UNIVERSIDAD AUTONOMA DE QUERETARO.
DIRECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO.
SEC. DOCENCIA DE LAS MATEMATICAS.

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDOS DISCRETOS.

TESIS

Que para obtener el grado de

MAESTRO EN DOCENCIA DE LAS MATEMATICAS

p r e s e n t a

AGUSTIN PACHECO CARDENAS

bajo la dirección del Dr.

IGNACIO BARRADAS BRIBIESCA

JURADO:

DR. IGNACIO BARRADAS BRIBIESCA — PRESIDENTE

DR. DIEGO BRICIO HERNANDEZ CASTAÑOS — SECRETARIO

DR. OSCAR ADOLFO SANCHEZ VALENZUELA — VOCAL

DR. ALEJANDRO DIAZ BARRIGA CASALES — SUPLENTE

DR. CESAR RINCON ORTA — SUPLENTE

COORDINADOR DE LA SECCION

M. Alejandro Padilla G.

DIRECTOR DE ESTUDIOS DE POSGRADO

M. en I. José Alfredo Zepeda G.

Querétaro, Qro. Agosto de 1990.

AGRADECIMIENTOS.

La realización del presente trabajo, no hubiera sido posible sin el concurso de una serie de personas e instituciones cuya convergencia me permitió su realización.

A Estela, mi esposa, quien siempre me alentó con su amor y comprensión.

A mis hijos:

Agustín
Blanca Estela
Luis Osvaldo
Marco Antonio y
Bernard

Agradezco profundamente el apoyo brindado por mi director Dr. Ignacio Barradas Bribiesca.

A mis maestros, muy especialmente a:

Dr. Alejandro Díaz Barriga Casales
Dr. Diego Bricio Hernández Castaños
Dr. César Rincón Orta
Ing. Salvador Vázquez Altamirano q.e.p.d.
Ing. Agustín M. Vega Arana q.e.p.d.
Ing. José Antonio Legarreta Jimeno q.e.p.d.

quienes con su ejemplo, cultivaron en mi persona el cariño por la matemática.

Deseo agradecer al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) por el apoyo brindado para la realización de este trabajo.

Al Dr Xavier Gómez - Mont Avalos por su amistad.

A mi Alma Mater, la Universidad Autónoma de Querétaro, así como a su rector y mi amigo Ing. J. Jesús Pérez Hermosillo.

Al Instituto Tecnológico de Querétaro, y en especial a su director Ing. Raúl Noriega Ponce.

Muy especialmente dedico este trabajo a un ex - alumno de mis años de profesor en la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro, cuya trayectoria en la vida de Querétaro ha sido siempre un fiel reflejo de su cariño manifiesto por su permanente apoyo a la Universidad. Lic. Mariano Palacios Alcocer, Quien me ha distinguido con su entrañable amistad que mucho me honra.

A Claudia Chávez Moreno (Chiris).

A todos los que han sido mis alumnos.

C O N T E N I D O

CAPITULO I LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDO, EJEMPLOS Y METODO DE PASOS 1

1.1 Introducción 1
1.2 Ejemplos 2
1.3 Método de pasos 9
1.4 Semejanzas y diferencias con las ecuaciones diferenciales ordinarias 20

CAPITULO II UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES Y CONDICIONES DE LIPSCHITZ PARA EL PROBLEMA BASICO INICIAL 45

2.1 El problema básico inicial y definición de solución 45
2.2 Condiciones de Lipschitz 48
2.3 Lema de Gronwall 51
2.4 Unicidad de la solución del problema básico inicial 53
2.5 Un resultado de dependencia continua de las soluciones con respecto a cambios en la función inicial 62

CAPITULO III SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDOS ACOTADOS 66

3.1 Introducción 66
3.2 Notación 67
3.3 Teoremas de unicidad, existencia, dependencia continua y superposición de soluciones 71
3.4 Ejemplos 79

CAPITULO IV SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDOS DISCRETOS Y COEFICIENTES CONSTANTES 84

4.1 Introducción 84
4.2 La ecuación característica 84
4.3 Teoremas fundamentales 87
4.4 Ejemplos 97
4.5 Variación de parámetros 103

CAPITULO V EL METODO DE RUNGE-KUTTA-FEHLBERG, CON INTRPOLACION DE HERMITE PARA LA SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDOS DISCRETOS 106

5.1 Introducción 106
5.2 Descripción del método numérico 106
5.3 Programa y ejemplos 111

CAPITULO I

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDO, EJEMPLOS Y METODO DE PASOS

1.1 INTRODUCCION.

La mayor parte de las ocasiones en que se desea obtener información acerca de un fenómeno o problema de la realidad cotidiana, tomando como referencia la observación de dicho fenómeno; es necesario, para poder explicarlo, recurrir a una modelación matemática del mismo. En función de éste modelo se puede verificar si la solución del mismo, satisface o no, las observaciones realizadas, validarlo y predecir, con la mejor exactitud posible, el comportamiento a futuro del fenómeno.

Una gran parte de éste tipo de modelos, son las llamadas ECUACIONES DIFERENCIALES, que en principio son ecuaciones que contienen la(s) derivada(s) de alguna(s) función(es) desconocida(s). Uno de los ejemplos más típicos es:

$$y'(t)=f(t,y(t)) \tag{1.1}$$

dónde $y'(t)$ es la primera derivada de una función desconocida con respecto al tiempo y f es una función, por ejemplo, continuamente diferenciable dada.

El problema consiste en calcular la función $y(t)$ o al menos obtener información útil acerca de ella.

Este tipo de expresiones cuya característica es que la función desconocida y su derivada están evaluadas en el mismo instante t, es el motivo fundamental de estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Ahora bien; un tipo más general de problemas en los cuales se puede considerar que la función desconocida y las derivadas de menor orden de dicha función (si existen) aparecen evaluadas en diferentes valores de la variable independiente; da origen a las **Ecuaciones Diferenciales con Retardo o Ecuaciones Diferenciales con Argumentos Desviados**; por ejemplo:

$$x'(t)=-2x(t-1)$$

$$x'(t)=-cx(t-1)[1+x(t)]$$

$$x'(t)=ax(t)+bx(t-1)$$

$$x''(t)=-x'(t)-x'(t-1)-3\ \mathrm{Sen}\ x(t)$$

$$x''(t)=x(t)-x(t-2)+x'(t-1)$$

$$x'(t)=x(t)x(t-1)+t^2x(t-2)$$

Las expresiones mostradas aquí, son ejemplos clásicos de lo que se denominan **Ecuaciones Diferenciales con Retardo**.

Los conceptos conocidos de **orden y linealidad**, de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias son transladados, sin el mayor trámite, tal cual, a las **Ecuaciones Diferenciales con Retardo.**

1.2 Ejemplos.

Se presentará a continuación, cómo se obtienen algunas ecuaciones diferenciales con retardo:

Ejemplo 1.- Mezcla de substancias.

En un tanque de gran capacidad, se encuentra una solución de agua con sal perfectamente bien disuelta, de manera que la concentración de la misma, es uniforme y se conocen los volúmenes en el instante $t=0$. En éste instante, se introduce agua pura en el tanque, con una rapidez de v_1 lts./seg.y simultáneamente, por el fondo del tanque se extrae, con la misma rapidez, la mezcla de salmuera, la cual, por algún medio mecánico, por ejemplo agitación, se encuentra siempre con una concentración uniforme.

Sabiendo que en el instante $t=0$, $Q(0)=Q_0$ representa el volúmen de sal en el tanque; se desea calcular que cantidad habrá de ésta en el tanque, al cabo del tiempo $t \geq 0$.

Si llamamos $Q(t)$ a la cantidad de sal presente en el tanque para todo tiempo $t \geq 0$, entonces $Q'(t)$ será la variación que sufrirá dicha cantidad en el tiempo t. Y como esta variación sólo depende de la cantidad de sal que abandone el tanque, entonces:

$$Q'(t) = -v_1 \frac{Q(t)}{v}$$

dónde; $\frac{Q(t)}{v}$ es la concentración instantánea de la mezcla en el momento en que abandona el tanque y v_1 es la rapidez con la que sale la mezcla del tanque. Si reemplazamos $\frac{v_1}{v} = k$ y si $Q(0)=Q_0$ (constante) es el volúmen inicial de sal en el tanque, entonces:

$$Q'(t) = -k\ Q(t); \qquad Q(0) = Q_0 \tag{1.1}$$

es el problema de valor inicial que modela esta mezcla.

Sin embargo, tratando de ser más realistas en nuestro modelo, considérese que al entrar el agua al tanque y mezclarse con la solución que hay en el interior del mismo, la incorporación de la sal no se da en forma instantánea sino que se emplea un intervalo de tiempo; llámese r; en lograr que la mezcla tenga una concentración uniforme en todas partes, por tanto, la variación calculada en (1.1) se verá afectada por el valor r y la ecuación quedará así:

$$Q'(t) = - kQ(t-r) \qquad r>0 \tag{1.2}$$

dónde r es el retardo o tiempo de atraso.

Observación: en este primer ejemplo, nótese que la variación de la cantidad de sal presente en el tanque, depende de la cantidad de sal que había en el mismo, r unidades de tiempo antes del instante actual.

Ejemplo 2.- Modelo logístico de población.

Sea $P(t)$ la cantidad presente de individuos de una cierta población en el instante $t \geq t_0$. Si suponemos que la tasa de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la misma, entonces se tiene:

$$\frac{d}{dt} P(t) = kP(t)$$

dónde $P(t_0)=P_0$ y $k > 0$ son constantes.

Se sabe que en ésta ecuación, la solución $P(t)$ crece exponencialmente, y si bien es cierto que en los primeros intervalos de tiempo proporciona resultados bastante aceptables, sin embargo, cuando $t \to \infty$, los resultados difieren de las observaciones enormemente.

Se han realizado experimentos con ciertas colonias de seres vivos en las que se ha observado que aún cuando exista suficiente cantidad de nutrientes, el crecimiento de la población no se da ilimitadamente, sino que interactúan de diferentes maneras, en su medio o con otras especies y la tasa de crecimiento de la población no se mantiene constante sino que en general depende del tamaño de la misma, esto es:

$$\frac{d}{dt} P(t) = R(P(t)) \tag{1.3}$$

dónde $R(P(t))$ es una función que depende de la población.

Un modelo muy simple propuesto por Verhulst (matemático y biólogo Holandés, quien en 1837 propuso el modelo logístico de población), es:

$$R(P(t)) = [a-b\ P(t)]P(t)$$

dónde a y b son constantes positivas. Por lo tanto la ecuación (1.3) se transforma en:

$$\frac{d}{dt} P(t) = b\ P(t)(a/b - P(t)) \tag{1.4}$$

(Modelo logístico de población) dónde a es la tasa de crecimiento sin influencia del medio y b el efecto del incremento en la densidad de población.

Con la intención de tener una mejor aproximación, supóngase que el efecto en el término del incremento en la densidad de población, se da con un retardo r, pues los nuevos elementos de la población, no están preparados inmediatamente para reproducirse sino hasta pasado un tiempo r, por lo tanto, el modelo se escribe así:

$$\frac{d}{dt} P(t) = b\ P(t)[\frac{a}{b} - P(t-r)] \tag{1.5}$$

En las ecuaciones diferenciales de éste tipo, resulta bastante cómodo realizar las operaciones cuando el retardo es igual a uno. Veamos que pasa cuando en la ecuación (1.5) se hace la transformación siguiente:

Sea $t = rs$, entonces:

$$P(t) = P(rs) = \frac{a}{b} + y(s)$$

derivando con respecto a s:

$$r \frac{d}{ds} P(rs) = \frac{d}{ds} y(s)$$

de dónde:

$$P'(t)= \frac{1}{r}\ y'(s) \tag{1.6}$$

$$P(t-r) = P(rs-r) = P[r(s-1)] = \frac{a}{b} + y(s-1) \tag{1.7}$$

substituyendo (1.6) y (1.7) en (1.5) se tiene:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{ds}\ y(s) = b\ [\frac{a}{b} + y(s)][\frac{a}{b} - \frac{a}{b} - y(s-1)]$$

$$\frac{d}{ds}\ y(s) = -r\ b\ y(s-1)[\frac{a}{b} + y(s)] \tag{1.8}$$

que es una ecuación diferencial con retardo $r=1$.

Si $s=t$, la ecuación (1.8) no sufre modificaciones por lo que queda así:

$$\frac{d}{dt}\, y(t) = -r\ b\ y(t-1)[\frac{a}{b} + y(t)] \tag{1.9}$$

Observación: aquí se tiene otro ejemplo de una ecuación diferencial con retardo, además, nótese que la transformación $t=rs$, hace posible que el retardo se transforme en un valor igual a la unidad.

Ejemplo 3.- Modelo de competición de especies o modelo presa - depredador.

Sean $x(t)$, $y(t)$ los tamaños de la población de dos especies de seres vivos, presa y depredador respectivamente, que se encuentran en la naturaleza y que compiten entre ellas por su supervivencia. Suponiendo que la cantidad de alimento de la presa es limitada y que se reproducen de acuerdo con el modelo logístico de población y que la especie presa se ve disminuida proporcionalmente al número de encuentros con el depredador; entonces la variación de la especie presa se puede escribir así:

$$x'(t) = x(t)[a-b\ x(t)] - c\ x(t)\ y(t)$$

donde a, b y c, son constantes positivas.

Ahora, suponiendo que la tasa de crecimiento actual de los depredadores depende de la cantidad de presas con la cual tuvieron contacto r unidades de tiempo atrás, entonces su variación en el tiempo se puede escribir así:

$$y'(t) = -h\ y(t) + k\ x(t-r)\ y(t-r)$$

dónde el término $-h\ y(t)$ es la tasa de disminución que sufriría en su población, la especie depredadora, si no encuentra alimento y k es una constante positiva. Por lo tanto el sistema que modela éste fenómeno, quedará planteado por:

$$\begin{aligned} x'(t) &= [a-b\ x(t)]\ x(t)-c\ x(t)\ y(t) \\ y'(t) &= -h\ y(t) + k\ x(t-r)\ y(t-r) \end{aligned} \tag{1.10}$$

que se denomina sistema de Lotka-Volterra con retardo.

Para simplificar un poco el sistema, se harán las siguentes sustituciones:

$$a = a_1;\ \frac{b}{a} = \frac{1}{p},\ c = b_1,\ h = a_2,\ k = b_2$$

entonces el sistema se transforma en:

$$\begin{aligned} x'(t) &= a_1[1 - \frac{x(t)}{p}]\ x(t) - b_1\ x(t)\ y(t) \\ y'(t) &= -a_2\ y(t) + b_2\ x(t-r)\ y(t-r) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Observación: aquí se tiene un ejemplo de un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo; en donde la segunda ecuación del sistema tiene a las variables del mismo en función de un retardo r.

Ejemplo 4.- .Mecanismos de control.

Sea $x(t)$ el ángulo de inclinación, en el instante t, de la posición vertical de un barco que se desplaza sobre las olas. Se tiene un mecanismo compuesto por bombas hidraulicas en cada lado del barco y así, introducir o sacar agua de los tanques de balasto para poder controlar el equilibrio del barco. Entonces, de acuerdo con Minorsky, la ecuación diferencial para $x(t)$ está dada por:

$$mx''(t) + b\ x'(t) + q\ x'(t) + k\ x(t) = 0$$

dónde $qx'(t)$ es el término que controla el mecanismo diseñado para bombear agua a los tanques de balasto. Sin embargo, se intuye que este mecanismo, no responde instantáneamente, sino que toma un tiempo en actuar. Sea r el tiempo que tarda en responder a la velocidad que había en el instante $t-r$. Por tanto para ayudar a restablecer el equilibrio, se introduce la fuerza $qx'(t-r)$ en lugar de $qx'(t)$ y se da orígen a la ecuación:

$$m\ x''(t) + b\ x'(t) + q\ x'(t-r) + k\ x(t) = 0 \tag{1.12}$$

Este modelo se conoce con el nombre de modelo de Minorsky.

Observación: aquí se tiene un ejemplo de una ecuación diferencial de segundo orden, en donde el retardo aparece en el ternino que contiene a la primera derivada de la variable del problema.

1.3 METODO DE PASOS.

La técnica denominada **método de pasos**, es una manera muy simple de resolver una ecuación diferencial con retardo. Consiste esencialmente en emplear una función $\theta:[t_0-r,t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ que se supone conocida y reemplazarla por el término que contiene el retardo, i.e.

$$y(t-r) = \theta(t-r)$$

en la ecuación diferencial con retardo para que, de esta manera, se transforme el problema en una ecuación diferencial ordinaria con valores iniciales y así poder, en principio, avanzar distancias de r en r incrementando la variable t todo lo que se quiera. Para aclarar esto, véanse los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.- En esta ecuación, se aplicará el método de pasos a la expresión:

$$Q'(t) = -\ kQ(t-r) \qquad r > 0 \tag{i}$$

se empieza por especificar lo que se denominará como función inicial, en el intervalo $[t_0-r\ ,\ t_0]$ y con ella se hará una extensión hacia el futuro, para calcular la función $Q(t)$ que satisfaga la ecuación con retardo en $[t_0,t_0+\ r]$, donde Q' evaluada en t_0 es la derivada derecha de Q en t_0.

Dicha función inicial se designará como $Q(t) = \theta(t)$, $t \in [t_0-r,t_0]$.

Por ejemplo ,en dicha ecuación, tómese $\theta(t)=\theta_0=$ constante.

Con esto, se tiene conocida la historia de la cantidad de sal en el tanque y entonces se puede escribir:

$$Q(t-r) = \theta(t-r) = \theta_0; \qquad t_0-r \le t \le t_0$$

sustituyendo este valor en la ecuación (i), queda:

$$Q'(t) = -k\ \theta_0 \qquad t_0 \le t \le t_0+ r$$

la que resulta ser una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de variables separables.

Como θ_0 es constante, integrando los dos términos de esta ecuación resulta:

$$Q(t) - Q(t_0) = -k\ \theta_0(t-t_0)$$

y como:

$$Q(t_0) = \theta_0$$

la cantidad de sal presente en el tanque en este instante, quedará así:

$$Q(t) = \theta_0[1-k(t-t_0)]; \qquad t_0 \leq t \leq t_0 + r$$

ahora, con este valor calculado para $Q(t)$ en el intervalo $[t_0, t_0 + r]$ se considerará como una nueva condición inicial en el mismo intervalo y substituyendolo de nueva cuenta en la ecuación (i) para obtener una nueva solución, ahora en el intervalo $[t_0 + r, t_0 + 2r]$, se tendrá:

$$Q(t) = \theta(t) = \theta_0[1-k(t-t_0)]; \qquad t_0 \leq t \leq t_0 + r$$

$$Q(t-r) = \theta(t-r) = \theta_0[1-k(t-r-t_0)]$$

sustituyendo en la ecuación (i) queda:

$$Q'(t) = -k\,\theta_0 + k^2\,\theta_0(t-r-t_0); \qquad t_0 + r \leq t \leq \quad t_0 + 2r$$

con condición inicial:

$$Q(t_0 + r) = \theta_0(1-kr)$$

que resulta ser, de nueva cuenta una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, de variables separables y con condición inicial dada.

Integrando esta expresión y sustituyendo la condición inicial se tiene:

$$Q(t) = \theta_0 - k\ \theta_0(t-t_0) + \frac{k^2\ \theta_0}{2}\ (t-r-t_0)^2\ ; \qquad t_0+r \leq t \leq t_0+2r$$

Si se procede de manera análoga, ahora se tiene para el intervalo $[t_0+2r,\ t_0+3r]$, lo siguiente:

$$Q(t) = \theta_0 - k\ \theta_0(t-t_0) + \frac{c^2\ \theta_0}{2}\ (t-r-t_0)^2 - \frac{c^3\ \theta_0}{6}\ (t-2r-t_0)^3$$

Si se considera ahora este último valor, como nueva condición inicial, en el intervalo $[t_0+2r,\ t_0+3r]$ y se substituye de nuevo en la ecuación (i). Resolviendo se tiene:

$$Q(t) = \theta_0 - k\theta_0(t-t_0) + \frac{c^2\theta_0}{2}(t-r-t_0)^2 - \frac{c^3\theta_0}{6}\ (t-2r-t_0)^3 + \frac{c^4\theta_0}{24}\ (t-3r-t_0)^4$$

expresión que es válida en el intervalo $[t_0+3r,\ t_0+4r]$. Así sucesivamente se podrá extender, mediante intervalos que se van incrementando de r en r, hacia la derecha de t_0, tanto como se quiera; aún cuando se puede ver, sin mucho esfuerzo, que las operaciones necesarias para un nuevo cálculo del valor de Q, aunque sencillas, se vuelven cada vez más laboriosas.

Ejemplo 2.- Para clarificar el proceso conocido con el nombre de método de pasos para resolver una ecuación diferencial con retardo; se quiere resolver:

$$x'(t) = a\ x(t) + b\ x(t-1)$$

en el intervalo para $t \in [0,2]$, suponiendo la función inicial:

$$x(t) = \theta(t) = 1+t$$

definida en $[-1,0]$, siendo a y b constantes arbitrarias, con $b \neq 0$.

Solución: si

$$x(t) = \theta(t) = 1+t$$

en $[-1,0]$ entonces:

$$x(t-1) = \theta(t-1) = 1+(t-1) = t$$

y

$$\theta(0) = x(0) = 1.$$

por lo tanto:

$$x'(t) = a\ x(t) + bt$$

que resulta ser una ecuación diferencial lineal, de primer orden, con condición inicial $x(0)=1$ cuya solución se obtiene resolviendo:

$$\frac{d}{dt}\,[x(t)\ e^{-at}] = bt\ e^{-at}$$

expresión que integrada en el intervalo $[0,1]$ y ordenada queda de la siguiente manera:

$$x(t) = -\frac{b}{a}\,(t+\frac{1}{a}) + (1+\frac{b}{a^2})\ e^{at} \qquad t \in [0,1] \qquad (ii)$$

rápidamente se puede ver que si en esta ecuación se hace $t=0$, la condición inicial dada se satisface.

