Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Psicología
Maestría en Desarrollo y Aprendizajes Escolares

El uso de tablas en la comprensión de las relaciones de problemas complejos de tipo multiplicativo en niños de 6° grado de primaria

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de Maestro en Desarrollo y Aprendizajes Escolares

Presenta:
Anahí Isabel Arellano Vega

Dirigido por:
Dra. Andrea Leticia López Pineda

Santiago de Querétaro, Qro; diciembre 2012

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Psicología
Maestría en Desarrollo y Aprendizajes Escolares

El uso de tablas en la comprensión de las relaciones de problemas complejos de tipo multiplicativo en niños de 6º grado de primaria

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Maestro en Desarrollo y Aprendizajes Escolares

Presenta:
Anahí Isabel Arellano Vega

Dirigido por:

Dra. Andrea Leticia López Pineda

SINODALES

Dra. Andrea Leticia López Pineda
Presidente
Firma

Dra. Sofia Alejandra Vernon Carter
Secretario
Firma

Dra. Karina Hess Zimmermann
Vocal
Firma

Dra. Diana Violeta Solares Pineda
Suplente
Firma

Mtra. Martha Beatriz Soto Martínez
Suplente
Firma

M.D.H. Jaime Eleazar Rivas Medina
Nombre y Firma
Director de la Facultad

Dr. Irineo Torres Pacheco
Nombre y Firma
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Diciembre de 2012
México

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es indagar la manera en la cual el uso de tablas influye en los niños, al establecer relaciones adecuadas entre los datos de problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo, y por lo tanto, en el planteamiento de procedimientos apropiados para solucionarlos. Los participantes fueron 45 niños de entre 11 y 12 años de edad que cursaban 6º grado de primaria de una escuela urbana pública federal. La muestra se dividió en tres grupos de 15 integrantes cada uno: el grupo control, el grupo experimental 1 y el grupo experimental 2. Los instrumentos utilizados fueron tres formatos de entrevistas, en las cuales se solicitó a los niños la solución de cuatro problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo. Los niños de los grupos experimentales resolvieron la tarea empleando tablas mientras que los niños del grupo control usaron sólo los enunciados de los problemas. Los resultados obtenidos arrojan diferencias estadísticamente significativas entre los niños, encontrando que tienen mayor éxito para establecer relaciones adecuadas y plantear procedimientos pertinentes cuando utilizan tablas al resolver problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo, respecto de cuando no lo hacen. Asimismo, se ha encontrado que las tablas resultan útiles sólo cuando los niños están en un paso intermedio de comprensión, tanto de las relaciones entre los datos de los problemas aritméticos, como de las características de las tablas que se utilizan para organizar dichas relaciones.

(**Palabras clave**: representaciones externas, tablas, problemas complejos, problemas de tipo multiplicativo)

SUMMARY

The objective of this work is to inquire the way in which the use of tables influences children to establish adequate relationships between the data of arithmetic complex problems of a multiplicative kind and therefore, the approach of appropriate procedures to work them out. The participants involved in this investigation were 45 children between 11 and 12 years old from the 6th grade of elementary urban public school. The sample was been divided into three groups of 15 members each: the control group, the experimental group #1, and the experimental group #2. The instruments used were three interview formats in which the children were requested to answer 4 arithmetic complex problems of a multiplicative kind. The results shown significant statistically differences among the children who used tables for the solution of arithmetic problems of a multiplicative kind, from those who did not. Those differences reflect how children establish adequate relationships and build successful procedures for solving problems. Also, it has been found that tables are very useful only when children are in an intermediate stage of the comprehension of the relation between the data from arithmetic problems and the characteristics of the tables used for organizing those relations.

(Key words: external presentations, tables, arithmetic problems of a multiplicative kind)

Dedicado a mi familia, amigos y a todos los niños que participaron de este proyecto

AGRADECIMIENTOS

Para la realización de esta investigación se contó con el apoyo de varios amigos y familiares quienes participaron cada cual a su manera en alguna de las fases de este estudio, por ello: gracias a todos.

En particular agradezco al Lic. Héctor Botello Corte y a la Dra. Andrea L. López Pineda por su excelente acompañamiento durante la realización de este trabajo.

Por último, hago patente mi gratitud hacia la Profra. Patricia Velázquez Ramírez, Directora de la escuela primaria pública a la que pertenecen los niños que formaron parte de este trabajo, así como hacia los docentes de 6º grado: el Prof. Gaspar Trinidad Reyes García y la Profra. Lidia Vázquez Zumaya. Las atenciones y facilidades proporcionadas fueron un gran aliciente y apoyo para el desarrollo de esta investigación. Mi más profundo reconocimiento para ellos.

Índice

Índice de Figuras y Tablas

Tablas **Pág.**

1. Introducción

El estudio de la representación en relación con las matemáticas es un tema sumamente *relevante* para la psicología. De acuerdo con Rico (2009) fue en la década de los ochenta cuando se hizo evidente que se estaba realizando un uso sistemático de la noción de “representación” en la educación matemática. En esta época, en los trabajos relacionados con el tema, el término “representación” aludía a aquellas señales que hacían patente un concepto matemático y que podían ser tanto externas como mentales. Según este autor, desde ese entonces, las representaciones matemáticas se han entendido como todas aquellas herramientas, signos o gráficos que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas.

Bajo esta lógica, a través del uso de las representaciones, las personas pueden asignar significados y facilitar la comprensión de las estructuras matemáticas. De ahí el interés de su estudio con fines de didáctica.

La noción de “representación” considera dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas. Una de estas entidades es el objeto que representa y el otro es el objeto representado (Rico, 2009)

Las representaciones pueden ser “mentales” o “externas”. Las primeras son internas, mientras que las segundas tienen lugar fuera de las personas. De acuerdo con Rico (2009) es necesario representar las ideas matemáticas para pensar sobre ellas y para comunicarlas. Esto sólo puede realizarse con representaciones externas (lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos) Sin embargo, para operar mentalmente sobre dichas ideas también es necesaria su representación interna. De acuerdo con Rico (2009) diversos autores aceptan esta distinción. Por ejemplo, dicho autor señala que Kaput en un trabajo realizado en 1992 consideró la existencia de un mundo de operaciones mentales y de un mundo de operaciones físicas, mientras que Duval, en un trabajo realizado en 1993 postuló la existencia del mundo de las representaciones mentales y el de las representaciones semióticas, sosteniendo que el desarrollo de las primeras tiene lugar tras un proceso de interiorización de representaciones externas.

En todo caso, es innegable la importancia de las representaciones en los procesos de construcción de conceptos y, por lo tanto son vitales en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático.

Tomando en cuenta estos antecedentes, el problema de investigación de este trabajo es indagar la manera en que la cual el uso de tablas, en tanto representaciones externas, influye en los niños al establecer relaciones adecuadas entre los datos de problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo, y por lo tanto, en el planteamiento de procedimientos apropiados para solucionarlos. De esta manera, se pretende enriquecer las aportaciones de Vergnaud (1991) y otros autores (Zháng, 1997; Martí y Pozo, 2000 y Peltier, 2003) a propósito de la importancia de las representaciones externas como apoyo en los procesos cognitivos.

Se ha decidido realizar este trabajo empleando problemas de tipo multiplicativo debido a que las tablas dan cuenta de relaciones matemáticas de razón (como se describe en la fundamentación teórica de este trabajo), amén de que autores como Cerdán y Puig (1988) han señalado que hay mayor cantidad de estudios a propósito de los problemas aditivos que de los multiplicativos, por lo que reconocen la importancia de ampliar los estudios sobre estos últimos.

El presente documento se encuentra organizado de la siguiente manera: en primer lugar se presenta el capítulo de "Fundamentación teórica" el cual se divide en cinco apartados. En el primero de ellos se describe la conceptualización de la noción de "representación" que guía este trabajo, asimismo, se hace una distinción entre representaciones externas e internas, y se describe a las tablas en tanto representaciones externas. En el segundo apartado se registran algunos aspectos evolutivos de la representación en el desarrollo infantil. En el tercer apartado se hace un abordaje sobre el papel de las representaciones externas en la solución de problemas aritméticos. Finalmente, en los apartados cuatro y cinco se explica cuáles son los problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo que se han utilizado para el diseño de esta investigación.

El capítulo 3"Método" se divide en dos partes. En la primera de ellas se describe las preguntas de investigación, los objetivos y las hipótesis de estudio, así como las variables consideradas para el análisis de los resultados. En la segunda parte se detallan las características de la muestra utilizadas, los instrumentos empleados y la tarea de indagación que su usó para el levantamiento de datos.

En el capítulo 4 "Discusión de resultados" se describen los resultados del análisis de la información realizado sobre los datos recogidos.

Por último, en el capítulo 5 "Conclusiones" se desarrollan los resultados más relevantes obtenidos con este estudio y se realizan propuestas para el planteamiento de nuevas investigaciones relacionadas con el tema abordado en este trabajo.

2. Fundamentación teórica

2.1 Conceptualización de la Representación

La representación posibilita la evocación de objetos a partir de otros objetos. De este modo, los primeros no son objetos en sí mismos, sino que son representaciones en tanto facilitan la evocación de algo más. En otras palabras: la representación hace que "algo" sea la representación de otra cosa (Perner, 1991)

De acuerdo con esta definición, pueden identificarse dos componentes en la representación: un medio de representación y un contenido. El medio de representación da cuenta del contenido pero es diferente a él. El término "representación" puede usarse sólo para evocar los medios de representación y de esta manera evitar confusiones epistemológicas en las que los contenidos son equiparados con las "representaciones".

Entre los medios de representación y los contenidos existe un vínculo que delimita el sentido que ha de atribuirse a estos últimos. Dicho vínculo establece que los medios representan algo en tanto una cierta manera de ver (Perner, 1991) Existe una relación causal entre el medio de representación y el mundo representado, esto es, la imagen de un objeto (una manzana, por ejemplo) toma la forma del mismo debido a que el objeto plasmado en la imagen fue ese y no otro.

Desde este punto de vista, existen al menos tres tipos de representaciones:

- Representaciones primarias: son aquellas que establecen lazos causales muy estrechos con el mundo que representan. Representan cómo son las cosas del mundo. Están sumamente ligadas a la percepción.

- Representaciones secundarias: Son aquellas que representan cómo *podrían* ser las cosas del mundo. Se encuentran voluntariamente separadas de la realidad y se encuentran en la base de las capacidades humanas para el razonamiento hipotético. Estas representaciones dependen del establecimiento de las representaciones primarias ya éstas deben estar constituidas para poder "separarse" de la realidad y así otorgarles una función secundaria.
- Metarrepresentación: es una capacidad que permite representar que algo representa otra cosa. Dicho de otro modo, es la habilidad que posibilita distinguir entre lo que es representado y cómo es representado. Esta capacidad depende de las representaciones secundarias.

De acuerdo con Cuoco y Curcio (2001), Piaget (1951) hizo una distinción en las herramientas que se utilizan en la representación tomando en cuenta su relación con los objetos que representan. Siguiendo esta idea, las herramientas para la representación pueden dividirse en símbolos y signos.

Los símbolos mantienen características de los objetos que representan. Algunos ejemplos son: dibujos que mantienen estrecha relación con lo dibujado, fotos, señales viales que usan dibujos motivados por la indicación (como una línea ondulada para dar cuenta de una curva próxima) etc.

Los signos, en cambio, no guardan relaciones analógicas con aquello que representan por lo que deben ser objeto de convencionalidades sociales para poder construirse y emplearse. Algunos ejemplos son las palabras del lenguaje, los signos matemáticos, etc. Se caracterizan por ser arbitrarios, es decir, no guardan relaciones directas con lo que representan, de ahí la importancia de su convencionalidad social.

Estas herramientas pueden constituirse tanto como medios de representación como en forma de contenidos susceptibles de ser evocados a través de otros medios.

Representaciones internas y representaciones externas.

De acuerdo con Pratt y Garton (1993) es importante reconocer entre los sistemas externos (pinturas, lenguaje oral, lenguaje escrito) y los sistemas internos de representación (representaciones mentales).

Al entender la representación como “interna” se asume que con el término se hace referencia a lo que tienen lugar en la mente, esto es, al procesamiento de información, o bien al formato con el que se almacena el conocimiento.

El término “representaciones externas” hace referencia a aquellas marcas hechas de forma voluntaria por el ser humano para dar cuenta de sus acciones y pensamientos. Esta definición integra las características esenciales de este tipo de representaciones, a saber:

- Poseen una doble naturaleza: por un lado, son lo que son y al mismo tiempo evocan otra cosa a través de ellas.
- Son intencionales: son producidas de forma intencionada para dar cuenta de otra cosa.
- Poseen un soporte material. Dentro de las representaciones externas se encuentra, por un lado, a aquellas que son directamente perceptibles pero no permanentes (como el lenguaje oral) y por otro a las que sí lo son (escritura, mapas e ilustraciones). Asimismo, en este último grupo, pueden encontrarse tres subgrupos más: representaciones analógicas (dibujos, mapas); representaciones con un código arbitrario (escritura, números); y representaciones que incluyen una relación analógica de relaciones o parámetros (gráficos, diagramas).

Algunos tipos de representaciones externas forman sistemas claramente delimitados cuyos elementos se encuentran regulados por reglas y normas mientras que otros son creaciones espontáneas realizadas para resolver un problema particular o bien representar un contenido específico.

De acuerdo con Tolchinsky (en Dockrell, Tolchinsky & Teubal, 2007) las tres características esenciales de las representaciones, hacen de ellas objetos multifacéticos que constituyen herramientas básicas para la actividad humana. Entre las funciones que se reconocen a estas representaciones se encuentra la comunicativa y la epistemológica. En tanto herramientas de comunicación, las representaciones permiten intercambios sociales durante la actividad cotidiana. Más allá de esto, la función epistemológica les convierte en objetos que sirven para pensar con ellos. De este modo, las representaciones externas permiten ampliar nuestras perspectivas ante una situación resultando de especial importancia para la cognición humana.

Como puede observarse, la relación entre representaciones internas y externas es sumamente estrecha ya que el entender la representación como "externa" implica comprenderla como una manifestación del pensamiento. En otras palabras, no podemos aludir a las representaciones externas sin recurrir a las internas. Por ejemplo: no puede hablarse acerca de una pintura (que es una representación externa) si no tenemos una representación interna de la misma. Por lo tanto, los sistemas externos de representación involucran el desarrollo de representaciones internas de las representaciones externas.

De acuerdo con Zhang (1997) las representaciones externas pueden devenir en representaciones internas a través de la memorización; sin embargo, esto no es necesario si las representaciones externas están siempre disponibles y resulta del todo imposible cuando son muy complejas. Las representaciones internas, por su cuenta también son susceptibles de devenir en externas a través de la “externalización”. Este proceso es altamente benéfico ya que permite externar procesos interiores.

Las tablas como un tipo de representación externa.

De acuerdo con las conceptualizaciones acerca de representaciones externas planteadas en este trabajo, se considera a las tablas como un tipo de representaciones externas que tienen como una de sus características esenciales el hecho de que incluyen una relación analógica de relaciones o parámetros.

De acuerdo con Arteaga *et al.* (2010) las tablas y los gráficos combinan diversos tipos de información numérica (frecuencias, razones, porcentajes), clasificada en función de dos o más variables. Asimismo, señala que tablas y gráficos son objetos semióticos complejos, formados por diferentes elementos estructurales, a saber:

- El título y las etiquetas: estos elementos indican el contenido contextual y cuáles son las variables en él representadas. Aparece tanto en gráficos como en tablas.

- El marco del gráfico: incluye los ejes, escalas, y marcas de referencia en cada eje. El marco proporciona información sobre las unidades de medida de las magnitudes representadas. Puede haber diferentes tipos de marcos y sistemas de coordenadas (lineales, cartesianas bidimensionales o multidimensionales, polares). En las tablas se incluyen etiquetas que diferencian las variables representadas, sus valores y diferentes tipos de frecuencias y porcentajes.

- Especificadores: elementos visuales usados para representar los datos. En el caso de los gráficos de histograma, se emplean rectángulos como especificadores, mientras que en los diagramas de dispersión, se emplean puntos. No todos los especificadores son igualmente sencillos de comprender. Arteaga *et al*. (2010) sugieren el siguiente orden de dificultad de los mismos en el caso de los gráficos: Posición en una escala homogénea (gráficos de línea, de barras, de puntos, algunos pictogramas e histogramas); posición en una escala no homogénea (gráficos polares, gráficos bivariantes); longitud (gráficos poligonales o estrellados sin ejes de referencia, árboles), ángulo o pendiente (gráfico de sectores, discos), área (círculos, pictogramas), volumen (cubos, algunos mapas estadísticos), color (mapas estadísticos codificados mediante color). Sin embargo, no señalan especificadores en las tablas.

La lectura e interpretación de las tablas requiere de la comprensión de dichos elementos, así como de las relaciones que hay entre ellos. De acuerdo con Arteaga et al (2010) se han reconocido diferentes niveles de habilidades implícitas en la lectura de tablas y gráficos siendo la clasificación de Curcio (1989 en Arteaga *et al.* 2010) la más aceptada. Tomando en cuenta esta clasificación, así como aportaciones posteriores de otros autores, se pueden distinguir los siguientes niveles de lectura de tablas y gráficos:

- Leer entre los datos: se refiere a la lectura literal del gráfico o tabla sin interpretar la información contenida en el mismo

- Leer dentro de los datos: se refiere a la interpretación e integración de los datos de la tabla o gráficos. Este tipo de lectura tiene lugar cuando se es capaz de comparar datos o realizar operaciones con los mismos.

- Leer más allá de los datos: es la lectura a partir de la cual se hacen predicciones e inferencias tomando en cuenta datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico o tabla.

- Leer detrás de los datos: permite valorar críticamente el método de recogida de datos, su validez, fidelidad y las posibilidades de extensión de las conclusiones. Este nivel de lectura es una aportación de Friel, Curcio y Bright en un trabajo realizado en el 2001 de acuerdo con Arteaga *et al*. (2010) Esta categoría puede subdividirse tomando en cuenta la capacidad crítica del lector respecto de la información reflejada en el gráfico. A saber:

  Nivel Racional/Literal: es aquél en el que se lee de manera adecuada el gráfico o la tabla pero sin cuestionar la información ni proporcionar explicaciones alternativas

  Nivel Crítico: en este nivel, se logra leer los gráficos, comprender el contexto, y evaluar la fiabilidad de la información, no obstante, no se tiene la capacidad de

  Plantear hipótesis que expliquen la discordancia entre un dato y una interpretación del mismo.

  Nivel Hipotético: en este nivel, se logra tener una lectura de gráficos en la que se interpretan y evalúa información, formando hipótesis y modelos propios.

Esta subdivisión, de acuerdo con Arteaga *et al*. (2010) es una aportación de Aoyama, en un trabajo publicado en el 2007

.

2.2 Sistemas de Representación en la Infancia

De acuerdo con Perner (1991) al establecer tres niveles de representación (primario, secundario y meta) se tienen implicaciones evolutivas en la manera que la que se desarrolla el pensamiento en tanto actividad representacional, así como en la forma en la cual los niños logran pensar en la representación, principalmente en la mente como representación.

Perner (1991) señala que en el nivel primario los niños están ligados a la realidad por un modelo único que se actualiza a partir del cual sólo puede concebir la situación real. Comprende que la imagen es un objeto similar al objeto que ésta describe. Esto tiene lugar aproximadamente en el primer año de vida.

En el nivel secundario, los niños usan múltiples modelos para representar diferentes situaciones. De este modo pueden comparar el pasado con el presente y lo real con lo hipotético. En este momento aún no hay una comprensión correcta de la representación (de acuerdo a la definición de Perner), pero los niños sí pueden “actuar como si”. Este nivel tiene lugar aproximadamente a los 2 años de edad. En esta fase a los niños se les denomina “teóricos de la situación”.

Aproximadamente a los 4 años de edad, los niños usan modelos de modelos, comprenden los medios representacionales como tales por lo que pueden atribuir distintas interpretaciones a una misma imagen. Comienzan a comprender casos de representación errónea. Al usar modelos múltiples pueden identificar su propia experiencia emocional en otros y desarrollar así reacciones de empatía. En esta fase se convierten en “teóricos de la representación”.

Por otro lado, de acuerdo con Pratt y Garton (1993) algunos sistemas como el lenguaje y las representaciones mentales se desarrollan sin que el niño inicialmente las aprecie como tales (como representaciones que tienen existencia en sí mismas) A lo largo de su desarrollo, los niños gradualmente logran identificar los componentes de los sistemas de representación interna reconociendo su existencia en sí mismos.

En el caso de las representaciones externas como los dibujos o las fotos, su existencia física es obvia. Los niños aprenden a comprender que esos objetos tienen el propósito de representar algo más así que logran interpretarles como representaciones que significan o proveen mensajes.

Como ya se ha mencionado en apartados anteriores, la representación no es sólo un reflejo de la representación interna ni un mero estímulo para la mente. En cambio, es un objeto cuya doble naturaleza hace necesario que sea reconstruido por el sujeto para que éste pueda apropiárselo y usarlo de manera pertinente de acuerdo a las convencionalidades sociales. Los sistemas externos de representación involucran el desarrollo de representaciones internas de las representaciones externas. Si no están desarrollados no se pueden usar.

La lectura de tablas presenta diferentes niveles de complejidad, cada uno de los cuales requiere de capacidades diferentes que han de ser construidas a partir de la experiencia y la reflexión sobre estos objetos. De este modo, las tablas pueden tener funciones comunicativas y epistemológicas en la medida que se comprendan sus componentes. Las diferencias entre las relaciones de los datos que se presentan en una tabla pueden no ser evidentes cuando no se tiene comprensión de dichas relaciones ni de la representación externa que se hace para dar cuenta de las mismas. En estos casos, si bien las tablas en tanto representaciones externas no son sólo un reflejo de las representaciones internas sino herramientas en sí mismas.

2.3 El Papel de las Representaciones Externas en la Solución de Problemas Aritméticos

Desde la psicología cognitiva, el estudio de la solución de problemas implica analizar el rol de las condiciones externas y las internas de los sujetos (representaciones y mecanismos), así como la manera en que ambos aspectos se combinan para iniciar y facilitar un cambio en el desarrollo.

Así pues, en los modelos derivados desde la psicología cognitiva, se concede un papel muy importante a las representaciones internas y externas para la solución de problemas aritméticos. Por ejemplo, Parra (1991) sugiere que para poder dar solución a los problemas, éstos deben ser traducidos a términos propios de acuerdo con el siguiente modelo:

1) transportar el enunciado a símbolos,

2) traducir a una figura o esquema gráfico, y

3) detectar un concepto clave para reorganizar los datos del problema.

De acuerdo con este modelo, en el proceso de solución de problemas necesariamente se recurre al uso de representaciones externas (figuras o esquemas gráficos) para la organización de la información y el planteamiento de relaciones entre los datos.

Por su parte, Peltier (2003) define la comprensión de un problema como la construcción de la representación de la tarea, mientras que a la construcción del procedimiento le llama estrategia de resolución. La misma autora indica que las estrategias de resolución dependerán directamente de la representación que un individuo se ha hecho de la situación y que el cambio de representación será el resultado de los conocimientos que el individuo va a movilizar durante el proceso de búsqueda de la solución, de las acciones que llevará a cabo y, por lo tanto, de los sucesivos razonamientos.

De acuerdo con Zhang (1997) las representaciones externas no son sólo estímulos o canales de ingreso de información a la mente, sino que tienen propiedades que van más allá de sólo ayudas para la memoria.

Entre las propiedades que al autor confiere a las representaciones externas se encuentran las siguientes:

- Proveen información que puede ser percibida de forma directa y utilizada sin hacer interpretaciones ni formulaciones explícitas
- Influyen en el desarrollo cognitivo ya que restringen el rango de acciones cognitivas posibles puesto que posibilitan unas e impiden otras
- Cambian la naturaleza de las tareas, esto es, las estructuras de las tareas son completamente diferentes cuando se acompañan de representaciones externas respecto a cuando éstas no están presentes

Zhang (1997) cita a Chambers (1985) y Reisberg (1987), quienes sostienen que las imágenes externas permiten a la gente acceder a conocimientos y herramientas inaccesibles desde las representaciones internas. Asimismo, cita a Larkin y Simon (1987 y 1989) quienes mencionan que las representaciones esquemáticas brindan soportes que permiten reconocer características fácilmente y hacer inferencias de manera directa.

