



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería

Maestría en Ciencias en Instrumentación y Control Automático

MODELADO Y VALIDACIÓN DEL MODELO CINEMÁTICO Y DE PARES
GRAVITACIONALES DE UN ROBOT INDUSTRIAL

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Maestro en Ciencias -
Línea Terminal Instrumentación y Control Automático

Presenta:

Ing. Carlos Guillermo López Guevara

Dirigido por:

M.C. Victor Manuel Hernández Guzmán

SINODALES

M.C. Victor Manuel Hernández Guzmán
Presidente

Dr. Vladimir Rauch
Secretario

Dr. Carlos López Cajún
Vocal

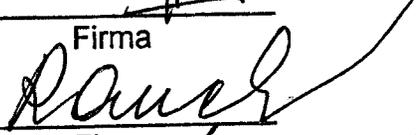
Dr. Gilberto Herrera Ruiz
Suplente

Dr. Marco Tulio Mata
Suplente

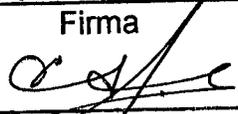
Ing. Jorge Martínez Carrillo
Director de la Facultad



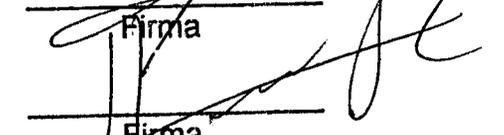
Firma



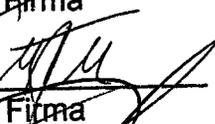
Firma



Firma



Firma



Firma

Dr. Sergio Quesada Aldana
Director de Investigación y
Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Noviembre del 2002
México

No. Adq. H6732L3

No. Título _____

Clas. 629.892

L864m

EJ. 1

Resumen

En el presente trabajo se obtiene el modelo cinemático de un robot industrial, se valida experimentalmente la cinemática directa, se obtiene el modelo de pares gravitacionales del manipulador y se verifica la validez del modelo; los resultados aquí obtenidos están dirigidos al desarrollo de controladores de posición de robots. Esta investigación forma parte del proyecto "Desarrollo de una estación robotizada de soldadura" llevada a cabo en la facultad de ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro en la división de estudios de posgrado. La obtención de la cinemática directa se hace empleando la metodología propuesta por Denavit y Hartenberg; mientras que para obtener la cinemática inversa se emplean técnicas geométricas y algebraicas. La validación de la cinemática directa se llevó a cabo de manera experimental, lo cual es difícil de encontrar en la literatura. La modelación de la gravedad permite compensarla de manera eficiente, si este modelo se incluye en alguna ley de control a través de una conexión anticipativa ayudará a ser más eficiente el controlador. La validación del modelo de pares gravitacionales se hizo de manera experimental, estableciendo la compensación de la gravedad como función de caídas de tensión y presindiendo de la medición de masas, distancias al centro de masa y constantes eléctricas de los actuadores.

(Palabras clave: cinemática directa, modelo de pares gravitacionales, validación experimental de modelos)

Summary

In this study, a kinematic model of an industrial robot was obtained. Forward kinematics was experimentally validated, the manipulator's gravitational pairs model was obtained, and validation of the model was verified. The results herein obtained are directed towards the development of position controllers for robots. This research is part of the project: "Developing of a welding robotized station" being carried out at the School of Engineering's Postgraduate Division, University of Queretaro. Forward kinematics was obtained using the methodology proposed by Denavit and Hartenberg; while, to obtain the inverse kinematics geometry and algebraic techniques were used. Validation of forward kinematics was done experimentally, which is difficult to find in the literature. Modeling of gravity allows compensation in an efficient way. If this model is included in a controlling law by means of a feed forward it will help to make the controller more efficient. Validation of gravitational pairs model was done experimentally establishing gravity compensation as a function of voltage and avoiding mass, distance to the center, and acting motor electrical constant measurements.

(Keywords: forward kinematics, gravitational pairs model, experimental validation models)

Agradecimientos

A mis padres...

A los profesores que intervinieron
en mi formación...

A las personas que me ayudaron con
sus opiniones desinteresadas...

A las personas involucradas en la
revisión de este documento por sus
atinados comentarios...

Al consejo nacional de ciencia y tecnología
(CONACYT).

Si deseas tener éxito, debes
terminar tu educación por ti
mismo.

BP

Índice General

Resumen	i
Summary	ii
Agradecimientos	iii
1 Introducción	1
2 Antecedentes	2
3 Cinemática directa	10
3.1 Nomenglatura de Denavit-Hartenberg.	12
3.1.1 Obtención de la cinemática directa (CD)	16
3.2 Validación de la CD	20
3.2.1 Longitud de los eslabones	21
3.2.2 Marco de referencia	22
3.2.3 Máximo ángulo de giro de los eslabones	23
3.2.4 Relación de cuentas-grados	24
3.2.5 Suposiciones	24
3.2.6 Programa	25
3.2.7 Mediciones	25
3.3 Resultados	28
4 Cinemática inversa	29
4.0.1 Desacoplamiento cinemático	30
4.0.2 Algoritmo para encontrar la cinemática inversa (CI)	32
4.1 Cinemática inversa para posición	33
4.2 Cinemática inversa de la orientación	33
4.2.1 Angulos de Euler	34
4.3 Obtención de la cinemática inversa	35
4.3.1 Posición	35
4.3.2 Cinemática inversa: Orientación	41

ÍNDICE GENERAL

vi

5	Modelo de pares gravitacionales	43
5.1	Obtención del modelo de pares gravitacionales (MPG)	44
5.2	Compensación del efecto gravitatorio	48
5.2.1	Identificación de los argumentos del MPG con compensación de gravedad	51
5.2.2	Validación del MPG con compensación de gravedad	54
6	Conclusiones	60
Anexos		68
6.1	Anexo uno: artículo	68
6.2	Anexo dos: programa	77
6.3	Anexo tres: cálculo intermedio de la CD	79

Índice de Figuras

3.1	Asignación de los ejes coordenados	16
3.2	Ubicación del marco de referencia y medición del ángulo en el eslabón uno	22
3.3	Medición del ángulo, eslabón dos y tres	23
3.4	Suposiciones	25
3.5	Método de validación del MCD	27
4.1	Desacoplamiento cinemático	32
4.2	Diagrama para la obtención del ángulo θ_1	36
4.3	Diagrama para la obtención de los ángulos θ_2 y θ_3	38
5.1	Definición de las distancias de los centros de masa	46
5.2	Muñeca del manipulador ROMAT 56	46
5.3	Configuración uno para obtener los argumentos del MPG	51
5.4	Configuración dos para obtener los argumentos del MPG	52
5.5	Configuración tres para obtener los argumentos del MPG	53
5.6	Configuración uno para la validación del MPG	54
5.7	Configuración dos para la validación del MPG	54
5.8	Configuración tres para la validación del MPG	55
5.9	Configuración cuatro para la validación del MPG	55
5.10	Configuración cinco para la validación del MPG	56
5.11	Configuración uno para la validación del método	56
5.12	Configuración dos para la validación del método	57
5.13	Configuración uno para la validación del MPG en el eslabón tres	58
5.14	Configuración dos para la validación del MPG en el eslabón tres	58
5.15	Configuración tres para la validación del MPG en el eslabón tres	59
5.16	Configuración cuatro para la validación del MPG en el eslabón tres	59
6.1	Reconocimiento 3er Congreso Mexicano de Robótica	69
6.2	Portada de memorias 3er Congreso Mexicano de Robótica	70
6.3	Página 1 del artículo	71
6.4	Página 2 del artículo	72
6.5	Página 3 del artículo	73
6.6	Página 4 del artículo	74
6.7	Página 5 del artículo	75
6.8	Página 6 del artículo	76

Índice de Tablas

3.1	Valor de los parámetros Denavit-Hartenberg	17
3.2	Longitud de los eslabones del robot ROMAT 56	21
3.3	Ángulos máximos de giro	23
3.4	Número de cuentas y relación cuentas/grados de los eslabones	24
3.5	Resultados de la validación	28

Capítulo 1

Introducción

En la industria metal mecánica de la región el uso de manipuladores robóticos es cada vez más extendido; emplearlos representa una mejor calidad en el producto, incremento en productividad, disminuye los riesgos para los operadores, etc. En la división de estudios de posgrado de la facultad de ingeniería de la U.A.Q. se está llevando a cabo el desarrollo de una estación robotizada de soldadura, la cual cuenta únicamente con la parte mecánica. Una parte importante en el desarrollo del control de movimiento del robot es la generación de trayectorias, dentro de ésta un aspecto fundamental es el modelado cinemático del manipulador. Los robots industriales pueden ser programados para seguir trayectorias, éstas pueden ser enseñadas punto a punto, es decir, se graban los puntos por los cuales debe pasar el manipulador en una cierta trayectoria. Una forma básica para crear la trayectoria es a través de rectas y círculos; contar con instrucciones que generen éstos movimientos con pocos parámetros como los puntos inicial y final, radio del círculo etc. es esencial, y el modelo cinemático puede ser utilizado para generar automáticamente los puntos intermedios que el robot debe seguir. El conocimiento del efecto de la gravedad en un manipulador permite compensarla, al hacerlo los comportamientos no lineales producidos por el efecto gravitatorio son cancelados, de modo que el robot puede ser controlado como si se tratara de un sistema lineal usando un PID, por ejemplo. La parte integral de este tipo de controlador robustifica al sistema en lazo cerrado, de forma que cualquier imprecisión en el conocimiento del modelo de pares gravitacionales puede ser compensado.

Capítulo 2

Antecedentes

En la actualidad el campo de la robótica es ampliamente aceptado en el entorno industrial, se puede decir que mucho del avance que ha tenido es gracias a las exigencias que presenta la industria y a su disciplina de mejora continua; el hecho de que los robots hacen tareas donde se requiere de una extraordinaria precisión y velocidad, y trabajar en ambientes extremos, donde sería más que imposible que personas trabajaran en ellos, los ha vuelto indispensables en muchos tipos de procesos. A pesar del avance actual en esta disciplina aún quedan muchas cosas por desarrollar, en el presente trabajo se pretende aportar un grano de arena en esta fascinante disciplina. A continuación presentamos una pequeña reseña de los desarrollos más destacables de los últimos años.

Al final de los 40s, el Oak Ridge y Argonne National Laboratories inician el desarrollo de manipuladores maestro-esclavo para manejar material radiactivo, años más tarde, al final de los 50s, George Devol construye un manipulador mecánico programable; en los 60's el Stanford Artificial Intelligence Laboratory y el MIT Lincoln Laboratory inician el desarrollo de su robot con sensores de tacto y visión computarizada. El manipulador Stanford era capaz de hacer tareas simples de ensamble, ya en la década de los 70s, Cincinnati Milacron introduce un robot industrial de trabajo pesado llamado Cincinnati Milacron T3, en la misma década, Unimation Incorporated introduce una serie de robots llamada robots PUMA. En los 80s se inició un gran desarrollo en la industria robótica debido a la gran demanda de una automatización más económica y flexible por parte de

la industria automotriz y la exploración espacial, en 1997 la NASA envía un robot explorador llamado *Pathfinder* (buscador de caminos) a Marte. Durante décadas recientes, los robots manipuladores se han empleado principalmente para operaciones repetitivas en ambientes extremos. Estas tareas incluyen el manejo de materiales, el tomar y dejar piezas, aplicaciones de sellado de envases y ensamblado de partes; también para aplicaciones en ambientes extremos como son: el manejo de material radiactivo, la exploración del océano y el espacio, pintado en aerosol; otras aplicaciones de los robots incluyen la construcción de robots, aviones, automóviles, minas. Recientemente se ha incrementado el interés de hacer robots más amigables e inteligentes y robots capaces de hacer una intervención quirúrgica, aunque ha sido mucho el esfuerzo por desarrollar robots manipuladores, la última meta es desarrollar robots inteligentes y amigables capaces de emular las funciones humanas, sin embargo esta tecnología está aún en la infancia; el mayor obstáculo puede ser atribuido al hecho de que algunas de las llaves tecnológicas no están completamente desarrolladas.

La cinemática de un manipulador trata del estudio de la geometría del movimiento de éste con respecto a un marco coordinado de referencia fijo, sin considerar las fuerzas o momentos que originan el movimiento; así, la cinemática se interesa por la descripción del desplazamiento espacial del manipulador, en particular de las relaciones entre la posición de las variables de unión con la posición y orientación del órgano terminal del manipulador. Dentro de la cinemática existen dos problemas fundamentales que son: la cinemática directa y la cinemática inversa.

La cinemática directa trata de obtener la posición y orientación del órgano terminal a partir del conocimiento de las variables de unión, esto es, una vez que se conoce el valor de las variables de unión se determina, en que lugar del espacio y con que orientación se encuentra el órgano terminal del manipulador referido al marco de coordenadas fijo. Así, el MCD es una función de las variables de unión.

Denavit y Hartenberg desarrollaron un método sistemático para describir las relaciones cinemáticas (Asada y Slotine 1986); el método se basa en una matriz de dimensión 4×4 que representa la posición y orientación de un cuerpo rígido. La cinemática directa nos permite conocer la posición y la orientación del órgano terminal; sin embargo, las

tareas a realizar por el manipulador están dadas, por lo general, en términos del sistema de coordenadas de referencia, surge así la necesidad de tener un modelo que proporcione la posición en la que deben encontrarse las variables de unión, para una posición deseada y una orientación deseada. Esta parte del modelo se conoce como cinemática inversa (CI), este parte del modelo a diferencia de la cinemática directa (CD) proporciona varias soluciones para una misma configuración del manipulador, así que eventualmente se debe seleccionar algún criterio que permita elegir cuál de esas soluciones es la adecuada.

El problema cinemático inverso puede resolverse por varios métodos como son: "vector algebra method" (Chase 1963; Lee y Liang1988a; Lee y Liang1988b), "the geometric method"(Duffy y Rooney 1975; Duffy 1980), "the 4×4 matrix method" (Denavit y Hartenberg 1955), "the 3×3 dual matrix method" (Yang, A.T. 1969; Pennock y Yang 1985), "the screw algebra method"(Yuan y Freudenstein 1971; Kohli y Soni 1975), "the iterative method"(Uicker et al 1964; Albala y Angeles 1979), y "the quaternion algebra method"(Yang y Freudenstein 1964). Algunos investigadores han trabajado sobre la cinemática inversa de robots, se citan a continuación algunos trabajos:

- (Pieper y Roth 1969) aplicaron "the 4×4 matrix method" para resolver el problema de la cinemática inversa en robots seriales. Ellos encontraron una condición suficiente para que la solución de la cinemática inversa sea una expresión cerrada; la condición dice que para tener una condición cerrada los ejes de tres uniones consecutivas deben intersectarse en un punto común, o que tres ejes de unión cualesquiera que sean deben ser paralelos uno del otro. Ellos puntualizaron que el análisis de manipuladores seriales está relacionado con el análisis del desplazamiento de mecanismos espaciales de un sólo lazo; por lo tanto los resultados obtenidos usando todos los métodos de solución desarrollados para mecanismos espaciales de un solo lazo, pueden ser aplicados a manipuladores seriales. Las expresiones cerradas fueron obtenidas para diversos robots manipuladores de geometría espacial(Pieper 1968).
- (Roth et al 1973) concluyeron por razonamiento deductivo que hay más de 32 soluciones para la cinemática inversa de un manipulador con 6 uniones rotativas.

- (Freudenstein 1973) se refiere a la cinemática inversa de un manipulador de 6 uniones rotativas como el monte Everest del problema de la cinemática.
- (Duffy y Crane 1980) desarrollaron la solución de una expresión cerrada para un mecanismo espacial de un sólo lazo de 7 uniones rotativas. La solución fue obtenida en forma de un determinante de 16×16 en el cual cada uno de los elementos es un polinomio de segundo grado para una variable de unión; cuando fue desarrollado el determinante resultó una ecuación polinomial de 32 grado y esto comprobó el límite superior predicho por (Roth et al 1973).
- (Albala, 1982) usó la notación indicial para el caso general de un mecanismo espacial de 7 uniones rotativas y obtuvo la solución en forma de un determinante de 12×12 en donde cada elemento es un polinomio cuadrático en la mitad del ángulo de unión.
- (Tsai y Morgan 1985) usaron "the homotopy continuation method" para resolver la cinemática inversa de un manipulador de 6 uniones rotativas y encontró sólo 16 soluciones. De la continuación del método se es capaz de encontrar todas las posibles soluciones en un conjunto de ecuaciones polinomiales, ellos predijeron que un manipulador general de 6 uniones rotativas tiene como máximo 16 soluciones reales.
- (Primrose 1986) probó que el polinomio de 32° grado encontrado por Duffy y Crane contenía 16 soluciones extrañas.
- (Lee y Liang 1988a; Lee y Liang 1988b) encontraron un polinomio de 16° grado para la ecuación de desplazamiento entrada-salida de un mecanismo espacial con siete uniones rotativas.
- (Raghavan y Roth 1989; Raghavan y Roth 1990) usaron "the dyalictic elimination method" para encontrar un polinomio de 16° grado para la cinemática inversa en el caso general de seis uniones rotativas.

Para algunas aplicaciones, como la de soldar con arco, es necesario mover el órgano terminal de un punto a otro rápidamente, en este tipo de tareas donde se necesitan

movimientos rápidos la dinámica del robot juega un papel importante ya que este modelo a diferencia del modelo cinemático sí considera las fuerzas que originan el movimiento. El desarrollo del modelo dinámico (MD) es importante de diversas maneras: Primero, el modelo dinámico puede ser usado para la simulación en computadora de un sistema robótico; si examinamos el comportamiento del modelo bajo ciertas condiciones de operación, es posible predecir como se va a comportar el sistema robótico cuando se presenten. Segundo, puede ser usado para desarrollar estrategias de control sustitutas; un control sofisticado necesita usar un modelo dinámico real para encontrar las condiciones óptimas para el control, en operaciones de alta velocidad. Tercero, el análisis dinámico de un manipulador revela todas las reacciones de las uniones a fuerzas (y momentos) y esto es necesario para el diseño y tamaño de los eslabones, engranes y actuadores.

Para resolver el problema del modelo dinámico se pueden aplicar métodos como: las leyes de Newton y Euler, el principio de d'Alembert o Hamilton, las ecuaciones de movimiento de Lagrange (Goldstein 1980; Paul 1981), el método de Kane (Kane y Levinston 1980; Kane y Levinston 1985). Recientemente, se ha incrementado el interés en desarrollar programas computacionales para el análisis dinámico de sistemas mecánicos, dentro de los programas que usan la formulación Lagrangiana podemos encontrar: ADAMS, desarrollado por (Chace et al 1963) de la Universidad de Michigan y comercializado por Mechanical Dynamics, Inc. (1981); DADS, desarrollado por (Haug et al 1989) de la Universidad de Iowa y comercializado por Computer Aided Design Software, Inc. (1995); DYMAC, desarrollado por (Paul 1979) de la Universidad de Pennsylvania; IMP desarrollado por (Uiker 1965; Sheth y Uiker 1972) de la Universidad de Wisconsin. Otros programas como NBOD2 diseñado por NASA Goddard Space Flight Center (Frish 1974) y SD-EXACT diseñado por (Rosenthal y Sherman 1983), están basados en aproximaciones Eulerianas y el método de Kane; programas como estos son de gran ayuda para las simulaciones en computadora, sin embargo, no son aplicados para el control en tiempo real de un robot manipulador. Metodologías más eficientes desarrolladas específicamente para sistemas robóticos han sido propuestas; dentro de éstas se incluyen: las ecuaciones recursivas Lagrangianas (Hollerbachs 1980), las ecuaciones recursivas de Newton-Euler (Armstrong 1979; Luh et al 1980;

Orin et al 1979) y las ecuaciones generalizadas de d'Alembert (Fu et al 1987; Lee et al 1983).

En el MD de un manipulador aparecen principalmente cuatro términos: las fuerzas debidas a la inercia, las fuerzas centrífugas y de Coriolis, el término de fuerzas o pares gravitacionales y el término debido a las fuerzas externas, entendiendo esto último como el par aplicado a cada unión. El apartado de pares gravitacionales cobra especial interés en nuestro estudio, debido a que una vez modelado este término se puede emplear para compensar el efecto de la gravedad en controladores, haciendo con esto que el controlador tenga un mejor desempeño ya que al diseñar la ley de control sin el término de la gravedad ésta es simplificada.

