UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA
División de Estudios de Posgrado
Maestría en Docencia de las Matemáticas

"La Calculadora Electrónica, la Matemática Lúdica y la Matemática Recreativa como Apoyo para el Aprendizaje de las Matemáticas en el Bachillerato"

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
MAESTRO EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

Presenta:

DAVID CALDERÓN RIVERA

Dirigido por:

Dr. Víctor Larios Osorio

Sinodales:

Dr. Víctor Larios Osorio Presidente	Firma
M.D.M. Francisco Rivera Ramírez Secretario	Firma
M.C. José Enrique Crespo Baltar Vocal	Firma
M.D.M. José Carlos Arredondo Velázquez Suplente	Firma
M.D.M. Alexander Bell Mejía Suplente	Firma

M.I. Gerardo René Serrano Gutiérrez Dir. de la Facultad de Ingeniería	Dr. Luis Gerardo Hernández Sandoval Dir. de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Santiago de Querétaro, Qro.
Febrero 2006
México

RESUMEN

El presente trabajo consiste en una propuesta didáctica, a la que llamamos "ciclo básico de aprendizaje", enfocada al desarrollo de habilidades para el uso eficiente de una calculadora electrónica de bolsillo de tipo científico y está dirigido a estudiantes que ingresan al bachillerato. Se presenta a la calculadora no sólo como apoyo o como herramienta de trabajo, sino también como auxiliar didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ya que se busca lograr la interacción estudiante-problema-calculadora. A la vez que los estudiantes aprenden cómo utilizar una calculadora, aprenden o refuerzan algunos conceptos matemáticos. Estructurada a partir de situaciones-problema y de ejercicios, la propuesta se desarrolla en un ambiente de matemática recreativa, manejando un lenguaje muy accesible, adecuado al estudiante al que está enfocado este material. Como sustento a la propuesta previamente se realizó una investigación con estudiantes que ingresaron al bachillerato con el propósito de detectar los problemas más comunes al que se enfrentaban al trabajar con una calculadora para realizar cálculos numéricos durante el desarrollo y al final de una situación-problema de tipo matemático, cuya resolución forma parte de las prioridades tanto de las matemáticas como de la educación matemática. La información obtenida permitió la toma de decisiones para la propuesta didáctica con el fin de apoyar a la superación de las deficiencias detectadas.

(**Palabras clave:** ciclo básico de aprendizaje, calculadora, matemática recreativa).

SUMMARY

This work consists of a didactic proposal focused on the development of abilities for the efficient use of a scientific type pocket electronic calculator, which we call "basic level of learning", and which is meant for students entering high school. The calculator is presented not only as an aid or work tool, but also as a didactic aid in the teaching and learning of mathematics. While students are learning how to use the calculator, they are also learning or reinforcing mathematical concepts. We hope to achieve a student-problem-calculator interaction. With a structure based on situations-problem and on exercises, the proposal is developed in a recreational mathematical ambience, using accessible language, appropriate for the students for whom this material is intended. As a backup for this proposal, research was previously carried out with students entering high school in order to detect the most common problems they encountered when working with a calculator to make numerical calculations during the development and termination of a mathematical type situation-problem, the solution of which is a part of the priorities of Mathematics, as well as of Education in Mathematics. The information obtained allowed us to make decisions regarding the didactic proposal with the objective of helping to overcome the deficiencies detected.

(**Key words:** Basic level of learning, calculator, recreational mathematics)

La educación ya no debe limitarse a los jóvenes. Los jóvenes no deben aspirar a que finalice ese período, ni los ancianos deben mirar hacia atrás agradecidos por haber finalizado esa etapa. La educación debe ser considerada por todos como algo necesario a lo largo de toda la vida.

Isaac Asimov (1917-1992)

A mi amada esposa Pily,
por su gran amor,
quien sin su apoyo total este
proyecto no hubiera sido posible.

A mi hijo Christopher,
ejemplo de humildad
y responsabilidad.

A mis padres,
Gregorio (q.e.p.d.) y Martha,
por su amor y
por su humildad.

A mis hermanos y hermanas.

A todas aquellas personas que
me animaron a seguir adelante
a pesar de los obstáculos.

Si alguien tiene una ocurrencia antes que nadie,
durante años no hacen más que reírse de él.
Cuando por fin se comprende el descubrimiento,
todo el mundo dice que era algo obvio.
Wilhelm Jensen (1837-1911)

El hombre sensato se adapta al mundo;
el insensato insiste en querer que el mundo se adapte a él.
Por lo tanto, el progreso depende del insensato.
(George Bernard Shaw)

AGRADECIMIENTOS

Agradezco de manera muy especial al Dr. Víctor Larios Osorio, director de esta tesis, por su enorme ayuda en la elaboración de este trabajo, por su gran amabilidad, por sus atinados comentarios y correcciones, y sobre todo por su humildad y su amistad. Muchas gracias, Víctor.

A mis sinodales, muchas gracias por su apoyo y por su confianza.

A todos mis maestros y maestras de la Maestría, muchas gracias por sus enseñanzas.

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES

Las que se conocen como nuevas tecnologías están presentes en todas las esferas de la vida, incluido el sistema educativo. Están cambiando las estructuras económicas, laborales e individuales de los seres humanos. Su empleo como medio de enseñanza es una realidad y una necesidad social. Se utilizan con fines pedagógicos, ampliando cada vez más sus posibilidades de empleo en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Como lo menciona Fainholc (2000), la tecnología educativa intenta superar lo convencional.

Dentro de las nuevas tecnologías está la calculadora electrónica, misma que tiene ya algunos años en operación en el campo educativo y su renovación constante la mantiene actualizada a las nuevas necesidades. Una calculadora electrónica es un instrumento de uso generalizado y muy popular, no sólo en el ámbito escolar, sino también en oficinas, en la industria, en el comercio y hasta en el hogar. Su popularidad se podría comparar con otros instrumentos propios de la era tecnológica: teléfono, televisión, radio, automóvil y tantos otros aparatos e instrumentos que forman parte ya de la vida cotidiana de millones de personas en todo el mundo. Su uso se hace imprescindible para muchas personas de todas edades y condiciones sociales.

Este instrumento, tan pequeño de tamaño, actualmente puede tener más potencia que las primeras computadoras que se crearon, que ocupaban un gran espacio. Realizan cientos de miles de operaciones internas por segundo. Su costo es bastante accesible, al alcance de casi cualquier bolsillo (por otro lado, se les llama "calculadoras de bolsillo" por su reducido tamaño). Están disponibles en muchos modelos y capacidades: las hay de tipo básico, científica, programable, graficadora, algebraica, entre otras. La tecnología continúa modificándolas y logrando que cada vez tengan un mayor potencial.

La calculadora electrónica en los ámbitos escolar, profesional y científico, ha tenido una enorme aceptación por las bondades que ofrece: realiza cálculos tediosos y ahorra una enorme cantidad de tiempo; se ha convertido en una potente herramienta de trabajo; su uso generalizado ha vuelto obsoletas las tablas matemáticas de logaritmos, de funciones trigonométricas y otras; desplazó a su predecesora: la regla de cálculo. Aun en países en los que todavía se utiliza el ábaco, la calculadora electrónica compite con él y cada vez se le utiliza más.

Desde mucho tiempo atrás se han inventado instrumentos para acelerar los cálculos matemáticos, muchos de tipo mecánico, como las antiguas sumadoras, surgidos por la necesidad primordial de reducir el tiempo empleado para ello. Todo eso ha llevado a la aparición de las computadoras, y de ahí a las calculadoras electrónicas de bolsillo, que a la vez son microcomputadoras, gracias a la tecnología del microchip. Este instrumento en sus inicios se utilizaba como un auxiliar para realizar cálculos numéricos. En la actualidad se cuenta con calculadoras que realizan muchas más funciones.

En el ámbito de la educación matemática la preocupación de muchos educadores se ha centrado en la utilización de la calculadora no sólo como una potente herramienta de trabajo, sino también como un eficaz auxiliar didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se pretende que el estudiante la utilice de manera inteligente y le ayude tanto para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos como para descubrir resultados por sí mismo, al realizar exploraciones propias.

Cedillo (1999a), menciona que en México fue hasta 1993 que se dio apoyo oficial y se alentó su uso en la escuela secundaria. A pesar de ello, al parecer todavía hay algunas personas que se oponen a su utilización. Pero investigaciones sobre su uso realizadas tanto en países desarrollados como en nuestro país por entusiastas investigadores han mostrado "...un incremento sensible en la calidad del aprendizaje de los estudiantes" (Cedillo, 1999a, p. 121). Sin embargo, dada su importancia y las implicaciones que tiene, se continúa investigando su uso en el ámbito escolar, pues, como todo instrumento, presenta problemáticas. "En México, la calculadora tuvo y tiene una fuerte repercusión en el nivel superior. Sin embargo, a diferencia de otros países, no se le utiliza de manera organizada en los niveles básicos, ni en el medio superior" (Hitt, 1999, p. 24).

La calculadora electrónica continúa evolucionando. Nuevas funciones se añaden conforme pasa el tiempo: operaciones con fracciones, derivación e integración de funciones, graficación, programación y otras, cada vez más sofisticadas. Su uso adecuado se hace necesario para obtener resultados confiables. De ahí la necesidad de instruir al estudiante para lograr este objetivo.

Lo lúdico tiene que ver con el juego. Esta estrategia para enseñar a aprender matemáticas ha tenido alguna difusión y aceptación principalmente en la escuela primaria, mas en otros niveles no se le acepta mucho, pues no se le considera *seria*. Sin embargo, quienes así opinan olvidan (o desconocen) que tanto la matemática lúdica como la llamada matemática recreativa, han interesado desde hace mucho tiempo a una buena parte de los matemáticos. Ambas están más ligadas al desarrollo de las matemáticas que a su enseñanza. Muchos matemáticos, desde los antiguos griegos, han gustado retar a sus colegas a través de acertijos matemáticos.

La matemática recreativa es similar a los juegos en cuanto a su aspecto lúdico, pero, a diferencia de éstos, tiene un carácter individual, pues aquí se trata de jugar con un adversario constituido por las propias reglas del juego, en lugar de hacerlo con otra persona (Deulofeu, 1999, p. 93). Este aspecto la convierte en un adecuado instrumento para interesar tanto a los alumnos hacia las matemáticas como a los profesores en su labor docente. Estas ideas se ampliarán en secciones correspondientes del marco teórico.

El ciclo básico de aprendizaje que comprende la presente propuesta didáctica contempla ejercicios y problemas de tipo matemático para ser realizados con ayuda de una calculadora electrónica de tipo científico, en un ambiente lúdico, desde una visión constructivista de la educación matemática, para el uso eficiente de una calculadora, que contribuya a corregir las dificultades que tienen los estudiantes al utilizar la calculadora. Se pretende coadyuvar de alguna manera a superar la escasa disposición de este tipo de material, como apoyo tanto para el estudiante como para el profesor, encauzado al aprendizaje de las matemáticas.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El bajo aprovechamiento y los altos índices de reprobación en matemáticas no son privativos de nuestro país. Esta situación se presenta en el ámbito mundial. Para muchos estudiantes las matemáticas representan algo alejado de la realidad y el desinterés se manifiesta en esos índices. Por otro lado, muchos maestros de matemáticas se preocupan por esta situación y se esfuerzan por lograr que los alumnos obtengan mejores resultados de aprobación y de aprendizaje en esta materia, no siempre con resultados satisfactorios. En este fenómeno está también la institución educativa, enfocada en hacer que disminuyan los ya mencionados índices de reprobación y que los estudiantes obtengan un mejor nivel de educación. El problema va aún más allá si tomamos en cuenta el papel de las autoridades educativas, encargadas de poner los lineamientos en lo referente a la educación matemática; y continúa todavía más allá al involucrar a la sociedad en su conjunto, que espera profesionistas con una educación de calidad que coadyuve a resolver los problemas de la vida cotidiana.

Al parecer los inmensos recursos humanos y económicos que se destinan a la educación matemática no se ven reflejados en los resultados de manera totalmente satisfactoria. Ontiveros (1994, p. 15) lo expresa de la siguiente manera: "Las matemáticas, junto con el lenguaje, constituyen la columna vertebral del fracaso escolar institucionalizado".

Ahora bien, a pesar de que la tecnología está inmersa en la vida cotidiana y forma parte de casi toda institución, llámese familiar, educativa, industrial, institucional y hasta religiosa, todavía se ve con cierto recelo el uso de ella de forma masiva, específicamente el de la calculadora electrónica como apoyo para el aprendizaje de las matemáticas, tal vez por desconocimiento o por el impulso muy humano de resistencia al cambio. Sin embargo, según Wenzelburger (1993) y Cedillo (1999a), múltiples investigaciones sugieren que la calculadora electrónica es una herramienta muy eficaz tanto como apoyo en la resolución de problemas como en el aprendizaje de las matemáticas, como puede verse en el apartado 2.2.6 *Investigaciones sobre calculadoras.*

Su utilidad para las matemáticas la hacen un instrumento muy popular y de uso generalizado. Su bajo costo, disponibilidad y relativo fácil manejo la dejan fuera de la posibilidad de ser desplazada por las computadoras, pues éstas últimas se utilizan para muchos otros efectos, mientras que la calculadora está enfocada sólo para realizar cálculos matemáticos. Aunque se puede aprovechar como una herramienta didáctica en el aula, como todo instrumento tecnológico presenta ciertas problemáticas en cuanto a su uso[1]. Algunos investigadores han abordado el asunto realizando investigaciones con el fin de obtener información que los lleve a tratar de dar solución a algunas de estas problemáticas, desde los años 1970's, entre las cuales se mencionan las siguientes:

- Desperdicio de recursos (desconocimiento de muchas de las operaciones que se pueden realizar con estos instrumentos, falta de economía al utilizarla, etc.)

[1] *Uso* no como sinónimo de *manipulación*, sino de *utilización* de una calculadora en el aula.

- Reticencia de algunos educadores para permitir su uso activo y permanente en el aula.

- Desconocimiento de que se le puede utilizar como un instrumento didáctico para la enseñanza–aprendizaje de las matemáticas, y no sólo como auxiliar en la resolución de problemas matemáticos.

- Errores que cometen los estudiantes al utilizar la calculadora en la resolución de problemas en la clase de matemáticas, lo que provoca errores en los resultados.

- La falta de un paradigma en cuanto a la utilización de la calculadora en la clase de matemáticas en nuestro medio.

- La falta de material apropiado para instruir a los estudiantes en el uso adecuado de la calculadora.

- En los niveles básico y medio superior prácticamente no existen estrategias que conduzcan a los estudiantes a utilizarla de manera organizada (Hitt, 1999).

Debido a los programas tan abundantes que deben cumplir los profesores de matemáticas, aunado a un deficiente uso de la calculadora, por una parte no se le dedica el tiempo necesario para manejarla de manera más apropiada y por otro lado se desperdician los enormes recursos que nos ofrece la calculadora. Cuando se hace algo al respecto, sólo se logra que los estudiantes aprendan algunos algoritmos básicos. Pero la calculadora ofrece eso y mucho más, como puede observarse en el apartado 2.2.4 *Ventajas que ofrece el uso de la calculadora.* Se hace necesario pues, contar con planteamientos que involucren al docente y lo motiven, para contribuir a reducir un poco esta situación.

Por otro lado, tanto la matemática lúdica como la matemática recreativa, no tienen un lugar adecuado en la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, desperdiciando también los enormes recursos que ofrecen, al no considerárseles serias (ver sección 2.3.3 *Ventajas del empleo de recreaciones y juegos en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas*). Además, a pesar de tanto que se habla y se promueve el constructivismo, la educación en nuestro país continúa en general ofreciéndose de manera tradicional, sobre todo en los niveles medio–superior y superior, contribuyendo quizá el hecho de que la mayoría de los profesores de matemáticas no tienen una preparación en docencia de esta disciplina, además de la problemática que implica su implementación en nuestro medio (entre otros aspectos, los grupos con una cantidad numerosa de alumnos en el salón de clases).

De los aspectos arriba mencionados, por lo general la poca información que se encuentra, no conjunta a dichos elementos, más bien se les presenta por separado. Respecto al constructivismo, por ejemplo, se consigue una gran cantidad de información al respecto (origen, evolución, clases de constructivismo, su epistemología, su base filosófica, sus seguidores, sus detractores, entre otras cosas), sin embargo, muy poca de ella se refiere a la aplicación de esta epistemología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En cuanto al uso de la calculadora, por lo general se restringe a una especie de manual del usuario: *para obtener tal cosa, oprima tal tecla,* y cosas por el estilo. Respecto a la matemática lúdica y a la matemática recreativa, generalmente se enfocan a la resolución de problemas específicos de alguna de las ramas de las matemáticas, pero muy poco a problemas de aplicación utilizando la calculadora.

Al conjuntar los elementos *calculadora*, *matemática lúdica* y *matemática recreativa*, con un enfoque constructivista para la resolución de problemas, se observa una carencia de suficiente material didáctico de este tipo que sirva de apoyo para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. No existen muchas propuestas con este enfoque, conclusión a la que se llegó después de una amplia búsqueda de bibliografía. La calculadora puede usarse en diseños de este tipo.

1.3 OBJETIVOS DE LA PROPUESTA

Una propuesta didáctica en el ámbito matemático escolar tiene entre sus propósitos ofrecer una alternativa para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Para los efectos de este trabajo, el enfoque estará encaminado a desarrollar habilidades en los estudiantes de bachillerato para la utilización de la calculadora electrónica de tipo científico de una manera más eficaz, para apoyar el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas, tratando de aprovechar lo mejor posible los enormes recursos que ofrece este instrumento, descargando en ella la realización de procedimientos rutinarios.

Se diseñó una propuesta didáctica con la pretensión de que su propósito sea que el estudiante de bachillerato utilice una calculadora científica, a la vez de que sea soporte técnico para la resolución de problemas y como auxiliar didáctico para el aprendizaje de las matemáticas, con un enfoque constructivista y teniendo como apoyo a la matemática lúdica y a la matemática recreativa, adecuada a nuestro medio y diseñada para el nivel correspondiente a la etapa escolar del bachillerato. Se partió del supuesto de que cualquier estudiante de este nivel debería aprender a utilizar una calculadora para la clase de matemáticas.

La propuesta asume como una tarea fundamental la creación de escenarios adecuados a las características de aprendizaje de los estudiantes; es decir, enfocar la enseñanza de la calculadora en el aprendizaje de habilidades y conocimientos mínimos indispensables que se considera deben poseer los estudiantes que ingresan a este nivel educativo. Se parte de la hipótesis de que en la medida en que se desarrollen las habilidades, el alumno podrá adquirir con mayor facilidad los conocimientos, lo cual repercutiría en el aprendizaje y, por lo tanto, se lograría un mejor desempeño escolar.

Dentro de las habilidades que se pretende que los estudiantes adquieran, están la manipulación correcta de la calculadora, un sentido crítico en la interpretación de los resultados, exploración, desarrollo y reforzamiento de conceptos, estimación, cálculo y aproximación, entre otros. El fin que se desea lograr es que el estudiante aprenda a utilizar la calculadora de manera más eficiente, pero también que aprenda matemáticas con la ayuda de este instrumento tecnológico. El ciclo básico de aprendizaje que se diseñó lleva como fin lograr lo anterior; se pretende aprovechar la riqueza de la matemática lúdica y de la matemática recreativa para lograr un aprendizaje significativo de las matemáticas, además de presentar al estudiante de bachillerato una cara diferente de las matemáticas, que le sean más atractivas, más interesantes, más significativas, más intuitivas, con menos rigor aunque con cierta formalidad.

Se ha visto que a los estudiantes les gusta utilizar la calculadora. También disfrutan con los juegos y recreaciones matemáticas. Representa un reto aprovechar estos instrumentos y técnicas matemáticas para lograr un aprendizaje significativo[2] de las matemáticas, así como para la facilitación y el mejoramiento de las clases. Se pretende, trabajando al unísono distintos objetivos, lograr la interacción estudiante-problema-calculadora contando con los fundamentos necesarios de su manejo, así como ofrecer a los profesores otro recurso didáctico que les permita tener una visión distinta de los problemas y de las matemáticas en el salón de clases; desarrollar actividades que puedan adaptarse para ser presentadas por el docente a los estudiantes, que hagan notar el gran beneficio que ofrece la calculadora como ayuda en la resolución de problemas; compartir con el profesor el poder de la calculadora, mediante la realización de actividades encaminadas a resolver un problema de matemáticas con la mayor eficacia y en el menor tiempo posible; invitar al docente a que tenga interés por la búsqueda de

[2] Con más *significado* para el alumno

nuevas alternativas para el desarrollo de actividades. Lo anterior podría enriquecer su labor educativa al presentar otra cara diferente al momento de abordar algunos temas en la clase de matemáticas, además de aprovechar más el tiempo al resolver un problema con apoyo de una calculadora.

Para sustentar la propuesta, se trabajó con grupos de estudiantes de bachillerato con el fin de investigar principalmente cuáles son los problemas más comunes que se presentan al trabajar con la calculadora. El análisis y la síntesis de la información resultante permitió tomar decisiones para la propuesta del diseño del ciclo básico de aprendizaje, el cual tiene como fin apoyar las deficiencias detectadas, mismas que requieren de una cuidadosa atención, al tratarse de habilidades y no sólo de conocimientos.