Se calculará ahora la solución en *[1,2]*, para lo cual se considerará, el valor calculado en (*ii*) para $x(t)$, como la nueva condición inicial, esto es:

$$x(t) = \theta(t)$$

sujeto a la condición:

$$x(1) = -\frac{b}{a}\left(1 + \frac{1}{a}\right) + e^{a}\left(1 + \frac{b}{a^2}\right)$$

Calculando el valor del argumento retardado para substituirlo en la ecuación (*ii*) queda:

$$x(t-1) = \theta(t-1) = -\frac{b}{a}\left(t-1 + \frac{1}{a}\right) + \left(1 + \frac{b}{a^2}\right) e^{a(t-1)}$$

la sustitución en la ecuación diferencial queda entonces de la siguiente manera:

$$x'(t)-ax(t) = -\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a}\, t + b\left(1 + \frac{b}{a^2}\right) e^{-a}\, e^{at}$$

sujeta a:

$$x(1) = -\frac{b}{a}\left(1 + \frac{1}{a}\right) + e^{a}\left(1 + \frac{b}{a^2}\right)$$

esta última ecuación, es de nueva cuenta, una ecuación lineal de primer orden y con condición inicial; por lo tanto, aun cuando las operaciones resultan un poco laboriosas se pueden efectuar sin grandes dificultades, y después de un poco de trabajo algebráico se tiene como solución, en el intervalo *[1,2]* la siguiente expresión:

$$x(t)=\frac{2b^2}{a^3}-\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}t+[1+\frac{b}{a^2}-(b+\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^2})e^{-a}]e^{at}-\frac{2b^3}{a^3}e^{-a}e^{at}+$$

$$+(b+\frac{b^2}{a^2})\,t\,e^{-a}\,e^{at}$$

Si se hace en ella $t=1$ se puede ver que de nueva cuenta, se obtiene la expresión calculada para $x(1)$.

En principio estas operaciones se podrían continuar, en intervalos de longitud 1, que es el valor del retardo, todo lo que se quiera, pero las operaciones se vuelven cada vez más y más laboriosas, por lo que se tendrá que buscar alguna información más útil de la solución, sin necesidad de hacer tantas operaciones.

Ejemplo 3.- Se verá ahora el modelo logístico de población.

$$y'(t) = -ar\ y(t-1) - rb\ y(t)\ y(t-1)$$

haciendo en esta ecuación $rb=c$ y $ar=k$, la expresión se transforma en:

$$y'(t) + c\ y(t)\ y(t-1) = -k\ y(t-1)$$

suponiendo que la condición inicial $\theta(t)$ es una función continua en el intervalo $[-1,0]$, entonces se puede escribir:

$$\theta(t-1) = y(t-1)$$

Si además:

$$\theta(0) = \theta_0 = \text{constante};$$

estos valores transforman a la ecuación con retardo en:

$$y'(t) + c\ \theta(t-1)\ y(t) = -k\ \theta(t-1)$$

que es una ecuacion diferencial ordinaria, lineal, de primer orden, con condición inicial $\theta(0) = \theta_0$.

Utilizando el método clásico para resolver las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primer orden, se sabe que su factor de integración es:

$$\mu(t) = e^{c \int_0^t \theta(s-1)ds}$$

así que entonces, en el intervalo *[0,1]*, la solución de este problema viene dada por:

$$y(t) = (\theta_0 + 1)e^{c \int_0^t \theta(s-1)ds} - 1$$

En este ejemplo se puede apreciar, una vez más, que el método de pasos se puede prolongar todo lo que se quiera, sin embargo, las expresiones que resultan de las operaciones de cálculo se vuelven rápidamente inmanejables, pues ya sólo el valor de la nueva condición inicial, en el intervalo *[0,1]*, es:

$$\theta(t) = (\theta_0 + 1)e^{-c \int_0^t \theta(s-1)ds} - 1$$

sustituyendo este valor en la expresión anterior, la nueva ecuación diferencial que hay que resolver es:

$$y'(t)+c\,[(\theta_0+1)e^{-c\int_0^{t-1}\theta(s-1)ds}-1]y(t)=-c[(\theta_0+1)e^{-c\int_0^{t-1}\theta(s-1)ds}-1]$$

expresión para la cual, aún cuando es de nueva cuenta una ecuación diferencial ordinaria, lineal, de primer orden y con condición inicial, es sumamente laborioso obtener información en el siguiente intervalo, pues las integrales como puede verse, complican grandemente la solución del problema.

Observación: es evidente que este proceso (método de pasos) puede continuarse avanzando en cada paso una unidad hacia la derecha, todo lo que se quiera; pero también es evidente que esta última solución exacta, contiene integrales que cada vez más se vuelven muy complicadas de manipular motivo por el cual será realmente dificil de obtener conclusiones acerca de la solución mediante este procedimiento, por ejemplo, si la solución es acotada, si oscila o qué pasa con la solución cuando $t \to \infty$; etc. Estas preguntas se responderán posteriormente.

Ejemplo 4.- Se ilustrará mediante el siguiente ejercicio cómo el método de pasos aplicado a la ecuación de Lotka-Volterra, facilita la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo.

Resolver el sistema:

$$x'(t) = a_1[1 - \frac{x(t)}{p}]\, x(t) - b_1\, x(t)\, y(t)$$

$$y'(t) = -a_2\, y(t) + b_2\, x(t-r)\, y(t-r)$$

sujeto a las condiciones iniciales definidas en $-r \le t \le 0$.

$$x(t) = \theta_1(t), \qquad y = \theta_2(t)$$

θ_1, θ_2 son funciones continuas en el intervalo $[-r,0]$.

Las expresiones que definen los argumentos retardados serán:

$$x(t-r) = \theta_1(t-r), \qquad y(t-r) = \theta_2(t-r)$$

y las condiciones iniciales vienen dadas por:

$$\theta_1(0) = \theta_{10} \text{ (constante)}, \qquad \theta_2(0) = \theta_{20} \text{ (constante)}$$

Al sustituir valores en la segunda ecuación del sistema que se quiere resolver queda:

$$y'(t) = -a_2\, y(t) + b_2\, \theta_1(t-r)\, \theta_2(t-r), \qquad y(0) = \theta_{20}$$

que resulta ser una ecuación diferencial ordinaria, lineal, de primer orden con condición inicial.

La solución de ésta ecuación diferencial lineal en el intervalo $[0,r]$, despúes de unas cuantas operaciones algebráicas, es:

$$y(t) = \theta_{20}\, e^{-a_2 t} + b_2 \int_0^t e^{a_2(\eta-t)}\, \theta_1(\eta-r)\, \theta_2(\eta-r) d\eta$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación del sistema y ordenando se tiene:

$$x'(t) + [b_1\, y(t) - a_1]\, x(t) = -\frac{a_1}{p}\, x^2(t)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden del tipo de Bernoulli.

Para resolver esta ecuación se hace:

$$x^{-1}(t) = z(t); \qquad x^{-2}(t)\, x'(t) = -z'(t)$$

así, sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$z'(t) + 2[a_1 - b_1\, y(t)]\, z(t) = \frac{2a_1}{p}$$

ecuación diferencial ordinaria de primer orden, cuya solución es :

$$z(t)=\theta_{10}^{-1}\, e^{-a_1 t \int_0^t y(s)ds} + \frac{a_1}{p}\, e^{-a_1 t \int_0^t y(s)ds} \int^t e^{a_1 \varphi - b_1 \int_0^t y(s)ds}\, d\varphi$$

donde;

$$\theta_{10}^{-1} = \frac{1}{\theta_{10}} = \frac{1}{x(0)} = z(0)$$

Se puede ver una vez más que, aún cuando el método de pasos parece ser bastante natural, sin embargo, las operaciones rápidamente se vuelven muy complicadas. ¿Que hacer entonces para obtener una información mayor acerca de la solución del problema planteado?.

Ante las dificultades generadas por la aplicación del método de pasos, será de gran interes determinar, por ejemplo, si la solución, en caso de existir, es acotada o no lo es, si oscila o no, ¿que ocurre con la solución cuando $t \to \infty$?, etc.

Ahora bien, no es del todo obvio que las condiciones iniciales escogidas sean las mas adecuadas o razonables para una ecuación diferencial con retardo. ¿Que hacer entonces para obtener información amplia y útil acerca de la solución de un problema de ecuaciones diferenciales con retardo?.

1.4 SEMEJANZAS Y DIFERENCIAS CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

Antes de dar una respuesta a las preguntas planteadas en el último párrafo de la sección anterior, se hará una comparación entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales con retardo con la intención de buscar algunos rasgos comunes o distintivos entre ellas.

Ejemplo 1.- El siguiente problema es sumamente interesante:

Sea la ecuación diferencial con retardo:

$$x'(t) = -x(t - \frac{\pi}{2})$$

en esta ecuación $\frac{\pi}{2}$ es el retardo y la ecuación lineal ordinaria de primer orden que se le parece es la ecuación:

$$x'(t) = -x(t).$$

Se sabe, que para una ecuación diferencial ordinaria de este tipo, toda solución es exponencial y decreciente.

Pero se ve que la ecuacion diferencial con retardo es satisfecha por la función:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias pues:

$$x'(t) = -c_1 sen\ t + c_2 cos\ t$$

y

$$x(t - \frac{\pi}{2}) = c_1 sen\ t - c_2 cos\ t$$

así que entonces:

$$x(t) = c_1\ cos\ t + c_2\ \ sen\ \ t$$

satisface:

$$x'(t) = -x(t - \frac{\pi}{2}).$$

Es muy interesante notar que, en ecuaciones diferenciales con retardo, de primer orden, pueden aparecer soluciones de tipo oscilatorio aún cuando los coeficientes de la ecuación sean constantes, cosa que no puede darse en una ecuación diferencial lineal de primer orden que tenga coeficientes constantes. Otra cosa muy interesante que se puede notar en este ejemplo es el que aparecen dos constantes arbitrarias en la expresión, en este caso, c_1 y c_2, característica particular que tienen las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Nótese además, que las funciones sen t y cos t son linealmente independientes.

Ejemplo 2.- Compárese ahora en terminos más generales, la ecuación diferencial lineal de primer orden con retardo, con su correspondiente en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Además en este ejemplo, se obtendrá información que permitirá ver que la condición inicial para una ecuación diferencial con retardo debe ser diferente a la que se emplea como condición inicial en una ecuación diferencial ordinaria.

Sea entonces la ecuación;

$$x'(t) - ax(t) = bx(t-1) \qquad (iii)$$

en donde se tiene un retardo $r = 1$ y se quiere comparar con la ecuación diferencial ordinaria que quedaría, si se elimina el retardo. i.e.

$$x'(t) - (a + b)x(t) = 0$$

Se sabe que para ésta última ecuación toda solucion es de tipo exponencial de la forma $e^{\lambda t}$ para ciertos valores de λ, y se quiere saber si alguna exponencial $e^{\lambda t}$ puede ser, también solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden con retardo.

Si se desea que $e^{\lambda t}$ sea solución de la ecuación con retardo, deberá satisfacerla, esto es:

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} \qquad x(t-1) = e^{-\lambda}e^{\lambda t}$$

así que sustituyendo en la ecuación con retardo queda:

$$\lambda e^{\lambda t} - ae^{\lambda t} = be^{-\lambda}\, e^{\lambda t}$$

dividiendo por $e^{\lambda t} \neq 0$ queda:

$$\lambda - a = be^{-\lambda} \qquad (iv)$$

por tanto para que $e^{\lambda t}$ sea solución de la ecuación diferencial con retardo (iii), se necesita que λ satisfaga la ecuación (iv).

Observación: la diferencia que se nota inmediatamente es que en la ecuación diferencial con retardo, la ecuación característica es de tipo trascendente; en cambio, en la correspondiente ecuación diferencial ordinaria, el polinimio característico, es una ecuación algebráica de primer grado.

A esta ecuación a semejanza de lo que ocurre con las ecuaciones diferenciales ordinarias, se le denomina la **ecuación característica** de la ecuación diferencial con retardo.

Mediante las operaciones que se realizarán a continuación, se verá una gran diferencia entre el espacio de las soluciones de una ecuación con retardo y el correspondiente a las ecuaciones diferenciales ordinarias. Así que:

Se complementará el problema calculando los valores de los coeficientes a y b de la ecuación diferencial *(iii)* si se quiere que la exponencial $e^{\lambda t}$ sea una solución, simultáneamente para los valores $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

Haciendo unas cuantas operaciones algebráicas es fácil determinar que los coeficientes a y b deberán tener la forma siguiente:

$$a = \frac{e}{e-1}\ ; \qquad b = \frac{e}{1-e}$$

así que entonces para los valores preestablecidos de λ queda que tanto la función $x_1(t) = 1$ como $x_2(t) = e^t$, son soluciones de la ecuación diferencial *(iii)* para los valores de a y b calculados arriba. Nótese que 1 y e^t son funciones linealmente independientes en $\mathbb{R}$ y que además, simultáneamente, satisfacen la ecuación diferencial planteada, cosa que no es posible en la ecuación diferencial ordinaria de primer orden, con la cual se está comparando. Así que entonces, el espacio de la soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con retardo es al menos de dimensión dos.

Se recordará ahora el teorema de la superposición de soluciones para las ecuaciones diferenciales ordinarias y se aplicará a la ecuación diferencial con retardo (*iii*).

Es bastante fácil ver mediante unas cuantas operaciones sencillas que la función:

$$x_3(t) = c_1 + c_2\, e^t$$

es también solución de la ecuación con retardo, y se tratará de calcular los valores de c_1 y c_2 mediante **condiciones iniciales:**

$$x(0) = x_0 \text{ y } x'(0) = x'_0$$

Ya que:

$$x_3(t) = c_1 + c_2\, e^t$$

sólo tiene dos constantes de integración, parecería ser que con dos condiciones iniciales dadas se puede calcular c_1 y c_2 pero se verá que no es suficiente con esto.

Como x_3 satisface $x_3(0) = x_0$ y $x'_3(0) = x'_0$ quedará:

$$x_0 = c_1 + c_2$$

de aqui se sigue que:

$$c_1 = x_0 - c_2$$

y sustituyendo en el valor de $x_3(t)$ queda:

$$x_3(t) = x_0 + c_2(e^t - 1)$$

ahora bien, como:

$$x_3'(t) = c_2 e^t,\ x_3(t-1) = x_0 + c_2(e^{-1} e^t - 1)$$

y sustituyendo los valores de *a* y *b* calculados antes quedará:

$$x_3'(t) - ax_3(t) = bx_3(t-1)$$

lo que se transforma en:

$$c_2 e^t - \frac{x_0 e}{e-1} - \frac{c_2 e e^t}{e-1} + \frac{ec_2}{e-1} = \frac{ex_0}{1-e} + \frac{c_2 e^{-1} e^t e}{1-e} - \frac{ec_2}{1-e}$$

simplificando queda así:

$$\frac{c_2 e^t}{1-e} = \frac{c_2 e^t}{1-e}$$

que es una identidad para el valor de c_2 de manera que la condición $x'(0) = x_0'$ puede ser reemplazada por cualquier otra condición !.

Esto debe hacer reflexionar acerca de la unicidad de la solución de las ecuaciónes diferenciales ordinarias, con respecto a las ecuaciónes con retardo. Es decir, en una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden, es suficiente, para obtener solución única, como es el caso, que se de sólo una condición inicial, como por ejemplo $x(0) = x_0$, cosa que en una ecuación diferencial con retardo no es suficiente, pues como se ve, se pueden encontrar muchas soluciones que satisfagan la misma condición inicial.

Otra notable diferencia entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales con retardo es que en las primeras, la información que se obtiene de la solución se puede utilizar, tanto para valores hacia adelante del valor inicial dado, como para valores hacia atras del mismo valor inicial. Véase lo que pasa en la siguiente ecuación diferencial con retardo.

Ejemplo 3.- Sabiendo que $\theta(t) = k \neq 0$ y que satisface la ecuación:

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-1) \qquad a \neq -b \quad y \quad b \neq 0$$

en el intervalo $[-1,0]$, se quiere ver si alguna extensión continua de esta función satisface también la ecuación para el intervalo $[-2,-1]$.

Como $\theta(t) = x(t) = k$ en el intervalo $[-1,0]$ y además es solución; por tanto: $x'(t) = 0$, así que sustituyendo en la ecuación diferencial con retardo, esta quedará de la siguiente manera:

$$0 = ak + bx(t-1)$$

de dónde:

$$x(t-1) = -\frac{a}{b}k \qquad t \in [-1,0]$$

de aqui se puede obtener:

$$x(t) = -\frac{a}{b}k \qquad t \in [-2,-1].$$

Haciendo $t = -1$, se obtiene:

$$x(-1) = -\frac{a}{b}k$$

pero de la condición inicial se sabe que:

$$x(t) = k \qquad \text{en } [-1,0]$$

por lo tanto $x(-1) = k$.

Esto quiere decir que la función que resolvía la ecuación en $[-1,0]$, al extenderla hacia atrás, al intervalo $[-2,-1]$, pierde la continuidad en el punto $t = -1$, pues de acuerdo con las hipótesis para a y b, se tiene que:

$$x(-1) = k \quad y \quad x(-1) = -\frac{a}{b}k$$

y como $a \neq b$, esto es una contradicción; por lo tanto, la solución hacia atrás no es continua en $t = -1$.

Ejemplo 4.- Sea ahora el problema siguiente en el que se tratará de ilustrar de manera más clara lo que ocurre en una ecuación diferencial con retardo cuando su condición inicial se quiere emplear para calcular valores de la solución en tiempos anteriores al retardo ($t \leq t_0$ o extensión hacia atrás).

Sea la ecuación diferencial con retardo:

$$x'(t) = b(t)\, x(t-1) \qquad \forall\, t \geq 0$$

dónde el coeficiente $b(t)$ está dado por la siguiente función:

$$b(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 6t(t-1) & 0 < t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

nótese que la $b(t)$ así definida, es continua en $\mathbb{R}$.

Ahora supóngase que $x(t) = k$ (constante), es solución de la ecuación diferencial con retardo para $t \leq 0$. Esto quiere decir que la historia del fenómeno que se quiere modelar por medio de la ecuación diferencial con retardo dada, es constante antes de $t=0$ y con ella se quiere obtener la solución para $t \geq 0$.

Como $b(t) = 0$ para $t \leq 0$, entonces:

$$\theta(t) = x(t) = k$$

satisface la ecuación diferencial con retardo, pues, como $\theta(t-1)=k$ se tiene, sustituyendo:

$$x'(t) = 0 = 0 * k = 0$$

expresión válida para $t \leq 0$, pues en éste intervalo, $b(t) = 0$.

Ahora calcúlese la solución en el intervalo $(0,1]$, dónde:

$$b(t) = 6t(t-1), \qquad \theta(t) = x(t) = k, \qquad \theta(t-1) = k$$

entonces se tendrá:

$$x'(t) = 6t(t-1)\ k \qquad t \in (0,1]$$

integrando esta expresión respecto a t y como el valor de $x(0^+) = k$ se tiene:

$$x(t) - k = 6k \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^t$$

de donde:

$$x(t) = k + 6k \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]$$

Si se evalúa esta expresión en $x=1$ queda que $x(1) = 0$, así que, la solución en el intervalo $(0,1]$, se comportará de acuerdo con la ecuación:

$$x(t) = k\ (1 + 2t^3 - 3t^2)$$

expresión que en $t = 1$ es igual a cero.

Ahora para $t > 1$, como $b(t) = 0$ y $x(1) = 0$, se tendrá la ecuación diferencial reducida a la forma:

$$x'(t) = 0, \quad \text{con condición inicial} \quad x(1) = 0$$

expresion que se sabe tiene como única solución, para todo $t > 1$, la solución trivial $x(t) \equiv 0$.

Podemos concluir entonces que, dada la ecuación diferencial con retardo:

$$x'(t) = b(t)\ x(t-1)$$

con condición inicial $\theta(t) = k$ (cte.) y con la $b(t)$ expresada como antes, el comportamiento de la solución de la ecuación en el intervalo $t \leq 0$, es el de una constante k **arbitraria**, cualquiera que sea ella. Al pasar al intervalo $(0,1]$, la solución de la ecuación adopta la forma de un polinomio de tercer grado en este caso, que al llegar al valor $t = 1$, hace que la solución se vaya al cero y de aquí en adelante $(t \geq 1)$, la solución se mantiene siempre constante e igual a cero.

Como la función $\theta(t) = k$, definida en $[-1,0]$, no es única, dado que k es arbitraria, entonces cualquier constante se comportará de manera análoga. Por tanto si θ es la extensión de la solución hacia (la izquierda) atrás, en general **no es única**, aún cuando se haya especificado como condición inicial θ continua para $t \leq 0$.

Obsérvese que si se especifica $x(t) = \theta(t) \neq 0$ en el intervalo $[1,2]$, el ejemplo muestra la no existencia de la solución hacia atrás.

Se puede ver también de manera análoga, que si solo se especifica $x(1) = x_0 \neq 0$, tampoco existe solución para $t \leq t_0$.

Ejemplo 5.- De hecho, si una solución de la ecuación:

$$x'(t) = x(t-1)$$

existe en $(-\infty,0]$; ésta, en general, **no es única**; aún cuando se especifiquen los valores de x y todas sus derivadas en $t=0$.

Se mostrará esto con el siguiente ejemplo:

En la ecuación diferencial con retardo:

$$x'(t) = x(t-1) \qquad t_0 = 0$$

considérese como condición inicial:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t = -1 \\ e^{-t^{-2}-(t+1)^{-2}} & -1 < t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \qquad \theta:[-1,0] \to \mathbb{R}$$

calcúlese la extensión hacia atrás de la solución, en los intervalos $[-1,0]$, $[-2,-1]$, $[-3,-2]$, etc.

Solución:

Por sencillez en la notación, se designa:

$$h(t) = -t^{-2} - (t+1)^{-2}$$

entonces:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t = -1 \\ e^{h(t)} & -1 < t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Esta función es continua en el intervalo $[-1,0]$, además como es exponencial, es infinitamente diferenciable, pues $h(t)$ lo es en $(-1,0)$; por lo tanto $\theta(t)$, que es la composición de la exponencial con $h(t)$, es continua. Además, como en -1 y en 0, θ, θ', θ'', etc., son todas cero; θ así definida, es una función que, siendo solución, es infinitamente diferenciable y tiene todas sus derivadas iguales a cero, tanto para los valores $t=0$ como $t=-1$.

