

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE QUERETARO  
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL

# Analogía Electrónica Aplicada Al Análisis Elástico de Cascarones

T E S I S

Que para obtener el Título de Ingeniero Civil  
p r e s e n t a

Florencio Moreno López

Querétaro, Qro.

1 9 7 4

*Biblioteca Central*

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE QUERETARO



OFICIO NUM: 84

ASUNTO: SE APRUEBA TEMA  
DE TESIS.

Octubre 16 de 1972.

SR. PASANTE FLORENCIO MORENO LOPEZ.  
P R E S E N T E .-

En respuesta a su atenta Solicitud, relativa al Tema de su Tesis Profesional, me permito comunicar a Usted, el que para tal efecto fué propuesto por el Sr. Ing. Antonio Sánchez --- Hernández. El Título de su Tesis será:

ANALOGIA ELECTRONICA APLICADA AL ANALISIS ELASTICO DE CASCARONES.

INTRODUCCION.- SIMBOLOGIA  
CAPITULO I

CASCARONES

- a).- DEFINICION DE CASCARON
- b).- CLASIFICACION
- c).- TIPOS DE CARGA
- d).- HIPOTESIS

CAPITULO II

TEORIA DE LA MEMBRANA

CAPITULO III

TIPO DE ECUACION DE SCHORER  
DESARROLLO PARA LA ANALOGIA ELECTRONICA

CAPITULO IV

TIPO DE ECUACION DE JENKINS  
DESARROLLO PARA LA ANALOGIA ELECTRONICA

CAPITULO V

CONDICIONES DE BORDE

- a).- CASCARON INTERNO SIN VIGA DE UNION
- b).- CASCARON EXTERNO
- c).- CASCARON INTERNO CON VIGA DE UNION
- d).- CASCARON INTERNO DIENTE DE SIERRA
- e).- CASCARON EXTERNO DIENTE DE SIERRA  
(EXTERNO DE LA VENTANA).

##



hoja # 2

CAPITULO VI

EJEMPLOS DE SOLUCION DE LAS ECUACIONES  
DEL CASCARON POR MEDIO DEL COMPUTADOR-  
ANALOGICO

- a).- CASCARON INTERNO SIN VIGA DE UNION
- b).- CASCARON CON VIGAS DE BORDE
- c).- CASCARON INTERNO DIENTE DE SIERRA

CAPITULO VII

CONCLUSIONES

CAPITULO VIII

BIBLIOGRAFIA

También hago de su conocimiento las disposiciones de nuestra Escuela, en el sentido de que, antes de su Examen Profesional deberá cumplir con el requisito del Servicio Social y de que el presente Oficio se imprima en todos los Ejemplares de su Tesis.

ESCUELA DE  
INGENIERIA



ATENTAMENTE  
"EDUCO EN LA VERDAD Y EN EL HONOR".

ING. ANTONIO SANCHEZ HERNANDEZ.  
DIRECTOR.

C.c.p.- La Mesa de Profesiones de la U.A.Q.- Edificio.-  
C.c.p.- El Sr. Ing. Antonio Sánchez Hernández.- Presente.-  
C.c.p.- El Archivo de la Escuela de Ingeniería.- Edificio.-

Con todo mi agradecimiento a mi padre

J. Carmen Moreno Moreno

Con profundo respeto a la memoria de mi madre

María López de Moreno

A mi abuelita

Catalina Moreno

A mis hermanos

Con todo cariño

A mi esposa e hija

Raquel Osornio de Moreno

y

Mta. Raquel Moreno Osornio

Con todo respeto a la familia Osornio-Cruz y muy en especial al Sr. J. Reyes Osornio Muñoz y su señora esposa Raquel Cruz de Osornio.

A la U.A. de Q.

A mi escuela de ingeniería

A mis maestros con admiración y respeto

A mis compañeros y amigos

Con admiración a mi director de tesis.

Ing. Antonio Sánchez Hernández

## Introducción

Dentro del diseño de estructuras, nuestro computador electrónico - analógico presenta ciertas ventajas sobre el computador electrónico digital, siendo éstas en su forma general las siguientes:

- 1: La programación es relativamente fácil.
  - 2: La solución numérica de ecuaciones diferenciales puede ser obtenida directamente de ellas mismas.
  - 3: Al ejecutarse un cambio de cualquier variable sobre las otras variables en magnitud y distribución, esto se registrará en el tubo de rayos catódicos. Por ejemplo, si ocurre que un esfuerzo es de un tamaño indeseable en un cierto diseño, es muy fácil determinar cuáles de las otras variables son las que más influyen en la alteración de este esfuerzo. Lo anterior nos proporciona información útil para decidir sobre el mejor método de revisión de diseño.
  - 4: Los componentes electrónicos analógicos son relativamente económicos en comparación a los digitales.
- La exactitud de la solución de problemas por medio del computador analógico se asemeja a la que obtendremos empleando una regla de cálculo.



Por análisis elástico de cascarones entendemos, los cascarones que son resueltos a partir de ecuaciones diferenciales parciales de alto orden. Sin embargo, la dificultad de una ecuación diferencial es la determinación de las constantes de integración. Estas pueden ser obtenidas a partir de las condiciones de borde que nos proporciona el problema en estudio. Además de esto, nuestro computador analógico necesita conocer condiciones iniciales de borde, es decir, cuando  $\varphi = 0$ .

## Simbología

$a$	coeficiente equivalente a, $\pi\pi/k$
$A$	área de la sección transversal de una viga
$C$	condensador de regeneración
$d$	espesor del cascarón
$E$	módulo de elasticidad del concreto
$\xi$	función general de esfuerzo o un flujo que significa condición final.
$\gamma$	carga externa por unidad de área de superficie del cascarón
$H$	fuerza como se ilustra en una de las figuras.
$H_1$	torsión por unidad de ancho alrededor de un eje longitudinal
$H_2$	torsión por unidad de ancho alrededor de un eje transversal
$i$	subíndice que significa condición inicial
$I_y$	momento de inercia de una viga alrededor del eje $y$
$I_z$	momento de inercia de una viga alrededor del eje $z$
$I$	momento de inercia rectangular de una sección de cascarón.
$K_1, K_2, K_3$ , etc.	voltajes constantes de entrada
$l$	longitud o claro de un trazo de cascarón
$M$	momento flexionante
$M_1$	momento flexionante por unidad de ancho alrededor del eje transversal de una sección de cascarón.
$M_2$	momento flexionante por unidad de ancho alrededor del eje longitudinal de una sección de cascarón
$n$	número de término de Fourier

- $N_1$  fuerza cortante radial por unidad de ancho en un plano transversal  
 $N_2$  fuerza cortante radial por unidad de ancho en un plano longitudinal  
 $P$  fuerza por unidad de ancho transmitida por los postes del ventanal en un cascarrón diante de sierra.  
 $P_{ol}$  potencia muelo  
 $q_1$  peso del engrosamiento por unidad de longitud en el borde de un cascarrón interno simple.  
 $q_2$  peso de la viga de borde por unidad de longitud, incluyendo el espesamiento del borde del cascarrón adyacente.  
 $q_3$  peso de la viga incluida por unidad de longitud de un cascarrón diante de sierra incluyendo el peso del espesamiento del borde del cascarrón adyacente.  
 $q_4$  peso del espesamiento por unidad de longitud del borde superior de un cascarrón diante de sierra.  
 $r$  radio del cascarrón.  
 $R_1, R_2, \text{ etc.}$  resistencias de entrada  
 $S$  fuerza cortante directa por unidad de ancho en el plano de la superficie del cascarrón  
 $S_1$  actúa en la dirección transversal  
 $S_2$  actúa en la dirección longitudinal  
 $T$  fuerza longitudinal producida por una fuerza cortante unitaria  
 $T_1$  fuerza longitudinal directa por unidad de ancho  
 $T_2$  fuerza transversal directa por unidad de ancho  
 $T_e$  fuerza longitudinal directa en el borde del cascarrón.  
 $u$  desplazamiento longitudinal de un elemento de cascarrón  
 $v$  desplazamiento transversal de un elemento de cascarrón  
 $V$  fuerza como se ilustra en la figura.  
 $w$  desplazamiento radial de un elemento de cascarrón  
 $W$  cuerda del cascarrón  
 $Y$  componente tangencial de  $g$   
 $Z$  componente radial de  $g$

- $\delta_A$  desplazamiento vertical del borde del cascarón  
 $\delta_B$  desplazamiento horizontal del borde del cascarón  
 $\theta, \varphi$ , ángulo medido desde el borde izquierdo al elemento de cascarón.  
 $\varphi_1$  ángulo entre la vertical y el radio del borde del cascarón  
 $\varphi_2$  ángulo de inclinación de la vertical de los postes del ventanal de un cascarón delante de sierra.  
 $\varphi_3$  ángulo entre el radio del borde interior y los postes del ventanal de un cascarón delante de sierra  
 $\varphi_4$  ángulo entre la vertical y el radio del borde superior de un cascarón - delante de sierra.  
 $\psi_1$  deflexión angular de la tangente longitudinal de un elemento de cascarón.  
 $\psi_2$  deflexión angular de la tangente transversal de un elemento de cascarón.  
 $k\Omega$  Kilohm  
 $\mu F$  microfaradio  
 $\delta_{AV}, \delta_{BV}$  y  $T_{eV}$  valores de  $\delta_A, \delta_B$  y  $T_e$ , respectivamente para la unitaria V.  
 $\delta_{AH}, \delta_{BH}$  y  $T_{eH}$  valores de  $\delta_A, \delta_B$  y  $T_e$  respectivamente para la unitaria H.  
 $\delta_{AS}, \delta_{BS}$  y  $T_{eS}$  valores de  $\delta_A, \delta_B$  y  $T_e$  respectivamente para la unitaria  $dS/dx$ .

# Capítulo I

## Cascarones

### a). Definición de Cascaron

El cascaron es una estructura tridimensional, generada por la rotación de un elemento geométrico curvo o recto, que gira alrededor de un eje y cuya resistencia básica a la carga aplicada, es a través de tensión y compresión, - siendo su espesor pequeño en relación a sus dimensiones laterales.

### b). Clasificación

Los cascarones estructurales podemos clasificarlos en los siguientes tipos

1º Cúpulas y paraboloides elípticos  
Curvatura gaussiana positiva.  
(Sinclásticas).

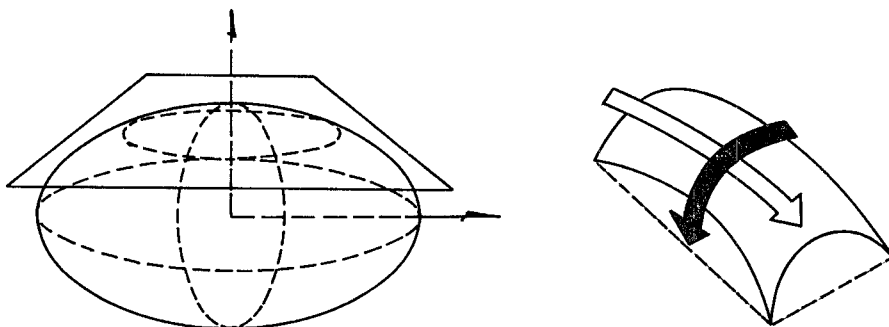
2º Cilíndricos y cónicos  
Curvatura gaussiana nula.

y

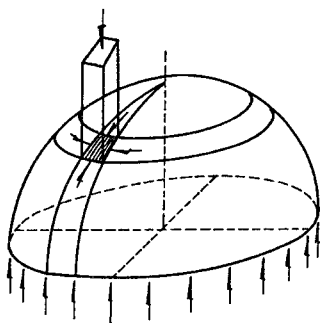
3º Paraboloides hiperbólicos  
Curvatura gaussiana negativa

(Antielástica)

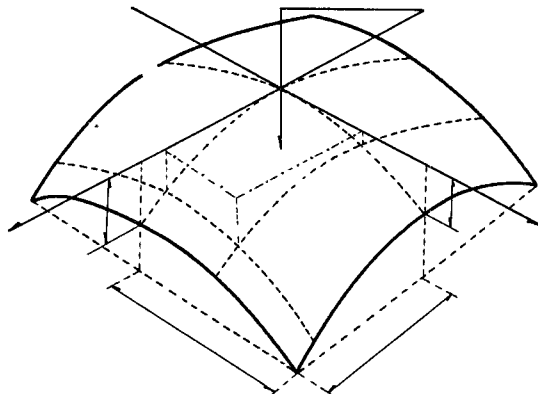
1. Las cúpulas y paraboloides elípticos, son los casearones formados por dos familias de curvas con la misma dirección.



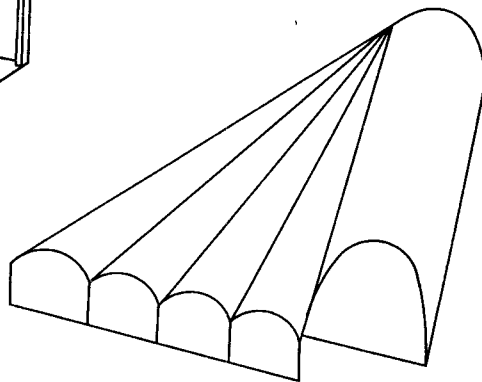
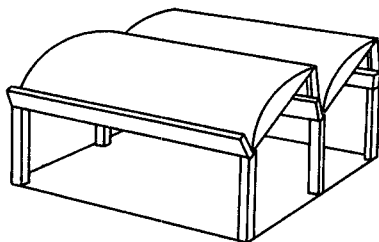
Las cúpulas son casearones de doble curvatura, de superficie hemisférica y similar, que se apoya sobre una base cilíndrica siendo además, ésta superficie engendrada por la rotación de uno de los extremos de una misma curva cualquiera, que gira alrededor de un eje que sirve como apoyo. Cuando la línea generativa se interrumpe antes de apoyarse, se origina entonces la cúpula con linterna.



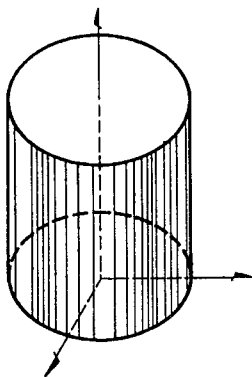
Por otra parte, los paraboloidas elípticos, son las superficies engendradas por el deslizamiento de una parábola llamada generatriz, a lo largo de otra parábola que es la directriz.



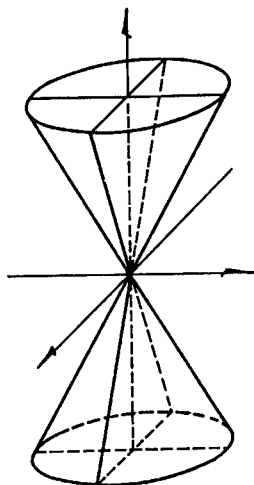
2. Los cascarones cilíndricos y cónicos se forman por el deslizamiento de una sola familia de curvas



Los cascarones cilíndricos son las superficies generadas por una recta que se apoya constantemente en una línea fija, llamada directriz y que en todas sus posiciones sucesivas se conserva paralela a una recta dada, originándose así, un número infinito de formas y tipos de dichos cascarones.

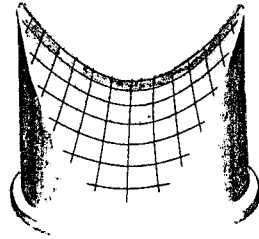
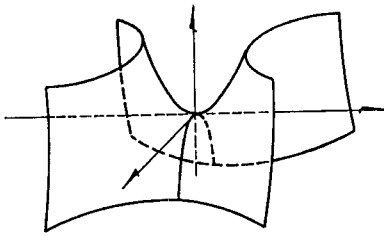


Mientras que un cascarón cónico es la superficie engendrada por una recta, llamada generatriz, que se apoya en un punto fijo y en una línea que es la directriz.



