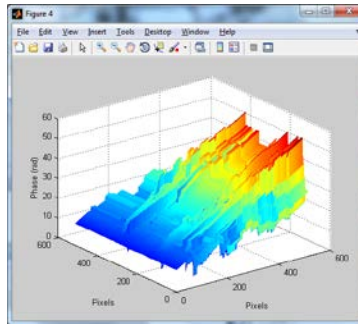
Error

Figura 4.25 Transformada B-Spline 128 franjas

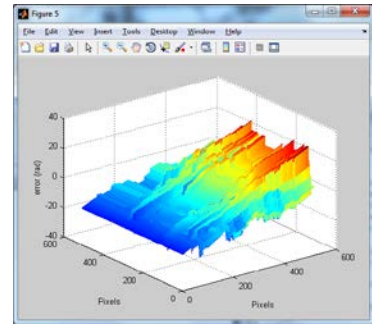




Franjas proyectadas

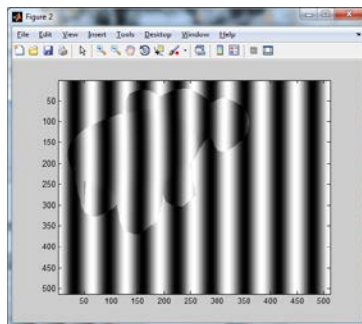


Reconstrucción 3D

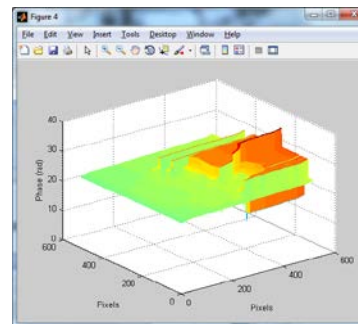


Error

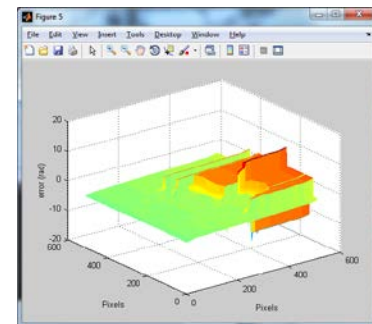
Figura 4.26 Transformada Shannon 8 franjas



Franjas proyectadas

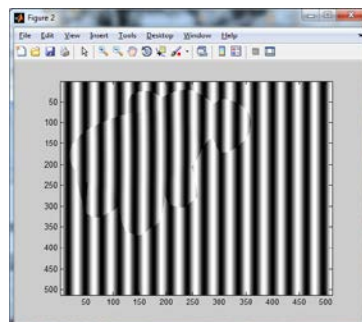


Reconstrucción 3D

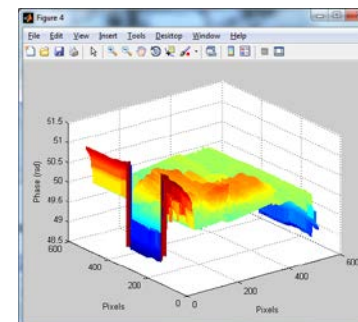


Error

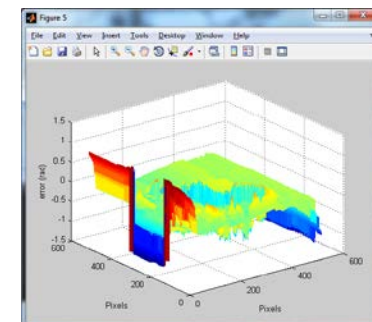
Figura 4.27 Transformada Shannon 16 franjas



Franjas proyectadas

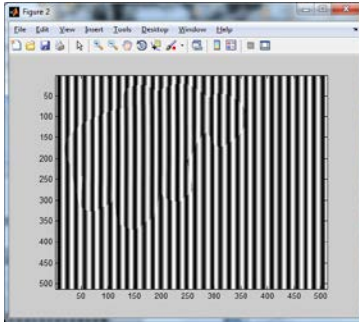


Reconstrucción 3D

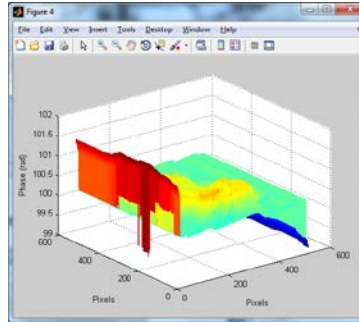


Error

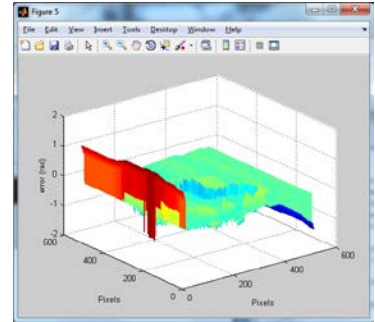
Figura 4.28 Transformada Shannon 32 franjas



Franjas proyectadas

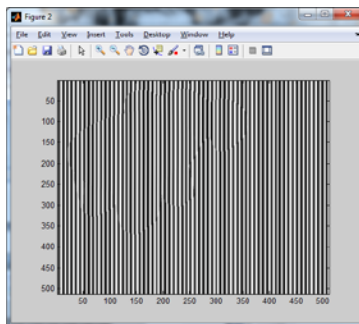


Reconstrucción 3D

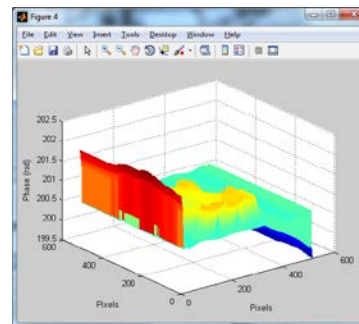


Error

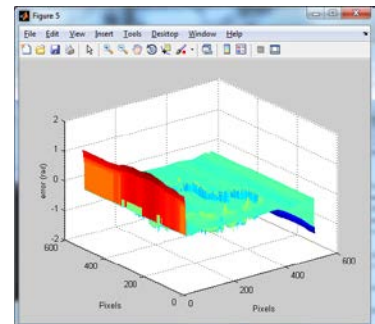
Figura 4.29 Transformada Shannon 64 franjas



Franjas proyectadas



Reconstrucción 3D



Error

Figura 4.30 Transformada Shannon 128 franjas

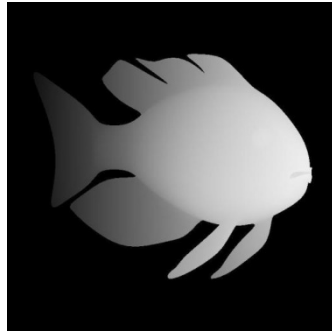
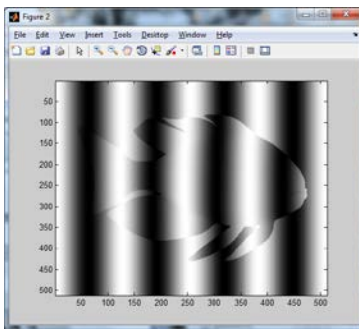
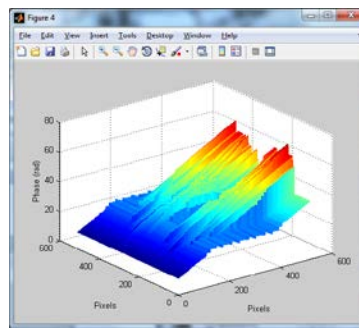


