

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Filosofía
Facultad de Ingeniería

Licenciatura en Filosofía
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

UNA APROXIMACIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS

TESIS

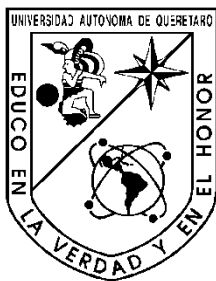
Presentan:

Montserrat Carrillo De León
Carlos Limón Ledesma

Dirigido por:

Dr. José Luis González Carbajal
MSP. Esperanza Trenado Sánchez

Querétaro, Qro.
México
2015



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Filosofía
Facultad de Ingeniería

Licenciatura en Filosofía
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

UNA APROXIMACIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS
TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Licenciada en Filosofía
y
Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presentan:

| | | |
|------------------------|-----------------------------|------------|
| Facultad de Filosofía | Montserrat Carrillo De León | Exp 151924 |
| Facultad de Ingeniería | Carlos Limón Ledesma | Exp 152666 |

Dirigido por:

| | |
|------------------------|---------------------------------|
| Facultad de Filosofía | Dr. José Luis González Carbajal |
| Facultad de Ingeniería | MSP. Esperanza Trenado Sánchez |

SINODALES

Dr. José Luis González Carbajal

Firma

MSP. Esperanza Trenado Sánchez

Firma

Dr. Eduardo González de Luna

Firma

Dr. Eric Moreno Quintero

Firma

MC. Víctor Antonio Aguilar Arteaga

Firma

RESUMEN

En el presente escrito, el lector podrá encontrar una presentación sencilla y precisa de los fundamentos de la teoría de juegos. El trabajo se llevó a cabo a partir de dos vertientes del conocimiento, un enfoque filosófico y una perspectiva matemática; la convergencia surge con el fin de explicar con formalidad, al tiempo que se exponen los problemas que la teoría encuentra en sus formulaciones y aplicaciones.

En el transcurso del texto se pueden distinguir, a grosso modo, tres partes: la primera a modo de bagaje expositivo sobre los temas suficientes para proceder a la segunda parte, que contiene la constitución de la teoría de juegos per se, con sus conceptos, clasificaciones y axiomas; para concluir en una última parte, en donde se exponen algunos de los resultados de la teoría de juegos y se propone un modelo de consideración del riesgo, e igualmente se discuten los problemas prácticos y teóricos de la teoría de juegos a partir del análisis axiomático.

La primera parte servirá de contexto previo al lector, la explicación de las matemáticas necesarias para entender las formulaciones más complejas de la teoría de juegos, y las teorías anteriores de las que se vale para establecer sus propios axiomas y presupuestos. También se encontrará un capítulo en el que se estudiará qué son los axiomas, cómo se relacionan con las teorías y qué son las teorías en general y cómo estas difieren con respecto a las teorías axiomatizadas.

Dentro de la segunda parte se hallará la definición de los conceptos fundamentales de la teoría de juegos, para con ello hacer una precisa distinción entre todos los componentes de un juego. Además, una vez claros los elementos de los juegos, se explican las diferentes clasificaciones de los mismos y la importancia de su distinción. Por último, una formulación axiomatizada de la teoría de los juegos y algunas formas de representación de los mismos se exponen.

Para concluir, en la tercera parte se exponen los primeros resultados que surgen de la teoría, lo que incluye una breve y superficial explicación de las estrategias mixtas y el teorema del equilibrio generalizado de Nash; así como una discusión de la teoría de juegos en su papel de teoría axiomática y la exposición de un modelo sencillo para la consideración del riesgo en la toma de decisiones.

El trabajo finaliza con la presentación de las conclusiones que se obtuvieron al realizar esta investigación, que exhibe una teoría tan compleja y aplicable como lo es la teoría de juegos.

ABSTRACT

In the present paper the reader will find a simple and precise presentation of the foundations of game theory. The work takes place under two different aspects of knowledge, a philosophical approach and a mathematical perspective; the confluence comes with the purpose of explaining in a formal manner, and yet exposing the problems that the theory meets in its formulations and applications.

Throughout the writing it is discernible, roughly, three different parts: the first one as the background knowledge about the sufficient themes to proceed to the second part, which contains the constitution of game theory per se, with its concepts, classifications and axioms; all to conclude with the third part, in where the results of game theory are presented and a risk consideration model is proposed; moreover, the theoretical and practical problems in game theory are discussed from the axiomatic analysis.

The first part will function as context to the reader, the explanation of the mathematics that are needed in order to understand the further complicated formulas of game theory, and the previous theories that are employed to establish its own axioms and assumptions. In addition, a chapter is included in where the axioms are studied, the way they relate with the theories, what the theories are in general, and how this lasts differ from the axiomatic theories.

In the second part the definition of fundamental concepts of game theory takes place to make a precise distinction between all the elements of a game. Also, once the elements of games are clear, the various classifications of this are made, like the importance of these distinctions. Finally, an axiomatic formulation of game theory and some forms or representations of games are described.

To terminate, in the third part the results of the theory are shown, which includes a brief and superficial explanation of mixed strategies and the strong Nash equilibrium; whereas a discussion about game theory in its characterization as a axiomatic theory is made, and a model of risk consideration at a decision point is displayed.

The essay ends with the presentation of the conclusions obtained during the development of the investigation, in which is exhibited a complex, and yet applicable theory as game theory is.

A mi mejor amigo, quien coincide nuevamente en mi camino y quien
espero recorra éste conmigo.

MCDL

A un sentimiento oprimido por la consistencia y
otro que pretende dominar tal consistencia.

A mi compañera y a mi familia.

Calileus.

AGRADECIMIENTOS

En primera instancia, reconozco el esfuerzo de cada uno de los profesores que de una u otra manera colaboraron en mi formación a lo largo de mis años como estudiante. Cada uno de los cuales aportó una porción de su conocimiento y experiencias a mi propio haber.

Encarecidamente le agradezco al Doctor José Luis González, quien se embarcó con nosotros en este proyecto, de suyo tan particular, tanto en circunstancia como en el contenido mismo. Sin su ayuda y apoyo hubiéramos tenido no pocas dificultades.

Así mismo, a nuestros sinodales, la Maestra Esperanza Trenado, el Doctor Eduardo González, el Doctor Eric Moreno y el Maestro Víctor A. Aguilar, por haberse tomado el tiempo de revisar a conciencia aquello que justifica todo el trabajo estudiantil.

A mi familia que, aun con reservas, supo hacer que mis esfuerzos no se sintieran fútiles. Incluyendo aquí a algunos amigos como Karla, Ángel, Lalo, Diana, Alfonso, entre otros de la preparatoria y compañeros de la universidad. Las entretenidas pláticas con ellos me ofrecieron más de lo pensé.

Por sobre todo, agradezco las interminables discusiones con el coautor de esta obra, las cuales aportaron pruebas fehacientes de que aquello que había leído significaba algo. A él le agradezco su paciencia y ayuda, sus palabras que en todo momento lograron reanimarme y recordarme el por qué hacía lo que hacía. Espero que nuevas colaboraciones surjan entre nosotros y que nuestras conversaciones de todo continúen siendo tan asiduas y amenas como hasta ahora.

MONSERRAT CARRILLO DE LEÓN

Antes que nadie agradezco a mi compañera co-tesista por soportar el tedio, realizar el esfuerzo y sacrificar el tiempo que implicó la elaboración del presente trabajo. A nuestros directores y sinodales que se tomaron el tiempo de revisar minuciosamente una y otra vez todo nuestro texto, gracias a ellos se encontraron y corrigieron una gran cantidad de errores, muchos de ortografía, algunos de contenido.

Es importante agradecer y recalcar el apoyo económico de mi madre, sin el cual me hubiera resultado imposible estudiar durante tantos años, 17 años seguidos desde los 5 hasta los 22 todos los niveles de estudio, para concluir llevando a cabo este texto.

Agradezco también a los maestros que aportaron en mi formación, desde la primaria hasta la universidad. Siendo particularmente influyentes para mi los maestros de la universidad que me introdujeron y condujeron en las álgebras, las geometrías, análisis, funcional y las líneas terminales.

Por último, pero no menos importante agradecer a mis amigos de la secundaria, que hacen la vida mucho más divertida. Amigos de la prepa, que significan mucho para mi. Y a los compañeros que sufrieron y disfrutaron conmigo los exámenes maratónicos, los problemas irresolubles, las tareas interminables y los temas incomprensibles; todo lo que al final nos brindo las bases para ser excelentes matemáticos. También de la carrera los amigos con los que paso horas y horas, por los que aprendí algo del ajedrez, además de las aplicaciones de la economía y programación implicadas en el age o cualquier otro juego.

CARLOS LIMÓN LEDESMA

Calileus.

INDICE

| | Página |
|--|---------------|
| * Resumen | iii |
| * Abstract | iv |
| * Dedicatorias | v |
| * Agradecimientos | vi |
| * Índice | viii |
| I. INTRODUCCIÓN | 11 |
| I.1 ¿Qué no es la Teoría de Juegos? | 14 |
| I.2 ¿Qué hace esta teoría? | 16 |
| I.3 El Conflicto de Intereses | 19 |
| II. METODOLOGÍA | 21 |
| II.1 Diseño de Investigación | 22 |
| II.2 Técnicas de Análisis de Información | 23 |
| III. MARCO TEÓRICO | 25 |
| III.1 Lógica y Conjuntos | 25 |
| III.2 Relaciones Binarias y sus Propiedades Especiales | 41 |
| III.3 Clases de Equivalencia | 45 |
| III.4 Funciones | 48 |
| III.5 Relaciones de Orden | 54 |
| III.6 Probabilidad y Estadística | 56 |
| IV. TEORÍAS AXIOMATIZADAS | 70 |

| | |
|---|-----|
| V. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE JUEGOS | 81 |
| V.1 El Juego, los Jugadores y los Resultados. | 81 |
| V.2 Las Preferencias y la Utilidad | 83 |
| V.2.1 Relación de Orden de las Preferencias | 85 |
| V.2.2 Ordenamiento de Resultados por Preferencias | 87 |
| V.2.3 La Función de Utilidad | 88 |
| V.3 El principio de racionalidad | 90 |
| V.4 Las Estrategias | 92 |
| V.4.1 Estrategias Dominadas y Dominantes | 96 |
| V.4.2 Equilibrio de Nash | 97 |
| VI. CLASIFICACIONES Y TIPOS DE JUEGOS | 101 |
| VI.1 Por Información | 101 |
| VI.1.1 Información Cierta o Incierta | 102 |
| VI.1.2 Información Completa o Incompleta | 103 |
| VI.1.3 Información Perfecta o Imperfecta | 103 |
| VI.2 Por Probabilidad | 105 |
| VI.2.1 Con Certeza, Riesgo o Incertidumbre | 106 |
| VI.3 Por Número de Jugadores | 111 |
| VI.3.1 El Azar como Jugador | 112 |
| VI.4 Cooperativos y no Cooperativos | 113 |
| VI.5 Suma Cero | 115 |
| VI.6 Simultáneos o Secuenciales | 118 |
| VII. LA TEORÍA DE JUEGOS | 120 |
| VII.1 Caracterización de la Teoría de Juegos | 120 |
| VII.2 Formas de Representar un Juego | 124 |

| | |
|--|-----|
| VII.2.1 Forma Normal | 124 |
| VII.2.2 Forma Extensiva | 129 |
| VII.3 Solución de un Juego | 136 |
| VII.3.1 Por eliminación de estrategias dominadas | 137 |
| VII.3.2 Inducción hacia atrás | 144 |
| VIII. PRIMEROS RESULTADOS | 153 |
| VIII.1 Soluciones por Estrategias Mixtas | 154 |
| IX. RESULTADOS Y DISCUSIÓN | 156 |
| IX.1 Análisis de la Teoría como Sistema Axiomático | 156 |
| IX.2 Un Modelo Matemático de Consideración de Riesgo | 165 |
| X. CONCLUSIONES | 171 |
| XI. LITERATURA CITADA | 177 |

I. INTRODUCCIÓN

Deben notar que, en algún sentido, toda la ciencia, todo el pensamiento humano es una forma de juego. El pensamiento abstracto es la neotenia del intelecto, mediante la cual el hombre es capaz de llevar a cabo actividades que no tienen una finalidad inmediata (otros animales solo juegan mientras son jóvenes) para prepararse para estrategias y planes a largo plazo. [Bronowski, 1973: 432]

Los estudios que sustentan a la teoría de juegos existen a partir de la teoría ideada por John von Neumann alrededor de 1928 [Luce, D. y Raiffa, H., 1985: 2], y quizá anteriormente expresado tácitamente por Borel en 1921 [Myerson, R., 1991: 1] y por Zermelo en 1913 [Schwalbe, U. y Walker, P. (1997)]. El estudio formalizado de los juegos no se constituyó como una teoría matemática separada de la probabilidad sino hasta el siglo pasado.

Evidentemente, se trata de una teoría matemática muy reciente y que por ello las referencias y estudios sistemáticos aún no se han agotado. Por lo que el eje rector del escrito; primariamente, será el de un acotamiento y caracterización acerca de la teoría de juegos. De ahí que en el título se hace manifiesto el carácter que conformará al trabajo: se trata de un acercamiento “exterior”, donde se permita ver los límites de la estructura que conforma a la teoría de juegos, y a su vez abordar sus axiomas y requerimientos metodológicos internos que la configuran matemáticamente.

A lo largo del presente trabajo se encontraran nociones básicas, fórmulas matemáticas que exigirán una fundamentación sólida, cuestiones filosóficas acerca de estos fundamentos, y problemas que surgen a partir de una teoría aplicable a diversas disciplinas y ramas del conocimiento. Así mismo, la compaginación de la teoría tendrá su muy particular punto de vista, confluyendo términos e ideas de ambas que le harán notar nuevos problemas y soluciones a

las varias cuestiones que se le puedan presentar a la teoría de juegos dado el contexto filosófico-matemático.

La exigencia de una metodología tal que ambas disciplinas encuentren puntos de intersección y que, de igual forma tengan la capacidad de abordar sus inherentes problemáticas y “resultados”, será la primera tarea. De tal suerte que de inicio se presentará la forma de trabajar, el abordaje de la teoría y lo que se espera obtener de la investigación.

Así mismo, dada la naturaleza de la tesis a presentar, la principal cuestión será la presentación de la teoría de juegos de manera axiomatizada; por lo que la explicación de lo que constituye la axiomatización de una teoría, lo que es propiamente una teoría y aquello que la hace diferente de una teoría axiomatizada dará inicio a lo que propiamente será el cuerpo del escrito. La presentación de aquellos conceptos básicos, para la comprensión de los axiomas de la teoría de juegos constituirá un punto referencial, sin ser propiamente el objetivo, sino un requisito indispensable para adentrarse a las definiciones relativas a la teoría de juegos.

La presentación axiomatizada de la teoría de juegos vendrá a cuento después de que se haya presentado un bosquejo de la misma, algunos conceptos fundamentales de la teoría propiamente, así como las clasificaciones que le darán real dimensión y mostrarán algunas complejidades de la teoría.

Los juegos pueden clasificarse de muchas formas, basándose en distintas características de los mismos, las cuales se convierten en supuestos para el análisis de ese particular tipo de juego; dichas características son muy importantes en el desarrollo de métodos de solución del juego y en la formulación de estrategias.

La axiomatización de la teoría de juegos si bien no supondrá la parte más extensa del trabajo, sí la más substancial y compleja. La presentación clara y concisa de aquellos axiomas de los cuales parte una teoría formal es una tarea que requiere, como se verá en IV. TEORÍAS AXIOMATIZADAS, la implementación

de un lenguaje formal, además de varias definiciones que distingan conceptos aparentemente iguales, entre otras cosas.

Esta presentación de la teoría de juegos desde sus axiomas permitirá la demostración de algunos de los teoremas, decidir si algunos de estos axiomas son deducibles unos de otros, en cuyo caso no serán considerados axiomas, o si algunos de sus conocidos corolarios son deducibles o no. Por lo que también se buscará dar una introducción a las “técnicas de solución” más comunes en la teoría de juegos, tal como la “inducción hacia atrás”; y se hará mención de la definición del equilibrio de Nash como resultados importantes de la teoría de juegos.

El planteamiento desde la filosofía permitirá a la investigación sobre la teoría de juegos no limitarse a la formalización de la misma, abordando también la revisión de su relevancia como teoría que pretende, en cierta medida, ser aplicada a situaciones concretas, además de discutir algunos problemas que vienen con la formalización de una teoría, o con la aplicación de ésta a algunos campos prácticos, etc. Confrontando aquellos axiomas con las situaciones que lo demandaron, con contrasentidos o situaciones contrafácticas¹.

El enfoque que se le dará a este trabajo, será radicalmente nuevo, en tanto que se trata de una colaboración de dos disciplinas para intentar explicar, cada una dentro de sus propias metodologías y perspectivas, los conflictos de interés entre individuos con ciertas características. Para ello se recurrirá a ejemplos en contextos ya sean dados por la economía, por la ética o alguna otra rama en la que el conflicto de intereses tenga cabida.

Así, la pretensión del trabajo será dar un enfoque tanto matemático como filosófico ya que la teoría de juegos lo permite, dando los parámetros propios de cada disciplina. Los conocimientos matemáticos requeridos previamente serán

¹ Sobre esta noción se abundará en el apartado X.1 Análisis de la Teoría como Sistema Axiomático, ahora baste mencionar que el concepto de “contrafáctico” aquí utilizado hace referencia a una situación en la que la teoría hace ciertas suposiciones que llegan a ser una idealización, y que por lo mismo, no responden al fenómeno a explicar o en el que esta se basa.

expresados considerando lo anterior, así mismo el análisis filosófico aportará una revisión sólida, esquemática y sencilla de los problemas sobre los presupuestos epistemológicos de la teoría de juegos.

Se analizará el trabajo descriptivo previo de la teoría de juegos, revisando estos presupuestos que pretenden hacer posible la teoría de juegos, y los axiomas bajo los cuales se rige el modelo teórico. Haciendo la reflexión del por qué de estos supuestos y en qué circunstancias estos permiten —o no— la aplicación de la teoría.

La intención es que, además de hacer la descripción de la teoría de juegos, estos presupuestos (que podrían resultar un tanto confusos, triviales e inclusive problemáticos para el desarrollo de la teoría) se justifiquen a través de una inquisición minuciosa desde la filosofía de la ciencia.

En torno al título de la tesis, la forma en que usualmente se aproximan valores en las matemáticas es acotando el entorno de valores que puede tomar la variable; eso es lo que se procurará en este trabajo, empezando por delimitar lo que debe y lo que no debe ser considerado teoría de juegos, siguiendo por determinar el conjunto de los juegos de los que se está tratando mediante definiciones y clasificaciones.

I.1 ¿Qué no es la Teoría de Juegos?

El sugerente título de “teoría de juegos” a veces subestima la enorme variedad o aplicabilidad de la que esta teoría matemática goza. Cuando nombramos la palabra “juego” automáticamente se piensa en juegos de mesa lo cual no es del todo errado.

En efecto, la teoría de juegos sí habla acerca de los “juegos de niños”, de los juegos de mesa que juegan los adultos y otras actividades que pueden ser

definidas como un *juego*, como lo hace la teoría de juegos, pero no solo sobre ellos pues se trata de una abstracción acerca de lo que todos los juegos comparten: el conflicto de intereses entre seres racionales que buscan prevalecer de alguna manera, tal como señala Roger Myerson.

La teoría de juegos puede ser definida como el estudio de los modelos matemáticos de los conflictos y la cooperación entre agentes racionales e inteligentes que toman decisiones. La teoría de juegos provee de técnicas matemáticas generales para analizar situaciones en la que dos individuos toman decisiones que influirán en el bienestar del otro. [1991: 1]

Evidentemente, los juegos de mesa entran en esta improvisada y resumida definición, pero la teoría de juegos engloba más que esto. Dentro de esta tesis —la que sostiene la teoría de juegos— se pueden encontrar conflictos armados, tácticas económicas, problemas éticos, hasta estrategias para ganar partidas de póker.

La teoría de juegos ha sido ampliamente utilizada en economía, pero esto no quiere decir que se reduzca a ella y aunque su estudio se ha visto forzado a permanecer dentro de esta perspectiva, debe entenderse que antes que formar parte de una rama del estudio económico, forma parte de una teoría que se sustenta por sí misma en la matemática.

Así mismo es necesario aclarar que, al “usar” parte de la teoría de la decisión, no se trata de una psicología de ninguna clase, y a pesar de que quizá a veces la psicología puede ser usada de alguna manera para obtener una ventaja en algún juego esto no implica que se trate de una teoría psicológica. La teoría de juegos y la teoría de la decisión comparten este rasgo de decisión racional, pero en la teoría de juegos esto representa una minúscula parte, como se verá a continuación.

I.2 ¿Qué hace esta teoría?

Supóngase el siguiente ejemplo hipotético; el cual es una presentación simplificada y, por ende, sencilla de un problema de interés práctico.

Existen dos productores de maíz en la región, y que los compradores son cien individuos divididos entre ambos repartidos igualmente: 50 y 50. Ambos productores venden a \$15 cada mazorca teniendo cada uno una ganancia de \$750. Si uno decidiera bajar el precio a \$10, su número de clientes incrementaría² —hipotéticamente— de un 50 al 80% del total de ellos, dejando a la competencia con un 20% y al primero con una ganancia de \$800; aplicando igualmente si fuera la competencia la que decidiera bajar el precio. Si ambos decidieran bajar el precio a \$10 ambos regresarían a la condición inicial en donde se reparten 50 y 50 los compradores, aunque la ganancia sería de \$500 y no de \$750. ¿Qué estrategia se debería seguir para obtener mayor beneficio?

El ejemplo anterior remite al paradigmático y fundamental problema de la teoría de juegos llamado el *dilema del prisionero* y reza de la siguiente manera:

Existen dos individuos en iguales condiciones que han sido arrestados por su presunta participación en algún crimen, del cual no se tienen pruebas suficientes para inculpar a ninguno de los dos. Ambos son separados e interrogados por la policía para extraerles una confesión que los condene, de modo que se les dan las siguientes opciones a los dos: Si el primero inculpa a su compañero y él se mantiene callado, entonces el primero sale libre y el segundo purgará una condena por 9 años. Si ambos se delatan, ambos son condenados y servirán una condena por 6 años cada uno; pero si ninguno delata al otro, entonces solo permanecen 3 años en prisión.

² Por la ley de oferta y demanda, los compradores preferirían el producto a menor precio.

De tal suerte que la teoría de juegos, considerada junto con la teoría de la decisión, no carece de posibles aplicaciones, pues en la vida diaria nos enfrentamos a problemas que exigen de nosotros una decisión, en donde generalmente tenemos que considerar nuestras posibilidades y expectativas, y de entre ellas elegir la que *maximice racionalmente nuestra utilidad o beneficio*. El conflicto entre las preferencias de los diversos agentes siempre está presente, por lo que no es raro que la teoría de juegos pueda ser aplicada desde términos económicos, hasta la sociología o la política e inclusive la biología³.

A simple vista el anterior ejemplo podría suponerse como eso, un ejemplo un tanto confeccionado para ilustrar algo que usualmente no sucede — ¿pues qué buen policía le diría a estos presuntos culpables la tercera opción en donde nadie se delata? — o que sucede con poca frecuencia; sin embargo, un factor de cooperación —como un abogado en común— o la información disponible para ellos —los antecedentes de ambos— cambia las consideraciones y lo hace más cercano a la realidad. No por nada se ha remitido a él desde el surgimiento de la teoría de juegos. En él vislumbramos lo que teoría de juegos trata: la forma de elegir y realizar una serie de jugadas que nos lleven a ganar.

Pero siguiendo con el problema fundamental de la teoría de juegos sobre el problema de la toma de decisiones, dado a través del dilema del prisionero, subyace un punto importante de lo que es la teoría de juegos propiamente; a saber, el considerar al oponente en nuestro intento por formular una estrategia — una sucesión de elecciones previamente analizadas— ganadora.

En teoría de juegos se entra a esta estructura de la decisión racional que maximice la ganancia o utilidad o que, en su defecto, minimice la pérdida. De ahí que la teoría de juegos utilice en parte la teoría de la decisión, pues se considera que el sujeto puede tomar decisiones *racionales* dentro de sus posibilidades. Una teoría de la decisión quizá prescriptiva y no descriptiva, en tanto que señala el

³ Para mayores referencias acerca de la influencia de la teoría de juegos en biología se recomienda al lector que vea las estrategias evolutivamente estables en J. Maynard Smith y G. R. Price. (1973) *The Logic of Animal Conflict*. Nature no.246, pp.15 - 18

cómo se debe de comportar el sujeto en determinadas condiciones. Condiciones tales como la información que está disponible o la probabilidad de que algunos casos sucedan.

La teoría de juegos y la teoría de la decisión comparten, en cierto sentido, el concepto de la racionalidad puesto que ambas evalúan “la racionalidad de las decisiones en función de las preferencias sobre los resultados y las creencias acerca de la probabilidad de que estos resultados aparezcan.”[Grüne-Yanoff, T.] .Aunque la diferencia entre estas dos radica en que la teoría de juegos, a diferencia de la teoría de la decisión, considera las estrategias de los oponentes, así como la probabilidad para lograr el resultado.

Dentro de la ecuación de la decisión en la teoría de juegos también se encuentra el intento del jugador por descifrar la estrategia de sus oponentes y no sólo considera las reglas dadas por defecto. La teoría de juegos presupone esta interacción e intervención de cada uno de los jugadores en el posible resultado; los resultados se escriben a través de estas interacciones y no son producto de lo dado, sino de la intervención de los agentes y la formulación de estrategias a partir del conflicto por ganarle al contrario. [Cfr. Loc. Cit.]

El dilema del prisionero esclarece este punto en tanto que cada uno de los prisioneros debe considerar al otro para así poder generar una buena estrategia, si no considera a su compañero el resultado será una doble condena.

La teoría de juegos se basa en lineamientos que le dan su carácter normativo; es decir, los supuestos de la teoría de juegos no tratan de cómo se comportan los sujetos en un juego, sino del cómo deberían de comportarse dadas ciertas circunstancias.

Por lo que propiamente hablando la teoría de juegos no es una rama de la teoría de la decisión, y aunque ésta última sea considerada en un momento dentro de la teoría de juegos, no constituye más que una etapa primaria. La teoría de juegos está más orientada a las aplicaciones sin estar en un nivel experimental, en el sentido de que se preocupa por lo que pasa una vez que se asumen el orden de

las preferencias y la estructura del juego, y no tanto en este periodo en el que se deben de tomar decisiones.

Una vez que las preferencias han sido ordenadas y ya con las reglas internas del juego dadas, es cuando se puede decir que la teoría de juegos adquiere su real importancia, pues se trata de que, a partir de lo anterior y con la plena conciencia de la existencia del oponente, se pueda “predecir” y/o maximizar los resultados por medio de la creación de una estrategia.

Siendo la formulación de una (buena) estrategia el punto que caracteriza la teoría, aunque dentro de la teoría de juegos convergen algunas partes de otras teorías, ya sea la teoría de las decisiones, el uso de la función de utilidad, o la probabilidad o la estadística, sin que por ello la teoría de juegos pueda definirse como parte de ninguna de estas.

I.3 El Conflicto de Intereses

Un individuo está en una situación de la cual dará lugar uno de varios resultados posibles y respecto a los cuales tiene ciertas preferencias personales. Sin embargo, a pesar de que puede tener un cierto control sobre las variables que determinan el resultado, no tiene el control total. A veces esto se encuentra en manos de varios individuos que, como él, tienen preferencias entre los posibles resultados, pero que en general no coinciden en sus preferencias. [Luce, D. y Raiffa, H.,1985: 1]

Resumiendo, nos encontramos ante un conflicto de intereses cuando sabemos que solo uno de los varios posibles escenarios sucederá y que, aunque se tenga una preferencia definida acerca del resultado, el control sobre él es limitado. Inclusive sobre este resultado también influyen otros individuos, con preferencias que, en general, son contrarias. Si los jugadores tienen el mismo patrón de preferencia sobre el resultado, entonces el conflicto no existe; resulta

trivial puesto que los jugadores prefieren el mismo posible resultado por encima de los demás.

Siendo de esta manera que la teoría de juegos es una forma modelada de los conflictos, de estas interacciones entre los agentes que luchan por obtener el resultado que los beneficie; ya sean en juegos literalmente hablando, como el ajedrez o el go, o escenarios de la vida cotidiana como la economía o la elaboración de estrategias militares, entre muchas otras cosas.

Como en toda teoría las presuposiciones y condiciones a las que se está sujeto están siempre ahí, y la teoría de juegos no es la excepción. Las presuposiciones son tan controversiales como importantes, de ahí que nos detendremos en estas consideraciones posteriormente, cuando las condiciones bajo las cuales la teoría de juegos se rige sean adecuadamente aclaradas en un nivel interno y conceptual.

La confrontación de la teoría de juegos con algunos ejemplos presentará en buena medida la participación de ambas ramas en una especie de “aplicación de conceptos”, *i.e.*, el manejo de los fundamentos matemáticos en un ejemplo “cotidiano”, que se enfrenta a una situación *real*, y que por lo mismo demanda ser considerada en un contexto, en una circunstancia sin agentes ni condiciones idealizados.

II. METODOLOGÍA

Se llevará a cabo una investigación exploratoria con un enfoque descriptivo y explicativo, con intenciones de divulgación mediante un planteamiento formal auto-contenido que aclare y facilite el estudio de la teoría de juegos. Siendo el único requisito para su estudio, el entendimiento del lenguaje utilizado, formal e informal.

Evidentemente, realizar un trabajo de esta naturaleza requiere una revisión de antecedentes teóricos mayor, pues se trata de un trabajo interdisciplinario que considera loable un diálogo entre ambas ramas; esto supone una brecha de conocimiento que deberá ser subsanada en ambas direcciones. Debido a ello, se tiene el objetivo de hacer un trabajo auto contenido; no dando por hecho conocimientos específicos de alguna área.

Encontrar un punto en común de donde partir es el primer problema que será abordado mediante las substanciales introducciones y explicaciones, que podrán parecer omisibles en una disciplina, pero no en la otra, para la construcción y desarrollo formal de la teoría de juegos.

Se tiene la intención de que sea un texto accesible para todo aquel que esté interesado en la teoría de juegos y, aún sin conocimiento previo de la misma, pueda adquirir algún entendimiento de las ideas aquí presentadas.

El principal problema al que se enfrenta cuando se habla acerca de la teoría de juegos es el de la perspectiva. Es decir, mucho se ha dicho acerca de esta rama desde varios enfoques prácticos, que le confieren a esta teoría matemática, un estudio orientado en su aplicación específica.

Evidentemente estos matices prácticos no son la teoría de juegos propiamente; por lo cual, inicialmente el desarrollo del trabajo será una suerte de

examen descriptivo. Es decir, se considerará a la teoría en su totalidad, abrevando en los diversos contenidos internos de la teoría y sus definiciones básicas, para dar una perspectiva más amplia acerca de qué versa propiamente la teoría de juegos, sus inherentes temas y clasificaciones. Todo esto como conocimientos básicos del tema que resulten en una referencia simple de la descripción de la teoría de juegos.

II.1 Diseño de Investigación

Básicamente, se abordará la teoría de juegos desde dos perspectivas, la parte formativa matemática y la parte argumentativa filosófica. Es decir, que mientras que la matemática aportará los axiomas que permiten construir la teoría de juegos, la filosofía escudriñará los problemas acerca de los inherentes presupuestos que configuran la teoría, a fin de dictaminar si es posible sortear las problemáticas del nexo teórico-práctico que envuelve a las teorías científicas.

La revisión de la literatura primaria será el bagaje matemático, que es evidentemente necesario para comprender la teoría de juegos, mientras que el análisis filosófico, y con ello la literatura requerida, se irán aportando conforme vaya siendo necesario en la investigación.

Con esto no se quiere insinuar que el examen filosófico de los presupuestos teóricos matemáticos no sea importante, pero su revisión y exposición serán más útiles si son explicados al momento de ser analizados, ya que el lector que ya ha sido debidamente enterado de la teoría de juegos encontrará los cuestionamientos filosóficos pertinentes y, de alguna manera, necesarios.

Por lo mismo, se hará uso de conceptos de ambas áreas en el desarrollo de las definiciones, conclusiones y explicaciones. Valga la pena esclarecer que no se buscará hacer una diferenciación entre las áreas, pues ambas disciplinas

complementan los temas y ofrecen al lector una perspectiva más amplia y acabada de la misma.

Se realizará la presentación formalizada de la idea de juego y las partes que lo componen, las características que permiten clasificarlos y propiedades especiales. Así como, la descripción y ejemplificación de las clasificaciones de los juegos: por información, jugadores, cooperativos, secuenciales o simultáneos, y la influencia del azar.

II.2 Técnicas de Análisis de Información

El primer capítulo se dedicará a mencionar y explicar temas matemáticos, con apoyo en bibliografía clásica; se explicará en términos coloquiales lo que las definiciones formales representan, con la intención de que esto facilite el entendimiento del trabajo. Y con ello dejar en manifiesto las teorías fundamentales de las que se vale la teoría de juegos, para llegar a la abstracción de lo que es un juego y los elementos que lo constituyen; así como las características más importantes de los mismos. Determinar y distinguir los axiomas necesarios y los supuestos convenientes es un problema teórico importante.

El trabajo incluye una introducción a temas fundamentales de la matemática, con la intención de prevenir el uso de conceptos no explicados o referenciados en el trabajo. Dichos temas incluyen, pero no se limitan a: Teoría de Conjuntos, Relaciones, Funciones, Probabilidad y Estadística. Las cuales servirán como antecedente teórico para la Teoría de Juegos.

Las cuestiones filosóficas del trabajo serán abordadas y explicadas conforme se vayan construyendo algunas nociones de la teoría de juegos, pues presentarlas de forma aislada no facilitaría la apreciación de su relevancia en la teoría misma; es decir, la filosofía de la ciencia confrontará aquellos conceptos tomados como necesarios para la construcción de teorías, y en particular la teoría

de juegos; con los problemas que le son relevantes a la filosofía, tales como el presupuesto de la racionalidad, los problemas de las perspectivas sobre el azar y sus diferentes niveles, la correspondencia entre la teoría y la realidad, entre otros.

Los presupuestos bajo los cuales se sustenta la teoría de juegos serán uno de los objetos de estudio y escrutinio filosófico en tanto que son las condiciones dadas, pero que no pueden ser analizados desde la teoría misma.

Se presentará una referencia introductoria a la teoría de juegos, sin limitarse a una mera exposición, pues consideraremos los lineamientos que la estructuran en un sistema axiomático para, a partir de ellos, manejar y cuestionar la validez e implicaciones de los mismos.

III. MARCO TEÓRICO

Los temas que se explicarán pueden no ser parte de la formación en diversas áreas, pero sí son elementales para lograr explicar la teoría de juegos, por lo que será indispensable tener una idea clara de los siguientes temas que servirán de fundamentos en la teoría de juegos.

Advirtiendo que las explicaciones aquí dadas no serán completas, pues cada uno de estos temas es por sí sola una rama con sus propios problemas y sus inherentes reglas. El alcance y la amplitud de las mismas no es nuestro objeto, de ahí que la profundidad solo sea en tanto le es útil a la teoría de juegos.

III.1 Lógica y Conjuntos

La lógica y la teoría de conjuntos tienen una relación muy estrecha y es posible que sean inseparables; la construcción de una requiere de la construcción de la otra y viceversa. Es decir que, para que la lógica exista se necesita de la teoría de conjuntos y, a su vez, la teoría de conjuntos⁴ necesita de la lógica. Este vínculo podrá aclararse o difuminarse al empezar a conocer en qué constan la lógica y la teoría de conjuntos, sin embargo explicar primeramente la lógica resulta más familiar e intuitiva por lo que iniciaremos con esta.

Al hablar de la lógica nos referiremos a las lógicas formales de menor orden, en especial de la lógica proposicional y la lógica de primer orden, dejando de lado su desarrollo histórico.

⁴ La Teoría de Conjuntos se construye usualmente mediante los axiomas de Zermelo-Fraenkel comúnmente abreviados ZF. Unidos al axioma de elección constituyen los axiomas más utilizados en la fundamentación de dicha teoría.

La *lógica proposicional*, como su nombre lo indica, trata con *proposiciones*. Una proposición se definirá como un objeto que cuenta con la característica de poder ser Verdadero o Falso. A esta característica le llamaremos *valor de verdad*.

Cuando se trata de una *proposición atómica*⁵, su valor de verdad no depende (en principio) del valor de verdad de ninguna otra proposición. Mientras que si se trata de una *proposición molecular*⁶ se le asigna un valor de verdad dependiendo tanto del valor de verdad de los componentes atómicos como de los *conectivos* involucrados. Los conectivos binarios enlazan dos proposiciones y toman un valor de verdad dependiendo de los valores de éstas.

Entonces, la lógica proposicional trabajará con objetos que pueden tener valor de verdad y con conectivos que permitirán la combinación de dichos objetos en *fórmulas*, que al estar bien formadas tendrán valor de verdad que a su vez dependerá de los valores de verdad de las proposiciones que las componen.

Las fórmulas son cadenas de los símbolos que pertenecen al lenguaje. Es una fórmula bien formada si se respeta la sintaxis y gramática del lenguaje (buen uso de conectivos y paréntesis). Se supondrá entonces que las fórmulas que consideraremos están bien formadas.

Aunque la lógica proposicional se puede construir a partir de solo un conectivo que nos permitiría definir cualquier otro conectivo⁷, lo más común es construir la lógica proposicional definiendo los 5 conectivos principales que son: la negación (\neg), la disyunción (\vee), la conjunción ($\&$), la implicación (\rightarrow) y la doble implicación (\leftrightarrow). Los cuatro últimos conectivos enlazan dos proposiciones, ya sean atómicas o moleculares, mientras la negación solo afecta a una proposición.

⁵ Las proposiciones atómicas no tienen conectivos. Son letras del alfabeto del lenguaje formal.

⁶ Las proposiciones moleculares son las conformadas con algún(os) conectivo(s) lógico(s) y proposiciones atómicas.

⁷ Por ejemplo el NAND (negación de la conjunción) o el NOR (negación de la disyunción).

La negación invierte el valor. La disyunción corresponde al uso de la “o”⁸, siendo verdadera si al menos alguno de los términos es verdadero. La conjunción corresponde al uso de la “y” en el lenguaje cotidiano, siendo verdadera solo si ambos términos son verdaderos. La implicación es verdadera a menos que el antecedente se cumpla y el consecuente no. La doble implicación es verdadera si ambos términos tienen el mismo valor de verdad lo que guarda cierta similitud con la noción de “igual” o más propiamente “equivalente”.