1.4 JUSTIFICACIÓN

Los educadores tienen la responsabilidad de contribuir a lograr que los alumnos tengan un aprendizaje significativo. Es su deber y su labor promover que los estudiantes sean analíticos, críticos y reflexivos. Se podría lograr el objetivo en la medida en que se busque constantemente la manera de ofrecer los cursos de matemáticas con nuevas perspectivas. La enseñanza de las matemáticas busca que los alumnos aprendan a resolver problemas más que el estudiante aprenda únicamente algoritmos (ya que también son necesarios en algunos aspectos).

Ya se ha puesto en entredicho desde hace tiempo el enfoque tradicionalista de la educación en general en cuanto a su eficacia respecto a los resultados de aprendizaje obtenidos, sin embargo se le sigue utilizando, quizá por la falta de información y de formación de los profesores de matemáticas, quizá por comodidad tanto de los estudiantes como de los profesores, quizá por desconocimiento, o tal vez por ese sentimiento tan arraigado en el ser humano de aferrarse a las tradiciones y al miedo de enfrentar nuevos retos y romper con viejos paradigmas.

Cambiar el estado de cosas no es tarea fácil, se requiere un cambio de actitud de las personas; sin embargo, algunas de ellas interesadas en la renovación de las situaciones establecidas por la sociedad se han preocupado en todos los tiempos y en todos los ámbitos por trastocar esa inercia a ver de manera diferente ese estado de cosas, elaborando teorías propositivas de mejoramiento, que conlleven a una situación más positiva. En el ámbito de la educación matemática, se tienen propuestas para obtener una mayor calidad en el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes.

Las investigaciones realizadas que muestran las potencialidades de cálculo que ofrecen las calculadoras deberían motivar que los profesores se hagan un replanteamiento de su uso en el aula, con la intención de contribuir al aprendizaje de los estudiantes tanto para su adecuada utilización como para el aprendizaje de las matemáticas al usársele como auxiliar didáctico.

Con la implementación de un ciclo básico de aprendizaje para el uso más eficiente de la calculadora, teniendo como apoyo a la matemática lúdica y a la matemática recreativa, con un enfoque constructivista, dirigido a estudiantes de bachillerato de nuevo ingreso, el fin que se persigue es que el estudiante aprenda a utilizar la calculadora de manera más eficiente, pero también que aprenda matemáticas con la ayuda de este instrumento tecnológico.

La propuesta que se propone lleva como fin lograr lo anterior. En ella se pretende aprovechar la riqueza de la matemática lúdica y de la matemática recreativa como soporte para lograr un aprendizaje significativo de las matemáticas. El fin es presentar al estudiante de bachillerato una cara diferente de las matemáticas que se involucran directamente con la tecnología y el medio que lo rodea para acercarla cada vez más hacia su interés, para que le sean más atractivas, más interesantes, con más sentido, más intuitivas, más dinámicas, con un menor rigor matemático pero sin perder cierta formalidad. A los estudiantes les gusta utilizar la calculadora. También disfrutan con los juegos y recreaciones matemáticas. No se deberían desaprovechar estos instrumentos y técnicas matemáticas para lograr un aprendizaje de las mismas de manera más provechosa.

No es fácil encontrar información que reúna los elementos principales de esta propuesta: la calculadora, la matemática lúdica y la matemática recreativa, partiendo del enfoque constructivista de la educación matemática. Al conjuntarlos en forma integral y de una manera atractiva para los estudiantes se pretende colaborar a salvar un poco esa deficiencia de información al respecto.

Muchos estudiantes poseen una calculadora y, mal que bien, la utilizan. Por tanto, es una responsabilidad y un reto el organizar metodológicamente el trabajo de los estudiantes para que el uso de la calculadora se convierta en un auténtico recurso didáctico que contribuya a hacer más eficiente el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, para la facilitación y mejoramiento de las clases escolares de esta disciplina, trabajando al unísono con distintas herramientas didácticas y con distintos objetivos; lograr la interacción estudiante-problema-calculadora, y ofrecer a los profesores otro recurso didáctico, que les permita tener una visión distinta de los problemas y de las matemáticas en el salón de clases.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 NUEVAS TECNOLOGÍAS

2.1.1 INTRODUCCIÓN

Se podría definir a la tecnología como la ciencia de la técnica (Fainholc, 2000, p. 1). La ciencia y la técnica unidas. La aplicación de la ciencia a fines prácticos. Govantes (2000) define la tecnología como "... el conjunto de conocimientos y métodos para el diseño y distribución de bienes y servicios, incluidos aquellos incorporados en los medios de trabajo, la mano de obra, los procesos, los productos y la organización" (p. 2).

Las nuevas tecnologías están cambiando las estructuras sociales, económicas, laborales e individuales de los seres humanos. En las próximas décadas, los avances tecnológicos en todos los ámbitos cambiarán de manera determinante las costumbres de muchos seres humanos de este planeta. Como ejemplo a la mano están las computadoras, trastocando hábitos y costumbres, tanto en el trabajo como en el hogar. Cada día que pasa, los ejecutivos dependen más de su computadora que de su secretaria y el trabajo se hace más dinámico y eficiente.

En las postrimerías del siglo XX las avanzadas tecnologías interactivas dieron lugar a la aparición de la cibercultura, uno de los fenómenos más apasionantes de todos los tiempos. A través de Internet millones de personas de todo el mundo se comunican diariamente. En un futuro no muy lejano estar conectado a la red será una necesidad para permanecer integrado al mundo. En todos los campos de la vida moderna se están produciendo profundas y rápidas transformaciones. Una nueva visión del mundo está aquí y ahora. Lo que sucederá de aquí en adelante desbancará a la imaginación.

2.1.2 LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS EN LA EDUCACIÓN

Las nuevas tecnologías están presentes en todas las esferas de la vida, incluido el sistema educativo. Su empleo como medio de enseñanza es una realidad y una necesidad social. Ya en 1980 (p. 9), Freudenthal mencionaba: "La tecnología influye en la educación".

La tecnología educativa es una parte diferenciada dentro del entorno mayor de la tecnología. Fainholc (2000, p. 3) la define de la siguiente manera: "... definimos a la Tecnología Educativa como la organización integrada de personas, significados, conceptualizaciones, procedimientos, artefactos simples y/o equipos complejos electronificados, pertinentemente adaptados, a ser utilizados para la elaboración, implementación y evaluación de programas, proyectos y materiales educativos que tienden a la promoción del aprendizaje contextuado de un modo libre y creador".

Govantes (2000, p. 4) refiere que las nuevas tecnologías son utilizadas con fines pedagógicos, "... ampliando cada vez más sus posibilidades de empleo en los procesos de enseñanza-aprendizaje. (...) Ellas permiten elaborar materiales didácticos orientados a multiplicar los efectos de las actividades de formación en el individuo, pueden motivar el afán de saber, el afán de aprender, crean en el estudiante habilidades para su auto - preparación. A través de ellas se despierta el deseo de aprender, se aprende a estudiar, se aprende a utilizar los conocimientos y a desarrollar el pensamiento. Ellas nos hacen ver que la información no es conocimiento, que éste exige esfuerzo, atención, rigor y voluntad". Más adelante concluye que a través de las nuevas tecnologías se sensibiliza a las personas con la ciencia y la tecnología, lo que trae consigo el florecimiento de una cultura científica y tecnológica. Al referirse a la educación, comenta que bien empleadas pueden ser un medio eficaz en la educación y en la enseñanza: "... estas tecnologías constituyen un instrumento, una herramienta importante para ser aplicadas con éxito en los procesos educativos" (p. 6).

Chevallard (1998) se pronuncia a favor de las nuevas tecnologías, así como por la necesidad de integrar la tecnología y el trabajo técnico al considerar cuatro aspectos de la disciplina matemática que se traducen en condiciones necesarias para entrar en una obra matemática, entre los cuales incluye: "... identificar y respetar las leyes que rigen el desarrollo de las técnicas, y producir una tecnología para aumentar la eficacia e inteligibilidad de las técnicas" (p. 133).

Santos Trigo (1997) puntualiza la necesidad de que el estudiante utilice la tecnología en los siguientes términos: "Es importante aceptar que los avances de la tecnología han sido tan rápidos y sustanciales en los últimos años que es imperativo que el estudiante adquiera habilidades y estrategias que le permitan constantemente ajustarse a estos avances y cambios. Es decir, la formación o educación del estudiante debe contemplar aspectos que le ayuden a conocer el potencial y uso de los avances tecnológicos e incorporarlos naturalmente a su práctica" (p.92).

Cedillo (1999c, prólogo), uno de los defensores e investigadores del uso de la calculadora en el aula de nuestro país, se pronuncia por un uso reflexivo de la tecnología: "Estamos en una era que cuenta con una tecnología muy avanzada y sofisticada; por ello, es imprescindible la investigación y producción de materiales que estén dirigidos al uso reflexivo de la tecnología... para el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en un ambiente tecnológico con calculadoras".

Las nuevas tecnologías siempre estarán disponibles para contribuir a producir conocimiento de todo tipo en las personas (conocimiento científico, arte, humanismo, entre otros). Utilizarlas con ese fin depende en gran parte de la disposición de los educadores, pues los estudiantes reciben con gusto todo lo que representa una innovación, algo diferente; disfrutan la tecnología. Los argumentos a favor de ésta superan con mucho los argumentos en contra, por lo menos en lo que respecta a la calculadora, como se verá más adelante.

2.2 LA CALCULADORA ELECTRÓNICA

2.2.1 INTRODUCCIÓN

La calculadora electrónica de bolsillo es un instrumento surgido de la tecnología. Hace su aparición en los años 1970's y desde entonces ha tenido un desarrollo vertiginoso, tecnológicamente hablando. De la calculadora básica se pasó a la calculadora científica, de ahí a la calculadora programable, después a la calculadora graficadora, luego a la calculadora algebraica y en los últimos años se está incrementando el uso de la *hand-held*, una verdadera microcomputadora de bolsillo.

Su antecedente inmediato es la regla de cálculo, instrumento con el que se podía realizar un gran número de operaciones. La calculadora vino a reemplazarla y a condenarla al olvido. Algo semejante sucedió con las sumadoras mecánicas, que perduraron largo tiempo. Todos estos instrumentos han surgido por la necesidad de realizar cálculos de tipo matemático de una manera más rápida y precisa.

2.2.2 UN POCO DE HISTORIA

Revisando un poco la historia se acepta que las matemáticas empezaron con la invención de los números para contar, y que el ábaco fue el primer instrumento de cálculo que inventó el ser humano. En cuanto a su origen, es incierto; algunos creen que surgió en Babilonia, mientras que otros piensan que fue en China. Después de miles de años, aún se le utiliza en nuestros días, principalmente en Asia.

A medida que la sociedad fue evolucionando, el Hombre tuvo que hacer cálculos bastante complicados que incluían sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números, y los medios de que se valió progresaron más. Se sabe que en la época de los griegos ya se utilizaban los calculadores mecánicos y desde entonces a la fecha se ha desarrollado una colección de máquinas de cálculo cada vez más complicadas, que responden a la necesidad de perfeccionamiento para facilitar los cálculos.

Entre ellas se tiene a los rodillos de Napier para multiplicación, muy populares en la Europa del siglo XVII e inventados por John Napier; la máquina sumadora de Pascal, para sumar y restar, inventada en 1642 por el filósofo francés Blaise Pascal (el alemán Gottfried von Leibniz mejoró esta calculadora en 1673); el analizador diferencial, del doctor Vannevar Bush, el cual fue un gigantesco computador moderno construido en 1930 en el M.I.T. para resolver ecuaciones diferenciales y se le considera como la transición a la era de la electrónica. En 1946 aparece el primer computador de la era electrónica: el ENIAC de la Universidad de Pensilvania.

A partir de entonces, los computadores han sufrido cambios radicales. El mejoramiento de los circuitos y de los componentes no tan solo les ha permitido ir más rápidamente sino que ha hecho posible también una reducción sensacional en cuanto a su tamaño. Máquinas que en un tiempo ocupaban un gran espacio tienen un tamaño muy reducido en la actualidad, y esta tendencia sigue a la baja. Esta tecnología hizo posible que se diseñaran instrumentos de cálculo pequeños para realizar cálculos numéricos en un principio, hasta la obtención de gráficas y lenguaje algebraico entre tantas otras cosas: la calculadora electrónica.

Nolasco (2001, p. 2) considera que las primeras calculadoras fueron fabricadas para ampliar la capacidad de memoria natural del hombre cuando éste, por circunstancias de la vida cotidiana y el comercio, necesitaba hacer las cosas cada vez más rápido y mejor: "... el hombre siempre ha incidido en la naturaleza para suplir sus limitaciones".

Como puede verse, desde hace siglos, los matemáticos han ideado esta clase de instrumentos como auxiliares para la resolución de problemas. La calculadora electrónica no solo ha desempeñado un papel vigoroso e importante en esta tarea, también ha contribuido al aprendizaje de las matemáticas al utilizársele como un auxiliar didáctico, en el desarrollo de actividades de exploración, experimentación, estimación, aproximación, cálculo, desarrollo y reforzamiento de conceptos, entre otras.

2.2.3 LA CALCULADORA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Aún en estos días la calculadora no ha sido del todo aceptada en el ámbito escolar, sobre todo en nuestro país. Posiblemente se deba al temor de enfrentar los retos que plantea el desarrollo tecnológico en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, su uso ofrece un gran número de ventajas, aun cuando existan algunas desventajas. Estos aspectos se verán más adelante.

El estudio y aplicación de las matemáticas tienen como fin principal la resolución de problemas, entonces se podría decir que el aprendizaje de algoritmos pasa a un segundo plano. Existen algoritmos que van perdiendo importancia, dando paso a una nueva forma de pensar en la educación matemática. Aparece una enseñanza preocupada por dar más profundidad a los conceptos matemáticos, dejando las tareas tediosas a las calculadoras. Teniendo la posibilidad de usar la calculadora el estudiante se podrá preocupar más por plantear las situaciones específicas de cada problema que de repetir mil veces la misma secuencia de operaciones, lo cual da más dinamismo a la clase de matemáticas.

Las calculadoras reducen la dedicación de aplicar procedimientos aritméticos y hasta algebraicos cuando ellos no son el objetivo de la lección. Con auxilio de la calculadora se pueden realizar prácticamente todas las operaciones de cálculo numérico que se requieren en la práctica educativa de las escuelas del nivel medio y medio-superior.

Como auxiliar didáctico se le puede utilizar para exploración de propiedades de los números; formular y probar hipótesis; experimentar con ideas y patrones matemáticos; hacer cálculos tediosos de la vida real; explorar, desarrollar y reforzar conceptos incluyendo estimación, cálculo y aproximación (Wenzelburger, 1993).

Cedillo (1998, p. 3) considera que "... actualmente hay cada vez más profesores que están buscando formas de emplear esas máquinas para liberar buena parte del tiempo que antes empleaban para el dominio de los algoritmos, para dedicarlo a aspectos relacionados con la resolución de problemas y una mejor comprensión de conceptos básicos". Sin embargo, Mercado y Sánchez (1999, p. 303), al hacer una reflexión sobre el uso de esta tecnología, presentan una aclaración pertinente que no debe olvidarse: "La calculadora y la computadora personal han provocado cambios en el uso y aplicación de las matemáticas; no obstante, las actividades de abstracción, de generalización y de demostración como una cadena de deducciones a partir de un conjunto de axiomas, siguen siendo fundamentales en matemáticas". Lo que quiere decir es que estas cosas no deben ser desplazadas aún con la calculadora.

2.2.4 OBJETIVOS DEL USO DE LA CALCULADORA

El National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989) al promover el uso de la calculadora para una clase de matemáticas, enuncia como objetivos los siguientes:

- Concentrarse en la resolución de problemas y no en las operaciones aritméticas.
- Lograr acceder a los conceptos y no a los cálculos.
- Explorar, desarrollar y reforzar conceptos, incluyendo estimación, cálculo y aproximaciones.
- Experimentar con ideas y patrones matemáticos.
- Hacer cálculos tediosos con datos de la vida real.

Lo anterior muestra la importancia de tomar conciencia que la calculadora puede ayudar a lograr una mejor comprensión de las matemáticas.

2.2.5 VENTAJAS QUE OFRECE EL USO DE LA CALCULADORA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La calculadora electrónica ofrece múltiples ventajas: su costo relativamente bajo, su relativa sencillez de manejo y su gran potencial didáctico que se ha descrito hasta ahora, la convierte en un instrumento adecuado para su utilización en la clase de matemáticas. La rapidez de cálculo (lo que ocasiona un ahorro considerable de tiempo) permite que se le dedique mayor tiempo a aspectos relacionados con la resolución de problemas y a una mejor comprensión de conceptos básicos. Se le puede integrar a cualquier clase de matemáticas como un instrumento de cálculo y recurso didáctico para estimular el aprendizaje de las matemáticas en la resolución de problemas. Es el instrumento más popular para realizar operaciones matemáticas. Compensa, no reemplaza, las destrezas de hacer cálculos a mano. Otra ventaja que ofrece la calculadora es el acceso individual a tecnología avanzada con costos relativamente bajos, sobre todo si se compara con el financiamiento que requiere la adquisición de computadoras personales.

Kilpatrick (1994) considera que los nuevos modelos de calculadoras, al tener gráficas, manejo de información y capacidades para la manipulación simbólica, le ofrecen al estudiante un medio potente para explorar las ideas matemáticas.

Wenzelburger (1993, p. 2) menciona las siguientes ventajas que arrojaron numerosas investigaciones sobre el uso de la calculadora en la educación matemática:

- Se encontró que las calculadoras ayudan al aprendizaje de las matemáticas.

- En más de cien investigaciones sobre uso de calculadoras en el salón de clase se comparó el desempeño de grupos que usan calculadoras con los que no las utilizan. En la gran mayoría de los casos los grupos con calculadoras trabajaron mejor o igual que los grupos que no las emplearon.

- Un estudio con cincuenta grupos de segundo a sexto año con duración de un año indica que el uso de las calculadoras no inhibe el aprendizaje de hechos y operaciones básicas.

- A los estudiantes les gusta usar ese dispositivo, los motiva y despierta un mayor interés por las matemáticas.

- En lo que se refiere al desarrollo de conceptos de numeración la calculadora no es una amenaza sino la clave para el aprendizaje.

Jiménez (1991, p. 97) menciona otros resultados de investigaciones en cuanto al empleo de la calculadora:

1) Facilitan la comprensión y el desarrollo conceptual.
2) Ayudan al cálculo y a la solución de problemas.

3) Despiertan y estimulan la curiosidad e independencia.
4) Ayudan a entender procesos algorítmicos.
5) Estimulan la estimación, aproximación y verificación.
6) Existen – que es lo más importante – y no pueden ignorarse.

Moreno (1996, p. 56) considera que la presencia de las calculadoras y computadoras en el contexto de la matemática escolar "... ha generado ya la necesidad de revisar las estructuras curriculares. Estos instrumentos están teniendo, además, un profundo efecto sobre las concepciones mismas de la matemática".

Cedillo (1999a, p. 122) al referirse al importante problema del rezago escolar, menciona que la investigación sugiere que el apoyo que brinda la calculadora, en un ambiente de aprendizaje adecuado, propicia que estudiantes con un historial previo de fracaso en matemáticas encuentren nuevas oportunidades de aprendizaje que les permiten enfrentar con mayor posibilidad de éxito el estudio de esta disciplina.

2.2.6 ARGUMENTOS EN CONTRA DEL USO DE LA CALCULADORA

Jiménez (1991, p. 97) menciona algunos argumentos de los oponentes al uso de la calculadora:

1) Destruyen toda motivación para aprender los conceptos básicos.
2) Desestimulan el pensamiento matemático.
3) Originan dependencia para cualquier cálculo.
4) Son inadecuadas para estudiantes lentos.
5) Bloquean la oportunidad para comprender totalmente un proceso algorítmico.
6) Desarrollan la noción de que las matemáticas se reducen a apretar botones de una caja negra.

Hitt (1996, p. 24) al referirse a las razones que han impedido el uso de la calculadora en México, menciona que aluden a la inhibición de las habilidades de mecanización de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Al respecto, reflexiona: "La argumentación anterior se refiere al uso de la calculadora en su expresión más pobre. La reflexión sobre su uso, más bien debe encaminarse a la posibilidad de utilizar esta tecnología en la formación de conceptos matemáticos".

Cedillo (1999c, prólogo), respecto a la creencia de que el uso de una calculadora inhibe el desarrollo de habilidades aritméticas, enfatiza que investigadores de diferentes nacionalidades han demostrado a través de sus proyectos de investigación que esas pérdidas de habilidades se deben al uso restringido de la calculadora en tareas de corte exclusivamente rutinario.

Independientemente de los argumentos en contra, anteriores o recientes que se tengan, está en gran parte en las manos del profesor el evitar que la calculadora se convierta en una desventaja, ayudando al estudiante a utilizarla para su provecho.