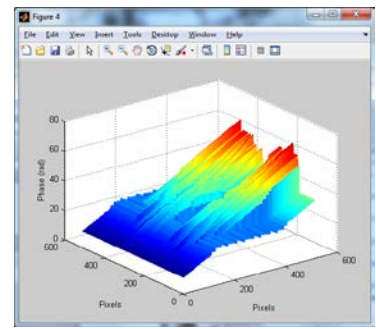
Imagen Virtual Original



Franjas proyectadas

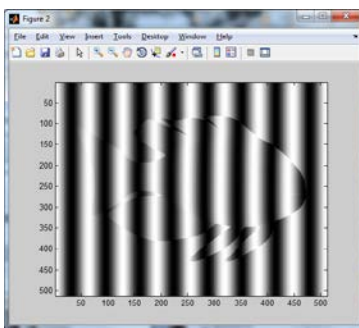


Reconstrucción 3D

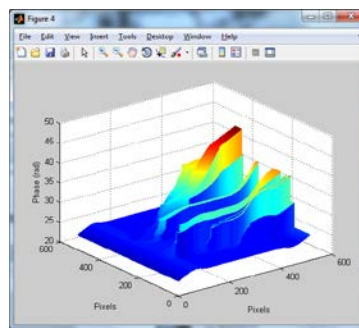


Error

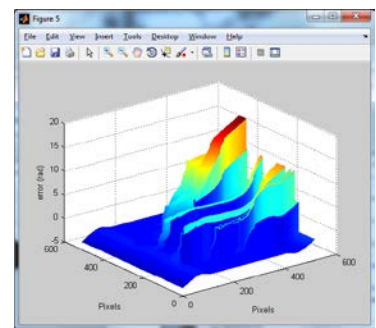
Figura 4.31 Transformada Morlet 8 franjas



Franjas proyectadas

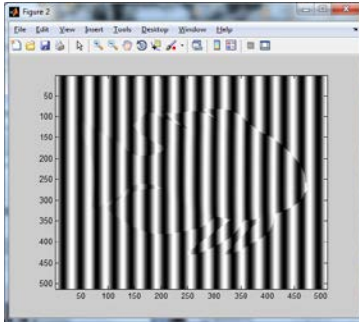


Reconstrucción 3D

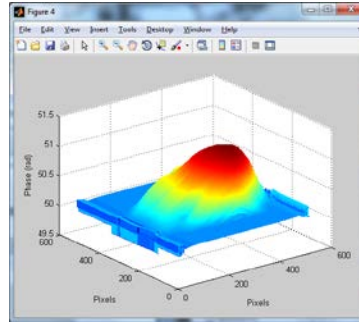


Error

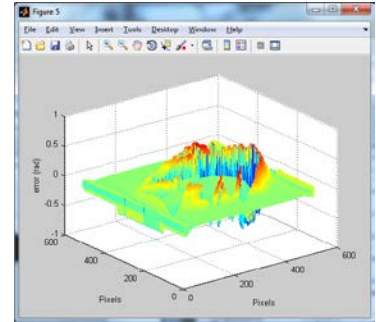
Figura 4.32 Transformada Morlet 16 franjas



Franjas proyectadas

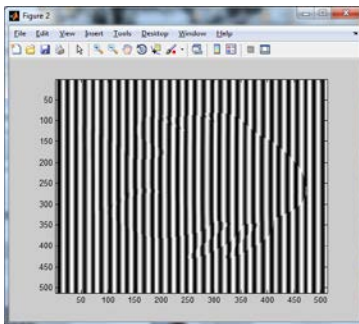


Reconstrucción 3D

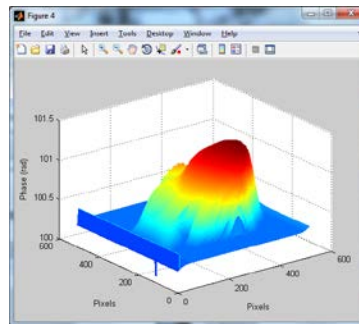


Error

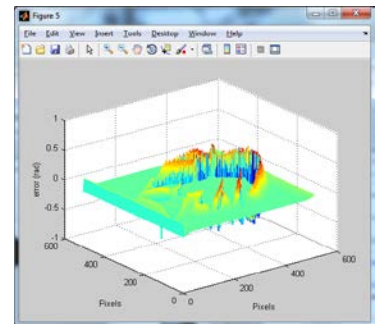
Figura 4.33 Transformada Morlet 32 franjas



Franjas proyectadas

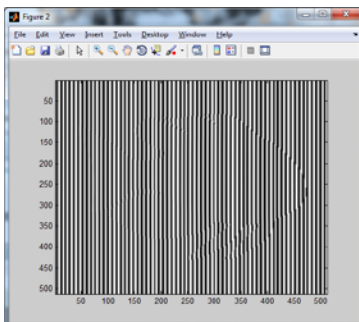


Reconstrucción 3D

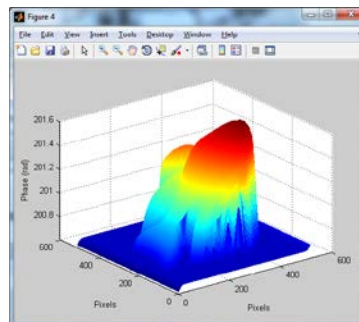


Error

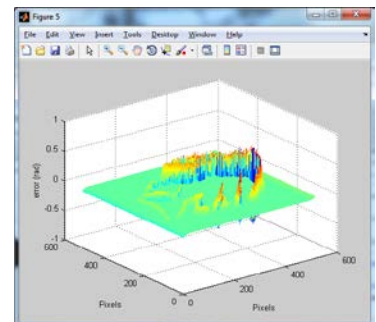
Figura 4.34 Transformada Morlet 64 franjas



Franjas proyectadas

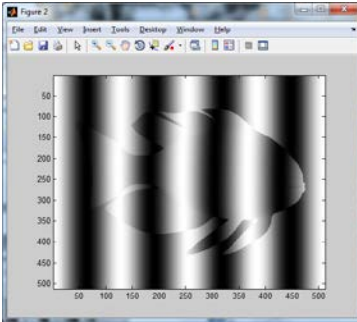


Reconstrucción 3D

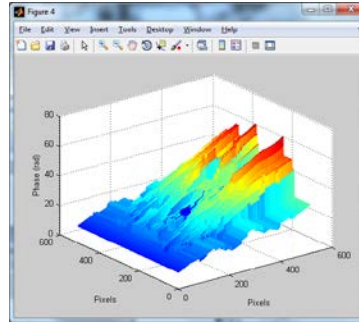


Error

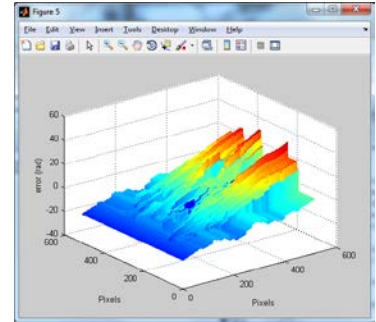
Figura 4.35 Transformada Morlet 128 franjas