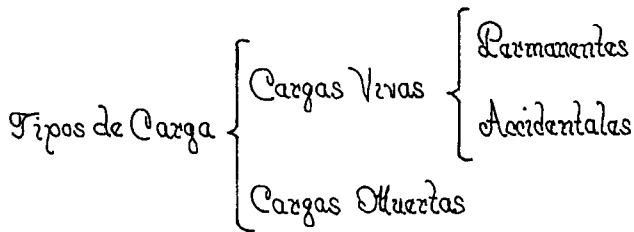


3.- Los paraboloides hiperbólicos son tomados por el deslizamiento de dos familias de curvas de direcciones opuestas



### Tipos de Carga

Por lo general, al igual que todos los elementos estructurales, las casca-  
 ronas se diseñan de acuerdo con los esfuerzos que en estos se presentan, como  
 resultado de la acción de dos tipos de carga, las cuales se clasifican y definen  
 de la siguiente manera



Las cargas vivas son aquellas que gravitan en las estructuras o elemen-  
 tos estructurales sin formar parte de estas, pero que, actúan de un modo  
 continuo o casi continuo.

Debido a la acción de continuidad estas cargas pueden clasificarse en  
 permanentes y accidentales.

Las cargas permanentes son las que actúan de un modo continuo, mientras que las cargas accidentales son las que actúan de una manera completamente irregular.

## Hipótesis

Dentro de la teoría clásica de los cascarones, al derivar su ecuación diferencial, se toma en consideración hipótesis, ya sea de leyes de la estática, o de consideraciones puramente geométricas; en consecuencia, las que a continuación se establecen, hacen posible una relación entre los fenómenos geométricos y estáticos, siendo estas:

### Hipótesis Relativas al Material y Forma del Cascarón.

- 1.- El material se supone perfectamente elástico
- 2.- El material sigue la ley de Hooke y tiene las mismas constantes elásticas (módulo de la elasticidad y módulo de Poisson), para cualquier estado de carga.
- 3.- El material es homogéneo o isótropo.
- 4.- El espesor del cascarón es constante y pequeño, en relación a sus dimensiones laterales.

Sin embargo, en la práctica ningún material es perfectamente elástico, homogéneo o isótropo, no obstante debido a la pequeña diferencia que existe entre éste y un material "ideal", pueden considerarse como reales dichas propiedades.

Hipótesis que se Refieren al Comportamiento del Cascarón, Debido a la Acción de la Carga.

- 1.- Las fibras verticales al plano medio del cascarón, antes de la de-

formación, permanecen perpendiculares a la superficie media después de la flexión.

- 2- La tensión normal perpendicular al plano medio del cascarón, es despreciable.
- 3- Los desplazamientos verticales son tan pequeños que se desprecian por ser del orden de un centésimo del claro.
- 4- El peso propio está incluido en la carga exterior

# Capítulo II

## Teoría de la Membrana

Para el análisis de los cascarones elásticos y delgados por el método de la analogía electrónica, es necesario introducir el estudio de la teoría de membrana, formulada por el investigador matemático Dischinger debido a que, de ella, se han desprendido una serie de estudios tales como las ecuaciones de Jenkins y Schorer, que serán tratadas en capítulos posteriores.

En consecuencia, la superficie estructural propuesta por su sencillez, en este capítulo, es una superficie cilíndrica, representada en un sistema coordinado tridimensional tal como se ve en la Fig 2.1, en la cual la generatriz es horizontal y paralela al eje X.

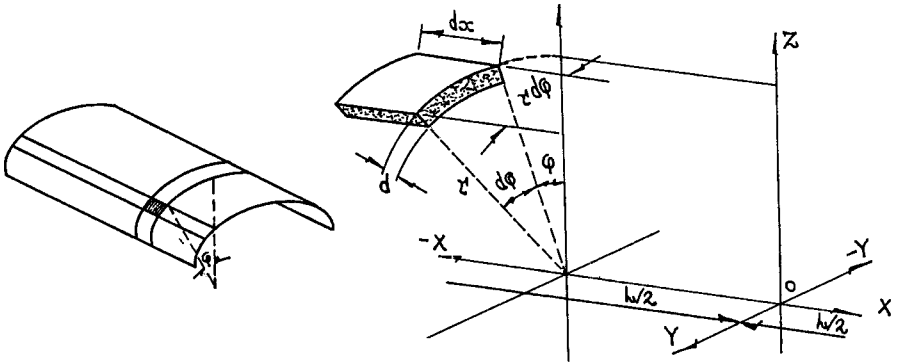


Fig 2.1

Un elemento diferencial viene separado del resto del cascarón, por dos generatrices próximas y dos secciones transversales perpendiculares al eje  $X$  y su posición está definida por la coordenada  $x$  y el ángulo  $\phi$ . Las fuerzas que actúan sobre los lados del elemento son las indicadas en la Fig. 2. siendo  $X, Y, Z$ , las componentes que actúan en la dirección longitudinal  $X$  en dirección tangente a la curva  $Y$  y en dirección radial  $Z$ .

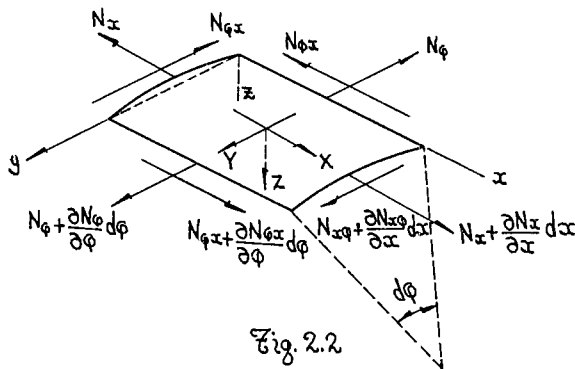


Fig. 2.2

Como podemos observar, en el cuerpo libre de la Fig. 2.2, los momentos de flexión y esfuerzos cortantes perpendiculares al plano medi del elemento diferencial, no son considerados.

Por otro lado, el estado de equilibrio entre las fuerzas internas y externas, da lugar al planteamiento de tres ecuaciones diferenciales, tomando  $\Sigma F_x$ ,  $\Sigma F_y$  y  $\Sigma F_z$  e igualando cada una a cero, tendremos:

Por suma de fuerzas en la dirección del eje  $X$

$$(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx)r d\phi + (N_{x\phi} + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial \phi} d\phi)dx - N_{x\phi} d\phi - N_x r d\phi + X r d\phi dx = 0$$

y, simplificando resulta:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} r d\phi dx + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial \phi} d\phi dx = -X r d\phi dx$$

dividiendo ambos miembros de la ecuación anterior, entre  $r d\phi dx$ , se tiene:

$$\frac{\partial N_x}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial \phi} = -X \quad (2.1)$$

Similarmente, las fuerzas en la dirección de la tangente, son normales a la sección transversal, en la dirección  $Y$ , resultando la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} r d\phi dx + \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} d\phi dx + Y r d\phi dx = 0$$

de la cual obtenemos:

$$\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} = -Y \quad (2.2)$$

Plantando el equilibrio en la dirección de  $Z$ , se tiene:

$$(N_\phi + \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} d\phi) dx \sin \frac{d\phi}{2} + N_\phi dx \sin \frac{d\phi}{2} + Z r d\phi dx = 0$$

Despreciando diferenciales de grado superior y haciendo  $\sin d\phi/2$  igual a  $d\phi/2$  por ser un ángulo muy pequeño, resulta:

$$2N_\phi dx \frac{d\phi}{2} + Z r d\phi dx = 0$$

quedándonos finalmente

$$N_\phi = -Z r \quad (2.3)$$

Evidentemente que, mediante las tres ecuaciones anteriores, se puede llegar en este caso particular, a la determinación de los esfuerzos en cualquier punto del cascarón, tomando en consideración las proyecciones de la carga uniformemente repartida en la dirección de los ejes, dados en el sistema coordenado tridimensional.

En consecuencia, igualando los valores de las componentes en función de la carga uniformemente repartida, se tendrá:

$$Z = g \cos \varphi \quad (2.4)$$

$$Y = g \sin \varphi \quad (2.5)$$

$$X = 0 \quad (2.6)$$

Substituyendo la ecuación (2.4) en la ecuación (2.3), resulta :

$$N_{\varphi} = -g r \cos \varphi \quad (2.7)$$

Substituyendo la ecuación (2.5) en la (2.2) se obtiene

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} = -\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} + g \sin \varphi\right) dx$$

Integrando esta ecuación tenemos :

$$N_{x\varphi} = -\int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} dx - \int g \sin \varphi dx$$

$$N_{x\varphi} = -\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} + g \sin \varphi\right) x + \xi(\varphi) \quad (2.8)$$

Derivando la ecuación (2.7) con respecto a la variable independiente  $\varphi$  y dividiendo ambos miembros entre  $r$ , encontramos :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} (g r \sin \varphi)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} = g \sin \varphi \quad (2.9)$$

Substituyendo la ecuación (2.9), en la (2.8) se tiene :

$$N_{x\varphi} = -(g \sin \varphi + g \sin \varphi) x + \xi(\varphi)$$

en donde  $\xi(\varphi)$  es una función indefinida del ángulo  $\varphi$ . Podemos obtener  $\xi(\varphi)$  tomando el origen de coordenadas en el centro del claro y suponiendo

do las mismas condiciones de borde en ambos extremos  $x = \pm l/2$  se puede deducir por razón de simetría que  $t_1(\varphi) = 0$ . Por lo tanto

$$N_{x\varphi} = -2g\alpha \sin\varphi \quad (2.10)$$

Se ve que esta solución no se anula en los bordes AB y CD de la Fig (2.3), como debía de ser para bordes libres. No obstante, en las aplicaciones estructurales los bordes se refuerzan con nervios longitudinales suficientemente robustos para resistir la tensión producida por el estiramiento cortante  $N_{x\varphi}$ . Sustituyendo la ecuación (2.10) en la ecuación (2.1) obtenemos:

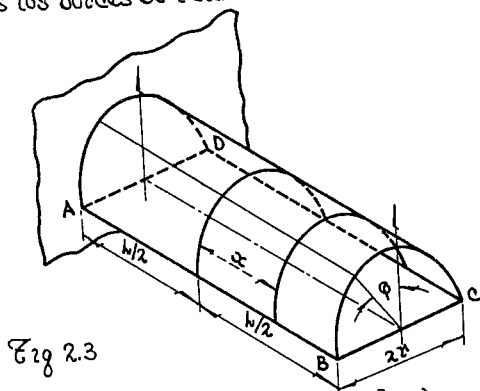


Fig 2.3

en donde  $t_2(\varphi)$  es una segunda función indefinida de  $\varphi$ . Si los extremos del cascañón están apoyados de modo que las reacciones actúan en los planos de las secciones transversales extremas, los estiramientos deben anularse en ellos pues que no hay rigidez a la flexión. Por lo tanto  $t_2(\varphi) = -gk^2 \cos\varphi / 4r$  y obtenemos

$$N_x = \frac{8\alpha^2}{r} \cos\varphi + t_2(\varphi)$$

en donde  $t_2(\varphi)$  es una segunda función indefinida de  $\varphi$ . Si los extremos del cascañón están apoyados de modo que las reacciones actúan en los planos de las secciones transversales extremas, los estiramientos deben anularse en ellos pues que no hay rigidez a la flexión. Por lo tanto  $t_2(\varphi) = -gk^2 \cos\varphi / 4r$  y obtenemos

$$N_x = -\frac{8 \cos\varphi}{4r} (k^2 - 4\alpha^2)$$

$$N_x = \frac{8k^2}{r} \left( \frac{\alpha^2}{k^2} - \frac{1}{4} \right) \cos\varphi$$



Teniendo  $N_x$  como máximo cuando  $\alpha = 0$  y  $\varphi = 0$ , siendo:

$$N_x = -\frac{8k^2}{4l}$$

## Capítulo III

### Tipo de Ecuación de Schorer

### Desarrollo para la Analogía Electrónica

Debido a que la teoría de la membrana sola se consideraba insuficiente como un método de análisis de esfuerzos en un cascarón, especialmente, en las zonas cercanas a los bordes, ha sido esta complementada por un sistema de esfuerzos correctivos. Este sistema, es encontrado por la solución de la ecuación diferencial de los cascarones, en la que el sistema estáticamente determinado de esfuerzos, es utilizado como un integrante.

La Fig 3.1, nos ilustra un elemento diferencial tomado de un cascarón, en el cual, se muestran las fuerzas, momentos y desplazamientos considerados por Schorer. Como podemos ver  $Y$  y  $Z$  son cargas de superficie generalmente tratadas con la teoría de la membrana. De esta forma, resolviendo y tomando momentos para este elemento obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$N_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \phi} \quad (3.1)$$

$$T_2 = -\frac{\partial N_2}{\partial \phi} - Z r \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \phi} + \frac{N_2}{r} + Y \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial S}{\partial \phi} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{T_1}{E \delta} \quad (3.5)$$

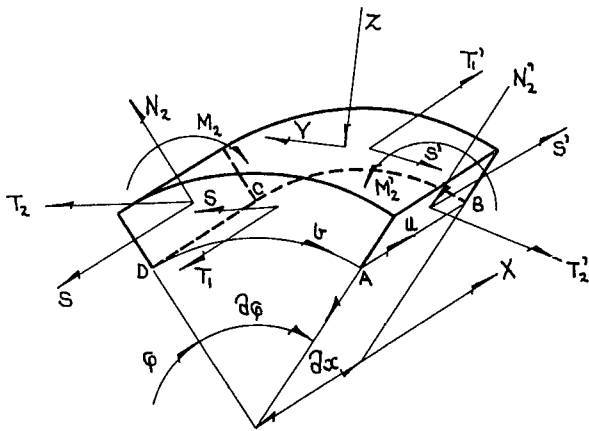
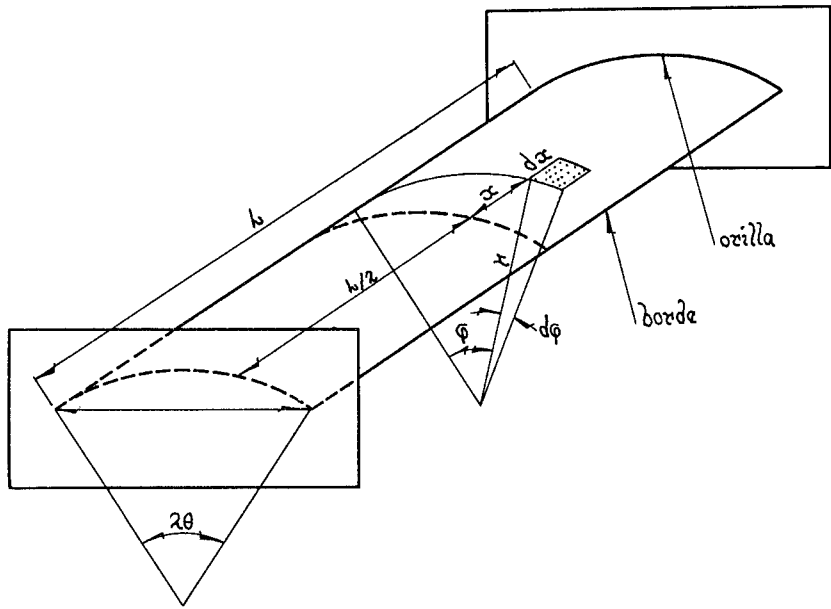


Fig 3.1

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi} + \omega \quad (3.6)$$

$$\omega = -\frac{r}{E d} \cdot T_2 + \frac{\partial v}{\partial \phi} \quad (3.7)$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (3.8)$$

$$M_2 = -\frac{E I}{r} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} \quad (3.9)$$

Sin embargo, Schorer hace las siguientes consideraciones:  
 $\frac{N_2}{r}$  resulta ser muy pequeña para casearones delgados.