De acuerdo con Martí y Pozo (2000) las representaciones externas poseen una doble naturaleza, a saber: por un lado son objetos perceptibles en sí mismos, pero al mismo tiempo son objetos representativos que remiten a otra realidad. Asimismo, no son la traducción directa de una realidad, sino que son modelos de esta realidad según ciertas restricciones, y en tanto modelos representativos, crean una nueva realidad y permiten discriminar nuevas relaciones del referente.

De manera general, las notaciones permiten que el referente se represente de forma permanente en una serie de propiedades visibles y manipulables, con lo que facilitan que sean objetos de conocimiento y transformación ya que producen informaciones que no dependen de la memoria.

Dichas características sustentan la relevancia de las representaciones externas como organizadores de información en los procesos de solución de problemas.

2.4 Problemas Aritméticos de Tipo Multiplicativo

Para poder analizar la relación entre representaciones externas (en este caso las tablas) y los problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo, es necesario señalar en qué consisten estos problemas. Con esta finalidad, en los siguientes apartados se describe qué son los problemas aritméticos de tipo multiplicativo, cuáles son los problemas aritméticos complejos y, finalmente, qué problemas pueden considerarse problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo y cuáles de ellos son considerados en el presente trabajo.

De acuerdo con Vergnaud (1991) los problemas de tipo multiplicativo puro son aquellos en los que las relaciones que se establecen entre los datos llevan a la realización de multiplicaciones y/o divisiones para poder resolverlos.

De acuerdo con este mismo autor, los problemas de tipo multiplicativo pueden dividirse en varias clases de acuerdo con los criterios que se empleen, los cuales pueden ser: la forma de la relación multiplicativa; el carácter de las cantidades que intervengan (discretas o continuas); las propiedades de los números que se emplean, etc.

Entre las clases que Vergnaud considera principales, de acuerdo con la forma de la relación multiplicativa, se encuentran dos grandes categorías: isomorfismo de medidas y producto de medidas.

Isomorfismo de medidas.

Este tipo de problemas pone en juego una relación cuaternaria entre cuatro cantidades. En los problemas más simples una de ellas es igual a uno. De acuerdo a la ubicación de la incógnita (que puede ser cualquiera de las otras tres cantidades) se desprenden tres clases de problemas: problemas de multiplicación y dos tipos de problemas de división. En uno de ellos se realiza la búsqueda de valores unitarios y en el otro la búsqueda de cantidad de unidades. Véanse los siguientes casos:

Problema de Multiplicación

Figura 1. Estructura de los problemas de multiplicación de isomorfismo de medidas

$$1 \longrightarrow A$$

$$b \longrightarrow X$$

Nota: En esta figura, las letras a y b representan las cantidades proporcionadas en el enunciado de un problema de isomorfismo de medidas, mientras que x representa la incógnita a encontrar. Esta figura ha sido tomada de Vergnaud, 1991.

Ejemplo:

"Hacen falta 2 metros de tela para hacer una falda ¿cuántos metros de tela se requieren para hacer 5 faldas?

Figura 2. Estructura de un problema de multiplicación de isomorfismo de medidas

Falda	**Tela (metros)**
1 ⟶	2 (a)
b (5)⟶	X

Nota: En esta figura se han colocado las cantidades correspondientes a "a" y a "b" de acuerdo al enunciado del problema.

En este problema los números 1 y 5 representan cantidades de faldas y son medidas. Por su parte, 2 y *x* representan cantidades de metros de tela. El problema se puede resolver tomando en cuenta operadores horizontales u operadores verticales.

Los operadores horizontales aparecen cuando se representan funciones y expresan el pasaje de una categoría de medidas a otra. Esto es: faldas por metros de tela= faldas/metros de tela. A saber:

Figura 3. Operadores horizontales en un problema de multiplicación de isomorfismo de medidas

Falda	**Tela (metros)**
1 ⟶	2
x 2 falda/metros de tela	
b (5)⟶	X
x 2 falda/metros de tela	

La función "x 2 metros de tela / falda" surge al establecer la relación siguiente:

x metros de tela son a 5 faldas, lo que 2 metros de tela son a 1 falda

1 falda por 2 metros de tela= función “*x2 metros de tela / falda”*[1]

El operador “*x2*” expresa el pasaje de una categoría de medidas a otra, por lo cual se utiliza la expresión verbal falda/metros enunciando así la relación entre las dos medidas. De ahí la función “*x2 metros de tela/falda*”

Para saber la cantidad de tela correspondiente al valor b, 5 faldas, basta aplicar a éste la función “*x2 metros de tela/falda*”

5 faldas (función “*x2 metros de tela/falda*”) = 10 metros de tela

Los operadores verticales son operadores sin dimensión (escalares).

Figura 4. Operadores verticales en un problema de multiplicación de isomorfismo de medidas

	Falda	**Tela (metros)**	
	1 ⟶	2	
x 5			x 5
	b (5)⟶	X	

El operador vertical “*x 5*” surge al hacer la siguiente relación:

x metros de tela son a 2 metros de tela lo que 5 faldas son a 1 falda

El operador sin dimensión “*x5*” surge al pasar de 1 falda a 5 faldas (multiplicando 1 x 5). Debido a esta relación, para encontrar el valor de “x” basta aplicar el operador sin dimensión “x 5” al valor de 2 metros de tela

2 metros de tela por operador “x 5” = 10 metros de tela

[1] La nomenclatura que aquí se presenta ha sido retomada de Vergnaud (1991)

Problema de División: búsqueda de valor unitario.

Figura 5. Estructura de los problemas de división (búsqueda de valor unitario) de isomorfismo de medidas

1 $\longrightarrow$	X
b $\longrightarrow$	C

Nota: El esquema que se presenta ha sido tomado de Vergnaud, 1991.

Ejemplo:

Se hacen 5 faldas con 10 metros de tela ¿cuántos metros de tela se requieren para hacer una sola falda?

Figura 6. Estructura de un problema de división (búsqueda de valor unitario) de isomorfismo de medidas

Falda	**Tela (metros)**
1 $\longrightarrow$	X
b (5) $\longrightarrow$	c (10)

Este problema también puede resolverse empleando operadores horizontales (funciones) o verticales (escalares)

Operadores horizontales

Figura 7. Operadores horizontales en un problema de división (búsqueda de valor unitario) de isomorfismo de medidas

Falda	**Tela (metros)**
1 ⟶	X
/2 metros de tela/falda	
b (5)⟶	c (10)
/2 metros de tela/falda	

El operador "/2 metros de tela/falda" surge al establecer la relación siguiente:

10 metros de tela son a 5 faldas lo que *x* metros de tela son a 1 falda

El operador función "*/2 metros de tela/falda*" surge al establecer la relación entre 10 metros de tela y 5 faldas. El resultado de dicha relación es "/2 metros de tela/falda". Una vez conocida la función "*/2 metros de tela/falda*", ésta se aplica al valor unitario: 1 falda "*/2 metros de tela/falda*", = 2 metros de tela.

Operadores verticales

Figura 8. Operadores verticales en un problema de división (búsqueda de valor unitario) de isomorfismo de medidas

	Falda	**Tela (metros)**	
	1 ⟶	X	
/ 5			/ 5
	b (5)⟶	c (10)	

El operador escalar "/5" surge con la siguiente relación:

x metros de tela son a 10 metros de tela lo que 1 falda es a 5 faldas

El operador sin dimensión “/5” surge al pasar de 5 faldas a 1 falda (dividiendo 5/1). Una vez conocida la función “/5” se aplica al valor c (10 metros de tela) lo que da como resultado 2 metros de tela

Problema de división: búsqueda de la cantidad de unidades.

Figura 9. Estructura de los problemas de división (búsqueda de la cantidad de unidades) de isomorfismo de medidas

1	$\longrightarrow$	B
x	$\longrightarrow$	C

Nota: En esta figura, las letras b y c representan las cantidades proporcionadas en el enunciado de un problema de isomorfismo de medidas, mientras que x representa la incógnita a encontrar. Esta figura ha sido tomada de Vergnaud, 1991.

Ejemplo:

Para hacer una falda se emplean 2 metros de tela, si se cuenta con 10 metros de tela, ¿cuántas faldas se pueden hacer?

Figura 10. Estructura de un problema de división (búsqueda de la cantidad de unidades) de isomorfismo de medidas

Falda		**Tela (metros)**
1	$\longrightarrow$	b (2)
x	$\longrightarrow$	c (10)

Operadores horizontales

Figura 11. Operadores horizontales en un problema de división (búsqueda de la cantidad de unidades) de isomorfismo de medidas

Falda	**Tela (metros)**
1 $\longrightarrow$	b (2)
/2 metros de tela/falda	
x $\longrightarrow$	c (10)
/2 metros de tela/falda	

El operador "/2 metros de tela/falda" surge al establecer las relaciones siguientes:

10 metros de tela son a *x* faldas lo que 2 metros de tela son a 1 falda

El operador función "*/2 metros de tela/falda*" surge al establecer la relación entre 2 metros de tela y 1 falda. El resultado de dicha relación es "/2 metros de tela/falda". Una vez conocida la función "*/2 metros de tela/falda*", ésta se aplica al valor de c (10 metros de tela) para obtener la cantidad de unidades

10 metros de tela "*/2 metros de tela/falda*" = 5 faldas

Operadores verticales

Figura 12. Operadores verticales en un problema de división (búsqueda de la cantidad de unidades) de isomorfismo de medidas

	Falda	**Tela (metros)**	
	1 $\longrightarrow$	b (2)	
/ 5			/ 5
	x $\longrightarrow$	c (10)	

El operador escalar /5 surge con las siguientes relaciones:

10 metros de tela son a 2 metros de tela lo que *x* faldas es a 1 faldas

El operador sin dimensión "*/5*" surge al pasar de 10 metros de tela a 2 metros de tela (dividiendo 10/2). Una vez conocida la función "/5" se aplica al valor unitario (búsqueda del número el cual, al ser dividido entre 5 de 1: esto es 5/5=1), por lo tanto, *x* es igual a 5 faldas.

Producto de medidas.

De acuerdo con esta relación multiplicativa, se pueden encontrar dos clases de problemas: de multiplicación y de división. En los primeros se conocen las medidas elementales y se busca la medida-producto. En cambio, en los segundos se desconoce una medida elemental y se conoce la otra la medida producto.

De acuerdo con Vergnaud (1991), cada una de estas clases y subclases puede dividirse en varias subclases dependiendo de criterios como los ya mencionados (carácter de las cantidades, propiedades de los números, etc.)

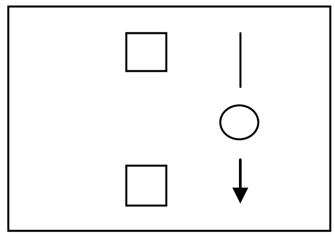
Además de Vergaud (1991), Peltier (2003) habla de los problemas multiplicativos señalando que éstos pueden clasificarse en cuatro clases de acuerdo a su estructura. Las categorías de problemas que se desprenden de este criterio son: problemas de comparación multiplicativa de magnitudes, problemas de proporcionalidad simple, problemas de proporcionalidad simple compuesta y problemas de proporcionalidad doble.

Comparación multiplicativa de magnitudes.

Aquí se inscriben los problemas que emplean una única magnitud y dos estados relativos a esa magnitud, los cuales son objeto de la comparación multiplicativa: uno representa el papel de referente de otro.

Se pueden realizar seis subcategorías de estos problemas de acuerdo a si la relación multiplicativa se define por un cociente mayor o menor que uno y si la pregunta lleva a la búsqueda del referido, de la comparación o del referente.

Figura 13. Esquema de relaciones en un problema de comparación multiplicativa

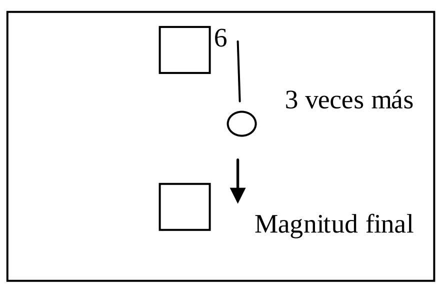


Nota: El esquema ha sido tomado fielmente de Peltier, 2003: 53

Ejemplo:

En una caja de chocolates, hay 6 chocolates amargos y 3 veces más chocolates con leche. ¿Cuántos chocolates con leche hay? (Peltier, 2003: 54)

Figura 14. Problema de comparación multiplicativa

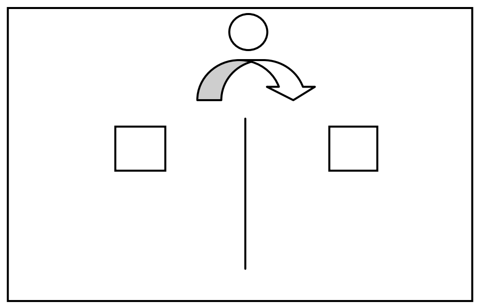


En este ejemplo, la magnitud única es 6 (cantidad de chocolates amargos, cuya cantidad es referente para la comparación), y los dos estados relativos a esa magnitud son: 3 veces más esa magnitud y la magnitud final. El cociente es mayor que uno (3 veces más) y la pregunta lleva a la búsqueda del referido (cuántos chocolates con leche de acuerdo al referente: chocolates amargos.

Proporcionalidad simple.

Estos problemas pueden representarse mediante tablas numéricas y están asociados a una función lineal. Se utilizan dos dominios de magnitudes y una relación funcional multiplicativa entre éstos.

Figura 15. Esquema de relaciones en un problema de proporcionalidad simple

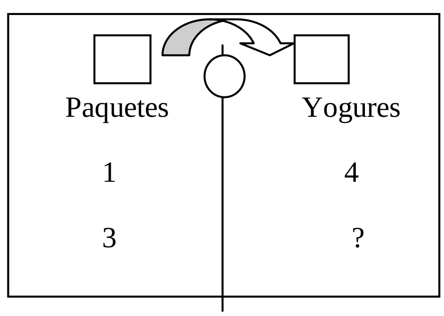


Nota: El esquema ha sido tomado fielmente de Peltier, 2003, pp 53

Ejemplo:

Tengo tres paquetes de yogur. Hay 4 yogures en cada paquete. ¿Cuántos yogures tengo? (Vergnaud, 1991: 197)

Figura 16. Problema de proporcionalidad simple



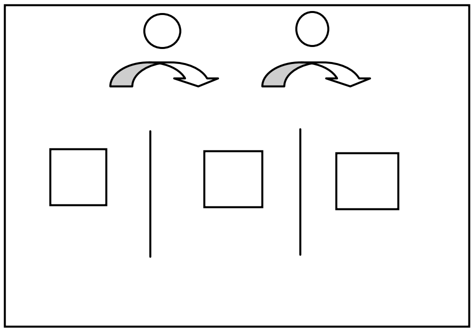
En el ejemplo, los dos dominios de magnitudes son los siguientes: a) cantidad de paquetes de yogures (3) y b) cantidad de yogures en un paquete (4), la relación funcional multiplicativa entre ellos se establece al indagar la cantidad total de yogures dada la cantidad total de paquetes.

Proporcionalidad simple compuesta.

En estos problemas intervienen tres magnitudes, se definen dos relaciones de proporcionalidad simple y la situación conduce a componer estas dos relaciones de proporcionalidad.

Este caso lleva a numerosos problemas según si los elementos se dan o se buscan.

Figura 17. Esquema de relaciones en un problema de proporcionalidad simple compuesta



Nota: El esquema ha sido tomado fielmente de Peltier, 2003, pp 53

Ejemplo:

Para transportar 840 huevos, un mayorista utiliza 7 cajas en las que puede poner bandejas de 24 huevos, ¿Cuántas bandejas pone en cada caja? (Peltier, 2003: 53)

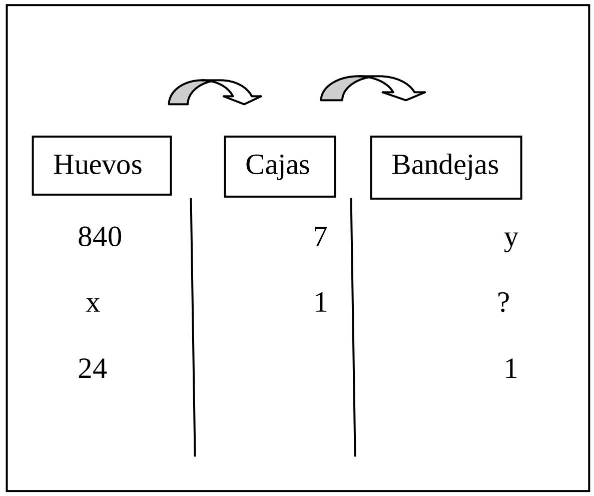
En este problema las tres magnitudes son: huevos, cajas y bandejas. Las relaciones de proporcionalidad simple que pueden establecerse entre las magnitudes son las siguientes:

a) relación entre huevos y cajas

b) relación entre cajas y bandejas

c) relación entre bandejas y huevos

Figura 18. Problema de proporcionalidad simple compuesta

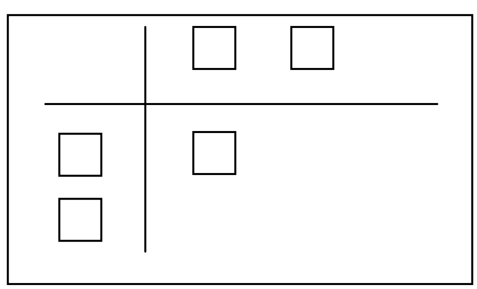


Para dar solución a este problema, es necesario buscar respuestas intermedias (representadas con "*x*", y "*y*" en el esquema) mediante el establecimiento de dos relaciones de proporcionalidad simple.

Proporcionalidad doble o múltiple.

Son problemas en los que intervienen dos dominios de magnitudes (o más) que son independientes (no hay relación funcional entre ellos) pero en los que una relación asocia a una pareja de medidas de cada magnitud una tercera magnitud llamada magnitud producto.

Figura 19. Esquema de relaciones en un problema de proporcionalidad doble

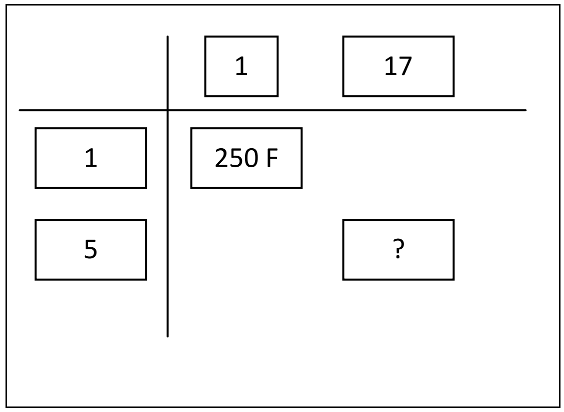


Nota: El esquema ha sido tomado fielmente de Peltier, 2003, pp 53

Ejemplo:

La pensión en un hotel es de 250 F por persona y por día ¿Cuánto pagará un grupo de 5 personas por una estancia de 17 días? (Peltier, 2003: 54)

Figura 20. Problema de proporcionalidad doble



En este ejemplo, los dos dominios de magnitudes son personas y días, entre las cuales no hay relación funcional alguna. Sin embargo, al establecer una relación para el par “1 día” y “1 persona” como lo es el costo de una habitación se obtiene una magnitud producto, en este caso 250 F.

Para resolver el problema, es necesario obtener una segunda magnitud producto entre otro par de las magnitudes dadas, en este caso “17 días, 5 personas”. Lo cual sólo es posible si se obtienen antes respuestas intermedias entre otros pares tales como “5 personas, 1 día” o bien “1 persona, 17 días”.

2.5 Problemas Aritméticos Complejos de Tipo Multiplicativo

Problemas aritméticos complejos.

Cerdán y Puig (1990) realizaron aportes importantes al estudio de los problemas complejos, los cuales denominaron entonces como problemas aritméticos de varias operaciones combinadas (PAVOC). Dichos problemas eran definidos como aquellos que se resolvían en más de una etapa, es decir, con más de una operación. Para Cerdán y Puig (1990), la clasificación de los problemas de acuerdo con las etapas involucradas en su solución resultaba crucial para el estudio de la estructura de los problemas aritméticos.

Vergnaud (1991) describe diferentes niveles de complejidad en los problemas aritméticos en función del tipo de estructuras implicadas en ellos. A saber: aditivas, multiplicativas o mixtas. Asimismo, señala que hay problemas más complejos que otros dependiendo no sólo del tipo de estructura al que pertenece, sino de las relaciones que se encuentran en su interior. De acuerdo con Vergnaud (1991) en los problemas más complejos intervienen varias relaciones y hay varias preguntas posibles, por lo tanto, para dar solución a estos problemas es necesario resolver preguntas intermedias antes de llegar a la respuesta final. Este último es uno de los planteamientos principales del presente estudio.

Por su parte, Castro *et al*. (1997) indican que se puede realizar una distinción entre problemas simples y complejos atendiendo al número de relaciones que aparecen explícita o implícitamente en la información que se proporciona en el enunciado. Para ellos, "*la información suministrada en un problema simple contiene sólo una relación entre dos datos numéricos en función de la cual el resolutor ha de operar para obtener un resultado.*" (p. 63) En cambio, en un problema complejo interviene más de una relación en el enunciado.

Problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo.

De acuerdo con Vergnaud (1991) no es posible realizar una clasificación absoluta de los problemas complejos, ya que el número de posibilidades de los mismos aumenta conforme al número de relaciones que intervienen en ellos.

Sin embargo, dentro de la literatura revisada se ha encontrado que un criterio considerado para delimitar el estudio de los problemas complejos ha sido el tipo de relaciones que conllevan. De este modo, los problemas aritméticos complejos pueden clasificarse del siguiente modo: de tipo aditivo puro, de tipo multiplicativo puro o mixtos.

Como su nombre indica, en los problemas de tipo aditivo puro se establecen relaciones meramente aditivas, de igual forma, los problemas de tipo multiplicativo sólo tienen relaciones de ese tipo, mientras que los problemas mixtos conllevan relaciones tanto aditivas como multiplicativas.

Dificultades de los niños al enfrentarse a problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo.

De acuerdo con Vergnaud (1991), los problemas aritméticos complejos resultan especialmente difíciles para los niños, principalmente a causa de la diversidad de relaciones y preguntas intermedias que se necesita establecer entre sus datos para poder solucionarlos.

Sin embargo, estos no son los únicos factores por los cuales estos problemas son particularmente difíciles de resolver. Autores como Cerdán y Puig (1988), Carretero (1989) y Guerrero (1998), han realizado trabajos en los que se reconoce que aspectos como la ubicación de la incógnita, o la cantidad de operaciones a realizar para resolver un problema también influyen de manera importante en el nivel de dificultad de los problemas aritméticos para los pequeños.

A este respecto, Cerdán y Puig (1988) señalaron que, de acuerdo con estudios de Bell, Fischbein & Greer (1984) realizados con niños de entre 12 y 13 años, los problemas de partición son más fáciles que los de cuotición. Los dos son problemas de tipo multiplicativo; mientras que los problemas de partición son los problemas que requieren la búsqueda de valor unitario (Vergnaud, 1991), los de cuotición implican la búsqueda de la cantidad de unidades (Vergnaud, 1991). Ambos problemas pertenecen a los problemas de "isomorfismo de medidas" (Vergnaud, 1991) pero, como puede observarse, uno resulta más complejo que otro por la ubicación de la incógnita.

En la tabla 1 se presentan ejemplos de problemas de partición y de cuotición.

Tabla 1

Problemas de Cuotición y de Partición

Tipo de problema	Ejemplo
Problema de partición: búsqueda de valor unitario	Pagué 12 francos por tres botellas de vino ¿cuál es el precio de una botella de vino?
Problema de cuotición: búsqueda de la cantidad de unidades	Pedro tiene 12 francos y quiere comprar algunos paquetes de caramelo que cuestan 4 francos cada paquete ¿cuántos paquetes puede comprar?

Nota. Problemas extraídos de Vergnaud, 1991, pp 198

Por su parte, Carretero (1989), en un estudio realizado acerca de la adquisición de la noción de proporcionalidad en niños de entre 8 y 11 años, ha encontrado que, aún cuando el desempeño de los chicos mayores es mejor que el de los menores, la diferencia entre ambos grupos de edad es mayor a medida que el número de operaciones a efectuar aumenta. Otro hallazgo importante de esta autora, es que los problemas de proporcionalidad doble son más complejos para los niños que los de proporcionalidad simple.