La estructura de la lógica proposicional permite la “demostración” mediante el argumento, en el cual a partir de un conjunto de fórmulas que se suponen, llamadas premisas —hipótesis en otros contextos—; y mediante equivalencias y reglas de inferencia, derivadas de las definiciones de los conectivos anteriores, se deduce una proposición —conclusión— que deberá ser verdadera siempre que las premisas sean verdaderas. Esto demuestra cierta dependencia, en términos de valor de verdad, entre las premisas y la conclusión.

Una regla de inferencia es un criterio que dictamina una conclusión válida dada cierta estructura en las premisas, éstas aseguran que la conclusión sea verdadera siempre que las premisas lo sean. Las reglas de identidad entre fórmulas permiten un remplazo bidireccional de dichas expresiones, aún cuando se encuentran contenidas en una fórmula. Las siguientes 19 reglas son básicas en la lógica proposicional, se pueden verificar mediante tablas de verdad. El símbolo \therefore se lee como “por lo tanto” e indica la conclusión.

En términos llanos, la validez se trata del nexo o vínculo que existe entre las premisas y la conclusión de un argumento. Cuando las premisas son suficientes para llevarnos a la conclusión entonces diremos que el argumento es válido. Por lo que, en cierto sentido, se examina la propiedad de las premisas de implicar la conclusión.

⁸ Existen dos diferentes formas de ver la disyunción: inclusiva y exclusiva; La primera permite que la disyunción sea verdadera cuando al menos uno de los dos disyuntos es verdadero, la segunda solo es verdadera cuando solo uno de los dos disyuntos es verdadero. En la lógica se utiliza \vee para la inclusiva y \veebar para la exclusiva.

Las tablas de verdad, sobre las cuales ya se ha hablado con anterioridad, constituyen una de de las pruebas formales de validez más importantes. La forma de usarlas con dicho fin se explica a continuación.

Los conectivos lógicos, con sus respectivas propiedades o “reglas”, al conformar una fórmula bien formada; esto es, respondiendo a la sintaxis y a la semántica propias del lenguaje lógico, son susceptibles de ser examinados para ver si, dentro de un argumento, lo vuelven válido, i. e. que la conclusión se sigue lógicamente de las premisas.

La validez es una propiedad que puede mostrarse en una implicación que deriva una conclusión de una serie de premisas; así que una tabla de verdad que demuestre la validez de un argumento deberá tener como conectivo principal un condicional. Las premisas que se supone deben “soportar” o justificar la conclusión, se conjuntan para conformar el antecedente; mientras que la conclusión constituye el consecuente, por ser la consecuencia de las premisas, ya sea una, todas o algunas de ellas. Esta fórmula representará al argumento; si su tabla de verdad resulta ser verdadera en cada uno de los casos posibles, entonces diremos que se trata de un argumento lógicamente válido. Si se encuentra un renglón en el cual esta implicación resulte falsa, entonces nos encontramos ante un argumento inválido.

Cabe señalar que este conjunto de premisas y la conclusión —que de ellas se desprende—, puede ser visto en su totalidad como una fórmula; y así, al examinar dicha fórmula a través de una tabla de verdad es posible establecer si tal argumento es válido o inválido, haciendo la respectiva esquematización y procedimiento de revisar aquellos conectivos que intervienen en cada una de las premisas, para obtener así el valor de verdad de la fórmula en general. Siendo explícitos, si la fórmula (en este caso, representa a el argumento) posee una tabla de verdad que es verdadera en todos sus casos diremos que se trata de un argumento válido. Si es posible darle una asignación de valores de verdad verdadera al conjunto de las fórmulas que constituyen el antecedente (las

premisas) y, al mismo tiempo tener un consecuente (conclusión) falso, es un argumento inválido.

Ahora bien, visto de un modo más formal la validez de un argumento puede ser examinada en tanto una implicación, en donde:

$$(p_1 \& p_2 \& p_3 \& \dots \& p_n) \rightarrow c.$$

La tabla de verdad de la anterior fórmula permite la revisión de cada una de las posibilidades para las premisas y de lo que éstas implican, lo que determina si tal argumento es válido o no. Notando que el conectivo principal es una implicación, retomamos la noción que define a este conectivo lógico: siempre será verdadero excepto en el caso tal que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. De modo que, si todas las premisas fueran verdaderas, entonces necesariamente la conclusión tendrá que ser verdadera, ya que de otro modo el argumento sería inválido.

Si, por el contrario, todas, algunas o una sola premisa resultara ser falsa, la implicación sería verdadera y por ende, el argumento sería válido. En la lógica formal estrictamente hablando no se descarta este caso, puesto que le es de cierta manera indiferente si las proposiciones son verdaderas en tanto *reales*. La lógica no repara en la veracidad de las premisas de las que se parte, sino que más bien toma estos dos valores que puede adquirir la proposición –verdadero o falso– para dilucidar la validez o invalidez del argumento en cuestión. Sin embargo, usualmente al trabajar en un plano que rebase los conocimientos que le conciernen a la lógica, pero que se valga de ella, se partirá de premisas que se suponen como verdaderas, para derivar de ellas sólo conclusiones verdaderas.

La prueba de validez a través de las tablas de verdad constituye un método si bien evidente y claro, impráctico ante fórmulas con más de cuatro

variables⁹. Evidentemente constituye una prueba solida e irrefutable, pero su uso como prueba de validez se dificulta cuando el argumento es muy complejo.

De aquí que se recurra a un método de demostración por deducción a partir de las premisas y el uso correcto de las reglas de inferencia. La aplicación de las llamadas “reglas de inferencia” a las premisas, derivan nuevas proposiciones –conclusiones– que a su vez pueden ser usadas para derivar con ellas nuevas proposiciones.

Esta prueba de validez viene también con una objeción; no es como tal una prueba de “invalidez”. Antes de entrar en controversia señalemos que una *prueba* tiene la connotación de aportar evidencia que sustente; y que, si bien se pueden aplicar las reglas de inferencia de manera correcta para intentar llegar a una determinada conclusión a partir de un conjunto de premisas, puede que no logre derivar esa conclusión en particular. Esto no quiere decir que la conclusión es falsa, pero tampoco quiere decir que dicha conclusión sea posible deducirla de las premisas. La incapacidad de ofrecer una demostración tal que una determinada conclusión pueda ser inferida de las premisas no prueba la “falsedad” ni la “veracidad” de esa conclusión, ni de la existencia de tal demostración.

El conjunto de reglas de inferencia condicionan el modo en que se pueden usar las premisas que se presentan de antemano, y a partir de ello ir llegando a diversas nuevas proposiciones. Pero si se requiere la realización de la demostración de una conclusión a partir de este conjunto de premisas, la aproximación al problema es radicalmente diferente. A lo que se insta en este último caso es el camino que se debe tomar para llegar a determinado fin; mientras que en el primero, las proposiciones derivadas son producto “inmediato” de la conjugación de las reglas y de las premisas.

Siguiendo con lo que a la lógica formal se refiere, supóngase que dentro de este conjunto inicial de proposiciones existe una contradicción, esto es, una

⁹ Resulta impráctico, lo que no quiere decir en modo alguno que no sea posible realizarlo. Inclusive es posible la creación de un programa tal que pueda hacer una tabla de verdad de 20 letras o más, pero esto resultaría en la generación de más de un millón de casos a evaluar.

fórmula que bajo cualquier interpretación es falsa, como lo es $(A \& \neg A)$. Cualquier conclusión que de ello se forme resultará indefectiblemente en un argumento válido, puesto que el antecedente de la implicación es siempre falso. Así mismo no existe un renglón en la tabla de verdad tal que todas las fórmulas de este conjunto sean verdaderas simultáneamente. Cuando se da el anterior caso se dice que se trata de un conjunto de fórmulas *inconsistente*. Por ejemplo, tómesese el siguiente argumento:

$$\{ [(\neg p \& p) \& (p \vee \neg p)] \& [\neg(p \& \neg p) \vee \neg(p \vee \neg p)] \} \rightarrow q.$$

En donde resulta una contradicción del antecedente de la implicación, que se traduce en una tabla de verdad en donde cada uno de sus modelos es falso, haciendo del conjunto de fórmulas que conforman las premisas un conjunto inconsistente. Sin embargo, precisamente por ser el antecedente un conjunto inconsistente, la implicación es verdadera ya que, recordando, si el antecedente de una implicación es falso (en este caso contradictorio) lo que sea que éste implique será necesariamente verdadero. Lo que resulta en un argumento válido.

Para que un conjunto de proposiciones sea *consistente* debe de existir un modelo –un renglón en la tabla de verdad–, en el que todas las proposiciones sean verdaderas. Cuando un conjunto de premisas es inconsistente se puede deducir lógicamente una contradicción de dicho conjunto.

Si de un sistema es posible deducir A y la negación de A , entonces tal sistema es inconsistente. $\beta \vdash (A \& \neg A)$.

Supóngase un sistema con un conjunto de premisas iniciales Φ , en el que existe al menos una fórmula que no se puede demostrar; se puede decir que Φ es consistente ya que de ser inconsistente cualquier proposición podría deducirse de ella; debido al hecho de que de un conjunto inconsistente de premisas se sigue –válidamente– cualquier proposición.

Si se supone que el sistema puede demostrar algo (pues cada premisa se puede demostrar con ella misma), automáticamente tiene la limitación de, o bien no demostrar la negación de la premisa, o bien ser un sistema inconsistente.

Y aunque la consistencia es una propiedad de conjuntos de proposiciones, los argumentos no son susceptibles de ser consistentes o inconsistentes; sin embargo las premisas del mismo pueden tener dicha propiedad.

$$(p_1 \& p_2 \& p_3 \& \dots \& p_n) \rightarrow c.$$

Si las premisas no pueden ser todas verdaderas al mismo tiempo, entonces se estará ante un argumento con premisas inconsistentes. Y si las premisas no pueden ser todas verdaderas, el antecedente del argumento siempre será falso, haciendo válido el argumento. De tal suerte que un argumento es válido cuando sus premisas son inconsistentes y solo puede ser inválido cuando las premisas son consistentes; es decir pueden ser todas verdaderas, pero la conclusión no se deriva necesariamente del conjunto de premisas.

Las premisas son inconsistentes si existe una contradicción o si se puede llegar a partir de éstas a la negación de una de ellas, e. g., considérese el siguiente conjunto β de premisas:

1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow r$
3. $\neg(s \wedge r)$
4. $\neg(\neg p \vee \neg s)$
- \therefore
5. $p \rightarrow r$ Silogismo hipotético (1,2)
6. $\neg s \vee \neg r$ Teorema de DeMorgan (3)
7. $s \rightarrow \neg r$ Implicación material (6)
8. $p \wedge s$ Teorema de DeMorgan (4)
9. p Simplificación (8)
10. r Modus Ponens (9, 5)
11. s Simplificación (8)
12. $\neg r$ Modus Ponens (11, 7)
13. $r \wedge \neg r$ Conjunción (10, 12)

De lo anteriormente dicho se puede generar una prueba indirecta de la consistencia de las premisas dado que, si las premisas no pueden ser todas verdaderas al mismo tiempo, entonces se trata de un conjunto de proposiciones inconsistentes, por lo que se podría implicar cualquier proposición de este conjunto, inclusive contradicciones, y ser un argumento válido, tal como se demostró en el conjunto β de premisas, en donde $\beta \vdash (r \wedge \neg r)$.

En el siguiente apartado no se abordará a la teoría de conjuntos desde los axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF), pues pueden resultar difíciles de entender y no dar luz de lo que es un conjunto. Se dejarán de lado cuestiones que son demasiado específicas para tratarlas aquí. Supondremos la existencia de un conjunto universal, que sea un conjunto según ZF. Pedir que el universo sea un conjunto según ZF evita que se contenga a sí mismo u otras características que resultan en paradojas.

El *conjunto universal* o *universo* deberá tener todos los elementos que puedan pertenecer a cualquiera de los conjuntos de los que se hable. Este conjunto universal deberá ser deducible del contexto o mencionado explícitamente.

En un primer momento, se puede decir que *un conjunto es una colección de objetos determinados, estos objetos se conocen como los elementos del conjunto y lo determinan completamente*, es decir, que un conjunto es igual a otro si y sólo si ambos tienen exactamente los mismos elementos. De esto también se entiende que el orden es irrelevante al enlistar los elementos de un conjunto, pues sin importar el orden, serán los mismos elementos.

Un elemento pertenece a un conjunto cuando es uno de los objetos de su colección, los elementos pueden ser “casi” cualquier cosa, incluso un conjunto. El símbolo \in expresa pertenencia y “ $a \in B$ ” se lee como “a pertenece a B”. Para facilitar el entendimiento se suele llamar *familia* o *colección* a un conjunto cuyos elementos son conjuntos.

Existen dos formas de definir un conjunto, por descripción y por enumeración. Por descripción, como el nombre lo sugiere, es dando una descripción de los elementos que pertenecen al conjunto, como una condición o una característica. Por enumeración es simplemente enlistar los elementos que pertenecen a dicho conjunto. Generalmente los elementos se representan con letras minúsculas y los conjuntos con letras mayúsculas. Se usa := para indicar una igualdad por definición. A continuación algunos ejemplos.

Por descripción: $A := \{ x \in \mathbb{Z} \mid x=2k, k \in \mathbb{Z} \}$ ¹⁰.

En donde A es el conjunto de todos los enteros que son la multiplicación de un entero por 2 (los números enteros pares).

Por enumeración: $A := \{ a, b, 1, 2, 3, 4 \}$.

Aquí A es el conjunto que tiene como elementos la letra a, la letra b y los números naturales del 1 al 4.

Cuando es lo suficientemente claro, se puede usar enumeración para conjuntos infinitos usando “...” para marcar una infinidad numerable de elementos, por ejemplo, $A := \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$ significaría que A es el conjunto de todos los números enteros positivos.

Existen dos conjuntos muy especiales, uno con la descripción de que ningún objeto pertenece a él; *i.e.* no existe ningún elemento que pertenezca a este conjunto, al cual se le conoce como el *conjunto vacío* y se le denota con el símbolo \emptyset . El otro es el *conjunto universal* o *universo* que, como se menciona al inicio de este apartado, todos los elementos pertenecen a él y generalmente se le denota con la letra U.

Por otra parte se dice que un conjunto está contenido en otro cuando todos los elementos que le pertenecen, pertenecen también al otro. El símbolo \subset se usa para la contención y “ $A \subset B$ ” se lee “A está contenido en B”. Un ejemplo

¹⁰ La \mathbb{Z} se usa para referirse al conjunto de los números enteros. El símbolo \mid se lee “tal que”.

común de contención es el hecho de que el conjunto de los números naturales está contenido en el conjunto de los números reales.

Además, el conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto, mientras que el conjunto universo contiene a cualquier conjunto. Aquí vale la pena mencionar que hay una gran diferencia entre *pertenecer a un conjunto* y *estar contenido en un conjunto*, ambos son conceptos muy importantes y se debe tener cuidado para no confundirlos, en especial cuando hablamos de conjuntos que tienen como elementos otros conjuntos.

Existen varios operadores definidos entre conjuntos, los más importantes y usados comúnmente son: el complemento, la unión, la intersección y la resta; la definición de estos conectivos se hace mediante lógica de primer orden, por lo que ahora se pasará a explicar esta teoría.

Primero se debe mencionar la sutil distinción que existe entre un *elemento de un conjunto* y una *variable* que toma valores en el mismo. Los elementos usualmente se denotan como a, b, c , etc., en tanto que las variables suelen indicarse con x, y, z , etc. La diferencia entre ellas radica en que, mientras que los elementos pertenecen al conjunto, las variables no. Las *variables funcionan como señaladores o referencias a algún elemento (fijo o indeterminado) del conjunto*, por lo que en ocasiones se usan de forma similar, pero no se debe olvidar que *las variables no son elementos del conjunto*.

La lógica de primer orden trata con *predicados*, los cuales son proposiciones que dependerán de objetos llamados *argumentos*. Los argumentos serán, o bien elementos de un cierto conjunto al que se conoce como *dominio de discurso* o, en su defecto, variables que toman valor en el dominio de discurso. El número de argumentos que requiere un predicado es arbitrario, pero fijo.¹¹

¹¹ Algunos autores consideran que el número de argumentos puede variar, otros consideran que debe ser fijo. En este trabajo consideramos que es fijo. No hay diferencia en alcance.

El dominio de discurso puede ser dado explícitamente, implícitamente o dando parámetros para su construcción; incluso, en muchos casos, es posible desarrollar argumentos sin conocer —en su totalidad— el dominio de discurso.

La lógica de primer orden puede verse como una extensión de la lógica proposicional, en tanto que las proposiciones pueden ser vistas como predicados que no requieren argumentos.

Por lo que la fuerza de esta nueva lógica (la de primer orden) está en la interdependencia que se puede crear con los predicados cuando tienen argumentos en común, y en la posibilidad de usar variables para dichos argumentos.

Tiene la capacidad para realizar argumentos que sirvan como demostraciones, e incorpora sus propias pruebas de validez y consistencia. Añade la posibilidad de hablar sobre las características de diversos objetos y las relaciones que pueden tener entre ellos.

Los predicados que requieren sólo un argumento se comportan como propiedades o características que los objetos en el dominio de discurso pueden o no cumplir. Mientras que los predicados con dos o más argumentos pueden ser vistos como formas de relacionar los objetos que los satisfacen o no. Particularmente los predicados que requieren dos argumentos son llamados *relaciones binarias* como se verá más detalladamente en el apartado III.2 Relaciones Binarias y sus Propiedades Especiales.

La lógica de primer orden es un nuevo lenguaje que incorpora la idea de los *cuantificadores*, los cuales indican, a grandes rasgos, a “cuantos” de los elementos se hace referencia al usar una letra variable. Los cuantificadores usuales que se definen son: el *cuantificador existencial*, para el cual se usa el símbolo \exists y se lee como “existe”; el *cuantificador universal*, que se representa con el símbolo \forall y suele leerse como “para todo”. Cuando una variable no tiene asignado un cuantificador se dice que es una *variable libre*.

Con los cuantificadores se puede hablar de predicados que algún elemento cumple, sin saber necesariamente de qué elemento(s) se trata; así como también de predicados que todos los elementos del dominio de discurso cumplen, sin tener que tratarlos a todos por separado.

Cuando todos los argumentos de un predicado son elementos (y no variables) queda determinado un valor de verdad propio del predicado, por lo que es una proposición —atómica, por no incluir conectivos—. En donde se dirá que los elementos dados cumplen el predicado si lo hacen verdadero; nótese que el orden de los elementos es importante, ya que un mismo grupo de argumentos puede cumplir el predicado en un orden específico y no cumplirlo en otro.

Por otra parte, cuando al menos uno de los argumentos de un predicado es una variable libre se le considera una *sentencia abierta* [Cfr. Aranda, J. et al. (2006) p. 74]; estas sentencias no tienen valor de verdad y por lo tanto no son proposiciones. Así, desde el punto de vista de argumentos, validez, consistencia y sistemas axiomáticos, las sentencias abiertas no serán relevantes por carecer de valor de verdad.

Cuando se asigna un cuantificador a cada variable (sin dejar variables libres) se le considera una *sentencia cerrada* [Ibídem, p. 74]; de esta forma, la sentencia adquiere un valor de verdad que depende tanto de cada argumento como de los cuantificadores asignados a las variables.¹²

Y por último se agregan los funtores, que son similares a los predicados en el sentido de que toman argumentos, aunque se diferencian de los predicados en tanto que los funtores no evalúan valor de verdad. Los funtores toman como valor un elemento del dominio de discurso por lo que a su vez, pueden usarse como argumentos de otros funtores y de predicados.

Una proposición de la lógica de primer orden será una sentencia cerrada que a su vez sea una fórmula bien formada; lo que en esta lógica significa hacer

¹² Algunos autores consideran que las variables libres tienen asignado implícitamente el cuantificador universal, con esta consideración las sentencias abiertas también tienen valor de verdad.

buen uso de los paréntesis, los conectivos, los funtores, los argumentos y los cuantificadores.

Se dejará de lado el estudio de cómo expresar una fórmula en lenguaje usual o traducir un enunciado a una fórmula bien formada; esto suele ser una de las labores más complicadas de la lógica.¹³ A continuación se abordarán algunos ejemplos de la lógica de primer orden con la intención de aclarar cómo se realizan las simbolizaciones.

La oración “El padre de Juan es feliz” podría simbolizarse usando E como el predicado definido E_x : x es Feliz; f como el functor definido como $f(x)$: el padre de x; y por ultimo j como el elemento del dominio de discurso “Juan”; la simbolización quedaría simplemente como: $E_{f(j)}$. Nótese que esta es una simbolización sin variables como argumentos y aunque no tiene cuantificador es una sentencia cerrada.

Ahora se presentara el siguiente argumento escrito en lenguaje cotidiano:

“Todos los políticos son deshonestos”.

“Alejandro es político”.

Por lo tanto: “Alejandro es deshonesto”.

Es claro que la conclusión es válida dadas las premisas; sin embargo, en el lenguaje de la lógica proposicional, las posibles simbolizaciones de las oraciones anteriores no pueden capturar la estructura “todos” pues aún no fue considerada; lo que quiere decir que pierden parte de su significado.

Las herramientas proporcionadas por la lógica proposicional no admiten la posibilidad de atribuirle el mismo predicado a algunos o todos los que conforman el dominio del discurso. Mientras que la lógica de predicados tiene el alcance suficiente para mostrar la relación que tienen las oraciones en la simbolización, permitiendo ver que éste es un argumento válido.

¹³ Si se considera necesario a lo largo de este trabajo se explicarán las fórmulas después de enunciarlas

Haciendo uso de los predicados P y D definidos como: Px: x es político, Dx: x es deshonesto; y el elemento del dominio de discurso “a” definido como: a: Alejandro. Es posible simbolizar el argumento anterior de la siguiente manera:

$$\forall x (Px \rightarrow Dx)$$

$$Pa$$

$$\therefore Da$$

Con esta simbolización se puede elaborar una demostración formal de la conclusión a partir de las premisas con el uso de las reglas de la lógica de primer orden, como se muestra a continuación:

1. $\forall x (Px \rightarrow Dx)$
2. Pa
3. $Pa \rightarrow Da$ Instanciación Universal de 1, x por a
4. Da Modus Ponens 2 y 3

Ahora, se pueden establecer formalmente relaciones entre los elementos de conjuntos, por lo que se usará la lógica de primer orden para definir otra parte fundamental de la teoría de conjuntos: el álgebra de conjuntos.

Como última parte de esta sección de Lógica y Conjuntos se definirán los operadores usuales de la teoría de conjuntos que servirán de muestra del uso y alcance de la lógica de primer orden. Al uso de los conjuntos junto con los operadores básicos se le suele llamar “*álgebra de conjuntos*”. Para definir los operadores se supondrá que A y B son dos conjuntos cualesquiera.

El *complemento* de A en relación al universo, se representa con A^c y es el conjunto que tiene todos los elementos del universo que no están en A (y no tiene ningún elemento que tenga A).

La *unión* de A y B, se representa con $A \cup B$ y la idea natural es unir los conjuntos como el nombre lo sugiere, por lo que tiene todos los elementos, tanto pertenecientes a A como a B.

La *intersección* de A y B, se representa como $A \cap B$ y la idea es tomar los elementos que ambos conjuntos tienen en común.

Por último, la *resta en conjuntos* se representa por $A - B$ y la idea es quitar al conjunto A los elementos que tenga de B.

La definición formal de estos operadores como nuevos conjuntos por descripción es:

| | |
|--------------|--|
| Complemento | $A^c := \{ x \mid x \notin A \}^{14}$. |
| Unión | $A \cup B := \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}^{15}$. |
| Intersección | $A \cap B := \{ x \mid x \in A \ \& \ x \in B \}$. |
| Resta | $A - B := \{ x \mid x \in A \ \& \ x \notin B \}$. |

Existen dos operadores más en los conjuntos que resultan útiles en el desarrollo y fundamentación de teorías posteriores que requieren una mayor explicación; a saber, el primero es el *conjunto potencia* denotado por $P(A)$ que es el conjunto que tiene todos los subconjuntos de A. Esto puede ser confuso, pues los elementos de A no pertenecen a $P(A)$ pero cualquier sub-colección de A sí pertenece a $P(A)$ y además, cualquier subconjunto de A no es subconjunto de $P(A)$, pero sí pertenece a $P(A)$.¹⁶

El segundo operador es el *producto cartesiano* que se denota como $A \times B$ y es el conjunto cuyos elementos son parejas ordenadas¹⁷ y que su primer elemento

¹⁴ El símbolo \notin denota no pertenencia por lo que " $x \notin A$ " es equivalente a " $\neg(x \in A)$ ".

¹⁵ Para poder usar los conectivos lógicos entre ellos, las descripciones de los conjuntos están escritos en lógica de primer orden, pues la característica de pertenecer a un conjunto se puede ver como una relación binaria que toma valor verdadero si pertenece al conjunto y falso cuando no.

¹⁶ Como ejemplo de un conjunto potencia tómesese que si $A := \{ 1, 2, 3 \}$ entonces su respectivo conjunto potencia es $P(A) := \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$.

¹⁷ Se consideran parejas ordenadas ya que la pareja (a, b) es diferente de la pareja (b, a).

pertenece a A y su segundo elemento pertenece a B. Éste último se puede generalizar al producto cartesiano de más de dos conjuntos. Sus respectivas definiciones formales son:

Conjunto potencia $P(A) := \{ x \mid x \subset A \}.$

Producto cartesiano $A \times B := \{ (x, y) \mid x \in A \ \& \ y \in B \}.$

Aquí termina la breve pero substancial presentación de las bases de la lógica proposicional, de predicados y la teoría de conjuntos; que se requerirá más adelante.

III.2 Relaciones Binarias y sus Propiedades Especiales

Este es un apartado que depende en gran medida del anterior, pero dada su relevancia y utilidad, especialmente para los propósitos de este trabajo, se decidió separarlo y darle su propia sección.

Las posibles relaciones entre dos objetos o relaciones binarias,¹⁸ son subconjuntos del producto cartesiano de los conjuntos a los que pertenecen dichos objetos. Por simplicidad, se asumirá que ambos objetos pertenecen a un mismo conjunto D.¹⁹

De esta forma, las relaciones son equivalentes a predicados de aridad 2 con un dominio de discurso D, donde se dice que satisface el predicado si y sólo si la pareja ordenada está en el subconjunto correspondiente. Abusando de la

¹⁸ En este trabajo solo consideraremos las relaciones como binarias a no ser que se indique explícitamente lo contrario.

¹⁹ Trabajando con la unión de dichos conjuntos como el dominio de discurso D, se puede definir la relación en el producto cartesiano $D \times D$ y de esta forma el alcance de las relaciones bajo este supuesto es el mismo, aunque en algunos casos esto lleve a fuertes complicaciones en la descripción del equivalente a una fórmula universal del sistema original. Pero éste es un problema práctico ya que en teoría no hay pérdida de generalidad y puede ser más fácil de entender en ciertos contextos.

notación, se puede tratar a una relación como conjunto (subconjunto del producto cartesiano) o como predicado de aridad 2.

Entonces, si R es una relación, se dirá que a está relacionado con b por R cuando se tiene que aRb ²⁰ es verdadera (tratando a R como predicado) o que $(a, b) \in R$ (tratando a R como conjunto); ambas condiciones son equivalentes por definición.

Por ejemplo, una relación R con dominio de discurso $D := \{ 1, 2, 3, 4 \}$, se puede definir como conjunto: $R := \{ (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) \}$ o lo que es lo mismo como predicado con la siguiente tabla de verdad:

| R | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | F | V | V | V |
| 2 | F | F | V | V |
| 3 | F | F | F | V |
| 4 | F | F | F | F |

Esta relación es igual a la relación binaria de “menor que” reducida a los enteros 1, 2, 3 y 4.

Las siguientes características sirven para construir estructuras usadas definiciones fundamentales, las relaciones con diversas combinaciones de las siguientes propiedades forman categorías que han poder usarse en diversos ámbitos matemáticos, definiendo varias entidades importantes como son las funciones y las clases de equivalencia e incluso las relaciones de orden. Empezaremos por definir algunas de las propiedades deseables en las relaciones binarias, para luego hablar de las categorías de las mismas; las siguientes propiedades pueden pertenecer a una R relación binaria (de aridad 2).

²⁰ xRy es una notación para un predicado equivalente a Rxy . Se usa por similitud al uso de relaciones como la igualdad o la contención y otras relaciones de orden que se verán más adelante.

Reflexividad e Irreflexividad: Estas dos propiedades tienen que ver con la relación que poseen los elementos con ellos mismos. Como en general algunos elementos pueden estar relacionados con ellos mismos y otros elementos no, se le considera propiedad especial cuando todos se relacionan consigo mismos o ninguno lo hace.

La relación R es reflexiva si: $\forall x (xRx)$.

En donde, cualquier elemento, éste está relacionado consigo mismo.

La relación R es irreflexiva si: $\forall x \neg(xRx)$.

Dado cualquier elemento, éste no se relaciona consigo mismo.

Simetría, Asimetría y Antisimetría: Estas propiedades tienen que ver con la capacidad de que la relación de sus argumentos sea bilateral; es decir, ¿si un elemento se relaciona con un segundo, éste segundo está relacionado con el primero? Cuando se tiene alguna de estas propiedades se tienen restricciones para esa interrogante.

La relación R es simétrica si: $\forall a \forall b (aRb \rightarrow bRa)$.

Cualesquiera dos elementos, si el primero está relacionado con el segundo, entonces debe ser el caso que el segundo se relacione con el primero. Esto crea reciprocidad entre los elementos forzando a corresponder la relación que tienen con ellos en ambos sentidos.

La relación R es asimétrica si: $\forall a \forall b (aRb \rightarrow \neg bRa)$.

Cualesquiera dos elementos, si el primero está relacionado con el segundo, entonces debe ser el caso que el segundo no se relacione con el primero. Esto es unilateral entre los elementos ya que no corresponden la relación que tienen con ellos.

Nótese que la asimetría implica irreflexividad pues, por asimetría, si se relaciona en un sentido, no puede relacionarse en el otro; lo cual sucedería si un

elemento se relacionará consigo mismo, ya que una relación consigo mismo es en ambos sentidos. Y como ningún elemento puede relacionarse consigo mismo cuando hay asimetría, se tiene la irreflexividad.

La relación R es antisimétrica si: $\forall a \forall b [(aRb \ \& \ bRa) \rightarrow (a=b)]$

Cualesquiera dos elementos, si ambos están relacionadas el uno con el otro, entonces el primero es igual al segundo. Esto nos dice que la relación de un elemento sólo puede ser bilateral consigo mismo. Donde cabe señalar que si existe la irreflexividad y la antisimetría, se obliga la asimetría.

Transitividad: Esta propiedad, aunque si bien su noción inicial suele ser muy natural, su construcción formal puede aparecer un tanto artificial, pero pensemos en la relación binaria: “es más grande que”. Es natural pensar que si A es más grande que B y B es más grande que C, necesariamente A es más grande que C. Pero esto no se cumple en todas las relaciones y por ello resulta un caso muy relevante cuando así sucede.

La relación R es transitiva si: $\forall a \ \forall b \ \forall c [(aRb \ \& \ bRc) \rightarrow (aRc)]$.

Cualesquiera tres elementos, si el primero está relacionado con el segundo y el segundo está relacionado con el tercero, entonces el primero debe estar relacionado con el tercero. Quizá no es tan evidente, pero si se unen la transitividad y la irreflexividad se obliga a tener asimetría, como se menciona anteriormente, pues si hubiera una relación bilateral entre dos elementos por transitividad cada uno tendría una relación bilateral con el mismo, lo que contradeciría la irreflexividad.

Totalidad: En ocasiones, una relación con esta propiedad también es llamada *relación completa*. El ser una relación completa implica que existe una relación entre cualesquiera dos elementos en al menos una dirección.

La relación R es completa si: $\forall a \ \forall b (aRb \vee bRa)$.

Cualesquiera dos elementos, el primero está relacionado con el segundo o el segundo está relacionado con el primero. Resaltando que la totalidad implica la reflexividad.

Hasta aquí, se ha logrado ver que hay una gran variedad de propiedades que las relaciones pueden cumplir y, aunque son distintas, interactúan entre ellas.

Para resumir:

Asimetría \rightarrow Irreflexividad.

(Irreflexividad + Antisimetría) \rightarrow Asimetría.

(Transitividad + Irreflexividad) \rightarrow Asimetría.

Totalidad \rightarrow Reflexividad.

Además, existen algunas combinaciones de las propiedades anteriores que por su utilidad y relevancia, a las relaciones que poseen alguna de dichas combinaciones se les integra a categorías que poseen nombres específicos y se les estudia de forma particular.

III.3 Clases de Equivalencia

Suponiendo que se desean clasificar los elementos de un conjunto, se deben elegir características que los distingan entre ellos y, mediante estas, separar los elementos en grupos o clases; este tipo de “clasificación” es el fin de las clases de equivalencia.

Las clases de equivalencia son más comunes de lo que parecen; por ejemplo, al hacer la distinción entre números pares e impares se tiene una relación de equivalencia, cuando se clasifican las figuras en triángulos, cuadriláteros,

pentágonos, hexágonos, etc., también son clases de equivalencia. En general, se obtienen clases de equivalencia al distinguir claramente grupos de elementos.

Un ejemplo concreto, sea X un conjunto de canicas con 3 azules, 4 blancas y 3 rojas; X tiene 10 elementos, pero si se presta atención en las clases, se tienen 3 clases: azules, blancas y rojas. Entonces se puede decir que el conjunto de las clases de equivalencia tiene 3 elementos; o bien, que una canica se relaciona con otra si tienen el mismo color. Esta última será la que se definirá como la relación de equivalencia de dichas clases.

Las clases de equivalencia pueden ser vistas como una *partición del conjunto*; una partición es una colección de subconjuntos disjuntos (a pares) cuya unión es el conjunto original. Así que si \mathcal{L} es una partición de un conjunto X , se cumple que:

$$1) \quad \bigcup_{A \in \mathcal{L}} A = X,$$

$$2) \quad \forall A \forall B \{ (A \in \mathcal{L} \ \& \ B \in \mathcal{L} \ \& \ A \neq B) \rightarrow A \cap B = \emptyset \}.$$

Es decir que, la unión de todos los conjuntos de la partición da el conjunto total y que la intersección de cualesquiera dos de estos conjuntos (distintos) es el vacío. Esta es una forma de decir que todos los elementos pertenecen a alguna clasificación y no a más de una. Aunque esta es una forma natural de ver las clases de equivalencia, existe una construcción fundamental equivalente mediante relaciones.

Así, la primera estructura que se explicará (derivada de las relaciones) serán las clases de equivalencia; estas se definen mediante una relación de equivalencia, la cual es una relación binaria que tiene tres propiedades: es reflexiva, transitiva y simétrica. Intuitivamente:

1) *Todo objeto está en la misma clase que él mismo*; esta afirmación es representada por la reflexividad. 2) *Si un objeto está en la misma clase que un segundo, el segundo debe estar en la misma clase que el primero*; esta afirmación

es representada por la simetría. 3) Si un objeto está en la misma clase que un segundo y el segundo en la misma clase que un tercero, el primero debe estar en la misma clase que el tercero; esta afirmación es representada por la transitividad.

Cuando se hace una clasificación de objetos las tres afirmaciones anteriores son evidentes; el pedir que la relación de equivalencia tenga esas tres propiedades (reflexividad, simetría y transitividad), es para lograr que se cumplan dichas afirmaciones.

Como se mencionó anteriormente, ambas son construcciones fundamentales equivalentes; una partición define una única relación de equivalencia y una relación de equivalencia induce una única partición; es decir, que la definición de las clases de equivalencia es la misma empezando de la partición o de la relación de equivalencia. A continuación se citan las demostraciones.

TEOREMA Sea \mathcal{L} una partición del conjunto X . Defínase xRy si x y y pertenecen a S para algún conjunto $S \in \mathcal{L}$. Entonces R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Demostración. Sea $x \in X$. Como $X = \cup \mathcal{L}$, $x \in S$ para algún $S \in \mathcal{L}$. Entonces xRx y R es reflexiva.

Supóngase que xRy . Entonces x y y pertenecen a un conjunto $S \in \mathcal{L}$. Como y y x pertenecen a S , yRx y R es simétrica.

Finalmente, supóngase que xRy y yRz . Entonces x y y pertenecen a un conjunto $S \in \mathcal{L}$; asimismo, y y z pertenecen a un conjunto $T \in \mathcal{L}$. Si $S \neq T$, se tiene que y pertenece a S y a T ; pero como \mathcal{L} es una familia disjunta por pares, esto es imposible. Entonces $S = T$ y tanto x como z pertenecen a S . Por lo tanto, xRz y R es transitiva. ■ [Johnsonbaugh, Richard (1988) p 58.]

TEOREMA Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto X . Para cada $a \in X$, sea $[a] = \{ x \in X \mid xRa \}$. Entonces $\mathcal{L} = \{ [a] \mid a \in X \}$ es una partición de X .

Demostración. Hay dos hechos que deben verificarse con el fin de probar que \mathcal{L} es una partición de X :

1. $X = \cup \mathcal{L}$.

2. \mathcal{L} es una familia disjunta por pares.

Sea $a \in X$. Puesto que aRa , $a \in [a]$. En consecuencia $X = \cup \mathcal{L}$, lo que verifica 1. Falta verificar 2. En primer lugar se demostrará que si aRb , entonces $[a] = [b]$. Supóngase que aRb . Sea $x \in [a]$, entonces xRa . Como

aRb y R es transitiva, xRb . Por lo tanto, $x \in [b]$ y $[a] \subseteq [b]$. Cambiando a por b y utilizando un razonamiento similar al anterior, se prueba que $[b] \subseteq [a]$. Por ello, $[a] = [b]$.

Debe demostrarse que \mathcal{L} es una familia disjunta por pares. Supóngase que $[a], [b] \in \mathcal{L}$ con $[a] \neq [b]$. Se probara que $[a] \cap [b] = \emptyset$. Supóngase, por reducción al absurdo, que para algún x se tiene $x \in [a] \cap [b]$. Entonces xRa y xRb . El resultado anterior demuestra que $[x] = [a]$ y $[x] = [b]$. Consecuentemente, $[a] = [b]$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $[a] \cap [b] = \emptyset$ y \mathcal{L} es una familia disjunta por pares. ■ [ibídem p. 60]²¹

Entonces, como se puede ver, las tres propiedades de una relación de equivalencia bastan para generar una partición. Y a su vez, dada cualquier partición se puede representar e inducir con una relación de equivalencia. Al conjunto $[a] = \{ x \in X \mid xRa \}$ se le denomina la clase de equivalencia de a . Las clases de equivalencia se determinan con cualquiera de estas dos, una relación de equivalencia o una partición, según convenga.