Calculando $x(t-1)$ (la extensión de la solucion hacia atrás) a partir de la ecuación dada, en el intervalo $[-1,0]$ se tiene que:

$$x(t-1) = x'(t).$$

Haciendo la sustitución $t_1 = t-1$, se tiene:

$$x(t_1) = x'(t_1+1) = \theta'(t_1+1), \qquad t_1 \in [-2,-1]$$

Calculando ahora algunas derivadas de θ, que se necesitarán a continuación:

$$\theta'(t) \quad \begin{cases} 0 & t = -1 \\ h'(t)\, e^{h(t)} & -1 < t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

se puede ver que en $(-1,0)$:

$$\theta'(t) = h'(t)\, e^{h(t)}$$

$$\theta''(t) = e^{h(t)} \left[h''(t) + [h'(t)]^2 \right] = \theta(t) \left[h''(t) + [h'(t)]^2 \right]$$

$$\theta^{(3)}(t) = \theta(t)\left[h^{(3)}(t) + 3h'(t)h''(t) + [h'(t)]^3\right]$$

y así sucesivamente ...

Ahora volviendo al problema, se tratará de graficar la función θ en el intervalo $[-1,0]$ y las demás soluciones hacia atrás que se irán calculando.

Se puede ver que la función θ tiene un máximo en el valor de t tal que θ' es igual a cero, pero para ello se necesita que:

$$h'(t) = \frac{2}{t^3} + \frac{2}{(t+1)^3} = 0$$

Fácilmente se ve que $t = -\frac{1}{2}$ es una solución, por lo tanto θ tiene un máximo en $t = -\frac{1}{2}$. También se puede ver, mediante operaciones sencillas, que θ sólo tiene valores positivos en $[-1,0]$ y su gráfica se muestra en la figura 1.

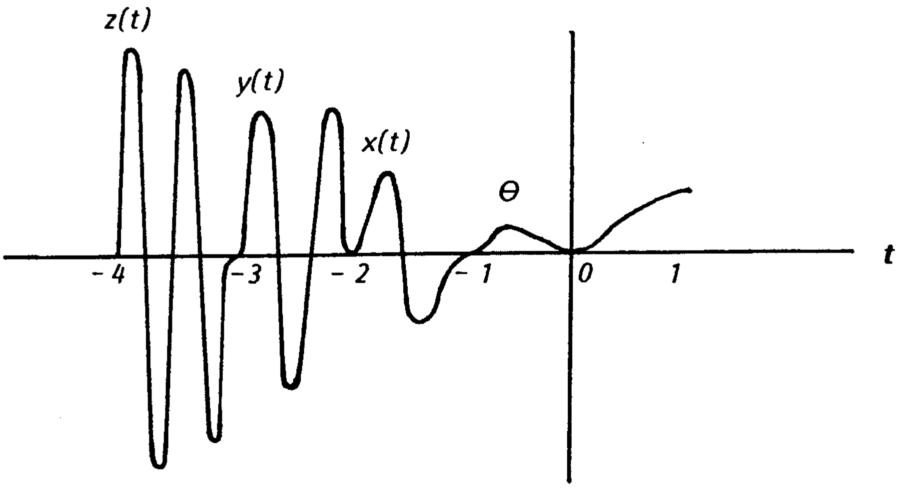


figura 1

Ahora se calculará la extensión de la solución en el intervalo $[-2,-1]$ haciendo $t = t+1$.

$$x(t) = \theta(t+1)\ h'(t+1)$$

como θ es una exponencial, es positiva y

$$h'(t+1) = 2\left(\frac{1}{(t+1)^3} + \frac{1}{(t+2)^3}\right)$$

La gráfica de la función $x(t)$ en éste intervalo resulta ser un poco más complicada, pues si se desea encontrar máximos o mínimos hay que calcular $x'(t)$ y resolver la ecuación que resultaría al hacer éste valor igual a cero, lo cual dificulta mucho el problema. Se tratará de obtener información cualitativa a partir de la ecuación diferencial.

Como:

$$x(t-1) = x'(t)$$

esto quiere decir que el valor de la solución en el punto $t-1$, depende de lo que valía la derivada en el instante t, que es una unidad mayor que $t-1$ y como en $t = -\frac{1}{2}$, el valor de la derivada, $x'(-\frac{1}{2}) = 0$, entonces la ordenada en $-\frac{3}{2}$; $(x(-\frac{3}{2}))$, también será igual a cero.

Ahora se calculará el valor de $h'(t+1)$:

$$\text{si} \quad t \to -1^-, \qquad \lim_{t \to -1^-} h'(t+1) < 0$$

y exactamente lo mismo ocurre cuando t se acerca a $-\frac{3}{2}^+$. Por tanto, en el intervalo $(-\frac{3}{2}, -1)$ la gráfica está enteramente por debajo del eje t. En cambio, si t se acerca a $-\frac{3}{2}^-$, $h'(t+1)$ cambia a positivo y si t se acerca a -2^+; $h'(t+1)$ conserva el signo. Esto quiere decir que en el intervalo abierto $(-2,-\frac{3}{2})$, la gráfica se encuentra por arriba del eje t (ver gráfica 1).

Analizando ahora el intervalo $[-3,-2]$, el valor de la solución, que ahora se designará $y(t)$, dependerá de la derivada de $x(t)$ en el intervalo $[-2,-1]$; esto es:

$$y(t-1) = [\theta(t+1)\ h'(t+1)]'$$

Haciendo $t = t + 1$ y ordenando la expresión queda:

$$y(t) = \theta(t+2)\left[h''(t+2) + [h'(t+2)]^2\right] \qquad t \in [-3,-2]$$

Como el análisis de esta ecuación es sumamente laborioso, será mejor obtener de nuevo, aproximaciones cualitativas por medio del comportamiento dado por la ecuación $x(t-1) = x'(t)$.

Ya que en el intervalo $[-2,-1]$, existen dos valores en los que $x'(t)=0$, entonces en $[-3,-2]$ habrá dos puntos en los que $y(t)$ es igual a cero y si se recorre la gráfica de $x(t)$ hacia la izquierda hasta encontrar el primer valor crítico se ve que la pendiente es positiva; por lo tanto al recorrer el intervalo desde -2 hacia la izquierda, como $y(t) = x'(t-1)$, entonces la ordenada $y(t)$, tiene el mismo signo que x', es decir, $y(t)$ es positiva.

Ahora, al pasar del primer valor crítico hacia la izquierda hasta encontrar el segundo valor crítico se ve que la pendiente es negativa; por lo tanto la gráfica de y está en la parte negativa del eje x.

Así se puede calcular la gráfica aproximada de $y(t)$ y posteriormente la de $z(t)$, hacia la izquierda todo lo que se quiera.

Nótese que la extensión hacia atrás de la solución, comienza a oscilar cada vez más, en intervalos de longuitud 1, pues se ve que en el intervalo $[-4,-3]$ habrá ahora tres ceros de la función $z(t)$ pues $y(t)$ tiene tres puntos críticos, por lo tanto la gráfica de $z(t)$ tendrá un total de cuatro oscilaciones en $[-4,-3]$.

Lo más notable es que la función θ así definida multiplicada por cualquier constante, también es solución y además satisface las condiciones: $x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = 0$.

Recapitulando, se puede decir que cada una de las soluciones que se han encontrado pueden extenderse, de manera natural hacia el futuro por el método de pasos, así que estas satisfarán la ecuación diferencial con retardo más las condiciones iniciales.

Pero también cualquier constante multiplicada por dicha solución es a su vez nueva solución, con la misma c ! por lo tanto, la solución no será única.

Como se vió en el ejemplo 4 de esta sección, si solamente se especifica $x(t_0) = x_0$ como condición inicial y se quiere encontrar la extensión de la solución hacia la izquierda de t_0, se puede llegar al caso extremo de que tal solución ni siquiera exista. Tal hecho, también puede darse en sistemas de cuaciones diferenciales conretardo y con coeficientes constantes, lo que se mostrará en el siguiente:

Ejemplo 6.- Sea el sistema de ecuaciones diferenciales con retardo debido a V.M.Popov:

$$x_1'(t) = 2x_2(t) \qquad (i)$$

$$x_2'(t) = - x_3(t) + x_1(t-1) \qquad (ii)$$

$$x_3'(t) = 2x_2(t-1) \qquad (iii)$$

y sea $x(t)$ su solución para todo $t \geq t_1$.

De la ecuación (i) se tiene que para $t \geq t_1 + 1$:

$$x_1'(t-1) = 2x_2(t-1)$$

sustituyendo en la ecuación (iii) queda:

$$-x_3'(t) + x_1'(t-1) = 0.$$

integrando esta ecuación con respecto a t se tiene:

$$-x_3(t) + x_1(t-1) = c_1 \qquad (iv)$$

donde c_1 es arbitrario y sustituyendo en la ecuación (ii) se tiene:

$$x_2'(t) = c_1$$

por tanto:

$$x_2(t) = c_2 + c_1 t \qquad t \geq t_1 + 1$$

reemplazando en (i) se tiene:

$$x_1'(t) = 2c_2 + 2c_1 t$$

de dónde:

$$x_1(t) = c_3 + 2c_2 t + c_1 t^2 \qquad t \geq t_1 + 1$$

así que sustituyendo los valores en (iv) queda:

$$x_3(t) = -c_1 + x_1(t-1)$$

por lo tanto se tiene:

$$x_3(t) = c_3 - 2c_2 + 2\,(c_2 - c_1)\,t + c_1\,t^2 \qquad\qquad t \geq t_1 + 2$$

De manera que la solución del sistema planteado está dada por los valores así calculados para x_1, x_2 y x_3; ahora bien, es fácil verificar por simple sustitución, que:

$$x_1(t) - 2x_2(t) - x_3(t) = 0 \qquad\qquad t \geq t_1 + 2$$

por tanto si uno especifica condiciones iniciales en $t{=}t_0$, tales que no se satisfaga esta ecuación, entonces ¡ ni siquiera se podrá encontrar solución al sistema planteado en $[-\infty, t_0]$!.

Esto quiere decir que, aún en un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo, con coeficientes constantes, tan simple como el ejemplo mostrado , aún cuando se especifiquen el mismo tipo de condiciones iniciales que en las ecuaciones diferenciales ordinarias, la solución podría quizá, ni siquiera existir, lo que motiva condiciones iniciales muy particulares para las ecuaciones diferenciales con retardo.

Aún cuando en los ejemplos anteriores hemos observado algunas diferencias notables en las ecuaciones diferenciales con retardo, con respecto a lo que conocemos de ecuaciones diferenciales ordinarias, el siguientre teorema nos permitirá establecer una amplia comparación entre las ecuaciones diferenciales lineales con retardo y con coeficientes constantes con una ecuación lineal de primer orden y ordinario.

Ejemplo 7.- Teorema; en la ecuación diferencial con retardo:

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-r) \qquad\qquad t > 0$$

donde a y b son constantes arbitrarias dadas y r es el retardo, constante, con condición inicial $x(t) = \theta(t)$, definida en $[-r,0]$, $\theta(t)$, continua. Demostrar que:

a).- Existe solución única para $t \geq 0$.

b).- Si $a < 0$ y $|b| \leq |a|$, probar que la solución es acotada

c).- Si $a < 0$ y $0 < b < |a|$, probar que toda solución tiende a cero exponencialmente, cuando $t \to \infty$.

Prueba:

a).- Como $x(t) = \theta(t)$ es continua en $[-r,0]$, entonces se tiene que $x(t-r) = \theta(t-r)$ es continua en $[0,r]$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene:

$$x'(t) = ax(t) + b\theta(t-r) \qquad t \geq 0 \tag{1.7}$$

esto resulta ser una ecuación diferencial ordinaria, lineal de primer orden y se sabe, por el teorema de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias, que la solución existe y es única para $t \geq 0$, por tanto, la ecuación diferencial con retardo tiene solución única en el intervalo $t \geq 0$.

b).- Ahora bien para probar la segunda parte de este teorema se define una nueva función $v(t):\mathbb{R} \to [0,\infty)$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$v(t) = x^2(t) + |a| \int_{t-r}^{t} x^2(s)\, d(s) \tag{1.8}$$

siendo $x(t)$ la solución de la ecuación diferencial planteada, sujeta a la condición inicial $x(0) = \theta_0$.

Se puede ver fácilmente, que la $v(t)$ así definida es no negativa pues es la suma de dos cantidades no negativas.

Se probará ahora que $v'(t) \leq 0$, con lo cual podremos asegurar que $v(t)$ es no negativa y no creciente.

Derivando ambos miembros de la ecuación (1.8) con respecto a t:

$$v'(t) = 2x(t)\ x'(t) + |a|\ (x^2(t) - x^2(t-r))$$

y sustituyendo en (1.7):

$$v'(t) = 2x(t)\left[-|a|\ x(t) + bx(t-r)\right] + |a|\ x^2(t) - |a|\ x^2(t-r)$$

$$v'(t) = -|a|\ x^2 + 2b\ x(t)\ x(t-r) - |a|\ x^2(t-r)$$

ahora bien, como $|b| \leq |a|$ y $|a| = -a$, entonces:

$$v'(t) \leq -|a|\ x^2(t) \mp |a|(2x(t)\ x(t-r)) - |a|\ x^2(t-r).$$

Haciendo operaciones se tiene:

$$v'(t) \leq -|a|\ [x(t) \mp x(t-r)]^2 \leq 0$$

por tanto $v(t)$ es una función no negativa con derivada menor o igual que cero, entonces $v(t)$ es no creciente y por lo tanto tendrá su máximo en el punto donde la función inicia, esto es en $t=0$ de manera que, como $x(0) = \theta(0)$, se tendrá :

$$v(0) = \theta^2(0) + |a| \int_{-r}^{0} \theta^2(s)ds$$

y como $x^2(t) \leq v(t)$; entonces:

$$|x(t)| \leq \left[\theta^2(0) + |a| \int_{-r}^{0} \theta^2(s)ds \right]^{\frac{1}{2}}$$

¡$x(t)$ es acotada !.

c).- Por último si $a < 0$ y $0 < b < |a|$, se probará que toda solución se va a cero cuando t tiende a $+\infty$.

Para ello, se define la función $\Delta:\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por medio de la siguiente regla de correspondencia:

$$\Delta(\lambda) := \lambda - a - be^{-\lambda r} \tag{1.9}$$

ésta es una función continua en dónde:

$$\Delta(0) = -a - b = |a| - b > 0$$

$$\Delta(a) = -a - a - be^{-ra} = -be^{-ra} < 0$$

entonces $\Delta(\lambda)$ es una función continua, positiva en $\lambda=0$ y negativa en $\lambda=a$; por tanto por la continuidad de Δ, existe un número γ contenido en $(0,|a|)$ tal que $\Delta(-\gamma) = 0$. Dicho número satisface la condición:

$$-\gamma - a - be^{\gamma r} = 0$$

$$be^{\gamma r} = -(a+\gamma) \tag{1.10}$$

Sea ahora $z(t) = x(t)\ e^{\gamma t}$ siendo γ raíz de la ecuación (1.10) y $x(t)$ solución de la ecuación (1.7). Entonces:

$$x(t) = z(t)\ e^{-\gamma t}$$

$$x'(t) = -\gamma z(t)\ e^{-\gamma t} + z'(t)\ e^{-\gamma t}$$

$$x(t-r) = z(t-r)\ e^{-\gamma(t-r)} = z(t-r)\ e^{\gamma r}\ e^{-\gamma t}$$

sustituyendo en la ecuación (1.7) se tiene:

$$z'(t)\ e^{-\gamma t} - \gamma z(t)\ e^{-\gamma t} = az(t)\ e^{-\gamma t} + b\ e^{\gamma r}\ e^{-\gamma t}\ z(t-r)$$

haciendo algunas operaciones elementales se obtiene:

$$z'(t) = (a + \gamma)\ z(t) - (a + \gamma)\ z(t-r); \qquad t \geq 0$$

En la operaciones realizadas en b), se probó que en una ecuación de este tipo todas las soluciones son acotadas, de dónde se sigue que:

$$z(t) = x(t)\ e^{\gamma t}$$

es acotada por lo que:

$$x(t) = z(t)\ e^{-\gamma t}$$

función que se va a cero si t se va a $+\infty$.

El interés que este problema tiene es que se sabe como se comporta la solución de toda ecuación diferencial lineal de primer orden con un retardo y con coeficientes constantes. En otras palabras, si en una ecuación diferencial lineal de primer orden, existe un término con retardo y los coeficientes a y b satisfacen los reqisitos planteados en el enunciado,entonces toda solucione es acotada y exponencialmente tiende a cero cuando t tiende a infinito; es decir, la influencia del retardo despúes de todo, no arruinará la solución del problema planteado con una ecuación diferencial con retardo.

Haciendo un resumen de los ejemplos 1 a 7 mostrados con anterioridad, se podrán notar, entre otras, las siguientes:

SEMEJANZAS

1.- Los conceptos de orden y linealidad que se tienen en las ecuaciones diferenciales ordinarias, se transladan sin mayor trámite a las ecuaciones diferenciales con retardo.

2.- El polinomio característico de una ecuación diferencial lineal ordinaria, tiene una extensión, de manera natural, a la ecuación característica en las ecuaciones diferenciales con retardo.

3.- Los teoremas de extensión de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria tienen validéz en su aplicación, para valores simétricos con respecto al tiempo i.e. son válidos para calcular soluciones tanto a la derecha,

DIFERENCIAS

1.- En ecuaciones diferenciales con retardo, lineales de primer orden y con coeficientes constantes pueden aparecer soluciones de tipo oscilatorio (véase ejemplo 1).

2.- La ecuación característica de una ecuación diferencial lineal con retardo, es de tipo trascendente y posiblemente con un número infinito de raíces en $\mathbb{C}$; de ésta manera la dimensión del espacio de soluciones de la ecuación con retardo es, posiblemente, de dimensión infinita (véanse ejemplos 1 y 2).

3.- En ecuaciones diferenciales con retardo las extensiones de la solución hacia atrás si éstas existen, (lo que no como a la izquierda de t_0.

4.- La unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se garantiza (siendo el lado derecho una función continua y Lipschitz con respecto a la variable espacial) con una condición inicial de la forma

$$x(t_0) = t_0$$

5.- Cuando la condición

$$x(t) = \theta(t):[t_0-r, t_0] \to \mathbb{R}$$

se reemplaza por el término que contiene al retardo, tal ecuación se transforma en una ecuación diferencial ordinaria

6.- Con ciertas condiciones sobre los coeficientes de la ecuación lineal de primer orden con retardo (véase ejemplo 7) todas las soluciones de la ecuación diferencial con retardo son acotadas y la influencia que tiene el retardo sobre la solución, a final de cuentas no permite que la solución deje de existír o tienda a infinito.

siempre ocurre) en general no son únicas y pierden la continuidad (véanse ejemplos 3,4,5) y pueden oscilar grandemente para valores hacia la izquierda de t_0.

4.- En las ecuaciones diferenciales con retardo, aún cuando se especifique el valor de la solución y todas sus derivadas en el punto t_0, no son suficientes para garantizar la unicidad de la solución, sino que se necesita una condición de la forma:

$$x(t) = \theta(t):[t_0-r, t_0] \to \mathbb{R}$$

CAPITULO II

UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES Y CONDICIONES DE LIPSCHITZ PARA EL PROBLEMA BASICO INICIAL.

2.1 EL PROBLEMA BASICO INICIAL Y DEFINICION DE SOLUCION.

Se han visto en el capítulo anterior, algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales con retardo, y se ha encontrado, por el método de pasos, una solución. Se ha especificado una condición inicial pero no se ha reparado en cuestiones tales como; ¿cuándo existe una solución?, ¿es única?, ¿cuál es la mejor condición inicial? etc.

Primeramente, se dará respuesta al problema de la unicidad y para ello a continuación, se definirá el problema básico inicial, las condiciones de Lipschitz y se probarán algunos teoremas que se utilizarán en las demostraciones que se darán posteriormente.

Definición: Dados J un intervalo en $\mathbb{R}$ de la forma $[t_0,\beta)$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f:J \times \mathbb{D}^m \to \mathbb{R}^n$ una función continua, un número $\gamma \le t_0$, θ una función que mapea $[\gamma,t_0] \to \mathbb{D}$ y $g_j:[t_0,\beta) \to \mathbb{R}$ funciones continuas con $\gamma \le g_j(t) \le t$ para $j = 1, \ldots, m$.

Se considera la expresión:

$$x'(t) = f(t,x(g_1(t)),\ x(g_2(t)),\ \ldots\ ,\ x(g_m(t))) \tag{2.1}$$

dónde x es una función con valores n-vectoriales, ($g_j(t)$ se le llama un argumento retardado).

Conjuntamente con:

$$x(t) = \theta(t) \qquad \text{para} \qquad \gamma \le t \le t_0 \tag{2.2}$$

A las expresiones (2.1) y (2.2), se les define como el problema básico inicial.

Si se define $g_j(t) = t - r_j(t) \ge 0$ entonces a los $r_j(t) = t - g_j(t) \ge 0$ se les llaman retardos. (2.1) y (2.2) definen un sistema de n ecuaciones dieferenciales con m retardos.

Como a menudo se hará referencia a ellas es muy conveniente abreviar la notación; así que se simplificará de la siguiente manera.

Dado:

$$t \in [t_0, \beta)$$

y dada cualquier función:

$$\chi : [\gamma, t] \to \mathbb{D}$$

se define:

$$F(t, \chi_t) \equiv f(t, \chi\,(g_1(t)), \chi\,(g_2(t)), \ldots, \chi\,(g_m(t))),$$

así que entonces la ecuación (2.1) se transforma en:

$$x'(t) = F(t, \chi_t) \tag{2.3}$$

Por el momento (2.3) es una manera abreviada de escribir (2.1) y en el siguiente capítulo se hablará, más ampliamente de ésta notación.

Definición. Dado $\beta > t_0$. Una solución de (2.3) es una función diferenciable:

$$x:[\gamma,\beta_1) \to \mathbb{D}$$

para algún:

$$\beta_1 \in (t_0,\beta)$$

tal que:

$$i).- \quad x(t) = \theta(t) \qquad \text{para} \qquad \gamma \le t \le t_0$$

$$ii).- \quad x'(t) = F(t,x_t) \qquad \text{para} \qquad t_0 \le t < \beta_1$$

(Nota: $x'(t_0)$ es la derivada por la derecha en t_0).