Guerrero (1998), en un trabajo realizado con niños de sexto grado de primaria, empleó cuatro categorías para estudiar las estrategias de solución de los niños al enfrentarse a algunos problemas multiplicativos. Las categorías empleadas fueron: problemas de razón, problemas de comparación, problemas de conversión y problemas de combinación. Como resultado, Guerrero (1998) encontró que los problemas de combinación resultaron los más difíciles, seguidos de los de comparación, quedando los de conversión en dificultad promedio y los de razón como fáciles. En este estudio, las dificultades parecen variar de acuerdo con el *tipo de relación* que los chicos deben establecer entre los datos del problema para poder resolverlo (razón, comparación, combinación, conversión)

En conclusión, al estudiar los problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo no basta con considerar la cantidad de pasos y relaciones necesarias para resolverlos; sino que es indispensable considerar también la ubicación de la incógnita (Cerdán y Puig, 1988) la cantidad de operaciones (Carretero, 1989), el tipo de relación entre los datos (Guerrero, 1998), así como el tipo de estructura multiplicativa (proporcionalidad simple o doble; Carretero, 1989) al indagar la manera en que los niños se aproximan a ellos.

Problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo utilizados en el estudio.

Debido a la gran diversidad que hay de problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo, en el presente estudio se utilizaron sólo algunos problemas aritméticos que pueden incluirse en la clasificación de “isomorfismo de medidas” (Vergnaud, 1991) y también en la clasificación de Peltier (2003) sobre los problemas multiplicativos. Estos son: dos tipos de problemas de proporcionalidad simple compuesta y dos de proporcionalidad doble.

Se han elegido estos problemas debido a que requieren la solución de preguntas intermedias antes de llegar a la solución final, lo cual es una característica fundamental de los problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo, de ahí que también se les considere dentro de esta clasificación.

Asimismo, al estudiarlos, se pretende ratificar o ahondar en lo que otros autores ya han expuesto sobre las dificultades de los niños al enfrentarse a algunos problemas aritméticos (Carretero, 1989; Guerrero; 1998 Arteaga, *et al*.; 2010; Arteaga y Guzmán; 2005) y que se ha mencionado en el capítulo de antecedentes de este trabajo.

Para el diseño de los problemas se ha determinado utilizar problemas con diferentes jerarquías de dificultad, tomando en cuenta la ubicación de la incógnita con la finalidad de observar si hay correlación entre esta variable (complejidad) y las características de las relaciones que los niños establecen entre los datos.

Las decisiones en cuanto a la dificultad de los problemas se han realizado tomando en consideración los hallazgos de diferentes estudios que han encontrado resultados similares en problemas de isomorfismo de medidas (Cerdán y Puig, 1988, Carretero, 1989; Vergnaud, 1991; Guerrero, 1998)

Así pues, se han elegido cuatro categorías de problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo para realizar este estudio: dos de proporcionalidad simple compuesta y dos de proporcionalidad doble. El primer problema de proporcionalidad simple compuesta se resuelve mediante multiplicaciones. El segundo problema se resuelve empleando divisiones. Asimismo, el primer problema de proporcionalidad doble se resuelve también mediante multiplicaciones y el segundo problema de proporcionalidad doble se resuelve empleando divisiones. En el cuadro 3.1 se ejemplifican estos problemas, mientras que en el capítulo dedicado al método se presentan todos los enunciados de los problemas utilizados en este trabajo.

Tabla 2

Tipos de problemas utilizados para la investigación

Tipo de problema	Operaciones para solucionarlo	Enunciados de los problemas
Proporcionalidad simple compuesta	Multiplicaciones	Quiero comprar 4 cajas de huevos, en cada caja hay 24 huevos. Cada huevo cuesta \$2.00 ¿Cuánto se debe pagar por las 4 cajas?
Proporcionalidad simple compuesta	Divisiones	Compré 12 cajas de huevos. Un huevo cuesta \$3. Pagué \$360.00 por las 12 cajas ¿Cuántos huevos hay en cada caja?
Proporcionalidad doble	Multiplicaciones	Una granjera tiene 4 cabras. Una cabra produce 3 litros de leche por día. ¿Cuántos litros de leche producirán las 4 cabras en 7 días?
Proporcionalidad doble	Divisiones	Una granjera tiene 5 cabras. Si las 5 producen 80 litros en 4 días ¿Cuántos litros produce una cabra en un día?

A continuación se describe la estructura de los problemas que se emplearon en la investigación, así como algunos caminos que les dan solución. Los esquemas que se presentan son similares a los de Vergnaud (1991) tanto para la representación de las relaciones de los problemas, como para la explicación de las vías de solución de los mismos.

Problema 1. **Problema de proporcionalidad simple compuesta a resolverse mediante multiplicaciones.**

Quiero comprar 4 cajas de huevos, en cada caja hay 24 huevos. Cada huevo cuesta $2.00 ¿Cuánto se debe pagar por las 4 cajas?

Figura 21. Esquema del problema 1

Cajas	**Huevos**	**Dinero (en pesos)**
1 →	a (24)	X
	1 →	b ($2)
c (4) →	Y	?

En el esquema que se presenta, se anotan las medidas en la parte superior (cantidad de cajas, de huevos y de pesos). La información proporcionada en el enunciado corresponde a las variables *a, b* y *c*, las flechas indican las relaciones entre las medidas.

Podemos ver entonces que de acuerdo con los datos del enunciado, la medida cajas se relaciona con la variable *a* (huevos), y con la variable *b* (dinero), mientras que la medida huevos se relaciona también con esta última variable.

De este tipo de relaciones se desprenden preguntas intermedias posibles, las cuales permiten encontrar los valores de las variables correspondientes *x* y *y*. Así, por ejemplo, encontrar la respuesta a la pregunta intermedia ¿cuánto dinero corresponde a 24 huevos, que son el contenido de una caja?, nos lleva a conocer el valor de la variable *x*, para poder acceder a la respuesta final. La incógnita final se representa con el signo de interrogación (*?*)

A continuación se mencionan dos diferentes maneras en que se puede dar respuesta a la pregunta del problema. Cada procedimiento se encuentra dividido en los pasos que le componen. Para cada paso se señalan esquemas en los que se representan las relaciones que se establecen entre las medidas del problema.

Procedimiento 1.

Este procedimiento está conformado por los siguientes pasos:

Paso 1. Cálculo de la cantidad de huevos que corresponden a 4 cajas

Figura 22. Problema 1. Paso 1 del procedimiento 1

Cajas		**Huevos**
1	$\longrightarrow$	24
4	$\longrightarrow$	$\square$

A partir del conocimiento de la cantidad de huevos que tiene una caja se encuentra la cantidad de huevos que hay en cuatro cajas. En este caso, serían: 96 huevos

Paso 2. A partir de conocer la cantidad de huevos que hay en 4 cajas (96) cálculo de la cantidad de dinero que corresponde a esa cantidad de huevos

Figura 23. Problema 1. Paso 2 del procedimiento 1

Huevos	**Dinero**
1 →	$2
96 →	?

Tomando como dato el valor de un huevo, se obtiene el costo de 96 huevos.

Respuesta: $ 192

Procedimiento 2.

Paso 1. Cálculo de la cantidad de dinero de los huevos de una caja para conocer el precio de la misma

Figura 24. Problema 1. Paso 1 del procedimiento 2

Cajas	**Huevos**	**Dinero (en pesos)**
1	→ 24	$\square$
	1 →	$2

En este paso se establece primero la relación entre las medidas “huevos” y “cajas”: 24 huevos son equivalentes a 1 caja. Una vez hecho esto, se considera el dinero correspondiente a un huevo para obtener el que corresponde a 24 huevos (y por lo tanto al precio de una caja).

Respuesta: $ 48

Paso 2. Cálculo de la cantidad de dinero que corresponde a 4 cajas, conociendo el dinero de una caja.

Figura 25. Problema 1. Paso 2 del procedimiento 2

Cajas	**Dinero (en pesos)**
1	$ 48
4	?

Respuesta: $ 192

Problema 2. Problema de proporcionalidad simple compuesta a resolverse mediante divisiones.

Compré 12 cajas de huevos. Un huevo cuesta $3. Pagué $ 360.00 por las 12 cajas ¿Cuántos huevos hay en cada caja?

Figura 26. Esquema del problema 2

Cajas	**Huevos**	**Dinero (en pesos)**
	1	b ($3)
c (12)	X	a ($360)
1	?	Y

Del mismo modo que en el problema anterior, en el esquema que se presenta, se anotan las medidas en la parte superior (cantidad de cajas, de huevos y de pesos). La información proporcionada en el enunciado corresponde a las variables *a, b* y *c*, las flechas indican las relaciones entre las medidas.

Las preguntas intermedias posibles son: ¿cuántos huevos corresponden a $360? (incógnita *x*), o bien ¿cuánto dinero corresponde a una caja? (*y*) La incógnita final se representa con el signo "*?*"

A continuación se mencionan dos diferentes maneras en que se puede dar respuesta a la pregunta del problema.

Procedimiento 1.

Paso 1. Cálculo de la cantidad de huevos correspondiente a $360 para conocer cuántos huevos corresponden a 12 cajas.

Figura 27. Problema 2. Paso 1 del procedimiento 1

Cajas	**Huevos**		**Dinero (en pesos)**
	1	→	$3
12	X		$360

En este paso se establece primero la relación entre las medidas "huevos" y "cajas": la variable *x* se hace equivalente a la cantidad de huevos que hay en doce cajas, por lo tanto, se asume que el costo de 12 cajas ($360) es el de *x* huevos. Hecha esta equivalencia, se obtiene *x* correspondiendo las medidas huevos y dinero.

Respuesta: 120 huevos

Paso 2. Cálculo de la cantidad de cajas que se necesitan para empacar los 120 huevos

Figura 28. Problema 2. Paso 2 del procedimiento 1

Cajas		**Huevos**
12	$\longrightarrow$	120
1	$\longrightarrow$	?

Respuesta: 10 cajas

Procedimiento 2.

Paso 1. Cálculo del dinero correspondiente a una caja

Figura 29. Problema 2. Paso 1 del procedimiento 2

Cajas		**Dinero (en pesos)**
12	$\longrightarrow$	$360
(1)	$\longrightarrow$	$\square$

Respuesta: $ 30

Paso 2. Cálculo de la cantidad de huevos correspondiente al dinero de una caja

Figura 30. Problema 2. Paso 2 del procedimiento 2

Cajas	**Huevos**		**Dinero (en pesos)**
	1	$\longrightarrow$	$3
(1)	x	$\longrightarrow$	$30

En este paso se establece primero la siguiente relación: el dinero de 1 caja es equivalente al de *x* huevos, ya que *x* es su contenido. Una vez hecho esto, se establecen las relaciones pertinentes entre huevos y dinero para obtener *x*. La respuesta es: 10 huevos

Problema 3. Problema de proporcionalidad doble a resolverse mediante multiplicaciones.

Una granjera tiene 4 cabras. Una cabra produce 3 litros de leche por día. ¿Cuántos litros de leche producirán las 4 cabras en 7 días?

Figura 31. Esquema del problema 3

Días / **Cabras**	**1** ↓	**7**
1 →	a (3)	Y
b (4)	x	?

Procedimiento 1.

Paso 1. Cálculo de la cantidad de litros de leche de 4 cabras en un día

Figura 32. Problema 3. Paso 1 del procedimiento 1

Días / **Cabras**		**1**
1	→	3
4	→	$\boxed{}$

Respuesta: 12 litros

Paso 2. Cálculo de la cantidad de litros de 4 cabras en 7 días

Figura 33. Problema 3. Paso 2 del procedimiento 1

Días / **Cabras**	**1**	**7**
4	12	?

Respuesta: 84 litros

Procedimiento 2.

Paso 1. Cálculo de la cantidad de litros de leche de una cabra en 7 días

Figura 34. Problema 3. Paso 1 del procedimiento 2

Días / **Cabras**	**1**	**7**
1	3	$\boxed{}$

Respuesta: 21 litros

Paso 2. Cálculo de cantidad de litros de leche de 4 cabras en 7 días

Figura 35. Problema 3. Paso 2 del procedimiento 2

Días / Cabras	7
1	→ 21
4	$\square$

Respuesta: 84 litros

Problema 4. Problema de proporcionalidad doble a resolverse mediante divisiones.

Una granjera tiene 5 cabras. Si las 5 producen 80 litros en 4 días ¿Cuántos litros produce una cabra en un día?

Figura 36. Esquema del problema 4

Días / Cabras	1	b (4)
1	?	Y
c (5)	X	a (80)

Procedimiento 1.

Paso 1. Cálculo de los litros de leche de 5 cabras en un día

Figura 37. Problema 4. Paso 1 del procedimiento 1

Días / Cabras	1	4
5	$\square$	80

Repuesta: 20 litros

Paso 2. Cálculo de los litros de leche de una cabra en un día

Figura 38. Problema 4. Paso 2 del procedimiento 1

Días **Cabras**	**1**
1	?
5	20

Respuesta: 4 litros

Procedimiento 2.

Paso 1. Cálculo de los litros de leche de una cabra en 4 días

Figura 39. Problema 4. Paso 1 del procedimiento 2

Días **Cabras**	**4**
1	$\square$
5	80

Respuesta: 16 litros

Paso 2. Cálculo de los litros de leche de una cabra en un día

Figura 40. Problema 4. Paso 2 del procedimiento 2

Días **Cabras**	**1**	**4**
1	$\square$	16

Respuesta: 4 litros

Una vez descritas las estructuras y los procedimientos de solución de los problemas utilizados para este estudio, en el capítulo posterior se detalla el diseño de la metodología utilizada para llevarlo a cabo.

3. Método

3.1 Problema de Investigación

Como se revisó en los antecedentes de este trabajo, Martí y Pozo, (2000) y Zhang, (1997) sostienen que el uso de las tablas como formas de representación externa constituye un apoyo en los procesos cognitivos ya que las tablas cuentan con características que permiten cambiar el modo de enfrentarse a una tarea. Peltier (2003), por su parte, destaca la importancia del papel de las representaciones tanto internas como externas en la solución de problemas aritméticos, mientras que Vergnaud (1991) da un paso más allá en este tema al indicar que el uso de tablas resulta especialmente importante en la enseñanza de los problemas aritméticos complejos (específicamente para los problemas multiplicativos de proporcionalidad doble).

De acuerdo con Vergnaud (1991), la organización adecuada de la información en cuadros o tablas permite hacer evidentes las relaciones de un problema de manera más clara que cuando sólo se presenta en un enunciado, lo cual facilita el planteamiento de estrategias de solución por parte de los alumnos.

Por otro lado, si bien la propuesta de Vergnaud (1991) está dirigida particularmente hacia los problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo debido a las dificultades que enfrentan los niños para resolverlos, diversos autores han encontrado que los niños presentan también dificultades para otros problemas de tipo multiplicativo, aunque no necesariamente son “complejos” por denominación (Cerdán y Puig, 1988; Carretero, 1989; Vergnaud, 1991; Guerrero, 1998). Por ejemplo, Cerdán y Puig (1990) señalan que dentro de los problemas de isomorfismo de medidas, los problemas de búsqueda de cantidad de unidades son más difíciles que los de búsqueda de valor unitario, mientras que Carretero

(1989) indica que los problemas de proporcionalidad doble resultan más complicados que los de proporcionalidad simple. La cantidad de etapas también es un factor importante a considerar (Cerdán y Puig, 1990; Vergnaud, 1991) así como el tipo de estructura multiplicativa (Cerdán y Puig, 1990; Vergnaud, 1991; Guerrero, 1998) entre otros. Estos hallazgos implican la importancia de considerar todos estos factores al abordar cualquier estudio sobre la manera en que los niños se aproximan a los problemas de tipo multiplicativo.

Ante la importancia manifiesta del uso de tablas en la solución de problemas complejos y el reconocimiento de diversos factores que propician que algunos problemas multiplicativos resulten más difíciles para los niños que otros, nos parece necesario estudiar la forma en la cual los niños se enfrentan a algunos de los problemas aritméticos complejos que resultan más difíciles para ellos usando tablas. De esta manera, se pretende indagar si éstas pueden considerarse (o no) como herramientas útiles para entender las relaciones entre los datos de algunos de los problemas que resultan más complicados para los niños y por lo tanto, para plantear estrategias adecuadas para la solución de los mismos.

Por otro lado, se ha decidido trabajar sólo con problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo ya que se considera que, dadas las características que poseen, es posible reconocer en ellos varios de los factores que se relacionan con las principales dificultades de los niños al resolver problemas de tipo multiplicativo. De esta manera, se puede ahondar en las aportaciones que ya se tienen sobre el tema, y contribuir a enriquecer el estado de conocimiento que se tiene sobre problemas de tipo multiplicativo, el cual, dicho sea de paso, es menor al que se tiene sobre problemas de tipo aditivo (Cerdán y Puig, 1988)

Preguntas de investigación.

Las preguntas de investigación que orientan el presente trabajo son las siguientes:

¿Cómo influye en niños de 6º grado de primaria el uso de tablas al establecer relaciones adecuadas entre los datos de problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo que permitan el planteamiento de procedimientos apropiados para solucionarlos de manera pertinente?

¿Existe mayor accesibilidad a los problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo al usar tablas respecto de cuando no se utilizan?

¿Cómo influye el uso de tablas llenas y el uso de tablas vacías al establecer relaciones adecuadas entre los datos de problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo y al plantear procedimientos pertinentes para resolverlos?

¿Cómo influye el uso de tablas llenas y tablas vacías al establecer relaciones adecuadas y al plantear procedimientos de solución pertinentes en diferentes tipos de problemas complejos multiplicativos?

¿Existen diferencias en la accesibilidad a los problemas complejos de tipo multiplicativo al usar tablas (llenas y vacías) de acuerdo con el tipo de problema?

¿Los niños de 6º grado de primaria reconocen las tablas como herramientas pertinentes para resolver problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo?

Objetivos.

- Conocer la forma en que niños de 6º grado de primaria de entre 11 y 12 años se aproximan a problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo con el uso de tablas

- Comparar las relaciones que los niños de 6º grado de primaria establecen entre los datos de problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo cuando utilizan tablas respecto de cuando no lo hacen.

Hipótesis.

- Al usar las tablas como representaciones externas los niños podrán identificar más fácilmente relaciones adecuadas entre los datos de un problema complejo de tipo multiplicativo a diferencia de cuando no las usan.
- Al usar tablas los niños tendrán mayores posibilidades de encontrar procedimientos alternativos para resolver los problemas complejos de tipo multiplicativo a diferencia de cuando no las usan
- El uso de tablas llenas dará una mayor posibilidad de identificar relaciones entre los datos y/o diferentes estrategias de solución en comparación con las tablas vacías en los problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo

Variables de estudio.

Variables independientes.

a) *Situación experimental.*

Se toman en consideración tres aspectos propios de la tarea a realizar: 1) formato de presentación de los problemas, 2) orden de presentación de las tablas y 3) grado de complejidad de los problemas presentados.

Presentación de problemas: Los problemas se presentaron de dos maneras:

- Con tabla: Se presentaron los problemas con enunciados escritos y posteriormente se mostró una tabla como apoyo para resolver dichos problemas. La tabla podía estar “llena” (es decir, contenía los datos proporcionados en el enunciado) o “vacía” (sólo se presentaba el esquema gráfico, los participantes debían “llenarla” organizando en ella los datos del enunciado)

- Sin tabla: Se presentaron los problemas sólo con enunciados escritos sin proporcionar algún apoyo adicional.

Orden de presentación de la tabla: La presentación de los problemas se realizó de acuerdo con alguna de las siguientes secuencias:

- Presentación de problemas con tabla llena - presentación de problemas con tabla vacía
- Presentación de problemas con tabla vacía- presentación de problemas con tabla llena

Se establecieron estas secuencias para evaluar la existencia de diferencias al enfrentarse a los problemas empleando tablas llenas (que ya contienen los datos del problema) *vs.* cuando se usan tablas vacías (en las cuales el participante debe organizar los datos de los problemas). Este diseño se explica con mayor profundidad en el apartado “Tarea de indagación”

Grado de complejidad del problema: Se analizan las diferencias en las relaciones adecuadas establecidas por los participantes entre cuatro tipos de problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo (Véase Tabla 2, pág. 34). El orden de presentación de los problemas fue el siguiente:

- Problema 1 Proporcionalidad simple compuesta a resolverse con multiplicación

- Problema 2 Proporcionalidad simple compuesta a resolverse con división

- Problema 3 Proporcionalidad doble a resolverse con multiplicación

- Problema 4 Proporcionalidad doble a resolverse con división

Los cuatro problemas son de 2 etapas. Se decidió presentar primero los problemas de proporcionalidad simple compuesta y después los de proporcionalidad doble para que los niños se enfrentaran primero a un tipo de estructura multiplicativa (Peltier, 2003) y luego a otra. Asimismo, se presentó primero el problema que debía resolverse con multiplicaciones y después el de divisiones debido a que estos últimos resultan más difíciles por el tipo de búsqueda a realizar (cantidad de unidades, véase el apartado 2.4 Problemas aritméticos de tipo multiplicativo del Cap. 2 Fundamentación Teórica)

El orden ascendente de dificultad de los problemas (Peltier, 2003) es el siguiente:

- Problema 1 Proporcionalidad simple compuesta a resolverse con multiplicación
- Problema 3 Proporcionalidad doble a resolverse con multiplicación
- Problema 2 Proporcionalidad simple compuesta a resolverse con división
- Problema 4 Proporcionalidad doble a resolverse con división

Esta última organización es la que se consideró para el análisis de la variable independiente “grado de complejidad del problema”.

Variables dependientes.

Cantidad de procedimientos exitosos para resolver los problemas.

Se analizaron los procesos de solución planteados por los niños que los llevaron a respuestas correctas. Se valoraron como procedimientos exitosos aquellos mediante los cuales los niños llegaran a respuestas correctas siempre y cuando las relaciones establecidas entre los datos fueran adecuadas.

Siguiendo estos criterios y, de acuerdo con la fundamentación teórica que sustenta este trabajo, se esperaba un máximo de dos procedimientos exitosos para cada problema.

Los niños resolvieron los problemas usando de una a tres vías de solución. Sin embargo, la tercera de estas vías no correspondía con alguno de los procedimientos descritos en la fundamentación teórica del estudio. Además de esto, a pesar de llevar a un resultado final correcto, las relaciones establecidas entre los datos no eran adecuadas, de ahí que no se les consideró como procedimientos exitosos.

Identificación de relaciones adecuadas establecidas entre los datos.

Se cuantificaron las relaciones adecuadas establecidas por los niños para cada problema en cada una de las situaciones experimentales con la finalidad de observar si hay o no correlación entre el uso de tablas y el planteamiento de más relaciones adecuadas por parte de los niños.

La cuantificación de las relaciones adecuadas se realizó tomando en consideración sólo aquellas relaciones que se describen en los siguientes esquemas (cada relación adecuada está representada con una flecha)

Problema 1

Para el problema uno (proporcionalidad simple compuesta a resolverse con algoritmos de multiplicación) se consideraron como adecuadas y cuantificables las siguientes relaciones:

Ejemplo de problema 1:

Quiero comprar 4 cajas de huevos, en cada caja hay 24 huevos. Cada huevo cuesta $2.00 ¿Cuánto se debe pagar por las 4 cajas?

Figura 41. Organización de los datos del problema 1 en una tabla

Cajas	**Huevos**	**Dinero (en pesos)**
1	a (24)	X
	1	b ($2)
c (4)	Y	?

Para el procedimiento 1 se cuantificaron 4 relaciones adecuadas, y 5 para el procedimiento 2. Por otro lado, se encontró que ambos procedimientos comparten una relación adecuada, de ahí que el total de relaciones adecuadas para los niños que realizaron ambos procedimientos es de 8.