Franjas proyectadas

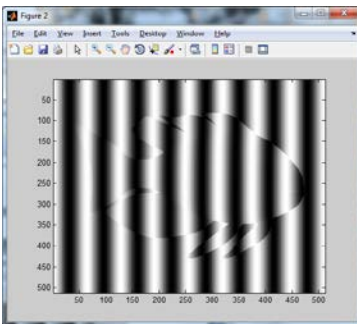


Reconstrucción 3D

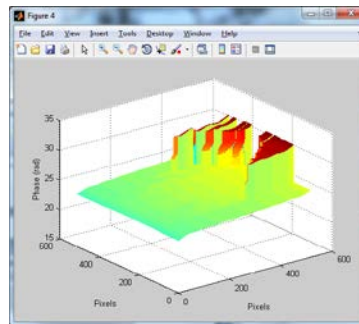


Error

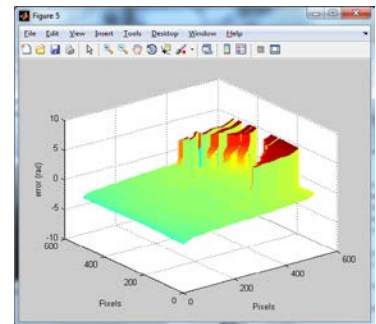
Figura 4.36 Transformada Shannon 8 franjas



Franjas proyectadas

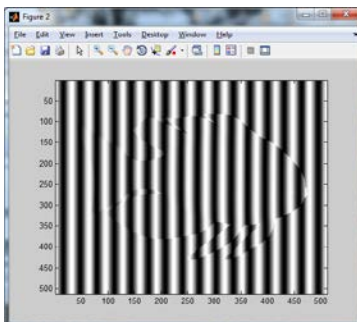


Reconstrucción 3D

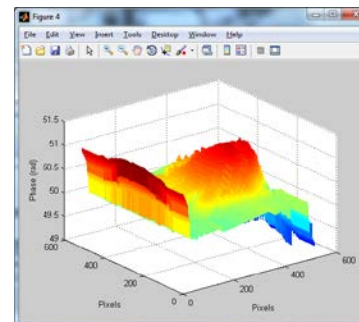


Error

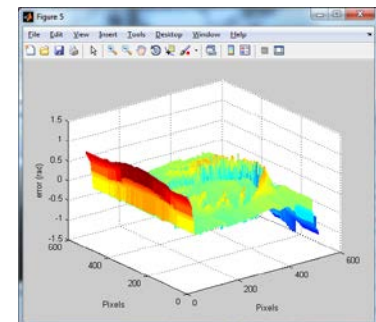
Figura 4.37 Transformada Shannon 16 franjas



Franjas proyectadas

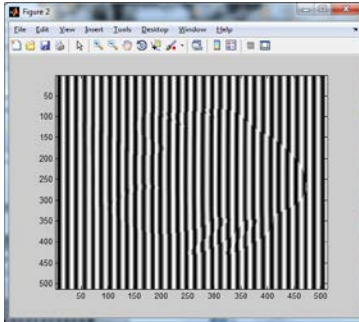


Reconstrucción 3D

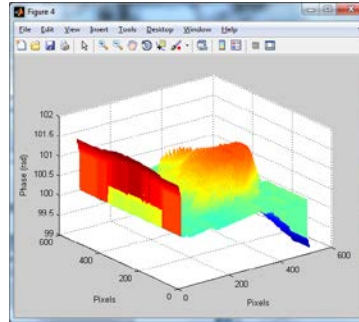


Error

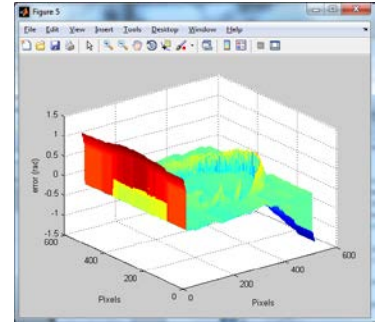
Figura 4.38 Transformada Shannon 32 franjas



Franjas proyectadas

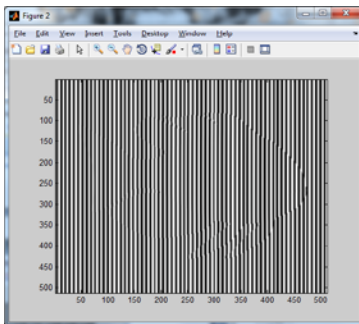


Reconstrucción 3D

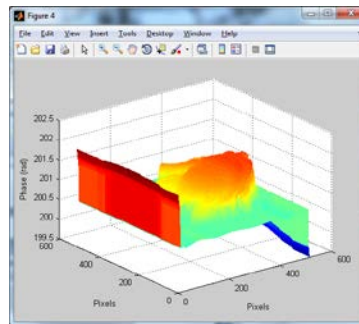


Error

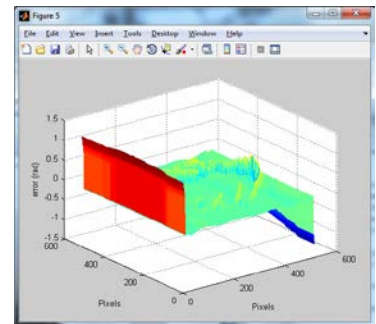
Figura 4.39 Transformada Shannon 64 franjas



Franjas proyectadas

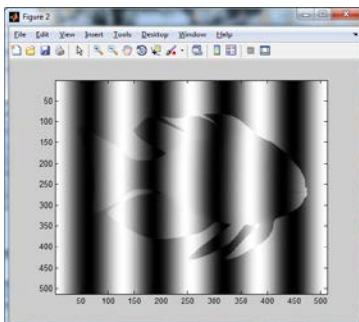


Reconstrucción 3D

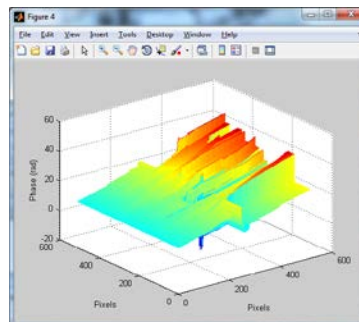


Error

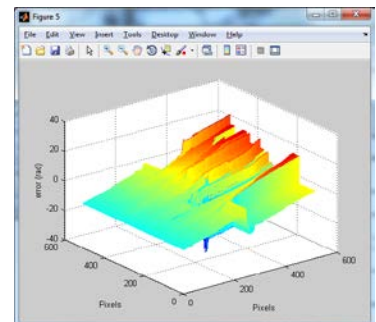
Figura 4.40 Transformada Shannon 128 franjas