$\omega$  es mucho más pequeña que el término  $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi}$

$\frac{r}{E d} \cdot T_2$  es mucho menor que  $\frac{\partial v}{\partial \phi}$

Por lo tanto, de las nueve ecuaciones anteriores, se obtienen ocho ecuaciones que contienen ocho variables independientes siendo estas.

$$N_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \phi} \quad (3.10)$$

$$T_2 = -\frac{\partial N_2}{\partial \phi} - Z r \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \phi} + \gamma \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{r E d} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \phi} \quad (3.14)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial \phi} \quad (3.15)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (3.16)$$

$$M_2 = -\frac{EI}{r} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} \quad (3.17)$$

Haciendo uso del método llamado análisis armónico o carga armónica, se pueden tomar todas las variables simétricas en  $x$ , o sea en el centro del claro, donde  $x=0$ . El valor en cualquier otro punto  $x$  está dado por la serie del coseno de Fourier

$$f(x) = f_0 \cos ax$$

siendo  $a = n\pi/l$

$n = 1, 3, 5$ , etc., donde solamente se considera el primer término correspondiente a  $n=1$ , ya que los demás términos armónicos son despreciables.

Si hacemos  $f(x) = f_0 \cos ax$ , donde  $f_0 = f(0)$  y derivando parcialmente esta ecuación obtenemos

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -a^2 f(x)$$

Como podemos observar, las variables que contienen una segunda derivada con respecto a  $x$ , pueden substituirse por  $-a^2$ , en lugar de  $\partial^2/\partial x^2$  dando lugar a que las Ecs. (3.10) a (3.17) pueden transformarse en:

$$N_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{dM_2}{d\phi} \quad (3.18)$$

$$T_2 = -\frac{dN_2}{d\phi} - Zr \quad (3.19)$$

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dT_2}{d\phi} + Y \quad (3.20)$$

$$T_1 = \frac{1}{a^2 r} \cdot \frac{d}{d\phi} \left( \frac{dS}{dx} \right) \quad (3.21)$$

$$U = \frac{1}{a^2 r E d} \cdot \frac{dT_1}{d\phi} \quad (3.22)$$

$$\omega = \frac{d\tau}{d\phi} \quad (3.23)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{r} \frac{d\omega}{d\phi} \quad (3.24)$$

$$M_2 = -\frac{E I}{r} \cdot \frac{d\psi_2}{d\phi} \quad (3.25)$$

Resolviendo las ecuaciones (3.18) a (3.25), como un sistema de ecuaciones simultáneas en las que eliminamos todas las variables, excepto una, digamos  $T_2$ , obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{d^8 T_2}{d\phi^8} + \frac{\alpha^4 r^6 d}{I} \cdot T_2 = \frac{d^7}{d\phi^7} \cdot Y r - \frac{\alpha^4 r^6 d}{I} \cdot Z r \quad (3.26)$$

Es evidente que, obteniendo la solución para  $T_2$ , se pueden determinar las otras variables y debido a que  $Y$  y  $Z$  son las fuerzas externas conocidas que actúan sobre el cascarón, la solución general de la ecuación fundamental (3.26), se hace en dos partes:

- 1- La función complementaria y
- 2- La integral particular.

La función complementaria se obtiene igualando a cero el segundo miembro de la ecuación fundamental, determinando así las fuerzas internas en el cascarón que son debidas a las sujeciones del borde, resultando de esta manera la expresión conocida como Ecuación de Seohora:

$$\frac{d^8 T_2}{d\phi^8} + \frac{\alpha^4 r^6 d}{I} \cdot T_2 = 0 \quad (3.27)$$

Sin embargo, esta ecuación ha sido severamente criticada por el número de consideraciones que envuelve y que ya fueron mencionadas al principio de este capítulo; así como también porque no consideró el momento flexionante longitudinal  $M_1$ , que es apreciable en cascarones cortos y con mayor razón, resulta ser en cascarones largos pero, debido a las experiencias, las aproxima-

ciones introducidas son justificables más allá del intervalo originalmente considerado.

## Desarrollo para la Analogía Electrónica

Como podemos ver la Ecuación de Schover es una derivada de octavo orden y de una naturaleza que la hace ideal para la solución en un computador analógico. Claramente se observa que esta derivada de orden superior, que puede ser integrada ocho veces, con el fin de determinar  $T_2$  significa a la vez que ocho integradores conectados en un circuito, resolverían la ecuación fundamental, sin embargo, existe una dificultad que es la determinación de las condiciones iniciales de cada uno de los integradores correspondientes a las constantes de integración. En consecuencia, nos es necesario determinar las condiciones iniciales a partir de las condiciones de borde del cascarón, necesitándose así ecuaciones adicionales.

Reordenando las ecuaciones (3.18) a (3.25) se obtiene una forma más conveniente y además un acercamiento más directo al problema:

$$M_2 = \int_0^{\phi} r N_2 d\phi + M_2 i \quad (3.28)$$

$$N_2 = \int_0^{\phi} (-T - r Z) d\phi + N_2 i \quad (3.29)$$

$$T_2 = \int_0^{\phi} \left( -r \frac{dS}{dx} + r Y \right) d\phi + T_2 i \quad (3.30)$$

$$\frac{dS}{dx} = \int_0^{\phi} (\alpha^2 r T_1) d\phi + \frac{dS}{dx} i \quad (3.31)$$

$$T_1 = \int_0^{\phi} (\alpha^2 r E d. v) d\phi + T_1 i \quad (3.32)$$

$$v = \int_0^{\phi} \omega d\phi + v i \quad (3.33)$$

$$\omega = \int_0^{\phi} r \psi_2 d\phi + \omega i \quad (3.34)$$

$$\psi_2 = \int_0^{\phi} \left( -\frac{r}{EI} \cdot M_2 \right) d\phi + \psi_{2i} \quad (3.35)$$

donde  $M_{2i}$ ,  $N_{2i}$ ,  $T_{2i}$ , etc., son las condiciones iniciales correspondientes a las constantes de integración cuando  $\phi = 0$ .

De esta manera cada una de las ecuaciones anteriores representa una integral sencilla que puede a su vez ser operada por un integrador bajo la condición de que la variable independiente  $\phi$  sea reemplazada por el tiempo.

En la Fig 3.2 podemos ver los circuitos apropiados de interconexión que representan las ocho ecuaciones, y que a su vez satisface la ecuación fundamental, permitiendo así la determinación de las condiciones iniciales de cada integrador.

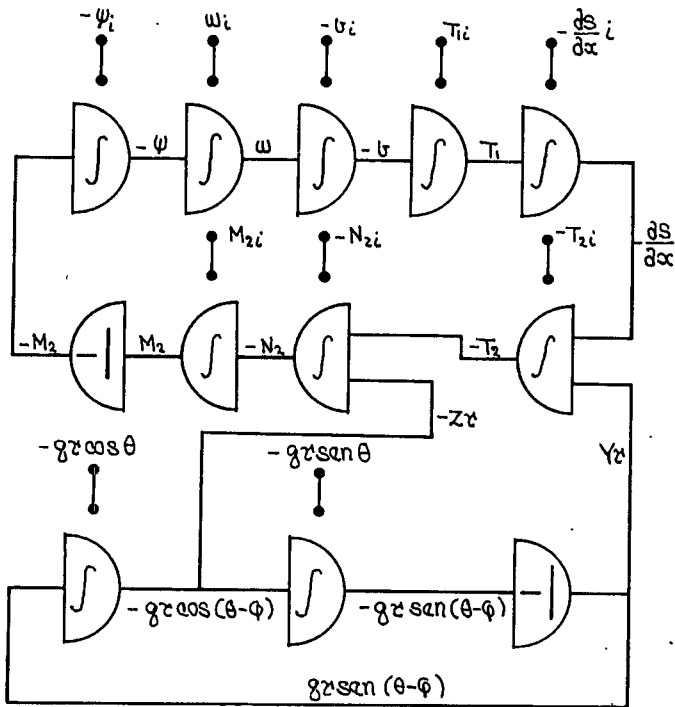


Fig 3.2



En los circuitos de interconexión podemos ver además un circuito auxiliar que suministra la solución de membrana, que puede ser tomada en este caso como dada por

$$Zr = q r \cos(\theta - \phi) \quad (3.36)$$

$$Yr = q r \sin(\theta - \phi) \quad (3.37)$$

Siendo  $q$  la carga por unidad de área de la superficie curva.

La solución de las Ecs. (3.36) y (3.37) la suministran en sí, dos integradores y un inversor de fase en los términos  $Zr$  y  $Yr$  que son necesarios para la solución de las Ecs. (3.29) y (3.30). Estos dos términos se encuentran apropiadamente conectados dentro del circuito principal del computador.

Cuando  $\phi$  es igual a cero podemos determinar las condiciones iniciales de los diez integradores a partir de las diez correspondientes variables.

Muchas veces encontramos que no todas las fuerzas, momentos y desplazamientos en el borde del cascarón son conocidos, por lo cual, nos vemos en la necesidad de encontrar algunas condiciones alternativas. Los únicos otros puntos en donde son conocidos los valores de las variables, están en la corona de un cascarón simétrico y en el borde lejano en el caso de un cascarón no simétrico.

El método de tanteos nos permite determinar de una manera muy eficiente, las condiciones finales haciendo uso de un computador que generalmente opera a una gran velocidad.

En sí, el desarrollo de este método consiste de tres pasos:

1° Se elige una escala apropiada de tiempo con el objeto de calcular la amplificación de cada integrador mostrado en la Fig. 3.2, haciendo únicamente como información necesaria:

a): Las dimensiones del cascarón

b): La carga superficial máxima propuesta.

2° Determinación de las condiciones iniciales que son deducidas de las consideraciones de equilibrio en el borde del cascarón. De las ocho variables que nosotros tenemos, normalmente tienen condiciones iniciales cuatro de ellas que pueden ser calculadas. Debido a esto deberán calcularse cuatro condiciones -

finales para complementar las cuatro condiciones iniciales restantes.

3º Cálculo real en el computador. En este paso se implica una serie de marchas del computador en las que tienen que ser ajustadas las condiciones iniciales desconocidas de forma que sean satisfechas las condiciones finales conocidas. La serie de marchas del computador depende de la dificultad del problema. Si el problema es un caso sencillo será más que suficiente cuatro o cinco marchas, mientras que en un caso difícil como resulta ser un caso de diente de sierra, pueden necesitarse hasta veinte. Después de que todas las condiciones son satisfechas, deben hacerse registros de todas las ocho variables dando la distribución de fuerzas, momentos y desplazamientos sobre el caso donde  $x = 0$ .

## Capítulo IV

### Tipo de Ecuación de Jenkins

#### Desarrollo para la Analogía Electrónica

La Fig 4.1 nos ilustra un elemento diferencial de un cascarón, en el cual se muestran las fuerzas, momentos y desplazamientos considerados por Jenkins. Las fuerzas  $Y$  y  $Z$  son cargas de superficie que normalmente se tratan solamente con la teoría de la membrana.

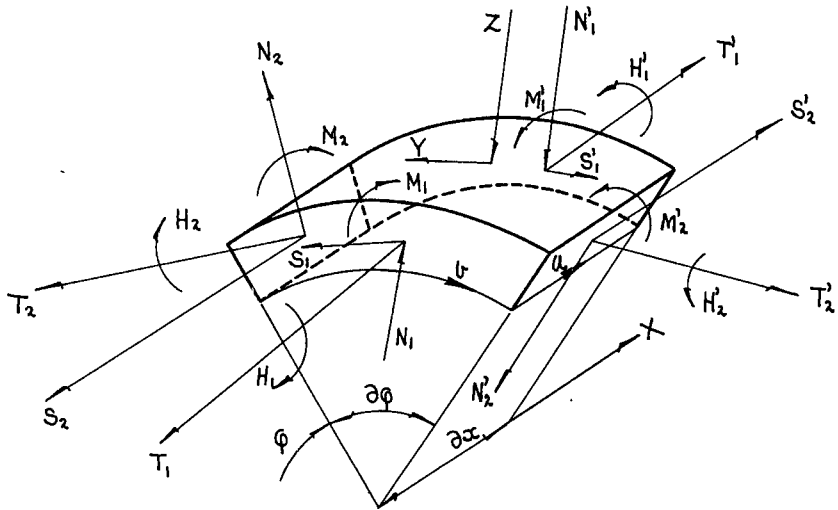


Fig 4.1

Las ecuaciones de equilibrio de los esfuerzos sobre este elemento de -  
 casación son como sigue.

Resolviendo y tomando momentos obtendremos las siguientes ecuaciones :

$$N_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \phi} + \frac{\partial H_1}{\partial x} \quad (4.1)$$

$$N_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial \phi} \quad (4.2)$$

$$T_2 = -\frac{\partial N_2}{\partial \phi} - r \cdot \frac{\partial N_1}{\partial x} - Z r \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \phi} + \frac{N_2}{r} + Y \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \phi} \quad (4.5)$$

$$S_1 - S_2 = -\frac{H_2}{r} \quad (4.6)$$

Expresando las deformaciones en términos de los desplazamientos y considerando solamente los términos principales, se deducen las siguientes ecuaciones :

$$T_1 = E d \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.7)$$

$$T_2 = \frac{E d}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} - w \right) \quad (4.8)$$

$$S_1 = \frac{E d}{2r} \left( \frac{\partial u}{\partial \phi} + r \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.9)$$

$$S_2 = \frac{E d}{2r} \left( \frac{\partial u}{\partial \phi} + r \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.10)$$

$$M_1 = -E I \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.11)$$

$$M_2 = -\frac{E I}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \quad (4.12)$$

$$H_1 = -\frac{EI}{r} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \phi} \quad (4.13)$$

$$H_2 = -\frac{EI}{r} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \phi \partial x} \quad (4.14)$$

$$\psi_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (4.15)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \quad (4.16)$$

Al igual que Schorer, Jenkins hace las siguientes consideraciones  $\frac{N_2}{r}$  resulta ser muy pequeño para consideraciones delgadas

$$S_1 = S_2 = S$$

$$H_1 = H_2 = H$$

Bajo estas consideraciones podemos obtener ocho ecuaciones con ocho variables independientes tal como se ordena a continuación:

$$N_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \phi} - \frac{EI}{r} \cdot \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial \phi} \quad (4.17)$$

$$T_2 = -\frac{\partial N_2}{\partial \phi} + r EI \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{EI}{r} \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial \phi^2 \partial x^2} - Z r \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \phi} + Y \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = -\frac{1}{r EI} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \phi} + \frac{2}{EI} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \quad (4.21)$$

$$\omega = \frac{\partial T_2}{\partial \phi} - \frac{r}{EI} \cdot T_2 \quad (4.22)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \quad (4.23)$$

$$M_2 = -\frac{EI}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \phi^2} \quad (4.24)$$

Haciendo uso del método llamado análisis armónico o carga armónica, todas las variables simétricas en  $X$  pueden ser tomadas con sus valores en el centro ( $X=0$ ). Para obtener el valor en cualquier otro punto  $X$  hacemos uso de la serie del coseno de Fourier, donde:

$$f(x) = \bar{f} \cos ax$$

Siendo  $a = n\pi/h$ , teniendo  $n$  como valores 1, 3, 5, etc. Sin embargo se ha encontrado que es más que suficiente considerar solamente  $n=1$  debido a que los demás términos armónicos son despreciables.