La solución de (2.3) y (2.2) se dice que es única si cualesquiera dos soluciones que están definidas en el mismo dominio, coinciden entre sí tan lejos como ambas estén definidas.

Dado que:

$$f,\ g_1,\ \dots\ ,\ g_m$$

son funciones continuas, si x es una función continua que mapea $[\gamma,\beta_1) \to \mathbb{D}$ para alguna $\beta_1 \in (t_0,\beta]$, entonces:

$$F(t,\chi_t) = f(t,\ x(g_1(t)),\ \dots\ ,\ x(g_m(t)))$$

es una composición de funciones continuas y por lo tanto es continua. De aqui que, si x es una solución de las ecuaciones (2.2) y (2.3) entonces x satisface la expresión:

$$x(t)=\begin{cases} \theta(t) & \gamma \leq t \leq t_0 \\ \theta_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,x_s)ds & t_0 \leq t < \beta_1 \end{cases} \tag{2.4}$$

Esta ecuación integral es a menudo mas conveniente para trabajar que la expresión anterior y se empleará con mayor frecuencia para escribir la solución de la ecuación diferencial con retardo.

A fin de establecer unicidad, se definen:

2.2 CONDICIONES DE LIPSCHITZ.

CONDICION GLOBAL DE LIPSCHITZ.

Se dice que f satisface una condición de Lipschitz, en las variables espaciales, con constante k, en un conjunto $G \subset J \times \mathbb{D}^m$, si para todo:

$$(t,\ \xi_{(1)},\ \ldots,\ \xi_{(m)}) \qquad \text{y} \qquad (t,\ \bar{\xi}_{(1)},\ \ldots,\ \bar{\xi}_{(m)}) \qquad \text{en } G$$

se tiene:

$$\| f(t,\xi_{(1)},\ldots,\xi_{(m)}) - f(t,\bar{\xi}_{(1)},\ldots,\bar{\xi}_{(m)}) \| \leq k \max_{j=1,2,\ldots,m} \| \xi_{(j)} - \bar{\xi}_{(j)} \|$$

también se dice que f es Lipschitz en G.

(Se sabe que las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes asi que en lo sucesivo se usará como norma de un vector en $\mathbb{R}^n$ la siguiente:

$$\| \xi \| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_{(i)}| \;)$$

Nota: si f satisface la condición de Lipschitz sobre G y $t \in [t_0,\beta)$ χ, $\bar{\chi} : [\gamma,t] \to \mathbb{D}$ son tales que:

$$(t,\ \chi\,(g_1(t)),\ \chi\,(g_2(t)),\ \dots,\ \chi\,(g_m(t)))$$

y

$$(t,\ \bar{\chi}\,(g_1(t)),\ \bar{\chi}\,(g_2(t)),\ \dots,\ \bar{\chi}\,(g_m(t)))$$

están contenidas en G, entonces se sigue que:

$$\|F(t,\chi_t)-F(t,\bar{\chi}_t)\| \leq k \max_{j=1,\dots,m} \|\chi(g_j(t))-\bar{\chi}\;g_j(t))\| \leq k \sup_{\gamma \leq s \leq t} \|\chi(s)-\bar{\chi}(s)\|$$

Como la condición global de Lipschitz, raras veces se satisface para ecuaciones no lineales, se dará a continuación, una condición más débil llamada:

CONDICION LOCAL DE LIPSCHITZ.

Definición: se dice que $f{:}J \times \mathbb{D}^m \to \mathbb{R}^n$ satisface una condición local de Lipschitz en las variables espaciales, si para cada punto $(t_1,\ \alpha_{(1)},\ \dots,\ \alpha_{(m)}) \in J \times \mathbb{D}^m$ existen números $a > 0$ y $b > 0$, tales que:

$$A_j = \{\ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \|\ \xi - \alpha_{(j)}\| \leq b\ \} \qquad (j = 1,\ \dots,\ m)$$

es un subconjunto de $\mathbb{D}$ y f es Lipschitz sobre el conjunto $([t_1, t_1 + a] \cap J) \times A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$.

Nota: La condición local de Lipschitz es una condición menos restrictiva que la diferenciabilidad pero más restrictiva que la de continuidad sobre $J \times \mathbb{D}^m$.

EJEMPLOS.

Ejemplo 1.- Sea:

$$f(x) = |x| \qquad x \in \mathbb{R}$$

se sabe que f es continua en $\mathbb{R}$ y que f no es derivable en $x = 0$.

Para todo x, $y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

por tanto f es Lipschitz, con $k = 1$.

Ejemplo 2.- Sea:

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad x \in [0,\infty]$$

f es continua, sin embargo, f no es derivable en 0.

Tómese:

$$|f(x) - f(0^+)| = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x} = x * \frac{1}{\sqrt{x}} = |x - 0| * \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ahora, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty$, por lo tanto f no es Lipschitz.

Ejemplo 3.- Sea:

$$f(x) = \tan x \qquad\qquad x \in (0,\frac{\pi}{2})$$

f es continua, pero no es Lipschitz global en $(0,\frac{\pi}{2})$ ya que, a pesar de ser diferenciable en $(0,\frac{\pi}{2})$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) \to \infty$. Sin embargo f es localmente Lipschitz en cualquier punto interior x_0.

Tómese, por ejemplo x_0 en el intervalo $\mathbb{D} = [\frac{\pi}{8}, 3\,\frac{\pi}{8}]$. Entonces para todo $x,\ y \in \mathbb{D}$:

$$|f(x) - f(y)| = |\tan x - \tan y| \le k\ |x - y|$$

por tanto f es Lipschitz en $\mathbb{D}$, es decir f es localmente Lipschitz.

2.3 Lema de Gronwall.

Un lema que, como se verá más adelante, es de gran utilidad en la demostración de unicidad de la solución de una ecuación diferencial es el:

LEMA DE GRONWAL.

Si u y v, son funciones de variable real continuas, no negativas con dominio $\{t | t \ge t_0\}$ y existe una constante $M \ge 0$ tal que para todo $t \ge t_0$;

$$u(t) \leq M + \int_{t_0}^{t} u(s)\, v(s)\, ds$$

entonces:

$$u(t) \leq M\, e^{\int_{t_0}^{t} v(s)ds}$$

Demostración: supóngase primero $M > 0$. Entonces se tiene que para $t \geq 0$:

$$\frac{u(t)}{M + \int_{t_0}^{t} u(s)\, v(s)\, ds} \leq 1$$

Multiplicando por $v(t) \geq 0$, se tiene:

$$\frac{u(t)\, v(t)}{M + \int_{t_0}^{t} u(s)\, v(s)\, ds} \leq v(t)$$

integrando de t_0 a t queda:

$$\ln \left[M + \int_{t_0}^{t} u(s)\, v(s)\, ds \right] \leq \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds$$

tomando límites en el término izquierdo y aplicando la exponencial queda:

$$M + \int_{t_0}^{t} u(s)\, v(s)\, ds \leq M\, e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds}$$

empleando la propiedad transitiva de las desigualdades, en la hipótesis y esta última expresión, queda:

$$u(t) \leq M + \int_{t_0}^{t} u(s)\, v(s)\, ds \leq M\, e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds}$$

por lo tanto:

$$u(t) \leq M\, e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds}$$

ahora, tomando límites, haciendo que $M \to 0$, se tiene:

$$0 \leq u(t) \leq 0$$

por lo tanto:

$$u(t) = 0 \qquad \text{para} \qquad t \geq t_0$$

así que entonces queda probado el lema.

2.4 Unicidad de la solucion del problema basico inicial.

Ahora se probará el más elemental Teorema de Unicidad de la solución de la ecuación diferencial con retardo (2.3).

Teorema 1.- Sea:

$$f:[t_0,\beta) \times \mathbb{D}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

continua y localmente Lipschitz. Tómese:

$$g_j(t):[t_0,\beta) \rightarrow [\gamma,t] \qquad j = 1, \ldots,m$$

y

$$\theta:[\gamma,t_0] \rightarrow \mathbb{D}$$

continuas; entonces (2.3) y (2.2) tienen a lo más una solución en cualquier intervalo:

$$[\gamma,\beta_1) \qquad \text{dónde} \qquad t_0 < \beta_1 \leq \beta$$

Demostración: (por contradicción).

Supóngase que existen dos soluciones x y $\bar{x}$, diferentes entre si, y que mapean: $[\gamma,\beta_1) \rightarrow \mathbb{D}$ $(\bar{x} \neq x)$.

Como la condición inicial:

$$x(t) = \theta(t) \qquad \text{en} \qquad [\gamma,t_0]$$

es satisfecha por ambas soluciones, entonces se sigue que existe:

$$t \in (t_0,\beta_1) \qquad \text{tal que} \qquad x(t) \neq \bar{x}(t).$$

Llámese:

$$t_1 = inf \{ t \in (t_0,\beta_1) | \ x \neq \bar{x} \}$$

De aqui entonces que:

$$t_0 \leq t_1 < \beta_1$$

y de la continuidad de x, $\bar{x}$, se tiene:

$$x(t) = \bar{x}(t) \qquad \text{para} \qquad \gamma \leq t \leq t_1$$

Puesto que:

$$t_0 \leq t_1 < \beta_1$$

y $\mathbb{D}$ es abierto y

$$x(g_j(t_1)) \in \mathbb{D} \quad .$$

entonces existen números $a > 0$ y $b > 0$, tales que:

$$[t_1, t_1 + a] \subset [t_0, \beta_1)$$

y A_j, como se definió en la condición de Lipschitz, es un subconjunto de $\mathbb{D}$ para $j = 1, \ldots, m$ así que entonces f es Lipschitz en:

$$[t_1, t_1 + a] \times A_1 \times \ldots \times A_m$$

Sea k su constante de Lipschitz. Ahora, para todo:

$$\beta_2 \in (t_1, t_1 + a)$$

los puntos:

$$x(g_j(t)) \qquad \text{y} \qquad \bar{x}(g_j(t))$$

permanecen en A_j, para:

$$t_1 \leq t < \beta_2$$

y

$$j = 1, \ldots, m$$

pues f es Lipschitz; así que entonces: x y $\bar{x}$ satisfarán la ecuación (2.3) y se tiene:

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\| = \| \int_{t_1}^{t} [F(s,x(s))-F(s,\bar{x}(s))]ds \| \leq k \int_{t_1}^{t} \sup_{\gamma \leq \sigma \leq s} \| x(\sigma)-\bar{x}(\sigma)ds$$

si se define:

$$V(t) = \sup_{\gamma \leq s \leq t} \| x(s) - \bar{x}(s) \|$$

entonces se tiene :

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leq k \int_{t_1}^{t} V(s)ds, \qquad t_1 \leq t < \beta_2$$

ahora bien, por el lema de Gronwall se sigue que:

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| = 0$$

es decir:

$$x(t) = \bar{x}(t)$$

para todo t que pertenece al intervalo $[t_1,\beta_2)$ contradiciendo la definición que se dió para t_1, por tanto:

$$x(t) = \bar{x}(t) \qquad \text{para todo} \qquad t \in [\gamma_1,\beta_1) \qquad \blacksquare$$

Una manera muy rápida y fácil de saber, si una función satisface o no una condición local de Lipschitz, viene dada por el siguiente:

LEMA 2. Si:

$$f:[t_0,\beta) \times \mathbb{D}^m \to \mathbb{R}^n$$

tiene primeras derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos, excepto posiblemente respecto al primero, entonces f es localmente Lipschitz.

Demostración. Sea:

$$(t_1,\alpha_{(1)}, \ldots, \alpha_{(m)}) \in J \times \mathbb{D}^m = [t_0,\beta) \times \mathbb{D}^m$$

Tómese $a > 0$ suficientemente pequeña de tal manera que:

$$t_1 + a < \beta$$

y tómese $b > 0$, suficientemente pequeño, de tal manera que siempre que:

$$\| \xi - \alpha_{(j)} \| \leq b$$

para algún $j = 0, 1, \ldots, m$, entonces $\xi \in \mathbb{D}$.

(Esto puede hacerse gracias a que $\mathbb{D}$ es abierto). De aquí entonces se tiene que:

$$J_1 \equiv [t_1, t_1 + a] \cap J$$

es un subintervalo de J, cerrado y acotado. También se tiene que:

$$A_j = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi - \alpha_{(j)}\| 0 \leq b\} \subset \mathbb{D}$$

es cerrado y acotado, de aquí que:

$$J_1 \times A_1 \times \ldots \times A_m \subset J \times \mathbb{D}^m$$

es cerrado y acotado, y por el teorema de las funciones continuas sobre un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$, se sigue que cada una de las derivadas parciales de f, es acotada en:

$$J_1 \times A_1 \times \ldots \times A_m$$

(Observación: en la mayoría de los casos en los cuales se encuentra esto, será claro que esas derivadas parciales son acotadas y fácilmente se encontrará una cota sin recurrir al teorema citado).

Sea B una cota común para $|D_{l+1} f_i|$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y $l = 1, \ldots, mn$.

El conjunto $A_1 \times \ldots \times A_m$ es convexo, pues si $(\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(m)})$ y $(\bar{\xi}_{(1)}, \ldots, \bar{\xi}_{(m)})$ son dos puntos cualesquiera de $A_1 \times \ldots \times A_m$, $0 \leq s \leq 1$ y

$$\zeta_{(j)}(s) \equiv (1-s)\,\xi_{(j)} + s\,\bar{\xi}_{(j)} \qquad \text{para} \qquad j = 1, \ldots, m$$

entonces:

$$\|\zeta_{(j)}(s)-\eta_{(j)}(s)\| = \|(1-s)(\xi_{(j)}-\eta_{(j)}) + s(\bar{\xi}_{(j)}-\eta_{(j)})\| \leq (1-s)b+sb=b$$

de dónde se sigue que:

$$(\zeta_{(1)}(s), \ldots, \zeta_{(n)}(s)) \in A_1 \times \ldots \times A_m$$

por tanto, por el teorema del valor medio para una función de n variables, si:

$$(t, \xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(m)}) \text{ y } (t, \bar{\xi}_{(1)}, \ldots, \bar{\xi}_{(m)}) \in J_1 \times A_1 \times \ldots \times A_m$$

entonces para $i = 1, \ldots, n$ se tiene:

$$|f_i(t, \xi_{(1)},\ldots,\xi_{(m)})-f_i(t, \bar{\xi}_{(1)},\ldots,\bar{\xi}_{(m)})| \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} B\,|\xi_{(j)k} - \bar{\xi}_{(j)k}|$$

$$\leq mB \max_{j=1,\ldots,m} \|\xi_{(j)} - \bar{\xi}_{(j)}\|$$

sumando sobre $i = 1, \ldots, n$ y tomando $k = nmB$, se tiene:

$$|f_i(t, \xi_{(1)},\ldots,\xi_{(m)})-f_i(t, \bar{\xi}_{(1)},\ldots,\bar{\xi}_{(m)})| \leq k \max_{j=1,\ldots,m} \|\xi_{(j)} - \bar{\xi}_{(j)}\| \blacksquare$$

Ejemplo 4.- Considérese:

$$x'(t)=\frac{[1+t\ x(t)\ x(t-1)]}{x(t/2)} \qquad t\geq 0$$

con:

$$x(t)=\theta(t)=\cos t \qquad -1\leq t\leq 0$$

Si se designa al segundo miembro de la ecuacion por:

$$f(t,\alpha_{(1)},\alpha_{(2)},\alpha_{(3)})=\frac{[1+t\alpha_{(1)}\alpha_{(2)}]}{\alpha_{(3)}}$$

entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha_{(1)}}=\frac{t\alpha_{(2)}}{\alpha_{(3)}},\qquad \frac{\partial f}{\partial\alpha_{(2)}}=\frac{t\alpha_{(1)}}{\alpha_{(3)}},\qquad \frac{\partial f}{\partial\alpha_{(3)}}=-\frac{1+t\alpha_{(1)}\alpha_{(2)}}{\alpha_{(3)}^2}$$

todas estas derivadas parciales son continuas y están acotadas. Por tanto la ecuación propuesta tiene a lo más una solución en cualquier intervalo $[-1,\beta_1)$.

Las ecuaciones de orden superior se tratarán, transformándolas en sistemas de primer orden, como en las ecuaciones diferenciales ordinarias así entonces se dará un corolario del teorema 1 y del lema 2.

Corolario. Sea $f:[t_0,\beta)\times\mathbb{D}^m\to\mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable para algún conjunto abierto $\mathbb{D}\subset\mathbb{R}^n$ y sean $g_j(t)$ continuas con:

$$\gamma \le g_j(t) \le t \qquad \text{en} \qquad [t_0,\beta) \qquad \text{para} \qquad j=1, \ldots, m$$

y considérese la ecuacion diferencial con retardo, de orden n:

$$x^{(n)}(t)=f(t,\ x(g_1(t)),\ x'(g_1(t)),\ \ldots,\ x^{(n-1)}(g_1(t)),\ \ldots, \\ x(g_m(t)),\ x'(g_m(t)),\ \ldots,\ x^{(n-1)}(g_m(t))) \tag{2.5}$$

en $[t_0,\beta)$ con:

$$x(t)=\theta(t) \qquad \text{en} \qquad [\gamma,t_0] \tag{2.6}$$

dónde θ y sus $n-1$ derivadas son continuas y

$$(\theta(t),\ \ \theta'(t),\ \ldots,\theta^{(n-1)}(t)) \in \mathbb{D} \qquad\qquad t \in [\gamma,t_0]$$

entonces hay a lo más una solución de (2.5) y (2.6) en cualquier intervalo:

$$[\gamma,\beta_1) \qquad \text{dónde} \qquad t_0 < \beta_1 \le \beta$$

Una solución es una función $n-1$ veces continuamente diferenciable en:

$$[\gamma,\ \beta_1) \to \mathbb{R} \qquad \text{tal que en} \qquad [\gamma,\ t_0]$$

la ecuación (2.6) es válida y en:

$$[t_0,\ \beta_1) \ \ (x(t),\ \ x'(t),\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t)) \in \mathbb{D}$$

se satisface la ecuación (2.5).

Demostración: sean x y $\bar{x}$ soluciones de (2.4) con condiciones iniciales θ y $\bar{\theta}$ respectivamente.

Se define una función con valores n vectoriales por:

$$y(t) = col(x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) \qquad \text{para} \qquad \gamma \leq t < \beta_1$$

Entonces $y(t)$ satisface el sistema de ecuaciones diferenciales, de primer orden con retardo:

$$\begin{aligned}
y_1'(t) &= y_2(t); \\
y_2'(t) &= y_3(t) \\
&\vdots \\
y'_{(n-1)}(t) &= y_n(t) \\
y_n'(t) &= f(t, y(g_1(t)), \ldots, y(g_m(t))) \qquad \text{en} \qquad [t_0, \beta_1) \qquad \text{con}
\end{aligned}$$

$$y(t) = col(\theta(t), \theta'(t), \ldots, \theta^{(n-1)}(t)) \qquad \text{en} \qquad [\gamma, t_0]$$

la unicidad de y; y de aquí, la de x, se sigue del teorema 1.

2.5 Un resultado de dependencia continua de las soluciones respecto a cambios en la funcion inicial.

Se dará término a ésta sección con un teorema elemental sobre dependencia continua de las soluciones. Esto es una estimación del cambio en la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo, debidos al cambio en la función inicial θ

TEOREMA 2. Sea:

$$f:[t_0,\beta) \times \mathbb{D}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

continua y globalmente Lipschitz con constante k.

Sean $g_j(t)$ y $\theta(t)$ continuas, con:

$$\gamma \leq g_j(t) \leq t$$

en $[t_0,\beta)$ y:

$$\theta : [\gamma,t_0] \rightarrow \mathbb{D}$$

continua. Sea:

$$\bar{\theta}:[\gamma, t_0] \rightarrow \mathbb{D}$$

continua; x y $\bar{x}$ soluciones de las ecuaciones (2.2) y (2.3) en $[\gamma,\beta_1)$ con condiciones iniciales θ y $\bar{\theta}$ respectivamente. Entonces, para:

$$t_0 \leq t < \beta_1:$$

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leq \sup_{\gamma \leq s \leq t_0} \| \theta(s) - \bar{\theta}(s) \| \, e^{k(t-t_0)}$$

Demostración. Sean x y $\bar{x}$ soluciones que satisfacen:

$$x(t) = \begin{cases} \theta_1(t) & \gamma \le t \le t_0 \\ \theta(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(s, x_s)ds & t_0 \le t \le \beta_1 \end{cases}$$

con los valores $\theta_1 = \theta$ y $\theta_2 = \bar{\theta}$ respectivamente.

Así que para $t_0 \le t < \beta$, se tiene:

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| = \| \theta(t_0) - \bar{\theta}(t_0) + \int_{t_0}^{t} [F(s, x_s) - F(s, \bar{x}_s)]ds \|$$

$$\le \| \theta(t_0) - \bar{\theta}(t_0) \| + \| \int_{t_0}^{t} [F(s, x_s) - F(s, \bar{x}_s)]ds \|$$

$$\le \| \theta(t_0) - \bar{\theta}(t_0) \| + k \int_{t_0}^{t} \sup_{\gamma \le \sigma \le s} \| x(\sigma) - \bar{x}(\sigma) \| \, ds$$

Definiendo:

$$v(t) = \sup_{\gamma \le s \le t} \| x(s) - \bar{x}(s) \|$$

entonces para:

$$t_0 \le t < \beta_1$$

se tiene:

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \le v(t_0) + k \int_{t_0}^{t} v(s)ds$$

puesto que:

$$\| \theta(t) - \bar{\theta}(t) \| \le v(t_0) \qquad \gamma \le t \le t_0$$

se sigue:

$$v(t) \le v(t_0) + k \int_{t_0}^{t} v(s)ds \qquad t_0 \le t \le \beta_1$$

con la ayuda del lema de Gronwall, queda:

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \le v(t_0)e^{k(t-t_0)}$$

para:

$$t_0 \le t < \beta_1 \qquad \blacksquare$$

CAPITULO III

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDOS ACOTADOS.