Tabla 3

Relaciones adecuadas cuantificables para el problema 1 usando operadores horizontales

Relaciones adecuadas para el problema 1 (operadores horizontales)	
Procedimiento 1	Procedimiento 2
1 caja por 24 huevos= función 24 cajas/huevos	1 huevo por 2 pesos = función 2 huevos-pesos
4 cajas por función 24 cajas/huevos = 96 huevos	96 huevos por función 2 huevos-pesos = 192 pesos*
1 huevo por 2 pesos = función 2 huevos-pesos	1 caja = 24 huevos Por lo tanto, la cantidad de dinero de 24 huevos es igual a la cantidad de dinero de una caja

96 huevos por función 2 huevos-pesos = 192 pesos*	1 caja por 48 cajas: función 48 cajas-pesos
	4 cajas por función 48 cajas-pesos= 192 pesos

Nota: * Relación compartida en los procedimientos 1 y 2

Tabla 4

Relaciones adecuadas cuantificables para el problema 1 usando operadores verticales

Relaciones adecuadas para el problema 1 (operadores verticales)	
Procedimiento 1	Procedimiento 2
4 cajas es 4 veces 1 caja (1 caja x escalar 4 = 4 cajas)*	24 huevos es 24 veces 1 huevo (1 huevo x escalar 24 = 24 huevos)
? huevos es a 24 huevos lo que 4 cajas es a 1 caja (24 huevos x escalar 4 = 96 huevos)	? pesos es a 2 pesos lo que 24 huevos es a 1 huevo (2 pesos x escalar 24 = 48 pesos)
96 huevos es 96 veces 1 huevo (1 huevo x escalar 96 = 96 huevos)	1 caja = 24 huevos Por lo tanto, la cantidad de dinero de 24 huevos es igual a la cantidad de dinero de una caja
? pesos es a 2 pesos lo que 96 huevos es a 1 huevo (2 pesos x escalar 96 = 192 pesos)	4 cajas es 4 veces 1 caja (1 caja x escalar 4 = 4 cajas)*
	? pesos es a 48 pesos lo que 4 cajas es a 1 caja (48 pesos x escalar 4 = 48 pesos)

Nota: * Relación compartida en los procedimientos 1 y 2

Problema 2

Los niños que resolvieron el problema empleando tanto el procedimiento 1 como el procedimiento 2 tuvieron una cuantificación de 4 relaciones adecuadas. En cambio, los que lo resolvieron empleando ambos procedimientos, obtuvieron un total de 7 relaciones adecuadas, debido a que ambos procesos comparten una relación adecuada.

Ejemplo de problema 2:

Compré 12 cajas de huevos. Un huevo cuesta $3. Pagué $ 360.00 por las 12 cajas ¿Cuántos huevos hay en cada caja?

Figura 42. Organización de los datos del problema 2 en una tabla

Cajas	**Huevos**	**Dinero (en pesos)**
	1 ⟶	b ($3)
c (12)	X	a ($360)
1	?	

Tabla 5

Relaciones adecuadas cuantificables para el problema 2 usando operadores horizontales

Relaciones adecuadas para el problema 2 (operadores horizontales)	
Procedimiento 1	Procedimiento 2
1 huevo por $3 = 3 huevos/pesos (función)*	12 cajas por x función cajas/dinero = $360 pesos
x huevos por 3 huevos/pesos = 360 pesos	1 caja por función 30 cajas/dinero = pesos correspondientes a una caja.
12 cajas por función cajas/huevos = 120 huevos	1 huevo por $3 = función 3 huevos/cajas*
1 caja por función 10 cajas/huevos = 10 huevos. Esto puede hacerse mediante una multiplicación 1:10=10	x huevos por función 3 huevos/cajas = $30

Nota: * Relación compartida en los procedimientos 1 y 2

Tabla 6

Relaciones adecuadas cuantificables para el problema 2 usando operadores verticales

Relaciones adecuadas para el problema 2 (operadores verticales)	
Procedimiento 1	Procedimiento 2
$360 son 120 veces $3, la función escalar resultante es “x 120”	12 cajas es 12 veces una caja; por lo tanto, la función escalar es 12*
x huevos es a un huevo, lo que $360 son a $3 (función escalar x 120).	$360 son a x pesos, lo que 12 cajas a 1 caja.
12 cajas es 12 veces una caja, por lo tanto la función escalar es x 12*	$ 30 son 10 veces $3 (se obtiene conociendo el número de veces que la medida $3 cabe en la medida $30, esto es 30/3= 10)
12 cajas son a 1 caja, lo que 120 huevos son a x huevos.	*x* huevos es a un huevo, lo que $30 son a $3 (función escalar 10).

Nota: * Relación compartida en los procedimientos 1 y 2

Problema 3

De la misma manera que en el problema 2, se cuantificaron 4 relaciones a los niños que resolvieron el problema 3 empleando tanto el procedimiento 1 como el procedimiento. En cambio, para los que lo resolvieron empleando ambos procedimientos, se les cuantificó un total de 7 relaciones adecuadas, debido a que ambos procedimientos comparten una de ellas.

Ejemplo de problema 3:

Una granjera tiene 4 cabras. Una cabra produce 3 litros de leche por día. ¿Cuántos litros de leche producirán las 4 cabras en 7 días?

Figura 43. Organización de los datos del problema 3 en una tabla

Días / **Cabras**	**1**	**7**
1	a (3)	y
b (4)	x	?

Tabla 7

Relaciones adecuadas cuantificables para el problema 3 usando operadores horizontales

Relaciones adecuadas para el problema 3 (operadores horizontales)	
Procedimiento 1	Procedimiento 2
Se obtiene la función “3 cabras/litros/días” al multiplicar 1 cabra por 3 litros por día*	1 día por 3 litros por cabra = función 3 días/litros/cabras*
Se multiplica 4 cabras por la función obtenida (3 cabras/litros por día) dando como resultado: 12 litros por día.	7 días por función 3 litros/días = 21 litros
Se obtiene la función “litros/días” al multiplicar 1 día por 12 litros= 12 litros/días	Obtener la función “21 cabras/litros” al multiplicar 1 cabra por 21 litros
Se multiplican 7 días por la función obtenida (12 litros/días) dando el resultado final= 84 litros	Aplicar la función a la medida “4 cabras”. Esto es: 4 cabras por función “21 cabras litros” = 84 litros

Nota: * Relación compartida en los procedimientos 1 y 2

Tabla 8

Relaciones adecuadas cuantificables para el problema 3 usando operadores verticales

Relaciones adecuadas para el problema 3 (operadores verticales)	
Procedimiento 1	Procedimiento 2
4 cabras es 4 veces 1 cabra, por lo tanto, la función escalar es 4.	7 días es 7 veces 1 día, por lo tanto, la función escalar es 7*
x litros por día son a 3 litros por día, lo que 4 cabras a 1 cabra. Por lo tanto, 3 litros por día por la función escalar 4 = número de litros por día para 4 cabras. En este caso 3 x 4 = 12	x litros es a 3 litros lo que 7 días a 1 día. Por lo tanto, 3 litros por escalar 7 = 21 litros.
7 días es 7 veces 1 día, por lo tanto, la función escalar es 7*	4 cabras es 4 veces 1 cabra, por lo tanto la función escalar es 4.
x litros son a 12 litros lo que 2 días a 1 día. Por lo tanto, 12 litros por el escalar 7 = número de litros para 7 días. Esto es 12:7 = 84	x litros son a 21 litros lo que 4 cabras a una cabra. Por lo tanto, se aplica la función escalar 4 a los 21 litros obteniendo el total de litros para 4 cabras

Nota: * Relación compartida en los procedimientos 1 y 2

Problema 4

De la misma forma que en los problemas 2 y 3, para el problema 4 se cuantificaron 4 relaciones adecuadas a quienes resolvieron usando o bien el procedimiento 1 o el procedimiento 2. En cambio, los que lo resolvieron empleando ambos procedimientos, obtuvieron un total de 7 relaciones adecuadas.

Ejemplo de problema 4:

Una granjera tiene 5 cabras. Si las 5 producen 80 litros en 4 días ¿Cuántos litros produce una cabra en un día?

Figura 44. Organización de los datos del problema 4 en una tabla

Días / **Cabras**	**1**	**b (4)**
1	?	Y
c (5)	X	a (80)

Tabla 9

Relaciones adecuadas cuantificables para el problema 4 usando operadores horizontales

Relaciones adecuadas para el problema 4 (operadores horizontales)	
Procedimiento 1	Procedimiento 2
Obtener la función para obtener los litros de 1 cabra en un día a partir de conocer los 80 litros de leche de 5 cabras en 4 días	Obtener la función para obtener los litros de 1 cabra en un día a partir de conocer los 80 litros de leche de 5 cabras en 4 días
1 día por la función 20 litros/día = 20 litros. Esto puede hacerse mediante una multiplicación 1:20=20	1 cabra por función cabras/litros de leche de 4 días = 16 litros de leche.
5 cabras por función cabras/litros por día = 20 litros por día	4 días por función días/litros de leche = 16 litros de leche
1 cabra por función 4 cabras/litros por día = 4 litros	1 día por función 4 días/litros de leche = 4

	litros de leche.

Nota: * Relación compartida en los procedimientos 1 y 2

Tabla 10

Relaciones adecuadas cuantificables para el problema 4 usando operadores verticales

Relaciones adecuadas para el problema 4 (operadores verticales)	
Procedimiento 1	Procedimiento 2
4 días es 4 veces 1 día, por lo tanto el operador escalar es 4.	5 cabras es 5 veces 1 cabra, por lo tanto, el valor escalar es 5
80 litros es a x litros, lo que 4 días a 1 día.	80 litros de leche son a x litros de leche lo que 5 cabras son a 1 cabra
5 cabras es 5 veces 1 cabra, por lo tanto, el valor del escalar es 5	4 días es 4 veces 1 día, por lo tanto, el valor del escalar es 4
20 litros son a x litros lo que 5 cabras a 1 cabra	16 litros de leche por cabra son a x litros de leche por cabra lo que 4 días son a 1 día.

*Nota: * Relación compartida en los procedimientos 1 y 2*

3.2 Procedimiento

Descripción de la muestra.

Los participantes fueron 45 niños y niñas de 6º grado de una primaria urbana pública ubicada en la zona norte del municipio de Querétaro.

Los sujetos se distribuyeron en tres grupos de 15 alumnos: el grupo control, el grupo experimental 1 y el grupo experimental 2.

La distribución de los sujetos en los grupos se realizó de manera aleatoria. Las edades de los participantes oscilan entre los 11 y los 12 años.

Instrumentos.

Se llevaron a cabo dos situaciones, los niños del grupo control participaron de la situación uno, la cual consistía en dos entrevistas (*pretest-postest)* ; mientras que los niños de los grupos experimentales se enfrentaron a la situación dos, que consistía en cuatro entrevistas (ver apartado Tarea de indagación)

Para llevar a cabo las entrevistas se utilizaron tres formatos, cada uno de los cuales contenía cuatro problemas a resolver. La estructura de los problemas es similar en los tres formatos, sin embargo, los enunciados varían en cuando a las medidas y las cantidades que se manejan. A continuación se describe la estructura de cada entrevista:

- Formato de entrevista 1: Consiste en la presentación de cuatro problemas sólo con enunciados escritos. La secuencia de esta entrevista es la siguiente:

  1. Lectura del problema y explicación de lo que debe encontrar
  2. Solución del problema y explicación del procedimiento empleado
  3. Búsqueda de soluciones alternativas

Este formato de entrevista se utilizó en las dos situaciones de este trabajo (ver apartado Tarea de indagación).

- Formato de Entrevista 2: Consiste en la presentación de cuatro problemas con enunciados escritos y con tablas llenas (ya contienen los datos de los problemas). La secuencia de esta entrevista es la siguiente:

  1. Lectura del problema y explicación de lo que debe encontrar
  2. Lectura de la tabla y explicación de la misma

3. Solución del problema empleando la tabla y explicación del procedimiento empleado
4. Búsqueda de soluciones alternativas

Este formato de entrevista se utilizó sólo en la situación experimental 2 (ver apartado Tarea de indagación)

- Formato de Entrevista 3: Consiste en la presentación de 4 problemas con enunciados escritos y con tablas vacías (es necesario organizar en ellas los datos de los problemas). La secuencia de esta entrevista es la siguiente:

1. Lectura del problema y explicación de lo que debe encontrar
2. Organización de los datos del problema en la tabla vacía
3. Solución del problema empleando la tabla y explicación del procedimiento empleado
4. Búsqueda de soluciones alternativas

Este formato de entrevista se utilizó sólo en la situación experimental 2 (ver apartado Tarea de indagación)

Cada entrevista tiene una duración aproximada de 40 minutos y fueron aplicadas en diferentes días: una cada vez.

Formatos de tablas utilizadas.

Para presentar las tablas llenas a los niños se diseñó un formato para cada tipo de problema. Los diseños se realizaron tomando como base la estructura que muestra Carretero (1989) en uno de sus estudios. (Véase Tabla 11)

En cuanto a las tablas vacías, los diseños presentados indican las medidas utilizadas en los problemas y los cuadros correspondientes a cada una de ellas para que los niños organizaran los datos en ellas. (Véase Tabla 12)

Tabla 11

Formatos de tablas llenas presentadas en la tarea de indagación

Formatos de tablas llenas presentadas en la tarea de indagación

Bolsas	**Canicas**	**Dinero**
1	12	
	1	$2
3		

Proporcionalidad simple compuesta
(x)

Bolsas	**Canicas**	**Dinero**
	1	$ 3.00
1		
6		$90.00

Proporcionalidad simple compuesta
(/)

Días Tiendas	**1**	**3**
1	35	
4		

Proporcionalidad doble
(x)*

Días Tiendas	**1**	**6**
1		
5		300

Proporcionalidad doble
(/)*

Nota: * Se usa “x” para referirse al algoritmo de la multiplicación; y se usa “/” para referirse al algoritmo de la división. Se especifican estos algoritmos, debido a que son los que se emplean para resolver los problemas referidos en la tabla

Tabla 12

Formatos de tablas vacías presentadas en la tarea de indagación

Bolsas	**Canicas**	**Dinero**

Proporcionalidad simple compuesta
(x - /)*

Días **Tiendas**	**1**	**3**
1	35	
4		

Proporcionalidad doble
(x - /)*

Nota: * Se usa “x” para referirse al algoritmo de la multiplicación; y se usa “/” para referirse al algoritmo de la división. Se especifican estos algoritmos, debido a que son los que se emplean para resolver los problemas referidos en la tabla

Tarea de indagación.

Como se mencionó anteriormente, para la recolección de datos se diseñaron dos situaciones:

Situación 1: Situación diseñada para efectos de control, en ella se realizan dos entrevistas en las que no se usan tablas para resolver cuatro problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo. Ambas entrevistas se realizan utilizando sólo el formato 1 de entrevistas, esto es: sólo se presentan enunciados para resolver cuatro problemas. Esta situación se desarrolla aplicando las entrevistas en días diferentes, esto es, en dos días.

Situación 2: Situación diseñada para realizar la comparación entre niños que utilizan tablas y niños que no lo hacen. En esta situación se realizan cuatro entrevistas en el siguiente orden:

- Una entrevista sin tabla: entrevista similar a la utilizada en la situación 1. Para llevar a cabo esta entrevista se utiliza el formato 1

- Dos entrevistas con tabla: en una de estas entrevistas los niños deben resolver cuatro problemas aritméticos de tipo multiplicativo empleando tablas llenas y en la otra usando tablas vacías. Se lleva a cabo utilizando los formatos de entrevista 2 y 3

- Una entrevista sin tabla: similar a la entrevista sin tabla inicial. Se realiza empleando el formato 1.

Esta situación se desarrolla aplicando las entrevistas en días diferentes, esto es, en cuatro días.

Como se recordará, los participantes se dividieron en tres grupos: el control, el experimental 1, y el experimental 2.

Los niños del grupo control se enfrentaron a la situación 1 en la que resolvieron problemas sin emplear tablas.

En cambio, los niños del grupo experimental 1 y 2 realizaron la situación 2 con una variación entre ambos grupos: el orden de presentación de las tablas, el cual constituye una de las variables a analizar en este estudio. Para estos efectos, se diseñaron dos secuencias para la situación 2:

Secuencia 1.

a) Formato de entrevista 1: Presentación de problemas sin tabla. La aplicación de esta entrevista fue considerada como *pre-test*

b) Formato de entrevista 2: Presentación de problemas y de tablas llenas para solucionarlos

c) Formato de entrevista 3: Presentación de problemas y de tablas vacías para solucionarlos

d) Formato de entrevista 1: Nuevamente se presentan problemas sin tabla. La aplicación de esta entrevista se consideró como *postest.*

Esta secuencia fue realizada con los niños del grupo experimental 1.

Secuencia 2.

a) Formato de entrevista 1: Presentación de problemas sin tabla. La aplicación de esta entrevista fue considerada como *pre-test*

c) Formato de entrevista 3: Presentación de problemas y de tablas vacías para solucionarlos

b) Formato de entrevista 2: Presentación de problemas y de tablas llenas para solucionarlos

d) Formato de entrevista 1: Nuevamente se presentan problemas sin tabla. La aplicación de esta entrevista se consideró como *postest*.

Esta secuencia fue realizada con los niños del grupo experimental 2

La primera fase de ambas secuencias es considerada como *pretest* debido a que en ella los niños se enfrentan a los problemas por primera vez y sólo con enunciados escritos. Esta fase es similar para los tres grupos de la muestra, ya que a todos los niños se les presenta el mismo grupo de problemas.

La última fase se califica como *postest* ya que los niños de los grupos experimentales 1 y 2 se enfrentan a situaciones intermedias en las que utilizan tablas y se analiza si hay variación en sus respuestas iniciales respecto de las finales que pueda correlacionarse con esas situaciones intermedias. Esta última fase también es similar para todos los grupos de la muestra, ya que todos los niños resuelven el mismo grupo de problemas.

A pesar de que los niños de los grupos experimentales pasan por etapas intermedias en las que resuelven problemas usando tablas, estas etapas no se consideran "intervenciones" propiamente dichas con las que se pretenda una mejora en la comprensión de las relaciones multiplicativas entre los datos cuyo efecto pueda verificarse con un *postest*. Más bien, se decidió aplicar una entrevista final para que, en caso de haber una progresión en el éxito de los niños durante el desarrollo de las dos situaciones, se pudiera analizar si dicho éxito podía atribuirse al uso de tablas o a un aprendizaje de la solución de problemas derivado de la práctica constante de los mismos. Esta es la intención de la fase denominada *postest* en el presente trabajo.

Como se observará, los niños del grupo control, al enfrentarse a la situación 1 sólo realizan las fases de *pretest* y *postest*; es decir, dos entrevistas, para evaluar si hay diferencias entre sus respuestas y las de los niños de los grupos experimentales, quienes al enfrentarse a la situación 2 utilizan tablas en situaciones intermedias y a su vez, se enfrentan a 4 entrevistas.

Este formato de entrevista se utilizó sólo en la situación 2 (ver apartado Tarea de indagación)

La organización de la aplicación de las entrevistas se muestra en la tabla 15

Tabla 13

Etapas de aplicación de las entrevistas a cada grupo de la muestra

Grupo de la muestra	Entrevistas aplicadas			
Grupo control	*Pretest*	Ninguna	Ninguna	*Postest*
Grupo experimental 1	*Pretest*	Tabla llena	Tabla vacía	*Postest*
Grupo experimental 2	*Pretest*	Tabla vacía	Tabla llena	*Postest*

Las entrevistas tuvieron una duración de aprox. 40 min cada una de ellas, todas ellas fueron videograbadas para su análisis.

Como ya se mencionó, en cada entrevista se presentaron cuatro problemas: dos de proporcionalidad simple compuesta y dos de proporcionalidad doble. La estructura de los problemas fue similar en todas las entrevistas, teniendo variaciones sólo en las medidas y cantidades utilizadas. De este modo, los niños del grupo control, que al participar de la situación 1 sólo realizaron dos entrevistas, resolvieron un total de 8 problemas (los de las etapas 1 y 4); mientras que los niños de los grupos experimentales 1 y 2, al atravesar la situación 2 resolvieron un total de 16 problemas. Los problemas presentados se exponen en los siguientes cuadros.

Tabla 14

Problemas presentados en el *pretest*

Tipo de problema	Operaciones para resolverlo	*Pretest*
Proporcionalidad simple compuesta	Multiplicaciones	Quiero comprar 4 cajas de huevos, en cada caja hay 24 huevos. Cada huevo cuesta \$2.00 ¿Cuánto se debe pagar por las 4 cajas?
Proporcionalidad simple compuesta	Divisiones	Compré 12 cajas de huevos. Un huevo cuesta \$3. Pagué \$360.00 por las 12 cajas ¿Cuántos huevos hay en cada caja?
Proporcionalidad doble	Multiplicaciones	Una granjera tiene 4 cabras. Una cabra produce 3 litros de leche por día. ¿Cuántos litros de leche producirán las 4 cabras en 7 días?
Proporcionalidad doble	Divisiones	Una granjera tiene 5 cabras. Si las 5 producen 80 litros en 4 días ¿Cuántos litros produce una cabra en un día?

Tabla 15

Problemas presentados en el *postest*

Tipo de problema	Operaciones para resolverlo	*Postest*
Proporcionalidad simple compuesta	Multiplicaciones	Quiero comprar 7 paquetes de plumas, en cada paquete hay 10 plumas. Cada pluma vale \$4 ¿Cuánto hay que pagar por las 7 cajas?
Proporcionalidad simple compuesta	Divisiones	Compré 5 paquetes de plumas. Cada pluma vale \$6. Pagué \$420 plumas por las 5 cajas. ¿Cuántas plumas hay en cada paquete?
Proporcionalidad doble	Multiplicaciones	Una tienda vende 20 plumas en un día. ¿Cuántas plumas venden 6 tiendas en 4 días?
Proporcionalidad doble	Divisiones	Ocho tiendas venden 560 plumas en 7 días ¿Cuántas plumas vende una tienda en un día?

Tabla 16

Problemas presentados en la segunda etapa de la situación presentada a los grupos experimentales

Tipo de problema	Operaciones para resolverlo	Etapa 2
Proporcionalidad simple compuesta	Multiplicaciones	Quiero comprar 4 cajas de huevos, en cada caja hay 24 huevos. Cada huevo cuesta \$2.00 ¿Cuánto se debe pagar por las 4 cajas?
Proporcionalidad simple compuesta	Divisiones	Compré 12 cajas de huevos. Un huevo cuesta \$3. Pagué \$360.00 por las 12 cajas ¿Cuántos huevos hay en cada caja?
Proporcionalidad doble	Multiplicaciones	Una granjera tiene 4 cabras. Una cabra produce 3 litros de leche por día. ¿Cuántos litros de leche producirán las 4 cabras en 7 días?
Proporcionalidad doble	Divisiones	Una granjera tiene 5 cabras. Si las 5 producen 80 litros en 4 días ¿Cuántos litros produce una cabra en un día?

Tabla 17

Problemas presentados en la tercera etapa de la situación presentada a los grupos experimentales

Tipo de problema	Operaciones para resolverlo	Etapa 3
Proporcionalidad simple compuesta	Multiplicaciones	Quiero comprar 3 bolsas de canicas, en cada bolsa hay 12 canicas. Cada canica cuesta $2.00 ¿Cuánto se debe pagar por las 3 bolsas?
Proporcionalidad simple compuesta	Divisiones	Compré 6 bolsas de canicas. Una canica cuesta $3. Pagué $90.00 por las 6 bolsas ¿Cuántas canicas hay en cada bolsa?
Proporcionalidad doble	Multiplicaciones	Una tienda vende 35 canicas en un día. ¿Cuántas canicas venden 4 tiendas en 3 días?
Proporcionalidad doble	Divisiones	Cinco tiendas venden 300 canicas en 6 días ¿Cuántas canicas vende una tienda en un día?

Debido a la organización de la aplicación de las entrevistas, todos los niños de la muestra resolvieron los problemas de las etapas 1 y 4 en condiciones similares ya que se usó el formato 1 de entrevista para presentarlos: sólo con enunciados.

Los niños de los grupos experimentales tuvieron diferencias en las presentaciones de los problemas de las etapas 2 y 3 debido al diseño de la situación de la que participaron. De este modo, los problemas de la etapa 2 fueron resueltos usando tablas llenas por parte de los niños del grupo experimental 1 y tablas vacías por parte de los niños del grupo experimental 2. En cambio, los problemas de la etapa 3 fueron resueltos usando tablas vacías por parte de los niños del grupo experimental 2 y tablas llenas por parte de los niños del grupo experimental 2.