De la expresión primitiva  $f(x) = \bar{f} \cos ax$  obtenemos.

$$f(x) = \bar{f}_0 \cos ax', \text{ siendo } \bar{f}_0 = \bar{f}(0)$$

entonces 
$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -a^2 f(x)$$

$$\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4} = a^4 f(x)$$

Substituyendo  $\partial^2/\partial x^2$  y  $\partial^4/\partial x^4$  respectivamente por  $-a^2$  y  $a^4$ , nos permite escribir las ecuaciones (4.17) a (4.24) de la siguiente manera:

$$N_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \phi} + a^2 EI \cdot \psi_2 \quad (4.25)$$

$$T_2 = -\frac{\partial N_2}{\partial \phi} + a^4 EI \cdot \omega + a^2 r M_2 - Zr \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \phi} + Y \quad (4.27)$$

$$T_1 = \frac{1}{a^2 r} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (4.28)$$

$$U = \frac{1}{a^2 r EI} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \phi} - \frac{2}{a^2 EI} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \quad (4.29)$$

$$\omega = \frac{d\psi}{d\phi} - \frac{r}{\epsilon I} \cdot T_2 \quad (4.30)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\omega}{d\phi} \quad (4.31)$$

$$M_2 = -\frac{\epsilon I}{r} \cdot \frac{d\psi_2}{d\phi} \quad (4.32)$$

Eliminando todas las variables, excepto una, digamos  $T_2$ , en las Ecs. (4.25) a (4.32), resulta la ecuación fundamental en la que  $Y$  y  $Z$  toman la integral particular o solución de membrana.

$$\left(\frac{d^2}{d\phi^2} - \alpha^2 r^2\right)^4 T_2 + \frac{\alpha^4 r^6}{I} \cdot T_2 = \frac{\alpha^4 r^4}{I} Z - \alpha^4 r \left(\frac{d^2}{d\phi^2} - \alpha^2 r^2\right) \left(\frac{d^2}{d\phi^2} + r^2\right)^2 \frac{dY}{d\phi} \quad (4.33)$$

Igualando a cero el segundo miembro, obtenemos la ecuación de Jenkins:

$$\left(\frac{d^2}{d\phi} - \alpha^2 r^2\right)^4 \cdot T_2 + \frac{\alpha^4 r^6}{I} \cdot T_2 = 0 \quad (4.34)$$

Esta ecuación forma la base de un método numérico de solución muy laborioso el cual se omite.

## Desarrollo para la Analogía Electrónica

Al igual que la ecuación de Schorer, la de Jenkins resulta inadecuada para la solución en un computador electrónico analógico. Sin embargo recordando las ecuaciones (4.25) a (4.32) obtenemos un grupo más apropiado de ecuaciones:

$$M_2 = \int_0^{\phi} (r^2 N_2 - \alpha^2 \epsilon I \cdot \psi_2) d\phi + M_{2i} \quad (4.35)$$

$$N_2 = \int_0^{\phi} (-T_2 + \alpha^4 r \epsilon I \cdot \omega + \alpha^2 r \cdot M_2 - Z r) d\phi + N_{2i} \quad (4.36)$$

$$T_2 = \int_0^{\phi} \left(-r \frac{dS}{d\phi} + rY\right) d\phi + T_{2i} \quad (4.37)$$

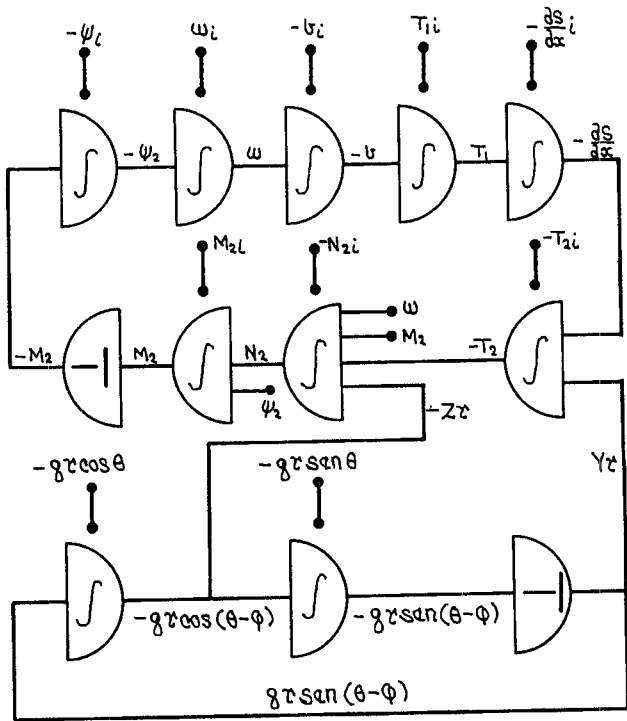


Fig. 4.2



$$\frac{dS}{dx} = \int_0^{\phi} (\alpha^2 r \cdot T_1) d\phi + \frac{dS}{dx} i \quad (4.38)$$

$$T_1 = \int_0^{\phi} (\alpha^2 r \cdot E \cdot v + 2r \cdot \frac{dS}{dx}) d\phi + T_{1i} \quad (4.39)$$

$$v = \int_0^{\phi} (\omega + \frac{r}{EI} \cdot T_2) d\phi + v_i \quad (4.40)$$

$$\omega = \int_0^{\phi} (r \cdot \psi_2) d\phi + \omega_i \quad (4.41)$$

$$\psi_2 = \int_0^{\phi} (-\frac{r}{EI} \cdot M_2) d\phi + \psi_{2i} \quad (4.42)$$

siendo  $M_{2i}, N_{2i}, T_{2i}$ , etc., las condiciones iniciales correspondientes a las constantes de integración cuando  $\phi = 0$ .

Comparando las ecuaciones (4.35) a (4.42) con las (3.28) a (3.35) vemos que se presentan adicionalmente cinco términos. En consecuencia, el circuito del computador mostrado en la Fig. 3.2, representará estas ecuaciones siempre que se hagan las interconexiones para estos términos adicionales. La Fig. 4.2 nos representa las modificaciones sencillas en el circuito del computador para la ecuación de Jenkins. Así pues para la solución de las ecuaciones del caso en cuestión, los pasos adicionales son exactamente los mismos que los mencionados previamente para el tipo de ecuación de Schreyer.

## Capítulo V

### Condiciones de Borda

Las condiciones iniciales de algunas de las variables en los extremos del computador de las Figs. 3.2 y 4.2, son determinadas por las ecuaciones de las fuerzas, momentos y desplazamientos en el borde del cascarón. Sin embargo para la determinación de las variables restantes es necesario encontrar una ecuación condición final a fin de satisfacer completamente las ecuaciones del cascarón. Estas condiciones-ecuaciones iniciales y finales serán ahora determinadas para diferentes casos de los tres tipos básicos de cascarones.

a).— Cascarón interno sin viga de unión

En la Fig. 5.1 se muestra un cascarón como un número infinito de cascarones internos en que las fuerzas, momentos y desplazamientos son equilibrados por la acción de los cascarones adyacentes

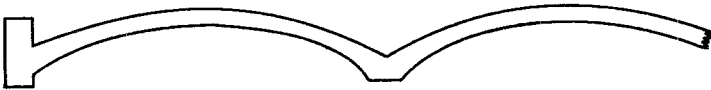


Fig 5.1

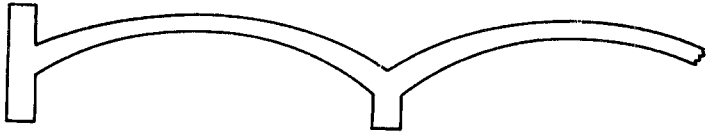


Fig 5.2

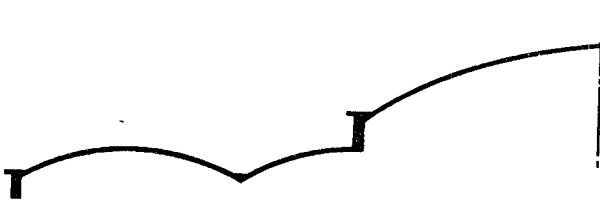


Fig 5.3

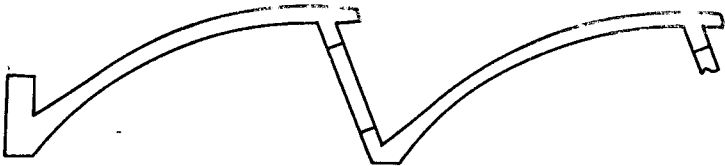


Fig 5.4

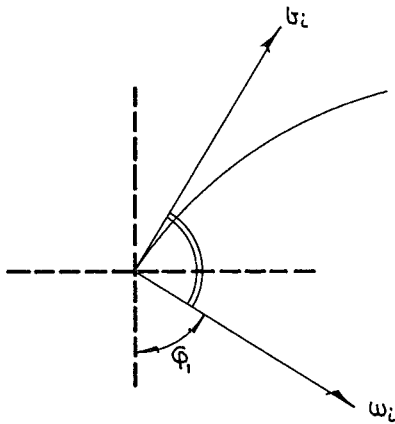


Fig 5.5

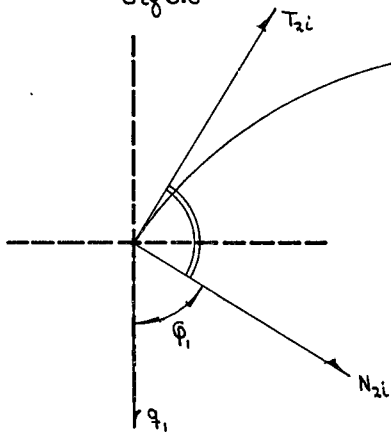


Fig 5.6

ya que los momentos flexionantes se equilibran en el borde

Por simetría en la corona del cascarón se determinan las siguientes expresiones

$$N_{2i} = 0 \quad (5.5)$$

$$\frac{dS}{dx} t = 0 \quad (5.6)$$

De la Fig. 5.6 se obtiene:

$$T_{2i} \operatorname{sen} \phi_1 - N_{2i} \operatorname{cos} \phi_1 - q_1 = 0$$

$$T_{2i} \operatorname{sen} \phi_1 = N_{2i} \operatorname{cos} \phi_1 + q_1 \quad (5.1)$$

y como las fuerzas horizontales se equilibran en el borde, se tiene que:

$$\frac{dS}{dx} i = 0 \quad (5.2)$$

siendo el estirazo cortante una fuerza antisimétrica de tal manera que:

$$v_i \operatorname{cos} \phi_1 + w_i \operatorname{sen} \phi_1 = 0$$

$$v_i = -\frac{w_i \operatorname{sen} \phi_1}{\operatorname{cos} \phi_1} = -w_i \tan \phi_1$$

$$v_i = -w_i \tan \phi_1 \quad (5.3)$$

Debido a que no puede haber desplazamiento horizontal del borde obtenemos:

$$\psi_{2i} = 0 \quad (5.4)$$

$$v_i = 0 \quad (5.7)$$

$$\psi_{2i} = 0 \quad (5.8)$$

De esta manera obtenemos las ocho condiciones requeridas para la solución en el computador de las ecuaciones de Schorer y Jenkins para el caso propuesto (casearón interno sin viga de unión).

b).— Casearón Externo. Figs 5.1 y 5.2

Para el diseño de los casearones externos, estos se consideran como simétricos simplificandonos así la aplicación de las ecuaciones (5.5) a (5.8) para las condiciones finales, pero para la determinación de las condiciones iniciales las ecuaciones serán más complicadas debido ahora a que dependen de la acción de las fuerzas del borde sobre la viga de borde del casearón.

Las relaciones entre estas fuerzas y los desplazamientos que producen, son deducidas de la siguiente manera:

De la Fig 5.7 tenemos las fuerzas  $N_{2i}$ ,  $T_{2i}$ ,  $T_{1i}$ ,  $\frac{ds}{dx}i$  y  $q_2$  las cuales actúan sobre la viga de borde dando lugar a que esta parte sufra los desplazamientos  $v_i$ ,  $w_i$  y  $u_i$ . La primera de las tres fuerzas puede ser resuelta en las componentes vertical, horizontal y longitudinal,  $V$ ,  $H$  y  $T_c$ , en tanto que los desplazamientos serán resueltos en las componentes  $\delta_A$  y  $\delta_B$  de la Fig. 5.8 obteniéndose así las siguientes expresiones:

$$V = T_{2i} \operatorname{sen} \phi_i - N_{2i} \cos \phi_i - q_2 \quad (5.9)$$

$$H = T_{2i} \cos \phi_i + N_{2i} \operatorname{sen} \phi_i \quad (5.10)$$

$$\delta_A = v_i \operatorname{sen} \phi_i - w_i \cos \phi_i \quad (5.11)$$

$$\delta_B = v_i \cos \phi_i + w_i \operatorname{sen} \phi_i \quad (5.12)$$

$$T_c = \frac{T_{1i}}{d} \quad (5.13)$$

El efecto que producen las fuerzas del borde del cascarón sobre la viga de borde puede ser determinado considerando las cargas unitarias de  $V$ ,  $H$  y  $\frac{dS}{dx}$ .

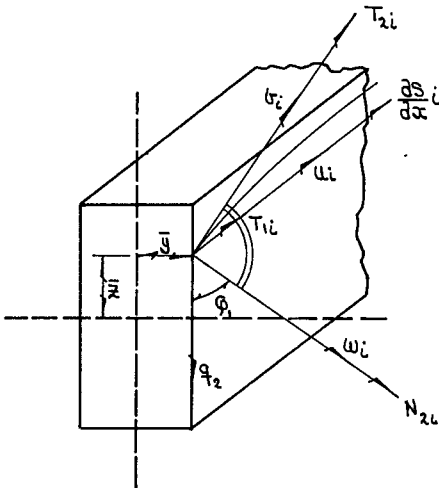


Fig 5.7

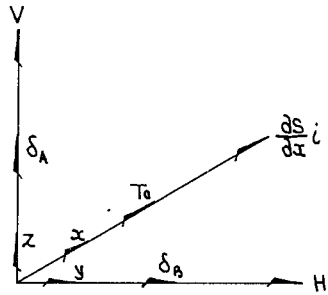


Fig 5.8

Si consideramos que la carga vertical unitaria  $V = \cos \frac{\pi x}{k}$  actúa — hacia arriba, tenemos:

$$M = \iint (-\cos \frac{\pi x}{k}) dz dx = \int (\sin \frac{\pi x}{k} \cdot \frac{k}{x} + C_1) dx$$

$$M = \frac{k}{\pi} \cos \frac{\pi x}{k} \cdot \frac{k}{\pi} + C_1 x + C_2$$

$$M = \frac{k^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{k} + C_1 x + C_2$$

Siendo  $C_1$  y  $C_2$  las constantes de integración que serán determinadas bajo los límites de  $x$ , de tal manera que cuando:

$$x = \frac{h}{2}, M=0 ; \text{ y cuando } x = -\frac{h}{2}, M=0$$

por consiguiente

$$C_1 = C_2 = 0$$

en tanto que

$$M = \frac{h^3}{\pi^2} \cdot \cos \frac{\pi x}{h}$$

$$\delta = \iint \left( -\frac{M}{EI_y} \right) dx dx$$

$$\delta = \iint \left( -\frac{\frac{h^3}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{h}}{EI} \right) dx dx = \iint \left( -\frac{h^3 \cos \pi x / h}{\pi^2 EI} \right) dx dx = \int \left( -\frac{h^3}{\pi^2 EI} \cdot \sin \frac{\pi x}{h} + C_3 \right) dx$$

$$\delta = \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{h^4}{\pi^4} \cdot \cos \frac{\pi x}{h} + C_3 x + C_4$$

De la misma manera las constantes  $C_3$  y  $C_4$  son determinadas a partir de los límites de  $x$ , por lo tanto:

Cuando  $x = \frac{h}{2}$ ,  $\delta = 0$ ; y cuando  $x = -\frac{h}{2}$ ,  $\delta = 0$  entonces:

$$C_3 = C_4 = 0$$

por lo tanto

$$\delta = \frac{h^4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{EI_y} \cdot \cos \frac{\pi x}{h}$$

Para  $x=0$

$$\delta_{AV} = \frac{h^4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{EI_y} \quad (5.14)$$

También  $V$  produce un esfuerzo en el punto  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$  y  $x = 0$ .  
Sea éste esfuerzo  $T_{cv}$ , donde

$$T_{cv} = \frac{M}{I_y} \cdot \bar{x} \quad \text{tensión.}$$

Substituyendo  $M$  por  $\frac{k^3}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{k}$  tenemos:

$$T_{ev} = \frac{k^3}{\pi^2} \cdot \frac{\bar{z}}{I_y} \cos \frac{\pi x}{k}$$

Para  $x=0$

$$T_{ev} = \frac{k^3}{\pi^2} \cdot \frac{\bar{z}}{I_y} \quad (5.15)$$

Si consideramos la fuerza horizontal unitaria como  $H = \cos \frac{\pi x}{k}$ , similarmente obtenemos:

$$\delta_{BH} = \frac{k^4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{EI_x} \quad (5.16)$$

$$T_{CH} = \frac{k^2}{\pi^2} \cdot \frac{\bar{y}}{I_x} \quad (5.17)$$

Por lo que respecta a la fuerza cortante unitaria, podemos considerarla como  $\frac{dS}{dx} = \cos \frac{\pi x}{k}$ , la cual nos produce una tensión  $T$  a lo largo del borde del cascarón.