2.3 MATEMÁTICA LÚDICA Y MATEMÁTICA RECREATIVA

2.3.1 INTRODUCCIÓN

El conjunto de actividades que se conoce por "matemática recreativa" ha interesado desde hace mucho tiempo a una buena parte de los matemáticos ya que está más ligada al desarrollo que a la enseñanza de las matemáticas. Durante mucho tiempo los trabajos sobre matemáticas tuvieron un carácter muy distinto al de la mayoría de los libros de la actualidad, pues era práctica habitual entre los matemáticos proponer problemas y retar a sus colegas a que trataran de resolverlos.

Entre los más antiguos está el griego Zenón de Elea, quien ponía a pensar a sus contemporáneos con paradojas, como la de Aquiles y la tortuga (Arredondo, 2001, p. 66-68). No puede olvidarse la dedicatoria que figura en el sepulcro de Diofanto, inscripción compuesta en forma de ejercicio matemático en la que al final se pregunta cuántos años vivió (Perelman, 1988, p. 33-34). Otro problema muy conocido es el del caballo y el mulo (Perelman, 1988, p. 34-35). Los cuadrados mágicos son muy comunes desde hace muchísimo tiempo; es todo un reto llegar a la solución que plantea cada uno de ellos. Estos son sólo algunos de la gran colección de ejemplos que existen.

Las recreaciones matemáticas son equiparables a los juegos en cuanto a su aspecto lúdico pero, a diferencia de éstos, tienen un carácter individual (ahora se trata de jugar con un adversario constituido por las propias reglas del juego, en lugar de hacerlo con otra persona), lo cual los acerca más a los habituales problemas de matemáticas (Deulofeu, 1999).

2.3.2 LA MATEMÁTICA RECREATIVA Y LA MATEMÁTICA LÚDICA EN LA EDUCACIÓN

Las actividades recreativas constituyen un recurso importante puesto que, en muchas ocasiones, son una fuente inagotable para la propuesta de problemas y actividades de aprendizaje. Deulofeu (1999, p. 93) menciona al respecto: "En general, y al margen de su carácter lúdico, las recreaciones enfatizan la idea de reto que se esconde en la resolución de cualquier problema y al mismo tiempo permiten incidir sobre aspectos importantes relacionados con las dificultades para la resolución de problemas, como son, entre otros, las autorestricciones (*sic*), las interpretaciones abusivas o los implícitos del lenguaje verbal que subyace a los enunciados, las falsas intuiciones, las paradojas, las particularizaciones y las generalizaciones, y también la reflexión sobre los conceptos matemáticos del currículum y la práctica de procedimientos, tanto de técnicas como de estrategias".

La matemática lúdica, a través de juegos, posibilita su utilización para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles escolares. Tirapegui (2000) considera que el docente que juega necesariamente debe tener presente ciertas características de la actividad lúdica: la libertad, la seriedad que hace que sea el "trabajo" para el alumno, la fantasía o imaginación creadora que lo justifica, la consideración de estar haciendo algo diferente. Luego menciona lo que considera la característica más importante: "...el juego debe promover una interacción entre los alumnos que genere sensaciones de gozo, éxito, satisfacción por haber jugado, y aún más, deseos de seguir haciéndolo" (pp. 123-124). Posiblemente sea ésta la esencia del espíritu de la matemática lúdica, de lo cual se carece mucho en el salón de clase y por eso hay que promoverla.

Deulofeu (1999. p. 90) considera que existen dos grandes fuentes para la construcción de actividades de aprendizaje de las matemáticas:

- La utilización de situaciones del entorno, del mundo real, de las otras ciencias y de situaciones cotidianas para hacer matemáticas, y las aplicaciones de las matemáticas a dichas situaciones externas.
- Las situaciones y problemas que genera la propia matemática, dentro de la cual los aspectos lúdicos (las recreaciones y los juegos matemáticos) pueden ocupar un lugar significativo.

Llegar a lograr esto sería todo un reto para los profesores de matemáticas, en todos los niveles educativos, pues no sólo el niño sino también el adolescente, el adulto y el anciano juegan. La frontera entre lo lúdico y lo supuestamente serio es bastante difusa. Juego y aprendizaje no se pueden disociar. La función social del juego va de la mano con el aprendizaje: "Mientras se juega, se desencadena un despliegue de iniciativas y una búsqueda de soluciones novedosas, que contribuyen al desarrollo de la actividad creadora. Además, el goce, disfrute, o diversión está siempre presente" (Tirapegui, 2000, p. 121).

2.3.3 VENTAJAS DEL EMPLEO DE RECREACIONES Y JUEGOS EN EL PROCESO ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Deulofeu (1999) y Tirapegui (2000) abordan en sus artículos las ventajas que ofrecen las recreaciones y los juegos en el proceso enseñanza - aprendizaje de las matemáticas:

- Los juegos y recreaciones motivan a los alumnos.
- Son una fuente enorme para el diseño de actividades de aprendizaje.
- Los juegos y las recreaciones matemáticas enfatizan la idea de reto que se esconde en la resolución de cualquier problema.
- Son un recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas.
- Despiertan el interés entre los alumnos.
- Fortalecen el aprendizaje de las matemáticas.
- Representan una alternativa creativa para la clase de matemáticas.
- Es congruente con la filosofía del constructivismo.
- Desarrollan capacidades y habilidades; movilizan estructuras cognoscitivas y afectivas.

La idea principal que gira alrededor de lo anterior es: *"aprender matemáticas de manera creativa, divertida, interesante y motivante".*

III. METODOLOGÍA

3.1 DESCRIPCIÓN GENERAL

La propuesta didáctica que se presenta en este trabajo está dirigida a estudiantes que ingresan al primer semestre de bachillerato y comprende las siguientes etapas:

- Diseño de un examen diagnóstico que consta de un cuestionario y un examen de conocimientos sobre el uso de la calculadora electrónica de tipo científico. Este examen diagnóstico sirvió para obtener información del uso previo de la calculadora y para detectar los problemas que tienen los estudiantes al manipular una calculadora.

- Aplicación del examen a estudiantes que ingresan al primer semestre de bachillerato.

- Análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes bajo una metodología de análisis clínico y estudio de caso.

- Diseño de una propuesta didáctica para el uso de la calculadora electrónica, apoyándose en recreaciones y juegos, con un enfoque constructivista.

3.2 JUSTIFICACIÓN METODOLÓGICA

La primera, segunda y tercera etapas consistentes en el diseño, aplicación y análisis de un cuestionario y examen de conocimientos son necesarias para conocer de cerca la problemática acerca del uso que hacen los estudiantes de la calculadora. Del análisis que se hizo sobre las habilidades desempeñadas, los conocimientos adquiridos previamente, las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes y los errores cometidos (que se mencionan en la sección 3.5.3 *Conclusiones generales de los resultados obtenidos*), se desprendió el trabajo concerniente a la cuarta etapa, es decir, el diseño de la propuesta didáctica, que incluye una serie de ejercicios y problemas, algunos con juegos y recreaciones matemáticas desde un punto de vista constructivista.

Los programas de las principales escuelas preparatorias de la localidad no incluyen cursos para el aprendizaje del uso adecuado de la calculadora. La matemática lúdica y recreativa aparecen en ocasiones como parte de un curso de inducción para alumnos de nuevo ingreso, pero no existe un programa que conjunte a todos los elementos, por lo que la metodología es propia, aunque utilizando la riqueza de la información que se tiene a la mano de los elementos involucrados por separado, hasta lograr conjuntarlos en una propuesta que los reúne a todos ellos.

3.3 TIPO DE METODOLOGÍA

El tipo de metodología es básicamente de tipo cualitativo, pues aún cuando se aplicó un examen, el análisis de los resultados obtenidos sirvió más bien como información para el diseño de la propuesta didáctica, propósito principal de este trabajo, es decir, no se pretendía la cuantificación estadística de los resultados, sino más bien analizar la calidad de las respuestas y las habilidades desempeñadas.

Cada etapa se describe más ampliamente a continuación:

1.- Diseño de un examen diagnóstico: En la primera parte del examen se hacen algunas preguntas sobre la experiencia previa del estudiante con la calculadora; esta información da una idea de la problemática actual basada en su pasado académico. En la segunda parte se incluyen una serie de ejercicios y problemas de tipo matemático para que el alumno los resuelva con ayuda de una calculadora científica, con la finalidad de conocer su grado de habilidad para desempeñar actividades de exploración, experimentación, estimación, cálculo, algoritmos, manejo de funciones trascendentes e interpretación correcta de resultados.

2.- Aplicación del examen diagnóstico: Se aplicó a alumnos de nuevo ingreso al bachillerato en el Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Querétaro, plantel Cerrito Colorado en la ciudad de Santiago de Querétaro, Qro. (CECyTEQ N° 5), en el ciclo escolar 2004-2005 (primer semestre), en los meses de septiembre, octubre y noviembre del 2004. Se hizo una selección aleatoria de cuarenta alumnos, cantidad que se considera representativa de la población que ingresó en el turno matutino, de doscientos alumnos. En cada grupo que ingresó se realizó un sorteo para seleccionar aleatoriarnente, y a partir de la lista de asistencia, la muestra a la que se les aplicó el examen, tomando como única consideración el hecho de que la mitad fuesen mujeres y la otra mitad varones.

3.- Análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes: La información obtenida tenía como propósito ayudar, por una parte, a conocer las habilidades de los estudiantes, los errores cometidos y los problemas a los que se enfrentaban; y por otra parte, contribuir a diseñar el ciclo básico de aprendizaje motivo de esta propuesta. Este análisis se realizó considerando una metodología cualitativa de análisis clínico tomando en cuenta la posibilidad de recurrir a estudios de caso.

4.- Diseño de la propuesta didáctica: Con base en las observaciones obtenidas de los puntos anteriores, se procedió a elaborar la parte más importante de este trabajo: la propuesta didáctica basada en un ciclo básico de aprendizaje en donde se presentan una serie de ejercicios y problemas matemáticos a nivel estudiantes de nuevo ingreso de bachillerato, apoyándose con recreaciones y juegos, tomando en cuenta el enfoque constructivista de la educación matemática.

3.4 SOBRE EL EXAMEN DIAGNÓSTICO

Para el examen diagnóstico[3] se elaboró un cuestionario con seis preguntas abiertas con el fin de conocer, de acuerdo con algunos de los objetivos de investigación, la opinión que los alumnos tienen acerca del uso de la calculadora, qué tanto la saben usar, si han tomado un curso para aprender a utilizarla, así como conocer si sus maestros de matemáticas de cursos anteriores los motivaron o no a usar la calculadora tanto en clase como en los exámenes. El objetivo de la pregunta 6 *("Indica la marca y serie de tu calculadora que estás utilizando actualmente")* es conocer la marca y el tipo de calculadora que poseen la mayoría de los estudiantes con la finalidad de que la propuesta se adecue a la herramienta que más se utiliza.

En la segunda parte, se aplicaron algunos ejercicios con calculadora, en los cuales se pidió a los alumnos que anotaran los pasos a seguir para llegar al resultado, con el objetivo de conocer cómo se desempeñan ellos al usar la calculadora, así como conocer cuáles son los errores más comunes que cometen los estudiantes al manipular la calculadora o al interpretar los resultados que obtienen.

Los ejercicios con calculadora 1 y 2 tienen la finalidad de introducir, en un contexto general, estimaciones y números decimales (Hitt Espinosa, 1996). El ejercicio 1 obliga a utilizar la ley distributiva de la multiplicación o algún algoritmo de suma o multiplicación para resolver el ejercicio; el ejercicio 2 es un juego llamado "dar en el blanco" ("hit the target", Huinker, 1992). Enseguida se reproducen los ejercicios mencionados:

---

[3] El examen diagnóstico puede verse en el anexo A.

1. Vamos a suponer que tienes una calculadora con la tecla del número 9 descompuesta. Si necesitas usarla para multiplicar 8648×9, ¿cómo le harías? Anota cada paso para llegar al resultado (qué teclas usaste).

2. Encuentra un número que multiplicado por 53 dé un número entre 870 a 890. Anota los pasos que seguiste para llegar a ese número.

$53 \times$ ____________ = _______________ (entre 870 y 890)

La finalidad del ejercicio 3 es el conocimiento de la jerarquía de operaciones de la calculadora y/o el uso de paréntesis. Se reproduce el ejercicio a continuación:

3. Calcula la siguiente expresión. Anota los pasos a seguir.

$$\frac{60}{\sqrt{9^2+6^2}}$$

En el ejercicio 4 la finalidad es el manejo de teclas o funciones especiales. El ejercicio se reproduce enseguida:4

4. Elabora una tabla con tres valores para cada una de las siguientes expresiones:

a) $y = x^3$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = 5^x$ d) $y = \log x$

El ejercicio 5 tiene como finalidad el manejo de números grandes y números pequeños, así como la interpretación del resultado en forma científica. Se reproduce a continuación:

5. Calcula la siguiente expresión. Anota los pasos a seguir.

$$\sqrt{\frac{1}{10{,}240{,}000}}$$

El ejercicio 6 presenta un problema de la vida real para resolverlo con ayuda de la calculadora, así como la determinación de cifras significativas del resultado. Se reproduce el ejercicio:

6. Resuelve el siguiente problema: En una distribuidora de café se empacan 4 875 Kg de producto en 29 900 paquetes. ¿Cuántos gramos contiene cada paquete? Anota los pasos que seguiste para llegar al resultado.

La finalidad del ejercicio 7 es la exploración de números con la calculadora. Se reproduce el ejercicio:

7. Ahora explora con tu calculadora. Escoge varios valores para n que sean números enteros positivos.

¿El resultado de $n^3 - n$ es múltiplo de 3?
¿El resultado de $n^5 - n$ es múltiplo de 5?
¿El resultado de $n^7 - n$ es múltiplo de 7?
¿Qué observas?

En el ejercicio 8 la finalidad es la interpretación tanto de la tecla $\sqrt[n]{x}$ como la $x^{1/n}$ para las calculadoras que no calculan raíces mayores a la cuadrada o cúbica, o bien, el correcto uso de esta función para las calculadoras que tienen la tecla para extraer raíces mayores de la cuadrada. El ejercicio se reproduce a continuación:

8. Calcula las siguientes raíces. Describe los pasos que seguiste.

a) $\sqrt[7]{128}$ b) $\sqrt[5]{243}$

La finalidad del ejercicio 9 es el uso adecuado de los modos "grados" (inciso a) y "radianes" (inciso b) para las funciones trigonométricas, así como el uso de la tecla para convertir grados, minutos y segundos a grados con decimales (inciso a), operación necesaria para introducir los datos a algunas calculadoras. Se reproduce el ejercicio a continuación:

9. Calcula la función tangente de las siguientes expresiones. Describe los pasos a seguir en cada caso.

a) tan 30° 45' 10" b) tan (π / 3)

Los ejercicios 10 y 11 presentan de nuevo problemas de la vida real cuya finalidad es el manejo de números grandes, así como la interpretación del resultado en forma científica.

10. La velocidad de la luz es aproximadamente de 2.997925×10^8 m/seg. ¿Qué distancia aproximada en metros recorre un rayo de luz en un año? Anota los pasos a seguir.

11. Con el resultado del problema núm. 10, resuelve el siguiente problema: El diámetro de la Vía Láctea es de 100,000 años luz. ¿Cuántos kilómetros son?

3.5 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL EXAMEN DIAGNÓSTICO

3.5.1 RESPUESTAS DE LAS PREGUNTAS DEL CUESTIONARIO

De la pregunta no. 1, respecto a si los profesores de matemáticas anteriores los motivaban a usar la calculadora, se tienen básicamente cuatro tipo de respuestas:

a) Sí los motivaban: 10 alumnos (25 %).
b) No los motivaban: 10 alumnos (25 %).
c) Sí en clase, no en los exámenes: 13 alumnos (32.5 %).
d) A veces sí, a veces no: 7 alumnos (17.5 %).

De las respuestas vertidas se puede observar que en su mayoría sus anteriores maestros no los motivaban a usar la calculadora de manera definitiva, pues en algunos comentarios incluso se menciona que aunque sí les permitían usar la calculadora, no los motivaban. Lo anterior podría ser un indicativo del pobre uso que se hace de la calculadora, como se verá más adelante.

De la pregunta no. 2, referente al conocimiento que tienen los alumnos sobre el uso de la calculadora, se tienen básicamente dos tipos de respuesta:

a) Sólo las funciones básicas: 34 alumnos (85 %).
b) La mayoría de las funciones (no todas): 6 alumnos (15 %).

Estas respuestas podrían ser consecuencia de la respuesta a la pregunta no. 1, en el sentido de que al no estar motivados a utilizar la calculadora o al no permitírseles su uso, desconocen mucho acerca de su funcionamiento de manera más profunda.

De la pregunta no. 3, concerniente a si han tomado un curso para aprender a usar la calculadora, la respuesta de los cuarenta alumnos fue unánime: No (100%).

Esta respuesta sola podría tal vez justificar el trabajo motivo de esta propuesta didáctica, aunque las respuestas de los ejercicios la justifican aún más, como se verá más adelante.

De la pregunta no. 4, en la que se cuestiona al alumno si considera que la calculadora le facilita la realización de operaciones de cálculo tediosas y largas, la respuesta es casi unánime:

a) Es más fácil: 38 alumnos (95 %).
b) Me complican más las cosas: 2 alumnos (5 %).

Los alumnos aluden a la rapidez y la confianza en los resultados que emite la calculadora como los principales factores que contribuyen a facilitarles la realización de operaciones de cálculo largas y tediosas; están conscientes que sabiendo utilizar la calculadora de manera adecuada harán las cosas más rápido y con más seguridad, lo que les permite "aprovechar más el tiempo" y "tener más confianza en los resultados", según mencionan algunos de ellos en sus comentarios.

De la pregunta no. 5, en la que los alumnos deben responder si la calculadora les ayuda a aprender matemáticas, se tienen tres tipos diferentes de respuesta:

a) Sí me ayuda: 17 alumnos (42.5 %).
b) No me ayuda: 17 alumnos (42.5 %).
c) Sí y no me ayuda: 6 alumnos (15 %).

Quienes responden que la calculadora sí les ayuda a aprender matemáticas lo hacen más bien en el sentido de que al realizar las operaciones se van aprendiendo algunos resultados, como puede verse en dos comentarios que a continuación se transcriben:

> "Sí, como por ejemplo en la multiplicación, si multiplicas 5x5 y no sabes su resultado sin calculadora, ella te lo dice y así aprendes".

> "Sí, por ejemplo para sacar raíces, con el uso cotidiano me aprendo algunas".

Aquellos que consideran que la calculadora no les ayuda a aprender matemáticas, lo hacen en el sentido de que consideran a la calculadora más bien sólo como un instrumento de apoyo para realizar las operaciones con mayor rapidez; su concepción del aprendizaje radica en que "es el profesor el que enseña" y la calculadora "sólo te ayuda", según comentarios escritos por varios estudiantes.

De la pregunta no. 6, en cuanto a la marca de calculadora que poseen los estudiantes, se presenta la siguiente situación:

a) Marca Casio: 30 alumnos (75 %).
b) Otras marcas: 10 alumnos (25 %).

Al respecto, se ve que la mayoría utiliza calculadora marca Casio, que es de tipo científico, aunque varía la serie, pero el funcionamiento es muy parecido por lo que la propuesta didáctica se enfocó en el uso de los modelos de calculadora Casio fx-82MS, fx-83MS, fx-85MS, fx-270MS, fx-300MS, fx-350MS; en estos modelos el funcionamiento sí es el mismo y sólo varían algunas características físicas como peso, dimensiones o tipo de batería. Para otros modelos de calculadora marca Casio o de otra marca de tipo científico, se pueden hacer adaptaciones a la propuesta didáctica motivo de este trabajo, atendiendo al manual de cada modelo específico.

3.5.2 RESULTADOS DE LOS EJERCICIOS CON CALCULADORA

- **EJERCICIO 1.-** Los resultados de manera general se presentaron así:

a) No contestaron el ejercicio: 4 alumnos (10 %).
b) Sí contestaron el ejercicio: 36 alumnos (90 %).

De los que sí contestaron el ejercicio, todos llegaron al resultado correcto. Gran parte de ellos utilizó la ley distributiva de la multiplicación sobre la suma, otros algún algoritmo de suma, multiplicación, división o potencia; sólo un alumno utilizó un algoritmo que se puede hacer con algunas calculadoras, el cual consiste en teclear un número, presionar dos veces el símbolo de suma y luego el de igual tantas veces como se desee sumar (en este caso, nueve veces).

OBSERVACIONES: De manera general, los alumnos respondieron muy bien a este ejercicio, aunque posiblemente desconocían algunos algoritmos que se pueden realizar con calculadora.

- **EJERCICIO 2.-** Los resultados obtenidos fueron de la siguiente manera:

a) No contestaron el ejercicio: 6 alumnos (16 %).
b) Sí contestaron el ejercicio: 34 alumnos (84 %).

De aquellos que contestaron el ejercicio, tres no lograron el resultado correcto. Los demás, en su mayoría encontraron el número a partir de tanteos (por exploración, utilizando la calculadora), hasta encontrar el que se encontraba en el rango solicitado; otros alumnos dividieron uno de los dos extremos dados para obtener un número cercano y luego aumentar o disminuir ese número que al multiplicarlo por uno de los extremos estuviera dentro del rango.

