U. A. Q. ESTUDIOS DE POSTGRADO

PLANOS DE INCIDENCIA, AFINES Y PROYECTIVOS

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO
DE MAESTRIA
EN DOCENCIA DE LAS MATEMATICAS

PRESENTA

EL ING. ALEJANDRO PEREZ ROMERO

QUERETARO, QRO. 1987

DEDICATORIA:

A mis maestros:

Dr. Emilio Lluis Riera
Dr. César Rincón Orta
Dr. Alejandro Díaz Barriga
Dr. Angel Díaz Barriga
Dr. Carlos Bosh
Dr. Cayetano de Lella
Dr. Diego Bricio Hernández
Dr. Héctor Santiago
Dr. Mario Otero

De los cuales aprendí a crecer como persona y como profesionista: como persona he podido entender en mis alumnos las carencias y dificultades que tienen en el desarrollo del conocimiento y como profesionista he ampliado el criterio y los conocimientos para orientarlos y ayudarlos a que construyan una estructura firme en el conocer y entender.

A mi esposa ALEJANDRA, que en cada momento ha estado a mi lado apoyándome y ayudándome.

A mis hijos ALEJANDRA, ALEJANDRO y MARCOTULIO, para que estos nuevos conocimientos me ayuden a darles un desarrollo integral como personas y logren ser unos buenos ciudadanos.

ALEJANDRO PEREZ ROMERO

INDICE

INTRODUCCION:

A nivel elemental se toca el tema de Geometría, como un tema más dentro de un programa que se tiene que cumplir, pero sin vincularlo con los números en la primaria o con el Algebra en la secundaria, esto provoca que el alumno entienda por Geometría; figuras geométricas, prímetros, áreas, volúmenes, ángulos, etc.

Las ideas centrales de esta tesis son:

1) Que cualquier alumno conozca algo sobre la Geometría de Euclides pueda ver que existen otras Geometrías que no son difíciles de comprender. (Por tal motivo, las demostraciones están hechas con mucho detalle y sencillez.)

2) Que el alumno pueda seguir en el tema el vínculo entre la Geometría y el Algebra, vínculo que el alumno de nivel preparatoria trabaja en la Geometría Analítica, pero que en este caso se enriquece con la aritmética modular, que es la puerta de entrada a los campos finitos y la Geometría Algebraica.

3) En Geometría Analítica se trabaja la Geometría de Euclides y el Algebra, sobre el campo de los números reales, pero en esta tesis se trabaja la Geometría Proyectiva, esto se hace agregando puntos al infinito para provocar que cualquier par de rectas se corten (no importando si son o no paralelas).

PLANOS DE INCIDENCIA:

AXIOMAS

Y

EJEMPLOS

PLANOS DE INCIDENCIA.

DEFINICIÓN: Dado un conjunto P de elementos representados por A, B, C,... - llamados puntos y un conjunto R de subconjuntos de P representados por a, b, c,... denominadas rectas, se llama plano de incidencia a un par (P, R) que cumpla con los siguientes axiomas.

AXIOMAS DE INCIDENCIA.

i-I) POR DOS PUNTOS PASA UNA RECTA.

Si A y B son dos elementos distintos de P, entonces hay un elemento de R que los contiene.

$$\forall A \text{ y } B,\ A \neq B \Rightarrow \exists\, a \in R \ni A \in a \text{ y } B \in a$$

i-II) ESTA RECTA ES UNICA.

Si a y b $\in$ R , A y B $\in$ P, A $\neq$ B y (A $\in$ a ý A $\in$ b), y (B $\in$ a ý B $\in$ b) entonces a = b

i-III) TODA RECTA TIENE AL MENOS DOS PUNTOS.

$$\forall a \in R\ \exists\ A \text{ y } B \in P,\ A \neq B \ni A \in a \text{ y } B \in a$$

i-IV) EXISTEN AL MENOS TRES PUNTOS NO COLINEALES.

$$\exists\ A, B, C \in P\ \forall a \in R \ni A \notin a \text{ ó } B \notin a \text{ ó } C \notin a$$

EJEMPLOS DE PLANOS DE INCIDENCIA

1) Sean P= $\{1,2,3\}$ y R= $\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ Verificar que (P,R) es un - plano de incidencia.

Por demostrar que valen los axiomas i-I, i-II) por dos puntos pasa una' y solo una recta.

Demostración: $\ell_1 = \{1,2\}$

$\ell_2 = \{1,3\}$

$\ell_3 = \{2,3\}$

$$\{1,2,3\} \begin{matrix} \{1,2\} \\ \{1,3\} \\ \{2,3\} \end{matrix}$$

Son todas las posibles combinaciones.

Por 1,2 pasa ℓ_1 y ninguna otra.
Por 1,3 pasa ℓ_2 y ninguna otra.
Por 2,3 pasa ℓ_3 y ninguna otra.

Por demostrar que vale el axioma i-III) Toda recta contiene por lo menos - dos puntos.

Demostración:

ℓ_1 contiene los puntos 1 y 2
ℓ_2 contiene los puntos 1 y 3
ℓ_3 contiene los puntos 2 y 3

Por demostrar que vale el axioma i-IV) Existen al menos tres puntos no colineales.

Demostración: Sean $\{1,2,3\}$ en ℓ_1 ; $3 \notin \ell_1$
en ℓ_2 ; $2 \notin \ell_2$
en ℓ_3 ; $1 \notin \ell_3$

$\therefore$ (P,R) es un plano de incidencia

TABLA DE INCIDENCIA

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3
1	×	×	
2	×		×
3		×	×

2) Trataremos de ver si (P,R) es o no un plano de incidencia en donde:

$$P = \{A,B\} \qquad R = \{\{A,B\}\}$$

Comprobaremos si valen o nó los axiomas i-I e i-II) Por dos puntos pasa una y sólo una recta.

$\ell_1 = \{A,B\}$ Por A y B pasa ℓ_1 y solamente ℓ_1

$\therefore$ i-I e i-II son válidos.

Hagamos lo mismo para el axioma i-III) Cualquier recta contiene por lo menos dos puntos. $P = \{A,B\}$

ℓ_1 contiene a los puntos A y B.
i-III es válido.

¿ Será válido el axioma i-IV ?, es decir existirán tres puntos no colineales.

Como sólo existen dos puntos, este axioma no se cumple.

∴ (P,R) no es un plano de incidencia.

	$\mathcal{L}_1$
A	×
B	×

TABLA DE INCIDENCIA.

3) Verificar si (P,R) es o nó un plano de incidencia en donde: $P = \{A,B,C\}$
$R = \{\{A,B\}, \{A,C\}\}$

Tratemos de ver que pasa con el axioma i-I) Por dos puntos pasa una recta:

Sean $\{A, B, C\}$

Por A,B pasa $\mathcal{L}_1$
Por B,C no pasa ninguna recta.
Por A,C pasa $\mathcal{L}_2$

Como no hay recta para la pareja B,C de puntos no se cumple este primer axioma.

∴ (P,R) no es un plano de incidencia.

	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$
A	×	×
B	×	
C		×

TABLA DE INCIDENCIA

4) Verificar que (P,R) es un plano de incidencia.

$P = \{A,B,C,D\}$ $R = \{\{A,B\}, \{A,C\}, \{A,D\}, \{B,C\}, \{B,D\}, \{C,D\}\}$

Por demostrar que se cumplen los axiomas i-I e i-II) Por dos puntos pasa una y sólo una recta.

Demostración: $A,B,C,D \in P$

Por A,B pasa $\mathcal{L}_1$ unicamente.
Por A,C pasa $\mathcal{L}_2$ "

Por A,D pasa ℓ_3 unicamente
" B,C " ℓ_4 "
" B,D " ℓ_5 "
" C,D " ℓ_6 "

Por demostrar que se cumple el axioma i-III) Toda recta contiene por lo menos dos puntos.

Demostración:

ℓ_1 contiene a A,B
ℓ_2 " a A,C
ℓ_3 " a A,D
ℓ_4 contiene a B,C
ℓ_5 " a B,D
ℓ_6 " a C,D

Por demostrar que se cumple el axioma i-IV) Existen tres puntos que no pertenecen a una misma recta.

Sean: $\{A,B,C\}$

$A \in \ell_1$, $B \in \ell_1$, $C \notin \ell_1$
$A \in \ell_2$, $B \notin \ell_2$, $C \in \ell_2$
$A \in \ell_3$, $B \notin \ell_3$, $C \notin \ell_3$
$A \in \ell_4$, $B \in \ell_4$, $C \in \ell_4$
$A \notin \ell_5$, $B \in \ell_5$, $C \notin \ell_5$
$A \notin \ell_6$, $B \notin \ell_6$, $C \in \ell_6$

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6
A	x	x	x			
B	x			x	x	
C		x		x		x
D			x		x	x

TABLA DE INCIDENCIA

$\therefore$ A,B,C son tres puntos que no están en una misma recta.

$\therefore$ (P,R) es plano de incidencia.

5) Verifique que (P,R) es un plano de incidencia

con $P = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $R = \{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9\}, \{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6,9\}, \{1,5,9\}, \{2,6,7\}, \{3,4,8\}, \{3,5,7\}, \{2,4,9\}, \{1,6,8\}\}$.

	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_4$	$\mathcal{L}_5$	$\mathcal{L}_6$	$\mathcal{L}_7$	$\mathcal{L}_8$	$\mathcal{L}_9$	$\mathcal{L}_{10}$	$\mathcal{L}_{11}$	$\mathcal{L}_{12}$
1	x			x			x					x
2	x				x			x			x	
3	x					x			x	x		
4		x		x					x		x	
5		x			x		x			x		
6		x				x		x				x
7			x	x				x		x		
8			x		x				x			x
9			x			x	x				x	

Por demostrar que se cumplen los axiomas i-I e i-II) Por dos puntos pasa - una y sólo una recta.

Demostración:

Por 1,2 pasa $\mathcal{L}_1$ unicamente
Por 1,3 pasa $\mathcal{L}_1$ "
Por 1,4 pasa $\mathcal{L}_4$ "
Por 1,5 pasa $\mathcal{L}_7$ "
Por 1,6 pasa $\mathcal{L}_{12}$ "
Por 1,7 pasa $\mathcal{L}_4$ "
Por 1,8 pasa $\mathcal{L}_{12}$ "
Por 1,9 pasa $\mathcal{L}_7$ "

Por 2,3 pasa $\mathcal{L}_1$ unicamente
Por 2,4 pasa $\mathcal{L}_{11}$ "
Por 2,5 pasa $\mathcal{L}_5$ "
Por 2,6 pasa $\mathcal{L}_8$ "
Por 2,7 pasa $\mathcal{L}_8$ "
Por 2,8 pasa $\mathcal{L}_5$ "
Por 2,9 pasa $\mathcal{L}_{11}$ "

Por 3,4 pasa $\mathcal{L}_9$ unicamente
Por 3,5 pasa $\mathcal{L}_{10}$ "
Por 3,6 pasa $\mathcal{L}_6$ "
Por 3,7 pasa $\mathcal{L}_{10}$ "
Por 3,8 pasa $\mathcal{L}_9$ "
Por 3,9 pasa $\mathcal{L}_6$ "

Por 4,5 pasa $\mathcal{L}_2$ unicamente
Por 4,6 pasa $\mathcal{L}_2$ "
Por 4,7 pasa $\mathcal{L}_4$ "
Por 4,8 pasa $\mathcal{L}_9$ "
Por 4,9 pasa $\mathcal{L}_{11}$ "

Por 5,6 pasa $\mathcal{L}_2$ unicamente

Por 5,7 pasa $\mathcal{L}_{10}$ "

Por 5,8 pasa $\mathcal{L}_5$ "

Por 5,9 pasa $\mathcal{L}_7$ "

Por 6,7 pasa $\mathcal{L}_8$ unicamente

Por 6,8 pasa $\mathcal{L}_{12}$ "

Por 6,9 pasa $\mathcal{L}_6$ "

Por 7,8 pasa $\mathcal{L}_3$ unicamente

Por 7,9 pasa $\mathcal{L}_3$ unicamente

Por 8,9 pasa $\mathcal{L}_3$ unicamente

Por demostrar que se cumple el axioma i-III) Cualquier recta contiene - por lo menos dos puntos.

Demostración:

Si cada una de las rectas contienen tres puntos, entonces por lo menos' tienen dos puntos.

Por demostrar que se cumple el axioma i-IV) Existen tres puntos que no' pertenecen a la misma recta.

Demostración: Sean $3,4,5 \in P$

En $\mathcal{L}_1$: $4 \notin \mathcal{L}_1$	En $\mathcal{L}_5$: $4 \notin \mathcal{L}_5$	En $\mathcal{L}_9$: $5 \notin \mathcal{L}_9$
En $\mathcal{L}_2$: $3 \notin \mathcal{L}_2$	En $\mathcal{L}_6$: $4 \notin \mathcal{L}_6$	En $\mathcal{L}_{10}$: $4 \notin \mathcal{L}_{10}$
En $\mathcal{L}_3$: $3 \notin \mathcal{L}_3$	En $\mathcal{L}_7$: $3 \notin \mathcal{L}_7$	En $\mathcal{L}_{11}$: $3 \notin \mathcal{L}_{11}$
En $\mathcal{L}_4$: $5 \notin \mathcal{L}_4$	En $\mathcal{L}_8$: $3 \notin \mathcal{L}_8$	En $\mathcal{L}_{12}$: $5 \notin \mathcal{L}_{12}$

$\therefore$ Esto demuestra que existen tres puntos no colineales.

P L A N O S   A F I N E S

A X I O M A S

Y

E J E M P L O S

PLANOS AFINES

Definición: En un plano de incidencia, se dice que las rectas a y b son paralelas si a = b o bien $a \cap b = \emptyset$

Con la definición anterior resulta inmediato que el paralelismo es una relación de equivalencia en el conjunto R de todas las rectas.

Definición: Un plano afín, es un plano de incidencia en el que además valen los siguientes axiomas.

A-I) Dada una recta ℓ y un punto $P \notin \ell$ existe una recta ℓ' tal que: i) $P \in \ell'$

ii) $\ell \cap \ell' = \emptyset$

A-II) ℓ' es única.

EJEMPLOS DE PLANO AFÍN.

1,-) Comprobar que (P,R) es un plano afín, donde:

$$P=\{A,B,C,D\}, \quad R=\{\{A,B\}, \{A,C\}, \{A,D\}, \{B,C\}, \{B,D\}, \{C,D\}\}$$

Para hacer la comprobación, necesitamos hacer ver que se cumplen los cuatro axiomas de incidencia y los dos de plano afín.

1) Verificar que es un "plano afín".

$$P=\{A,B,C,D\} \quad R=\{\{A,B\}, \{A,C\}, \{A,D\}, \{B,C\}, \{B,D\}, \{C,D\}\}$$

Probaremos solamente los axiomas V y VI para completar la demostración que es un plano afín.

V y VI) Si tenemos una recta dada y un punto exterior a esta podemos pasar por este punto una y sólo una paralela a la recta dada.

	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_4$	$\mathcal{L}_5$	$\mathcal{L}_6$
A	x	x	x			
B	x			x	x	
C		x		x		x
D			x		x	x

Tomemos $\{A,B\} = \mathcal{L}_1$ y el punto C
La única paralela es $\mathcal{L}_6 = \{C,D\}$ para por C y no contiene ningún punto en común con $\mathcal{L}_1$

Tomemos $\{A,C\} = \mathcal{L}_2$ y el punto B
La única paralela es $\mathcal{L}_5 = \{B,D\}$ pasa por B y no contiene ningún punto en común con $\mathcal{L}_2$

Tomemos $\{A,D\} = \mathcal{L}_3$ y el punto C
La única paralela es $\mathcal{L}_4 = \{B,C\}$ pasa por C y no contiene ningún punto en común con $\mathcal{L}_3$

Tomemos $\{B,C\} = \mathcal{L}_4$ y el punto A
La única paralela es $\mathcal{L}_3 = \{A,D\}$ pasa por A y no contiene ningún punto en común con $\mathcal{L}_4$

Tomemos $\{B,D\} = \mathcal{L}_5$ y el punto C
La única paralela es $\mathcal{L}_2 = \{A,C\}$ pasa por C y no contiene ningún punto en común con $\mathcal{L}_5$

Tomemos $\{C,D\} = \mathcal{L}_6$ y el punto A
La única paralela es $\mathcal{L}_1 = \{A,B\}$ pasa por A y no contiene ningún punto en común con $\mathcal{L}_6$

De esta forma verificamos que se cumplen los dos axiomas que faltaban para comprobar que el plano que ya es de incidencia también es un plano afín.

2.-) Demostrar que (P,R) si es un plano afín.

$$P=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$R=\{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\},\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6,9\},\{1,5,9\},$$
$$\{2,6,7\},\ \{3,4,8\},\ \{3,5,7\},\ \{2,4,9\},\ \{1,6,9\}\}$$

Vamos solamente a verificar los dos axiomas que completan que es un plano afín, pues ya hemos demostrado que es de incidencia.

V y VI) Dada una recta y un punto exterior a ella, se puede pasar por este punto una y sólo una paralela a la recta dada.

	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_4$	$\mathcal{L}_5$	$\mathcal{L}_6$	$\mathcal{L}_7$	$\mathcal{L}_8$	$\mathcal{L}_9$	$\mathcal{L}_{10}$	$\mathcal{L}_{11}$	$\mathcal{L}_{12}$
1	×			×			×					×
2	×				×			×			×	
3	×					×			×	×		
4		×		×					×		×	
5		×			×		×			×		
6		×				×		×				×
7			×	×				×		×		
8			×		×				×			×
9			×			×	×				×	

Sea $\mathcal{L}_1 = \{1,2,3\}$ y el punto 4
por el punto 4 pasan $\mathcal{L}_2 = \{4,5,6\}$, $\mathcal{L}_4 = \{1,4,7\}$, $\mathcal{L}_9 = \{3,4,8\}$,
$\mathcal{L}_{11} = \{2,4,9\}$ pero la única recta paralela a $\mathcal{L}_1$ es $\mathcal{L}_2$.

Sea $\mathcal{L}_1 = \{1,2,3\}$ y el punto 5
por el punto 5 pasan $\mathcal{L}_2 = \{4,5,6\}$, $\mathcal{L}_5 = \{2,5,8\}$, $\mathcal{L}_7 = \{1,5,9\}$
$\mathcal{L}_{10} = \{3,5,7\}$ pero la única recta paralela a $\mathcal{L}_1$ que pasa por 5
es $\mathcal{L}_2$.

Sea $\mathcal{L}_1 = \{1,2,3\}$ y el punto 6
por el punto 6 pasan $\mathcal{L}_2 = \{4,5,6\}$, $\mathcal{L}_6 = \{3,6,9\}$, $\mathcal{L}_8 = \{2,6,7\}$
$\mathcal{L}_{12} = \{1,6,8\}$ pero la única recta paralela a $\mathcal{L}_1$ que pasa por 6
es $\mathcal{L}_2$.

Sea $\mathcal{L}_1 = \{1,2,3\}$ y el punto 7
por el punto 7 pasan $\mathcal{L}_3 = \{7,8,9\}$, $\mathcal{L}_4 = \{1,4,7\}$, $\mathcal{L}_8 = \{2,6,7\}$,
$\mathcal{L}_{10} = \{3,5,7\}$ pero la única recta paralela a $\mathcal{L}_1$ que pasa por 7
es $\mathcal{L}_3$.

Sea $\mathcal{L}_1 = \{1,2,3\}$ y el punto 8
por el punto 8 pasan $\mathcal{L}_3 = \{7,8,9\}$, $\mathcal{L}_5 = \{2,5,8\}$, $\mathcal{L}_9 = \{3,4,8\}$
$\mathcal{L}_{12} = \{1,6,8\}$ pero la única recta paralela a $\mathcal{L}_1$ que pasa por 8
es $\mathcal{L}_3$.

Sea $\mathcal{L}_1 = \{1,2,3\}$ y el punto 9
por el punto 9 pasan $\mathcal{L}_3 = \{7,8,9\}$, $\mathcal{L}_6 = \{3,6,9\}$, $\mathcal{L}_7 = \{1,5,9\}$
$\mathcal{L}_{11} = \{2,4,9\}$ pero la única recta paralela a $\mathcal{L}_1$ que pasa por 9
es $\mathcal{L}_3$.

Acabamos de hacer la verificación para $\mathcal{L}_1$ y cualquier punto exterior a ella, y de la misma forma y con la ayuda de la tabla de incidencia podemos comprobar que estos dos axiomas se cumplen -- también para el resto de las rectas.

POR LO TANTO ES UN PLANO AFIN

PLANOS PROYECTIVOS

AXIOMAS EJEMPLOS

PLANO PROYECTIVO

DEFINICION: Se llama plano proyectivo a un par (P,R) en el que valen los axiomas siguientes.-

I.) Por dos puntos pasa una recta.

$$\forall A \ \forall B \ (A \neq B) \Rightarrow \exists a \in R \ni (A \in a \wedge B \in a)$$

II.) Por dos puntos no puede pasar más de una recta.

$$\forall A, B \in P, \ A \neq B, \ (A \in a \wedge B \in a) \wedge (A \in b \wedge B \in b) \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in R$$

III.) Dadas dos rectas estas siempre se intersecan.

$$\forall a \ \forall b \ (a \neq b \Rightarrow \exists A \ni \ A \in a \cap b)$$

IV.) Existen cuatro puntos en el plano tales que cualesquiera tres de ellos no estan sobre la misma recta.

$$\exists A_1, \exists A_2, \exists A_3, \exists A_4 \ \forall a \ (A_i \in a \vee A_j \notin a \vee A_k \notin a) \wedge$$

$$(1 \leq i,j,k \leq 4) \wedge (i \neq j \neq k \neq i)$$

Ejemplos:

1.) Sean $P = \{ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 \}$

$\ell_1 = \{P_1, P_2, P_5\}$ $\ell_2 = \{P_3, P_4, P_5\}$ $\ell_3 = \{P_1, P_3, P_7\}$

$\ell_4 = \{P_2, P_4, P_7\}$ $\ell_5 = \{P_1, P_4, P_6\}$ $\ell_6 = \{P_2, P_3, P_6\}$

$\ell_7 = \{P_5, P_6, P_7\}$

	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_4$	$\mathcal{L}_5$	$\mathcal{L}_6$	$\mathcal{L}_7$
P_1	X		X		X		
P_2	X			X		X	
P_3		X	X			X	
P_4		X		X	X		
P_5	X	X					X
P_6					X	X	X
P_7			X	X			X

Comprobar que es un plano proyectivo.-

I y II) <u>Por dos puntos pasa una y sólo una recta.</u>

Por P_1 P_2 solamente pasa $\mathcal{L}_1$
Por P_1 P_3 solamente pasa $\mathcal{L}_3$
Por P_1 P_4 solamente pasa $\mathcal{L}_5$
Por P_1 P_5 solamente pasa $\mathcal{L}_1$
Por P_1 P_6 solamente pasa $\mathcal{L}_5$
Por P_1 P_7 solamente pasa $\mathcal{L}_3$

por P_2 P_3 solamente pasa $\mathcal{L}_6$
por P_2 P_4 solamente pasa $\mathcal{L}_4$
por P_2 P_5 solamente pasa $\mathcal{L}_1$
por P_2 P_6 solamente pasa $\mathcal{L}_6$
por P_2 P_4 solamente pasa $\mathcal{L}_4$

Por P_3 P_4 solamente pasa $\mathcal{L}_2$
Por P_3 P_5 " " $\mathcal{L}_2$
Por P_3 P_6 " " $\mathcal{L}_6$
Por P_3 P_7 " " $\mathcal{L}_3$

por P_4 P_5 solamente pasa $\mathcal{L}_2$
por P_4 P_6 " " $\mathcal{L}_5$
por P_4 P_7 " " $\mathcal{L}_4$

Por P_5 P_6 solamente pasa $\mathcal{L}_7$
Por P_5 P_7 " " $\mathcal{L}_7$

por P_6 P_7 solamente pasa $\mathcal{L}_7$

III) Dado cualquier par de rectas estas siempre se cortan.-

Dadas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cortan en P_5
" $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$ " " " P_1
" $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_4$ " " " P_2
" $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_5$ " " " P_1
" $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_6$ " " " P_2
" $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_7$ " " " P_5

Dadas $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ se cortan en P_3
" $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_4$ " " " P_4
" $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_5$ " " " P_4
" $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_6$ " " " P_3
" $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_7$ " " " P_5

Dadas $\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_4$ se cortan en P_7
" $\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_5$ " " " P_1
" $\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_6$ " " " P_3
" $\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_7$ " " " P_7

Dadas $\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_5$ se cortan en P_4
" $\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_6$ " " " P_2
" $\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_7$ " " " P_7

Dadas $\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_6$ se cortan en P_6
" $\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_7$ " " " P_6

Dadas $\mathcal{L}_6$ y $\mathcal{L}_7$ se cortan en P_6

IV) Existen cuatro puntos en el plano tales que cualesquiera tres de ellos no están sobre la misma recta.