El laboratorio de mecatrónica de la Universidad Autónoma de Querétaro cuenta con un robot industrial de 6 grados de libertad, producido por CLOOS modelo Romat 56, las características técnicas de este manipulador son las siguientes: sus uniones son rotativas, es decir, el desplazamiento entre cada uno de los eslabones es angular; el movimiento de sus eslabones es producido por medio de motores de corriente directa acoplados con juegos de engranes; su estructura se asemeja a la de un robot tipo PUMA (Programmable Universal Manipulator for Assembly); su peso es de 110 Kg. Su altura máxima (con el brazo extendido verticalmente) es de 2.1 mts; en su órgano final se anexa la herramienta con la cual va a realizar la tarea programada y cuyo peso no puede exceder 5 Kg.; el robot cuenta con 6 servomotores de corriente directa para el control de cada eslabón, estos tienen instalados codificadores (*encoders*) ópticos de 1024 pulsos por revolución, a su vez cada motor cuenta con un freno mecánico el cual se controla con una señal digital de 24 voltios; cada motor se controla a través de un servoamplificador cuya función es amplificar la señal de control de la computadora de ± 10 voltios a una señal de intensidad de corriente, los servoamplificadores están programados en lazo de corriente. Este manipulador hasta el momento no cuenta con ningún estudio¹ que describa la posición y la orientación de órgano terminal dentro de su espacio de trabajo, viendo esta necesidad in-

¹Al momento de iniciar con este trabajo no se había reportado ningún estudio con el manipulador ROMAT 56 de la UAQ

investigadores de la maestría en ciencias en instrumentación y control automático iniciaron la creación de un grupo de estudio para desarrollar un estudio cinemático del robot, el cual tiene como objetivo obtener el modelo cinemático. El estudio debe incluir la validación de la cinemática directa y ayudará a saber la magnitud de los errores existentes. Una vez determinada la precisión del robot se pueden aplicar algoritmos para su calibración, en la literatura existen una gran diversidad de trabajos en este apartado, a continuación se mencionan algunos: (Hayati y Mirmirani 1985) proponen un método general para estimar el error en los eslabones de cualquier manipulador serial, en este método solo requiere medir la posición del órgano terminal. El algoritmo de calibración obtenido fue probado a nivel simulación. (Kirchner et al 1987), proponen un algoritmo de calibración, en el cual estiman incrementos en los valores de los parámetros del modelo de Denavit y Hartenberg; (Renders et al 1991) proponen un nuevo método de calibración incluyendo un algoritmo nuevo para identificar las diferencias entre los valores geométricos nominales y los valores geométricos reales; (Young et al 1996) proponen un modelo con los parámetros de Denavit-Hartenberg variables, así con esto, encuentran la variación en los parámetros del error para luego estimar el error en el espacio cartesiano y con esto encontrar la cinemática directa; (Rönnin y Korzun 1997) desarrollaron un método para calibrar robots, este método se enfoca a la calibración en el seguimiento de trayectorias; (Xu y Mills 1999) proponen una nueva aproximación para la calibración de robots basada en los datos de tres sensores, sin embargo el trabajo se enfoca a la adquisición de los datos; (Fraczek y Busko 1999) proponen un método de calibración para sistemas multirobóticos usando teodolitos electrónicos; (Abderrahim y Whittaker 2000) proponen un método de identificación directa de los parámetros del modelo de Denavit-Hartenberg usando el modelo de Stone y combinándolo con la metodología de Hayati.

Aunque exista una estrecha relación entre la calibración del robot y la precisión del mismo, el problema de validación debe ser resuelto antes, ya que una vez validado el modelo se pueden emplear algún método de calibración para corregir el error que se genera sea geométrico o no geométrico [Judd y Knasinski 1990 en (Young et al 1996)] y con esto se mejora la precisión. Para medir la posición del órgano terminal existen varios dispositivos

como son teodolitos, interferómetros, máquinas de coordenadas, también (Yuan y Yu 1999) desarrollaron un dispositivo de medición sin contacto para determinar la posición y orientación del órgano terminal, consistente en un sensor óptico y tres rastreadores láser.

Otro tema de interés para nosotros es el modelo dinámico del robot, sin embargo, en tareas de soldadura los movimientos del robot se pueden considerar lentos (Nof 1999) por lo que se puede desprestigiar los efectos inerciales, centrífugos y de Coriolis (Spong y Vidyasagar 1989; Asada y Slotine 1986), así el presente estudio se centra en desarrollar el modelo de pares gravitacionales(MPG) y su validación.

Capítulo 3

Cinemática directa

La cinemática de un manipulador trata del estudio analítico de la geometría del movimiento de éste con respecto a un marco coordinado de referencia fijo, sin considerar las fuerzas o momentos que originan el movimiento. Así, la cinemática se interesa por la descripción del desplazamiento espacial del manipulador, en particular de las relaciones existentes de la posición de las variables de unión con la posición y orientación del órgano terminal del manipulador.

La cinemática directa trata de obtener la posición y orientación del órgano terminal a partir del conocimiento de las variables de unión, esto es, una vez que se conoce el valor estas variables se puede determinar a través de la CD, en qué lugar del espacio y con qué orientación se encuentra el órgano terminal del manipulador, referido al marco de coordenadas fijo.

Para propósitos de análisis de la cinemática, se puede pensar en un robot como un conjunto de eslabones rígidos conectados por articulaciones. Las articulaciones pueden ser simples, como una unión rotativa o como una prismática ¹, o más complejas como una unión esférica; las articulaciones con más de un grado de libertad, como las uniones esféricas y las de tornillo, pueden ser tratadas como una sucesión de articulaciones simples con esto se puede cuantificar el movimiento de cada eslabón, con el ángulo de rotación

¹Una unión rotativa tiene un desplazamiento angular y la unión prismática tiene un desplazamiento lineal, ambos desplazamientos relativos a un solo eje

para el caso de una unión rotativa o el desplazamiento para una unión prismática. El objetivo del análisis cinemático directo es determinar los efectos acumulados del conjunto de variables de las uniones del robot; para hacerlo de una manera sistemática se tienen que adoptar ciertas convenciones ya establecidas y que son muy usadas en el campo de la robótica como se puede ver a continuación.

Primero se considera que un robot está compuesto por $n+1$ eslabones numerados de 0 a n iniciando en la base del robot la cual es el eslabón 0, las uniones se numeran de 1 hasta n donde la i -ésima unión es un punto en el espacio que une al eslabón $i - 1$ con el eslabón i . Ahora asignamos un marco coordenado a cada eslabón comenzando por la base, este será nuestro marco coordenado de referencia, de tal forma que el i -ésimo marco corresponde al i -ésimo eslabón; con esto decimos que, cualquier movimiento que el robot hace, las coordenadas de cada punto en el eslabón i son constantes cuando son expresadas en el i -ésimo marco coordenado.

Ahora se supone que A_i es una matriz homogénea que transforma las coordenadas de un punto del marco coordenado i al marco $i - 1$. La matriz A_i varía conforme el robot cambia de configuración y debido a la suposición de que todas las uniones son simples, esta matriz depende únicamente de una variable, llamada q_i ; esto es,

$$A_i = A_i(q_i) \quad (3.0.1)$$

Ahora la matriz homogénea que transforma las coordenadas de un punto del marco coordenado j al marco coordenado i es llamada matriz de transformación y comúnmente denotada como (Spong y Vidyasagar 1989; Barrientos et. al. 1997) T_i^j , donde:

$$\begin{aligned} T_i^j &= A_{i+1}A_{i+2} \dots A_{j-1}A_j, \text{ si } i < j \\ T_i^j &= I, \text{ si } i = j \\ T_i^j &= (T_i^j)^{-1}, \text{ si } j > i \end{aligned} \quad (3.0.2)$$

Debido a la forma en que se han definido los marcos coordenados, se sigue que la posición de cualquier punto que señale el órgano terminal, expresada en el sistema n , es una constante independiente de la configuración del robot. Se señala la posición y la

orientación del órgano terminal con respecto al marco coordenado base por un vector de 1×3 , d_0^n y una matriz de rotación R_0^n , y se define la matriz homogénea:

$$H = \begin{bmatrix} R_0^n & d_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.0.3)$$

entonces la posición y la orientación del órgano terminal en el marco base está dado por:

$$H = T_0^n = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n) \quad (3.0.4)$$

cada transformación homogénea A_i tiene la siguiente forma:

$$A_i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^j & d_{i-1}^j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1 \dots n \quad (3.0.5)$$

así,

$$T_i^j = A_{i+1} \cdots A_j = \begin{bmatrix} R_i^j & d_i^j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1 \dots n \quad (3.0.6)$$

La matriz R_i^j expresa la orientación del marco coordenado j relativo al marco coordenado i y es dado por las partes rotacionales de las matrices A como

$$R_i^j = R_i^{i+1} \cdots R_{j-1}^j \quad (3.0.7)$$

los vectores d_i^j son dados por las fórmulas:

$$d_i^j = d_i^{j-1} + R_i^{j-1} d_{j-1}^j \quad (3.0.8)$$

Con las expresiones adoptadas hasta este momento es posible obtener la cinemática directa de cualquier manipulador; sin embargo, el algoritmo de Denavit-Hartenberg brinda una considerable simplificación en la obtención del modelo cinemático.²

3.1 Nomenglatura de Denavit-Hartenberg.

Una convención comúnmente usada para seleccionar los marcos coordenados de referencia en aplicaciones de robótica es la nomenglatura de Denavit-Hartenberg (D-H); en ésta, cada

²Si el lector está interesado en tener mayor información de los cálculos aquí mostrados puede referirse a (Spong y Vidyasagar 1989; Angeles, J. 1997) en donde son obtenidos.

transformación homogénea A_i se representa como el producto de cuatro transformaciones básicas:

$$\begin{aligned}
 A_i &= Rot_{z,\theta_i} Tras_{z,d_i} Tras_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i} & (3.1.1) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde las cuatro cantidades θ_i , a_i , d_i , α_i son parámetros del eslabón i y la unión i . De esta manera la matriz A_i es una función de una sola variable, θ_i para una unión rotativa y d_i para una unión prismática, ya que tres de las cuatro cantidades son constantes y están dadas por la arquitectura del eslabón.

Una matriz homogénea arbitraria puede ser caracterizada con la ayuda de seis parámetros (Spong y Vidyasagar 1989), tales como, las tres componentes del vector de desplazamiento d y los tres ángulos de Euler correspondientes a la matriz de rotación R ; en la representación D-H hay solo cuatro parámetros, esto es posible debido a que mientras el marco coordenado i es seleccionado para estar en el eslabón i , se cuenta con una considerable libertad para escoger el origen y los ejes del marco coordenado; así, gracias a esta opción de seleccionar el origen y los ejes se puede reducir el número de parámetros de seis a cuatro.

Lo obtención de la CD se inicia determinando las transformaciones homogéneas como 3.1.1; supongamos que se tienen dos marcos coordenados denotados por 0 y 1, respectivamente, tenemos entonces que existe una matriz única de transformación homogénea que relaciona los dos sistemas, si estos sistemas tienen alguna de estas características:

(DH1) El eje x_i es perpendicular al eje z_0 .

(DH2) El eje x_i interseca al eje z_0 .

se puede afirmar que existen cantidades únicas a, d, θ, α tal que se cumpla 3.1.1; donde θ y α son ángulos múltiplos de 2π ³. La interpretación física de las cuatro cantidades es la siguiente: el parámetro a es la distancia entre los ejes z_0 z_1 , medida a lo largo del eje x_1 ; el ángulo α es al ángulo entre los ejes z_0 , y z_1 , medido en un plano normal a x_1 , el sentido positivo de α es determinado de z_0 a z_1 por la regla de la mano derecha; el parámetro d es la distancia entre el origen o_0 y la intersección del eje x_1 con el eje z_0 , medido a lo largo del eje z_0 .

Para un robot, los marcos coordenados se pueden escoger de manera que cumplan con DH1 y DH2, esto no implica que los marcos seleccionados sean únicos. Se comienza con identificar el eje de cada una de las uniones y etiquetarlos como $z_0 \dots, z_{n-1}$; z_i es el eje de rotación si la unión es rotativa o de traslación si la unión es prismática. Se selecciona el origen, o_0 , del marco coordenado base a lo largo del eje z_0 ; x_0 y y_0 es asignado a nuestra conveniencia.

Para fijar el marco coordenado i es necesario considerar dos casos: (i) los ejes z_{i-1} y z_i son no coplanares; (ii) z_{i-1} y z_i son coplanares. Se toma el primer caso, existe un único segmento de línea perpendicular que une ambos ejes y es mínima; la línea que contiene la normal común a z_{i-1} y z_i la definimos como x_i y el punto donde interseca a z_i será el origen o_i ; para complementar el marco coordenado seleccionamos el eje y_i con la regla de la mano derecha. El presentarse el segundo caso quiere decir que los ejes, z_{i-1} y z_i , son paralelos o que se intersecan; si son paralelos, existe un número infinito de normales comunes entre ellos y la condición (DH-1) no especifica x_i completamente; en este caso es seleccionado el origen o_i para que se encuentre en la articulación i de forma que x_i sea la normal de z_{i-1} la cual pasa a través de o_i ; se pudiera seleccionar la normal que pasa por o_{i-1} como el eje x_i , en este caso d_i valdría cero; el que los ejes z_i y z_{i-1} sean paralelos implica que α_i sea cero; una vez encontrado el eje x_i se define el eje y_i por la regla de la mano derecha. Finalmente, se considera el caso donde z_i interseca a z_{i-1} , cuando esto se presenta se selecciona x_i normal al plano formado por z_i y z_{i-1} ; Sin embargo, cualquier

³La demostración de tal afirmación puede verificarse en (Spong y Vidyasagar 1989)pp 66-68.

punto conveniente a lo largo del eje z_i basta, en esta situación el parámetro a_i es cero.

En muchos manipuladores el movimiento de la unión es una rotación θ_n del órgano terminal y los ejes de las uniones finales, z_{n-1} y z_i coinciden; este hecho hace que la transformación entre los dos marcos coordenados sea solamente una traslación a lo largo de z_{i-1} una distancia d_n seguida por una rotación de θ_n radianes sobre z_{i-1} .

El método descrito se resume en una serie de pasos que son suficientes para resolver la cinemática directa de cualquier manipulador:

1. Localizar y numerar los ejes de unión z_0, \dots, z_{n-1} .
2. Establecer el marco coordenado de referencia; localizar el origen a lo largo del eje z_0 y completar el sistema por la regla de la mano derecha.
3. Localizar el origen o_i donde la normal común a z_i y z_{i-1} interseca a z_i ; si z_i interseca a z_{i-1} localizar o_i en la intersección; si z_i y z_{i-1} son paralelas localizar o_i sobre la unión i .
4. Establecer x_i a lo largo de la normal común entre z_{i-1} y z_i sobre o_i , o en la dirección normal al plano $z_{i-1} - z_i$ si z_{i-1} y z_i se intersecan.
5. Establecer y_i para completar el sistema de acuerdo con la regla de la mano derecha.
6. Establecer el marco del órgano terminal de la manera mas conveniente, ayudado de la regla de la mano derecha ⁴.
7. Realizar una tabla que contenga los parámetros de los eslabones del robot $a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i$.

a_i es la distancia a lo largo del eje x_i de o_i hasta la intersección de los ejes x_i y a_{i-1} .

d_i es la distancia a lo largo de z_{i-1} de o_{i-1} a la intersección de x_i y z_{i-1} ; d_i es variable si la unión i es prismática.

α_i es el ángulo entre z_{i-1} y z_i medido alrededor de x_i .

⁴Si el órgano terminal fuera un sujetador (*gripper*), referirse a (Spong y Vidyasagar 1989)pp.71-72.

θ_i es el ángulo entre x_{i-1} y x_i medido alrededor de z_{i-1} ; θ_i es variable si la unión es rotativa.

8. Formar las matrices de transformación homogénea A_i , sustituyendo los parámetros de la tabla en 3.1.1.
9. Formar $T_0^n = A_1 \cdots A_n$; esto da la posición y orientación del marco del órgano terminal expresado en coordenadas del marco de referencia.

3.1.1 Obtención de la cinemática directa (CD)

Empleando el método propuesto por Denavit-Hartenberg, se asignan los marcos de coordenadas en el manipulador de la siguiente manera.

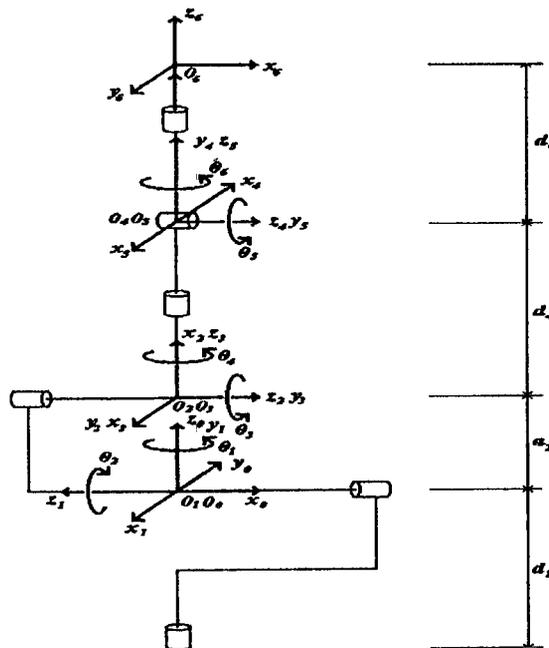


Figura 3.1: Asignación de los ejes coordenados

Una vez que se han asignado los marcos coordenados de referencia en las uniones, es posible obtener los parámetros de Denavit-Hartenberg(D-H) quedando estos como sigue:

<i>Eslabón</i>	a_i	d_i	α_i	θ_i
1	0	0	90	θ_1
2	a_2	0	180	θ_2
3	0	0	90	θ_3
4	0	d_4	90	θ_4
5	0	0	90	θ_5
6	0	d_6	0	θ_6

Tabla 3.1: Valor de los parámetros Denavit-Hartenberg

Con los parámetros anteriores se obtienen las matrices de transformaciones homogéneas. La función de estas matrices es relacionar los marcos coordenados definidos en el manipulador de forma que al aplicar una serie de transformaciones, es decir pasar de un marco coordenado a otro, es posible obtener la posición y la orientación del órgano terminal en términos del marco coordenado fijo. Las matrices quedan de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & 0 & -\cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & \sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & 0 & -\cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & 0 & -\cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_6 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para obtener la CD, las matrices anteriores se multiplican y obtenemos una matriz que es función de las variables de unión; esta matriz se compone de una submatriz de rotación (3×3), un vector de (3×1) que nos indica la posición del órgano terminal, un vector (1×3) que representa la perspectiva y un escalar -en este caso igual a uno- que representa el factor de escala. Estos dos últimos son útiles en simulación.

$$T_0^6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad (3.1.2)$$

$$T_0^6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^6 & d_0^6 \\ 0_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

Donde:

$$r_{11} = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 + s_2 s_3 c_1 c_4 c_5 c_6 - s_1 s_4 c_5 c_6 + s_3 s_5 c_1 c_2 c_6 - s_2 s_5 c_1 c_3 c_6 + s_4 s_6 c_1 c_2 c_3 + s_2 s_3 s_4 s_6 c_1 + s_1 s_6 c_4 \quad (3.1.4)$$

$$r_{21} = s_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 + s_1 s_2 s_3 c_4 c_5 c_6 + s_4 c_1 c_5 c_6 + s_1 s_3 s_5 c_2 c_6 - s_1 s_2 s_5 c_3 c_6 + s_1 s_4 s_6 c_2 c_3 + s_1 s_2 s_3 s_4 s_6 - s_6 c_1 c_4 \quad (3.1.5)$$

$$r_{31} = s_2 c_3 c_4 c_5 c_6 - s_3 c_2 c_4 c_5 c_6 + s_2 s_3 s_5 c_6 + s_5 c_2 c_3 c_6 + s_2 s_4 s_6 c_3 - s_3 s_4 s_6 c_2 \quad (3.1.6)$$

$$r_{41} = 0 \quad (3.1.7)$$

$$r_{12} = -s_6 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 - s_2 s_3 s_6 c_1 c_4 c_5 + s_1 s_4 s_6 c_5 - s_3 s_5 s_6 c_1 c_2 + s_2 s_5 s_6 c_1 c_3 + s_4 c_1 c_2 c_3 c_6 + s_2 s_3 s_4 c_1 c_6 + s_1 c_4 c_6 \quad (3.1.8)$$

$$r_{22} = -s_1 s_6 c_2 c_3 c_4 c_5 - s_1 s_2 s_3 s_6 c_4 c_5 - s_4 s_6 c_1 c_5 - s_1 s_3 s_5 s_6 c_2 + s_1 s_2 s_5 s_6 c_3 + s_1 s_4 c_2 c_3 c_6 + s_1 s_2 s_3 s_4 c_6 - c_1 c_4 c_6 \quad (3.1.9)$$

$$r_{32} = -s_2 s_6 c_3 c_4 c_5 + s_3 s_6 c_2 c_4 c_5 - s_2 s_3 s_5 s_6 - s_5 s_6 c_2 c_3 + s_2 s_4 c_3 c_6 - s_3 s_4 c_2 c_6 \quad (3.1.10)$$

$$r_{42} = 0 \quad (3.1.11)$$

$$r_{13} = s_5 c_1 c_2 c_3 c_4 + s_2 s_3 s_5 c_1 c_4 - s_1 s_4 s_5 - s_3 c_1 c_2 c_5 + s_2 c_1 c_3 c_5 \quad (3.1.12)$$

$$r_{23} = s_1 s_5 c_2 c_3 c_4 + s_1 s_2 s_3 s_5 c_4 + s_4 s_5 c_1 - s_1 s_3 c_2 c_5 + s_1 s_2 c_3 c_5 \quad (3.1.13)$$

$$r_{33} = s_2 s_5 c_3 c_4 - s_3 s_5 c_2 c_4 - s_2 s_3 c_5 - c_2 c_3 c_5 \quad (3.1.14)$$

$$r_{43} = 0 \quad (3.1.15)$$

$$r_{14} = d_6 s_5 c_1 c_2 c_3 c_4 + d_6 s_2 s_3 s_5 c_1 c_4 - d_6 s_1 s_4 s_5 - d_6 s_3 c_1 c_2 c_5 + d_6 s_2 c_1 c_3 c_5 + d_4 s_3 c_1 c_2 - d_4 s_2 c_1 c_3 + a_2 c_1 c_2 \quad (3.1.16)$$

$$r_{24} = d_6 s_1 s_5 c_2 c_3 c_4 + d_6 s_1 s_2 s_3 s_5 c_4 + d_6 s_4 s_5 c_1 - d_6 s_1 s_3 c_2 c_5 + d_6 s_1 s_2 c_3 c_5 + d_4 s_1 s_3 c_2 - d_4 s_1 s_2 c_3 + a_2 s_1 c_2 \quad (3.1.17)$$

$$r_{34} = d_6 s_2 s_5 c_3 c_4 - d_6 s_3 s_5 c_2 c_4 - d_6 s_2 s_3 c_5 - d_6 c_2 c_3 c_5 + d_4 s_2 s_3 + d_4 c_2 c_3 + a_2 s_2 \quad (3.1.18)$$

$$r_{44} = 1 \quad (3.1.19)$$

Nota: c_i y s_i , denotan $\cos \theta_i$ y $\sin \theta_i$ respectivamente; los elementos r_{14} , r_{24} y r_{34} componen el vector que nos define la posición del órgano terminal.