3.1 INTRODUCCION.

Muchos problemas prácticos dan origen a ecuaciones diferenciales con retardos constantes o al menos con retardos acotados; así entonces, cuando se considere un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo tal como:

$$x'(t) = f(t,\ x(g_1(t)),\ \ldots, x(g_m(t))) \qquad (3.1)$$

si se supone que:

$$t - r_j \le g_j(t) \le t, \qquad t \ge t_0, \qquad j = 1, \ldots ,m.$$

para alguna constante $r_j \ge 0$, entonces la condición inicial tomará la forma:

$$x(t) = \theta(t) \qquad t_0 - r_j \le t \le t_0 \qquad (3.2)$$

Nótese que si $r_j = 0$, (3.1) y (3.2) representan un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Se supondrá que f está definida en:

$$[t_0, \beta) \times \mathbb{D}^m \to \mathbb{R}^n \qquad \text{para alguna} \qquad \beta > t_0$$

y algún conjunto abierto $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$.

3.2 NOTACION.

En el capítulo anterior, se introdujo la expresión:

$$x'(t) = F(t,\chi_t) \tag{3.3}$$

para designar la ecuación (3.1) y no se definió, ni a F ni a χ, solamente la combinación $F(t,\chi_t)$ que simplemente representó el lado derecho de la ecuación (3.1).

Ahora, se dará un significado a F y a χ_t para el caso especial de retardos acotados.

La siguiente definición introducida por Shimanov, es ampliamente usada en la literatura sobre ecuaciones diferenciales con retardo.

Definición. Si χ es una función definida al menos en $[t-r,t] \to \mathbb{R}^n$, entonces se define una nueva función $\chi_t:[-r,0] \to \mathbb{R}^n$, con regla de correspondencia:

$$\chi_t(\sigma) = \chi(t+\sigma) \qquad \text{para} \qquad -r \leq \sigma \leq 0$$

nótese que χ_t se obtiene considerando $\chi(s)$ para $t - r \leq s \leq t$ y despúes transladando éste segmento de χ al intervalo $[-r,0]$.

Si χ es continua en $[-r,0]$; χ_t también lo es.

Definición. Se denotará por $\mathscr{C}$, al conjunto de todas las funciones continuas que mapean $[-r,0] \to \mathbb{R}^n$. i.e.

$$\mathscr{C} = C([-r,0], \mathbb{R}^n)$$

Si $A \subset \mathbb{R}^n$, se designará a $\mathscr{C}_A = C([-r,0], A)$.

De esta manera, si χ es continua en $[t - r,t] \to A$, entonces, $\chi_t \in \mathscr{C}_A$.

Se designará con el símbolo J al intervalo $[t_0,\beta)$.

Si la ecuación (3.3) debe representar la ecuación (3.1) con f definida en $J \times \mathbb{D}^m$, entonces se requiere que $F(t,\chi_t)$ tenga sentido para cualquier $t \in J$ y $\chi_t \in \mathscr{C}_D$, así que se debe definir:

$$F:J \times \mathscr{C}_D \to \mathbb{R}^n$$

En pocas palabras, para $(t,\psi) \in J \times \mathscr{C}_D$, $F(t,\psi)$ debe ser un punto bien definido en $\mathbb{R}^n$.

Un mapeo tal como F, definido en un conjunto de funciones, se le llama una **funcional**, en vez de función. La ecuación (3.3) se llama ecuación diferencial funcional, no obstante, aquí se le seguirá llamando ecuación diferencial con retardo, para enfatizar el hecho de que solamente los valores pasados y presentes de x están comprometidos en el cálculo de x'.

Ejemplo 1.- Se quiere ver que (3.3) y (3.1) son equivalentes.

Sea:

$$F(t,\chi) = f(t, \chi(g_1(t)-t), \ldots, \chi(g_m(t)-t))$$

como:

$$\chi_t(g_j(t)-t) = \chi(t + g_j(t)-t) = \chi(g_j(t))$$

por lo tanto:

$$F(t,x_t)=f(t,x_t(g_1(t)-t),\dots,x_t(g_m(t-t))=f(t,x(g_1(t)),\dots,x(g_m(t)))$$

así que la ecuación (3.1) toma la forma más compacta:

$$x'(t) = F(t,x_t)$$

En los siguientes dos ejemplos se transformará la ecuación dada empleando la forma (3.3).

Ejemplo 2.- En la ecuación:

$$x'(t) = -cx(t-1)[1+x(t)]$$

se toma $r = 1$, $J = \mathbb{R}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ y se define la funcional $F{:}\mathbb{R} \times \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ por medio de:

$$F(t,\chi) = -c\chi(-1)[1 + \chi(0)]$$

Ejemplo 3.- En el sistema de ecuaciones diferenciales con retardo dado por:

$$x'(t) = a_1[1 - \frac{x(t)}{p}]x(t) - b_1y(t)x(t)$$

$$y'(t) = -a_2y(t) + b_2x(t-r)y(t-r)$$

se toma $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$ y se define la funcional $F{:}\mathbb{R} \times \mathscr{C} \to \mathbb{R}^2$ por:

$$F(t,\chi) = \begin{bmatrix} a_1[1 - \frac{\chi_1(0)}{p}]\,\chi_1(0) - b_1\chi_2(0)\chi_1(0) \\ -a_2\chi_2(0) + b_2\chi_1(-r)\chi_2(-r) \end{bmatrix}$$

Cuando se emplea la notación (3.3), se debe reescribir la condición inicial que ahora queda así:

$$x(t) = \theta(t) \qquad\qquad t_0 - r \le t \le t_0$$

entonces:

$$x(t_0 + \sigma) = \theta(t_0 + \sigma) \qquad\qquad -r \le \sigma \le 0$$

o simplemente:

$$x_{t_0} = \theta_{t_0}$$

Si se hace $\varphi = \theta_{t_0}$, se tiene:

$$x_{t_0} = \varphi \tag{3.4}$$

Debe reconocerse que (3.4) significa $x(t_0 + \sigma) = \varphi(\sigma)$, $-\gamma \le \sigma \le 0$, así que si se hace $t = t_0 + \sigma$, entonces:

$$x(t) = \varphi(t-t_0) \qquad t_0 - r \le t \le t_0$$

En particular nótese que $x(t_0) = \varphi(0)$. Desde luego: $\varphi \in \mathscr{C}_D$.

La notación expresada en las ecuaciones (3.3) y (3.4), será la que se empleará con más frecuencia, sobre todo, en los teoremas sobre unicidad, existencia y dependencia continua con respecto a las condiciones iniciales, de las soluciones de las ecuaciones diferenciales con retardo.

3.3 TEOREMAS DE UNICIDAD, EXISTENCIA Y DEPENDENCIA.

Debido a que las pruebas de estos teoremas requieren de un amplio conocimiento de temas de análisis matemático, se hará sencillamente referencia de ellos, enunciándolos y el lector podrá recurrir, si desea mayor información, por ejemplo a Driver, cap. VI, sec. 25-26.

Definición. Condición de continuidad **C**:

Se dice que $F(t,x_t)$ satisface una condición de continuidad **C**, si $F(t,x_t)$ es continua con respecto a t en $[t_0,\beta)$ para cada función continua dada de la forma: $x:[t_0- r,\beta) \to \mathbb{D}$.

Observación. El significado de ésta condición es como sigue:

Si $f:[t_0,\beta) \times \mathscr{C}_D \to \mathbb{R}^n$ satisface la condición de continuidad **C**, entonces x, función continua que mapea $[t_0- r,\beta_1) \to \mathbb{D}$ para alguna $\beta_1 \in (t_0,\beta]$, es una solución de (3.3) y (3.4) si y sólo si satisface:

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t - t_0) & t_0- r \le t \le t_0 \\ \varphi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(s,x_s)ds & t_0 \le t \le \beta_1 \end{cases}$$

Teorema 1.- UNICIDAD.

Si:

$$F:[t_0,\beta) \times \mathscr{C}_D \to \mathbb{R}^n$$

satisface la condición de continuidad **C** y es localmente Lipschitz, entonces para toda $\phi \in \mathcal{C}_D$, (3.3) y (3.4) tienen a lo más una solución en $[t_0-r,\beta_1)$, para cualquier $\beta_1 \in (t_0,\beta]$.

Observación: Este teorema de unicidad es una generalización del teorema mostrado en el capítulo anterior.

La demostración del mismo requiere de algunos resultados de cálculo avanzado, fuera del alcance de éste trabajo, sin embargo el lector interesado podrá recurrir por ejemplo, a Driver o a Hale.

Teorema 2.- DEPENDENCIA CONTINUA.

Supóngase que:

$$F:[t_0,\beta) \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$$

satisface la condición de continuidad **C** y es globalmente Lipschitz (con constante k). Sean:

$$\phi \ \text{y} \ \bar{\phi} \in \mathcal{C}_D$$

y x, $\bar{x}$ soluciones de (3.3) con condiciones iniciales:

$$x_{t_0} = \phi \qquad \text{y} \qquad \bar{x}_{t_0} = \bar{\phi}$$

respectivamente; válidas en $[t_0- r,\beta_1)$, entonces:

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leq \| \phi - \bar{\phi} \|_r \, e^{k(t-t_0)}$$

para:

$$t_0 \leq t < \beta_1$$

$$(\|\phi\|_r = \sup_{-r \leq \sigma \leq 0} \|\phi(\sigma)\|)$$

Observación: Este teorema generaliza el teorema 2 del capítulo anterior y simplemente asegura que las soluciones de la ecuación diferencial dependen continuamente de la función inicial θ y que dichas soluciones no se separan de una manera explosiva sino que ésta separación depende de lo que se encuentren retiradas entre si las diferentes condiciones iniciales, multiplicadas por una exponencial con potencia igual a la constante de Lipschitz por $t-t_0$.

Teorema 3.- EXISTENCIA LOCAL.

Si:

$$F:[t_0,\beta) \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$$

satisface la condición de continuidad **C** y es localmente Lipschitz, entonces para cada $\phi \in \mathcal{C}_D$ (3.3) y (3.4) tienen una única solución en $[t_0 - r, t_0 + \Delta)$ para alguna $\Delta > 0$.

Observación: Este teorema escencialmente supera al teorema 1 del capítulo anterior, su prueba es similar, excepto por una pequeña complicación al establecer una cota para F en algun conjunto apropiado.

De hecho, en ejemplos prácticos es usualmente fácil encontrar cotas explícitas para F.

Definición. La funcional:

$$F:[t_0,\beta) \times \mathscr{C}_D \to \mathbb{R}^n$$

se dice que es **cuasi-acotada**, si F es acotada en cada conjunto de la forma $[t_0,\beta_1] \times \mathscr{C}_A$ donde $t_0 < \beta_1 < \beta$ y A es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{D}$.

Definición. Sean: x en $[t_0 - r,\beta_1)$, y en $[t_0 - r,\beta_2)$ soluciones de (3.1) y (3.2). Si $\beta_2 > \beta_1$ se dice que y es una continuación de x o x puede ser continuada a $[t_0 - r,\beta_2)$.

Una solución x de (3.1) y (3.2) es **no continuable** si no tiene continuación.

Teorema 4.- EXISTENCIA EXTENDIDA.

Si:

$$F:[t_0,\beta) \times \mathscr{C}_D \to \mathbb{R}^n$$

satisface la condición de continuidad **C**; es localmente Lipschitz y **cuasi-acotada**, entonces, por cada $\phi \in \mathscr{C}_D$, la ecuación (3.3), con condición (3.4) tienen una única solución **no continuable**:

$$x \quad \text{en} \quad [t_0 - r,\ \beta_1) \quad \text{y si} \quad \beta_1 < \beta$$

entonces para cada conjunto cerrado y acotado $A \subset \mathbb{D}$, $x(t) \notin A$ para alguna $t \in (t_0,\beta_1)$.

Observación: bajo las hipótesis de continuidad y localmente Lipschitz, en ecuaciones diferenciales ordinarias se sabe que si una solución x no puede continuarse más allá de un cierto valor

$t = \beta_1$ es porque, la ecuación no tiene sentido o la solución tiende a infinito. Sin embargo en ecuaciones con retardo ésto no es cierto.

El problema es que una funcional continua F a diferencia de una función f no necesariamente es acotada en subconjuntos cerrados y acotados de $J \times \mathscr{C}_D$.

Este resultado requiere, para su mejor comprensión, conocimientos de Topología.

Corolario.- EXISTENCIA GLOBAL.

Sea:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^n \qquad \text{y} \qquad F:[t_0,\beta) \times \mathscr{C}_D \to \mathbb{R}^n$$

que satisface la condición de continuidad **C** y localmente Lipschitz. Se supone además que:

$$\| F(t,\varphi) \| \leq M(t) + N(t) \| \varphi \|_r$$

en $[t_0,\beta) \times \mathscr{C}$ dónde M y N son funciones continuas positivas en $[t_0,\beta)$. Entonces existe una única solución de la ecuación (3.3) sujeta a la condición (3.4), no continuable, en todo el intervalo $[t_0 - r,\beta)$.

Con los resultados enunuciados en los párrafos anteriores, se verá cómo algunas de las más importantes propiedades de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, se conservan para los sistemas de ecuaciones diferenciales con retardo.

Se aplicarán a sistemas lineales con un número finito de retardos constantes.

Sea entonces:

$$x'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\ x(t-r_j) + h(t) \qquad t \in [t_0,\beta) \tag{3.5}$$

donde cada A_j es una matriz continua y $h(t)$ una función vectorial continua.

Se define:

$$L(t,x_t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\varphi(-r_j)$$

para:

$$t \in [t_0,\beta) \qquad \text{y} \qquad \varphi \in \mathscr{C}$$

entonces (3.5) se puede reescribir de la manera siguiente:

$$x'(t) = L(t,x_t) + h(t) \tag{3.6}$$

donde L es un operador lineal, es decir, que satisface:

$$L(t,c_1\varphi + c_2\bar{\varphi}) = c_1L(t,\varphi) + c_2L(t,\bar{\varphi})$$

para todo c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ y φ, $\bar{\varphi} \in \mathscr{C}$.

Como es usual se quiere resolver la ecuación (3.6) sujeta a la condición inicial:

$$x_{t_0} = \varphi \tag{3.7}$$

donde $\varphi \in \mathscr{C}$ está dada.

Conjuntamente con (3.6), se considerará también el sistema lineal homogéneo asociado a (3.6).

$$y'(t) = L(t,y_t) \tag{3.8}$$

Comentario: de la experiencia adquirida en la solución de sistemas lineales ordinarios, no homogéneos, se sabe que la solución general es la suma de la solución del sistema homogéneo asociado, más una solución particular cualquiera del sistema no homogéneo. (La intención es mostrar que) Esto mismo se hará para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales con retardo.

Teorema 5.- PRINCIPIO DE SUPERPOSICION DE SOLUCIONES.

Sea:

$$h(t) = k_1 h_{(1)}(t) + \ldots + k_p h_{(p)}(t)$$

donde $k_1, \ldots, k_p$ son constantes y $h_{(1)}(t), \ldots, h_{(p)}(t)$ son funciones vectoriales dadas, definidas sobre $[t_0,\beta)$.

Sea $x_{(q)}$ en $[t_0 - r,\beta)$ una solución particular de:

$$x'(t) = L(t,x_t) + h_{(q)}(t) \qquad q = 1, \ldots, p$$

y sean: $y_{(1)}, \ldots, y_{(l)}$ en $[t_0 - r.\beta)$ soluciones de la ecuación (3.8), entonces:

$$x = k_1 x_{(1)} + \ldots + k_q x_{(q)} + c_1 y_{(1)} + \ldots + c_l y_{(l)}$$

es una solución de la ecuación (3.6) para cualquier elección de las constantes $c_1, \ldots, c_l \in \mathbb{R}$.

Prueba. Sea:

$$x(t) = \sum_{q=1}^{p} k_q x_{(q)}(t) + \sum_{s=1}^{l} c_s y_{(s)}(t)$$

derivando con respecto a t queda:

$$x'(t) = \sum_{q=1}^{p} k_q x'_{(q)}(t) + \sum_{s=1}^{l} c_s y'_{(s)}(t)$$

ahora, como:

$$x'_{(q)}(t) = L(t,x_{(q)t}(t)) + h_{(q)}(t);\ y'_{(s)}(t) = L(t,y_{(s)t}(t))$$

la sustitución en la ecuación anterior da origen a:

$$x'(t) = \sum_{q=1}^{p} k_q [L(t,x_{(q)t}(t)) + h_{(q)}(t)] + \sum_{s=1}^{l} c_s L(t,y_{(s)t}(t))$$

o sea:

$$x'(t) = \sum_{q=1}^{p} k_q\ L(t,x_{(q)t}(t)) + \sum_{s=1}^{l} c_s L(t,y_{(s)t}(t)) + \sum_{q=1}^{p} k_q\ h_{(q)}(t)$$

y por la propiedad de linealidad de L, se tiene:

$$x'(t) = L(t,\ \sum_{q=1}^{p} k_q\ x_{(q)t} + \sum_{s=1}^{l} c_s\ y_{(s)t}\ ) + h(t)$$

o lo que es lo mismo:

$$x'(t) = L(t,x_t) + h(t)$$

lo que demuestra el teorema ∎

Esto significa en particular que en un sistema de ecuaciones diferenciales con retardos discretos, una solución de la ecuación homogénea asociada, más una solución particular arbitraria de la ecuación no homogénea, es solución de la ecuación no homogénea.

3.4 Ejemplos.

Ejemplo 1.- Considérese la ecuación diferencial con retardo dada por:

$$x'(t) = -\ 3x(t) + x(t - \frac{\pi}{2}) + sen\ t \qquad t \geq 0 \qquad (3.9)$$

con:

$$x(t) = \varphi(t) \qquad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$$

donde φ es una función continua dada. Encuéntrese una solución particular de la ecuación planteada.

Solución. Siguiendo la idea utilizada en el método de coeficientes indeterminados de las ecuaciones diferenciales ordinarias, se buscará una solución particular $\bar{x}(t)$.

La forma que tiene el término no homogéneo de la ecuación que se quiere resolver, sugiere una expresión de la siguiente forma:

$$\bar{x}(t) = A\ cos\ t + B\ sen\ t$$

donde A y B son constantes.

Se tendrá:

$$\bar{x}(t - \frac{\pi}{2}) = A \cos (t - \frac{\pi}{2}) + B \operatorname{sen} (t - \frac{\pi}{2}) = A \operatorname{sen} t - B \cos t$$

y

$$x'(t) = - A \operatorname{sen} t + B \cos t$$

así que sustituyendo estos valores en la ecuación (3.9), queda:

$$-A \operatorname{sen} t + B \cos t = -3A \cos t - 3B \operatorname{sen} t + A \operatorname{sen} t - B \cos t + \operatorname{sen} t$$

igualando coeficientes del seno y del coseno, resulta:

$$\begin{aligned} -2A + 3B &= 1 \\ 2A + 2B &= 0 \end{aligned}$$

sistema lineal con dos incógnitas, cuya solución es:

$$A = -\frac{2}{13} ; \qquad B = \frac{3}{13}$$

por tanto, la solución particular será:

$$\bar{x}(t) = -\frac{2}{13} \cos t + \frac{3}{13} \operatorname{sen} t$$

así que ésta es la expresión buscada.

Ahora, si x es la única solución definida en $[-\frac{\pi}{2},\infty)$ y suponiendo que la solución de la ecuación homogénea asociada se conoce (y), entonces;

$$y = x - \bar{x}$$

pero como y satisface la ecuación:

$$y'(t) = -3y(t) + y(t - \frac{\pi}{2}) \qquad t \geq 0 \tag{3.10}$$

con condición inicial $y(t) = \varphi(t)$; entonces la solución de (3.10) vendrá dada por:

$$y(t) = \varphi(t) + \frac{2}{13} \cos t - \frac{3}{13} \operatorname{sen} t \qquad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$$

así que la única solución de la ecuación no homogénea (3.9) planteada será:

$$x(t) = y(t) + \bar{x}(t) \qquad \text{para todo} \qquad t \geq \frac{\pi}{2}$$

como se vio en el ejemplo (7) del primer capítulo, $y(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ en una ecuación lineal con retardo del tipo planteado, si la ecuación satisface ciertos requisitos y es el caso en este ejemplo:

$$-2 < 0 \quad y \quad |1| < |-2|$$

que son exactamente las condiciones requisitadas. Entonces se podría ver a $\bar{x}$ como la solución de **estado estacionario** y a $y(t)$ como la solución de **estado transitorio**, que se **muere** cuando $t \to +\infty$.

Nótese además que sólo la parte transitoria depende de la función inicial φ.

Ejemplo 2.- Se desea encontrar una solución particular $\bar{x}$ en $[-r,\infty)$, para la ecuación:

$$x'(t) = -x(t - \frac{\pi}{2}) + \operatorname{sen} t$$

Solución. Ya que el término no homogéneo, es del tipo *sen t*, parece natural intentar una solución particular de la forma:

$$\bar{x}(t) = A \cos t + B \operatorname{sen} t$$

sin embargo, efectuando las operaciones se puede ver la imposibilidad de encontrar los valores A y B; así que se intentará resolver el problema con:

$$\bar{x}(t) = At \cos t + Bt \operatorname{sen} t$$

Realizando las operaciones necesarias para sustituir en la ecuación, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones lineales para A y B:

$$\frac{\pi}{2} A + B = 0$$

$$A - \frac{\pi}{2} B = 1$$

sistema, cuya solución es:

$$A = \frac{4}{\pi^2 + 4} \; ; \qquad B = -\frac{2\pi}{\pi^2 + 4}$$

así que la solución buscada queda finalmente como:

$$\bar{x}(t) = \frac{4}{\pi^2 + 4}\, t \cos t - \frac{2\pi}{\pi^2 + 4}\, t \operatorname{sen} t$$

Ejemplo 3.-En la ecuación $x'(t) = -x(t) + x(t-1) + t$, se desea obtener una solución particular.

SOLUCION. Se propone $\bar{x}(t) = At^2 + Bt + C$. Haciendo operaciones, se plantea el sistema de ecuaciones:

$$-2A + B + 1 = B + 2A$$

$$B + C = A - B + C$$

de aqui se sigue:

$$A = \frac{1}{4} \quad ; \qquad B = \frac{1}{8}$$

se puede ver que el sistema tiene solución independiente del valor de C, así que la solución buscada quedará de la siguiente manera:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}t$$

Como se ha visto en estos ejemplos el método de coeficientes indeterminados de las ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas es una consecuencia del teorema de la superposición visto antes.

CAPITULO IV

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON RETARDOS DISCRETOS Y CON COEFICIENTES CONSTANTES.

4.1 INTRODUCCION.

Como se recordará, en el caso de un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con n variables, se tienen n soluciones linealmente independientes y la solución general es expresable como la combinación lineal de tales n soluciones.