Este diseño fue la base para el análisis de los resultados de acuerdo con las variables descritas en el planteamiento del problema.

En el siguiente capítulo se presentan la discusión de los resultados obtenidos.

4. Discusión de resultados

4.1 Análisis de los Resultados del *Pretest* y el *Postest* para los Tres Grupos de la Muestra

Como primera parte del análisis de resultados, se hizo una revisión del *pretest* (solución de problemas sin tabla) para observar si había diferencias significativas en la cantidad de procedimientos exitosos y en la identificación de relaciones adecuadas entre los tres grupos de la muestra. Esta comparación se realizó con la finalidad de verificar si alguno de los grupos presentaba ventajas importantes sobre los otros, y por lo tanto, si era necesario realizar ajustes en la configuración de los mismos antes de iniciar las dos situaciones (solución de problemas con tabla)

Este análisis se realizó con ANOVA, los resultados obtenidos *(F=.548, n.s*[2]*.= 0.582)* indicaron que no hubo diferencias significativas entre los tres grupos (control, experimental 1 y experimental 2) en el pretest por lo que no se realizaron cambios en ellos para la realización de las dos situaciones.

En un segundo análisis, se compararon los promedios de los procedimientos exitosos y las relaciones adecuadas establecidas por los niños de la muestra para resolver los cuatro problemas presentado tanto en el *pretest* como en el *postest*. Esto se realizó con la finalidad de observar si había diferencias significativas entre los resultados de los tres grupos de la muestra. Para realizarlo, se utilizó la prueba *t* de *Student*.

En cuanto a los procedimientos exitosos, se encontró que los niños del grupo control no tuvieron una diferencia significativa entre el pretest y el postest *(t=*-1.658.*, n.s.= 0.120, g.l.=14*). En cambio, el conjunto de niños de los dos grupos experimentales sí

[2] *n.s.* : nivel de significancia

presentaron una diferencia significativa (*t* =-2.489*, n.s:0.019, g.l.= 29)* No obstante, al realizar el mismo análisis tomando como grupos independientes los niños del grupo experimental 1 y los del grupo experimental 2, se encontró que sólo los niños del grupo 1 tuvieron una diferencia significativa *(t =-2.103, n.s=.054, g.l.= 14)*, mientras que los del grupo experimental 2 no la tuvieron *(t = -1.562, n.s:0.140, g.l.= 14)*. Esto quiere decir que los niños del grupo experimental 1 presentaron una mejoría estadísticamente significativa entre los resultados que obtuvieron en el *postest*, respecto del *pretest.* En cambio, los niños del grupo experimental 2 no tuvieron esa diferencia significativa. Estos resultados indican que la mejora de los niños de los grupos experimentales tras haber pasado por situaciones intermedias utilizando tablas no necesariamente fue progresiva y estable al llegar a la entrevista final. Estos datos permiten observar que existen mejoras en los niños a mayor experiencia con los problemas, pero además de esto, y como se demostrará en apartados posteriores, también hay diferencias notables cuando usan tablas respecto de cuando no lo hacen aún cuando ya se hayan enfrentado a los mismos tipos de problemas en diversas ocasiones.

En la Tabla 18 se presentan los promedios de los procedimientos exitosos obtenidos por cada grupo de la muestra al resolver los cuatro problemas presentados en el *pretest* y los cuatro del *postest.*

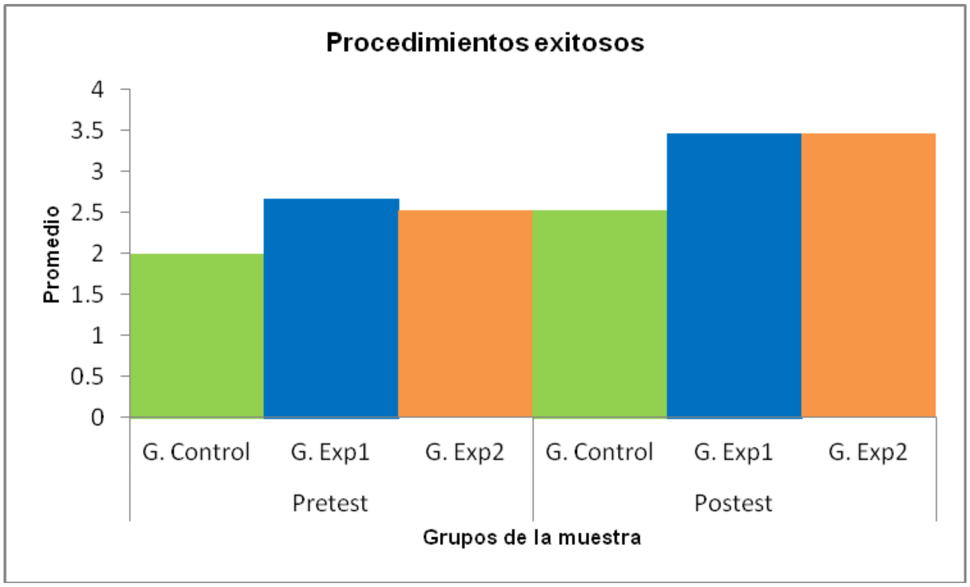
Tabla 18

Promedios de procedimientos exitosos realizados por cada grupo de la muestra en el *pretest* y el *postest*

Promedios de procedimientos exitosos en *pretest* y *postest*			
Grupo de la muestra	**N**	***Pretest***	***Postest***
Grupo control	15	X= 2.0000	X= 2.5333
Grupo experimental 1	15	X= 2.6667	X=3.4667
Grupo experimental 2	15	X= 2.5333	X= 3.4667
Grupos experimentales 1 y 2	30	X= 2.6000	X= 3.4667

Tanto en la Tabla 18 como en la Figura 45 puede observarse la diferencia en todos los grupos de la muestra al finalizar las dos situaciones respecto de cómo las iniciaron. Como ya se ha mencionado, si bien hay una mejora en el *postest* respecto del *pretest* ésta es estadísticamente significativa sólo para uno de los grupos de la muestra. La experiencia con los problemas podría vincularse con la mejora en todos los grupos, pero, como se mostrará en apartados posteriores, el uso de tablas es una variable que se correlaciona de manera significativa con dicha mejora, lo que ratifica su valor como herramienta de apoyo para la construcción de aprendizajes.

Figura 45. Gráfica de los procedimientos exitosos obtenidos por cada grupo de la muestra en el *pretest* y el *postest*



De manera similar a lo ocurrido con los procedimientos exitosos, no se obtuvo una diferencia significativa en identificación de relaciones adecuadas en los niños del grupo control (*t=-1.208 n.s.= 0.247, g.l=14*) entre su *postest* y su *pretest;* pero sí en los niños de los dos grupos experimentales tomándolos como un conjunto único *(t=-3.282, n.s.=0.003 g.l=29)* Esto quiere decir que estos niños, tras haber empleado las tablas, si bien no tuvieron una mejora significativa en el planteamiento de procedimientos exitosos, sí la tuvieron al plantear relaciones adecuadas, lo que indica que plantearon de manera más pertinente relaciones intermedias al finalizar las dos situaciones que al inicio de las mismas.

Con la finalidad de conocer si esta mejora era significativa para los dos grupos experimentales, se realizó un análisis para cada uno de ellos. Como resultado, se encontró que la diferencia en la identificación de relaciones adecuadas fue significativa tanto en el grupo experimental 1 (*t*= -2.577, *n.s.= 0.022, g.l=14*) como en el grupo experimental 2 (*t*= -2.053, *n.s.= 0.059, g.l=14*)

Estos resultados, nuevamente dan cuenta de la importancia de la experiencia con los problemas para poder plantear relaciones entre sus datos de manera más adecuada, dando pie para analizar de manera más precisa las diferencias que existen al solucionarlos usando tablas respecto de cuando no se emplean.

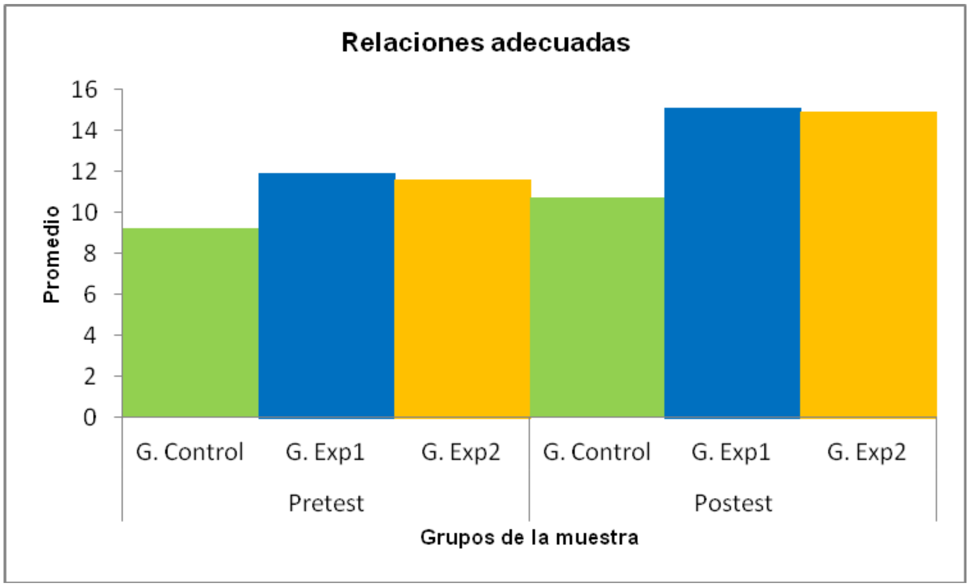
En la tabla 19 y la Figura 46 se presenta de manera visualmente más clara la mejora en los promedios de los niños al establecer relaciones adecuadas entre los datos de los problemas en el *postest* respecto del *pretest.*

Tabla 19

Promedios de relaciones adecuadas planteadas realizados por cada grupo de la muestra en el *pretest* y en el *postest*

Promedios de relaciones adecuadas en pretest y en postest			
Grupo de la muestra	**N**	**Pretest**	**Postest**
Grupo control	15	X= 9.2667	X= 10.7333
Grupo experimental 1	15	X=11.9333	X= 15.1333
Grupo experimental 2	15	X= 11.6000	X= 14.9333
Grupos experimentales 1 y 2	30	X=11.7667	X=15.0333

Figura 46. Promedios de relaciones adecuadas planteadas por cada grupo de la muestra en el *pretest* y en el *postest*



En conclusión, los resultados de estos primeros análisis indican que los niños del grupo control plantearon procedimientos exitosos e identificaron relaciones adecuadas de manera muy parecida tanto en el *pretest* como en el *postest*.

En contraste, los niños de los grupos experimentales mostraron un incremento significativo en la identificación de relaciones adecuadas en el *postest* en relación al *pretest.* En cuanto al planteamiento de procedimientos exitosos, sólo los niños del grupo experimental 1 mostraron un incremento significativo, mientras que los del grupo experimental 2 no lo tuvieron. Cabe recordar que los niños del grupo experimental 1 emplearon primero tablas llenas y después una tablas vacías para resolver los problemas; mientras que los niños del grupo experimental 2 usaron primero tablas vacías y posteriormente tablas llenas. Las diferencias obtenidas en la significatividad de los resultados entre ambos grupos hacen aún más necesario el análisis de la variable "Orden de presentación de las tablas" que se presenta en apartados posteriores.

4.2 Las tablas y la Solución Exitosa de los Problemas

En dos de las hipótesis planteadas en este trabajo se anticipó que al hacer uso de representaciones externas (en este caso las tablas) para resolver problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo, los niños podrían tanto identificar relaciones adecuadas entre los datos de dichos problemas, como encontrar procedimientos alternativos para resolverlos a diferencia de cuando no las usaran.

Con la finalidad de verificar estos planteamientos, se compararon los promedios de los procedimientos exitosos y de las relaciones adecuadas planteadas por los niños de los grupos 1 y 2 durante las situaciones sin tabla (*pretest* y *postest*) y durante las dos situaciones (con tablas llenas y vacías) No se utilizaron los resultados de los niños del grupo control debido a que no hicieron uso de tablas.

Cantidad de procedimientos exitosos.

Al comparar los promedios de los procedimientos exitosos obtenidos por los grupos experimentales 1 y 2 (con la prueba *t* de Student) en situaciones sin tablas (*pretest* y *postest*) y situaciones con tablas (con tablas llenas y con tablas vacías) se encontró como resultado que sí existen diferencias significativas entre ambas situaciones. A saber:

- Se encontró una diferencia significativa entre los resultados del **pretest** (sin tabla) y los de la situación con tabla **llena** (t = -3.864, *n.s.= 0.001, g.l=29*)
- Se encontró una diferencia significativa entre los resultados del **postest** (sin tabla) y los de la situación con tabla **llena** (t =*-2.843, n.s.=0.008 , g.l=29*)

- Se encontró una diferencia significativa entre los resultados del **pretest** (sin tabla) y los de la situación con tabla **vacía** (*t =-4.306, n.s.= 0.000, g.l=29*)
- Se encontró una diferencia significativa entre los resultados del **postest** (sin tabla) y los de la situación con tabla **vacía** (*t =-3.577, n.s.=0.001, g.l=29*)

En la tabla 20 y la figura 47 se organizan los promedios obtenidos por los niños de los grupos experimentales en cada una de las etapas de la situación 2. De este modo, pueden identificarse las diferencias que tuvieron al plantear procedimientos exitosos en situaciones sin tabla y situaciones con tabla llena y con tabla vacía.

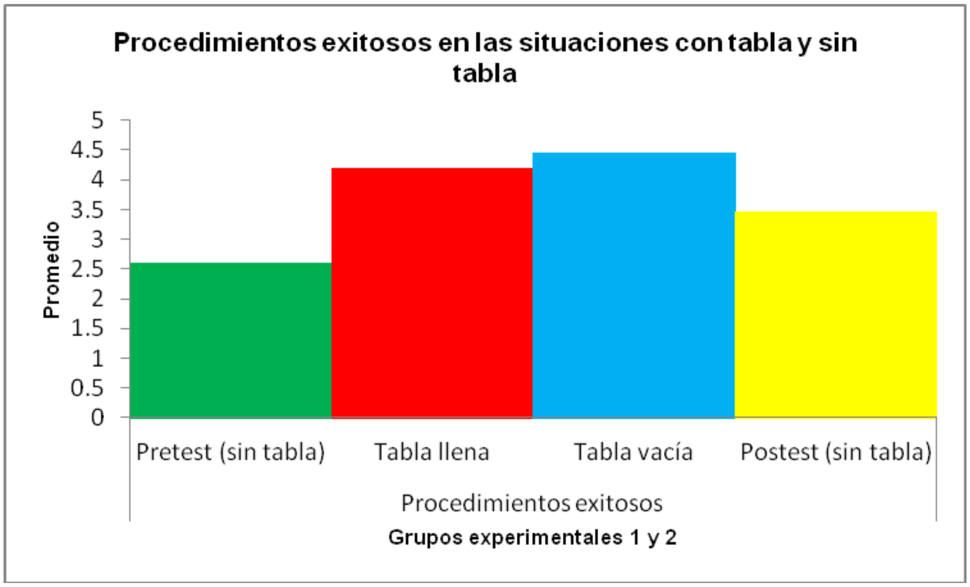
Tabla 20

Promedios de procedimientos exitosos realizados por cada grupo de la muestra en las situaciones con tabla y en las situaciones sin tabla

Promedios de procedimientos exitosos en situaciones con tabla y situaciones sin tabla			
Grupo de la muestra	Situación (con tabla o sin tabla)	N	Promedio
Grupo experimental 1	Sin tabla (pretest)	15	X= 2.6667
	Sin tabla (postest)		X = 3.4667
	Con tabla (llena)		X = 4.4000
	Con tabla (vacía)		X = 4.6667
Grupo experimental 2	Sin tabla (pretest)	15	X= 2.5333
	Sin tabla (postest)		X = 3.4667
	Con tabla (llena)		X = 4.0000
	Con tabla (vacía)		X= 4.2667
Grupos experimentales 1 y 2	Sin tabla (pretest)	30	X= 2.6000
	Sin tabla (postest)		X = 3.4667

	Con tabla (llena)	X = 4.2000
	Con tabla (vacía)	X = 4.4667

Figura 47. Promedios de procedimientos exitosos realizados por cada grupo de la muestra en las situaciones con tabla y en las situaciones sin tabla



Como puede observarse, los resultados obtenidos reflejan una mejoría notable en los niños en las situaciones en las que utilizan tablas (independientemente de si son llenas o vacías) respecto de las situaciones en las cuales no las utilizan.

En el apartado anterior se mencionó que los niños del grupo experimental 1 mostraron un incremento significativo en cuanto al planteamiento de procedimientos exitosos, mientras que los del grupo experimental 2 no lo tuvieron. En cambio, los niños de ambas muestras tienen un incremento estadísticamente significativo en este mismo aspecto al usar tablas respecto de cuando no las usan.

La observación de una mejora notable entre el *pretest* y el *postest* en los niños que trabajaron con tablas, así como de las diferencias igual de importantes obtenidas en las situaciones con tabla, independientemente de si estas se presentaban llenas o vacías, respecto de las situaciones sin tabla, al contrastarse con la observación de los resultados obtenidos por los niños que no usaron tablas en lo absoluto, nos lleva a la consideración de que la experiencia con las tablas se puede correlacionar de manera significativa con mejoras en el planteamiento de procedimientos exitosos para resolver problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo.

Identificación de relaciones adecuadas.

Se utilizó la Prueba *t* de Student para comparar el promedio de la identificación de relaciones adecuadas entre las situaciones sin tabla (pretest y postest) y las situaciones con tabla (llena y vacía)

Como resultado, se encontraron diferencias significativas entre todas las condiciones esto es: pretest-tabla llena (*t =-7.040, n.s.=0.000, g.l=29*); pretest-tabla vacía (*t =-7.272, n.s.= 0.000, g.l=29*); postest-tabla llena (*t =-5.821, n.s.= 0.000, g.l=29*) y postest-tabla vacía (*t =-4.964, n.s.= 0.000, g.l=29*)

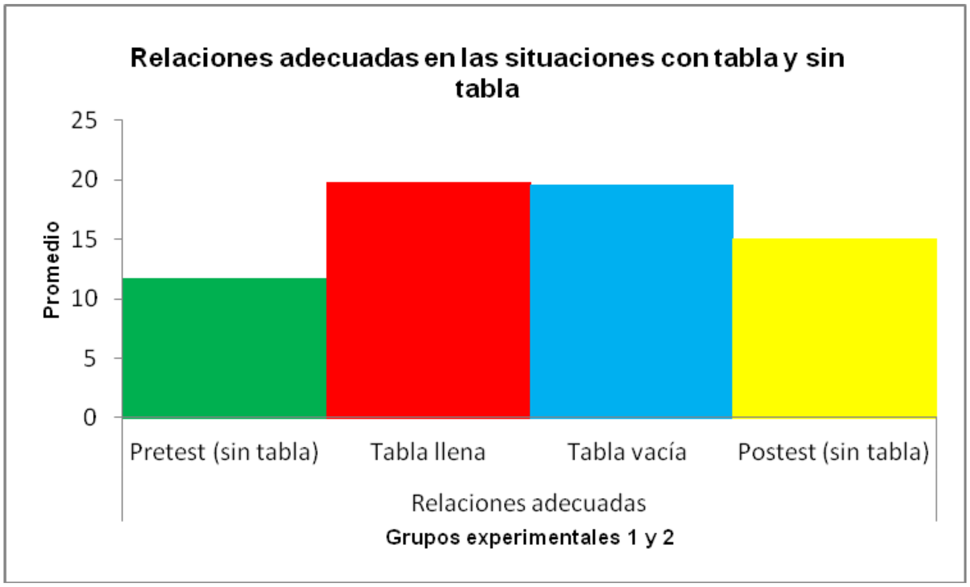
En la tabla 21 y la figura 48 se presentan los promedios obtenidos por los grupos experimentales de manera independiente y también como conjunto, al establecer relaciones adecuadas entre los datos de los cuatro problemas presentados en cada una de las etapas de la situación 2. Las mejoras significativas al usar tablas tanto llenas como vacías respecto de cuando no se emplean son fácilmente identificables en ambos gráficos.

Tabla 21

Promedios de relaciones adecuadas realizadas por cada grupo de la muestra en las situaciones con tabla y en las situaciones sin tabla

Promedios de relaciones adecuadas identificadas en situaciones con tabla y situaciones sin tabla			
Grupo de la muestra	Situación (con tabla o sin tabla)	N	Promedio
Grupo experimental 1	Sin tabla (pretest)	15	X= 11.9333
	Sin tabla (postest)		X =15.1333
	Con tabla (llena)		X = 20.2667
	Con tabla (vacía)		X = 20.2000
Grupo experimental 2	Sin tabla (pretest)	15	X= 11.6000
	Sin tabla (postest)		X = 14.9333
	Con tabla (llena)		X = 19.3333
	Con tabla (vacía)		X= 18.9333
Grupos experimentales 1 y 2	Sin tabla (pretest)	30	X= 11.7667
	Sin tabla (postest)		X = 15.0333
	Con tabla (llena)		X = 19.8000
	Con tabla (vacía)		X = 19.5667

Figura 48. Promedios de relaciones adecuadas realizadas por cada grupo de la muestra en las situaciones con tabla y en las situaciones sin tabla



Todos estos resultados indican que los niños identificaron en mayor medida relaciones adecuadas entre los datos de los problemas cuando usaron tablas respecto de cuando no lo hicieron.

Las mejoras encontradas tanto en planteamiento de procedimientos exitosos, como identificación de relaciones adecuadas son un ejemplo que lo que Zhang (1997) explica al indicar que las representaciones externas, como son las tablas, influyen en el desarrollo cognitivo ya que restringen el rango de acciones cognitivas posibles puesto que posibilitan unas e impiden otras. En este caso, las tablas han restringido el planteamiento de relaciones inadecuadas a favor de las relaciones adecuadas y de los procedimientos exitosos.

4.3 ¿Usar Tablas Llenas o Tablas Vacías?

Si bien se encontraron mejoras importantes en los niños de los grupos experimentales al usar tablas respecto de cuando no lo hicieron, los análisis mostrados hasta el momento no permitían ver si hubo diferencias en dichas mejoras dependiendo del tipo de tabla empleada (llena o vacía).

Debido a ello, se utilizó la Prueba *t* de Student con la finalidad de conocer si había alguna diferencia significativa en el promedio de procedimientos exitosos y de identificación de relaciones adecuadas entre la situación con tabla llena y la situación con tabla vacía.

Como resultado se encontró que no hubo diferencia significativa entre ambas situaciones, ni en la cantidad de procedimientos exitosos (t = -1.216, n.s. = 0.234, g.l. = 29), ni en la identificación de relaciones adecuadas (t = *0.410*, *n*.s.= 0.685, g.l. = 29)

A primera vista, estos resultados podrían llevar a pensar que el uso de cualquier tabla (llena o vacía) puede conducir a los niños a tener éxito al enfrentarse a los problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo; ya que al emplear una u otra, los niños tuvieron los mismos efectos positivos (mayor cantidad de procedimientos exitosos e identificación de relaciones adecuadas); sin embargo, al analizar los efectos del uso de la tabla de acuerdo con el grado de dificultad de los problemas y con el orden de presentación de las tablas, se encontró que sí hay diferencias cualitativas importantes a considerar en cuanto al uso de tablas llenas o vacías.

Este análisis se describe en el siguiente apartado.

4.4 Análisis del Grado de Dificultad de los Problemas y su Relación con el Uso de Tablas

Como se recordará, en el apartado dedicado a la descripción de las variables de estudio, se mencionó que los problemas presentados a los niños, tenían el siguiente orden ascendente de dificultad:

- Problema 1 Proporcionalidad simple compuesta a resolverse con multiplicación
- Problema 3 Proporcionalidad doble a resolverse con multiplicación
- Problema 2 Proporcionalidad simple compuesta a resolverse con división
- Problema 4 Proporcionalidad doble a resolverse con división

Para analizar la relación entre el uso de tablas y el grado de dificultad que tuvieron los niños de los grupos experimentales 1 y 2 al enfrentarse a los cuatro tipos de problemas se revisó el éxito que tuvieron en cada situación para cada uno de ellos. Los resultados se presentan en los apartados subsecuentes.

Problema 1 Proporcionalidad simple compuesta a resolverse con multiplicación.