Una manera de definir la orientación del órgano terminal con respecto al marco de coordenadas fijo es a través de la matriz Roll-Pitch-Yaw. La importancia de esta matriz radica en que a través de tres rotaciones sucesivas sobre el marco fijo, se puede llegar a la orientación del órgano terminal; así, habrá que igualar la matriz roll-pitch-yaw a la matriz de rotación obtenida con la CD, y con esto encontrar los tres ángulos que describen la orientación del órgano terminal.

$$\begin{aligned}
 R_0^{\delta} &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

Igualando elemento a elemento se puede obtener el ángulo θ como:

$$\sin \theta = -r_{31} \quad \cos \theta = \pm \sqrt{1 - r_{31}^2} \quad \theta = \arctan(\pm \sqrt{1 - r_{31}^2}, -r_{31}) \tag{3.1.21}$$

por otro lado el cálculo de los ángulos ϕ y ψ se puede separar en dos casos:

(a) Si $\cos \theta$ es diferente de cero:

$$\begin{aligned}
 \phi &= \arctan(r_{11}, r_{21}) & \psi &= \arctan(r_{33}, r_{32}) & \cos \theta &> 0 \\
 \phi &= \arctan(-r_{11}, -r_{21}) & \psi &= \arctan(-r_{33}, -r_{32}) & \cos \theta &< 0
 \end{aligned}$$

(b) Si $\cos \theta$ es igual a cero pueden ocurrir dos situaciones:

$$\begin{aligned}
 \text{(i) } \sin \theta &= 1: \phi = \psi + \arctan(r_{22}, -r_{12}) \\
 \text{(ii) } \sin \theta &= -1: \phi = -\psi + \arctan(r_{22}, -r_{12})
 \end{aligned}$$

3.2 Validación de la CD

La validación consiste proponer ángulos para cada unión del robot, medir la posición física del órgano terminal y compararla con los resultados obtenidos con la CD. Para llevar a cabo la validación del modelo se definió la siguiente estrategia:

- Medición de la longitud de los eslabones.
- Ubicar el marco coordenado de referencia.
- Obtener el máximo ángulo de giro de cada unión.
- Encontrar una relación entre la lectura de los encoders y el ángulo de giro de cada unión.
- Comprobar las suposiciones hechas al obtener la CD.
- Programar la CD.
- Hacer mediciones.

se incluye la medición de los eslabones y el máximo ángulo de cada unión debido a que el robot con el que se está desarrollando este proyecto, tiene bastante tiempo de haber salido al mercado por lo mismo la información que tenemos sobre él es casi nula y esto dificulta un poco este estudio.

3.2.1 Longitud de los eslabones

Para obtener la longitud de los eslabones se hicieron mediciones sobre la estructura del robot midiendo la distancia entre los ejes de giro.

<i>Eslabón</i>	<i>Longitud(mm)</i>
d_1	900
a_2	432
d_4	428
d_6	067

Tabla 3.2: Longitud de los eslabones del robot ROMAT 56

3.2.2 Marco de referencia

Al seleccionar los marcos de referencia en la obtención de la CD, el origen del marco fijo quedó dentro de la estructura del robot -en la intersección de los ejes de giro de los eslabones uno y dos- esta localización del origen es inaccesible físicamente por lo que al ubicar el marco coordenado se hará con las proyecciones de los ejes sobre el suelo.

Colocamos un péndulo en el órgano terminal del robot y fue hecha la proyección del mismo sobre el suelo, se cambió la configuración del robot rotando los ejes 2 y 3, puesto que el eslabón uno no se movió el punto que fue obtenido nuevamente está localizado sobre una misma recta que el punto anterior, si se extiende esta recta hasta la base del robot se obtiene un eje que formará parte del marco coordenado buscado; rotando el eslabón uno 180° , se repite lo hecho anteriormente y es obtenida la otra parte del eje; para trazar el eje perpendicular al obtenido, el robot es girado 90° sobre el eje uno y al igual que en el caso anterior se obtiene una parte del eje, sin embargo, para obtener la parte restante del eje será empleada otra metodología ya que las limitaciones físicas del eslabón uno no permiten hacerlo. Lo que se hace es trazar dos rectas paralelas las cuales pasan a 45° de cada eje perpendicular que se busca, con esto se obtienen dos puntos que serán unidos con una recta y se prolongará hasta la base del robot, obteniendo con esto el eje restante.

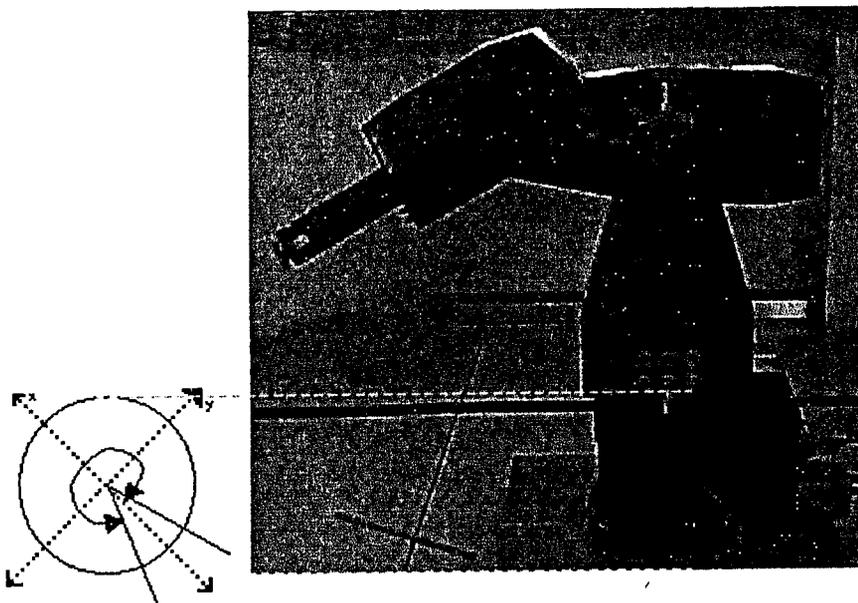


Figura 3.2: Ubicación del marco de referencia y medición del ángulo en el eslabón uno

3.2.3 Máximo ángulo de giro de los eslabones

Para obtener el máximo ángulo de giro de los eslabones, fueron empleadas varias metodologías. Para la obtención del ángulo correspondiente al eslabón uno se hizo una marca en un extremo del eslabón, fue llevado al límite el eslabón y fue marcada la base de manera que coincidiera con la que ya tenía éste, se llevo al otro extremo el eslabón y fue hecha la otra marca. Teniendo estas marcas se trazaron líneas que fueran al eje de rotación, con estas líneas y la ayuda de un transportador conocimos el ángulo buscado.

Para medir el ángulo correspondiente al segundo y tercer eslabón fue acondicionado un transportador adicionándole un péndulo; de esta forma es posible medir el ángulo que forma el eslabón con la vertical, de modo que fueron llevados los eslabones a sus extremos y fueron medidos los ángulos respectivos; para los eslabones cuatro, cinco y seis se empleo el método usado en el uno.

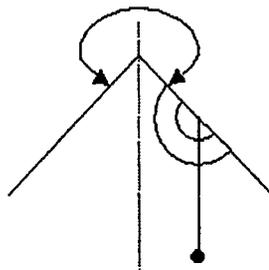


Figura 3.3: Medición del ángulo, eslabón dos y tres

<i>Eslabón</i>	<i>Angulo medido</i>
1	328°
2	260°
3	280°
4	333°
5	197°
6	370°

Tabla 3.3: Angulos máximos de giro

3.2.4 Relación de cuentas-grados

Para obtener esta relación nos apoyamos en el software que acompaña la tarjeta de control de movimiento del robot ⁵, ya que nos permite visualizar la cuenta de cada codificador en el monitor de la computadora. El número de cuentas por eslabón es la siguiente:

<i>Eslabón</i>	<i>Número de cuentas</i>	<i>Relación</i>
1	51645	1° – 174.79cts
2	77636	1° – 177.24cts
3	40762	1° – 220.13cts
4	59021	1° – 157.45cts
5	34433	1° – 145.57cts
6	81451	1° – 298.60cts

Tabla 3.4: Número de cuentas y relación cuentas/grados de los eslabones

En la tabla 3.4 se puede observar la relación existente grados/cuentas.

3.2.5 Suposiciones

Una de las suposiciones que fueron hechas al obtener la CD fue considerar colineales los ejes de rotación de los eslabones 1 y 4; la comprobación fue realizada, como se ve en las fotografías, al pasar el péndulo del centro del órgano terminal al eje de rotación del eslabón 1 y así ver la desviación que éste sufría, se puede apreciar que no hubo tal desviación así que la suposición es correcta.

⁵Tarjeta de control de movimiento "PMAC PC"

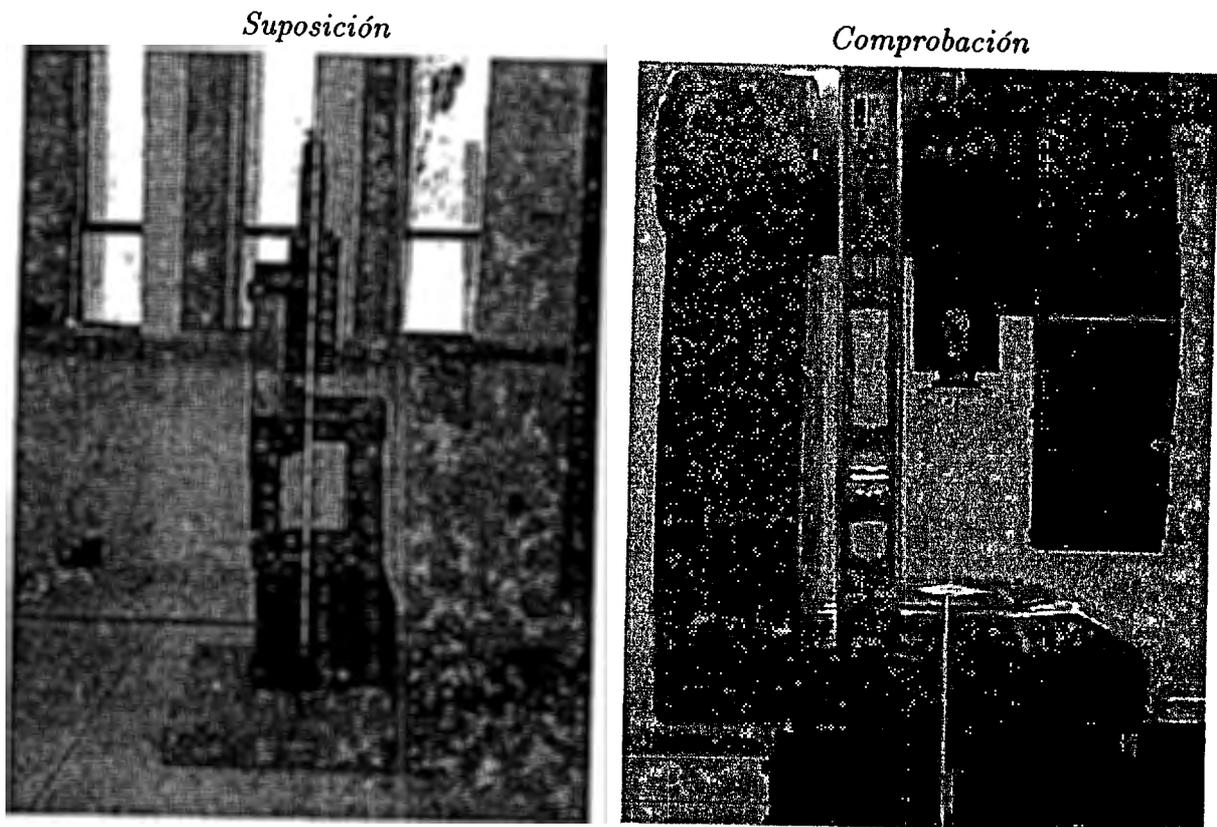


Figura 3.4: Suposiciones

3.2.6 Programa

La CD fue programada en *Matlab*⁶, una vez que son introducidos los ángulos de cada unión el programa calcula la posición del órgano terminal, el listado del programa es presentado en el anexo uno.

3.2.7 Mediciones

Para hacer mediciones se siguió la siguiente metodología:

- A través de la PC le era ordenado al manipulador la posición en la cual deberían de estar las uniones.

⁶Paquete computacional de cálculo y simulación

- Se usaba un péndulo para proyectar en el plano x-y, sobre el suelo, la posición del órgano terminal y era marcada.
- Se media la posición proyectada con respecto a los ejes del marco de coordenadas fijo.

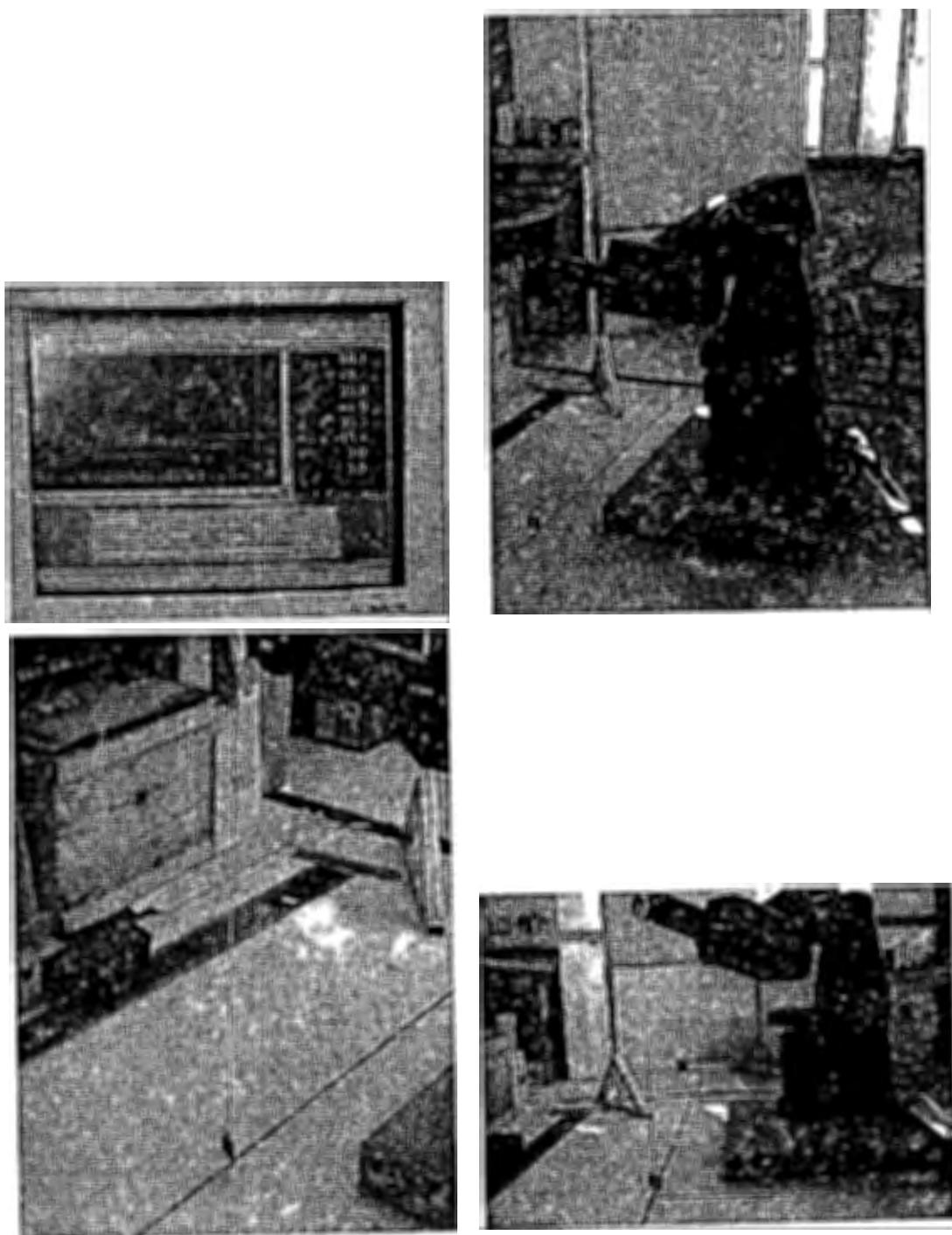


Figura 3.5: Método de validación del MCD

3.3 Resultados

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6^\circ$	P_x	P_y	P_z^*
	P_{xm}	P_{ym}	P_{zm}^*
-90, 0, 90, 0, 180, 0	0.000	-0.927	0.000
	0.0000	-0.923	0.000
30, 0, 90, 0, 180, 0	0.803	0.463	0.000
	0.795	0.464	0.000
-90, 0, 90, 0, 180, 0	0.000	-0.927	0.000
	0.000	-0.923	0.000
0, 0, 90, 0, 180, 0	0.927	0.000	0.000
	0.936	0.000	0.038
0, 0, 30, 0, 180, 0	0.678	0.000	0.430
	0.681	0.000	0.435
90, 60, 90, 0, 180, 0	0.000	0.463	0.803
	0.000	0.463	0.813
0, 180, 90, 0, 90, 0	-0.860	0.000	0.067
	-0.857	0.000	0.070
0, 180, 0, 0, 90, 0	-0.499	0.000	-0.428
	-0.497	0.000	-0.428
0, 180, 0, 0, 180, 0	-0.432	0.000	-0.495
	-0.430	0.000	-0.495
90, 180, 90, 0, 180, 0	0.000	-0.927	0.000
	0.000	-0.918	-0.017

Tabla 3.5: Resultados de la validación; °, unidades en grados; *, unidades en mts.

Capítulo 4

Cinemática inversa

El control de robots manipuladores en la mayoría de los casos basa su funcionamiento en controlar las articulaciones, sin embargo los objetos que manipulan y las tareas que se les asignan están en términos del espacio cartesiano; esto conduce a tener un modelo que nos indique el valor de las variables de unión para una posición y orientación deseadas del órgano terminal en términos del espacio en el cual realizamos las tareas. A diferencia de la CD en donde tenemos un método sistemático para obtenerlo de forma cerrada, la cinemática inversa tiene varias soluciones o puede darse el caso de que no tenga ninguna; en estos casos una solución cerrada permite incluir determinadas reglas o restricciones que aseguren que la solución obtenida sea la más adecuada de entre las posibles (como restricciones podemos incluir los límites físicos del robot).

A pesar de las dificultades comentadas anteriormente, la mayoría de los manipuladores poseen características cinemáticas relativamente simples que facilitan de alguna manera la solución del problema cinemático inverso; como ejemplo se puede mencionar que muchos robots tienen en los primeros tres grados de libertad (GDL) una estructura planar, así, los tres primeros eslabones quedan en un solo plano facilitando la solución del problema; otra característica que puede ser encontrada en algunos manipuladores es que las tres últimas uniones, encargadas de dar la orientación al órgano terminal, se intersecan en un punto común ayudando a la resolución del modelo.

Para resolver la cinemática inversa de un manipulador se pudiera resolver un

matriz de transformación homogénea

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.0.1)$$

y encontrar las soluciones (o alguna) de la ecuación

$$T_0^n(q_1, \dots, q_n) = H \quad (4.0.2)$$

donde:

$$T_0^n(q_1, \dots, q_n) = A_1 \dots A_n \quad (4.0.3)$$

de la ecuación 4.0.2 resultan 12 ecuaciones no lineales que contienen n variables desconocidas; se pueden representar como

$$T_{ij}(q_1, \dots, q_n) = h_{ij}, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, 4 \quad (4.0.4)$$

donde T_{ij} , h_{ij} son referidas a las 12 ecuaciones de T_0^n y H , respectivamente, que no son triviales (la última columna de T_0^n y H es un vector $(0, 0, 0, 1)$, por lo tanto cuatro de las doce ecuaciones de 4.0.2 son triviales).

Obtener la CI por este método es complicado, porque no se tiene la certeza de llegar a encontrar cuando menos una de las soluciones y nada asegura que las soluciones existan; aún si las soluciones existieran se tiene que resolver doce ecuaciones fuertemente no lineales, lo cual también es muy complicado.