OBSERVACIONES: Este ejercicio presentó más problemas a los alumnos, aún cuando la mayoría lo resolvió adecuadamente.

- **EJERCICIO 3.-** Se obtuvieron los siguientes resultados:

a) No contestaron el ejercicio: 7 alumnos (17.5 %).
b) Sí contestaron el ejercicio: 33 alumnos (82.5 %).

De los alumnos que sí contestaron el ejercicio, veintiocho no llegaron al resultado correcto; sólo cinco lo hicieron bien, aunque de una manera en la que no aprovecharon los recursos que ofrece la calculadora, sino más bien lo resolvieron por pasos aislados. Los errores más comunes que se presentaron fueron el desconocimiento de la jerarquía de las operaciones en la calculadora, así como la no-utilización de paréntesis. Tampoco se usó la memoria ni la función inversa.

OBSERVACIONES: A partir de este ejercicio, los estudiantes tienen muchos problemas para resolverlos con la ayuda de la calculadora. En este caso se observa que se desconocen la jerarquía de operaciones así como el uso de paréntesis, de la memoria y de la función inversa como auxiliares para resolver operaciones de manera correcta y rápida en una calculadora.

- **EJERCICIO 4:** Se tienen los resultados siguientes:

a) No contestaron el ejercicio: 35 alumnos (87.5 %).
b) Sí contestaron el ejercicio: 5 alumnos (12.5 %).

Todos los alumnos que sí contestaron el ejercicio lo realizaron de manera correcta, incluso en el manejo de la calculadora. Del resto, simplemente no supieron cómo hacerlo, escribiendo una leyenda de “no sé”.

OBSERVACIONES: Éste fue uno de los incisos que la mayoría de los alumnos no contestó, lo cual indica un posible desconocimiento casi generalizado de cómo operar algunas de las funciones especiales en la calculadora.

- **EJERCICIO 5:** Los resultados se presentaron de la siguiente forma:

a) No contestaron el ejercicio: 11 alumnos (27.5 %).
b) Sí contestaron el ejercicio: 29 alumnos (72.5 %).

De quienes contestaron el ejercicio, sólo dos alumnos se acercaron al resultado correcto, pero desconociendo la manera de presentarlo en forma científica al ponerlo de esta manera: 3.125^{-04} en lugar de 3.125×10^{-04} (uno de ellos) o en forma decimal: 0.000311448 (el otro alumno). Los demás alumnos omitieron de nuevo la jerarquía de operaciones, el uso de paréntesis, de la memoria y de la función inversa.

OBSERVACIONES: Se confirma el desconocimiento del uso adecuado de la forma de operar una calculadora en los aspectos que el ejercicio pretendía y en la interpretación del resultado en forma científica.

- **EJERCICIO 6.-** La situación fue la siguiente:

a) No contestaron el ejercicio: 3 alumnos (7.5 %).
b) Sí contestaron el ejercicio: 37 alumnos (92.5 %).

Doce fueron los alumnos que contestaron correctamente este ejercicio; de ellos, nueve presentan el resultado hasta con tres decimales, lo cual podría considerarse como adecuado, y los otros tres presentan todos los decimales que les da la calculadora (esta situación es casi constante aún en aquellos que no obtuvieron el resultado correcto, al presentar gran cantidad de decimales).

OBSERVACIONES: Se nota la dificultad de resolver problemas de la vida real con ayuda de la calculadora, así como la exageración de cifras decimales en la presentación de un resultado al no tomar en cuenta sólo las cifras significativas que se requieren según el problema que se trata de resolver, pues en general los alumnos presentan todas las cifras que exhibe la calculadora.

- **EJERCICIO 7.-** Se presenta la siguiente situación:

a) No contestaron el ejercicio: 13 alumnos (32.5 %).
b) Sí contestaron el ejercicio: 27 alumnos (67.5%).

De aquellos que contestaron el ejercicio, cuatro alumnos concluyen que las cantidades resultantes no son múltiplos; otros siete alumnos realizan algunos cálculos erróneos o no concluyen nada o la conclusión es confusa; el resto (16 alumnos) concluyen que los números resultantes sí son divisibles entre las cantidades indicadas, aunque los comentarios que dan son también confusos e incluso algunos no comentan nada (a la pregunta:¿Qué observas?).

OBSERVACIONES: Fue un ejercicio que representó un gran reto para la mayoría de los estudiantes, lo cual se deduce de las conclusiones y comentarios emitidos por el alumnado. De las respuestas también se desprende que varios alumnos no supieron interpretar la simbología algebraica ni expresar con palabras lo que observaron.

- **EJERCICIO 8.-** Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

a) No contestaron el ejercicio: 10 alumnos (25 %).

b) Sí contestaron el ejercicio: 30 alumnos (75 %).

Fueron sólo dieciocho alumnos los que contestaron bien el ejercicio, aplicando correctamente las teclas correspondientes en la calculadora. El error más común que se cometió fue el de no reconocer a $x^{1/y}$ como la $\sqrt[y]{x}$ así como el de usar sólo la tecla de raíz cuadrada en vez de la enésima; otro error fue el orden en que se introdujeron los datos.

OBSERVACIONES: En su mayoría los alumnos no saben resolver ejercicios de raíz enésima de una cantidad numérica con ayuda de la calculadora, tal vez por el desconocimiento de su significado.

- **EJERCICIO 9**.- Se tienen los resultados que a continuación se enlistan:

a) No contestaron los dos incisos del ejercicio: 10 alumnos (25 %).
b) Sólo contestaron el inciso (a) del ejercicio: 1 alumno (2.5 %).
c) Sólo contestaron el inciso (b) del ejercicio: 13 alumnos (32.5 %).
d) Sí contestaron los dos incisos del ejercicio: 16 alumnos (40 %).

El alumno que sólo contestó el inciso (a) lo hizo de manera incorrecta. De los trece alumnos que contestaron sólo el inciso (b), solamente dos obtuvieron un resultado correcto, el resultado de los otros nueve fue incorrecto. De los dieciséis alumnos que resolvieron ambos incisos, sólo uno de ellos obtuvo los dos resultados correctos; cuatro alumnos obtuvieron resultados incorrectos en ambos incisos; el resto (once alumnos) sólo llegaron al resultado correcto del inciso (a), obteniendo un resultado incorrecto para el inciso (b). En síntesis, del inciso (a) se obtuvieron doce resultados correctos y del inciso (b) sólo se tienen tres resultados correctamente bien contestados.

OBSERVACIONES: Los errores más comunes fueron el no saber convertir los grados, minutos y segundos a la forma decimal o utilizando la tecla que se tiene para ello en la calculadora, para el inciso (a), así como el no haber puesto la calculadora en el modo de radianes para el inciso (b).

- **EJERCICIO 10.-** Resultados obtenidos del ejercicio:

a) No contestaron el ejercicio: 7 alumnos (17.5 %).
b) Sí contestaron el ejercicio: 33 alumnos (82.5 %).

De aquellos que contestan el ejercicio, veintitrés lo resuelven de manera incorrecta, aunque la mayoría hace un buen esfuerzo; cinco alumnos presentan el resultado correctamente en forma científica ($9.45425628 \times 10^{15}$); un alumno presenta el resultado correcto pero no en forma científica sino recorriendo el punto quince posiciones y aumentando ceros: 9,454,256,280,000,000; cuatro alumnos presentan un resultado como aparece en muchas calculadoras, es decir sin el símbolo $\times 10$, o sea 9.45425628^{15}.

OBSERVACIONES: La mayoría de los estudiantes tuvieron muchos problemas para resolver este ejercicio. Se nota nuevamente gran dificultad para manejar números grandes así como para interpretar una cantidad en forma científica.

- **EJERCICIO 11.-** La situación es la siguiente:

a) No respondieron el ejercicio: 14 alumnos (35 %).
b) Sí respondieron el ejercicio: 26 alumnos (65 %).

Del alumnado que sí respondió el ejercicio, sólo tres tienen un resultado correcto. Los demás hicieron el intento pero con resultados incorrectos. Los errores son similares a los descritos en el ejercicio 10.

OBSERVACIONES: De nuevo se observa que a los estudiantes se les dificulta manejar números grandes y en forma científica.

3.5.3 CONCLUSIONES GENERALES DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

De los resultados obtenidos se desprenden algunas conclusiones globales:

1. En su mayoría los alumnos no fueron motivados por sus profesores en sus cursos de matemáticas anteriores al bachillerato para utilizar la calculadora en la resolución de problemas, aunque algunos les permitían utilizarlas, mas no siempre en los exámenes.

2. A ninguno de ellos se les instruyó sobre el manejo adecuado de la calculadora (no recibieron cursos para el uso de la calculadora, como se vio en el apartado 3.5.1 *Respuestas de las preguntas del cuestionario*). Los alumnos han aprendido lo poco que saben de manera autodidacta.

3. Desconocen mucho del funcionamiento de sus calculadoras así como la interpretación correcta de algunos resultados que produce.

4. Entre los errores más comunes o las dificultades a los que se enfrentan los alumnos al utilizar la calculadora se encuentran principalmente los siguientes:

    a) Desconocimiento de la jerarquía de funciones de la calculadora.
    b) Poca o nula utilización de paréntesis como auxiliares para realizar con mayor rapidez y/o precisión algunas operaciones.
    c) Poca o nula utilización de la memoria también como auxiliar para la realización de algunas operaciones.

d) Poco o nulo uso de la tecla de inverso de la multiplicación ($1/x$ o x^{-1}) para resolver problemas en los que se necesita el inverso de una cantidad.
e) Interpretación errónea de los resultados cuando son emitidos en forma científica.
f) Exageración al presentar cifras decimales, es decir, al no poner sólo las cifras significativas propias del problema (les cuesta trabajo definir qué tantos decimales usar).
g) Error al determinar funciones trigonométricas en grados con minutos y/o segundos así como en radianes.
h) Mucha dificultad al trabajar con números muy grandes o muy pequeños.
i) Desconocimiento de diversos algoritmos que se pueden o que se deben utilizar al manipular una calculadora.
j) Desconocimiento del cómo manejar muchas de las funciones especiales que tiene una calculadora.

Lo anterior parece justificar la elaboración de una propuesta didáctica para el aprendizaje de las matemáticas con ayuda de una calculadora electrónica sin dejar de lado la matemática lúdica y recreativa.

IV. PROPUESTA DIDÁCTICA

4.1. INTRODUCCIÓN

La presente propuesta didáctica está elaborada teniendo en mente la necesidad existente en la comunidad estudiantil que ingresa al bachillerato de material escrito que le ayude en el desarrollo de habilidades para el uso eficiente de una calculadora electrónica de tipo científico, instrumento tecnológico indispensable en el momento en el cual el estudiante necesita realizar una serie de cálculos numéricos durante el desarrollo y al final de una situación–problema, cuya resolución es una de las prioridades tanto de las matemáticas como de la educación matemática.

La propuesta está estructurada a partir de situaciones–problema, cada una de las cuales inicia con la intención que tiene su resolución, después se redacta el enunciado de la situación y por último se proponen una o varias alternativas de solución, teniendo en todas ellas como elemento común el uso de una calculadora de bolsillo. Para las secuencias propuestas se tomó como base una calculadora marca Casio en sus series fx-82MS, fx-83MS, fx-85MS, fx-270MS, fx-300MS y fx-350MS, ya que todas funcionan de la misma manera.

El trabajo se desarrolla en un ambiente lúdico, de matemática recreativa y teniendo en cuenta la epistemología constructivista; en múltiples ocasiones se invita al estudiante a buscar otras alternativas de solución, se le formulan preguntas que lo conduzcan al análisis y a la reflexión, se le invita que explore con cantidades o situaciones diferentes a las que se proponen en cada situación, se le pide que descubra patrones de comportamiento de diversas situaciones matemáticas, entre otras cosas, a través de ejercicios y situaciones de la vida real o hipotéticas.

Tanto el docente como el estudiante disponen de un material básico (al que llamamos "ciclo básico de aprendizaje") muy accesible, de tal forma que, por una parte, el docente pueda abordarlo de manera sistemática, siguiendo el orden en que está establecido, o bien escogiendo aquellos ejercicios o problemas en el orden que considere adecuado; y por otra parte, el estudiante que así lo desee puede tomar el material y estudiarlo de manera autodidacta. Por lo anterior, el trabajo se elaboró tomando en cuenta a quiénes va dirigido: estudiantes que terminan la escuela secundaria y que recién ingresan al bachillerato o escuela preparatoria; de ahí la necesidad de utilizar un lenguaje cotidiano, adecuado al estudiante que hará uso de este material.

Se recomienda al docente no dar la solución ni explicar un proceso para llegar a ella de manera inmediata, sino más bien guiar al estudiante para que busque alternativas de solución, que se discutan con otros estudiantes y en todo el grupo (tomando en cuenta que ahora al docente se le considera más como un "facilitador del aprendizaje" que como un instructor). Al final se pueden formalizar algunos aspectos que el docente considere necesarios, o bien dejárselos al alumno en una investigación. En cuanto al estudiante que se proponga abordar este trabajo de manera autodidacta, se le recomienda que tome en cuenta lo anterior y después seguir el procedimiento propuesto como otra alternativa o en su caso como un procedimiento a seguir si es que no llegó al resultado adecuado.

Consideramos importante mencionar que la manera en cómo se pensó esta propuesta se inspiró en parte en la forma en cómo lo hace Y. Perelman en su libro "Álgebra Recreativa" (1988), en el sentido de ofrecer una explicación muy detallada en el proceso de solución de una situación-problema, en la utilización de la matemática recreativa y en el uso de un lenguaje muchas veces coloquial y ameno. Desde luego, este trabajo lleva otro propósito y es pertinente aclarar que propuestas del tipo que aquí se aborda no se obtienen con facilidad en el área de la educación, pues aun cuando existen algunas en las que se utiliza una calculadora, por lo general se presupone que el estudiante ya tiene conocimiento de cómo utilizarla; en cambio aquí se parte del supuesto de que el estudiante no lo sabe o por lo menos tiene algunas deficiencias en su uso y se le propone una manera de aprender a utilizarla.

4.2 SITUACIONES-PROBLEMA

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: Esta situación tiene como intención la determinación de porcentajes de cantidades directamente con la calculadora mediante el uso de la tecla destinada para ello, así como la interpretación de los resultados que arroja la calculadora.

ENUNCIADO: Tienes una cantidad inicial de 2000 pesos; súmale un 25%, y a la cantidad obtenida réstale un 25%. ¿Obtienes la misma cantidad inicial? Si no es así, ¿qué porcentaje de 2000 pesos tienes al final?

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

El 25% de 2000 pesos lo obtenemos directamente con la calculadora mediante la tecla [%], pero como aparece como segunda función, anteponemos la tecla [SHIFT]; podemos aplicar la siguiente secuencia:

2000 [×] 25 [SHIFT] [%]

Aparece en la pantalla la cantidad *500.* Para sumárselos a 2500 presionamos la tecla de suma: [+] y se visualiza la cantidad *2500*, que es la cantidad inicial más el 25% adicional. A esta cantidad le calculamos el 25% de manera similar, pero primero limpiamos la pantalla con la tecla que tiene las letras **AC** (del inglés *all clear:* limpiar todo o todo limpio) y aplicamos la siguiente secuencia:

2500 [×] 25 [SHIFT] [%]

Aparece en la pantalla la cantidad *625.* Para restárselos a 2500 sólo presionamos la tecla de diferencia: [−] y aparece la cantidad *1875.* Entonces ya te diste cuenta que no obtuviste la misma cantidad inicial como muchas personas creen.

Para obtener el porcentaje de esta cantidad respecto a la cantidad inicial, dividimos 1875 entre 2000 y presionamos la tecla para porcentajes; sin borrar la cantidad de la pantalla obtenida en el paso anterior, podemos seguir la siguiente secuencia:

$\boxed{\div}$ 2000 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$

y aparece la cantidad buscada, el valor *93.75*, mismo que debemos interpretar como 93.75%. Esto significa que al final tengo el *93.75%* de 2000 pesos.

OBSERVACIÓN: Resulta obvio que algunas cantidades se pueden obtener aún sin necesidad de utilizar la calculadora para los datos de esta situación, sin embargo para otros datos puede no ser así, por lo que esto nos puede servir como ilustración para aprender a resolver situaciones en donde intervengan porcentajes de cualquier cantidad.

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: Se pretende que el alumno descubra patrones de comportamiento de una serie. Por medio de la calculadora, que realice las siguientes operaciones: cálculo de suma de fracciones, conversión de número mixto a fraccionario y viceversa, cálculo de operaciones repetidas; asimismo que interprete los resultados que arroja la calculadora.

ENUNCIADO: Una serie infinita es una suma de términos formados de acuerdo con un patrón. Descubre el patrón y encuentra la suma de los primeros ocho términos de la siguiente serie:

$$\frac{3}{4} + \frac{9}{20} + \frac{27}{100} + \ldots$$

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Primero debemos observar los términos que se nos presentan y de ahí deducir cómo continúa la serie. Podemos observar que para obtener el siguiente numerador se multiplica el anterior por tres (3). En cuanto a los denominadores, cada uno está multiplicado por cinco (5), es decir, se multiplica el anterior por 5 y se obtiene el nuevo.

Para obtener los numeradores de manera rápida con la calculadora, procedemos de la siguiente manera:

Iniciamos presionando las teclas 3 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{=}$ (Aparece el resultado 9).

Ahora tecleamos $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{=}$ (Aparece el resultado 27)

Es decir, la calculadora toma el último resultado para multiplicarlo por tres (3). Entonces basta con seguir presionando la tecla de igualdad para obtener el siguiente resultado, y así sucesivamente hasta tener el octavo numerador. La secuencia completa entonces sería:

3 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

Las cantidades que van apareciendo después de cada signo de igualdad son las siguientes:

9 / 27 / 81 / 243 / 729 / 2,187 / 6,561

Para obtener los denominadores se procede de manera similar, sólo que esta vez se multiplica por cinco (5):

4 $\boxed{\times}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{\times}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

Esta vez las cantidades que se visualizan son:

20 / 100 / 500 / 2,500 / 12,500 / 62,500 / 312,500

Entonces la construcción de los primeros ocho términos de la serie queda como sigue:

$$\frac{3}{4}+\frac{9}{20}+\frac{27}{100}+\frac{81}{500}+\frac{243}{2500}+\frac{729}{12500}+\frac{2187}{62500}+\frac{6561}{312500}=$$

Una vez obtenida la serie que se muestra arriba, procedemos a realizar la suma de números racionales con la tecla $\boxed{a^b/c}$. Primero presionamos el numerador, después la tecla mencionada y luego el denominador. La secuencia sería entonces la que sigue:

3 $\boxed{a^b/c}$ 4 $\boxed{+}$ 9 $\boxed{a^b/c}$ 20 $\boxed{+}$ 27 $\boxed{a^b/c}$ 100 $\boxed{+}$ 81 $\boxed{a^b/c}$ 500 $\boxed{+}$ 243 $\boxed{a^b/c}$ 2500 $\boxed{+}$ 729 $\boxed{a^b/c}$ 12500 $\boxed{+}$ 2187 $\boxed{a^b/c}$ 62500 $\boxed{+}$ 6561 $\boxed{a^b/c}$ 312500 $\boxed{=}$

El resultado de la suma de los primeros ocho términos de la serie es <u>*1.8435072*</u>

COMENTARIO: En este caso la calculadora no emite el resultado en forma fraccionaria, pero se puede obtener cuando se hacen operaciones con fracciones más pequeñas. Por ejemplo si queremos sumar sólo los primeros tres términos de la serie, procedemos como se indicó, obteniendo como resultado lo siguiente:

$$\frac{3}{4} + \frac{9}{20} + \frac{27}{100} = 1 \lrcorner 47 \lrcorner 100$$

Este resultado lo presenta la calculadora en forma mixta y debe interpretarse como un entero con cuarenta y siete centésimos: 1 $^{47}/_{100}$. Si deseamos esta cantidad sólo como cociente de dos enteros, utilizamos la misma tecla pero anteponiéndole $\boxed{\text{SHIFT}}$, entonces se estará utilizando la segunda función que es $\boxed{d/c}$ que aparece encima de la tecla $\boxed{a\,b/c}$ quedando la secuencia así (sin borrar la expresión que aparece en la pantalla):

$$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{d/c}$$

y aparece la expresión 147⌋100 (sin necesidad de presionar la tecla del igual), que se debe interpretar como 147 centésimos.

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: Se pretende que el alumno solucione una situación-problema utilizando calculadora, previo análisis de la información. Mediante la calculadora: el manejo de números grandes, la interpretación de la notación científica y el uso de la tecla correspondiente, así como el manejo de cifras significativas.

ENUNCIADO: El planeta Tierra recibe alrededor de 100 toneladas de polvo estelar por día. ¿Cuántas toneladas recibirá en un mes?, ¿en un año?, ¿en mil años?, ¿en un millón de años? Tomando la masa de la Tierra con el valor de 6×10^{21} toneladas, ¿cuánto pesará la Tierra en un millón de años si le sumamos las toneladas de polvo estelar que habrán caído para entonces? ¿Qué porcentaje en peso aumentará el planeta en ese tiempo? ¿Deberíamos preocuparnos por el aumento de peso de nuestro planeta debido a la caída constante de polvo estelar?