Considérense $\{P_1, P_2, P_3, P_4\} \in \mathcal{P}$

En $\mathcal{L}_1$: $P_1 \in \mathcal{L}_1$, $P_2 \in \mathcal{L}_1$, $P_3 \notin \mathcal{L}_1$, $P_4 \notin \mathcal{L}_1$
En $\mathcal{L}_2$: $P_1 \notin \mathcal{L}_2$, $P_2 \notin \mathcal{L}_2$, $P_3 \in \mathcal{L}_2$, $P_4 \in \mathcal{L}_2$
En $\mathcal{L}_3$: $P_1 \in \mathcal{L}_3$, $P_2 \notin \mathcal{L}_3$, $P_3 \in \mathcal{L}_3$, $P_4 \notin \mathcal{L}_3$
En $\mathcal{L}_4$: $P_1 \notin \mathcal{L}_4$, $P_2 \in \mathcal{L}_4$, $P_3 \notin \mathcal{L}_4$, $P_4 \in \mathcal{L}_4$
En $\mathcal{L}_5$: $P_1 \in \mathcal{L}_5$, $P_2 \notin \mathcal{L}_5$, $P_3 \notin \mathcal{L}_5$, $P_4 \in \mathcal{L}_5$
En $\mathcal{L}_6$: $P_1 \notin \mathcal{L}_6$, $P_2 \in \mathcal{L}_6$, $P_3 \in \mathcal{L}_6$, $P_4 \notin \mathcal{L}_6$
En $\mathcal{L}_7$: $P_1 \notin \mathcal{L}_7$, $P_2 \notin \mathcal{L}_7$, $P_3 \notin \mathcal{L}_7$, $P_4 \notin \mathcal{L}_7$

$\therefore (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ ES UN PLANO PROYECTIVO

Ejemplo:

2.-) Sean $\mathcal{P} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,\}$

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1 = \{1,2,5,7\},\ \mathcal{L}_2 = \{2,3,6,8\},\ \mathcal{L}_3 = \{3,4,7,9\},\ \mathcal{L}_4 = \{4,5,8,10\} \\ \mathcal{L}_5 = \{5,6,9,11\},\ \mathcal{L}_6 = \{6,7,10,12\},\ \mathcal{L}_7 = \{7,8,11,13\},\ \mathcal{L}_8 = \{8,9,12,1\} \\ \mathcal{L}_9 = \{9,10,13,2\},\ \mathcal{L}_{10} = \{10,11,1,3\},\ \mathcal{L}_{11} = \{11,12,2,4\},\ \mathcal{L}_{12} = \{12,13,3,5\} \\ \mathcal{L}_{13} = \{13,1,4,6\} \end{array} \right\}$$

Verificar que $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ es un plano proyectivo.

	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_4$	$\mathcal{L}_5$	$\mathcal{L}_6$	$\mathcal{L}_7$	$\mathcal{L}_8$	$\mathcal{L}_9$	$\mathcal{L}_{10}$	$\mathcal{L}_{11}$	$\mathcal{L}_{12}$	$\mathcal{L}_{13}$
1	x							x		x			x
2	x	x							x		x		
3		x	x							x		x	
4			x	x							x		x
5	x			x	x							x	
6		x			x	x							x
7	x		x			x	x						
8		x		x			x	x					
9			x		x			x	x				
10				x		x			x	x			
11					x		x			x	x		
12						x		x			x	x	
13							x		x			x	x

I y II) Por dos puntos pasa una y sólo una recta.

Por	$P_1\ P_2$	pasa	$\mathcal{L}_1$	solamente
"	$P_1\ P_3$	"	$\mathcal{L}_{10}$	"
"	$P_1\ P_4$	"	$\mathcal{L}_{13}$	"
"	$P_1\ P_5$	"	$\mathcal{L}_1$	"
"	$P_1\ P_6$	"	$\mathcal{L}_{13}$	"
"	$P_1\ P_7$	"	$\mathcal{L}_1$	"
"	$P_1\ P_8$	"	$\mathcal{L}_8$	"
"	$P_1\ P_9$	"	$\mathcal{L}_8$	"
"	$P_1\ P_{10}$	"	$\mathcal{L}_{10}$	"
"	$P_1\ P_{11}$	"	$\mathcal{L}_{10}$	"
"	$P_1\ P_{12}$	"	$\mathcal{L}_8$	"
"	$P_1\ P_{13}$	"	$\mathcal{L}_{13}$	"

por	$P_2\ P_3$	pasa	$\mathcal{L}_2$	solamente
"	$P_2\ P_4$	"	$\mathcal{L}_{11}$	"
"	$P_2\ P_5$	"	$\mathcal{L}_1$	"
"	$P_2\ P_6$	"	$\mathcal{L}_2$	"
"	$P_2\ P_7$	"	$\mathcal{L}_1$	"
"	$P_2\ P_8$	"	$\mathcal{L}_2$	"
"	$P_2\ P_9$	"	$\mathcal{L}_9$	"
"	$P_2\ P_{10}$	"	$\mathcal{L}_9$	"
"	$P_2\ P_{11}$	"	$\mathcal{L}_{11}$	"
"	$P_2\ P_{12}$	"	$\mathcal{L}_{11}$	"
"	$P_2\ P_{13}$	"	$\mathcal{L}_9$	"

por	$P_3\ P_4$	pasa	$\mathcal{L}_3$	solamente
"	$P_3\ P_5$	"	$\mathcal{L}_{12}$	"
"	$P_3\ P_6$	"	$\mathcal{L}_2$	"
"	$P_3\ P_7$	"	$\mathcal{L}_3$	"
"	$P_3\ P_8$	"	$\mathcal{L}_2$	"
"	$P_3\ P_9$	"	$\mathcal{L}_3$	"
"	$P_3\ P_{10}$	"	$\mathcal{L}_{10}$	"
"	$P_3\ P_{11}$	"	$\mathcal{L}_{10}$	"
"	$P_3\ P_{12}$	"	$\mathcal{L}_{12}$	"
"	$P_3\ P_{13}$	"	$\mathcal{L}_{12}$	"

por	$P_4\ P_5$	pasa	$\mathcal{L}_4$	solamente
"	$P_4\ P_6$	"	$\mathcal{L}_{13}$	"
"	$P_4\ P_7$	"	$\mathcal{L}_3$	"
"	$P_4\ P_8$	"	$\mathcal{L}_4$	"
"	$P_4\ P_9$	"	$\mathcal{L}_3$	"
"	$P_4\ P_{10}$	"	$\mathcal{L}_4$	"
"	$P_4\ P_{11}$	"	$\mathcal{L}_{11}$	"
"	$P_4\ P_{12}$	"	$\mathcal{L}_{11}$	"
"	$P_4\ P_{13}$	"	$\mathcal{L}_{13}$	"

Por	P_5 P_6	pasa	$\mathcal{L}_5$	solamente
"	P_5 P_7	"	$\mathcal{L}_1$	"
"	P_5 P_8	"	$\mathcal{L}_4$	"
"	P_5 P_9	"	$\mathcal{L}_5$	"
"	P_5 P_{10}	"	$\mathcal{L}_4$	"
"	P_5 P_{11}	"	$\mathcal{L}_5$	"
"	P_5 P_{12}	"	$\mathcal{L}_{12}$	"
"	P_5 P_{13}	"	$\mathcal{L}_{12}$	"

por	P_6 P_7	pasa	$\mathcal{L}_6$	solamente
"	P_6 P_8	"	$\mathcal{L}_2$	"
"	P_6 P_9	"	$\mathcal{L}_5$	"
"	P_6 P_{10}	"	$\mathcal{L}_6$	"
"	P_6 P_{11}	"	$\mathcal{L}_5$	"
"	P_6 P_{12}	"	$\mathcal{L}_6$	"
"	P_6 P_{13}	"	$\mathcal{L}_{13}$	"

Por	P_7 P_8	pasa	$\mathcal{L}_7$	solamente
"	P_7 P_9	"	$\mathcal{L}_3$	"
"	P_7 P_{10}	"	$\mathcal{L}_6$	"
"	P_7 P_{11}	"	$\mathcal{L}_7$	"
"	P_7 P_{12}	"	$\mathcal{L}_6$	"
"	P_7 P_{13}	"	$\mathcal{L}_7$	"

por	P_8 P_9	pasa	$\mathcal{L}_8$	solamente
"	P_8 P_{10}	"	$\mathcal{L}_4$	"
"	P_8 P_{11}	"	$\mathcal{L}_7$	"
"	P_8 P_{12}	"	$\mathcal{L}_8$	"
"	P_8 P_{13}	"	$\mathcal{L}_7$	"

Por	P_9 P_{10}	pasa	$\mathcal{L}_9$	solamente
"	P_9 P_{11}	"	$\mathcal{L}_5$	"
"	P_9 P_{12}	"	$\mathcal{L}_8$	"
"	P_9 P_{13}	"	$\mathcal{L}_9$	"

por	P_{10} P_{11}	pasa	$\mathcal{L}_{10}$	solamente
"	P_{10} P_{12}	"	$\mathcal{L}_6$	"
"	P_{10} P_{13}	"	$\mathcal{L}_9$	"

Por	P_{11} P_{12}	pasa	$\mathcal{L}_{11}$	solamente
"	P_{11} P_{13}	"	$\mathcal{L}_7$	"

por	P_{12} P_{13}	pasa	$\mathcal{L}_{12}$	solamente

III) Dada cualquier par de rectas estas siempre se cortan.

En efecto:

$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cortan en 2
$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$ " " " 7
$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_4$ " " " 5
$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_5$ " " " 5
$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_6$ " " " 7
$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_7$ " " " 7
$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_8$ " " " 1
$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_9$ " " " 2
$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_{10}$ " " " 1
$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_{11}$ " " " 2
$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_{12}$ " " " 5
$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_{13}$ " " " 1

$\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ se cortan en 3
$\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_4$ " " " 8
$\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_5$ " " " 6
$\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_6$ " " " 6
$\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_7$ " " " 8
$\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_8$ " " " 8
$\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_9$ " " " 2
$\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_{10}$ " " " 3
$\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_{11}$ " " " 2
$\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_{12}$ " " " 3
$\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_{13}$ " " " 6

$\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_4$ se cortan en 4
$\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_5$ " " " 9
$\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_6$ " " " 7
$\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_7$ " " " 7
$\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_8$ " " " 9
$\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_9$ " " " 9
$\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_{10}$ " " " 3
$\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_{11}$ " " " 4
$\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_{12}$ " " " 3
$\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_{13}$ " " " 4

$\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_5$ se cortan en 5
$\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_6$ " " " 10
$\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_7$ " " " 8
$\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_8$ " " " 8
$\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_9$ " " " 10
$\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_{10}$ " " " 10
$\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_{11}$ " " " 4
$\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_{12}$ " " " 5
$\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_{13}$ " " " 4

$\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_6$ se cortan en 6
$\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_7$ " " " 11
$\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_8$ " " " 9
$\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_9$ " " " 9
$\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_{10}$ " " " 11
$\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_{11}$ " " " 11
$\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_{12}$ " " " 5
$\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_{13}$ " " " 6

$\mathcal{L}_6$ y $\mathcal{L}_7$ se cortan en 7
$\mathcal{L}_6$ y $\mathcal{L}_8$ " " " 12
$\mathcal{L}_6$ y $\mathcal{L}_9$ " " " 10
$\mathcal{L}_6$ y $\mathcal{L}_{10}$ " " " 10
$\mathcal{L}_6$ y $\mathcal{L}_{11}$ " " " 12
$\mathcal{L}_6$ y $\mathcal{L}_{12}$ " " " 12
$\mathcal{L}_6$ y $\mathcal{L}_{13}$ " " " 6

$\mathcal{L}_7$ y $\mathcal{L}_8$ se cortan en 8
$\mathcal{L}_7$ y $\mathcal{L}_9$ " " " 13
$\mathcal{L}_7$ y $\mathcal{L}_{10}$ " " " 11
$\mathcal{L}_7$ y $\mathcal{L}_{11}$ " " " 11
$\mathcal{L}_7$ y $\mathcal{L}_{12}$ " " " 13
$\mathcal{L}_7$ y $\mathcal{L}_{13}$ " " " 13

$\mathcal{L}_8$ y $\mathcal{L}_9$ se cortan en 9
$\mathcal{L}_8$ y $\mathcal{L}_{10}$ " " " 1
$\mathcal{L}_8$ y $\mathcal{L}_{11}$ " " " 12
$\mathcal{L}_8$ y $\mathcal{L}_{12}$ " " " 12
$\mathcal{L}_8$ y $\mathcal{L}_{13}$ " " " 1

$\mathcal{L}_9$ y $\mathcal{L}_{10}$ se cortan en 10
$\mathcal{L}_9$ y $\mathcal{L}_{11}$ " " " 2
$\mathcal{L}_9$ y $\mathcal{L}_{12}$ " " " 13
$\mathcal{L}_9$ y $\mathcal{L}_{13}$ " " " 13

$\mathcal{L}_{10}$ y $\mathcal{L}_{11}$ se cortan en 11
$\mathcal{L}_{10}$ y $\mathcal{L}_{12}$ " " " 3
$\mathcal{L}_{10}$ y $\mathcal{L}_{13}$ " " " 1

$\mathcal{L}_{11}$ y $\mathcal{L}_{12}$ se cortan en 12
$\mathcal{L}_{11}$ y $\mathcal{L}_{13}$ " " " 4

$\mathcal{L}_{12}$ y $\mathcal{L}_{13}$ se cortan en 13

IV) Existe cuatro puntos en el plano tales que tres de ellos no están sobre la misma recta.

Considérense los puntos $\{1, 2, 3, 4\}$

En $\mathcal{L}_1 = \{1,2,5,7\}$ $1 \in \mathcal{L}_1, 2 \in \mathcal{L}_1, 3 \notin \mathcal{L}_1, 4 \notin \mathcal{L}_1$

En $\mathcal{L}_2 = \{2,3,6,8\}$ $1 \notin \mathcal{L}_2, 2 \in \mathcal{L}_2, 3 \in \mathcal{L}_2, 4 \notin \mathcal{L}_2$

En $\mathcal{L}_3 = \{3,4,7,9\}$ $1 \notin \mathcal{L}_3, 2 \notin \mathcal{L}_3, 3 \in \mathcal{L}_3, 4 \notin \mathcal{L}_3$

En $\mathcal{L}_4 = \{4,5,8,9\}$ $1 \notin \mathcal{L}_4, 2 \notin \mathcal{L}_4, 3 \notin \mathcal{L}_4, 4 \in \mathcal{L}_4$

En $\mathcal{L}_5 = \{5,6,9,11\}$ $1 \notin \mathcal{L}_5, 2 \notin \mathcal{L}_5, 3 \notin \mathcal{L}_5, 4 \in \mathcal{L}_5$

En $\mathcal{L}_6 = \{6,7,10,12\}$ $1 \notin \mathcal{L}_6, 2 \notin \mathcal{L}_6, 3 \notin \mathcal{L}_6, 4 \notin \mathcal{L}_6$

En $\mathcal{L}_7 = \{7,8,11,13\}$ $1 \notin \mathcal{L}_7, 2 \notin \mathcal{L}_7, 3 \notin \mathcal{L}_7, 4 \notin \mathcal{L}_7$

En $\mathcal{L}_8 = \{8,9,12,1\}$ $1 \in \mathcal{L}_8, 2 \notin \mathcal{L}_8, 3 \notin \mathcal{L}_8, 4 \notin \mathcal{L}_8$

En $\mathcal{L}_9 = \{9,10,13,2\}$ $1 \notin \mathcal{L}_9, 2 \in \mathcal{L}_9, 3 \notin \mathcal{L}_9, 4 \notin \mathcal{L}_9$

En $\mathcal{L}_{10} = \{10,11,1,3\}$ $1 \in \mathcal{L}_{10}, 2 \notin \mathcal{L}_{10}, 3 \in \mathcal{L}_{10}, 4 \notin \mathcal{L}_{10}$

En $\mathcal{L}_{11} = \{11,12,2,4\}$ $1 \notin \mathcal{L}_{11}, 2 \in \mathcal{L}_{11}, 3 \notin \mathcal{L}_{11}, 4 \in \mathcal{L}_{11}$

En $\mathcal{L}_{12} = \{12,13,3,5\}$ $1 \notin \mathcal{L}_{12}, 2 \notin \mathcal{L}_{12}, 3 \in \mathcal{L}_{12}, 4 \notin \mathcal{L}_{12}$

En $\mathcal{L}_{13} = \{13,1,4,6\}$ $1 \in \mathcal{L}_{13}, 2 \notin \mathcal{L}_{13}, 3 \notin \mathcal{L}_{13}, 4 \in \mathcal{L}_{13}$

$\therefore$ ES UN PLANO PROYECTIVO.

EL CAMPO $\mathbb{Z}_2$

EL CAMPO $\mathbb{Z}_2$

Sea $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ un conjunto con dos elementos y con dos operaciones ($+$, $\bullet$) llamadas suma y producto, dadas por las siguientes tablas:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\bullet$	0	1
0	0	0
1	0	1

Demostraremos que $\mathbb{Z}_2$ (enteros módulo 2) con estas operaciones es un campo.

DEMOSTRACION:

Por demostrar que $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ cumple con los seis postulados de campo.

I) <u>POSTULADO DE CERRADURA DE LA SUMA</u>.

Sean $x, y \in \mathbb{Z}_2 \Rightarrow (x+y) \in \mathbb{Z}_2$

$0 + 0 = 0$ $\quad$ $1 + 0 = 1$

$0 + 1 = 1$ $\quad$ $1 + 1 = 0$

$\therefore$ cumple.

I') POSTULADO DE CERRADURA DEL PRODUCTO

Sean $X, Y \in \mathbb{Z}_2 \Rightarrow X \cdot Y \in \mathbb{Z}_2$

$0.0 = 0$	$1.0 = 0$
$0.1 - 0$	$1.1 = 0$

$\therefore$ cumple.

II) POSTULADO CONMUTATIVO DE LA SUMA

Sean $X, Y \in \mathbb{Z}_2 \Rightarrow X+Y = Y+X$

$1 + 0 = 1$

$0 + 1 = 1 \qquad \therefore\ 1 + 0 = 0 + 1$

$\therefore$ cumple.

II') POSTULADO CONMUTATIVO DEL PRODUCTO.

Sean $X, Y \in \mathbb{Z}_2 \Rightarrow X \cdot Y = Y \cdot X$

$0.1 = 0$

$1.0 = 0 \qquad \therefore\ 0.1 = 1.0 = 0$

$\therefore$ cumple.

III) <u>POSTULADO ASOCIATIVO DE LA SUMA.</u>

Sean $X, Y, Z \in \mathbb{Z}_2 \Rightarrow (X+Y)+Z = X+(Y+Z)$

Se presentan 8 posibilidades:

000, 001, 010, 100, 111, 110, 101, 011

Aquí para abreviar comprobamos solamente 2 casos los demás son análogos.

$$\begin{cases}(0+0)+1 = 0+1 = 1 \\ 0+(0+1) = 0+1 = 1\end{cases} \qquad \begin{cases}(1+1)+0 = 0+0 = 0 \\ 1+(1+0) = 1+1 = 0\end{cases}$$

$\therefore$ cumple.

III') <u>POSTULADO ASOCIATIVO DEL PRODUCTO.</u>

Sean $X, Y, Z \in \mathbb{Z}_2 \Rightarrow (X.Y) . Z = X. (Y.Z)$

Se presentan los mismos 8 casos que en el postulado anteior, abreviaremos en la misma forma.

$$(0.0) . 1 = 0.1 = 0 \qquad (1.1).0 = 1.0 = 0$$

$$0. (0.1) = 0.0 = 0 \qquad 1.(1.0) = 1.0 = 0$$

$\therefore$ cumple.

IV) POSTULADO DISTRIBUTIVO.

Sea $X,Y,Z \in \mathbb{Z}_2 \Longrightarrow X\,(Y+Z) = XY + XZ$

$$(Y+Z)\,X = YX + ZX$$

Puesto que la multiplicación es conmutativa basta demostrar la distributividad por un lado.

Probaremos la distributividad por la izquierda, se presentan - los mismos 8 casos anteriores, pero probaremos sólo dos.

$0.\ (0 + 1) = 0\ (1) = 0 \qquad 1.(1 + 0) = 1.1 = 1$

$0.0 + 0.1 = 0 + 0 = 0 \qquad 1.1 + 1.0 = 1 + 0 = 1$

$\therefore$ cumple

V) POSTULADO DEL IDENTICO DE LA SUMA

$\exists\, 0 \in \mathbb{Z}_2 \ni \forall\, x \in \mathbb{Z}_2,\quad X + 0 = 0 + X = X$

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1 + 0 = 1$

$\therefore$ cumple

V') POSTULADO DEL IDENTICO DEL PRODUCTO.

$$\exists\ 1 \in \mathbb{Z}_2 \ni \forall\ x \in \mathbb{Z}_2,\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

0.1 = 1.0 = 0

1.1 = 1.1 = 1

$\therefore$ cumple.

VI) POSTULADO DEL INVERSO DE LA SUMA.

$$\forall\ x \in \mathbb{Z}_2,\ \exists\ -x \in \mathbb{Z}_2 \ni x + (-x) = 0$$

0 + 0 = 0 , -0 = 0 (es decir el inverso aditivo de 0 es 0)

1 + 1 = 0 , -1 = 1 (es decir el inverso aditivo de 1 ës 1)

$\therefore$ cumple.

VI') POSTULADO DEL INVERSO DEL PRODUCTO.

$$\forall\ x \in \mathbb{Z}_2,\ x \neq 0\ \exists\ x^{-1} \in \mathbb{Z}_2 \ni x \cdot x^{-1} = 1$$

Como 1.1 = 1 , $1^{-1} = 1$
(es decir el inverso multiplicativo de 1 es 1)

$\therefore$ $\mathbb{Z}_2 = \{1, 0\}$ con las operaciones (+,•) es un campo.

EL PLANO AFIN

SOBRE $\mathbb{Z}_2$

EL PLANO AFIN SOBRE $\mathbb{Z}_2$:

El conjunto $\mathcal{P} = \left\{ (x,y) \,/\, x \in \mathbb{Z}_2 \text{ y } y \in \mathbb{Z}_2 \right\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ producto cartesiano de $\mathbb{Z}_2$ por sí mismo consta de 4 elementos que llameremos puntos; más adelante definiremos rectas en $\mathcal{P}$ y demostraremos que es un plano afín.

$$\mathcal{P} = \left\{ (x,y) \,/\, x \in \mathbb{Z}_2 \text{ y } y \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

$$\mathcal{P} = \left\{ (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) \right\}$$

Por comodidad y para seguir las ideas de la Geometría Analítica usual, representaremos estos 4 puntos como sigue:

$$\boxed{\mathbb{Z}_2 \quad \times \quad \mathbb{Z}_2}$$

Llamaremos rectas a los conjuntos de puntos (x,y) en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ de la forma siguiente:

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \,/\, ax+by+c = 0 \quad \text{con } a,b,c, \in \mathbb{Z}_2 \text{ ý } a \text{ó} b \neq 0 \right\}$$

Para seguir la nomenclatura de la Geometría Analítica, si $b \neq 0$ diremos que $-\frac{a}{b}$ es la pendiente de la recta.