En el caso de un sistema de **n** ecuaciones diferenciales con **m** retardos, la situación es un poco más complicada, púes en general, la solución de este tipo de ecuaciones implicará una **ecuación característica** , cuyas soluciones están en el campo de los números complejos y en general tiene un número infinito de soluciones válidas en $\mathbb{R}^n$.

El interés principal se encaminará a tratar de encontrar las relaciones fundamentales que deberán satisfacer los coeficientes de un sistema con retardos para ver bajo que condiciones, las soluciones son comparables con las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas.

4.2 LA ECUACION CARACTERISTICA.

Se considerarán sistemas de n ecuaciones diferenciales con m retardos de la forma:

$$x'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j \, x(t-r_j) + h(t) \tag{4.1}$$

donde A_j es una matriz n x n con valores constantes y $h(t)$ una función vectorial continua en $[t_0, \beta)$ y $0 \leq r_j < r$; $j = 1, \ldots, m$

Usualmente con la ecuación (4.1) se considerará la condición inicial:

$$x(t_0) = x_{t_0} = \varphi \qquad \text{donde} \qquad \varphi \in \mathscr{C} \tag{4.2}$$

Al trabajar con sistemas de ecuaciones diferenciales con retardos de la forma (4.1) y (4.2), también se trabajará frecuentemente con la ecuación homogénea asociada, la que se designará por:

$$y'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j \, y(t-r_j) \tag{4.3}$$

Si se buscan soluciones a la ecuación (4.3) de forma exponencial i.e. $y(t) = e^{\lambda t} \xi$, donde $\lambda = \mu + i\omega$; μ, ω constantes reales y ξ un vector constante, la sustitución en (4.3), conduce a la expresión:

$$(\lambda I - \sum_{j=1}^{m} A_j \, e^{-\lambda r_j}) \, \xi = 0 \tag{4.4}$$

Esta expresión tendrá soluciones ξ distintas de la trivial si y sólo si λ satisface la **ecuación característica**:

$$det \, (\lambda I - \sum_{j=1}^{m} A_j \, e^{-\lambda r_j}) = 0 \tag{4.5}$$

Si se emplean los valores de $\lambda = \mu + i\omega$ que resuelven (4.5) conjuntamente con $\xi = \xi_{(1)} + i\xi_{(2)}$ como solución de la ecuación (4.4), siendo $\xi_{(1)}$ y $\xi_{(2)}$ vectores reales, entonces:

$$y(t) = e^{(\mu+i\omega)t}\,(\xi_{(1)} + i\xi_{(2)})$$

y de aquí se tiene solución (posiblemente compleja) de (4.5). Haciendo operaciones:

$$y(t) = e^{\mu t}\, e^{i\omega t}(\xi_{(1)} + i\xi_{(2)}) = e^{\mu t}(\cos \omega t + i \,\mathrm{sen}\, \omega t)(\xi_{(1)} + i\xi_{(2)})$$

ordenando:

$$y(t) = e^{\mu t}\, [(\xi_{(1)} \cos \omega t - \xi_{(2)} \mathrm{sen}\, \omega t) + i(\xi_{(1)} \mathrm{sen}\, \omega t + \xi_{(2)} \cos \omega t)]$$

por tanto:

$$Re\ \ y(t) = e^{\mu t}\, (\xi_{(1)} \cos \omega t - \xi_{(2)} \mathrm{sen}\, \omega t)$$

$$Im\ \ y(t) = e^{\mu t}(\xi_{(1)} \mathrm{sen}\, \omega t + \xi_{(2)} \cos \omega t)$$

son soluciones reales de (4.3). Por supuesto que cualquier combinación lineal de estas es también solución, sin embargo, el problema, estriba en que, por lo general la ecuación (4.5) tiene un número infinito de soluciones complejas.

Sin embargo aun cuando éste número de soluciones es infinito, véase la información que proporcionan los siguientes teoremas:

4.3 TEOREMAS FUNDAMENTALES.

Teorema 1.- Dado cualquier número real ρ;

$$det\ (\ \lambda I - \sum_{j=1}^{m} A_j\, e^{-\lambda r_j}\ ) = 0$$

no tiene más que un número finito de raíces λ, tales que, $Re\ \lambda \geq \rho$.

Demostración. La ecuación dada tiene la forma:

$$\lambda^n + P_{n-1}(e^{-\lambda r_1}, \ldots, e^{-\lambda r_m})\ \lambda^{n-1} + \ldots + P_0(e^{-\lambda r_1}, \ldots, e^{-\lambda r_m}) = 0 \qquad (4.6)$$

donde cada $P_{n-1}, \ldots, P_0$ es un polinomio en $e^{-\lambda r_1}, \ldots, e^{-\lambda r_m}$.

Ahora, si ρ es un número real dado, y $Re\ \lambda \geq \rho$; entonces:

$$|\ e^{-\lambda r_j}\ | = e^{-Re\lambda r_j} \leq e^{-\rho r_j}$$

así que se puede escribir:

$$|\ P_k(e^{-\lambda r_1}, \ldots, e^{-\lambda r_m})\ | \leq B_k$$

para alguna constante B_k que depende de ρ y para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ahora tómese $R \geq 0$, tan grande que:

$$\frac{B_{n-1}}{R} + \frac{B_{n-2}}{R^2} + \ldots + \frac{B_0}{R^n} < 1$$

o lo que es lo mismo:

$$B_{n-1} R^{n-1} + B_{n-2} R^{n-2} + \dots + B_0 \le R^n$$

la ecuación (4.6) no puede tener raíces con $Re\ \lambda \ge \rho$ y $|\lambda| \ge R$ porque entonces se tendrá:

$$|\lambda|^n > B_{n-1} |\lambda|^{n-1} + B_{n-2} |\lambda|^{n-2} + \dots + B_0$$

y como los

$$B_k \ge |P_k(e^{-\lambda r_1}, \dots, e^{-\lambda r_m})|$$

entonces:

$$|\lambda|^n > |P_{n-1}| |\lambda|^{n-1} + \dots + |P_0|$$

lo que es una contradicción con la ecuación (4.6), por lo tanto todas las raíces de (4.6) con $Re\ \lambda \ge \rho$, satisfacen $|\lambda| < r$.

En teoría de variable compleja se prueba que una función analítica, la cual no es idénticamente cero, no puede tener más que un número finito de ceros en cualquier conjunto acotado en el plano complejo, de aquí que (4.6) sólo puede tener un número finito de raíces λ con $Re\ \lambda \ge \rho$.

Un resultado relativo a la ecuación:

$$y'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j\, y(t-r_j)$$

suficientemente importante para ser incluido, pero cuya prueba se omitirá aquí, es el siguiente;

Teorema 2.- Si toda solución λ de la ecuación característica:

$$det\ (\ \lambda I - \sum_{j=1}^{m} A_j\, e^{-\lambda r_j}\ ) = 0$$

satisface $Re\ \lambda < \rho$, entonces existe una constante $M > 0$, tal que para cada $\varphi \in \mathscr{C}$, la solución de la ecuación diferencial (4.3), con $y_{t_0} = \varphi$ satisface:

$$\|\ y(t,t_0,\varphi)\ \| \le M\ \|\ \varphi\ \|_r\ e^{\rho(t-t_0)} \qquad \text{para todo} \qquad t \ge t_0$$

La prueba, empleando análisis funcional, puede ser encontrada en Hale.

De este teorema, se puede deducir sin grandes dificultades el siguiente:

Corolario 1.- Si $Re\ \lambda < 0$, para toda solución de la ecuación (4.6), entonces existen constantes positivas M y γ tales que:

$$\|\ y(t)\ \| \le M\ \|\ \varphi\ \|_r\ e^{-\gamma(t-t_0)} \qquad \text{para} \qquad t \ge t_0$$

donde y es solución de (4.3) con $y_{t_0} = \varphi \in \mathscr{C}$. Además $y(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$

En estos dos teoremas y el corolario enunciados, se muestra que aún cuando la ecuación característica de un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo tenga un número infinito de soluciones complejas, **todas aquellas con parte real de λ menor que ρ, son acotadas y si ρ es menor que cero entonces las soluciones correspondientes tienden a cero cuando t tiende a infinito y aquellas con parte real de λ mayor o igual que ρ no son más que un número finito.**

Por lo tanto el problema de conocer el comportamiento completo de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales con retardo,se puede reducir al caso de los sistemas de ecuaciones lineales ordinarias.

En lugar de un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con retardo, se podría tener una ecuación de orden n, escalar, con m retardos, no homogénea, como la siguiente:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n-1} a_{ij}\, x^{(i)}(t - r_j) = h(t) \tag{4.7}$$

cuya ecuación homogénea asociada es:

$$y^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n-1} a_{ij}\, y^{(i)}(t - r_j) = 0 \tag{4.8}$$

donde $r_j \in [0,r]$ y cada a_{ij} es una constante.

Teorema 3.- Si la ecuación (4.8) se transforma de manera natural, en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden con retardo, entonces la ecuación característica para el sistema, es exactamente la misma que la que se obtendría buscando soluciones de la forma $e^{\lambda t}$ en (4.8). Esto es:

$$\lambda^{(n)} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{n-1} a_{lj} \lambda^{l} e^{-\lambda r_j} = 0 \tag{4.9}$$

Así por ejemplo si toda raíz de (4.9) tiene parte real negativa; entonces toda solución de (4.8) tiende a cero cuando t tiende a $+\infty$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad; supóngase que $r_1 = 0$. tómense constantes $C_1, \ldots, C_n$ no cero y defínase:

$$y_1 = C_1 y;\; y_2 = C_2 y^{(1)};\; y_3 = C_3 y^{(2)},\; \ldots,\; y_n = C_n y^{(n-1)}$$

De aquí la ecuación (4.8) se transformara de manera natural, en un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales. *i.e.*:

$$y_1'(t) = \frac{C_1}{C_2}\, y_2(t)$$

$$y_2'(t) = \frac{C_2}{C_3}\, y_3(t)$$

$$y_3'(t) = \frac{C_3}{C_4}\, y_4(t)$$

$$\vdots$$

$$y'_{n-1}(t) = \frac{C_{n-1}}{C_n}\, y_n(t)$$

$$y_n'(t) = - \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \left(\frac{C_n}{C_k} \right) y_k(t - r_j)$$

La matriz de coeficientes de éste sistema es:

$$
\begin{bmatrix}
0 & \frac{C_1}{C_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{C_2}{C_3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{C_3}{C_4} & \cdots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & \frac{C_{n-1}}{C_n} \\
-\frac{a_0 C_n}{C_1} & -\frac{a_1 C_n}{C_2} & -\frac{a_2 C_n}{C_3} & \cdot & \cdots & -\frac{a_{n-2} a_n}{C_{n-1}} & -a_{n-1}
\end{bmatrix}
$$

Por lo tanto la ecuación característica será:

$$
det\left(\lambda I - \sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\lambda r_j} \right) = 0
$$

$$
\begin{vmatrix}
\lambda & -\frac{C_1}{C_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \lambda & -\frac{C_2}{C_3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & -\frac{C_3}{C_4} & \cdots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\frac{C_{n-1}}{C_n} \\
+\frac{a_0 C_n}{C_1} & +\frac{a_1 C_n}{C_2} & +\frac{a_2 C_n}{C_3} & +\frac{a_3 C_n}{C_4} & \cdots & +\frac{a_{n-2} C_n}{C_{n-1}} & \lambda + a_{n-1}
\end{vmatrix} = 0 \qquad (4.10)
$$

dónde:

$$a_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, e^{-\lambda r_j} \qquad (i=0,\ i,\ \ldots,\ n-1) \tag{4.11}$$

se puede ver, si se calcula el desarrollo de este determinante, que los coeficientes de la ecuación (4.9) coinciden.

Debido a que las operaciones resultan sumamente laboriosas, no como una prueba sino como un ejemplo, se verá que el desarrollo del determinante planteado, se cumple en un ejemplo particular, sea por caso $n = 5$, $m = 3$; esto es una ecuación de quinto orden con tres retardos diferentes, de los cuales, se supone que $r_1 = 0$.

Con estos datos, la ecuación (4.8) es:

$$y^{(5)}(t) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=0}^{4} a_{ij}\, y^{(i)}(t-r_j) = 0$$

desarrollando para i:

$$y^{(5)}(t) = \sum_{j=1}^{3} \Big[a_{0j}\, y(t-r_j) + a_{1j}\, y^{(1)}(t-r_j) + a_{2j}\, y^{(2)}(t-r_j) + $$

$$+ a_{3j}\, y^{(3)}(t-r_j) + a_{4j}\, y^{(4)}(t-r_j) \Big] = 0$$

ahora desarrollando para $j = 1, 2, 3$, y recordando que $r_1 = 0$ entonces la ecuación diferencial queda así:

$$y^{(5)}(t) + a_{41}y^{(4)}(t) + a_{42}y^{(4)}(t-r_2) + a_{43}y^{(4)}(t-r_3) + a_{31}y^{(3)}(t) +$$

$$a_{32}y^{(3)}(t-r_2) + a_{33}y^{(3)}(t-r_3) + a_{21}y^{(2)}(t) + a_{22}y^{(2)}(t-r_2) +$$

$$a_{23}y^{(2)}(t-r_3) + a_{11}y^{(1)}(t) + a_{12}y^{(1)}(t-r_2) + a_{13}y^{(1)}(t-r_3) +$$

$$a_{01}y(t) + a_{02}y(t-r_2) + a_{03}y(t-r_3) = 0$$

la ecuacion característica es:

$$\lambda^5 + \lambda^4(a_{41} + a_{42}e^{-\lambda r_2} + a_{43}e^{-\lambda r_3}) + \lambda^3(a_{31} + a_{32}e^{-\lambda r_2} + a_{33}e^{-\lambda r_3})$$
$$+ \lambda^2(a_{21} + a_{22}e^{-\lambda r_2} + a_{23}e^{-\lambda r_3}) + \lambda\,(a_{11} + a_{12}e^{-\lambda r_2} + a_{13}e^{-\lambda r_3})$$
$$+ (a_{01} + a_{02}e^{-\lambda r_2} + a_{03}e^{-\lambda r_3}) = 0$$

Ahora de la ecuacion (4.11):

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}e^{-\lambda r_j} \qquad i = 0,1,2,3,4$$

se tiene:

$$a_0 = a_{01} + a_{02}e^{-\lambda r_2} + a_{03}e^{-\lambda r_3}$$

$$a_1 = a_{11} + a_{12}e^{-\lambda r_2} + a_{13}e^{-\lambda r_3}$$

$$a_2 = a_{21} + a_{22}e^{-\lambda r_2} + a_{23}e^{-\lambda r_3}$$

$$a_3 = a_{31} + a_{32}e^{-\lambda r_2} + a_{33}e^{-\lambda r_3}$$

$$a_4 = a_{41} + a_{42}e^{-\lambda r_2} + a_{43}e^{-\lambda r_3}$$

Entonces la ecuación característica queda así:

$$\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{4.12}$$

Ahora bien; la ecuación característica para un sistema de cinco ecuaciones lineales con tres retardos de acuerdo con la expresión dada por el determinante (4.10) es:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{C_1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\frac{C_2}{C_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\frac{C_3}{C_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -\frac{C_4}{C_5} \\ \frac{a_0 C_5}{C_1} & \frac{a_1 C_5}{C_2} & \frac{a_2 C_5}{C_3} & \frac{a_3 C_5}{C_4} & \lambda + a_4 \end{vmatrix} = 0$$

donde $a_0, \ldots, a_4$ son los valores calculados arriba.

Se quiere hacer ver que ésta expresión es exactamente igual a la ecuación característica (4.12).

Desarrollando el determinante, por los cofactores de la primera columna, se tiene:

$$(-1)^{1+1}\,\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -\dfrac{C_2}{C_3} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\dfrac{C_3}{C_4} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\dfrac{C_4}{C_5} \\ \dfrac{a_1 C_5}{C_2} & \dfrac{a_2 C_5}{C_3} & \dfrac{a_3 C_5}{C_4} & \lambda + a_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+5}\,\frac{a_0 C_5}{C_1} \begin{vmatrix} -\dfrac{C_1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -\dfrac{C_2}{C_3} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\dfrac{C_3}{C_4} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\dfrac{C_4}{C_5} \end{vmatrix}$$

De nueva cuenta desarrollando estos nuevos determinantes por los cofactores de la primera linea, queda:

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda & -\dfrac{C_3}{C_4} & 0 \\ 0 & \lambda & -\dfrac{C_4}{C_5} \\ \dfrac{a_2 C_5}{C_3} & \dfrac{a_3 C_5}{C_4} & \lambda + a_4 \end{vmatrix} - \lambda\,\frac{a_1 C_5}{C_2} \begin{vmatrix} -\dfrac{C_2}{C_3} & 0 & 0 \\ \lambda & -\dfrac{C_3}{C_4} & 0 \\ 0 & \lambda & -\dfrac{C_4}{C_5} \end{vmatrix} +$$

$$\frac{a_0 C_5}{C_2}\begin{vmatrix} -\frac{C_2}{C_3} & 0 & 0 \\ \lambda & -\frac{C_3}{C_4} & 0 \\ 0 & \lambda & -\frac{C_4}{C_5} \end{vmatrix} - \lambda\frac{a_1 C_5}{C_2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

haciendo operaciones se tiene:

$$\lambda^2\,[\lambda^2(\lambda + a_4) + a_2 + \lambda\, a_3] + a_1\lambda + a_0 = 0$$

o equivalentemente:

$$\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

que es exactamente la misma ecuación que se había encontrado al calcular soluciones en la ecuación de quinto orden.

4.4 EJEMPLOS.

Ejemplo 1.- Considérese la ecuación:

$$y''(t) + b\ y'(t) + q\ y'(t-r) + k\ y(t) = 0$$

donde b, q, k y r son números mayores que 0 y tales que $b > q$.

La ecuación característica de esta ecuación diferencial es:

$$\lambda^2 + b\lambda + q\lambda\ e^{-\lambda r} + k = 0$$

Se mostrará que toda raíz de esta ecuación característica tiene parte real negativa.

Supóngase, por contradicción, que $\lambda = \mu + i\omega$ es raíz de la ecuación caracteristica, con $\mu \geq 0$.

Si $\omega = 0$, entonces $\lambda = \mu$ y $\mu^2 + b\mu + q\mu\, e^{-\mu r} + k = 0$. Así que $\omega \neq 0$.

Ahora, con $\omega \neq 0$ calcúlese:

$$Im \left(\frac{\lambda^2 + b\lambda + q\lambda\, e^{-\lambda r} + k}{\omega} \right) = Im\ (0)$$

$$0 = \frac{2\mu\omega + b\omega + q\, e^{-\mu r}(\omega \cos \omega r - \mu \operatorname{sen} \omega r)}{\omega}$$

$$0 = 2\mu + b + qe^{-\mu r}(\cos \omega r - \mu r \frac{\operatorname{sen} \omega r}{\omega r}) > b + qe^{-\mu r}(\cos \omega r - \mu r \frac{\operatorname{sen} \omega r}{\omega r})$$

Ahora, para que en esta última expresión se realicen la operaciones en las condiciones mas desfavorables, se necesitaría que simultáneamente ocurriera que $\cos \omega r = -1$ y $\frac{\operatorname{sen} \omega r}{\omega r} = 1$, así entonces, quedaría de la siguiente manera:

$$0 > b - qe^{-\mu r}(1 + \mu r) > b - q > 0$$

Contradicción !!; por lo tanto λ tiene parte real negativa, así que toda solución de la ecuación dada, tiende a cero cuando t tienda a infinito.

Ejemplo 2.- En la ecuación:

$$y'(t)=-by(t-r)$$

dónde $b > 0$ y $0 \leq br < \frac{\pi}{2}$, se quiere mostrar que toda solución tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Solución. Sea $\lambda = \mu + i\omega$ una raíz cualquiera de la ecuación característica:

$$\lambda=-be^{-\lambda r}$$

entonces:

$$\mu+i\omega = -be^{-\mu r}(\cos \omega r-i\operatorname{sen} \omega r)$$

de aquí:

$$\mu=-be^{-\mu r}\cos \omega r \quad \text{y} \quad \omega = be^{-\mu r}\operatorname{sen} \omega r$$

por tanto:

$$\omega r = bre^{-\mu r}\operatorname{sen} \omega r < \frac{\pi}{2} e^{-\mu r}\operatorname{sen} \omega r$$

o sea:

$$0 < \omega r < \frac{\pi}{2}$$

esto implica que $\cos \omega r \in [0,1]$ y como $b > 0$ y $e^{-\mu r}< 1$ se sigue que:

$$\mu=-be^{-\mu r}\cos \omega r < 0$$

por tanto la parte real de λ es negativa. De aquí que toda solución de la ecuación:

$$y'(t)=-by(t-r)$$

por tener parte real negativa tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Ejemplo 3.- En la ecuación:

$$y''(t) + by'(t) + qy'(t-r_1) + ky(t) + py(t-r_2) = 0$$

dónde, b, q, k, p, r_1 y r_2 son constantes no negativas con $b>q+pr_2$ se quiere mostrar que toda solución tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Solución:

Sea $\lambda = \mu + i\omega$ con $\mu \geq 0$ una raíz de la ecuación característica:

$$\lambda^2 + b\lambda + q\lambda e^{-\lambda r_1} + k + e^{-\lambda r_2} = 0$$

Se considerarán dos casos particulares, $\omega = 0$ y $\omega \neq 0$.

Caso 1.- $\omega = 0$, entonces:

$$\lambda = \mu \geq 0$$

por tanto:

$$\mu^2 + b\mu + q\mu e^{-\mu r_1} + pe^{-\lambda r_2} = 0$$

no podrá ser satisfecha por el valor propuesto para μ.

Caso 2.- $\omega \neq 0$. Se calcula:

$$Im\left(\frac{\lambda^2 + b\lambda + q\lambda e^{-\lambda r_1} + k + e^{-\lambda r_2}}{\omega}\right) = Im\ (0) = 0.$$

De aqui:

$$0=2\mu+b+qe^{-\mu r_1}(\cos \omega r_1 - \mu r_1 \frac{\operatorname{sen} \omega r_1}{\omega r_1}) - pr_2 e^{-\mu r_2} \frac{\operatorname{sen} \omega r_2}{\omega r_2} > b-q-pr_2$$

entonces se tendrá:

$$0 > b-(q+pr_2) > 0$$

Contradicción !!, por lo tanto $\mu < 0$.