La principal aplicación que se le dará a las clases de equivalencia en este trabajo se verá en las relaciones de orden; la partición del conjunto servirá como un espacio alternativo en el que se pueda asegurar que el orden —“heredado” del conjunto original— cumpla con características que no cumplía el orden del conjunto original.

III.4 Funciones

“El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función sea de una gran generalidad.” [Spivak, M., 1996: 49]

Como Spivak resalta en su libro *Cálculo Infinitesimal* (1996), el concepto de función tiene una participación relevante y directa en casi todas las ramas de la

²¹ En ambos teoremas se ha omitido la numeración de los teoremas empleadas por el autor.

matemática; dicho concepto ha sido acuñado a lo largo de la historia, precisando lo que ahora entendemos como función.

El autor da una definición provisional para acercarse a la noción intuitiva de lo que es una función; dice que: “Una función es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real.” [Ídem: 49] Para después llegar a una definición matemática moderna de función.

La noción intuitiva de una función es “convertir”, “asignar” o “elegir”; algo específico para cada “entrada” que se esté considerando. El valor de entrada es el parámetro o argumento de la función –el cual también puede considerarse como las condiciones iniciales en las que se aplica la función– mientras que el resultado de la función es el valor de salida o las condiciones finales.

Desde cualquier perspectiva es claro que el resultado de la función dependerá de los valores de entrada que se le den, sean números o no, y será único. Los valores de entrada de una función pueden ser cualesquiera elementos de un conjunto, y los resultados siempre podrán considerarse como elementos de un conjunto (no necesariamente el mismo). Una función f definida de un conjunto A a un conjunto B se le suele denotar por $f: A \rightarrow B$.

Al conjunto de valores a los cuales la función sí les asigna un valor se le llama *dominio* de la función. Por simplicidad se suele igualar el conjunto de partida A con el dominio. El conjunto de resultados, que sí puede tomar la función se le llama *imagen*, *ámbito*, *codominio* o *contradominio* de la función.

Entonces, la función deberá definirse como la regla que permite saber qué se debe asignar a cada elemento del dominio; es decir, su correspondiente resultado. Esto se puede ver como una relación binaria entre entradas y resultados con la importante restricción de que cada entrada puede asociarse sólo con un resultado. Como se vio anteriormente, esta relación se puede ver como un subconjunto del producto cartesiano entre A y B . Lo que nos lleva a la siguiente definición: Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: “Si (a, b) y (a, c) pertenecen ambos a la colección, entonces $b=c$; en

otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.” [Ídem: 60]

El interés que tiene lo anterior está orientado a funciones en conjuntos de números, pero el concepto se puede generalizar a funciones entre cualesquiera dos conjuntos arbitrarios. De tal suerte que podemos definir una función f como una relación²², entre los elementos de A y los elementos de B , que cumple:

$$\forall a \forall b \forall c \{ [a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ c \in B \ \& \ (a, b) \in f \ \& \ (a, c) \in f] \rightarrow b = c \}.$$

Esta fórmula, es una manera de decir que cada a en el dominio se relaciona (según f) sólo con un elemento en el codominio, al que se le llama la imagen de a y se le denota por $f(a)$.

Aunque formalmente la definición de función no es un concepto primigenio, ya que se define como un tipo particular de relación, es poco común tratar una función como un subconjunto del producto cartesiano, ya que resulta más natural verla como regla de asignación y prácticamente nunca se usa la notación de relación binaria para una función. En su lugar, como el resultado es único para cada elemento de entrada de la función, se obvia y se maneja como $f(a)$.

La inversa de una función $f : A \rightarrow B$ está definida como la relación f^{-1} entre los conjuntos B y A , tal que $(a, b) \in f$ si y sólo si $(b, a) \in f^{-1}$. Esta relación no tiene porque ser una función, más adelante se hablará del caso especial en que resulta serlo.

Una vez construido el concepto de función, se puede tratar con casos muy especiales de funciones; aún limitados a funciones con entradas y salidas de números reales, el concepto sigue siendo demasiado amplio. Pero, como se hizo con las relaciones, se pueden mencionar características que pueden tener las funciones que serán relevantes posteriormente.

²² Vista como un subconjunto del producto cartesiano.

Para empezar, existen dos propiedades básicas para las funciones, la inyectiva y la sobreyectiva.

Una función $f: A \rightarrow B$ es *inyectiva* si cumple que:

$$\forall a \forall b \forall c \{ [a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ c \in A \ \& \ (a, b) \in f \ \& \ (c, b) \in f] \rightarrow a = c \}.$$

Esto es lo mismo que decir, que para cada elemento b en el conjunto de llegada B , existe a lo más un elemento a en el dominio tal que $f(a) = b$. Esta es una característica similar a la que se pide para ser función, pero va en sentido contrario.

Una función $f: A \rightarrow B$ es *sobreyectiva* si cumple que:

$$\forall b \{ b \in B \rightarrow \exists a [a \in A \ \& \ (a, b) \in f] \}.$$

Esto es lo mismo que decir, que para cada elemento b en el conjunto de llegada B , existe al menos un elemento a en el dominio tal que $f(a) = b$. Lo que significa que la función puede tomar cualquiera de los valores del conjunto de llegada, igualando el conjunto de llegada con el codominio.

Si una función es inyectiva y sobreyectiva, se dice que es una *función biyectiva*; este es un tipo muy especial de funciones con la característica de que *a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo uno de los elementos en el codominio y, a su vez, cada elemento en el codominio debe ser la imagen de uno y sólo uno de los elementos en el dominio*.

Entonces, en el caso de conjuntos finitos, sólo puede existir una función biyectiva si los dos conjuntos tienen la misma cardinalidad (número de elementos), esto se debe a que a cada elemento del dominio le toca uno diferente en el codominio y ningún elemento en el codominio puede quedarse sin asignar.

Esto motiva a definir la igualdad de cardinalidad en conjuntos mediante la existencia de una función biyectiva entre ambos conjuntos, esta noción permanece para conjuntos infinitos (transfinitos). En general, dos conjuntos tienen la misma cardinalidad si y sólo si existe una función biyectiva entre ellos.

Además, si una función es biyectiva, entonces su relación inversa es también una función, ya que identificará a cada elemento en el codominio con uno y sólo uno de los elementos del dominio, por lo que cumplirá con ser una función si se invierten las direcciones.

Si una función tiene como inversa otra función, significa que a cada elemento del codominio le correspondía un sólo elemento como imagen inversa y que, a la vez, todos los elementos del codominio eran imagen de algún elemento; lo que quiere decir que la función original era biyectiva. Así se demuestra que una función es biyectiva si y sólo si tiene una función inversa.

Si se tiene una función $f : B \rightarrow C$ y una función $g : A \rightarrow B$, se puede determinar, para cualquier valor $a \in A$, el único valor $b \in B$ tal que $g(a) = b$, y de la misma forma, encontrar el único valor $c \in C$ tal que $f(b) = c$. Por eso sabemos que hay un único valor $c \in C$ tal que $f(g(a)) = c$, esto para cada a en el dominio A .

Esto significa que el aplicar una función después de otra, cuando el codominio de la primera coincide con el dominio de la segunda, seguirá siendo una función. Lo que motiva la definición de una operación de funciones llamada *composición*; si se compone $g : A \rightarrow B$ con $f : B \rightarrow C$, como en el párrafo anterior, se obtiene la *función composición* $f \circ g : A \rightarrow C$.

Existe una familia de funciones (una por cada dominio posible) que cumplen en papel de neutro en la composición²³, se le conoce genéricamente como la *función identidad* I , y es una función tal que su dominio y codominio son el mismo conjunto y le asigna a cada elemento x en el dominio, el elemento x . por lo que se puede definir mediante la fórmula: $\forall x I(x)=x$.

Un aspecto interesante de las funciones inversas es que la composición de una función con su inversa resulta ser la función identidad definida en el dominio de la función; mientras que la composición de la inversa con la función resulta ser la identidad definida en el codominio de la función. Esto tiene sentido

²³ Es decir que cualquier función compuesta con la identidad queda sin modificación, y la identidad compuesta con cualquier función resulta dicha función.

ya que, mientras una función manda al codominio, la inversa “regresa” a cada elemento al del cual provino.

Una función constante es la que manda a todos los elementos del dominio a un mismo elemento del codominio, este es un claro ejemplo de función que no es ni inyectiva ni sobreyectiva, y por lo tanto no es invertible ya que no se puede “recordar” de donde vino cada valor.

Si definimos una función con dominio $A = \{1, 2\}$ y codominio $B = \{a, b, c\}$; no será posible que sea una función biyectiva pues deberíamos poder asignar a los tres elementos de B a algún elemento en A que sólo tiene dos elementos.

Existe exactamente una función constante por cada elemento en el codominio. Y como para cada elemento del dominio se puede elegir cualquier elemento del codominio, por el principio de casillas (del que se hablará en probabilidad), el número total de funciones diferentes es la cardinalidad del codominio elevado a la cardinalidad del dominio. En el caso del párrafo anterior serían $3^2 = 9$ funciones diferentes que se pueden enlistar para verificar la afirmación.

Las 9 funciones que se pueden definir con el dominio y codominio mencionados son: $f_1 = \{(1, a), (2, a)\}$, $f_2 = \{(1, a), (2, b)\}$, $f_3 = \{(1, a), (2, c)\}$, $f_4 = \{(1, b), (2, a)\}$, $f_5 = \{(1, b), (2, b)\}$, $f_6 = \{(1, b), (2, c)\}$, $f_7 = \{(1, c), (2, a)\}$, $f_8 = \{(1, c), (2, b)\}$ y $f_9 = \{(1, c), (2, c)\}$. Es fácil ver que son todas las funciones posibles, ninguna es biyectiva y tres de ellas son funciones constantes.

Por otro lado, una función que asigna a cada elemento de un dominio cualquiera, un número natural en orden y sin repetir ni omitir números; se le llama una función de enumeración. Si se restringe el codominio a solo los números necesarios, esta es una función biyectiva, lo que nos permite identificar cada elemento con un único número y saber, mediante ese número, a qué elemento le corresponde. Aquí se observa que una función biyectiva se convierte en una cierta equivalencia en cuanto a etiquetas se refiere.

Haciendo uso del contenido del tema anterior, existe siempre una función natural entre el conjunto X y la partición \mathcal{L} ; esta función f se define para cualquier $x \in X$ de forma que: $f(x) = [x]$. Dicha función asigna a cada elemento su clase de equivalencia. Esta función está bien definida, pues cada elemento pertenece sólo a una clase de equivalencia. Además, es una función sobreyectiva pues todas las clases tienen al menos un elemento y por lo tanto son imagen de ese elemento de X . La función sólo resulta ser biyectiva cuando la partición es trivial; es decir, cuando cada elemento es su propia clase de equivalencia viéndolo como subconjunto de X .

Como nota importante cabe señalar que en cálculo, cuando la función existe entre dos conjuntos ordenados, existen los conceptos de función *monótonamente creciente* y función *monótonamente decreciente*. Estas especificaciones son referentes a los cambios. Se dice que es monótonamente creciente si mantiene el orden dado: “a mayor, mayor y a menor, menor”; y que es monótonamente decreciente si invierte el orden dado: “a mayor, menor y a menor, mayor”.

III.5 Relaciones de Orden

Ahora se explicarán las relaciones de orden, el orden es relevante en muchos ámbitos, quizá la idea intuitiva de orden sea un acomodo de las cosas (elementos) y alguien podría preguntar ¿cómo podrían no estar acomodados de alguna forma? Podría parecer que como quiera que se represente un conjunto sus elementos tendrán orden, pero no es así.

Ciertamente es imposible determinar un conjunto por enumeración sin enlistar los elementos en un cierto “orden”, pero los conjuntos que se determinan por descripción en general no tienen un “orden” implícito, pensemos en el conjunto de todos los árboles de mi colonia, en principio este no es un conjunto ordenado y

sin embargo podemos ordenarlo. El problema de dar orden se vuelve interesante cuando el conjunto que se quiere ordenar es infinito, más aún, no numerable.²⁴

Para hacer una abstracción de la idea de orden se generaliza una noción anterior a la de acomodar los elementos en una lista, esta es la noción de comparación de dos elementos, el poder decir si un elemento está antes o después que otro es claramente necesario para que exista un orden en el conjunto. Afortunadamente, esto puede verse como una relación binaria y así es como se parte de las relaciones pidiéndoles propiedades específicas para que se adapten y cumplan las características intuitivas de un orden.

Hay que mencionar que existen muchos tipos de órdenes y en sus definiciones dependiendo del caso diferentes exigencias pueden ser aplicables. Se empieza por definir lo que requiere menos propiedades ya que es más fácil que se cumplan. En todos los casos el orden de un conjunto se entiende por la relación que existe entre los elementos.

Un preorden es una relación binaria reflexiva y transitiva, la propiedad más importante para cualquier orden es la transitividad pues si A es más grande que B y B es más grande que C es “lógico” pensar que A sea más grande que C. La reflexividad resulta ser una de las opciones respecto a la relación de los elementos con ellos mismos, que como se verá, debe ser la misma para todos.

Para que una relación binaria sea una relación de orden debe tener las propiedades de transitividad, antisimetría y dependiendo del caso una de dos reflexividad o irreflexividad.

Cuando es un orden derivado de una relación que cumple con la propiedad reflexiva se le conoce como un orden no estricto; en cambio, si cumple con la propiedad irreflexiva se afirma que es un orden estricto.

Cuando es un orden derivado de una relación que es completa, se le denomina orden total, y si no es así pero cumple con ser un orden, se le conoce

²⁴ Un conjunto no numerable es el que no puede ponerse en correspondencia (mediante una función) biyectiva con un subconjunto de los números naturales.

como orden parcial. Esto quiere decir que todo orden total es orden parcial pero no a la inversa. De tal manera que la ventaja de ser un orden total es que cualesquiera dos elementos se pueden “comparar” con esta relación.

Entonces si R es una relación de orden permite comparar dos elementos, dependiendo del contexto se dice que si se cumple xRy entonces x va antes, después, es mayor que, o es menor que, o cualquier otro comparativo de orden con y .

III.6 Probabilidad y Estadística

Antes de hacer el estudio propio de cada uno de estos dos temas, se hablará de las diferencias y similitudes de entre las dos. Johnson [1990: 25] menciona que, aunque ambas son ramas de la matemática, se suele considerar que “la probabilidad es el vehículo de la estadística”; en el sentido de que no podría haber herramientas estadísticas sin las leyes de la probabilidad.

Explicaremos la diferencia parafraseando el ejemplo dado por el autor para explicar la distinción entre la probabilidad y la estadística; imaginando que se tienen dos cajas, una de la probabilidad y una de la estadística; dentro de la caja de la probabilidad tenemos una cantidad conocida de fichas de diferentes colores (también conocidos), entonces desde la probabilidad se pueden plantear preguntas tales como: ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una ficha ésta sea de un determinado color? Ésta representa la caja de la probabilidad. Por otra parte, la caja de la estadística tiene un contenido desconocido, de modo que, al ir sacando “muestras” de la caja, empezamos a hacer conjeturas y suposiciones de su contenido.

Se puede decir que las ramas son complementarias de alguna forma; mientras que la probabilidad trata con cómo pueden resultar las cosas dadas las condiciones; la estadística se pregunta sobre cuáles debieron o pudieron ser las

condiciones dados los resultados conocidos u “observados”. En concreto, *la probabilidad estudia las propiedades de la frecuencia relativa de los eventos y la estadística constituye una herramienta para la obtención o estimación de dichas frecuencias.*

Para poder formular la definición de lo que es un *espacio de probabilidad*, necesitaremos definir σ -álgebra, que es una estructura de conjuntos importante, y definir medida, que es un tipo especial de función; en las siguientes definiciones se hace un uso de los conceptos de apartados anteriores.

DEFINICION. Una familia \mathcal{F} de subconjuntos de un conjunto Ω es una σ -álgebra (o σ -campo) en caso de que:

- (i) \emptyset, Ω pertenecen a \mathcal{F} .
- (ii) Si E pertenece a \mathcal{F} , el complemento de E también pertenece a \mathcal{F} .
- (iii) Si (E_n) es una sucesión de conjuntos en \mathcal{F} entonces la unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ pertenece a \mathcal{F} .

Al par ordenado (Ω, \mathcal{F}) que consiste de un conjunto Ω y una σ -álgebra \mathcal{F} se le llama *espacio medible*. A cualquier conjunto de Ω se le llama conjunto \mathcal{F} -medible, pero cuando la σ -álgebra es fija (como es el caso normalmente), usualmente se le dice *medible*.²⁵ [Bartle R., 1966: 6]

DEFINICION. Una *medida* es una función \mathbf{P} que adquiere valores en los reales extendidos definida en una σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω tal que (i) $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$, (ii) $\mathbf{P}(E) \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{F}$, y (iii) \mathbf{P} es *aditiva contable* en el sentido de que si (E_n) es cualquier sucesión de conjuntos disjuntos en \mathcal{F} , entonces

$$(*) \quad \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(E_n) \quad .$$

Aunque permitimos que \mathbf{P} tome $+\infty$, hacemos la observación de que la aparición del valor $+\infty$ en el lado derecho de la ecuación (*) significa que o bien $\mathbf{P}(E_n) = +\infty$ para algún n o bien que la serie de términos no negativos del lado derecho de (*) es divergente. Si una medida no toma el valor $+\infty$, decimos que es *finita*.^{26 27 28} [Ídem: 19]

²⁵ En la traducción se cambiaron las letras A, X y \mathbf{X} por E, Ω y \mathcal{F} respectivamente, además se omitió la numeración para evitar confusión y adaptarse al resto del presente trabajo.

²⁶ En la traducción se cambiaron las letras μ, X y \mathbf{X} por \mathbf{P}, Ω y \mathcal{F} respectivamente, además se omitió la numeración para evitar confusión y adaptarse al resto del presente trabajo.

Nótese que en la definición de la cita inmediata anterior, sustituyendo cada E_n por \emptyset en el requerimiento (iii), dado que la unión arbitraria de vacíos es vacío, implica que:

$$\mathbf{P}(\emptyset) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\emptyset) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}(\emptyset) = 0$$

Y por el requerimiento (ii) \mathbf{P} siempre toma valores no negativos, así que la única forma de que esa serie converja es que $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$. Por esto, (ii) y (iii) implican (i) y esto hace al requerimiento (i) omisible.

Haciendo uso de las anteriores dos definiciones fundamentales, será posible dar una definición formal del espacio de probabilidad que será indispensable para hablar con precisión de la probabilidad y a partir de ésta, de la estadística.

*La teoría de la probabilidad es la parte de las matemáticas que se encarga del estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios. (...) El modelo matemático creado durante el primer tercio del siglo XX para estudiar los experimentos aleatorios es el así llamado *espacio de probabilidad*. Este modelo consiste de una terna ordenada, denotada usualmente por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ en donde Ω es un conjunto arbitrario, \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω , y \mathbf{P} es una medida de probabilidad definida sobre \mathcal{F} . [Rincón, L., 2007: 1]*

De esta forma la función \mathbf{P} asignará una medida a todos los elementos de la σ -álgebra. Tanto en probabilidad como en estadística, cualquiera de los elementos de la σ -álgebra (esta sea o no conocida) es considerado un *evento*.

Para que \mathbf{P} sea una *medida de probabilidad* debe —además de ser una medida— cumplir que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. De este último requerimiento se puede deducir

²⁷ Los reales extendidos se definen como los reales unión con el conjunto $\{-\infty, +\infty\}$, con su respectiva álgebra, en la cual, $-\infty$ es menor que cualquier otro elemento de los reales extendidos y $+\infty$ es mayor que cualquier otro elemento de los reales extendidos.

²⁸ Una sucesión la entenderemos como una colección cuyos elementos están enumerados con los naturales. En esta definición (E_n) es una colección de subconjuntos de Ω o, lo que es lo mismo, (E_n) es un subconjunto numerable de \mathcal{F} .

que \mathbf{P} siempre asignará valores del intervalo cerrado $[0, 1]$; esto se demuestra como sigue. Sea E cualquier elemento de la σ -álgebra, dadas las propiedades anteriores, E^c también pertenece a la σ -álgebra y entonces se puede calcular: $\mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(E \cup E^c) = \mathbf{P}(E) + \mathbf{P}(E^c) = 1$, y como ambos valores son no negativos (propiedad de la medida \mathbf{P}), la medida de probabilidad de E debe ser menor o igual a 1. De esto también se concluye que $\mathbf{P}(E) = 1 - \mathbf{P}(E^c)$.

Entre mayor sea la (medida de) probabilidad de un evento se dice que es más probable; siendo 0 la probabilidad de un evento imposible y 1 la probabilidad de un evento “seguro”.

Cada elemento de la σ -álgebra es un evento, por definición los eventos son combinaciones de los elementos de Ω ; es decir que los eventos son subconjuntos de Ω . Además, se hace una distinción en dos tipos de eventos, cuando un evento (conjunto que pertenece a la σ -álgebra) posee solo un elemento de Ω es un *evento simple*; cuando un evento posee más de un elemento de Ω es un *evento compuesto*.

Se debe entender que la probabilidad de un evento compuesto es la probabilidad total de que suceda cualquiera de los eventos simples que contiene. Por lo que la unión de eventos, que también es un evento, es la probabilidad total de que suceda cualquiera de los eventos simples que contiene cualquiera de ellos. Mientras que la intersección de eventos, que también es un evento, es la probabilidad total de que suceda cualquiera de los eventos simples que contienen ambos.

Existen diversas formas de interpretar la necesidad de los requerimientos de la definición, una forma de justificar que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ es que, dentro del universo de posibilidades, algo debe necesariamente suceder, aunque no se sepa qué. Por otra parte $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$, es justificable en tanto que el vacío en el espacio de posibilidades no equivale a que no suceda algo; en vez de eso, el vacío representa, en la σ -álgebra la imposibilidad de que algo suceda. Aclarando que el

resultado de “no haber cambios” puede ser considerado una posibilidad y es diferente a la ausencia de resultado.

Cabe mencionar que, —dado que todos los eventos tienen probabilidad finita— si un evento E tiene probabilidad 0, cualquier evento $A \subseteq E$ también tendrá probabilidad 0, esto se puede demostrar observando que $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(E-A) = \mathbf{P}(E) = 0$ y como las probabilidades son no negativas, para que la suma sea cero ambas deben ser cero, lo que implica que $\mathbf{P}(A) = 0$.

Se define la *probabilidad condicional* de un evento A dado el evento B como el cociente de la probabilidad de la intersección de A y B entre la probabilidad del evento B y se denota por: $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B) / \mathbf{P}(B)$. La motivación de esta definición es obtener una probabilidad de A si se considerara que B actuase como el espacio de probabilidad completo. Por ello se puede observar que: $\mathbf{P}(B|B) = \mathbf{P}(B \cap B) / \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B) / \mathbf{P}(B) = 1$.

Más en particular, cuando se trata con espacios de probabilidad finitos, es común suponer que los eventos simples son equiprobables, es decir que todos los eventos simples tienen la misma probabilidad. Bajo este supuesto, la probabilidad de un evento simple se define como el cociente de 1 entre el número total de eventos simples.

De esta forma la probabilidad de un evento compuesto se puede calcular como el número de eventos simples favorables (que pertenecen a él) y el total de eventos simples en la σ -álgebra. La combinatoria es la rama de la matemática que estudia la manera de contar casos con ciertas características, por ello su uso es indispensable en el cálculo de probabilidades, en especial cuando el espacio de probabilidad es finito.

Para el caso continuo es más complejo, aquí no se puede considerar cada evento simple como equiprobable, pues por la infinidad de eventos simples, es imposible asignar una probabilidad positiva a cada punto de la recta de forma que la recta completa tuviese la probabilidad 1; provocando que —siempre que se le asigne “peso” a todos los elementos de la recta— la probabilidad de cada uno

de los eventos simples sea 0, lo cual no contradice formalmente que la recta tenga probabilidad 1. Resulta muy importante la σ -álgebra, usualmente se trabaja con la σ -álgebra de Borel que es generada por los intervalos abiertos, cerrados, semi-abiertos y semi-cerrados. De forma que se asignan probabilidades a los intervalos, usando como base la integral (que es la base de la medida usual de los subconjuntos la recta). Se tratará con esto más adelante.

Hasta aquí se ha presentado una fundamentación axiomática (con el uso de la lógica y la teoría de conjuntos) de la teoría de probabilidad, por lo que se obtiene una teoría axiomatizada útil al vincular estos axiomas —y sus consecuencias— con las ideas naturales de la probabilidad. A continuación se abordará la probabilidad a partir de conceptos intuitivos y se evidenciará su manifestación en la teoría axiomatizada que se está presentado; para ello comenzamos por tomar la siguiente explicación de lo que es la probabilidad de un evento. “*Probabilidad de que ocurra un evento*: frecuencia relativa con que ocurre ese evento, o frecuencia relativa con la cual puede esperarse que ese evento ocurra.” [Johnson, R., 1990: 117]

A partir de la “definición” anterior, es más simple la interpretación de la medida de probabilidad de un evento, como una posibilidad de ocurrencia respecto a los otros eventos. También se puede relacionar la idea de evento, como algo que ocurre, como uno de los elementos de la σ -álgebra, de forma que cada elemento de la σ -álgebra se interpreta como uno de los posibles sucesos.

La probabilidad también utiliza el principio aditivo y el multiplicativo, los cuales se explicarán a continuación; además se demostrarán²⁹ bajo la teoría axiomatizada de probabilidad.

El principio aditivo de la probabilidad nos dice que la probabilidad de que suceda alguno de dos eventos es la suma de probabilidad de los eventos menos la probabilidad de la intersección. Esto es: $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

²⁹ Que un principio pueda ser demostrado es algo curioso que puede ocurrir cuando se axiomatiza una teoría. Normalmente un principio es tomado cierto para cumplir un cierto propósito, en ocasiones son tomados como axiomas.

Esta igualdad es trivial por la propiedad aditiva contable de \mathbf{P} cuando A y B son conjuntos ajenos. Si la intersección es no vacía, se deben utilizar las siguientes tres identidades de conjuntos:

$$(*) A \cup B = (A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B),$$

$$(**) A = (A-B) \cup (A \cap B),$$

$$(***) B = (B-A) \cup (A \cap B).$$

En donde el lado derecho de las tres es la unión de conjuntos disjuntos por lo que aplicando la medida de probabilidad y su propiedad aditiva contable, al despejar se obtienen las siguientes igualdades:

$$(*) \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A-B) + \mathbf{P}(B-A) + \mathbf{P}(A \cap B),$$

$$(**) \mathbf{P}(A-B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B),$$

$$(***) \mathbf{P}(B-A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

Sustituyendo en la primera de ellas se obtiene lo que se buscaba:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap B),$$

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

El principio multiplicativo de la probabilidad afirma que dados dos eventos la probabilidad de la intersección de ellos se puede calcular como el producto de la probabilidad de uno, por la probabilidad condicional del otro dado el primero, esto es: $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B|A)$. Este principio es una consecuencia directa de la definición de probabilidad condicional, siempre que el evento al que se restrinja la probabilidad condicional tenga medida de probabilidad distinta de cero.

Además, del principio multiplicativo de la probabilidad se deriva el importante concepto de *eventos independientes*, el cual tiene una amplia variedad de aplicaciones en la investigación científica. Quizá la iniciativa para decir que dos eventos sean independientes es que cualquiera de ellos tenga la misma probabilidad de ocurrir, suceda o no el otro.

Esta iniciativa se puede formalizar y transformar en una definición mediante las probabilidades condicionales; de forma que, para que dos eventos A y B fuesen eventos independientes se busca que se cumplan tanto $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B)$

como $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A)$. Se puede observar que las igualdades equivalen a una sola igualdad, lo que lleva o justifica la siguiente definición.

En probabilidad, dos eventos A y B son *eventos independientes* si se cumple que la probabilidad de su intersección es igual al producto de las probabilidades de ambos eventos. Es decir: $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B)$.

Es fácil ver que, por la definición de probabilidad condicional, si dos eventos son independientes se tendrá que:

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B) / \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) / \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A).$$

Por lo cual se tiene que $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B)$ y análogamente $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A)$; estas son las dos características que se buscaba que cumplieran los eventos de forma intuitiva.

Ahora se tratarán otros conceptos más profundos de la probabilidad, se busca mostrar como todo es construido a partir de las definiciones y axiomas anteriormente expuestos, aunque no se explicará todo formalmente; varios de los conceptos siguientes son muy importantes para la estadística.

“Definición. (*Variable aleatoria*). Una variable aleatoria real es una función $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualquier conjunto Boreliano B , se cumple que el conjunto $X^{-1}(B)$ es un elemento de \mathcal{F} .” [Rincón, *op. cit.*: 58]

La definición anterior exige que la imagen inversa de cualquier conjunto de la σ -álgebra de Borel de los reales — $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — sea un elemento de la σ -álgebra de Ω , esto es para que a cualquier elemento de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se le pueda asignar una medida de probabilidad en términos de la medida de probabilidad ya definida de su imagen inversa.

El uso de variables aleatorias permitirá, a partir del espacio de probabilidad que se tenga, definir un nuevo espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P})$ en el cual se pueda trabajar más cómodamente, pues se trabaja con números reales y una σ -álgebra usual. Además, la función \mathbf{P} pasa a estar definida de los reales a los reales, lo cual facilita el uso de herramientas matemáticas. La importancia

teórica de dicha definición y la justificación de los hechos mencionados en este párrafo van más allá de los fines de este trabajo.

Con el uso de variables aleatorias podemos desentendernos de los conjuntos en general y dedicar el estudio a los números reales; en el caso finito esto se puede lograr, por ejemplo, enumerando los eventos simples con los naturales. Asignando como medida de probabilidad a cada número³⁰ —utilizado en la enumeración— la medida de su correspondiente evento, obtenemos un espacio de probabilidad equivalente al original y más fácil de trabajar. En el caso continuo, es común que el espacio de probabilidad original sea considerando los números reales pues no resulta fácil de imaginar un conjunto no conformado por números que tenga la misma cardinalidad.

De tal suerte que, uno se puede enfocar en espacios de probabilidad de la forma $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P})$ sin atenerse a una significativa pérdida de generalidad³¹. Para casos de estudio más elaborados, donde se quiera estudiar más de un valor a medir, se puede hacer uso de estadística multivariante que pasaría a estar definida en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbf{P})$ ³². La justificación de los hechos mencionados en este párrafo va más allá de los fines de este trabajo. Puesto que este trabajo solo estudiará resultados que se describen por un sólo valor para cada jugador, de aquí en adelante, se tratará con el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P})$.

Como ya se mencionó, para distribuir la probabilidad 1 en una infinidad de puntos, cada punto debe tener asignada la probabilidad 0, curiosamente esto no es contradictorio³³; si se piensa en la medida usual para conjuntos de los números reales, cada punto tiene medida 0 pero los intervalos tienen medida de acuerdo a su longitud, aún cuando los intervalos se conforman de puntos. Este hecho

³⁰ Recordando que cada número es un punto de la recta real, además cada punto (como conjunto) pertenece a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ por lo que debe tener una medida de probabilidad.

³¹ Estrictamente si hay pérdida de generalidad, pues originalmente Ω podría ser de una cardinalidad mayor a los reales, pero esos casos no son estudiados por la simple razón de ser espacios muy complicados y sin aplicación.

³² \mathbb{R}^n es el producto cruz de n conjuntos de números reales, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la σ -álgebra de Borel que se define en \mathbb{R}^n

³³ Sería contradictorio, por la propiedad aditiva contable, si la cantidad de puntos fuese numerable pero, ya que los reales son no numerables no tienen tal restricción. Esto también significa que cualquier conjunto numerable de puntos tendrá probabilidad 0, por ejemplo los racionales.

propicia a pensar que existan —y de hecho existen— medidas de probabilidad que distribuyan probabilidad en todos los reales, de forma que la probabilidad de la recta completa sea 1, aun cuando cada punto deba tener probabilidad 0.

Por estas complejas características de la medida de probabilidad, se suele definir una función complementaria que ayude a entender su comportamiento y facilite su estudio. En concreto, la *función de probabilidad acumulada* permite vincular funciones reales especiales con las posibles variables aleatorias.

Definición. (*Función de probabilidad acumulada*). La función de probabilidad acumulada de una variable aleatoria X es la función $F(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, definida como sigue $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$. [Rincón, *loc. cit.*]

A la función de probabilidad acumulada también se le conoce como *función de distribución de probabilidad* y está definida en intervalos que quedan determinados por un solo número real, por lo que es una función de una sola variable real. Y aunque la función F está definida a partir de \mathbf{P} , es posible demostrar que todas las funciones F definibles de esa forma cumplen con las siguientes cuatro propiedades:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

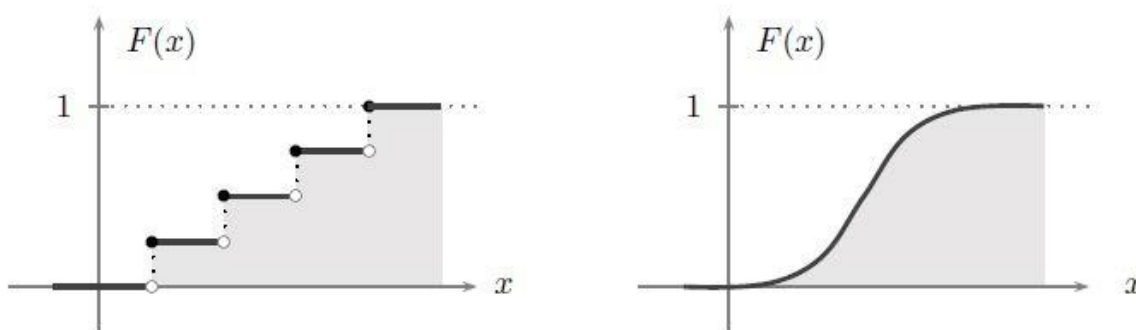
3) Si $x_1 \leq x_2$, entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$.

4) $F(x)$ es continua por la derecha, es decir, $F(x+) = F(x)$.

También se puede demostrar que para toda función que cumpla las cuatro propiedades anteriores existe un espacio de probabilidad y una variable aleatoria tal que dicha función es su correspondiente función de distribución acumulada. [Rincón, L., 2007]. De tal suerte que, el estudio de los espacios de probabilidad es equivalente —dentro de nuestras restricciones— al estudio de las funciones reales que cumplen con las cuatro propiedades anteriores.

Para no entrar en detalles innecesarios³⁴, las propiedades se pueden interpretar como: 1) La función es más cercana a 1 cuando la variable crece indefinidamente. 2) La función es más cercana a 0 cuando la variable decrece indefinidamente. 3) La función es monótona no decreciente. 4) Si se toma cualquier valor, se puede encontrar una secuencia de valores mayores a éste cuyas imágenes en la función de distribución se acerquen tanto como se quiera a la imagen del valor inicial, es decir, el límite derecho de la función en todo punto es igual a la función evaluada en dicho punto.

A continuación se presentan un par de ejemplos gráficos de funciones de distribución acumulada, tomados del autor [Rincón, L., 2007]. El primero corresponde a un ejemplo para un número finito de eventos simples, en el cual la función da “saltos” en los puntos que tienen asignada cierta medida de probabilidad; mientras que el segundo es un ejemplo para una distribución continua en la que aunque todos los puntos tienen medida cero, la función tiende a 1 de manera monótona y continua. También pueden existir funciones mixtas.



De aquí en adelante se considera $F(a-)$ como el límite izquierdo de la función cuando la variable tiende al valor a ; esto es intuitivamente que: en el caso

³⁴ El concepto de límite está definido en general para espacios topológicos, hay una amplia cantidad de definiciones y estructuras necesarias para construir la definición formal. Sin embargo, se logra a partir de la teoría de conjuntos. Definir un espacio topológico, más aún, un espacio métrico esta fuera de los intereses del trabajo por lo que se limitará a una explicación intuitiva.

que haya un “escalón” en el valor a , tomar el valor inmediato anterior al escalón, si no hay escalón (la función es continua en a) se cumple que $F(a) = F(a-)$. Algunas de las igualdades, para cualquiera a y b reales, que son útiles para trabajar con la función de distribución acumulada son las siguientes:

1. $P(X < a) = F(a-)$.
2. $P(X = a) = F(a) - F(a-)$.
3. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.
4. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$.
5. $P(a < X < b) = F(b-) - F(a)$.
6. $P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-)$.

Se presta particular atención al caso en el que F es una función continua, pues la mayoría de las distribuciones de probabilidad, importantes y utilizadas, son continuas. Si F es una función continua, todo eso se puede resumir en:

1. $P(X < a) = P(X \leq a) = F(a)$.
2. $P(X = a) = 0$.
3. $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Ya que la función de distribución acumulada está pensada en describir el incremento de probabilidad que hay al aumentar el número, resulta más o menos natural pensar que su derivada describa el “peso” de los puntos, cuando F es una función continua. Se define la *función de densidad de probabilidad* como la derivada de la función de probabilidad acumulada $f(x) = F'(x)$.

La ventaja de la función de densidad es que permite apreciar gráficamente los puntos con mayor “peso”, y por lo tanto, da una idea de los intervalos con mayor probabilidad. Debe quedar claro que la función de densidad de probabilidad estrictamente no es una medida de probabilidad, es sólo una función auxiliar con fines de apoyo interpretativo. La función de densidad solo coincide con la medida de probabilidad en el caso finito.

Ahora que ha quedado claro lo que son las distribuciones de probabilidad, cabe mencionar que existen numerosas familias de distribuciones; una familia de

distribuciones es un conjunto de distribuciones que comparten una misma fórmula y que se distinguen entre ellas por uno o varios parámetros que determinan por completo a la distribución. Existen tanto familias de distribución discretas como la Binomial, la Poisson, la Bernoulli, entre otras; así como familias de distribución continuas como la exponencial, la gamma, entre otras y quizá la más conocida de todas las familias de distribución, la distribución normal.

El número de parámetros que requiere una distribución varía con la familia de distribuciones; sin embargo, históricamente se ha buscado que los parámetros coincidan con valores relevantes que dan información sobre el comportamiento específico de la distribución.

