Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería
División de Estudios de Posgrado
Especialidad en Didáctica de la Matemática

“Estrategias para el manejo adecuado de conceptos figurales”

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener diploma de

Especialidad en Didáctica de la Matemática

Presenta

Sagrario Marlen Figueroa García

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería
Especialidad en Didáctica de la Matemática

"Estrategias para el manejo adecuado de conceptos figurales"
Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener la constancia de **Especialidad en Didáctica de la Matemática**

Presenta:
Sagrario Marlen Figueroa García

Dirigido por:
Dr. Víctor Larios Osorio

Sinodales:

Dr. Víctor Larios Osorio ______ Firma
Presidente

M.C. Roberto Torres Hernández ______ Firma
Secretario

M.D.M Angel Balderas Puga ______ Firma
Vocal

M.D.M Alexander Bell Mejía ______ Firma
Suplente

M.D.M Arturo Corona Pegueros ______ Firma
Suplente

Dr. Gilberto Herrera Ruiz
Director de la Facultad de ingeniería

Dr. Luis Hernández Sandoval
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Octubre 2009
México

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería
Especialidad en Didáctica de la Matemática

"Estrategias para el manejo adecuado de conceptos figurales"

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener la constancia de
Especialidad en Didáctica de la Matemática

Presenta:
Sagrario Marlen Figueroa García

Dirigido por:
Dr. Víctor Larios Osorio

Sinodales:

Dr. Víctor Larios Osorio ____________________
Presidente Firma

M.C. Roberto Torres Hernández ____________________
Secretario Firma

M.D.M Angel Balderas Puga ____________________
Vocal Firma

M.D.M Alexander Bell Mejía ____________________
Suplente Firma

M.D.M Arturo Corona Pegueros ____________________
Suplente Firma

____________________ ____________________
Dr. Gilberto Herrera Ruiz **Dr. Luis Hernández Sandoval**
Director de la Facultad de ingeniería Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Octubre 2009
México

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo evidenciar la importancia del manejo eficaz de los conceptos figurales en geometría, para ello se exhiben algunas estrategias didácticas que en primera instancia permiten al alumno percatarse de que en Geometría, las representaciones gráficas, son necesarias mas no suficientes al momento de resolver un problema, pues para ello es necesario lograr una fusión e integración aceptable entre conceptos y figuras y de ello depende que el alumno sea capaz de lograr un aprendizaje significativo en las Matemáticas, particularmente en Geometría.

Para ello, primeramente es necesario propiciar que el alumno se percate de que las representaciones gráficas no son arbitrarias, ni tampoco tienen por que corresponder a algún estereotipo sino que éstas están regidas por una definición así como también por la Geometría que se esté utilizando.

Con estas estrategias se busca por un lado que el alumno trabaje adecuadamente las representaciones gráficas y por otro lado que sea capaz de entender las definiciones que se trabajarán para así a partir de éstas poder crear sus propias representaciones gráficas y con ello lograr fusionar conceptos y figuras para poder lograr un aprendizaje.

Palabra clave: Conceptos figurales, estrategias didácticas.

Summary

The main objective of this study was to show how important effective management of figural concepts in geometry, are some teaching strategies that allow students to realize that graphic representations are necessary but not sufficient to solve problems, geometry is necessary for achieving a merger between concepts and figures, since it depends on the student is able to achieve a significant learning in mathematics, particularly geometry.

This is first necessary to encourage the student to realize that graphic representations are not arbitrary, nor are they correspond to a stereotype but are governed by a definition, as well as by the geometry being used.

With these strategies is sought on the one hand that the student works properly and graphic representations on the other side can understand the definitions and work for from them to create their own graphical representations and to achieve fusion concepts and figures learning to achieve

Key word: figural concepts, teaching strategies.

> No puede existir un lenguaje más universal y simple, más carente de errores y oscuridades, y por tanto más apto para expresar las relaciones invariables de las cosas naturales […] [Las Matemáticas] parecen construir una facultad de la mente humana destinada a compensar la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos.

Joseph Fourier (1822)

Índice

Capítulo I. Introducción

La belleza de las Matemáticas radica en que gran parte de la realidad está conformada y puede ser entendida a través de ellas, aún cuando para ello, ***la Matemática no utilice objetos reales sino objetos de nuestra abstracción***.

Esta bondad de las Matemáticas, puede representar para muchos un verdadero problema por la complejidad de trabajar con objetos cuya existencia no puede ser comprobada a través de nuestros sentidos y que por tanto su manipulación y uso puede resultar bastante complejo. Sin embargo, aún en su complejidad, no debemos olvidar que las Matemáticas constituyen el campo en el que el niño puede iniciarse más tempranamente en la racionalidad (Brousseau, 1999).

El problema de trabajar con ideas abstractas se ve reflejado claramente en los problemas de Geometría, pues en este tipo de problemas es necesario trabajar tanto con dibujos, los cuales son representaciones sensoriales de un objeto, como también aprender y manipular conceptos abstractos los cuales son instrumentos para describir los objetos y permitir su reconocimiento. Con respecto al aprendizaje de conceptos, cabe mencionar, que el aprendizaje de un concepto aislado es imposible, dado que todo concepto se halla en correlación con otros, por lo que se debe hablar entonces de tramas conceptuales (Cornu y Vergnioux, 1992, pag 55-56).

Para ejemplificar el hecho de que en Geometría es necesario trabajar tanto la parte conceptual como figural, consideremos lo siguiente: Sea ABC un triángulo isósceles *con* $AB=AC$ (Figura 1).

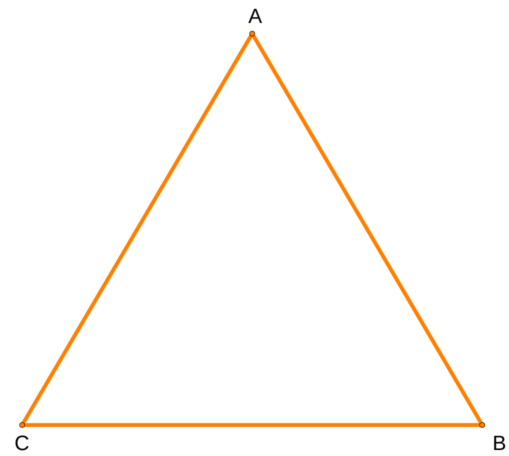


Figura 1

Queremos probar que $\sphericalangle B = \sphericalangle C$. Consideremos lo siguiente, supongamos que se separa al triángulo de sí mismo, lo voltea de tal manera que *AC* quede en el lado izquierdo y que *AB* quede en el lado derecho y superponga el triángulo volteado sobre el original. Luego, se puede observar que el ángulo *A* permanece igual y $\overline{AB} = \overline{AC}$, por lo que coincidirán perfectamente.

En este procedimiento se han utilizado conocimientos expresados conceptualmente: los dos lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se han declarado iguales y con esto se han utilizado los conceptos de punto, lado, ángulo y triángulo. También se ha mencionado el proceso de volteado, pero al mismo tiempo, se ha usado información figural y operaciones representadas figuralmente, principalmente la idea de *separación* del triángulo *ABC* de sí mismo, volteándolo y superponiéndolo sobre el original.

En ejemplo anterior se observa la necesidad de trabajar tanto con las representaciones sensoriales como con las ideas abstractas, y aún cuando desde algunas teorías actuales (teoría proposicional), estas dos entidades mentales son consideradas como objetos mentales distintos (Fischbein, 1993) no deben considerarse como independientes y mucho menos trabajarse por separado, pues para que un alumno se enfrente satisfactoriamente a un problema de Matemáticas, específicamente, a un problema de Geometría, ***es necesario que logre una fusión e integración aceptable entre concepto y figura,*** pues por un lado, se requiere de una representación gráfica adecuada y por otro lado también debe quedar claro que esta representación gráfica está regida por una definición y que por tanto su forma no es arbitraria. Por ejemplo, debe quedar claro que al referirnos a un cuadrado este no es solo una representación gráfica estereotipada[1], sino que es una forma controlada por una definición (aún cuando pueda estar inspirada en un objeto real).

Sin embargo, lograr la fusión entre imagen y concepto no es fácil de alcanzar pues para ello es necesario trabajar con los conceptos figurales. Entendiendo por concepto figural una realidad mental, un constructo manejado por el razonamiento matemático en el dominio de la Geometría. Dicho constructo está desprovisto de cualquier propiedad concreto-sensorial (color, peso, densidad) pero exhibe propiedades figurales (Fischbein, 1993).