No perdamos de vista que lo que estamos llamando pendiente es - solamente al elemento $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_2$, siempre y cuando $b \neq 0$, es decir cuando $b = 1$

En el caso de que b = 0 simplemente diremos que las rectas son verticales siguiendo la costumbre, (o de pendiente infinito).

Estamos listos para obtener todas las rectas de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Notas aclaratorias para el mejor entendimiento en la obtención de las rectas de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Con referencia a la tabla de suma.

1 + 1 = 0 entonces el inverso de 1 es 1 es decir -1=1

1.-) RECTAS "HORIZONTALES"

Con pendiente igual a cero.

$ax + by + c = 0$

$0x + 1y + 0 = 0 \quad ; \quad y = 0$

$0x + 1y + 1 = 0 \quad ; \quad y = -1 \quad ; \quad y = 1$

Por lo tanto las rectas horizontales son $\begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

2.-) RECTAS "VERTICALES.

$ax + by + c = 0$

$1x + 0y + 0 = 0 \quad ; \quad x = 0$

$1x + 0y + 1 = 0 \quad ; \quad x = -1 \quad ; \quad x = 1$

Por lo tanto las rectas verticales son. $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

3.-) <u>Con pendiente igual a uno:</u>

$ax + by + c = 0$

$1x + 1y + 0 = 0$; $y = -1x$; $y = x$

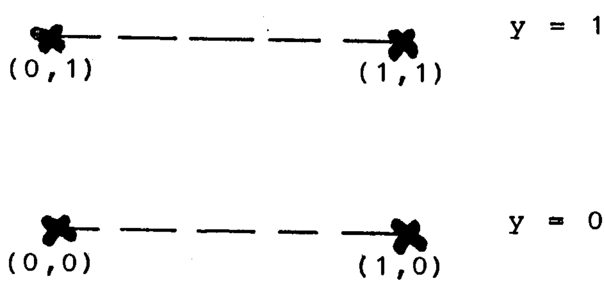
$1x + 1y + 1 = 0$; $y = -1\,x-1$; $y = 1x + 1$

Por lo tanto las rectas con pendiente uno son $\begin{cases} Y = X \\ Y = X+1 \end{cases}$

En conclusión $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ consta de cuatro puntos, y de seis rectas.

Mostremos ahora las rectas y sus puntos respectivos.

1) <u>RECTAS HORIZONTALES:</u>



$y = 0$ consta de los puntos $(0,0)$, $(1,0)$

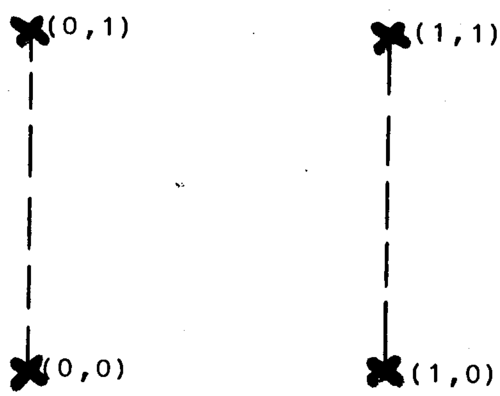
$y = 1$ consta de los puntos $(0,1)$, $(1,1)$

Las rayas punteadas sólo sirven para no perder de vista los dos puntos de los cuales consta cada recta.

2.) LAS RECTAS VERTICALES:

$X = 0$ consta de los puntos $(0,0)$, $(0,1)$

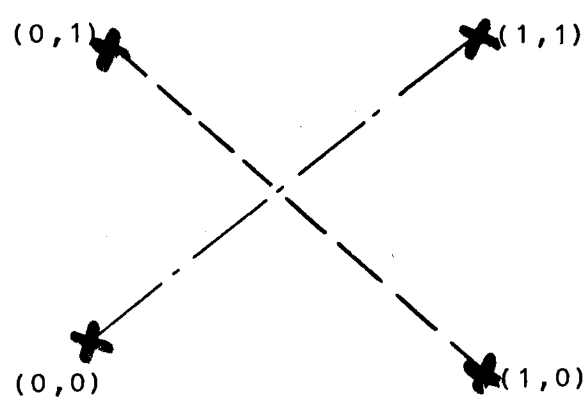
$X = 1$ " " " " $(1,0)$, $(1,1)$



3.) LAS RECTAS CON PENDIENTE UNO:

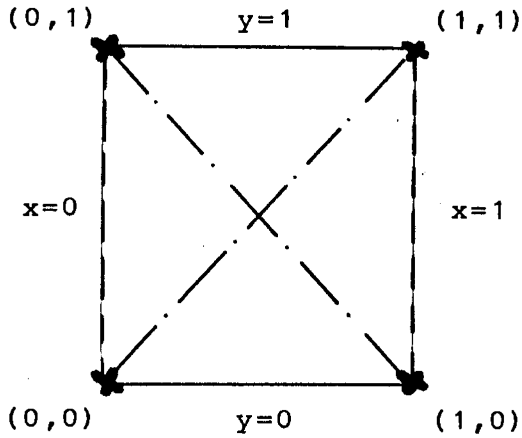
$y = x$ Consta de los puntos $(0,0)$, $(1,1)$

$y = x+1$ " " " " $(0,1)$, $(1,0)$



Cada una de las rectas de este plano consta de dos puntos.

SOBREPONIENDO TODAS LAS RECTAS OBTENEMOS EL PLANO $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ CON SUS PUNTOS Y SUS RECTAS.



$$\boxed{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$$

Dos rectas se llaman paralelas si no se intersectan por lo tanto:

X=0	es paralela a	X=1	porque no tienen ningún punto en común
Y=0	es paralela a	Y=1	" " " " " " "
Y=X	es paralela a	Y=x+1	" " " " " " "

RECORDEMOS LOS AXIOMAS DEL PLANO AFIN:

I) Por dos punto pasa una recta.

II) Esta recta es única.

III) Toda recta tiene al menos dos punto.

IV) Existen al menos tres puntos no colineales.

V) Dada una recta ℓ y un punto $P \notin \ell$ existe una recta ℓ' tal que i) $P \in \ell'$
ii) $\ell \cap \ell' = \emptyset$

V') ℓ' es única.

Para demostrar que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es efectivamente un plano afín, tenemos que comprobar que se cumplen los seis axiomas anteriores.

Por demostrar que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con sus puntos y sus rectas es un plano afín.

DEMOSTRACION:

Sea $\mathcal{P}$ y $\mathcal{R}$ el conjunto de puntos y rectas recpectivamente en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$$\mathcal{P} = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ 1,1,)\}$$

$$\mathcal{R} = \Big\{\{(0,0),\ (1,0)\}, \{(0,1),\ (1,1)\}, \{(0,0),(0,1)\}, \{(1,0),\ (1,1)\}$$
$$\{(0,0),\ (1,1)\}, \{(0,1),\ (1,0)\}\Big\}$$

Para facilitar la verificación de los axiomas, bauticemos a los - puntos y a las rectas.

$(0,0) = P_1$

$(0,1) = P_2$

$(1,0) = P_3$

$(1,1) = P_4$

$\{(0,0),(1,0)\} = \ell_1$ $\quad$ $\{(0,0),(0,1)\} = \ell_3$

$\{(0,1),(1,1)\} = \ell_2$ $\quad$ $\{(1,0),(1,1)\} = \ell_4$

$\{(0,0),(1,1)\} = \ell_5$

$\{(0,1),(1,0)\} = \ell_6$

$$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\} \qquad \mathcal{R} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6\}$$

VERIFICACION:

	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_4$	$\mathcal{L}_5$	$\mathcal{L}_6$
P_1	X		X		X	
P_2		X	X			X
P_3	X			X		X
P_4		X		X	X	

TABLA DE INCIDENCIA.

I) Axiomas: Por dos puntos pasa una recta.

II) Axiomas: Esta recta es única.

DEMOSTRACION: Dados P_1 , P_2 $\begin{cases} P_1 \in \mathcal{L}_3 \\ P_2 \in \mathcal{L}_3 \end{cases}$ y solamente en $\mathcal{L}_3$

Dados P_1 , P_3 $\begin{cases} P_1 \in \mathcal{L}_1 \\ P_3 \in \mathcal{L}_1 \end{cases}$ y solamente en $\mathcal{L}_1$

Dados P_1 , P_4 $\begin{cases} P_1 \in \mathcal{L}_5 \\ P_4 \in \mathcal{L}_5 \end{cases}$ y solamente en $\mathcal{L}_5$

Dados P_2 , P_3 $\begin{cases} P_2 \in \mathcal{L}_6 \\ P_3 \in \mathcal{L}_6 \end{cases}$ y solamente en $\mathcal{L}_6$

Dados P_2 , P_4 $\begin{cases} P_2 \in \mathcal{L}_2 \\ P_4 \in \mathcal{L}_2 \end{cases}$ y solamente en $\mathcal{L}_2$

Dados P_3 , P_4 $\begin{cases} P_3 \in \mathcal{L}_4 \\ P_4 \in \mathcal{L}_4 \end{cases}$ y solamente en $\mathcal{L}_4$

$\therefore$ cumple

III) Axiomas: toda recta tiene al menos dos puntos:

DEMOSTRACION: $\mathcal{L}_1 = \{P_1, P_3\}$ $\mathcal{L}_4 = \{P_3, P_4\}$

$\mathcal{L}_2 = \{P_2, P_4\}$ $\mathcal{L}_5 = \{P_1, P_4\}$

$\mathcal{L}_3 = \{P_1, P_2\}$ $\mathcal{L}_6 = \{P_2, P_3\}$

$\therefore$ cumple

IV) Axiomas: Existen al menos tres puntos no colineales.

DEMOSTRACION: Los puntos P_1, P_2, P_3 no son colineales, pues no hay rectas con más de dos puntos.

$\therefore$ cumple

V) Axioma: Dada una recta ℓ y un punto $P \notin \ell$ existe una recta ℓ' tal que: i) $P \in \ell'$

ii) $\ell \cap \ell' = \emptyset$

V) Axioma: ℓ' es única.

DEMOSTRACION: Sea $\mathcal{L}_1 = \{P_1, P_3\}$ por P_2 pasa $\mathcal{L}_2 \,//\, \mathcal{L}_1$
por P_4 pasa $\mathcal{L}_2 \,//\, \mathcal{L}_1$

Sea $\mathcal{L}_2 = \{P_2, P_4\}$ por P_1 pasa $\mathcal{L}_1 \,//\, \mathcal{L}_2$
por P_3 pasa $\mathcal{L}_1 \,//\, \mathcal{L}_2$

Sea $\mathcal{L}_3 = \{P_1, P_2\}$ por P_3 pasa $\mathcal{L}_4 \,//\, \mathcal{L}_3$
por P_4 pasa $\mathcal{L}_4 \,//\, \mathcal{L}_3$

Sea $\mathcal{L}_4 = \{P_3, P_4\}$ por P_1 pasa $\mathcal{L}_3 \,//\, \mathcal{L}_4$
por P_2 pasa $\mathcal{L}_3 \,//\, \mathcal{L}_4$

Sea $\mathcal{L}_5 = \{P_1 , P_4\}$ por P_2 pasa $\mathcal{L}_6 // \mathcal{L}_5$
por P_3 pasa $\mathcal{L}_6 // \mathcal{L}_5$

Sea $\mathcal{L}_6 = \{P_2 , P_3\}$ por P_1 pasa $\mathcal{L}_5 // \mathcal{L}_6$
por P_4 pasa $\mathcal{L}_5 // \mathcal{L}_6$

En cada caso existe una y a lo más una paralela que pasa por el punto exterior a la recta dada.

$\therefore \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con sus puntos y sus rectas es un plano afín.

EL PLANO PROYECTIVO

SOBRE $\mathbb{Z}_2$

EL PLANO PROYECTIVO SOBRE $\mathbb{Z}_2$

Podemos extender el plano afín $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ a un plano proyectivo al cual le llamaremos "EL PLANO PROYECTIVO SOBRE $\mathbb{Z}_2$"; este nuevo plano deberá cumplir con los axiomas de plano proyectivo, es decir, con los tres primeros axiomas del plano afín y además con los dos siguientes:

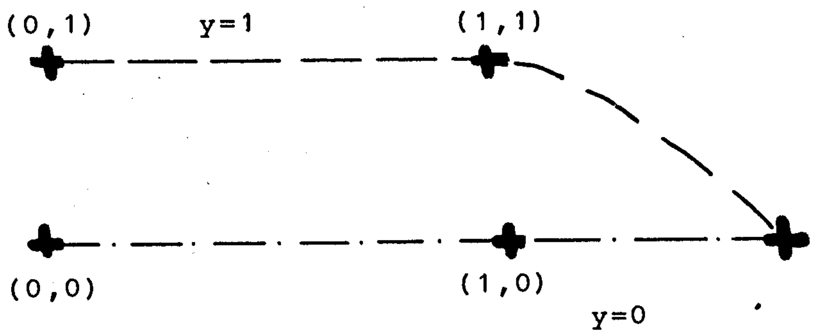
a) <u>Axiomas:</u> Dadas dos rectas estas siempre se cortan.

b) <u>Axiomas:</u> Existen cuatro puntos en el plano tales que cualesquiera tres de ellos no están sobre la misma recta.

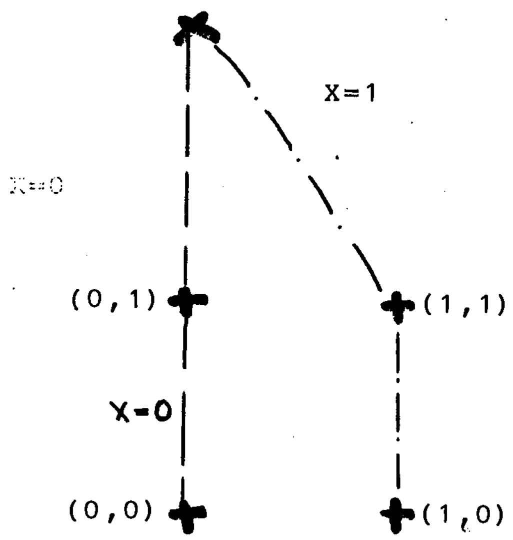
Necesitamos provocar que dos rectas cualesquiera siempre se corten, En el caso de no ser rectas paralelas no hay problema - porque siempre tendrán un punto en común, pero ¿qué hacer para - cuando tengamos dos rectas paralelas? necesitamos que se intersecten, para lograr que esto pase vamos a agregar "un puntoal infinito" para cada familia de rectas paralelas que tengamos y de esta forma cumplir con nuestro axioma "a".

Agregemos un punto alinfinito para cada conjunto de rectas paralelas.

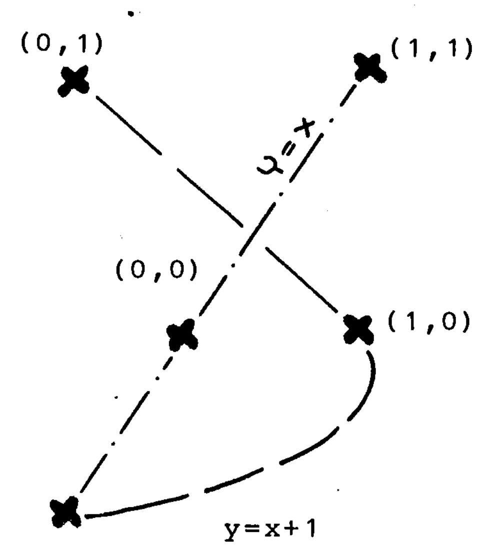
1.-)



2.-)



3.-)



Demostremos ahora que se cumple el axioma "b"

<u>Axioma b) Existen cuatro puntos en el plano tales que cualesquiera tres de ellos no están sobre la misma recta.</u>

DEMOSTRACION:

Sea P_1 (0,0) , P_2 (1,0) , P_3 (0,1) , P_4 (1,1)

los cuatro puntos del plano.

Por demostrar: que cualesquiera tres de ellos no estan sobre la misma recta.

Recta $\mathcal{L}_1$: Y = 1 $P_1 \notin \mathcal{L}_1$, $P_2 \notin \mathcal{L}_1$, $P_3 \in \mathcal{L}_1$, $P_4 \in \mathcal{L}_1$

Recta $\mathcal{L}_2$: Y = 0 $P_1 \in \mathcal{L}_2$, $P_2 \in \mathcal{L}_2$, $P_3 \notin \mathcal{L}_2$, $P_4 \notin \mathcal{L}_2$

Recta $\mathcal{L}_3$: X = 0 $P_1 \in \mathcal{L}_3$, $P_2 \notin \mathcal{L}_3$, $P_3 \in \mathcal{L}_3$, $P_4 \in \mathcal{L}_3$

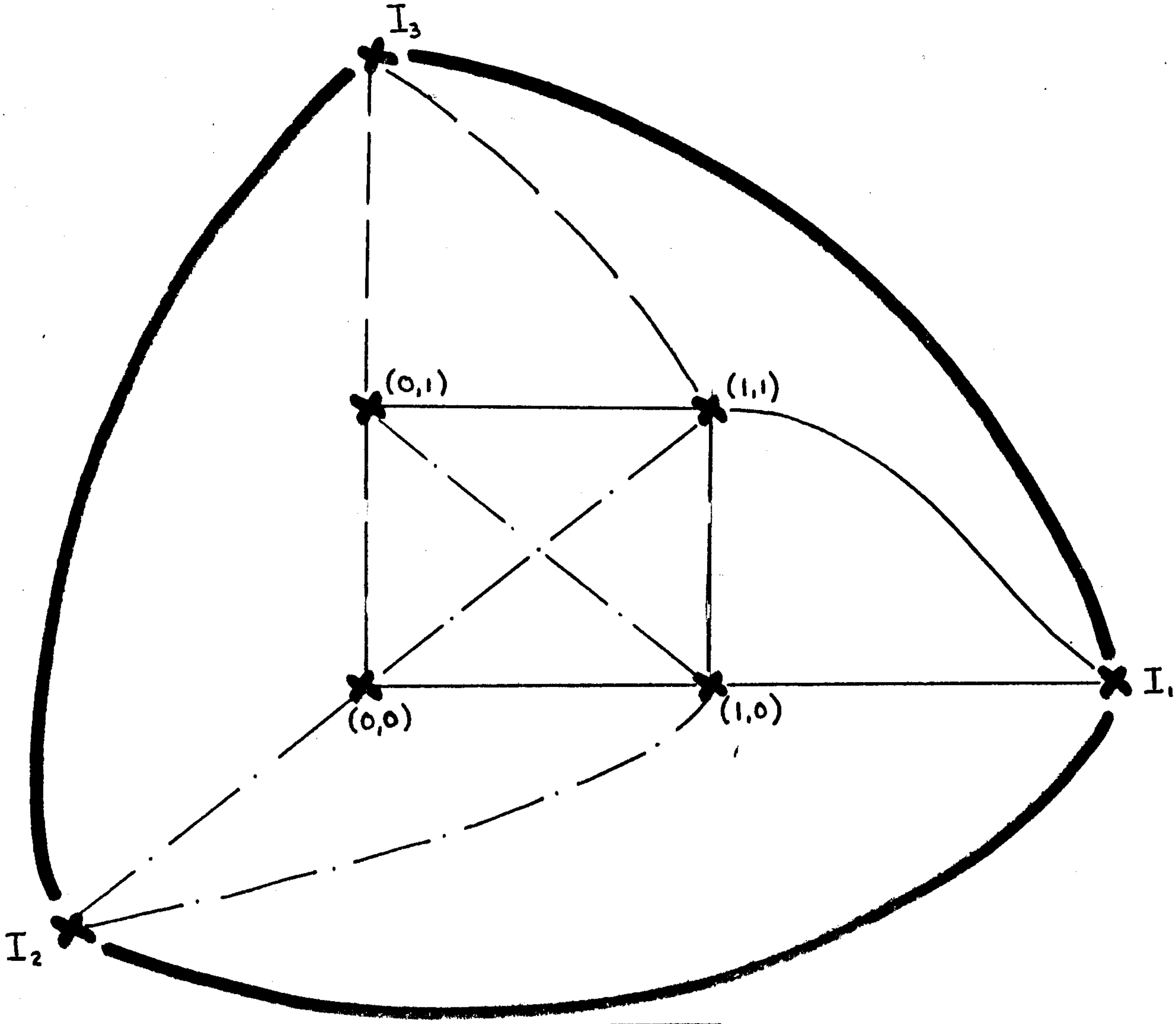
Rectas $\mathcal{L}_4$: $X = 1$ $P_1 \in \mathcal{L}_4$, $P_2 \in \mathcal{L}_4$, $P_3 \notin \mathcal{L}_4$, $P_4 \in \mathcal{L}_4$

Rectas $\mathcal{L}_5$: $Y = X$ $P_1 \in \mathcal{L}_5$, $P_2 \notin \mathcal{L}_5$, $P_3 \notin \mathcal{L}_5$, $P_4 \in \mathcal{L}_5$

Rectas $\mathcal{L}_6$: $Y=X+1$ $P_1 \notin \mathcal{L}_6$, $P_2 \in \mathcal{L}_6$, $P_3 \in \mathcal{L}_6$, $P_4 \notin \mathcal{L}_6$

$\therefore$ Se satisface el axioma "b"

Sobreponiendo todas las rectas junto con los puntos al infinito queda la siguiente figura.



EL PROYECTIVO SOBRE $\mathbb{Z}_2$

Con un total de siete puntos: cuatro anteriores del plano afín y tres al infinito.

Con un total de siete rectas: seis anteriores las del plano afín ahora con un punto más cada una de ellas y la recta la infinito.

La tabla de incidencia de este plano proyectivo es la siguiente.

	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_4$	$\mathcal{L}_5$	$\mathcal{L}_6$	$\mathcal{L}_7$
P_1	X		X		X		
P_2		X	X			X	
P_3	X			X		X	
P_4		X		X	X		
P_5	X	X					X
P_6					X	X	X
P_7			X	X			X

TABLA DE INCIDENCIA

DEL PLANO PROYECTIVO

Queremos hacer ver el isomorfismo existente entre el plano proyectivo sobre $\mathbb{Z}$ 2 y el ejemplo número uno de planos proyectivos. Hagamos pues una correspondencia entre los puntos del - - plano proyectivo sobre $\mathbb{Z}$ 2 y los del ejemplo. Analogamente con las rectas.

$$
\begin{array}{lll}
P_1 = (0,0) & \qquad & \mathcal{L}_1 = \{(0,0),(1,0), I_1\} \\
P_2 = (0,1) & & \mathcal{L}_2 = \{(0,1),(1,1), I_1\} \\
P_3 = (1,0) & & \mathcal{L}_3 = \{(0,0),(0,1), I_3\} \\
P_4 = (1,1) & & \mathcal{L}_4 = \{(1,0),(1,1), I_3\} \\
P_5 = I_1 & & \mathcal{L}_5 = \{(0,0),(1,1), I_2\} \\
P_6 = I_2 & & \mathcal{L}_6 = \{(0,1),(1,0), I_2\} \\
P_7 = I_3 & & \mathcal{L}_7 = \{I_1, I_2, I_3\}
\end{array}
$$

De esta forma mediante el ejemplo mencionado podemos demostrar en forma indirecta que en $\mathbb{Z}$ 2 x $\mathbb{Z}$ 2 se cumplen todos los -- axiomas para ser un plano proyectivo.

EL CAMPO $\mathbb{Z}_3$

Por demostrar que $\mathbb{Z}_3$ es un campo.

$\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ enteros módulo tres con las operaciones (+, •)

tabla de suma

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

tabla de producto

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Vamos a probar si $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ con las operaciones (+,•) cumple con los seis postulados de campo.