Buscamos algunos números que tienen interpretaciones significativas y que se pueden usar para describir la distribución de frecuencia de cualquier conjunto de mediciones. Centraremos nuestra atención en dos tipos de números descriptivos: medidas de tendencia central y medidas de dispersión o variación. [Wackerly, D., Mendenhall, W. y Scheaffer R., 2010: 9]

Por lo que en la mayoría de los casos la distribución toma como parámetros números relacionados estrechamente con la esperanza y la varianza de la distribución, que son los representantes más conocidos e importantes de las medidas de tendencia central y de dispersión como se podrá ver en las siguientes definiciones:

La esperanza de una variable aleatoria X se define como la media aritmética ponderada de sus resultados con sus probabilidades, es decir que la esperanza se define como:

Para el caso discreto, enumerando los eventos simples como x_i :

$$\mu = E[x] = \sum_{x_i \in \Omega} x_i f(x_i).$$

Para el caso continuo:

$$\mu = E[x] = \int_{\Omega} x f(x) dx.$$

Por otra parte, la varianza de una variable aleatoria X se define como la esperanza del cuadrado de la diferencia de la variable aleatoria menos la media de la distribución. Con esta definición se tiene la fórmula:

$$\sigma^2 = V[x] = E[(x - \mu)^2] = E[(x - E[x])^2].$$

O lo que es lo mismo por la definición de esperanza. Para el caso discreto, enumerando los eventos simples como x_i :

$$\sigma^2 = V[x] = \sum_{x_i \in \Omega} f(x_i)(x - \mu)^2.$$

Para el caso continuo:

$$\sigma^2 = V[x] = \int_{\Omega} f(x_i)(x - \mu)^2 dx.$$

Tener el entendimiento total de los tópicos anteriores, asegurará no encontrarse con conceptos extraños sin explicación a lo largo de este trabajo, por lo que se recomienda que el lector los tome muy en cuenta para la lectura de este texto ya que en general son importantes para el estudio formal de la teoría de juegos. Pero no se debe subestimar los temas anteriores puesto que normalmente se deben tomar varios cursos para formarse en la materia y por ello la información incluida aquí es sólo introductoria.

IV. TEORÍAS AXIOMATIZADAS

Se le suele llamar “teoría” a aquella conjetura que se hace sobre alguna materia, normalmente a modo de explicación. También parece remitir a una clase de pensamiento de índole especulativo o a un estado contemplativo. E igualmente, se le llama “teoría” a aquel cuerpo estructurado que da lugar a una ciencia.

Al menos tres diferentes acepciones llega a tener la palabra cuando se inquiera sobre su significado. Y si bien es cierto que no son completamente ajenas, las diferencias entre una y otra se vuelven insondables una vez que surge la pregunta de si algo en particular es una teoría o no.

Hacer un uso adecuado de la palabra, de sus diversificaciones y características propias de cada uno de los varios matices que puede adquirir, será relevante para presentar a la teoría de juegos, dado que la aproximación a ella será bajo la luz de sus axiomas. Ver el carácter de dicha teoría matemática en tanto teoría resultará no sólo en una exposición esclarecedora de la teoría misma, sino en un planteamiento de sus presupuestos y nociones que le dan forma y estructura, es decir, un análisis *meta-teórico* de la teoría de juegos.

Así que este apartado tendrá el propósito de hacer una distinción sobre las diferencias que existen cuando se habla de una teoría, de un sistema, o de una teoría axiomatizada. Lo cual posibilitará un análisis en el que será preciso saber a qué de las partes que constituye una teoría se está haciendo referencia. Las problemáticas que lleguen a resultar de la teoría de juegos podrán tener “niveles” diferentes, y por lo mismo, tratamientos diferentes.

Históricamente “teoría” deviene del griego antiguo, y tenía que ver con el teatro. Sin embargo, hoy en día tal palabra suele ir acompañada de algún otro concepto que la matiza, tal como lo es teoría axiomatizada o teoría científica.

Pero, ¿qué es propiamente una teoría? y ¿qué la distingue de entre, por ejemplo, una teoría axiomatizada?

Antes de tratar de dar una respuesta, vale la pena aclarar que también existe una distinción entre una teoría matemática y, por ejemplo, una teoría física. Cuando se habla de teoría en matemáticas, se trata más bien de un sistema lógico formal³⁵, mientras que cuando se habla de una teoría física se remite a hechos o fenómenos físicos “observables” y objetivos. Diferentes clases de teorías responden a diferentes usos y caracterizaciones.

Un común denominador en estas tres acepciones es un carácter especulativo o de conjetura. Dejando de lado por un momento la connotación peyorativa que estos conceptos traen consigo, una teoría sin más parece insinuar una clase de noción que está en el punto intermedio entre conjetura y demostración. Haciendo un símil con la inferencia, la teoría se asemeja en tanto que no posee aún justificación, pero que puede llegar a tenerla. La teoría de juegos, en tanto perteneciente a las matemáticas, trata de adecuarse a un sistema lógico formal y por ello, las teorías de otra clase no serán tratadas aquí.

Las teorías, como las conjeturas, surgen para elucidar algún tema sin ofrecer aún pruebas a su favor (ni en su contra), lo que quiere decir que las teorías carecen de justificación demostrativa. Y es a partir de éstas de donde surgen los intentos de demostración.

Las teorías son un conjunto de proposiciones que describen algún saber en especial, pero que todavía no cuentan con una sistematización que exhiba las relaciones que existen entre estas proposiciones, así que no cuentan con demostraciones del estilo lógico formal. Aunque las proposiciones de una teoría tengan un significado en especial, esta semántica aún no ha sido definida y por

³⁵ Habrá de decirse que esta connotación de “teoría matemática” en el sentido de sistema lógico formal es reciente, pues aunque intentos se hicieron anteriormente (como con la geometría euclidiana), no fue sino hasta el siglo XIX en el que se introdujeron los lenguajes formales en lo que se circunscriben tales teorías.

ello permanece tácitamente. Básicamente, no poseen una sintaxis para juzgar las relaciones entre las diversas nociones que se dan, ni un lenguaje propio definido.

Sin ahondar demasiado en una psicología de la investigación, al iniciar la búsqueda sobre algún tema, usualmente se conocen las consecuencias, pero no la causa que lo explica. Se busca el antecedente que hace necesaria tal consecuencia, a manera de un “por qué”. Ideas suscitadas sin mayor formalidad tratan de dar razón en forma de una implicación, esto es, una condición. Se sabe que el consecuente es verdadero, así que se busca un antecedente *verdadero*³⁶ que dé lugar a tal consecuencia. Así, surge una conjetura (o sea, una proposición sin prueba, pero intuitivamente evidente) para explicar un fenómeno, se crea una hipótesis a partir de la idea provisional, a la que se le sabe como tal y que por lo mismo se le debe de investigar; y por último, una teoría es una serie de proposiciones que surgieron para explicar el fenómeno que dio lugar a la conjetura. Las teorías son una colección de proposiciones a modo de explicación, pero que carecen de una conexión definida, de las que no se sabe su veracidad ni su falsedad, pero que se presumen en cierto sentido como verdaderas.

El lector podrá estar en principio en desacuerdo con esta laxa “definición” de teoría debido a los varios usos que llega a dársele, pero las teorías constituyen en el saber el inicio de la búsqueda de la formalidad, sin que ello quiera decir de modo alguno que las teorías no puedan llegar a tenerla; sin embargo, esto ya constituirá una forma diferente de caracterización y no será simplemente una teoría, sino una teoría con algún otro matiz.

La formalización constituye en no dejar sobreentendido ni los términos, ni las demostraciones. Las relaciones deben de ser expresadas explícitamente para que se logren hacer las demostraciones formales en un sistema lógico.

Evidentemente, y como sucede en la lógica clásica, existen proposiciones de naturalezas diferentes en las teorías formales. En una demostración lógica se parte de una serie de proposiciones (también llamadas “premisas”), sobre las

³⁶ Sobre la veracidad de las proposiciones iniciales se hablará más adelante.

cuales se pueden deducir válidamente otras proposiciones. Las premisas y la conclusión pueden mostrar tanto propiedades del conjunto de premisas, como de la relación misma entre el conjunto inicial y lo que de las premisas se puede inferir. También pueden mostrar relaciones entre ellas, como cuando una implica a la otra y no era “necesaria” esa premisa, o cuando ninguna de ellas ni sus combinaciones pueden deducir lógicamente a ninguna otra proposición inicial, en donde se designa a esto como que las premisas del conjunto son independientes en términos deductivos.

Hacer demostraciones de la independencia de los axiomas no es necesario, como ya se dijo, aunque por elegancia y economía hacer esta demostración puede ser conveniente en algunos casos.

Para demostrar que algún axioma en particular es independiente de los demás, es suficiente encontrar una interpretación que haga *falso* al axioma en cuestión y *verdaderos* los restantes. Una demostración tal demostrará que el axioma en cuestión no es deducible, como teorema, de los restantes, porque si lo fuera sería verdadero en cualquier asignación de significados que hiciera verdaderos a los demás. Si para cada axioma es posible encontrar una interpretación tal, esto demostrará que el conjunto de axiomas es independiente. [Copi, I. M., 1954: 195]

Así, una serie de proposiciones pueden verse desde una perspectiva meta-teórica. Cuando se habla de una “meta-teoría” lo que se está caracterizando no es propiamente a la teoría en cuestión, por ejemplo, no se estará refiriendo a un problema en particular que se resuelve utilizando la teoría euclidiana de geometría, sino a aquello que la teoría de Euclides utiliza para explicar de manera general esta geometría.

El estudio desde una perspectiva *meta-teórica* requiere, a su vez, de un lenguaje mediante el cual se inscriban las características que lo delimitan, por lo que debe decirse que el lenguaje con el que se realizará el examen será, además del español, el de la lógica clásica. Esto quiere decir que algunas otras formas de aproximarse al problema de lo que una teoría —y una teoría axiomatizada— constituye no serán abordadas, únicamente se recurrirá a herramientas dadas por la lógica clásica para dilucidar y tratar de definir lo que una teoría es.

Con este respecto se hará uso de la lógica para describir algunos aspectos de las teorías y de la axiomatización de las mismas, por lo que la lógica constituirá nuestro *metalenguaje*. Mientras que el objeto de estudio, *i.e.*, las teorías, serán el *lenguaje objeto*, pues sobre él versa la discusión, pero no con éste se dan las respuestas.

Dado lo anterior, considérense aquellas nociones revisadas en la sección III.1, donde se ha dicho que un argumento se conforma por unas premisas —las que se consideran verdaderas—; y de una conclusión que se sigue lógicamente de las premisas. A su vez, las premisas y la conclusión misma son proposiciones que han sido dispuestas en forma de una implicación, en donde:

$$(p_1 \& p_2 \& p_3 \& \dots \& p_n) \rightarrow c.$$

Está por demás decir que la lógica no hace reparos en la verdad de las premisas, sino que pondera las condiciones bajo las cuales estas “verdades” pueden derivar nuevas proposiciones que hereden esta propiedad inicial de verdad, por lo que partir de proposiciones falsas, aunque como ejercicio puede resultar útil, es una empresa fútil si se quiere hacer un sistema de una teoría.

Así que, la validez del argumento que parte de proposiciones verdaderas dependerá directamente sólo de las reglas que conforman la lógica. Esta conexión es de la que se tratará, y de lo que en general se ocupa cualquier intento por formalizar el conocimiento.

Las reglas que establecen si una conclusión es válida es lo que se conoce como *sistema*, el cual da los parámetros para que una cadena (o concatenación) de símbolos sea una fórmula bien formada, pues se trata de reglas sintácticas cuyo contenido puede tener sentido dadas las condiciones previas establecidas por él. Así, por ejemplo en lógica se sabe que una fórmula bien formada debe de cumplir características como la agrupación de términos mediante el uso de paréntesis para establecer una jerarquía, o el uso correcto de la negación antes de una proposición atómica; o en español, que la ordenación de los símbolos (letras)

puede dar significado y ser una palabra u oración. La sintaxis o reglas de ordenación de símbolos posibilitan la semántica o el significado.

El sistema, en parte es la sintaxis, o el correcto ordenamiento de los caracteres, pero también establece los símbolos “permitidos” dentro de él. Esto quiere decir que el lenguaje bajo el cual se puede desarrollar una teoría lo establece el sistema. Mientras la teoría puede considerarse como la semántica o la interpretación particular; el sistema es el alfabeto admitido y su uso correcto para generar con éste un *lenguaje formal*, i.e., el conjunto de todas las fórmulas bien formadas dadas las condiciones establecidas.

La axiomatización es el proceso mediante el cual se define la teoría, o sea las conclusiones y las conjeturas, y el sistema que estructura y genera las reglas que den la imagen. La separación de aquello que constituye la teoría y las reglas mediante las cuales se derivan las conclusiones deseadas permite que dentro de la investigación sea posible establecer los alcances de la teoría y si es posible su validez y consistencia.

Las teorías poseen las conclusiones y las conjeturas, pero para establecer si esas conjeturas conllevan *sólo* a esas determinadas conclusiones deseadas el sistema debe denotarlo. Las conjeturas que tratan de explicar las consecuencias bien podrían no solo implicar aquello que se desea, sino otras proposiciones que pueden resultar en contradicciones. De ahí la importancia de la axiomatización.

Para separar aquello que constituye la teoría de lo que es la estructura o sistema, la axiomatización primeramente hace una distinción entre aquellos términos de los cuales se sirve la teoría, y de las otras teorías científicas en las que se apoya. Los términos usados en las teorías evidentemente aún no están definidos, y parte importante de la axiomatización de una teoría es hacer explícitos los términos utilizados definiéndolos. Pero definir absolutamente todos los términos es una tarea imposible; justo como sucede con los lenguajes naturales

en donde suele recurrirse al uso de “sinónimos”, cayendo en una circularidad (pues un término te remite al otro y viceversa).

Por ello necesariamente se hace uso de términos que no poseen definición, no al menos dentro de la teoría. A estos términos se les suele llamar “términos primitivos”, y es a partir de estos sobre los que se va construyendo la teoría y se genera el sistema.

El ideal de la ciencia, entonces, no puede ser un sistema en el que *cada* proposición se demuestre y *cada* término se defina sino que es una en que un número mínimo de proposiciones bastan para la deducción del resto de ellas y un mínimo de términos son suficientes para definir todos los demás. Este ideal del conocimiento se describe como un *sistema deductivo*. [Copi, *op. cit.*: 187]

Igualmente, toda argumentación tiene un origen, las demostraciones no pueden ser sucesiones infinitas, por lo que no todo puede demostrarse. “Todo sistema deductivo, bajo la pena de caer en un círculo o regresión viciosa, debe contener algunos axiomas (o postulados) que se suponen, pero no se demuestran en el sistema.” [Ídem: 187] La mayoría de las ciencias parten de nociones “prestadas” de otras teorías, soliendo usarse algunas partes de la matemática, de la teoría de conjuntos y la lógica [Cfr. Suppes, P., 1957: 246-259]. La lógica y la teoría de conjuntos, por ejemplo, frecuentemente son la estructura fundamental de las teorías científicas, pues se busca que las teorías posean validez, y que el conjunto de las proposiciones iniciales sea consistente.

De algunas proposiciones se debe partir para, con estas y con el sistema deductivo, derivar otras proposiciones. La verdad sobre estas proposiciones no puede establecerse mediante el sistema, pues como se dijo anteriormente esto llevaría a demostraciones circulares.

Todo argumento con el que se intente establecer la verdad de los axiomas está, definitivamente, *fuera* del sistema, es decir, que es *extrasistemático*. [...] Toda proposición de un sistema deductivo que se suponga, sin demostración en el sistema, es un axioma de ese sistema.

El término sistema deductivo formal es simplemente un sistema deductivo, que consiste en axiomas y teoremas, algunos de cuyos términos indefinidos

o primitivos son símbolos arbitrarios cuya interpretación es completamente extrasistemática. [Copi, *op. cit.*: 193-194]

Una interpretación de aquellos símbolos primitivos, así como su verdad constituyen algo que se encuentra fuera del sistema deductivo. Las proposiciones deben ser remplazadas por fórmulas si se quiere ser riguroso, dado que las proposiciones tienen una interpretación particular. Las fórmulas, por el contrario carecen de una interpretación y en realidad son simplemente cadenas de símbolos aún sin sentido, inclusive para el sistema. Para que una fórmula sea una fórmula bien formada, debe de ser descrita una sintaxis para establecer las reglas que se deben seguir. Dadas las condiciones de lo que constituye una fórmula bien formada, y con ello el lenguaje formal, se pueden usar éstas en vez de proposiciones con una interpretación.

El sistema, a su vez no sólo debe de especificar un lenguaje, sino que ese lenguaje que sustituya a los términos y proposiciones de la teoría debe de poder expresar todas las proposiciones de la teoría. Es decir, aunque se establezca un sistema con una sintaxis bien definida y con ello crear el lenguaje formal, el sistema debe de poder expresar todas y cada una de las proposiciones de la teoría. De nada servirá tener el conjunto de las fórmulas bien formadas, si éstas no son capaces de expresar todo aquello que se dice en la teoría.

La existencia de términos que no pueden ser definidos genera una nueva condición para la axiomatización: todos estos términos deben de ser señalados como tales, confiriéndoseles un estatus diferente. Igualmente, aquellas fórmulas sobre las que no se puede ofrecer una definición, son una clase diferente de fórmula.

Las nociones primitivas se deben de tomar como premisas o *axiomas*, es decir como punto de inicio para la investigación, los cuales deben de tener “un significado que apele fuertemente a la intuición”[Suppes, P., *loc. cit.*] “Las únicas nociones referidas en los axiomas deben ser las nociones primitivas, las nociones definidas en términos de las nociones primitivas, y las nociones pertenecientes a

las teorías asumidas a priori” [Suppes, *loc. cit.*]. Suponer más allá de lo expresado en los axiomas constituiría inevitablemente el fracaso de la axiomatización.

Los axiomas deben de presentar todo aquello que se ha supuesto para poder derivar con este mínimo de proposiciones el cuerpo de la teoría. Los axiomas suponen el punto de partida, con los que el sistema³⁷ podrá ser capaz de deducir otras proposiciones llamados *teoremas*.

Los *teoremas* son el resultado directo de la interacción de los axiomas y el sistema deductivo, esto es, mediante las premisas o axiomas, el sistema que se ha supuesto podrá derivar proposiciones diferentes de las originales pero que se siguen —lógicamente— de éstas.³⁸

A estos axiomas se les ve desde el sistema de la lógica deductiva como premisas, de las cuales se pueden deducir válidamente otras fórmulas —teoremas—.

Claramente puede suceder que las premisas que se están usando no sean todas indispensables, es decir, que una o la combinación de algunas deduzcan a una tercera, en cuyo caso esta tercera sería prescindible, como sucede en el siguiente caso:

$$[\neg(\neg p \vee q)] \& [\neg(q \vee \neg q) \vee p].$$

La segunda parte de la conjunción implica lógicamente a la segunda, dadas las reglas de inferencia; así que esta segunda parte de la conjunción no es necesaria.

³⁷ Cabe reiterar que el sistema se trata de la estructura o “esqueleto” que permite hacer las conexiones entre las proposiciones y las conclusiones; y que normalmente se sobreentiende a la lógica y a la teoría elemental de conjuntos como este sistema. La lógica y la teoría de conjuntos a su vez se valen de términos propios, que no se definen como tal. No es posible no partir de supuestos, y la lógica no está exenta.

³⁸ No se olvide aquí que el sistema asumido en cuestión es la lógica, por lo que podemos aseverar cosas como “demostración” o “deducción”, aunque no se haya dado una definición de ninguna de estas nociones.

Establecer un mínimo de premisas no sólo ofrece una demostración más “limpia”, sino que facilita el trabajo del investigador al ofrecer argumentos más claros y asequibles en tales demostraciones.

Se mencionaba con anterioridad que la axiomatización de una teoría también permite al investigador aducir si el sistema es válido y consistente. Habiendo hecho para el momento la correspondiente conexión entre la lógica y los sistemas, es posible ahora ver más formalmente cómo se puede establecer si una teoría es consistente y válida.

Considérese una serie de axiomas o premisas de las cuales se sigue la negación explícita de una de éstas, o que se siguen tanto t como $\neg t$.

$$(p_1 \& p_2 \& \dots \& p_n) \rightarrow (t \& \neg t),$$

$$(p_1 \& p_2 \& \dots \& p_n) \rightarrow \neg p_1.$$

Si del sistema se puede deducir una fórmula y su negación como teoremas, entonces el sistema es *inconsistente*. El que un sistema sea inconsistente implica que todas las proposiciones pueden deducirse de este conjunto inicial de proposiciones, teoremas y sus negaciones explícitas, lo que hace inútil el sistema. Una vez que estas fórmulas son reemplazadas por una interpretación en particular (una teoría), constituirán proposiciones que se contradicen, y por ello, sin valor.

Si los teoremas que se derivan de nuestro conjunto de axiomas conducen a contradicciones (como es el caso), entonces el argumento será válido. La razón es que el conjunto de fórmulas iniciales son contradictorias, y de un conjunto de premisas contradictorias se sabe que el valor de verdad de dicha implicación será en cada modelo verdadero, o sea, tautológico. Si se pueden deducir contradicciones como teoremas, nuestro conjunto de axiomas es inconsistente, pero el argumento será necesariamente verdadero.

Para que un sistema se diga consistente debe darse el caso en el que existan fórmulas que no se puedan demostrar, tal como se señaló en el subapartado de III.1 Lógica y Conjuntos.

Estas son algunas de las condiciones que debe de satisfacer el sistema para que se cumpla que sea consistente en tanto su conjunto de proposiciones iniciales; y válido en tanto el argumento mismo.

V. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE JUEGOS

V.1 El Juego, los Jugadores y los Resultados.

Antes de comenzar a hacer las consideraciones intrínsecas acerca de la teoría de juegos vale la pena decir plenamente a qué se referirá con cada uno de los términos sobre los cuales se apoyará lo subsecuente. Acotando y delimitando su uso y diferencias entre uno y otro para esclarecer términos que quizá podrán parecer confusos o ambiguos en tanto que su empleo cotidiano podría simular ser un sinónimo de algún otro término, o no estar definido adecuadamente.

Cuando piensa en un juego se habla de una situación en donde dos partes (al menos) se encuentran en una posición antagónica, es decir, en un conflicto de intereses; o que la preferencia que persiguen son diferentes, y a veces opuesta. Y que, como se mencionó, si las preferencias entre los individuos son exactamente las mismas, entonces el conflicto de intereses no existe. Pero un juego necesariamente debe contar con una serie de reglas o instrucciones inquebrantables que deben de estar adecuadamente definidas desde el inicio.

El desarrollo de un juego sucede de la siguiente manera: dentro de un juego se supone deben de existir una serie de reglas que especifican y definen los *movimientos*, esto es, un *movimiento* es el punto en donde el jugador se encuentra con varias alternativas posibles dadas por las inherentes reglas internas del juego, pero cuando un jugador ha escogido una alternativa particular en el momento de tomar de decisiones se dice que ha hecho una *elección* o una *jugada*, para ponerlo en términos más comunes. A su vez, cuando se han llevado a cabo una

secuencia de elecciones realizadas una tras otra (hechas por un jugador o por varios) hasta que el juego termine será *jugar* el juego.

En simples términos, los movimientos son los momentos en los que se encuentran varias posibilidades y cuando se resuelve por una de éstas ya se está hablando de una elección o jugada. Al conjunto sucesivo de jugadas o elecciones realizadas por un jugador hasta la conclusión del juego se les considera una manera de jugarlo. “De tal manera que los movimientos están relacionados con las elecciones en la misma forma en que lo está el juego con el jugarlo. El juego consiste en una secuencia de movimientos, y el jugarlo se trata de una secuencia de elecciones.” [Von Neumann, J. y Morgenstern, O., 1955: 49]

Como se puede ver, la explicación clara de las diversas distinciones y precisiones entre conceptos que provienen de esta teoría parecen todo un trabalenguas en español por lo mismo de que se trata de una misma raíz en casi todos los aspectos anteriormente descritos. La palabra “jugar” tiene muchas acepciones y derivaciones que resultan en sutilezas al querer acotar sus propias morfologías lingüísticas a un acoplamiento con los conceptos de la teoría de juegos. De ahí que se ha recurrido hacer una correlación un tanto más natural e intuitiva entre algunos términos; y en otros, se han necesitado utilizar palabras que podrán parecer un tanto forzadas.

De tal suerte que, como menciona Huang [2010: 2], normalmente un juego G se determina por tres componentes: el primero, un conjunto de jugadores que se denotará con I , se supondrá que el número de jugadores es finito y por lo tanto se representará como $I = \{j_1, j_2, j_3, \dots, j_n\}$.

El segundo componente es, que para cada jugador se tendrá un conjunto de movimientos posibles, el conjunto de movimientos posibles para el jugador j_i se denota por S_i ; los elementos de cada S_i pueden ser una lista ordenada de elecciones dependiendo de las jugadas que correspondan al jugador j_i a lo largo del juego.

Al conjunto $A = S_1 \times S_2 \times S_3 \times \dots \times S_n$ se le denomina como el *espacio de todos los perfiles de acción*; cada elemento de A es una lista ordenada con las decisiones de todos y cada uno de los jugadores, por lo que es una forma en que el juego puede ser jugado y cualquier configuración de elecciones es representado por un elemento de A .

Si se le considera al azar como uno más de los jugadores —aunque éste no cumple los supuestos de racionalidad— se logra que todas las formas en que se pueda jugar el juego estén consideradas en el espacio A , haciendo falta sólo las distribuciones de probabilidad en cada jugada del azar para determinar por completo las condiciones teóricas del juego.

El tercer y último componente, desde la perspectiva en que se está abordando la teoría se dividirá en dos partes: un conjunto R en el que se consideren todos los posibles resultados del juego,³⁹ y una función $\phi: A \rightarrow R$. Dicha función será necesaria para decidir el resultado correspondiente y, naturalmente dependerá de la forma en que el juego es jugado.

V.2 Las Preferencias y la Utilidad

Una de las partes constitutivas de la teoría de juegos es el concepto de “preferencias”. Como ya se había señalado, las preferencias de los jugadores son parte inherente a los juegos, pues en su consideración radica la idea de la estrategia; y es en las preferencias que varios de los axiomas de la teoría se ven reflejados, como el axioma de racionalidad en los jugadores.

Considerando el conjunto de jugadores I , a cada jugador se le asignará una preferencia sobre los posibles resultados. De aquí que cada jugador posea una relación de preferencia que, a su vez, tiene características particulares que dependen de ese jugador. Cuando sea necesario, se hará una clara distinción

³⁹ Por lo que puede ser un conjunto finito, numerable o no numerable.

sobre a cuál de los jugadores pertenece la preferencia, pero cuando este no sea el caso se asumirá que la preferencia de la que se está hablando corresponde al jugador en cuestión —usualmente el jugador 1—.

La primera consideración será sobre cómo es posible formalizar la idea de preferencia en un lenguaje matemático; para eso se debe identificar el concepto de *preferir* como una comparación, usualmente se deben comparar las opciones para discernir cuál es “preferible”. Por ello es que las preferencias de los jugadores son representadas mediante una relación binaria, con los posibles resultados como dominio de discurso. Esta relación binaria permitirá comparar dos resultados para determinar el preferible para el jugador.

Las limitaciones impuestas a las preferencias a manera de presupuestos, funcionan desde distintas perspectivas; facilitando así el trabajo, y al mismo tiempo eliminando algunos casos irrelevantes, como en el que todos los resultados sean a la vez “mejores y peores” que cualquier otro (cada uno se relaciona con todos) o donde ninguno es comparable (no existen dos que se relacionen). Ambos casos como ejemplos de juegos triviales para el jugador en cuestión.

Inicialmente se tendrá el importante supuesto de que el jugador, al presentársele dos resultados, siempre puede decidirse entre las siguientes opciones excluyentes: o prefiere alguno de los dos o le parecen iguales; cuando dos resultados le parecen igual a un jugador se dice que le son resultados indiferentes. Esto se traducirá en un supuesto de “*ser completa*” para la relación que representará a las preferencias.

Este supuesto puede tener conflictos en la práctica, ya que muchas veces al presentarse dos escenarios posibles los individuos no pueden determinar cuál de los escenarios les parece mejor, pero tampoco aceptar que los escenarios sean iguales para ellos, considerándolos incomparables. Sin embargo, esta suposición es razonable en tanto que el jugador sea consciente de lo que pretende.

También se tendrá el supuesto de la transitividad; es decir que, si una persona prefiere a A sobre B y B por encima de C, entonces preferirá a A sobre C.

Aunque puede darse el caso de que este supuesto no se dé en la práctica, pues en general las preferencias personales pueden no ser transitivas.

Pero si la transitividad no se cumpliera, el jugador quedaría expuesto a ser manipulado. Imaginemos que el jugador 1 prefiere A sobre B, B sobre C pero sus preferencias no son transitivas ya que no prefiere A sobre C; por el supuesto de ser completa, se puede concluir que prefiere C sobre A. Dado lo anterior el jugador 2, al notar la carencia de transitividad del jugador 1, le pida una recompensa a éste para cambiar el resultado C por el resultado B (ya que es preferible para el jugador 1), pero después podría pedirle una recompensa por cambiar el resultado B por el resultado A (por la misma razón), y una vez más pedir una recompensa para cambiar el resultado A por el C (volviendo a las condiciones iniciales). De esta manera el jugador 2 sacaría ventaja del jugador 1 que no tiene preferencias transitivas. Por ello se concluye que la transitividad es un supuesto razonable para las preferencias.

Por último, tiene sentido que la relación sea reflexiva pues un resultado debe ser indiferente de sí mismo. Así la relación posee estas tres propiedades: es reflexiva, transitiva y completa; lo que significa que es un preorden total, pero aún no satisface todas las propiedades deseadas. Por ahora podemos definir esta relación como la *preferencia débil* de un jugador.

La relación que representa la preferencia débil del jugador se simboliza mediante " \succeq ", de forma que $A \succeq B$ se debe entender como que "A es al menos tan preferible como B". Se dice que esta es una preferencia débil pues A y B pueden ser resultados indiferentes.

V.2.1 Relación de Orden de las Preferencias

Ya hemos logrado definir una preferencia débil, pero es deseable definir un orden total para cada jugador; para lograr esto, como se mencionó

anteriormente, será necesario recurrir a una estructura que se generará en los resultados mediante clases de equivalencia.

La relación de orden de los resultados, que también se puede nombrar como la preferencia que posee cada uno de los jugadores, se requiere como un orden ya que debe permitir al jugador comparar los resultados de un juego y decidir cuál es “mejor o peor” para él.

Las propiedades necesarias para que una relación binaria sea una relación de orden quedaron explicadas anteriormente en este trabajo; y con el fin de que efectivamente, sea una relación de orden se tienen los supuestos sobre las preferencias de los jugadores “racionales”.

Otras de las características que suelen suponerse para la relación de preferencias son, dependiendo de la situación que suceda: la reflexividad o irreflexividad, aunque cualquiera de esas dos propiedades puede elegirse, debe tener alguna de las dos para poder considerarla una relación de orden sin poder, evidentemente poseer ambas propiedades.

De la misma forma que los órdenes, cuando las preferencias se representan con una relación de orden que cumple con la propiedad reflexiva se les conoce como preferencia no estricta; en cambio, si cumple con la propiedad irreflexiva se afirma que es una preferencia estricta.

Otra propiedad relevante para esta relación, que se da en muchos contextos es el de ser una relación completa, aunque esta propiedad no es indispensable para ser una relación de orden, facilita el trabajo y evita que existan resultados incomparables para el jugador.

También cuando es una preferencia representada con una relación de orden que es completa, se le denomina preferencia total, y si la relación de orden no es completa, se le conoce como preferencia parcial. Claramente es una ventaja trabajar con preferencias totales ya que las preferencias parciales pueden tener resultados incomparables para el jugador.

V.2.2 Ordenamiento de Resultados por Preferencias

Un caso importante es cuando la relación de utilidad es un orden completo no estricto, esto quiere decir que cumple con la reflexividad, transitividad, la antisimetría y que todos los elementos son comparables. Esto basta para poder definir sin problemas, en juegos con un número limitado de resultados posibles, una función que va del conjunto de resultados R a un subconjunto de los números naturales, tal que cumpla con ser una función biyectiva.

Demostrar que esta función biyectiva existe, es solo demostrar de manera formal que los resultados del juego se pueden enumerar respecto a esa relación de orden (por ejemplo “mayor que”), sin repetir el mismo número para dos resultados y estando seguros de que para cualesquiera dos, es preferible el resultado asignado al número mayor (o menor, dependiendo de la enumeración). De esta forma, la enumeración nos permitirá determinar exactamente cuál es el “mejor” y el “peor” resultado del juego y todos los intermedios, según las preferencias del jugador.

Esta función será equivalente al proceso de permutar los resultados posibles haciendo que cumplan con estar ordenados según la preferencia del jugador. Aunque esto no siempre es posible ya que se puede dar el caso de que existan dos resultados que no puedan ser comparados entre ellos o que sean iguales en términos de preferencia.

El poder reconocer exactamente cuál es el mejor resultado del juego para cada individuo (y sus preferencias) puede ayudar a la toma de decisiones del mismo y también a intentar predecir las decisiones de los otros jugadores para tomarse en cuenta en la estrategia.

V.2.3 La Función de Utilidad

La representación más comúnmente utilizada para expresar las preferencias de un jugador es mediante una función de utilidad. Esta función se puede construir mediante las preferencias cuando éstas cumplen con ser una relación de orden.

Si las preferencias de un individuo son consistentes de tal manera que resulten prescriptivas, entonces sus preferencias pueden ser numéricamente representadas mediante lo que se conoce como una función de utilidad. Esta función de utilidad posee la importante propiedad de que, una persona prefiere una lotería por encima de otra si y sólo si la utilidad esperada de la primera es mayor que la utilidad esperada de la segunda. Por consiguiente, el supuesto deseo individual de resultados preferentes se convierte, en la teoría de juegos, en el problema de maximizar la utilidad esperada. [Luce, D. y Raiffa, H., 1985: 4]⁴⁰

Usualmente se puede decir que las preferencias son una función de utilidad, lo que facilita su interpretación y la búsqueda de maximizar los beneficios. La función de enumeración mencionada anteriormente es un caso especial de función de utilidad, pero la función de utilidad tiene la ventaja de poder asignar el mismo número a varios resultados.

La función de utilidad se conjuga de manera importante en la teoría de juegos, convirtiéndose en el punto crítico a considerar en la toma de decisiones ya que representa aquello que se quiere conseguir. El estudiar las funciones de utilidad permite la aplicación de una gran parte de las matemáticas que comprenden diversos tipos de funciones.

Hasta el momento, las preferencias se definieron como una relación de orden binaria entre los resultados del juego. Una forma diferente de entender las

⁴⁰ Aunque a este punto no se han definido las loterías, entiéndase temporalmente sólo como un tipo especial de juego. Estos juegos cuentan con características que permiten a los autores hacer requerimientos —en forma de supuestos— sobre los juegos, los cuales se abordarán en el apartado VII.1 Caracterización de la Teoría de Juegos.

preferencias es mediante el uso de una función de utilidad, aunque esta instancia solo se puede utilizar eligiendo adecuadamente el conjunto de imagen de la función; o sea, a qué conjunto queremos que la función nos envíe para que se utilice y aproveche el orden usual de dicho espacio, buscando que en la imagen de la función se mantengan las relaciones entre resultados, es decir, se dé sin perder información.

En general, se supondrá que la imagen de la función (y en su caso el rango de la función) está contenida en los números reales, para lo cual se requerirá que las preferencias sean totales, ya que los números reales son un conjunto con un orden usual total estricto (menor que) y un orden usual total no estricto (menor o igual que).

La ventaja principal de la consideración de una función de utilidad es facilitar el trabajo de la teoría, aprovechando las relaciones de orden usuales con las que podríamos estar más familiarizados. Normalmente se utilizará la relación " \leq " (menor o igual que) o la relación " $<$ " (menor que), que se pueden reconocer como las relaciones de orden no estricto y estricto respectivamente, definidas en los números (naturales, enteros, racionales o reales dependiendo del caso).

La idea de la función de utilidad es asignar a cada posible resultado un número (en general lo consideraremos número real), tal que ese número lo represente adecuadamente con la relación de orden de los números respecto a los asignados a los otros posibles resultados; es decir, a estrategias preferibles generalmente le asignamos números mayores (aunque podría ser que a estrategias preferibles se le asignen números menores).

La función de utilidad es, en cierta forma, similar a la función de enumeración mencionada anteriormente, puesto que asigna números a cada uno de los resultados; aunque difieren en que la función de utilidad goza de mayor generalidad (toda función de enumeración se puede ver como función de utilidad pero no a la inversa) y puesto que no es necesariamente biyectiva, también puede asignar el mismo número a más de un resultado. Así mismo, la función de utilidad

permite trabajar con una infinita (e incluso en algunos casos, no numerable) cantidad de resultados del juego, lo que le da mayor fuerza.

Y no conforme con esto, es posible definir esta función de utilidad aún en algunas de las preferencias parciales. Por ello mismo, la función de utilidad no se puede ver como una permuta de los resultados, mientras que permite que dos de ellos sean considerados igual de preferibles.

Claro está que la desventaja de esto es que se pierde la biyectividad, y con esto podemos encontrarnos en la situación en que no seamos capaces de saber a qué resultado corresponde el valor de la función que preferimos sobre todos los demás, y por ello también se deja de hablar de máximos y mínimos para hablar de maximales y minimales⁴¹.

Unas preferencias bien definidas implican la capacidad de los jugadores conscientes de ellas, a poder deducir lo que el otro preferirá (dado que pueda o no, tener la misma información), pudiendo hacer así un patrón consistente de decisiones que tomen en cuenta todas las preferencias, no sólo del jugador que toma la decisión. Lo que llevará a la formulación de posibles estrategias.

V.3 El principio de racionalidad

La noción de “racionalidad” se puede analizar bajo diversas perspectivas y ser definida en diferentes formas dependiendo del ámbito, contexto y el objetivo en el que se inscribe. En la teoría de juegos *el principio de racionalidad* se determina por los siguientes aspectos principales, los cuales se ven reflejados en la forma en la que los jugadores actúan en un juego.

⁴¹ Un máximo es el que toma un valor *mayor que cualquier otro* y el punto que lo toma es único; mientras que un maximal toma un valor *mayor o igual a cualquiera de los otros*, por lo que puede no ser único. Análogamente, el mínimo es único pero pueden existir varios minimales.

El primero es en tanto las preferencias de cada jugador, las cuales se presuponen como un ordenamiento de los resultados; lo que incluye la transitividad y otras características de una relación de orden explicadas con anterioridad. Esto permite que se tenga en claro cuál resultado es mejor —o en su defecto cuáles, siendo indiferentes— para cada jugador individualmente.

El segundo es respecto a maximizar su resultado, pues se asume que cada uno de los jugadores busca obtener el resultado que más prefiere de entre todos los resultados posibles. La capacidad del jugador para lograrlo dependerá del análisis del juego mismo, de la información disponible y de los posibles resultados del juego, así como de las preferencias de los otros, ya que determinarán sus decisiones. El principio de racionalidad en ocasiones no es tomado en cuenta desde esta perspectiva, por ejemplo, al considerar el azar como un jugador, dado que el azar no se considera un jugador “razonable”.