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Iniciemos realizando el cálculo de las toneladas de polvo estelar que recibe nuestro planeta en un mes. Con la calculadora simplemente multiplicamos por 30 días:

100 $\boxed{\times}$ 30 $\boxed{=}$ (Aparece *3,000*)

El resultado es entonces 3,000 toneladas de polvo estelar al mes.

Calculemos ahora la cantidad en un año. Nos encontramos con el problema de decidir si multiplicamos la cantidad calculada por 12 meses (1 año), o bien calculamos las 100 toneladas diarias por 365 días. Hagámoslo de las dos formas y decidamos qué valor utilizar. Tomando el valor que tenemos en la calculadora multiplicamos por 12:

3000 $\boxed{\times}$ 12 $\boxed{=}$ (Se visualiza *36,000*)

Ahora lo hacemos multiplicando 100 ton por 365 días:

100 $\boxed{\times}$ 365 $\boxed{=}$ (Se ve *36,500*)

Vemos que existe una diferencia de 500 ton. ¿Será significativa?
(Estos resultados nos indican que mientras la Tierra realiza su recorrido anual alrededor del Sol, recoge a su paso alrededor de 40,000 toneladas de polvo).

Continuemos ahora calculando para 1000 años:

	36 000 $\boxed{\times}$ 1000 $\boxed{=}$	*36,000,000 ton*
O bien:	36 500 $\boxed{\times}$ 1000 $\boxed{=}$	*36,500,000 ton*

Ahora nuestra diferencia es de 500 000 ton. ¿Será significativa?

Continuamos nuestro cálculo para un millón de años:
Las cantidades que tenemos para mil años las multiplicamos de nuevo por 1 000, ya que 1000×1000 = 1 000 000:

	36 000 000 $\boxed{\times}$ 1000 $\boxed{=}$	3.6×10^{10} *ton*
O bien:	36 500 000 $\boxed{\times}$ 1000 $\boxed{=}$	3.65×10^{10} *ton*

Nuestra diferencia esta vez es de 0.05×10^{10} ton ¿Será significativa?
Antes de continuar, vemos que la calculadora nos muestra los resultados en notación científica, pues no alcanza el total de cifras a mostrarse en la pantalla, que es sólo para 10 dígitos.

Sumemos ahora las toneladas que habrán caído en un millón de años a la masa del globo terrestre tomando el dato del enunciado como 6×10^{21} toneladas. Para hacerlo, introducimos nuestros valores en notación científica, para lo cual utilizaremos la tecla $\boxed{\text{EXP}}$ (notación exponencial) que indica a la calculadora que multiplique una cantidad introducida previamente por el número 10 que se elevará a una determinada potencia. Entonces las operaciones:

$$3.6 \times 10^{10}\ ton + 6 \times 10^{21}\ ton$$

las realizamos en la calculadora de la siguiente manera:

	`3.6` [EXP] `10` [+] `6` [EXP] `21` [=]	(Se despliega $6 \times 10^{21}\ ton$)
O bien:	`3.65` [EXP] `10` [+] `6` [EXP] `21` [=]	(Se despliega $6 \times 10^{21}\ ton$)

Como puedes darte cuenta, la tecla [EXP] representa la parte $\times\mathbf{10}$ de la expresión $3.6 \times \mathbf{10}^{10}$ o de la expresión $6 \times \mathbf{10}^{21}$.

Pero, ¿qué sucedió con las toneladas que se adicionaron? En ambos casos el resultado es el mismo, por lo que en primera instancia vemos que da lo mismo utilizar el valor de 3.6 ó de 3.65. En segunda instancia observamos que al sumar 36 000 o 36 500 millones de toneladas de polvo estelar el resultado sigue siendo el que corresponde a la masa de la Tierra: 6×10^{21} ton. ¿Significa que la cantidad de polvo estelar que cae en nuestro planeta es despreciable? Al parecer así es.

Pero contestemos la pregunta ¿Qué porcentaje en peso aumentará el planeta dentro de un millón de años? Para hacerlo con la calculadora, dividamos la cantidad de polvo estelar que habrá caído para entonces entre la masa de la Tierra, de la siguiente manera tomando sólo el valor más grande esta vez, y al final le pedimos a la calculadora que nos dé el porcentaje correspondiente mediante la secuencia que se sugiere a continuación:

`3.65` [EXP] `10` [÷] `6` [EXP] `21` [SHIFT] [%] $6.083 \times 10^{-10}\ \%$

El porcentaje resultante es bastante bajo, algo así como 6 diezmillonésimas, por lo que respecto a la pregunta de si debiésemos preocuparnos por el aumento de peso de nuestro planeta debido a la caída constante de polvo estelar, la respuesta que podríamos dar es: *al parecer no.*

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: Realización de operaciones con raíz cuadrada mediante calculadora.

ENUNCIADO: Al reducir la expresión $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ - $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ sorprendentemente queda un entero, ¿cuál es el entero? (Considera únicamente la raíz cuadrada positiva).[1]

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Aquí tenemos que realizar operaciones en las que interviene la raíz cuadrada de un número, para lo cual utilizamos la tecla $\boxed{\sqrt{}}$ que para tal efecto tiene la calculadora (para raíces enésimas se cuenta con otra tecla que se ejemplifica en otras situaciones-problema). Aunque la operación aparente ser muy complicada, en realidad es bastante sencilla de realizar con la calculadora, pues podemos presionar las teclas en el mismo orden en el que se encuentran en la expresión, es decir no necesitamos multiplicar el 2 por el radical que le precede como sucede con otras calculadoras, pues aquí la calculadora toma el 2 fuera del radical como coeficiente y lo multiplica por el radical automáticamente. Sin embargo, siempre es necesario colocar paréntesis en aquellas expresiones que se encuentren dentro de un radical que contenga otras operaciones como suma o resta por ejemplo, para que la calculadora realice primero esas operaciones y luego extraiga la raíz cuadrada al resultado de esas operaciones.

El cálculo del entero obtenido directamente a través de la calculadora entonces lo podemos realizar de la siguiente manera:

$$\boxed{\sqrt{}}\ \boxed{(}\ 3\ \boxed{+}\ 2\ \boxed{\sqrt{}}\ 2\ \boxed{)}\ \boxed{-}\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{(}\ 3\ \boxed{-}\ 2\ \boxed{\sqrt{}}\ 2\ \boxed{)}\ \boxed{=}$$

En la pantalla aparece el número 2, que es el entero que se buscaba.

[1] Enunciado tomado del Calendario Matemático 2003

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: Este ejercicio tiene como intención el cálculo de operaciones complejas mediante el uso de una calculadora a través del manejo de teclas especiales como inversos y transformación de decimales a fracciones.

ENUNCIADO: ¿A qué fracción equivale $\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2}}}}$? [2]

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Una manera de realizar el cálculo es a través de inversos con la tecla $\boxed{x^{-1}}$, misma que nos calcula la cantidad inversa de un número, para lo cual se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Iniciamos de la parte inferior hacia arriba:

$$2 \boxed{-} 2 \boxed{x^{-1}} \boxed{=}$$

Aparece en la pantalla el resultado de la operación: *1.5*

2. De aquí en adelante cada resultado lo utilizamos para calcular su inverso; sin borrarlo podemos hacerlo así:

$$2 \boxed{-} \boxed{\text{Ans}} \boxed{x^{-1}} \boxed{=}$$

Aparece en la pantalla el resultado de la operación: *1.333333333*

[2] Enunciado tomado del Calendario Matemático 2003

3. El siguiente paso es igual al anterior:

2 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$

Aparece en la pantalla el resultado de la operación: *1.25*

Sin embargo, este paso lo podemos omitir, ya que basta con presionar la tecla de igual en el paso anterior, pues la calculadora toma como valor para sus operaciones el que aparece en la segunda línea de la pantalla, por lo cual el paso 3 sólo consistiría en presionar la tecla del igual:

$\boxed{=}$

Aparece en la pantalla el resultado de la operación: *1.25*

4. Con el cuarto paso llegamos a la última parte y como ya sólo nos falta calcular el inverso de toda la operación de abajo, lo hacemos así:

$\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$

Aparece en la pantalla el resultado de la operación: *0.8*

5. Pero como nos piden la fracción en el enunciado del problema, le solicitamos a la calculadora que presente el resultado como fracción presionando la tecla ya mencionada anteriormente $\boxed{a^b/c}$. Aparece en la pantalla el resultado de la operación: *4⌋ 5*, el cual interpretamos como cuatro quintos: *4/5.*

COMENTARIO: En algunos modelos de calculadora la tecla para el cálculo de inversos de cantidades aparece como $^1/_x$.

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: Se pretende que el alumno descubra el patrón de comportamiento de una suma en la que algunos términos no aparecen de manera explícita, así como el manejo de operaciones básicas con números enteros pequeños y grandes por medio de una calculadora.

ENUNCIADO: ¿Cuánto vale 1 + 22 + 333 + ... + 999999999?[3]

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

En primer lugar debemos encontrar el patrón que describe a los términos de la serie. Observamos que se inicia con el número 1, seguido del número 2 repetido dos veces, luego el número 3 repetido tres veces, por último está el número 9 repetido nueve veces: entonces los términos que faltan son los números del 4 al 8 repetidos el número de veces que representa cada cantidad, por lo cual nuestra serie completa queda de la siguiente manera:

$$1+ 22 + 333 + 4444 + 55555 + 666666 + 7777777 + 88888888 + 999999999$$

Ya estamos listos para realizar la operación de suma con nuestra calculadora. Procedemos simplemente introduciendo las cantidades y presionando la tecla de suma entre cada una de ellas:

$$1 \boxed{+} 22 \boxed{+} 333 \boxed{+} 4444 \boxed{+} 55555 \boxed{+} 666666 \boxed{+} 7777777 \boxed{+} 88888888 \boxed{+} 999999999 \boxed{=}$$

Y obtenemos el resultado *1,097,393,685.*

[3] Enunciado tomado del Calendario Matemático 2003

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: La intención que lleva esta situación es la resolución de ecuaciones exponenciales mediante la utilización de logaritmos, así como el manejo de las teclas para cálculo de logaritmos decimales y de logaritmos naturales en la calculadora.

ENUNCIADO: En ciertas aplicaciones matemáticas aparecen ecuaciones en las que las variables se encuentran como exponentes, llamadas "ecuaciones exponenciales". Un ejemplo de un sistema de ecuaciones de este tipo es el siguiente:

$$3^{x+y} = 81$$

$$25^{y/2} = 5.$$

Determina los valores tanto de x como de y.

COMENTARIO: Muy probablemente los alumnos que egresan de educación secundaria desconozcan qué es un logaritmo, por lo que se sugiere que se haga una breve descripción y explicación del concepto tanto del logaritmo decimal como del natural y sólo después proseguir con la resolución.

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Lo que tenemos es un par de ecuaciones exponenciales en las que el valor de y es el mismo para ambas, mientras que el valor de x sólo aparece en la primera ecuación. Podemos buscar la solución a través de logaritmos, para lo cual emplearemos la propiedad siguiente:

$$\log_a x^n = n \log_a x \quad \text{(propiedad 1)}$$

Significa que el logaritmo en cualquier base ($\log_a$) de una cantidad (x) que está elevada a una potencia (n) es lo mismo que el producto de la potencia (n) multiplicado por el logaritmo de la misma base ($\log_a$) de la cantidad (x). Apliquemos esta propiedad a la primera ecuación:

$$3^{x+y} = 81$$

ALTERNATIVA 1.- Aplicando **logaritmos decimales (log)** a ambos miembros de la igualdad:

$$\log 3^{x+y} = \log 81$$

Aplicando la propiedad mencionada al primer miembro de la ecuación:

$$(x + y) \log 3 = \log 81$$

Dividimos entre log 3:

$$\frac{(x+y)\log 3}{\log 3} = \frac{\log 81}{\log 3}$$

Simplificando:

$$x + y = \frac{\log 81}{\log 3}$$

Despejamos x :

$$x = \frac{\log 81}{\log 3} - y \quad \text{(A)}$$

Ahora aplicamos la propiedad a la segunda ecuación y continuamos de manera similar:

$$\log 25^{y/2} = \log 5$$

$$(y/2) \log 25 = \log 5$$

$$\frac{(y/2)\log 25}{\log 25} = \frac{\log 5}{\log 25}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{\log 5}{\log 25}$$

$$y = \frac{(2)\log 5}{\log 25} \quad \text{(B)}$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación (A):

$$x = \frac{\log 81}{\log 3} - y$$

$$x = \frac{\log 81}{\log 3} - \frac{(2)\log 5}{\log 25}$$

Para realizar estas operaciones con la calculadora utilizamos la tecla $\boxed{\text{LOG}}$ con la cual se determina el logaritmo decimal de una cantidad. Procedemos de la siguiente manera:

$\boxed{\text{LOG}}$ 81 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{LOG}}$ 3 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{\text{LOG}}$ 5 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{LOG}}$ 25 $\boxed{=}$

Aparece en la pantalla de la calculadora el resultado: *3*

Entonces nuestra respuesta es: $x = 3$

Para calcular el valor de y realizamos las operaciones indicadas en la ecuación B:

$$y = \frac{(2)\log 5}{\log 25} \quad \text{(B)}$$

Al emplear el procedimiento indicado para calcular logaritmos con la calculadora y después de hacer operaciones resulta:

$$y = 1$$

COMENTARIO: Es importante observar que en estos modelos de calculadoras no es necesario presionar la tecla de multiplicación cuando queremos el producto de una cantidad por el logaritmo de un número, como puede verse en la secuencia de operaciones para la calculadora, aunque si se hace, el resultado es el mismo, sólo que empleamos más tiempo.

ALTERNATIVA 2.- Utilizando **logaritmos naturales (ln)** para resolver el sistema de ecuaciones exponenciales.

Ecuaciones originales:

$$3^{x+y} = 81 \quad \text{(Ecuación 1)}$$

$$25^{y/2} = 5 \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Aplicando **logaritmos naturales (ln)** a ambos miembros de la igualdad en la ecuación 1:

$$\ln 3^{x+y} = \ln 81$$

Aplicando la propiedad 1 al primer miembro de la ecuación:

$$(x + y) \ln 3 = \ln 81$$

Dividimos entre ln 3:

$$\frac{(x+y)\ln 3}{\ln 3} = \frac{\ln 81}{\ln 3}$$

Simplificando:

$$x + y = \frac{\ln 81}{\ln 3}$$

Despejamos x :

$$x = \frac{\log 81}{\log 3} - y \quad \text{(A)}$$

Ahora aplicamos la propiedad a la ecuación 2 y continuamos de manera similar:

$$\ln 25^{y/2} = \ln 5$$

$$(y/2) \ln 25 = \ln 5$$

$$\frac{(y/2) \ln 25}{\ln 25} = \frac{\ln 5}{\ln 25}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{\ln 5}{\ln 25}$$

$$y = \frac{(2) \ln 5}{\ln 25} \quad \text{(B)}$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación (A):

$$x = \frac{\ln 81}{\ln 3} - y$$

$$x = \frac{\ln 81}{\ln 3} - \frac{(2) \ln 5}{\ln 25}$$

Para realizar estas operaciones con la calculadora utilizamos la tecla $\boxed{\text{LN}}$ con la cual se determina el logaritmo natural de una cantidad. Procedemos de la siguiente manera:

$\boxed{\text{LN}}$ 81 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{LN}}$ 3 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{\text{LN}}$ 5 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{LN}}$ 25 $\boxed{=}$

Aparece en la pantalla de la calculadora el resultado: *3*

Entonces nuestra respuesta es: $x = 3$

Para calcular el valor de y realizamos las operaciones indicadas en la ecuación B:

$$y = \frac{(2)\ln 5}{\ln 25} \qquad \text{(B)}$$

Al emplear el procedimiento indicado para calcular logaritmos con la calculadora (esta vez con logaritmos naturales) y después de hacer operaciones resulta:

$$y = 1$$

Que son los mismos resultados que obtuvimos aplicando logaritmos decimales. Esto comprueba que se obtienen los mismos resultados tanto si se emplean logaritmos decimales o naturales para resolver este tipo de ecuaciones.

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: Se pretende que los estudiantes realicen el cálculo de operaciones complejas con calculadora, así como el uso tanto de las teclas para elevar al cuadrado una cantidad como la de inversos, al igual que el uso de paréntesis al realizar operaciones con la calculadora. Por otro lado, que el alumno realice la comparación de cantidades.

ENUNCIADO: ¿Cuál de los siguientes dos números es mayor?[4]

$$A=\frac{2.0000004}{(1.0000004)^2+2.0000004}$$

ó

$$B=\frac{2.0000002}{(1.0000002)^2+2.0000002}$$

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Una manera de proceder con la calculadora es utilizando inversos. Otra forma es utilizando paréntesis en el denominador.

Hagamos nuestro cálculo en primera instancia con inversos para el número *A*. En este caso primero realizamos las operaciones del denominador, para lo cual necesitaremos elevar al cuadrado una cantidad, misma que obtenemos a través de la tecla $\boxed{x^2}$ y no necesitamos ponerle paréntesis al número que se eleva al cuadrado. Procedemos mediante la secuencia siguiente:

[4] Enunciado tomado del Calendario Matemático 2004

1.0000004 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 2.0000004 $\boxed{=}$ (Obtenemos *3.0000012*)

Continuamos calculando el inverso de esta cantidad con la tecla $\boxed{x^{-1}}$:

$\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$ (Obtenemos *0.3333332*)

La cantidad obtenida pasa al numerador multiplicando a la o las cantidades que ya se encontraban en el mismo, para lo cual utilizamos la tecla de multiplicación $\boxed{\times}$, por lo que la secuencia continúa así:

$\boxed{\times}$ 2.0000004 $\boxed{=}$ (Obtenemos *0.666666533*)

Ahora para realizar el cálculo del número *B* lo hacemos mediante la secuencia ya indicada:

1.0000002 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$2.0000002 $\boxed{=}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{\times}$ 2.0000002 $\boxed{=}$

Obtenemos como resultado la cantidad *0.6666666*

Comparemos las cantidades para determinar cuál de las dos es mayor:

$$A = 0.666666533$$
$$B = 0.6666666$$

Por simple inspección vemos que la séptima cifra del número *B* (un 6) es mayor que la que ocupa el mismo lugar en el número *A* (un 5), por lo que deducimos que el número *B* es mayor que el número *A*, lo cual a su vez lo representamos con la siguiente simbología:

$$\underline{\boldsymbol{B > A}}$$

COMENTARIO: La comparación de los dos números puede hacerse también restando *A* del *B* o viceversa. Si el resultado es negativo, el primero es menor, y si el resultado es positivo, el primero es mayor. Si a B le restamos *A* tenemos:

`0.6666666` $\boxed{-}$ `0.666666533` $\boxed{=}$

El resultado nos lo presenta la calculadora en forma científica: 6.7×10^{-8}; el signo que nos interesa es el que tiene 6.7, que es positivo, por lo que confirmamos que el número *B* es mayor que el número *A*.

Como ya se indicó al inicio, también podemos hacer nuestro cálculo utilizando paréntesis en el denominador. Esto se hace necesario para que al dividir la calculadora tome como divisor el resultado de las operaciones realizadas en el denominador. La secuencia quedaría entonces como se indica a continuación para el número *A*:

`2.0000004` $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ `1.0000004` $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$`2.0000004` $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

Obtenemos el mismo resultado que con el primer método: *0.66666653*.

Para el número *B* se procede de manera similar. Lo demás se hace de la forma indicada.

OBSERVACIÓN: En algunos modelos de calculadora la tecla para calcular el inverso de una cantidad se presenta como $^1/_x$.

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: Se pretende que el alumno realice actividades de abstracción, exploración, observación, deducción y generalización, así como el descubrimiento de patrones y el análisis de información. Por medio de la calculadora, que aprenda el uso de la tecla para elevar una cantidad al cuadrado y el uso de paréntesis..

ENUNCIADO: Considera un número positivo, elévalo al cuadrado, al resultado réstale el número original y al resultado divídelo entre el número inicial. ¿Qué resultado obtienes? Descubre el patrón de comportamiento haciendo lo mismo para diferentes números y dedúcelo algebraicamente.[5]

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Para encontrar la respuesta a la pregunta podríamos pensar unos tres números diferentes, realizar con la calculadora las operaciones que se nos propone y observar los resultados para tratar de encontrar un patrón de comportamiento. Procedamos como primer paso de esta manera y veamos qué sucede, digamos con los números 122, 7 y 3.17, cada uno de ellos positivo.

Consideremos el número 122. Para elevar un número al cuadrado con la calculadora se tiene la tecla $\boxed{x^2}$, por lo que procedemos así:

122 $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ (obtenemos el resultado *14,884*).