Franjas proyectadas

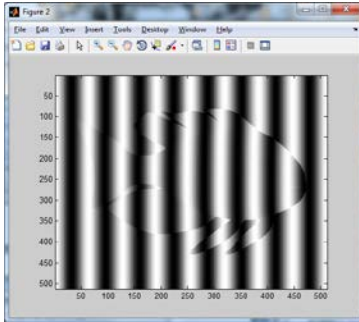


Reconstrucción 3D

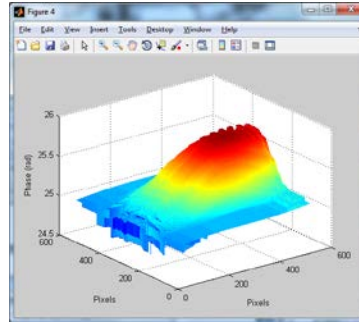


Error

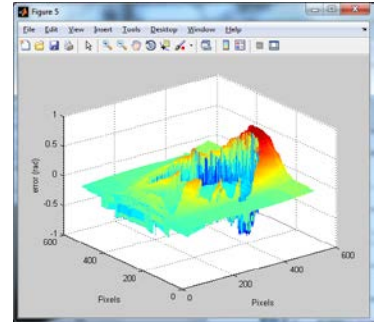
Figura 4.41 Transformada B-Spline 8 franjas



Franjas proyectadas

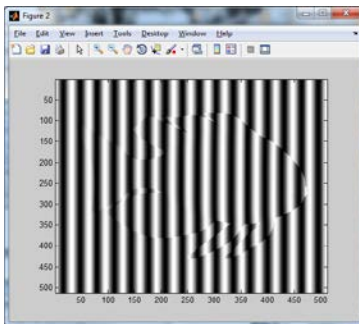


Reconstrucción 3D

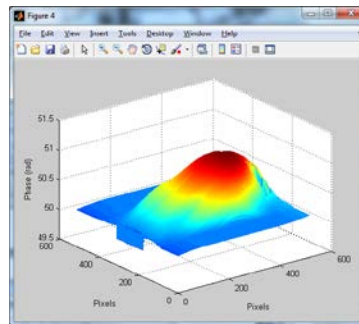


Error

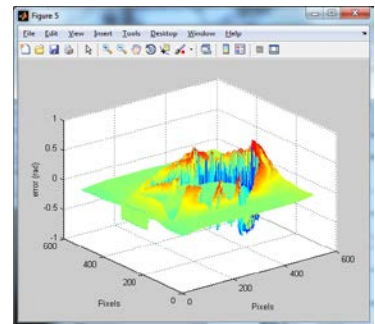
Figura 4.42 Transformada B-Spline 16 franjas



Franjas proyectadas

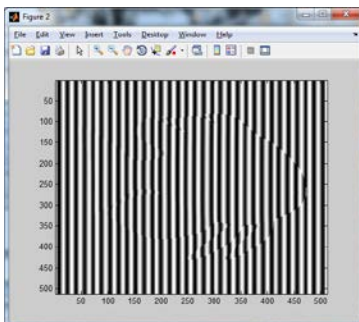


Reconstrucción 3D

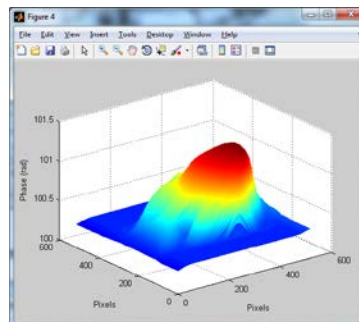


Error

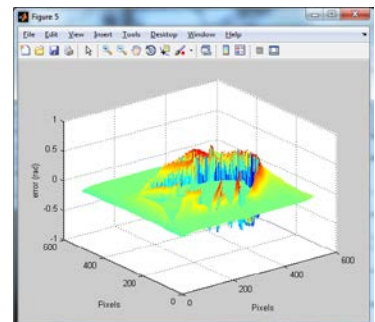
Figura 4.43 Transformada B-Spline 32 franjas



Franjas proyectadas

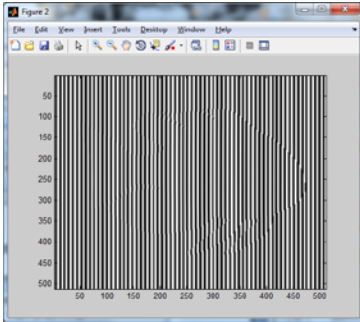


Reconstrucción 3D

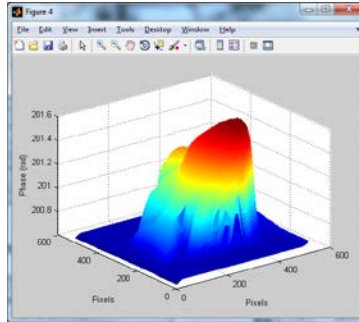


Error

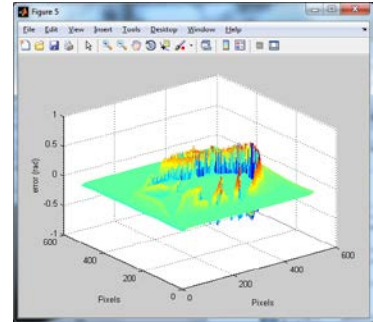
Figura 4.44 Transformada B-Spline 64 franjas



Franjas proyectadas



Reconstrucción 3D



Error

Figura 4.45 Transformada B-Spline 128 franjas



# Objetos reales

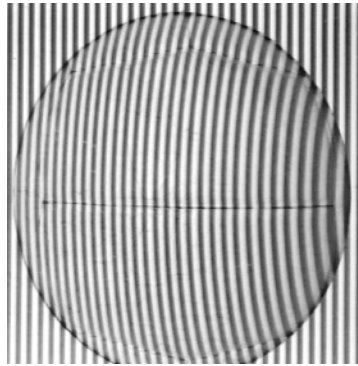
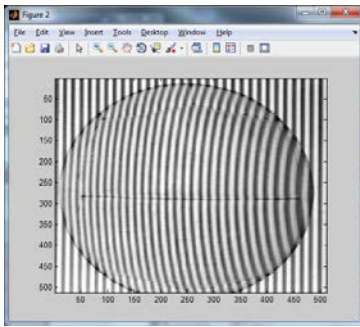


Imagen Real Original



Franjas proyectadas

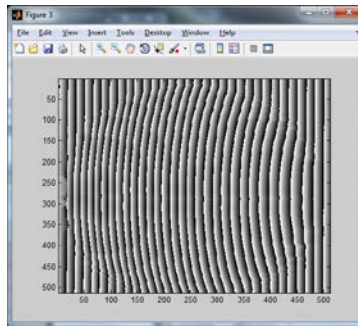
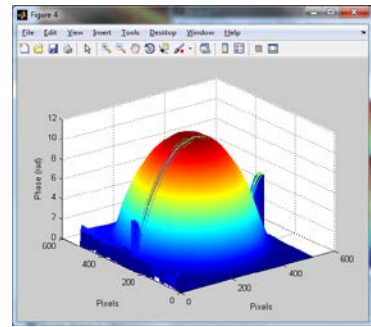
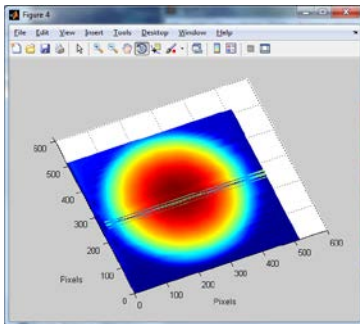