Aquí cabe indicar que, aunque los jugadores toman en cuenta la acción y/o la inacción de los otros jugadores, esto no quiere decir que busquen perjudicarlos; sino más bien se reconoce que las acciones de los demás afectan nuestras decisiones, dado que influyen en el conjunto de posibles movidas que nos estén disponibles, además afectan directamente los resultados del juego. En principio, ningún jugador tiene preferencia respecto “ayudar” o “perjudicar” el resultado de los jugadores, sólo buscan lograr su interés personal. Claro que es posible añadir características de colaboración o competencia a un juego en particular, lo cual modifica las preferencias de los jugadores, como sucede en los juegos cooperativos.

Así que, en cierta forma, los jugadores son “indiferentes” sobre las preferencias de los otros jugadores, en el sentido que, aunque se consideran las preferencias de los otros en las estrategias es indiferente el resultado que los otros obtengan y sus preferencias en ellos.

Por último, el *principio de racionalidad* se relaciona con los recursos disponibles para los jugadores. En teoría de juegos se sobreentiende que todos

los jugadores no solo son racionales, sino que pueden ejercer esta capacidad haciendo uso de todos los recursos necesarios para ello. Es decir que, el jugador tiene a su disposición recursos suficientes para poder formar estrategias razonables, como lo es el tiempo y espacio para analizar toda la información que tenga disponible. Sin esta consideración, aunque un jugador tenga la capacidad de actuar razonablemente, estaría imposibilitado para ello.

V.4 Las Estrategias

Se puede pensar que la estrategia adquirida por un jugador, es como su manera de jugar —o plan de juego— durante toda la partida. Se le denomina estrategia a todas las decisiones que toma un jugador durante el juego o bien, en su caso, a los criterios que utiliza para la toma de éstas. Esto quiere decir, que cualquier elección que tome un jugador, esté justificada o no, es parte de su estrategia.

Generalmente una buena estrategia considera todos aquellos aspectos que pueden suceder dentro del juego mismo cambiando sus resultados, así como la nueva información que se vuelva disponible al jugador.

Por lo que en la elección de una estrategia razonable están también involucradas las preferencias racionales vistas (en la mayoría de los casos) como una función de utilidad. De forma que los resultados del juego se pueden comparar para determinar un resultado preferente; y en algunos casos, muestren al jugador una estrategia plausible que le conduzca a la obtención de dicho resultado.

Se puede pensar en la estrategia de un jugador como un conjunto de instrucciones para jugar un juego dado de principio a fin. Inversamente, cada diferente forma en que un jugador puede jugar un juego es una estrategia de ese jugador. Si enumeramos todas las diferentes formas que un jugador puede jugar el juego, obtenemos todas las estrategias de dicho

jugador. Por supuesto, algunas de esas estrategias pueden ser obviamente mediocres, pero son incluidas en la enumeración inicial.

Cada par de estrategias, que consista de una estrategia de cada jugador, determina una forma de jugar el juego, que a su vez determina el pago a cada jugador. Así podemos considerar que un jugar de un juego consiste en la decisión de cada jugador, a saber, la selección de una estrategia. [Dresher, M., 1961: 2-3]

Las estrategias las entenderemos de dos formas —abusando del lenguaje sin mucho peligro de ambigüedad—. La primera interpretación trata sobre las decisiones que toma un individuo; es decir, la opción que el jugador elige usar. La segunda es referente a los criterios de los que se vale para tomar sus decisiones. Estas posturas son distintas ya que bajo la primera interpretación, las decisiones tomadas forman un criterio; mientras que en la segunda interpretación, el criterio determina las decisiones. Cabe señalar que el criterio no tiene que estar justificado en principio.

Aun así, ambas posturas están estrechamente relacionadas de forma similar a como se relaciona un sistema axiomático con una teoría. A partir de los criterios (axiomas y reglas) se pueden construir las decisiones (teoremas). Y conociendo las decisiones se puede construir un criterio que te haga tomar tales decisiones.

Las estrategias logran, en algún sentido, descartar las decisiones que no resultan convenientes para el jugador que elige; por ello, formalmente las estrategias son un subconjunto del espacio de todos los perfiles de acción A , en el cual están consideradas todas las formas de jugar el juego. Recordando que está definido como $A = S_1 \times S_2 \times S_3 \times \dots \times S_n$ donde cada S_i representa conjunto de movimientos del jugador j_i (posibilidades en cada elección del jugador i). Para que la definición formal corresponda a la idea establecida de lo que es una estrategia, se deben cumplir las condiciones mencionadas a continuación.

Un subconjunto T_i , contenido en A , es una estrategia del jugador i si y sólo si se cumple que:

$$\begin{aligned} &\forall m \in \mathbb{N}, \quad i \neq m \leq n \\ &\forall \alpha_{m,k_m} \in S_m \\ &\exists! \alpha_{i,k} \in S_i \quad | \quad (\alpha_{1,k_1}, \alpha_{2,k_2}, \dots, \alpha_{i,k}, \dots, \alpha_{k,j_n}) \in T_i. \end{aligned}$$

Donde las α son vectores de decisión y α_{i,k_m} representa que el jugador m decidió jugar la elección k_m , por lo que k funge como función de decisión que depende de los jugadores. La fórmula indica que, para cualquier configuración de decisiones de todos los jugadores —excepto el que forma la estrategia—, existe una única opción $\alpha_{i,k}$, entre las posibilidades de elección del jugador i , que pertenece a la estrategia; por lo cual k resulta ser una decisión constante para el jugador i , fijadas las decisiones de todos los otros jugadores.

En otras palabras esto significa que, dadas las decisiones de los otros jugadores existe sólo una forma de reaccionar para el jugador i . Esta reacción está determinada por su estrategia. Esto coincide con la postura tanto de reglas de decisión como con la postura de opción elegida.

Es importante mencionar que dicha definición de estrategias responde a la formulación de estrategias puras, más adelante se tratará con el concepto de estrategias mixtas. La diferencia radica en que las estrategias puras se establecen en juegos que se jugarán en una única ocasión, mientras que las estrategias mixtas están pensadas para juegos repetitivos y tienen carácter probabilístico.

Ciertamente existen estrategias que pueden ser “malas”, ya que se puede elegir cualquier opción, incluso sin un “buen” criterio o razón. Sin embargo, se tratará de explicar algunas características que debería de poseer una “buena” estrategia, justificando cada una de ellas con base en los principios que se han decidido seguir. A esto se le puede considerar parte del principio de racionalidad, sobre el cual abundaremos más adelante.

Recordemos que uno de los componentes fundamentales de los juegos es la “función de utilidad”, o las preferencias de los jugadores respecto a los posibles resultados que se puedan obtener del juego. Esta función es, en

resumen, nuestra única referencia de qué es lo *mejor* para cada individuo en el juego y, por lo tanto, será relevante a la hora de la toma de decisiones. Pero no debemos olvidar que la función de utilidad está definida sobre los resultados y no sobre las alternativas de los jugadores, lo que quiere decir que aunque se sepa lo que se quiere lograr, puede no ser claro cómo lograrlo o incluso puede no ser posible.

Entonces existen varios factores en contra, uno de los más graves es el problema de la información, que se puede dar en muchos niveles. No obstante, en general se supondrá que cada uno de los jugadores tiene conocimiento completo del juego y de todos los posibles resultados del mismo, dejando sólo el posible desconocimiento de las estrategias que seguirán los demás jugadores y, según el caso, las preferencias que tienen cada uno de ellos.

El estrategia —o el jugador que toma las decisiones— solo tiene a su disposición absoluta, en principio, el conocimiento de sus preferencias sobre todos los posibles resultados en el juego y la conformación del juego mismo —las reglas propias del juego— y por ello deberá considerar fuertemente su preferencia y el tipo de juego; ya sea de certeza, riesgo o incertidumbre; para trazar una estrategia.

Idealmente, la mejor estrategia es tomar como reacción la elección que maximiza la utilidad del jugador dada la decisión de los otros. Es decir que se buscará que el conjunto T_i cumpla con que⁴²:

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad & (\alpha_{1,k_1}, \dots, \alpha_{i,k_i}, \dots, \alpha_{n,k_n}) \in T_i \\ \text{Entonces} \quad & \forall \alpha_{i,k_i} \in S_i \\ & (\alpha_{1,k_1}, \dots, \alpha_{i,k_i}, \dots, \alpha_{n,k_n}) \preceq (\alpha_{1,k_1}, \dots, \alpha_{i,k_i}, \dots, \alpha_{n,k_n}) \\ \text{En tanto} \quad & u_i(\alpha_{1,k_1}, \dots, \alpha_{i,k_i}, \dots, \alpha_{n,k_n}) \leq u_i(\alpha_{1,k_1}, \dots, \alpha_{i,k_i}, \dots, \alpha_{n,k_n}). \end{aligned}$$

⁴² En la fórmula, u_i es la función de utilidad del jugador i y esta depende de las decisiones tomadas y \preceq es la relación de preferencias del jugador i y compara la preferencia de vectores de decisión.

Lo cual aseguraría que la decisión que el jugador i está tomando es mejor o al menos indiferente con cualquier otra de las opciones que tenía disponibles. Resultaría ideal para un jugador siempre poder elegir las opciones adecuadas para obtener el máximo resultado disponible.

Las imposibilidades para la aplicación de la estrategia perfecta resultan de la falta de información, la influencia del azar e incluso por la secuencia de jugadas anteriores y posteriores al momento que el jugador i toma su decisión. La información no disponible, así como la variabilidad de los resultados no permiten tener en claro cuál es la mejor de las opciones en cada caso.

Sin embargo, existen varios métodos para intentar mejorar la forma en que se toma la decisión. La mayoría de los mismos se apoyan del principio de racionalidad y al mismo tiempo reducen el espectro de los juegos en los que se puede aplicar el método. De esa forma se consiguen criterios para la formulación de estrategias.

V.4.1 Estrategias Dominadas y Dominantes

Aquí es suficiente con la definición de la relación binaria de orden que determinará nuestras preferencias y lo que es una estrategia, para poder introducir este concepto. Diremos que una estrategia A domina a una estrategia B cuando para cualesquiera decisiones ajenas al estrategia el resultado de A siempre es preferible o indiferente sobre el resultado de B .

Bajo esta definición, podrá parecer razonable considerar solo estrategias dominantes para la toma de decisiones, puesto que cualquier decisión que tuviesen los otros jugadores siempre será preferible el resultado de la estrategia dominante. En muchos casos resultará en una buena forma de elección de estrategia así que se considerará un primer criterio, aunque más adelante se discutirán algunas de las fortalezas y debilidades del mismo.

Más adelante, en el apartado de soluciones de los juegos se podrá ver cómo la consideración de estrategias dominantes y la eliminación de estrategias dominadas tiene grandes ventajas en términos de simplificación del problema e incluso, en algunos casos, considerando que todos los jugadores siguen este criterio se puede “resolver el juego”, de forma en que se logre determinar qué estrategia seguirá cada jugador.

Para esclarecer un poco más este apartado, permítasenos remitirnos nuevamente al dilema del prisionero. Como ya se ha señalado, se trata de dos individuos que buscan cada uno de ellos su propio beneficio. La toma de decisiones por estrategias dominantes tiene justificación individualista, lo que puede llevar a resultados que no son óptimos para el conjunto de los jugadores y, por lo tanto, pueden no ser resultados óptimos para el estratega.

Quizá es sólo una posibilidad entre muchas pero ésta basta para demostrar que el criterio de estrategias dominantes no resuelve el juego en todos los casos. Este método sólo servirá para encontrar un equilibrio de Nash, por lo que es importante tomarse algo de tiempo en estudiar todo su alcance.

V.4.2 Equilibrio de Nash

El concepto básico del equilibrio en un juego está directamente relacionado con la estabilidad de las decisiones. Aunque no se tiene forma de conocer *a priori* las elecciones de los jugadores y por lo tanto es imposible predecir el resultado, aún es posible analizar algunos casos especiales.

Después de un análisis detallado de los resultados, es posible identificar que algunos de ellos resultan inviables; por ejemplo, se puede considerar que un resultado obtenido mediante estrategias dominadas es inviable puesto que los jugadores no tomarían tales opciones.

El análisis no sólo aplica para descartar resultados inviables, también podemos encontrar la manera de resaltar resultados más factibles que otros; por ejemplo, los resultados obtenidos con estrategias dominantes aparentan ser mucho más factibles.

La definición de equilibrio de Nash para estrategias puras se inspira en esto para definir un tipo de resultado que resulta ser mucho más factible que el resto. Valga la pena mencionar que el equilibrio aplica para los juegos simultáneos sin influencia del azar.

Un resultado es un equilibrio de Nash si ninguno de los jugadores preferiría cambiar su decisión dadas las decisiones de los otros jugadores fijas. Formalmente, si el resultado r se determina por las decisiones de todos los jugadores,

$$r = (\alpha_{1,j_1}, \dots, \alpha_{i,j_i}, \dots, \alpha_{n,j_n}).$$

Se cumplirá que r es un equilibrio de Nash si:

$$\neg \exists i \exists k \mid r \succ (\alpha_{1,j_1}, \dots, \alpha_{i,k}, \dots, \alpha_{n,j_n}).$$

Debe marcarse que la relación binaria de preferencia depende del jugador en cuestión, por lo que los resultados preferentes dependen del jugador que se cuestione su cambio de decisión.

Esta es una forma de restringir que todos los jugadores estén “conformes” con su decisión, pues dadas las decisiones de los otros, no quisieran cambiar la propia. Recordando, a manera de ejemplo el dilema del prisionero. El único equilibrio de Nash por estrategias puras en el dilema del prisionero resulta ser cuando ambos jugadores delatan, pues esta es la solución por estrategias dominadas.

Un problema con la definición de equilibrio de Nash para estrategias puras es que, tanto existen juegos sin equilibrios como juegos con más de un

equilibrio. De hecho, es fácil construir juegos para evidenciarlo, para lo cual considérense los siguientes ejemplos⁴³:

| | A | B |
|---|--------|--------|
| A | (1,-1) | (-1,1) |
| B | (-1,1) | (1,-1) |

Este es un ejemplo de juego en que no hay equilibrios de Nash, la razón es que, sin importar el resultado obtenido uno de los jugadores querrá cambiar su decisión para poder maximizar su resultado.

| | A | B |
|---|-------|-------|
| A | (2,1) | (0,0) |
| B | (0,0) | (1,2) |

Este es un ejemplo de juego donde hay más de un equilibrio de Nash para estrategias puras, a saber, tanto (A,A) como (B,B) dejan conformes y sin deseo de cambio de decisión a ambos jugadores. Esto último bajo el entendido de que, si alguno de los dos jugadores desea cambiar de estrategia, es porque existía otra jugada que le daría un mejor resultado que la que eligió en principio; mientras que el mantener la misma elección significará que ninguna otra estrategia posible es mejor que la que se eligió originalmente, dadas las estrategias de los otros jugadores.

Como se ve, no es posible asegurar la existencia de un equilibrio de Nash por estrategias puras y tampoco, que en caso de existir, sea único. Los juegos que tienen un único equilibrio de Nash se les llama *juegos de valor simple*. El *valor del juego* se define como el resultado que es el único equilibrio.

⁴³ Más adelante se hablará de las representaciones de los juegos, por lo pronto entiéndase que las opciones son A y B para cada jugador, y que las parejas ordenadas son el resultado en número para cada jugador.

Además, cuando existe un único equilibrio de Nash es posible encontrarlo mediante el método de eliminación de estrategias dominadas. Cuando un juego tiene un único equilibrio de Nash en estrategias puras, tal equilibrio es la única solución teórica del juego.

Cuando existe más de un equilibrio de Nash, aún es posible encontrar una solución por estrategias puras, estableciendo condiciones como las que se verán en el capítulo de soluciones por inducción hacia atrás y por estrategias dominadas y dominantes.

Pero en ocasiones ninguno de estos métodos permite encontrar una solución, para lograr encontrar solución en esos casos se hace consideración de estrategias mixtas. El teorema más general de Nash, establece que todos los juegos simultáneos de información completa tienen al menos una solución por estrategias mixtas, definiendo el equilibrio generalizado de Nash que se tratará más adelante.

VI. CLASIFICACIONES Y TIPOS DE JUEGOS

A partir de la introducción hecha anteriormente a la teoría de juegos, su conexión con la función de utilidad, el lector podrá aducir que hace falta algo. Para poder realizar una estrategia plausible, no sólo basta el considerar las preferencias bien definidas, ni solo propias ni las de los otros jugadores, sino que se requiere además de la consideración de que esto suceda, dadas las circunstancias del entorno (el juego y los otros jugadores). Es decir, un jugador no puede, o no debe, crear su estrategia SÓLO a partir de preferencias preestablecidas que quizá no sucedan.

Las siguientes clasificaciones están relacionadas con las características más importantes de un juego, por lo tanto pueden ayudar a describir mejor un juego, así como facilitar el estudio de los distintos tipos de juego de acuerdo a sus particularidades relacionadas con los jugadores, la información disponible y la estructura misma del juego.

VI.1 Por Información

Uno de los aspectos más importantes, en la toma de decisiones y la predicción de resultados en un juego, es la información que tiene disponible el jugador. Esta información puede ser tan escasa que no permita distinguir cuál es la mejor opción sin embargo es lo único en lo que el jugador puede basar racionalmente su estrategia.

Aunque se suelen clasificar los juegos por información, lo cierto es que son clasificaciones heredadas de la forma en que se clasifica el tipo de información, dependiendo de la información que tienen sus jugadores.

La información que puede tener un jugador es: sobre el juego mismo y sus reglas, los jugadores y las formas en que participan, los resultados y las preferencias de los jugadores en los mismos, la influencia del azar y el conocimiento de la información que tienen los otros jugadores.

Existen tres tipos importantes de información que se pueden tener: información cierta, información completa e información perfecta. Estos tipos de información se pueden combinar.

VI.1.1 Información Cierta o Incierta

Este tipo de información es particularmente importante para este trabajo ya que involucra el conocimiento sobre la influencia del azar en el juego (o subjuego), se dice que la información es cierta si no existe un movimiento que no sea decidido por los jugadores, en otras palabras que no se tenga una variación debida al azar.

Este tipo de información tiene la posibilidad de tratarse de forma determinista, sin el uso de la probabilidad, puesto que todos los movimientos serán determinados por los jugadores y por lo tanto serán decisiones racionales que bajo muchas condiciones son predecibles.

Cuando existe la influencia del azar, sea conocida o no, la probabilidad de los movimientos, es información incierta, ésta solo se puede tratar con el uso de probabilidad en caso de conocer las probabilidades o estadística para estimarlas en aplicaciones reales, mediante el cálculo de esperanzas, varianzas o algún otro indicador que ayude a “medir” lo buena que sería cada elección del jugador.

VI.1.2 Información Completa o Incompleta

Los juegos de información completa son un tipo especial de juegos en los cuales los jugadores tienen toda la información sobre la estructura del juego así como los resultados y las posibles estrategias de todos los jugadores y sus preferencias. Cuando se ignora alguna de estas características se tiene información incompleta.

Los “juegos en los cuales la función de pagos de los jugadores es del conocimiento común” [Gibbons, R., 1992: 55] constituyen básicamente lo que es un juego con información completa, dado que cada uno de los jugadores tiene pleno conocimiento sobre el número de jugadores, sus jugadas y posibles estrategias y el resultado de sus decisiones.

Un ejemplo de información incompleta es cuando se aprende un nuevo juego, al no estar familiarizado o consciente de todas las reglas, se puede no tener conciencia de los resultados que tendrán nuestras decisiones o incluso no saber cuáles son todas las opciones de juego.

VI.1.3 Información Perfecta o Imperfecta

Lo que determina que un juego sea de información perfecta o imperfecta es el historial del propio juego. Si el jugador que está a punto de realizar una jugada conoce cada una de las jugadas realizadas por él y por los otros jugadores desde el inicio hasta ese momento del juego, entonces diremos que se trata de un juego de información perfecta. Si, por el contrario, el jugador desconoce alguna de las jugadas previas, ya sea suya o de algún otro jugador, se dirá que se trata de un juego con información imperfecta.

En un juego de información perfecta todos los agentes conocen el historial del juego hasta el momento en que les toque realizar una jugada. Es del conocimiento del jugador las jugadas que le antecedieron al punto de decisión en el que se encuentre. Y por ello puede determinar con exactitud el punto del juego en el que se encuentra.

Esta clasificación será más útil y relevante al momento de ver el diagrama de un juego en la representación grafica de un juego mediante árboles —su forma extensiva—. En donde cabe señalar que esta clasificación solo es relevante cuando se trata de juegos dinámicos⁴⁴ —también llamado secuenciales—, en tanto que la caracterización de información de un lanzamiento de moneda único no tendría mucho sentido. De igual forma, los juegos simultáneos son un claro ejemplo de juegos de información imperfecta, debido a que, las jugadas realizadas por los otros jugadores no son conocidas. Solo los juegos secuenciales cuentan con la posibilidad de tener información perfecta o imperfecta.

En los juegos dinámicos de dos —o más—jugadores se puede apreciar las varias jugadas y movimientos posibles que tiene cada jugador en un punto de decisión, y con ello generar la representación que muestre el historial del juego.

Así mismo, la información perfecta no debe confundirse con la información completa. El conocimiento de un jugador sobre las elecciones realizadas por los demás jugadores hasta un determinado punto de elección de ese jugador no necesariamente implica que ese jugador conoce el resultado de esas elecciones, ni las siguientes jugadas elegidas. Mientras que el conocer las opciones y los pagos de esas opciones no quiere decir que se conoce la jugada que de hecho eligió el jugador.

La utilización de los términos de información completa o incompleta, perfecta o imperfecta normalmente vienen acompañados uno de otro, y por la clase de juego del que se trata, ya sea dinámico o simultáneo.

⁴⁴ Esta clasificación se trabajará más adelante en este mismo capítulo, dentro del apartado VI.6 Simultáneos o Secuenciales.

Por ejemplo, para que se hable de un juego dinámico con información perfecta y completa se debe de cumplir con que las decisiones tomadas por los jugadores sean secuenciales, las posibles movidas son todas conocidas antes de que se elija la siguiente jugada, y los posibles pagos de cada combinación factible de movidas sean del conocimiento general.

Así que juegos como el ajedrez caen dentro de esta clasificación dado que los jugadores *pueden* conocer cada una de las posibles movidas que tiene un jugador en un dado punto de elección. Así mismo, los jugadores *pueden* conocer los pagos de cada una de las posibles decisiones a tomar.

VI.2 Por Probabilidad

La teoría de juegos también se vale de la teoría de la probabilidad, para poder hablar de una estrategia factible que nos lleve a lo que nuestras preferencias nos dictan.

Ciertamente no se tratará de un examen riguroso de la teoría de la probabilidad, sino más bien una suerte de repaso en tanto que sea necesario y adecuado para lo que en general se trata de observar en la teoría de juegos.

Aunque un tanto simplificada resulta ilustrativa; para lo que nos compete en esta sección de teoría de juegos, la consideración de que existen dos niveles diferentes de tratamiento probabilístico que se deben de realizar, a nuestro juicio sobre un juego: la probabilidad aplicada a la toma de decisiones y la probabilidad en tanto el resultado de las decisiones ya hechas. Como ya habíamos señalado, es de suma importancia tener en cuenta el conjunto de posibles decisiones a la hora de tomar una, así como de que la decisión ya tomada nos lleve a un resultado determinado o con cierta probabilidad.

De esta última distinción, a su vez se desprende un nuevo pero relevante conjunto de categorías que hacen referencia a la información de la que el jugador dispone al momento de realizar una decisión; a saber, la diferencia entre una decisión hecha en una situación de certeza, bajo riesgo o en la incertidumbre.

VI.2.1 Con Certeza, Riesgo o Incertidumbre

Supongamos que estamos en una situación en la cual tenemos un conjunto de posibilidades de entre las cuales podemos escoger, o sea, tomar una decisión. Pero evidentemente el tomar una decisión puede variar si sabemos a qué resultado nos llevará cada una de las diversas posibles alternativas; considerada ésta una decisión tomada bajo condiciones de certeza; o si nuestra decisión nos lleva a una serie de varios posibles resultados con probabilidades establecidas –y sabemos su función de distribución–, lo que se le conoce como una toma de decisión riesgosa; o en el peor de los casos, en donde no conocemos las probabilidades de los posibles resultados, siendo esta última una decisión incierta.

En donde quizá ya nos parezca un tanto trivial el tomar una decisión bajo certeza, pues si conocemos sin posibilidad de error que si cada uno de los posibles actos conlleva una reacción específica, bien determinada y conocida, la decisión recae en nuestras preferencias de utilidades, aquel resultado que preferimos por encima de los otros. Aunque no es trivial en tanto que, no todas las decisiones son tomadas por el mismo jugador.

Pero la toma de decisión bajo riesgo (o la toma de decisión bajo incertidumbre) quizá nos ofrezca no solo mayores problemas, sino también mayor cercanía con la realidad y por lo mismo, una mayor amplitud y aplicabilidad. Así mismo, es en donde más precisamente podemos notar cómo confluyen la teoría de la utilidad y la probabilidad, pues es en este punto en donde ambas toman

parte del juego; la teoría de la utilidad como agente rector y la probabilidad como el agente “determinante”. Puesto que este último, si es considerado, terminará por ser decisivo a la hora del resultado obtenido.

Si un jugador toma en cuenta las diversas probabilidades que toman los posibles resultados de cada una de sus decisiones disponibles podrá realizar una estrategia que le acerque a su preferencia.

Siguiendo un poco nuevamente con la toma de decisión bajo certeza, aunque de apariencia forzada, básicamente todos los juegos de mesa y muchos, si no es que todos, los juegos de cartas caen dentro de esta clase. Esto de primer momento podrá parecer extraño, pero para ilustrarlo válgase de un ejemplo un tanto abstracto y simple de un juego x , en el que participan dos jugadores y que a su vez, poseen cada uno un dado de 6 lados iguales.

DECISIONES



Las reglas son sencillas y completas –es decir, determinadas–: Cada jugador tiene un dado normal, el cual solo pueden lanzar una sola vez cada uno, quien saque el número menor del 1 al 6 será quien gane, a menos de que ambos jugadores obtengan el mismo número en cuyo caso resultará un empate.

Quizá se podrá objetar que a la hora del lanzamiento del dado no se decide, que depende del azar y no del jugador el número resultante, pero el factor del azar no afecta el resultado, es decir, en este particular juego cada acción tiene

su invariable implicación, las reglas son claras y al final de él será igualmente claro quién es el ganador, no hay probabilidad en tanto que las reglas no cambian, no hay más que una consecuencia de la “decisión”. De ahí que sea importante distinguir en qué nivel se está hablando de la probabilidad –o en su defecto, incertidumbre–, si en el nivel de las decisiones iniciales, o si en las reglas que rigen al juego. [Véase el esquema anterior]

Así mismo, el tradicional “piedra, papel o tijeras” es un juego de este mismo orden; pues si bien es cierto que al inicio podemos escoger “al azar” alguno de los tres, el modo de juego sigue siendo el mismo, la piedra le gana siempre a las tijeras, las tijeras invariablemente le ganan al papel y el papel ganará a la piedra, no hay duda de quién ganará una vez tomada alguna de las tres opciones posibles por cada jugador.

Básicamente en este contexto de certeza, la probabilidad no es en cierto sentido relevante para nuestro propósito en teoría de juegos; aunque siempre se puede utilizar, como por ejemplo usando la probabilidad inversa –estadística– que demuestra que los agentes suelen escoger piedra con mayor frecuencia, así que si, como oponentes elegimos papel podría darnos alguna ventaja⁴⁵; pero eso ya está fuera de lo que consideramos en teoría de juegos y recae quizá más en la rama de la estadística o en psicología.

De aquí que los juegos con certeza no sean desestimados por la teoría de juegos, pues no carecen de aplicaciones. Aunque de apariencia los juegos de certeza podrían simular estar desestimando la realidad, se ha señalado cómo es que esto no sucede en tanto que gran parte de los juegos que nos entretienen caen dentro de la categoría de certeza. Tomemos como uno de los mejores ejemplos el ajedrez; que está completamente determinado en tanto que, tomadas todas las decisiones de movimientos se puede saber con toda seguridad quién es el ganador, aunque esto no quiere decir que se pueda realizar un análisis

⁴⁵ Zhijian Wang y Bin Xu, Hai-Jun Zhou. (Jul 25, 2014). Social cycling and conditional responses in the Rock-Paper-Scissors game. (p. 2). Nature Publishing Group DOI: 10.1038/srep 5830. Disponible en la Web en: <http://www.nature.com/srep/2014/140725/srep05830/pdf/srep05830.pdf>

completo del juego. Incluso la identificación de todas las estrategias posibles es una tarea virtualmente imposible de realizar dada la complejidad y el gran número de partidas posibles, en donde hay aproximadamente 160,000 formas diferentes de jugar sólo los primeros 2 turnos⁴⁶. Se puede ver lo rápido que crece el número de partidas posibles y, considerando que son partidas largas y de varios turnos, resulta prácticamente imposible considerar todas las estrategias de este juego de certeza.

Continuando con los casos ya mencionados, en donde se toma la decisión bajo riesgo, es importante destacar nuevamente que al hablar de una decisión riesgosa estamos diciendo que las probabilidades de que ganemos no están definidas una vez tomada la decisión, es decir, no es claro todavía cuando se ha decidido ya por alguna de nuestras opciones cuál será el resultado. Tómese un ejemplo de un juego de esta clase como lo resultan ser las loterías o “rifas”.

Se está ante una clase de juego que depende de las probabilidades, en tanto que, a diferencia de los juegos con certeza que al momento de que todos los jugadores toman su decisión podemos estar ciertos, sin temor a equivocarnos de cuál será el resultado. Sin embargo, cuando nosotros escogemos un número determinado en alguna lotería aún no podemos saber cuál será el resultado del juego; sino hasta después del mismo.

Considerando una lotería sin trampa, se puede saber cuál será la probabilidad de ganar el premio al saber el número de participantes. Si en la lotería participan n personas se sabe que la probabilidad de ganar será de $1/n$.

⁴⁶ Esta estimación se puede realizar considerando que para el primer movimiento se tienen 20 posibilidades, 8 opciones de avanzar 1 cuadro un peón, 8 de avanzar 2 cuadros a un peón y 2 opciones de movimiento por cada caballo. Como no hay limitaciones en el primer tiro para las negras tienen igualmente 20 posibilidades, lo que resulta en exactamente 400 posibles formas de jugar el primer turno. Para el segundo turno aumentan algunas posibilidades, pero también se eliminan algunas otras, una estimación de 400 formas para el segundo turno proporciona la aproximación mencionada. Nótese que algunas de las posiciones alcanzables son indistinguibles, pero la forma de llegar a ellas las hace formas diferentes de jugar (por ejemplo: 1e4, e5; 2Kf3, Kc6 contra 1Kf3, Kc6; 2e4, e5). Para hacer un conteo exacto de las partidas se deberá considerar a fondo las reglas del juego y calcular de forma exhaustiva el árbol del juego.

Aunque aquí vale la pena introducir un problema que se le podría objetar al ejemplo dado; el del conocimiento de las probabilidades y si, aunque no sean de nuestro conocimiento tales distribuciones probabilísticas, esto no quiere decir automáticamente que no las tengan. Sin introducirnos más en este problema, pues no es de nuestro interés, merece la mención en tanto que consideraremos en este apartado la probabilidad y la estadística como las categorías a tratar, y que por lo mismo algunos de sus inherentes problemas relucen cuando las aplicamos a esta rama. Supongamos, para ejemplificar el problema anterior, un juego de cartas como el 21. Las probabilidades de ganar para cada mano son conocidas ya que se pueden calcular el número total de juegos posibles y, haciendo uso de la combinatoria se pueden calcular el número de juegos favorables; así que sacando el cociente entre el número de casos favorables y el número total de casos se obtiene la probabilidad de ganar con esa mano. En donde las probabilidades podría decirse como definidas.

Así que el siguiente apartado no carece ni de aplicaciones ni de conflictos internos. Las decisiones tomadas bajo la incertidumbre, como ya adujimos se trata, como las de riesgo, de una partición entre las posibles implicaciones de una acción, pero la diferencia reside en que nuestra decisión será hecha a partir de un desconocimiento de las probabilidades. Las probabilidades nos son desconocidas, así que nuestra decisión no solo no tiene una sola consecuencia, sino que además no conocemos la probabilidad de cada una de estas posibles consecuencias.

Un ejemplo conocido de una decisión bajo incertidumbre es la bolsa de valores y en casi todos los ámbitos de la economía ya que en general se desconoce alguno de los agentes que influyen en el juego o alguno de los posibles resultados. El trabajo de la ciencia es ampliar el conocimiento de los fenómenos y trabajarlos dentro de la teoría de juegos como si estuviesen totalmente determinados.

VI.3 Por Número de Jugadores

Como se ha mencionado anteriormente, uno de los aspectos más importantes de un juego son los jugadores, por obviedad el número de jugadores siempre es un entero no negativo y se considerara fijo a lo largo de todo el juego. Este número puede incluso ser cero, lo que indicaría un juego totalmente resuelto (determinado en todos sus pasos) o un juego que solo depende del azar.

Cuando el número de jugadores es 1, es un caso muy especial donde el único jugador no entra en conflicto con las decisiones de otros y solo debe tomar en cuenta al azar en sus decisiones; por ello mismo es un caso no muy estudiado desde la teoría de juegos pero de igual manera tiene numerosas aplicaciones.⁴⁷

El más estudiado y (quizá actualmente) con mayor aplicación en el mundo real es cuando el número de jugadores es 2, este es el mínimo necesario para encontrar el conflicto de intereses entre jugadores racionales con preferencias determinadas. Aclarando que puede o no participar el azar en el juego.

En muchos casos cuando se trata de más de dos jugadores, en un juego no cooperativo se puede manejar el juego como si se tratase de solo dos jugadores, el jugador de interés y otro que engloba a todos los otros.

Al realizar esta “simplificación” se corre el riesgo de que agrupar las varias preferencias de los varios jugadores, pueda ser una tarea mayor que termine por hacer más difícil el trabajo. Además, este proceso no puede invertirse, es decir, no se pueden recuperar las preferencias originales.

Un método similar de englobar los jugadores funciona para transformar algunos juegos cooperativos en no cooperativos, la reducción de jugadores sería como elegir un representante de cada uno de los equipos. Funciona cuando las

⁴⁷ Una aplicación para esta clase de juegos sería la elección de carrera o la planificación de un horario donde se podría considerar un solo jugador.

preferencias de todos los integrantes de un equipo pueden resumirse en una sola preferencia.

Aunque no se pueden reducir todos los posibles juegos en la teoría a sólo los juegos de 2 jugadores; se les presta especial atención por ser el caso más simple donde se da la interacción y el conflicto de interés de los jugadores. En ocasiones se presentan juegos de 3 jugadores para presentar ejemplos más complejos y es raro encontrar ejemplos con más jugadores.⁴⁸

VI.3.1 El Azar como Jugador

En muchas formas es conveniente tratar el azar como un jugador más, independiente del resto de los jugadores y que además no tiene asignado preferencias en los resultados en el juego, por lo que no se considera racional. Se le puede ver como un jugador imparcial que toma decisiones sin criterio alguno (injustificadas).

Ésta es una forma de capturar la influencia del azar en los juegos. Así que cuando existe una consecuencia indeterminada, pero que se conocen todas las posibilidades y la probabilidad de cada una (mediante la función de distribución de probabilidad), se puede considerar como una jugada del azar. Aunque la desventaja es que al no ser racional no se le puede predecir bajo ninguna circunstancia, a diferencia de los otros jugadores.

⁴⁸ Algo similar sucede en el estudio de la geometría, generalmente se estudia la geometría del plano (dos dimensiones) y en ocasiones la del espacio (tres dimensiones), pero pese a su complejidad éstas no capturan todas las particularidades de la geometría de mayores dimensiones.

VI.4 Cooperativos y no Cooperativos

Los juegos pueden también clasificarse en relación a la “cooperación” de los jugadores durante el mismo. Se entiende como *cooperación* a la capacidad de los jugadores de tomar en consideración en sus preferencias los objetivos de los otros jugadores al momento de tomar decisiones.

Cuando en un juego cada jugador es indiferente a las preferencias o utilidad de los otros se dice que es un juego no cooperativo, lo que significa que cada uno buscará su propio beneficio sin preocuparse por beneficiar o afectar a los otros.

Para explicar un poco mejor la clasificación es importante mencionar de nueva cuenta lo que caracteriza a esta teoría en su forma básica: el conflicto de intereses. El conflicto de intereses siendo aquella noción sobre la divergencia entre las preferencias de los resultados de los diversos agentes que intervienen. Esto es, que si dos jugadores en algún juego tienen una preferencia diferente sobre los resultados, entonces están en una situación de conflicto.

Pero sin lugar a dudas el conflicto entre los intereses puede tener diversos matices y particularidades que lo diversifican. Tal como cuando dos jugadores se alían contra un tercero, esto puede observarse, como estrategia militar entre países o como un acuerdo entre empresas.

La cooperación, cabe señalar, no debe de ir en contra de las reglas del juego, pues desde un inicio se ha dicho que siempre se tratará de juegos justos⁴⁹, a menos de que se indique lo contrario. De otro modo se estaría haciendo trampa.

Entonces, si consideramos la teoría de juegos como el conflicto de intereses, qué sucede con aquellos casos en donde los jugadores se alían. Las alianzas o coaliciones deben de suscitarse dentro del marco de las reglas del

⁴⁹ “Juego justo” significará que las reglas estarán bien determinadas desde el inicio del juego, y que los jugadores no podrán incurrir en ninguna clase de trampa, es decir, ir en contra con las reglas específicas del juego.

juego, por lo que es sobremanera importante que las reglas del juego sean claras y precisas al respecto; así mismo, los convenios entre jugadores deben considerarse a la luz de su utilidad, es decir, de las preferencias de las partes que convengan.

Formar una alianza de la que los jugadores no saquen provecho resultará en una mala elección. De ahí que deba de tener sentido la cooperación entre las partes. Sin lugar a dudas, esto también puede verse como una coincidencia en las preferencias, i. e., si dos jugadores tienen relaciones de preferencias compatibles, la colusión tendrá sentido.

Si dos jugadores tienen exactamente la misma relación de preferencia en los resultados (lo cual ocurre muy difícilmente), una colusión estaría por demás justificada; aún cuando no pueda ser pactada explícitamente los jugadores actuarán de forma cooperativa en busca de sus propios intereses, sin conflicto entre ellos; esto no hace de dicho juego un juego cooperativo.