Restamos al resultado obtenido el número original; con la calculadora sólo presionamos la tecla de resta $\boxed{-}$ (ya que la calculadora toma el valor obtenido

---

[5] Parte del enunciado tomado del Calendario Matemático 2004

como primer valor de la siguiente operación), luego el número original 122 y la tecla de igualdad:

$\boxed{-}$ 122 $\boxed{=}$ (Obtenemos el resultado *14,762*).

Al resultado obtenido lo dividimos entre el número inicial:

$\boxed{\div}$ 122 $\boxed{=}$ (Obtenemos el resultado *121*).

La manera como se propuso puede variar un poco si realizamos las operaciones de manera continua, ya que la calculadora tiene lo que se llama "jerarquía de operaciones" y va realizándolas de acuerdo a un determinado orden (ver manual del usuario).

Una secuencia alternativa podría ser la siguiente:

122 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 122 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 122 $\boxed{=}$ (Obtenemos *121*).

De esta manera la calculadora eleva el número al cuadrado y resta 122; después de esto es necesario presionar la tecla de igualdad para que el resultado lo divida entre 122, ya que de otro modo la calculadora dividiría antes de restar, por la jerarquía de operaciones que tiene programada internamente.

Otra alternativa de secuencia podría ser utilizando paréntesis como se muestra:

$\boxed{(}$ 122 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 122 $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ 122 $\boxed{=}$ (Obtenemos *121*).

Así, la calculadora realiza primero las operaciones indicadas entre paréntesis y al final la división.

Ahora veamos qué sucede con el número positivo 7. Escogemos la segunda secuencia por ser la que menos pasos necesita:

7 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 7 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 7 $\boxed{=}$ (Obtenemos el resultado *6*).

Por último probamos con el número positivo 3.17:

3.17 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 3.17 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 3.17 $\boxed{=}$ (Obtenémos el resultado *2.17*).

¿Qué se observa de los resultados obtenidos al compararlos con las cantidades propuestas? Hagamos una tabla para observarlos mejor:

Núm. Considerado	122	7	3.17
Resultado Obtenido	121	6	2.17

Resulta obvio que del número propuesto llegamos al mismo disminuido en una unidad, es decir si llamamos *n* al número positivo considerado u original, el resultado obtenido es *n-1.* ¿Por qué será así? Veámoslo desde un punto de vista algebraico. Sea *n* el número que escogemos, entonces n^2 será ese número elevado al cuadrado, y llamemos *R* al resultado; de manera que las operaciones que realizamos las podemos representar algebraicamente de la siguiente manera:

$$R = \frac{n^2 - n}{n}$$

Si factorizamos *n* por factor común en el numerador:

$$R = \frac{n(n \ -1)}{n}$$

Al simplificar resulta:

$$R = n - 1$$

Que interpretamos como el número original menos uno.

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: La intención está encaminada tanto al descubrimiento de patrones como a la realización de actividades de exploración, observación y deducción, así como al uso de la tecla para división con calculadora.

ENUNCIADO: Al calcular el valor decimal de ciertas fracciones ocurren curiosidades como las de los siguientes números racionales. Determina el comportamiento de los valores obtenidos y crea otras fracciones que cumplan con el patrón. Las fracciones propuestas son:

$$\frac{3}{9}, \frac{8}{9}, \frac{17}{99}, \frac{19}{99}, \frac{60}{99}, \frac{129}{999}, \frac{238}{999}, \frac{681}{999}, \frac{1254}{9999}$$

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Tenemos aquí un ejemplo de operaciones sencillas para realizarse con calculadora pero que nos ahorran mucho tiempo. Lo interesante es descubrir lo que sucede con los resultados obtenidos y dejar que la calculadora haga el trabajo tedioso. Para el cálculo de los valores decimales de las fracciones sólo hay que dividir cada numerador entre cada denominador mediante la tecla de división $\boxed{\div}$, por ejemplo: 3 $\boxed{\div}$ 8 $\boxed{=}$ y vamos apuntando cada resultado, que podríamos hacerlo en forma de tabla para una mejor observación como se muestra enseguida:

FRACCIÓN	DECIMAL
3/9	0.333333333
8/9	0.888888888
17/99	0.171717171
19/99	0.191919191
60/99	0.606060606

129/999	0.129129129
238/999	0.238238238
681/999	0.681681681
1254/9999	0.125412541

¿Qué se observa?

Si observamos la tabla detenidamente se puede ver que en la parte decimal se repiten las mismas cifras que tiene el numerador de cada fracción; ¿cuántas veces? Se deduce que de manera indefinida, aunque la calculadora sólo nos presente nueve cifras decimales, es decir se presenta una de las características de los números racionales: que su parte decimal es periódica. Otro hecho importante que se debe observar es que lo anterior sucede si la cantidad de cifras en el numerador es la misma que la del denominador (que a su vez observamos que está compuesto sólo por nueves). ¿Qué pasa si hay más cifras en el denominador que en el numerador? Explora con tu calculadora y dedúcelo.

Una vez determinado el comportamiento o patrón se pueden construir otras fracciones que cumplan con él y de manera inmediata deducir el resultado de la división, ya sin necesidad de la calculadora. Por ejemplo si tenemos el número racional 368754/999999 de manera inmediata diremos que el resultado al realizar la división es 0.368754368754368754... (Al comprobarlo con la calculadora ésta sólo nos ofrece nueve decimales: 0.368757368). De manera que ya podemos construir infinidad de fracciones de este tipo y representar su valor decimal sin el uso de lápiz y papel ni el de una calculadora. ¿Cuáles se te ocurren?

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: La intención que se tiene aquí es la resolución de situaciones de la vida cotidiana, así como el uso de teclas especiales de la calculadora para determinación del cubo y cuadrado de una cantidad. También se pretende que el alumno maneje sólo cifras significativas (redondeo de cantidades) al manejar números que tengan ya un significado específico en situaciones de la vida real.

ENUNCIADO: En mi casa necesito construir una cisterna para almacenar agua con capacidad de 11 m^3. Alguien comentó que debe ser de forma cúbica para ocupar el mínimo de terreno, pues sólo dispongo de un área cuadrada de 7 m^2 para su construcción en los que debo incluir el espesor de los muros de 15 cm cada uno, 15 cm de piso y 15 cm de tapa y no es conveniente cavar mucho pues el terreno es duro. Como no sé Matemáticas, ¿podrías decirme si es posible construirla bajo estas condiciones? De ser positiva la respuesta, ¿de qué dimensiones sería el cubo de la cisterna tanto en su interior como en el exterior?

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Como nos piden que la cisterna sea de forma cúbica, podríamos empezar calculando las dimensiones del lado que debe tener el cubo; tenemos que la capacidad de la cisterna será de 11 m^3 y recordando que el volumen de la figura geométrica cubo se calcula elevando al cubo la medida del lado, ¿cómo calculamos la dimensión del lado cuando tenemos como dato el volumen? Considera lo siguiente:

Volumen de un cubo: $V = l^3$

Sustituyendo valores: $11m^3 = l^3$

Extraemos raíz cúbica a ambos miembros de la igualdad por ser la operación inversa de elevar al cubo:

$$\sqrt[3]{11m^3} = \sqrt[3]{l^3}$$

Con la calculadora realizamos la extracción de la raíz cúbica del primer miembro de la igualdad con la tecla $\boxed{\sqrt[3]{}}$, sólo que ésta se localiza encima de la tecla $\boxed{x^3}$, es decir está como segunda función por lo cual se debe presionar primero la tecla $\boxed{\text{SHIFT}}$. La secuencia sería:

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[3]{}}$ 11 $\boxed{=}$ (Se obtiene *2.223980091*).

En el segundo miembro de la ecuación tenemos una expresión algebraica, pero como ya se dijo, la raíz cúbica y la potencia cúbica al ser operaciones inversas se cancelan, por lo que el resultado ahí es sólo l, de manera que tenemos que la medida del lado del cubo es l = 2.223980091 m.

Tenemos ahora que decidir cuál medida del lado vamos a tomar, ¿o es que le diremos al albañil que construya una cisterna cúbica de lado l = 2.223980091? Porque una cosa es el resultado que me arroja la calculadora y otra cosa es el valor que voy a tomar para aplicarlo en la vida real. ¿Cuántas cifras significativas serán suficientes? Para dimensiones cortas en construcción por lo general basta con dos decimales (que nos representan centímetros). Los demás decimales podemos eliminarlos o redondear; en este caso da lo mismo pues al redondear se eliminan ya que el tercer decimal (3) deja igual al segundo decimal (2), por lo que la dimensión con la que nos quedamos es l = 2.22 m.

Ahora veamos la dimensión del lado del cuadrado del área de terreno que tengo disponible, que es de 7 m^2. Procedemos de manera similar al cálculo anterior, sólo que ahora extraemos raíz cuadrada con la tecla $\boxed{\sqrt{}}$; veamos el procedimiento:

Área de terreno disponible: $A = l^2$

Sustituyendo valores: $7m^2 = l^2$

Extraemos raíz cuadrada: $\sqrt{7m^2} = \sqrt{l^2}$

Con la calculadora extraemos la raíz cuadrada del primer miembro:

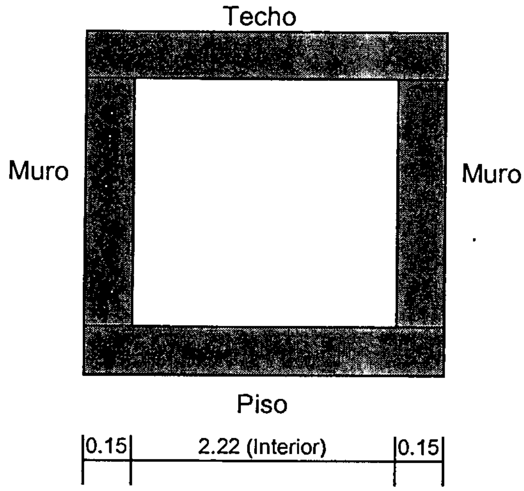
$\boxed{\sqrt{}}$ 7 $\boxed{=}$ (Se obtiene *2.645751311*).

En el segundo miembro obtenemos sólo l de manera algebraica.

Aplicamos de nuevo el criterio de cifras significativas y escogemos $l = 2.64$ m, que representa la dimensión por cada lado que se tiene disponible para construir la cisterna.

Respondamos a la pregunta acerca de si es posible construir la cisterna. Para eso comparemos las dimensiones obtenidas. La dimensión del lado del cuadrado debe ser mayor que la del lado del cubo, pero ¿no estamos olvidando algo? Tienes razón, se nos olvidaba agregar el espesor de los muros a cada lado que son de 15 cm, por dos lados dan 30 cm, más el lado del cubo que es de 2.22 m, convertidos los 30 cm a metros son 0.30 m más 2.22 m obtenemos 2.52 m, y como tenemos un espacio de 2.64 m, concluimos que sí es posible construirla.

Por lo tanto las dimensiones del cubo en el interior serían de 2.22 m por lado y en su exterior de 2.52 m por lado; esto está representado en el siguiente corte (unidades en metros).


Techo
Muro
Muro
Piso
0.15
2.22 (Interior)
0.15

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: La intención que se tiene aquí es la resolución de situaciones de la vida cotidiana, así como el uso de teclas especiales de la calculadora para determinación del cubo y cuadrado de una cantidad. También se pretende que el alumno maneje sólo cifras significativas (redondeo de cantidades) al manejar números que ya tengan un significado específico en situaciones de la vida real.

ENUNCIADO: En mi negocio debo fabricar varios depósitos de acero inoxidable con forma cúbica para almacenar líquidos (sin tapa). Quien me los encargó me pidió que los hiciera con una dimensión de 1.27 m de lado. No me dio la cantidad de recipientes ya que le llamaron por teléfono para que se presentara de inmediato en su empresa, pero había comentado que necesitaba almacenar 18 000 litros. ¿Cuántos recipientes debo construir? ¿Qué capacidad tendrá cada uno?

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Para saber cuántos recipientes se deben fabricar primero necesitamos conocer la capacidad de cada uno. En el enunciado nos dicen que serán de forma cúbica; entonces calculamos el volumen con la fórmula:

$$V = l^3$$

Sustituyendo el lado: $V = (1.27)^3$

El cálculo con la calculadora lo realizamos directamente con la tecla $\boxed{x^3}$ que es la que nos eleva al cubo una cantidad. La secuencia simplemente es la que sigue:

`1.27` $\boxed{x^3}$ $\boxed{=}$ (Se despliega *2.048383*).

Como ya se mencionó en otra situación, decidimos el número de cifras significativas, escogemos dos por tratarse de volumen y redondeamos; entonces:

$$V = 2.05m^3$$

Ya tenemos la capacidad de cada recipiente, ¿cómo calculamos la cantidad por fabricar? Para eso contamos con el volumen total que deberá almacenarse que es de 18 000 litros. ¿Qué operación efectuamos? Si pensaste en la división, estás en lo cierto, pues si dividimos el volumen total entre el volumen de cada recipiente obtendremos la cantidad necesaria de recipientes. ¿Podemos dividir 18 000 entre 2.5? Desde luego que no, pues nuestras unidades no son las mismas; tenemos litros y metros cúbicos, por lo que es necesario convertir a una u otra unidad; entonces tenemos dos opciones: o dividimos los litros entre 1000 para obtener m^3 o multiplicamos los metros cúbicos por 1000 para obtener litros. Hagámoslo de las dos formas para que veas que se obtiene el mismo resultado:

Primera opción:

Dividimos los 18 000 litros entre mil para tener m^3 y luego entre 2.05; con la calculadora procedemos de la siguiente manera:

`18000` $\boxed{\div}$ `1000` $\boxed{\div}$ `2.05` $\boxed{=}$ (Obtenemos *8.780487805*).

Segunda opción:

Multiplicamos los 2.05 m^3 por mil y el resultado en litros será el divisor de los 18 000 litros. Con la calculadora procedemos de la siguiente manera:

`2.05` $\boxed{\times}$ `1000` $\boxed{=}$ (Se obtiene *2,050*).

`18000` $\boxed{\div}$ `2050` $\boxed{=}$ (Obtenemos *8.780487805*).

Como puedes darte cuenta, el resultado es el mismo (intenta deducir por qué).

Del resultado obtenido, debemos decidir cuántos recipientes hay que fabricar; en este caso nuestros decimales deben convertirse a un número entero, pues no podemos fabricar fracciones de recipientes sino una cantidad exacta. ¿Fabricaremos 8 o nueve recipientes? Obviamente debe ser el entero siguiente para poder contener todo el volumen de 18 000 litros, es decir ***9 recipientes***; de lo contrario, si escogiéramos construir 8 recipientes, quedarían sin envasar 1.6 m^3. (¿Por qué?)

Como puedes darte cuenta de nuevo, constantemente debemos decidir el número de cifras significativas cuando la calculadora nos arroja resultados con decimales: en ocasiones redondeamos o cortamos a un número determinado de cifras y a veces redondeamos o cortamos para tener una cantidad entera.

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: La utilización de la ley distributiva de la multiplicación o algún algoritmo con alguna operación de suma, multiplicación u otra que permita resolver la situación. Asimismo se pretende que el estudiante realice actividades de exploración y experimentación con la calculadora.

ENUNCIADO: Imagina que tienes una calculadora a la cual no le funciona la tecla del número nueve (9). ¿Qué alternativas tienes para obtener el producto de la multiplicación de un número cualquiera por 9? Por ejemplo, multiplica 36457 por 9. Experimenta con otras cantidades y comprueba los resultados directamente con tu calculadora.

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Como no tenemos disponible la tecla del número 9, seguramente pensaste alguna o algunas de las posibles alternativas que se consideran a continuación:

ALTERNATIVA 1: Consideremos la multiplicación de 36457 por 9. Podemos utilizar la ley distributiva de la multiplicación para obtener el resultado de la siguiente manera:

$$(36457)\,(3 + 6) = (36457)\,(3) + (36457)(6)$$

(Por supuesto las cantidades sumadas deben dar 9, lo que significa que puedes utilizar otros números, p. ej. 1 + 8 ó 5 + 4 u otras).

Con la calculadora obtenemos la cantidad mediante la siguiente secuencia:

36457 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{+}$ 36457 $\boxed{\times}$ 6 $\boxed{=}$ (Obtenemos *328,113)*.

Experimenta con otras sumas de nueve y con otras cantidades a multiplicar. Comprueba los resultados también multiplicando en la calculadora el ejemplo (36457)(9) o las cantidades que hayas escogido.

ALTERNATIVA 2: Es similar a la anterior pero utilizando una resta, p. ej. 11 – 2, 15 – 6 ó cualquiera que dé como resultado 9. Escojamos 12 – 3:

$$(36457)\,(12 - 3) = (36457)\,(12) - (36457)(3)$$

Con la calculadora:

`36457` $\boxed{\times}$ `12` $\boxed{-}$ `36457` $\boxed{\times}$ `3` $\boxed{=}$ (Obtenemos *328,113)*.

Experimenta con otras restas que den nueve y con otras cantidades a multiplicar. Comprueba los resultados con la calculadora.

ALTERNATIVA 3: Ahora usamos la multiplicación; en este caso sólo tenemos (3)(3) ó (-3)(-3). Utilicemos (3)(3):

$$(36457)\,(3)(3)$$

Realizando la operación con la calculadora:

`36457` $\boxed{\times}$ `3` $\boxed{\times}$ `3` $\boxed{=}$ (Obtenemos *328,113)*.

Experimenta con otras cantidades a multiplicar. Comprueba los resultados con la calculadora.

ALTERNATIVA 4: También podemos utilizar la división; aquí tenemos de nuevo muchas posibilidades (¿descubriste el proceso?). Podemos dividir un múltiplo de 9 entre un divisor del mismo cuyo cociente sea 9. Escojamos por ejemplo el múltiplo 36; su divisor cuyo cociente es 9 es el número 4:

$$(36457)(36 \div 4)$$

Utilizamos la siguiente secuencia para realizar la operación con la calculadora:

36457 $\boxed{\times}$ 36 $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$ (Obtenemos *328,113)*.

Experimenta con otros cocientes que den nueve y con otras cantidades a multiplicar. Comprueba los resultados con tu calculadora.

ALTERNATIVA 5: Es parecida a la multiplicación, sólo que utilizamos potencia elevando al cuadrado: $(3)^2$ ó $(-3)^2$. Con $(3)^2$ veamos la secuencia para la calculadora (con la tecla $\boxed{x^2}$ para elevar al cuadrado cualquier cantidad):

36457 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ (Obtenemos *328,113)*.

Practica con otras cantidades. Comprueba los resultados con tu calculadora.

ALTERNATIVA 6: Si pudimos usar la potencia entonces también podemos utilizar su operación inversa: la raíz cuadrada. En este caso utilizamos la raíz cuadrada de 81 cuyo resultado es 9:

$$(36457)(\sqrt{81})$$

La secuencia más inmediata con la calculadora sería la siguiente:

36457 $\boxed{\sqrt{}}$81 $\boxed{=}$ (Obtenemos *328,113)*.

Es decir, con estas calculadoras no se necesita indicar la multiplicación de una cantidad por la raíz de otra cantidad, basta con teclear la cantidad que se va a multiplicar, luego presionamos la tecla de raíz cuadrada y enseguida la cantidad a la que se le extraerá la raíz.

Practica con otras cantidades. Comprueba los resultados con tu calculadora.

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: Estimación de números y manejo de números decimales mediante el uso de la calculadora.

ENUNCIADO: Encuentra un número que multiplicado por 53 dé un número entre 870 a 890:

53 x ____________________ = ____________________ (entre 870 y 890)

Determina además el intervalo de valores cuyo producto con 53 esté entre 870 a 890.

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Una manera de proceder sería por tanteos, proponiendo de manera mental un número que al multiplicarlo por 50 su valor sea cercano al intervalo indicado. Podría ser por ejemplo 50 x 20 cuyo resultado es 1000; de esta manera vemos que nuestro número está cercano a 20 y debe ser menor que éste. Vamos buscando otras cantidades pero ahora ya con calculadora en mano multiplicamos 53 por alguna cantidad cercana a 20, digamos 18 y obtenemos 954; como nos pasamos del intervalo requerido seguimos buscando hasta encontrarla. Si probaste con 16 el resultado de la multiplicación es 848: ahora nos falta un poco. Probablemente pensaste en un punto intermedio: el 17, que al multiplicarlo por 53 nos da 901, nos pasamos de nuevo. ¿Qué significa esto? Seguramente ya te diste cuenta que el valor buscado no es un entero: hay que probar con un número que contenga decimales. Muy bien, al escoger el intermedio entre 16 y 17 probamos con 16.5, cuyo producto con 53 es 874.5, de manera que hemos encontrado uno de tantos valores posibles.

¿Ya pensaste cómo encontrar el intervalo de valores que al multiplicar por 53 su producto esté entre 870 y 890? De hecho, esta es otra alternativa para proceder en la búsqueda del número sin necesidad de hacerlo por tanteos como se hizo líneas arriba. Recuerda que la multiplicación y la división son dos operaciones inversas, entonces al multiplicar dos cantidades, el resultado lo podemos dividir entre una de las dos para conocer el otro número. Con este criterio en mano dividimos los valores extremos entre 53 y ya tenemos el intervalo buscado.