Si  
por lo tanto

$$\delta T = -S \delta x$$

$$T = \int (-S) dx$$

$$T = - \iint \frac{dS}{dx} \cdot dx dx$$

Substituyendo  $\frac{dS}{dx}$  tenemos

$$T = - \iint \cos \frac{\pi x}{k} \cdot dx dx$$

Resolviendo la doble integral

$$T = \frac{k^2}{\pi^2} \cdot \cos \frac{\pi x}{k} + C_5 x + C_6$$

Las constantes de integración  $C_5$  y  $C_6$  podemos determinarlas haciendo las siguientes consideraciones:



Cuando  $x = \frac{h}{2}$ ,  $T = 0$ ; y cuando  $x = -\frac{h}{2}$ ,  $T = 0$   
 por lo tanto

$$C_s = C_c = 0$$

en consecuencia

$$T = \frac{k^2}{\pi^2} \cdot \cos \frac{\pi x}{h}$$

La deflexión hacia arriba debida a la unitaria  $\frac{dS}{dx}$ ,

$$= \iint \left( -\frac{T \bar{z}}{E I_y} \right) dx dx$$

$$= - \iint \frac{k^2}{\pi^4} \cdot \frac{\bar{z}}{E I_y} \cdot \cos \frac{\pi x}{h} \cdot dx dx$$

$$= \frac{k^4}{\pi^4} \cdot \frac{\bar{z}}{E I_y} \cdot \cos \frac{\pi x}{h}$$

Para  $x = 0$

$$\delta_{As} = \frac{k^4}{\pi^4} \cdot \frac{\bar{z}}{E I_y}$$

Análogamente

$$\delta_{Bs} = \frac{k^4}{\pi^4} \cdot \frac{\bar{y}}{E I_x}$$

Debido al esfuerzo unitario  $dS/dx$  se produce un esfuerzo longitudinal en el punto ( $z = \bar{z}$ ,  $y = \bar{y}$ ,  $x = 0$ ), el cual resulta ser

$$T_{cs} = \frac{T}{A} + \frac{T \bar{z}^2}{I_y} + \frac{T \bar{y}^2}{I_x}$$

$$T_{cs} = T \left( \frac{1}{A} + \frac{\bar{y}^2}{I_x} + \frac{\bar{z}^2}{I_y} \right)$$

Como  $T = (k^2/\pi^2) \cos \pi x/h$  obtenamos que  $T = k^2/\pi^2$ , cuando  
 En consecuencia

$$T_{cs} = \frac{k^2}{\pi^2} \left( \frac{1}{A} + \frac{\bar{y}^2}{I_x} + \frac{\bar{z}^2}{I_y} \right)$$

Por definición

$$\delta_A = V\delta_{AV} + H\delta_{AH} + \frac{dS}{d\alpha} i \delta_{AS} \quad (5.21)$$

$$\delta_B = V\delta_{BV} + H\delta_{BH} + \frac{dS}{d\alpha} i \delta_{BS} \quad (5.22)$$

$$T_c = VT_{cV} + HT_{cH} + \frac{dS}{d\alpha} i T_{cS} \quad (5.23)$$

Por el teorema recíproco de Maxwell :

$$\delta_{AH} = \delta_{BV} = 0$$

Sustituyendo las Ecs.(5.14) a (5.20) en las Ecs.(5.21) a (5.23)

$$\delta_A = \frac{b^4}{\pi^4 E I_3} \left( V + \frac{dS}{d\alpha} i \cdot \bar{x} \right) \quad (5.24)$$

$$\delta_B = \frac{b^4}{\pi^4 E I_2} \left( H + \frac{dS}{d\alpha} i \cdot \bar{y} \right) \quad (5.25)$$

$$T_c = \frac{b^4}{\pi^2} \left[ \frac{V\bar{x}}{I_3} + \frac{H\bar{y}}{I_2} + \frac{dS}{d\alpha} i \left( \frac{1}{A} + \frac{\bar{x}^2}{I_3} + \frac{\bar{y}^2}{I_2} \right) \right] \quad (5.26)$$

$$V = \frac{\pi^4 E I_3}{b^4} \cdot \delta_A - \bar{x} \cdot \frac{dS}{d\alpha} i \quad (5.27)$$

$$H = \frac{\pi^4 E I_2}{b^4} \cdot \delta_B - \bar{y} \cdot \frac{dS}{d\alpha} i \quad (5.28)$$

Sustituyendo las Ecs. (5.9) a (5.12) en las Ecs. (5.26) a (5.28)

$$T_c = \frac{b^4}{\pi^2} \left[ T_{2i} \left( \frac{\bar{x} \sin \varphi_1}{I_3} + \frac{\bar{y} \cos \varphi_1}{I_2} \right) + N_{2i} \left( \frac{\bar{y} \sin \varphi_1}{I_2} - \frac{\bar{x} \cos \varphi_1}{I_3} \right) + \frac{dS}{d\alpha} i \left( \frac{1}{A} + \frac{\bar{x}^2}{I_3} + \frac{\bar{y}^2}{I_2} \right) - \frac{q_{2i} \bar{x}}{I_3} \right] \quad (5.29)$$

$$T_{2i} \cos \varphi_1 - N_{2i} \sin \varphi_1 - q_{2i} = \frac{\pi^4 E I_3}{b^4} (v_i \sin \varphi_1 - w_i \cos \varphi_1) - \bar{x} \frac{dS}{d\alpha} i \quad (5.30)$$

$$T_{2i} \sin \varphi_1 - N_{2i} \cos \varphi_1 = \frac{\pi^4 E I_2}{b^4} (v_i \cos \varphi_1 + w_i \sin \varphi_1) - \bar{y} \frac{dS}{d\alpha} i \quad (5.31)$$

De las Ecs (5.13) y (5.29)

$$T_{1i} = \frac{h^3 d}{12} \left[ T_{2i} \left( \frac{\bar{x} \sin \phi_1}{I_3} + \frac{\bar{y} \cos \phi_1}{I_2} \right) + N_{2i} \left( \frac{\bar{y} \sin \phi_1}{I_2} - \frac{\bar{x} \cos \phi_1}{I_3} \right) + \frac{dS}{dx} i \left( \frac{1}{A} + \frac{\bar{x}^2}{I_3} + \frac{\bar{y}^2}{I_2} \right) - \frac{q_2 \bar{x}}{I_3} \right] \quad (5.32)$$

Si multiplicamos por  $\sin \phi_1$  la ecuación (5.30) y por  $\cos \phi_1$  la (5.31) y sumamos obtenemos

$$T_{2i} = \frac{\Pi^4 E}{I^4} \left[ v_i (I_3 \sin^2 \phi_1 + I_2 \cos^2 \phi_1) + w_i \sin \phi_1 \cos \phi_1 (I_2 - I_3) \right] - \frac{dS}{dx} i (\bar{x} \sin \phi_1 + \bar{y} \cos \phi_1) + q_2 \sin \phi_1 \quad (5.33)$$

Si multiplicamos por  $-\cos \phi_1$  la ecuación (5.30) y por  $\sin \phi_1$  la (5.31) y sumamos obtenemos

$$N_{2i} = \frac{\Pi^4 E}{I^4} \left[ v_i \sin \phi_1 \cos \phi_1 (I_2 - I_3) + w_i (I_2 \sin^2 \phi_1 + I_3 \cos^2 \phi_1) \right] + \frac{dS}{dx} i (\bar{x} \cos \phi_1 - \bar{y} \sin \phi_1) - q_2 \cos \phi_1 \quad (5.34)$$

Y así de esta forma, obtenemos las Ecs. (5.32), (5.33) y (5.34) que nos proporcionan las tres condiciones iniciales para el problema de la viga de borde. Además podemos agregar una condición inicial de la consideración de que la viga de borde es torsionalmente rígida, eso es:

$$\psi_{2i} = 0 \quad (5.35)$$

Una vez establecidas las cuatro condiciones iniciales así como también las cuatro condiciones finales, se pueden resolver las ecuaciones del cascarón con circuitos de computador apropiados para este caso particular.

c).— Cascarón interno con viga de unión. Figs 5.2 y 5.3

Un cascarón interno con viga de unión es como se ilustra en la Fig. 5.2 y como podemos observar para su diseño podemos hacer una combinación del cascarón interno sin viga de unión con el cascarón externo, ya diseñados an-

teriormente. Este casoación en estudio puede considerarse por su sencillez como una serie infinita de casoaciones internas, en consecuencia las ecuaciones de condición inicial (5.3) y (5.4) y las de condición final (5.5) a (5.8) se aplican en este caso por las mismas razones dadas para el casoación interno sin viga de unión. Como nos faltan dos condiciones iniciales, podemos determinarlas de la siguiente manera:

Debido a que no hay deflexión horizontal de las Ecs (5.21) a (5.23) obtenemos que

$$\delta_{AH} = \delta_B = \delta_{BV} = \delta_{BH} = T_{cH} = 0$$

En consecuencia

$$\delta_A = V \delta_{AV} + \frac{dS}{dx} i \delta_{AS} \quad (5.36)$$

y

$$T_c = V T_{cV} + \frac{dS}{dx} i T_{cS} \quad (5.37)$$

Substituyendo las Ecs. (5.11) y (5.18) en la (5.36)

$$b_{zi} \operatorname{sen} \varphi - w_{zi} \operatorname{cos} \varphi = \frac{k^4}{\pi^4 E I_y} \left( V + \frac{dS}{dx} i \bar{z} \right) \quad (5.38)$$

Substituyendo las Ecs (5.3) y (5.9) en la (5.38) :

$$b_{zi} = \frac{k^4 \operatorname{sen} \varphi}{\pi^4 E I_y} \left( T_{zi} \operatorname{sen} \varphi - w_{zi} \operatorname{cos} \varphi + \frac{dS}{dx} i \bar{z} - q_2 \right) \quad (5.39)$$

Substituyendo en la Ec. (5.37), las Ecs. (5.15) y (5.20) :

$$T_c = \frac{k^2}{\pi^2} \left[ \frac{\bar{z}}{I_y} V + \left( \frac{1}{A} + \frac{\bar{y}^2}{I_x} + \frac{\bar{z}^2}{I_y} \right) \frac{dS}{dx} i \right]. \quad (5.40)$$

Por ultimo de las Ecs. (5.9), (5.13) y (5.40) obtenemos :

$$T_{zi} = \frac{k^2 d}{\pi^2} \left[ (T_{zi} \operatorname{sen} \varphi - w_{zi} \operatorname{cos} \varphi - q_2) \frac{\bar{z}}{I_y} + \left( \frac{1}{A} + \frac{\bar{y}^2}{I_x} + \frac{\bar{z}^2}{I_y} \right) \frac{dS}{dx} i \right] \quad (5.41)$$

De esta manera las Ecs. (5.39) y (5.41), nos proporcionan las dos condiciones iniciales necesarias para el análisis de este tipo de cascación.

d) Cascación interna diente de sierra.

Un cascación diente de sierra es como el que se ilustra en la Fig. 5.4. En las Figs 5.9 y 5.10 se muestran las fuerzas y desplazamientos que existen en la parte interior y superior respectivamente.

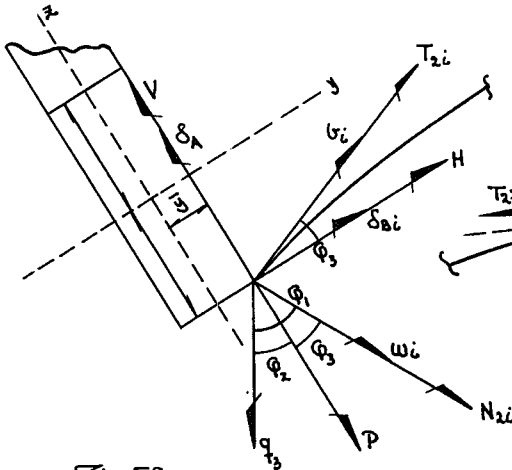


Fig. 5.9

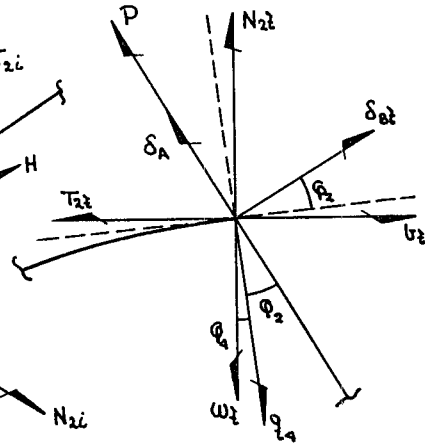


Fig. 5.10

De acuerdo con la naturaleza asimétrica de este cascación, el borde inferior será considerado para las condiciones iniciales y el borde superior para las finales. Como podemos ver la fuerza transmitida  $P$  y las componentes  $V$  y  $H$ , se encuentran actuando en la dirección de los planos principales de la viga inclinada.

Los desplazamientos  $u_i$  y  $w_i$  son producidos por la acción de las fuerzas  $T_{2i}$ ,  $N_{2i}$ ,  $P$  y  $q_3$ . (En este caso las fuerzas y desplazamientos longitudinales  $T_{1i}$ ,  $ds_i/dx$  y  $u_i$  no se encuentran en nuestras figuras, pero son similares a los mostrados en la Fig 5.7. Estas fuerzas pueden ser resueltas en las componentes  $V$ ,  $H$  y  $ds_i/dx$  en tanto que los desplazamientos se resuelven a partir

de las componentes  $\delta_A$  y  $\delta_B$ , obteniendo así las siguientes expresiones.

$$V = T_{2i} \operatorname{sen} \varphi_3 - N_{2i} \cos \varphi_3 - q_3 \cos \varphi_2 - P \quad (5.42)$$

$$H = T_{2i} \cos \varphi_3 + N_{2i} \operatorname{sen} \varphi_3 - q_3 \operatorname{sen} \varphi_2 \quad (5.43)$$

$$\delta_A = v_i \operatorname{sen} \varphi_3 - w_i \cos \varphi_3 \quad (5.44)$$

$$\delta_B = v_i \cos \varphi_3 + w_i \operatorname{sen} \varphi_3 \quad (5.45)$$

$$T_c = \frac{T_{2i}}{d} \text{ como en la Ec. (5.13)}$$

En el caso anticipado de un cascarón externo, las ecuaciones anteriores son similares con la única variante del término adicional  $P$  y la dirección en que actúa  $q$ . Sin embargo introduciendo modificaciones apropiadas a las ecuaciones (5.32), (5.33) y (5.34), obtenemos:

$$\begin{aligned} T_{2i} = & \frac{k^2 d}{\pi^2} \left[ T_{2i} \left( \frac{\bar{x} \operatorname{sen} \varphi_3}{I_3} + \frac{\bar{y} \cos \varphi_3}{I_2} \right) + N_{2i} \left( \frac{\bar{y} \operatorname{sen} \varphi_3}{I_2} - \frac{\bar{x} \cos \varphi_3}{I_3} \right) + \frac{dS}{dx} i \left( \frac{1}{A} + \frac{\bar{x}^2}{I_3} + \frac{\bar{y}^2}{I_2} \right) \right. \\ & \left. - q_3 \left( \frac{\bar{x}}{I_3} \cos \varphi_2 + \frac{\bar{y}}{I_2} \operatorname{sen} \varphi_2 \right) - \frac{\bar{x}}{I_3} p \right] \quad (5.46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{2i} = & \frac{\pi^4 E}{k^4} v_i \left[ (I_3 \operatorname{sen}^2 \varphi_3 + I_2 \cos^2 \varphi_3) + w_i \operatorname{sen} \varphi_3 \cos \varphi_3 (I_2 - I_3) \right] - \frac{dS}{dx} i (\bar{x} \operatorname{sen} \varphi_3 + \\ & + \bar{y} \cos \varphi_3) + q_3 (\operatorname{sen} \varphi_3 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 \operatorname{sen} \varphi_2) + P \operatorname{sen} \varphi_3 \quad (5.47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{2i} = & \frac{\pi^4 E}{k^4} \left[ v_i \operatorname{sen} \varphi_3 \cos \varphi_3 (I_2 - I_3) + w_i (I_2 \operatorname{sen}^2 \varphi_3 + I_3 \cos^2 \varphi_3) \right] + \\ & + \frac{dS}{dx} i (\bar{x} \cos \varphi_3 - \bar{y} \operatorname{sen} \varphi_3) - q_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) - P \cos \varphi_3 \quad (5.48) \end{aligned}$$

Debido a que la viga inclinada se considera torsionalmente rígida, obtenemos una ecuación adicional dentro de nuestras condiciones iniciales.

$$\psi_i = 0 \quad (5.49)$$

Por consiguiente las Ecs. (5.46) a (5.49) nos representan cuatro condicio-

nas iniciales; pero debido a que  $P$  es una incógnita esto significa que hay en total cinco condiciones desconocidas, de forma que para satisfacer completamente las ecuaciones del cascarón se necesitan cinco condiciones finales, las cuales pueden ser determinadas a partir de la Fig. 5.10, donde se muestran las fuerzas y desplazamientos en el borde superior del cascarón.