La optimización de la utilidad es la que rige si es conveniente o no la conformación de una sociedad. Los juegos en los que cada uno de los agentes ve por su propio interés la reducción de sus costos o la mejora de su utilidad, se les considera juegos no cooperativos; pues se toman decisiones sin considerar el interés de los otros agentes.

La teoría no cooperativa: En la cual los jugadores, si pueden comunicarse, no pueden formar acuerdos vinculantes

La teoría cooperativa: En la que los jugadores tienen permitido formar acuerdos vinculantes, y por ello hay un fuerte incentivo para trabajar juntos para recibir el pago total más alta. El problema entonces es el cómo dividir el pago total en o entre los jugadores. Esta teoría también se divide en dos partes. Si la medida de utilidad del pago de los jugadores es en las mismas unidades y hay un significado de intercambios de utilidad como pagos indirectos, decimos que el juego tiene utilidad transferible, de otro modo tiene utilidad no transferible.

VI.5 Suma Cero

El concepto de suma cero sólo es aplicable a los juegos en los que todos los jugadores tienen asignada una función de utilidad que defina un pago para cada uno de ellos en cada posible resultado.

Un juego de suma cero puede ser de cualquier cantidad de jugadores (aunque con un solo jugador carece de sentido); también puede ser de cualquier tipo de información y con o sin probabilidad, pues no existen especificaciones al respecto del al azar ni la información. Para el caso de los juegos cooperativos de dos jugadores no tiene sentido pensar en que el juego sea de suma cero ya que ninguna estrategia sería diferente si se trata de una total cooperación, en los juegos cooperativos en general, la posible consideración de un juego de suma cero depende de la forma de cooperar de los jugadores.

En términos intuitivos, un juego de suma cero es aquel en que el resultado mantiene las cantidades iniciales, el conjunto total de jugadores no gana ni pierde unidad alguna a causa del juego. Siendo precisos, un *juego es de suma cero* si todo jugador toma como utilidad el inverso aditivo de la suma de las utilidades del resto de los jugadores; esto asegura que en el juego, cualquiera de los resultados, sólo provoque una redistribución de las utilidades existentes.

Para formular la definición formal, considérese \mathbf{G} un juego de n jugadores con función de utilidad para cada jugador (u_i para el jugador i) y el conjunto de resultados posibles \mathbf{R} ; entonces \mathbf{G} es un juego de suma cero si se cumple que:

$$\forall r \in \mathbf{R} \quad \sum_{i=1}^n u_i(r) = 0.$$

Esto significa que, para cualquier resultado, la suma de las utilidades de todos los jugadores es cero; de ahí que el nombre de este tipo de juegos sea de suma cero.

Aunque a primera vista parece un requisito forzado, en la realidad existen juegos que cumplen con ello, incluso quizá la mayoría de ellos lo son. Aunque se puede dar el caso cuando las transformaciones añaden un valor que no puede ser medido o comparado; por ejemplo, la creatividad en una invención o la necesidad de un bien pueden aumentar o disminuir el valor de algo.

Por otra parte, la entidad que pierde puede no estar considerado como un jugador en el juego y por lo tanto, en teoría, generar ganancias de la nada dentro del juego; de forma similar, cuando algún jugador —siguiendo las reglas del juego— pague un valor a un ente no considerado como jugador, dicho valor desaparecería del juego.

Considérese el siguiente escenario, supóngase que existen un par de carpinteros que viven cerca de un bosque al que pueden ir a conseguir madera para sus trabajos. Los dos carpinteros pueden optar cada día entre ir por madera al bosque o quedarse en su taller a trabajar; en un día trabajan la madera que pueden recoger en un día, pero no pueden trabajar en su taller sin haber ido por madera primero. En este caso el juego puede ser visto como un juego de dos jugadores en el que los carpinteros pueden cooperar o competir haciendo estrategias, como ir al bosque un día y trabajar el siguiente, o ir inicialmente los dos al bosque y luego alternar sus labores cooperativamente.

Considerando sólo la parte del juego que consiste en la obtención de madera, y ya que los dos pueden obtener la madera del bosque, se puede pensar que no es un juego de suma cero; sin embargo, si se tomase al bosque como un tercer jugador, éste estaría perdiendo la madera que ambos carpinteros toman y las jugadas posibles del bosque serían quedarse sin madera o seguir teniendo

madera.⁵⁰ Bajo este punto de vista sería un juego de suma cero, la madera que pueden obtener los carpinteros sería la misma que el bosque perdería.

De manera similar se puede argumentar que el bosque genera más madera, por lo que no es suma cero, pero generar la madera requiere de los nutrientes de la naturaleza y si se le considera un jugador más (y que sus nutrientes valen lo mismo que la madera) el juego volvería a ser de suma cero. Sin embargo, el método de añadir jugadores para tratar al juego como de suma cero conlleva a considerar como jugadores entes irrelevantes a los fines del estudio.

Por otro lado, quedando en el ejemplo de tres jugadores —los carpinteros y el bosque— que es de suma cero en la obtención de madera, suponiendo que el bosque no genera más madera. La suma cero también puede perderse si se considera el valor que se le agrega a la madera por el trabajo de los carpinteros, el cual aumenta el valor de la madera sin quitarle madera a otros jugadores.

En concreto, si los carpinteros tienen como opción ir por una tabla de madera o fabricar una silla con una tabla, se espera que la silla valga al menos dos tablas pues el carpintero emplea una tabla en hacerla y renuncia a conseguir otra el día que la fabrica, si la silla valiese menos de dos tablas no sería una buena estrategia fabricarla y si valiese más de dos sería una buena estrategia. Pero si una silla valiese lo mismo que una tabla el juego seguiría siendo de suma cero pues no se estaría generando valor dentro del juego, solo intercambiándolo entre los jugadores.

Otra posibilidad es que el valor de la silla no pudiese ser comparado con el valor de la tabla, pero esto sólo podría suceder si el juego no tuviese definidas funciones de utilidad para los jugadores, ya que una función de utilidad mide todos los factores involucrados en un resultado en una única cantidad comparable con cualquier otra cantidad.

⁵⁰ Aunque el bosque no sea un individuo que toma decisiones, se puede considerar en cierto grado de abstracción que el seguir teniendo madera o dejar de tenerla depende del bosque mismo.

La intención es mostrar que, de ser deseable, se puede encontrar una manera de ver muchos de los juegos como si se tratase con juegos de suma cero. Ejemplos clásicos de juegos de suma cero son muchos de los que involucran apuestas, como el póquer, pues el ganador se lleva la parte del (de los) perdedor (perdedores); o también cualquier juego de dos jugadores como el ajedrez considerando +1 punto por victoria, 0 por empate y -1 por derrota.

VI.6 Simultáneos o Secuenciales

Al hablar de juegos simultáneos se puede hacer referencia a dos tipos de juegos simultáneos, aquellos que son simultáneos en la “realidad” y aquellos que son circunstancialmente simultáneos. Sin embargo, en cuestión teórica ambos tienen las mismas características.

Los juegos que son simultáneos en la realidad son aquellos en los que las decisiones de todos los jugadores son tomadas al mismo tiempo, por lo que no pueden considerar dentro de su plan de juego las decisiones de los otros. Por otra parte, los juegos que son simultáneos por las circunstancias, cuando los jugadores desconocen las decisiones de los otros jugadores es en teoría como si tomaran la decisión al mismo tiempo. En general, un juego simultáneo es aquel en el que cada uno de los jugadores debe tomar su decisión sin poder considerar ninguna de las decisiones de los otros jugadores.

En este trabajo se considerará esta distinción en los juegos más que las otras debido a que la forma de tomar decisiones varía radicalmente cuando se añade el factor secuencial. Considérese, por ejemplo que al jugar “*piedra, papel o tijeras*” alguno de los jugadores tuviese que revelar su elección primero; ese juego carecería de sentido pues el segundo jugador siempre ganaría. La estructura simultánea juega un papel similar al que jugaría la carencia de la información respecto al juego.

Se verá que la representación más conveniente para un juego dependerá en gran medida de esta clasificación. Para los juegos simultáneos resulta más conveniente la representación normal, mientras que la representación extensiva resulta más ilustrativa para los juegos secuenciales ya que indica el orden de las decisiones.

Además, como se planteará más adelante, los dos métodos para encontrar la solución de un juego se distinguen en que funcionan para diferentes tipos de juegos. Mientras que la inducción hacia atrás debe ser usada para resolver juegos secuenciales, pues considera cierto orden en la toma de las decisiones; la eliminación de estrategias dominadas y dominantes aplica para juegos simultáneos, pues considera que las decisiones se toman en las mismas circunstancias.

También, la generalización del concepto de equilibrio de Nash que se hace con estrategias mixtas, aplica (según lo expuesto en este trabajo) sólo para los juegos simultáneos de suma cero con dos jugadores.

VII. LA TEORÍA DE JUEGOS

VII.1 Caracterización de la Teoría de Juegos

Un tipo especial de juego son las loterías. A lo largo de este trabajo se ha tratado con juegos simples donde existen los jugadores, el juego y los resultados; pero no se ha mencionado que todas las partes tengan relevancia para que sea un juego. En las loterías se descarta la toma de decisiones de los jugadores, estos sólo pueden decidir si participar o no en la lotería. En una lotería se asigna una cierta probabilidad de ocurrencia a cada uno de los resultados posibles, que resulta en los pagos correspondientes a cada jugador.

Luego bien podríamos considerar una “composición” de juegos en donde consideremos cada lotería como un listado de resultados (pagos) con una cierta probabilidad de obtenerlos. Se pueden hacer loterías compuestas donde se obtengan diferentes probabilidades para los pagos cuando se “combinan” las loterías. En estas combinaciones son las loterías compuestas que tienen su propia forma de ser calculadas y vistas como loterías simples.

La gran ventaja de ver los juegos de esta forma es su directa aplicación a la bolsa de valores y la teoría de carteras donde se decide si invertir o no en cierto activo pero no hay decisiones más allá de eso; por diversos métodos se intenta predecir las probabilidades de las posibles ganancias o pérdidas para los activos; y una de las estrategias de inversión más populares es la diversificación o combinación de distintos puntos de inversión que es precisamente lo que se ve en loterías compuestas.

Por lo que ahora tratamos con valores esperados para las loterías, y nuestro trabajo se reduce solo a encontrar la combinación con mejor valor esperado y menor varianza, así que daremos una caracterización más específica

acerca de la función de utilidad para las loterías compuestas, en donde nos regiremos bajo los postulados-axiomas dados por Luce y Raiffa (1985)⁵¹.

Suposición 1 (la ordenación de alternativas) *La ordenación de “preferencia o indiferencia”, \succeq se escribe entre cualesquiera dos premios, y es transitiva. Formalmente, para cualquier A_i y A_j , ya sea que $A_i \succeq A_j$ ó $A_j \succeq A_i$; y si $A_i \succeq A_j$ y $A_j \succeq A_k$, entonces $A_i \succeq A_k$.*

El postulado anterior refiere a las preferencias y la necesidad de que estas cumplan con la propiedad transitiva y sean una relación completa.

Pongamos un ejemplo sencillo en el que se cumple la anterior suposición; en cuanto a preferir dinero seguramente se cumplirá que $1000 \geq 100 \geq 10$ y $1000 \geq 10$. En donde “ \geq ” refiere a una relación definida en preferencias y no a la relación de orden usual de los números. En el anterior ejemplo está clara la preferencia y seguramente no habría problema, pero la transitividad como conjetura puede presentar problemas en tanto que generalmente los estilos y gustos estéticos suelen ser controversiales y a veces es “imposible” la transitividad. Por lo que el anterior postulado es muy fuerte, restringe las aplicaciones dado que en la práctica a veces no se cumple.

La transitividad de preferencias nos da en la teoría de juegos la posibilidad de asignarle un número a las preferencias, digamos 1 a la más preferida y 10 a la menor preferida. Todo con el fin de definir las y simplificarlas para la elección de estrategias en aras de poder llegar a la primera.

Suposición 2 (reducción de loterías compuestas). *Cualquier lotería compuesta es indiferente a una lotería simple con A_1, A_2, \dots, A_r como premios, sus probabilidades siendo calculadas de acuerdo con el cálculo usual de la probabilidad. En particular, si*

$$L^{(i)} = (p_1^{(i)} A_1, p_2^{(i)} A_2, \dots, p_r^{(i)} A_r), \text{ para } i = 1, 2, \dots, s,$$

entonces

$$(q_1 L^{(1)}, q_2 L^{(2)}, \dots, q_s L^{(s)}) \sim (p_1 A_1, p_2 A_2, \dots, p_r A_r),$$

en donde

$$p_i = q_1 p_i^{(1)} + q_2 p_i^{(2)} + \dots + q_s p_i^{(s)}.$$

⁵¹ Los seis postulados que señalamos a continuación son todas citas textuales del libro de Luce, Duncan; Raiffa, Howard. (1985) *Games and decisions: Introduction and critical survey*. New York, Dover publications, pp. 23-31.

Lotería compuesta: en lugar de probabilidad por premio es una probabilidad por lotería (a tener la posibilidad de jugar una lotería, mas no se refiere a ganar el premio de esa lotería). Todo se puede poner en términos de los premios de las loterías, porque todas las loterías tienen exactamente los mismos premios pero diferentes probabilidades de obtenerlos.

Lo que se supone es que se puede “descomponer” esta lotería compuesta y convertirla en una lotería simple (en teoría) que ya no depende de otras loterías y solo está en términos de los premios, en donde la probabilidad de conseguirlos se obtiene mediante la fórmula siguiente:

Probabilidad de ganar el premio A_i (i es un número entre 1 y r) es igual a la suma del producto de la probabilidad de jugar cada lotería por la probabilidad de ganar ese premio en esa lotería (aunque siempre existe la posibilidad de adaptar las loterías para que “tengan” los mismos premios –dándoles probabilidad cero–).

Si entendemos una lotería como un juego en donde tenemos premios, que a su vez se tienen sus respectivas probabilidades de obtenerlos, esta suposición solo arguye que a partir de cualquier número de loterías con exactamente los mismos premios pero con distintas probabilidades para obtenerlos, podemos crear una lotería compuesta; y ésta será equivalente a una lotería simple, tomando probabilidades de una manera adecuada mediante una combinación lineal de los coeficientes elegidos con los coeficientes de las loterías originales.

Con las posibles finalidades de combinar loterías sin agregar mayor complejidad, si y sólo si estas loterías poseen exactamente los mismos premios.

Suposición 3 (continuidad). Cada premio A_i es indiferente para algunos boletos de lotería involucrando únicamente a A_1 y a A_r . Esto es, existe un número u_i tal que A_i es indiferente a $[u_i A_1, 0A_2, \dots, 0A_{r-1}, (1 - u_i)A_r]$. Por conveniencia escribimos $A_i \sim [u_i A_1, (1 - u_i) A_r] = \tilde{A}_i$, pero se debe notar que A_i y \tilde{A}_i son dos entidades diferentes.

Para cualquier premio existe una lotería que es indiferente a él y dicha lotería solo tiene probabilidades positivas para dos premios. Cuando la probabilidad de conseguirlo es cero, se dice que la lotería es indiferente al premio. Es decir, que para cualquier premio existe una lotería en la cual no se pueda ganar ese premio.

Juntando el anterior postulado y ésta se puede construir la continuidad del espacio de loterías mediante combinaciones lineales tomando como base las loterías del postulado 3.

Suposición 4 (sustituibilidad). *Para cualquier lotería L , \tilde{A}_i es sustituible por A_i , esto es, $(p_1A_1, \dots, p_iA_i, \dots, p_rA_r) \sim (p_1A_1, \dots, p_i\tilde{A}_i, \dots, p_rA_r)$.*

Para cualquier premio A en cualquier lotería L existe un premio \tilde{A} que puede ser sustituido por él, obteniendo así una lotería semejante.

Suposición 5 (transitividad). *La preferencia y la indiferencia entre los boletos de lotería son relaciones transitivas.*

Se puede preferir una lotería a otra, y esa relación también es transitiva. No se pide que cualesquiera dos loterías se puedan comparar, solo que sea transitivo, o sea, que posea un orden parcial.

Suposición 6 (monotonía). *Una lotería $[pA_1, (1 - p)A_r]$ es preferida o indiferente a $[p'A_1, (1 - p')A_r]$ si y sólo si $p \geq p'$.*

Si se tiene una lotería que solo considera dos premios, una sólo podrá ser preferida sobre la otra o semejante a aquella lotería con los mismos premios, si la probabilidad del mejor premio es mayor o igual que en la primera, considerando que ambas tienen exactamente los mismos premios, pero con la posibilidad de que las probabilidades de conseguirlos sean diferentes. En donde la probabilidad del mejor premio determina la preferencia.

VII.2 Formas de Representar un Juego

Ahora que se ha definido propiamente lo que es un juego dentro de la teoría de juegos, se debe notar la diferencia entre la definición del juego y el tratamiento y representación que se utiliza para el mismo; existen diversas formas de representar un juego para trabajarlo, la que se utiliza depende de los tipos de juegos que se estudian; es deseable una representación que facilite el manejo e interpretación del juego, dejando de lado características irrelevantes y resaltando lo importante para el caso que se trate.

Existen diferentes formas de representar diferentes tipos de juegos, las representaciones buscan enseñar de una forma resumida y clara el juego, facilitando el análisis del mismo. Cada representación tiene una ventaja sobre la otra, o en su caso, funciona mejor en la representación de cierto tipo de juegos.

Las dos formas más comunes de representación de un juego son: la forma normal y la forma extensiva; mientras la forma normal es usada para la representación de juegos simultáneos, la forma extensiva es mejor para los juegos secuenciales. Dichas representaciones se explicarán a continuación.

VII.2.1 Forma Normal

La forma normal de representar un juego, está pensada para juegos simultáneos y finitos en los que el resultado queda determinado por una elección de cada jugador, esto quiere decir que también son juegos sin azar.

Para representar un juego en forma normal, se deben identificar todas las estrategias posibles para los jugadores; suponiendo dos jugadores (j_1 y j_2) donde j_1 tiene 2 opciones y j_2 tiene 3 opciones, se debe realizar una tabla de 2×3 y en ella identificar cada fila con una estrategia de j_1 y cada columna con una estrategia de

j_2 . Por ejemplo, si las estrategias fuesen arriba o abajo para j_1 y derecha, izquierda y centro para j_2 la tabla quedaría como se muestra:

| | | Jugador j_2 | | |
|---------------|--------|---------------|---------|--------|
| | | Izquierda | Derecha | Centro |
| Jugador j_1 | Arriba | | | |
| | Abajo | | | |

Cada celda en la tabla corresponde con una posible combinación de estrategias de los jugadores y, por lo tanto, el contenido de la celda debe ser el resultado del juego. Lo más común es tratar con resultados numéricos, aunque no se limita a ello, por lo que el resultado se denota como una pareja ordenada en la que el primer número representa la ganancia para j_1 y el segundo número la ganancia de j_2 . Por ejemplo:

| | | Jugador j_2 | | |
|---------------|--------|---------------|---------|---------|
| | | Izquierda | Derecha | Centro |
| Jugador j_1 | Arriba | (1,4) | (5,-7) | (4,8) |
| | Abajo | (-1,0) | (9,5) | (-4,-3) |

En la representación anterior se indica que, si j_1 opta por su estrategia arriba y j_2 decide tomar la derecha, el resultado será que el jugador j_1 obtenga una ganancia de 5 y el jugador j_2 obtenga una ganancia de -7 (o una pérdida de 7, que es lo mismo). De igual forma, se puede ver el resultado para cualesquiera sean las decisiones de ambos jugadores.

Un ejemplo importante, que ya ha sido mencionado, es el dilema del prisionero; para recordar, si alguno delata a su compañero que se mantiene callado, el delator sale libre y el callado recibe una condena por 9 años. Si ambos se delatan, ambos reciben una condena por 6 años cada uno; pero si ninguno delata al otro, solo pagarán 3 años en prisión cada uno. Considerando que pagar una condena es algo negativo y las opciones para ambos son delatar o callar, el juego se podría representar de la siguiente forma.

| | | | |
|------------------|---------|------------------|---------|
| | | Prisionero j_2 | |
| | | Delatar | Callar |
| Prisionero j_1 | Delatar | (-6,-6) | (0,-9) |
| | Callar | (-9,0) | (-3,-3) |

Una de las ventajas de la representación normal es que permite ver con cierta facilidad si el juego es simétrico para ambos jugadores; es decir, cuando ambos jugadores tienen las mismas opciones y éstas les llevan a los mismos resultados, como en el ejemplo anterior.

La representación de forma normal como tabla se puede generalizar para cualquier número de estrategias, basta realizarla del tamaño necesario. Si el jugador 1 tiene p estrategias y el jugador 2 tiene q estrategias posibles, será necesaria una tabla de $p \times q$ para representar el juego.

Esta representación toma en cuenta todas las combinaciones de estrategias de los dos jugadores, por lo que se puede decir que cada celda de la tabla representa un elemento del espacio de todos los perfiles de acción del juego y dentro de ella se anota el resultado que le corresponde (como un vector de pagos en este caso).

La representación se puede generalizar aún más (al menos en teoría) de forma que considere una mayor cantidad de jugadores, en la práctica esto tiene

problemas en términos visuales, pues para tres jugadores los resultados deberían exponerse en una matriz tridimensional en vez de una bidimensional —como es el caso de las tablas anteriores—; por ello, para más de tres jugadores se tendría que establecer un estándar diferente para la presentación del juego, una opción podría ser colocar tablas parciales anidadas.

Formalmente, la representación de un juego en forma normal es una matriz multidimensional, cuya dimensión es el número de jugadores y el tamaño en cada dimensión corresponde al número de estrategias posibles para el jugador que corresponda a tal dimensión; en otras palabras:

“Definición. La forma-normal de representación de un juego de n -jugadores especifica los espacios de estrategias de los jugadores S_1, \dots, S_n y sus funciones de pago u_1, \dots, u_n . Nosotros denotamos este juego como $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$.”⁵²

Aunque la definición de la forma normal es suficiente para representar cualquier juego, se pierde la posibilidad visual de considerar las jugadas con cierto orden, y con ello las consideraciones de las jugadas anteriores; por ello se utiliza para juegos simultáneos y usualmente solo se utiliza para juegos simultáneos de dos jugadores.

La representación normal de un juego de suma cero de dos jugadores suele tener una representación especial, debido a la característica de suma cero, basta conocer la ganancia de uno de los jugadores para poder conocer la ganancia del otro jugador, por lo que el resultado se representa únicamente por la ganancia del jugador j_1 (por convención). Por ejemplo si se considera un encuentro de piedra papel o tijera, el juego se puede representar como:

⁵² Gibbons, Robert. (1992) *Game Theory for Applied Economists*. Princeton University Press. p. 4. “Definition The normal-form representation of an n -player game specifies the players' strategy spaces S_1, \dots, S_n and their payoff functions u_1, \dots, u_n . We denote this game by $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$.”

| | | | | |
|---------------|--------|---------------|-------|--------|
| | | Jugador j_2 | | |
| | | Piedra | Papel | Tijera |
| Jugador j_1 | Piedra | 0 | -1 | 1 |
| | Papel | 1 | 0 | -1 |
| | Tijera | -1 | 1 | 0 |

Por otra parte, la principal ventaja de representar un juego en su forma normal es la facilidad para identificar estrategias dominadas y dominantes, mediante la comparación entre filas o columnas; retomando el ejemplo del dilema del prisionero.

| | | | |
|------------------|---------|------------------|---------|
| | | Prisionero j_2 | |
| | | Delatar | Callar |
| Prisionero j_1 | Delatar | (-6,-6) | (0,-9) |
| | Callar | (-9,0) | (-3,-3) |

Sin importar a cuál de los dos prisioneros se considere si el otro delata, lo mejor es delatar pues -6 es mejor que -9; por otra parte si el otro calla, lo mejor es delatar pues 0 es mejor que -3. Así, sea cual sea la decisión del otro lo mejor es delatar, esto nos puede llevar a la conclusión de que delatar es la única decisión racional para ambos jugadores. Recordando que esto es haciendo solo consideraciones individuales de los resultados y sin información adicional.

En ocasiones, por medio de descartar las estrategias dominadas y fijarse en las estrategias dominantes, es posible determinar una solución para un juego; este método de obtención de soluciones será abordado más adelante en el apartado VII.4 Solución de un Juego.

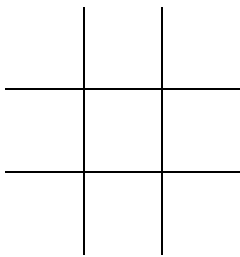
VII.2.2 Forma Extensiva

Cuando se habla del transcurso del juego se pueden trazar los diversos caminos y veredas que toma un juego. Extrayendo los movimientos y las jugadas podemos delinear la forma que puede adquirir un juego al ser jugado.

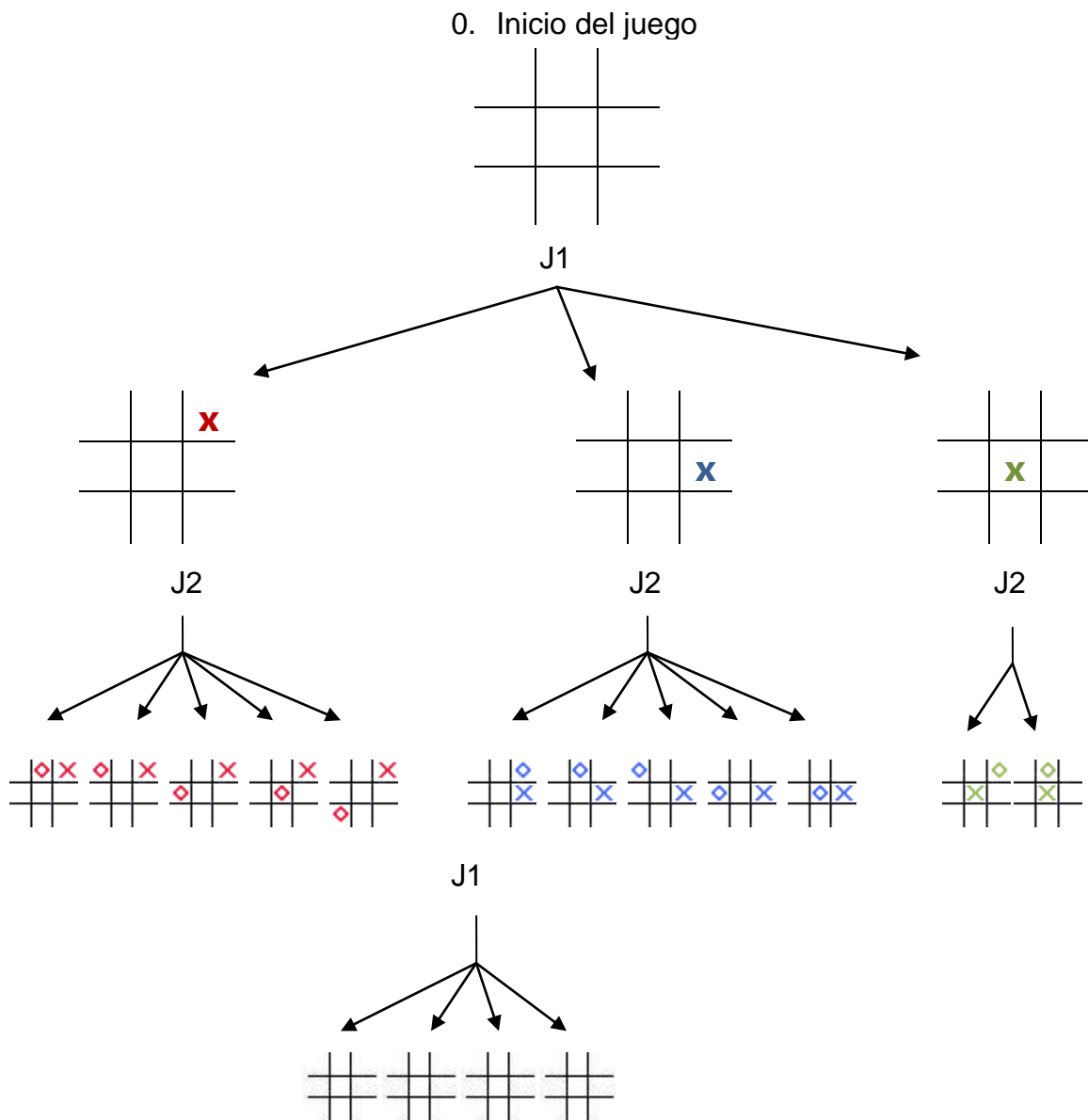
Con ello podemos representar el juego en su totalidad, siempre que sea factible. Muchos juegos se limitan a unas pocas jugadas como el lanzar una moneda, mientras que otros son tan complejos y poseen tantas jugadas que realizar su representación paso a paso no ayuda ni es viable, como lo es el ajedrez, o algunos juegos con demasiados jugadores.

Sin embargo, muchas veces algunos juegos relativamente simples ofrecen la posibilidad de ser representados gráficamente para poder visualizar nuestra estrategia, ver las estrategias de los oponentes y quizá prever posibles resultados del juego.

Ahora bien, imaginando un juego de gato normal, en donde el juego se desarrolla en un tablero de 3x3 entre dos jugadores que a su vez eligen entre “O” y la “X”. El jugador que logre —primero— formar una línea completa; ya sea de forma vertical, horizontal o en diagonal, gana la partida.

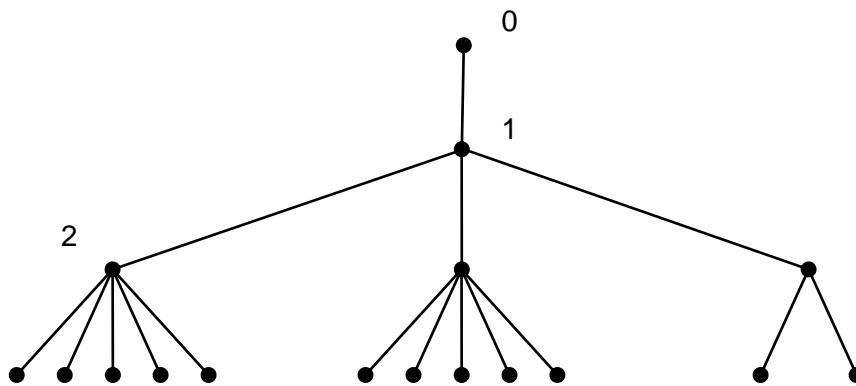


Al inicio del juego el primero en elegir tiene nueve posibles tiros, pero que en esencia se pueden resumir, por simetría, en tres: las cuatro esquinas (marcadas en rojo), las casillas medias-externas (en azul) y el centro (en verde). De aquí que podamos resumir el inicio del juego en estas tres clases de casillas; el juego se resume en la siguiente representación, haciendo consideraciones de simetría similares.



La anterior representación son sólo las primeras jugadas en el juego de gato para cada jugador. Aquí se representan todas las posibles movidas que tiene a su disposición el jugador 1 y posteriormente el jugador 2.

Dejando de lado por un momento las figuras de gato podemos dibujar la estructura en general de nuestro juego de la siguiente manera:

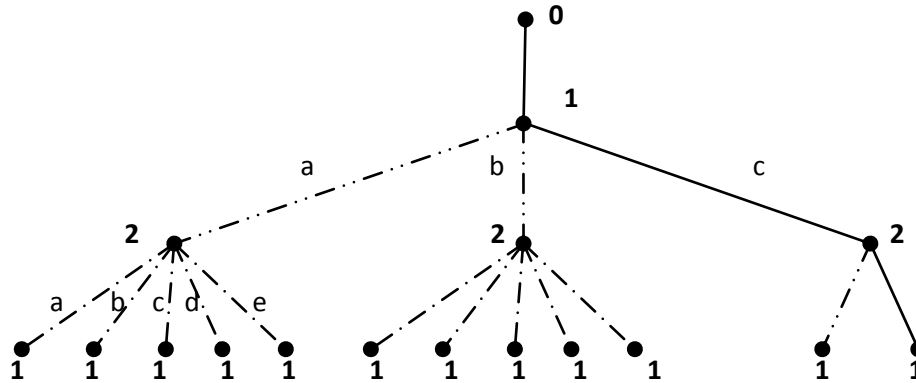


Los nodos representan un punto de elección, o *movida*; mientras que los números que se expresan al lado de los nodos se refieren al jugador que está a punto de realizar una jugada. La anterior estructura es una figura simple que no denota aún las jugadas del jugador, simplemente sus posibles movidas.

Una representación gráfica puede ser tan explícita como el juego lo requiera —se puede tratar de un juego sencillo con características simples, o bien puede tratarse de un juego no sólo con muchas ramificaciones, sino también con una serie de rasgos más complejos y particulares que requieran de una notación mucho más precisa— siempre y cuando se tome en cuenta que las movidas (y jugadas) no se pueden aislar una de otra.

Para realizar una representación gráfica adecuada de un juego se deben de poder trazar las jugadas realizadas por el jugador, a sabiendas de que a esa elección le preceden otras y que a esta elección le seguirán otras. Cada movida depende a su vez de otras, y este es uno de los objetivos de realizar los llamados “árboles”: para poder hacer un mapeo completo del juego que nos ofrezca mayor claridad sobre el mismo.

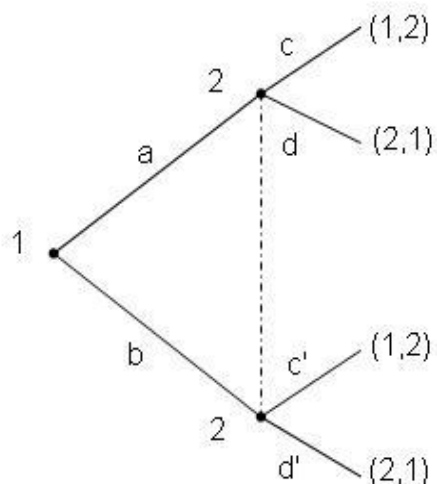
Siguiendo con la idea anterior podemos trazar el siguiente juego de gato:



Como se muestra en la figura, al punto inicial le corresponde al jugador 0 —que se refiere a un movimiento del azar— y que tiene una única posibilidad (con probabilidad de 1). A éste le sigue el nodo que representa el momento de elección del jugador 1, quien tiene *a*, *b* y *c* como posibles movidas; siendo la opción *c* la jugada realizada.

Los números asociados a cada punto de elección denotan el jugador a quien le corresponde éste dominio de posibles jugadas; por lo que estos números van desde el 1 hasta *n* cuando existe *n* jugadores, dejando al 0 como una “jugada de azar”, que bien puede ser visto como otro jugador. Cabe señalar que en este particular juego —cuando el jugador participa desde el comienzo— no existen puntos o nodos en donde el jugador no sabe en cuál se encuentra; es decir, ambos jugadores en el juego de gato tienen completo conocimiento de las jugadas realizadas, las jugadas posibles y el punto de elección en el que se encuentran.

En caso contrario, es decir, si el jugador desconociera en qué punto del juego se encuentra, el juego será un juego de información imperfecta. Una representación de un juego con información imperfecta podría verse de la siguiente manera:



En este árbol el Jugador 2 no sabe en qué nodo se encuentra. Bien podría estar en a y tener como posibles jugadas a c y b, o encontrarse en b y tener como movidas a c' y d'. Cuando un jugador se enfrenta a un juego de esta naturaleza la representación se hace mediante una línea que “encierra” a aquellos nodos de los cuales no se puede hacer una distinción, lo que denota un conjunto de información.

El lector, para este punto, habrá notado algunos rasgos necesarios para poder realizar un árbol de juego: primeramente se debe de dejar en claro, cosa que aún no se ha dicho explícitamente, que se trata de un juego finito. Es decir, existe un número finito N , fijo para el juego, tal que el juego termine en no más de N jugadas; y que, para poder trazar el juego, es necesario saber la información que les está disponible a los jugadores. Esto es, para poder realizar la representación del juego de manera fidedigna es necesario determinar de antemano cuáles son las condiciones a las que los jugadores están sujetos a jugar el juego. Las reglas del juego dictaminan la información que cada jugador podrá tener, considerando que el juego se llevara a cabo justamente⁵³.

En el juego de gato el problema de la información no existe como tal, ya que las jugadas hechas por cada jugador y las posibles movidas están a la vista de ambos. A esta clase de juegos se le conoce con el nombre de *información perfecta*, tema que ya fue expuesto con anterioridad.

Así mismo, no existe incertidumbre en tanto que las movidas están todas determinadas por las decisiones de cada jugador y no dependen de ninguna probabilidad como lo es el lanzamiento de un dado; ni de una tirada del azar como

⁵³ Se debe entender, en este párrafo, que el sentido de la palabra “justamente” hace referencia a no incumplir las reglas del juego; es decir, no hacer trampa.

sucede en los juegos de cartas. De tal suerte que la información en este caso en particular es cierta.

Pocos son los juegos que poseen esta característica de información perfecta, en general los juegos de cartas ofrecen a los jugadores una cantidad de información limitada, y los jugadores tienen que realizar sus jugadas en un estado de ignorancia en dos sentidos: el desconocimiento de las posibles movidas una vez que el jugador ha tomado una decisión (el nivel de desconocimiento de un juego justo tendrá que aplicarse para todos los jugadores; *i. e.* que si el jugador 1 tomo la decisión *a* pero no sabe cuáles eran las opciones que precedían a la toma de su decisión, los otros jugadores también tendrán en la misma proporción esa incertidumbre en algún nodo); y el desconocimiento que puede existir si las posibles opciones que le sigan a su decisión serán en condiciones de certeza, riesgo o incertidumbre.⁵⁴

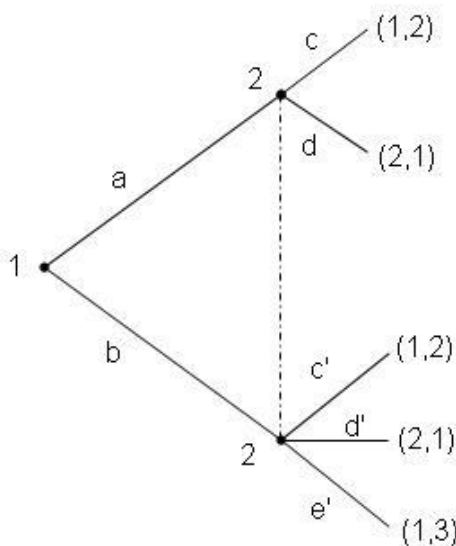
La representación extensiva de un juego debe de especificar el jugador que está en un punto de elección, las posibles elecciones (y, de ser un juego en donde la información es imperfecta aquellas jugadas que le son posibles pero de las cuales desconoce sus posibilidades) que devienen de un particular punto y en general de cada uno de los puntos de elección en el juego. Por lo que los posibles resultados de un juego deben de quedar completamente caracterizados, las jugadas que le precedieron y así sucesivamente, hasta el punto de partida del juego.