Veamos los resultados en la siguiente tabla, en la que se consideraron sólo cuatro decimales:

VALORES EXTREMOS	870	890
VALORES EXTREMOS DIVIDIDOS ENTRE 53	16.4154	16.7924

Significa que cualquier valor mayor de 16.4154 pero menor que 16.7924 al multiplicarlo por 53 va a dar un valor dentro del intervalo citado. Compruébalo con algunos valores usando tu calculadora.

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: La intención es el manejo de números muy pequeños y muy grandes, así como la notación científica con exponente negativo y positivo. Con la calculadora, el uso para este tipo de números así como el de la tecla para indicar un número negativo.

ENUNCIADO: Los científicos han estimado la masa de un átomo de hidrógeno en aproximadamente 0.0000000000000000000000017 gramos. Calcula el número aproximado de átomos de hidrógeno en un mol considerando el peso de un mol de gas como 1.01 gramos. Compara tu resultado con el número de Avogadro de 6.02×10^{23}.

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Para realizar el cálculo de átomos procedemos a dividir un mol (1.01 g) entre el peso en gramos de cada átomo de hidrógeno. Lo hacemos de manera directa con nuestra calculadora, sólo que podemos proceder de al menos dos maneras diferentes.

ALTERNATIVA 1:

Simplemente dividimos con los datos en la forma que se nos presentan; una secuencia con la calculadora sería la siguiente:

$$1.01 \boxed{\div}\ 0.0000000000000000000000017 \boxed{=}$$

La calculadora nos arroja un resultado en forma científica: $5.941176471 \times 10^{23}$. Este tipo de resultados aparece en la pantalla cuando las cantidades son o muy grandes o muy pequeñas. Sin embargo como ya te habrás dado cuenta sí es posible introducir datos en la calculadora con una cantidad elevada de dígitos (de hecho, se pueden introducir hasta 79 datos, incluidos los operadores aritméticos o teclas de funciones especiales, de manera que por ejemplo 73 [+] 5 [x^2] [=] la calculadora los toma como cinco datos introducidos, ya que la tecla de igual le indica a la calculadora que realice el resultado. Las teclas SHIFT y ALPHA no se toman como dato).

Ahora bien, respecto al resultado obtenido por lo general cuando se trata de una cantidad muy grande sólo se toman en cuenta un entero y uno o dos decimales, por lo que nuestro resultado lo podemos redondear a 5.9×10^{23} o inclusive cerrarlo a 6×10^{23} ya que los datos con los que realizamos son aproximados según nos dicen en el enunciado. Este último resultado al compararlo con el número de Avogadro de 6.02×10^{23} es muy parecido, por lo que podemos concluir que nuestro cálculo está correcto y dentro de un rango de aproximación adecuado.

ALTERNATIVA 2:

Por otra parte, nuestro cálculo en la calculadora lo podemos realizar con el divisor representado de manera científica, recordando que el exponente representa el número de espacios que hay que recorrer el punto hacia atrás (si es negativo) o hacia delante (si es positivo) de una cantidad. En nuestro caso vemos que en el número 0.0000000000000000000000017 tenemos 23 ceros después del punto más un espacio adicional para colocar el punto después del 1 y antes del 7 con el fin de tener un entero y un decimal, por lo que nuestro numerito representado en forma científica quedaría así: 1.7×10^{-24} donde a su vez el número –24 (el exponente) indica que el punto decimal se recorre hacia atrás 24 espacios por lo que sería necesario agregar 23 ceros antes del 1.

Con lo anterior en mente podemos proceder entonces a realizar nuestro cálculo con la calculadora mediante la siguiente secuencia sugerida:

1.01 [÷] 1.7 [EXP] [(-)] 24 [=]

Y obtenemos el mismo resultado indicado líneas arriba. Hay que tomar en cuenta las indicaciones que ya se mencionaron. Es conveniente hacer notar que la tecla $\boxed{\text{EXP}}$ se utiliza para representar un número en forma científica (en este caso representa al número 10); por otro lado, introducimos aquí la tecla $\boxed{(-)}$ que se utiliza para representar el signo negativo de un número (es muy común que se utilice la tecla destinada a la operación resta o sustracción representada con la tecla $\boxed{-}$ pero esto es incorrecto; para evitar confusión es por eso que en la calculadora la tecla para cambiar signo tiene al símbolo menos entre paréntesis).

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: Encontrar el valor numérico de una expresión algebraica, de un polinomio o de una función empleando la calculadora. Uso de las teclas para elevar un número a una potencia cualquiera con la calculadora, así como la tecla para cambio de signo de un número.

ENUNCIADO: Determina el valor numérico de la función polinomial $f(x) = 3x^5 - 38x^3 + 5x^2 - 1$ para los valores de $x_1 = 1.25$ y $x_2 = -7$. (Los valores buscados se representan como f(1.25) y f(–7), que se leen "f de 1.25" y "f de menos 7", respectivamente. Es muy común realizar este tipo de operaciones tanto en Álgebra como en Análisis de Funciones o en Precálculo.)

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Para encontrar el valor numérico de la función sustituimos cada uno de los valores con los cuales vamos a evaluar la función en aquellos lugares en los que encontremos la variable *x*; luego realizamos las operaciones indicadas y llegamos a un número: ése número calculado es a lo que se le llama "valor numérico". En ocasiones efectuar este cálculo a mano o mentalmente se vuelve bastante complicado por lo que nos apoyamos en la calculadora para realizarlo.

Iniciemos con el valor de $x = 1.25$ para lo cual podemos hacerlo directamente con la calculadora viendo la función y colocando este valor en vez de *x*, pero sólo si se tiene suficiente habilidad para hacerlo de esta manera; o bien indicamos en papel las operaciones que vamos a realizar y luego procedemos a hacer las operaciones con la calculadora; hagámoslo de esta última manera:

$$f(1.25) = 3(1.25)^5 - 38\,(1.25)^3 + 5(1.25)^2 - 1$$

Debemos interpretar correctamente las operaciones que están indicadas para obtener un resultado correcto; por ejemplo para el primer término $3(1.25)^5$ no debemos olvidar que se está realizando una multiplicación de 3 por $(1.25)^5$ por lo que a la calculadora hay que indicárselo; si lo calculásemos a mano primero tendríamos que realizar la potencia y luego la multiplicación. Afortunadamente la operación completa la podemos realizar en la calculadora de manera continua y no por intervalos como ocurre con otros tipos o modelos. Con la calculadora, para elevar un número a una potencia cualquiera se usa la tecla $\boxed{\wedge}$. Consideremos la secuencia que se propone a continuación para obtener el valor numérico de toda la expresión:

$$3\,\boxed{\times}\,1.25\,\boxed{\wedge}\,5\,\boxed{-}\,38\,\boxed{\times}\,1.25\,\boxed{x^3}\,\boxed{+}\,5\,\boxed{\times}\,1.25\,\boxed{x^2}\,\boxed{-}\,1\,\boxed{=}$$

Se obtiene un resultado de *–58.25097656*. Los decimales se redondean según la aplicación a la que se refiera la función dada, aunque por lo general se reportan uno o dos decimales como máximo ó solamente el entero. Entonces, si reportamos el valor numérico de la función dada con sólo enteros, lo haríamos de la siguiente forma:

$$f(1.25) = -58$$

El cálculo de f(-7) se haría de manera similar a lo anteriormente efectuado; en papel quedaría así:

$$f(-7) = 3(-7)^5 - 38\,(-7)^3 + 5(-7)^2 - 1$$

Con la calculadora la secuencia también sería similar; sin embargo, debe tomarse en cuenta que al introducirse un número negativo que se va a elevar a una potencia, se coloca entre paréntesis para que la calculadora tome en cuenta el signo, pues de lo contrario podría dar resultados incorrectos. Además, el signo negativo lo indicamos con la tecla destinada para cambio de signo, que es $\boxed{(-)}$.

Tomando en cuenta lo anterior, la secuencia propuesta quedaría como sigue:

3 [×] [(] [(-)] 7 [)] [^] 5 [-] 38 [×] [(] [(-)] 7 [)] [x^3] [+] 5 [×] [(] [(-)] 7 [)] [x^2] [-] 1 [=]

Esta vez el resultado es *-37,143.*

SUGERENCIA: Comprueba que el resultado es diferente si no se coloca el número negativo entre paréntesis. Desarrolla más habilidades practicando con otros valores de *x*.

NOTA: Como pudo observarse, para elevar un número cualquiera a una potencia se cuenta con diferentes teclas:

[x^2] para elevar al cuadrado.

[x^3] para elevar al cubo.

[^] para elevar a cualquier potencia
(positiva o negativa, entera o fraccionaria).

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: La intención es la experimentación con multiplicaciones de números utilizando calculadora y un cuadrado mágico.[6]

ENUNCIADO: Completa las cantidades que faltan de manera que los productos resultantes den 5 760 siguiendo el siguiente procedimiento: se escoge un número de la primera columna y de cualquier fila; se escoge otro número de la segunda columna y de una fila diferente a la anterior; por último, se escoge un número de la tercera columna y de una fila diferente a las anteriores. Los números pueden ser enteros positivos o negativos. Toma como ejemplo los números que se te dan.

	6	-30
-48		
		-20

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Siguiendo el procedimiento indicado en el enunciado, tomamos tres números de manera que no coincidan ni en columna ni en fila; por ejemplo, de los números que tenemos, tomamos el número –48 de la primera columna y segunda fila; luego tomamos el número 6 de la segunda columna y primera fila; por último, tomamos el número –20 de la tercera columna y tercera fila. Ahora procedemos a multiplicarlos con ayuda de la calculadora, tomando en cuenta que para el signo negativo de un número se tiene la tecla $\boxed{(-)}$ por lo que no debe usarse la tecla de la

[6] Idea tomada de Flores, Alfinio (1991)

sustracción (en la que aparece el signo menos pero no está encerrado entre paréntesis). Veamos la siguiente secuencia:

$\boxed{(-)}$ 48 $\boxed{\times}$ 6 $\boxed{\times}$ $\boxed{(-)}$ 20 $\boxed{=}$ (Obtenemos la cantidad *5760*)

Tomando en cuenta el ejemplo, vamos buscando otras cantidades que cumplan con el patrón establecido. (Al cuadro se le agregó otro número más. Ver solución en la parte siguiente sólo como comprobación).

SOLUCIÓN

Existen las siguientes posibilidades (¿serán las únicas?):

24	6	-30
-48	-12	60
16	4	-20

Comprobemos los productos utilizando nuestra calculadora:

24 $\boxed{\times}$ $\boxed{(-)}$ 12 $\boxed{\times}$ $\boxed{(-)}$ 20 $\boxed{=}$ Respuesta: *5,760*

24 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\times}$ 60 $\boxed{=}$ Respuesta: *5,760*

$\boxed{(-)}$ 48 $\boxed{\times}$ 6 $\boxed{\times}$ $\boxed{(-)}$ 20 $\boxed{=}$ Respuesta: *5,760*

$\boxed{(-)}$ 48 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\times}$ $\boxed{(-)}$ 30 $\boxed{=}$ Respuesta: *5,760*

16 $\boxed{\times}$ 6 $\boxed{\times}$ 60 $\boxed{=}$ Respuesta: *5,760*

16 $\boxed{\times}$ $\boxed{(-)}$ 12 $\boxed{\times}$ $\boxed{(-)}$ 30 $\boxed{=}$ Respuesta: *5,760*

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: La intención es la práctica de la multiplicación de expresiones algebraicas con ayuda de una calculadora y de un cuadrado mágico.[7]

ENUNCIADO: Completa los monomios que faltan de manera que los productos resultantes den $40{,}320x^6$ siguiendo el siguiente procedimiento: se escoge un monomio de la primera columna y de cualquier fila; se escoge otro monomio de la segunda columna y de una fila diferente a la anterior; por último, se escoge un monomio de la tercera columna y de una fila diferente a las anteriores. Los coeficientes enteros de los monomios pueden ser positivos o negativos; inclusive puede ocurrir que no haya términos con literales. Toma como ejemplo los monomios que se te dan.

	$-24x^2$	
$-40x^4$		
	$-84x$	42

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Siguiendo el procedimiento indicado en el enunciado, tomamos tres monomios de manera que no coincidan ni en columna ni en fila; por ejemplo, de los monomios que tenemos, tomamos $-40x^4$ de la primera columna y segunda fila; luego tomamos el monomio $-24x^2$ de la segunda columna y primera fila; por último, tomamos el monomio 42 de la tercera columna y tercera fila. Ahora procedemos a

[7] Idea tomada de Flores, Alfinio (1991)

multiplicar los coeficientes con ayuda de la calculadora, tomando en cuenta que para el signo negativo de un número se tiene la tecla $\boxed{(-)}$ por lo que no debe usarse la tecla de la sustracción (en la que aparece el signo menos pero no está encerrado entre paréntesis). Veamos la siguiente secuencia:

$\boxed{(-)}$ 40 $\boxed{\times}$ $\boxed{(-)}$ 24 $\boxed{\times}$ 42 $\boxed{=}$ (Obtenemos la cantidad 40,320).

Ahora multiplicamos las literales atendiendo las leyes de los exponentes para la multiplicación (que como recordarás, se suman los exponentes).

$$(x^4) (x^2) = (x^6)$$

Tomando en cuenta el ejemplo, vamos buscando otros monomios que cumplan con el patrón establecido. (Al cuadro se le agregó otro monomio más. Ver solución en la página siguiente sólo como comprobación.)

SOLUCIÓN

Existen las siguientes posibilidades (¿serán únicas?):

$20\ x^3$	$-24\ x^2$	$12\ x$
$-40\ x^4$	$48\ x^3$	$-24\ x^2$
$70\ x^2$	$-84\ x$	42

Comprobemos los productos de los coeficientes utilizando nuestra calculadora:

20 [×] 48 [×] 42 [=]	Respuesta: *40,320*
20 [×] [(-)] 84 [×] [(-)] 24 [=]	Respuesta: *40,320*
[(-)] 40 [×] [(-)] 24 [×] 42 [=]	Respuesta: *40,320*
[(-)] 40 [×] [(-)] 84 [×] 12 [=]	Respuesta: *40,320*
70 [×] 48 [×] 12 [=]	Respuesta: *40,320*
70 [×] [(-)] 24 [×] [(-)] 24 [=]	Respuesta: *40,320*

Comprobemos ahora los productos de las literales (se escriben en el mismo orden en el que se encuentran los coeficientes de arriba):

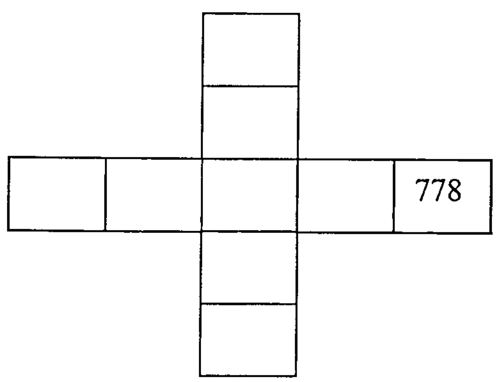
$$(x^3)(x^3) = x^6$$
$$(x^3)(x)(x^2) = x^6$$
$$(x^4)(x^2) = x^6$$
$$(x^4)(x)(x) = x^6$$
$$(x^2)(x^3)(x) = x^6$$
$$(x^2)(x^2)(x^2) = x^6$$

Uniendo coeficientes con x^6 obtenemos *40,320* x^6 en todos los casos.

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: La intención es la experimentación de sumas con números naturales mediante el apoyo de una calculadora en un ambiente de recreación matemática.

ENUNCIADO: Coloca los números del 771 al 779 de forma tal que la suma de los números colocados en la columna sea igual a la suma de los números colocados en la fila. Dicha suma deberá ser de 3875. Como ayuda se da el número 778 al final de la fila, sin embargo deduce si puede estar en otra casilla.



PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Con calculadora en mano se procede a buscar los números requeridos en el enunciado y se suman, realizando varias pruebas hasta encontrarlos, o buscando una estrategia que permita encontrarlos de manera más rápida. ¿Se te ocurre alguna? En la página siguiente se muestra una solución sólo como comprobación. ¿Será la única? Existe al menos un número que no puede cambiar de lugar, ¿cuál es?

POSIBLE SOLUCIÓN

		771		
		774		
772	773	775	777	778
		776		
		779		

NOTA: Posiblemente la solución encontrada no concuerde con esta solución, dado que algunos números colocados pueden intercambiarse sin alterar la suma de 3875 tanto en la columna como en la fila. Sin embargo, como ya se dijo, en esta solución existe un número que no puede cambiar de lugar. Dicho número es el del centro, el 775; trata de colocarlo en otro lugar y te darás cuenta que al sumar no se obtiene 3875.

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: Se tiene como intención la generalización de situaciones (pasar de una situación particular a una general), así como el empleo de la función exponencial a^x. Además, el uso en la calculadora de la tecla exponencial para elevar una cantidad a cualquier potencia.

ENUNCIADO: El crecimiento de ciertas bacterias en un cultivo de laboratorio se determinó de manera experimental de la siguiente manera: se observó que las bacterias se duplicaban cada hora, es decir, si la colonia inicia con una bacteria, al cabo de una hora habrá dos bacterias; a las dos horas habrá cuatro bacterias, y así sucesivamente. En la siguiente tabla (número 1) se escribieron algunos resultados hasta un tiempo de 5 horas, en los que *t* representa el tiempo en horas y *f(t)* ("efe de te") la cantidad de bacterias. Determina la expresión o modelo matemático con el cual se puede calcular el número de bacterias en cualquier tiempo *t*; una vez determinado, completa la tabla número 2.

TABLA 1

t (Tiempo en horas)	0	1	2	3	4	5
f(t) (Cantidad de bacterias)	1	2	4	8	16	32

TABLA 2

t (Tiempo en horas)	6	10	15	18	20	23
f(t) (Cantidad de bacterias)						

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Después de observar la tabla seguramente llegaste a la conclusión de que los valores en la segunda fila (correspondientes a la cantidad de bacterias para cada tiempo t) se obtienen duplicando el valor anterior. Así, para un tiempo de 4 horas, el número de bacterias (16) es el doble de la cantidad para un tiempo de 3 horas, que es de 8 bacterias, y así sucesivamente para cualquier otro tiempo. De esta manera podemos ir encontrando los valores para cantidades de bacterias sucesivas a cada tiempo. Pero, ¿cómo determinamos las cantidades para otros tiempos que no sean sucesivos, como los que se muestran en la tabla 2?

Para esto necesitamos encontrar una expresión que generalice el comportamiento del fenómeno (llamado modelo matemático), en este caso la cantidad de bacterias para cualquier tiempo. Observamos de nuevo la tabla 1 para buscar alguna relación entre los tiempos y el número de bacterias. Después de analizarla llegamos a la conclusión de que la cantidad de bacterias la obtenemos elevando el número 2 a la potencia que corresponde al tiempo; por ejemplo, para un tiempo de 5 horas, $2^5 = 32$; para un tiempo de 3 horas, $2^3 = 8$, y de igual manera para otros valores de t.

El razonamiento anterior nos lleva a generalizar nuestra situación. La cantidad que está variando es el tiempo t, mientras que el número 2 permanece constante, por lo que podemos deducir que nuestro modelo matemático lo representaríamos mediante la expresión 2^t. De manera formal escribiríamos:

$$f(t) = 2^t$$

Acabamos de construir una función exponencial con la cual es posible predecir el número de bacterias en cualquier tiempo t. Este tipo de funciones se presentan en diversas situaciones de la vida real en que intervienen poblaciones de animales o de seres humanos, entre otras.

Ahora bien, para encontrar los valores que faltan en la tabla 2 procedemos a realizar los cálculos con ayuda de nuestra calculadora, para lo cual utilizaremos la tecla con el símbolo $\boxed{\wedge}$ que se utiliza para elevar un número a cualquier potencia (entera o fraccionaria, positiva o negativa). Como ejemplo calcularemos la cantidad de bacterias para un tiempo de 23 horas: El procedimiento propuesto es el siguiente:

2 $\boxed{\wedge}$ 23 $\boxed{=}$ (Obtenemos como resultado *8,388,608*).

La interpretación del resultado es que después de 23 horas la cantidad de bacterias en el cultivo habrá crecido a 8,388,608; un número bastante elevado, ¿no crees? ¿Te imaginas cuántas habrá en un mes? Trata de encontrar la cantidad con tu calculadora; probablemente no alcance a realizar el cálculo, sin embargo puedes buscar hasta qué tiempo en horas es posible obtener la cantidad (inténtalo).

De igual forma calculamos las demás cantidades, quedando la tabla con los valores siguientes:

TABLA 2

t (Tiempo en horas)	6	10	15	18	20	23
f(t) (Cantidad de bacterias)	64	1,024	32,768	262,144	1,048,576	8,388,608

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: La intención es el descubrimiento de patrones, así como exploraciones con la calculadora. Además, el uso en la calculadora de la tecla para extraer la raíz enésima de una cantidad cualquiera.

ENUNCIADO: Por alguna razón, en la siguiente tabla faltan algunos valores. Ayúdame a encontrarlos. Para lograrlo, deberás descubrir el patrón que se siguió para calcular los primeros tres valores de la segunda fila basándose en las cantidades de la primera fila. Explora con tu calculadora diversas posibilidades.