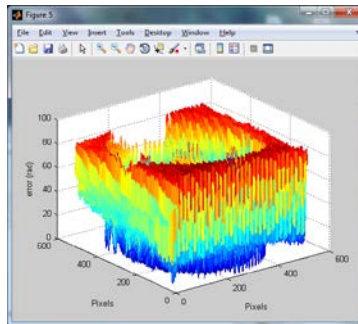
Imagen de Fase



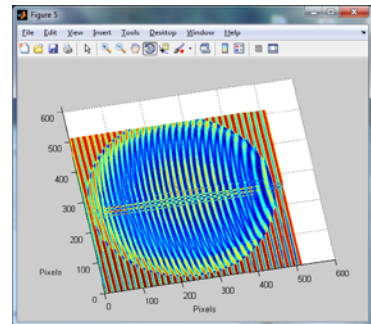
Reconstrucción 3D



Reconstrucción 3D

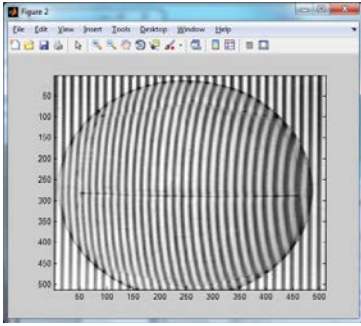


Error



Error

Figura 4.46 Transformada Morlet 32 franjas



Franjas proyectadas

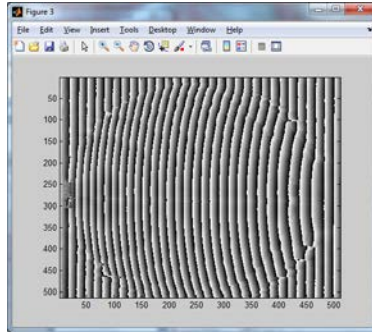
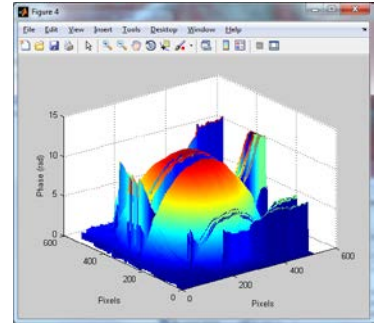
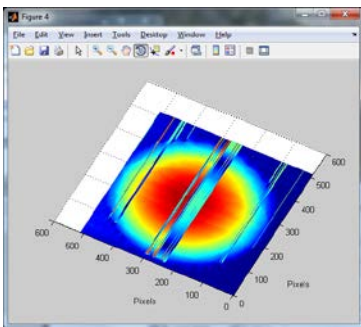


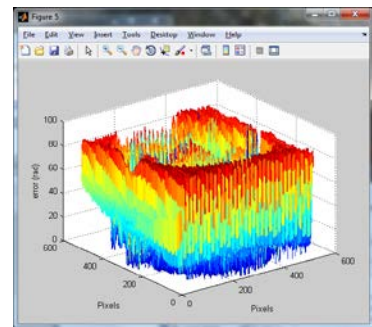
Imagen de Fase



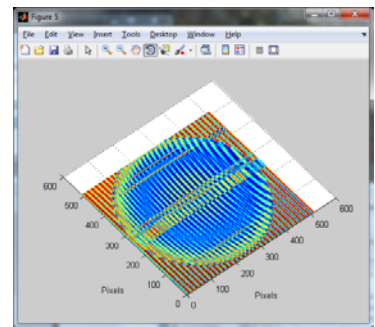
Reconstrucción 3D



Reconstrucción 3D

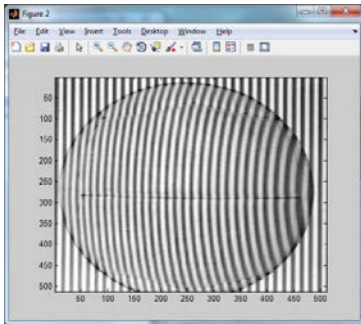


Error



Error

Figura 4.47 Transformada Shannon 32 franjas



Franjas proyectadas

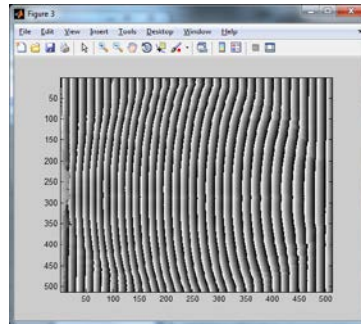
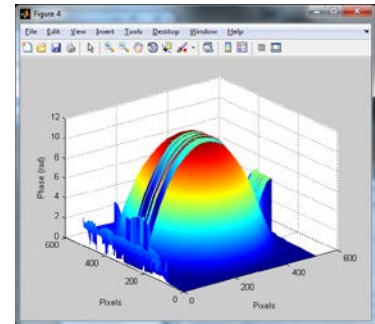
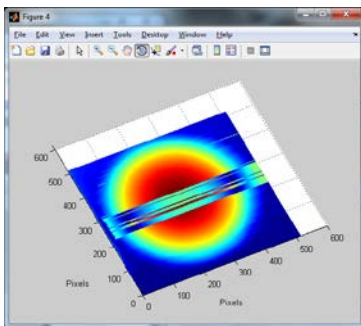


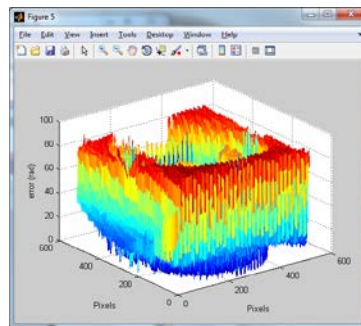
Imagen de Fase



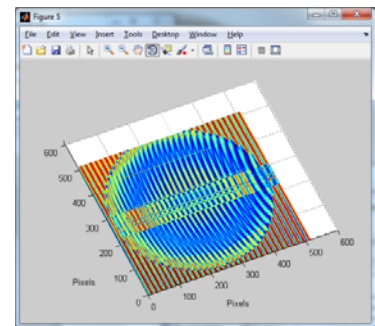
Reconstrucción 3D



Reconstrucción 3D



Error



Error

Figura 4.48 Transformada B-Spline 32 franjas

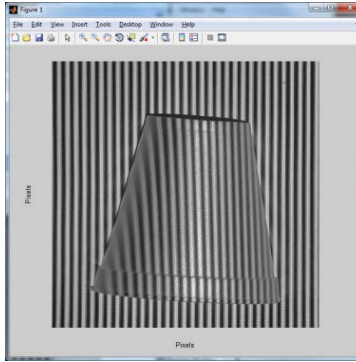
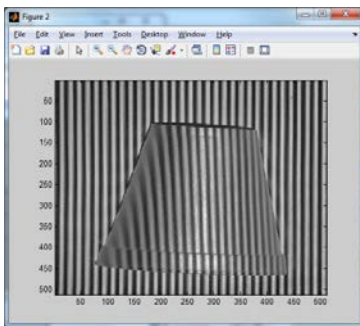