De aquí podemos deducir que la representación de un juego siempre deberá de poseer intrínsecamente las siguientes características, que a su vez son de alguna manera las reglas que constituyen a los juegos.

⁵⁴ El lector recordará que estas tres condiciones ya han sido explicadas en la sección de “Clasificación por probabilidad” en donde se hizo, a su vez, esta distinción sobre la probabilidad y las dos perspectivas que puede tomar. Deberá de quedar claro para este momento que estas dos formas de probabilidad son diferentes una de otra y que la una constituye un enfoque dado de la probabilidad matemática en la teoría de juegos; y el otro uno un tanto psicológico o estadístico a lo más.

- i. La representación de un juego finito deberá de poseer un punto de partida, o un nodo inicial.
- ii. El árbol deberá de acotar la relación de cada uno de los movimientos y jugadas derivadas de ellos, desde el nodo inicial hasta cada uno de los posibles resultados del juego y las jugadas que le dieron lugar.
- iii. En el árbol se incluirán nodos diferentes, que distinguen a los diferentes jugadores que en él participan, incluyendo el "0" o movimiento del azar; así como aquellas jugadas que le son propias a cada uno de estos jugadores.
- iv. Cuando existan movimientos de azar, deberá indicarse la distribución de la probabilidad en las aristas de esa jugada.
- v. Por último un resultado en cada uno de los puntos terminales del árbol.⁵⁵

Algunas consideraciones deben hacerse con respecto a los juegos con información imperfecta para poder realizar su representación extensiva, y para que de cierta manera sean considerados como tales, esto es, juegos en los que en algún punto de él alguno de los jugadores desconoce su posición.

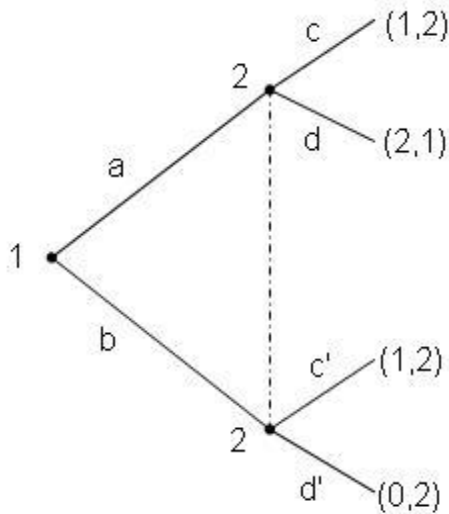


Examínese por ejemplo esta representación de un juego. Es fácil notar que, aunque se supone que J2 no sabe en cuál de los dos nodos del juego se encuentra, en realidad puede deducirlo. Si J2 tiene dos posibles jugadas, entonces puede inferir que se encuentra en el nodo a; mientras que si tiene tres movidas, entonces se encuentra en el nodo b.

⁵⁵ El enlistado hace referencia a lo descrito en Luce, Duncan & Raiffa, Howard. (1985) *Games and decisions: Introduction and critical survey*. New York: Dover publications, pp. 44, pero que no responde a él estrictamente.

Para que se diga que un jugador se encuentra en un conjunto de información, debe darse el caso en el que ese jugador tenga un conjunto de nodos (posibles jugadas) de entre los cuales él no pueda distinguir uno de otro. Así que por ello el árbol anterior o bien no está bien realizado, o en realidad no se trata de un juego de información imperfecta.

Ahora consideremos el siguiente juego, en el que los pagos son diferentes. Si J2 tuviera el conjunto de pagos (1,2) y (2,1) sabría que se encuentra en el nodo a, mientras que si el conjunto de pagos fuese (1,2) y (0,2) sabría que J1 escogió b.



De estos dos ejemplos se puede agregar que para que un jugador esté en un juego de información imperfecta el árbol que lo represente deberá de ser “simétrico”, en el sentido de que las opciones de entre las que no puede distinguir posean el mismo número de posibles jugadas, y pagos idénticas. De otro modo el jugador puede saber en qué nodo se encuentra y no sería como tal un juego de información imperfecta.

Hasta aquí las consideraciones relativas a las reglas del juego que deben de estar acotadas en la representación extensiva del mismo.

VII.3 Solución de un Juego

Ahora que se ha determinado claramente lo que forma la estructura de un juego, que se han caracterizado los agentes que intervienen en ellos, y que se han explicado las diversas clasificaciones; es natural preguntarse qué “solución” se le puede dar a algún juego y con ello intentar dar una respuesta con características

generales que pueda ser aplicada no sólo ese juego en particular. Para ello, primero deberá determinarse lo que será la solución de un juego:

No se da una motivación detallada para los postulados por el momento, pero se formularán con la esperanza de que el lector los encuentre plausibles de alguna forma. (...) Los postulados son: Un conjunto S de elementos (decisiones) es el conjunto solución si posee las siguientes dos propiedades:

(a) Ningún y en S es dominado por algún x en S .

(b) Todos los y que no están en S son dominados por algún x en S .

(a) y (b) pueden enunciarse como la simple afirmación:

(c) Los elementos de S son precisamente los que no son dominados por elementos de S . [Von Neumann, J. y Morgenstern, O., 1955: 39]

Dada la anterior definición, se trata de un conjunto de soluciones, no de una única solución; lo que significa que los juegos con una única solución serán un caso especial. Las decisiones pueden ser vistas como las estrategias, pero tomando en cuenta la de cada uno de los jugadores; por ello al decir que sean dominadas se hace referencia a estrategias dominantes.

Entonces se puede decir que, una solución será un resultado que se obtiene mediante estrategias tales que cumplen con no ser dominadas, para el jugador que la aplica.

Esto asegura en cierta forma que, si las decisiones ya han sido tomadas ninguno de los jugadores preferiría cambiar su decisión (manteniendo el resto de las decisiones como están).

VII.3.1 Por eliminación de estrategias dominadas

Si se busca una estrategia dominada o dominante para el jugador j_1 se deben comparar las filas entre sí, si se busca para el jugador j_2 se deben comparar las columnas.

Cuando se identifica una estrategia dominante universal se sabe, bajo el principio de racionalidad de los jugadores, que dicha estrategia será elegida por sobre las otras; por lo que en teoría esta es la única estrategia relevante ya que ninguna otra será elegida racionalmente. Mientras que, cuando se identifica una estrategia dominada, se sabe por el mismo principio, que esa estrategia no será elegida y por lo tanto puede omitirse en el juego.

Estas consideraciones para omitir estrategias en los juegos, permiten reducir el tamaño de la representación, de forma que solo se contemplen las estrategias que pueden resultar mejores que otras en alguna circunstancia. A continuación un ejemplo de ello.

| | | Jugador j_2 | | | | |
|---------------|-----------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | $S_{2,1}$ | $S_{2,2}$ | $S_{2,3}$ | $S_{2,4}$ | $S_{2,5}$ |
| Jugador j_1 | $S_{1,1}$ | (1,4) | (6,-7) | (3,8) | (3,8) | (-2,1) |
| | $S_{1,2}$ | (1,0) | (9,5) | (4,-3) | (7,8) | (6,5) |
| | $S_{1,3}$ | (0,8) | (1,4) | (2,0) | (5,2) | (-1,0) |
| | $S_{1,4}$ | (2,4) | (5,0) | (4,4) | (9,3) | (9,2) |
| | $S_{1,5}$ | (-1,2) | (0,1) | (-1,4) | (0,2) | (-2,3) |

Si se analizan los resultados para el jugador j_1 , se puede observar que la estrategia $S_{1,5}$ es dominada por todas las otras opciones de j_1 , pues cualquiera que fuese la estrategia elegida por j_2 , la estrategia $S_{1,5}$ le daría un resultado igual o peor que cualquier otra estrategia. Así la opción $S_{1,5}$ puede ser considerada irracional y por lo tanto omitirla en el juego, lo que dejaría el juego como sigue:

| | | Jugador j_2 | | | | |
|---------------|-----------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | $S_{2,1}$ | $S_{2,2}$ | $S_{2,3}$ | $S_{2,4}$ | $S_{2,5}$ |
| Jugador j_1 | $S_{1,1}$ | (1,4) | (6,-7) | (3,8) | (3,8) | (-2,1) |
| | $S_{1,2}$ | (1,0) | (9,5) | (4,-3) | (7,8) | (6,5) |
| | $S_{1,3}$ | (0,8) | (1,4) | (2,0) | (5,2) | (-1,0) |
| | $S_{1,4}$ | (2,4) | (5,0) | (4,4) | (9,3) | (9,2) |

De forma similar se concluye que $S_{1,1}$ es dominada por $S_{1,2}$, además $S_{1,3}$ es dominada por $S_{1,4}$; por lo tanto las estrategias $S_{1,1}$ y $S_{1,3}$ resultan ser inferiores, cada una a otra estrategia, por lo que pueden ser consideradas irracionales y omitirse del juego; quedando para el jugador j_1 solo las estrategias viables $S_{1,2}$ y $S_{1,4}$. Esto nos deja la representación del juego:

| | | Jugador j_2 | | | | |
|---------------|-----------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | $S_{2,1}$ | $S_{2,2}$ | $S_{2,3}$ | $S_{2,4}$ | $S_{2,5}$ |
| Jugador j_1 | $S_{1,2}$ | (1,0) | (9,5) | (4,-3) | (7,8) | (6,5) |
| | $S_{1,4}$ | (2,4) | (5,0) | (4,4) | (9,3) | (9,2) |

Hasta ahora se logró reducir un juego en una tabla de 5x5 a una tabla representativa de 2x5. Aplicando los criterios al jugador j_2 es posible reducir aún más el juego; pues se tiene que $S_{2,3}$ es dominada por $S_{2,1}$, además $S_{2,4}$ domina tanto a $S_{2,2}$ como a $S_{2,5}$, por lo que las únicas estrategias racionales son $S_{2,1}$ y $S_{2,4}$. Dejando el juego representado en una tabla de 2x2:

| | | Jugador j_2 | |
|---------------|-----------|---------------|-----------|
| | | $S_{2,1}$ | $S_{2,4}$ |
| Jugador j_1 | $S_{1,2}$ | (1,0) | (7,8) |
| | $S_{1,4}$ | (2,4) | (9,3) |

Llegado este punto se ha de mencionar dos aspectos importantes, el primero de ellos es que, al aplicar los criterios de eliminación es importante que el jugador se considere primero; en el ejemplo anterior, inicialmente no existían estrategias dominadas ni dominantes para el jugador j_2 por lo que era mejor comenzar por considerar al jugador j_1 .

El otro aspecto es que el aplicar los criterios de eliminación una vez a cada jugador puede no ser suficiente para reducir un juego a su mínima representación. Se pueden aplicar reiteradamente los criterios, pues al eliminar estrategias de un jugador, algunas de las estrategias del otro jugador pueden convertirse en estrategias dominadas o dominantes lo que permitiría continuar con las eliminaciones. El método de eliminación se trunca cuando no es posible eliminar alguna estrategia para ninguno de los jugadores.

Continuando el ejemplo anterior, y ya que bajo nuestras nuevas consideraciones $S_{1,4}$ domina a $S_{1,2}$, lo cual no ocurría inicialmente, la representación del juego se puede reducir a:

| | | | |
|---------------|-----------|---------------|-----------|
| | | Jugador j_2 | |
| | | $S_{2,1}$ | $S_{2,4}$ |
| Jugador j_1 | $S_{1,4}$ | (2,4) | (9,3) |

Y por último, $S_{2,1}$ domina a $S_{2,4}$, lo que deja el juego con una forma mínima de 1×1 , por lo que tomando decisiones racionales, las únicas estrategias viables serían $S_{1,4}$ para el jugador j_1 y $S_{2,1}$ para el jugador j_2 .

| | | | |
|--|---------------|---------------|-----------|
| | | Jugador j_2 | |
| | | | $S_{2,1}$ |
| | Jugador j_1 | $S_{1,4}$ | (2,4) |

Cuando la mínima representación normal de un juego es de 1×1 , significa que las decisiones racionales son únicas para ambos jugadores y esas estrategias son la solución del juego y el resultado al que se llega es el *valor del juego*.

Se puede demostrar que cualquiera que sea el orden de aplicación de los criterios, el resultado final será el mismo (salvo estrategias indiferentes). Aún en un diferente orden debe cumplirse que una estrategia dominada no deja de ser dominada si se eliminan estrategias del otro jugador, por lo que todas las estrategias dominadas terminarían por ser eliminadas; además, cualquier estrategia $S_{n,m}$ que se pudiera eliminar durante el método o era dominada o se hace dominada al eliminar otras que se encontraban en la misma disyuntiva, por recursividad finita podemos asegurar que $S_{n,m}$ será eliminada cuando sean eliminadas las estrategias que la hacen una estrategia dominada.

De forma que las estrategias que no se eliminan son las mismas sin importar el orden en que se inicie y aplique el método. Aún si, por ejemplo, se intercalase la eliminación de una estrategia de cada jugador a la vez.

Lamentablemente, no siempre es posible llegar a una solución por este método, ya que no siempre la representación normal mínima de un juego resulta ser de 1×1 . Consideremos por ejemplo el juego de piedra papel o tijera.

| | | | | |
|--|--------|---------------|-------|--------|
| | | Jugador j_2 | | |
| | | Piedra | Papel | Tijera |
| | Piedra | 0 | -1 | 1 |
| | Papel | 1 | 0 | -1 |
| | Tijera | -1 | 1 | 0 |

Este juego no se puede reducir más con el uso de estrategias dominantes, de hecho este es un buen ejemplo de juego en el que ninguna estrategia es razonablemente mejor o peor que cualquiera de las otras, dando como resultado que las tres estrategias sean igual de “razonables”.

La cantidad de variaciones que puede existir en los juegos va mucho más allá de los alcances de este trabajo pero aún limitándonos a juegos de suma cero, se puede asegurar que existe un juego irreducible para cualquier tamaño que se quiera, aquí algunos ejemplos⁵⁶:

| | | | |
|---------------|-----------|---------------|-----------|
| | | Jugador j_2 | |
| | | $S_{2,1}$ | $S_{2,2}$ |
| Jugador j_1 | $S_{1,1}$ | 1 | 2 |
| | $S_{1,2}$ | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---------------|-----------|---------------|-----------|-----------|-----------|
| | | Jugador j_2 | | | |
| | | $S_{2,1}$ | $S_{2,2}$ | $S_{2,3}$ | $S_{2,4}$ |
| Jugador j_1 | $S_{1,1}$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | $S_{1,2}$ | 2 | 0 | 0 | 3 |
| | $S_{1,3}$ | 3 | 0 | 0 | 2 |
| | $S_{1,4}$ | 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | | | | |
|---------------|-----------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | Jugador j_2 | | | | |
| | | $S_{2,1}$ | $S_{2,2}$ | $S_{2,3}$ | $S_{2,4}$ | $S_{2,5}$ |
| Jugador j_1 | $S_{1,1}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | $S_{1,2}$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| | $S_{1,3}$ | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| | $S_{1,4}$ | 4 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | $S_{1,5}$ | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

⁵⁶ Estos ejemplos son juegos de suma cero, en los cuales sólo se representa el pago al jugador J_1 .

La idea es clara, para encontrar resultados que hagan un juego de $n \times n$ irreducible, una opción es que: a la primera estrategia del jugador j_1 se le asigne un resultado creciente conforme las opciones de j_2 , a la última estrategia de j_1 resultado decreciente —comenzando con el numero de estrategias disponibles—, y de forma contraria para la primera y última estrategia de j_2 con los números adecuados (recordando que siendo de suma cero j_2 pierde lo que j_1 gana).

| | | Jugador j_2 | | | | |
|---------------|-------------|---------------|-----------|-----|-------------|-----------|
| | | $S_{2,1}$ | $S_{2,2}$ | ... | $S_{2,n-1}$ | $S_{2,n}$ |
| Jugador j_1 | $S_{1,1}$ | 1 | 2 | ... | $n-1$ | n |
| | $S_{1,2}$ | 2 | 0 | ... | 0 | $n-1$ |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | $S_{1,n-1}$ | $n-1$ | 0 | ... | 0 | 2 |
| | $S_{1,n}$ | n | $n-1$ | ... | 2 | 1 |

De forma que este juego es irreducible para cualquiera que sea la n . Por ello, el método de eliminación de estrategias dominadas para encontrar la solución de un juego, es muy limitado pues solo funciona con algunos juegos. Los juegos cuyo valor se puede calcular con dicho método se le conocen como juegos de valor simple.

Sin embargo, existen métodos para la obtención de una solución por medio de estrategias mixtas, ese método está desarrollado pensando únicamente en juegos simultáneos de suma cero de dos jugadores, la solución por estrategias mixtas permite (en teoría) calcular el valor de cualquier juego que cumpla con las características mencionadas. El método es complejo y se explicará superficialmente más adelante.

VII.3.2 Inducción hacia atrás

Cuando se abordó lo que es una representación de un juego de la forma normal y extensiva en el apartado VII.3.2 la formulación de los pagos resultaba clara, pero la solución no del todo. La manera en la que el juego se resolvería, considerando que nuestros agentes actuarán de manera racional tratando de buscar aquel resultado que les sea más beneficioso o menos perjudicial, puede no ser tan claro como se vio anteriormente en eliminación de estrategias dominadas.

El uso de las formas de representación de un juego será significativo para poder dar una explicación adecuada de lo que consiste la resolución de un juego por inducción hacia atrás, por lo que se empezará haciendo el análisis de un juego con su representación extensiva.

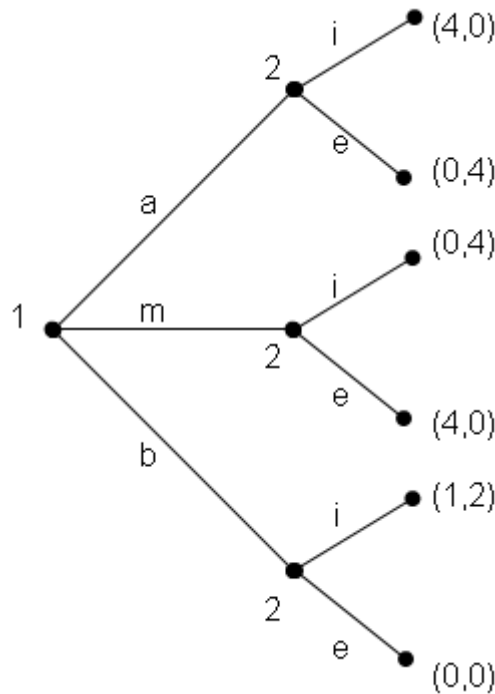
La formulación de un árbol permite expresar varias cosas en un juego, y a su vez, muestra caminos que el jugador puede tomar. Algunos juegos pueden trazarse y generar un árbol que lo exprese en su totalidad, y señala las varias estrategias de juego que los jugadores pueden adoptar.

Ahora bien, sabemos que para realizar un árbol varias cosas deben de estar establecidas por el juego. Las condiciones a priori que se usarán para la exposición constarán de tres propiedades, en adición de que el juego sea un juego finito y de dos jugadores⁵⁷: se requerirá de un juego dinámico, esto es con una secuencia de jugadas; los jugadores conocerán en todo momento las jugadas que se han realizado a lo largo del juego y las que se podrían dar en lo sucesivo antes de realizar la jugada, o sea un juego con información perfecta; y los pagos para cualquier posible desenlace del juego son conocidas por los jugadores, lo que es un juego de información completa. Estas cualidades permitirán crear un árbol

⁵⁷ Estas consideraciones responden a la aplicabilidad, más no son necesarias para establecer el equilibrio de Nash, pues éste puede darse bajo otras condiciones.

“sencillo”⁵⁸ que muestre con mayor facilidad las regresiones que se pueden ir haciendo y los subjuegos que se pueden generar, pues la inducción hacia atrás intuitivamente es esto, una regresión del final del juego al inicio.

Tómese entonces como ejemplo el siguiente árbol de juego:



Hablando de un juego estrictamente competitivo, sabemos que si el jugador 1 escoge *m*, entonces el jugador 2 tendría como posibles jugadas *i* y *e*, pues sabemos que cada jugador busca aquella estrategia que le resulte más beneficiosa. A veces será necesario señalar algunas reglas del juego, pues bien podría darse el caso de que lo que se busque no sea el mayor beneficio, sino la menor pérdida. Aunque normalmente se supondrá que se busca obtener la mayor ganancia, si no se ha especificado lo contrario.

⁵⁸ Esto depende de la complejidad del juego, pues cuando se trate de un juego finito de dos jugadores que cumpla dichas características, bien las combinaciones y el número de jugadas posibles pueden hacer que el juego sea más “complejo”, tal como sucede con el ajedrez.

Aquí cada una de las jugadas están plenamente diferenciadas una de otra, ya que cuando a un jugador le corresponde realizar una jugada, esto es, que se encuentra en un punto de decisión, dicho jugador sabe con exactitud qué jugada le precedió. También conoce sus posibilidades y los pagos de cada una de estas posibles elecciones.

Tal juego constituye un juego finito de información perfecta como lo describimos anteriormente.

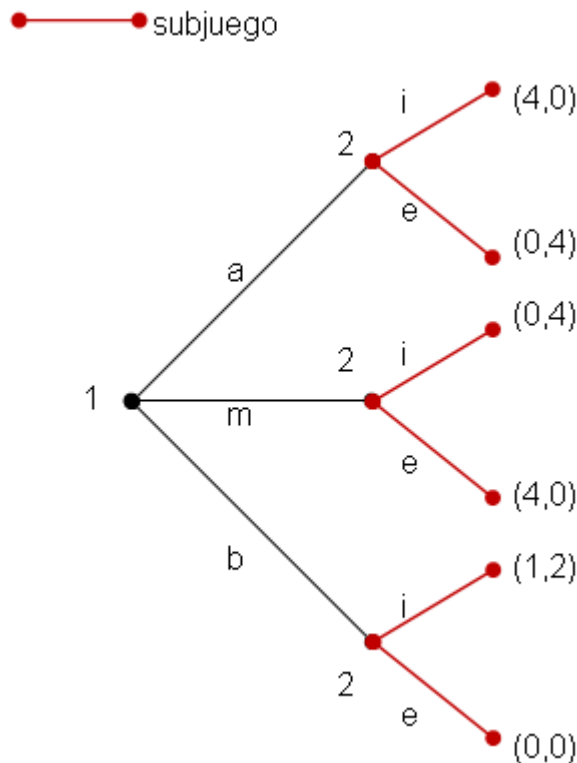
Dado lo anterior podemos generar una matriz que muestra la relación entre los pagos y las posibilidades de ambos jugadores. En donde S_1 es el conjunto de las posibles jugadas del jugador 1, y S_2 es el conjunto de las movidas disponibles al jugador 2.

| | | | |
|-------|----------------|----------------|----------------|
| | | S_2 | |
| | | $\alpha_{2,i}$ | $\alpha_{2,e}$ |
| S_1 | $\alpha_{2,a}$ | (4,0) | (0,4) |
| | $\alpha_{2,m}$ | (0,4) | (4,0) |
| | $\alpha_{2,d}$ | (1,2) | (0,0) |

Aquí se muestran los pagos de ambos jugadores, dependiendo de las jugadas que realicen, y el conjunto de todos los posibles resultados del juego. Encontrar una solución dadas las condiciones del juego resulta más sencillo en esta clase de juegos. Los pagos no dependen de ninguna distribución probabilística, y los jugadores conocen las posibles consecuencias de las elecciones que tomen.

Examinemos entonces las posibilidades del juego. Para ello se partirá de los subjuegos que se encuentran más próximos a los nodos finales del árbol, pues la inducción hacia atrás trata de “una secuencia de problemas de optimización anidados, resueltos del futuro al presente” [Vega-Redondo, Fernando, 2003: 111]. Encontrar la mejor estrategia de cada jugador y con ello el pago en la inducción hacia atrás se hace mediante la evaluación de los subjuegos.

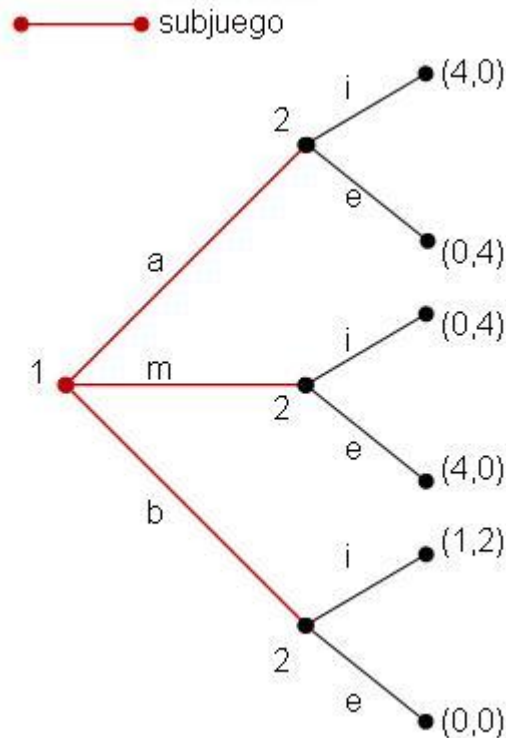
Considérese entonces el primer subjuego del juego original de manera descendiente.



Si el jugador 2 se encontrase en la opción *a*, entonces elegiría *e*, dado que su ganancia o pago sería 4. Si J2 estuviera en la opción *m*, entonces *i* sería su elección, obteniendo como pago 4. Y por último, si J2 se encontrase en la opción *b*, entonces su jugada sería *i*, resultando su ganancia 2.

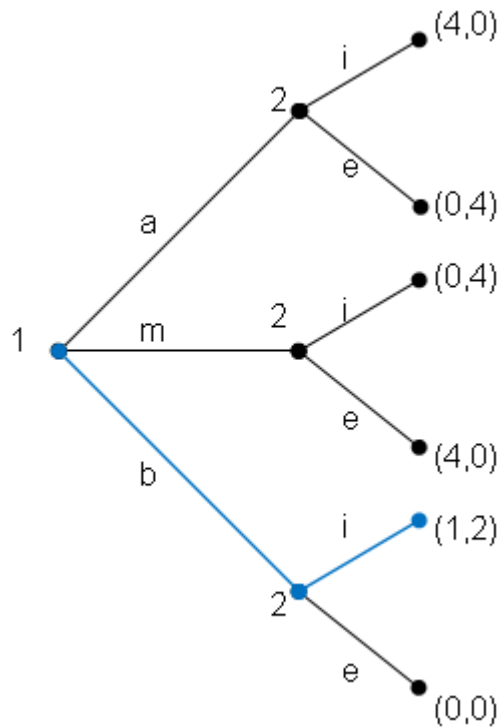
Hasta aquí tenemos todas las posibles acciones que el jugador 2 elegiría ante todas las posibles jugadas del jugador 1. No hay ningún caso en donde el plan de acción del jugador 1 no haya sido considerado por el jugador 2.

Habiendo realizado la comparación entre las movidas que le corresponden al jugador 2, corresponde el análisis del siguiente subjuego, el que sucede ser el inicio del juego. En él, el Jugador 1 tiene como posibles pagos 0, 0, 1; correspondientes a $\alpha_{1,a}(0,4)$, $\alpha_{1,m}(0,4)$ y $\alpha_{1,b}(1,2)$; siendo $\alpha_{1,a}$ y $\alpha_{1,m}$ indiferentes. Estos dos últimos le ofrecen al jugador 1 un pago de 0, mientras que $\alpha_{1,b}$ le dará una ganancia de 1.



El problema al que se tiene que enfrentar el jugador 2 —quien tiene la decisión más cerca al nodo final del juego— es la de maximizar su utilidad, por lo que se descartan las opciones que le ofrecen una menor ganancia en cada uno de los subjuegos, dejando al jugador 1 tres posibles resultados.

La mejor respuesta del jugador 1 dado el plan del jugador 2, sería $\alpha_{1,b}$. De tal modo que el jugador 1 elegiría la opción $\alpha_{1,b}$ y el juego resultaría de la siguiente manera: J1 obtendría 1, mientras que el jugador 2 tendría una ganancia de 2.



El jugador 2, quien es el último a quien le corresponde realizar una acción debe escoger dentro de su conjunto factible de acciones aquella que le resulte en una paga mayor, o sea, la que maximice su utilidad, dada la acción del jugador 1.

$$\max_{\alpha_{2,j} \in S_2} u_2(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,j}).$$

E igualmente para el jugador 1 se busca aquella jugada dentro del conjunto S_1 de acciones que le proporcione la mejor ganancia posible, siempre considerando la acción del jugador 2 que traerá consigo su jugada.

$$\max_{\alpha_{1,i} \in S_1} u_1(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,j}).$$

Como se trata de un juego de información perfecta y completa, el jugador 1 sabe qué hará el jugador 2 para cualquier acción que él haga, por lo que podemos reemplazar en la anterior fórmula a α_2 por la respuesta de J2 correspondiente a la jugada de J1, denotándolo como $c_2(\alpha_1)$ [cfr. Gibbons. R., 1992: 58].⁵⁹

$$\max_{\alpha_{1,i} \in S_1} u_1(\alpha_{1,i}, c_2(\alpha_{1,i})).$$

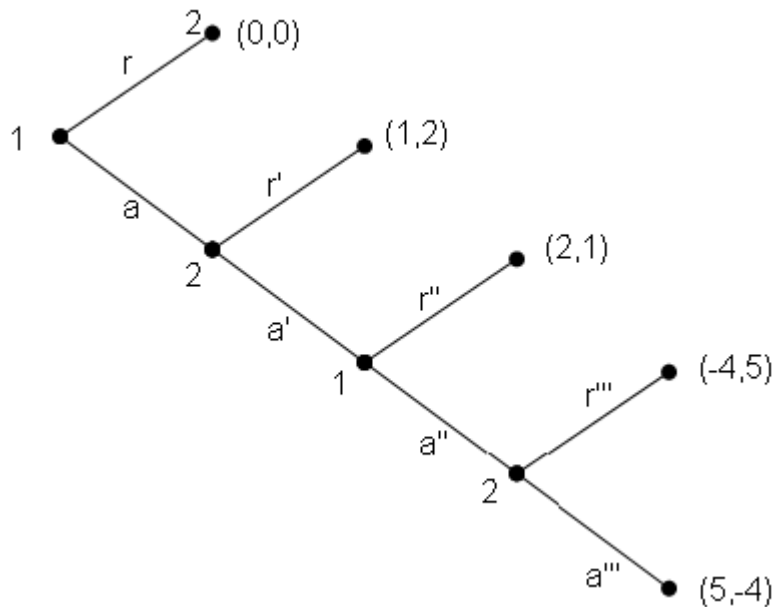
En los juegos simultáneos se habló de soluciones por métodos de descarte por estrategias dominadas, y de equilibrios de Nash simples, pero cuando se trata de juegos secuenciales, como es el caso del anterior ejemplo, las decisiones son tomadas en varios niveles, las cuales dependen de las decisiones hechas por el jugador anterior, y las consecuencias que tienen las decisiones del propio jugador. Recordando que aquello que distingue a los juegos dinámicos de los secuenciales no es como tal el tiempo, sino más bien de la información.

Aquí valga la pena hacer mención del teorema de Zermelo el cual afirma que:

Para cada juego finito con información perfecta Γ_ε tiene una estrategia pura de equilibrio de Nash que puede ser encontrado mediante la inducción hacia atrás. Más aún, si ningún jugador tiene los mismos pagos en ningún nodo terminal, entonces hay un único equilibrio de Nash que puede ser encontrado con este método. [Mas-Colell, A.; Whinston, M. y Green, J. 1995: 272]

⁵⁹ Aquí seguimos algunas de las especificaciones que hace Gibbons, aunque ateniéndonos a nuestra nomenclatura por uniformidad y claridad.

Para ello veamos un juego un poco más complejo, en donde su continuidad depende de las decisiones de los jugadores, y en donde resulta más evidente que se trata de un juego secuencial. Supóngase el siguiente juego:



Por el método de inducción hacia atrás sabemos que en el último subjuego j_2 tendría que decidir entre $\alpha_{2,a'''} (5,-4)$ y $\alpha_{2,r'''} (-4,5)$. Siendo $\alpha_{2,r'''}$ la opción más conveniente para j_2 . En el subjuego que le precede j_1 estaría entre terminar el juego con una ganancia de 2 o continuar con él y terminar con un resultado de -4 por la elección de j_2 , por lo que lo más provechoso para j_1 sería $\alpha_{1,r''}$. Ahora bien, en el anterior subjuego, j_2 tiene la disyuntiva de obtener una ganancia de 2, o continuar con el juego y obtener 1, dado que en el siguiente nodo j_1 elegiría $\alpha_{1,r''}$, así que j_2 obtendría una mejor ganancia si terminase el juego eligiendo $\alpha_{2,r'}$. Para el nodo final, o sea el primero, j_1 deberá de escoger entre una ganancia de 0, u obtener 1 si continúa con él. Si ambos agentes actúan racionalmente el término del juego sucedería en r' , resultado en una ganancia de 1 para j_1 , y de 2 para j_2 .

Continuar con el juego esperando que alguno de los dos haga algo diferente sería no jugar con una estrategia racional.

La inducción hacia atrás permite a los jugadores prever los resultados de sus jugadas, así como las de sus oponentes. Obviarlas o pretender que actuarán de manera diferente constituye amenazas no creíbles. Aunque en los juegos que le siguen al nodo $\alpha_{2,r}$ podrían ofrecer a ambos jugadores un mayor beneficio, esperar que alguno de ellos actúe de manera diferente, significaría que actúan de manera diferente a la racional, y por lo mismo, hacer amenazas de realizar jugadas diferentes a las racionales son descartadas.⁶⁰

⁶⁰ Sobre el tema de la racionalidad se discutirá en el apartado IX.1 Análisis de la Teoría como Sistema Axiomático.

VIII. PRIMEROS RESULTADOS

Ahora que se han presentado las bases que fundamentan la teoría de juegos, es momento de preguntarse por los aportes que puede lograr dicha teoría. Los resultados inmediatos de la teoría de juegos, si bien son interesantes, pueden no sorprender o más incluso no son aplicables en la mayoría de las circunstancias concretas, debido a la rigidez de los supuestos de la teoría.

Sin embargo, la formulación formal de la teoría ha dado lugar a resultados que cambiaron el entendimiento de los juegos, en tanto que, bajo ciertas circunstancias todo “juego” tiene al menos una solución. Este hecho es tan importante como complejo y difícil de expresar formalmente, y más aún demostrarlo. La intención de este capítulo será el explicar algunas de las ideas que le valieron un premio Nobel a John F. Nash Jr. en 1994.⁶¹

Ya se ha explicado la definición de equilibrio de Nash y cómo es posible encontrarlo para dar solución al juego, mediante estrategias dominantes o inducción hacia atrás. Pero también se evidenciaron juegos que no eran posibles de resolver por estos métodos, esto puede suceder por varias razones, una de las cuales es la existencia de dos equilibrios en el juego como sucede en el siguiente ejemplo.

| | | |
|---|-------|-------|
| | A | B |
| A | (1,1) | (0,0) |
| B | (0,0) | (1,1) |

⁶¹ "John F. Nash Jr. - Facts". Nobelprize.org. Nobel Media AB 2014. Web. 18 Aug 2014. <http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1994/nash-facts.html>

En el cual tanto $\{A, A\}$ como $\{B, B\}$ cumplen la definición del equilibrio de Nash⁶², en este ejemplo en particular no existe un conflicto de interés por lo que es un juego de coordinación y se puede convertir en un juego cooperativo. Una forma de evitar que estos casos ocurran es enfocándose a los juegos de suma cero, con ello se asegura la no cooperatividad. Lo cual es necesario para la generalización del equilibrio de Nash en juegos no cooperativos y su demostración de existencia.

Hasta el momento no se ha cuestionado la existencia de estos equilibrios, por lo que se podría intentar encontrar algo que no existe.

De forma que, para las próximas explicaciones y ejemplos de este apartado se trabajará con juegos simultáneos, no cooperativos y de información perfecta; por simplicidad, nos enfocaremos a juegos de suma cero de dos jugadores. Aunque probablemente los resultados se puedan generalizar para más tipos de juegos. Al tratarse de un juego de dos jugadores y de suma cero, el número considerado resultado corresponde a la ganancia del jugador 1, mientras que la ganancia del jugador 2 está implícita como el inverso aditivo.

VIII.1 Soluciones por Estrategias Mixtas

Empezaremos por distinguir un nuevo tipo de estrategias. Como se ha mencionado anteriormente, la estrategia se puede entender o bien como los criterios o bien como las jugadas mismas que elige el jugador correspondiente.

En capítulos anteriores se ha tratado con estrategias que toman en consideración las opciones del juego y su probabilidad. Basados únicamente en esto es que se intenta predecir las decisiones del resto de los jugadores. Sin embargo, existen casos en que esos criterios no bastan para tomar una decisión racional o al menos no es una decisión única.

⁶² Recuérdese la definición de equilibrio de Nash, que se encuentra en el apartado V.3.2 Equilibrio de Nash.

Para ejemplificar dicha cuestión considérese el siguiente juego de suma cero.

| | A | B |
|---|----|----|
| A | 1 | -1 |
| B | -1 | 1 |

Bajo el razonable supuesto de sólo poder tomar una de las opciones durante un juego, no es posible determinar que una de las opciones sea mejor que la otra. En un sentido estricto ambas opciones constituyen una estrategia igual de razonable.

Las estrategias mixtas buscan superar la limitación teórica reformulando el supuesto de una única decisión, La revolucionaria perspectiva contempla que un juego tenderá a ser jugado más de una vez. Para lo cual se busca establecer probabilidades en la elección de cada posible estrategia y calculando con ello la posible esperanza del juego, se sabe cuál es la ganancia a la que tendería el juego al repetirlo indefinidamente.

En el ejemplo anterior, si se eligen las opciones de forma aleatoria con probabilidades iguales, la esperanza del juego será ganar y perder la misma cantidad por lo que el juego se equilibra en el resultado cero. Esto es razonable ya que es un juego de suma cero y el planteamiento es simétrico.

El teorema del equilibrio generalizado de Nash establece que todo juego de suma cero de dos jugadores y de información completa tiene un equilibrio, es decir que existe una combinación de probabilidades para las opciones que maximice la utilidad para el jugador en cuestión.

IX. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

IX.1 Análisis de la Teoría como Sistema Axiomático

Como se trató en el capítulo IV. Teoría Axiomatizada, existen términos primigenios que no pueden ser definidos y proposiciones indemostrables dentro de cualquier teoría axiomatizada. Aunque sea posible ofrecer demostraciones y definir conceptos, dentro de una teoría existen cuestiones que carecen de explicación simplemente porque de algún supuesto se debe de partir. El hacer explícito esos supuestos es una de las diferencias entre una mera teoría y una teoría axiomatizada.