Por otra parte, ya que para muchos la esencia de las Matemáticas es la resolución de problemas, el objetivo de esta tesina es presentar diferentes estrategias que puedan ayudar al docente de nivel medio superior para que sus alumnos se enfrenten satisfactoriamente con problemas geométricos, lo cual en gran medida depende de que los alumnos sean capaces de manejar adecuadamente los conceptos figurales.

[1] Hace referencia a representaciones gráficas de figuras geométricas utilizadas con mucha frecuencia en libros de texto. Estas poseen ciertas características visuales (relacionadas con la posición) irrelevantes para el concepto pero que influyen en la apreciación de los alumnos.

Capítulo II. Justificación y descripción del problema

Justificación

Si las Matemáticas son el campo en el cual el individuo puede iniciarse más tempranamente en la racionalidad (Brousseau, 1999), entonces la responsabilidad que como profesores de Matemáticas tenemos en nuestras manos es inmensa, pues en nosotros está, primeramente, promover en nuestros alumnos el gusto y el interés por la Matemática y posteriormente propiciar en ellos un verdadero aprendizaje. Sin embargo, debemos tener claro que la primera tarea (motivar a los alumnos), es quizá la más importante, pero también la más difícil de realizar, pues ¿cómo despertar la curiosidad de los alumnos por una Matemática que para la mayoría de ellos resulta compleja y aburrida?, ¿cómo propiciar que se den el tiempo de observarla, valorarla y poderse percatar de que a la luz de ellas, este mundo puede ser explicado, entendido y modelado? Y que por ello vale la pena darnos la oportunidad de conocerlas, usarlas y ¿por qué no? crear nuestras propias Matemáticas.

Quizá una manera de propiciar el interés de nuestros alumnos es *mostrar las aplicaciones reales de esta ciencia*, pues en primera instancia, éste será el motor de búsqueda que los alumnos necesitan para permitirse indagar en este mundo “complejo” de la Matemática, y así al explorarlas podrán percatarse de que la aplicabilidad de las Matemáticas es sólo una de las muchas cualidades que esta ciencia posee, pues es bella por sí misma.

Cabe mencionar que la motivación que propiciemos en nuestros alumnos es necesaria mas no suficiente, pues cuando hablamos de Matemáticas, específicamente de Geometría, es necesario que los alumnos utilicen adecuadamente los conceptos figurales, pues la Geometría trata con este tipo de entidades mentales y por ello, la resolución de problemas geométricos depende en gran medida del uso que demos a dichos conceptos figurales. Por ello, es labor del docente crear estrategias que permitan al alumno distinguir por un lado, *la importancia que tiene el concepto en Matemáticas* y así promover la integración "indispensable" entre concepto y figura, necesaria para poder resolver problemas geométricos.

Descripción del problema

El ejemplo del capítulo I muestra la complejidad que representa el trabajar problemas geométricos, pues por un lado, deben trabajarse con ideas abstractas, con conceptos, los cuales no se pueden manipular por no existir como tales en nuestro mundo, es decir, estamos tratando con una mezcla de dos entidades mentales independientes y definidas, es decir, ideas abstractas (conceptos), por un lado, y representaciones sensoriales que reflejan operaciones concretas, por el otro. (Fischbein, 1993).

Este problema también puede observarse como lo menciona Moriena (2001) cuando los alumnos se enfrentan a figuras geométricas que no corresponden con una representación gráfica estereotipada, por ejemplo, cuando un dibujo se encuentra rotado o con otro tamaño, el alumno tiene dificultad para percatarse de que aún con esas diferencias sigue cumpliendo las propiedades que le otorga la definición. Este hecho se ha puesto de manifiesto con distintas investigaciones (Hershkowitz, Bruckeimer y Vinner, 1987; Hershkowitz, 1989; Parzyzs, 1991; Gutiérrez y Jaime, 1996). Schwarz y Hershkowitz sostienen que el aprendizaje de conceptos de Geometría está basado en el uso de ejemplos especiales que denominan prototipo y por tanto un estudiante no basa su razonamiento en las definiciones formales sino sólo en estas imágenes estereotipadas, por ello, la dificultad de que cuando se muestra una figura que es distinta a la expuesta en clase, el alumno no pueda identificar las propiedades esenciales de ésta y por tanto no pueda resolver los problemas geométricos.

Cabe mencionar que dentro de la Geometría los dibujos son necesarios, pero es importante que el alumno aprenda a controlar a través del conocimiento los aspectos perceptivos ligados al dibujo (Laborde y Capponi, 1994), es decir, necesita comprender que la representación gráfica está determinada por un concepto y por tanto no es arbitraria y también no debe dudar en el hecho de que el *concepto es la esencia misma de las cosas.*

Marco teórico

A continuación, se hace referencia a diversas teorías a partir de las cuales se pueden explicar las dificultades que los alumnos experimentan al momento de enfrentarse a problemas geométricos debido al mal uso de los conceptos figurales, para ello primeramente se abordará la definición de concepto, dibujo y figura.

En varias obras Vergnaud define un concepto como una terna de conjuntos y lo ilustra de la siguiente manera:

$$C=(S,I,\S)$$

donde:

S: conjunto de las situaciones que le dan sentido al concepto (el referente).

I: El el conjunto de los invariantes sobre los que se basa la operatividad de los esquemas (el significado).

§: Es el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente al concepto, sus procedimientos, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante).

Y explica que para estudiar cómo se desarrolla y funciona un concepto es necesario considerar estos tres conjuntos tanto por separado como en su mutua relación recíproca.

Por otra parte, debemos tener claro que una figura es un referente teórico, objeto de una teoría y un dibujo es la representación gráfica de una figura (ver Moriena, 2003).

La inteligencia de la percepción visual

Esta teoría propuesta por Amheim (1985) explica la influencia de las representaciones gráficas estereotipadas en el aprendizaje de los conceptos geométricos. Dicho autor afirma que, en psicología, ha sido muy común distinguir entre la información que se recibe a través del ojo, por un lado, y el tratamiento al que se somete esta información, por el otro. Sostiene, en cambio, que la percepción visual es una operación mental que interviene en la recepción, almacenaje y procesamiento de la información. Por esta razón, afirma que la percepción visual es "pensamiento visual" (Amheim, 1985, p.13). Incluso, considera que en la percepción visual de la forma se dan los comienzos de la formación de conceptos.

Por lo mencionado por Amheim, se puede observar como la percepción visual tiene una gran influencia en la formación de conceptos, algo que también es resaltado por Vigotsky (1962) quien afirma que los niños hacen un anclaje de los conceptos a componentes concreto-figurativos, mucho antes que a las componentes lógicas o abstractas y, parece ser que el dar prioridad a los componentes concreto-figurativos, es esencial para la "fundación" misma del concepto.

Sin embargo, en el nivel medio superior, específicamente en la asignatura de Geometría, es importante que el estudiante no depende completamente de la representación gráfica de un objeto para poder manipularlo, pues en este momento, el estudiante debe ser capaz de fusionar de manera adecuada el concepto y la figura, pues de ello, dependerá que aborde con éxito los problemas de Geometría.

Teoría de los Conceptos Figurales

La teoría de los conceptos figurales desarrollada por Fishcbein (1993), afirma que las figuras geométricas constituyen una clase especial de entidades mentales a las cuales les denomina como "conceptos figurales", porque poseen una doble naturaleza, tanto conceptual como figural. Entendiendo por figura, un referente teórico, objeto de una teoría y por dibujo la representación gráfica de una figura.

Desde el punto de vista conceptual, una figura geométrica (por ejemplo, una circunferencia), constituye un concepto genuino, una entidad ideal abstracta, la cual posee una definición formal. Desde el punto de vista figural, es una figura geométrica que refleja propiedades espaciales (forma, posición, magnitud). Debe quedar claro que la componente figural de la figura geométrica debería estar sujeta a la definición, sin embargo, esto no ocurre en la mayoría de las veces, pues los alumnos pocas veces reflexionan el hecho de que estas figuras **no son arbitrarias** sino que están regidas por una definición formal.

La tendencia de los alumnos a ignorar o rechazar las definiciones formales, porque no las ven necesarias ni útiles, representan un obstáculo en el razonamiento, pues se da un predominio de la figura sobre el concepto. Esto representa un grave problema, pues impide que una alumno sea capaz de reconocer que aún cuando un dibujo no es la representación gráfica que él esperaba, su esencia permanece invariante, es decir, sigue cumpliendo con las características (propiedades) que le otorga la definición y que por tanto, no importa si a simple vista no pareciera ser lo que la definición nos dice a gritos.