Imagen Real Original



Franjas proyectadas

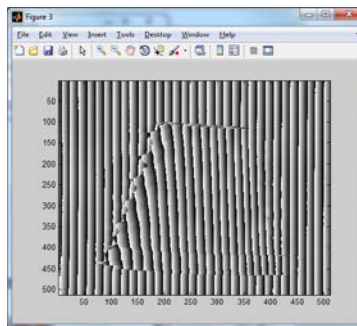
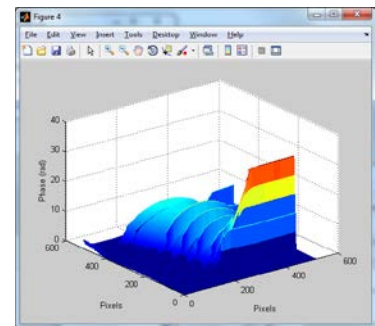
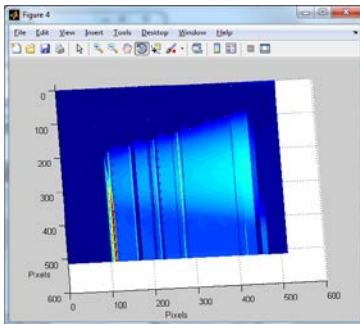


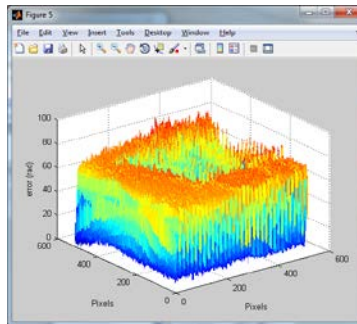
Imagen de Fase



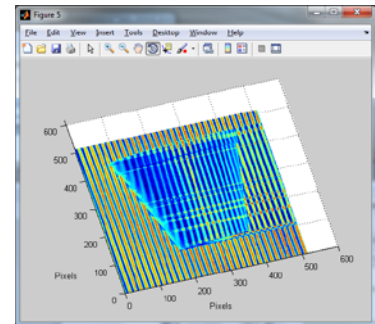
Reconstrucción 3D



Reconstrucción 3D

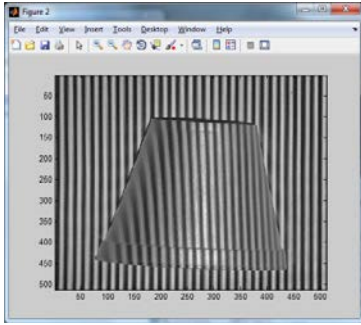


Error



Error

Figura 4.49 Transformada Morlet 32 franjas



Franjas proyectadas

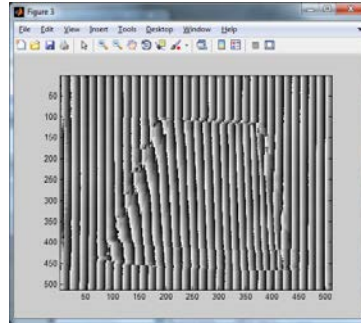
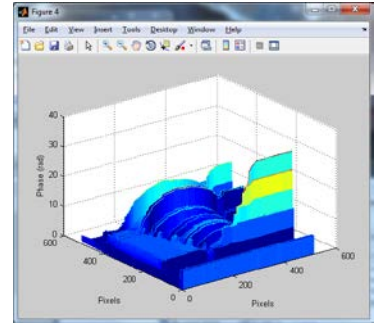
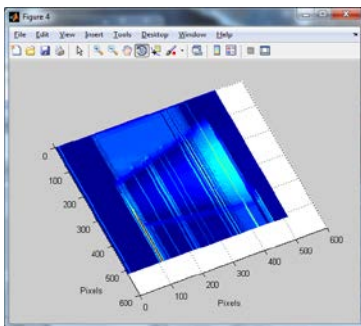


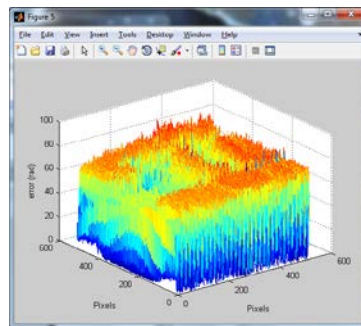
Imagen de Fase



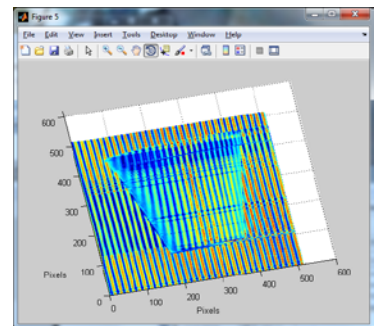
Reconstrucción 3D



Reconstrucción 3D

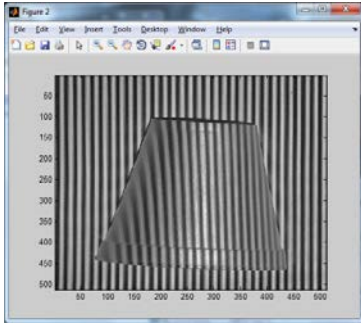


Error



Error

Figura 4.50 Transformada Shannon 32 franjas



Franjas proyectadas

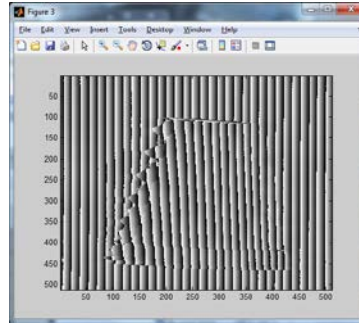
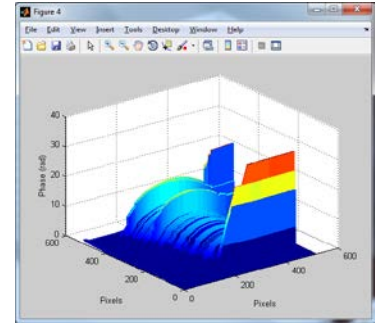
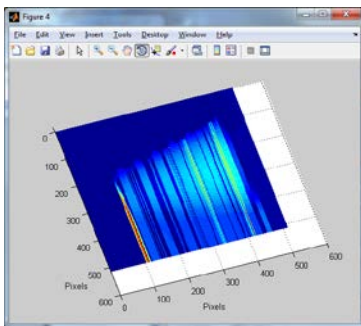


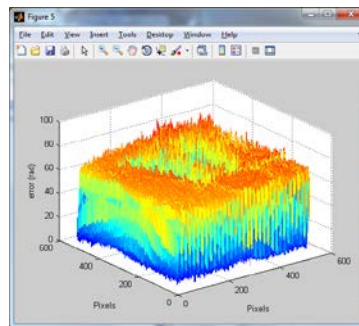
Imagen de Fase



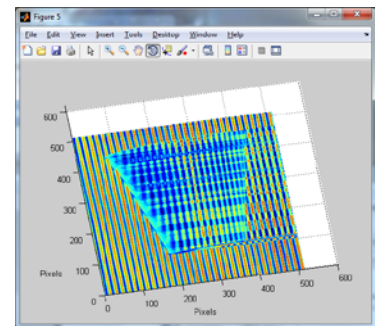
Reconstrucción 3D



Reconstrucción 3D



Error



Error

Figura 4.51 Transformada B-Spline 32 franjas

### Validación de ambos métodos.

La validación de los resultados se presenta a través de las siguientes tablas; mostrando, el tiempo de procesamiento para cada imagen en ambos equipos, el error arrojado para cada una de las imágenes con el número de franjas proyectadas en ellas y la transformada utilizada para cada procesamiento. Se llevó a cabo la validación del método propuesto en dos equipos cuyas características se encuentran en el anexo II.