4	27	256	3,125	46,656	823,543	16,777,216	387,420,489
2	3	4					

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Si observaste detenidamente la tabla y si realizaste algunas exploraciones con ciertas operaciones matemáticas apoyándote con tu calculadora, seguramente habrás deducido que los números 2, 3 y 4 se obtuvieron extrayendo raíz cuadrada a 4, raíz cúbica a 27 y raíz cuarta a 259, respectivamente. Con este razonamiento es fácil deducir que los números que faltan son los números sucesivos 5, 6, 7, 8 y 9, mismos que resultan de extraer desde raíz quinta hasta raíz novena a las otras cantidades de la primera fila.

Para comprobar nuestro razonamiento procedemos a realizar los cálculos con nuestra calculadora, para lo cual utilizaremos la tecla destinada a extraer la raíz enésima de una cantidad, misma que se localiza encima de la tecla $\boxed{\wedge}$, como segunda función (recordarás que extraer raíz es la operación inversa de elevar a una potencia). La forma que tiene es la siguiente: $\sqrt[x]{\ }$ en donde la *x* indica el índice del radical y, aunque puede usarse para la raíz cuadrada o cúbica, conviene utilizar las teclas destinadas a estas raíces por facilidad y de preferencia usar la tecla $\sqrt[x]{\ }$ para raíces de la cuarta en adelante. Para indicarle a la calculadora que queremos extraerle raíz a una cantidad, primero presionamos el número que representa el índice del radical, luego presionamos SHIFT para segunda función, después la tecla $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ y por último el número al que se le extraerá la raíz indicada. Como ejemplo calculemos con la calculadora la raíz sexta de 46,656 con la siguiente secuencia:

6 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ 46656 $\boxed{=}$ (Obtenemos el valor *6*).

De manera similar calculamos los demás valores y entonces nuestra tabla queda de la siguiente manera:

4	27	256	3,125	46,656	823,543	16,777,216	387,420,489
2	3	4	5	6	7	8	9

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: Como intención se tiene el empleo de la función exponencial e^x para la resolución de problemas; el uso en la calculadora de la tecla exponencial para elevar el número irracional *e* a cualquier potencia; y la interpretación de los resultados que arroja la calculadora.

ENUNCIADO: La población de cierto animal marino está determinada por la ecuación exponencial natural $N(t) = 5000e^{0.047t}$, donde la variable *t* representa años y el número 5000 representa la población de animales en el año 2005. Partiendo de ese año calcula la población esperada para: a) El año 2010 (b) El año 2015.

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

- **INTRODUCCIÓN:** El número irracional **e** aparece en la investigación de innumerables fenómenos físicos o en aquellos en los que intervienen poblaciones, ya sea de animales o de seres humanos. Su valor aproximado lo podemos obtener con nuestra calculadora siguiendo la siguiente secuencia sugerida (como se encuentra como segunda función, primero se oprime la tecla SHIFT; el número 1 corresponde al exponente de **e**, representado con la letra *x*):

$$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{e^x}\ 1\ \boxed{=}$$

Aparece en la pantalla el número 2.718281828, que podemos redondear como 2.71828 y tomar este último valor como el valor aproximado de **e**. Cuando este número aparece como parte de una función, a ésta se le llama "función exponencial natural", ya que el número **e** aparece de manera natural en muchas investigaciones de fenómenos, principalmente físicos como ya se mencionó, e incluso económicos. En el estudio del cálculo y en sus aplicaciones es en donde más se utiliza este tipo de funciones. Por otra parte, el número **e** es la base de los logaritmos naturales (ver ejercicio donde se aplican estos logaritmos).

- **PROCEDIMIENTO PROPUESTO PARA RESOLVER LA SITUACIÓN:**

En el enunciado tenemos la función con la cual calcularemos lo que se nos pide, para lo cual primero definimos el valor de t para cada inciso; como nuestro punto de partida es el año 2005, entonces $t = 5$ años para el inciso (a) y $t = 10$ años para el inciso (b).

a) Primero representemos nuestra función:

$$N(t) = 5000e^{0.047t}$$

Sustituimos el valor de $t = 5$:

$$N(t) = 5000e^{(0.047)(5)}$$

La interpretación que debemos darle a las operaciones que vamos a ejecutar son las siguientes:

1) El coeficiente 5000 está multiplicando al resto de la expresión.
2) El número e está elevado a una potencia que a su vez es el producto de 0.047 por 5.

Si realizáramos estas operaciones por partes, primero multiplicaríamos 0.047 por 5; el valor resultante sería el exponente de e, al cual lo elevaríamos como segundo paso, y el valor resultante lo multiplicaríamos por 5000. Sin embargo, gracias a la tecnología podemos realizar las operaciones con una calculadora de manera sencilla y rápida siguiendo una secuencia como la que a continuación se sugiere:

5000 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{(}$ .047 $\boxed{\times}$ 5 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

Aparece en la pantalla la cantidad de 6,324.543844. De nuevo debemos interpretar este resultado y ajustarlo a nuestra situación. Como estamos buscando una población de animales, necesitamos redondear a un número entero, para lo cual escogeremos como resultado el número 6325, que es la cantidad de ciertos animales marinos que se espera habrá para el año 2010.

OBSERVACIONES:

1) Como puede verse en la secuencia propuesta, no es necesario indicarle a la calculadora la operación de multiplicación por 5000; en general para la mayoría de las funciones, basta con colocar el número o coeficiente y después la función (por ejemplo e^x, x^3, *log* y otras), ya que la calculadora lo toma como una operación de multiplicación (en otros modelos de calculadora sí es necesario indicar la operación con la tecla de multiplicación).

2) Cuando un exponente es producto de dos o más cantidades, es necesario poner paréntesis en la calculadora para que ésta calcule primero el producto y el resultado lo tome como exponente.

Con el procedimiento y las observaciones indicadas puedes resolver el inciso (b). (Resultado: 8 000 animales marinos).

PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

INTENCIÓN: La intención principal es el uso en la calculadora de las teclas para cálculo de las funciones trigonométricas directas seno, coseno y tangente así como de las funciones trigonométricas inversas: arco seno, arco coseno y arco tangente.

ENUNCIADO: Khalil Gibrán (1883-1931) en su obra literaria llamada "El Loco" escribió la siguiente parábola llamada *La zorra*:

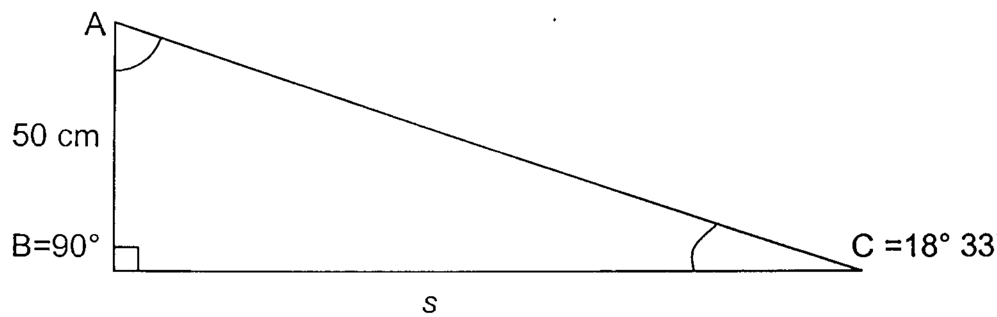
Al amanecer, una zorra miró su sombra, y se dijo:

- *Hoy almorzaré un camello. Y pasó toda la mañana buscando camellos. Pero al mediodía volvió a mirar su sombra, y se dijo:*
- *Bueno... me conformaré con un ratón.*

Imagina que en ese momento una persona que pasaba por ahí sintió curiosidad por conocer la longitud de la sombra de la zorra al amanecer, para lo cual calculó el ángulo de elevación del Sol, que se encontraba a 18° 33' sobre el horizonte, y estimó que la altura de la zorra era de aproximadamente medio metro. ¿En cuánto podríamos estimar lo que medía la sombra de la zorra al amanecer?

PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Analizando el enunciado podemos observar que contamos con dos datos de manera explícita: la altura de la zorra (que consideraremos de 50 cm) y el ángulo de elevación del sol (de 18° 33'). Como dato desconocido tenemos la sombra de la zorra, que denotaremos con la letra *s*. Como información implícita tenemos que la zorra con el suelo forma un ángulo de 90°, por lo que podemos idealizar nuestra situación con una figura como la que se muestra, colocando en ella los datos conocidos así como los desconocidos, y formar un triángulo rectángulo como apoyo para la resolución de nuestra situación:



Para encontrar la longitud de la sombra de la zorra, planteamos una expresión que involucre los catetos de un triángulo rectángulo: ésa es la tangente (cateto opuesto entre cateto adyacente); poniéndole datos queda como sigue:

$$\tan 18°33' = \frac{50}{s}$$

Despejando nuestra incógnita quedaría como sigue:

$$s = \frac{50}{\tan 18°33'}$$

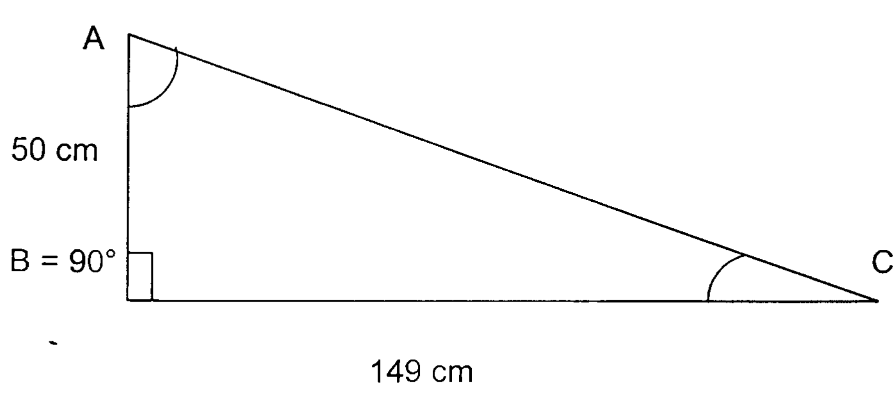
Realizar este cálculo anteriormente se complicaba un poco, pues era necesario transformar el ángulo en grados con decimal (es decir, convertir los minutos, o también los segundos si es que había, en parte decimal de un grado). Ahora, gracias a la tecnología esto no es necesario, pues podemos introducir el ángulo con grados, minutos y segundos utilizando la tecla $\boxed{°'''}$. Por otro lado, el cálculo de las funciones trigonométricas lo realizamos mediante las teclas $\boxed{\text{SIN}}$ (de la palabra inglesa *sinus*) para la función *seno*, $\boxed{\text{COS}}$ para la función *coseno*, $\boxed{\text{TAN}}$ para la función *tangente*. Las tres se manejan de manera similar. Veamos la secuencia sugerida para realizar los cálculos a través de la calculadora:

50 [÷] [TAN] 18 [° ' ''] 33 [° ' ''] [=]

El resultado mostrado es *149.0019998.*

Significa que la sombra de la zorra es de aproximadamente 149 cm, o bien de 1.49 m, aunque bien podríamos concluir que nuestra estimación corresponde a un metro y medio, ya que la altura de la zorra se estimó en medio metro, y al no tener datos exactos nuestros cálculos son muy aproximados. Para fines prácticos esto se considera válido.

Por otro lado, supongamos que queremos conocer la medida del ángulo A de la figura. Como la suma de los dos ángulos agudos es de 90°, una manera de determinarlo es por diferencia de 90° - 18° 33' = 71° 27'. Sin embargo, si no conociéramos el ángulo C de 18° 33' y conociéramos la distancia s = 1.49 m, podríamos calcular el ángulo A planteando ahora la función trigonométrica tangente de otra manera, pero primero pongamos los datos que tenemos ahora en otra figura, como se muestra: enseguida:



Planteamiento de la función trigonométrica tangente para el ángulo A (ahora el cateto opuesto y el cateto adyacente se intercambian por la posición que tienen respecto al ángulo A):

$$\tan A = \frac{149}{50}$$

Realizando la división:

$$\tan A = 2.98$$

Ahora tenemos como incógnita la variable A (el ángulo A); para estos casos se utiliza la función trigonométrica inversa, que para la tangente sería arco tangente, que se puede representar de dos formas:

1) Como arc tan
2) Como $\tan^{-1}$

Usaremos la segunda forma ya que así aparece en las calculadoras, por lo que nuestra expresión quedaría como sigue:

$$A = \tan^{-1}(2.98)$$

Cuyo cálculo lo realizamos con la calculadora utilizando las teclas $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{TAN}^{-1}}$ ya que aparece como segunda función; podemos seguir la secuencia que se sugiere a continuación:

$$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{TAN}^{-1}}\ 2.98\ \boxed{=}$$

Aparece en la pantalla la cantidad 71.44976807, que representa el valor del ángulo A con parte entera y decimales, por lo que reportaríamos el resultado (una vez redondeado) así:

$\underline{A = 71.45°}$

Si queremos reportar el valor en grados y minutos, en la calculadora, sin borrar el dato de la pantalla, presionamos la tecla ya mencionada para efectuar el cambio: $\boxed{\circ\,'\,''}$ y aparece en la pantalla 71° 26° 59.17, mismo que debemos interpretar como 71° 26' 59.17" y si redondeamos los segundos, como casi son 60", le aumentamos uno a los minutos, por lo que podríamos reportar el dato así:

$$\underline{A = 71^\circ\ 27'}$$

Como podemos ver, obtuvimos el mismo resultado.

NOTA: El manejo en la calculadora de las funciones trigonométricas inversas del seno y del coseno es similar al de la función trigonométrica inversa de la tangente ejemplificada en la situación anterior: se usan las teclas $\boxed{SIN^{-1}}$ y $\boxed{COS^{-1}}$ para las funciones inversas del seno y del coseno, respectivamente.

V. REFERENCIAS

Alberro, Anne et al. Calendario Matemático 2003. DISSA Impresores. México

Alberro, Anne et al. Calendario Matemático 2004. DISSA Impresores. México

Arredondo V., J. Carlos. (2001). La Enseñanza de los Números Reales en el Bachillerato. Universidad Autónoma de Querétaro, p. 66-68. México. (Tesis de Maestría).

Cedillo, A. Tenoch E. (1999a). Las Tecnologías de la Información y Comunicación: Una Alternativa Para Cerrar la Brecha Entre la Investigación y la Enseñanza. Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática, p. 118-122, Universidad Pedagógica Nacional, Cd. de México.

Cedillo, A. Tenoch E. (1999b). Potencial de la Calculadora en el Desarrollo del Sentido Numérico. Educación Matemática, Vol. 11, agosto 1999, p. 16-30, México.

Cedillo, A. Tenoch E. (1998). La calculadora en el aula: un reto para el currículum actual. Reportes de Investigación, p. 1-13. [http://sec21.ilce.edu.mx/matematicas/calculadoras/LACALCULADORA.html]. México.

Chevallard et all. (1998). Estudiar Matemáticas: El Eslabón Perdido entre Enseñanza y Aprendizaje. Editorial Horsori/ICE Universitat de Barcelona, p.133, España.

Deulofeu, P. Jordi. (1999). Recreaciones, juegos y actividad matemática. Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas, n. 20, Año 6, Abril 1999, p. 89-101. Barcelona, España.

Fainholc, Beatriz. (2000). La tecnología educativa apropiada y crítica. Contexto Educativo – Revista digital de Educación y Nuevas Tecnologías. Año IV – Número 23, p. 1-5 [http://contexto-educativo.com.ar/]. Argentina.

Flores, Alfinio. (1991). Cuadros mágicos para la multiplicación. Educación Matemática. Vol. 3 – No. 2, Agosto 1991, p. 110-111. México.

Freudenthal, Hans. (1981). Problemas Mayores de la Educación Matemática (Major Problems in Mathematics Education, en Educational Studies in Mathematics, vol. 12, 1981, p. 133-150, Traducción: Alejandro López Yáñez, UNAM), conferencia sustentada en la Sesión Plenaria del ICME 4, en Berkeley, el 10 de agosto de 1980.

Gibrán, Khalil. (2003). El profeta y otras parábolas. Grupo Editorial Tomo, S. A. de C. V. p. 16. México.

Govantes O., Ariel. (2000). Retos y posibilidades que imponen las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones a la educación en los países del tercer mundo. Revista digital de Educación y Nuevas Tecnologías. Año III – Número 16, p. 1-7. [http://contexto-educativo.com.ar/]. Argentina

Hitt, E. Fernando. (1996). Educación Matemática y Uso de Nuevas Tecnologías, Didáctica-Lecturas, p. 24-25, Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Jiménez, R. José R. (1991). Las calculadoras: una defensa necesaria. Educación Matemática, Vol. 3, No. 1, Abril 1991. México

Kilpatrick, Jeremy. (1994). Investigación en Educación Matemática: Su Historia y Algunos Temas de Actualidad, Educación Matemática, p. 11, Universidad de Georgia.

Mercado Martínez Miguel, Sánchez Sánchez Ernesto. (1999). Probabilidad y Simulación con Calculadora Graficadora, Memorias del VII Simposio

Internacional en Educación Matemática, p. 303, Universidad Pedagógica Nacional, Cd. de México.

Moreno Armella, Luis E. (1996). Matemáticas y Educación: Matemática Educativa, Didáctica-Lecturas, p. 56-57, México.

Nolasco, Adrián de la Rosa. (2001). La calculadora como instrumento de mediación. Correo del Maestro, Núm. 56, enero 2001, p. 1-13. [file: http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2001/enero/1anteaula56.htm].

Ontiveros Quiroz, Josefina. (1994). El Fracaso en la Enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato. Universidad Autónoma de Querétaro, p. 15, México.

Perelman, Y. (1988). Álgebra Recreativa. Editorial Paz. Moscú.

Tirapegui, Cecilia. (2000). Juegos para la clase de matemáticas. Uno Revista de Didáctica de las matemáticas, Vol. 12, No. 2, Agosto 2000, p. 121-131. Barcelona, España.

Wenzelburger, Elfriede. (1993). Calculadora Electrónica, Didáctica, p. 1-15, Grupo Editorial Iberoamérica. México.

ANEXO A

EXAMEN DIAGNÓSTICO

NOMBRE ________________________________ FECHA __________

CUESTIONARIO

1. Los profesores de matemáticas de tus cursos anteriores, ¿te motivaban para que utilizaras la calculadora tanto en clase como en los exámenes, o por el contrario, te prohibían su uso?

2. ¿Qué tanto conoces tu calculadora, conoces todas o la mayoría de las funciones que contiene, o conoces sólo un poco de ellas?

3. ¿Has tomado algún curso para aprender a usar la calculadora?

4. ¿Consideras que con la calculadora se te hace más fácil realizar operaciones tediosas y largas, o por el contrario, te complica más las cosas? ¿Por qué?

5. ¿Te ayuda la calculadora a aprender matemáticas? Si la respuesta es sí, ¿cómo?, si la respuesta es no, ¿por qué no?

6. Indica la marca y serie de tu calculadora que estás utilizando actualmente.

EJERCICIOS CON CALCULADORA

1. Vamos a suponer que tienes una calculadora con la tecla del número 9 descompuesta. Si necesitas usarla para multiplicar 8648 × 9, ¿cómo le harías? Anota cada paso para llegar al resultado (qué teclas usaste).

2. Encuentra un número que multiplicado por 53 dé un número entre 870 a 890. Anota los pasos que seguiste para llegar a ese número.

   53 × ____________ = _______________ (entre 870 y 890)

3. Calcula la siguiente expresión. Anota los pasos a seguir.

$$\frac{60}{\sqrt{9^2+6^2}}$$

4. Elabora una tabla con tres valores para cada una de las siguientes expresiones:

   a) $y = x^3$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = 5^x$ d) $y = \log x$

5. Calcula la siguiente expresión. Anota los pasos a seguir.

$$\sqrt{\frac{1}{10{,}240{,}000}}$$

6. Resuelve el siguiente problema: En una distribuidora de café se empacan 4 875 Kg de prodùcto en 29 900 paquetes. ¿Cuántos gramos contiene cada paquete? Anota los pasos que seguiste para llegar al resultado.

7. Ahora explora con tu calculadora. Escoge varios valores para n que sean números enteros positivos.

¿El resultado de $n^3 - n$ es múltiplo de 3?
¿El resultado de $n^5 - n$ es múltiplo de 5?
¿El resultado de $n^7 - n$ es múltiplo de 7?
¿Qué observas?

8. Calcula las siguientes raíces. Describe los pasos que seguiste.

a) $\sqrt[7]{128}$ b) $\sqrt[5]{243}$

9. Calcula la función tangente de las siguientes expresiones. Describe los pasos a seguir en cada caso.

a) tan 30° 45' 10" b) tan (π / 3)

10. La velocidad de la luz es aproximadamente de 2.997925×10^8 m/seg. ¿Qué distancia aproximada en metros recorre un rayo de luz en un año? Anota los pasos a seguir.

11. Con el resultado del problema núm. 10, resuelve el siguiente problema: El diámetro de la Vía Láctea es de 100,000 años luz. ¿Cuántos kilómetros son?

(¡MUCHAS GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN!)