Capítulo III. Propuesta

Para evidenciar el predominio de la figura sobre el concepto se hará uso de una métrica poco usual denominada “distancia urbana” o “métrica del taxista”. Se decidió trabajar con esta Geometría por la facilidad que implica su uso, pues a pesar de ser una Geometría no euclidiana, está al alcance de cualquier persona que haya tomado un curso básico de Geometría. Otro motivo por el cual fue escogida, es porque tiene una gran aplicación en problemas de geografía urbana, es decir, es aplicable cuando queremos calcular distancias en este mundo “artificial” que hemos construido. Por ello, para el estudiante de nivel medio superior puede resultar más interesante esta nueva forma de medir, pues tiene una aplicabilidad “inmediata” en su mundo real. Por otra parte, esta Geometría permitirá al alumno darse la oportunidad de averiguar el comportamiento de diferentes objetos matemáticos vistos a la luz de esta nueva Geometría y así podrá percatarse de la importancia de las definiciones en Matemáticas, pues ésta permite que las propiedades de los objetos permanezcan invariantes, aún cuando su representación gráfica nos indique otra cosa (Krause. F, Eugene, 1986).

Distancia urbana

La mayoría de las personas estamos familiarizados con el uso de la distancia euclidiana y no tenemos reparo en utilizarla para cualquier situación en la que necesitemos conocer la distancia entre dos puntos. Sin embargo, esta distancia no siempre resulta útil, pues dependiendo de la situación en la cual nos encontremos, estaremos en condiciones de usarla o no. Por ejemplo, supongamos que tenemos el croquis de una ciudad “Ideal” (Bell Mejía A. 2008) en la cual todas las calles son paralelas, de igual longitud y que las calles no tienen anchura, así como también supongamos que cualquier construcción tiene el tamaño de un punto. Esta situación se representa en el siguiente esquema:

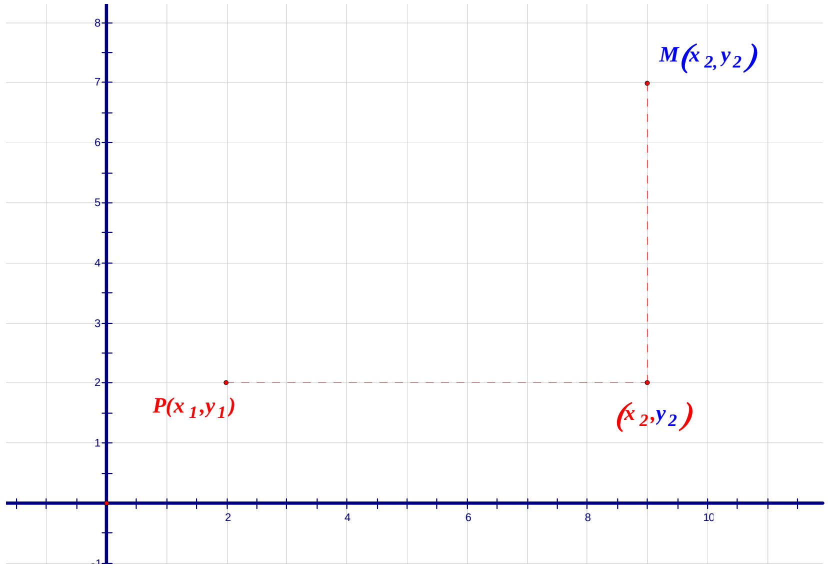


Figura 2

Donde P y M representan cualquier construcción. Sin pérdida de generalidad, supongamos que una persona se encuentra localizada en el punto $P(x_1, y_1)$ y desea caminar al mercado el cual se encuentra localizado en el punto $M(x_2, y_2)$. Por tratarse de una ciudad, estamos de acuerdo en que los únicos caminos disponibles para viajar del punto P al punto M es caminando por las calles, por lo cual, una de las opciones disponibles es el camino punteado que se muestra en la Figura 2.

Cabe mencionar que en este caso no es viable utilizar la distancia euclidiana, pues esta distancia une los dos puntos a través de una línea recta, lo cual, en este caso es imposible, pues eso implicaría atravesar las construcciones que se encuentran entre estos dos puntos, por lo tanto, la distancia euclidiana no resulta viable cuando lo que se desea es calcular la distancia entre dos puntos que se encuentran en una ciudad.

Modelo matemático

Bajo las suposiciones y necesidades planteadas anteriormente, es conveniente tener un nuevo modelo matemático que sea aplicable a la situación descrita anteriormente, el cual básicamente se encargue de medir el número de cuadras entre dos puntos dados. Para ello, debemos tener presente que esta “nueva” forma de medir, debe cumplir con las propiedades de una métrica, es decir:

1. La distancia de un punto a él mismo es nula y viceversa, cuando la distancia entre dos puntos es nula, entonces se trata del mismo punto.
2. La distancia que haya del punto P al punto M, debe ser la misma que si se camina del punto M al punto P.
3. Debe cumplir la desigualdad del triángulo, es decir, la distancia para ir del punto P al punto M, debe ser menor o igual que la distancia que hay de P a M, vía cualquier otro punto C.

De este modo, la distancia del punto $P(x_1, y_1)$ al punto $M(x_2, y_2)$, se representará por d_U (distancia urbana o distancia del taxista), la cual está definida de la siguiente manera:

DEFINICION 1

$$d_U(P, M) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

De esta manera queda definida la métrica con la cual se trabajará.

Estrategias propuestas

Antes de iniciar con las propuestas, daremos algunos ejemplos que nos permitan familiarizarnos con el uso de la distancia urbana.

1. Grafica los puntos con coordenadas *P(2,2)* y *Q(4,5)* y calcula la distancia euclidiana y la distancia urbana entre ellos.

   Solución:

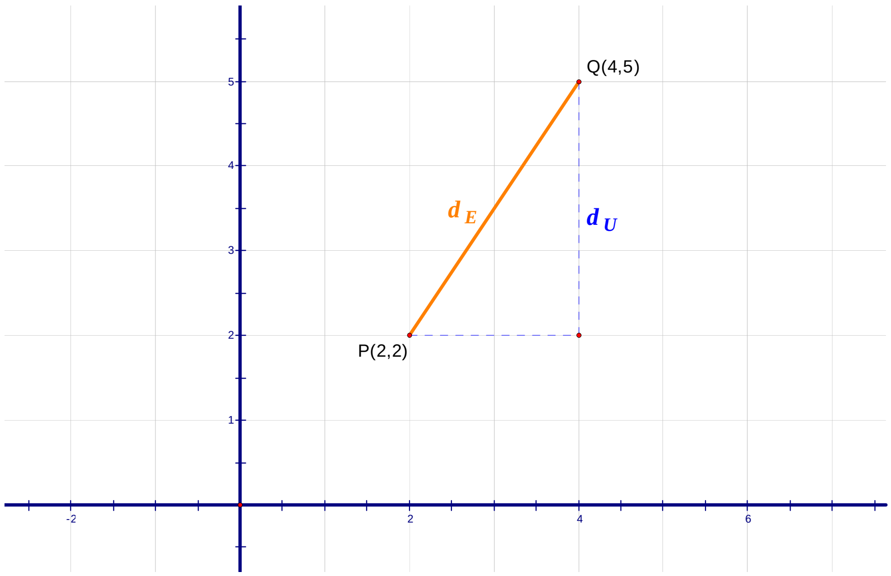


Figura 3

Primero calcularemos la distancia euclidiana, la cual está dada por la siguiente fórmula

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Luego para este caso, con $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, tenemos:

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(4-2)^2 + (5-2)^2}$$

$$d_E(P,Q) = \sqrt{13}$$

Y la distancia urbana sería:

$$d_U(P,Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

$$d_U(P,Q) = |4 - 2| + |5 - 2|$$

$$d_U(P,Q) = 5$$

2. Grafica los puntos $P(0,1)$ y $Q(3,5)$. Determina también la distancia euclidiana y la distancia urbana entre ellos.

   Solución

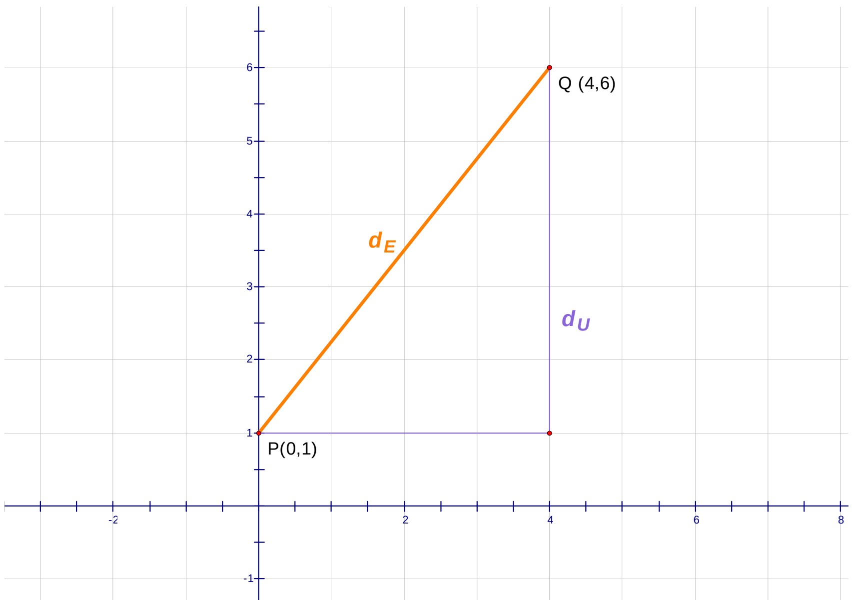


Figura 4

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (5 - 0)^2}$$

$$d_E(P,Q) = \sqrt{34}$$

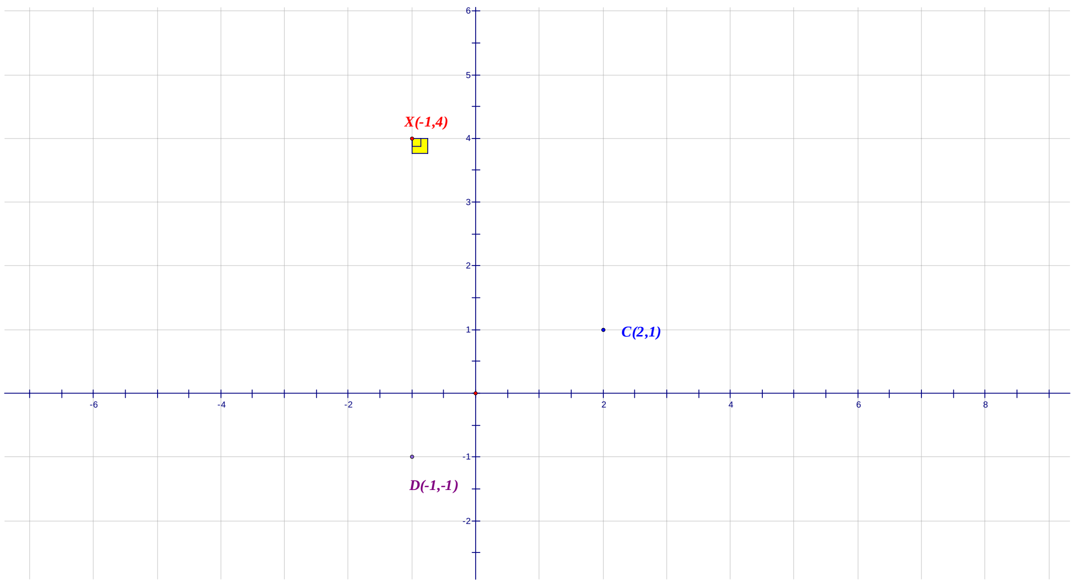
$$d_U(P,Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

$$d_U(P,Q) = |3 - 0| + |5 - 0|$$

$$d_U(P,Q) = 8$$

3. La recepcionista del departamento de policía de la ciudad recibe un reporte de un accidente en $X = (-1,4)$. Hay dos patrullas en el área, la patrulla C en (2,1) y la patrulla D en (-1,-1). ¿Qué patrulla debe ser enviada a la escena del accidente?

Solución



Para saber qué patrulla debemos enviar al lugar donde ocurrió el accidente, debemos saber cuál de las dos patrullas está más cerca del lugar del incidente, para ello, por tratarse de la ciudad ideal, debemos calcular la distancia urbana del punto X al punto C y del punto X al punto D. Sea $X(x_1, y_1)$ y sea $D(x_2, y_2)$, entonces:

$$d_U(X, D) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

$$d_U(X, D) = |-1 - (-1)| + |-1 - 4|$$

$$d_U(X, D) = |-1 + 1| + |-5|$$

$$d_U(X, D) = |0| + 5$$

$$d_U(X, D) = 5$$

Lo cual indica que la distancia de la patrulla ubicada en el punto D al lugar del incidente es de 5 cuadras.

Sea $X(x_1, y_1)$ y sea $C(x_2, y_2)$

$$d_U(X, C) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

$$d_U(X, C) = |2 - (-1)| + |1 - 4|$$

$$d_U(X, D) = |3| + |-3|$$

$$d_U(X, D) = 3 + 3$$

$$d_U(X, D) = 6$$

Por lo cual, el número de cuadras que debe recorrer la patrulla ubicada en el punto *C* para llegar al lugar del incidente es de 6 cuadras.

Por tanto, se puede concluir que se debe enviar la patrulla ubicada en el punto *C* pues está una cuadra más cerca que la patrulla *D*.

Circunferencias

El gobierno municipal de "Ciudad Ideal" ha acordado construir una biblioteca en pleno centro de la Ciudad, y a la vez desea construir una escuela que diste de la biblioteca central cinco cuadradas. ¿En donde debería ubicar la escuela para que cumpla con las necesidades planteadas?

Primera parte:

1. En el siguiente croquis de la ciudad, escoge la ubicación de la biblioteca y nómbrala con la letra C.

2. Determina también cuatro posibles ubicaciones para la escuela que se desea construir.

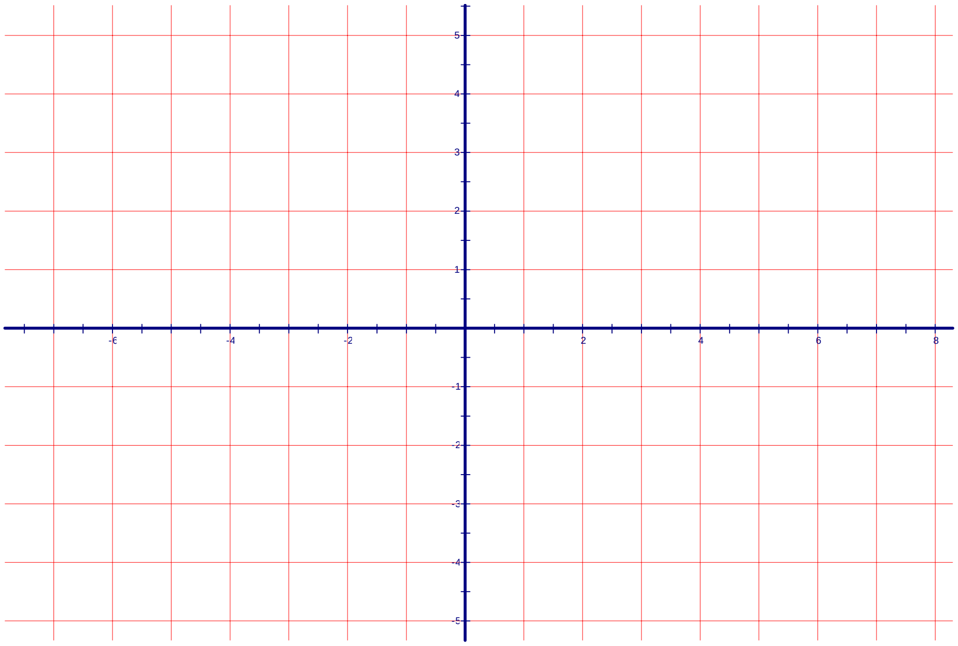
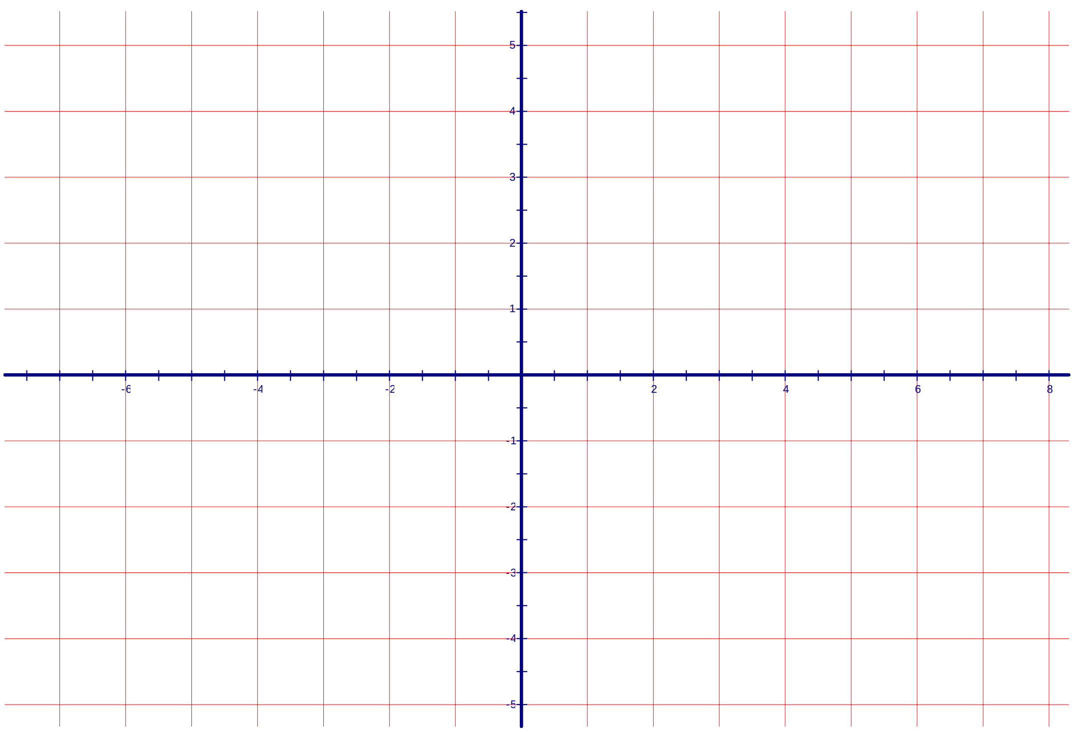