Tabla 22

Total de niños que resolvieron exitosamente el problema 1 en cada situación

PROBLEMA 1				
	Pretest	Situación exp. 1	Situación exp. 2	Postest
Grupo Exp. 1	13	15	11	14
Tabla utilizada		Tabla llena	Tabla vacía	
Grupo Exp. 2	13	9	15	15
Tabla utilizada		Tabla vacía	Tabla llena	

Nota: N = 15

Como puede observarse en la tabla 22, los niños del grupo 1 tuvieron mayor éxito al usar tablas llenas y en las situaciones sin tabla (*pretest* y *postest)* que al usar tablas vacías para resolver el problema 1.

En el caso del grupo 2, el éxito de los niños también fue mayor al usar tabla llena que al usar tabla vacía, como también lo fue al usar tabla llena que al no usarla en el *pretest*. Asimismo, obtuvieron mejores resultados en el *pretest* que cuando usaron tablas vacías. Por otro lado, presentaron resultados similares tanto al usar tabla llena como en el *postest.*

En suma, los resultados obtenidos tanto en el grupo 1 como en el grupo 2 indican que hay diferencias favorables en los niños cuando usan tabla llena respecto de cuando usan tabla vacía (a favor de las primeras) para resolver el problema 1

Problema 2: Proporcionalidad simple compuesta a resolverse con división.

Tabla 23

Total de niños que resolvieron exitosamente el problema 2 en cada situación

PROBLEMA 2				
	Pretest	Situación exp. 1	Situación exp. 2	Postest
Grupo 1	1	12	11	8
Tabla utilizada		Tabla llena	Tabla vacía	
Grupo 2	2	7	9	5
Tabla utilizada		Tabla vacía	Tabla llena	

Nota: N = 15

Como puede observarse en la tabla 23 los niños del grupo 1 presentaron una mejora considerable entre el *pretest* (sin tabla) y la segunda situación (con tabla llena); ya que hubo un incremento de 1 a 12 niños que resolvieron el problema.

Al pasar a la siguiente situación (con tabla vacía), 11 de esos niños mantuvieron respuestas exitosas y al pasar al *postest*, sólo 8 continuaron con respuestas exitosas.

Así pues, la diferencia de éxito en relación con el tipo de tabla usada fue de sólo un niño a favor de las tablas llenas. En conclusión, los niños del grupo 1 tuvieron resultados muy parecidos al usar tablas llenas que al usar tablas vacías para resolver el problema dos.

En el caso del grupo 2, los niños también aumentaron el éxito en la solución del problema al pasar del *pretest* a la siguiente situación (con tablas vacías), este éxito aumentó al pasar a la siguiente situación (con tablas llenas), mientras que al realizar el *postest* disminuyó hasta ser inferior al obtenido en las dos situaciones con tabla, pero superior al obtenido en el *pretest*.

Los resultados obtenidos tanto en el grupo 1 como en el grupo 2 indican que el uso de tablas resultó especialmente favorable para resolver el problema 2, ya que hay notables incrementos en el éxito de los niños cuando se emplean las tablas respecto de cuando no se hace uso de ellas. Estas mejoras son mayores que las que tienen lugar al resolver el problema uno.

Por otro lado, se encontraron ligeras diferencias en el éxito de la solución de problemas dependiendo del tipo de tabla empleada. En el grupo 1, la diferencia entre tabla llena y tabla vacía fue de 1 niño; mientras que en el grupo 2 la diferencia fue de 2 niños; en ambos grupos, a favor de la tabla llena.

Los resultados de este análisis cualitativo nos llevan a la conclusión de que probablemente el uso de tablas llenas en las primeras aproximaciones para la solución de problemas de proporcionalidad simple compuesta como el que se presentó a los niños puede llevar a mayores posibilidades de planteamientos de procedimientos exitosos que el uso de tablas vacías.

Problema 3: Proporcionalidad doble a resolverse con multiplicación.

Tabla 24

Total de niños que resolvieron exitosamente el problema 3 en cada situación

PROBLEMA 2				
	Pretest	Situación exp. 1	Situación exp. 2	Postest
Grupo 1	12	12	11	12
Tabla utilizada		Tabla llena	Tabla vacía	
Grupo 2	14	13	13	15
Tabla utilizada		Tabla vacía	Tabla llena	

Nota: N = 15

Al resolver el problema 3, los niños del grupo 1 presentaron resultados similares en el *pretest* (sin tabla) en las dos situaciones (con tablas llenas y vacías) y en el *postest* (sin tablas).

Los niños del grupo 2 también reflejaron una tendencia a mantener resultados similares en las cuatro situaciones pero presentando un ligero aumento en el éxito en las situaciones sin tabla.

Así pues, para el problema 3 no se observaron mejoras en los niños al utilizar las tablas. Asimismo, tampoco se observó tendencia a obtener mayor éxito empleando un tipo de tabla sobre otro. En cambio, puede notarse una ligera ventaja en las situaciones sin tabla respecto a las situaciones con tabla, especialmente con la vacía.

En suma, de entre los tres tipos de problemas analizados hasta el momento, el problema 3 es el único en el que no sólo no hay mejoras en las respuestas de los niños cuando usan tablas respecto de cuando no lo hacen, sino que incluso hay una ligera disposición a tener menos éxito al emplearlas, especialmente al usar la tabla vacía.

Problema 4: Proporcionalidad doble a resolverse con división.

Tabla 25

Total de niños que resolvieron exitosamente el problema 4 en cada situación

PROBLEMA 2				
	Pretest	Situación 1	Situación 2	Postest
Grupo 1	5	8	7	4
Tabla utilizada		Tabla llena	Tabla vacía	
Grupo 2	5	7	8	9
Tabla utilizada		Tabla vacía	Tabla llena	

Nota: N = 15

Al resolver el problema 4, los niños del grupo 1 mostraron un incremento importante de éxito al utilizar tablas respecto de cuando no lo hicieron. En cuanto a la comparación de resultados entre una tabla y otra, como puede observarse, se encontró una diferencia de sólo un niño a favor de la tabla llena respecto de la tabla vacía. Así pues, se considera que el descenso en el éxito de los niños del grupo 1 al llegar al *postest* se puede correlacionar con el hecho de que en esta última situación no emplearon tablas.

En el caso del grupo 2, los niños también aumentaron el éxito en la solución del problema en las situaciones en las que usaron tablas respecto del *pretest* (sin tablas), pero no del *postest* (sin tablas). En cuanto a la comparación entre el uso de una u otra tabla se encontró que, de la misma forma que pasó con el grupo experimental 1 hubo una diferencia de sólo un niño a favor de la tabla llena respecto de la tabla vacía.

Los resultados obtenidos tanto en el grupo 1 como en el grupo 2 indican que el uso de tablas resultó favorable para resolver el problema 4, ya que hay pequeños incrementos en el éxito de los niños cuando se emplean las tablas respecto de cuando no se hace uso de ellas. Estas mejoras son ligeramente mayores a que las que tienen lugar al resolver el problema 1, pero menores a las que ocurren cuando se resuelve el problema 2.

Estos resultados nos llevan a la conclusión de que tanto el uso de tablas llenas como el uso de tablas vacías puede llevar a resultados igualmente favorables para la identificación de relaciones adecuadas y el planteamiento de procedimientos exitosos en los niños al aproximarse a problemas de tipo 4 (proporcionalidad doble a resolverse mediante divisiones).

Comparación entre los resultados de los 4 tipos de problema.

Si bien todos los problemas presentados a los niños requerían la búsqueda de una sola respuesta intermedia para poder acceder a la respuesta final, hay variables que pueden identificarse como elementos importantes para determinar porqué algunos problemas han resultado más complicados que otros para los niños. Así, de la misma manera que Carretero (1989) nos hemos encontrado con que los problemas de proporcionalidad doble han resultado más difíciles que los de proporcionalidad simple; si bien, por otro lado, la ubicación de la variable ha influido en esta relación, del mismo modo que lo han indicado Cerdán y Puig (1988), resultando más difíciles los problemas donde hubo de buscarse la cantidad de unidades que aquellos donde se buscó el valor unitario (independientemente de si la relación entre los datos era de proporcionalidad simple compuesta o de proporcionalidad doble)

En relación con el uso de representaciones externas, se concluye que la tabla ha sido más útil para resolver los problemas de tipo 2, es decir, los problemas de proporcionalidad simple compuesta en los que se realizó búsqueda de cantidad de unidades mediante divisiones.

Se observa una influencia también favorable, pero menor que para el problema 2 en la solución de los problemas de tipo 1, es decir, de proporcionalidad simple compuesta en los que se busca el valor unitario, y que se resuelven con multiplicación y en los problemas de tipo 4 (de proporcionalidad doble en los que se busca la cantidad de unidades y que se resuelven con divisiones).

En cambio, no se observan influencias favorables del uso de tablas al resolver problemas de tipo 3 (proporcionalidad doble en los que se busca el valor unitario mediante multiplicaciones).

En cuanto al tipo de tabla (llena o vacía) se observa que para el problema 1, los niños presentan un notable mayor éxito al resolver los problemas con tablas llenas respecto de cuando usan tablas vacías. En cambio, en el problema 2, hay diferencias mínimas (de sólo uno o dos niños) al usar tablas llenas que al usar tablas vacías, aunque estas diferencias son a favor de las tablas llenas. En el problema 3, apenas hay diferencias en los resultados al usar un tipo u otro de tabla, por lo que no se consideran relevantes. Lo mismo ocurre con el problema 4.

En conclusión, si bien en los problemas 2, 3 y 4 hay una ligera tendencia a obtener mejores resultados usando tablas llenas (con diferencias de uno o dos niños por grupo experimental), ésta es mínima respecto a la obtenida en el problema 1.

Ante estos resultados se considera que las tablas resultan más útiles para resolver los problemas en los que se busca la cantidad de unidades que en los que se busca el valor unitario, siendo las tablas llenas las que tienen mejor influencia que las tablas vacías.

De acuerdo con estos resultados, es oportuno señalar que en este estudio las tablas funcionaron efectivamente como organizadores avanzados[3]. Por otro lado, es importante tomar en consideración que éstas podrían resultar útiles sólo cuando los niños están en un paso intermedio de comprensión tanto de las relaciones entre los datos de los problemas aritméticos, como de las características de las tablas que se utilizan para organizar dichas relaciones. Por ejemplo: en el caso del problema 1, el cual ya dominan los niños, la tabla no les resulta una herramienta indispensable para tener éxito al solucionarlo, pero cuando tanto la tabla como el problema están fuera de sus posibilidades (como ocurrió frecuentemente en los problemas 3 y 4) entonces las tablas no resultaron útiles.

Esto último nos lleva a advertir la veracidad de lo que indican Martí y Pozo(2000) al señalar la doble naturaleza de las representaciones externas (en este caso las tablas) ya que son objetos representativos que remiten a otra realidad y a la vez objetos perceptibles en sí mismos. Este planteamiento permite a las representaciones externas ser auxiliares para la comprensión de otros objetos de conocimiento (como las relaciones entre los datos de un problema) y a la vez objetos cuyas características deben también ser construidas por los niños.

4.5 Las Tablas como Herramientas Útiles para los Niños

En los apartados anteriores, se han presentado los resultados de un análisis cuantitativo realizado sobre los datos obtenidos en el presente estudio. De estos resultados se desprende el reconocimiento de la utilidad de la tabla para incrementar las posibilidades

[3] De acuerdo con Ausubel (1978), los organizadores avanzados se definen como “materiales introductorios que presentan un nivel superior de abstracción, generalización e inclusión al pasaje por aprender en sí mismo…” (Ausubel, 1978 p. 252). Estos materiales consisten en los conceptos previos que tienen los sujetos al enfrentarse a un nuevo aprendizaje y su función principal es tender un puente entre lo que el aprendiz sabe y lo que debe de aprender. Los organizadores avanzados, al ser aprendizajes anteriores ya establecidos y de carácter más general permiten incluir nuevos conocimientos de carácter más específico o subordinables a los primeros.

de los niños para establecer relaciones adecuadas entre los datos de algunos de los problemas presentados.

Sin embargo, esta utilidad de las tablas no es evidente para todos los niños. Esto pudo observarse tras analizar cualitativamente sus impresiones al usarla como herramienta para solucionar los problemas que se les presentaron. Como resultado de este análisis se encontró que a lo largo de las entrevistas realizadas con los niños de los grupos experimentales varios de ellos realizaron juicios sobre la dificultad de los problemas así como sobre la utilidad de la tabla que se les proporcionó. Asimismo, algunos de ellos manipularon las tablas para “mejorarlas”. Debido a la gran variedad de combinaciones obtenidas entre juicios y manipulaciones de las tablas por parte de los niños, se realizó una categorización general sobre estos resultados. A saber:

- Utilizan la tabla de manera adecuada presentando incrementos en el establecimiento de relaciones adecuadas entre los datos de los problemas. En estos casos, emplean las tablas que se les proporcionan e incluso las modifican, pero sin reconocer que las piden y/o transforman porque les facilita el proceso de solución de los problemas (ver ejemplo: *Marco)*
- Reconocen la utilidad de la tabla sin presentar un incremento real en el establecimiento de relaciones adecuadas entre los datos de los problemas. En estos casos, los niños manifestaron que la tabla era útil, pero los planteamientos que hacían para dar solución a los problemas no eran adecuados (ver ejemplo: *Óscar*)
- Señalamientos de que la tabla les complicaba la tarea o bien expresiones corporales de disgusto al “tener que” usarla. Entre estos casos algunos niños (a pesar de su reticencia) tenían más éxito al usar tablas que al no hacerlo, mientras que otros

presentaban desempeños similares entre ambas situaciones; es decir: con o sin tabla que al no hacerlo (ver ejemplo: *Óscar Daniel*)

- Transformación de la tabla: en estos casos, los niños transformaron las tablas o bien, crearon sus propias tablas de acuerdo con criterios personales. En estos casos algunos niños tuvieron como resultado soluciones pertinentes para algunos de los problemas (ver ejemplo: *Esteban y Marco)* No obstante, otros niños no lograron establecer relaciones adecuadas entre los datos aún al haber transformado la tabla según sus creencias.
- Omisión del uso de la tabla: en estos casos los niños colocaban algunos datos de los problemas en las tablas pero no las usaban para resolver los problemas. Se presentan tanto situaciones de éxito como de fracaso. (Ver ejemplo: *Marco)*

A diferencia de los resultados obtenidos en el análisis cuantitativo, no se encontraron inclinaciones notables en los niños por alguno de los resultados anteriores. Esto podría estar motivado por el hecho de que no se hicieron preguntas que formaran parte de las entrevistas acerca de la utilidad de las tablas, sino que se analizaron sólo los comentarios espontáneos que los niños hicieron a lo largo de las dos situaciones, así como las manipulaciones (transformaciones) que hicieron sobre las tablas y que, de hecho, tuvieron lugar sólo en casos muy contados. Aún así, se considera que estos resultados son relevantes, toda vez que ofrecen una primera aproximación acerca de lo que los niños piensan acerca de las tablas.

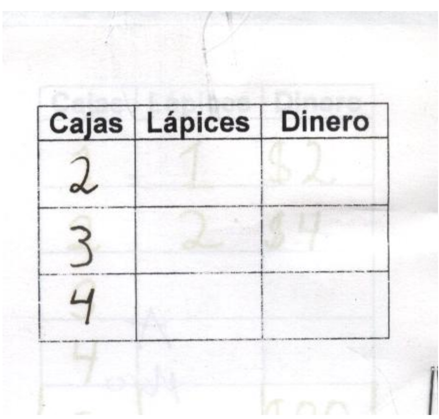
A continuación se muestran algunos ejemplos sobre los resultados recién expresados:

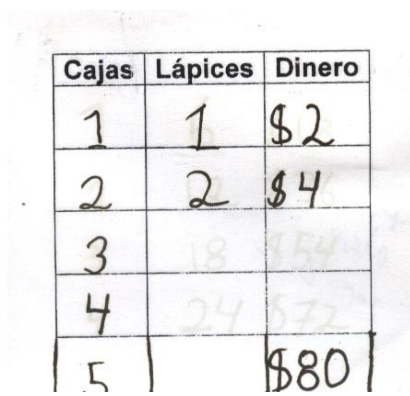
Marco

Marco es un integrante del grupo experimental 2. Los resultados que obtuvo a lo largo de las entrevistas fueron los siguientes:

En el *pretest* resolvió con un solo procedimiento de manera exitosa el problema 1. En la etapa 2, usando tabla vacía, logró plantear dos procedimientos adecuados para este mismo tipo de problema. En la etapa 3, nuevamente realizó dos procesos pertinentes para solucionarlo. Sin embargo, en el *postest* sólo logró plantear un camino de solución adecuado (tal como en el *pretest)* En este caso, el niño logró mejorar el establecimiento de relaciones adecuadas entre los datos al resolver el problema 1 con tablas, pero en ninguna de las entrevistas hizo referencia a la utilidad de la mismas para enfrentarse a las tareas propuestas.

Figuras 49 y 50. Acomodo de datos del problema 1 en una Tabla vacía (*Marco)*





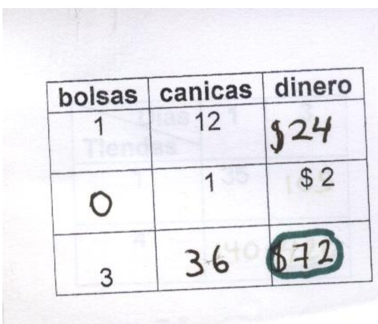
Nota: Al enfrentarse al problema 1 empleando tablas vacías, Marco acomodó no sólo los datos proporcionados en el enunciado del problema, sino que colocó datos adicionales obtenidos al colocar una secuencia progresiva de cantidades en la columna de la medida “Cajas”. De ahí su petición de una tabla adicional para poder colocarlos. Como puede observarse en la Fig. Marco no logra establecer relaciones adecuadas entre los datos de manera horizontal, ya que puestos de ese modo pareciera que la relación entre cajas y lápices es de uno a uno y que el precio unitario de ambas medidas es el mismo.

Figura 51. Acomodo de datos del problema 1 en una tabla vacía adicional (*Marco)*

Cajas	Lápices	Dinero
1	6	$18
2	12	$36
3	18	$54
4	24	$72

Nota: En esta tabla vacía adicional, Marco logra colocar de manera pertinente los datos del problema 1

Figura 52. Acomodo de datos del problema 1 en una tabla llena (*Marco)*

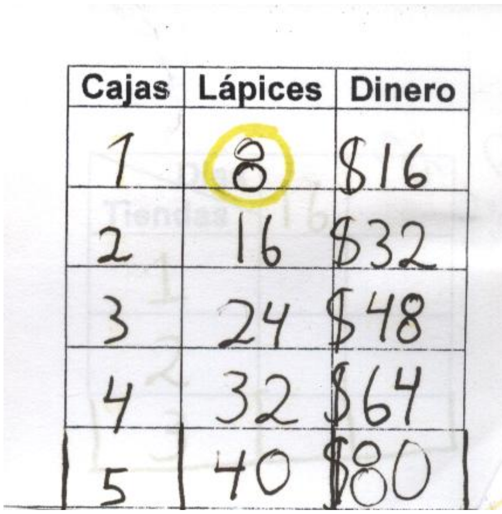


bolsas	canicas	dinero
1	12	$24
0	1	$ 2
3	36	$72

Nota: La figura muestra una Tabla llena que Marco completó para resolver el problema 1

Al resolver el problema 2 en el *pretest* el niño no logró establecer relaciones adecuadas entre los datos del problema, ni plantear un procedimiento pertinente para resolverlo. En la etapa 2 (con tabla vacía) solicitó una tabla con más filas para acomodar los datos del problema. Finalmente adicionó una fila a la tabla que ya tenía para resolver el problema. En esta fase logró establecer relaciones adecuadas y plantear un procedimiento exitoso de solución. Sin embargo, no hizo alusión a la utilidad de la tabla ni comparó su desempeño en esta entrevista respecto del *pretest* en el que no se le proporcionaron tablas. En la etapa 3 (con tabla llena) el niño nuevamente planteó un procedimiento adecuado de solución y lo mismo en el *postest* (en ausencia de tabla) En esta última fase no solicitó que se le proporcionara alguna tabla ni generó una propia.

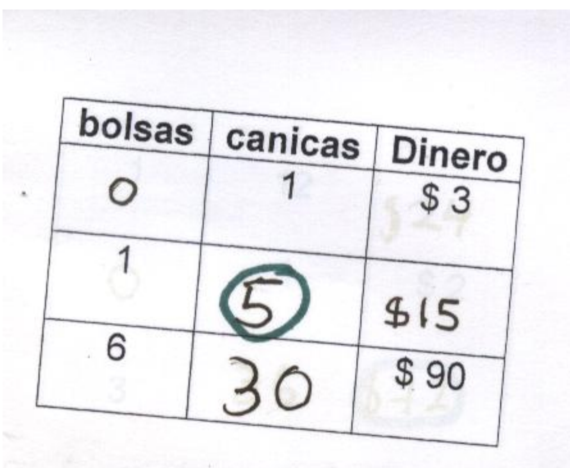
Figura 53. Acomodo de datos del problema 2 en una tabla vacía (*Marco)*



Cajas	Lápices	Dinero
1	8	$16
2	16	$32
3	24	$48
4	32	$64
5	40	$80

Nota: Tabla vacía que Marco ha usado para colocar los datos del problema 2 resolviéndolo con éxito

Figura 54. Acomodo de datos del problema 2 en una tabla llena (*Marco)*

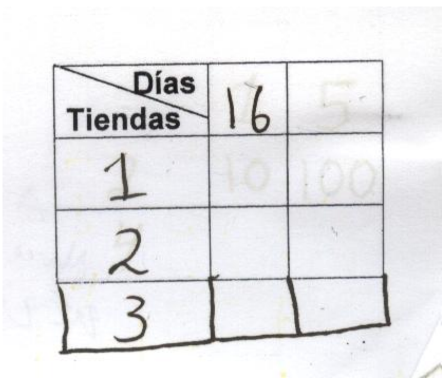


bolsas	canicas	Dinero
0	1	$ 3
1	5	$15
6	30	$ 90

Nota: Tabla llena que Marco completa para resolver el problema 2 obteniendo éxito en la tarea

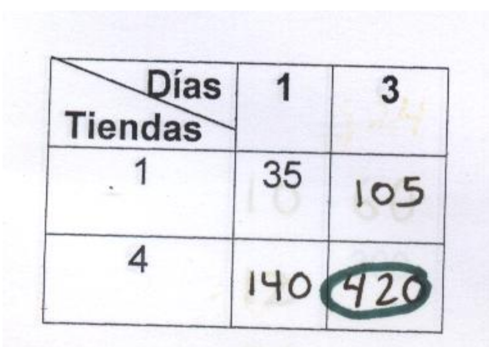
En el *pretest* Marco resolvió el problema 3 usando de manera exitosa dos procedimientos distintos. Sin embargo, al enfrentarse al mismo tipo de problema en la etapa 2 (con tabla vacía) presenta dificultades para interpretar la tabla. No logra organizar los datos del problema en ella. Hace su propia tabla intentando acomodar las medidas usando la misma estructura que las tablas de los problemas de proporcionalidad simple compuesta. No obstante, al llegar a la etapa 3, con tabla llena, ya no presenta las mismas dificultades y plantea dos soluciones adecuadas al problema. Este éxito se mantiene en el *postest.*

Figura 55. Modificación de una tabla vacía para acomodar los datos del problema 3 (*Marco)*



Nota: Tabla vacía que Marco modifica para intentar colocar los datos del problema 3. A pesar de no lograr colocar los datos del problema y de no llenar el resto de la tabla el niño resuelve con éxito la tarea.

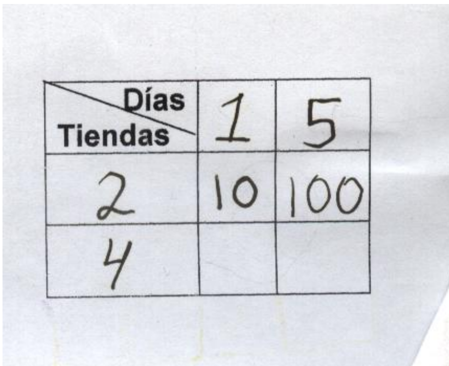
Figura 56. Acomodo de datos en una tabla llena para resolver el problema 3 (*Marco)*



Nota: En esta tabla el niño sí logra colocar los datos de manera pertinente, sin embargo, no hay diferencias respecto de la tabla vacía en cuanto al planteamiento de procedimientos exitosos, ya que en ambos casos el niño resuelve bien los problemas.