Ejemplo 4.- Se quiere determinar la naturaleza de la solución de la ecuación:

$$x'(t) = -\frac{3}{2}\, x(t - \frac{\pi}{4}) + \operatorname{sen} 2t \qquad t \geq 0$$

para valores grandes de t, dada $x_0 = \varphi \in \mathscr{C}$.

Solución:

Se trata de una ecuación no homogénea cuya solución particular se puede encontrar por el método de coeficientes indeterminados. i.e.:

$$x(t)=A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t$$

$$x'(t)=-2A \operatorname{sen} 2t + 2B \cos 2t$$

$$x(t - \frac{\pi}{4})=A \cos 2(t - \frac{\pi}{4})+B \operatorname{sen} 2(t - \frac{\pi}{4})=A \operatorname{sen} 2t - B \cos 2t$$

sustituyendo en la ecuación por resolver se obtiene:

$$A = -2, \qquad B = 0$$

por lo tanto:

$$x(t) = -2 \cos 2t$$

Ahora para $y(t)$ solución de la ecuación homogénea asociada:

$$y'(t)= -\frac{3}{2}\, y(t - \frac{\pi}{4})$$

ésta ecuación tiene exactamente la forma de la ecuación del ejemplo 2 y aquí:

$$b = \frac{3}{2} > 0; \qquad r = \frac{\pi}{4}$$

por tanto:

$$0 \le br < \frac{\pi}{2} \qquad \text{de donde} \qquad br = \frac{3}{8}\pi < \frac{\pi}{2}$$

así que $y(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, esto es, la solución de la ecuación planteada quedará así:

$$x(t)=x(t)+y(t)$$

dónde $y(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Finalmente, se hará una revisión del

4.5 METODO DE VARIACION DE PARAMETROS

En la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales no homogéneas; una de las tecnicas de mayor importancia para encontrar soluciones es el llamado método de **variación de parámetros**, técnica que puede emplearse para resolver sistemas de ecuaciones lineales no homogéneas, con retardo del tipo siguiente:

$$y'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j \, y(t-r_j) + h(t) \tag{4.12}$$

donde h es una función vectorial continua con valores definidos en $J = [t_0,\beta)$ y $r_j \in [0,r]$ constantes.

Dado cualquier $\varphi \in \mathscr{C}$, los teoremas anteriormente citados aseguran la existencia de una única función:

$$y:[t_0-r,\beta) \to \mathbb{R}^n$$

tal que satisface $y_{t_0} = \varphi$ y resuelve la ecuación (4.12) en todo $[t_0,\beta)$.

Para enfatizar la dependencia del valor y de t_0 y φ, es usual denotar $y(t)$ por medio de la expresión $y(t;t_0,\varphi)$ y se quiere expresar dicha $y(t;t_0,\varphi)$ en términos de la solución de la ecuación homogénea:

$$x'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j \, x(t-r_j) \tag{4.13}$$

Esto se muestra a través de la aplicación del:

Teorema de la variación de parámetros:

Sean $A_1, \ldots, A_m$ y h continuas en $[t_0,\beta)$ y $0 \leq r_j \leq r$ para $j = 1,\ldots, m$. Entonces por cada $\varphi \in \mathscr{C}$, la única solución de (4.12) que satisface $y_{t_0} = \varphi$ está dada por:

$$y(t) = x(t;t_0,\varphi) + \int_{t_0}^{t} x(t;s,h(s)u)ds$$

para:

$$t_0 - r \leq t < \beta$$

donde $u:[-r,0] \rightarrow \mathbb{R}$ y bajo la regla de correspondencia:

$$u(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -r \leq \sigma < 0 \\ 1 & \text{para} \quad \sigma = 0 \end{cases}$$

Observación: se puede interpretar ésta expresión de la siguiente manera. Para obtener la solución de la ecuación (4.12) con condición inicial $y_{t_0} = \varphi$, se empieza con la solución de la ecuación homogénea con la misma condición inicial. A esto se agrega una suma infinita (la integral) de las soluciones de la ecuación homogénea con valores iniciales $h(s)u$ para todos los valores de s, desde t_0 hasta t.

La prueba de este teorema se puede encontrar en Driver cap. 7.

Sin embargo aun cuando el teorema proporciona un método muy general para resolver sistemas como el (4.12), las expresiones para $x(t;t_0,\varphi)$ y $x(t;s,h(s)u)$ no se encuentran disponibles de forma simple por lo que el teorema no se acostumbra emplear como fórmula para calcular soluciones explícitas, como se hace en ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo en muchas ocasiones se puede obtener información muy útil acerca de las soluciones sin conocerlas realmente y para ello, el siguiente teorema proporciona la información deseada:

Teorema 4.- En particular si el sistema (4.12) tiene coeficientes constantes y las raices de la ecuación caracteristica, todas tienen parte real negativa y h es acotada entonces, toda solución de:

$$y'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j\, y(t-r_j) + h(t)$$

es acotada.

Ejemplo.- Suponiendo que $h(t)$ es continua y acotada se quiere determinar la naturaleza de las soluciones de la ecuación:

$$x'(t) = -x(t-r) + h(t) \qquad\qquad 0 \le r < \frac{\pi}{2}$$

Solución. Como se vio en el problema 2 de la sección 4 de éste capítulo (pág. 99) las raices de la ecuación caracteristica, tienen todas, parte real negativa y como $h(t)$ es continua y acotada, se satisface el teorema anterior y por lo tanto todas las soluciones de:

$$x'(t) = -x(t-r) + h(t)$$

son acotadas.

CAPITULO 5

EL METODO DE RUNGE - KUTTA - FEHLBERG, CON INTERPOLACION DE HERMITE PARA LA SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDOS DISCRETOS.

5.1 INTRODUCCION.

Para finalizar este trabajo, se resolverán algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales con retardo por el método de Runge-Kutta-Fehlberg de orden 4 y 5, (al cual se hará referencia, de ahora en adelante, con el símbolo R.K.F.H.(4-5))con control automático del paso. Para aproximar el retardo, debido a que el método proporciona además el valor de la derivada en cada punto calculado, se utilizará una interpolación de Hermite para así poder avanzar, paso a paso, en la solución de la ecuación propuesta.

El problema consistirá entonces en resolver la ecuación diferencial con retardo, de la forma:

$$y'(t) = f(t,y(t),y(t-r)); \qquad t_0 \le t < \beta$$

sujeta a la condición inicial:

$$y(t) = \theta(t) \qquad t_0-r \le t \le t_0$$

5.2 DESCRIPCION DEL METODO NUMERICO.

Los métodos numéricos del tipo Runge-Kutta-Felhberg, son de los llamados métodos de un paso con control automático.

Si y_n es el valor actual de la solución en el punto t_n y h es el ancho del paso, entonces, para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, de la forma:

$$y'(t) = f(t,y(t))$$

$$y(t_0) = y_0$$

el valor de la solución en $t_{n+1} = t_n + h$ se obtiene por medio de:

$$y_{n+1} = y_n + h\ f(t_n,\ y_n,\ h)$$

El argumento retardado se designará por medio de:

$$z(t) = \begin{cases} \theta(t-r) & 0 \le t \le r \\ H_q(t-r,(y_i),(y'_i)) & t > r \end{cases}$$

donde r es el retardo y H_q es el polinomio de Hermite de grado q, que tiene como puntos de soporte a y_i, y'_i, valores de la solución y su derivada en los puntos $i = 1, 2, \ldots$ que se encuentran en un intervalo de ancho igual al valor del retardo.

De esta manera, el método R.K.F.H.(4-5) con interpolación de Hermite que se empleará para calcular la solución de una ecuación con retardo en un intervalo de longuitud r, será:

$$y_{n+1} = y_n + h\ f(t_n,\ y_n,\ z(t),\ h)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$y'_{n+1} = f((t_{n+1},\ y_{n+1},\ z(t_{n+1}))$$

Para calcular la solución en el intervalo $[t_0, t_0+r]$, se aproxima la función $y(t-r)$ por medio de $\theta(t-r)$ y entonces se resuelve la ecuación diferencial ordinaria:

$$\dot{y}'(t) = f(t, y(t), \theta(t-r)) \qquad \text{en} \qquad [t_0, t_0+r]$$

por el método R.K.F.H.(4-5).

A continuación, para avanzar el siguiente intervalo de ancho r, como sólo se tiene un conjunto de puntos generados por el método numérico, así como la derivada en cada uno de estos puntos, se utiliza el método de interpolación de Hermite para obtener la función que aproximará a la expresión que tiene el retardo.

Una vez calculada la nueva expresión para el retardo, se vuelve a aplicar el método R.K.F.H.(4-5) para obtener los puntos de solución de la ecuación, pero ahora en $[t_0+r, t_0+2r]$ y así sucesivamente, hasta el punto final en dónde se quiera calcular la solución.

Las fórmulas que se utilizarán en cada paso del problema son las siguientes:

$$k_1 := hf(t_k, y_k)$$

$$k_2 := hf(t_k + \frac{1}{4} h, y_k + \frac{1}{4} k_1)$$

$$k_3 := hf(t_k + \frac{3}{8} h, y_k + \frac{3}{32} k_1 + \frac{9}{32} k_2)$$

$$k_4 := hf(t_k + \frac{12}{13} h, y_k + \frac{1932}{2197} k_1 - \frac{7200}{2197} k_2 + \frac{7296}{2197} k_3)$$

$$k_5 := hf(t_k + h, y_k + \frac{439}{216} k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513} k_3 - \frac{845}{4104} k_4)$$

$$k_6 := hf(t_k + \frac{1}{2} h, y_k - \frac{8}{27} k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565} k_3 + \frac{1859}{4104} k_4 - \frac{11}{40} k_5)$$

Con estos seis valores se calculan dos aproximaciones a la solución por medio de las siguientes expresiones:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{2565} k_3 + \frac{2197}{4104} k_4 - \frac{1}{5} k_5$$

$$z_{k+1} = y_k + \frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{50} k_6$$

El error se calculará por medio de:

$$|z_{k+1} - y_{k+1}|$$

El tamaño óptimo del paso, se calcula multiplicando el escalar s dado en la siguiente expresión:

$$s = \left(\frac{Tol * h}{2|z_{k+1} - y_{k+1}|} \right)^{\frac{1}{4}}$$

por el tamaño corriente del paso h.

Tol es la tolerancia permitida para la solución.

Es importante aprender que un tamaño fijo de ancho de paso, no siempre es la mejor estrategia para resolver el problema.

Ahora bien, sucede que para obtener la solución de una ecuación diferencial con retardo en un intervalo cualquiera, mayor que r, se requiere conocer valores de la expresión con retardo, en puntos que no han sido calculados. Así que, antes de proceder al cálculo de valores de la solución en instantes corrientes de t, se necesitará obtener primero, el polinomio de Hermite que pase por los puntos calculados en el paso anterior.

Este cálculo se obtiene por medio de diferencias divididas, pues se tiene, además de los valores de solución, con un pequeño cálculo adicional, el valor de la pendiente de la solución en cada punto calculado, ya que ésta es el segundo miembro de la ecuación diferencial con retardo que se está resolviendo.

En éste paso, se puede tener una cantidad considerable de puntos en un intervalo de ancho r, y así, el polinomio de Hermite tendría un grado muy alto, lo que implicará, un considerable trabajo de cómputo para su cálculo.

Esto puede salvarse gracias a la aplicación del siguiente:

LEMA. Si $p \geq 1$ es el orden de consistencia de un método numérico, f y θ son suficientemente diferenciables y $f(t,y(t),z(t),h)$ es Lipschitz con respecto a y y z, entonces el método R.K.F.H.(4-5) tiene como orden global de convergencia, $min\{p,q\}$; donde q es el grado del polinomio de Hermite, debido a los puntos de soporte (t_i,y_i,y'_i).

Este lema permite simplificar el cálculo del polinomio de Hermite, pues será suficiente con seleccionar un mínimo de puntos en el intervalo en proceso de solución para calcular el polinomio correspondiente, dado que sería ocioso tener polinomios de alto grado para la precisión del método numérico empleado en éste caso.

5.3 PROGRAMA Y EJEMPLOS.

Para aclarar con mayor precisión el método, se propondrá a continuación un programa, en lenguaje Pascal, para resolver ecuaciones diferenciales con retardo igual a *1* del tipo:

$$y'(t) = f(t,y(t),y(t-1)) \qquad t \geq 0$$

$$y(t) = \theta(t) \qquad -1 \leq t \leq 0$$

```
rogram funcev(input,output);

ses crt,graph,printer;

$I surf3d.&02}


ar      tipo,num,i,j,graphdriver,graphmode:integer;
        tope,alfa,k1,k2,k3,k4,k5,k6,error,su,t,y,y0,tol,h,h1,a,b,hmin,hmax:real;
        e,z,c,y1,t1,z1,Zh,t11,y11,z11,t2,y2:array[0..50] of real;
        pot,Q:array[0..50,0..50] of real;
        cuidado:boolean;

unction teta(t:real):real;
{DEFINICION DE LA CONDICION INICIAL}

begin
    teta:=t;
end;

function hermite(t:real):real;FORWARD;
{INTERPOLALCION DE HERMNITE/ADELANTE}


function yalfa(t:real):real;
{RETARDO PARA CONDICION INICIAL}

begin
     yalfa:=teta(t-alfa);
end;

function ybeta(t:real):real;
{RETARDO PARA HERMITE}
begin
     ybeta:=hermite(t-alfa);
end;


function f(u,v:real):real;
{DEFINICION DE f[t,y,y(t-α)]}

var w:real;

begin
     if tope=1 then w:=yalfa(u)
     else  w:=ybeta(u);
     f:=-3*v-2*w;    {E.D. CON RETARDO};
end;


procedure pedirfun;
{LECTURA DE DATOS}

begin
      clrscr;
      writeln;writeln(lst);
      writeln('f[t,y(t),y(t-α)] = -3 y(t) + 2 y(t-1)');
      writeln(lst,'f[t,y(t),y(t-α)] = -3 y(t) + 2 y(t-1)');
      writeln;writeln(lst);write('a = ');write(lst,'a = ');read(a);
```

```
    writeln;writeln(lst);write('b = ');write(lst,'b
    writeln(lst,b);
    writeln;writeln(lst);write('y(0) = ');write(lst,'y(0) = ');read(y1[0]);
    writeln(lst,y1[0]);
    writeln;writeln(lst);write('h = ');write(lst,'h = ');read(h);
    writeln(lst,h);
    writeln;writeln(lst);write('tol = ');write(lst,'tol = ');read(tol);
    writeln(lst,tol);
    repeat
    writeln;writeln(lst);
    write('tipo de gráfica (1:puntos, 2:continua): ');read(tipo);
    write(lst,'tipo de gráfica (1:puntos, 2:continua): ');
    writeln(lst,tipo);
    until (tipo>0)and(tipo<3);writeln;writeln(lst);
     hmin:=h/4;hmax:=h*2;alfa:=1;
end;

procedure constante;
{EVALUALCION DE PARAMETROS DE RUNGE-KUTTA-FELBERG}

begin
     c[1]:=1/4;c[2]:=3/8;c[3]:=3/32;c[4]:=9/32;
     c[5]:=12/13;c[6]:=1932/2197;c[7]:=7200/2197;c[8]:=7296/2197;
     c[9]:=439/216;c[10]:=3680/513;c[11]:=845/4104;
     c[12]:=1/2;c[13]:=8/27;c[14]:=3544/2565;c[15]:=1859/4104;c[16]:=11/40;
     c[17]:=1/360;c[18]:=128/4275;c[19]:=2197/75240;c[20]:=1/50;c[21]:=2/55;
     c[22]:=25[illegible]6;c[23]:=1408/2565;c[24]:=2197/4104;c[25]:=1/5;
     c[26]:=16/135;c[27]:=6656/12825;c[28]:=28561/56430;c[29]:=9/50;c[30]:=2/55
end;

procedure k_s;
{EVALUACION DE CONSTANTES DE RUNGE-KUTTA-FELBERG}
begin
     k1:=h*f(t,y);
     k2:=h*f(t+c[1]*h,y+c[1]*k1);
     k3:=h*f(t+c[2]*h,y+c[3]*k1+c[4]*k2);
     k4:=h*f(t+c[5]*h,y+c[6]*k1-c[7]*k2+c[8]*k3);
     k5:=h*f(t+h,y+c[9]*k1-8*k2+c[10]*k3-c[11]*k4);
     k6:=h*f(t+c[12]*h,y-c[13]*k1+2*k2-c[14]*k3+c[15]*k4-c[16]*k5);
     error:=abs(c[17]*k1-c[18]*k3-c[19]*k4+c[20]*k5+c[21]*k6);
     e[j]:=error;
     z[j]:=y+c[26]*k1+c[27]*k3+c[28]*k4-c[29]*k5+c[30]*k6;
end;

procedure imprime;
{IMPRESION DE t, y(t), y y'(t)}
var emp:integer;


begin
     if num=0 then emp:=0
     else emp:=1;
     for i:=emp  to j do
     begin
          t2[num]:=t1[i];y2[num]:=y1[i];
          writeln(num:2,'     ',t1[i],'     ',y1[i],'     ',z1[i]);
          writeln(lst,num:2,'     ',t1[i],'     ',y1[i],'     ',z1[i]);
          num:=num+1;
     end;
end;


procedure [illegible]
                    {[illegible] INTERPOLACION DE HERMITE}
```

```
var con,salt:integer;

begin
    t11[0]:=t1[0];v11[0]:=v1[0];z11[0]:=z1[0];
    t11[4]:=t1[j];v11[4]:=v1[j];z11[4]:=z1[j];
    salt:=trunc(j/5)+1;
    con:=salt;i:=1;
    while (con<j) and (i<4) do
    begin
        t11[i]:=t1[con];v11[i]:=v1[con];z11[i]:=z1[con];
        con:=con+salt;
        i:=i+1;
    end;
end;


procedure puntos;
{GENERACION DE LA SOLUCION DE LA E.D.}

begin
    t1[0]:=a;
    tope:=1;
    while tope<=b do
    begin
        j:=0;t:=t1[0];y:=y1[0];z1[0]:=f(t1[0],y1[0]);
        while t<tope do
        begin
            if (t+h) > tope then h:=tope-t;
            k_5;
            if (error<tol) or (h<2*hmin) then
            begin
                y1[j+1]:=y+c[22]*k1+c[23]*k3+c[24]*k4-c[25]*k5;
                t1[j+1]:=t+h;z1[j+1]:=f(t1[j+1],y1[j+1]);
                j:=j+1;t:=t1[j];y:=y1[j];
            end;
            if error=0 then su:=0
            else  su:=0.84*expn((tol*h/error),0.25);
            if (su<0.75) and (h>2*hmin) then h:=h/2;
            if (su>1.5) and (2*h<hmax) then h:=h*2;
        end;
        imprime;
        vaciado;
        t1[0]:=t1[j];y1[0]:=y1[j];
        tope:=tope+1;
    end;
end;


function hermite(t:real):real;
{INTERPOLACION DE HERMITE}

var i1,k,l,r,temp,grad:integer;
    prod1,prod2,sum:real;


procedure potencias;
begin
    for i:=0 to 4 do
    begin
        pot[i,0]:=1;
        pot[i,1]:=t-t11[i];
        pot[i,2]:=sqr(t-t11[i]);
    end;
```

```
begin
     for i:=0 to 4 do
     begin
          k:=2*i;l:=2*i+1;r:=2*i-1;
          Zh[k]:=t11[i];Zh[l]:=t11[i];
          Q[k,0]:=y11[i];Q[l,0]:=y11[i];
          Q[l,1]:=z11[i];
          if i<>0 then Q[k,1]:=(Q[k,0]-Q[r,0])/(Zh[k]-Zh[r]);
     end;
     for i:=2 to 9 do
          for i1:=2 to i do
               Q[i,i1]:=(Q[i,i1-1]-Q[i-1,i1-1])/(Zh[i]-Zh[i-i1]);
     potencias;
     i:=0;sum:=0;
     while i<= 8 do
     begin
          prod1:=1;prod2:=1;
          for k:=0 to trunc(i/2)-1 do
                    prod1:=prod1*pot[k,2];
          prod2:=prod1*pot[trunc(i/2),1];
          sum:=sum+Q[i,i]*prod1+Q[i+1,i+1]*prod2;
          i:=i+2;
     end;
     hermite:=sum;
end;

{$i vect.pas}
{$i graf.pas}

begin
     num:=0;
     pedirfun;
     writeln('t':14,'y(t)':22,'y'(t)':20);
     writeln(lst,'t':14,'y(t)':22,'y'(t)':20);
     writeln;writeln(lst);
     constante;
     puntos;
     repeat
     until keypressed=true;
     grafica;
end.
```