Figura 5

3. Si fuera posible ubicar la escuela en cualquier sitio, inclusive en aquellos donde actualmente existiera otra construcción, determina cuáles son las posibles ubicaciones para la escuela. *Sugerencia:* Sé cuidadoso en tu respuesta, hay más ubicaciones de las que a simple vista pudiera parecer.



4. ¿La figura que se formó es una circunferencia? Sí / No

5. Investiga la definición formal de circunferencia y escríbela:

____

____

____

6. Si tomaras al punto *C(0,0)* como centro, ¿Los puntos que representan las ubicaciones posibles para la escuela, cumplen o no con la definición formal de circunferencia? ¿Sí / No?

   Justifica tu respuesta, para ello haz los cálculos necesarios.

Segunda parte: Justificación

Ya comprobaste que muchos puntos que de la figura cumplen con la definición formal de circunferencia, pues la distancia de ellos a un punto fijo, en este caso a C(0,0) (que representa la ubicación de la biblioteca) es la misma para estos puntos, siendo esta cinco unidades. La pregunta ahora es, ¿**todos los puntos** que están sobre la figura, incluso aquellos que no están sobre los vértices, **cumplen con la definición** formal de circunferencia?

Para responder formalmente esta pregunta, realicemos el siguiente procedimiento, el cual es una generalización del problema planteado anteriormente:

Denotemos por C$= \{P: d_U(P, C) = r\}$ el conjunto de todos los puntos tales que la distancia del punto *P* al punto *C* es igual a una cierta longitud r. Es decir, estamos tratando con la definición formal de circunferencia.

1. Toma un punto P(x_1, y_1) sobre la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r, como se muestra en la Figura 6.

2. Si la circunferencia tiene centro C con coordenadas (h, k) y el radio de dicha circunferencia es r, ¿puedes determinar las coordenadas de los vértices? Escríbelas

dentro de los paréntesis que se muestran en la siguiente figura. Sugerencia: la abscisa del punto B es: h

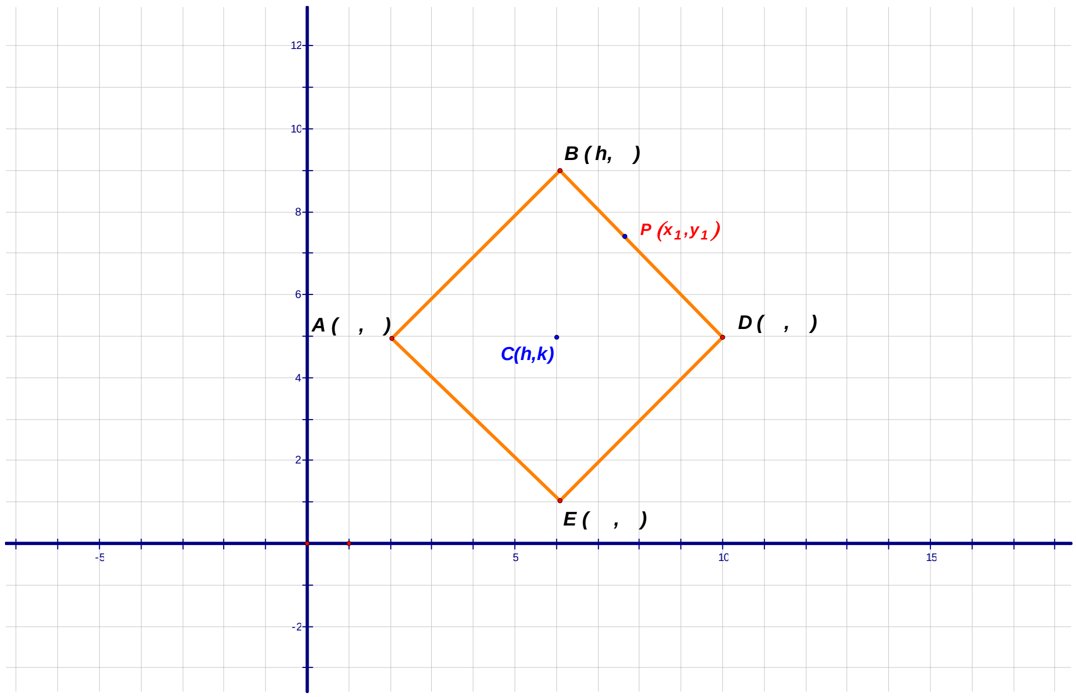


Figura 6

3. Traza desde P una perpendicular al diámetro $\overline{AD}$, y llama Q al punto de intersección.

4. Acordemos que $\overline{PQ} = z$ y que $\overline{CQ} = w$.

5. Al trazar esta perpendicular se han formado dos triángulos, el ΔPQD y el ΔBCD, ¿existe alguna relación entre dichos triángulos? En caso afirmativo, ¿cuál?

____
____

6. ¿Cuál es la distancia del punto $C(h,k)$ al punto $P(x_1, y_1)$? Justifica tu respuesta.

____
____

7. Trabaja con las relaciones que encontraste en la pregunta 5, para determinar cuál es la distancia del punto $C(h, k)$ al punto $P(x_1, y_1)$.

8. ¿Qué puedes concluir sobre la figura que se formó, es o no, una circunferencia bajo la métrica del taxista? Justifica tu respuesta, considerando la definición formal.

____

____

____

____

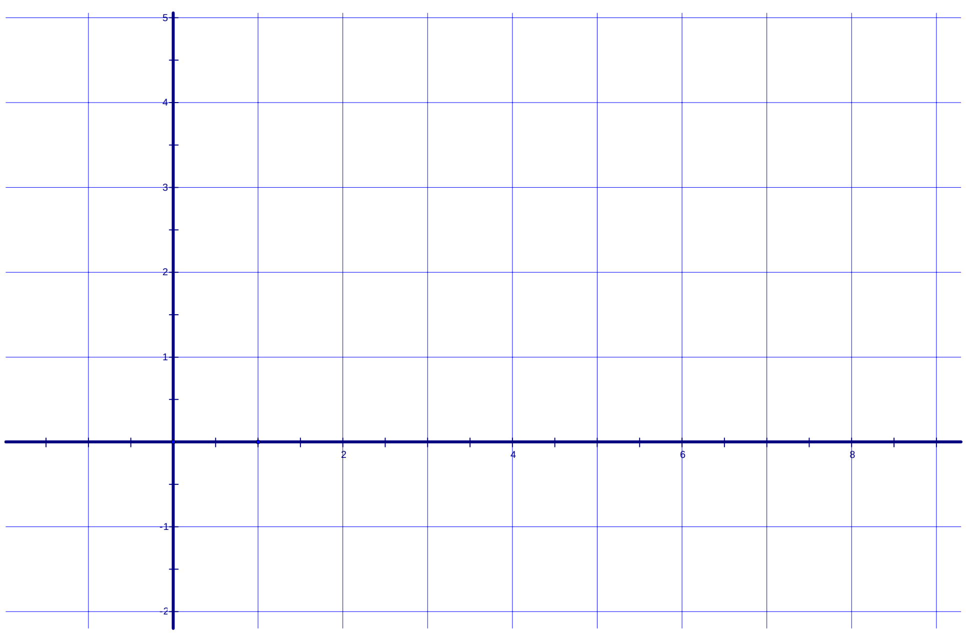
Tercera parte: Practicando lo aprendido

1. En el siguiente plano cartesiano, traza las siguientes circunferencias.

   a) Grafica la circunferencia del taxista con centro en $B(2,2)$ y radio

   b) Grafica la circunferencia con centro en $C(2,2)$ y radio 2.

   c) Grafica la circunferencia con centro en $C(2,2)$ y radio 1.