1.-) <u>Cerradura de la suma:</u> Sea $x, y \in \mathbb{Z}_3 \Rightarrow X + Y \in \mathbb{Z}_3$

$0 + 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	$2 + 0 = 2$
$0 + 1 = 1$	$1 + 1 = 2$	$2 + 1 = 0$
$0 + 2 = 2$	$1 + 2 = 0$	$2 + 2 = 1$

1'.-) <u>Cerradura del producto</u>: Sea $X, Y \in \mathbb{Z}_3 \Rightarrow X \cdot Y \in \mathbb{Z}_3$

$0 . 0 = 0$	$1 . 0 = 0$	$2 . 0 = 0$
$0 . 1 = 0$	$1 . 1 = 1$	$2 . 1 = 2$
$0 . 2 = 0$	$1 . 2 = 2$	$2 . 2 = 1$

2.-) <u>Conmutativo de la suma:</u> Sea $X , Y \in \mathbb{Z}_3 \Rightarrow X + Y = Y + X$

$0 + 1 = 1 + 0 = 1$	$1 + 1 = 1 + 1 = 2$
$0 + 2 = 2 + 0 = 2$	$1 + 2 = 2 + 1 = 0$
$0 + 0 = 0 + 0 = 0$	$2 + 2 = 2 + 2 = 1$

2'.-) <u>Conmutativo del producto</u>: Sea $X , Y \in \mathbb{Z}_3 \Rightarrow X . Y = Y.X$

$0 . 0 = 0 . 0 = 0$	$1 . 0 = 0 . 1 = 0$
$1 . 1 = 1 . 1 = 1$	$2 . 0 = 0 . 2 = 0$
$2 . 2 = 2 . 2 = 1$	$1 . 2 = 2 . 1 = 2$

3.-) Asociativo de la suma:

Sea $X, Y, Z \in \mathbb{Z}_3 \Rightarrow (X + Y) + Z = X + (Y + Z)$

$(0 + 1) + 2 = (1) + 2 = 0$ $\quad$ $(2 + 1) + 2 = 0 + 2 = 2$

$0 + (1 + 2) = 0 + 0 = 0$ $\quad$ $2 + (1 + 2) = 2 + 0 = 2$

3´.-) Asociativo del producto:

Sea $X, Y, Z \in \mathbb{Z}_3 \Rightarrow (X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$

$(0 \cdot 1) \cdot 2 = 0 \cdot 2 = 0$ $\quad$ $(2 \cdot 1) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 1$

$0 \cdot (1 \cdot 2) = 0 \cdot 2 = 0$ $\quad$ $2 \cdot (1 \cdot 2) = 2 \cdot 2 = 1$

4.-) Distributivo: Sea $X, Y, Z \in \mathbb{Z}_3 \Rightarrow X(Y + Z) = XY + XZ$

$(Y + Z)X = YX + ZX$

$0(1 + 2) = 0(1) = 0$ $\quad$ $(1 + 2)2 = (0)(2) = 0$

$0.1 + 0.2 = 0 + 0 = 0$ $\quad$ $1 \cdot 2 + 2.2 = 2 + 1 = 0$

5.-) Idéntico aditivo: $\exists\, 0 \in \mathbb{Z}_3 \ni \forall\, x \in \mathbb{Z}_3,\ X+0 = 0+X = X$

$0 + 0 = 0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1 + 0 = 1$

$0 + 2 = 2 + 0 = 2$

5´.-) Idéntico del producto: $\exists\, 1 \in \mathbb{Z}_3 \ni \forall\, x \in \mathbb{Z}_3,\ X.1 = 1.X = X$

$0.1 = 1 \cdot 0 = 0$

$1.1 = 1 \cdot 1 = 1$

$1.2 = 1 \cdot 2 = 2$

6.-) Inverso de la suma: $\forall\, x \in \mathbb{Z}_3, \exists\, -x \in \mathbb{Z}_3 \ni X + -X = 0$

$0 + 0 = 0$

$1 + 2 = 0$

$2 + 1 = 0$

6´.-) Inverso del producto: $\forall\, x \in \mathbb{Z}_3,\ x \neq 0\ \exists\, x' \in \mathbb{Z}_3 \ni X.X' = 1$

$1 \cdot 1 = 1$

$2 \cdot 2 = 1$

$\therefore\ \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ con las operaciones $(+, \cdot)$ es un campo.

EL PLANO AFIN SOBRE $\mathbb{Z}_3$

Y

EL PLANO PROYECTIVO SOBRE $\mathbb{Z}_3$

EL PLANO AFIN SOBRE $\mathbb{Z}_3$

$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ con las operaciones (+, •) es un campo.

Con el campo $\mathbb{Z}_3$ vamos a construir un plano afín de la - misma forma que lo hacemos en Geometría Analítica, en donde - el conjunto de puntos de nuestro plano afín será finito

$$\mathcal{P} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$$

Con esta forma nos queda el plano afín $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ que - -- consta unicamente de nueve puntos:

$$\mathcal{P} = \{(X,Y) / \ X \in \mathbb{Z}_3 \ \text{ý} \ Y \in \mathbb{Z}_3\}$$

* (0,2)	* (1,2)	* (2,2)
* (0,1)	* (1,1)	* (2,1)
* (0,0)	* (1,0)	* (2,0)

$\boxed{\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3}$

Ya habiendo determinado la forma y el número exacto de -- los puntos de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, definiremos las rectas:

Se llama recta al conjunto de parejas (X,Y) en $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ que cumplen con $ax + by + c = 0$

Con $a,b,c, \in \mathbb{Z}_3$ y a,b no ambos cero con pendiente -- $-\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$

$$\mathbb{R} = \left\{ (X,Y) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \;/\; ax + by + c = 0 \right\}$$

Observemos que lo que llamaremos "pendiente" es sólo el elemento $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_3$ siempre y cuando $b \neq 0$ por tanto $b = 1$ ó $b = 2$.

Si $b = 0$, en este caso diremos simplemente que las rectas son verticales.

Procedamos mediante la definición a obtener el conjunto de rectas que están contenidas en $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

1.-) <u>Rectas Horizontales:</u>

<u>Con pendiente igual a cero.</u>

$0X + 1Y + 0 = 0 \quad ; \quad Y = 0$

$0X + 1Y + 1 = 0 \quad ; \quad Y = -1 \quad ; \quad Y = 2$

$0X + 1Y + 2 = 0 \quad ; \quad Y = -2 \quad ; \quad y = 1$

$0X + 2Y + 0 = 0 \quad ; \quad Y = 0$

$0X + 2Y + 1 = 0 \quad ; \quad Y = -\frac{1}{2} \quad ; \quad Y = 1$

$0X + 2Y + 2 = 0 \quad ; \quad Y = -\frac{2}{2} \quad ; \quad Y = -1 \quad ; \quad Y = 2$

Por tanto las rectas horizontales son: $\left\{ \begin{array}{l} Y = 0 \\ Y = 1 \\ Y = 2 \end{array} \right.$

2.-) <u>Rectas</u>

<u>con pendiente igual a uno.</u>

$ax + by + c = 0$

$1x + 2y + 0 = 0 \; ; \; X + 2y = 0 \quad ; \quad 2Y = -X \quad ; \quad Y = -\frac{1}{2} X \; ; \; Y = X$

$1X + 2Y + 1 = 0 \; ; \; 2Y = -X - 1 \quad ; \quad Y = -\frac{1}{2} X - \frac{1}{2} \; ; \; Y = X + 1$

$1X + 2Y + 2 = 0 \; ; \; 2Y = -X - 2 \; ; \quad Y = -\frac{1}{2} X - \frac{2}{2} \quad ; \; Y = X + 2$

Por tanto las rectas con pendiente uno son: $\begin{cases} Y = X \\ Y = X + 1 \\ Y = X + 2 \end{cases}$

3.-) <u>Rectas con pendiente igual a dos:</u>

$ax + by + c = 0 \qquad m = -\frac{a}{b}$

$1X + 1Y + 0 = 0$

$Y = -1X; \quad Y = 2X$

$1X + 1Y + 1 = 0 \quad ; \quad Y = -1 - 1X \quad ; \quad Y = 2X + 2$

$1X + 1Y + 2 = 0 \quad ; \quad Y = -2 - 1X \quad ; \quad Y = 2X + 1$

Por tanto las rectas con pendiente dos son: $\begin{cases} Y = 2X \\ Y = 2X + 1 \\ Y = 2X + 2 \end{cases}$

4.-) <u>Rectas verticales:</u>

$ax + by + c = 0 \qquad m = -\frac{a}{b}$

$1X + 0Y + 0 = 0 \quad ; \quad X = 0$

$1X + 0Y + 1 = 0 \quad ; \quad X = -1 \quad ; \quad X = 2$

$1X + 0Y + 2 = 0 \quad ; \quad X = -2 \quad ; \quad X = 1$

Por tanto las rectas verticales son: $\begin{cases} X = 0 \\ X = 1 \\ X = 2 \end{cases}$

En $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ existen 12 rectas cada una contiene tres puntos - y solamente tres.

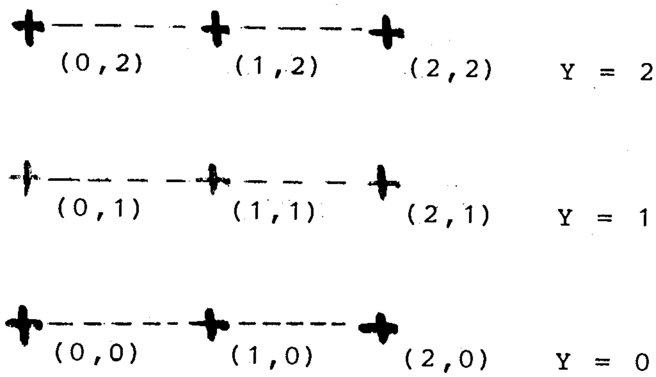
Comprobemos y mostremos que cada recta consta de tres y - solamente tres puntos.-

1.-) <u>Rectas Horizontales:</u>

$Y = 0$ consta de los puntos (0,0), (1,0), (2,0)

$Y = 1$ " " " " (0,1), (1,1), (2,1)

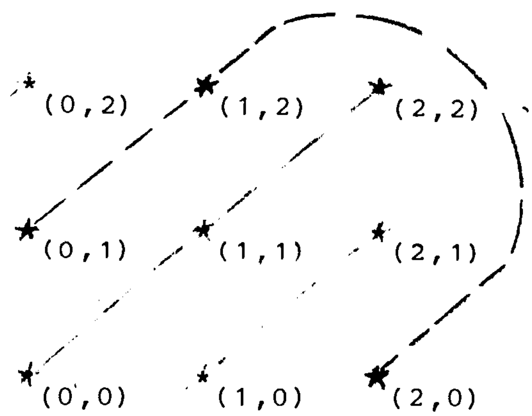
$Y = 2$ " " " " (0,2), (1,2), (2,2)



Las rayas punteadas sólo nos sirven para no perder de vista los tres puntos de los cuales consta la recta.

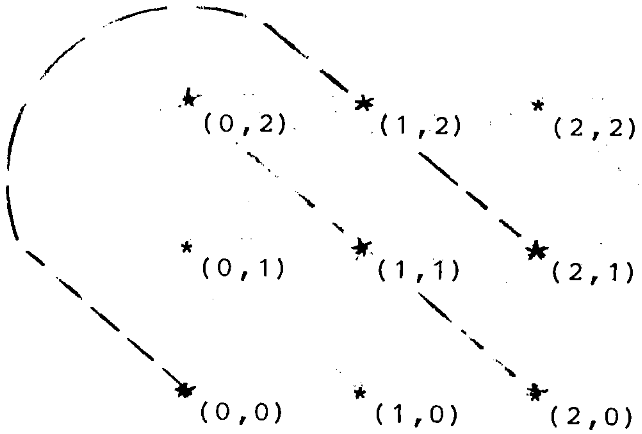
2.-) <u>Las rectas con pendiente igual a uno:</u>

Y = X   Consta de los puntos (0,0), (1,1), (2,2)
Y = X + 1   "   "   "   "   (0,1), (1,2), (2,0)
Y = X + 2   "   "   "   "   (0,2), (1,0), (2,1)



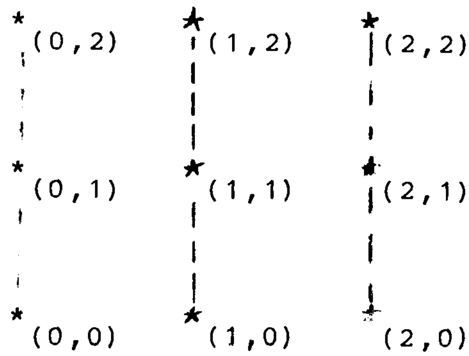
3.-) <u>Las rectas con pendiente igual a dos:</u>

Y = 2X   consta de los puntos (0,0), (1,2), (2,1)
Y = 2X + 1   "   "   "   "   (0,1), (1,0), (2,2)
Y = 2X + 2   "   "   "   "   (0,2), (1,1), (2,0)

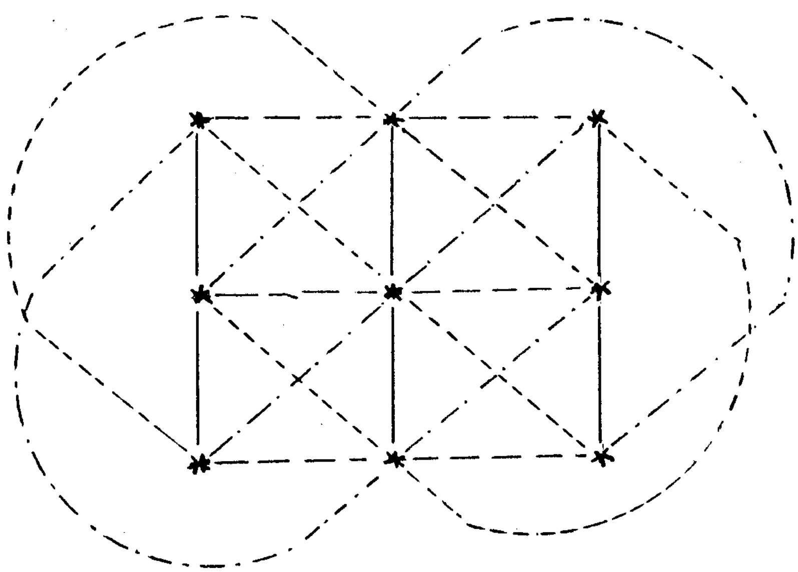


4.-) <u>Las rectas verticales</u>:

X = 0 consta de los puntos (0,0), (0,1), (0,2)
X = 1 " " " " (1,0), (1,1), (1,2)
X = 2 " " " " (2,0), (2,1), (2,2)



Sobreponiendo todas las rectas obtenemos el plano afín $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$



Antes de continuar verifiquemos que efectivamente $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ cumple con los seis axiomas para ser un plano afín.

DEMOSTRACION:

Por demostrar que $\mathbb{Z}\,3 \times \mathbb{Z}\,3$ con sus puntos y sus rectas es un plano afín.

$$\mathcal{P} = \{(0,0),(1,0),(2,0),(0,1),(1,1),(2,1),(0,2),(1,2),(2,2)\}$$

$$\mathcal{P} = \{(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R} = \{ & \{(0,0),(1,0),(2,0)\}, \{(0,1),(1,1),(2,1)\}, \{(0,2),(1,2),(2,2)\} \\ & \{(0,0),(1,1),(2,2)\}, \{(0,1),(1,2),(2,0)\}, \{(0,2),(1,0),(2,1)\} \\ & \{(0,0),(1,2),(2,1)\}, \{(0,1),(1,0),(2,2)\}, \{(0,2),(1,1),(2,0)\} \\ & \{(0,0),(0,1),(0,2)\}, \{(1,0),(1,1),(1,2)\}, \{(2,0),(2,1),(2,2)\}\}\end{aligned}$$

$$\mathcal{R} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7, \ell_8, \ell_9, \ell_{10}, \ell 11, \ell 12\}$$

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6	ℓ_7	ℓ_8	ℓ_9	ℓ_{10}	ℓ_{11}	ℓ_{12}
P_1	X			X			X			X		
P_2	X					X		X			X	
P_3	X				X				X			X
P_4		X			X			X		X		
P_5		X		X					X		X	
P_6		X				X	X					X
P_7			X			X			X	X		
P_8			X		X		X				X	
P_9			X	X				X				X

I) <u>Axioma: por dos puntos pasa una recta:</u>

II) <u>Axioma: por dos puntos pasa una y sólo una recta:</u>

<u>Demostración</u>:

Dados	$(P_1 , P_2) \in \mathcal{L}_1$	y	solamente	en	$\mathcal{L}_1$
"	$(P_1 , P_2) \in \mathcal{L}_1$	"	"	"	$\mathcal{L}_1$
"	$(P_1 , P_3) \in \mathcal{L}_1$	"	"	"	$\mathcal{L}_1$
"	$(P_1 , P_4) \in \mathcal{L}_{10}$	"	"	"	$\mathcal{L}_{10}$
"	$(P_1 , P_5) \in \mathcal{L}_4$	"	"	"	$\mathcal{L}_4$
"	$(P_1 , P_6) \in \mathcal{L}_7$	"	"	"	$\mathcal{L}_7$
"	$(P_1 , P_7) \in \mathcal{L}_{10}$	"	"	"	$\mathcal{L}_{10}$
"	$(P_1 , P_8) \in \mathcal{L}_7$	"	"	"	$\mathcal{L}_7$
"	$(P_1 , P_9) \in \mathcal{L}_4$	"	"	"	$\mathcal{L}_4$
"	$(P_2 , P3) \in \mathcal{L}_1$	"	"	"	$\mathcal{L}_1$
"	$(P_2 , P_4) \in \mathcal{L}_8$	"	"	"	$\mathcal{L}_8$
"	$(P_2 , P_5) \in \mathcal{L}_{11}$	"	"	"	$\mathcal{L}_{11}$
"	$(P_2 , P_6) \in \mathcal{L}_6$	"	"	"	$\mathcal{L}_6$
"	$(P_2 , P_7) \in \mathcal{L}_6$	"	"	"	$\mathcal{L}_6$
"	$(P_2 , P_8) \in \mathcal{L}_{11}$	"	"	"	$\mathcal{L}_{11}$
"	$(P_2 , P_9) \in \mathcal{L}_8$	"	"	"	$\mathcal{L}_8$
"	$(P_3 , P_4) \in \mathcal{L}_5$	"	"	"	$\mathcal{L}_5$
"	$(P_3 , P_5) \in \mathcal{L}_9$	"	"	"	$\mathcal{L}_9$
"	$(P_3 , P_6) \in \mathcal{L}_{12}$	"	"	"	$\mathcal{L}_{12}$
"	$(P_3 , P_7) \in \mathcal{L}_9$	"	"	"	$\mathcal{L}_9$
"	$(P_3 , P_8) \in \mathcal{L}_5$	"	"	"	$\mathcal{L}_5$
"	$(P_3 , P_9) \in \mathcal{L}_{12}$	"	"	"	$\mathcal{L}_{12}$
"	$(P_4 , P_5) \in \mathcal{L}_2$	"	"	"	$\mathcal{L}_2$
"	$(P_4 , P_6) \in \mathcal{L}_2$	"	"	"	$\mathcal{L}_2$
"	$(P_4 , P_7) \in \mathcal{L}_{10}$	"	"	"	$\mathcal{L}_{10}$
"	$(P_4 , P_8) \in \mathcal{L}_5$	"	"	"	$\mathcal{L}_5$
"	$(P_4 , P_9) \in \mathcal{L}_8$	"	"	"	$\mathcal{L}_8$
"	$(P_5 , P_6) \in \mathcal{L}_2$	"	"	"	$\mathcal{L}_2$
"	$(P_5 , P_7) \in \mathcal{L}_9$	"	"	"	$\mathcal{L}_9$
"	$(P_5 , P_8) \in \mathcal{L}_{11}$	"	"	"	$\mathcal{L}_{11}$
"	$(P_5 , P_9) \in \mathcal{L}_4$	"	"	"	$\mathcal{L}_4$

Dados $(P_6 , P_7) \in \mathcal{L}_6$ y solamente en $\mathcal{L}_6$

" $(P_6 , P_8) \in \mathcal{L}_7$ " " " $\mathcal{L}_7$

" $(P_6 , P_9) \in \mathcal{L}_{12}$ " " " $\mathcal{L}_{12}$

" $(P_7 , P_8) \in \mathcal{L}_3$ " " " $\mathcal{L}_3$

" $(P_7 , P_9) \in \mathcal{L}_3$ " " " $\mathcal{L}_3$

" $(P_8 , P_9) \in \mathcal{L}_3$ " " " $\mathcal{L}_3$

III) Axioma: Cualquier recta $a \in \mathcal{R}$, contiene por lo menos dos puntos.

Todas las rectas contienen tres puntos, entonces cumplen con el axioma.

IV) Axioma: Existen tres puntos que no pertenecen a una misma recta:

Demostración :

Dados $\{P_3 , P_4 , P_5\}$

$P_3 \in \mathcal{L}_1$; $P_4 , P_5 \notin \mathcal{L}_1$

$P_4 , P_5 \in \mathcal{L}_2$; $P_3 \notin \mathcal{L}_2$

$P_3 , P_4 , P_5 \notin \mathcal{L}_3$

$P_5 \in \mathcal{L}_4$; $P_3 , P_4 \notin \mathcal{L}_4$

$P_3 , P_4 \in \mathcal{L}_5$; $P_5 \notin \mathcal{L}_5$

$P_3 , P_4 , P_5 \in \mathcal{L}_6$

$P_3 , P_4 , P_5 \notin \mathcal{L}_7$

$P_3 , P_5 \notin \mathcal{L}_8$, $P_4 \in \mathcal{L}_8$

$P_3 , P_5 \in \mathcal{L}_9$ $P_4 \notin \mathcal{L}_9$

$P_3 , P_5 \notin \mathcal{L}_{10}$ $P_4 \in \mathcal{L}_{10}$

$P_3 , P_4 \notin \mathcal{L}_{11}$ $P_5 \in \mathcal{L}_{11}$

$P_3 \in \mathcal{L}_{12}$, $P_4 , P_5 \notin \mathcal{L}_{12}$

V) Axioma: Si tenemos una recta y un punto exterior a esta, se puede pasar por este una recta paralela a la recta dada.

VI) Axioma: Si tenemos una recta y un punto exterior a esta, no se puede pasar por este más de una paralela a la - - recta dada.

Demostración: Sea $\mathcal{L}_1 = \left\{ P_1 , P_2 , P_3 \right\}$

Por P_4 pasa $\mathcal{L}_2 // \mathcal{L}_1$. Por P_7 pasa $\mathcal{L}_3 // \mathcal{L}_1$

Por P_5 pasa $\mathcal{L}_2 // \mathcal{L}_1$. por P_8 pasa $\mathcal{L}_3 // \mathcal{L}_1$

Por P_6 pasa $\mathcal{L}_2 // \mathcal{L}_1$. por P_9 pasa $\mathcal{L}_3 // \mathcal{L}_1$

Sea $\mathcal{L}_2 = \left\{ P_4 , P_5 , P_6 \right\}$

Por P_1 pasa $\mathcal{L}_1 // \mathcal{L}_2$. por P_7 pasa $\mathcal{L}_3 // \mathcal{L}_1$

Por P_2 pasa $\mathcal{L}_1 // \mathcal{L}_2$. por P_8 pasa $\mathcal{L}_3 // \mathcal{L}_1$

Por P_3 pasa $\mathcal{L}_1 // \mathcal{L}_2$. por P_9 pasa $\mathcal{L}_3 // \mathcal{L}_1$

Sea $\mathcal{L}_3 = \left\{ P_7 , P_8 , P_9 \right\}$.