Tablas comparativas con el número de franjas proyectado aplicando Transformada Wavelet Morlet.

Tabla 4.1 Error calculado Morlet

Franjas	Mundo	Elefante	Pez
8	35.7630	38.1070	25.8981
16	31.3660	27.8198	23.9779
32	13.7147	12.4669	9.3386
64	8.4645	7.4292	5.3578
128	5.1429	5.4341	3.1305

Tabla 4.2 Tiempo de procesamiento equipo sony, usando Transformada Morlet

Franjas	Mundo	Elefante	Pez
8	12.5478 s	12.0349 s	12.0604 s
16	13.3423 s	12.6155 s	12.6044 s
32	12.4203 s	11.8094 s	12.4960 s
64	12.4123 s	11.8535 s	11.8889 s
128	12.5345 s	12.7181 s	11.9689 s

Tabla 4.3 Tiempo de procesamiento equipo dell, usando Transformada Morlet

Franjas	Mundo	Elefante	Pez
8	12.4485 s	12.5066 s	12.4444 s
16	12.2772 s	12.4630 s	12.2484 s
32	12.3920 s	12.3110 s	12.3416 s
64	12.4484 s	12.3509 s	12.4863 s
128	12.4365 s	12.31.81 s	12.4520 s

Tabla comparativa con el número de franjas proyectado aplicando Transformada Wavelet Shannon.

Tabla 4.4 Error calculado Shannon

Franjas	Mundo	Elefante	Pez
8	34.3833	34.2843	24.1034
16	33.3953	27.4862	26.5307
32	20.8424	16.6415	12.7708
64	19.6084	15.0082	12.9045
128	15.8733	11.9830	9.7814

Tabla 4.5 Tiempo de procesamiento equipo sony, usando Transformada Shannon

Franjas	Mundo	Elefante	Pez
8	20.7318 s	35.5915 s	35.6075 s
16	20.8112 s	36.0289 s	35.6078 s
32	20.9828 s	30.6001 s	35.3808 s
64	20.6935 s	20.7075 s	35.7932 s
128	21.6061 s	20.7559 s	35.4831 s

Tabla 4.6 Tiempo de procesamiento equipo dell, usando Transformada Shannon

Franjas	Mundo	Elefante	Pez
8	19.4913 s	19.5713 s	19.5143 s
16	19.5295 s	19.6990 s	19.5601 s
32	19.5486 s	19.7974 s	19.4568 s
64	19.6022 s	19.6480 s	19.5704 s
128	19.6286 s	19.6877 s	19.5526 s



Tabla comparativa con el número de franjas proyectado aplicando Transformada Wavelet B-Spline

Tabla 4.7 Error calculado B-Spline

Franjas	Mundo	Elefante	Pez
8	33.6646	31.3891	25.5732
16	18.7950	14.8507	12.1974
32	16.1055	14.5725	10.7263
64	10.3935	8.8898	6.2587
128	6.1116	6.0714	3.8681

Tabla 4.8 Tiempo de procesamiento equipo sony, usando Transformada B-Spline

Franjas	Mundo	Elefante	Pez
8	21.1823 s	21.0195 s	20.9542 s
16	21.6969 s	21.4317 s	20.9706 s
32	21.6975 s	26.6830 s	21.7242 s
64	21.8588 s	20.9551 s	21.7551 s
128	21.0571 s	21.1594 s	21.8164 s

Tabla 4.9 Tiempo de procesamiento equipo dell, usando Transformada B-Spline

Franjas	Mundo	Elefante	Pez
8	19.8957 s	19.8145 s	19.8173 s
16	19.8077 s	19.8396 s	19.7674 s
32	19.7647 s	19.9337 s	19.8998 s
64	19.6548 s	19.7964 s	19.9537 s
128	19.7155 s	19.9338 s	19.6501 s

Como se podrá observar el comportamiento general está dado de acuerdo a la complejidad de la imagen, donde aproximadamente el tiempo de procesamiento no tiene una variación significativa. Lo que si cambia es el caso del error; debido a que éste disminuye conforme aumenta el número de franjas.

## 5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En el presente trabajo de investigación se llevó a cabo el método de perfilometría wavelet, utilizando tres diferentes tipos de wavelet y llevando a cabo una comparación del desempeño de las transformadas; los parámetros que se consideraron fueron el número de franjas, el tipo de Transformada Wavelet, el tipo de imagen y el desempeño de los algoritmos en diferentes computadoras.

Habiendo realizado el análisis comparativo con los diferentes tipos de transformada se deduce que es la transformada Morlet la que tiene mejor desempeño, en comparación con la Shannon y la B-Spline; visualmente se puede observar que la reconstrucción que funciona con este proceso es la transformada Morlet; la cual, tiene un mejor resultado que con las otras transformadas, debido principalmente a que la transformada Morlet tiene una mayor similitud con el tipo de señal procesada.

En las tablas presentadas en el capítulo anterior, se observa numéricamente el error calculado para cada transformada y para las diferentes imágenes digitales, logrando deducir que el porcentaje de error varía de acuerdo al tipo de transformada y a la imagen; comprobando que es la Morlet compleja la que tiene un mejor desempeño, seguida de la B-Spline y por último la Shannon.

El número de franjas proyectado a la imagen es un factor importante; a mayor número de franjas mejor es la reconstrucción, se pudo observar esto también de forma visual; este proceso brindó de forma clara que la imagen presenta una mejor reconstrucción a mayor número de franjas; es decir que el número de franjas es directamente proporcional a la calidad de reconstrucción de la imagen 3D.

Las características de la imagen también son importantes, la imagen debe ser de colores opacos para no reflejar mucha luz y las franjas puedan ser proyectadas de mejor manera, con ello la obtención de la imagen será de calidad ayudando así al proceso de reconstrucción; todo esto con las imágenes reales.

La comparación realizada entre la imagen con objetos reales y las virtuales no se puede llevar a cabo debido a que la imagen que tiene un objeto virtual se conoce

a priori la forma del objeto, así como su información 3D, por lo que únicamente se hicieron pruebas en este tipo de imágenes para saber cuál es el desempeño de las transformadas y así poder elegir a la que proporcione las mejores características para su uso en las imágenes que tienen objetos reales.

El tiempo de procesamiento fue también considerado dentro de este análisis, donde los resultados se obtuvieron implementando el algoritmo en dos equipos con características diferentes, concluyendo que el tiempo de respuesta del proceso sí es afectado por las características del equipo, a mayor potencia mejor tiempo de respuesta.