f[t,v(t),v(t-a)] = -2 [1 + v(t)] v(t-1)   θ(t) = t   t ∈ [-1

a = 1.0000000000E+00

t = 5.0000000000E+00

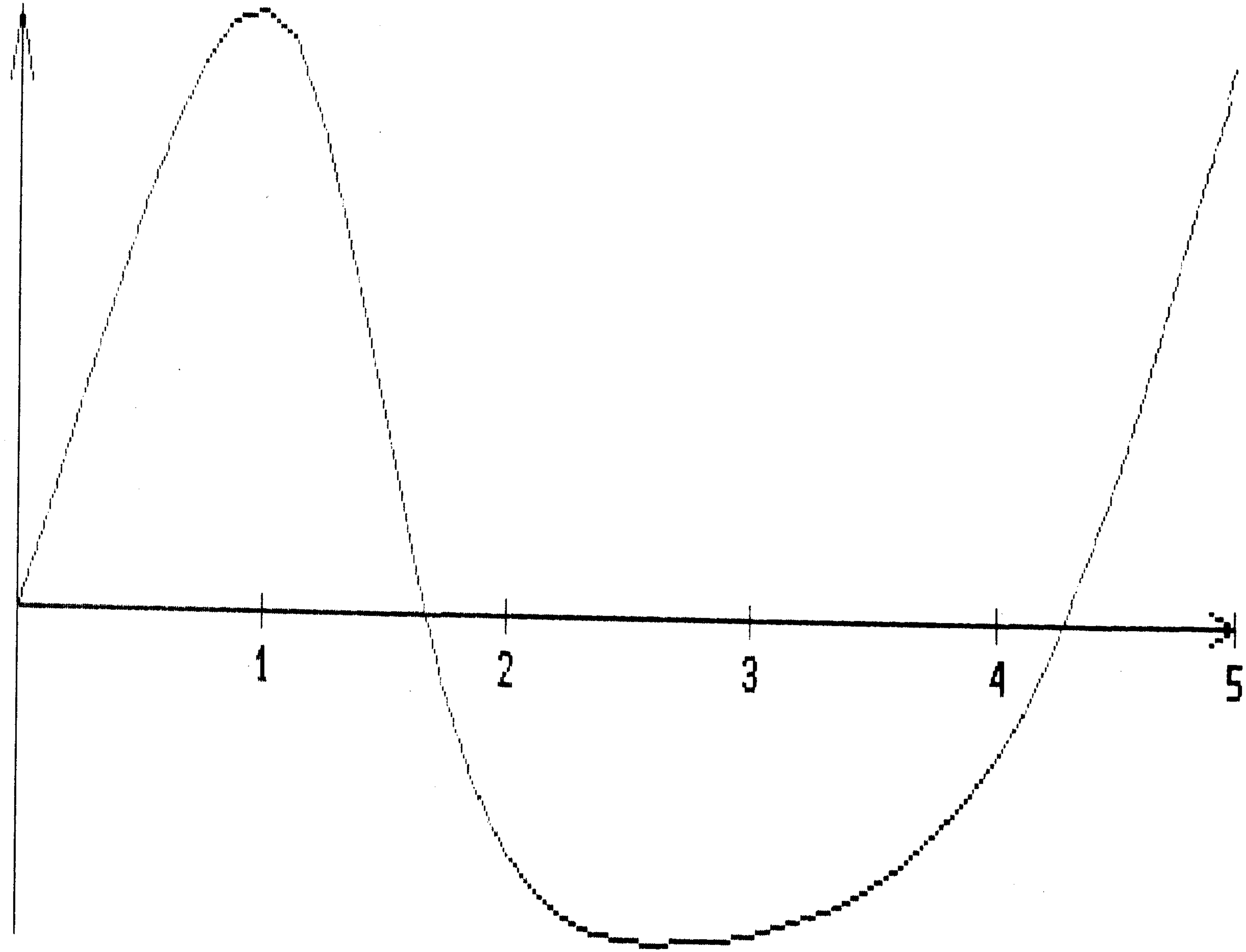
v(0) = 0.0000000000E+00

h = 1.2500000000E-01

tol = 2.0000000000E-04

tipo de gráfica (1:puntos, 2:continua): 2

	t	v(t)	v'(t)
0	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	2.0000000000E+00
1	1.2500000000E-01	2.6411894729E-01	2.2122081578E+00
2	2.5000000000E-01	5.4893116766E-01	2.2232467515E+00
3	3.7500000000E-01	8.3828757195E-01	2.2991032149E+00
4	5.0000000000E-01	1.1170011662E+00	2.1170011662E+00
5	6.2500000000E-01	1.3616852764E+00	1.7712639573E+00
6	7.5000000000E-01	1.5535904235E+00	1.1767952118E+00
7	8.7500000000E-01	1.6761395766E+00	6.6903489415E-01
8	1.0000000000E+00	1.7182824840E+00	0.0000000000E+00
9	1.1250000000E+00	1.6314613250E+00	-1.3900365251E+00
10	1.2500000000E+00	1.3778852610E+00	-2.6101150987E+00
11	1.3750000000E+09	9.9898047873E-01	-3.3554183906E+00
12	1.5000000000E+00	5.6460110185E-01	-3.4953225107E+00
13	1.6250000000E+00	1.4670800185E-01	-3.1229107847E+00
14	1.7500000000E+00	-2.0452048481E-01	-2.4716987138E+00
15	1.8750000000E+00	-4.6960370150E-01	-1.7780367140E+00
16	2.0000000000E+00	-6.5361636364E-01	-1.1903698702E+00
17	2.1250000000E+00	-7.7294734267E-01	-7.4083855853E-01
18	2.2500000000E+00	-8.4462778055E-01	-4.2817018231E-01
19	2.3750000000E+00	-8.6478729554E-01	-2.3018878797E-01
20	2.5000000000E+00	-9.0527465116E-01	-1.0696407265E-01
21	2.6250000000E+00	-9.1324799597E-01	-2.5452176851E-02
22	2.7500000000E+00	-9.1246932335E-01	3.5803632846E-02
23	2.8750000000E+00	-9.0460077716E-01	8.9606190969E-02
24	3.0000000000E+00	-8.9005140499E-01	1.4372840171E-01
25	3.1250000000E+00	-8.6843428968E-01	2.0308698095E-01
26	3.2500000000E+00	-8.3882078283E-01	2.7227288893E-01
27	3.3750000000E+00	-7.9921775517E-01	3.5423042179E-01
28	3.5000000000E+00	-7.4954036621E-01	4.5346408358E-01
29	3.6250000000E+00	-6.8552781766E-01	5.7433507987E-01
30	3.7500000000E+00	-6.0488089206E-01	7.2106813014E-01
31	3.8750000000E+00	-5.0405679938E-01	8.9726244874E-01
32	4.0000000000E+00	-3.7924634287E-01	1.1050053294E+00
33	4.1250000000E+00	-2.2651938710E-01	1.3434337982E+00
34	4.2500000000E+00	-4.2345525981E-02	1.6066009512E+00
35	4.3750000000E+00	1.7559642452E-01	1.8805351094E+00
36	4.5000000000E+00	4.2718603548E-01	2.1394756505E+00
37	4.6250000000E+00	7.0914260145E-01	2.3420473581E+00
38	4.7500000000E+00	1.0079071155E+00	2.4290892944E+00
39	4.8750000000E+00	1.3075098079E+00	2.3262239190E+00
40	5.0000000000E+00	1.5782808183E+00	1.9556071425E+00


1
2
3
4
5

f[t,y(t),y(t-a)] = -3 y(t) + 2 y(t-1)   Ø(t) = t   t ∈ [-1,0]

a = 0.0000000000E+00

b = 5.0000000000E+00

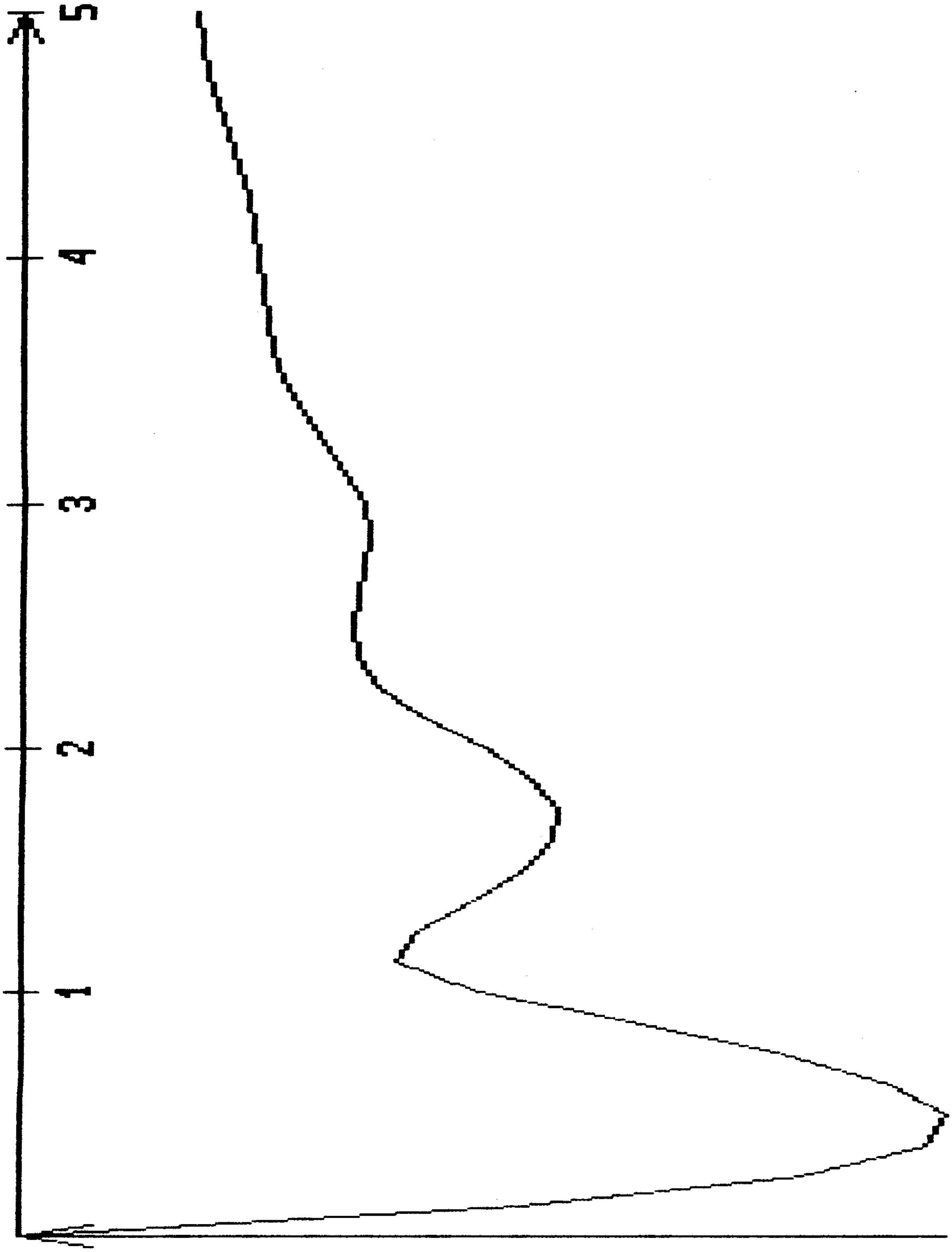
y(0) = 0.0000000000E+00

h = 1.2500000000E-01

tol = 1.0000000000E-04

tipo de grafica (1:puntos, 2:continua): 2

	t	y(t)	y'(t)
0	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	-2.0000000000E+00
1	1.2500000000E-01	-1.9464346079E-01	-1.1660696176E+00
2	2.5000000000E-01	-3.0235693625E-01	-5.9292919126E-01
3	3.7500000000E-01	-3.5002550924E-01	-1.9901247049E-01
4	5.0000000000E-01	-3.5713283988E-01	7.1698519674E-02
5	6.2500000000E-01	-3.3591175835E-01	2.5775927505E-01
6	7.5000000000E-01	-2.9521146220E-01	3.8562438659E-01
7	8.7500000000E-01	-2.4117229846E-01	4.7251989538E-01
8	1.0000000000E+00	-1.7797367523E-01	5.3392150570E-01
9	1.1250000000E+00	-1.4566423597E-01	4.7681606090E-02
10	1.2500000000E+00	-1.5385230273E-01	-1.4315696430E-01
11	1.3750000000E+00	-1.7493410429E-01	-1.7584905367E-01
12	1.5000000000E+00	-1.9461276085E-01	-1.3062739722E-01
13	1.6250000000E+00	-2.0627028250E-01	-5.3024447629E-02
14	1.7500000000E+00	-2.0756638391E-01	3.2276227351E-02
15	1.8750000000E+00	-1.9840768877E-01	1.1289162051E-01
16	2.0000000000E+00	-1.7977335494E-01	1.8337239436E-01
17	2.1250000000E+00	-1.5604272080E-01	1.7690307129E-01
18	2.2500000000E+00	-1.3811403497E-01	1.0663764944E-01
19	2.3750000000E+00	-1.2926594929E-01	3.7927394681E-02
20	2.5000000000E+00	-1.2759110011E-01	-6.4522213647E-02
21	2.6250000000E+00	-1.2972342996E-01	-2.3371134329E-02
22	2.7500000000E+00	-1.3248818627E-01	-1.7669209013E-02
23	2.8750000000E+00	-1.3249043881E-01	3.6562461860E-02
24	3.0000000000E+00	-1.3119871234E-01	2.4049460145E-02
25	3.1250000000E+00	-1.2510087136E-01	6.2919957491E-02
26	3.2500000000E+00	-1.1630293249E-01	7.2690630127E-02
27	3.3750000000E+00	-1.0759785719E-01	6.4261920385E-02
28	3.5000000000E+00	-1.0041779260E-01	4.5671777586E-02
29	3.6250000000E+00	-9.5951976994E-02	2.8411249292E-02
30	3.7500000000E+00	-9.3310296377E-02	1.4954516586E-02
31	3.8750000000E+00	-9.1909044972E-02	8.7442687209E-03
32	4.0000000000E+00	-9.0209815795E-02	1.0032000700E-02
33	4.1250000000E+00	-8.9140912386E-02	1.7421911398E-02
34	4.2500000000E+00	-8.6392615101E-02	2.6541979927E-02
35	4.3750000000E+00	-8.2630126575E-02	3.2704562049E-02
36	4.5000000000E+00	-7.8412914367E-02	3.4002757891E-02
37	4.6250000000E+00	-7.4312271914E-02	3.1030988608E-02
38	4.7500000000E+00	-7.0755877525E-02	2.5647039821E-02
39	4.8750000000E+00	-6.7913928771E-02	1.9924019655E-02
40	5.0000000000E+00	-6.5719262996E-02	1.5525157398E-02



1
2
3
4
5

$f[t, y(t), y(t-\alpha)] = -3\ y(t) + 2\ y(t-1)$ $\theta(t) = -\ t$ $t \in [-1,0]$

a = 0.0000000000E+00

b = 5.0000000000E+00

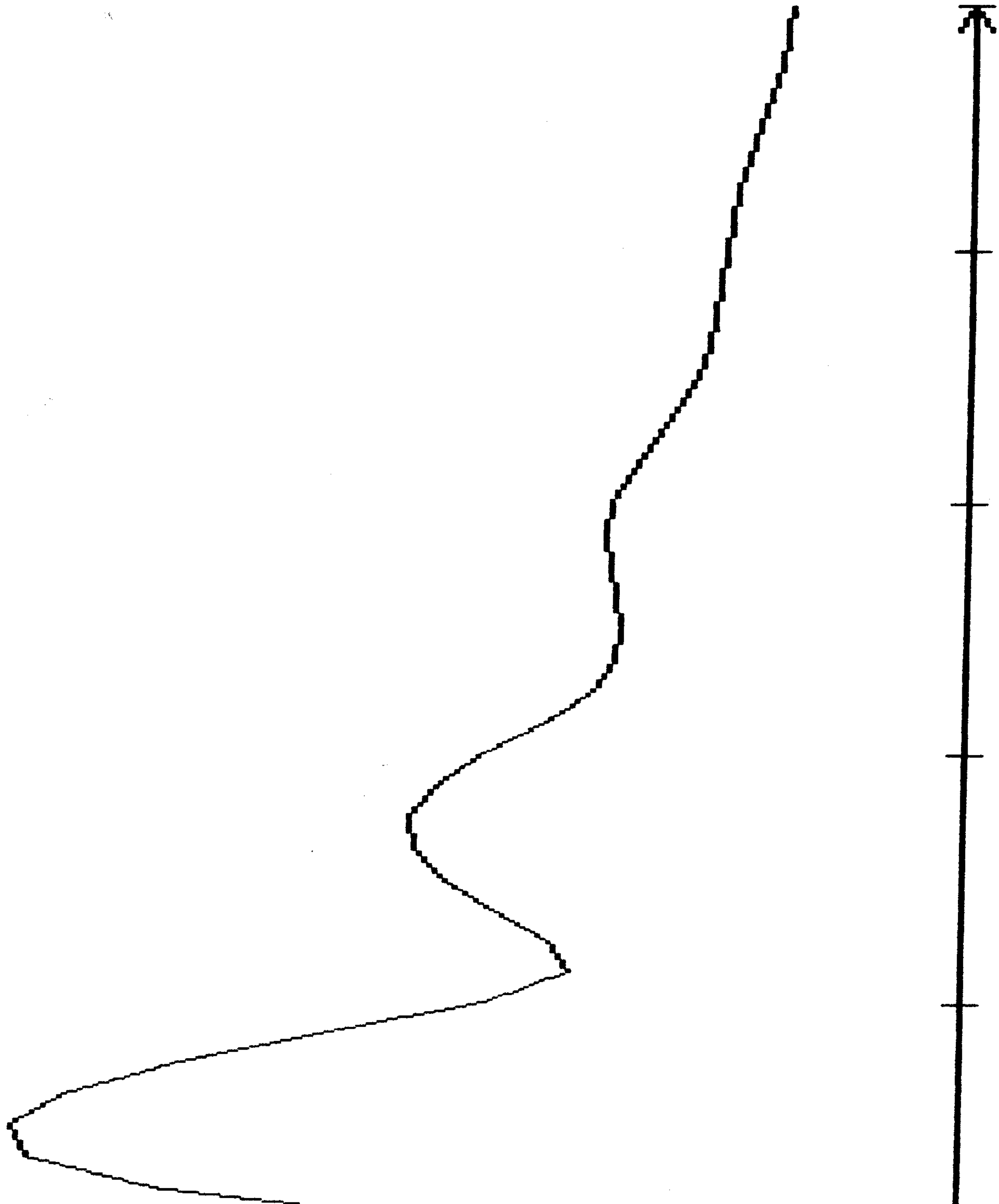
y(0) = 0.0000000000E+00

h = 1.2500000000E-01

tol = 2.0000000000E-04

tipo de gráfica (1:puntos, 2:continua): 2

	t	y(t)	y'(t)
0	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	2.0000000000E+00
1	1.2500000000E-01	1.9464346079E-01	1.1660696176E+00
2	2.5000000000E-01	3.0235693625E-01	5.9292919126E-01
3	3.7500000000E-01	3.5032550984E-01	1.9902347048E-01
4	5.0000000000E-01	3.5723283989E-01	-7.1698519674E-02
5	6.2500000000E-01	3.3591975835E-01	-2.5775927505E-01
6	7.5000000000E-01	2.9521146220E-01	-3.8563438659E-01
7	8.7500000000E-01	2.4117329846E-01	-4.7351989538E-01
8	1.0000000000E+00	1.7797383523E-01	-5.3392150570E-01
9	1.1250000000E+00	1.4566433597E-01	-4.7681606080E-02
10	1.2500000000E+00	1.5385230273E-01	1.4315696430E-01
11	1.3750000000E+00	1.7493410429E-01	1.7584905367E-01
12	1.5000000000E+00	1.9461276085E-01	1.3062739722E-01
13	1.6250000000E+00	2.0627028250E-01	5.3024447628E-02
14	1.7500000000E+00	2.0756638391E-01	-3.2276227351E-02
15	1.8750000000E+00	1.9840768877E-01	-1.1289161051E-01
16	2.0000000000E+00	1.7977335494E-01	-1.8337239436E-01
17	2.1250000000E+00	1.5604272080E-01	-1.7680307129E-01
18	2.2500000000E+00	1.3811408497E-01	-1.0663764944E-01
19	2.3750000000E+00	1.2926594928E-01	-3.7927394681E-02
20	2.5000000000E+00	1.2759110011E-01	6.4522213647E-03
21	2.6250000000E+00	1.2972342996E-01	2.3371134338E-02
22	2.7500000000E+00	1.3248818627E-01	1.7668209013E-02
23	2.8750000000E+00	1.3349043881E-01	-3.6562461860E-03
24	3.0000000000E+00	1.3119872334E-01	-3.4049460145E-02
25	3.1250000000E+00	1.2500087136E-01	-6.2919957491E-02
26	3.2500000000E+00	1.1630293349E-01	-7.2680630527E-02
27	3.3750000000E+00	1.0759785718E-01	-6.4261920385E-02
28	3.5000000000E+00	1.0061799260E-01	-4.6671777586E-02
29	3.6250000000E+00	9.5952976996E-02	-2.8411248282E-02
30	3.7500000000E+00	9.3310296377E-02	-1.4954516586E-02
31	3.8750000000E+00	9.1909044972E-02	-8.7442687309E-03
32	4.0000000000E+00	9.0809815795E-02	-1.0032000700E-02
33	4.1250000000E+00	8.9140912386E-02	-1.7421911388E-02
34	4.2500000000E+00	8.6382615301E-02	-2.6541978927E-02
35	4.3750000000E+00	8.2633262575E-02	-3.2704563349E-02
36	4.5000000000E+00	7.8412914367E-02	-3.4002757892E-02
37	4.6250000000E+00	7.4312271914E-02	-3.1030988608E-02
38	4.7500000000E+00	7.0755877525E-02	-2.5647039821E-02
39	4.8750000000E+00	6.7913928772E-02	-1.9924019655E-02
40	5.0000000000E+00	6.5718262996E-02	-1.5535157298E-02



B I B L I O G R A F I A

1.- ORDINARY AND DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS
R. D. Driver
Springer Verlag, 1977.

2.- DIFFERENTIAL EQUATIONS
INTRODUCTION AND QUALITATIVE THEORY
Jane Cronin
Marcel Dekker Inc, 1980.

3.- DIFFERENTIAL EQUATIONS
Shepley L. Ross
Blaisdell.

4.- NUMERICAL METHODS
John H. Matheus
Prentice Hall, 1987.

5.- NUMERICAL TREATMENT OF DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY HERMITE INTERPOLATION
H. J. Oberle & H. J. Pesch
Numerische Mathematik, p.p. 235-255
Springer Verlag, 1981.

6.- NUMERICAL SOLUTION OF RETARDED INITIAL VALUE PROBLEMS
LOCAL AND GLOBAL ERROR & STEPSIZE CONTROL
Herbert Arndt
Numerische Mathematik, p.p. 343-359
Springer Verlag, 1984.

7.- THE R. K. F. H. B. 4 METHOD FOR DELAY - DIFFERENTIAL EQUATIONS
Jesper Oppelstrup
Lecture notes in mathematics, vol. 631 p.p. 133-146
Springer Verlag, 1978.

8.- HANDBOOK OF APPLICABLE MATHEMATICS
Vol. III, NUMERICAL METHODS
Churchouse Robert (Edit.).

9.- NUMERICAL METHODS FOR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
Colin W. Crier
In. Schmitt K.

10.- FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
Hale J.
Springer Verlag, 1977.

11.- THEORY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
Coddington & Levinson
Mc Graw Hill, 1955.