Proyectando las fuerzas y los desplazamientos en la dirección de  $P$  y en ángulos rectos a la dirección de  $P$ , encontraremos:

$$P + T_2 \ell \sin(\varphi_2 + \varphi_4) + N_2 \ell \cos(\varphi_2 + \varphi_4) - q_A \cos \varphi_2 = 0 \quad (5.50)$$

$$T_2 \ell \cos(\varphi_2 + \varphi_4) - N_2 \ell \sin(\varphi_2 + \varphi_4) + q_2 \ell \sin \varphi_2 = 0 \quad (5.51)$$

$$\delta_A = -b_2 \sin(\varphi_2 + \varphi_4) - w_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_4) \quad (5.52)$$

Debido a que  $\delta_A$  es la misma tanto para el borde superior como inferior, obtenemos a partir de las Ecs. (5.44) y (5.52), la siguiente igualdad.

$$\begin{aligned} b_2 \sin \varphi_3 - w_2 \cos \varphi_3 &= -b_2 \sin(\varphi_2 + \varphi_4) - w_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_4) \\ b_2 \sin \varphi_3 - w_2 \cos \varphi_3 + b_2 \sin(\varphi_2 + \varphi_4) + w_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_4) &= 0 \end{aligned} \quad (5.53)$$

Como nos encontramos en el caso de que el borde superior es torsionalmente libre, la fuerza cortante no existe, teniendo así que

$$\frac{dS}{dx} \ell = 0 \quad (5.54)$$

$$M_2 \ell = 0 \quad (5.55)$$

Establecido lo anterior la selección de las Ecs. (5.50), (5.51), (5.53), (5.54) y (5.55), nos proporcionan las cinco condiciones finales necesarias.

a).— Cascarón externo diente de sierra (extremo de la ventana).

Para el diseño de este tipo de cascarón se toma en consideración, las ecuaciones del cascarón interno diente de sierra. Esto, naturalmente, no es estrictamente real, pero es una consideración práctica razonable que se hace a menudo.



## Capítulo VI

### Ejemplos de Solución de las Ecuaciones del Cascarón Por Medio del Computador Analógico

Una vez determinadas las ecuaciones de Schorer y Jenkins así como las condiciones de borde de un cascarón, abordaremos en este capítulo única y exclusivamente la solución de problemas de cascarones por medio de la utilización de un computador analógico para el cual se aplicarán generalmente siete pasos, ordenados como se encuentran a continuación:

- 1º Se hace una exposición del problema así como sus consideraciones generales
- 2º Se determinan las escalas de tiempo y magnitud que se van a utilizar.
- 3º Se hará el cálculo de las constantes de la ecuación del cascarón y su tabulación en una forma apropiada para el ajuste de los circuitos del computador.
- 4º Se hará el cálculo de las condiciones iniciales y del ajuste de los circuitos de reposición correspondientes del computador.
- 5º Se hará el cálculo de las condiciones finales y del ajuste de los circuitos correspondientes del computador, si hay alguno.
- 6º Se hará el ajuste de las condiciones iniciales desconocidas, en series de marchas del computador de forma que queden satisfechas las condiciones finales.
- 7º Se llevará un registro del valor de cada variable a intervalos apropiados de  $\varphi$  a  $0$  a  $\varphi$ .

En seguida aplicaremos estos siete pasos a tres ejemplos haciendo notar aquí, que las cantidades registradas para  $T_1$  deberán ser multiplicadas por  $\pi^2/8$

Tabla 1

VD y ADE	FVR	FCR	GDA	V. C. U.	
				RDE (MΩ)	CDR (μF)
$M_2(0.1)$	$N_2$ * $\psi_2$	$r$ $-dEI$	- 5.330 0.008798	0.4690 284.1550	0.4
$N_2(-0.1)$	$T_2$ * $\omega$ * $M_2$ $Zr$	- 1 $d^2rEI$ $d^2r$ - 1	- 2.000 0.018424 - 0.20939 - 1.000	0.5000 54.277 4.7757 1.0000	1.0
$T_2(-0.05)$	$dS/dx$ $Yr$	- $r$ 1	1.332 0.500	0.7507 2.0000	1.0
$dS/dx(-0.2)$	$T_1$	$d^2r$	- 20.939	0.047757	1.0
$T_1(0.002)$	$U$ * $dS/dx$	$d^2rEd$ $2r$	- 28.001 - 0.1066	0.071426 18.7617	0.5
$U(2 \times 10^3)$	$\omega$ * $T_2$	1 $r/Ed$	- 1.000 0.0015943	1.0000 627.23	1.0
$\omega(2 \times 10^3)$	$\psi_2$	$r$	- 0.533	1.8763	1.0
$\psi(-2 \times 10^4)$	$M_2$	$r/Ed$	- 23.798	0.08404	0.5
$Zr(-0.1)$	$gr \cos(\varphi_1 - \varphi)$	1	- 1.000	5.0000	0.2
$Yr(-0.1)$	$gr \sin(\varphi_1 - \varphi)$	1	- 1.000	5.0000	0.2

VD = variable dependiente  
 ADE = amplitud de escala  
 FVR = función variable relacionada  
 FCR = función constante relacionada  
 GDA = ganancia del amplificador  
 V.C.U. = valores componentes utilizados

RDE = resistencia de entrada  
 CDR = condensador de regeneración

### a).— Cascarón interno sin viga de unión.

1º Problema. Determinar las fuerzas, momentos y desplazamientos que — existan en un cascarón interno del tipo mostrado en la Fig 5.1 utilizando las ecuaciones de Schorer y Jenkins teniendo como datos:

$$\begin{array}{lll} b = 15.86 \text{ m} & W = 7.92 \text{ m} & \\ r = 5.33 \text{ m} & g = 244 \text{ Kg/m}^2 & E = 210920 \text{ Kg/cm}^2 \\ d = 0.0634 \text{ m} & q_1 = 223 \text{ Kg/m} & = 2.10920 \times 10^9 \text{ Kg/m}^2 \end{array}$$

Como  $\sin \phi_1 = \frac{W}{2r}$ , entonces tenemos:

$$\sin \phi_1 = \frac{7.92}{2 \times 5.33} = 0.74286$$

$$\phi_1 = 47^\circ 58.6' = 0.83743 \text{ rad.}$$

### 2º Escalas de tiempo y magnitud.

La variación  $\phi$  para este problema resulta ser de 0 a  $\phi_1$ , de tal manera que si utilizamos una escala de tiempo 1:1, el tiempo de cálculo será 0.83743 seg., y debido a esto, el computador puede ser operado en una secuencia repetitiva razonablemente rápida, que es una de las condiciones del método de aproximaciones sucesivas que se utiliza. Por lo que respecta al orden de magnitud de cada variable dependiente, éste puede ser fácilmente estimado a partir de la experiencia de soluciones previas de diferentes problemas de cascarón de tal manera que pueda seleccionarse una amplitud de escalas apropiadas.

### 3º Cálculo de las constantes del cascarón

La Tabla 1 nos proporciona las ganancias de los amplificadores y los valores componentes para el cálculo con uso en los circuitos del computador de las Figs.

3.2 y 4.2. El asterisco nos indica los términos adicionales de la ecuación de Janskins.

Para los cálculos previos de las constantes basta con usar una máquina calculadora con una exactitud a cinco cifras significativas, y así, obtenemos de esta forma, los valores de las siguientes constantes:

$$\alpha^2 = \pi^2/h = 0.039286$$

$$I = d^3/12 = 2.1237 \times 10^{-5}$$

$$\alpha^2 r = 0.20939$$

$$EI = 4.4793 \times 10^4$$

$$\alpha^2 EI = 1.7597 \times 10^3$$

$$\alpha^2 r EI = 368.48$$

$$\alpha^2 r Ed = 2.8001 \times 10^7$$

$$r/Ed = 3.9858 \times 10^{-8}$$

$$r/EI = 1.1899 \times 10^{-4}$$

Calculadas las constantes anteriores, se eligen valores de los condensadores de regeneración para cada integrador y se calculan las resistencias de entrada — respectivas a partir de la siguiente expresión.

$$\text{Resistencia de entrada} = \frac{1}{\text{Ganancia del amplificador} \times C (\mu F)} \text{ M ohms.}$$

Finalmente se ajustan los circuitos del computador mostrados en las Figs. 3.2 y 4.2 para representar a las ecuaciones respectivas del caso en que se trata.

4º Cálculo de las condiciones iniciales.

Para el cálculo de las condiciones iniciales usaremos las Ecs. (5.1) a (5.4), donde vemos que intervienen al  $\sin \varphi_1$ ,  $\cos \varphi_1$ , y  $\tan \varphi_1$ , con los siguientes valores.

$$\sin \varphi_1 = 0.74286$$

$$\cos \varphi_1 = 0.66945$$

$$\tan \varphi_1 = 1.1097$$

A partir de estos valores, las Ecs. (5.1) y (5.3) se transforman en las siguientes variables físicas.

$$T_{2i} = 0.90114 N_{2i} + 300.19$$

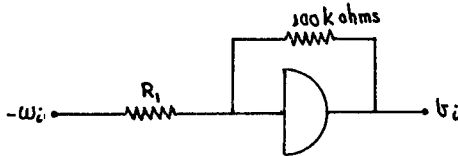
$$v_i = -1.1097 \omega_i$$

Estas variables deben ser transformadas a voltajes reales para lo cual cada término debe ser dividido por la magnitud de su correspondiente coeficiente de escala, dado en la Tabla 1.

$$T_{2i} = 0.045057 N_{2i} + 15.009$$

$$v_i = -1.1097 \omega_i$$

Los circuitos de reposición mostrados en la Fig. nos permiten determinar las condiciones iniciales  $T_{2i}$  y  $\omega_i$



$$R_1 = \frac{100}{1.1097} = 90.3 \text{ kohms.}$$

$$R_2 = \frac{100}{0.45057} = 222 \text{ kohms.}$$

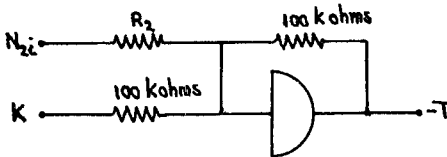


Fig. 6.1

El voltaje aplicado al enchufe de la condición inicial es nuestra constante  $K$  que tiene un valor de 15 volts —  $K = 15$  volts., de tal manera que los valores iniciales de  $M_2$ ,  $N_2$ ,  $T_1$  y  $\omega$  —  $T_{2i}$  tienen que ser ajustados para satisfacer las condiciones finales, en tanto que los valores de las condicio-

nes iniciales de los dos integradores del circuito auxiliar que genera los términos de las soluciones de membrana  $Z_r$  y  $Y_r$ , se encuentran haciendo  $\phi = 0$  en las Ecs. (3.36) y (3.37), obteniendo:

$$Z_r = g_r \cos \phi = 870.63$$

$$Y_r = g_r \sin \phi = 966.10$$

Las cuales dividimos por su correspondiente escala, arrojando

$$g r \cos \phi = 87.06 \text{ volts}$$

$$g r \sin \phi = 96.61 \text{ volts}$$

### 5º Cálculo de las condiciones finales.

Para el cálculo de estas condiciones se emplean las Ecs. (5.5) a (5.8), quedando satisfechas después de un cálculo durante 0.8374 seg. es decir, para  $\phi = \phi_1$  o cuando

$$g r \sin (\phi_1 - \phi)$$

### 6º Cálculo

El cálculo se llevó a cabo con un computador en operación repetida hasta satisfacer a las condiciones finales:

- (a) Se elija cualquier valor de  $M_{zi}$ , digamos  $M_{zi} = 0$
- (b) Se ajustan los valores de  $N_{zi}$ ,  $T_{ii}$  y  $V_i$ , hasta que satisfagan tres cualquiera de las cuatro condiciones finales; anota el valor de la cuarta condición final.
- (c) Se repiten (a) y (b) con el fin de satisfacer la cuarta condición final.

### 7º Registro de los resultados.

Una vez satisfechas las condiciones finales en la forma mencionada, nuestro computador genera los valores de las variables en un intervalo de  $\phi$ , o a  $\phi_1$ , obteniendo así, las soluciones gráficas que deben ser registradas por medio de un registrador electromecánico, o, en su defecto, por medio de un método más exacto de lectura de los resultados a intervalos de tiempo apropiados, de tal manera, que permitan al computador hacer cálculos por periodos, como por ejem-

$\lambda$	$z$	$0$	$0.093$	$0.186$	$0.279$	$0.372$	$0.465$	$0.558$	$0.651$	$0.744$	$0.837$	Factor de Escala
$M_2$		-26.1 -2.61	-7.3 -0.73	4.8 0.48	9.7 0.97	9.7 0.97	6.1 0.61	1.4 0.14	-3.4 -0.34	-6.6 -0.66	-7.9 -0.79	$/0.1 \times 100$
$\psi_2$		0.0 0.000	-34.0 -1.700	1.800 1.800	-18.5 0.925	3.0 -0.150	21.0 -1.050	30.0 -1.500	27.0 -1.350	15.5 -0.775	0.0 0.000	$/(-2 \times 10^3)(0.001)$
$w_i$		7.3 1.217	6.4 1.400	10.2 1.700	11.6 1.933	12.0 2.000	11.3 1.883	10.2 1.700	8.5 1.417	7.6 1.267	7.2 1.200	$/(2 \times 10^3)(0.003)$
$u$		8.2 -1.367	7.3 -1.217	6.5 -1.083	5.6 -0.933	4.4 -0.733	3.5 -0.583	2.4 -0.400	1.7 -0.283	0.9 -0.150	0.0 0.0	$/(-2 \times 10^3)(0.003)$
$T_1$		64.0 3.200	42.4 2.120	25.3 1.265	9.7 0.485	-3.0 -0.150	-12.6 -0.630	-20.1 -1.005	-25.3 -1.265	-27.5 -1.375	-28.3 -1.415	$/(0.002)(10000)$
$\frac{ds}{dt}$		0.0 0.0	-106.0 1.050	-166.0 1.660	-200.2 2.002	-205.1 2.051	-188.0 1.880	-156.2 1.562	-109.8 1.098	-58.6 0.586	0.0 0.0	$/(-0.2)(500)$
$T_2$		-35.7 0.714	-34.2 0.684	-20.8 0.416	-2.2 0.044	21.6 -0.432	43.9 -0.878	64.0 -1.280	80.4 -1.608	90.0 -1.800	93.7 -1.874	$/(-0.05)(1000)$
$N_2$		-46.1 3.688	-31.2 2.496	-17.1 1.368	-5.2 0.416	4.5 -0.360	9.7 -0.776	10.4 -0.832	8.9 -0.712	4.5 -0.360	0.0 0.0	$/(-0.1)(125)$