4.0.1 Desacoplamiento cinemático

Como se apreció en la sección anterior el problema cinemático inverso es en general complicado, sin embargo, en manipuladores de seis grados de libertad que tienen la característica que los ejes de las últimas tres articulaciones se intersecan en un punto común, llamado centro de la muñeca del robot, el problema puede ser separado en dos más simples conocidos como problema de posición y problema de orientación. El primer problema consiste en encontrar la posición del centro de la muñeca; en el problema restante se deberá encontrar la orientación de la misma.

Para concretizar se supondrá que se tienen exactamente seis grados de libertad y que los últimos tres ejes se intersecan en un punto o ; ahora será expresada la ecuación 4.0.2 como dos conjuntos de ecuaciones que representan las ecuaciones de rotación y posición.

$$R_0^6(q_1, \dots, q_6) = R \quad (4.0.5)$$

$$d_0^6(q_1, \dots, q_6) = d \quad (4.0.6)$$

donde d y R son la posición y orientación deseada del marco coordenado del órgano terminal.

El hecho de que la muñeca sea esférica significa que los ejes z_4 , z_5 y z_6 son intersecados en o y que los orígenes o_4 y o_5 asignados en la convención D-H serán localizados en el centro de la muñeca o ; algunas veces o_3 estará en o , sin embargo, esto no es necesario para el siguiente desarrollo. Lo importante de esta suposición es el hecho de que el movimiento de los últimos tres eslabones del manipulador no modifican la posición del centro de la muñeca; como podemos ver la posición del centro de la muñeca es una función de las primeras tres variables de unión. Así, el origen del marco coordenado del órgano terminal o_6 es una traslación de una distancia d_6 a lo largo del eje z_5 partiendo del centro de la muñeca, el vector o_6 en el marco base es:

$$o_6 - o = -d_6 Rk \quad (4.0.7)$$

Sea Pc el vector del origen del marco base al centro de la muñeca. Para tener el órgano terminal en un punto d con una orientación dada por $R = (r_{ij})$, es necesario y suficiente que el centro de la muñeca o se localice en el punto:

$$Pc = d - d_6 Rk \quad (4.0.8)$$

y la orientación del marco $o_6x_6y_6z_6$ con respecto a la base está dado por R . Si las componentes del vector de posición del órgano terminal son denotadas como d_x , d_y , d_z y las componentes del centro de la muñeca Pc las denotamos como p_x , p_y , p_z , entonces de 4.0.8 nos da la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x - d_6 r_{13} \\ d_y - d_6 r_{23} \\ d_z - d_6 r_{33} \end{bmatrix} \quad (4.0.9)$$

Usando la ecuación 4.0.9 se puede encontrar el valor de las primeras tres variables de unión; con esto se determina la matriz de orientación R_0^3 , usando esta matriz se puede determinar la orientación del órgano terminal relativa al marco $o_3x_3y_3z_3$ con la siguiente expresión

$$R = R_0^3 R_3^6 \quad (4.0.10)$$

se obtiene la orientación como sigue:

$$R_3^6 = (R_0^3)^{-1} R = (R_0^3)^T R \quad (4.0.11)$$

Las variables de unión restantes son encontradas como un conjunto de ángulos de Euler correspondientes a R_3^6 ; se puede notar que el lado derecho de la ecuación 4.0.11 es conocido ya que R es la orientación deseada del órgano terminal y R_0^3 es calculado una vez que se conocen las primeras tres variables de unión. En la figura 4.1 es mostrada la idea del desacoplamiento entre la posición y la orientación.

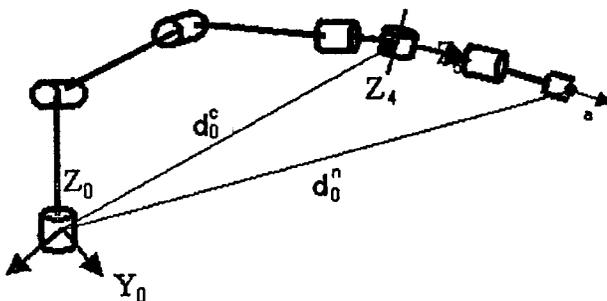


Figura 4.1: Desacoplamiento cinemático

4.0.2 Algoritmo para encontrar la cinemática inversa (CI)

Para manipuladores que cumplen con la característica descrita anteriormente, es decir, que el problema cinemático inverso puede ser separado en posición y orientación, la obtención del modelo lo podemos resumir en el siguiente algoritmo:

- Encontrar q_1, q_2, q_3 de manera que el centro de la muñeca P_c se localice en:

$$P_c = d - d_6 R k$$

- Evaluar R_0^6 , con las variables de unión encontradas en el paso anterior.
- Encontrar el conjunto de ángulos de Euler correspondientes a la matriz de rotación

$$R_3^6 = (R_0^3)^{-1} R = (R_0^3)^T R$$

4.1 Cinemática inversa para posición

Para encontrar la posición del manipulador se pueden usar métodos geométricos, este procedimiento se basa en encontrar suficientes relaciones geométricas en las que intervendrán las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus elementos; así se podrá encontrar las variables q_1, q_2, q_3 correspondientes a Pc dado en 4.0.8. Las razones para utilizar el método geométrico son: primero, la mayoría de los robots actuales son diseñados cinemáticamente sencillos, con una muñeca esférica; segundo, existen pocas técnicas que resuelven el problema cinemático inverso para configuraciones arbitrarias.

El problema de la cinemática inversa se hace más complejo con el número de parámetros de los eslabones que no son cero; en la mayoría de los manipuladores muchos de los a_i, d_i son cero, las α_i son 0 ó $\pm\pi/2$, etc. por lo tanto es más sencillo usar este tipo de técnicas.

4.2 Cinemática inversa de la orientación

Al resolver el problema cinemático de posición encontramos las primeras tres variables de unión, con ellas se puede encontrar la posición del origen de la muñeca; ahora se deberá encontrar las tres variables restantes que corresponden a la orientación deseada del órgano terminal con respecto al marco coordenado o_3, x_3, y_3, z_3 . Para muñecas esféricas el problema puede ser interpretado como encontrar el conjunto de ángulos de Euler correspondientes a una matriz de rotación deseada R .

4.2.1 Angulos de Euler

Dada una matriz de 3×3 , $U = (u_{ij})$ y R_3^6 que es la matriz de transformación de los ángulos de Euler; el problema es encontrar los ángulos de Euler ϕ , θ , ψ que satisfacen la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \cos \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

Supongamos que u_{13} y u_{23} son diferentes de cero, podemos ver en la ecuación 4.2.1 que $\sin \theta \neq 0$ por lo tanto u_{31} y u_{32} son diferentes de cero; si ninguno de u_{13} y u_{23} son cero, entonces $u_{33} \neq \pm 1$ y tenemos que $\cos \theta = u_{33}$, $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - u_{33}^2}$ así que:

$$\theta = \arctan \left(u_{33}, \sqrt{1 - u_{33}^2} \right) \quad (4.2.2)$$

6

$$\theta = \arctan \left(u_{33}, -\sqrt{1 - u_{33}^2} \right) \quad (4.2.3)$$

Si elegimos el primer valor de θ , entonces $\sin \theta > 0$, y

$$\phi = \arctan(u_{13}, u_{23}) \quad (4.2.4)$$

$$\psi = \arctan(-u_{31}, u_{32}) \quad (4.2.5)$$

aquí se tienen dos soluciones que dependen del signo elegido para θ .

Sí $u_{13} = u_{23} = 0$ entonces el hecho de que U sea ortogonal implica que $u_{33} = \pm 1$ y $u_{31} = u_{32} = 0$; de forma que U queda de la siguiente manera:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

sí $u_{33} = 1$, entonces $\cos \theta = 1$ y $\sin \theta = 0$, esto implica que $\theta = 0$; y la ecuación 4.2.1 queda

de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & 0 \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi + \psi) & -\sin(\phi + \psi) & 0 \\ \sin(\phi + \psi) & \cos(\phi + \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

la suma de $\phi + \psi$ se puede determinar como:

$$\begin{aligned} \phi + \psi &= \arctan(u_{11}, u_{21}) \\ &= \arctan(u_{11}, u_{12}) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

si solo se puede encontrar el valor de la suma, entonces habrá un número infinito de soluciones; como convención se toma a $\phi = 0$ y se define a ψ de acuerdo con 4.2.6; si $u_{33} = -1$, entonces $\cos \theta = -1$ y $\sin \theta = 0$, esto implica que $\theta = \pi$, en este caso 4.2.1 queda

$$\begin{bmatrix} -\cos(\phi - \psi) & -\sin(\phi - \psi) & 0 \\ \sin(\phi - \psi) & -\cos(\phi - \psi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

la solución es la siguiente:

$$\phi - \psi = \arctan(-u_{11}, -u_{12}) = \arctan(u_{21}, u_{22}) \quad (4.2.10)$$

como en el caso anterior, se tiene un número infinito de soluciones.

4.3 Obtención de la cinemática inversa

4.3.1 Posición

Para encontrar las variables de unión correspondientes a la posición de la muñeca del manipulador serán usados métodos geométricos y las figuras 4.2 y 4.3 de apoyo para obtener las relaciones que ayuden a encontrar el valor de la variables.

Resolviendo para θ_1 ;

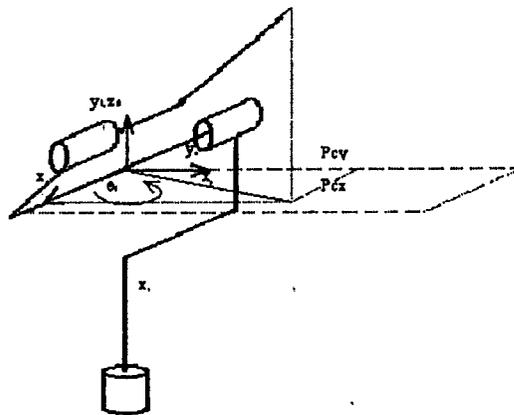


Figura 4.2: Obtención de θ_1

$$\theta_1 = \arctan(Pcx, Pcy) \quad (4.3.1)$$

Para encontrar el valor de las componentes de la posición de la muñeca, Pcx, Pcy, Pcz , se usan las matrices de transformación homogénea obtenidas en la cinemática directa:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & 0 & -\cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & \sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & 0 & -\cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & 0 & -\cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_6 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

para obtener la posición de la muñeca, se calcula primero: $T_0^4 = A_1 A_2 A_3 A_4$

$$T_0^4 = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

Donde:

$$E_{11} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 - \sin \theta_1 \sin \theta_4 \quad (4.3.3)$$

$$E_{21} = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 \quad (4.3.4)$$

$$E_{31} = \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 - \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 \quad (4.3.5)$$

$$E_{41} = 0 \quad (4.3.6)$$

$$E_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \quad (4.3.7)$$

$$E_{22} = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \quad (4.3.8)$$

$$E_{32} = \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 \quad (4.3.9)$$

$$E_{42} = 0 \quad (4.3.10)$$

$$E_{13} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_4 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 + \sin \theta_1 \cos \theta_4 \quad (4.3.11)$$

$$E_{23} = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 - \cos \theta_1 \cos \theta_4 \quad (4.3.12)$$

$$E_{33} = \sin \theta_1 \cos \theta_3 \sin \theta_4 - \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \quad (4.3.13)$$

$$E_{43} = 0 \quad (4.3.14)$$

$$E_{14} = d_4 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - d_4 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + a_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad (4.3.15)$$

$$E_{24} = d_4 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - d_4 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + a_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \quad (4.3.16)$$

$$E_{34} = d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + d_4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + a_2 \sin \theta_2 \quad (4.3.17)$$

$$E_{44} = 1 \quad (4.3.18)$$

De T_0^4 son calculadas las componentes de Pc .

$$Pcx = \cos \theta_1 [d_4 (\sin \theta_3 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_3) + a_2 \cos \theta_2] \quad (4.3.19)$$

$$Pcy = \sin \theta_1 [d_4 (\sin \theta_3 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_3) + a_2 \cos \theta_2] \quad (4.3.20)$$

$$Pcz = d_4 (\sin \theta_3 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \cos \theta_3) + a_2 \sin \theta_2 \quad (4.3.21)$$

una vez que es encontrado el valor de las componentes de Pc se obtiene el valor de θ_1 .

Para obtener θ_2 y θ_3 , se parte de suponer θ_1, θ_2 y $\theta_3 \in (0, \frac{\pi}{2})$; se tiene:

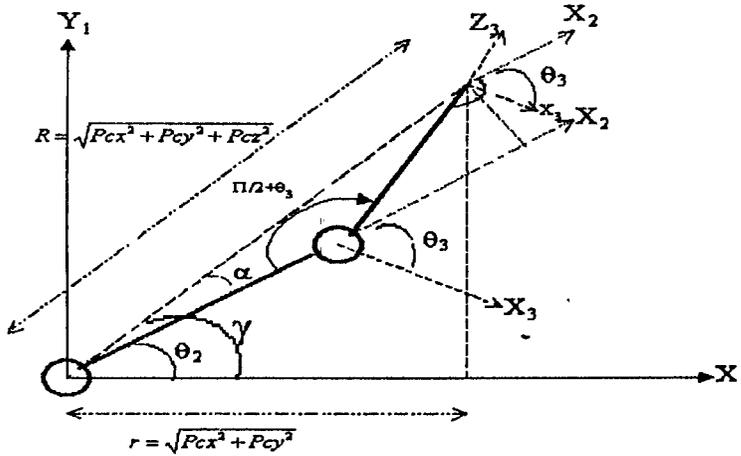


Figura 4.3: Enfoque geométrico para θ_2 y θ_3

Para θ_3 ; por la ley de los cosenos aplicada sobre el ángulo $(\frac{\pi}{2} + \theta_3)$

$$R^2 = a_2^2 + d_4^2 - 2a_2d_4 \cos\left(\theta_3 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.3.22)$$

$$\cos\left(\theta_3 + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta_3 \quad (4.3.23)$$

$$R^2 = a_2^2 + d_4^2 - 2a_2d_4 \sin\theta_3 \quad (4.3.24)$$

$$\sin\theta_3 = \frac{R^2 - a_2^2 - d_4^2}{2a_2d_4} = D_1 \quad (4.3.25)$$

$$\cos\theta_3 = \pm\sqrt{1 - D_1^2} \quad (4.3.26)$$

$$\theta_3 = \arctan\left(\pm\sqrt{1 - D_1^2}, D_1\right) \quad (4.3.27)$$

Para θ_2 ; de la figura 4.3 es apreciable que: $\theta_2 = \gamma - \alpha$, donde $\gamma = \arctan(r, Pcz)$

α es encontrada de la siguiente manera:

$$Cat_ady = a_2 + d_4 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_3\right) = a_2 + d_4 \sin\theta_3 \quad (4.3.28)$$

$$Cat_op = d_4 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_3\right) = d_4 \cos\theta_3 \quad (4.3.29)$$

$$\alpha = \arctan(a_2 + d_4 \sin\theta_3, d_4 \cos\theta_3) \quad (4.3.30)$$

Comprobación algebraica de la CI: posición

Una forma de comprobar algebraicamente que las expresiones encontradas en la subsección anterior son correctas, es demostrar que la posición del centro de la muñeca obtenida con la CD es la misma que la observada mediante el enfoque geométrico. Así, de la figura 4.2 se aprecia que $\cos \theta_1 = \frac{Pcx}{r}$ además se conoce de 4.3.19 que:

$$Pcx = \cos \theta_1 [d_4 (\sin \theta_3 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_3) + a_2 \cos \theta_2]$$

Si es sustituido el valor de $\cos \theta_1$ en la ecuación anterior, es apreciable que los términos que están en los corchetes deberán ser iguales a r .

$$Pcx = \frac{Pcx [d_4 (\sin \theta_3 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_3) + a_2 \cos \theta_2]}{r}$$

Se habrá pues de llegar a esta igualdad para poder así, comprobar la ecuación.

Se sabe que:

$$\sin \theta_2 = \sin (\gamma - \alpha) = \sin \gamma \cos \alpha - \sin \alpha \cos \gamma = \frac{Pcz}{R} \frac{(a_2 + d_4 \sin \theta_3)}{R} - \frac{d_4 \cos \theta_3}{R} \frac{r}{R} \quad (4.3.31)$$

$$\sin \theta_2 = \frac{1}{R^2} [Pcz (a_2 + d_4 \sin \theta_3) - r d_4 \cos \theta_3] \quad (4.3.32)$$

$$\cos \theta_2 = \cos (\gamma - \alpha) = \cos \gamma \cos \alpha + \sin \alpha \sin \gamma = \frac{r}{R} \frac{(a_2 + d_4 \sin \theta_3)}{R} + \frac{d_4 Pcz \cos \theta_3}{R} \frac{r}{R} \quad (4.3.33)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{R^2} [r (a_2 + d_4 \sin \theta_3) + d_4 Pcz \cos \theta_3] \quad (4.3.34)$$

$$Pcx = \frac{Pcx}{r R^2} \left[d_4 \left[D_1 (r (a_2 + d_4 \sin \theta_3) + d_4 Pcz \cos \theta_3) - \beta \sqrt{1 - D_1^2} (Pcz (a_2 + d_4 \sin \theta_3) - d_4 r \cos \theta_3) \right] + \frac{Pcx}{r R^2} [a_2 (r (a_2 + d_4 \sin \theta_3) + d_4 Pcz \cos \theta_3)] \right] \quad (4.3.35)$$

$$Pcx = \frac{Pcx}{r R^2} \left[d_4 \left[D_1 r a_2 + D_1^2 r d_4 + D_1 d_4 Pcz \beta \sqrt{1 - D_1^2} - \beta \sqrt{1 - D_1^2} a_2 Pcz - \beta \sqrt{1 - D_1^2} D_1 d_4 Pcz \right] + \frac{Pcx}{r R^2} [d_4 [(1 - D_1^2) d_4 r] + a_2^2 r + a_2 r d_4 D_1 + a_2 Pcz d_4 \beta \sqrt{1 - D_1^2}] \right] \quad (4.3.36)$$

$$Pcx = \frac{Pcx}{r R^2} [2r D_1 a_2 d_4 + r d_4^2 + r a_2^2] \quad (4.3.37)$$

Es conocido también que: $D_1 = \frac{R^2 - a_2^2 - d_4^2}{2a_2d_4}$, sustituyendo en la ecuación 4.3.37 se tiene:

$$Pc\dot{x} = \frac{Pc\dot{x}}{R^2} \left[2 \frac{R^2 - a_2^2 - d_4^2}{2a_2d_4} a_2d_4 + d_4^2 + a_2^2 \right] \quad (4.3.38)$$

$$Pc\dot{x} = Pc\dot{x} \quad (4.3.39)$$

Para Pcy :

$Pcy = \sin \theta_1 [d_4 (\sin \theta_3 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_3) + a_2 \cos \theta_2]$, y de la figura 1 se aprecia que $\sin \theta_1 = \frac{Pcy}{r}$. Sustituyendo en la expresión resulta: $Pcy = \frac{Pcy}{r} [d_4 (\sin \theta_3 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_3) + a_2 \cos \theta_2]$, se aprecia que el contenido de los paréntesis es el mismo que el que se encuentra en la expresión de Pcx y que se ha demostrado, por lo tanto se puede asumir que la expresión de Pcy es correcta.