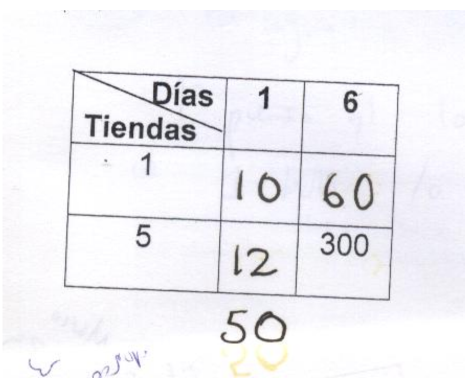
Finalmente, Marco resolvió de manera exitosa el problema 4 en todas las etapas de la situación 2, llegando incluso a plantear dos procedimientos adecuados de solución tanto en las situaciones sin tabla (*pretest, postest)* como en las situaciones con tabla (llena y vacía)

Figura 57. Acomodo de datos del problema 4 en una Tabla vacía (*Marco*)



Nota: Como puede observarse, Marco no colocó de manera pertinente los datos ni completó la tabla para dar solución al problema. A pesar de ello el niño resuelve con éxito la tarea.

Figura 58. Acomodo de datos del problema 4 en una Tabla llena (*Marco)*



Nota: Como puede observarse, Marco no colocó de manera pertinente los datos ni completó la tabla de manera adecuada para dar solución al problema. A pesar de ello el niño resuelve con éxito la tarea.

Óscar

Óscar, un integrante del grupo experimental 1, sólo resolvió de manera adecuada el problema 1 durante el *pretest.*

Cuando se realizó la entrevista de la segunda etapa (con tabla llena), tras solucionar de nuevo con éxito el problema 1 exclamó "¡*Con esto se me hace más fácil!*" en cuanto se le presentó la tabla llena para resolver el problema 2.

En esta segunda etapa el niño estableció más relaciones adecuadas entre los datos del problema 2 que las que estableció en el *pretest*, pero sin llegar a resolverlo con éxito. Lo que ocurrió fue que pudo establecer las relaciones necesarias para obtener un resultado intermedio, pero no logró concretar el segundo paso por lo que señaló que la solución intermedia que había obtenido, ya era la solución final del problema. En los problemas 3 y 4, el niño no comprendió la organización de las tablas ni pudo resolver de manera exitosa dichos problemas. A pesar de ello, al finalizar la entrevista señaló que las tablas le habían sido de utilidad porque le permitían "*ver el resultado*".

Al llegar a la etapa tres, y presentarle los problemas acompañados con tablas vacías, Óscar acogió con agrado la herramienta. Sin embargo, estableció aún menos relaciones adecuadas entre los datos de los problemas 1, 3 y 4 que en la etapa dos (con tabla llena) y en el *pretest.* Sólo en el caso del problema 2, el niño logró establecer relaciones adecuadas y resolverlo con éxito en relación con las etapas anteriores en las que no había podido resolverlo.

En el *postest* Óscar exclamó "*¿Sin tablita? Es que me ayuda mucho*" Ante esta situación se le propuso que él mismo creara sus tablas. No llevó a cabo la sugerencia. Resolvió adecuadamente los problemas 1 y 2, no así el 3 y el 4.

Óscar Daniel

Óscar Daniel es un integrante del grupo experimental 1. Al analizar los resultados que obtuvo al resolver los problemas en cada fase de la situación 2 de la cual participó se encontró lo siguiente:

- En el problema 1 encontró dos soluciones exitosas en presencia de la tabla vacía y sólo una solución con tabla llena y en ausencia de tablas (*pretest* y *postest*)
- En el problema 2 no logra plantear procedimientos exitosos en ninguna de las situaciones (ni con alguna de las tablas ni en ausencia de ellas) Sin embargo, logra establecer relaciones adecuadas entre los datos de los problemas en presencia de las tablas.
- En el problema 3 logra plantear dos soluciones pertinentes en presencia de la tabla vacía y sólo una en presencia de la tabla llena y en ausencia de tablas.
- En el problema 4 sólo logra resolver el problema de manera exitosa usando la tabla vacía, no así con la tabla llena ni en ausencia de tablas.

A continuación se muestran algunos extractos de las entrevistas realizadas en las que se reflejan ejemplos de lo anterior. En primer término se presentan extractos de la solución del problema 1 en el *pretest* y posteriormente la solución de ese mismo tipo de problema en la etapa 2 (con tablas llenas)

Solución del problema 1 en el pretest.

Problema 1: Quiero comprar 4 cajas de huevos, en cada caja hay 24 huevos. Cada huevo cuesta $2.00 ¿Cuánto se debe pagar por las 4 cajas?

(Se omite la primera parte de la entrevista en la cual se verifica la comprensión de la incógnita del problema, en esta primera parte Óscar Daniel dice que debe multiplicar para resolverlo)

Ent[4]*:* ¿Me lo puedes resolver por favor?

Óscar: (*piensa aprox. 15 segundos y hace una mueca de desesperación*)

Ent: Tú piénsale, no te preocupes. Ahorita me estabas diciendo que podías multiplicar algo. Puedes empezar haciendo eso

Óscar: Sería 4 x 2, ¿no?

Ent: Pues ponlo

Óscar: (*hace ademán de anotar, se detiene y medita aprox. 19 segundos más*) No es de multiplicación, es de división (*toma la calculadora y digita 24 por 2)* Son 48 por cada caja

Ent: Son 48 por cada caja ¿con eso ya está resuelto el problema?

Óscar: No. Falta ¿son cuatro cajas, verdad? (*en la calculadora multiplica 48x2, luego suma 96 + 96)* Se pagan 192 por las cuatro.

Ent: ¿Cómo lo sacaste?

Óscar: Es que aquí dice que cada huevo cuesta dos pesos y si son veinticuatro a ese veinticuatro le tengo que sumar otro peso a cada uno… y me sale cuarenta y ocho y… (*medita unos segundos)…* Ah sí, de una caja se pagan cuarenta y ocho pesos y luego sumé cuarenta y ocho más cuarenta y ocho me dio noventa y seis creo y luego noventa y seis más noventa y seis y me dio ciento noventa y dos

Ent.: Esa sería ya la respuesta. Vas a pagar 192 por las cuatro cajas ¿se te ocurre alguna otra forma de resolver el problema?

[4] Ent: Entrevistadora

Óscar: No

Como puede observarse, Óscar Daniel, en un primer momento, atribuye a las cajas de huevos el precio de un solo huevo, de ahí su primera solución: “4 por 2”. Sin embargo, no está del todo convencido sobre la relación que está estableciendo entre los datos, por lo que propone otra alternativa aunque ésta tampoco es convincente: una división. Finalmente (y sin expresarlo verbalmente) se inclina por establecer de manera adecuada dos de los datos de los problemas: el precio de los huevos en relación con cierta cantidad de huevos para conocer el valor de una caja. En otras palabras: reconoce que debía encontrar un resultado intermedio antes de llegar a la solución final. Posteriormente logra establecer una segunda relación adecuada entre los datos hasta llegar a la respuesta correcta. El interrogatorio continúa dando pistas para que identifique otra vía de solución sin lograrlo.

Solución del problema 1 en la etapa 2: con tabla llena.

En la segunda etapa, se presentó el problema 1 con una tabla llena, la cual el niño debía utilizar para resolverlo. El proceso de solución del problema fue muy similar al ocurrido en la etapa anterior, a pesar de contar esta vez con una tabla, tal como se refleja en el extracto que se presenta de la entrevista cuando el niño explicó el procedimiento que realizó.

Problema: Quiero comprar 4 cajas de lápices, en cada caja hay 6 lápices. Cada lápiz cuesta $1.00 ¿Cuánto se debe pagar por las 4 cajas?

Ent: Te voy a pedir que busques todas las soluciones posibles a este problema llenando la tabla

Óscar: (*mueca de disgusto*) ¿Tengo que llenarla a fuerzas?

Ent: Sí. Tienes que resolver el problema llenando la tabla.

Óscar: *(medita unos segundos y luego calcula la cantidad de dinero que* *corresponde a 6 lápices, posteriormente coloca un cero para indicar que a un lápiz no le corresponde ninguna caja)*

Ent: Acuérdate de anotar las operaciones que vas haciendo

Óscar: Mhm (*suma 36 más 36, es decir, toma el precio de una caja, saca el dole y luego nuevamente el doble para obtener el precio de las cuatro cajas. Finalmente obtiene el total de lápices de una caja)* Ya llené la tabla. Y ya acabé el problema entonces, ¿no?

Una vez que concluyó el llenado de la tabla se solicitó a Óscar que explicara qué procedimiento había utilizado para resolver el problema. Lo que explicó fue, más bien, cómo fue llenando la tabla.

Figura 59. Acomodo de datos del problema 1 en una tabla llena (*Óscar Daniel)*

Cajas	Lápices	Dinero
1	6	18
0	1	$3
4	24	72

Ent: ¿Cuál es la respuesta?

Óscar: ¿De cuánto tengo qué pagar por cuatro cajas? Setenta y dos pesos, ¿no?

Ent: ¿Y cómo la sacaste?

Óscar: (*señalando su tabla)* Cada caja tiene seis lápices, y yo sumé (*titubea)* Ah sí (*suspira)* que cada lápiz cuesta tres pesos. Le puse seis por tres, creo sí (*hace la operación en la calculadora)* y me salió dieciocho. Eso fue de la primera columna de la tabla (*en realidad hace referencia a la primera fila)* Y la segunda es un lápiz, y como nada más es uno, son cero cajas. Y nada más se pagan tres pesos. Y de las cuatro cajas (*señalando la última fila)* son veinticuatro lápices…

Ent: Mhm, pero primero sacaste éste (*señalando el 72 que es el resultado final)* dime cómo lo sacaste

Óscar: No, primero fui sacando desde acá (*señala la primera fila*)

Ent: Ah, sí. Pero antes de éste (*señalando el 24)* sacaste éste (*señalando el 72)*

Óscar: Es que… bueno en mi mente hice… bueno en mi mente y en la calculadora hice esta. Y luego puse seis por cuatro… no (*hace la operación en la calculadora)* Sí, seis por cuatro veinticuatro de cuatro cajas y así me salió.

Ent: Y este que sacaste de tu mente (*señalando el 72)* ¿qué operación hiciste para sacarlo?

Óscar: Osea ¿multiplicación, división o así?

Ent: (*asiente)*

Oscar: Multiplicación

Ent.: Y ¿qué multiplicaste?

Óscar: Multipliqué… ay… los lápices por las cajas… y… aquí tengo cuatro cajas de lápices y en total son veinticuatro lápices. Y puse… qué puse…mmm… Ah sí… puse: de cada caja, salían dieciocho pesos de cada caja y sumé dieciocho más dieciocho me dio treinta y seis. Y luego sumé treinta y seis más treinta y seis y me dio setenta y dos, que ahí ya van las cuatro cajas.

Ent.: Ok. Entonces fíjate: primero sacaste este (*señalando el 18)* que es el dinero de una caja y luego este mismo (*el 18)* lo sumaste cuatro veces por las cuatro cajas

Óscar: Sí, y luego saqué este que está bien fácil (*señalando el cero*) aquí son seis (*lápices)* de una caja y está bien, y vale dieciocho

Ent: Mhm, muy bien, sacaste lo de una caja para poder sacar lo de cuatro *(señalando las medidas y los cuadros correspondientes en la tabla)* y luego sacaste este (*señalando el 24)* ¿se te ocurre alguna otra manera de llegar a la respuesta del problema? A ¿cuánto debes pagar por las cuatro cajas?

Óscar: No

Ent: ¿No? ¿Y si usaras el dato que no ocupaste: éste (*señalando el 24)* por ejemplo, éste no lo usaste en tus operaciones (*señalando sus algoritmos)*

Óscar: Si lo uso…

Ent: ¿Cómo lo usarías? ¿se podrá o no se podrá?

Óscar: (*piensa unos segundos)* También se podría veinticuatro entre cuatro sale seis y así también se pudo haber sacado de veinticuatro lápices.

Ent.: Este veinticuatro de qué es

Óscar: Lo de las cuatro cajas

Ent.: Entonces: sabes los lápices de cuatro cajas ¿eso te servirá para saber cuánto pagar por las cuatro cajas?

(…)

Ent: *(repite la pregunta anterior)* Sabiendo que tienes veinticuatro lápices en cuatro cajas ¿eso te servirá para saber cuánto pagar por las cuatro cajas?

Óscar.: No se me ocurre nada

En este ejemplo vemos disgusto inicial ante el uso de la tabla, pero también se observa que al emplearla no hubo un incremento en el establecimiento de relaciones adecuadas entre los datos del problema ya que Óscar no logró establecer una relación entre la cantidad total de lápices y el precio unitario de estos para obtener la cantidad total a pagar por dicha colección de lápices y que es equivalente al precio de una caja. Esta imposibilidad fue similar a la que presentó en el *pretest* ante este mismo problema.

Esteban.

Esteban es un integrante del grupo experimental 2 que presentó los siguientes resultados:

En el *pretest* resolvió de manera correcta los cuatro problemas planteando un procedimiento pertinente para solucionar los problemas 1, 3 y 4; y dos procedimientos adecuados para resolver el problema 2.

En la etapa dos en la que se le presentó una tabla vacía resolvió de forma correcta todos los problemas. En esta etapa planteó dos procedimientos correctos para resolver los problemas 1, 2 y 3 y sólo uno para resolver el problema 4.

En la etapa tres en la que se le presentó una tabla llena, resolvió nuevamente de forma adecuada todos los problemas, pero planteó sólo un procedimiento adecuado para los problemas 2, 3 y 4 y dos procedimientos pertinentes para el problema 1.

En el *postest* resolvió de forma exitosa con un solo procedimiento los problemas 1 y 3; mientras que no pudo plantear un proceso adecuado para resolver los problemas 2 y 4.

Cuando se presentaron las tablas a Esteban, tanto las llenas como las vacías, el niño hizo ajustes en todas ellas.

En las tablas de los problemas 1 y 2, de proporcionalidad simple compuesta, el niño modificó sólo el acomodo de las cantidades proporcionadas, de tal manera que quedaran ajustadas a un orden progresivo.

Figura 60. Acomodo de datos del problema 1 en una tabla vacía (*Esteban)*

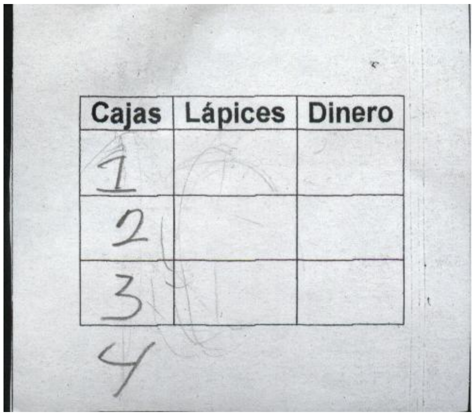


Figura 61. Reescritura de la tabla vacía del problema 1 (*Esteban)*

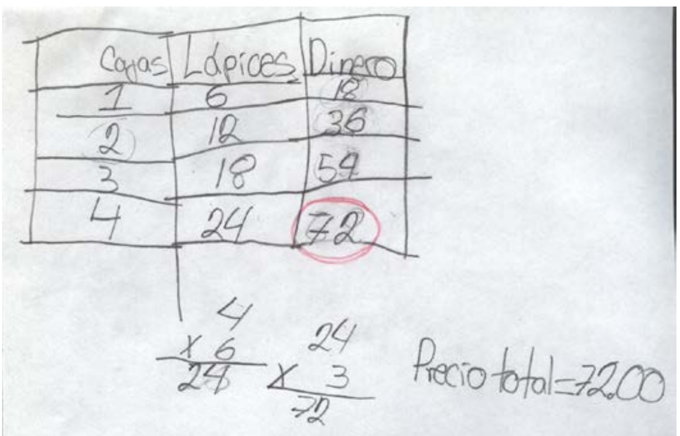
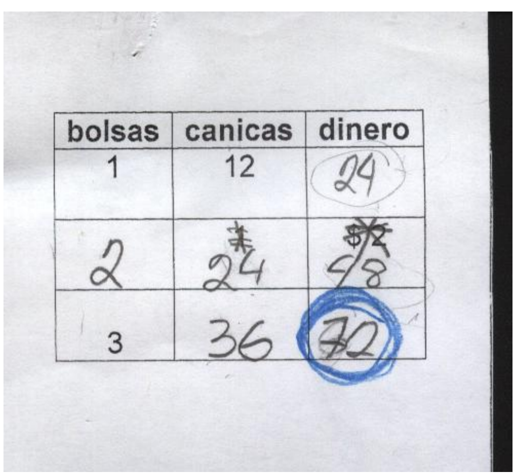


Figura 62. Acomodo de datos del problema 1 en una tabla llena (*Esteban)*



Nota: El niño tacha los datos proporcionados para acomodarlos en orden progresivo

Figura 63. Reescritura de tabla vacía del problema 2 (*Esteban)*

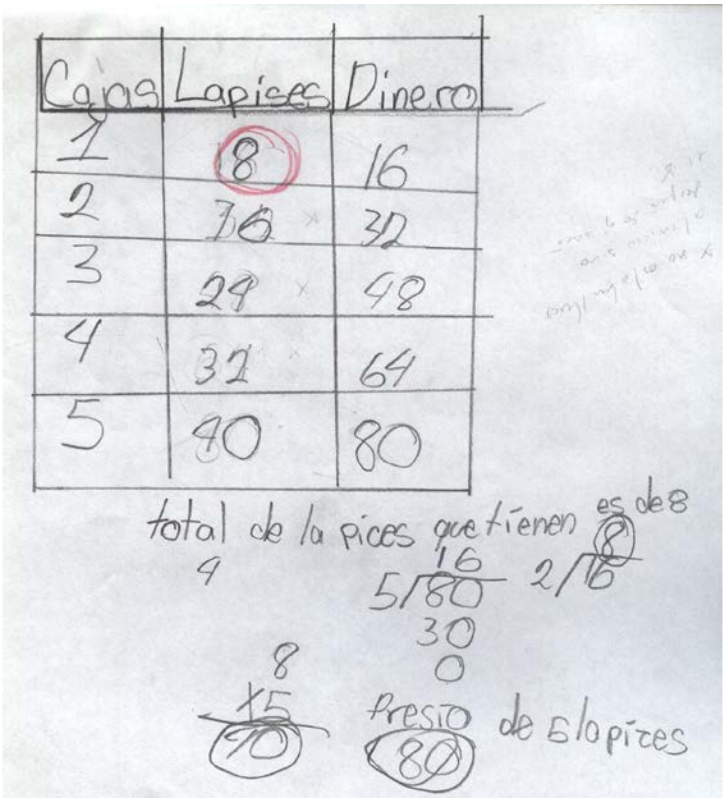
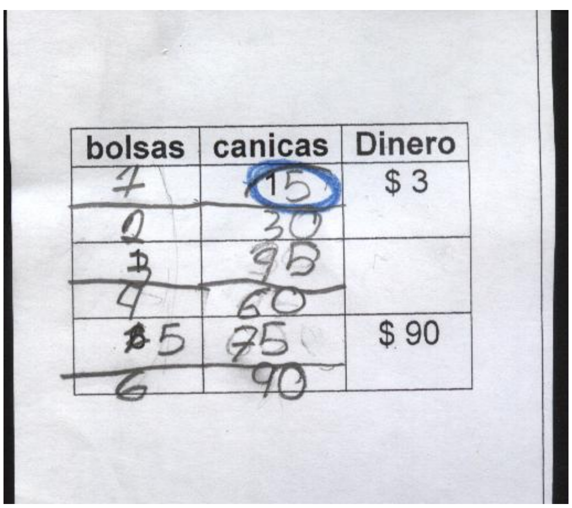


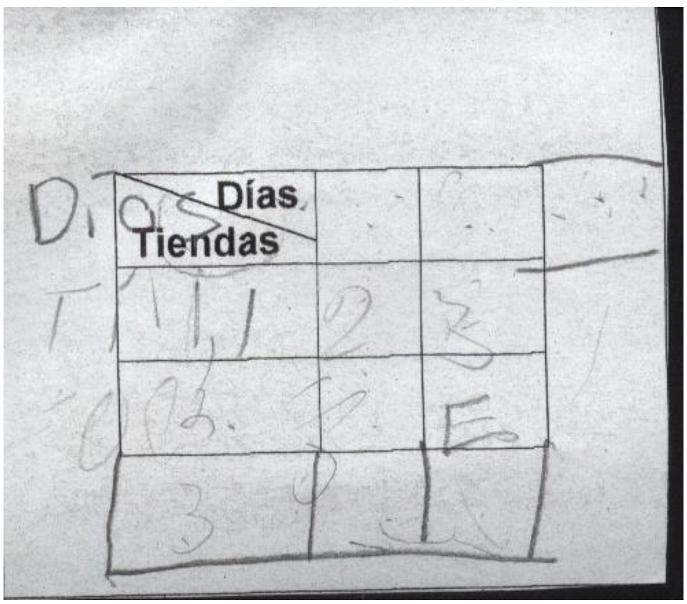
Figura 64. Registro de datos en la tabla llena del problema 2 (*Esteban)*



Nota: El niño tacha algunos datos proporcionados para poder registrar la información en orden sucesivo.

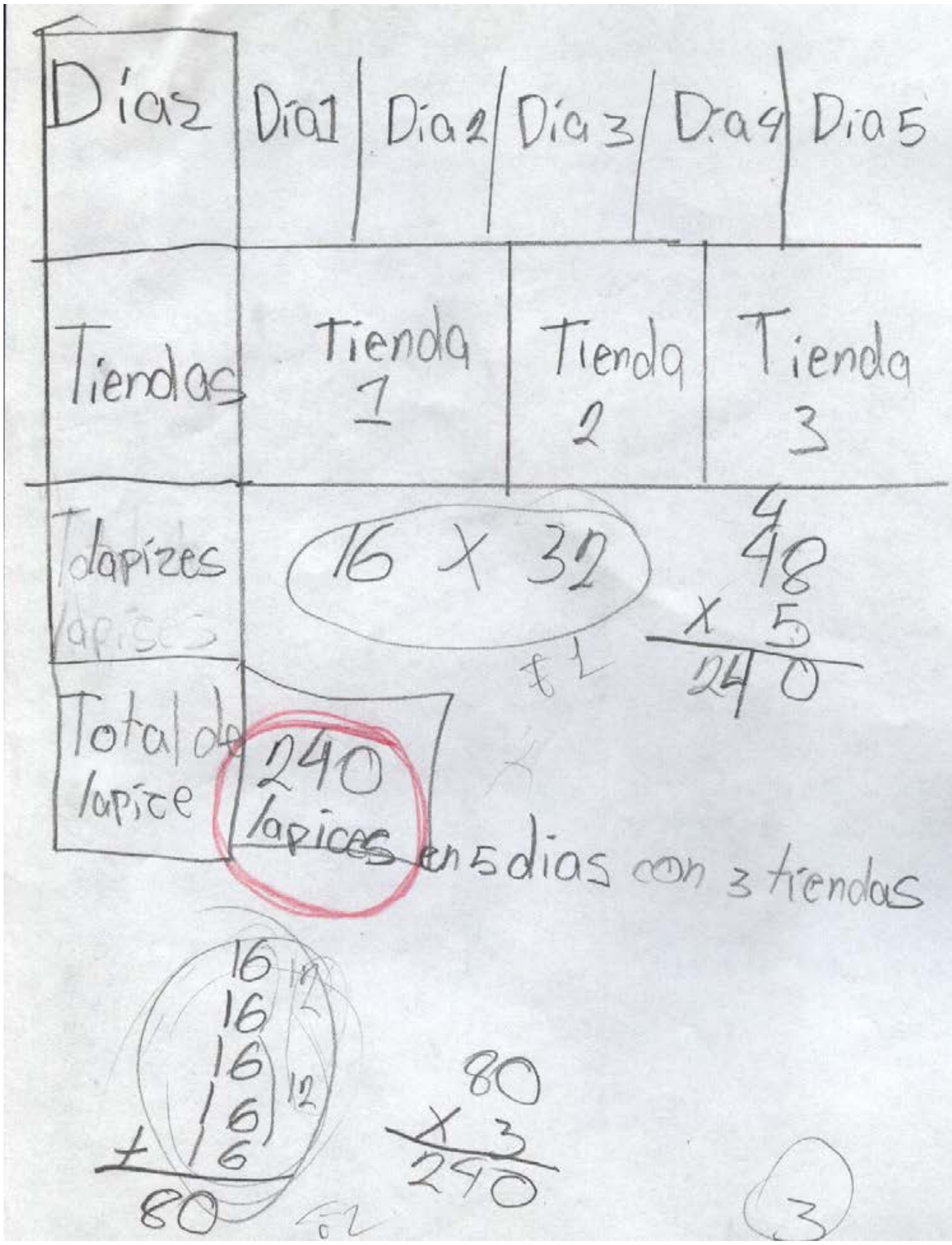
En el caso de las tablas de proporcionalidad doble, Esteban modificó la característica de “doble entrada” en el que se toman la fila superior y la columna inicial izquierda como los lugares correspondientes a las medidas que debe relacionarse. En su lugar, colocó las tres medidas del problema en filas sucesivas explicando la relación entre ellas a su manera. Puestas de este modo las tablas de Esteban no cuentan con la característica analógica que hace alusión a la relación que hay entre las medidas.