Rectas tangentes a una circunferencia.

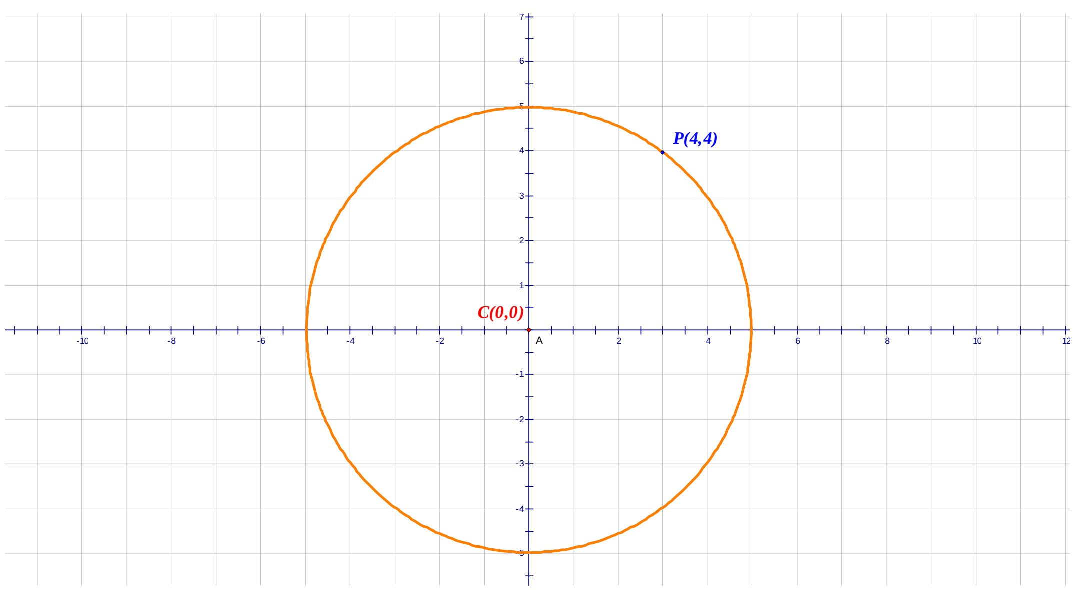
Primera parte:

Dada la siguiente circunferencia con centro en $C(0,0)$ y radio $r = 5$, traza la recta tangente a dicha circunferencia en el punto $P(4,4)$. Para ello, investiga primeramente cuál es la definición formal de recta tangente a una circunferencia en un punto dado.

DEFINICIÓN DE RECTA TANGENTE EN UN PUNTO:

____
____
____
____

1. Traza la recta tangente a la circunferencia en el punto $P(4,4)$, e indica paso por paso cual fue el procedimiento seguido.



2. ¿Cuántas rectas tangentes distintas que pasen por $P(4,4)$ existen?

___

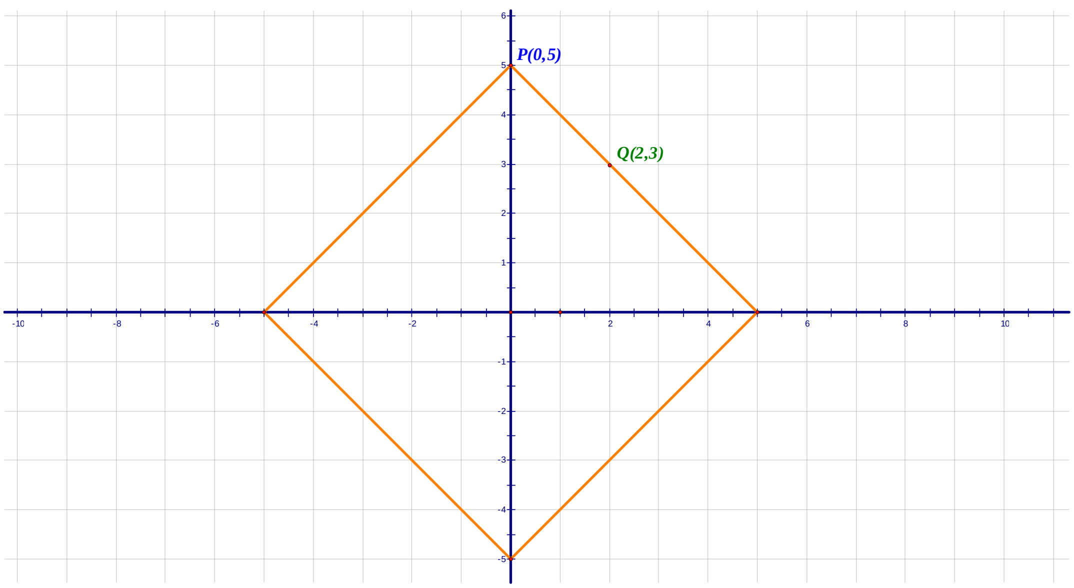
3. ¿Cuántas rectas tangentes existen para la circunferencia con centro $C(0,0)$ y radio 5? Justifica tu respuesta.

___

Segunda parte:

Observación: Aunque la circunferencia ha sido graficada utilizando la distancia del taxista, la medición de los ángulos será en la forma que conoces, es decir, utilizando la distancia euclidiana.

Dada la siguiente circunferencia del taxista con centro $C(0,0)$ y radio $r = 5$.



1. ¿Crees que exista alguna recta tangente a dicha circunferencia, la cual pase por el punto $P(0,5)$? Sí / No. Justifica tu respuesta.

___

2. ¿Crees que existan la recta tangente a la circunferencia por el punto $Q(2,3)$? Sí/ No
   Justifica tu respuesta.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

3. ¿Cuántas rectas tangentes existen para la circunferencia del taxista? ______________
   Justifica tu respuesta.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

4. ¿Los resultados obtenidos, contradicen lo que esperabas? Sí/No ¿Por qué?