Por P_1 pasa $\mathcal{L}_1 // \mathcal{L}_3$. por P_4 pasa $\mathcal{L}_2 // \mathcal{L}_3$

Por P_2 pasa $\mathcal{L}_1 // \mathcal{L}_3$. por P_5 pasa $\mathcal{L}_2 // \mathcal{L}_3$

Por P_3 pasa $\mathcal{L}_1 // \mathcal{L}_3$. por P_6 pasa $\mathcal{L}_2 // \mathcal{L}_3$

Sea $\mathcal{L}_4 = \left\{ P_1 , P_5 , P_9 \right\}$

Por P_2 pasa $\mathcal{L}_6 // \mathcal{L}_4$. por P_6 pasa $\mathcal{L}_6 // \mathcal{L}_4$

Por P_3 pasa $\mathcal{L}_5 // \mathcal{L}_4$. por P_7 pasa $\mathcal{L}_6 // \mathcal{L}_4$

Por P_4 pasa // . por P_8 pasa $\mathcal{L}_5 // \mathcal{L}_4$

Sea $\mathcal{L}_5 = \left\{ P_3 , P_4 , P_8 \right\}$

Por P_1 pasa $\mathcal{L}_4 // \mathcal{L}_5$. por P_6 pasa $\mathcal{L}_6 // \mathcal{L}_5$

Por P_2 pasa $\mathcal{L}_6 // \mathcal{L}_5$. por P_7 pasa $\mathcal{L}_6 // \mathcal{L}_5$

Por P_5 pasa $\mathcal{L}_4 // \mathcal{L}_5$. por P_9 pasa $\mathcal{L}_4 // \mathcal{L}_5$

Observamos que la paralela que encontramos para cada punto es única (recordemos que paralelas quiere decir no tener puntos en común).

Podíamos seguir comprobando pero con la idea que nos muestran las cinco primeras rectas, el lector puede terminar la -- comprobación si dificultad alguna.

Como se ha demostrado que $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ con sus puntos y sus rectas cumplen con los seis axioma:

$$\therefore \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \text{ es un plano afín.}$$

Podemos ahora extender el plano afín 3 x 3 y poder -- tener un plano proyectivo, al cual le llamaremos "PLANO PROYECTIVO SOBRE $\mathbb{Z}_3$", este plano deberá satisfacer con los tres primeros axiomas del plano afín y con los dos siguientes.

a) Axioma : Dadas dos rectas estas siempre se intersecan - en un punto.

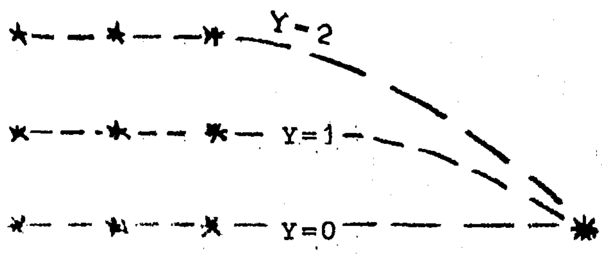
b) Axioma ; Existen cuatro puntos en el plano tales que -- cualesquiera tres de ellos no están sobre una misma recta.

Por tanto necesitamos conseguir que dos rectas cualesquiera, siempre tengan un punto en común. Cuando las rectas no son paralelas forzosamente tienen por lo menos un punto en común. - ¿Cómo logramos que esto se cumpla, cuando las rectas son paralelas?.

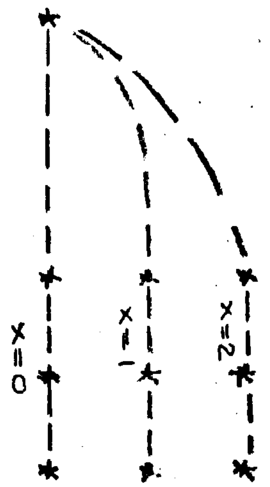
Para lograr que esto pase vamos a agregar "un punto al infinito" por cada familia de rectas paralelas que tengamos y de esta forma cumplimos con el axioma (a).

Es decir agreguemos un punto al infinito por cada grupo de rectas con igual pendiente.

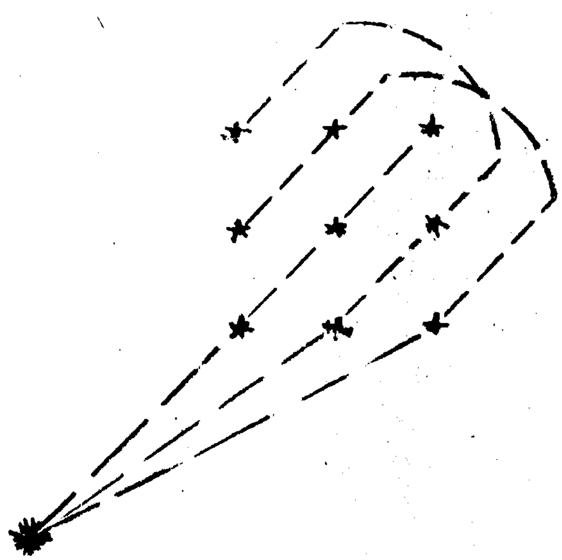
1). Rectas horizontales:



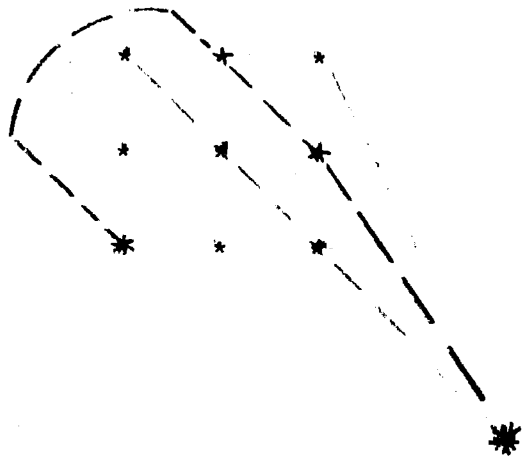
2) Rectas verticales.



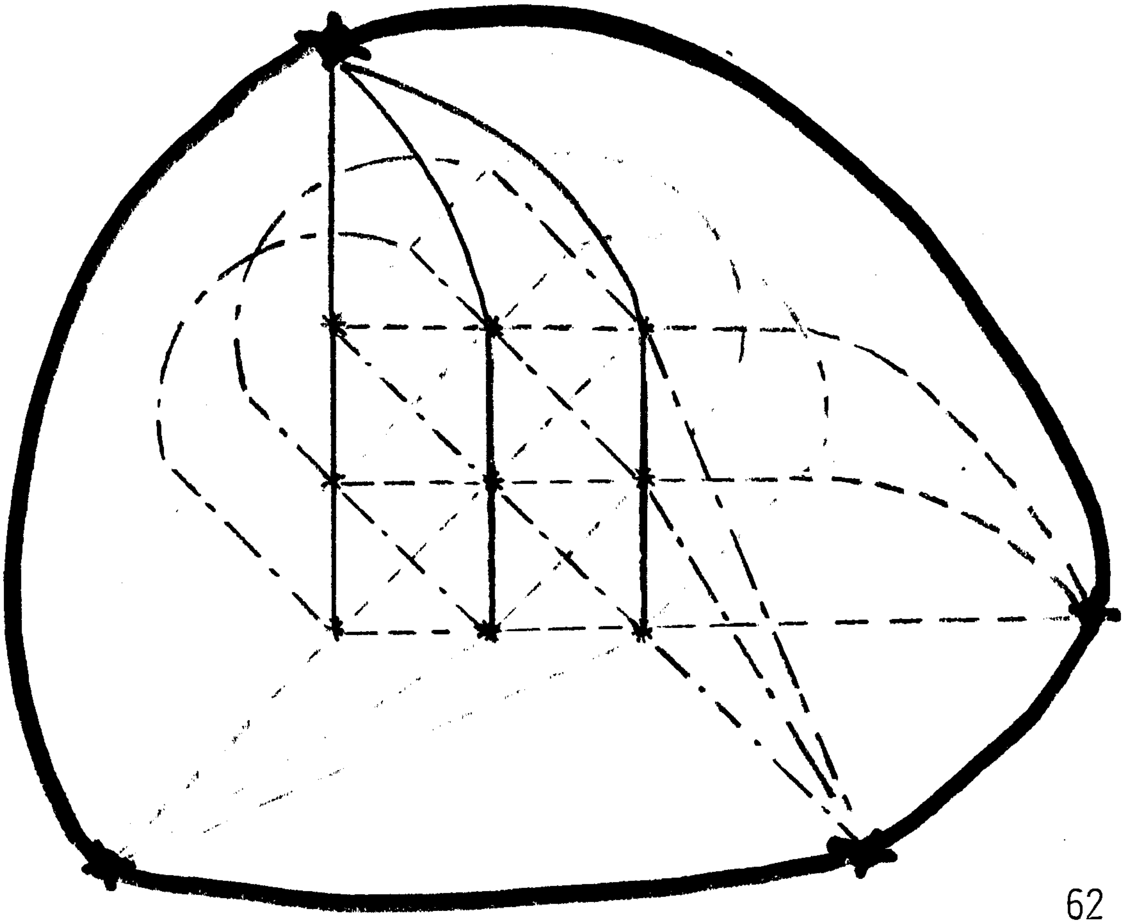
3) Rectas con pendiente igual a uno:



4) <u>Rectas con pendiente igual a dos:</u>



Sobreponiendo todas las rectas con los puntos al infinito queda la siguiente figua:



Con un total de trece rectas, doce anteriores del plano afín y la recta al infinito. Consideramos la unión de los puntos al infinito como una recta (con objeto de que se sigan cumpliendo los axiomas I y II), y la llamamos la recta al infinito.

Con un total de trece puntos, nueve puntos anteriores del plano afín y cuatro puntos al infinito.

De esta manera obtenemos:

EL PLANO PROYECTIVO SOBRE $\mathbb{Z}_3$

EL CAMPO $\mathbb{Z}_5$

EL CAMPO $\mathbb{Z}_5$

Sea $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ un conjunto con cuatro elementos, y con dos operaciones $(+,\cdot)$, llamadas suma y producto.

Demostraremos que $\mathbb{Z}_5$ (enteros módulo 5) es un campo con las operaciones de $(+,\cdot)$.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Tabla de suma

•	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Tabla de producto

<u>Demostración</u>:

Por demostrar que $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ cumple con los seis -- postulados de campo.

<u>I) Postulado de cerradura de la suma:</u>

Sean $x,y \in \mathbb{Z}_5 \Rightarrow (x+y) \in \mathbb{Z}_5$

$0+1 = 1$	$1+1 = 2$	$2+1 = 3$	$3+1 = 4$	$4+1 = 0$
$0+2 = 2$	$1+2 = 3$	$2+2 = 4$	$3+2 = 0$	$4+2 = 1$
$0+3 = 3$	$1+3 = 4$	$2+3 = 0$	$3+3 = 1$	$4+3 = 2$
$0+4 = 4$	$1+4 = 0$	$2+4 = 1$	$3+4 = 2$	$4+4 = 3$

$\therefore$ cumple

I') POSTULADOS DE CERRADURA DEL PRODUCTO:

Sean $X, Y \in \mathbb{Z}_5 \Rightarrow (X.Y) \in \mathbb{Z}_5$

0.1 = 0	1.1 = 1	2.1 = 2	3.1 = 3	4.1 = 4
0.2 = 0	1.2 = 2	2.2 = 4	3.2 = 1	4.2 = 3
0.3 = 0	1.3 = 3	2.3 = 1	3.3 = 4	4.3 = 2
0.4 = 0	1.4 = 4	2.4 = 3	3.4 = 2	4.4 = 1

$\therefore$ cumple

II) POSTULADO CONMUTATIVO DE LA SUMA:

Sean X, Y en $\mathbb{Z}_5 \Rightarrow X+Y = Y+X$

0+1 = 1+0 = 1	1+1 = 1+1 = 2	2+2 = 2+2 = 4
0+2 = 2+0 = 2	1+2 = 2+1 = 3	2+3 = 3+2 = 0
0+3 = 3+0 = 3	1+3 = 3+1 = 4	2+4 = 4+2 = 1
0+4 = 4+0 = 4	1+4 = 4+1 = 0	3+3 = 3+3 = 1
		3+4 = 4+3 = 2

$\therefore$ cumple

II) POSTULADO CONMUTATIVO DEL PRODUCTO:

Sean X, Y en $\mathbb{Z}_5$ $X \cdot Y = Y \cdot X$

0.1 = 1.0 = 0	1.1 = 1.1 = 1	2.2 = 2.2 = 4
0.2 = 2.0 = 0	1.2 = 2.1 = 2	2.3 = 3.2 = 1
0.3 = 3.0 = 0	1.3 = 3.1 = 3	2.4 = 4.2 = 3
0.4 = 4.0 = 0	1.4 = 4.1 = 4	3.3 = 3.3 = 4
		3.4 = 4.3 = 2

$\therefore$ cumple

III) POSTULADO ASOCIATIVO DE LA SUMA:

Sean $X, Y, Z \in \mathbb{Z}_5 \Rightarrow (X+Y) + Z = X + (Y+Z)$

Ejemplos:

$(3+2) + 4 = 0 + 4 = 4$ $\quad$ $1 + (3+4) = 1 + 2 = 3$

$3 + (2+4) = 3 + 1 = 4$ $\quad$ $(1+3) + 4 = 4 + 4 = 3$

III') POSTULADO ASOCIATIVO DE LA MULTIPLICACION:

Sean $X, Y, Z \in \mathbb{Z}_5 \Rightarrow (X.Y).Z = X.(Y.Z)$

$(3.2).4 = 1.4 = 4$ $\quad$ $1.(3.4) = 1.2 = 2$

$3.(2.4) = 3.3 = 4$ $\quad$ $(1.3).4 = 3.4 = 2$

IV) POSTULADO DISTRIBUTIVO:

Sean $X, Y, Z \in \mathbb{Z}_5 \Rightarrow X(Y+Z) = XY + XZ$

$(Y+Z)X = YX + ZX$

Ejemplos:

$3(4+2) = 3.1 = 3$ $\quad$ $2.(3+2) = 2.0 = 0$

$3.4+3.2 = 2 + 1 = 3$ $\quad$ $2.3 + 2.2 = 1 + 4 = 0$

V) POSTULADO DEL IDENTICO DE LA SUMA:

$$\exists\, 0 \in \mathbb{Z}_5 \ni \forall\, x \in \mathbb{Z}_5,\ X+0 = 0+X = X$$

$0 + 1 = 1 + 0 = 1$ $\quad$ $0 + 3 = 3 + 0 = 3$

$0 + 2 = 2 + 0 = 2$ $\quad$ $0 + 4 = 4 + 0 = 4$

$\therefore$ cumple

V') POSTULADO DEL IDENTICO DEL PRODUCTO:

$$\exists\ 1 \in \mathbb{Z}_5 \ni \forall\ x \in \mathbb{Z}_5 , \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ $\quad$ $1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 2$ $\quad$ $1 \cdot 4 = 4 \cdot 1 = 4$

$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$ $\quad$ $1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = 3$

$\therefore$ cumple

VI) POSTULADO DEL INVERSO DE LA SUMA:

$$\exists\ -x \in \mathbb{Z}_5 \ni \forall\ x \in \mathbb{Z}_5 , \quad x + -x = 0$$

$0 + 0 = 0$ $\quad$ $2 + 3 = 0$ $\quad$ $4 + 1 = 0$

$1 + 4 = 0$ $\quad$ $3 + 2 = 0$

$\therefore$ cumple

VI') POSTULADO DEL INVERSO DEL PRODUCTO:

$$\forall\ x \in \mathbb{Z}_5 , \ x \neq 0 \quad \exists\ x' \in \mathbb{Z}_5 \ni x . x' = 1$$

$1 \cdot 1 = 1$ $\quad$ $3 \cdot 2 = 1$

$2 \cdot 3 = 1$ $\quad$ $4 \cdot 4 = 1$

$\therefore$ cumple

$\therefore$ $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ con las operaciones de $(+,\cdot)$ es un campo.

En los párrafos anteriores y en este, hemos comprobado directamente que $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, y $\mathbb{Z}_5$ son campos.
Para demostrar que $\mathbb{Z}_p$ con "P" primo arbitrario, es un campo este tipo de demostració- directa ya no es posible: sin embargo - la demostración algebraica no es larga. Aquí la omitiremos.

EL PLANO AFIN SOBRE $\mathbb{Z}_5$

El Plano Afín sobre $\mathbb{Z}_5$:

Al conjunto $\mathcal{P} = \{(X,Y) / x \in \mathbb{Z}_5$ y $Y \in \mathbb{Z}_5\}$ de $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ producto cartesiano de $\mathbb{Z}_5$ por sí mismo consta de 25 elementos que llamaremos puntos. Más adelante definiremos rectas en $\mathcal{P}$ y demostraremos que es un plano afín.

$$\mathcal{P} = \{(X,Y) / \quad x \in \mathbb{Z}_5 \text{ y } Y \in \mathbb{Z}_5\}$$

$$\mathcal{P} = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (0,2), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (0,3), (1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (0,4), (1,4), (2,4), (3,4), (4,4)\}$$

Por comodidad y para seguir las ideas de la Geometría Analítica usual, representaremos estos 25 puntos como sigue:

*(0,4)	*(1,4)	*(2,4)	*(3,4)	*(4,4)	
*(0,3)	*(1,3)	*(2,3)	*(3,3)	*(4,3)	
*(0,2)	*(1,2)	*(2,2)	*(3,2)	*(4,2)	$\boxed{\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5}$
*(0,1)	*(1,1)	*(2,1)	*(3,1)	*(4,1)	
*(0,0)	*(1,0)	*(2,0)	*(3,0)	*(4,0)	

Llamaremos rectas a los conjuntos de puntos (x,y) en $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ de la forma siguiente:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 / ax+by+c=0,\ a,b,c, \in \mathbb{Z}_5,\quad a \text{ ó } b \neq 0\}$$

Para seguir la nomenglatura de la Geometría Analítica, si $b \neq 0$ diremos que $-\frac{a}{b}$ es la pendiente de la recta.

No perdamos de vista que lo que estamos llamando pendiente es solamente al elemento $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}5$, siempre y cuando $b \neq 0$, es decir cuando $b = 1$ ó $b = 2$ ó $b = 3$ ó $b = 4$.

En el caso de que $b = 0$ simplemente diremos que las rectas son verticales siguiendo la costumbre (o de pendiente infinito).

Estamos listos para obtener todas las rectas de $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$

Notas aclaratorias para la mejor comprensión en la obten- - ción de las rectas de $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

En las rectas vamos a sustituir valores; la explicación la hacemos en seguida refiriéndonos a la tabla anterior.

$1 + 4 = 0$ entonces el inverso de 1 es 4, es decir $-1=4$

$3 + 2 = 0$ entonces el inverso de 3 es 2, es decir $-3=2$

$2 + 3 = 0$ entonces el inverso de 2 es 3, es decir $-2=3$

$4 + 1 = 0$ entonces el inverso de 4 es 1, es decir $-4=1$

1) Rectas Horizontales: con pendiente igual a cero.

$ax + by + c = 0$

$0X + 1y + 0 = 0$; $y = 0$

$0X + 1y + 1 = 0$; $y = -1$; $y = 4$

$0X + 1y + 2 = 0$; $y = -2$; $y = 3$

$0X + 1y + 3 = 0$; $Y = -3$; $y = 2$

$0X + 1y + 4 = 0$; $y = -4$; $y = 1$

Por lo tanto las rectas horizontales son: $\begin{cases} Y = 0 \\ Y = 1 \\ Y = 2 \\ Y = 3 \\ Y = 4 \end{cases}$

2) <u>Rectas con pendiente igual a uno:</u>

$ax + by + c = 0$

$4x + 1y + 0 = 0$; $y = -4x$; $y = x$

$4x + 1y + 3 = 0$; $y = -4x-3$; $y = x + 2$

$4x + 1Y + 1 = 0$; $y = -4x-1$; $y = x + 4$

$4x + 1Y + 2 = 0$; $y = -4x-2$; $y = x + 3$

$4x + 1Y + 4 = 0$; $y = -4x-4$; $y = x + 1$

Por lo tanto las rectas con pendiente igual a uno son: $\begin{cases} Y = X \\ Y = X + 1 \\ Y = X + 2 \\ Y = X + 3 \\ Y = X + 4 \end{cases}$

3) <u>Rectas con pendiente igual a dos:</u>

$ax + by + c = 0$

$X + 2y + 0 = 0$; $2Y = -X$; $Y = -\frac{1}{2}X$; $Y = \frac{4}{2}X$; $y = 2x$

$X + 2y + 1 = 0$; $2y = -X-1$; $y = -\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$; $y = \frac{4}{2}X + \frac{4}{2}$; $y=2x+2$

$X + 2y + 2 = 0$; $2y = -X-2$; $y = -\frac{1}{2}X - \frac{2}{2}$; $Y = \frac{4}{2}X - 1$; $y=2x+4$

$X + 2y + 3 = 0$; $2y = -X-3$; $y = -\frac{1}{2}X - \frac{3}{2}$; $y = \frac{4}{2}X + \frac{2}{2}$; $y=2x+1$

$X + 2y + 4 = 0$; $2y = -x-4$; $y = -\frac{1}{2}X - \frac{4}{2}$; $y = \frac{4}{2}X \dot{-} 2$; $y=2x+3$

Por lo tanto las rectas con pendiente dos son $\begin{cases} y = 2x \\ Y = 2x + 1 \\ Y = 2x + 2 \\ Y = 2x + 3 \\ Y = 2x + 4 \end{cases}$

4) <u>Rectas con pendiente igual a tres:</u>

$ax + by + c = 0$

$2x + y + 0 = 0 \; ; \; Y = -2 \; ; \quad Y = 3x$

$2x + y + 1 = 0 \; ; \; Y = -2x-1 \; ; \; Y = 3x + 4$

$2x + y + 2 = 0 \; ; \; Y = -2x-2 \; ; \; Y = 3x + 3$

$2x + y + 3 = 0 \; ; \; Y = -2x-3 \; ; \; Y = 3x + 2$

$2x + y + 4 = 0 \; ; \; Y = -2x-4 \; ; \; Y = 3x + 1$

Por lo tanto las rectas con pendiente igual a tres son $\begin{cases} Y= 3x \\ Y= 3x+1 \\ Y= 3x+2 \\ Y= 3x+3 \\ Y= 3x+4 \end{cases}$

5) <u>Rectas con pendientes igual a cuatro:</u>

$ax + by + c = 0$

$4x + 4y + 0 = 0 \; ; \; 4y = - 4x \; ; \; y = - \frac{4}{4} X \; ; \; y = - X \; ; \; y = 4x$

$4x + 4y + 1 = 0 \; ; \; 4y= -4x-1 \; ; \; y= - \frac{4}{4} X - \frac{1}{4} \; ; \; y= -X + \frac{4}{4} \; ; \; Y= 4x+1$

$4x + 4y + 2 = 0 \; ; \; 4y= -4X-2 \; ; \; y= - \frac{4}{4} X - \frac{2}{4} \; ; \; Y= -X + \frac{2}{1} \; ; \; Y= 4x+2$

$4x + 4y + 3 = 0 \; ; \; 4y= -4X-3 \; ; \; y= - \frac{4}{4} X - \frac{3}{4} \; ; \; Y= -X + \frac{3}{1} \; ; \; Y= 4x+3$

$4x + 4y + 4 = 0 \; ; \; 4y= -4X-4 \; ; \; y= - \frac{4}{4} X - \frac{4}{4} \; ; \; Y= -X-1 \; ; \; Y= 4x+4$

Por lo tanto las rectas con pendiente cuatro son $\begin{cases} Y = 4x \\ Y = 4x + 1 \\ Y = 4x + 2 \\ Y = 4x + 3 \\ Y = 4x + 4 \end{cases}$

6) Rectas verticales:

$ax + by + c = 0$

$1x + 0y + 0 = 0 \;;\quad X = 0$

$1x + 0y + 1 = 0 \;;\quad X = -1 \;;\quad X = 4$

$1x + 0y + 2 = 0 \;;\quad X = -2 \;;\quad X = 3$

$1x + 0y + 3 = 0 \;;\quad X = -3 \;;\quad X = 2$

$1x + 0y + 4 = 0 \;;\quad X = -4 \;;\quad X = 1$

Por lo tanto las rectas verticales son: $\left\{\begin{array}{l} X = 0 \\ X = 1 \\ X = 2 \\ X = 3 \\ X = 4 \end{array}\right.$

En $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$ existen 30 rectas.