### **Trabajo Futuro**

Se pretende mejorar los algoritmos con las transformadas que arrojaron mejores resultados y profundizar en la parte matemática tomando aspectos diferentes de cada transformada. De igual manera se pretende llevar a cabo el método de perfilometría wavelet en 2D. Otro aspecto importante a considerar son los algoritmos de desdoblamiento de fase, debido a que en el presente trabajo solamente se utilizó un algoritmo sencillo que ya estaba implementado en MATLAB. Si se utilizan algoritmos de desdoblamiento de fase más avanzados, se puede mejorar la reconstrucción 3D de los objetos.

## 6. REFERENCIAS

- A. Asundi, Z. Wensen; 1998, *Fast phase-unwrapping algorithm based on a gray-scale mask and flood fill*. Proceedings of APPLIED OPTICS, Vol. 37, No. 23. Optical Society Of America
- Chenggen Quan, Cho Jui Tay, and Lujie Chen., 2005, *Fringe-density estimation by continuous wavelet transform*. Applied Optics, Vol. 44, Issue 12, pp. 2359-2365.
- F. Wu, H. Zhang, M. J. Lalor, D. R. Burton; 2001, A novel design for fiber optic interferometric fringe projection phase-shifting 3-D profilometry. Proceedings of Optics Communications, 347-357.
- H. O. Saldner, J. M. Huntley; 1997, *Profilometry using temporal phase unwrapping and spatial light modulator-based fringe projector*, Proceedings of Optical Engineering, Vol. 36, No. 2. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers.
- Pajares G., de la Cruz J., 2002, *Visión por Computador*, (1ª. Ed.). Alfa Omega, México.
- Kazuyoshi Itoh, 1982, *Analysis of the phase unwrapping Algorithm*, Applied Optics, Vol. 21, Issue 14, pp. 2470-2470.
- Jay Yagnik, G Sai Siva, K R Ramakrishnan, L Kameswara Rao; 2005, *3D Shape Extraction of Human Face in Presence of Facial Hair: A Profilometric Approach*. Indian Institute of Science, Bangalore, India, TENCON, IEEE Region 10 Volume, Issue, 21-24 Page(s):1 – 5
- Lokenath Debnath., 2002, *Wavelet transforms and their applications*, Publicado por Springer, ISBN 0817642048, 9780817642044, 565 pp.
- Abdulbasit-Zaid Ahmed Abid, 2008, *Fringe Pattern Analysis using Wavelet Transforms*, (PhD Thesis) John Moores University at Liverpool, England.

- González R., Woods R., 2008, *Digital Image Processing*, (3<sup>a</sup>. Ed.). Pearson Prentice Hall, New Jersey.
- Goran S., 2011, *Fourier Transforms*, (1<sup>a</sup>. Ed.). InTech, Rijeka, Croatia.
- Moya-Morales Juan Carlos, 2010, *Desarrollo de un Software de Prueba para el Proceso de Digitalización de Sólidos*, (Tesis de Ingeniería) Universidad Autónoma de Querétaro, Santiago de Querétaro, Qro. México.
- Pathak-Ram Shankar, 2009, *The Wavelet Transform*, Atlantis Studies in Mathematics for Engineering and Science, Vol. 4, 178pp.
- Pedraza-Ortega Jesús Carlos, Gorrostieta-Hurtado Efrén, Delgado-Rosas Manuel, Canchola-Magdaleno Sandra L., Ramos-Arreguin Juan Manuel, Aceves-Fernández, Marco A., Sotomayor-Olmedo Artemio, 2009, *A 3D Sensor Based on a Profilometrical Approach*, Sensors 9, No. 12: 10326-10340 pp.
- Pedraza Ortega Jesús Carlos, Rodríguez José Wilfrido, Barriga Leonardo, Gorrostieta Efrén, Salgado Tomas, Ramos Juan Manuel, and Rivas Ángel. 2007, *Image Processing for 3D Reconstruction Using a Modified Fourier Transform Profilometry Method*, Springer Berlin / Heidelberg, MICAI: Advances in Artificial Intelligence, 705-712 pp.
- Sonja Grgic, Mislav Grgic, Zovko-Cihlar Branka, 2001, *Performance Analysis of Image Compression Using Wavelets*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 48, No 3.
- Takeda Mitsuo and Mutoh Kazuhiro, 1983, Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes, Appl. Opt. 22, 3977-3982 pp.
- Van-Fleet Patrick J., 2008, *Discrete Wavelet Transformations, An Elementary Approach with Applications* University of St. Thomas, 525 pp.

Vilá-Ubieto Karen, Arranz-Domingo Álvaro, Alvar-Miró Manuel, Sánchez-Miralles Álvaro, 2009, *Reconstrucción 3D de Modelos Utilizando Técnicas de Visión Artificial* (Proyecto Fin de Carrera) Universidad Pontificia Comilla, Escuela Técnica Superior de Ingeniería (ICAI).

Y.F. Li, B. Mi, 2003, A Method for Dynamics Identification for Haptic Display of the Operating Feel in Virtual Environments, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 8, No, 4, 476-482 pp.

## 7. ANEXO I

<sup>1</sup> La transformada de Fourier de una función continua e integrable de una variable real  $x$  se define como:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} dx$$

Se observa que la transformada de una función real es una función compleja; es decir,  $F(u) = R(u) + I(u)i$ , donde  $R(u)$  es la parte real y  $I(u)$  es la parte imaginaria.

<sup>2</sup> Ciclos por pixel

<sup>3</sup> Define un funcional en forma de integral sobre un cierto espacio de funciones, y está dada por:

$$\delta_a(x) \equiv \delta(x - a)$$

siendo  $\delta(x)$  para el caso  $a = 0$

En la física esta función puede representar la distribución de densidad de una masa concentrada en un punto  $a$ ; así mismo esta función constituye una aproximación muy útil para funciones picudas y es en ocasiones denominada función de impulso. Permitiendo además definir la derivada generalizada de funciones discontinuas.

Función generalizada de la delta de Dirac.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$$

<sup>4</sup> Establece que bajo ciertas circunstancias el teorema de la transformada de Fourier de una convolución es el producto punto de las transformadas, es decir; la convolución en un dominio (temporal), es equivalente al producto punto, -o interno-; en

el otro dominio –espectral-. Así siendo  $f$  y  $g$  dos funciones cuya convolución se expresa  $f * g$ ; por otro lado sea  $F$  el operador de la transformada de Fourier; donde  $F|f|$  y  $F|g|$  son las transformadas de Fourier de  $f$  y  $g$ , respectivamente.

Entonces,

$$F [f * g] = \sqrt{2\pi}(F[f]) \cdot (F[g])$$

Por otro lado tenemos que:

$$F[f \cdot g] = \frac{F[f] * F[g]}{\sqrt{2\pi}}$$

y como transformada inversa de Fourier tenemos  $F^{-1}$

$$f * g = \sqrt{2\pi}F^{-1}[F[f] \cdot F [g]]$$



## **8. ANEXO II**

### **Características de los equipos**

#### ***Sony Vaio***

Procesador Intel (R) Core Duo CPU T9550 2.66 GHz

Memoria RAM 4GB

Sistema Operativo 64 Bits, Windows 7 Premium

#### ***Dell***

Work Station Dell

Mod. Precision T3500

Procesador Xeon 2.93 GH

Memoria RAM 12 GB

Núcleos 8

Sistema Operativo 64 Bits, Windows Vista.