Tabla 2

$\gamma$	$t$	0	0.093	0.186	0.279	0.372	0.465	0.558	0.651	0.744	0.837	Factor de Escala.
$M_2$		-26.3	-7.3	4.3	9.5	9.5	6.3	1.8	-3.6	-5.9	-7.3	/0.1x100
		-2.61	-0.73	0.43	0.95	0.95	0.63	0.18	-0.36	-0.59	-0.73	
$\psi_2$		0.0	-34.0	-37.5	-21.0	0.5	17.5	27.0	24.0	-14.5	0.0	/(-2x10 <sup>3</sup> )(0.001)
		0.0	1.700	1.875	1.050	-0.025	-0.815	-1.350	-1.200	0.725	0.0	
$\omega$		6.2	9.3	11.4	12.5	13.1	12.6	11.9	10.1	9.0	8.7	/ (2x10 <sup>3</sup> ) (0.003)
		1.367	1.550	1.900	2.083	2.183	2.083	1.983	1.683	1.500	1.450	
$\epsilon$		9.1	8.1	7.3	6.2	5.0	4.0	3.0	2.0	1.1	0.0	/(-2x10 <sup>3</sup> ) (0.003)
		-1.517	-1.350	-1.217	-1.033	-0.833	-0.687	-0.500	-0.333	-0.193	0.0	
$T_1$		66.2	42.4	24.5	8.9	-3.0	-11.2	-20.1	-25.3	-26.8	-27.5	/ (0.002) (10000)
		3.310	2.120	1.235	0.445	-0.150	-0.560	-1.005	-1.265	-1.346	-1.375	
$\partial S/\partial x$		0.0	-109.8	-170.9	-200.2	-202.6	-188.0	-158.7	-107.4	-56.1	0.0	/(-0.2)(500)
		0.0	1.098	1.709	2.002	2.026	1.880	1.587	1.074	5.610	0.0	
$T_2$		-35.7	-34.2	-20.1	-2.2	20.8	42.4	61.0	80.4	90.0	93.7	/(-0.05)(1000)
		0.714	0.684	0.402	0.044	-0.416	-0.848	-1.220	-1.608	-1.800	-1.874	
$M_1$		-46.1	-29.8	-16.4	-5.2	3.7	8.9	9.7	7.4	4.5	0.0	/(-0.1)(125)
		3.688	2.384	1.312	0.416	-0.296	-0.712	-0.776	-0.592	-0.360	0.0	

Tabla 3



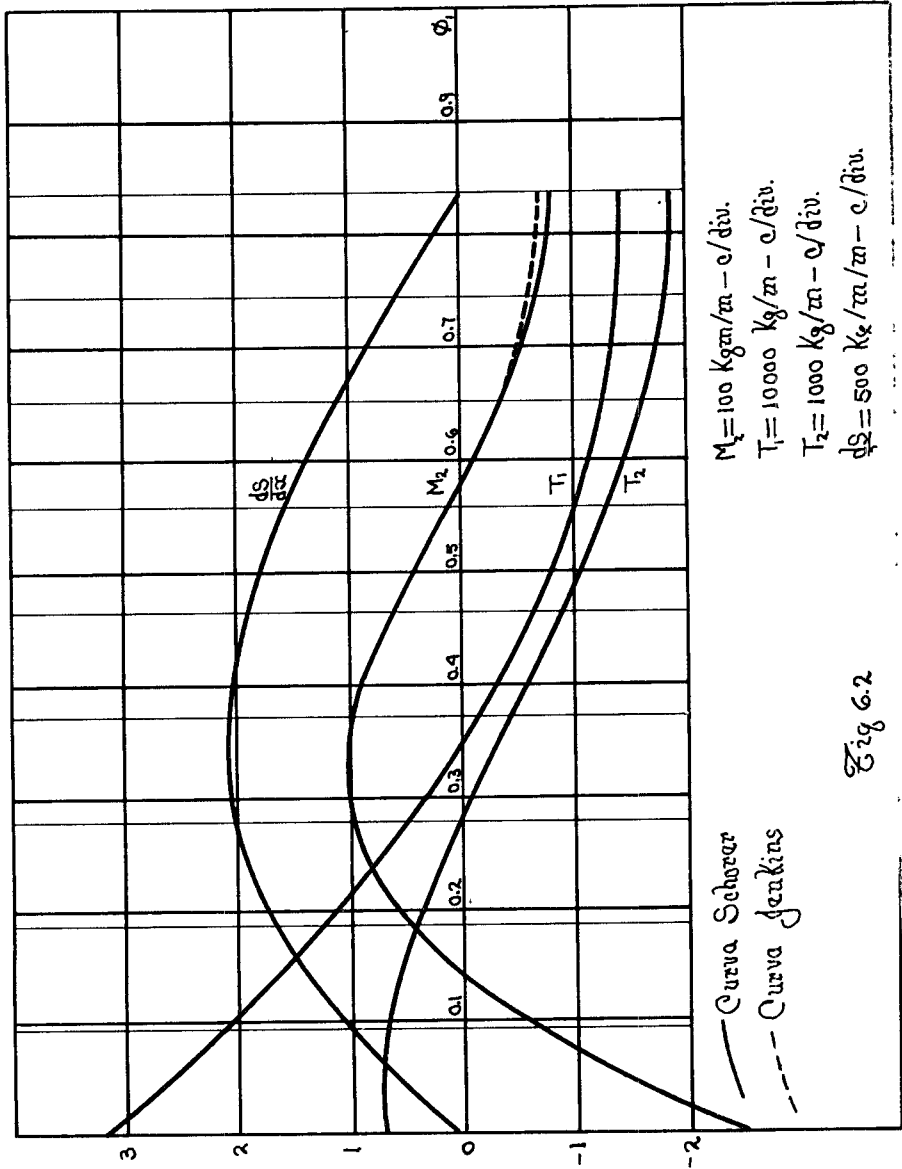
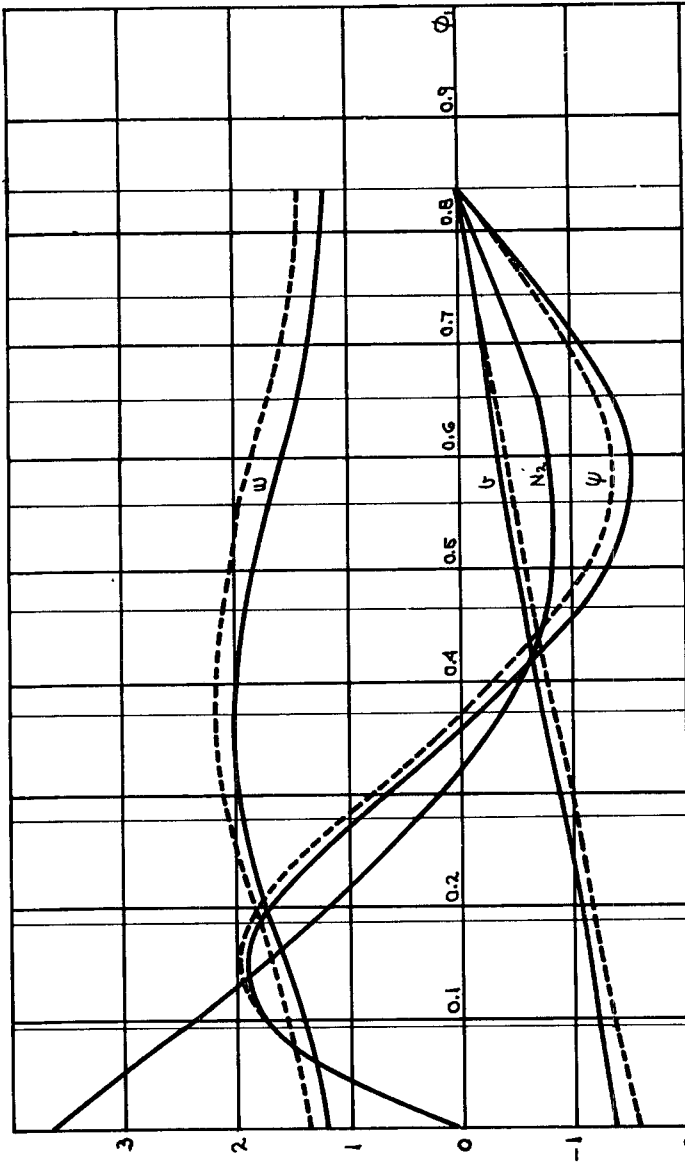


Fig 6.2



$\psi = 0.001 \text{ rad.} - c/\text{div.}$   
 $w = 0.003 \text{ in} - c/\text{div.}$   
 $v = 0.003 \text{ in} - c/\text{div.}$   
 $N_2 = 125 \text{ kg/in} - c/\text{div.}$

— Curva Schorer  
 - - - Curva Jenkins

Fig 6.3

plo 0.1, 0.2, 0.3 seg. etc., antes de operar la condición retarada y tomando las lecturas de cada variable en su correspondiente intervalo de tiempo. Así nosotros obtenemos una serie de resultados dados en volts, los cuales multiplicadas por su correspondiente factor de escala y trazados gráficamente contra  $\varphi$ , encontramos los valores de las fuerzas, momentos y desplazamientos a través de la sección del cascarón.

Así nosotros obtenemos las tablas 2 y 3 que corresponden a los resultados encontrados para este problema haciendo uso de las ecuaciones de Schorer y Jenkins, respectivamente. Divididos estos valores por su coeficiente de escala, son llevados gráficamente en las Figs. 6.2 y 6.3 a través del intervalo 0 a  $\varphi$ , esto es, del borde a la corona del cascarón.

#### b) — Cascarón con vigas de borde.

1º Problema. Dado un cascarón con vigas de borde, determinar las fuerzas, momentos y desplazamientos a que se encuentra sometido, utilizando las ecuaciones de Schorer y Jenkins.

Como datos del problema tenemos:

$h = 15.85 \text{ m}$	$2\bar{x} = 1.14 \text{ m}$ (paralela de la viga de borde) $\therefore \bar{x} = 0.57 \text{ m}$
$r = 5.33 \text{ m}$	$2\bar{y} = 0.23 \text{ m}$ (ancho de la viga de borde) $\therefore \bar{y} = 0.115 \text{ m}$
$d = 0.0634 \text{ m}$	$q_1 = 878 \text{ Kg/m}$ (peso de la viga de borde)
$W = 7.92 \text{ m}$	$q = 244 \text{ Kg/m}^2$ (carga externa del cascarón)

2º Escalas de tiempo y magnitud.

3º Cálculo de las constantes del cascarón.

4º Cálculo de las condiciones iniciales.

} Como en el ejemplo anterior

Las ecuaciones que corresponden a las condiciones iniciales para un caso de esta naturaleza, están dadas por las expresiones (5.32) a (5.35), las cuales nos exigen previamente determinar las constantes siguientes :

$$\begin{aligned} \frac{k_1 d}{\pi^2} &= 1.6137, & \frac{\bar{x} \sin \phi_1}{I_y} &= -14.9115, & \frac{\bar{y} \cos \phi_1}{I_z} &= 66.6052 \\ \frac{\bar{y} \sin \phi_1}{I_z} &= 73.9087, & \frac{\bar{x} \cos \phi_1}{I_y} &= -13.4379, & \frac{1}{A} + \frac{\bar{x}^2}{I_y} + \frac{\bar{y}^2}{I_z} &= 26.69714 \\ \frac{q_2 \bar{x}}{I_y} &= -17624, & \frac{\pi^4 E}{k^3} &= 3255400, & I_y \sin^3 \phi_1 &= 0.015670 \\ I_z \cos^3 \phi_1 &= 0.00051801, & \sin \phi_1 \cos \phi_1 (I_z - I_y) &= -0.0135468 \\ \bar{x} \sin \phi_1 &= -0.42343, & \bar{y} \cos \phi_1 &= 0.0769867, & q_2 \sin \phi_1 &= 652.23 \\ I_z \sin^3 \phi_1 &= 0.000637855, & I_y \cos^3 \phi_1 &= 0.0127260 \\ \bar{x} \cos \phi_1 &= -0.381586, & \bar{y} \sin \phi_1 &= 0.0854289, & q_2 \cos \phi_1 &= 587.78 \end{aligned}$$

De las Ecs. (5.32) a (5.35) obtenemos :

$$T_{1i} = 83.4181 T_{2i} + 140.9512 N_{2i} + 43.0812 \frac{dS}{dx} i + 28440$$

$$T_{2i} = 52698 t_i - 44100 w_i + 0.34645 \frac{dS}{dx} i + 652.23$$

$$N_{2i} = -44100 t_i + 43504 w_i - 0.46701 \frac{dS}{dx} i - 587.78$$

$$\psi_{2i} = 0$$

Estas variables físicas deben ser transformadas a voltajes reales para lo cual cada término debe ser dividido por la magnitud de su correspondiente coeficiente de escala, dado en la Tabla 1 :

$$T_{1i} = 3.3367 T_{2i} + 2.8190 N_{2i} + 0.43081 \frac{dS}{dx} i + 56.88$$

$$T_{2i} = 1.3174 v_i = 1.1025 \omega_i + 0.086612 \frac{dS}{dx} i + 32.611$$

$$N_{2i} = -2.2050 v_i + 2.1752 \omega_i - 0.23350 \frac{dS}{dx} i - 58.778$$

$$\psi_{2i} = 0$$

Los circuitos de reposición mostrados en la Fig 6.4 nos permiten determinar las condiciones iniciales  $T_{1i}$ ,  $T_{2i}$  y  $N_{2i}$ :

$$R_1 = \frac{100}{3.3367} = 29.97 \text{ k}\Omega$$

$$R_5 = \frac{100}{1.1025} = 90.70 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = \frac{100}{2.8190} = 35.47 \text{ ''}$$

$$R_6 = \frac{100}{0.086612} = 1154 \text{ ''}$$

$$R_3 = \frac{100}{0.43081} = 232.1 \text{ ''}$$

$$R_7 = \frac{100}{2.2050} = 45.35 \text{ ''}$$

$$R_4 = \frac{100}{1.3174} = 75.90 \text{ ''}$$

$$R_8 = \frac{100}{2.1752} = 45.97 \text{ ''}$$

$$R_9 = \frac{100}{0.2335} = 428.3 \text{ ''}$$

Las constantes son los voltajes aplicados a los enchufes de las condiciones iniciales.

Por lo tanto,  $K_1 = -56.88$ ,  $K_2 = 32.61$ ,  $K_3 = -58.78$  volts.

Esto significa que solamente tienen que ser ajustados los valores iniciales de  $dS/dx$ ,  $v$ ,  $\omega$  y  $M_2$  para satisfacer las condiciones finales.

Los valores de las condiciones iniciales de los integradores auxiliares son los mismos que para el ejemplo anterior.

##### 5: Cálculo de las condiciones finales.

Como en el ejemplo anterior.