Para suponer conceptos y proposiciones sin demostración se apela a consideraciones tales como la intuición o lo que es “evidente”, ya que ofrecer explicaciones de ellos saldría del dominio de la teoría y sería, más bien, parte de otra teoría, una meta-teoría de ésta primera. Evidencias externas son extra-sistemáticas y el problema de la teoría misma permanece.

Suponer ciertas partes de otras teorías es algo común que termina por obviarse, pero en el momento en que se busca la formalización en una teoría, debe de quedar claro aquello que se considera como el punto de partida. Si no se hace uso de teorías ajenas, entonces deberá de construirse un lenguaje en el cual se pueda inscribir la teoría.

Cuando se desean derivar proposiciones (suponiendo la lógica) de estas nociones primigenias o “axiomas” se realizan hipótesis en adición a las premisas —o axiomas—, para que con éstas se logre un nexo “causal” entre estas premisas, la hipótesis y las conclusiones que de lo anterior se deriven. Tómese como ejemplo el siguiente argumento:

1. $p \rightarrow q$ premisa
2. $q \rightarrow r$ premisa
3. p hipótesis
4. q modus Ponendo Ponens 1, 3
5. r modus Ponendo Ponens 2, 4
6. $p \rightarrow r$ Teorema de la deducción.

Este método de suponer funciona para demostrar implicaciones entre lo que se supone y lo que sea a que se puede concluir con esas hipótesis; es decir, lo que se supone y lo que de ello se deriva establece una conexión entre uno y otro, lógicamente hablando.

Establecer una relación de consecuencia lógica permite hablar de validez de una estructura teórica, o sea un argumento; en donde los axiomas, fungen como premisas de las cuales se pueden derivar nuevas proposiciones; y la lógica como el sistema mediante el cual se deducen proposiciones, o teoremas.

Axiomas consistentes

∴ Teoremas consistentes

Hacer presupuestos forma parte de las teorías axiomatizadas, pues ellas mismas surgen de supuestos que se ponen a prueba por diversos métodos. Los métodos mediante los cuales se determina la verdad de una proposición se hace, de cierta manera, dentro del sistema mismo. Esto es, en parte porque el propio sistema ofrece los parámetros que dictan qué fórmulas tienen sentido, de los que no lo tienen. Las proposiciones llegan a tener significado porque el sistema les da significado. Esto quiere decir que el sistema, dentro de la axiomatización, hace el lenguaje en el cual se debe de escribir la teoría.

Por su parte, un conjunto de proposiciones puede ser consistente, lo que quiere decir que las proposiciones contenidas en él no se contradicen. Si un conjunto de axiomas es consistente se garantiza que existen proposiciones que no se siguen de este conjunto. Cuando un conjunto de premisas o axiomas es inconsistente, cualquier proposición puede ser deducida de él, dejándolo sin valor

al momento que las proposiciones adquieren un significado “real” dotado por la teoría a la que se haga referencia. De aquí que, si del conjunto de axiomas se deducen teoremas mediante argumentos válidos y el conjunto de premisas son consistentes, entonces lo que de ellos se logre concluir será verdadero bajo al menos una interpretación o modelo.⁶³

Las proposiciones que se derivan de nuestras nociones primigenias deben de mantenerse, pues cuando se acepta el conjunto de premisas (o sea, el conjunto de proposiciones sobre las que se comienza a hacer la teoría), también se acepta su valor de verdad como verdadero. En adición a esto, pruebas de consistencia tienen que realizarse a este conjunto inicial, lo que asegura que no se siguen contradicciones.

El uso correcto de las reglas de inferencia que se establecen, asegura la validez de los teoremas deducidos de los axiomas. En donde los teoremas no son más que conclusiones que se implican de un conjunto de axiomas. Estos axiomas no son demostrados y se tratan de las proposiciones iniciales que tratan de ser la explicación —o *explanans*— de un fenómeno, mientras que los teoremas surgen de los axiomas, por lo que se pueden demostrar lógicamente.

La axiomatización de una teoría normalmente parte de un conjunto de aserciones (la teoría per se) que buscan explicar una cantidad de proposiciones. Aunque no de manera explícita, la teoría busca dar cuenta de un número limitado de proposiciones, esto es, no cualquier cosa puede ser explicada (o justificada) mediante aquello que se afirma dentro de la teoría. Si esto último fuera posible significaría que la teoría implica no solo a A , sino también a $\neg A$.

Así que buena parte del trabajo de la axiomatización es acotar la imagen de aquello que implican los axiomas. Si el conjunto inicial de axiomas implicase no sólo a lo que se quiere explicar, sino también a su negación explícita significaría que el conjunto de premisas es inconsistente. Y si la teoría implica una

⁶³ Todo lo anterior ha sido descrito con mayor detalle en apartado III.1 Lógica y Conjuntos, aquí solo se hace mención de algunos términos ya descritos para hacer una correlación entre las teorías axiomatizadas y la teoría de juegos y los presupuestos que existen en ella.

contradicción, perdería este poder explicativo, ya que al ser inconsistente el conjunto de axiomas, y aquello que de éste se deduzca no tendrá valor, una vez que se le dote de significado a las fórmulas con la teoría.

Establecer criterios para que de los axiomas se deduzcan teoremas *suficientes para el explanandum* —aquello que se desea explicar—y que no se sigan contradicciones forma parte del trabajo de axiomatización de una teoría. Se enmarcan las teorías en tanto términos indefinidos que suelen ser la base de la teoría y que se suponen para empezar a construirla.

Ahora bien, generalmente es necesario imponer ciertas condiciones para que la teoría “funcione”. Una teoría (recuérdese que las teorías llanamente hablando, son el conjunto de aserciones verdaderas) trae consigo la connotación de explicación, despoja al fenómeno de ciertas características “no esenciales” para la formulación de explicaciones que concuerden con aquello que se busca demostrar, como condiciones iniciales que posibilitan el estudio del fenómeno, o como requerimientos que se le exigen a la teoría.

Aunque aquí la cuestión de la racionalidad ha quedado de alguna manera de lado, sigue existiendo dentro de la teoría de juegos este supuesto en tanto *condición “idealizante”* como lo describe Nowak y Nowakowa:

Condiciones idealizantes son presupuestos [...] que se suponen para así simplificar el objeto empírico. Introduciéndolas, la idea pura de un tipo de fenómeno dado se forma. Se priva de algunas de las características empíricas, aquellas que se consideran como secundarias. Lo que queda en la idea aún contiene someramente las principales propiedades del original empírico. [1992: 10]

Por ejemplo, la exigencia de la transitividad de las preferencias, como parte de la racionalidad, se trata de una noción necesaria para poder hablar de la teoría de juegos, sin la cual no es posible comenzar con el análisis de un juego en particular. Así mismo, la transitividad como noción prestada de la lógica no requiere de mayor examen, pues queda ya explicada por esa disciplina. En este

último caso se tratan de requisitos, o de nociones necesarias que prescriben la forma en que se debe de llevar a cabo la teoría.

Así que, acotar este problema de la racionalidad será el objetivo propuesto, dado que es el que constituye una de las principales condiciones idealizantes en el sistema, al menos aparentemente.

Hacer una distinción entre las proposiciones iniciales sobre las cuales se construye la teoría, y las condiciones *a priori* que se le piden a la teoría, se encuentra en niveles diferentes de jerarquía en cuanto a la sistematización de la teoría se refiere. Mientras que en el primer caso se trata de axiomas, esto es, proposiciones que contienen nociones primitivas y que se admiten sin demostraciones. Los segundos actúan a modo de prescripciones o “cláusulas” necesarias que se hacen en tanto que se puedan sostener algunas de las formulaciones realizadas por los axiomas y de lo que ellos se va deduciendo.

Esta sutil distinción entre axiomas y prescripciones que se acaba de delinear, sugiere una serie de diferentes matices que deben de ser debidamente considerados a la hora de determinar si los presupuestos de la teoría de juegos se tratan de uno o de otro tipo ya que, si bien es cierto que ambos se tratan de presupuestos, representan niveles diferentes. Mientras tanto, baste decir que estos dos conceptos difieren en tanto que una es una condición *sine qua non* y la otra es una premisa, a partir de la cual se derivan otras proposiciones.

Pero estas salvedades que se requieren en teoría de juegos pueden terminar por ser contra-fácticas y presentar una imagen distorsionada de lo que pretende ser una rama muy útil de la matemática, tal como lo concibió su principal promotor Von Neumann al reunirse con el economista Morgenstern para crear su paradigmático libro de *Theory of Games and Economic Behavior* [1955, 3° ed.: 3].

Adentrarse en el problema de si las entidades matemáticas responden a una realidad depende muchas veces de la perspectiva de la teoría misma.

Evidentemente la teoría de juegos responde a una realidad concreta, por lo que es necesario hacerse la pregunta sobre la adecuación entre estas entidades matemáticas y la situación “real” de la que tratan de dar cuenta, dadas las condiciones previas que se exigen.

Retomando esta idea de modelos matemáticos, consideraremos las explicaciones científicas como modelos en los que los axiomas de la teoría determinan la naturaleza del conjunto. Queriendo decir por esto que nuestros axiomas o nuestras definiciones elementales delimitarán aquellos elementos que formarán parte del conjunto a estudiar.

Las explicaciones, vistas desde la perspectiva conjuntista, exponen a la teoría en tanto su carácter normativo que separa aquello que puede ser de su objeto de lo que no; o en términos más simples, la estructura de la teoría muestra las condiciones que deben de ser satisfechas por medio de sus axiomas para ser interpretada como parte de ella. Por ejemplo, en teoría de juegos no consideramos aquellas situaciones en las cuales existe un acuerdo entre todos los jugadores, o sea, cuando el conflicto de intereses no existe (no en principio, a menos de que la colusión suceda bajo ciertas condiciones, pero esto ya corresponde a una clase de “resolución” del juego).

Esta perspectiva de las teorías desde los conjuntos presenta una serie de dificultades como las que ya se han planteado tácitamente: cómo es que se conectan estos modelos y los axiomas a los que están subordinados los modelos, con los fenómenos a los que los primeros se refieren.

Para formular este problema permítasenos recurrir a la interpretación realizada por Nowak, específicamente el paradigma neo-Milliano:

Ninguna estructura matemática encaja con absoluta precisión en alguna parte de la realidad, siempre existen discrepancias entre el formalismo matemático y la realidad que trata de describirse con la teoría. La idealización es un intento por llenar el vacío, i. e. crear una construcción que encaje exactamente dentro del formalismo matemático, sirviendo así como modelo para el mundo impreciso en el que vivimos. [Nowak. L.,1992:10]

Pero esto también sugiere dos cosas cuando se habla sobre la existencia de una estructura matemática que sea capaz de explicar un fenómeno de la realidad en su totalidad. Esto puede ser interpretado de al menos, dos maneras: o bien, no es posible que una teoría matemática logre capturar alguna parte de la realidad en su totalidad, o que no lo ha logrado hacer aún. Y más aún, ¿cómo saber si ya lo hace?.

En el apartado VII se presentaron los seis axiomas principales de la teoría de juegos, sobre los cuales se van deduciendo nuevos teoremas, pero ya en algunas partes dentro de la exposición se mencionó algunos problemas sobre los supuestos necesarios, y cómo éstos pueden representar una objeción. Los supuestos no eran los axiomas, sino más bien “notas al pie” que indicaban bajo qué condiciones se cumplían los axiomas. Así, por ejemplo, la suposición del orden de las preferencias puede verse como una cláusula que especifica el dominio de la teoría, pues dadas unas determinadas características se puede, o no, hacer el análisis de un juego mediante la teoría de juegos.

Para esclarecer esto, valga la pena hacer una analogía con la lógica. Cuando se empieza a trabajar dentro de la lógica clásica se requiere de una importante condición, pues para ir de un lenguaje natural a la estructura lógica, los enunciados que son susceptibles a ser analizados lógicamente deben ser enunciados que *afirmen* algo. Esta condición funge como limitador, pues define el conjunto de enunciados con los que se puede trabajar, mas no se trata de un presupuesto que haga aplicables a las demás proposiciones del conjunto de axiomas.

Siguiendo con el problema de la racionalidad, recuérdese el método de inducción hacia atrás y en particular el juego que se describe en la página 147. En general, la teoría de juegos parte de agentes racionales, no sólo en tanto el patrón de preferencias, sino en cuanto al perfil de acciones y las jugadas.

Cuando se resolvieron juegos modelo con la inducción hacia atrás, se “obviaron” algunas de las posibilidades que tenían los jugadores dado que

constituían lo que se conoce como “amenazas no creíbles”. Aunque en el último subjuego el jugador 1 tiene la ganancia más alta que en cualquier otro resultado, J1 no elegiría tal jugada, dado que sabe cómo actuará el jugador 2 y que éste, dentro de su conjunto de movidas escogerá aquella que maximice su ganancia, o en su caso, que minimice su pérdida. Continuar con el juego en el penúltimo nodo sería una jugada no racional, pues el jugador 2 elegiría $\alpha_{2,a}$ ”.

En él los agentes suponían en todo momento que el otro jugador era racional, en el sentido de que buscaría maximizar su ganancia. Actuar de otro modo sería una jugada que iría en contra de este principio, que es el que subyace al de la transitividad.

En términos generales, el problema de la racionalidad está estrechamente relacionado con la formulación del criterio maximin⁶⁴, que busca maximizar la utilidad mínima que puede recibir del jugador, lo que se traduce en patrones de preferencias transitivos (entre otros requerimientos), o sea estrategias o planes de juegos orientados a este fin.

Aunque en juegos tales como el póquer parece que no se cumple con este precepto, ya que parte importante de él es el *bluff* o faroleo, y como bien sabemos, el *bluff* es un intento del jugador de engañar a su adversario y hacerlo creer que, por ejemplo, posee una buena mano cuando no es así. Inclusive, cualquiera podría decir que en este juego jugar de acuerdo con estimaciones probabilísticas y establecer planes de acción en torno a ellas no resultará en una estrategia buena. El adversario, después de algún número de jugadas será capaz de notar que jugamos de acuerdo a un patrón que se basa en apostar solo cuando el primer jugador tiene una buena mano, a lo que él no apostará, y desistirá de ello cuando tenga una mala partida.

Sin profundizar demasiado en el póquer, la cuestión en esta aparente contradicción es el problema de la simplificación. Al hacer mención del problema

⁶⁴ “Maxmin” significa que el jugador analiza el mínimo posible a ganar en cada una de sus estrategias y elige el máximo entre esos mínimos, asegurando que la utilidad sea en el peor de los casos el máximo de los mínimos obtenibles.

del póquer se pasó por alto la repetición del juego. Es decir, en el póquer parte importante es la repetición. Los jugadores que son adversarios en una partida de póquer suponen la repetición del juego y con ello lograr inferir si su adversario esta faroleando o no. “¿Todas las buenas estrategias permanecen como óptimas? E inclusive: ¿existe alguna estrategia optima permanente?” [von Neumann y Morgenstern, :164].

Hacer una exacta modelación de un conflicto de intereses como vimos puede resultar inextricable en tanto que puede poseer magnitudes que llegan a hacer impracticable un análisis completo. Por lo que algunos factores secundarios terminan por ser omitidos, y es precisamente esto lo que se quería denotar con el ejemplo anterior. Es necesario volver a aplicarle a las teorías aquellas características secundarias que fueron obviadas si se quiere que en la práctica la teoría formalizada funcione. Ajustes a las fórmulas y nociones se le deben de hacer para lograrlo tal como muestra el *bluff*.

Para ello retomemos la noción, estrictamente dentro de su significado en la teoría de juegos. Como se mencionó, la racionalidad tiene que ver con la transitividad en tanto que hace que los agentes prefieran obtener el mayor beneficio o el menor perjuicio, si así fuese el caso; y que se mantenga un orden total de tal manera que si se prefiere una cosa por encima de una segunda, y ésta segunda es preferida por encima de una tercera, entonces la primera es preferida por encima de la tercera. En donde se supone que los agentes actuarán conforme a lo que prefieren por encima de lo demás, en tanto sea posible.

La teoría de juegos no es descriptiva, sino más bien (condicionalmente) normativa. No dice cómo actúan las personas, ni tampoco como deberían de actuar en un sentido absoluto, sino cómo deberían actuar si desean alcanzar ciertos fines. Describe, para dados supuestos cursos de acción para lograr la obtención de resultados teniendo ciertas propiedades “óptimas”. Estas propiedades pueden o no considerarse pertinentes para cualquier conflicto de intereses en el mundo real. Si lo son, la teoría prescribe las elecciones que *deben* hacerse para obtener ese óptimo. [Luce, D. y Raiffa, H., 1985: 63]

Las propiedades óptimas, como se caracterizó son una serie de especificidades que se van haciendo conforme el juego. Esto es, aquellas consideraciones y distinciones que se hicieron dadas las características del juego hacen posible el juzgar la mejor estrategia. En el ejemplo del *bluff* se puede hacer la distinción pertinente entre una estrategia pura y una estrategia mixta, entre un juego con información perfecta o imperfecta, etc. Lo importante aquí es establecer correctamente estas condiciones iniciales para que el escrutinio de un determinado juego mediante la teoría de juegos sea viable. Una vez establecidas las condiciones, los agentes tienen un plan de juego o estrategia que seguir si es que desean obtener la mejor ganancia.

La racionalidad en tanto la transitividad no es propiamente una condición idealizante que distorsiona la realidad, sino un supuesto normativo condicional que establece el cómo actuar bajo ciertas circunstancias, de tal manera que se logre un fin determinado por el agente.

IX.2 Un modelo matemático de consideración de riesgo

El riesgo se puede considerar desde diferentes perspectivas psicológicas, económicas o estadísticas. Para los fines de este trabajo no existirá preocupación por lo que es propiamente el riesgo, sólo se tomarán en cuenta algunas de las consecuencias del mismo; para ello analizaremos las manifestaciones del riesgo en cuanto a la susceptibilidad de los agentes a cambiar sus decisiones a causa de una variabilidad en los resultados, o a causa de una incertidumbre. Se verá al riesgo como un componente de los juegos que altera la forma de tomar decisiones de los individuos.

Para la teoría de juegos, el riesgo será una característica implícita en la toma de decisiones bajo incertidumbre. Dicha incertidumbre en los juegos puede provenir de diferentes fuentes; puede tratarse de falta de información sobre las

reglas del juego, de jugadas de azar, o de la misma incertidumbre que provoca el desconocimiento previo de las jugadas de los otros jugadores.

La incertidumbre es la mayor limitante en la formulación de estrategias y en los intentos de encontrar solución a un juego. Por lo tanto, el riesgo implicado por tal incertidumbre, afecta —o al menos debería afectar— directamente en la toma de decisiones.

Se considerará que la incertidumbre y el riesgo están directamente relacionados, es decir, a mayor incertidumbre mayor riesgo y a menor incertidumbre menor riesgo. Esta perspectiva claramente conlleva el problema de medir la incertidumbre para aspirar a medir el riesgo; si se pudiese medir la incertidumbre el problema se convertiría en encontrar la función monótona creciente⁶⁵ que haga corresponder la incertidumbre con su respectivo riesgo.

Pero medir la incertidumbre resulta una tarea complicada ya que implica, en cierta forma, medir lo que no se conoce. Cuando no se conoce en absoluto lo que controla o dictamina la incertidumbre es razonable pensar en la imposibilidad de medirlo. Sin embargo, como suele ocurrir en muchas ocasiones, un conocimiento parcial puede traducirse en probabilidades; por lo que a partir de ahora, el texto se limitará a considerar los casos en que la incertidumbre se presenta en forma de distribuciones de probabilidad.

En el libro *Teoría de Juegos* escrito por Joaquín Pérez, José Luis Jimeno y Emilio Cerdá [2004]; se presenta la definición de aversión al riesgo y prima de riesgo, sin declarar formalmente lo que el riesgo significa; estos dos conceptos son una forma de clasificar a los jugadores en términos de su reacción al riesgo y lo que está dispuesto a “pagar” un jugador para librarse del riesgo respectivamente.

Ellos definen los dos conceptos anteriores para loterías, donde se supone que se tiene función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern (*i.e.* una función de utilidad lineal que no altera el orden); y que el conjunto de resultados es

⁶⁵ Debería ser una función monótona creciente para que cumpla con que a mayor mayor y a menor menor.

el conjunto de los números reales, en donde los autores le dan una interpretación de utilidad monetaria a la función de utilidad. Las definiciones son las siguientes:

Sea $R=\mathbb{R}$. Decimos que un agente es *adverso al riesgo* en el intervalo $[a, b]$ si el valor esperado de cualquier lotería en $[a, b]$ es al menos tan preferido como dicha lotería. Si la lotería es al menos tan preferible como su valor esperado, decimos que es *propenso al riesgo* o *amante del riesgo*. Y si es indiferente entre ambas opciones decimos que es *neutral al riesgo*. [Pérez, J., Jimeno, J. y Cerdá, E., 2004: 20].

Dado un agente con función de utilidad del dinero $u(x)$, y dada una lotería L sobre un conjunto de resultados $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, con valor esperado x_0 ,

a) Llamamos *equivalente cierto de L* a la cantidad de dinero z_0 tal que $u(z_0) = U(L)$.

b) Llamamos *prima de riesgo de L* a la cantidad $\rho = x_0 - z_0$ (valor esperado menos equivalente cierto) [Idem: 22].

La intención de este apartado será explicar una propuesta de un modelo de consideración de riesgo en los juegos. Se presentará con generalidad haciendo uso de familias de parámetros y de coeficientes; por lo cual, será necesario elegir los parámetros y los coeficientes respectivos para determinar un modelo específico.

En muchas ocasiones, se identifican como los aspectos más importantes para la toma de decisión en un juego determinado, la ganancia esperada y el riesgo. De aquí surge la cuestión de qué debe de considerarse en el modelo; aunque muchas son las variables que se pueden tomar en cuenta, un buen modelo deberá identificar sólo las indispensables para encontrar un equilibrio entre simplicidad y alcance específico.

Además, en teoría es fácil encontrar una función que “resuma” varios parámetros en uno; por ejemplo, las proyecciones en los ejes de la geometría euclidiana. Por lo que se requerirá que el indicador generado por el modelo tenga más propiedades que sólo el resumir los parámetros en uno solo.

Como se mencionó anteriormente en el apartado de *probabilidad y estadística*, existen medidas de tendencia central y medidas de dispersión, estos

dos tipos de indicadores serán parte de las consideraciones iniciales para la formulación del modelo. También se supondrá que existe la función de utilidad –al menos para el jugador estudiado– para así poder ver los resultados como una utilidad en términos numéricos.

Una medida de tendencia central puede usarse para ubicar la posición general de los resultados en un juego, por lo que sirve como un buen indicador de “alrededor de” cuánto es la utilidad del juego para el jugador estudiado. Mientras que una medida de dispersión indicará qué tan alejadas se encuentran las posibles utilidades obtenibles, en términos de su probabilidad; por lo que se puede considerar que éste es un indicador del riesgo que se tiene en dicho juego.

Recordando que la medida de tendencia central más importante, o al menos más utilizada es la media; mientras que la medida de dispersión puede ser, o bien la varianza o bien la desviación estándar; en este caso se le dará preferencia a la desviación estándar debido a que, mientras la varianza se mide en unidades cuadradas, la desviación estándar se mide en las mismas unidades que la variable aleatoria, al igual que la media, lo que propicia realizar operaciones aditivas.

Por lo tanto, si se busca un modelo matemático que resuma la información de un juego, considerando una medida de tendencia central y una medida de dispersión en un solo índice, lo más simple es calcular ese índice mediante una ecuación lineal, donde el problema será encontrar los coeficientes adecuados para que el índice represente lo que buscamos. La ecuación lineal sería entonces:

$$\text{Índice comparativo} = \mathbf{a} (\text{tendencia central}) + \mathbf{b} (\text{dispersión}).$$

Donde a y b son números reales. Por lo que a es el coeficiente encargado de darle “peso” a la tendencia central, es decir que representa qué tan importante es la información respecto a qué valor se distribuye la utilidad. Sin pérdida de generalidad podemos considerar este índice igual a 1, dado que se podrán ajustar los otros coeficientes. El coeficiente b es el encargado de dar importancia a la

información respecto a la medida de dispersión, esto significa que debe representar qué tan preferible es una baja dispersión comparada con una alta dispersión. Así, podemos reescribir el modelo como:

$$V = C + rD.$$

Con V como el índice comparativo, C la medida de tendencia central, r coeficiente de riesgo y D la medida de dispersión. Tanto C como D dependerán del juego en cuestión y podrán ser calculados una vez que se determine la distribución de probabilidad para los resultados del mismo. Se considera como una adición, pero recordemos que el coeficiente r puede ser considerado negativo.

Un modelo más general se podría obtener mediante una combinación lineal de los momentos de la distribución con coeficientes determinables. Otra opción similar para generalizar el modelo sería definir el índice en términos de la función generadora de momentos de la distribución del juego, para tomar en cuenta todos los niveles de información que puede dar una distribución de probabilidad.

Por otra parte, r no será dependiente del juego, pues no es parte de las reglas el considerar “bueno” o “malo” al riesgo. El problema respecto al coeficiente del riesgo encierra el problema de consideraciones personales de cada jugador, pues mientras algunos pueden evadir el riesgo extremadamente, otros pueden tener indiferencia al mismo o incluso tendencia a buscarlo. Por lo cual, resulta razonable que el coeficiente de consideración de riesgo r sea determinado por las tendencias del jugador en cuestión.

En este punto conviene mencionar que, se busca “calificar” al juego mediante el índice V , por lo cual se busca que entre “mejor” sea el juego se obtenga un índice mayor. Además se debe recordar que mientras la medida de tendencia central que se usará —la media— puede ser cualquier número real, la medida de dispersión —desviación estándar— solo puede tomar valores positivos.

Aunque en principio no existan limitantes para el coeficiente r , es posible tomar ciertas convenciones de apariencia razonable respecto al mismo. La primera de ellas será que $r > 0$, pues un coeficiente negativo significaría un gusto por aumentar el riesgo.

IX. CONCLUSIONES

El discernimiento de aquello que puede ser inquirido mediante la teoría de juegos fue aquí debidamente acotado y definido, así como las diversificaciones que puede tomar un conflicto de intereses entre agentes. Definir el dominio de la teoría de juegos en tanto al conflicto de intereses entre jugadores demandaba, a su vez definir los principios que contextualizaban un juego. Los principios dados por defecto en el contexto de un juego sirvieron para realizar clasificaciones que distinguen claramente los tipos de juego.

Estas categorías permitían la aplicación de la teoría a situaciones cotidianas que, en principio eran un conflicto de intereses entre jugadores. Se examinaron situaciones en las cuales el conflicto de intereses mismo no es estricto, como cuando los patrones de preferencia de dos jugadores coincidían parcialmente, o cuando las preferencias concedían totalmente y se daba lugar a una colusión.

Con las definiciones proporcionadas fue posible hacer las construcciones teóricas suficientes para proponer y resolver algunas preguntas en relación a los posibles comportamientos de los jugadores, basados en que conocen cómo afectaban al resultado del juego.

Una vez que se realizaron las caracterizaciones de las diversas clases de juegos, resultó claro cómo algunos factores fueron necesarios para realizar el análisis de un juego en particular. Por ejemplo, la información muchas veces fue determinante ya que no sólo hace posible describir el juego, sino que también muestra que aunque las jugadas en un determinado juego se realicen de manera secuencial, el juego en cuestión bien puede ser, teóricamente, simultáneo.

La clasificación de un juego como dinámico o simultáneo no se encuentra en términos de una estricta temporalidad, sino más bien, de la información que le

está disponible al jugador a la hora de realizar una jugada. La información que está a la disposición de los jugadores determina si el juego es dinámico o simultáneo, lo que ayuda a decidir si es posible expresarlo mediante la forma extensiva o la normal y con ello, si se soluciona por eliminación de estrategias dominantes o por la inducción hacia atrás.

El dilema del prisionero ofrece otro de los puntos más relevantes a destacar después del análisis ya descrito: el equilibrio del juego parece ir “en contra” de lo que en apariencia es lo más “razonable”, pues sabemos que aunque en un primer momento parece mejor que ninguno de los dos hable, resulta que el equilibrio al que se llega es el escenario en donde ambos delatan. Afirmar que el equilibrio del juego es que ambos delaten no resulta claro, sino hasta que se ofrecen demostraciones mediante eliminación de estrategias, encontrando el equilibrio de Nash.

Esto se relaciona directamente con los supuestos básicos de la teoría en tanto que cada jugador busca maximizar su beneficio personal, así que no hay consideraciones respecto a un “bien común”; cada jugador considera únicamente su propio pago, además de que supone que los otros jugadores actuarán de esta misma manera.

De tal suerte que aquellas soluciones “intuitivas” de un juego no resultaban en la mejor estrategia a seguir por los jugadores, dada la definición del equilibrio de Nash que significa que ninguno de los jugadores cambiaría de estrategia durante el juego, pues el plan de juego que se consideraba como el mejor se mantenía a lo largo del curso del juego. Y por lo tanto, si una estrategia elegida como la mejor inicialmente es un equilibrio de Nash, será la mejor para cualesquiera decisiones que se tomen en el juego, suponiendo que pueden tomarse cualesquiera.

Muchas consideraciones deben hacerse a la hora de hacer la formalización de un juego para poder ofrecer un análisis que sea útil, ya que obviar algunas de las peculiaridades del juego resultaría en la elaboración de una

mala estrategia de juego. De aquí que muchas de las clasificaciones y categorías trataban de cubrir la mayor cantidad de situaciones en las que se podían encontrar los jugadores en un determinado juego; tal como se mostró cuando se habló acerca del póquer, en el que buena parte de una buena estrategia consistía en ver la repetición del juego como una característica significativa. Jugar de manera “estrictamente racional” considerando al póquer como un juego aislado llevaría al jugador a perder. La formulación de una buena estrategia en este juego debía necesariamente de tomar en cuenta la repetición del juego.

De aquí, evidentemente, el tema de la racionalidad se desprendió. Suponer que los jugadores actuarían de una manera predeterminada podía parecer un supuesto muy fuerte, pero como se mostró, es un mero requerimiento si es que se quiere conseguir una estrategia que garantice al jugador obtener el mejor de los resultados para él.

Examinar el principio de racionalidad llevó a tres cuestiones primordiales en las cuales la teoría de juegos usaba este principio, que son de manera resumida: en tanto las preferencias del jugador, la búsqueda del mayor beneficio o maximizar la utilidad, y la disposición de recursos suficientes.

El suponer que los jugadores actuarán de cierta manera es en tanto que desean obtener el mayor beneficio o el menor perjuicio posible, así que la teoría de juegos prescribe la forma en la que los jugadores pueden obtener tal resultado. Es normativa pues les da a los agentes la mejor estrategia si es que éstos quieren alcanzar el mejor resultado posible, pensando que todos los otros agentes involucrados buscan maximizar su propio resultado.

Por otra parte la teoría de juegos procura extenderse a diferentes consideraciones de información con las estrategias mixtas, las cuales presuponen que el juego se lleva a cabo repetidamente, con lo que se podrá tomar en cuenta la forma de actuar de los otros jugadores y tomarlo en cuenta. Aunque esto amplía el alcance de la teoría también la complica significativamente.

Los presupuestos, a su vez tuvieron que ser definidos y separados para poder hacer un examen de las partes que conforman a las teorías y en particular a la teoría de juegos. Para ello se recurrió a hacer una exposición de lo que constituye la axiomatización de las teorías, diferenciando aquellas proposiciones sobre las cuales se partía, de aquellas que se desprendían de las primeras. También aquellas teorías y principios que eran definidos en otras ramas, o sea, las teorías que se suponían en la teoría de juegos, como la lógica, la teoría de conjuntos y otras partes de la matemática como parte del propio sistema que se supuso para llevar a cabo el examen.

Así mismo, el expresar en términos (fórmulas) matemáticas hace accesible el desarrollo abstracto de la teoría, lo cual permite no sólo el desarrollo descontextualizado dentro de la matemática, sino el obtener resultados precisos y específicos que se cumplirán siempre que los supuestos de —los que parte— la teoría original correspondan con la realidad a la que busca describir.

Aquí es importante señalar la distinción entre los niveles en los que las fórmulas matemáticas se hacen en la teoría de juegos. Una vez que los axiomas se han definido y que con éstas ya se han hecho las consideraciones pertinentes de la realidad que trata de explicar, las fórmulas matemáticas que se enuncian ya están de acuerdo con aquellas nociones que se acotaron a modo de explicaciones fundamentales.

Esto recuerda lo importante de los axiomas de la teoría, pues su verdad es lo único que asegura la verdad de las conclusiones de la teoría, como se señaló en numerosas ocasiones. Las discusiones presentadas acerca de las entidades matemáticas reflejan aquí la importancia de los axiomas; una vez realizados los axiomas las fórmulas matemáticas sustituyen los términos y nociones supuestos por la teoría de tal suerte que sea no sólo más preciso y riguroso, sino que ofrezcan demostraciones independientes de las proposiciones a las que están “sujetas”.

Así que, cuando argüimos que la teoría de juegos es una teoría aplicable, es en tanto que se ha ponderado si los axiomas de la teoría se cumplen en el contexto en el que se quiere aplicar, en cuyo caso la teoría será aplicable y se podrá confiar en sus teoremas-conclusiones, suponiendo que la teoría fue debidamente trabajada.

Del presente trabajo, podemos concluir que lo más importante en esta y cualquier otra teoría axiomatizada es precisamente el conjunto de axiomas de la misma. Parece ser que el desarrollo de los teoremas y resultados se puede lograr mediante procesos sintácticos una vez que se tienen formulados los axiomas.

La formulación de los axiomas nos permitió aducir sus consecuencias, identificar algunos de los problemas que se le podrían plantear a la teoría de juegos, objeciones a los supuestos que evidencian los impedimentos de la misma y plantear situaciones en las cuales se mostraba cómo un mal planteamiento de un juego resultaba en un mal plan de acción.

En el trabajo de axiomatización de teorías, las sutiles distinciones que se tienen que realizar para evitar dar por hecho terminologías que pertenecen a la teoría en diferentes niveles, llevó a hacer una minuciosa separación con la que pudimos mostrar lo que caracteriza y distingue a un problema de los presupuestos de un problema de aplicación debido a la falta de un análisis del particular juego a tratar.

Por lo cual, para nosotros, el punto clave en la implementación de la teoría de juegos es encontrar situaciones en los que sean aceptables los axiomas, es decir que tengan cierta concordancia en tal contexto. Esto asegurará que los teoremas de la teoría sean automáticamente aceptables y por lo tanto aplicables.

Por otra parte, creemos que la cuestión preponderante para el desarrollo de nuevas teorías, o el refinamiento de una misma, es identificar las circunstancias que comparten los casos de interés que servirán para crear o modificar la teoría. Para una nueva teoría estos factores en común se pueden tomar como supuestos; para una modificación de la teoría se pueden contrastar los factores en común con

los axiomas, identificando lo que va en contra de la teoría para reformular tales axiomas; o bien, para añadir los axiomas que resulte pertinente.

De tal suerte la filosofía posibilitó el escrutinio de las diversas posturas y niveles de análisis de los supuestos necesarios; las diversificaciones entre conceptos que se suelen tomar por sinónimos dentro de las teorías, y el término mismo de “teoría”; los asideros epistemológicos de los que se sirve la teoría de juegos para justificar y validar su aplicación y con ello poder atender al problema de las entidades matemáticas que describen los axiomas y que a su vez, tratan sobre una realidad muy concreta.

X. LITERATURA CITADA

- Aranda, J.; Duro, N.; Fernández, J.; Jiménez, J. y Morilla, F. (2006) *Fundamentos de Lógica Matemática y Computación*. España: Sanz y Torres.
- Bartle Robert G. (1966) *The Elements of Integration*. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Bronowski, Jacob. (1973) *The Ascent of Man*. New York: Little, Brown and company.
- Copi, Irving M. (1954) *Lógica Simbólica*. (3era reimpression). México: Editorial C.E.C.S.A.
- Drescher, Melvin. (1961) *Games of strategy: Theory and applications*. New Jersey: Prentice Hall.
- Gibbons, Robert, (1992) *A Primer in Game Theory*. New Jersey: Prentice Hall
- Grüne-Yanoff, Till. (n.d.) *Game Theory*. Consultado el 25 de mayo del 2008. Internet Encyclopedia of Philosophy en: <http://www.iep.utm.edu/game-th/#H1>
- Huang, Qiming. (2010) *Game Theory*. Croacia: Editorial Sciyo.
- Johnson, Robert R. (1990) *Estadística elemental* (2da ed., 7ma reimpression). México: Editorial Trillas.
- Johnsonbaugh, Richard (1988) *Matemáticas Discretas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Luce, Duncan y Raiffa, Howard. (1985) *Games and decisions: Introduction and critical survey*. New York: Dover publications.
- Mas-Colell, Andreu; Whinston, Michael y Green, Jerry. (1995) *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press
- Myerson, Roger B. (1991) *Game Theory: Analysis of Conflict*. Cambridge: Harvard University Press.
- Nowak, Leszek; Nowakowa, Izabella. (1992) Idealization X: The Richness of Idealization, *Poznań Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities*, Vol. 69, New York: Rodopi

- Pérez, Joaquín; Jimeno, José Luis; Cerdá, Emilio. (2004) *Teoría de Juegos*. Madrid: Pearson Educación.
- Rincón, Luis. (2007) *Curso intermedio de Probabilidad*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM. Versión de Octubre 2007. Una versión actualizada se encuentra disponible en formato electrónico en la dirección <http://www.matematicas.unam.mx/lars>
- Schwalbe, Ulrich y Walker, Paul. (1997) “Zermelo and the Early History of Game Theory” en *Games and Economic Behavior*, Vol. 34, Num. 1, Enero 2001. Recuperado el 30 de agosto del 2013. Disponible en la Web en: <http://www.math.harvard.edu/~elkies/FS23j.03/zermelo.pdf>
- Spivak, Michael. (1996) *Cálculo Infinitesimal*. (2da ed.) México: Editorial Reverté.
- Suppes, P. (1957) “Set-Theoretical foundations of the axiomatic method” y “Transition from formal to informal proofs” en *Introduction to logic*. Canadá: Van Nostrand Reinhold Company
- Vega-Redondo, Fernando. (2003) *Economics and the Theory of Games*. Nueva York: Cambridge University Press.
- Wackerly, Dennis; Mendenhall III, William y Scheaffer, Richard. (2010) *Estadística Matemática con Aplicaciones*. (7ma. ed.) México: Cengage Learning Editores.