Figura 65. Llenado de tabla vacía del problema 3 (*Esteban)*



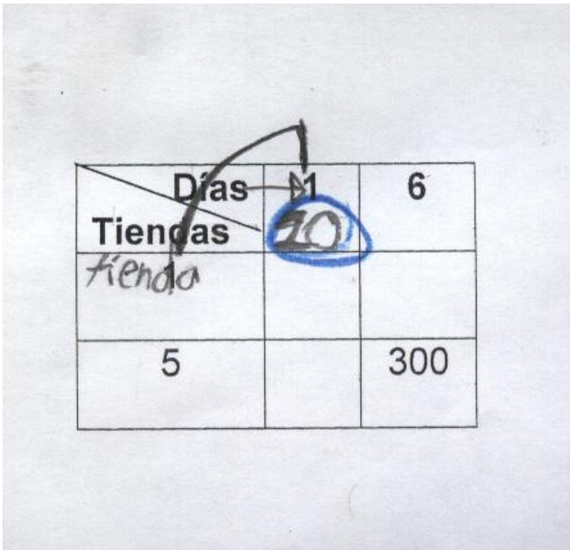
Nota: El alumno intenta colocar columnas para acomodar los datos.

Figura 66. Reescritura de la tabla vacía del problema 3 (*Esteban)*



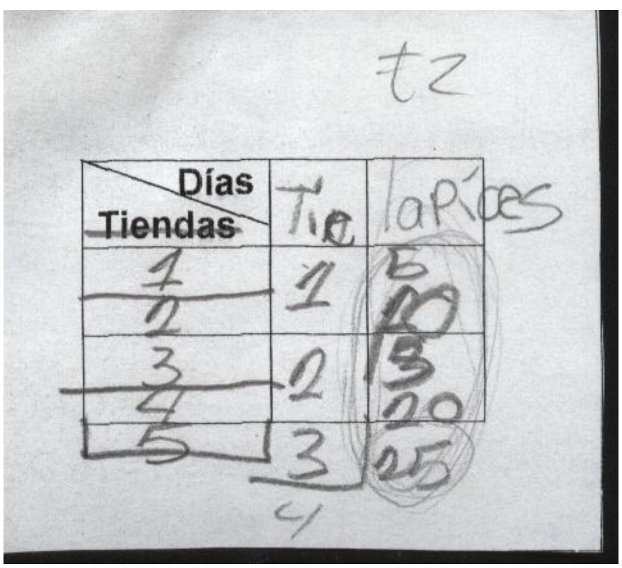
Nota: El niño coloca las medidas nuevamente al mismo nivel, pero ahora por filas. No se observa analogía gráfica con la relación de proporcionalidad doble

Figura 67. Acomodo de datos problema 3 en la tabla llena (*Esteban)*



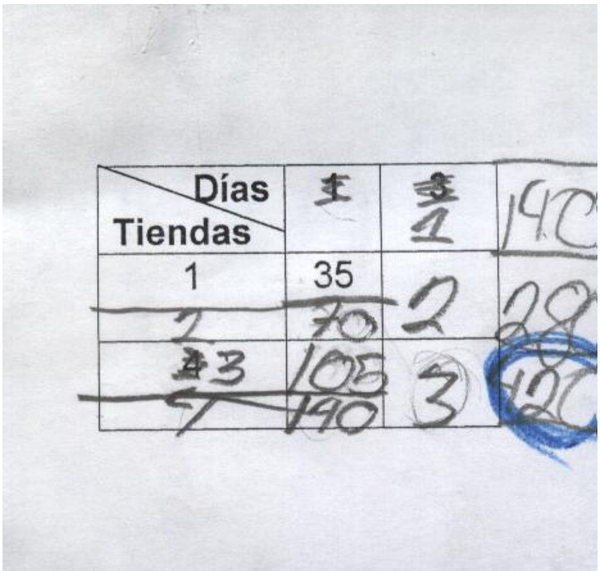
Nota: El niño intenta modificar el acomodo de las filas y columnas para registrar los datos del problema

Figura 68. Acomodo de datos del problema 4 en la tabla vacía (*Esteban)*



Nota: El niño modifica el lugar de las medidas, las coloca en relación proporcional simple disponiéndolas una por columna. De izquierda a derecha las medidas quedan de la siguiente forma: días, tiendas, lápices. La relación proporcional doble no queda representada de manera analógica.

Figura 69. Acomodo de datos del problema 4 en la tabla llena (*Esteban)*



Nota: El niño intenta modificar las filas y columnas de la tabla para acomodar los datos del problema

El reacomodo que Esteban hace de las tablas fue poco común a lo largo del estudio, aún así, este hecho lleva a la reflexión de la doble naturaleza de las mismas en tanto representaciones externas. Como se mencionó en la fundamentación teórica, las representaciones externas auxilian en la comprensión de los objetos que representan, pero tienen características en sí mismas que deben ser comprendidas para poder cumplir con esta función que podría llamarse epistemológica.

La importancia de la doble naturaleza de las tablas.

En conclusión, a pesar de que en el análisis cuantitativo se encontró que los niños de los grupos experimentales 1 y 2 presentaron mejoras importantes en el establecimiento de relaciones adecuadas y en el planteamiento de procedimientos exitosos en las situaciones de indagación (en las que emplearon tablas) respecto del *pretest*, en el análisis cualitativo se encontró que los participantes ni reconocieron de forma mayoritaria su utilidad a lo largo de las mismas ni retomaron su uso durante el *postest*.

Este resultado podría indicar que, al llegar a la última fase de las entrevistas, los niños no reconocieron a las tablas como auxiliares útiles para enfrentarse a los problemas que se les presentaron. Esto puede obedecer a que las experiencias enfrentadas no fueron suficientes para que los niños lograran darse cuenta por sí mismos de las mejoras que tenían cuando usaban tablas respecto de cuando no lo hacían. Se considera esto debido a que durante las entrevistas realizadas no se hizo saber a los niños si la solución que habían dado a los problemas era correcta o no. Tampoco se realizaron reflexiones para someter a su consideración la utilidad o inutilidad de las tablas para resolver las tareas presentadas.

Como se mencionó en el apartado anterior, es importante subrayar que para que las tablas resulten una herramienta útil, debe haber una adecuada comprensión de las mismas, lo cual, como indican Martí y Pozo (2000) sólo se logra tras atravesar un proceso de construcción de las mismas como objetos perceptibles en sí mismos (objetos de conocimiento).

Las características de las entrevistas realizadas dificultan analizar este aspecto (comprensión de las tablas) en los niños. Sin embargo, los resultados obtenidos nos permiten señalar que para que los niños logren reconocer las tablas como herramientas útiles para la solución de problemas aritméticos complejos, una de las primeras condiciones es que debe ser observable para ellos (y no sólo para los adultos) que su uso les lleva a respuestas más adecuadas respecto de cuando no las emplean. Por otro lado, se considera que este reconocimiento sólo puede lograrse mediante situaciones en las que los niños tengan la oportunidad no sólo de emplear las tablas, sino de de reflexionar sobre los efectos de dicho uso, entre otros aspectos.

Así pues, se considera que la apropiación de las tablas como objetos de conocimiento resulta un tema de sumo interés para la psicología y constituye un tema relevante para la investigación.

5. Conclusiones

En los antecedentes de este trabajo se destacó la importancia de estudiar el papel de las representaciones externas, en este caso las tablas, en la forma en la cual los niños se enfrentan a algunos de los problemas aritméticos complejos que resultan más difíciles para ellos, particularmente los de tipo multiplicativo. Así pues, se planteó como objetivo de estudio conocer la manera en que el uso de tablas influye en los niños al establecer relaciones adecuadas entre los datos de problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo, y por lo tanto, en el planteamiento de procedimientos apropiados para solucionarlos.

Después de analizar los resultados obtenidos, se concluye que las tablas tienen una influencia favorable en la identificación de relaciones adecuadas y en el planteamiento de procedimientos pertinentes para la solución de problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo. Sin embargo, para que éstas sean consideradas como herramientas útiles por los niños, es necesario que éstos las construyan como objetos de conocimiento en sí mismas. De ahí la importancia de incluirlas tomando en cuenta su doble naturaleza en la enseñanza de las matemáticas, específicamente de los problemas aritméticos que resultan más difíciles para los niños. Estos resultados ratifican las aportaciones realizadas por Chamorro (2003) y Peltier (2003) a propósito del papel de las representaciones externas en la solución de problemas aritméticos, y las ideas de Martí y Pozo (2000) y Zhang (1997) acerca de la importancia del uso de representaciones externas como apoyo en los procesos cognitivos.

En conclusión, se considera que el uso de representaciones externas, como son las tablas, al aproximarse a problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo posibilita a los niños de manera significativa la identificación de relaciones adecuadas entre los datos así como el planteamiento de estrategias de solución pertinentes. De ahí la importancia de incluir su uso en las estrategias metodológicas de enseñanza de las matemáticas, tal como ya lo había señalado Vergnaud (1991).

5.1 Las Tablas Como Un Tipo De Representaciones Externas

Como se mencionó en la fundamentación teórica, Peltier (2003) define la comprensión de un problema como la construcción de la representación de la tarea. Así, al enfrentarse a un problema los niños atraviesan procesos cognitivos en los que tienen lugar representaciones internas que luego dan paso a representaciones externas y que posibilitan el planteamiento de estrategias de solución (Parra, 1991)

Las tablas, como han mencionado Martí y Pozo (2000) son un tipo de representaciones externas y constituyen una manifestación del pensamiento.

Cuando se emplean las tablas para dar cuenta de las relaciones analógicas que hay entre los datos de un problema pueden usarse tablas llenas, en las que ya están capturados los datos que se proporcionan en los enunciados de los problemas, o bien, tablas vacías, en las cuales es necesario colocar dichos datos.

Sea cual sea el tipo de tabla empleado, siempre tienen lugar los procesos cognitivos en los que hay un paso de representaciones internas a representaciones externas (Parra, 1991); sin embargo, existen algunas diferencias en la manera en que aparecen. Por ejemplo, el uso de tablas vacías requiere que los niños organicen en un primer momento los datos mediante representaciones internas, y que después plasmen esa organización en una representación externa, en este caso, la tabla. En cambio, el uso de tablas llenas requiere principalmente de procesos de comprensión de las relaciones que ya han sido organizadas en la representación gráfica, pero no requieren el paso de representaciones internas a representaciones externas por parte de los niños. Por lo tanto, el uso de tablas vacías exige mayores procesos de producción por parte de los niños que el uso de tablas llenas. Esta característica aumenta la complejidad de su uso.

Estas diferencias en los procesos cognitivos al usar las tablas, han sido consideradas dentro de las preguntas de investigación de este trabajo, por lo que se ha cuestionado si hay diferencias significativas o no en los niños al usar tablas llenas y tablas vacías para resolver los problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo.

De acuerdo con los resultados obtenidos, no se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre los resultados de los niños al emplear tablas llenas respecto de los obtenidos al usar tablas vacías. Estos resultados pudieron deberse a la cantidad de niños que constituyeron la muestra, por lo que sería recomendable ratificar estos resultados ampliando la cantidad de participantes en estudios posteriores.

Para finalizar, se considera que, independientemente del tipo de tabla que se emplee, su uso aumenta las posibilidades de los niños de 6º grado de primaria para identificar relaciones adecuadas y plantear procedimientos pertinentes para la solución de problemas que resultan difíciles para ellos, como lo son los problemas aritméticos complejos de tipo multiplicativo.

5.2 Consideraciones Acerca De Las Tablas Como Herramientas Útiles Para La Solución De Problemas Aritméticos Complejos De Tipo Multiplicativo

Si bien en las conclusiones anteriores se reconoce una influencia estadísticamente significativa a favor del uso de las tablas para la solución de problemas, independientemente de si éstas son llenas o vacías; en los resultados de este estudio también se ha encontrado que esta influencia no es igual para todos los problemas, y que las variaciones que tienen lugar se relacionan tanto con el tipo de problema como con las posibilidades de los niños para comprender la estructura de la tabla misma.

En cuanto a los resultados obtenidos en el análisis del grado de dificultad de los problemas y su relación con el uso de tablas, los resultados de este trabajo han coincidido con las aportaciones de varios de los autores citados en el apartado de antecedentes. Por ejemplo, los resultados de Carretero (1989) concuerdan con los propios ya que los problemas de proporcionalidad doble han resultado más difíciles que los de proporcionalidad simple. Además, también se ha coincidido con Cerdán y Puig (1988), quienes habían señalado que resultan más difíciles los problemas donde debe buscarse la cantidad de unidades que aquellos donde se buscó el valor unitario. En este trabajo, se ha encontrado la veracidad de dicho señalamiento, ya que la dificultad de los niños al enfrentarse a los problemas presentados ha variado no sólo de acuerdo con el tipo de proporcionalidad, simple compuesta o doble, sino también por la ubicación de la incógnita.

De esta manera, los problemas de proporcionalidad doble a resolverse con multiplicaciones, han resultado más fáciles que los de proporcionalidad simple compuesta que requerían de divisiones para llegar a su solución. Los problemas de proporcionalidad simple compuesta a resolverse con multiplicaciones han sido los más fáciles de todos, y los de proporcionalidad doble a resolverse con divisiones han resultado los más complicados.

En relación con el uso de representaciones externas, se concluye que la tabla ha sido más útil para resolver los problemas de proporcionalidad simple compuesta en los que se realizó búsqueda de cantidad de unidades mediante divisiones. En menor medida que en estos problemas, el uso de tablas también ha sido favorable para la solución de los problemas de los problemas de proporcionalidad doble en los que se busca la cantidad de unidades y que se resuelven con divisiones y de los problemas de proporcionalidad simple compuesta en los que se busca el valor unitario (en ese orden).

En cambio, no se obtuvieron influencias favorables del uso de tablas al resolver problemas proporcionalidad doble en los que se busca el valor unitario mediante multiplicaciones.

Estos resultados nos llevan a la conclusión de que las tablas resultan más útiles para resolver los problemas en los que se busca la cantidad de unidades que en los que se busca el valor unitario, encontrándose una ligera ventaja a favor del uso tablas llenas sobre las tablas vacías, si bien ésta diferencia no es estadísticamente significativa.

Una conclusión más sobre estos resultados es que las tablas sólo resultan útiles cuando los niños están en un paso intermedio de comprensión tanto de las relaciones entre los datos de los problemas aritméticos, como de las características de las tablas que se utilizan para organizar dichas relaciones. De ahí que no se hayan obtenido diferencias significativas favorables al usar tablas cuando había que solucionar problemas que resultaban o muy fáciles (como ocurrió con el problema 1) o muy difíciles para los niños (como ocurrió con el problema 4), ni cuando la comprensión de la estructura de la tabla escapaba a sus posibilidades (problemas 3 y 4).

5.3 Limitaciones Del Estudio

Durante el proceso de diseño y puesta en marcha de la metodología de este trabajo, se enfrentaron diferentes dificultades que hubo de resolverse en el transcurso de la realización de la investigación y del informe correspondiente. No obstante, se considera que hubo un aspecto que merece la pena ser atendido como limitación en este estudio, el cual se describe a continuación.

Como se recordará, los niños del grupo control participaron en sólo dos situaciones durante el procedimiento de este estudio, lo cual trajo como consecuencia que tuvieran menos oportunidades de experiencias con los problemas presentados, a diferencia de los niños de los grupos experimentales que participaron en cuatro situaciones diferentes.

En el proceso de diseño de la metodología, se decidió que en el procedimiento, sólo los niños de los grupos experimentales participaran en 4 situaciones: pretest, postest y dos situaciones intermedias con tablas; y que, en cambio, los niños del grupo control solo era necesario que participaran en las situaciones de pretest y postest debido a que ellos no debían usar tablas para poder emplear sus resultados como referencias para la comparación de los niños que sí las usaron.

El levantamiento de datos se realizó de acuerdo con este procedimiento. Sin embargo, al concluir el levantamiento de datos, e iniciar el tratamiento de la información, se reflexionó sobre la variación en la cantidad de experiencias entre los grupos de la muestra. Ante esta dificultad, se consideró la opción de realizar un segundo levantamiento de datos con un segundo grupo control que enfrentara cuatros situaciones (todas sin tablas) para tener la misma cantidad de experiencias que los niños de los grupos experimentales.

No obstante, esta opción no se pudo realizar debido a que el proceso de análisis de la información ya estaba muy avanzado, los tiempos que restaban para la elaboración del informe del estudio no permitían incluir una fase más de levantamiento de datos, y a que no fue posible gestionar los permisos en alguna institución escolar para contar con una población infantil.

A pesar de esta limitante, los resultados obtenidos en el trabajo han sido congruentes con los de los autores revisados en los antecedentes y la fundamentación teórica, por lo que se considera que son válidos. Aún así se considera importante tomar en cuenta esta variable en estudios posteriores sobre este mismo tema para garantizar una mayor validez de los resultados partiendo del planteamiento de un procedimiento lo más adecuado posible para el problema de investigación correspondiente.

5.4 Nuevas Perspectivas En El Estudio De Las Representaciones Externas En La Solución De Problemas Aritméticos

En este trabajo, se analizaron aspectos relacionados sólo con una de esas naturalezas: la relacionada con la función de auxiliar para comprender otros objetos. Sin embargo, algunos de los resultados obtenidos permiten entrever aspectos interesantes de su segunda naturaleza. Por ejemplo, el hecho de que las tablas sólo resultaran útiles para los niños cuando están en un paso intermedio (zona de desarrollo próximo)[5] de comprensión refleja que es necesario que tenga lugar un proceso de construcción de las mismas como

[5] La zona de desarrollo próximo es un término del modelo histórico cultural desarrollado por L. Vigotsky a propósito del desarrollo. Este término hace referencia a "la diferencia (expresada en unidades de tiempo) entre las actividades del niño limitado a sus propias fuerzas y las actividades del mismo niño cuando actúa en colaboración y con la asistencia del adulto." (UNESCO, 1994, p. 783)

objetos de conocimiento. Otro resultado importante que da cuenta de este proceso de construcción es el hecho de que, a pesar de tener mejoras significativas al usar las tablas, los niños no las emplearon de manera espontánea al finalizar las entrevistas. En otras palabras, no lograron reconocerlas como herramientas útiles para la solución de problemas difíciles para ellos.

De estos resultados se desprende que el proceso de construcción de las tablas como objeto de conocimiento sólo puede lograrse mediante situaciones en las que los niños tengan la oportunidad no sólo de emplear las tablas, sino de reflexionar sobre aspectos relacionados con su doble naturaleza.

En conclusión, se considera que la construcción de las tablas como objetos de conocimiento en sí misma constituye un tema cuyo estudio permitiría profundizar el saber que se tiene hasta el momento acerca de uno de los objetos de estudio más relevantes para la psicología cognitiva: la representación.

6. Referencias bibliográficas

Aguilar, M.; Alcalde C.; Navarro, J. (2003). El uso de esquemas figurativos para ayudar a resolver problemas aritméticos. *Cultura y Educación , 15* (4), 385-397. Recuperado de: http://www.uca.es/grupos-inv/HUM240/aquam-perducendam-curavit/grupos-inv/HUM634/documentos/el_uso_de_esquemas_figurativos_para_ayudar_a_resolver__problemas_aritmyticos.pdf

Andersen C., Scheuer, N., Pérez Echeverría, M. P. & Teubal E.V. (Eds.), (2007). *Representational Systems and practives as learning tools.* Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Arteaga, P. *et al* (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas , 76*, 55-67. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/76/Articulos_02.pdf

Arteaga J. y Guzmán, J. (2005). Estrategias utilizadas por alumnos de quinto grado para resolver problemas verbales. *Educación Matemática , 17* (1).

Ausubel (1978). In defense of advance organizers: A reply to the critics. *Review of Educational Research , 48*, 251-257.

Bruner, J. (1998). *Realidad mental y mundos posibles.* Barcelona: Gedisa.

Cañadas M. y Figueiras L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla. *Infancia y Aprendizaje* , *34* (4), 409-425.

Carretero, L. (1989). La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas por el niño de 8 a 11 años. *Anuario de psicología , 42*, 85-101.

Castro, E. (1996). Problemas aritméticos aditivos de dos etapas. *Memorias de Investigación del Seminario sobre Currículo e Investigación en Educación Matemática* .

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. *Investigación en Educación Matemática: Doceavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/castroseiem2008.pdf

Castro, E. *et al* (1997). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* . Universidad de Granada. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2730749&orden=0

Castro, E. y Frías A. (2007). Influencia del número de conexiones en la representación simbólica de problemas aritméticos de dos pasos. PNA, 2(1), 29-41.

Cerdán, F. y Puig L. (1990). La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. *Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* Acapulco, Guerrero. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/acapulco90.pdf

Cerdán, F. y Puig L. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/libros.html

Chamorro M. C. (2003). Las dificultades de lectura y comprensión de los problemas matemáticos escolares. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas* (33), 99-119.

Cuoco & Curcio (2001). *The role of representation in school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Garton A. F. (1993). Representation in solving problem. En Garton A. F. & Pratt C., (Eds) *System of representation in children: Development and use.* Chichester: J Wyley & Sons

Guerrero. (1998). Estrategias cognitivas que utiliza un grupo de niños de sexto grado de educación básica, al resolver problemas multiplicativos con diferente estructura semántica. *Tesis para la obtención de grado de magister* . Barquisimeto: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Hershkovitz, S. y Nesher, P. (1994). The role of schemes in two-step problems: analysis and research findings. *Educational studies in mathematics , 26*, 1-23. Recuperado de http://construct.haifa.ac.il/~nesherp/nesherp.htm

Ilric, I. (1994). Lev Semionovich Vigotsky. *Perspectivas: Revista trimestral de educación comparada , 24* (3-4), 773-799. Recuperado de http://www.ibe.unesco.org/publications/ThinkersPdf/vygotskys.PDF

Martí, E. (2007). Table as a cognitive tools in primary education. En Andersen C., Scheuer, N., Pérez Echeverría, M. P. & Teubal E.V. (Eds.), *Representational Systems and practives as learning tools.* Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Martí E. y Pozo I. (2000). Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. *Infancia y Aprendizaje* (9), 11-30.

Parra, B. (1991). La resolución de problemas en la costrucción de esquemas de razonmiento. *Educación Matemática , 3* (1), 58-61.

Peltier, M. L. (2003). Problemas aritméticos. Articulación , significados y procedimientos de resolución. *Educación Matemática , 15* (003), 29-55.

Perner, J. (1991). *Comprender la mente representacional*. España: Paidos.

Rico. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA* , *4* (1), 1-14. Recuperado de http://www.pna.es/Numeros2/Volumen4Numero1.html

Dockrell, Tolchinsky & Teubal (2007). *Notational knowledge developmental and historical perspectives.* Rotterdam: Sense Publishers.

Vergnaud. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* México: Trillas.

Vergnaud. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Reserches en Didáctique des Mathematiques* , *10* (2-3), 133-170.

Zhang. (1997). The nature of external Representations in problem solving. *Cognitive Science* , *21* (2), 179-217. Recuperado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0364021399800226