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

Mediatrices

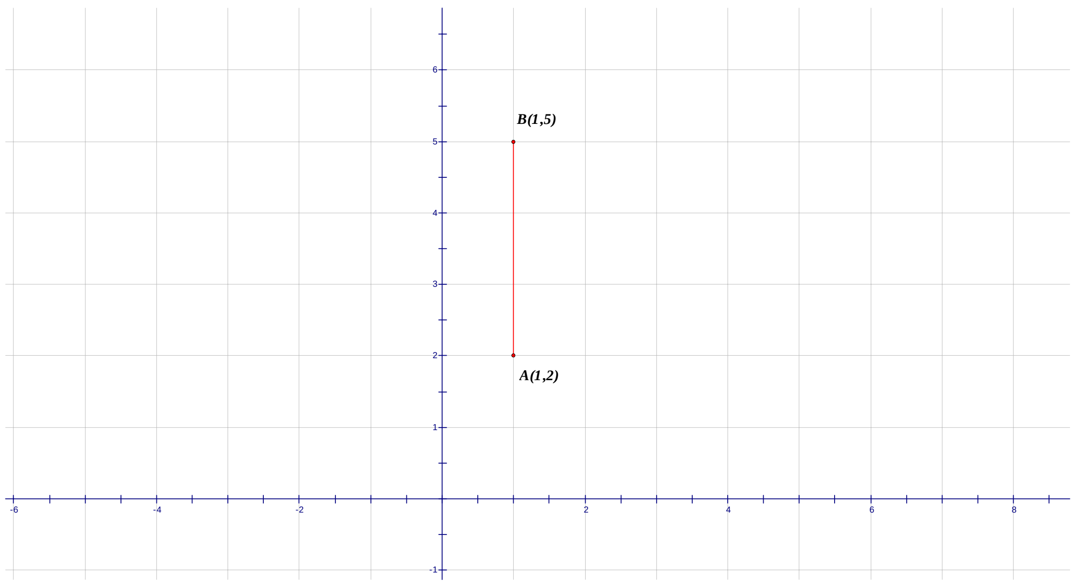
1. DEFINICIÓN DE MEDIATRIZ

____

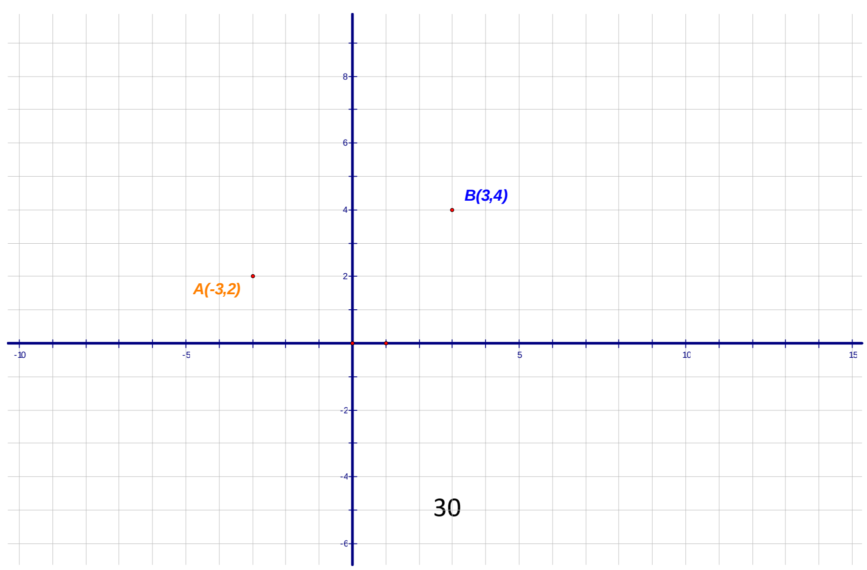
____

____

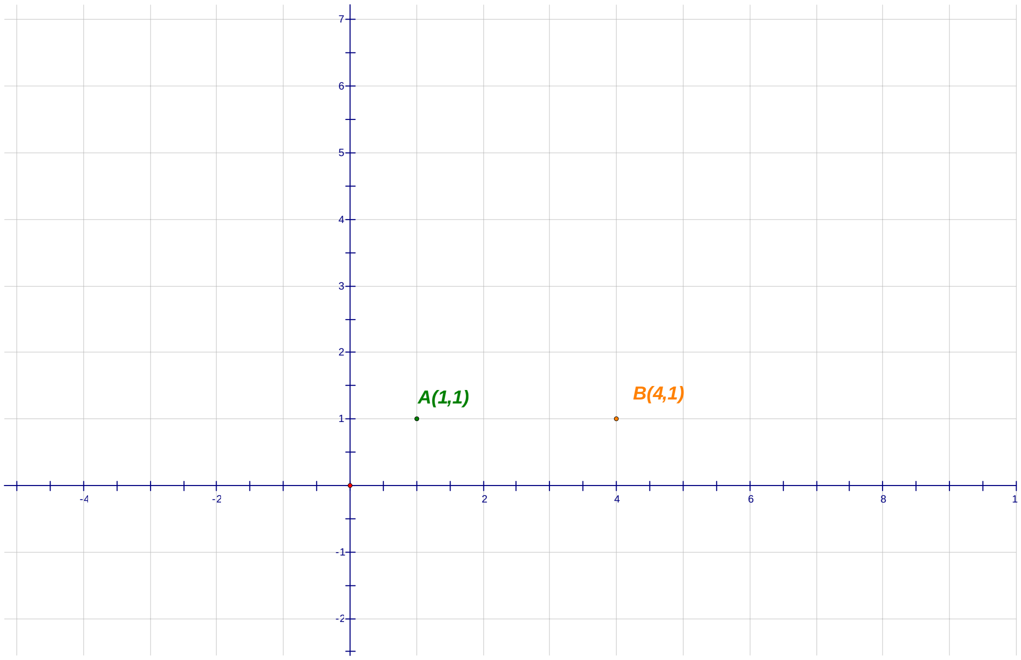
2. Utiliza la distancia euclidiana (rojo) y la distancia urbana (azul) para trazar el conjunto de todos los puntos que equidisten del punto $A(1{,}5)$ y del punto $B(1{,}5)$.



3. Dibuja en rojo el conjunto de todos los puntos que equidisten del punto $A(-3{,}2)$ y el punto $B(3{,}4)$, utilizando la distancia Euclidiana, y en azul utilizando la distancia urbana.



4. Dibuja en rojo el conjunto de todos los puntos P que equidisten del punto $A(1,1)$ y el punto $B(4,1)$, utilizando la distancia euclidiana y en azul utilizando la distancia urbana.



5. ¿Los conjuntos anteriores tienen la misma representación gráfica? Sí / No

6. ¿A qué crees que se deba?

____

____

____

7. ¿Qué características deben cumplir los puntos para que la representación gráfica de la mediatriz sea la misma sin importar si se utiliza la distancia euclidiana o la distancia urbana?

____

____

____

____

8. ¿Qué podrías concluir?