Para Pcz

$Pcz = d_4 (\sin \theta_3 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \cos \theta_3) + a_2 \sin \theta_2$. Sustituyendo $\sin \theta_2$ y $\cos \theta_2$:

$$Pcz = \frac{1}{R^2} \left[d_4 \beta \sqrt{1 - D_1^2} \left(ra_2 + rd_4 D_1 + d_4 Pcz \beta \sqrt{1 - D_1^2} \right) + D_1 (a_2 Pcz + Pcz d_4 D_1) \right] \quad (4.3.40)$$

$$- D_1 r d_4^2 \beta \sqrt{1 - D_1^2} + a_2 \left(a_2 Pcz + Pcz d_4 D_1 - r d_4 \beta \sqrt{1 - D_1^2} \right) \quad (4.3.41)$$

$$Pcz = \frac{1}{R^2} \left[d_4 \left[\beta \sqrt{1 - D_1^2} ra_2 + rd_4 D_1 \beta \sqrt{1 - D_1^2} + Pcz d_4 (1 - D_1^2) + a_2 D_1 Pcz + d_4 Pcz D_1^2 \right] \right] \quad (4.3.42)$$

$$+ \frac{1}{R^2} \left[-rd_4^2 D_1 \beta \sqrt{1 - D_1^2} + a_2^2 Pcz + a_2 d_4 Pcz D_1 - ra_2 d_4 \beta \sqrt{1 - D_1^2} \right] \quad (4.3.43)$$

$$Pcz = \frac{1}{R^2} [Pcz d_4^2 + 2a_2 d_4 Pcz D_1 + a_2^2 Pcz] \quad (4.3.44)$$

Sustituyendo el valor de D_1

$$Pcz = \frac{1}{R^2} \left[Pcz d_4^2 + 2Pcza_2 d_4 \frac{R^2 - a_2^2 - d_4^2}{2a_2 d_4} + Pcza_2^2 \right] \quad (4.3.45)$$

$$Pcz = Pcz \quad (4.3.46)$$

$$\beta = \pm 1 \quad (4.3.47)$$

4.3.2 Cinemática inversa: Orientación

Una vez encontradas las tres primeras variables de unión, es posible encontrar la matriz de rotación R_0^3 la cual ayudará a encontrar las variables restantes apoyándose en la ecuación 4.0.11:

$$R_3^6 = (R_0^3)^{-1}R = (R_0^3)^T R$$

Donde R es la matriz de rotación que considera la orientación deseada del órgano terminal. Obteniendo R_0^3 de las matrices de la cinemática directa.

$$R_0^3 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 + c_1 + s_2 s_3 & -s_1 & c_1 c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3 \\ s_1 c_2 c_3 + s_1 s_2 s_3 & c_1 & s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 \\ s_2 c_3 - c_2 s_3 & 0 & s_2 s_3 + c_2 c_3 \end{bmatrix}$$

Para R_3^6

$$R_3^6 = R_3^4 R_4^5 R_5^6 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 + s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6 & c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & -c_5 \end{bmatrix} \quad (4.3.48)$$

$$(R_0^3)^T = \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 + c_1 s_2 s_3 & s_1 c_2 c_3 + s_1 s_2 s_3 & s_2 c_3 - c_2 s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ c_1 c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3 & s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 & s_2 s_3 + c_2 c_3 \end{bmatrix} \quad (4.3.49)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (4.3.50)$$

$$R_3^6 = (R_0^3)^T R \quad (4.3.51)$$

$$\begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 + s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6 & c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & -c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \quad (4.3.52)$$

$$E_{11} = c_1 c(\theta_2 - \theta_3) r_{11} + s_1 c(\theta_2 - \theta_3) r_{21} + s(\theta_2 - \theta_3) r_{31} \quad (4.3.53)$$

$$E_{12} = c_1 c(\theta_2 - \theta_3) r_{12} + s_1 c(\theta_2 - \theta_3) r_{22} + s(\theta_2 - \theta_3) r_{32} \quad (4.3.54)$$

$$E_{13} = c_1 c(\theta_2 - \theta_3) r_{13} + s_1 c(\theta_2 - \theta_3) r_{23} + s(\theta_2 - \theta_3) r_{33} \quad (4.3.55)$$

$$E_{21} = -s_1 r_{11} + c_1 r_{21} \quad (4.3.56)$$

$$E_{22} = -s_1 r_{12} + c_1 r_{22} \quad (4.3.57)$$

$$E_{23} = -s_1 r_{13} + c_1 r_{23} \quad (4.3.58)$$

$$E_{31} = c_1 s(\theta_2 - \theta_3) r_{11} + s_1 s(\theta_2 - \theta_3) r_{21} + c(\theta_2 - \theta_3) r_{31} \quad (4.3.59)$$

$$E_{32} = c_1 s(\theta_2 - \theta_3) r_{12} + s_1 s(\theta_2 - \theta_3) r_{22} + c(\theta_2 - \theta_3) r_{32} \quad (4.3.60)$$

$$E_{33} = c_1 s(\theta_2 - \theta_3) r_{13} + s_1 s(\theta_2 - \theta_3) r_{23} + c(\theta_2 - \theta_3) r_{33} \quad (4.3.61)$$

Igualando elemento a elemento:

$$\tan \theta_4 = \frac{E_{23}}{E_{13}} \quad (4.3.62)$$

$$\theta_4 = \arctan(\sigma E_{13}, \sigma E_{23}) \quad (4.3.63)$$

$$\tan \theta_6 = \frac{-\sigma E_{32}}{\sigma E_{31}} \quad (4.3.64)$$

$$\theta_6 = \arctan(\sigma E_{31}, -\sigma E_{32}) \quad (4.3.65)$$

$$-\cos \theta_5 = E_{33} \quad (4.3.66)$$

$$\sin \theta_5 = \pm \sqrt{1 - E_{33}^2} \quad (4.3.67)$$

$$\tan \theta_5 = \frac{\pm \sqrt{1 - E_{33}^2}}{-E_{33}} \quad (4.3.68)$$

$$\theta_5 = \arctan\left(-E_{33}, \pm \sqrt{1 - E_{33}^2}\right) \quad (4.3.69)$$

$$\bullet \quad (4.3.70)$$

Donde $\sigma =$ al signo de $\sin \theta_5$.

Ahora que ya se tiene completo el modelo se puede determinar el valor de cada una de las variables de unión para una posición y orientación deseadas.

Capítulo 5

Modelo de pares gravitacionales

El modelo dinámico de un robot consiste en una ecuación diferencial no lineal, generalmente de segundo orden. Podemos expresarlo como:

$$f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau) = 0 \quad (5.0.1)$$

τ es el vector de pares y fuerzas aplicadas a las articulaciones por medio de actuadores. En la notación empleada se aprecia que usamos q como variable generalizada al referirnos a la posición, ya que las articulaciones de nuestro manipulador son rotacionales. Esta relación recibe comúnmente el nombre de modelo dinámico articular (Angeles, J. 1997).

Aparte de la importancia incuestionable de los modelos dinámicos de los manipuladores en el diseño de controladores, pueden también ser utilizados para simular el comportamiento del robot antes de ser construido, con la finalidad de mejorar el diseño de manera que pueda hacer una tarea asignada satisfactoriamente.

Las ecuaciones dinámicas de un manipulador pueden ser obtenidas a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton, sin embargo, este método presenta la desventaja que el análisis se complica cuando aumenta el número de eslabones del robot; cuando se presenta esta situación es más conveniente emplear las ecuaciones de movimiento de Lagrange. El uso de estas ecuaciones para el modelado dinámico de manipuladores se determina en cuatro etapas: cálculo de la energía cinética, cálculo de la energía potencial, cálculo del lagrangiano y el desarrollo de las ecuaciones de Lagrange. La ecuación dinámica

para robots la podemos escribir en forma compacta de la siguiente manera (Spong y Vidyasagar 1989):

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (5.0.2)$$

donde: $M(q)$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ denominada la *matriz de inercia* (n , es el grado de libertad del manipulador); $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es un vector de $n \times 1$ llamado el *vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis*, $g(q)$ es un vector de $n \times 1$ de *fuerzas o pares gravitacionales* y τ es un vector de $n \times 1$ llamado *vector de fuerzas externas*, siendo generalmente los pares aplicados en las articulaciones del manipulador.

Como se mencionó anteriormente en aplicaciones industriales de soldadura los movimientos del robot son lentos (Nof 1999), como consecuencia los términos de inercia, de fuerzas centrífugas y de Coriolis tienen poco efecto (Asada y Slotine 1986; Spong y Vidyasagar 1989) y los podemos despreciar; en este caso el término gravitacional es el que realmente afecta en el desempeño del robot por lo que es el único realmente importante. Una manera de controlar un robot en aplicaciones de soldadura consiste en controlar independientemente cada una de las uniones, la idea fundamental se basa en considerar que el robot está compuesto por n motores independientes -de corriente directa en este caso-; de este modo los controladores pueden ser diseñados utilizando técnicas de sistemas lineales, el único requisito es que el término gravitacional sea compensado adecuadamente para poder considerarlo una perturbación y no incluirlo en la ley de control. Con esta finalidad obtenemos a continuación los términos del modelo de pares gravitacionales.

5.1 Obtención del modelo de pares gravitacionales (MPG)

Se conoce que el vector $g(q)$ es al gradiente de la energía potencial $U(q)$ (Spong y Vidyasagar 1989), este tipo de energía es consecuencia de fuerzas conservativas como la fuerza de la gravedad. Se Habrá pues de obtener la energía potencial de cada uno de los eslabones.

La distancia al centro de masa de cada eslabón ha sido referida a la base, al hacer esto se ha tenido que sumar una constante denominada d_1 , a las ecuaciones que nos

indican la posición de cada uno de los eslabones sobre el eje z_0 ¹, esta constante resulta de los parámetros D-H de la CD con el marco de referencia en la base del manipulador. Estas ecuaciones vienen de multiplicar las matrices de transformación homogénea involucradas en la obtención de la CD del robot², de esta manera el estudio ha sido apoyado en el modelo cinemático directo para obtener las posiciones de los centros de masa de cada eslabón. La energía potencial para los eslabones está dada por:

$$U_1(\theta) = m_1 l_1 g \quad (5.1.1)$$

$$U_2(\theta) = m_2 (d_1 + l_2 \sin \theta_2) g \quad (5.1.2)$$

$$U_3(\theta) = m_3 (l_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + l_3 \cos \theta_3 \cos \theta_2 + a_2 \sin \theta_2 + d_1) g = m_3 (l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + a_2 \sin \theta_2 + d_1) g \quad (5.1.3)$$

$$U_4(\theta) = m_4 (l_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + l_4 \cos \theta_3 \cos \theta_2 + a_2 \sin \theta_2 + d_1) g = m_4 (l_4 \cos(\theta_2 - \theta_3) + a_2 \sin \theta_2 + d_1) g \quad (5.1.4)$$

$$\begin{aligned} U_5(\theta) &= m_5 [l_5 \cos \theta_4 \sin \theta_5 (\sin \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_3 \cos \theta_2) - l_5 \cos \theta_5 (\sin \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \theta_2 \cos \theta_3) \\ &\quad + d_4 (\sin \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \theta_2 \cos \theta_3) + a_2 \sin \theta_2 + d_1] g \\ &= m_5 [l_5 \cos \theta_4 \sin \theta_5 \sin(\theta_2 - \theta_3) - l_5 \cos \theta_5 \cos(\theta_2 - \theta_3) + d_4 \cos(\theta_2 - \theta_3) + a_2 \sin \theta_2 + d_1] g \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

$$\begin{aligned} U_6(\theta) &= m_6 [d_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 (\sin \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_3 \cos \theta_2) - d_6 \cos \theta_5 (\sin \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \theta_2 \cos \theta_3) \\ &\quad + d_4 (\sin \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \theta_2 \cos \theta_3) + a_2 \sin \theta_2 + d_1] g \\ &= m_6 [d_6 \cos \theta_4 \sin \theta_5 \sin(\theta_2 - \theta_3) - d_6 \cos \theta_5 \cos(\theta_2 - \theta_3) + d_4 \cos(\theta_2 - \theta_3) + a_2 \sin \theta_2 + d_1] g \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

donde: m_i , es la masa del eslabón i ;

l_i , es la distancia del eje coordenado anterior, al centro de masa (ver figura 5.1);

g , gravedad;

$\theta_i = q_i$, denota la posición angular del eslabón i ; $i = 1, \dots, 6$.

¹ver sección 2 para mas detalles

²Ver anexo 2

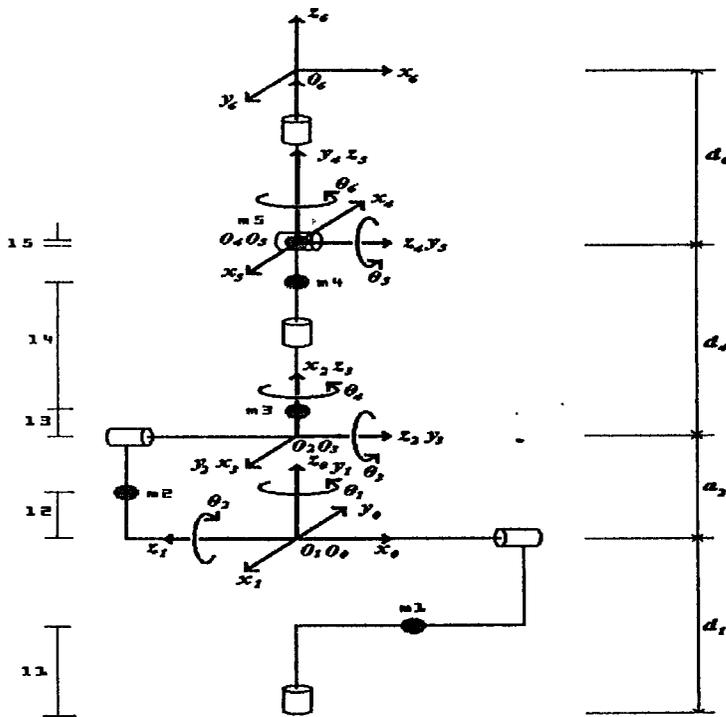


Figura 5.1: Definición de las distancias de los centros de masa



Figura 5.2: Muñeca del manipulador ROMAT 56

En la figura 5.2 se puede apreciar que el eslabón seis es muy ligero, así que su masa es despreciable considerando la masa del resto del robot por lo que es posible asumir que su masa es cero; con esto se reduce el modelo de pares gravitacionales.

Una vez obtenida la energía potencial total del robot

$$U(\theta) = U_1(\theta) + U_2(\theta) + U_3(\theta) + U_4(\theta) + U_5(\theta) + U_6(\theta) \quad (5.1.7)$$

se puede conocer el vector $g(\theta)$ al obtener el gradiente de la energía potencial.

$$g(\theta) = \left[\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_2} \quad \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_3} \quad \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_4} \quad \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_5} \quad \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_6} \right]^T \quad (5.1.8)$$

Son obtenidas las derivadas parciales de la energía potencial:

$$\frac{\partial U_1(\theta)}{\partial \theta_1} = \frac{\partial U_2(\theta)}{\partial \theta_1} = \frac{\partial U_3(\theta)}{\partial \theta_1} = \frac{\partial U_4(\theta)}{\partial \theta_1} = \frac{\partial U_5(\theta)}{\partial \theta_1} = 0 \quad (5.1.9)$$

$$\frac{\partial U_1(\theta)}{\partial \theta_2} = 0 \quad (5.1.10)$$

$$\frac{\partial U_2(\theta)}{\partial \theta_2} = m_2 l_2 g \cos \theta_2 \quad (5.1.11)$$

$$\frac{\partial U_3(\theta)}{\partial \theta_2} = m_3 g [-l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) + a_2 \cos \theta_2] \quad (5.1.12)$$

$$\frac{\partial U_4(\theta)}{\partial \theta_2} = m_4 g [-l_4 \sin(\theta_2 - \theta_3) + a_2 \cos \theta_2] \quad (5.1.13)$$

$$\frac{\partial U_5(\theta)}{\partial \theta_2} = m_5 g [l_5 \sin \theta_5 \cos \theta_4 \cos(\theta_2 - \theta_3) + l_5 \cos \theta_5 \sin(\theta_2 - \theta_3) + d_4 \sin(\theta_3 - \theta_2) + a_2 \cos \theta_2] \quad (5.1.14)$$

$$\frac{\partial U_1(\theta)}{\partial \theta_3} = \frac{\partial U_2(\theta)}{\partial \theta_3} = 0 \quad (5.1.15)$$

$$\frac{\partial U_3(\theta)}{\partial \theta_3} = m_3 g [l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (5.1.16)$$

$$\frac{\partial U_4(\theta)}{\partial \theta_3} = m_4 g [l_4 \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (5.1.17)$$

$$\frac{\partial U_5(\theta)}{\partial \theta_3} = m_5 g [-l_5 \cos \theta_4 \sin \theta_5 \cos(\theta_2 - \theta_3) + l_5 \cos \theta_5 \sin(\theta_3 - \theta_2) + d_4 \sin(\theta_2 - \theta_3)] \quad (5.1.18)$$

$$\frac{\partial U_1(\theta)}{\partial \theta_4} = \frac{\partial U_2(\theta)}{\partial \theta_4} = \frac{\partial U_3(\theta)}{\partial \theta_4} = \frac{\partial U_4(\theta)}{\partial \theta_4} = 0 \quad (5.1.19)$$

$$\frac{\partial U_5(\theta)}{\partial \theta_4} = m_5 g [l_5 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \sin(\theta_3 - \theta_2)] \quad (5.1.20)$$

$$\frac{\partial U_1(\theta)}{\partial \theta_5} = \frac{\partial U_2(\theta)}{\partial \theta_5} = \frac{\partial U_3(\theta)}{\partial \theta_5} = \frac{\partial U_4(\theta)}{\partial \theta_5} = 0 \quad (5.1.21)$$

$$\frac{\partial U_5(\theta)}{\partial \theta_5} = m_5 g [l_5 \cos \theta_4 \cos \theta_5 \sin(\theta_2 - \theta_3) + l_5 \sin \theta_5 \cos(\theta_2 - \theta_3)] \quad (5.1.22)$$

$$\frac{\partial U_1(\theta)}{\partial \theta_6} = \frac{\partial U_2(\theta)}{\partial \theta_6} = \frac{\partial U_3(\theta)}{\partial \theta_6} = \frac{\partial U_4(\theta)}{\partial \theta_6} = \frac{\partial U_5(\theta)}{\partial \theta_6} = 0 \quad (5.1.23)$$

El modelo de pares gravitacionales queda:

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1(\theta)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial U_2(\theta)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial U_3(\theta)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial U_4(\theta)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial U_5(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial U_1(\theta)}{\partial \theta_2} + \frac{\partial U_2(\theta)}{\partial \theta_2} + \frac{\partial U_3(\theta)}{\partial \theta_2} + \frac{\partial U_4(\theta)}{\partial \theta_2} + \frac{\partial U_5(\theta)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial U_1(\theta)}{\partial \theta_3} + \frac{\partial U_2(\theta)}{\partial \theta_3} + \frac{\partial U_3(\theta)}{\partial \theta_3} + \frac{\partial U_4(\theta)}{\partial \theta_3} + \frac{\partial U_5(\theta)}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial U_1(\theta)}{\partial \theta_4} + \frac{\partial U_2(\theta)}{\partial \theta_4} + \frac{\partial U_3(\theta)}{\partial \theta_4} + \frac{\partial U_4(\theta)}{\partial \theta_4} + \frac{\partial U_5(\theta)}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial U_1(\theta)}{\partial \theta_5} + \frac{\partial U_2(\theta)}{\partial \theta_5} + \frac{\partial U_3(\theta)}{\partial \theta_5} + \frac{\partial U_4(\theta)}{\partial \theta_5} + \frac{\partial U_5(\theta)}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial U_1(\theta)}{\partial \theta_6} + \frac{\partial U_2(\theta)}{\partial \theta_6} + \frac{\partial U_3(\theta)}{\partial \theta_6} + \frac{\partial U_4(\theta)}{\partial \theta_6} + \frac{\partial U_5(\theta)}{\partial \theta_6} \end{bmatrix} \quad (5.1.24)$$

donde:

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_1} = 0 \quad (5.1.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_2} = & g \cos \theta_2 [m_2 l_2 + m_3 a_2 + m_4 a_2 + m_5 a_2] + g \sin(\theta_2 - \theta_3) [-m_3 l_3 - m_4 l_4 \\ & + m_5 l_5 \cos \theta_5 - m_5 d_4] + g \cos(\theta_2 - \theta_3) [m_5 l_5 \sin \theta_5 \cos \theta_4] \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_3} = g \sin(\theta_2 - \theta_3) [m_3 l_3 + m_4 l_4 - m_5 l_5 \cos \theta_5 + m_5 d_4] - g \cos(\theta_2 - \theta_3) m_5 l_5 \cos \theta_4 \sin \theta_5 \quad (5.1.27)$$

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_4} = -g \sin(\theta_2 - \theta_3) m_5 l_5 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \quad (5.1.28)$$

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_5} = g \sin(\theta_2 - \theta_3) m_5 l_5 \cos \theta_4 \cos \theta_5 + g \cos(\theta_2 - \theta_3) m_5 l_5 \sin \theta_5 \quad (5.1.29)$$

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_6} = 0 \quad (5.1.30)$$

5.2 Compensación del efecto gravitatorio

La compensación de la gravedad juega un papel importante desde el punto de vista de la ley de control, al adicionar el vector de pares gravitacionales al controlador se puede olvidar el efecto gravitacional y considerarlo como una perturbación que será compensada. Se inicia con el modelo dinámico ecuación 5.0.2, si se considera el robot en estado estacionario, es decir que los eslabones están en una configuración fija, podemos asumir que la velocidad y la aceleración son nulas por lo tanto el modelo se ve reducido y tiene la siguiente forma:

$$g(q) = \tau \quad (5.2.1)$$

La ecuación 5.2.1 representa el par debido a la gravedad, este deberá ser compensado utilizando una señal de voltaje que será aplicada a los actuadores (motores de corriente continua). Ahora, el modelo de un motor de corriente continua (cc) con inductancia de armadura despreciable y fricción lineal es el siguiente (Ogata 1993):

$$J_m \ddot{q} + \left(f_m + \frac{K_a K_b}{R_a} \right) \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} v \quad (5.2.2)$$

donde: R_a , resistencia de armadura; K_a , constante motor-par; r , relación de reducción de los engranes; J_m , inercia del motor; q , posición angular de la carga; f_m , par debido a la fricción; K_b : constante contrareacción electromotriz; v , voltaje de armadura; τ , par aplicado al eje de giro.

Como en el manipulador se tienen seis motores de cc, uno por cada eslabón, se agrupan los motores en un solo modelo que tiene la siguiente forma:

$$J\ddot{Q} + F\dot{Q} + r\tau = Ra^{-1}Kar^{-1}V \quad (5.2.3)$$

donde: Ra , Ka , r , J son matrices diagonales de $(n \times n)$ que representan -respectivamente- las resistencias de armadura, las constantes de par, las relaciones de reducción de los engranes y las inercias de los motores; Q , vector de $(1 \times n)$ compuesto por las posiciones angulares de la carga en cada motor; V , vector de $(1 \times n)$ compuesto por los voltajes de armadura de cada uno de los motores; τ , vector de $(1 \times n)$ compuesto por los pares de carga.