Procedamos a mostrar que cada recta consta de cinco y solamente cinco puntos.

1.) Rectas horizontales.:

Y = 0	consta de los puntos	(0,0),	(1,0),	(2,0),	(3,0),	(4,0)
Y = 1	" " " "	(0,1),	(1,1),	(2,1),	(3,1),	(4,1)
Y = 2	" " " "	(0,2),	(1,2),	(2,2),	(3,2),	(4,2)
Y = 3	" " " "	(0,3),	(1,3),	(2,3),	(3,3),	(4,3)
Y = 4	" " " "	(0,4),	(1,4),	(2,4),	(3,4),	(4,4)

* (0,4) * (1,4) * (2,4) * (3.4) * (4.4) Y = 4

* (0,3) * (1,3) * (2,3) * (3,3) * (4,3) Y = 3

* (0,2) * (1,2) * (2,2) * (3,2) * (4,2) Y = 2

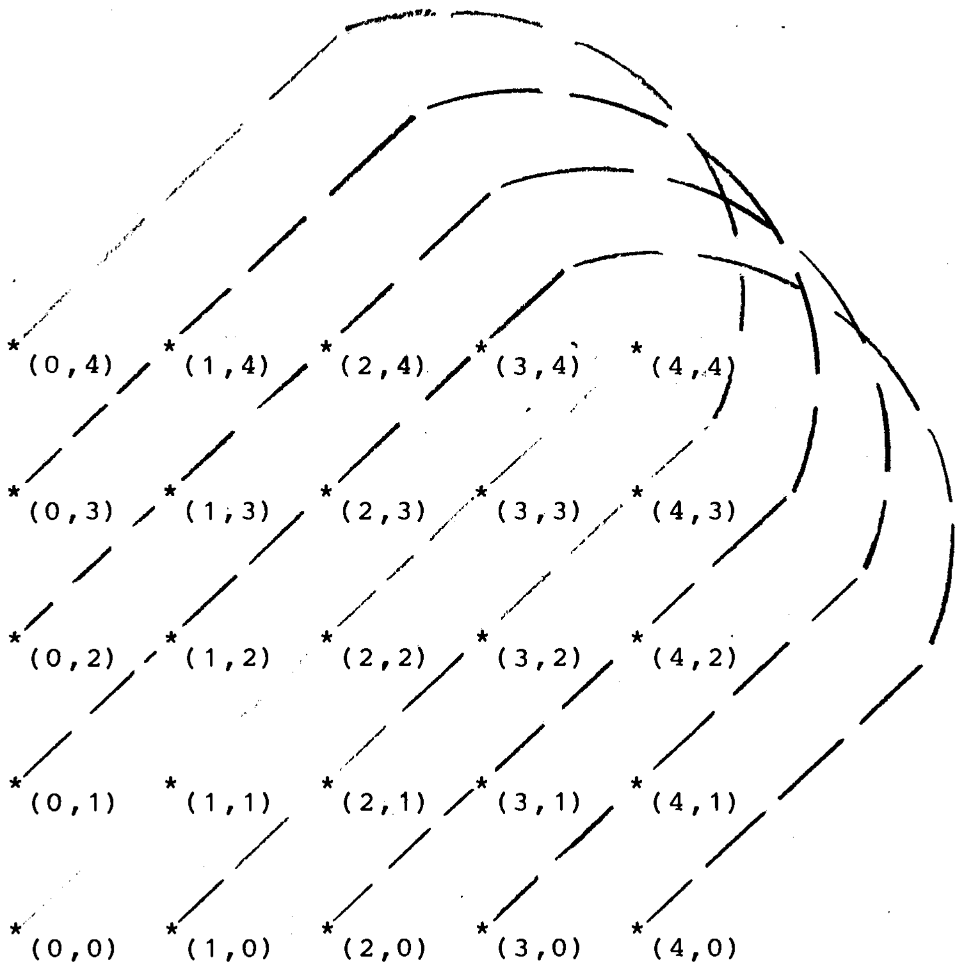
* (0,1) * (1,1) * (2,1) * (3,1) * (4,1) Y = 1

* (0,0) * (1,0) * (2,0) * (3,0) * (4,0) Y = 0

Las rayas punteadas sólo nos sirven para no perder de vista los cinco puntos de los cuales consta cada recta.

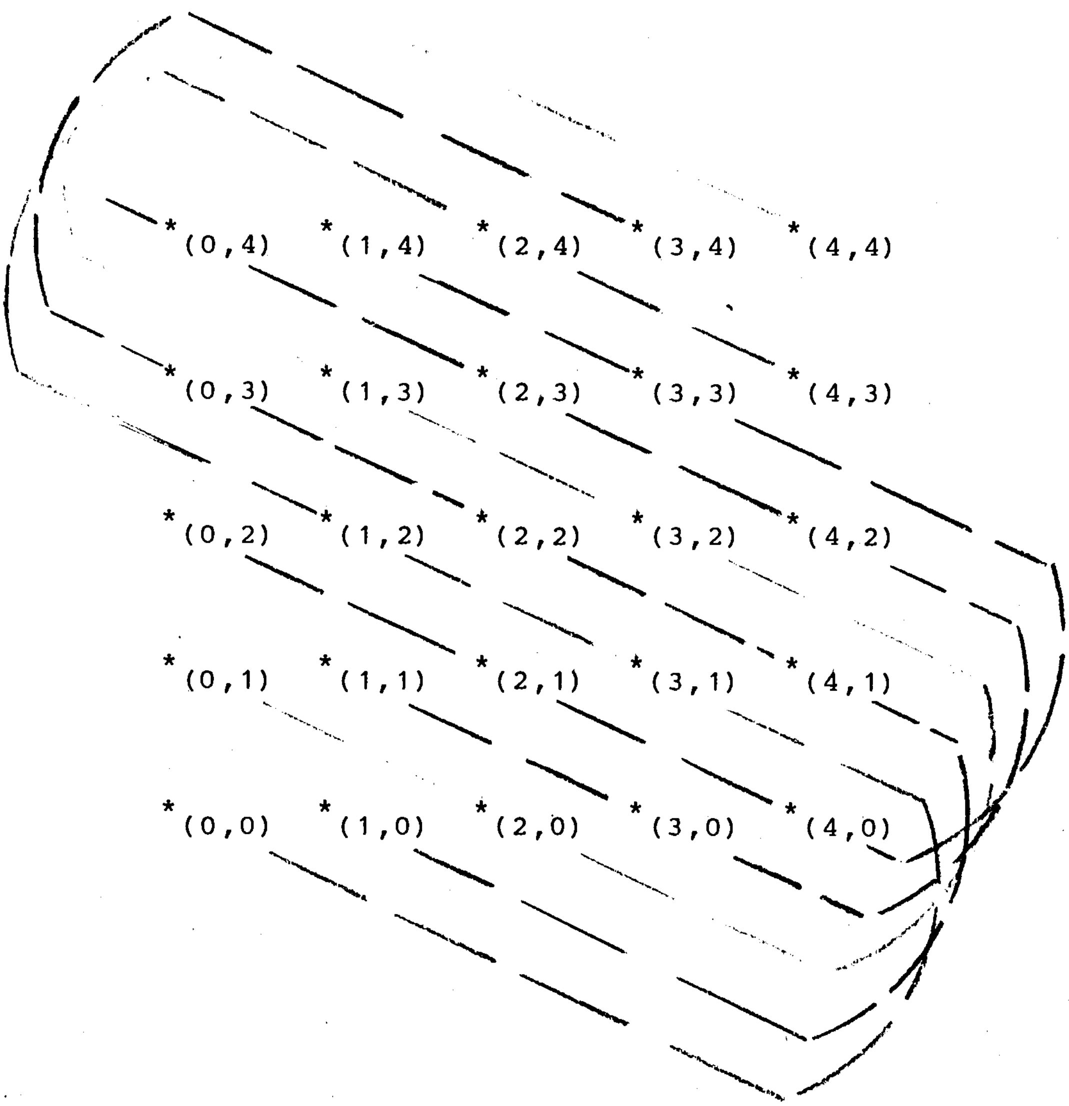
2.) <u>Rectas con pendiente igual a uno:</u>

Y = X	Consta de los puntos	(0,0), (0,1), (2,2), (3,3), (4,4)
Y = X+1	" " " "	(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,0)
Y = X+2	" " " "	(0,2), (1,3), (2,4), (3,0), (4,1)
Y = X+3	" " " "	(0,3), (1,4), (2,0), (3,1), (4,2)
Y = X+4	" " " "	(0,4), (1,0), (2,1), (3,2), (4,3)



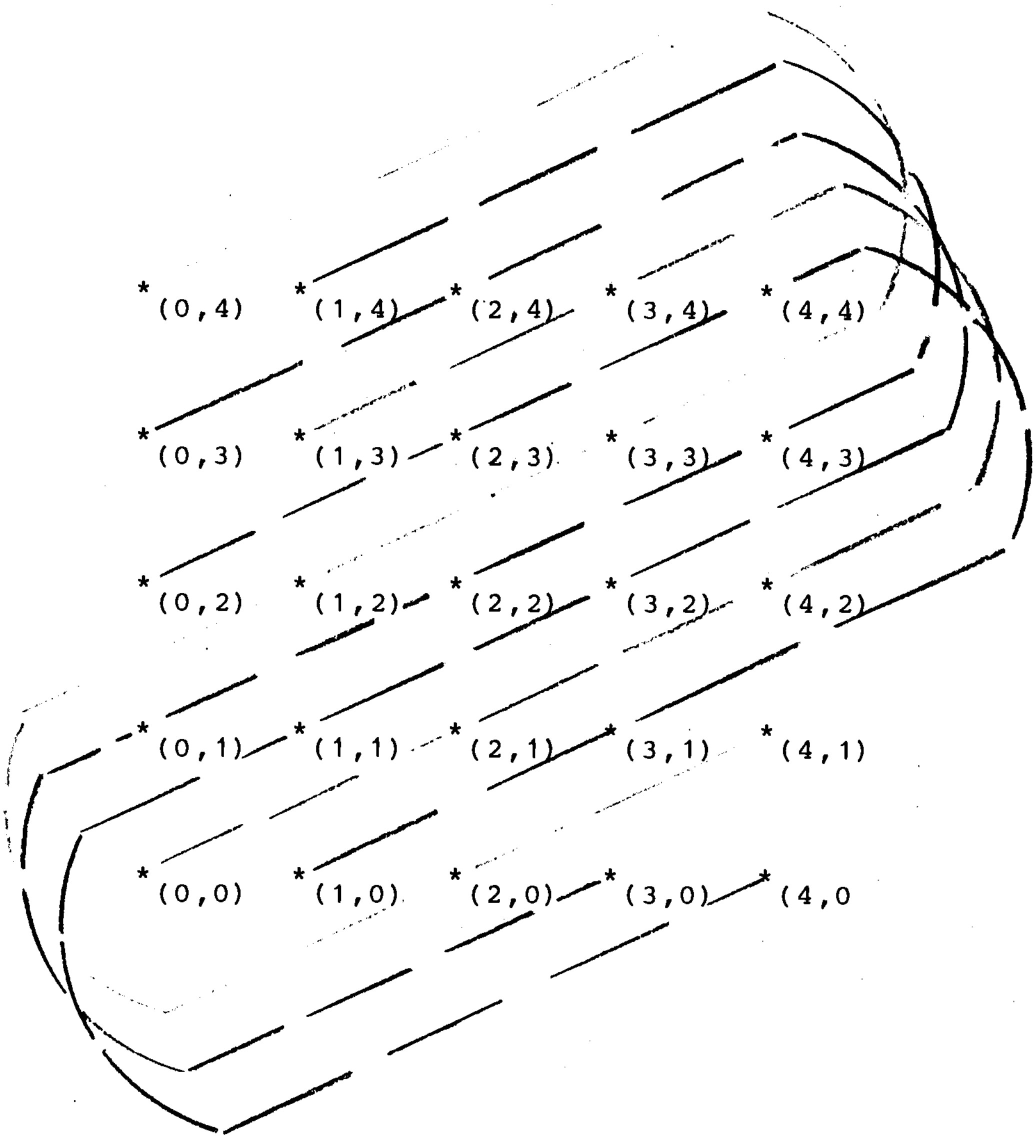
3.) Rectas con pendiente igual a dos:

Y = 2X	consta de los puntos	(0,0), (1,2), (2,4), (3,1), (4,3)
Y =2X + 1	" " " "	(0,1), (1,3), (2,0), (3,2), (4,4)
Y =2X + 2	" " " "	(0,2), (1,4), (2,1), (3,3), (4,0)
Y =2X + 3	" " " "	(0,3), (1,0), (2,2), (3,4), (4,1)
Y =2X + 4	" " " "	(0,4), (1,1), (2,3), (3,0), (4,2)



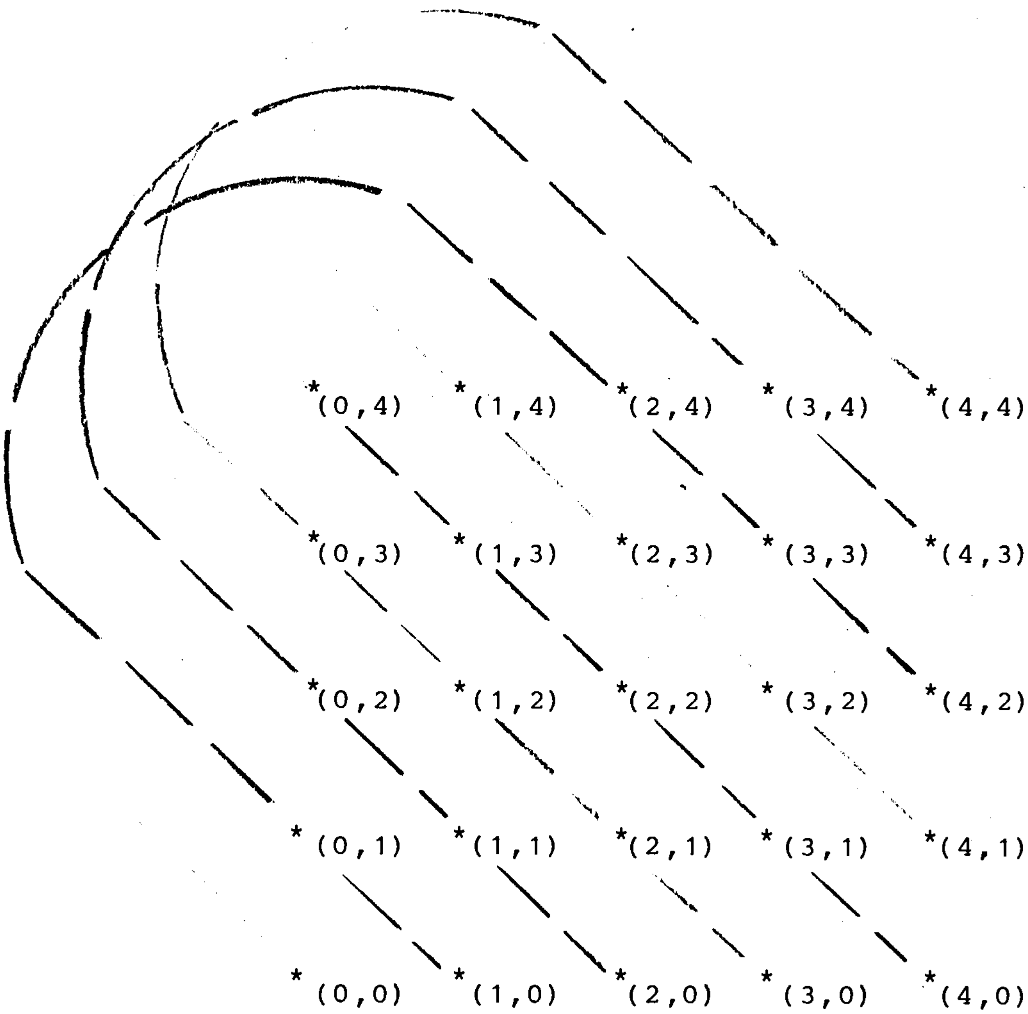
4.) <u>Rectas con pendiente igual a tres:</u>

Y = 3X	Consta de los puntos	(0,0),	(1,3),	(2,1),	(3,4),	(4,2)
Y =3X + 1	" " " "	(0,1),	(1,4),	(2,2),	(3,0),	(4,3)
Y =3X + 2	" " " "	(0,2),	(1,0),	(2,3),	(3,1),	(4,4)
Y =3X + 3	" " " "	(0,3),	(1,1),	(2,4),	(3,2),	(4,0)
Y =3X + 4	" " " "	(0,4),	(1,2),	(2,0),	(3,3),	(4,1)



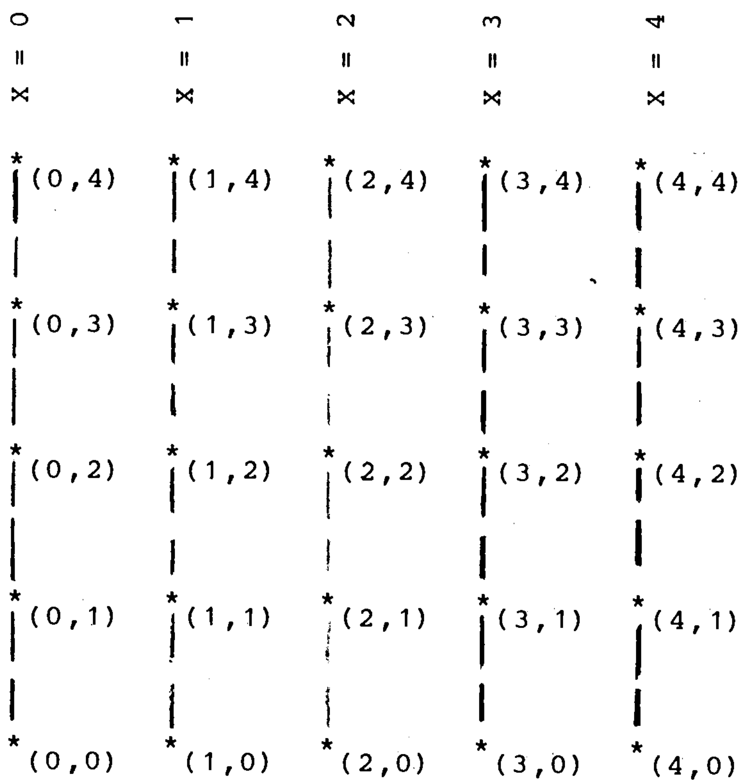
5.) Rectas con pendiente igual a cuatro:

Y = 4X	(0,0), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)
Y =4X + 1	(0,1), (1,0), (2,4), (3,3), (4,2)
Y =4X + 2	(0,2), (1,1), (2,0), (3,4), (4,3)
Y =4X + 3	(0,3), (1,2), (2,1), (3,0), (4,4)
Y =4X + 4	(0,4), (1,3), (2,2), (3,1), (4,0)



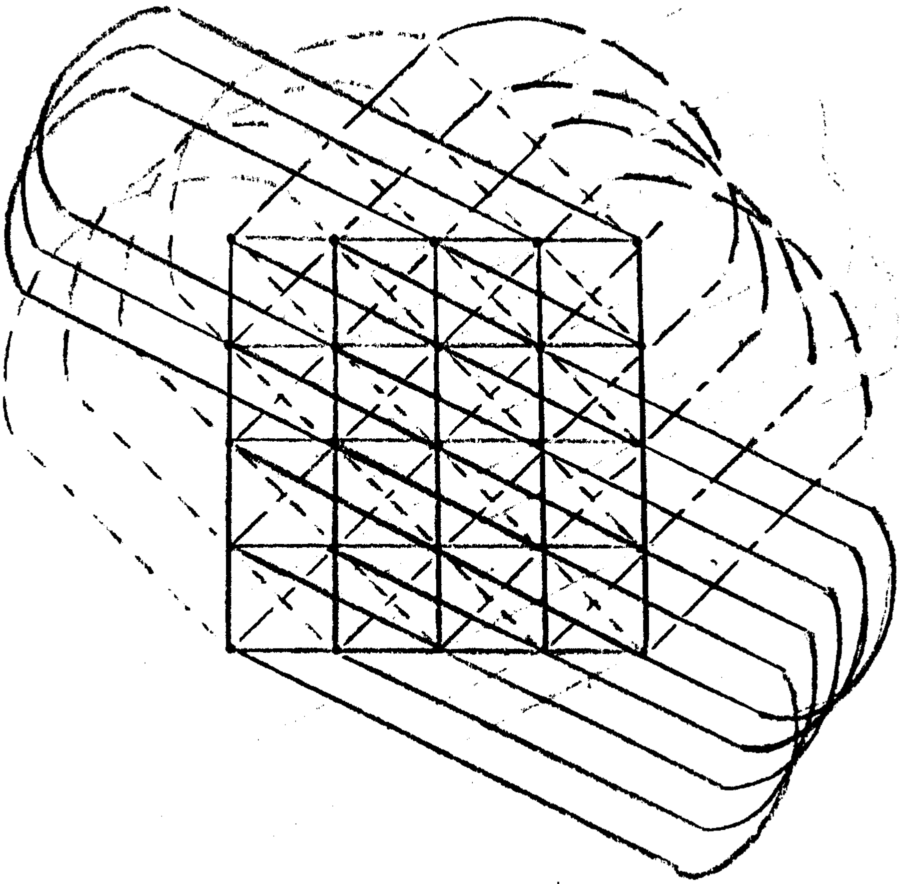
6.) Las rectas verticales:

Y = 0 Consta de los puntos: (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4)
Y = 1 " " " " : (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4)
Y = 2 " " " " : (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4)
Y = 3 " " " " : (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)
Y = 4 " " " " : (4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)



Sobreponiendo todas las rectas obtenemos una ilustración del - plano $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

$\boxed{\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5}$



El plano $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ está formado por

25 puntos

30 rectas con cinco y sólo cinco puntos en cada recta.

Recordemos los aciomas del plano afín:

I) Por dos puntos pasa una recta.

II) Esta recta es única.

III) Toda recta tiene al menos dos puntos.

IV) Existen al menos tres puntos no colineales.

V) Dada una recta ℓ y un punto $P \notin \ell$ existe una recta ℓ' tal que i) $P \in \ell'$

ii) $\ell \cap \ell' = \emptyset$

V´) ℓ' es única.

Para demostrar que $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ es efectivamente un plano afín, tenemos que comprobar que se cumplen los seis axiomas anteriores. Las demostraciones son trabajos sencillos pero agotadores si procediéramos en la forma como comprobamos - $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, debido a la cantidad de puntos y rectas que se tienen en $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

Variaremos en este caso la táctica de las comprobaciones y las haremos en forma analítica; con esto verificaremos la - validez.

Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{R}$ el conjunto de puntos y rectas respectivamente en $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.

$$\mathcal{P} = \left\{ (x,y) / \ x \in \mathbb{Z}_5 \ \text{ý} \ y \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 / \ ax + by + c = 0 \ , \ a,b,c \in \mathbb{Z}_5 \text{ con } a \text{ ó } b \neq 0 \right\}$$

Por demostrar: que $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$ es un plano afín.

Por demostrar que se cumple el axioma I para $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$.

I) Por dos puntos pasa una recta.

Demostración:

Sean $P(x_1, y_1)$, $Q(X_2, X_2)$ dos puntos distintos cualesquiera en $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$.

Sea ℓ la recta en $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$ dada por la ecuación.

$\ell: (X_2 - X_1)(Y - Y_1) - (Y_2 - Y_1)(X - X_1) = 0$

esta ecuación es de 1º grado en X y Y.

Para comprobar que $P(X_1, Y_1)$ pertenece a ℓ_1, sustituímos $X \to X_1$, y $Y \to Y_1$, debiendo satisfacer la ecuación.

$$(X_2 - X_1)(Y - Y_1) - (Y_2 - Y_1)(X - X_1) = 0$$

$$(X_2 - X_1)(Y_1 - Y_1) - (Y_2 - Y_1)(X_1 - X_1) = 0$$

$$(X_2 - X_1)(0) - (Y_2 - Y_1)(0) = 0$$

$\therefore$ $P(X_1, Y_1)$ satisface la ecuación

$\therefore$ $P \in \ell$

Para comprobar que $Q(X_2, Y_2)$ pertenece a ℓ sustituímos $X \to X_2$ y $Y \to Y_2$

$$(X_2 - X_1)(Y - Y_1) - (Y_2 - Y_1)(X - X_1) = 0$$

$$(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) - (Y_2 - Y_1)(X_2 - X_1) = 0$$

$\therefore$ $Q(X_2, Y_2)$ satisface la ecuación.

$\therefore$ $Q \in \ell$

$\therefore$ El primer axioma se cumple para $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$.

Por demostrar que se cumple el axioma II para $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$

II) Esta recta es única.

Demostración:

Sean ℓ y ℓ' dos rectas distintas en $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$ que pasan por P y Q.

ℓ : $ax + by + c = 0$ $\qquad$ ℓ y ℓ' pasan por P y Q

ℓ' : $a'x + b'y + c' = 0$ $\qquad$ P (X_1, Y_1) , $Q(X_2, Y_2)$ con $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}_5$

Por demostrar que $\ell = \ell'$

Como ambas rectas pasan por P y por Q, sus coordenadas deben satisfacer ambas ecuaciones.

1) ℓ: $ax + by + c = 0$ $\qquad$ 2) ℓ': $a'x + b'y + c' = 0$

Sustituyendo P en (1) obtenemos (3) y sustituyendo Q en (1) obtenemos (4).

3) $ax_1 + by_1 + c = 0$

4) $ax_2 + by_2 + c = 0$

5) $a(X_2 - X_1) + b(y_2 - y_1) = 0$

Sustituyendo P en (2) obtenemos (6) y sustituyendo Q en (2) obtenemos (7).

6) $a'x_1 + b'y_1 + c' = 0$

7) $a'x_2 + b'y_2 + c' = 0$

8) $a'(X_2 - X_1) + b'(Y_2 - Y_1) = 0$

Como $P \neq Q$, $X_1 \neq X_2$ ó bien $Y_1 \neq Y_2$

Supongamos que $X_1 \neq X_2$ (el otro caso es análogo).

5) $a(X_2 - X_1) + b(Y_2 - Y_1) = 0$

$\therefore \quad a = -b \dfrac{(Y_2-Y_1)}{(X_2-X_1)}$

8) $a'(X_2-X_1) + b'(Y_2-Y_1) = 0$

$\therefore \quad a' = -b' \dfrac{(Y_2-Y_1)}{(X_2-X_1)}$

Multipliquemos ambos miembros por b'

$ab' = -bb' \dfrac{(Y_2-Y_1)}{(X_2-X_1)}$

multipliquemos ambos miembros por b

$a'b = -bb' \dfrac{(Y_2-Y_1)}{(X_2-X_1)}$

Por transitividad igualemos $ab' = a'b$

Como $a \neq 0$ ó $b \neq 0$, supongamos que $b \neq 0$.

$\therefore$ podemos dividir entre b

$$\frac{ab'}{b} = \frac{a'b}{b}$$

de donde $a \dfrac{b'}{b} = a'$ hacemos $\dfrac{b'}{b} = \lambda$

$\therefore \quad a\lambda = a'$ y $b\lambda = b'$

Ahora tomemos las ecuaciones 1 y 2

1) $ax + by + c = 0$

$ax + by = -c$

2) $a'x + b'x + c' = 0$

$a'x + b'y = -c'$

$$-c' = a'x + b'y = (\lambda a)\,x + (\lambda b)\,y = \lambda(ax + by) = \lambda(-c)$$

$\therefore \quad \boxed{\lambda c = c'}$

$\therefore \quad a'x + b'y + c' = \lambda(ax + by + c) \quad \lambda \neq 0$

$\therefore$ Podemos concluir que el conjunto

$\ell = \left\{ (X,Y) \,/\, ax + by + c = 0 \right\}$ es el mismo que el conjunto $\ell' = \left\{ (x,y) \,/\, a'x + b'y + c' = 0 \right\}$

Pues si $(X_o, Y_o) \in \ell$ se cumple que $ax_o + by_o + c = 0$

$\lambda(ax_o + by_o + c) = 0 \qquad \therefore \quad a'x_o + b'y_o + c = 0$

$\therefore \quad (X_o, Y_o) \in \ell'$

$\therefore \quad \ell = \ell'$

Se cumple el axioma II

Por demostrar que se cumple el axioma tres para $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

<u>III Toda recta tiene al menos dos puntos:</u>

Sea ℓ una recta cualquiera $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

$\ell : \quad ax + by + c = 0 \qquad$ con $a \neq 0$ <u>ó</u> $b \neq 0$

con $a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}_5$

i) Si $b \neq 0$

$X = 0 \Rightarrow by + c = 0$

$\Rightarrow \quad y = \frac{-c}{b}$

$\therefore$ Tenemos el punto $P_o\left(0, \frac{-c}{b}\right) \in \ell$

Ahora:

$$X = 1 \Rightarrow ax + by + c = 0$$
$$\Rightarrow a + by = -c$$
$$\Rightarrow y = \frac{-c - a}{b}$$

$\therefore$ Tenemos que el punto $P_1 \left(1, \frac{-c-a}{b}\right) \in \ell$.

(Podemos seguir dándole valores a x hasta cuatro con lo cual demostraríamos que ℓ tiene exactamente 5 puntos, pero es suficiente con demostrar que al menos consta de dos puntos).

ii) Si $b = 0$, entonces $a \neq 0$ y se sigue un razonamiento análogo.

$\therefore$ Se cumple el tercer axioma para $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$

Por demostrar que se cumple el cuarto axioma para $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$

IV) <u>Existen al menos tres puntos que no pertenecen a una misma recta.</u>

En efecto. Si P_1 es $(0,0)$, P_2 $(0,1)$ y P_3 es $(1,0)$, debemos demostrar que no existe ninguna (de las 30) rectas de $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$ que contenga a P_1, P_2 y P_3 .

Como sabemos (axioma 1) que por 2 puntos pasa una y sólo una <u>recta</u>, la única recta que pudiera contener a P_1 , P_2 y P_3 es la que determinan P_1 y P_3 o sea $Y = 0$ pero esa no contiene a P_2 .

Por demostrar que el quinto axioma se cumple para $\mathbb{Z}5 \times \mathbb{Z}5$

V) <u>Dada una recta ℓ y un punto $P \notin \ell$ existe una recta ℓ' tal que</u>

i) <u>$P \in \ell'$</u>

ii) <u>$\ell \cap \ell' \neq \emptyset$</u>

Las rectas de ecuación.

ℓ'; $ax + by + c' = 0$ con $c' \neq c$

Son todas paralelas a ℓ y son diferentes de ℓ ; $ax + by + c = 0$, esto quiere decir que $\ell \cap \ell' = \emptyset$

En efecto si $\ell \cap \ell' \neq \emptyset$, habría un punto $(x_1, y_1) \in \ell \cap \ell'$ tal que:

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$ax_1 + by_1 + c' = 0 \qquad \therefore \quad c' = c$$

Lo que nos lleva a una contradicción.

Ahora bien si tomamos $c' = -(ax_\circ + by_\circ)$, la recta que obtenemos es $ax + by - (ax_\circ + by_\circ) = 0$; es una recta que pasa por el punto - $(x_\circ, y_\circ)$ y es paralela a ℓ .

$\therefore$ El quinto axioma se cumple para $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

Por demostrar que se cumple el axioma V´ para $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

<u>V´) La recta ℓ' que es paralela a ℓ es única.</u>

Sea $(x_\circ y_\circ) \notin \ell$ y $(x_\circ, y_\circ) \in \ell'$ y ℓ''
si ℓ : $ax + by + c = 0$, se puede escoger para
ℓ': $ax_\circ + by_\circ + c' = 0$, y para ℓ'': $ax_\circ + by_\circ + c'' = 0$ esas ecuaciones puestos que $\ell \parallel \ell'$ y $\ell \parallel \ell''$.

de tal forma que: $\ell \cap \ell' = \emptyset$ y $\ell \cap \ell'' = \emptyset$

Por demostrar que $\ell' = \ell''$

$$ax_\circ + by_\circ + c' = 0$$
$$\underline{ax_\circ + by_\circ + c'' = 0} \qquad \therefore \quad \ell = \ell'$$
$$c' - c'' = 0 \qquad \therefore \quad \text{Se cumple el axioma V´}$$
$$c' = c''$$

<u>$\therefore$ $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ con sus puntos y sus rectas es un plano afín.</u>

EL PLANO PROYECTIVO SOBRE $\mathbb{Z}_5$

EL PLANO PROYECTIVO SOBRE $\mathbb{Z}$ 5

El método que aquí hemos usado para demostrar que $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ es un plano afín, vale para todos los casos en que C es un campo: entonces C x C con sus puntos y rectas es un plano afín. -- Esta afirmación hace redundantes las demostraciones (a pie) - de los casos $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ó $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ que se incluyen con fines didácticos.

A continuación queremos extender el plano afín $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ y obtener un plano proyectivo, al cual le llamaremos "EL PLANO PROYECTIVO SOBRE $\mathbb{Z}$ 5"

Este nuevo plano deberá cumplir con los tres primeros - - axiomas del plano afín y con los dos siguientes:

Axioma A) Dadas dos rectas estas siempre se cortan.

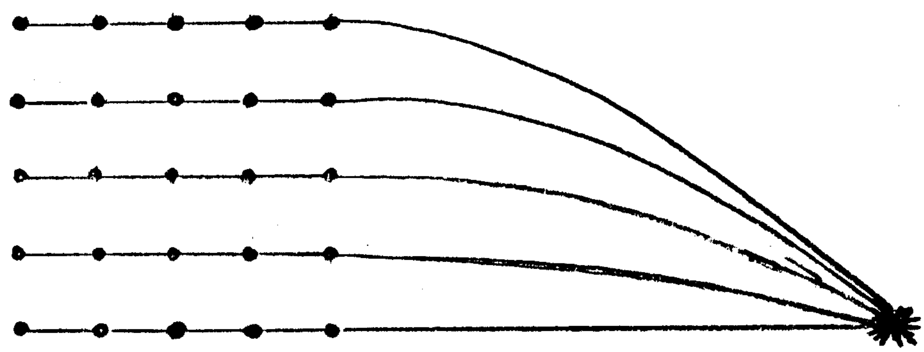
Axioma B) Existen cuatro puntos en el plano tales que cualesquiera tres de ellos no están sobre la misma recta.

Como necesitamos que dos rectas cualesquiera siempre se - corten y esto no se cumple en el plano afín $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ para las - rectas paralelas, vamos a agregar un punto al infinito por cada una de las familias de rectas paralelas; este punto será -- común para cada familia, de esta manera se cumplirá con el -- axioma "A"

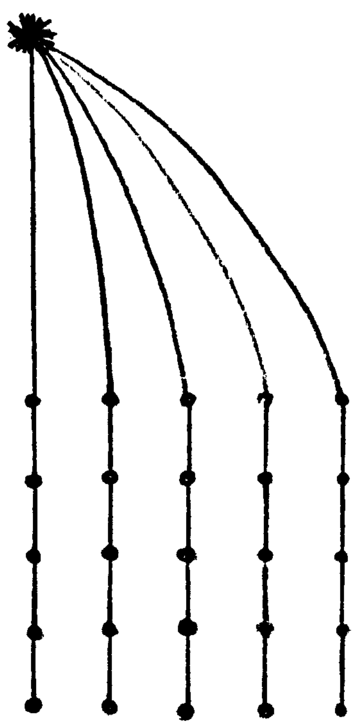
De esta manera obtendremos el plano proyectivo sobre $\mathbb{Z}$ 5

Es decir agreguemos un punto al infinito por cada grupo - de rectas con igual pendiente, y uno para las verticales.

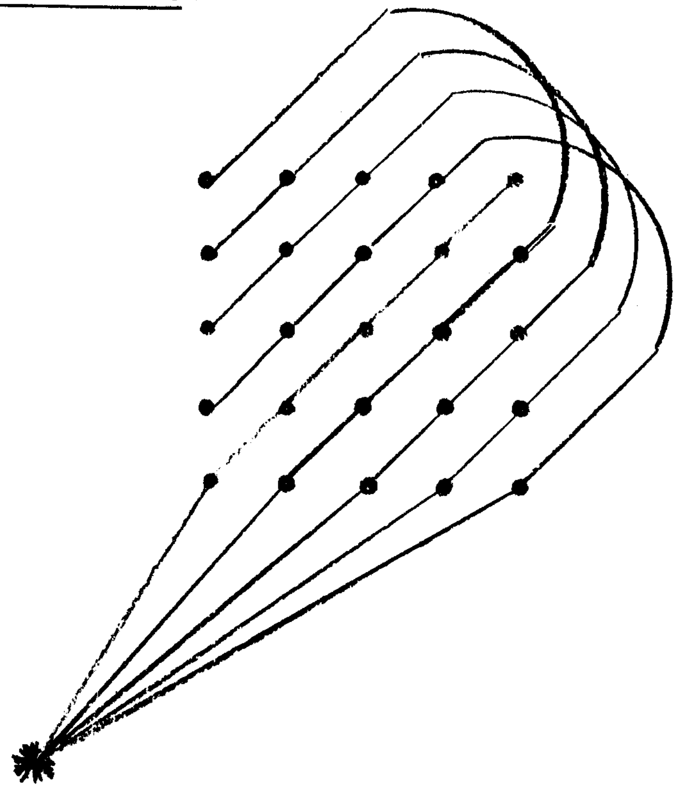
1.-) RECTAS "HORIZONTALES"



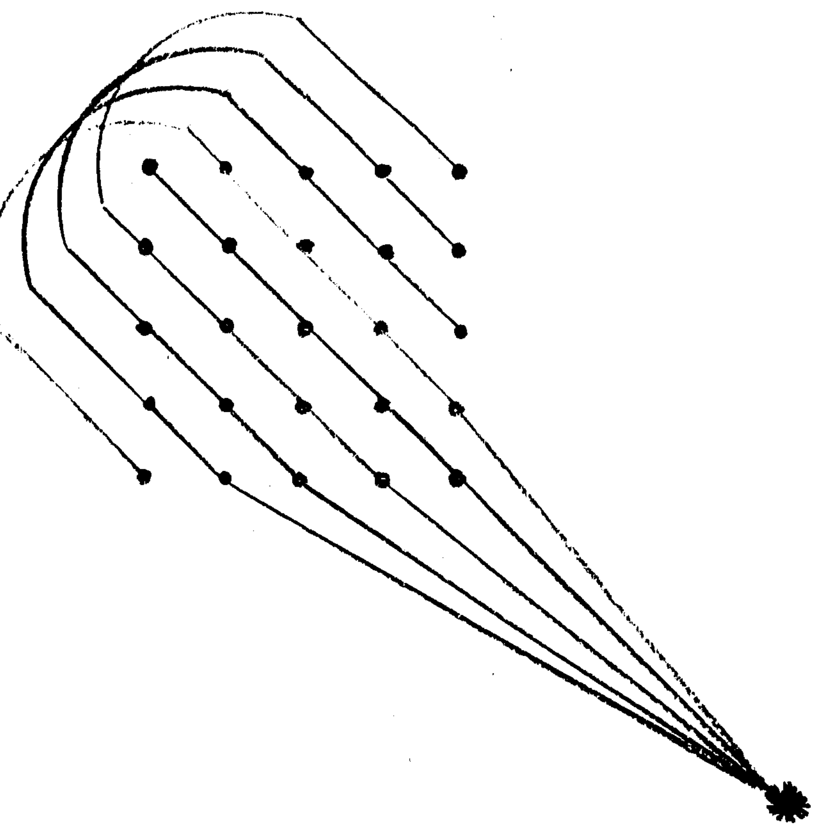
2.-) RECTAS VERTICALES:



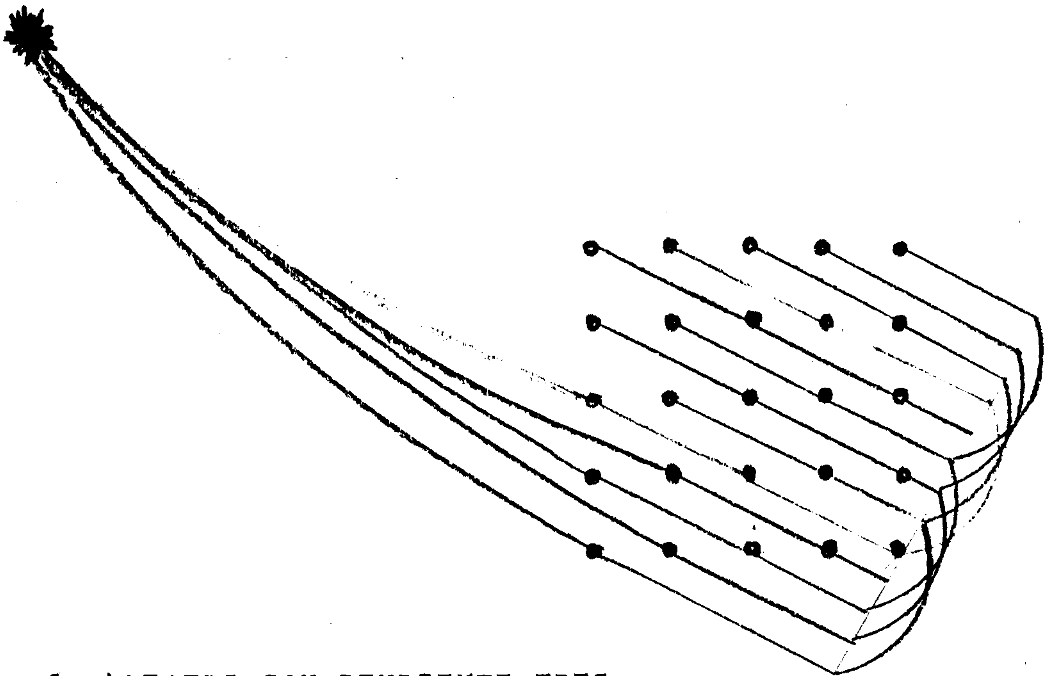
3.-) RECTAS CON PENDIENTE UNO:



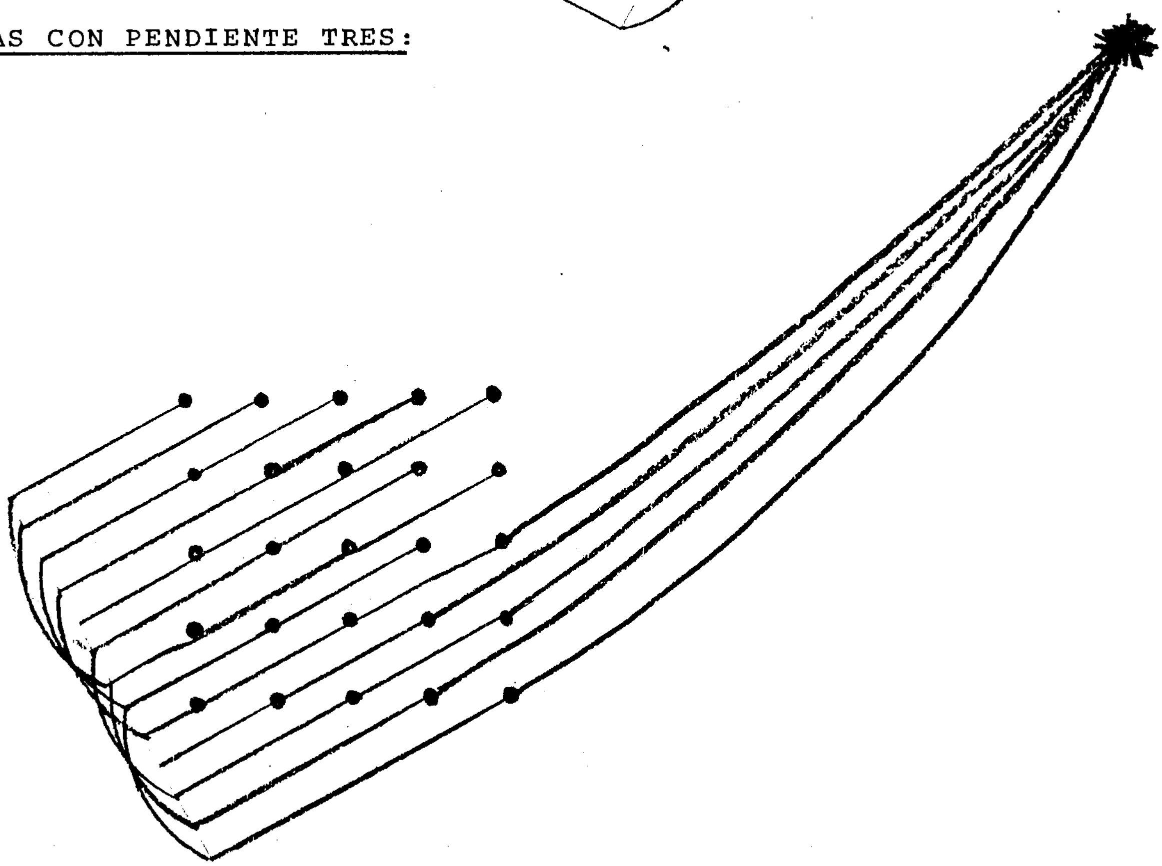
4.-) RECTAS CON PENDIENTE IGUAL A CUATRO:



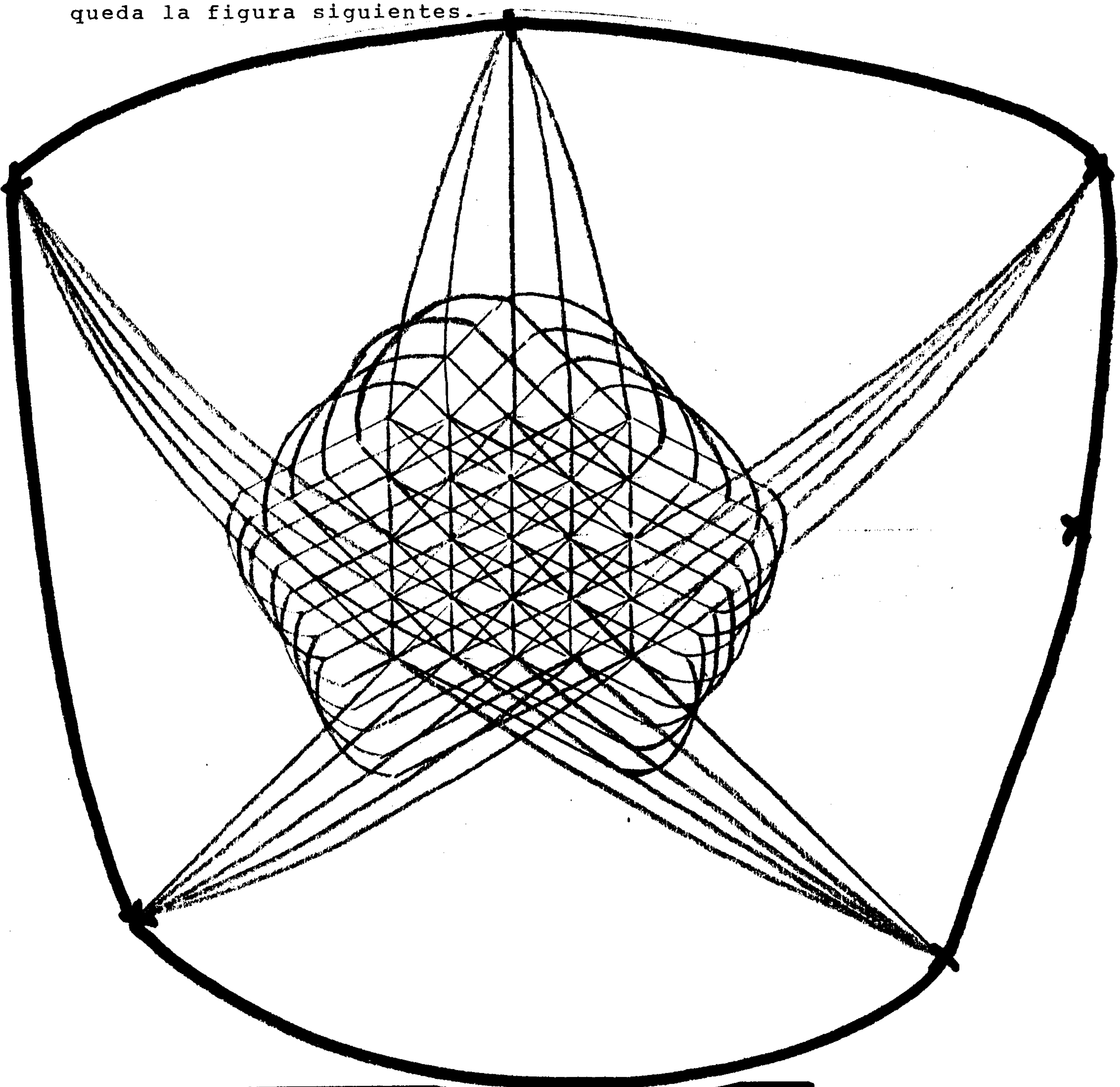
5.-) RECTAS CON PENDIENTE IGUAL A DOS:



6.-) RECTAS CON PENDIENTE TRES:



Sobreponiendo todas las rectas junto con los puntos al infinito queda la figura siguientes.-



EL PLANO PROYECTIVO SOBRE $\mathbb{Z}_5$

Con un total de 31 puntos: 25 anteriores del plano afín y 6 al infinito.

Con un total de 31 rectas: 30 anteriores del plano afín y la recta al infinito.

"EL PLANO PROYECTIVO"

SOBRE LOS REALES

"EL PLANO PROYECTIVO"
SOBRE LOS REALES

En la matemática se trabaja con el lenguaje de conjuntos, el cual da una alternativa más para el desarrollo y comprensión de la misma.

En el desarrollo y construcción del plano proyectivo usaremos esta gran herramienta que es la teoría de conjuntos, los conceptos que necesitaremos será solamente nociones tales como: conjunto finito, conjunto infinito, subconjunto y el concepto de inclusión.

En esta discusión no estamos interesados en cualquier coleción de elementos, solamente prestaremos atención a aquellos conjuntos Π_p que a compañados de ciertos subconjuntos $\mathcal{L}$ que cumplan con las tres propiedades que en la siguiente definición enunciamos.

<u>DEFINICION</u>: A los conjuntos de elementos P_1, P_2, P_3, ...y subconjuntos $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \ldots$ que satisfagan las siguientes tres propiedades los llamaremos planos proyectivos.

i) Si P y Q son dos elementos distintos de Π_p, existe un único subconjunto $\mathcal{L}$ de Π_p tal que P está en $\mathcal{L}$ y Q está en $\mathcal{L}$.

$$\forall P_y Q \in \Pi_p \ (P \neq Q) \Rightarrow \exists_! \ \mathcal{L} \subset \Pi_p \ \ni P \in \mathcal{L} \wedge Q \in \mathcal{L}$$

ii) Si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son dos subconjuntos distintos de Π_p existe un único elemento P en Π_p, tal que P está en $\mathcal{L}_1$, y P está en $\mathcal{L}_2$.

$$\forall \mathcal{L}_1 \, y \, \mathcal{L}_2 \subset \Pi_p \ (\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2) \Rightarrow \exists_! \ P \in \Pi_p \ \ni P \in \mathcal{L}_1 \wedge P \in \mathcal{L}_2$$

iii) Existen cuatro elementos distintos P_1, P_2, P_3, P_4 de Π_p tales que, tres de ellos nunca están contenidos en un subconjunto $\mathcal{L} \in \Pi_p$.

$$\exists\, P_1, P_2, P_3, P_4 \in \Pi_p \quad P_i \neq P_j \text{ si } i \neq j \;\}\; \forall\, \mathcal{L} \in \Pi_p,\ P_1 \notin \mathcal{L} \vee P_2 \notin \mathcal{L} \vee P_3 \notin \mathcal{L} \vee P_4 \notin \mathcal{L}.$$

Si todo lo anterior se cumple en Π_p con los elementos P_1, P_2, P_3,... y los subconjuntos $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$,..., lo llamaremos plano proyectivo.

A los elementos P_i del plano Π_p los bautizaremos con el nombre de puntos, a los subconjuntos $\mathcal{L}_i$ con el nombre de rectas y ambos serán elementos no definidos. Existirá una relación entre estos dos elementos y la llamaremos "relación de incidencia", por tanto, a las tres propiedades enunciadas en la definición les nombraremos relaciones de incidencia.

En el plano Π_p(proyectivo) existen de tres diferentes tipos de puntos (elementos no definidos).

1.) Un conjunto formado por todas las parejas ordenadas (x,y) compuesta por números reales X,Y, a los cuales les llamaremos puntos ordinarios de Π_p.

2.) Un conjunto formado por todos los números reales (m) y les bautizaremos con el nombre de "punto al infinito que corresponde a la pendiente "m" (por brevedad le llamaremos tambien "punto pendiente")

3.) Un punto único (que "corresponde" a las rectas verticales) y que denotaremos como Y.

De los tres tipos de puntos los únicos que matematicamente tienen un significado real son los puntos ordinarios, los cuales son los puntos que pertenecen al plano euclideano real el cual es muy conocido por todos, pues lo utilizamos en la Geometría Analítica elemental.

Por todo lo anterior podemos pensar al plano Π_p como una extensión del plano de Euclides o sea del Plano Euclideano Real.

Veamos ahora como son los subconjuntos $\mathcal{L}_i$ de Π_p de los cuales -- existen de tres diferentes tipos:

1.) El subconjunto $\mathcal{L}(m,k)$ que es la colección de todas las parejas - ordenadas (x,y), cuyas coordenadas x, ý y, satisfacen la - siguiente ecuación:

$$Y = mx + k \quad , \text{ y el punto pendiente } \quad m$$

Veamos un ejemplo de este primer tipo de subconjunto: Sea la recta $\mathcal{L}(2,5)$, la cual consiste del punto pendiente m=2 y de todos los pares ordenados (x,y).

$$\begin{array}{l} Y = mx+k \\ Y = 2x+5 \end{array} \qquad \mathcal{L}(2,5) = \left\{ (x,2x+5)\; ;\; x \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ 2 \right\}$$

Observémos que este tipo de subconjunto puede verse como una recta de la forma $Y = mx + k$ contenida en el plano euclideano real -- juntamente con un punto pendiente contenido en el plano extendido.

2.) El subconjunto $\mathcal{L}h$, que comprende a todos los puntos ordinarios (x,y) los cuales cumplen con la condición de que X sea - igual a h x=h y el punto al infinito Ψ. Esto lo podemos -- imaginar como la recta x=h ubicada en el plano euclideano - - real y el punto al infinito que ubicamos en el plano extendido o sea en Π_p .

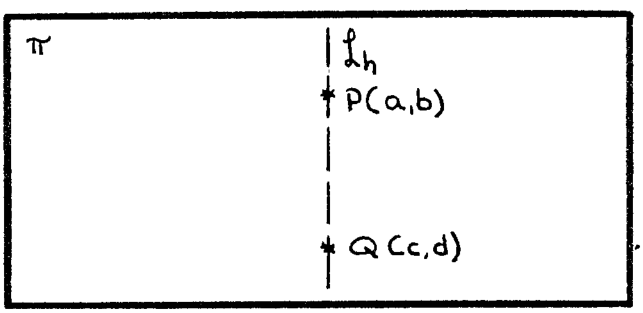
3.) El tercer tipo de subconjunto, es el subconjunto $\mathcal{L}_\Psi$, que -- comprende a Ψ y a todos los puntos pendiente, cabe mencionar - que este subconjunto es ajeno al plano euclideano real.

El plano proyectivo Π_P es una extensión del plano euclideano - - real, y contiene en su interior un plano euclideano real; Pero un plano euclideano no cumpliría con nuestras propiedades o rela- -- ciones de incidencia debido a que, cualesquiera rectas paralelas - no satisfacen nuestra segunda relación de incidencia que nos menciona que, cualesquiera dos rectas deben tener un punto en común. Por la razón anterior nace la motivación de extender el plano - - euclideano creando el punto al infinito Ψ y los puntos pendiente (m) los cuales provocan el cumplimiento de nuestra segunda relación de incidencia, dando a cada familia de rectas con la misma pendiente, un punto pendiente (m) que se encuentra en el subconjunto $\mathcal{L}_\Psi$ en la extensión del plano euclideano y a las rectas verticales el punto al infinito Ψ, en donde se intersecan las - rectas con igual pendiente y las verticales respectivamente.

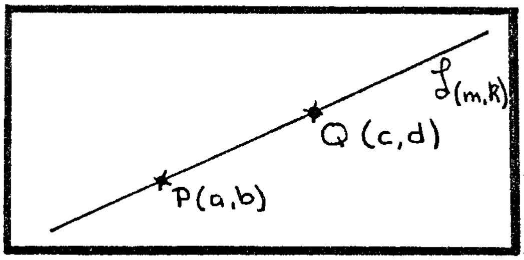
Intentemos ahora comprobar si nuestro plano extendido Π_P con sus subconjuntos ($\mathcal{L}_{(m,k)}$, $\mathcal{L}_h$, $\mathcal{L}_\Psi$) es un plano proyectivo o sea cumple con las propiedades enunciadas en la definición.

Si suponemos que los puntos que tomamos son puntos ordinarios - - tendremos cuatro casos.

I caso) Suponemos P y Q dos puntos ordinarios tal que $P \neq Q$ con $P(a,b)$ y $Q(c,d)$ de tal forma que $a=c$, $b \neq d$ entonces son puntos contenidos en el subconjunto $\mathcal{L}_h$ donde - - $h = a = c$ y ninguna otra recta los contiene a ellos.



II caso Suponemos ahora P y Q son dos puntos ordinarios tal que P(a,b) y Q(c,d) de tal forma que $a \neq c$ entonces -- existe una única recta en el plano auclideano que -- los contiene y el subconjunto está constituído por - todas las parejas (x,y) de puntos ordinarios tales - que cumplen con.



$$Y-b=\left(\frac{d-d}{c-a}\right)\quad(x-a)$$

Esta recta tiene su punto pendiente m, que se puede obtener de la siguiente forma:

$$m= \frac{d-b}{c-a}$$

El número real K lo podemos obtener:

$$Y - b = \frac{d-b}{c-a} \quad (x-a)$$

$$Y = \left[\frac{d - b}{c - a}\right](x-a) + b$$

$$Y = m X + K$$

$$K = Y - mx$$

$$K = \left[\frac{d - b}{c - a}\right] \quad (x-a) + b - \left[\frac{d - b}{c - a}\right] X$$

$$K = b - a \left[\frac{d - b}{c - a}\right]$$

Este número real K es la intersección de la recta con el eje de nuestro plano euclideano real en el punto ordinario (o,k). Por tanto esta recta que contiene a nuestros puntos ordinarios P y Q es única.

III caso Nuestro siguiente caso es cuando P(a,b) es un punto - ordinario y Q=(m) es un punto pendiente y necesitamos verificar que por estos dos puntos pasa una única - - recta. Tomemos una recta $\mathcal{L}$ contenida en el plano euclideano real de tal forma que su ecuación sea:

$$Y = mx + K \qquad ; \qquad K = y - mx$$

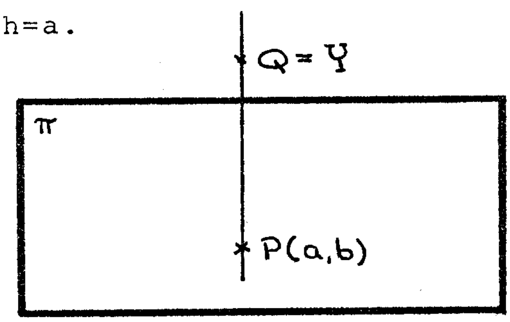
Y que pase por (a,b) nótese que m es fija ya que queremos que - "pase" por (m)=Q.

Ahora como P(a,b) es elemento del subconjunto $\mathcal{L}$ podemos sustituir:

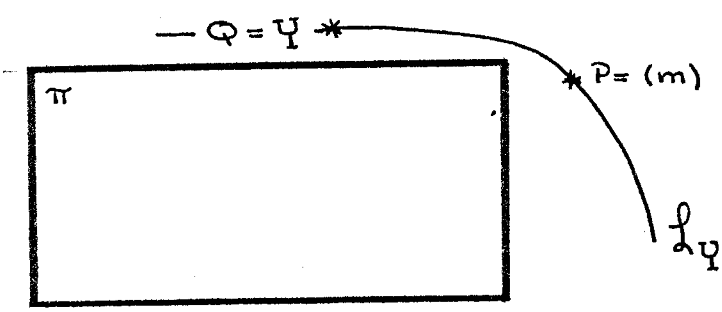
$$K = b - ma$$

Lo que fuerza el valor de K y por tanto la única recta que contiene a los punto P y Q es la recta $\mathcal{L}(m,k)$ que consiste de todos los puntos de la forma ($x, mx+k$) y el punto pendiente (m).

IV caso Supongamos ahora que el punto P(a,b) es un punto ordinario y Q= Υ el punto al infinito, entonces la recta que los contiene sería un subconjunto de la forma $\mathcal{L}_h$ con h=a.



V caso Por último supongamos que P y Q son diferentes puntos pendiente o podrían ser P un punto pendiente y Q = y el punto al infinito, en ambos casos la recta que - contendría a nuestro par de puntos sería .



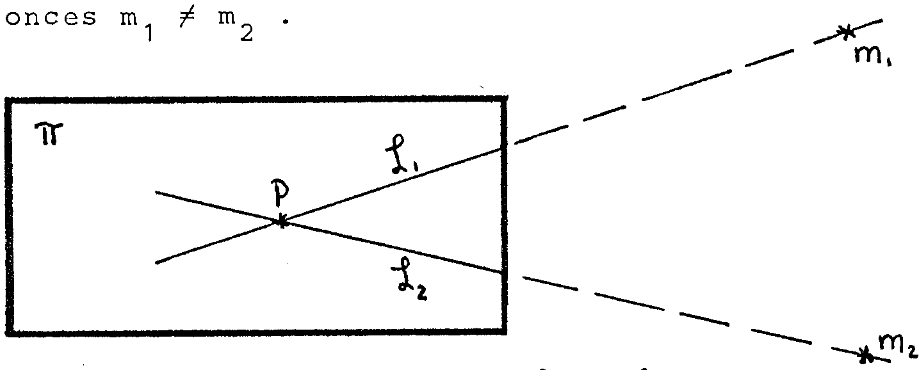
Con la revisión de los cinco anteriores casos, hemos comprobado que nuestro plano euclideano dotado con los elementos ideales - "puntos ideales y rectas ideales" con los cuales se hace posible la formación del plano extendido satisface la primera de -- las tres condiciones, debemos ahora comprobar si se cumplen las dos restantes.

La proposición primera que en forma abreviada dice: "por dos puntos pasa una sola recta" ya ha sido satisfecha por todas las combinaciones posibles de puntos ordinarios y puntos ideales.

Pasemos a nuestra segunda proposición que dice: "Dos rectas coplanares distintas se intersecan en uno y solo un punto", tomemos diferentes casos en los cuales combinaremos subconjuntos en el plano euclideano y subconjuntos en el plano extendido.

I caso Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas del plano euclideano π y m_1, m_2 sus puntos pendientes respectivamente.

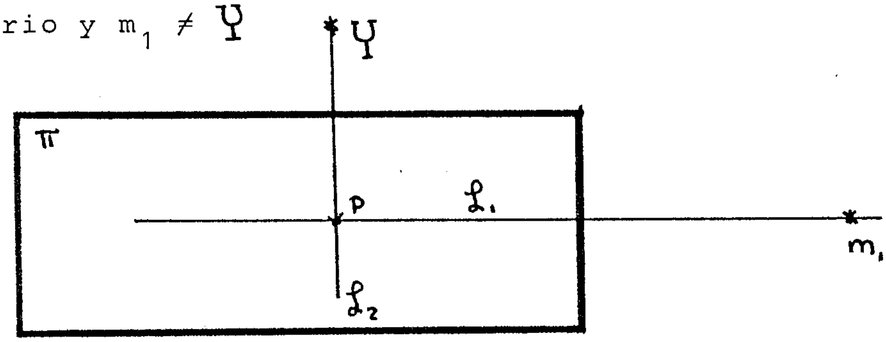
Si $\ell_1 \neq \ell_2$ y $\ell_1 \cap \ell_2 = P$ donde P es un punto ordinario, entonces $m_1 \neq m_2$.



Como nuestros subconjuntos "las rectas ℓ_1 y ℓ_2 " se encuentran en el plano euclideano real, sabemos por nuestra geometría euclideana que dos rectas reales no paralelas se cortan en uno y sólo un punto, en este caso es el punto P (ordinario) por tanto para que nuestra segunda proposición sea verdadera sólo debe -- existir un punto de cruce, por tanto los puntos pendientes tiene que ser diferentes ($m_1 \neq m_2$).

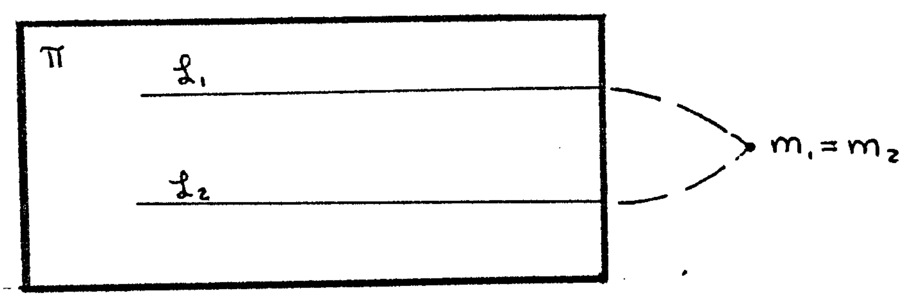
<u>II caso</u> Sea $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas del plano euclideano π y m_1, Ψ su punto pendiente y su punto al infinito respectivamente:

$\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = P$ donde P es un punto ordinario y $m_1 \neq \Psi$



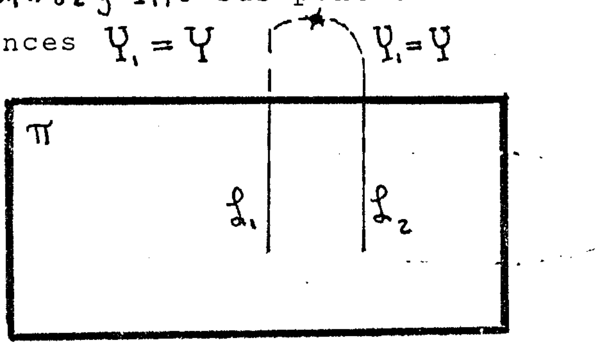
De la misma forma que en caso anterior $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son dos rectas -- reales no paralelas las cuales su intersección es el punto real P y por la geometría elemental sabemos que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ sólo se intersecan en un punto.

<u>III caso</u> Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas del plano euclideano π tales que $\mathcal{L}_1 // \mathcal{L}_2$ y m_1 , m_2 sus puntos pendientes respectivamente, entonces $m_1 = m_2$

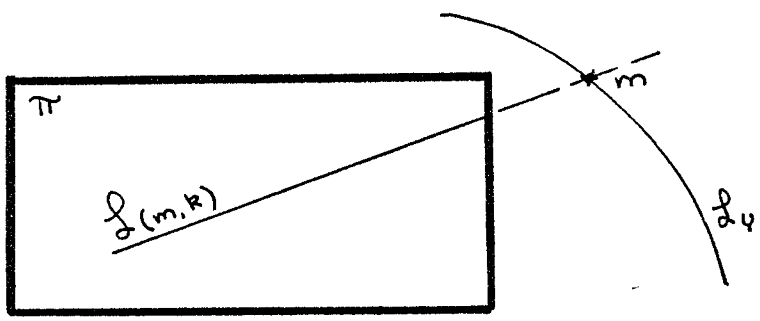


Como $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son dos rectas paralelas, no tienen en el plano euclideano real ningún punto en común, pero satisfacén nuestra segunda proposición, ya que, como se dijo $m_1 = m_2$ y es el único punto -- común.

<u>IV caso</u> Sea $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas del plano euclideano π tales que $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ y Ψ_1, Ψ sus puntos al infinito respectivamente, entonces $\Psi_1 = \Psi$



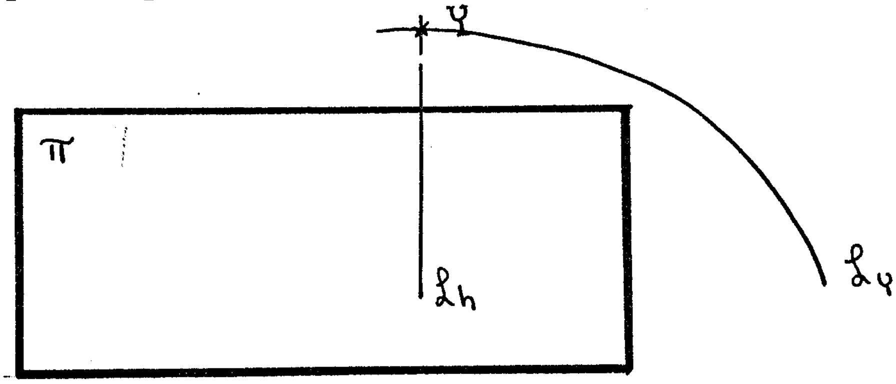
<u>V caso</u> Sean $\mathcal{L}(m,k)$ una recta del plano euclideano con su punto pendiente (m) y $\mathcal{L}_\Psi$ la recta la infinito que es el - - subconjunto formado por todos los puntos pendientes y por el punto al infinito y entonces



La recta $\mathcal{L}_\Psi$ (recta al infinito) no tiene ningún punto dentro - del plano euclideano real, por tanto la intersección no puede - ser un punto ordinario, pero la recta real $\mathcal{L}(m,k)$ tiene un punto en la extensión del plano π y ese punto es el punto ideal (m) como $\mathcal{L}_\Psi$ es el subconjunto formado por todos los puntos pendientes y el punto al infinito la recta $\mathcal{L}_\Psi$ contiene al punto ideal m, por tanto

$$\mathcal{L}_{(m,k)} \cap \mathcal{L}_\Psi = m$$

VI caso   Sean $\mathcal{L}_h$ una recta del plano euclideano con su punto al infinito Υ y $\mathcal{L}_\Upsilon$ la recta al infinito que es el -- subconjunto formado por todos los puntos pendiente y por el punto al infinito, entonces $\mathcal{L}_h \cap \mathcal{L}_\Upsilon = \Upsilon$



Como la recta al infinito contiene solamente puntos ideales, entonces no podrían intersecarse en un punto ordinario, por tanto la intersección es un punto ideal; como $\mathcal{L}_\Upsilon$ contiene al punto al infinito y $\mathcal{L}_h$ también lo contiene, la intersección de ambas - - rectas es el punto al infinito.

Con el análisis de estos VI casos comprobamos que las combina- - ciones posibles entre rectas reales y/o la recta al infinito se cumple con la segunda de nuestras tres proposiciones, procedamos a verificar si cumplen con la tercera.

REFERENCIAS.

A. Adrian Albert and Reuben Sandler.

An Introduction to Finite Proyective Planes.

Holt. Rinehard and Winston 1968.

Benito Castrucci.

Fundamentos da Geometría. Estudio axiomático do Plano Euclidiano.

Libros Técnicos e Científicos s.a. 1978.

Emilio Lluis y Cesar Rincón.

El infinito. Ciclo de conferencias

Universidad Autónoma de Querétaro, 1984