____

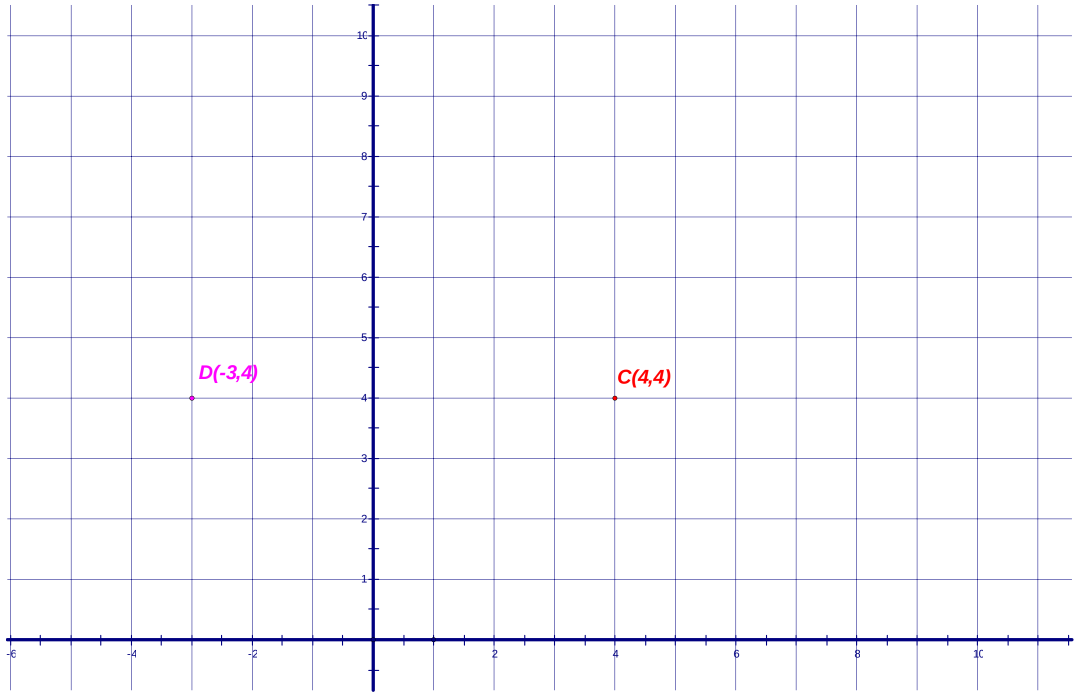
____

____

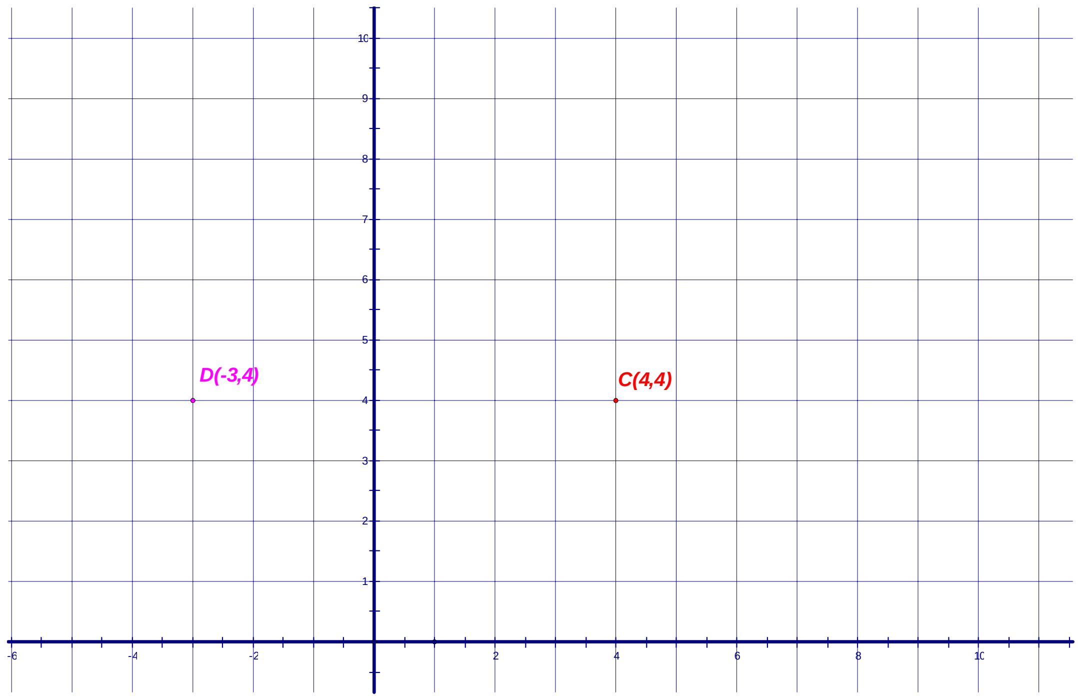
____

- Carlos y su novia han decidido salir esta tarde pero no se pueden poner de acuerdo en qué lugar verse, sólo han acordado que deben encontrarse en un lugar que esté a la misma distancia de la casa de ambos. La casa de Carlos está ubicada en el punto $C(4,4)$ y la casa de su novia en el punto $D(-3,4)$.

1. Si ellos desean utilizar la distancia Euclidiana para hacer las mediciones de la distancia. ¿En qué puntos se podrían ver? Marca por lo menos 10 sitios distintos en el siguiente croquis.



2. Si en lugar de medir con la distancia euclidiana utilizaran la distancia urbana, por el hecho de que se encuentran en ciudad “Ideal” y resulta más factible utilizar dicha métrica, ¿cuáles son los posibles sitios donde podrían verse?, marca por lo menos 10 puntos distintos en el siguiente croquis.



3. ¿Los diez puntos marcados son los únicos que cumplen con la condición dada? De no ser así marca ***todos*** los puntos que cumplen la restricción establecida.

4. ¿Los dibujos obtenidos utilizando la geometría euclidiana y la geometría del taxista son los mismos o son distintos?

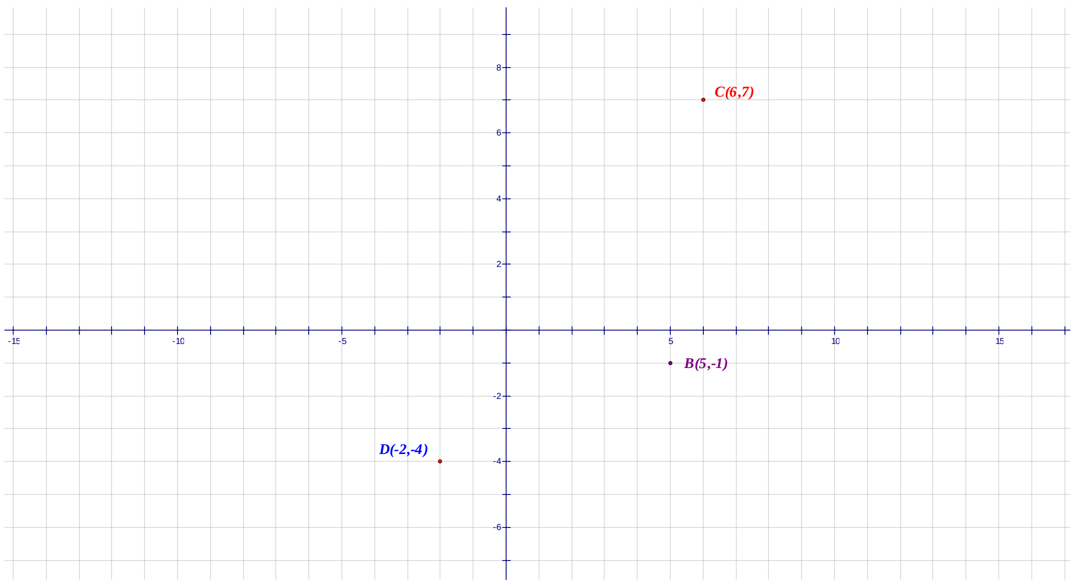
____

____

5. Para cada uno de los ejemplos anteriores (2 y 3) los puntos obtenidos cumplen las mismas condiciones, es decir, que la distancia de dichos puntos al punto *D* y al punto *C*, son iguales, (para el primer caso con la geometría euclidiana y para el segundo caso con la geometría urbana).

Observación: Ese conjunto de puntos se llama mediatriz, entendiendo por ésta el conjunto de puntos que equidistan de dos puntos fijos, en este caso los puntos fijos son el punto *D* y el punto *C*.

- Se ha decidido construir una Universidad que equidiste de las tres principales preparatorias de "Ciudad Ideal". La ubicación de dichas preparatorias son: $B(5,-1)$, $C(6,7)$ y $D(-2,-4)$. ¿En dónde debe ubicarse la universidad para que cumpla con dichos requisitos?



1. Considera primeramente dónde se puede ubicar la universidad si lo único importante es que la universidad equidiste de la preparatoria *C* y de la preparatoria *B*. Determínalos gráficamente y coloréalos de rojo.

2. Si sólo importara que la universidad equidiste del punto *D* y del punto *B*, ¿dónde podría ubicarse la universidad? Determínalos gráficamente y coloréalos de azul.

3. De igual manera cuáles son las ubicaciones posibles para la universidad si lo que importa es que equidiste el punto *C* y del punto *D*. Determínalos gráficamente y coloréalos de café.

4. Sea *M* el punto de intersección de las mediatrices determinadas por los incisos anteriores, ¿qué característica cumple dicho punto?

   ____

   ____

   ____

5. Determina las coordenadas de la ubicación de la universidad.______________________

6. ¿Qué nombre le darías al punto *M?*

   ____

   ____

   ____

Capítulo IV. Comentarios

El uso de diversas geometrías puede resultar de gran utilidad, pues permite al profesor en primera instancia percatarse del hecho de que los estudiantes de Matemáticas otorgan primacía a la representación gráfica del objeto sin dar mayor importancia al concepto, lo cual representa un obstáculo para el aprendizaje de la geometría. Por otro lado, el uso de estrategias o actividades que utilicen distintas geometrías, puede ayudar al alumno a percatarse de que en Matemáticas las definiciones y los conceptos, son la esencia misma de la matemática y que por ello, vale la pena entender las definiciones establecidas y a la par poder asociarlas de manera eficaz con alguna representación gráfica, sin embargo, debe quedar claro que esa representación gráfica no tiene por que ser única y mucho menos arbitraria, pues ésta corresponde a definición y a su vez está regida por el tipo de geometría que se está utilizando.

Por ello, el uso de la geometría del taxista puede ser de gran utilidad para el maestro si lo que desea es resaltar la importancia de las definiciones en Matemáticas, pues permite que el alumno no se case con una representación gráfica estereotipada, sino que éste vaya construyendo sus propias representaciones gráficas pero, rigiéndose por una definición y tomando en cuenta la geometría que está utilizando.

Por tales razones, la geometría del taxista puede utilizarse para estudiar diferentes representaciones gráficas de conceptos importantes que se utilizan en geometría analítica como lo son: mediatrices, circunferencia, rectas tangentes, parábola, elipses e hipérbola y con ello permitir que el alumno vislumbre la importancia de las definiciones y conozca “nuevas” formas de representar un mismo objeto matemático.

Referencias

Acuña S., C (2007). La complejidad del aprendizaje de los conceptos figurales, el caso de los puntos. En *Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Querétaro, México.

Bell Mejía. A. (2008) *Temas Selectos de Geometría Analítica, una propuesta didáctica acerca de cómo utilizar las aplicaciones para promover su aprendizaje.* Tesis inédita para obtener el grado de maestro en docencia de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Querétaro.

D`Amore., B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. Barcelona, España *27*, 51-76.

D’Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Education Studies in Mathematics, 24(2), 139-162.*

Godino, J. y Batanero, C. (1994) Significado institucional y personal de los conceptos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14(3),* 325-255.

Krause, F.E. (1986). Taxicab Geometry. Dover Publications, Nueva York, Estados Unidos.

Moriena S. y Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática, 15(1)*, 5-19.