El efecto de la gravedad debe ser compensado en estado estacionario por lo que podemos asumir que... $Q = \dot{Q} = 0$; bajo esta condición la ecuación 5.2.3 se reduce a:

$$V = r^{-1}Ka^{-1}Ra\tau \quad (5.2.4)$$

Considerando 5.2.1 es posible escribir la ecuación 5.2.4 como:

$$V = r^{-1}Ka^{-1}Rag(\theta) \quad (5.2.5)$$

Así, la ecuación 5.2.5 permite calcular el voltaje necesario para compensar el efecto de la

gravedad, si sustituimos las ecuaciones 5.1.25- 5.1.30 en la ecuación 5.2.5 tenemos:

$$v_1 = 0 \quad (5.2.6)$$

$$v_2 = \frac{Ra_2}{r_2Ka_2} (g \cos \theta_2 [m_2l_2 + m_3a_2 + m_4a_2 + m_5a_2] + g \sin(\theta_2 - \theta_3) [-m_3l_3 - m_4l_4 + m_5l_5 \cos \theta_5 - m_5d_4] + g \cos(\theta_2 - \theta_3) [m_5l_5 \sin \theta_5 \cos \theta_4]) \quad (5.2.7)$$

$$v_3 = \frac{Ra_3}{r_3Ka_3} [g \sin(\theta_2 - \theta_3) [m_3l_3 + m_4l_4 - m_5l_5 \cos \theta_5 + m_5d_4] - g \cos(\theta_2 - \theta_3) m_5l_5 \cos \theta_4 \sin \theta_5] \quad (5.2.8)$$

$$v_4 = \frac{Ra_4}{r_4Ka_4} [-g \sin(\theta_2 - \theta_3) m_5l_5 \sin \theta_4 \sin \theta_5] \quad (5.2.9)$$

$$v_5 = \frac{Ra_5}{r_5Ka_5} [g \sin(\theta_2 - \theta_3) m_5l_5 \cos \theta_4 \cos \theta_5 + g \cos(\theta_2 - \theta_3) m_5l_5 \sin \theta_5] \quad (5.2.10)$$

$$v_6 = 0 \quad (5.2.11)$$

La compensación de la gravedad puede ser aplicada de manera independiente a los motores de cada uno de los eslabones del robot; sin embargo, la ecuación 5.2.5 presenta una desventaja, esta ecuación queda en función de las masas, ubicación de los centros de masa y las constantes de cada motor; la medición de cada una de estas constantes se podría llevar a cabo pero hacerlo representa, entre otras cosas, desarmar el robot, cosa que es poco recomendable. Para resolver este problema se ha buscado otra solución; ésta consiste en identificar cada uno de los argumentos ³ que intervienen en la ecuación de cada eslabón de una forma experimental. Será necesario manipular cada una de las ecuaciones de forma que en configuraciones especiales el voltaje aplicado al motor de la unión sea equivalente al argumento que estamos buscando, esto se puede llevar a cabo debido a que las únicas variables que intervienen en las ecuaciones son las variables generalizadas del modelo.

³Al decir argumento nos estamos refiriendo a la amplitud de los senos y cosenos que forman parte de las ecuaciones.

5.2.1 Identificación de los argumentos del MPG con compensación de gravedad

Eslabón uno.

Como puede verse en la ecuación 5.2.6 el vector de pares gravitacionales es independiente de los movimientos de este eslabón.

Eslabón dos.

Para el eslabón dos la ecuación 5.2.7 nos da la compensación de la gravedad. Lo primero que se hace es seleccionar los ángulos adecuados para identificar los argumentos de cada uno de los términos de la ecuación.

(i) $\theta_2 = 0$ y $\theta_3 = 0$; con estos ángulos la ecuación 5.2.7 se reduce a:

$$([m_2 l_2 + m_3 a_2 + m_4 a_2 + m_5 a_2] + [m_5 l_5 \sin \theta_5 \cos \theta_4]) \frac{g R a_2}{r_2 K a_2} = v_2 \quad (5.2.12)$$



Figura 5.3: $\theta_2 = 0; \theta_3 = 0$

lo siguiente que se hace es aplicar el voltaje suficiente en el motor dos para que el robot se mantenga en esta configuración, el voltaje es aplicado en el *servoamplificador* del motor. En este caso el voltaje es igual a: -5volts , este voltaje lo sustituimos en la ecuación 5.2.12.

Cabe destacar que en esta configuración se hicieron variar θ_4 y θ_5 , el voltaje fue el mismo. Con esto es posible concluir que la variación en la posición de estos eslabones no es significativo ya que el diseño del robot es tal que su centro de masa no varía con el movimiento de ellos, por lo tanto se puede asignar el valor que mejor convenga

a estos ángulos sin que esto se refleje en el voltaje necesario para compensar el efecto gravitatorio.

(ii) $\theta_2 = 0$ y $\theta_3 = 180$; la ecuación 5.2.7 queda:

$$([m_2 l_2 + m_3 a_2 + m_4 a_2 + m_5 a_2] - [m_5 l_5 \sin \theta_5 \cos \theta_4]) \frac{g R a_2}{r_2 K a_2} = v_2 \quad (5.2.13)$$



Figura 5.4: $\theta_2 = 0; \theta_3 = 180$

en este caso el voltaje necesario fue de -6volts y es sustituido en la ecuación 5.2.13. Si se suma 5.2.12 y 5.2.13, queda:

$$\begin{aligned} 2 \frac{g R a_2}{r_2 K a_2} [m_2 l_2 + m_3 a_2 + m_4 a_2 + m_5 a_2] &= -11 \\ \frac{g R a_2}{r_2 K a_2} [m_2 l_2 + m_3 a_2 + m_4 a_2 + m_5 a_2] &= -5.5 \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Con esto se asume que el argumento de $\cos \theta_2$ es igual a -5.5 . Si es sustituido el valor del argumento en la ecuación 5.2.12

$$-5.5 + \frac{g R a_2}{r_2 K a_2} [m_5 l_5 \sin \theta_5 \cos \theta_4] = -5 \quad (5.2.15)$$

$$\frac{g R a_2}{r_2 K a_2} [m_5 l_5 \sin \theta_5 \cos \theta_4] = 0.5 \quad (5.2.16)$$

Ahora se conoce que el argumento de $\cos(\theta_2 - \theta_3)$ es 0.5.

(iii) $\theta_2 = 45$, $\theta_3 = -45$; con estos ángulos la ecuación 5.2.7 queda de la siguiente manera:

$$-5.5 \cos 45 + \frac{g R a_2}{r_2 K a_2} [m_3 l_3 m_4 l_4 m_5 l_5 \cos \theta_5 - m_5 d_4] = v_2 \quad (5.2.17)$$

Figura 5.5: $\theta_2 = 45; \theta_3 = -45$

El voltaje para compensar el efecto de la gravedad es -2volts , se sustituye este valor en 5.2.17 y se despeja el argumento que nos hace falta.

$$\frac{gRa_2}{r_2Ka_2} [m_3l_3m_4l_4m_5l_5 \cos \theta_5 - m_5d_4] = 1.889 \quad (5.2.18)$$

Así con esto se completa los argumentos de la ecuación 5.2.7 y se puede conocer el voltaje necesario para compensar el efecto de la gravedad, si es conocida la posición de los eslabones, en cualquier configuración del manipulador.

Ya con todos los argumento identificados la ecuación 5.2.7 nos queda de la siguiente manera:

$$v_2 = -5.5 \cos \theta_2 + 0.5 \cos(\theta_2 - \theta_3) + 1.889 \sin(\theta_2 - \theta_3) \quad (5.2.19)$$

Eslabón tres

La ecuación 5.2.8 nos describe los efectos de la gravedad sobre el eslabón tres; una vez seleccionados los ángulos para poder identificar los argumentos de la ecuación, se procede de la misma forma que en el eslabón dos; sin embargo, el eslabón tres tiene compensado de manera mecánica el efecto de la gravedad permitiendo con esto que el eslabón permanezca en cualquier posición sin necesidad de que se le suministre voltaje Hay que recordar que este estudio se llevó acabo con el manipulador sin carga.

Eslabón cuatro y cinco

Al igual que en el caso del eslabón tres, en los eslabones cuatro y cinco no es necesario compensar el efecto de la gravedad, el robot ha sido diseñado de tal forma que no es necesaria ninguna compensación.

5.2.2 Validación del MPG con compensación de gravedad

Para la validación del modelo lo que se hizo fue seleccionar al azar configuraciones, sustituir los ángulos seleccionados en el modelo, obtener el voltaje necesario para compensar el efecto de la gravedad y aplicarlo al motor a través del servoamplificador. Para comprobar que el eslabón no sufre ningún efecto debido a la gravedad, las pruebas fueron hechas sobre el motor dos ya que este es el único eslabón que es afectado por el efecto gravitatorio cuando el robot carece de carga. Las configuraciones son las siguientes:

1. $\theta_2 = 0, \theta_3 = 90; v_2 = -5.5 - 1.889 = -7.389$

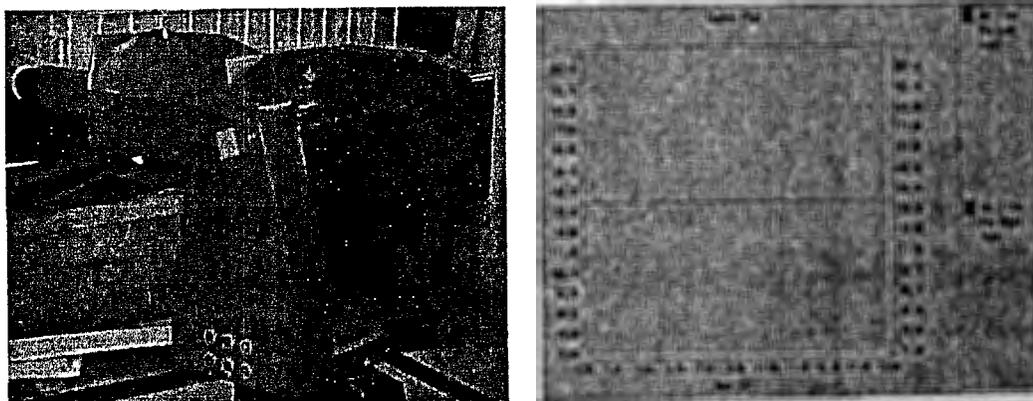


Figura 5.6: $\theta_2 = 0; \theta_3 = 90$. Gráfica del codificador (encoder)

2. $\theta_2 = 180, \theta_3 = 90; v_2 = 5.5 + 1.889 = 7.389$

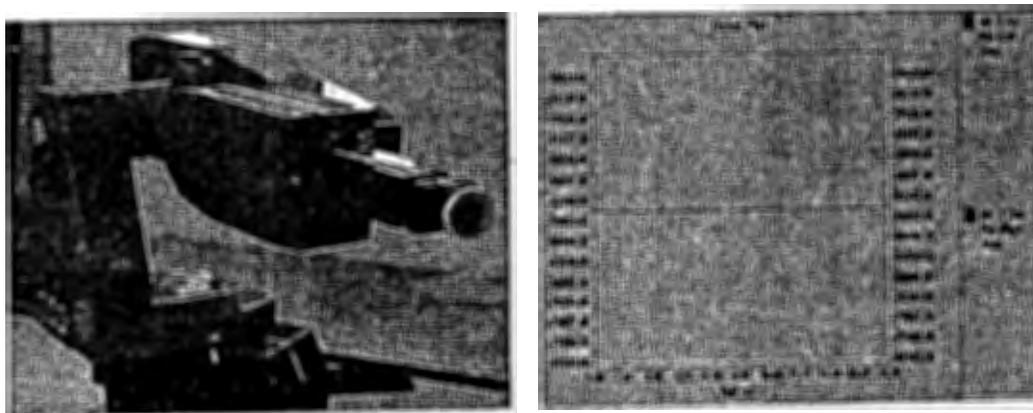


Figura 5.7: $\theta_2 = 180; \theta_3 = 90$. Gráfica del codificador

3. $\theta_2 = 135, \theta_3 = 135; v_2 = 3.889 + 0.5 = 4.389$

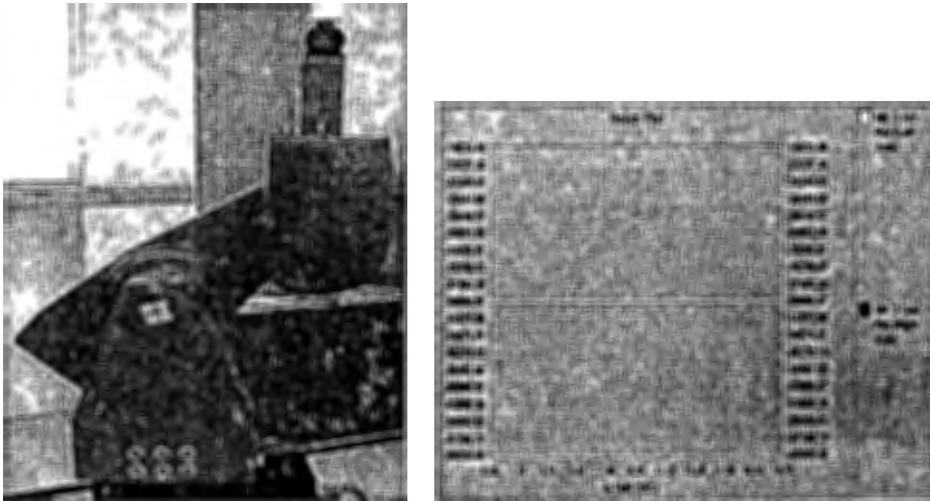


Figura 5.8: $\theta_2 = 135; \theta_3 = 135$. Gráfica del codificador

4. $\theta_2 = 45, \theta_3 = 135; v_2 = -3.889 - 1.889 = -5.778$

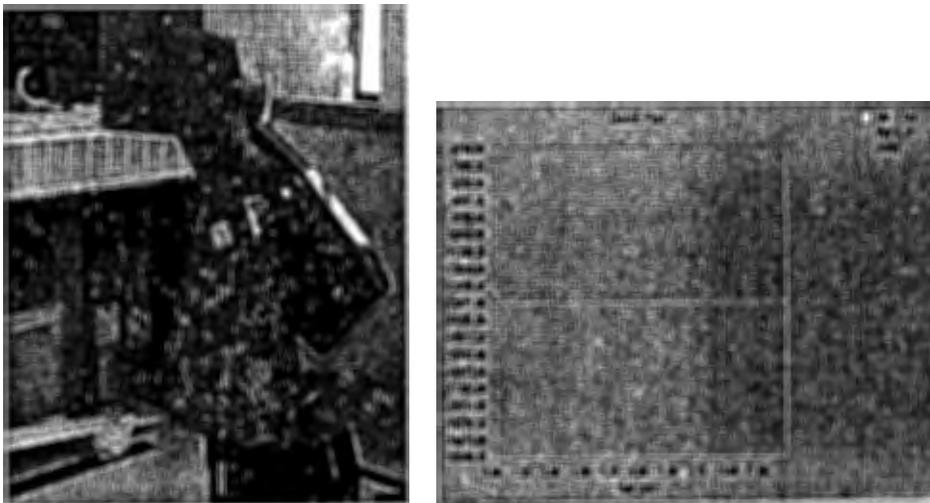


Figura 5.9: $\theta_2 = 45; \theta_3 = 135$. Gráfica del codificador

5. $\theta_2 = 35, \theta_3 = 55; v_2 = -4.5 + 0.4698 - 0.646 = -4.68$

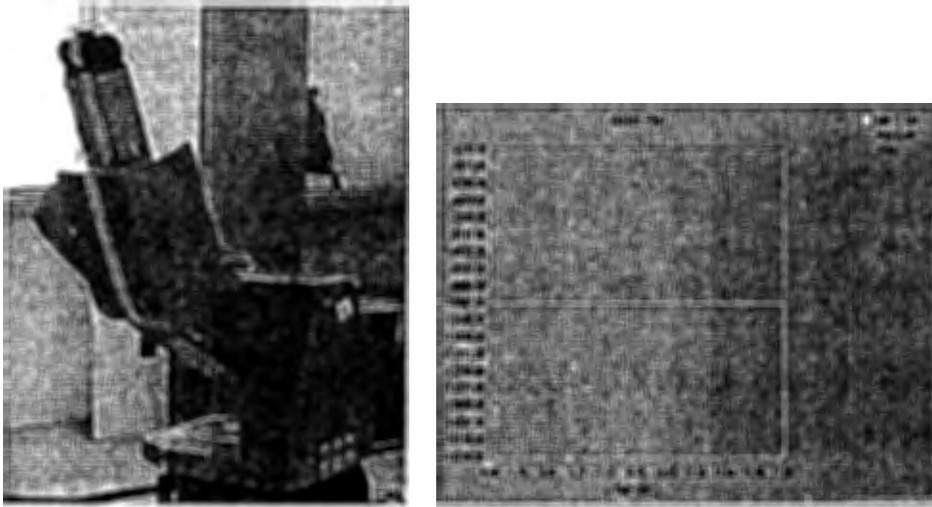


Figura 5.10: $\theta_2 = 35; \theta_3 = 55$. Gráfica del codificador

En todas las configuraciones el efecto de la gravedad fue compensado de manera satisfactoria.

Para verificar que el método empleado para la obtención de los argumentos es correcto fue hecha la identificación para el tercer eslabón empleando una carga de 4 Kg. La ecuación que describe la compensación de la gravedad es la ecuación 5.2.8 y al igual que en el eslabón dos se seleccionó un grupo de ángulos.

(i) $\theta_2 = 90, \theta_3 = 0$ con estos ángulos la ecuación 5.2.8 queda de la siguiente manera:

$$v_3 = \frac{Ra_3g}{r_3Ka_3} [m_3l_3 + m_4l_4 - m_5l_5 \cos \theta_5 + m_5d_4] \quad (5.2.20)$$



Figura 5.11: $\theta_2 = 90; \theta_3 = 0$

para este caso el voltaje necesario para mantener el eslabón en esta posición fué de $-3volts$. Al igual que en el eslabón dos la posición de θ_5 no influye en el voltaje necesario para mantener el eslabón.

(ii) $\theta_2 = 45$, $\theta_3 = 90$ la ecuación 5.2.8 se reduce a:

$$v_3 = \frac{Ra_3}{r_3Ka_3} [g \sin(-45)[m_3l_3 + m_4l_4 - m_5l_5 \cos \theta_5 + m_5d_4] - g \cos(-45)m_5l_5 \cos \theta_4 \sin \theta_5] \quad (5.2.21)$$



Figura 5.12: $\theta_2 = 45; \theta_3 = 90$

El voltaje para esta configuración es: $1.5volts$. Se sustituye en la ecuación 5.2.21 el valor obtenido para la ecuación 5.2.20

$$-3(0.7071) - (0.7071) \frac{Ra_3g}{r_3Ka_3} m_5l_5 \cos \theta_4 \sin \theta_5 = 1.5 \quad (5.2.22)$$

$$\frac{Ra_3g}{r_3Ka_3} m_5l_5 \cos \theta_4 \sin \theta_5 = 0.8786 \quad (5.2.23)$$

Así la ecuación 5.2.8 con las constantes identificadas queda de la siguiente manera:

$$v_3 = -3 \sin(\theta_2 - \theta_3) - 0.8786 \cos(\theta_2 - \theta_3) \quad (5.2.24)$$

A partir de la ecuación 5.2.24 es posible conocer el voltaje suficiente para compensar el efecto de la gravedad en el eslabón tres con una carga de $4Kg$ en el extremo del manipulador.

Ahora, al igual que para la validación del modelo del eslabón dos sin carga son seleccionadas configuraciones al azar, se sustituye la posición en el modelo y es obtenido el voltaje que se deberá suministrar al servoamplificador para compensar el efecto gravitatorio.

1. $\theta_2 = 0, \theta_3 = 90; v_3 = 3$

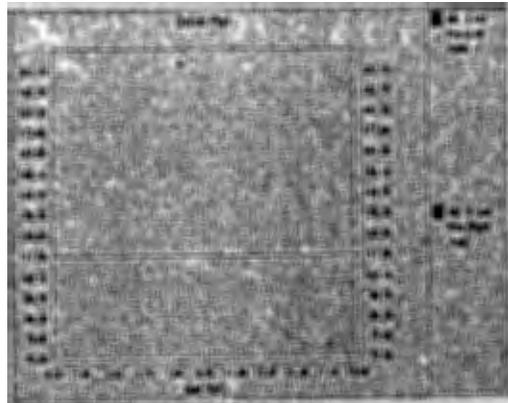


Figura 5.13: $\theta_2 = 0; \theta_3 = 90$. Gráfica del codificador

2. $\theta_2 = 30, \theta_3 = 65; v_3 = 1.7207 - 0.7197 = 1.001$

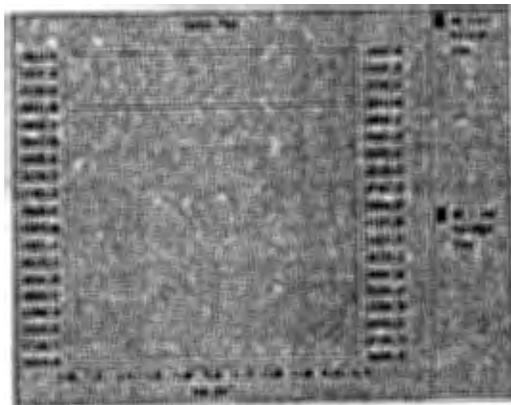


Figura 5.14: $\theta_2 = 30; \theta_3 = 65$. Gráfica del codificador

3. $\theta_2 = 80, \theta_3 = 120; v_3 = 1.928 - 0.6730 = 1.255$



Figura 5.15: $\theta_2 = 80; \theta_3 = 120$. Gráfica del codificador

4. $\theta_2 = 210, \theta_3 = 60; v_3 = -1.5 + 0.7608 = -0.7391$

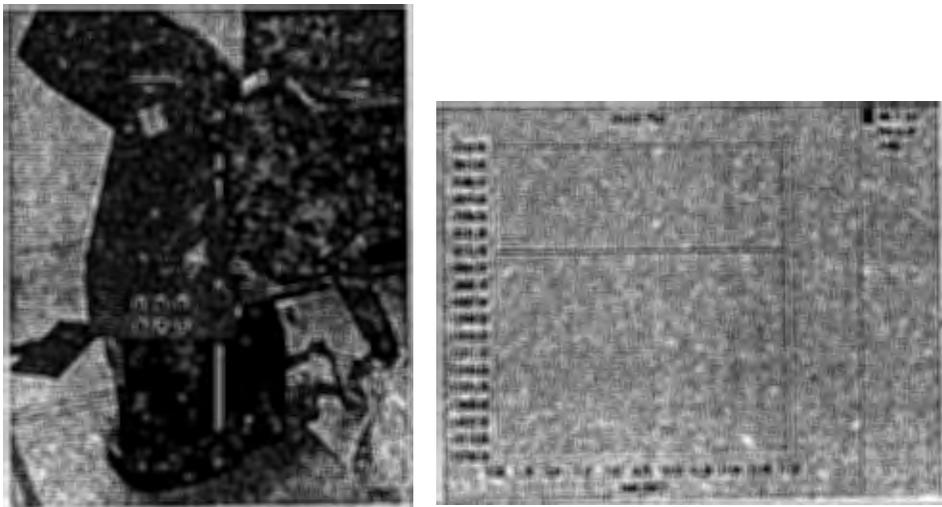


Figura 5.16: $\theta_2 = 210; \theta_3 = 60$. Gráfica del codificador

En todas las configuraciones el efecto gravitatorio fue compensado satisfactoriamente. Con esto se terminó de validar el modelo obtenido, así como también el método empleado.

Capítulo 6

Conclusiones

La validación de la cinemática directa se realizó sin utilizar dispositivos de medición de alta precisión, sin embargo, las diferencias entre los datos obtenidos con la cinemática directa y las mediciones realizadas son aceptablemente pequeños (Veitschegger y Wu 1988), es de esperarse que con instrumentos más precisos se consigan mejores resultados; puede pensarse en la posibilidad de usar algoritmos de calibración para reducir el error de posicionamiento; sin embargo, en la mayoría de los casos el parámetro de referencia dentro de los manipuladores es por lo general la repetibilidad, ya que la precisión a menudo es pobre comparada con ésta (Zhou et al). Al controlar un robot el modelo cinemático no es aplicado directamente; puede ser usado para llevar al manipulador, cuando se encuentre lejos del área de trabajo, a una posición cercana al lugar donde realizará una tarea. Esto se podrá hacer haciendo interpolaciones entre el punto donde se encuentra el manipulador y el punto donde se desea que esté, generando posiciones por las cuales el robot deberá de pasar, así el modelo cinemático calculará el posicionamiento de cada unión y brindará los datos al controlador. Por otro lado debe resaltarse la importancia de conocer el MPG para compensar el efecto de la gravedad, con la finalidad de mejorar el control sobre el robot: al conocer el comportamiento del efecto gravitatorio se puede compensar la no linealidad del robot producida por la gravedad y hacer que el control con técnicas lineales sea más sencilla. El MPG queda expresado en función de masas, longitudes y parámetros eléctricos difíciles de medir; en este trabajo se ha evitado la necesidad de hacer estas mediciones

mediante experimentos que permiten expresar el MPG en función de voltajes conocidos, una ventaja importante de la técnica utilizada para hacer esto es que permite recalcular el MPG en el caso de que la carga del robot cambie; con la finalidad de mostrar esto último se colocó una carga de 4kg y se verificó experimentalmente, con lo cual podemos concluir que el método seguido para compensar la gravedad es correcto y aplicable a cualquier carga que tenga el manipulador, por ejemplo cuando se tenga en lugar de antorcha un sujetador (*griper*). Existen otras técnicas de compensación como pueden ser los controladores PID, estos controladores son lineales y el MPG es compatible con éstos ya que puede conectarse como una conexión anticipativa (prealimentación) ayudando a eliminar las no linealidades producidas por el efecto de la gravedad; así el modelo irá compensado el efecto de la gravedad conforme el manipulador vaya cambiando de posición y si el MPG no llegará a compensar completamente la gravedad, el término integral del controlador actuará si se presenta esta situación.

Referencias

- Abderrahim M., and Whittaker A.R., 2000 "Kinematic model identification of industrial manipulators", Robotics and Computer Integrated Manufacturing.
- Albala, H., 1982, "Displacement Analysis of the General N-Bar, Single-Loop, Spatial Linkages," ASME J. Mech. Des., Vol. 104, No. 2, pp. 504-525.
- Albala, H. and Angeles, J., 1979, "Numerical Solution to the Input-Output Displacement Equation of the General 7R Spatial Mechanism," Proc. 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanism, pp. 1008-1011.
- Angeles, J. (1997). Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Springer, Nueva York.
- Armstrong, W. M., 1979, "Recursive Solution to the Equations of Motion of an N-link Manipulator," Proc. 5th World Congress on the theory of Machines and Mechanism, Vol. 2, pp. 1343-1346.
- Asada, H., and Slotine, J.J.E., 1986, Robot Analysis and Control, John Wiley & Sons, Inc., USA.
- Barrientos, A., Peñin, L.P., Balaguer, C., y Aracil, R. (1997). Fundamentos de Robótica. McGraw-Hill, España.
- Chase, M. A., 1963, "Vector Analysis of Linkages," ASME J. Eng. Ind., Vol. 85, pp. 289-297.
- Chase, M. A., 1963, "Vector Analysis of Linkages," ASME J. Eng. Ind., Vol. 85, pp. 289-297.

- Denavit, J. And Hartenberg, R. S., 1955, "A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanism Based on Matrices," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 15, pp. 153-169.
- Duffy, J., 1980, *Analysis of Mechanism and Robot Manipulators*, Wiley, New York.
- Duffy, J. and Crane, C., 1980, "A Displacement Analysis of General Spatial 7R Mechanism," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 15, pp. 153-169.
- Duffy, J. and Rooney, J., 1975, "A Foundation for Unified Theory of Analysis of Spatial Mechanism," *ASME J. Eng. Ind.*, Vol. 97, No. 4, pp. 1159-1164.
- Fraczek J., and Busko Z., 1999 "Calibration of multi robot system without and load using electronic theodolites" *IEEE*.
- Freudenstein, F., 1973, "Kinematics: Past, Presente, and Future," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 8, No. 2, pp. 151-161.
- Frish, H.P., 1974, "A Vector-Dyadic Development of the Equations of Motion for N.Copled Rigid Bodies and Point Masses"(NBOD2), NASA TN D-7767, NASA, Wasington, DC.
- Fu, K.S., Gonzalez, R.C., and Lee, C.S.G., 1987, *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*, McGraw-Hill, New York.
- Goldestein, H., 1980, *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, MA.
- Haug, E. J., 1989, *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*, Allyn and Bacon, Needham Heights, MA.
- Hayati, S. and Mirmirani, M., 1985, "Improving the Absolute Positioning Accuracy of Robot Manipulators" *ASME J. Rob. Sys.*, Vol. 2, No.1 p.p. 397-413.
- Hollerbach, J. M., 1980, "A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics of Formulation Complexity," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, Vol. SMC-10, No. 11, pp. 730-736.

- Kane, T. R. and Levinson, D.A., 1980, "Formulation of Ecuations of Motion for Complex Spacecraft," *J. Guidance Control*, Vol. 3, pp. 99-112.
- Kirchner H.O.K., Gurumoorthy B. and Prinz F.B., 1987, "A Perturbation Approach to Robot Calibration" *ASME J. Rob. Sys.*, Vol. 6, No.4 p.p. 47-59.
- Kohli, D. and Soni, A. H., 1975, "Kinematics Analysis of Spatial Mechanism via Successive Screw Displacement," *ASME J. Eng. Ind.*, Vol. 97, No. 2, pp. 739-747.
- Lee, C.S.G., Lee, B. H., and Nigam, R., 1983, "Development of the Generalized d'Alembert Equations of Motion for Mechanical Manipulators," *Proc. 22nd Conference on decision and Control*, San Antonio, TX, pp. 1205-1210.
- Lee, H. Y. and Liang, C.G., 1988a, "A New Vector for the Analysis of Spatial Mechanisms," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 23, No. 3 pp. 209-217.
- Lee, H. Y. and Liang, C.G., 1988b, "Displacement Analysis of the General Spatial 7-Links 7R Mechanism," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 23, No. 3 pp. 219-226.
- Luh, J.Y.S., Walker, M.W., and Paul, R.P., 1980, "On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators," *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, Vol. 120, pp. 69-76.
- Nof, S.Y., *Handbook of industrial robotics*, Jhon Wiley & Sons, Inc., U.S.A., 1986.
- Ogata, K., *Ingeniería de control moderno*, Prentice Hall, México, 1993.
- Orin, D.E., McGhee, R.B., Vukobratovic, M., and Hartoch, G., 1979, "Kinematic and Kinetic Analysis of Open-Chain Linkages Utilizing Newton-Euler Methods," *Math. Biosci.*, Vol. 43, pp. 107-130.
- Paul, B., 1979, *Kinematics and Dynamics of Planar Machinery*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J.

- Paul, R. P., 1981, *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Pennock, G. R. and Yang, A.T., 1985, "Application of Dual-Number Matrices to the Inverse Kinematics Problem of Robots Manipulators," *ASME J. Mech. Trans. Autom. Des.*, Vol. 107, No.2, pp. 201-208.
- Pieper, D., 1968, "The Kinematics of Manipulator Under Computer Control," Ph.D. dissertation, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, CA.
- Pieper, D.L. and Roth, B. 1969, "The Kinematics of Manipulator Under Computer Control," *Proc. 2nd International Congress for the Theory of Machines and Mechanisms*, Zakopane, Poland, Vol. 2, pp. 159-168.
- Primrose, E. J. F., 1986, "On the Input-Output Equation of the General 7R-Mechanism," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 21, No. 6, pp. 509-510.
- Raghavan, M. and Roth, B., 1989, "Kinematics Analysis of the 6R Manipulator of General Geometry," *Proc. 5th International Symposium on Robotics Research*, edited by H. Miura and S. Arimoto, MIT Press, Cambridge, MA; preprint 1989, final 1990.
- Raghavan, M. and Roth, B., 1990, "A General Solution for the Inverse Kinematics of All Series Chains," *Proc. 8th CISM-IFTOMM Symposium on Robots and Manipulators (ROMANSY-90)*, Cracow, Poland.
- Renders J.M., Rossignol E., Becquet M., and Hanus R. 1991, "Kinematic Calibration and Geometrical Parameter Identification for Robots" *IEEE Rob. Aut.* Vol.7 No.6 pp. 721-732.
- Röning, J. and Korzum, A., 1997, "A Method for Industrial Robot Calibration", *Proceedings of the IEEE Int. Conf. Rob. Aut.*

- Roth, B., Rastegar, J., and Scheinman, V., 1973, "On the Design of Computer Controller Manipulators; On the Theory and Practice of Robots and Manipulators," Proc. First CISM-IFTOMM Symposium, Vol. 1, pp. 93-113.
- Sheth, P. N. And Uicker, J.J., 1972, "IMP (Integrated Mechanisms Program): A Computer-Aided Design Analysis System for Mechanisms and Linkages," ASME J. Eng. Ind., Vol. 94, pp. 1-20.
- Spong, M.W. and Vidyasagar, M., 1989, Robot Dynamics and Control, Jhon Wiley & Sons, Inc., New York.
- Tsai, L. W., and Morgan, A., 1985, "Solving the Kinematics of the Most General Six and Five-Degree-of-Freedom Manipulators by Continuation Methods," ASME J. Mech. Transm. Autom. Des., Vol. 107, June, pp. 189-200.
- Uicker, J.J., Denavit, J., and Hartenberg, R.S., 1964, "An Iterative Method for Displacement Analysis of Spatial Mechanisms," ASME J. Appl. Mech., Vol. 86, Ser. E, No. 2, pp. 309-314.
- Veitschegger, W.K. and Wu, C.H., 1988, "Robot Calibration and Compensation" IEEE J. Robotics and Automation, Vol. 4(6) pp. 643-656.
- Yang, A.T. 1969, "Displacement Anlysis of Spatial Five-Link Mechanism Using (3x3) Matrices whit Dual Number Elements," ASME J. Eng. Ind., Vol. 9, No.1, pp 152-157.
- Yang, A.T. and Freudenstein, F., 1964, "Application of Dual Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms," ASME J. Appl. Mech., Vol. 86, pp 300-308.
- Young, K., Chen, J. and Wang C., 1996, "An Automated Robot Calibration System Based on a Variable D-H Parameter Model", Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control.

- Yuan, M.S.C. and Freudenstein, F., 1971, "Kinematics Analysis of Spatial Mechanisms by Means of Screw Coordinates," *ASME J. Eng. Ind.*, Vol. 93, No. 1, pp. 61-73.
- Yuan, J. and Yu S.L., 1999 "End-Effector Position-Orientation Measurement" *IEEE Robotics and Automation* Vol.15 No. 3.
- Xu, W. and Mills J.K., 1999 "A New Approach to the Position and Orientation Calibration of Robots" *Proc. IEEE Int. Sym. Assem. Task Plann.*
- Zhou, X., Zhang Q., Gruver, W.A. and Guo, G. "Distance and Positioning Accuracy for Robotics Manipulators" *IEEE* pp. 1399-1404.

Anexos

6.1 Anexo uno: artículo



La Asociación Mexicana de Robótica A.C.

en el marco de su

**3º Congreso Mexicano
de Robótica**

Otorga el presente

Reconocimiento a:

Carlos Guillermo López Guevara

Por su entusiasta participación como conferencista



Santiago de Querétaro, Qro., a 28 de Septiembre del 2001

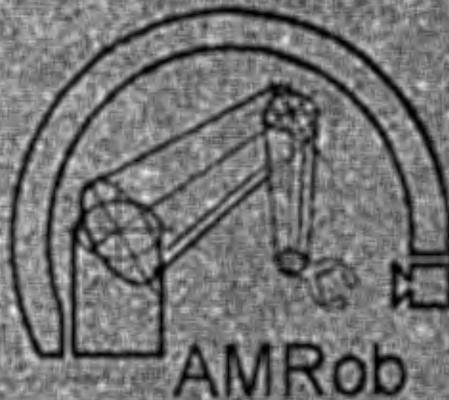
Dr. Juan Manuel Ibarra Zannatha

Presidente de la Asociación Mexicana de Robótica

Dr. José Emilio Vargas Soto

Coordinador General del Congreso

AMRob
Asociación Mexicana de Robótica, A.C.



Memorias del
3er. Congreso Mexicano de Robótica

Santiago de Querétaro, Qro, México
25 al 28 de Septiembre del 2001



Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Querétaro
Campus Querétaro

Validación del Modelo Cinemático Directo y del Modelo de Pares Gravitacionales de un Robot Industrial

López Guevara, Carlos Guillermo y Hernández Guzmán, Victor Manuel

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería, centro universitario, cerro de las campanas, CP. 76010, Querétaro Qro.
e-mail: glopez@sunserver.uaq.mx

Resumen

En el presente trabajo se valida el modelo cinemático directo de un robot industrial, se obtiene y verifica la validez del modelo de pares gravitacionales correspondiente; los resultados aquí obtenidos están dirigidos al desarrollo de controladores de posición de robots. Esta investigación forma parte del proyecto "Desarrollo de una estación robotizada de soldadura". Un aspecto importante del trabajo aquí presentado es mostrar la manera de validar el modelo de un robot de manera experimental, lo cual es difícil de encontrar en la literatura.

Palabras clave: cinemática directa, modelo de pares gravitacionales, validación experimental de modelos.

1. Introducción

En la Universidad Autónoma de Querétaro se está desarrollando una estación robotizada de soldadura utilizando el manipulador Romat 56. Este manipulador es un modelo industrial de 6 grados de libertad (GDL) del cual no conocemos sus dimensiones o alguna otra especificación técnica; por esta razón es necesario obtener los modelos matemáticos necesarios para controlar dicho robot. Uno de los modelos es el modelo cinemático directo (MCD), la importancia de este modelo es que nos ayuda a colocar la herramienta que se encuentra en el extremo del manipulador, en algún punto del espacio; en un trabajo previo [1] Martínez reportó el MCD del robot utilizado en este proyecto. Uno de los objetivos del presente artículo es validar experimentalmente el MCD; la importancia de la validación radica en comprobar que el MCD es correcto, así como determinar la magnitud de los errores existentes.

El control de posición de un robot es un problema complejo pues se trata de un sistema fuertemente no lineal y acoplado, sin embargo, en tareas de soldadura los movimientos del robot son relativamente lentos por lo que pueden despreciarse los efectos inerciales, centrífugos y de Coriolis [2]; como consecuencia, el efecto de la gravedad es el único importante a tomar en cuenta para el control del robot. Una manera conveniente de controlar el robot es eliminando el efecto de la gravedad, de este modo puede controlarse cada unión de manera independiente. En este trabajo se obtiene el modelo de pares gravitacionales (MPG) correspondiente al robot Romat 56 y es validado experimentalmente.

2. Validación experimental del MCD

La validación experimental consiste en tomar mediciones sobre la estructura del robot para compararlas con los resultados obtenidos con el MCD. La validación fue realizada del siguiente modo: a) medición de la longitud de los eslabones, b) ubicar el marco de coordenadas base, c) encontrar la relación grados/cuentas para cada encoder y d) validar el MCD.

En la tabla número 1 se muestra la longitud medida de cada uno de los eslabones, expresadas como parámetros de Denavit-Hartenberg [1,2] (d_1, a_2, d_4, d_6), los cuales se muestran esquemáticamente en las figuras 1, 2.

Parámetro D-H	Longitud (mm)
d_1	900
a_2	432
d_4	428
d_6	067

Tabla 1



Figura 1: $\theta_1=0$; $\theta_2=0$

El origen del marco coordenado base, O_0 , se ubica en el punto donde se cruzan los ejes z_0 y z_1 [1] como se muestra en la figura 2. Sin embargo, para facilitar las mediciones las posiciones verticales son referidas a un punto que está a una distancia d_1 por debajo de O_0 , es decir sobre el piso. Los ejes x_0 y y_0 son perpendiculares entre sí y se seleccionan como se muestra en la figura 3. Estos ejes los trazamos sobre el piso valiéndonos de las facilidades mecánicas del robot.

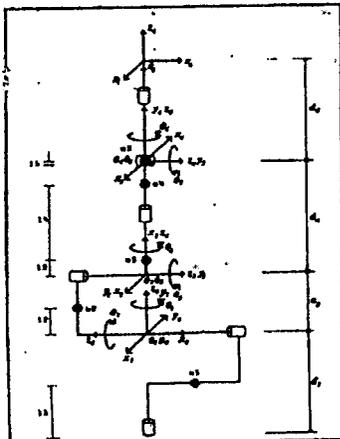


Figura 2: Definición de las distancias de los centros de masa.

El máximo ángulo de giro de cada eslabón es presentado en la tabla 2.

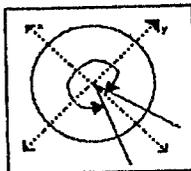


Figura 3: Rango máximo de giro del eslabón uno. Vista superior.

Eslabón	Angulo	Cuentas	Grados/cuentas
1	328°	51645	1°/174.79
2	260°	77636	1°/177.24
3	280°	40762	1°/220.13
4	333°	59021	1°/157.45
5	197°	34433	1°/145.57
6	370°	81451	1°/298.60

Tabla 2

Las cuentas correspondientes a cada eslabón se muestran en la tabla 2 y las medidas utilizando el software que acompaña a la tarjeta de control de movimiento utilizada (tarjeta de control de movimiento "PMAC PC" de Delta Tau data system, Inc.). Con estos datos fueron calculadas las relaciones grados/cuentas mostradas en la tabla 2.

Finalmente se valida el modelo cinemático del siguiente modo: Las coordenadas P_x , P_y , P_z del órgano terminal del robot están dadas como funciones de los seis ángulos de unión [1]; estas funciones son evaluadas numéricamente usando un programa de computadora, después los resultados obtenidos son comparados con las posiciones P_{xm} , P_{ym} , P_{zm} del órgano terminal medidas directamente sobre el robot. Hicimos un exhaustivo estudio en el que propusimos diferentes configuraciones $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$, algunos de los resultados son mostrados en la tabla 3.

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ °	P_x	P_y	P_z *
	P_{xm}	P_{ym}	P_{zm}
30, 0, 90, 0, 180, 0	0.803	0.463	0.000
	0.795	0.464	0.000
-90, 0, 90, 0, 180, 0	0.000	-0.927	0.000
	0.000	-0.923	0.000
0, 0, 90, 0, 180, 0	0.927	0.000	0.000
	0.936	0.000	0.038
0, 0, 30, 0, 180, 0	0.678	0.000	0.430
	0.681	0.000	0.435
90, 60, 90, 0, 180, 0	0.000	0.463	0.803
	0.000	0.463	0.813
90, 180, 90, 0, 180, 0	0.000	-0.927	0.000
	0.000	-0.918	-0.017

Tabla 3: °, unidades en grados; *, unidades en metros.

Los resultados obtenidos los consideramos buenos ya que encontramos una diferencia máxima de 1 cm. entre las mediciones experimentales y los resultados entregados por el modelo en cualquiera de los ejes X,Y,Z; creemos que empleando técnicas más sofisticadas para la medición de la posición del órgano terminal esta diferencia deberá ser menor. Por otro lado haciendo un estudio de calibración el error debe ser reducido significativamente.

3. Modelo de pares gravitacionales

El modelo dinámico (MD) de un manipulador de n grados de libertad está dado como [2]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (3.1)$$

donde $M(q)$ es una matriz simétrica definida positiva, de $n \times n$ denominada *matriz de inercias*; $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es un vector de $n \times 1$ llamado *vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis*; $g(q)$ es un vector de $n \times 1$ de *fuerzas o pares gravitacionales*; τ es un vector de $n \times 1$ llamado *vector de fuerzas externas*.

Como se mencionó anteriormente en aplicaciones industriales de soldadura los movimientos del robot son lentos [4], como consecuencia los términos de inercia, de fuerzas centrífugas y de Coriolis tienen poco efecto [2,5]; en este caso el término gravitacional es el único realmente importante. Una manera de controlar un robot en este tipo de aplicaciones consiste en controlar independientemente cada una de las uniones, la idea fundamental se basa en considerar que el robot está compuesto por n motores independientes de corriente directa; de este modo los controladores pueden ser diseñados utilizando técnicas de sistemas lineales, el único requisito es que el término gravitacional sea compensado adecuadamente. Con esta finalidad obtenemos a continuación los términos del modelo de pares gravitacionales.

Sabemos que el vector $g(q)$ es el gradiente de la energía potencial $U(q)$ [2]; este tipo de energía es consecuencia de fuerzas conservativas como la fuerza de la gravedad. La energía potencial de cada uno de los eslabones está dada como:

$$U_1(\theta) = m_1 l_1 g \quad (3.2)$$

$$U_2(\theta) = m_2 (d_1 + l_2 \text{sen} \theta_2) g \quad (3.3)$$

$$U_3(\theta) = m_3 (l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + a_3 \text{sen} \theta_2 + d_1) g \quad (3.4)$$

$$U_4(\theta) = m_4 (l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + a_4 \text{sen} \theta_2 + d_1) g \quad (3.5)$$

$$U_5(\theta) = m_5 (l_1 \cos \theta_2 \text{sen} \theta_3 \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) - l_2 \cos \theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - d_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + a_5 \text{sen} \theta_2 + d_1) g \quad (3.6)$$

$$U_6(\theta) = m_6 (d_4 \cos \theta_2 \text{sen} \theta_3 \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) - d_4 \cos \theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + d_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + a_6 \text{sen} \theta_2 + d_1) g \quad (3.7)$$

donde m_i es la masa del eslabón i ; l_i es la distancia al centro de masa —ver figura 2—; g , es la aceleración de la gravedad; $\theta_i = q_i$ denota la posición angular del eslabón i ; $i=1, \dots, 6$.

El eslabón seis es muy ligero, por lo tanto podemos asumir que su masa es cero; con esto reducimos el MPG. Una vez obtenida la energía potencial total:

$$U(\theta) = U_1(\theta) + U_2(\theta) + U_3(\theta) + U_4(\theta) + U_5(\theta) + U_6(\theta) \quad (3.8)$$

el vector $g(\theta)$ se calcula como el gradiente de la energía potencial:

$$g(\theta) = \left[\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_1}, \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_2}, \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_3}, \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_4}, \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_5}, \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_6} \right] \quad (3.9)$$

donde:

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_1} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_2} = g \cos \theta_2 [m_1 l_2 + m_2 a_2 + m_3 a_3 + m_4 a_4] + g \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) [-m_3 l_2 - m_4 l_2 + m_5 l_2 \cos \theta_3 - m_6 d_2] + g \cos(\theta_2 - \theta_1) [m_3 l_1 \text{sen} \theta_3 \cos \theta_3] \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_3} = g \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) [m_3 l_2 + m_4 l_2 - m_5 l_2 \cos \theta_3 + m_6 d_2] - g \cos(\theta_2 - \theta_1) [m_3 l_1 \cos \theta_3 \text{sen} \theta_3] \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_4} = -g \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) [m_3 l_1 \text{sen} \theta_3 \text{sen} \theta_3] \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_5} = g \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) [m_5 l_2 \cos \theta_3 \cos \theta_3] + g \cos(\theta_2 - \theta_1) [m_5 l_1 \text{sen} \theta_3] \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_6} = 0 \quad (3.15)$$

La ecuación 3.9 representa el par debido a la gravedad, este deberá ser compensado utilizando una señal de voltaje que será aplicada a los actuadores (motores de CD). El modelo de un motor de CD está dado como [3]:

$$J\ddot{Q} + F\dot{Q} + r\tau = R_c^{-1} K_c r^{-1} V \quad (3.16)$$

donde R_c , K_c , r , J son matrices diagonales de $(n \times n)$ que representan —respectivamente— las resistencias de armadura, las constantes de par, las relaciones de

reducción de los engranes y las inercias de los motores; Q , vector de $(1 \times n)$ compuesto por las posiciones angulares de la carga en cada motor; V , vector de $(1 \times n)$ compuesto por los voltajes de armadura de cada uno de los motores; ξ vector de $(1 \times n)$ compuesto por los pares de carga.

El efecto de la gravedad debe ser compensado en estado estacionario por lo que podemos asumir que $Q = Q = 0$; bajo esta condición la ecuación 3.16 se reduce a:

$$V = r^{-1} K_a^{-1} R_a \tau \quad (3.17)$$

considerando:

$$g(\theta) = \tau \quad (3.18)$$

es posible escribir la ecuación 3.17 como:

$$V = r^{-1} K_a^{-1} R_a g(\theta) \quad (3.19)$$

Así, la ecuación 3.19 nos permite calcular el voltaje necesario para compensar el efecto de la gravedad. Sustituyendo 3.10 - 3.15 en 3.19 se obtiene:

$$v_1 = 0 \quad (3.20)$$

$$v_2 = \frac{Ra_2}{r_2 Ka_2} (g \cos \theta_1 [m_2 l_1 + m_2 a_1 + m_2 a_2 + m_2 a_3] + g \sin(\theta_1 - \theta_2) [-m_2 l_1 - m_2 l_2 + m_2 l_3 \cos \theta_1 - m_2 d_1] + g \cos(\theta_1 - \theta_2) [m_2 l_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1]) \quad (3.22)$$

$$v_3 = \frac{Ra_2}{r_2 Ka_2} (g \sin(\theta_1 - \theta_2) [m_2 l_1 + m_2 l_2 - m_2 l_3 \cos \theta_1 + m_2 d_1] - g \cos(\theta_1 - \theta_2) [m_2 l_3 \sin \theta_1]) \quad (3.23)$$

$$v_4 = \frac{Ra_2}{r_2 Ka_2} [-g \sin(\theta_1 - \theta_2) m_2 l_3 \sin \theta_1 \sin \theta_1] \quad (3.24)$$

$$v_5 = \frac{Ra_2}{r_2 Ka_2} (g \sin(\theta_1 - \theta_2) m_2 l_3 \cos \theta_1 \cos \theta_1 + g \cos(\theta_1 - \theta_2) m_2 l_3 \sin \theta_1) \quad (3.25)$$

Estas ecuaciones están en términos de las masas, ubicación de los centros de masa y las constantes eléctricas de los motores, las cuales son difíciles de medir; sin embargo, es posible obtener estas ecuaciones en términos de voltajes. Para esto, son seleccionadas configuraciones especiales para el robot y experimentalmente se determinan los voltajes que deben ser aplicados a cada motor para mantener el robot estable. A continuación se describen los experimentos realizados.

3.1 Identificación de los coeficientes del MPG como funciones de voltaje

Eslabón uno

Como puede verse en la ecuación 3.20 el vector de pares gravitacionales es independiente de los movimientos de este eslabón.

Eslabón dos

Los coeficientes de la ecuación 3.21 se identifican seleccionando tres configuraciones diferentes:

1. $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 0$. La configuración correspondiente se muestra en la figura 1; con esta selección de ángulos la ecuación 3.21 se reduce a:

$$v_2 = \frac{g Ra_2}{r_2 Ka_2} ([m_2 l_1 + m_2 a_1 + m_2 a_2 + m_2 a_3] + [m_2 l_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1]) \quad (3.26)$$

El voltaje que debe ser aplicado en esta configuración es $v_2 = -5 \text{ volts}$. Es de interés destacar que en esta configuración se hicieron variar θ_1 , θ_2 y el voltaje fue el mismo; con esto podemos concluir que la variación en la posición de estos eslabones no se refleja en la alimentación del motor, por lo tanto, podemos asignarle el valor que mejor nos convenga.

2. $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 180$. La configuración correspondiente se muestra en la figura 4; con esta selección de ángulos la ecuación 3.21 se escribe como:

$$v_2 = \frac{g Ra_2}{r_2 Ka_2} ([m_2 l_1 + m_2 a_1 + m_2 a_2 + m_2 a_3] - [m_2 l_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1]) \quad (3.27)$$



Figura 4: $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = 180$.

En este caso el voltaje necesario para mantener el eslabón estable es de $v_2 = -6 \text{ volts}$; sumando las ecuaciones 3.26 y 3.27, y aplicando los valores de voltaje medido anteriormente podemos obtener:

$$\frac{gRa_2}{r_1Ka_2} [m_2l_2 + m_2a_2 + m_2a_2 + m_2a_2] = -5.5 \quad (3.28)$$

Utilizando las ecuaciones 3.26 y 3.28 obtenemos:

$$\frac{gRa_2}{r_1Ka_2} [m_2l_2 \text{sen}\theta_2 \text{cos}\theta_1] = 0.5 \quad (3.29)$$

3. $\theta_2 = 45$ y $\theta_1 = -45$. La configuración correspondiente se muestra en la figura 5; con esta selección de ángulos la ecuación 3.21 queda:

$$-5.5 \cos 45 + \frac{gRa_2}{r_1Ka_2} [m_2l_2 \text{sen}\theta_2 \text{cos}\theta_1 - m_2d_2] = v_2 \quad (3.30)$$



Figura 5: $\theta_2 = 45$; $\theta_1 = -45$

En este caso el voltaje para compensar el efecto de la gravedad fue $v_2 = -2\text{volts}$; sustituyendo este valor en 3.30 se obtiene:

$$\frac{gRa_2}{r_1Ka_2} [m_2l_2 \text{sen}\theta_2 \text{cos}\theta_1 - m_2d_2] = 1.889 \quad (3.31)$$

Finalmente el voltaje necesario para compensar el efecto de la gravedad se puede calcular como:

$$v_2 = -5.5 \cos \theta_2 + 0.5 \cos(\theta_2 - \theta_1) + 1.889 \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.32)$$

Eslabón tres

La ecuación 3.22 nos describe los efectos de la gravedad sobre el eslabón tres. Una vez que son seleccionados los ángulos para poder identificar los coeficientes de esta ecuación se procede de la misma forma que en el caso del eslabón dos; sin embargo, el eslabón tres tiene compensado de manera mecánica el efecto de la gravedad. Esto permite que el eslabón permanezca en cualquier posición sin necesidad de que le sea suministrado algún voltaje.

Eslabón cuatro y cinco

Por las características mecánicas de estos eslabones no se requiere compensar el efecto gravitacional.

4. Validación del MPG

Para validar el modelo de pares gravitacionales seleccionamos al azar diferentes configuraciones, sustituimos los ángulos seleccionados en el modelo y una vez que es calculado el voltaje necesario para compensar el efecto de la gravedad es aplicado al servodriver del motor correspondiente. Las pruebas fueron hechas sobre el motor dos, ya que éste es el único eslabón que es afectado por la gravedad; algunas configuraciones utilizadas, así como el voltaje calculado se muestran a continuación (ver figura 6):

1. $\theta_2 = 0^\circ, \theta_1 = 90^\circ; v_2 = -7.39$
2. $\theta_2 = 45^\circ, \theta_1 = 135^\circ; v_2 = -5.78$

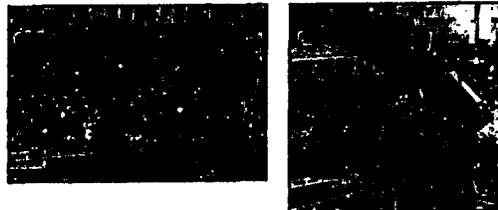


Figura 6: $\theta_2 = 0, \theta_1 = 90; \theta_2 = 45, \theta_1 = 135$

En todas las configuraciones experimentadas el efecto de la gravedad fue compensado satisfactoriamente.

Este modelo de pares gravitacionales fue obtenido considerando que el robot no tiene carga, en el caso de que el robot cuente con una herramienta en el órgano terminal, el modelo de pares gravitacionales cambiará. A continuación se muestra como el procedimiento puede ser obtenido cada vez que la carga cambie; por razones de espacio solamente se presenta la identificación del modelo para el eslabón tres cuando la carga en el extremo del robot es de 4kgs. Son seleccionadas dos configuraciones diferentes.

- (i) $\theta_2 = 90, \theta_1 = 90$. Con esta selección de ángulos la ecuación 3.22 queda de la siguiente manera:

$$v_2 = \frac{Ra_2g}{r_1Ka_2} [m_2l_2 + m_2l_2 - m_2l_2 \cos \theta_2 + m_2d_2] \quad (4.1)$$

el voltaje necesario para mantener el eslabón en esta posición fue de $v_3 = -3\text{volts}$; como sucedió con el eslabón dos, la posición de θ_3 no influye en el voltaje necesario para mantener la configuración estable.

(ii) $\theta_2 = 45$, $\theta_3 = 90$. Con esta selección de ángulos la ecuación 3.22 se reduce a:

$$v_3 = \frac{Ra_3g}{r_3Ka_3} [g\text{sen}(-45)(m_3l_3 + m_4l_4 - m_4l_4 \cos\theta_3 + m_4d_4)] - g \cos(-45)m_3l_3 \cos\theta_2 \text{sen}\theta_3 \quad (4.2)$$

El voltaje necesario para esta configuración fue $v_3 = 1.5\text{volts}$; usando las ecuaciones 4.2 y 4.1, así como los voltajes obtenidos en cada caso se obtiene:

$$\frac{Ra_3g}{r_3Ka_3} m_3l_3 \cos\theta_2 \text{sen}\theta_3 = 0.8786 \quad (4.3)$$

Finalmente el voltaje que compensa el efecto gravitacional está dado por:

$$v_3 = -3\text{sen}(\theta_2 - \theta_3) - 0.8786 \cos(\theta_2 - \theta_3) \quad (4.4)$$

Con la finalidad de validar el modelo obtenido seleccionamos varias configuraciones al azar y calculamos el voltaje necesario para compensar la gravedad usando la ecuación 3.36. A continuación se muestran dos de las configuraciones usadas así como los voltajes calculados en cada caso (ver figura 7):

1. $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = 90$; $v_3 = 3\text{volts}$.
2. $\theta_2 = 210$, $\theta_3 = 60$; $v_3 = -0.73\text{volts}$.

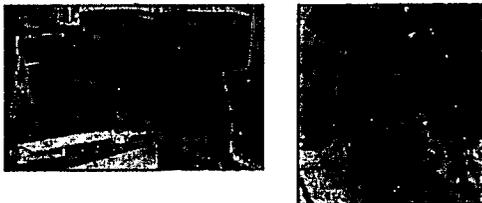


Figura 7: $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = 90$; $\theta_2 = 210$, $\theta_3 = 60$

en todas las configuraciones el efecto gravitatorio fue compensado satisfactoriamente.

5. Conclusiones

La validación del MCD se realizó sin utilizar dispositivos de medición de alta precisión, sin embargo, los errores obtenidos son aceptablemente

pequeños, es de esperarse que con instrumentos más precisos se consigan mejores resultados; puede pensarse en la posibilidad de posteriormente usar algoritmos de calibración para reducir el error de posicionamiento. Por otro lado debe resaltarse la importancia de conocer el MPG para compensar el efecto de la gravedad, con la finalidad de optimizar el control sobre el robot. El MPG queda expresado en función de masas, longitudes y parámetros eléctricos difíciles de medir; en este trabajo se ha evitado la necesidad de hacer estas mediciones mediante experimentos que permiten expresar el MPG en función de voltajes conocidos, una ventaja importante de la técnica utilizada para hacer esto es que permite recalcular el MPG en el caso de que la carga del robot cambie; con la finalidad de mostrar esto último se colocó una carga de 4kg y se verificó experimentalmente, con lo cual podemos concluir que el método seguido para compensar la gravedad es correcto y aplicable a cualquier carga que tenga el manipulador.

Agradecimientos

El proyecto "Desarrollo de una estación robotizada de soldadura" ha sido financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y el Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Querétaro (CONCYTEQ).

Referencias

- [1] Martínez E., Hernández V., Zavala A., López C.G., y López C.S. "Estudio de la cinemática de un robot industrial", Segunda semana de quehacer científico y tecnológico en Querétaro, CONCYTEQ, Querétaro, Qro. 2000.
- [2] Spong, M. and Vidyasagar, M. "Robot Dynamics and Control" Jhon Wiley & Sons, Inc., U.S.A., 1989.
- [3] Ogata, K. "Ingeniería de control moderno", Prentice Hall, México, 1993.
- [4] Noí, S., "Handbook of industrial robotics", Jhon Wiley & Sons, Inc., U.S.A., 1999.
- [5] Asada, H. And Slotine, J., "Robot analysis and control", Jhon Wiley & Sons, Inc., U.S.A., 1986.

6.2 Anexo dos: programa

```

d6=0.067;
d4=0.428;
a2=0.432;
%s=1;
%WHILE s == 1
%Obtener los agulos deseados
o11=input('Theta 1 ');
o22=input('Theta 2 ');
o33=input('Theta 3 ');
o44=input('Theta 4 ');
o55=input('Theta 5 ');
o66=input('Theta 6 ');
o1=o11*pi/180;
o2=o22*pi/180;
o3=o33*pi/180;
o4=o44*pi/180;
o5=o55*pi/180;
o6=o66*pi/180;
%Calculos para Pcx
e11=d6*sin(o5)*cos(o1)*cos(o2)*cos(o3)*cos(o4);
e12=d6*sin(o2)*sin(o3)*sin(o5)*cos(o1)*cos(o4);
e13=d6*sin(o1)*sin(o4)*sin(o5);
e14=d6*sin(o3)*cos(o1)*cos(o2)*cos(o5);
e15=d6*sin(o2)*cos(o1)*cos(o3)*cos(o5);
e16=d4*sin(o3)*cos(o1)*cos(o2);
e17=d4*sin(o2)*cos(o1)*cos(o3);
e18=a2*cos(o1)*cos(o2);
Pcx=e11+e12-e13-e14+e15+e16-e17+e18

```

```
%Calculo para Pcy
e21=d6*sin(o1)*sin(o5)*cos(o2)*cos(o3)*cos(o4);
e22=d6*sin(o1)*sin(o2)*sin(o3)*sin(o5)*cos(o4);
e23=d6*sin(o4)*sin(o5)*cos(o1);
e24=d6*sin(o1)*sin(o3)*cos(o2)*cos(o5);
e25=d6*sin(o1)*sin(o2)*cos(o3)*cos(o5);
e26=d4*sin(o1)*sin(o3)*cos(o2);
e27=d4*sin(o1)*sin(o2)*cos(o3);
e28=a2*sin(o1)*cos(o2);
Pcy=e21+e22+e23-e24+e25+e26-e27+e28
%Calculo para Pcz
e31=d6*sin(o2)*sin(o5)*cos(o3)*cos(o4);
e32=d6*sin(o3)*sin(o5)*cos(o2)*cos(o4);
e33=d6*sin(o2)*sin(o3)*cos(o5);
e34=d6*cos(o2)*cos(o3)*cos(o5);
e35=d4*sin(o2)*sin(o3);
e36=d4*cos(o2)*cos(o3);
e37=a2*sin(o2);
Pcz=e31-e32-e33-e34+e35+e36+e37
% s=input('Deseas hacer otra iteración');
%END
```

6.3 Anexo tres: cálculo intermedio de la CD

En este anexo expondremos los pasos intermedios en la obtención del MCD, es decir, la multiplicación de las matrices de transformación homogénea que conforma el MCD. Las matrices de transformación homogéneas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & 0 & -\cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & \sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & 0 & -\cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & 0 & -\cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_6 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

El modelo se obtiene:

$$T_0^6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad (6.3.1)$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & a_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 & a_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.2)$$

$$T_3^4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 \cos \theta_4 & \sin \theta_3 & \sin \theta_4 \cos \theta_3 & d_4 \sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 \cos \theta_4 & -\cos \theta_3 & \sin \theta_3 \sin \theta_4 & -d_4 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_4 & 1 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.3)$$

$$T_5^6 = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 \sin \theta_5 & \sin \theta_5 & d_6 \sin \theta_5 \\ \sin \theta_5 \cos \theta_6 & -\sin \theta_5 \sin \theta_6 & -\cos \theta_5 & -d_6 \cos \theta_5 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.4)$$