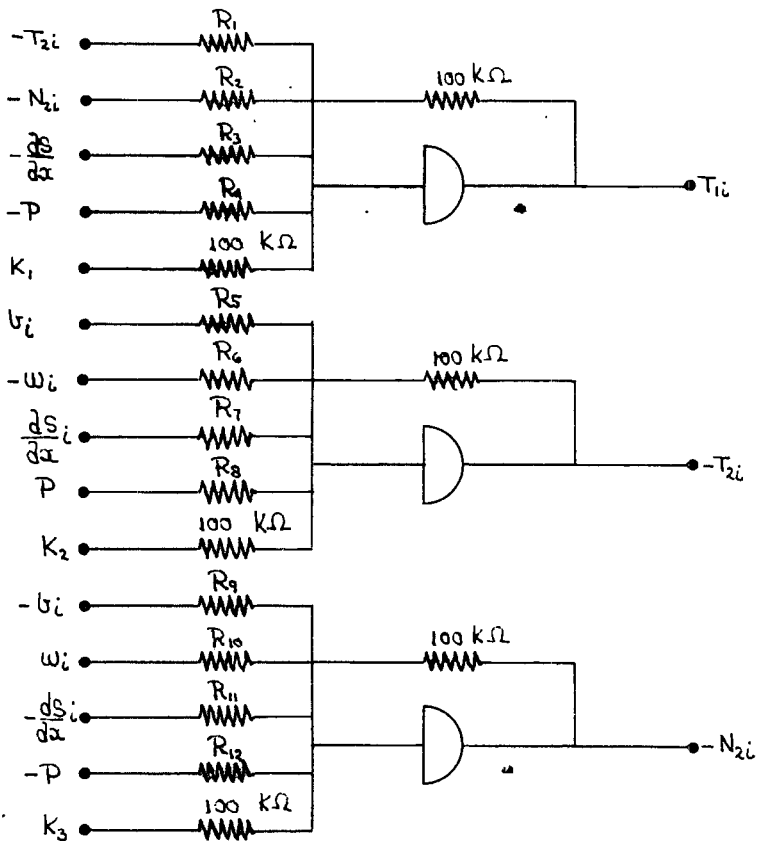


Fig 6.4

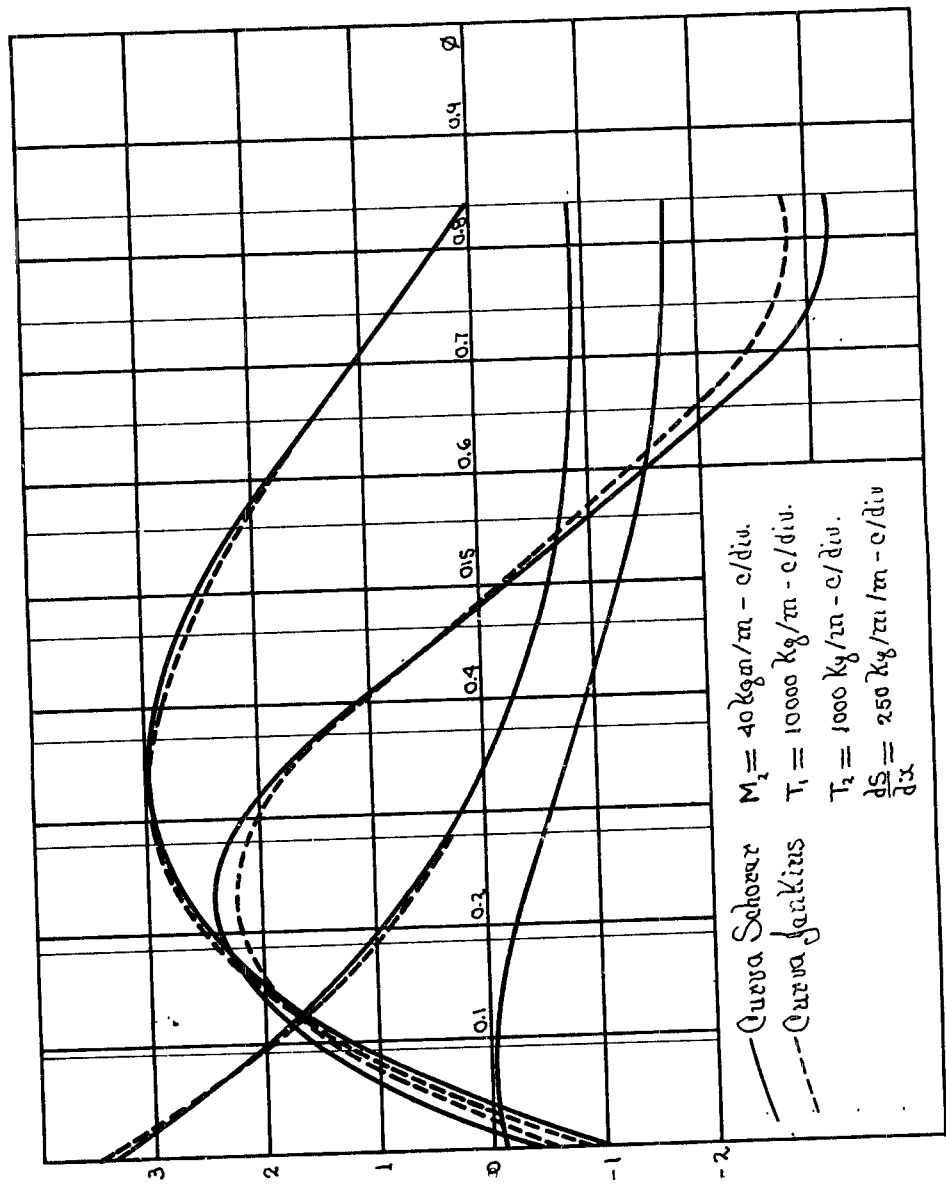
V	t	0	0.093	0.186	0.279	0.372	0.465	0.558	0.651	0.744	0.837	Factor de Escala.
$M_2$	-1.8	5.9	9.1	5.9	0.9	-3.8	-8.6	-12.2	-12.7	-12.7	-12.7	$/(0.1)(40)$
	-0.450	1.475	2.325	2.275	1.475	0.225	-0.950	-2.150	-3.050	-3.175	-3.175	
$U_2$	0.0	4.5	23.0	44.0	52.0	70.5	67.0	49.5	28.0	0.0	0.0	$/(-2 \times 10^3)(0.002)$
	0.0	-0.113	-0.575	-1.100	-1.550	-1.763	-1.675	-1.238	-0.700	0.0	0.0	
$\omega$	20.0	19.8	19.2	17.5	14.8	11.4	7.9	4.4	2.9	2.9	2.0	$/(2 \times 10^3)(0.003)$
	3.333	3.300	3.200	2.917	2.467	1.900	1.317	0.817	0.483	0.333	0.333	
$G$	10.4	8.4	6.7	5.0	3.5	2.1	1.2	0.6	0.3	0.3	0.0	$/(2 \times 10^3)(0.002)$
	-2.600	-2.100	-1.675	-1.250	-0.875	-0.525	-0.300	-0.150	-0.075	0.0	0.0	
$T_1$	67.0	41.7	21.6	6.7	-3.7	-10.4	-14.9	-17.1	-18.6	-18.6	-18.6	$/(0.002)(10000)$
	3.350	2.085	1.080	0.335	-0.185	-0.520	-0.745	-0.855	-0.930	-0.930	-0.930	
$AS/da$	51.3	-56.1	-117.2	-144.0	-146.5		-131.8	-70.8	-36.6	0.0	0.0	$/(0.1)(250)$
	-1.026	1.122	2.344	2.880	2.930		2.636	1.416	0.732	0.0	0.0	
$T_2$	6.7	3.7	11.9	25.3	40.9	56.5	71.4	80.3	86.3	87.8	87.8	$/(0.05)(1000)$
	-0.134	-0.074	-0.238	-0.506	-0.818	-1.130	-1.428	-1.606	-1.726	-1.726	-1.726	
$N_1$	-19.3	-10.4	-3.0	3.7	8.2	10.4	10.4	8.2	4.5	0.0	0.0	$/(0.1)(100)$
	1.93	1.04	0.3	-0.37	-0.82	-1.04	-1.04	-0.82	-0.45	0.0	0.0	

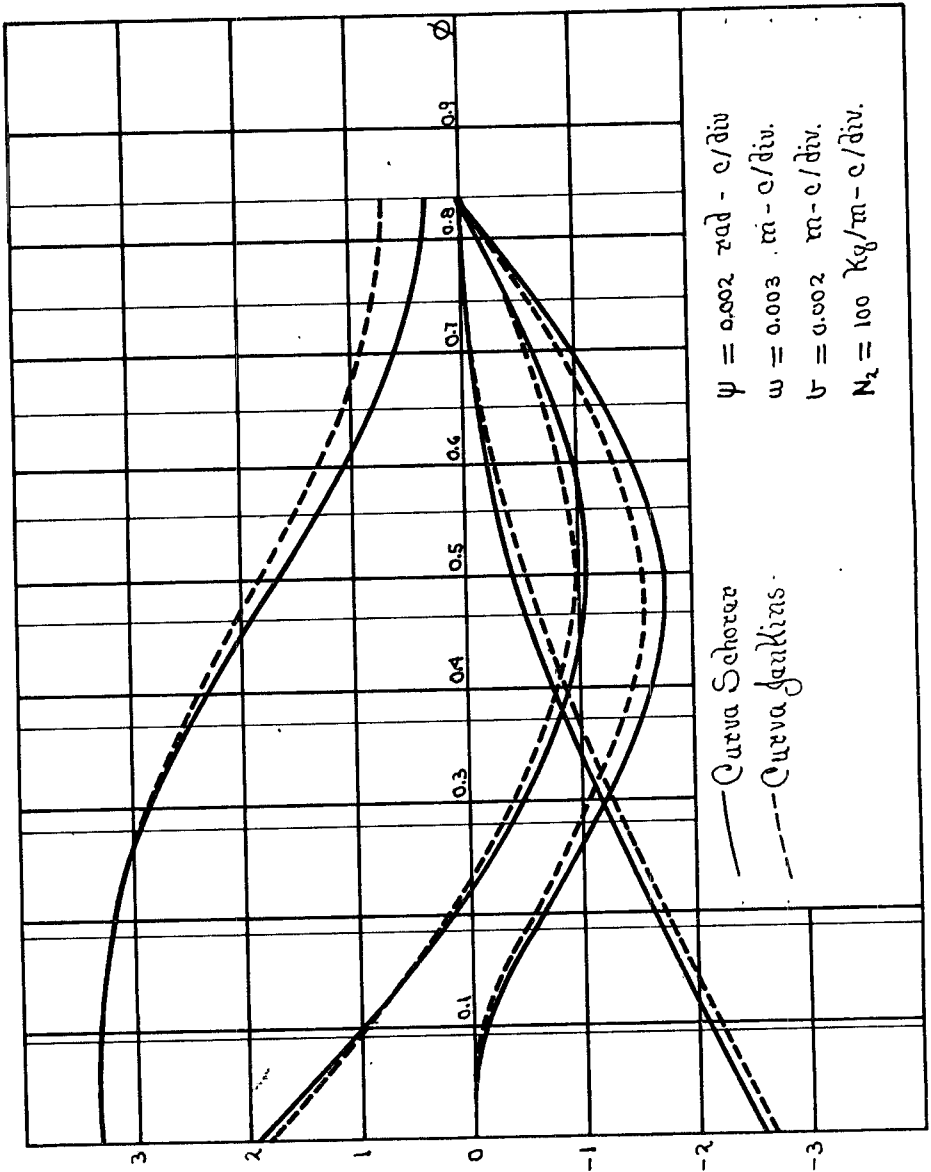
Tabla 4

$\lambda$	$t$	0	0.093	0.186	0.279	0.372	0.465	0.558	0.651	0.744	0.837	Factor de Escala
$M_2$		-2.3	5.2	8.4	8.4	5.7	0.9	-3.2	-7.9	-10.9	-11.1	/(0.1) (40)
		-0.575	1.300	2.100	2.100	1.425	0.225	-0.800	-1.975	-2.725	-2.775	
$\psi_2$		0.0	3.5	20.0	38.5	54.5	62.5	59.5	43.5	24.0	0.0	/(-2 \times 10^4) (0.002)
		0.0	-0.088	-0.600	-0.963	-1.363	-1.563	-1.488	-1.088	-0.600	0.0	
$W$		19.8	19.7	19.0	17.7	15.2	12.3	9.4	6.4	4.9	4.1	/(2 \times 10^3) (0.003)
		3.300	3.283	3.167	2.950	2.533	2.050	1.567	1.087	0.817	0.683	
$G$		10.7	8.8	7.2	5.3	4.0	2.6	1.7	0.6	0.3	0.0	/(-2 \times 10^3) (0.002)
		-2.675	-2.200	-1.800	-1.325	-1.000	-0.650	-0.425	-0.150	-0.075	0.0	
$T_1$		68.4	40.9	20.1	5.2	-4.5	-10.4	-14.9	-17.9	-17.9	-18.6	/(0.002) (10000)
		3.420	2.045	1.005	0.260	-0.225	-0.520	-0.745	-0.895	-0.895	-0.930	
$ds/dz$		48.8	-61.0	-119.6	-144.0	-146.5	-126.9	-131.8	-70.8	-34.2	0.0	/(-0.2) (250)
		-0.976	1.220	2.392	2.880	2.930	2.638	2.636	1.416	0.684	0.0	
$T_2$		6.7	4.5	12.6	26.8	41.7	56.5	71.4	79.6	85.6	87.1	/(-0.05) (1000)
		-0.134	-0.090	-0.252	-0.536	-0.834	-1.130	-1.428	-1.592	-1.712	-1.742	
$N_2$		-18.6	-9.7	-3.0	3.0	6.7	9.7	8.9	6.7	4.5	0.0	/(-0.1) (100)
		1.86	0.97	0.30	-0.30	-0.67	-0.97	-0.89	-0.67	-0.45	0.0	

Tabla 5







## 6. Cálculo.

El cálculo se llevó a cabo con un computador en operación repetida hasta satisfacer a las condiciones finales:

- Se elija cualquier valor de  $M_{zi}$ , por ejemplo  $M_{zi} = 0$ .
- Se ajustan los valores de  $dSi/dx$ ,  $b_i$  y  $w_i$  hasta que se satisfagan tres cualesquiera de las cuatro condiciones finales; anota el valor de la cuarta condición final.
- Se repiten (a) y (b) con el fin de satisfacer la cuarta condición final.

## 7. Registro de los resultados.

En las tablas 4 y 5 se encuentran registrados los resultados obtenidos con la operación del computador analógico digital. Las dos últimas figuras nos muestran las gráficas de las Tablas 4 y 5.

## c).— Cascarón interno diente de sierra

Para el cálculo de las fuerzas, momentos y desplazamientos de un cascarón diente de sierra, se aplican los mismos pasos que en los ejemplos previos, empleando para ello, las condiciones de borde dadas en el Capítulo V. La solución de este tipo de cascarón no se dará en la presente, quedando como tema de investigación a quien interese este método electrónico analógico.

## Capítulo VIII

### Conclusiones

De acuerdo con la experiencia en la solución de problemas de casaciones cilíndricas, se ha encontrado que mediante la utilización de un computador electrónico analógico, el tiempo empleado en el diseño se reduce a un décimo con respecto a métodos tradicionales que atraen al uso de la regla de cálculo. Este método nos proporciona una aproximación de 1 a 2% sobre métodos exactos. Sin embargo, se encuentra en serias dificultades debido a que Países altamente desarrollados, han creado computadores electrónicos digitales, con alcances considerables desde el punto de vista técnico y económico, siendo este último factor determinante para que los países subdesarrollados, se inclinaron por mejorar la técnica del computador electrónico analógico, la cual no es tan costosa y que, podría brindar resultados satisfactorios dentro de su utilización científica,

## Capítulo VIII

### Bibliografía

- 1- Análisis Cálculo y Diseño de las Bovedas de Cascaza.  
Alfonso Olvera López
- 2- Análisis Estructural Avanzado  
Sidney F. Borg y Joseph J. Genaro
- 3- Application of Finite Difference Equations to Shell Analysis  
Ofirera Soave
- 4- A Method of Designing Northlight Shell Roofs. (The Indian Concrete Journal, enero 1961, Vol. 35, No 1, Págs. 6-10)  
C.B. Wilby
- 5- A Simplified Method of Design for Cylindrical Shell Roofs (The Structural Engineer, junio 1954, Vol. 32, Págs 161-180).  
H. Tottenham
- 6- Circular, Parabolic and Elliptical Arches (Civil Engineering and Public Works Review, Febrero, 1955 ).  
E. Mackland
- 7- Elastic Analysis of Shells by Electronic Analogy  
Charles Bryan Wilby and Norman West Bellamy
- 8- Electronic Analog Computers  
Graziro and Theresa M. Koen
- 9- Influence of Motion on Thin Cylindrical Shells (Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1935, Págs 281-316)  
H. Schorer

- 10- The Design of Shells  
Albin Chronowicz
- 11- Theory and Design of Cylindrical Shell Structures  
R. S. Jenkins
- 12- Theory of Elastic Thin Shells  
A. I. Goldenveizer
- 13- Theory of Plates and Shells  
Stephan P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger