



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Informática

Integración de una aplicación móvil para gestionar contenidos
interactivos en la enseñanza del álgebra para estudiantes de nivel
Secundaria

Tesis

Que como parte de los requisitos
para obtener el Grado de

Doctora en Tecnología Educativa

Presenta

Mayra Uribe Hernández

Dirigido por:

Victor Larios Osorio

Co-Director:

Luis Roberto Pino Fan

Querétaro, Qro. a 23 de noviembre de 2022



Dirección General de Bibliotecas y Servicios Digitales de
Información



Integración de una aplicación móvil para gestionar
contenidos interactivos en la enseñanza del álgebra
para estudiantes de nivel Secundaria

por

Mayra Uribe Hernández

se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons
Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional](#).

Clave RI: IFDCC-281509-0223-1122



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Informática
Doctorado en Innovación en Tecnología Educativa

Integración de una aplicación móvil para gestionar contenidos interactivos en la enseñanza del álgebra para estudiantes de nivel Secundaria

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado
Doctora en Tecnología Educativa

Presenta

Mayra Uribe Hernández

Dirigido por:

Víctor Larios Osorio

Co-dirigido por:

Luis Roberto Pino Fan

Victor Larios Osorio

Presidente

Luis Roberto Pino Fan

Secretario

Alexandro Escudero Nahón

Vocal

Fausto Abraham Jacques-García

Suplente

Lilia Patricia Aké Tec

Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.

Noviembre 2022

México

AGRADECIMIENTOS.....	8
INDICE DE TABLAS.....	9
INDICE DE FIGURAS.....	10
RESUMEN.....	16
ABSTRACT.....	17
INTRODUCCIÓN.....	18
CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES.....	21
1.1 ANTECEDENTES DEL PROBLEMA.....	21
1.1.2. La incorporación de los dispositivos móviles en la enseñanza de las matemáticas.....	22
1.1.3. Enfoques pedagógicos para la enseñanza de las matemáticas.....	24
1.1.4. La enseñanza de las matemáticas mediante dispositivos móviles en Latinoamérica.....	27
1.1.5. El carácter multifacético de la variable en las tareas algebraicas.....	30
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	31
1.2.1. Preguntas de investigación.....	32
1.2.2. Objetivos de investigación.....	33
1.3 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.....	33
CAPÍTULO 2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....	35
2.1 ENTORNO DE APRENDIZAJE MÓVIL (EAM).....	35
2.1.1. Categorización del aprendizaje móvil en la enseñanza de las matemáticas.....	36

2.1.3 Diferenciación del aprendizaje móvil y el aprendizaje ubicuo en la enseñanza de las matemáticas	39
2.1.4. Componentes metodológicos identificados para la enseñanza de las matemáticas en un entorno de aprendizaje móvil.....	40
2.2. ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS (EOS)	42
2.2.1. Nociones de trayectoria didáctica e idoneidad didáctica	44
2.3. LA VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL Y COMO INCÓGNITA	46
CAPITULO 3. MÉTODO DE INVESTIGACIÓN: DISEÑO Y ETAPAS	48
3.1. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.....	49
3.1.1. Etapa 1: El aprendizaje móvil en la enseñanza de las matemáticas	52
3.1.2. Etapa 2: Primera intervención educativa en aula.....	59
3.1.3. Etapa 3: Segunda intervención educativa en un EAM.....	80
3.1.4. Etapa 4: Propuesta de una EAM para abordar el estudio de la variable	105
CAPÍTULO 4. PRIMERA TRAYECTORIA DIDÁCTICA EN AULA.....	108
4.1. DISEÑO DE LA PRIMERA TRAYECTORIA DIDÁCTICA	110
4.1.1. Primera sesión: El álgebra en nuestra vida cotidiana	113
4.1.2. Segunda sesión: Tienda de productos ecológicos	114
4.1.3. Tercera sesión: Edificios verdes.....	115
4.2. EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LA PRIMERA TRAYECTORIA DIDÁCTICA	115
4.2.1. Primera sesión: el álgebra en la vida cotidiana.....	116
4.2.2. Segunda sesión: tienda de productos ecológicos.....	118
4.2.3. Tercera sesión: edificios verdes	121
4.3. RESULTADOS DE LA PRIMERA TRAYECTORIA DIDÁCTICA.....	126

4.4. REFINAMIENTO DE LA PRIMERA TRAYECTORIA DIDÁCTICA.....	129
CAPÍTULO 5. SEGUNDA TRAYECTORIA DIDÁCTICA EN UN ENTORNO DE APRENDIZAJE MOVIL.....	133
5.1.1. Actividad preliminar.....	140
5.1.2. Tarea de ejercitación con respuesta múltiple.....	142
5.1.3. Tarea de ejercitación con respuesta abierta.....	144
5.1.4. Tarea de discusión.....	145
5.1.5. Tarea de colaboración.....	146
5.2. EXPERIMENTACIÓN Y ANALISIS DE LA SEGUNDA TRAYECTORIA DIDACTICA.....	148
5.2.1. Actividad preliminar.....	148
5.2.2. Tarea de ejercitación con respuesta múltiple.....	159
5.2.3. Tarea de ejercitación con respuesta abierta.....	170
5.2.4. Tareas de discusión y colaboración.....	197
5.3. RESULTADOS DE LA SEGUNDA TRAYECTORIA DIDACTICA.....	235
5.4. REFINAMIENTO DE LA SEGUNDA TRAYECTORIA DIDÁCTICA.....	239
CAPITULO 6. PROPUESTA DE UN EAM PARA ABORDAR EL ESTUDIO DE LA VARIABLE.....	242
6.1. Actividad preliminar.....	252
6.2. Tarea de ejercitación con respuesta múltiple.....	253
6.3. Compartir procedimientos.....	254
6.4. Tarea de ejercitación con respuesta abierta.....	255
6.5. Tarea de discusión.....	257
6.6. Tarea de colaboración.....	258
CAPITULO 7. CONCLUSIONES.....	261
Referencias.....	266

AGRADECIMIENTOS

A mi madre con todo mi corazón, por creer en mí, por acompañarme en cada paso, todo va mejor con tus abrazos mami. A mi amado padre por enseñarme a buscar la mejor versión de mí misma, gracias papi por cada palabra de amor. A mi hermosa hermana, por ser cómplice, amiga, confidente, por ser mi fortaleza y mi refugio. Al amor de mi vida, Antonio, por ser mi gran maestro, mi aliado, mi compañero de alegrías y lágrimas.

A los miembros de mi Comité tutorial, por su acompañamiento, sus enseñanzas y sus valiosos aportes, gracias por estos cuatro años de trabajo y amistad.

A la honorable Universidad Autónoma de Querétaro que me dio la oportunidad de ingresar a su matrícula. Al CONACYT por su invaluable apoyo.

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Fases para esquematizar la evidencia empírica en torno al aprendizaje móvil y la enseñanza de las matemáticas	55
Tabla 2. Tipos de tarea, objetivos de aprendizaje y recursos tecnológicos para su implementación	82
Tabla 3. Bloque temático, objetivo y semana de trabajo definidos en el ciclo de la IBD	83
Tabla 4. Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad del EOS. Fuente: Elaboración propia basada en (J. Godino, 2013)	111
Tabla 5. Acciones que refieren a operaciones matemáticas	113
Tabla 6. Distribución de los grupos para la segunda trayectoria didáctica	133
Tabla 7. Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad del EOS.....	134
Tabla 8. Características de los tipos de tarea propuestos para un entorno de aprendizaje móvil .	136
Tabla 9. Ejercicios propuestos por bloque temático	138
Tabla 10. Secuencia de imágenes del video tutorial par el uso de la plataforma	141
Tabla 11. Ejercicios propuestos para el bloque temático: uso del lenguaje aritmético	143
Tabla 12. Ejercicios para el bloque <i>uso de valores aritméticos, simbología y lenguaje algebraico</i>	146
Tabla 13. Ejercicios propuestos para el bloque Identificación del carácter multifacético de la variable	147
Tabla 14. Tarea Final de ejercitación con respuesta abierta, nivel básico.....	181
Tabla 15. Tarea Final de ejercitación con respuesta abierta, nivel medio.	181
Tabla 16. Ejercicios de la tarea de refuerzo de la primera sesión de Meet	199
Tabla 17. Ejercicios propuestos para la segunda sesión de Meet. Primeros 3 grupos.	209
Tabla 18. Ejercicios propuestos para la segunda sesión de Meet. Segundos 3 grupos.	209
Tabla 19. Ejercicios de la actividad de refuerzo. Tercera sesión en Meet.	221
Tabla 20. Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad del EOS.....	242
Tabla 21. Características de los tipos de tarea propuestos para un entorno de aprendizaje móvil	246
Tabla 22. Ejercicios del Bloque temático: uso del lenguaje aritmético	254
Tabla 23. Ejercicios para el bloque uso de valores aritméticos, simbología y lenguaje algebraico	257
Tabla 24. Ejercicios del bloque temático: identificación del carácter multifacético de la variable ..	259

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Facetas y niveles del análisis didáctico. Fuente: (Godino, 2013)	43
Figura 2. Criterios de idoneidad didáctica del EOS. Fuente: (Godino et al., 2006)	45
Figura 3. Descripción gráfica de las etapas de la investigación y las fases de un ciclo de la IBD ...	50
Figura 4. Etapas de desarrollo de la Investigación Basada en el Diseño. Fuente: elaboración propia basada en (De Benito & Salinas, 2016)	51
Figura 5. Etapa 1: Esquema de recursos, herramientas y técnicas utilizadas y de resultados al término de un ciclo de la IBD	53
Figura 6. Relación entre los objetivos de los estudios, las metodologías de investigación y los instrumentos de recolección de datos identificados	56
Figura 7. Relación entre el contexto educativo, las poblaciones afectadas y el eje temático abordado.....	57
Figura 8. Relación entre el enfoque pedagógico, los elementos tecnológicos utilizados y los resultados informados en los estudios.....	58
Figura 9. Etapa 2: esquema de recursos, herramientas y técnicas utilizadas y de resultados al término de un ciclo de la IBD	60
Figura 10. Procedimiento ejemplo de la categoría secuencia narrativa del enunciado	61
Figura 11. Procedimiento ejemplo de la categoría componentes de una expresión aritmética.	62
Figura 12. Procedimiento ejemplo de las categorías secuencia narrativa del enunciado y componentes de una expresión aritmética	63
Figura 13. Porcentaje de las categorías identificadas en las hojas de trabajo de la primera sesión	63
Figura 14. Hoja de trabajo 1 de la actividad de refuerzo para la segunda sesión	64
Figura 15. Hoja de trabajo 1 de la actividad de refuerzo para la segunda sesión	65
Figura 16. Procedimiento ejemplo de la categoría Identificación de componentes de una expresión aritmética, hoja 1	66
Figura 17. Procedimiento ejemplo de la categoría Identificación de componentes de una expresión aritmética, hoja 2	66
Figura 18. Procedimiento ejemplo de la categoría ejercicios incompletos, hoja 2.....	67
Figura 19. Procedimiento ejemplo de la categoría identificación de significados erróneos, hoja 1..	68
Figura 20. Procedimiento ejemplo de la categoría uso de símbolos, hoja 1.....	69
Figura 21. Porcentaje de las categorías identificadas en las hojas de trabajo de la actividad de repaso.....	70
Figura 22. Hoja de trabajo de la tarea matemática de la segunda sesión.....	71
Figura 23. Procedimiento ejemplo de la categoría ejercicio completo	72
Figura 24. Procedimiento ejemplo de la categoría ejercicio incompleto	73
Figura 25. Procedimiento ejemplo de la categoría se evita el uso del signo igual.....	74

Figura 26. Procedimiento ejemplo de la categoría identificación de significado erróneo	74
Figura 27. Porcentaje de las categorías identificadas en las hojas de trabajo de la segunda sesión	75
Figura 28. Hoja de trabajo de la tarea matemática de la tercera sesión.....	76
Figura 29. Señalamiento de procedimiento ejemplo de la categoría procedimientos aritméticos	77
Figura 30. Señalamiento de procedimiento ejemplo de la categoría incorrecto e incompleto	78
Figura 31. Señalamiento de procedimientos ejemplo de las categorías secuencia narrativa y se evita el uso del signo igual.....	79
Figura 32. Porcentaje de las categorías identificadas en las hojas de trabajo de la tercera sesión.	80
Figura 33. Etapa 3: recursos, herramientas, técnicas y resultados al término de un ciclo de la IBD	81
Figura 34. La actividad preliminar ¿Quién soy?.....	84
Figura 35. Porcentajes de los tipos de archivos multimedia utilizados en la actividad preliminar	85
Figura 36. Porcentaje de técnicas utilizadas para la creación o edición de recursos multimedia de la actividad preliminar	86
Figura 37. Porcentaje de los videos mas jugados por los participantes	87
Figura 38. Porcentaje de categorías sobre aspectos que consideraban talentos personales	88
Figura 39. Porcentaje de categorías sobre aspectos que consideraban desagradables	89
Figura 40. Porcentaje de categorías sobre aspectos que consideraban relevantes en su cotidianidad	90
Figura 41. Porcentajes de categorías sobre retos personales a corto plazo	91
Figura 42. Ejercicio 1 de la Tarea de ejercitación de respuesta múltiple.....	92
Figura 43. Ejercicio 2 de la Tarea de ejercitación de respuesta múltiple.....	92
Figura 44. Ejercicio 3 de la Tarea de ejercitación de respuesta múltiple.....	92
Figura 45. Ejercicio 4 de la Tarea de ejercitación de respuesta múltiple.....	92
Figura 46. Ejercicio 5 de la Tarea de ejercitación de respuesta múltiple.....	93
Figura 47. Puntuaciones de la tarea de ejercitación de respuesta múltiple	94
Figura 48. Porcentajes de los tipos de archivos multimedia utilizados en la tarea de ejercitación de respuesta múltiple.....	95
Figura 49. Señalamiento de procedimientos ejemplo de la categoría procedimientos aritméticos ..	95
Figura 50. Señalamiento de procedimientos ejemplo de la categoría uso de gráficos	96
Figura 51. Señalamiento de procedimientos ejemplo de la categoría texto.....	97
Figura 52. Señalamiento de procedimientos ejemplo de la categoría narración de generalidades .	97
Figura 53. Porcentaje de las categorías identificadas en los procedimientos de la tarea de ejercitación de respuesta múltiple	98
Figura 54. Tarea de ejercitación de respuesta abierta	99
Figura 55. Porcentajes de los tipos de archivos multimedia utilizados en la tarea de ejercitación de respuesta abierta	100

Figura 56. Procedimientos ejemplo de las categoría procedimientos aritméticos	100
Figura 57. Procedimientos ejemplo de la categoría texto	101
Figura 58. Respuesta ejemplo de la categoría sin procedimientos.....	101
Figura 59. Porcentaje de las categorías identificadas en la tarea de ejercitación de respuesta abierta.....	102
Figura 60. Porcentaje de respuestas correctas e incorrectas de la tarea de ejercitación de respuesta abierta	103
Figura 61. Porcentaje de asistencia de la primera y segunda sesiones en Meet	104
Figura 62. Número de estudiantes que participaron en cada grupo de la sesión final en Meet	105
Figura 63. Etapa 4: recursos, herramientas, técnicas y resultados al término de un ciclo de la IBD	106
Figura 64. Trayectoria didáctica, temporalidad, bloque temático y los tipos de tarea	107
Figura 65. Estructura de las tareas en la plataforma de Google Classroom y en Google Meet	108
Figura 66. Respuesta del estudiante E a la actividad de la primera sesión	117
Figura 67. Respuesta del estudiante A	117
Figura 68. Respuesta del estudiante F a la actividad de la segunda sesión	119
Figura 69. Respuesta del estudiante E a la actividad de la segunda sesión	120
Figura 70. Respuesta del estudiante D a la actividad de la segunda sesión	120
Figura 71. Respuesta de la estudiante C, actividad de la tercera sesión	122
Figura 72. Primera actividad de la tercera sesión	123
Figura 73. Segunda actividad de la tercera sesión	123
Figura 74. Respuesta del estudiante C en la tercera sesión.....	123
Figura 75. Respuesta del estudiante A en la tercera sesión	124
Figura 76. Respuesta del estudiante C en la tercera sesión.....	125
Figura 77. Respuesta del estudiante D a la actividad de la tercera sesión.....	125
Figura 78. Esquema general de la primera trayectoria didáctica en aula	131
Figura 79. Línea del tiempo de la segunda trayectoria didáctica en un EAM	140
Figura 80. Actividad preliminar para identificar competencias digitales de los estudiantes.....	142
Figura 81. Ejercicio de la Tarea de ejercitación con respuesta abierta	145
Figura 82. Ejemplo de una sesión de discusión al cierre de la semana en el calendario de Google	147
Figura 83. Respuesta que compartió la docente a modo de ejemplo	149
Figura 84. Respuesta de Sofía a la actividad preliminar	150
Figura 85. Respuesta de Valentina a la actividad preliminar	151
Figura 86. Respuesta de Valeria a la actividad preliminar	152
Figura 87. Respuesta de Andra a la actividad preliminar	153
Figura 88. Respuesta de Sofía a la actividad preliminar.....	154

Figura 89. Respuesta de José Carlos a la actividad preliminar	155
Figura 90. Respuesta de Sofía a la actividad preliminar	156
Figura 91. Respuesta de Sofía a la actividad preliminar	157
Figura 92. Respuesta de Christopher a la actividad preliminar	158
Figura 93. Respuesta de Andrea a la actividad preliminar	159
Figura 94. Respuesta de José a la actividad de compartir sus procedimientos. Hoja 1.	161
Figura 95. Respuesta de José a la actividad de compartir sus procedimientos. Hoja 2.	162
Figura 96. Respuesta de Joana a la actividad de compartir sus procedimientos	163
Figura 97. Respuesta de Tiana a la actividad de compartir sus procedimientos. Hoja 1.	164
Figura 98. Respuesta de Tiana a la actividad de compartir sus procedimientos. Hoja 2.	165
Figura 99. Respuesta de Carla a la actividad de compartir sus procedimientos.	166
Figura 100. Respuesta de Romina a la actividad de compartir sus procedimientos.....	166
Figura 101. Segundo ejercicio de la Tarea de ejercitación de respuesta múltiple.....	167
Figura 102. Respuesta de Alondra a la actividad de compartir sus procedimientos.....	167
Figura 103. Respuesta de Azul a la actividad de compartir sus procedimientos.....	168
Figura 104. Respuesta de Dulce a la actividad de compartir sus procedimientos.....	169
Figura 105. Respuesta de Valentina a la actividad de compartir sus procedimientos	170
Figura 106. Respuesta de Andrea a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.	171
Figura 107. Captura de pantalla del chat en Google Classroom con la estudiante Andrea	172
Figura 108. Segunda respuesta de Alondra a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.	172
Figura 109. Respuesta de Carolina a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.....	173
Figura 110. Respuesta de Valeria a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.....	174
Figura 111. Respuesta de Dania a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.	174
Figura 112. Respuesta de Samirah a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.....	175
Figura 113. Respuesta de Sofía a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.	176
Figura 114. Respuesta de Abigail a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.	177
Figura 115. Respuesta de Camila a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.....	178
Figura 116. Respuesta de Audolina a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.	179
Figura 117. Texto preliminar de la Tarea Final de ejercitación con respuesta abierta.	180
Figura 118. Tarea Final de ejercitación con respuesta abierta, nivel inicial.	180
Figura 119. Respuesta de Abigail a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.	182
Figura 120. Respuesta de Abraham a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.	183
Figura 121. Respuesta de Sofía a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.....	184
Figura 122. Respuesta de Adrián a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.....	184
Figura 123. Respuesta de Karla a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.....	185
Figura 124. Respuesta de José a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.	186
Figura 125. Respuesta de Sofía a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.....	186

Figura 126. Respuesta de Andrea a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.	188
Figura 127. Respuesta de Romina a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja 1.	189
Figura 128. Respuesta de Romina a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja 2.	189
Figura 129. Respuesta de Andrea a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja 1. .	190
Figura 130. Respuesta de Andrea a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja 2. .	191
Figura 131. Respuesta de Audolina a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.	192
Figura 132. Respuesta de Fabiana a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.	193
Figura 133. Respuesta de José a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja 1.	194
Figura 134. Respuesta de Abigail a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja 2. ..	194
Figura 135. Respuesta de José a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja 3.	195
Figura 136. Respuesta de Christopher a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.	196
Figura 137. Respuesta de Valeria a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.	196
Figura 138. Respuesta de Karla a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.	197
Figura 139. Tablero de posiciones que indica el puntaje en tiempo real en Quizziz	198
Figura 140. Ejercicio para su discusión en Meet.	199
Figura 141. Respuestas del equipo amarillo. Primera sesión en Meet.	201
Figura 142. Respuestas del equipo rojo. Primera sesión en Meet.	201
Figura 143. Respuestas del equipo rosa. Primera sesión en Meet.	203
Figura 144. Ejercicio colaborativo. Primera sesión en Meet.	203
Figura 145. Respuesta al Ejercicio colaborativo del equipo verde. Primera sesión en Meet.	206
Figura 146. Respuesta al Ejercicio colaborativo del equipo rojo. Primera sesión en Meet.	206
Figura 147. Segundo ejercicio colaborativo.	207
Figura 148. Respuesta de Daniela. Segunda sesión en Meet.	210
Figura 149. Respuesta de Alejandro. Segunda sesión en Meet.	211
Figura 150. Respuesta de Sofía. Segunda sesión en Meet.	212
Figura 151. Respuesta de Ángel. Segunda sesión en Meet.	213
Figura 152. Respuesta de Anabell. Segunda sesión en Meet.	214
Figura 153. Respuesta de Abraham. Segunda sesión en Meet.	215
Figura 154. Respuesta de Mauro. Segunda sesión en Meet.	216
Figura 155. Respuesta de Carolina. Segunda sesión en Meet.	217
Figura 156. Respuesta de Giovanni. Segunda sesión en Meet.	218
Figura 157. Primer ejercicio colaborativo. Segunda sesión en Meet.	219
Figura 158. Segundo ejercicio colaborativo. Segunda sesión en Meet.	219
Figura 159. Tercer ejercicio colaborativo. Segunda sesión en Meet.	220
Figura 160. Primer ejercicio. Tercera sesión en Meet.	224
Figura 161. Segundo ejercicio. Tercera sesión en Meet.	225
Figura 162. Tercer ejercicio. Tercera sesión en Meet.	227

Figura 163. Primer ejercicio. Tercera sesión en Meet. Segundo grupo de estudiantes.	229
Figura 164. Respuesta de Gael al ejercicio de la tercera sesión en Meet.	231
Figura 165. Respuesta de Isabella al ejercicio de la tercera sesión en Meet.	232
Figura 166. Respuesta de Mariana al ejercicio de la tercera sesión en Meet.	233
Figura 167. Respuesta de José al ejercicio de la tercera sesión en Meet.	233
Figura 168. Respuesta de Cala al ejercicio de la tercera sesión en Meet.	234
Figura 169. Respuesta de Valentina al ejercicio de la tercera sesión en Meet.	234
Figura 170. Diseño preliminar de la trayectoria didáctica en un entorno de aprendizaje móvil	240
Figura 171. Ajuste de la trayectoria didáctica en un entorno de aprendizaje móvil	240
Figura 172. Trayectoria didáctica, temporalidad, bloque temático y los tipos de tarea	249
Figura 173. Etiquetas utilizadas en la plataforma para describir los tipos de tarea y los bloques temáticos.....	250
Figura 174. Estructura de las tareas en la plataforma de Google Classroom y en Google Meet...	251
Figura 175. Actividad preliminar	252
Figura 176. Instrucciones de la tarea compartir procedimientos en Google Classroom	255
Figura 177. Tarea de ejercitación con respuesta abierta.....	256
Figura 178. Incrementos de la trayectoria didáctica	260

RESUMEN

Diversas investigaciones coinciden en que el concepto variable posee un carácter multifacético, en los problemas algebraicos se presenta con distintas definiciones, referentes y símbolos, por lo que los estudiantes muestran dificultad para interpretar y poner en juego sus diversos usos.

Este trabajo de investigación presenta la propuesta de un entorno de aprendizaje móvil para abordar el estudio de los diversos usos de la variable con estudiantes de nivel secundaria, concretamente el uso como número general y cómo incógnita definida. Para ello, se consideraron las particularidades del aprendizaje móvil en el campo de la enseñanza de las matemáticas, lo que dio pautas para el diseño e implementación de un entorno de aprendizaje móvil que gestionó contenidos interactivos. Para el desarrollo de la investigación utilizamos las etapas de la Investigación Basada en el Diseño (IBD) y las nociones de trayectoria didáctica e idoneidad didáctica introducidas por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS).

Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes lograron los objetivos de aprendizaje, además, mostraron interés en compartir sus procedimientos verbal, gráfica y textualmente. Se identificaron competencias digitales en relación al uso de las plataformas y a la edición de archivos multimedia. Fueron positivas las percepciones en torno a las tareas matemáticas propuestas.

ABSTRACT

Various investigations agree that the variable concept has a multifaceted character, in algebraic problems it is presented with different definitions, referents and symbols, so students show difficulty in interpreting and putting into play its various uses.

This research work presents the proposal of a mobile learning environment to address the study of the various uses of the variable with high school students, specifically the use as a general number and as a defined unknown. For this, the particularities of mobile learning in the field of mathematics education were considered, which gave guidelines for the design and implementation of a mobile learning environment that managed interactive content. For the development of the research we used the stages of Research Based on Design (IBD) and the notions of didactic trajectory and didactic suitability introduced by the Ontosemiotic Approach to mathematical knowledge and instruction (EOS).

The results obtained show that students they achieved the learning objectives, in addition, they showed interest in sharing their procedures verbally, graphically and textually. Digital skills were identified in relation to the use of platforms and the editing of multimedia files. The perceptions about the proposed mathematical tasks were positive.

INTRODUCCIÓN

En México el 56% de los estudiantes de nivel secundaria presentan un bajo nivel de desempeño académico en matemáticas (OCDE, 2018), conforme avanzan los niveles educativos se observa que los estudiantes enfrentan dificultades en la comprensión de conceptos matemáticos que están relacionados con significados erróneos adquiridos en los primeros niveles de educación escolar, tal es el caso del concepto variable, que se aborda en el primer ciclo escolar de la educación secundaria, en el cual el estudiante tiene el primer acercamiento al lenguaje algebraico formal.

La dificultad en la comprensión del concepto variable por parte de los estudiantes está asociada a una falta de estrategias pertinentes para la enseñanza de las matemáticas en el aula, es decir, lo que ocurre en el aula escolar está desvinculado de las propuestas didácticas analizadas por la comunidad científica. Estas propuestas didácticas son el resultado de la investigación en torno a la Didáctica de las Matemáticas, disciplina que se ha consolidado a lo largo de los años que vincula la matemática con diversas áreas como la epistemología, la psicología y la pedagogía (J. Godino, 2013).

Esta falta de estrategias pertinentes se relaciona también con un uso inadecuado de la tecnología para abordar la enseñanza de conceptos matemáticos. Existe un desconocimiento para incorporar elementos tecnológicos en el aula escolar, el uso de diversas tecnologías ocurre sin un análisis sobre cuáles son los objetivos de aprendizaje y qué tecnología facilitaría ese aprendizaje.

Como consecuencia de las condiciones que originó la pandemia por COVID-19 en 2020, el uso de dispositivos móviles se implementó de forma excepcional y emergente en los diversos niveles educativos en México, con la finalidad de concluir con éxito el ciclo escolar 2019-2020; la herramienta digital más utilizada fue el teléfono inteligente con 65.7% (INEGI, 2019). Partiendo del hecho que el primer acercamiento al lenguaje algebraico ocurre en el nivel de educación

secundaria en México, la población de estudio de la presente investigación refiere a estudiantes de entre 12-15 años, siendo esta población la que usa en su cotidianidad dispositivos móviles, principalmente celulares.

Estos dispositivos poseen características intrínsecas que permiten la creación de nuevos entornos educativos, lo que ha despertado el interés de la comunidad educativa desde hace ya varias décadas. Su incorporación en el ámbito educativo ha dado origen a nuevos conceptos, como es el caso del aprendizaje móvil, concepto que surge en el 2010 y que refiere al aprendizaje en múltiples contextos a través de dispositivos electrónicos personales (Crompton, 2013).

Esta investigación buscó responder cómo abordar el estudio de la variable en la etapa escolar donde el estudiante tiene el primer acercamiento al lenguaje algebraico. Considerando la relevancia de incorporar la tecnología a las prácticas matemáticas, se presenta la propuesta de un entorno de aprendizaje móvil (EAM) para abordar el estudio de la variable, buscando responder cómo integrar este EAM en el ámbito escolar y cómo valorar los aprendizajes adquiridos por los estudiantes en el entorno.

El concepto variable está presente a lo largo de toda la educación básica, media superior y superior, y su comprensión ayuda a la adquisición de aprendizajes complejos, por lo que abordar su estudio pertinente es fundamental para garantizar el desempeño académico en los estudiantes. Su enseñanza en el aula debe tener fundamento en estrategias didácticas analizadas por la comunidad científica para que la incorporación tecnológica sea un aliado, es decir, debe darse prioridad a la definición de los objetivos de aprendizaje y el enfoque pedagógico.

Este trabajo contribuye a la definición del concepto de entorno de aprendizaje móvil para la enseñanza de saberes matemáticos, relacionando el concepto aprendizaje móvil y las prácticas didácticas propias de las matemáticas. Se presenta la propuesta de tareas que serán gestionadas en un EAM para abordar el estudio de la variable en la etapa escolar en México donde ocurre el primer

acercamiento al lenguaje algebraico. Lo que tendrá implicaciones futuras a lo largo de los diversos niveles educativos, ya que un entendimiento a profundidad de estos conceptos facilitará el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos.

Este trabajo se describe en 7 capítulos. El capítulo 1 aborda los antecedentes del problema de investigación, define el planteamiento del problema y la justificación. El capítulo 2 describe la fundamentación teórica que sustenta la investigación, partiendo de los conceptos entorno de aprendizaje móvil, noción de idoneidad didáctica y el carácter multifacético de la variable. El capítulo 3 describe el método de investigación, describe el lugar y la población de estudio; también se abordan las etapas de la investigación basada en el diseño y la noción de idoneidad didáctica. Los capítulos 4 y 5 describen respectivamente, la primera trayectoria didáctica en aula y la segunda trayectoria didáctica en un entorno de aprendizaje móvil; se detallan las etapas de diseño, experimentación y análisis en relación con la noción de idoneidad didáctica. En el capítulo 6 se presenta la propuesta de un entorno de aprendizaje móvil para abordar el estudio de la variable. El capítulo 7 presenta las conclusiones de la investigación y las consideraciones a futuro.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES, PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se abordan los antecedentes del problema de investigación, que refieren a la incorporación de dispositivos móviles en la enseñanza de las matemáticas, los enfoques pedagógicos implementados en un entorno mediado por dispositivos móviles, así como el concepto variable en las tareas algebraicas.

Se presenta el planteamiento del problema de investigación, así como las preguntas que orientaron la formulación de objetivos, los cuáles se enuncian en este capítulo y que precisan la finalidad concreta de este trabajo.

Al cierre de este capítulo se presenta la justificación de la relevancia social, las implicaciones prácticas y la utilidad metodológica de la presente investigación.

1.1 ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

La enseñanza de las matemáticas debe contribuir a la comprensión del mundo real, tanto en el entorno social inmediato, como en los contextos escolares y laborales mediante el uso de conceptos, representaciones y procedimientos matemáticos.

En el ámbito escolar, la necesidad de transformar los métodos de enseñanza matemática, y adecuarlos a los contextos sociales y culturales de los estudiantes, ha propiciado la implementación de estrategias educativas mediadas por diversas tecnologías, como los dispositivos móviles, que adquieren relevancia en el entorno educativo por sus propiedades intrínsecas y el evidente incremento en su uso.

Los dispositivos móviles están transformando prácticas y estructuras socioculturales, permitiendo a los estudiantes participar de contextos digitales de un modo táctil y personal (Figueras-Maz et al., 2018), por lo que su incorporación en el ámbito educativo ha despertado el interés de la comunidad científica.

1.1.2. La incorporación de los dispositivos móviles en la enseñanza de las matemáticas

Los dispositivos móviles poseen características intrínsecas que los posicionan como una posibilidad potencialmente innovadora en entornos educativos, atributos propios de dispositivos del tipo teléfonos inteligentes y tabletas, tales como la ubicuidad, portabilidad, comunicación instantánea, la gestión de elementos multimedia como fotografías, video y audio y la propiedad lúdica que caracteriza a los videojuegos. Además, estos dispositivos poseen un conjunto de funcionalidades que promueven la interacción con diversos agentes, como la geolocalización, la realidad aumentada, el procesamiento y análisis de datos en tiempo real.

Son diversos los estudios que abordan la enseñanza de saberes matemáticos mediante la incorporación de dispositivos móviles, los cuáles reportan resultados positivos, aunque no son concluyentes en relación a la comprensión de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes.

En 2012 se desarrolló una investigación que propone un sistema de evaluación y aprendizaje adaptativo basado en la nube que incorpora dispositivos móviles. El sistema se integró en los laboratorios de computación de un centro escolar en India, por lo que los estudiantes tenían acceso a contenido personalizado en dos entornos de aprendizaje, el e-learning y el m-learning. Se abordaban temáticas como la aritmética, la geometría, el álgebra y la probabilidad. El estudio concluyó que no existía diferencia significativa en el rendimiento escolar de los estudiantes entre el e-learning y el m-learning. Sin embargo, pasaban mayor tiempo conectados en los dispositivos móviles (Nedungadi y Raman, 2012).

Un estudio en Australia utilizó dispositivos móviles conectados a Internet para facilitar el acceso al material de aprendizaje, como videos. En la investigación, un entorno tradicional de enseñanza de matemática fue reemplazado por un entorno de aprendizaje abierto. Se abordó el estudio del círculo con 85 niños de 11 años

de edad promedio, quienes tenían la posibilidad de autorregular su aprendizaje según su ritmo de trabajo y preferencias. El entorno de aprendizaje propuesto mostró un aumento significativo en el rendimiento de los estudiantes, en relación al estudio con un grupo control (Föböl et al., 2016).

Un estudio en Italia planteó la hipótesis de que, el pensamiento estratégico del juego en las actividades matemáticas ayuda en la construcción de vínculos lógicos entre conceptos en la fase de argumentación. El estudio propone cinco actividades de juego basadas en teoremas geométricos en los que dos jugadores se enfrentan en un entorno geométrico dinámico multitáctil, lo que implicó el uso de tabletas iPad. Esta investigación reflexiona sobre la relevancia de la argumentación en la solución de tareas matemáticas, además de la importancia de las interacciones que ocurren al utilizar un entorno multitáctil (Soldano, 2016).

Una investigación con estudiantes de nivel secundaria, estudió el uso de la aplicación Hands-On Equations para iPad en el aula, con el propósito de indagar sobre su valor como herramienta de enseñanza dentro de un plan de estudios de matemáticas, abordando la temática Álgebra I del currículo escolar. El estudio es concluyente en relación al potencial de los dispositivos móviles para motivar en los estudiantes el interés por las matemáticas, centrándose en la comunicación y las oportunidades sociales de los niños (Juhan y Halkias, 2017).

Çetinkaya (2019), a la luz de los resultados de su investigación, concluye que el proceso de aprendizaje basado en problemas en el que las aplicaciones móviles se utilizan como tecnología de asistencia fue eficaz tanto en el aumento del éxito de los estudiantes en matemáticas como en sus actitudes positivas. El estudio propone el uso de una aplicación de bolsa virtual para el aprendizaje de los conceptos de tendencia central, datos, gráficos e histogramas, con resultados favorables sobre las motivaciones de los estudiantes en aprender estos temas.

Estos estudios delimitaron con claridad los conceptos matemáticos que se abordarían con los estudiantes, el uso de los dispositivos móviles fue fundamental

para promover la motivación e interacción, además de que muestran interés en la incorporación de los dispositivos en el aula escolar. Sin embargo, es poca la información sobre el fundamento pedagógico para abordar el estudio de las matemáticas en el aula, los resultados se centran en las percepciones de los estudiantes en relación con el uso de los dispositivos móviles, por lo que se requiere un análisis a profundidad sobre los aprendizajes adquiridos a corto y largo plazo con fundamento en estrategias pedagógicas desarrolladas por la comunidad científica.

1.1.3. Enfoques pedagógicos para la enseñanza de las matemáticas

La Didáctica de las Matemáticas (DdM) se ha consolidado a lo largo de los años gracias al trabajo de colectivos académicos y de la comunidad científica. Esta disciplina está vinculada con la epistemología, la psicología, la pedagogía y la matemática, por lo que requiere supuestos teóricos divergentes cuya utilidad no es del todo obvia (D'Amore y Godino, 2007).

Dada la dificultad propia del proceso enseñanza y aprendizaje de la matemática en todo nivel, debe considerarse prioritario el fundamento pedagógico ante la integración tecnológica en un proceso de estudio; es decir, deben considerarse aspectos cognitivos de representaciones semióticas, dificultades didácticas y obstáculos epistemológicos presentes en el proceso de aprendizaje, así como las interacciones que ocurren en los entornos interactivos.

Existen estudios que han abordado la enseñanza de las matemáticas desde el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), la cual es una corriente didáctica que nace en los años '60, cuya idea central es que, la enseñanza de la matemática debe estar conectada con la realidad, debe ser cercana al estudiante y relevante para la sociedad (Goffree, 1993). Parte del hecho de que, si la matemática es un acto humano, entonces debe tener relación con la realidad y con los contextos sociales. "La imagen de la matemática se enmarca dentro de la

imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la sociedad" (Freudenthal, 2002, p. 32). La EMR considera a las matemáticas como una actividad para resolver problemas y también para proponerlos. Los siguientes estudios incorporaron el uso de dispositivos móviles en las tareas escolares con fundamento en las estrategias pedagógicas de la EMR.

En una investigación de diseño exploratorio, se estudió la usabilidad y oportunidades de aprendizaje de un juego de geometría, MobileMath, en dispositivos móviles. Se recopilaron datos de 60 estudiantes de entre 12 y 14 años. Se abordaron los conceptos de figuras geométricas, ángulos y líneas paralelas. Los resultados del estudio fueron positivos en relación a las motivaciones de los estudiantes; estos resultados refieren a la interacción con el entorno real y el desarrollo de diversas habilidades. Se consideró fundamental para promover la implicación de los estudiantes la definición de metas, objetivos y reglas claros, la competencia y la interacción (Wijers et al., 2010).

En la Universidad de Sudáfrica, UNISA, se realizó una investigación que describe una prueba diagnóstica a 30 estudiantes universitarios, destinada a determinar la comprensión del estudiante de los conceptos básicos de cálculo de la derivada y la integral; se utilizó el teléfono móvil como método de entrega. El estudio analizó las implicaciones del diseño curricular considerando las funcionalidades didácticas y la estrategia de comunicación que se podrían desarrollar a partir de la incorporación del teléfono móvil a las actividades escolares. Aunque eran limitadas las funcionalidades de los dispositivos móviles hace casi una década atrás, como la manipulación de símbolos matemáticos, los resultados evidencian el potencial de estos dispositivos y la relevancia de las prácticas pedagógicas ante la incorporación tecnológica (Kizito, 2012).

Una investigación para abordar el estudio del triángulo de Pascal (Bray y Tangney, 2015), integró el uso de la cámara, los videos, el software Free SW Tracker y GeoGebra para el desarrollo de actividades de aprendizaje de matemáticas,

combinando el modelo pedagógico Bridge21 y el enfoque de la EMR. El estudio considero 54 estudiantes de nivel secundaria en Irlanda, se concluye que el diseño de las actividades propuestas incrementa la participación y la confianza de los estudiantes en las tareas matemáticas. Sin embargo, aún hay trabajo por hacer para crear actividades contextuales, colaborativas y mediadas por tecnología dentro de un salón de clases convencional.

Un estudio que utilizó la ubicuidad de los dispositivos móviles para su integración en la enseñanza de las matemáticas, propuso un entorno de aprendizaje ubicuo, "sistema de ruta matemática adaptativa U-learning". Este sistema permitía a los estudiantes aprender matemáticas durante su vida diaria en el campus universitario mediante dispositivos móviles. Los resultados experimentales concluyeron que el sistema propuesto incrementó el rendimiento matemático y fomentó un efecto positivo en relación a las instrucciones correctivas en las tareas matemáticas (Shih et al., 2012).

El estudio de una prueba piloto con estudiantes de educación básica en Grecia, utilizó el GPS y la aplicación Object Height en dispositivos móviles para crear un mapa digital, el cual indica una secuencia de sitios preseleccionados de un parque, cada ubicación refiere a un problema matemático diseñado para que el estudiante utilice datos del contexto ambiental. Los estudiantes calculaban las dimensiones de objetos reales con instrumentos convencionales o mediante aplicaciones de medición en la tableta. El estudio concluye que las actividades propuestas promovieron la discusión, la negociación social y la colaboración. Sin embargo, aún se requiere investigación para el desarrollo de una teoría fundamentada sobre la articulación del aprendizaje móvil y la EMR (Fessakis et al., 2018).

Se identificó la aproximación didáctico-pedagógica conocida como la teoría de Van Hiele, que describe el proceso cognitivo del estudiante al aprender geometría plana. Este enfoque simplifica la tarea didáctica para el desarrollo y descripción del razonamiento geométrico. El modelo propone cinco niveles jerarquizados de

razonamiento, en los cuales cada nivel describe el dominio y la comprensión de las nociones y capacidades geométricas en los diversos campos conceptuales de la geometría. Las fases de aprendizaje representan directrices para ayudar a los profesores a incrementar la capacidad de razonamiento de los estudiantes (Pegg, 2018).

Los investigadores de un estudio dirigido a estudiantes de educación básica, desarrollaron una teoría de instrucción fundamentada empíricamente sobre el desarrollo de ángulos y medidas de ángulos a través de un proceso de anticipación, promulgación, evaluación y revisión. Esta teoría involucró la interacción del mundo real mediante la ubicuidad de las tecnologías móviles, utilizó la aplicación Sketchpad Explore iOS con resultados positivos en cuanto a la implicación de los estudiantes con las tareas matemáticas (Crompton, 2015).

Una investigación propuso el desarrollo de la plataforma Science Spots AR que permite crear juegos de aprendizaje de ciencias mediante la narración de historias relacionadas con el contexto. El trabajo describió el desarrollo y evaluación del juego Leometry, que contiene problemas de geometría basados en el modelo de Van Hiele. La evaluación formativa se realizó con 61 niños coreanos de quinto grado de escuela primaria, con resultados positivos a pesar de las deficiencias menores del desarrollo. El estudio concluye sobre las posibilidades de la narrativa, los juegos, la conciencia del contexto y las potencialidades de la realidad aumentada (Laine et al., 2016).

1.1.4. La enseñanza de las matemáticas mediante dispositivos móviles en Latinoamérica

El desarrollo de saberes y la comprensión de conceptos matemáticos tienen una estrecha relación con el contexto cultural de la comunidad, si bien son diversos los estudios que abordan la enseñanza de las matemáticas mediante el uso de dispositivos móviles, como los estudios descritos en este capítulo, es necesario

identificar aquellas investigaciones realizadas en el contexto latinoamericano, ya que como comunidad nos unen ciertas particularidades culturales, sociales y demográficas. Los siguientes estudios refieren a investigaciones de diversos países latinoamericanos como México, Argentina, Santiago de Chile, Brasil y Colombia.

En el 2015, en México, se propuso una arquitectura de software para el desarrollo de aplicaciones de realidad aumentada (RA) basada en componentes disponibles gratuitamente (Barraza et al., 2015); el software proporcionaba una vista detallada de los subsistemas y las tareas que abarcan la creación de una aplicación de RA móvil. La tarea típica de trazar una ecuación cuadrática se seleccionó como un estudio de caso para obtener información de viabilidad sobre cómo la RA podría apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje y observar la reacción del estudiante a la tecnología y la aplicación particular. El estudio piloto se realizó con 59 estudiantes de una escuela universitaria mexicana los cuáles manifestaron percepciones positivas sobre el desarrollo.

En el mismo año, 2015, en Argentina, se desarrolló un proyecto de investigación que analizó las experiencias en el uso de las tecnologías móviles en el aula para la enseñanza del inglés y las matemáticas (Rodríguez et al., 2015), el proyecto refería a conectividad a Internet mediante dispositivos móviles con el programa *Conectar Igualdad*. Aunque el estudio reporta resultados positivos no es concluyente en relación al aprendizaje adquirido por los estudiantes.

En el 2017, en Santiago de Chile, se desarrolló un módulo de aprendizaje habilitado digitalmente, para la enseñanza de conceptos geométricos como el punto, la línea y los polígonos, así como, la magnitud, el área, la longitud y el perímetro (Joo Nagata et al., 2017). El desarrollo consideró el contexto territorial de la región y el contexto temático del área de estudio para definir la arquitectura, la funcionalidad, la interfaz de usuario y la implementación de la aplicación. La verificación empírica de los resultados, la comprensibilidad y efectividad del modelo se analizan mediante los diversos modos de funcionamiento de la

aplicación. La propuesta esta dirija para estudiantes en un contexto educativo formal, por lo que su implementación a gran escala aún debe estudiarse.

En 2017, en Brasil, se llevó a cabo el desarrollo de una aplicación de enseñanza y aprendizaje multiplataforma, con el objetivo de incentivar el estudio de las matemáticas desde los primeros años de educación básica (Nicolete et al., 2017). Las actividades referían a la formación de profesores y cómo integrar la tecnología en el aula mediante el uso de dispositivos móviles. El estudio se llevó a cabo con niños de 5to grado, para el aprendizaje de conceptos de fracciones y matemáticas. Esta investigación formó parte de un proyecto de investigación denominado *Propuesta de Integración Tecnológica en la Enseñanza de Disciplinas STEM en la Educación Básica Pública*, apoyado por el Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, y el proyecto *Uso de experimentación remota en dispositivos móviles para la educación básica en las escuelas públicas* con el apoyo de FRIDA (Fondo Regional para la Innovación Digital en América Latina y el Caribe). Los investigadores concluyen que la investigación en torno a la integración tecnológica en el aula y la capacitación docente son fundamentales para fomentar el interés de los estudiantes por las matemáticas.

En 2018, en Colombia, se desarrolló una aplicación para la enseñanza de operaciones básicas de matemáticas a personas con Síndrome de Down (Tangarife Chalarca, 2018). El artículo reporta resultados positivos con cuatro aprendices para la prueba piloto. Sin embargo, el estudio requiere una población mayor para valorar su pertinencia.

Los estudios descritos en este apartado no son claros en relación al enfoque pedagógico para el diseño de las tareas matemáticas; las investigaciones concluyen que la incorporación tecnológica pertinente requiere un conocimiento sobre cómo se enseñan las matemáticas y el desarrollo de habilidades tecnológicas que permitan la comprensión de las posibilidades de los dispositivos móviles.

Los bajos resultados que persisten en las pruebas estandarizadas para medir el desempeño académico de los estudiantes evidencian la relevancia de contextualizar los procesos de enseñanza en ámbitos específicos para proporcionar sentido a los conocimientos adquiridos en el aula. Sin embargo, los escenarios intencionales de aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas continúan siendo estructuras rígidas, de procesos lentos y roles pasivos, sin espacios de discusión de respuestas ni de validación (Jiménez Espinosa y Gutiérrez Sierra, 2017).

1.1.5. El carácter multifacético de la variable en las tareas algebraicas

Diversas investigaciones coinciden en que la variable posee un carácter multifacético (Blanton et al., 2017; Brizuela et al., 2015; Herrera et al., 2016; Küchemann, 1978; Lucariello et al., 2014; Şahin y Soylu, 2011; Ursini et al., 2005; Usiskin, 1988; Weinberg et al., 2016), es decir, en los problemas algebraicos se presenta con distintas definiciones, referentes y símbolos, por lo que articular una sola concepción de la variable distorsiona los objetivos del álgebra.

Weinberg (2016), sugiere que los prejuicios negativos sobre las matemáticas se deben a la implicación de conceptos abstractos, además de la compleja relación entre pensar y simbolizar.

Küchemann (1978), analiza la tendencia a utilizar el término variable para las letras en aritmética generalizada; en su trabajo propone seis niveles para describir los diferentes usos: letra evaluada, ignorada, como objeto, como específico desconocido, como número generalizado y como variable.

Ursini et al. (2005), señala que los tres usos más comunes de la variable en el álgebra elemental son: la variable como número general, cómo incógnita y en una relación funcional.

En esta línea, las investigaciones han identificado ideas erróneas sobre el concepto variable, y coinciden en que existe una recurrencia en ignorarla, tratarla como la etiqueta de un objeto y la creencia de que refiere a un valor desconocido

fijo (Lucariello et al., 2014; Şahin y Soylu, 2011). Estas ideas están arraigadas conceptualmente, y este razonamiento erróneo incrementa conforme avanzan los niveles educativos.

En el aprendizaje de la variable el espacio semántico adquiere significado gradualmente, es decir, los significados coexisten, evolucionan y cambian; las relaciones entre símbolos y significados se desarrollan progresivamente y según los contextos (Brizuela et al., 2015). Sin embargo, el conocimiento que adquiere el estudiante es de tipo procedimental, lo que limita la capacidad de asociar los significados de los distintos conceptos implicados en una tarea matemática (Herrera et al., 2016).

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Algunas investigaciones han identificado ideas erróneas sobre el concepto variable, y coinciden en que existe una recurrencia en ignorarla, tratarla como la etiqueta de un objeto y la creencia de que refiere a un valor desconocido fijo (Lucariello et al., 2014; Şahin y Soylu, 2011). Estas ideas están arraigadas conceptualmente, y este razonamiento erróneo incrementa conforme avanzan los niveles educativos. En el aprendizaje de la variable el espacio semántico adquiere significado gradualmente, es decir, los significados coexisten, evolucionan y cambian; las relaciones entre símbolos y significados se desarrollan progresivamente y según los contextos (Brizuela et al., 2015). Sin embargo, el conocimiento que adquiere el estudiante es de tipo procedimental, lo que limita la capacidad de asociar los significados de los distintos conceptos implicados en una tarea matemática (Herrera et al., 2016).

La dificultad en la comprensión del concepto variable por parte de los estudiantes está asociada a una falta de estrategias pertinentes para la enseñanza de las matemáticas en el aula, es decir, lo que ocurre en el aula escolar está desvinculado de las propuestas didácticas analizadas por la comunidad científica.

Esta falta de estrategias pertinentes se relaciona también con un uso inadecuado de la tecnología para abordar la enseñanza de conceptos matemáticos. “La tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Este medio puede influenciar positivamente en lo que se enseña y, a su vez, incrementar el aprendizaje de los estudiantes” (NCTM, 2000, p. 24). Sin embargo, la incorporación tecnológica en el aula requiere de diversas consideraciones, como su grado de accesibilidad y usabilidad, así como su uso reflexivo y estratégico para desarrollar los aprendizajes de los estudiantes y estimular su interés.

Debido a las propiedades intrínsecas de los dispositivos móviles, principalmente su ubicuidad y la gestión de contenido multimedia, el evidente incremento en su uso y su alto grado de accesibilidad para los estudiantes de edad escolar básica, estos dispositivos representan potencialidades para su uso en el ámbito educativo, dando origen a nuevos entornos de aprendizaje, como es el caso del aprendizaje móvil.

El aporte de esta investigación refiere al diseño de un entorno de aprendizaje móvil (EAM) para abordar el estudio de la variable, vinculando las propiedades intrínsecas de los dispositivos móviles y las prácticas didácticas propias de las matemáticas.

El diseño pertinente de un EAM requiere el análisis de los componentes que lo caracterizan, debe considerarse también cómo integrar este EAM en el ámbito escolar y cómo valorar los aprendizajes adquiridos por los estudiantes en el entorno.

1.2.1. Preguntas de investigación

¿Cómo abordar el estudio de la variable en la etapa escolar donde el estudiante tiene el primer acercamiento al lenguaje algebraico?

¿Cuáles son los componentes para el diseño pertinente de un EAM para abordar el estudio de la variable?

¿Cómo integrar un EAM para abordar el estudio de la variable en el ámbito escolar que permita valorar los aprendizajes de los estudiantes?

1.2.2. Objetivos de investigación

1.2.2.1. Objetivo general

Diseñar un entorno de aprendizaje móvil para abordar el estudio de los diversos usos de la variable con estudiantes de 12 a 15 años mediante la integración de aplicaciones móviles.

1.2.2.2. Objetivos específicos

OE1. Determinar las particularidades del aprendizaje móvil en el campo de la enseñanza de las matemáticas mediante la revisión sistemática de estudios.

OE2. Desarrollar un entorno de aprendizaje móvil que gestione contenidos interactivos para abordar el estudio de los diversos usos de la variable.

OE3. Valorar la integración de un entorno de aprendizaje móvil al proceso de enseñanza de los diversos usos de la variable.

1.3 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Diversas investigaciones confirman las dificultades recurrentes en la comprensión de los usos de la variable por parte de los estudiantes, problema presente en todos los niveles académicos (Blanton et al., 2017; Brizuela et al., 2015; Herrera et al., 2016; Küchemann, 1978; Lucariello et al., 2014; Şahin y Soylu, 2011; Ursini et al., 2005; Usiskin, 1988; Weinberg et al., 2016). Abordar el estudio de la variable durante la edad escolar donde ocurre el primer acercamiento formal al lenguaje algebraico podría tener implicaciones favorables a corto y largo plazo, ya que la comprensión de este concepto facilitará la adquisición de significados complejos conforme avanzan los niveles educativos.

Es importante vincular los procesos de enseñanza que ocurren en el aula con las estrategias didácticas analizadas por la comunidad científica en torno al estudio de

las matemáticas, debido a la complejidad del proceso de aprendizaje-enseñanza de las matemáticas, es fundamental considerar aspectos cognitivos de representaciones semióticas, dificultades didácticas y obstáculos epistemológicos, además, de las interacciones que ocurren en los entornos interactivos.

En esta línea de ideas, es fundamental considerar que el contexto actual que vivimos ha transformado los entornos educativos presenciales a entornos educativos mediados por la tecnología. Sin embargo, esto ha ocurrido de manera emergente y con evidentes carencias sobre la pertinente incorporación de elementos tecnológicos.

El aporte de esta investigación refiere al diseño de un entorno de aprendizaje móvil (EAM) para abordar el estudio de la variable, vinculando las propiedades intrínsecas de los dispositivos móviles y las prácticas didácticas propias de las matemáticas. Las particularidades de un EAM facilitan la recolección y análisis de datos sobre el proceso de aprendizaje de estudiantes en edad escolar básica, y permiten la gestión de tareas con distintos grados de dificultad para un seguimiento continuo de los aprendizajes adquiridos.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este capítulo se abordan los conceptos que sustentan la presente investigación, que refieren a la categorización y diferenciación de un entorno de aprendizaje móvil, así como de sus componentes metodológicos.

También se describe el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), las prácticas matemáticas, los significados de los objetos matemáticos y la noción de idoneidad didáctica.

Al cierre del capítulo se aborda el carácter multifacético de la variable, concretamente dos de sus usos, la variable como número general y como incógnita.

2.1 ENTORNO DE APRENDIZAJE MÓVIL (EAM)

En la presente investigación se utilizaron los términos de *aprendizaje móvil* y *aprendizaje ubicuo* para referir a aspectos técnico-didácticos en relación al uso de dispositivos móviles en un proceso de enseñanza. El presente estudio parte de la definición del concepto *aprendizaje móvil* propuesta por Crompton (2013, p. 4): “aprendizaje en múltiples contextos, a través de interacciones sociales y de contenido, utilizando dispositivos electrónicos personales”.

El aprendizaje debe ser significativo como un factor de la educación formal o informal (Fessakis et al., 2018), considerando las propiedades de los dispositivos móviles disminuye la dependencia de ubicaciones fijas (Juhan y Halkias, 2017) lo que permite la creación de nuevos contextos de aprendizaje (Joo Nagata et al., 2017; Schuck, 2016) que se enriquecen gracias a las características del contenido multimedia dando una nueva dimensión al currículo escolar en el contexto educativo formal (Handal et al., 2016), el aprendizaje puede ocurrir en un contexto informal cuando se aprovechan las oportunidades que ofrece la tecnología móvil (Ludwig y Jesberg, 2015; Rodríguez et al., 2015).

La noción del aprendizaje móvil posee componentes que han sido analizados en los estudios de investigación para la enseñanza de las matemáticas, que refieren al contexto, la interacción social y el contenido. La posibilidad de que el aprendizaje ocurra en diversos contextos tiene relevancia con el hecho de que cuando se enseña matemáticas, “la práctica de sala de clase puede considerarse como un sistema de adaptación del alumno a la sociedad” (D’Amore, 2006, p. 27), hacer matemáticas refiere a una actividad humana, la cual se desarrolla en un contexto, utiliza diversos instrumentos y aporta técnicas para el logro de tareas específicas (Chevallard, 1992).

El planteamiento y resolución de problemas matemáticos fomenta la comunicación, discusión y validación de soluciones, por lo que la interacción social adquiere relevancia en la construcción de conocimientos. El diálogo entre profesor-estudiante permite identificar la adquisición de significados erróneos, falsas conclusiones y la resolución oportuna de dudas (Alsina y Domingo, 2010).

El aprendizaje móvil permite la interacción de contenido multimedia, que para el trabajo matemático refiere a conceptos como procedimientos, algoritmos, proposiciones, demostraciones, problemas o lenguaje. Para la enseñanza de las matemáticas es relevante el contenido teórico y el modo en el que éste se transmite y cómo lo adquiere el estudiante (Radford, 2004).

2.1.1. Categorización del aprendizaje móvil en la enseñanza de las matemáticas

El uso de la tecnología móvil en la educación considera el aprendizaje electrónico (e-learning) mediante dispositivos móviles para crear una experiencia educativa ubicua (Nicolette et al., 2017). El aprendizaje electrónico es un enfoque no presencial, con énfasis en el acceso a contenidos y actividades de formación a través de Internet, que promueve la interacción y la comunicación entre los

participantes. Está orientado a la adquisición de destrezas en un contexto social mediante un ecosistema tecnológico, en el cual los actores docentes contribuyen en garantizar la calidad de los diversos factores implicados, principalmente el diseño pedagógico.

Una característica fundamental del aprendizaje electrónico es la capacidad de autorregulación del estudiante en su proceso de aprendizaje, ya que debe definir objetivos y estrategias considerando atributos como la personalización, la interacción, la autenticidad, el andamiaje y la reflexión. En este enfoque la autonomía del estudiante es un factor crucial para el logro de metas (Salvat, 2018), ya que en el proceso de enseñanza de las matemáticas los sujetos dialogan y regulan las expresiones y acciones ante ciertos problemas matemáticos, se crean sistemas de prácticas compartidas dentro de un contexto específico, pero también surgen conocimientos subjetivos en relación con los pensamientos y acciones del estudiante (J. Godino, 2003).

La comprensión de “la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su dependencia de los contextos y situaciones-problemas de cuya resolución provienen” (J. Godino, 2003, p. 22) es fundamental en el proceso de aprendizaje, lo que evidencia la relevancia de las características que identifican al aprendizaje móvil en la enseñanza de saberes matemáticos.

- Creación de contextos. La portabilidad, la integración de un Sistema de Posicionamiento Global (GPS) y el acceso a Internet de los dispositivos móviles, han permitido que su integración en el ámbito educativo genere entornos de aprendizaje personalizados, conectados y en colaboración. La creación de contextos es una característica relevante del aprendizaje móvil en la enseñanza de las matemáticas, permite explorar el proceso de aprendizaje mediante situaciones cotidianas o problemas contextuales para formar relaciones formales y estructuras abstractas. La pertinencia en la enseñanza matemática está relacionada con el grado de adecuación del

proceso de estudio en las condiciones del entorno del estudiante dentro y fuera del aula escolar.

- Interacción social. Para el aprendizaje móvil la interacción social refiere a la comunicación entre los diversos agentes involucrados en un entorno de aprendizaje; en la enseñanza de las matemáticas la argumentación, los acuerdos, la identificación de conceptos erróneos y el diálogo son fundamentales en entornos colaborativos y se promueve su práctica en el aula escolar.
- Contenido multimedia. Refiere a aquello que utiliza varios medios de manera simultánea en la transmisión de información. El contenido multimedia, por lo tanto, puede incluir fotografías, vídeos, sonidos y texto. Posibilita la diversidad en los contenidos, las actividades didácticas y los métodos de evaluación; crea nuevas formas de interacción y comunicación entre los agentes involucrados; estos medios interactúan con problemas, representaciones, definiciones, proposiciones y argumentaciones matemáticas. La pertinencia del proceso de aprendizaje está relacionada con la disponibilidad de los recursos materiales y su adecuación con los significados pretendidos.
- Usabilidad. En el aprendizaje móvil la interacción entre los sujetos y los contenidos compartidos ocurre a través de la interfaz de los dispositivos móviles, este proceso es inherente a la experiencia de usuario, que describe la necesidad del diseño de un entorno eficiente para la correcta lectura de la información, lo que implica que en un entorno de aprendizaje se evitan distractores; en la enseñanza de las matemáticas deben considerarse el contenido teórico y el método para transmitirlo, por lo que la característica de usabilidad refiere al diseño de actividades didácticas mediante la colaboración de docentes expertos en el campo disciplinar y desarrolladores experimentados.

2.1.3 Diferenciación del aprendizaje móvil y el aprendizaje ubicuo en la enseñanza de las matemáticas

El *aprendizaje móvil* posibilita la interacción de los diversos agentes de un proceso de aprendizaje mediante diversos contextos y situaciones cotidianas, esto debido a las características inherentes de los dispositivos móviles que permiten la comunicación en todo momento y lugar. Esta ubicuidad propicia la creación de entornos de aprendizaje adaptados al contexto social y educativo que viven los estudiantes. Estas posibilidades de acceso e interacción entre los sujetos y los contenidos han derivado en el diseño de entornos de aprendizaje que consideran contextos en los que los participantes están inmersos, es esta deliberada adaptación de la propuesta de enseñanza con el contexto lo que diferencia al aprendizaje ubicuo del aprendizaje móvil. Por lo que en un ambiente de aprendizaje ubicuo el estudiante se encuentra totalmente inmerso en el proceso de aprendizaje e incluso podría aprender sin ser completamente consciente del proceso (Zhao et al., 2010).

El *aprendizaje ubicuo* crea una experiencia didáctica “en la que el estudiante está interactuando con un entorno del mundo real mientras usa una tecnología móvil para apoyar su aprendizaje” (Borba et al., 2016, p. 20), por lo que la pertinencia del aprendizaje ubicuo depende en gran medida del contexto circundante de los estudiantes.

El *aprendizaje ubicuo* se fundamenta en los principios del aprendizaje adaptativo, las potencialidades de la informática ubicua y la flexibilidad de los dispositivos móviles; centra la atención en las necesidades individuales y los estilos de aprendizaje del estudiante para el diseño pertinente de escenarios educativos (Joung-Souk, 2009). Para facilitar el proceso de aprendizaje se considera tanto para el *aprendizaje móvil* como para el *aprendizaje ubicuo* el monitoreo de la actividad, la interpretación de resultados y el análisis de requisitos, sin embargo, el

aprendizaje ubicuo pone énfasis en las preferencias del estudiante para adaptar el contexto de aprendizaje.

El aprendizaje ubicuo posee potencialidades para la enseñanza de las matemáticas considerando que la apropiación de los conocimientos matemáticos se atribuye a la relación de éstos con la realidad cultural de los estudiantes (J. Godino, 2003). La Tabla 1 ilustra las características que diferencian a ambos tipos de aprendizaje, esta diferencia se define por la propiedad de ubicuidad de los dispositivos móviles, lo que permite el acceso al contenido didáctico en todo momento y lugar, y con ello, se facilita la creación de múltiples contextos de aprendizaje. Sin embargo, el aprendizaje ubicuo tiene el objetivo de crear contextos inmersivos de aprendizaje que permitan la interacción del estudiante con el mundo real y con su contexto circundante.

Table 1. Diferencia entre aprendizaje móvil y aprendizaje ubicuo

Características	Aprendizaje	
	Móvil	Ubicuo
Acceso al contenido didáctico en todo momento y lugar	X	X
Creación de múltiples contextos de aprendizaje	X	X
Contexto de aprendizaje inmersivo		X
Interacción con el mundo real		X
Contacto con el contexto circundante		X

2.1.4. Componentes metodológicos identificados para la enseñanza de las matemáticas en un entorno de aprendizaje móvil

Los estudios no fueron concluyentes en cuanto a la metodología para abordar la enseñanza de las matemáticas en un entorno de aprendizaje en el que las interacciones sociales y de contenido multimedia ocurren mediante los dispositivos móviles. Sin embargo, fue posible identificar componentes metodológicos

considerando como objetivo la enseñanza de saberes matemáticos. Estos componentes son:

- Definición del fundamento pedagógico. La Didáctica de las Matemáticas en el ámbito de la investigación estudia los factores que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y el desarrollo de programas de mejora de estos procesos. Para el diseño de un entorno de aprendizaje móvil en la enseñanza de este campo disciplinar será fundamental comenzar por la definición del enfoque pedagógico ante el uso de la tecnología, para garantizar que las normas didácticas implementadas tienen fundamento en un marco teórico, resultado de la investigación y análisis de la naturaleza de los saberes matemáticos.
- Elección del eje temático. La elección de un eje temático deberá considerar el análisis de los contenidos matemáticos que se han de problematizar, así como su desarrollo cultural y personal en los sistemas didácticos. Este proceso permitirá la definición de objetivos de aprendizaje factibles y la pertinente evaluación sobre el proceso de aprendizaje, es decir, evaluar si el conocimiento transmitido corresponde con el conocimiento adquirido.
- Alfabetización tecnológica del docente. En un entorno de aprendizaje móvil, por lo general en contextos educativos formales, la alfabetización tecnológica del docente adquiere relevancia y es fundamental para el diseño de entornos educativos con consideraciones pedagógicas. Se demanda del profesor de matemáticas una profunda reflexión sobre el significado de los contenidos matemáticos y el conocimiento sobre el uso de herramientas tecnológicas que permitan modificar, enriquecer y diversificar su quehacer académico mediante recursos de su contexto cotidiano. Deben definirse las habilidades digitales en relación con el currículo de cada nivel educativo, además de considerar la disciplina

académica como eje fundamental en un proyecto de desarrollo tecnológico (Ramírez Martinell et al., 2018).

- Diseño de interfaz de usuario. El desafío en la enseñanza de las matemáticas es lograr en el estudiante el desarrollo de habilidades de pensamiento y el uso de herramientas para resolver problemas de su contexto cotidiano mediante modelos matemáticos (Aragón et al., 2009), un entorno de aprendizaje móvil en la enseñanza de las matemáticas deberá considerar que el acceso a los contenidos mediante los dispositivos móviles requiere del diseño y desarrollo eficaz de interfaces de usuario, considerando las características de los recursos que se utilizaran para transmitir los significados matemáticos. Un diseño eficiente en la interfaz facilitará la interacción entre los sujetos del entorno y el contenido multimedia, por lo que es fundamental el trabajo colaborativo de docentes y diseñadores.

El diseño pertinente de aplicaciones móviles educativas requiere del trabajo colaborativo de la comunidad científica, ingenieros de software y diseñadores gráficos, ya que deben considerarse modelos teóricos propios de la DdM, un entorno eficiente que facilite la interacción del usuario y el uso de elementos multimedia adecuados, evitando la reproducción de estereotipos culturales, étnicos o de género. En este contexto, la valoración de las aplicaciones móviles educativas refiere a cuatro aspectos: contenido educativo, características de diseño, funcionalidad y características técnicas (Papadakis et al., 2017).

2.2. ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS (EOS)

La Didáctica de las Matemáticas (DdM) se ha consolidado a lo largo de los años gracias al trabajo de colectivos académicos y de la comunidad científica. Esta disciplina está vinculada con la epistemología, la psicología, la pedagogía y la

matemática, por lo que requiere supuestos teóricos divergentes cuya utilidad no es del todo obvia (D'Amore y Godino, 2007).

El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), busca articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas en relación al conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje (J. Godino, 2003); surge como una reflexión metadidáctica que ha llevado a formular nociones con alto grado de generalidad.

En el EOS el término instrucción refiere a la articulación entre las actividades de enseñanza y aprendizaje orientadas hacia el logro de objetivos educativos específicos, condicionadas por el entorno y con el soporte del uso de medios tecnológicos determinados. La Figura 1 ilustra la naturaleza relacional y multidimensional de la enseñanza de las matemáticas, es decir, los diversos agentes de este proceso tienen relación unos con otros, y esta relación es la que permite su comprensión. El docente proporciona el contenido y gestiona las interrelaciones de los estudiantes. Las percepciones de los estudiantes, su participación y aprendizaje surgen de estas relaciones, por lo que se entiende que la enseñanza es multidimensional.

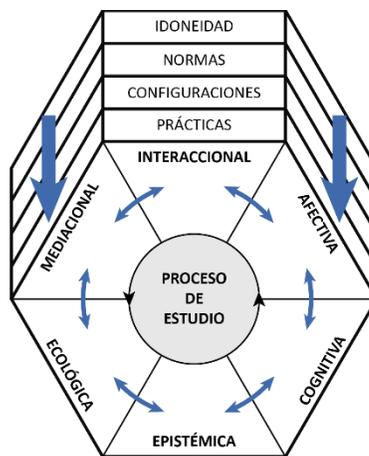


Figura 1. Facetas y niveles del análisis didáctico. Fuente: (Godino, 2013)

2.2.1. Nociones de trayectoria didáctica e idoneidad didáctica

El EOS considera que el análisis didáctico transita desde la situación-problema a la configuración epistémica-cognitiva y hacia la configuración didáctica que involucra sujetos, recursos y las interacciones entre componentes. Esto implica que el análisis centra su atención en la secuencia de configuraciones didácticas, es decir, en el crecimiento del proceso educativo en el área de las matemáticas.

El EOS define estas configuraciones didácticas mediante la noción de trayectoria didáctica, la cual refiere al proceso de gestión de los significados implementados en torno a un objeto matemático específico, considerando configuraciones de tipo cooperativo, dialógico y magistral (J. D. Godino et al., 2008).

Durante una trayectoria didáctica es posible observar la interacción entre los agentes educativos, es decir, entre docente-alumno, alumno-alumno y alumno-medios; para el EOS es fundamental analizar las prácticas que emergen de dichas interacciones, así como, describir el uso y significado de los medios, recursos y normas que regulan estas interacciones durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para facilitar este análisis, el EOS considera la noción de idoneidad didáctica, mediante la cual es posible realizar un análisis preliminar y retrospectivo de la trayectoria didáctica implementada.

La noción de idoneidad didáctica en el EOS, sus dimensiones y criterios, refiere a herramientas que permiten una didáctica normativa orientada a la intervención pertinente en el aula. La Figura 2 sintetiza las características de esta noción. El hexágono regular representa un grado máximo de idoneidades parciales, el hexágono irregular indica las idoneidades efectivas alcanzadas en el proceso de estudio. Las idoneidades epistémica y cognitiva se consideran la base del proceso debido al hecho de que diversos conceptos pueden ser aprendidos mediante diferentes apoyos para su aprendizaje (J. Godino et al., 2006).

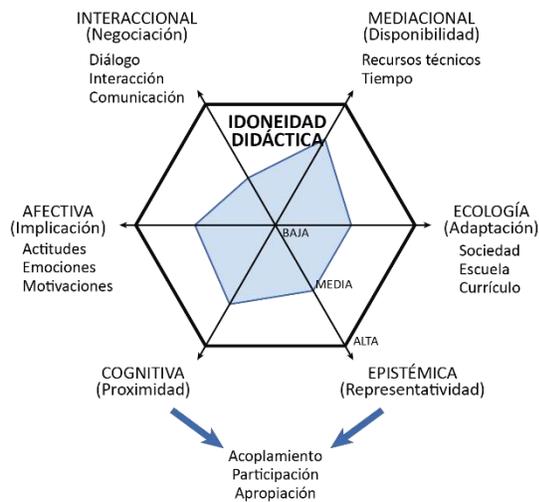


Figura 2. Criterios de idoneidad didáctica del EOS. Fuente: (Godino et al., 2006)

Según Godino (J. Godino, 2013) la idoneidad didáctica refiere a la estructuración de los siguientes seis componentes:

- Idoneidad epistémica. Grado de representatividad de significados institucionales respecto con un significado de referencia.
- Idoneidad cognitiva. Grado en que los significados se encuentran en la zona de desarrollo potencial del estudiante, considerando también la proximidad de los significados personales logrados con los significados pretendidos.
- Idoneidad interaccional. Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado para favorecer la autonomía en el aprendizaje.
- Idoneidad mediacional. Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Idoneidad afectiva. Grado de implicación del alumnado en el proceso de estudio, relacionada con factores que dependen de la institución, del alumno y de su historia escolar previa.

- Idoneidad ecológica. Grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo de la institución, la sociedad y los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

En el EOS la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje reúne ciertas características que permiten considerar este proceso como óptimo para continuar la “adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno)” (Breda et al., 2018).

2.3. LA VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL Y COMO INCÓGNITA

En los problemas algebraicos la variable esta presente desde el planteamiento del problema hasta su solución e interpretación, lo que implica complejidad epistémica, didáctica y cognitiva, por ello, la importancia de precisar sus diversos usos. Son diversas las investigaciones en las que se aborda el uso de la variable como incógnita y como número general, considerando como punto de partida la relación entre aritmética y álgebra hasta transitar al proceso de algebrización.

Silva (2018) identifica problemas en los cuales el tratamiento numérico es suficiente o cuando el álgebra se concibe como aritmética generalizada, es decir, el uso de la letra en el cálculo algebraico deja de ser una etiqueta y se utiliza como incógnita, si bien su uso se restringe con el cálculo numérico como herramienta, es posible una aproximación a expresiones algebraicas que corresponderían a propiedades aritméticas. Por lo tanto, aunque permanecen tratamientos en el registro numérico, se identifican ecuaciones mediante la conversión del lenguaje natural o figural para representar los problemas planteados. Además del uso de la variable como incógnita, define el uso de la variable como número generalizado, lo que implica que el signo de igualdad de una ecuación represente una relación de equivalencia.

Domínguez (2005) identifica el uso de la variable como incógnita cuando implica la representación simbólica de una cantidad con valores específicos, los cuales pueden calcularse mediante una ecuación. La variable como número generalizado refiere a expresiones para representar patrones o secuencias con valores constantes.

Para Marino e Isla (2018) el uso de la variable como incógnita implica la posibilidad de interpretar a la variable como número desconocido cuyo valor se determina mediante el contexto de una situación propuesta. Por otro lado, el uso de la variable como número general implica conceptualizar a la variable como un número cualquiera, que permita obtener expresiones que generalicen secuencias o reglas en torno a una situación particular.

Para la presente investigación se consideraron dos usos de la variable algebraica, su uso como incógnita específica y su uso como número general (Ursini et al., 2005).

Para la comprensión del uso de la variable como incógnita específica, se espera que el estudiante sea capaz de reconocer la presencia de algo desconocido que puede ser determinado, para lo cual hará uso de operaciones aritméticas que le permitan determinar el valor de la variable. En una secuencia incompleta de números, por ejemplo, se identifica el carácter de incógnita que tiene el número faltante en la secuencia, antes de ser determinado.

La variable como número general refiere a un valor indeterminado. Su uso requiere la capacidad de utilizar símbolos para representar una situación general, es decir, deben interpretarse los símbolos involucrados como números generales, los cuales representan cantidades indeterminadas que no es posible o no es necesario determinar. La variable como número general aparece en expresiones abiertas, en formulas generales, como parámetros en las ecuaciones y en ecuaciones generales.

CAPITULO 3. MÉTODO DE INVESTIGACIÓN: DISEÑO Y ETAPAS

En este capítulo se describe el método de investigación implementado, considerando el diseño y las etapas desarrolladas. Se describe el planteamiento cualitativo de la investigación mediante el diseño e implementación de dos trayectorias didácticas considerando las fases propuestas por el enfoque de la Investigación Basada en el Diseño (IBD). En este apartado se distinguen las cuatro etapas de la investigación, y su confluencia con las fases de análisis, diseño, desarrollo e implementación de la IBD.

En la etapa 1 se abordó el análisis del aprendizaje móvil en la enseñanza de las matemáticas. En la etapa 2 se implementó la primera trayectoria didáctica en aula. En la etapa 3 se llevó a cabo la segunda trayectoria didáctica en un entorno de aprendizaje móvil (EAM). Durante la etapa 4 de la investigación se diseñó la propuesta de un EAM para abordar el estudio de la variable.

A continuación, se describe el desarrollo de los ciclos de la IBD considerando los recursos, herramientas y técnicas utilizadas, así como, los resultados durante la validación de cada ciclo, los cuales posibilitaron la evolución de la propuesta de la presente investigación. Los resultados presentados en este capítulo refieren a aspectos cuantitativos tales como análisis de atributos para identificar patrones, esquemas de procedimientos matemáticos, tipos de recursos multimedia utilizados y puntuaciones obtenidas por los participantes. En los capítulos 4 y 5 se profundiza en la preparación del experimento, la experimentación y el análisis retrospectivo de las trayectorias didácticas mediante los criterios e indicadores de la noción de idoneidad didáctica.

3.1. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

La IBD refiere a una aproximación metodológica que centra su estudio en el aprendizaje en contextos escolares, ocupándose de problemáticas identificadas por los profesionales en la práctica. Debe ser recursiva, lo cual supone que los procesos de análisis, diseño y desarrollo, implementación y validación, ocurren en ciclos sucesivos; permite la reflexión oponiéndose a la idea de que los problemas identificados tienen soluciones preconcebidas (De Benito y Salinas, 2016).

Para el desarrollo de este trabajo, se utilizó la aproximación metodológica de la Investigación Basado en el Diseño (IBD) y su articulación con el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2013). Sobre el EOS, concretamente, utilizamos la noción de idoneidad didáctica (Breda et al., 2018), que refiere a una herramienta descriptivo-explicativa que permite valorar la pertinencia de una intervención efectiva en el aula, y que considera de manera sistémica seis facetas involucradas (según el EOS) en los procesos de estudio de las matemáticas, dando paso así a idoneidades parciales que permiten valorar procesos de estudio de temas curriculares específicos (Godino, 2011; Godino, Bencomo, et al., 2006).

En esta investigación se abordó el estudio del concepto variable en estudiantes mexicanos de nivel secundaria (11-12 años). La Figura 3 ilustra la configuración metodológica utilizada, describe la relación entre las etapas de la investigación y las fases que determinan un ciclo de la IBD. En el eje horizontal se definieron las etapas de la investigación, que fueron cuatro y que se describen a detalle en los siguientes subtemas.

En el eje vertical se ilustran las tres fases de la IBD (Godino et al., 2013), las cuáles son recursivas para cada ciclo, es decir, las fases de análisis, diseño y desarrollo, implementación y validación son cíclicas, con el propósito de *incrementar* las intervenciones educativas implementadas.

Para esta investigación el término *incremento* refiere a una propuesta operativa de un proceso de estudio, es decir, los resultados obtenidos al término de un ciclo de la IBD guían la toma de decisiones en relación al refinamiento de las tareas matemáticas propuestas, a este refinamiento lo definimos como *incremento*. La propuesta operativa se valida contrastando el grado máximo de idoneidades parciales definidas en la etapa de Diseño y desarrollo contra las idoneidades efectivas alcanzadas durante la etapa de implementación.

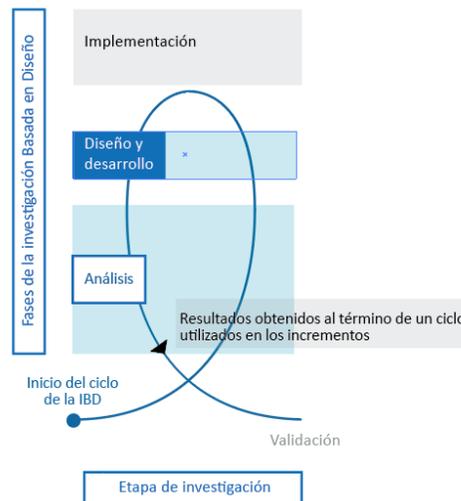
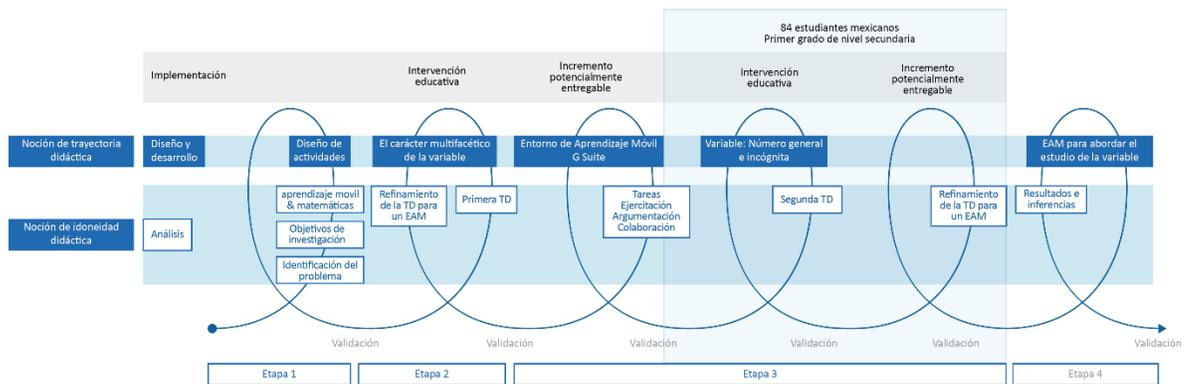


Figura 3. Descripción gráfica de las etapas de la investigación y las fases de un ciclo de la IBD

La Figura 4 muestra el esquema general de las cuatro fases de la presente investigación en relación con las fases de la IBD. La aproximación metodológica de la IBD se articuló con el EOS mediante la noción de idoneidad didáctica en la fase de análisis, y la noción de trayectoria didáctica en la fase de diseño y desarrollo. La fase de implementación consideró las trayectorias didácticas y los incrementos del proceso de estudio.



*EAM: Entorno de aprendizaje móvil, *EOS: Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, *TD: Trayectoria didáctica
 Figura 4. Etapas de desarrollo de la Investigación Basada en el Diseño. Fuente: elaboración propia basada en (De Benito y Salinas, 2016)

En la etapa 1 de la investigación se definió el problema de investigación, que refiere a la recurrente dificultad por parte de los estudiantes en la comprensión del concepto variable durante la etapa de educación básica, dificultad relacionada con una falta de estrategias pertinentes para abordar el estudio de las matemáticas en el aula y una incorrecta incorporación de la tecnología en las tareas matemáticas. En esta etapa se esquematizó evidencia empírica sobre la enseñanza de las matemáticas en un entorno de aprendizaje móvil que permitiera identificar componentes metodológicos, tecnológicos y pedagógicos.

En la etapa 2 de la investigación se llevó a cabo la primera intervención educativa en aula con el propósito de validar la pertinencia de las tareas matemáticas propuestas. En esta etapa se identificó la relevancia de la interacción para abordar el estudio de las matemáticas fomentando el diálogo, el análisis del proceso de resolución de una tarea matemática, y la validación de los aprendizajes adquiridos por parte de los estudiantes.

Durante la etapa 3 de la investigación se desarrolló un EAM el cuál gestionó contenido multimedia mediante las herramientas de G Suite de Google, Genially y Quizizz, con el propósito de abordar el estudio de la variable. Fue la etapa más extensa de la investigación, y consideró tres ciclos de la IBD.

En la etapa 4 se valoró la integración de un EAM al proceso de enseñanza de los diversos usos de la variable. Se hace la propuesta de seis tipos de tarea en relación a potencialidades de un EAM, las cuales son: ejercitación con respuestas múltiples, ejercitación con respuesta abierta, compartir procedimiento, discusión, refuerzo y colaboración.

En los siguientes subtemas se definen, para cada una de las etapas de la investigación, los recursos, herramientas y técnicas utilizadas en cada ciclo de la IBD, así como los resultados obtenidos al término de cada ciclo, los cuales permitieron el desarrollo de los incrementos para el refinamiento de la propuesta de un EAM para abordar el estudio de la variable.

3.1.1. Etapa 1: El aprendizaje móvil en la enseñanza de las matemáticas

En esta sección se describen los recursos, herramientas y técnicas utilizadas durante la etapa 1 de la investigación, así como, los resultados obtenidos al término del ciclo, los cuáles guiaron la toma de decisiones en relación al desarrollo del incremento del siguiente ciclo. Estos componentes se ilustran en la Figura 5, en la que se esquematiza la revisión sistemática de 77 artículos científicos, la definición de una estrategia de búsqueda avanzada, y el análisis cuantitativo de la producción científica en torno a la enseñanza de las matemáticas utilizando dispositivos móviles.

La figura 8 muestra como resultados:

- La relevancia de implementar estrategias didácticas especializadas en la enseñanza de las matemáticas y la validación de los aprendizajes adquiridos.
- La necesidad de trabajar con estudiantes de educación básica, es decir, durante sus primeros años de formación escolar.
- Las posibilidades que presentan los dispositivos móviles, como la diversidad de recursos multimedia y de aplicaciones móviles.

Estos resultados definieron la toma de decisiones para el diseño del incremento en la siguiente etapa de la investigación. A continuación, se describe el desarrollo de la etapa 1 de la presente investigación.

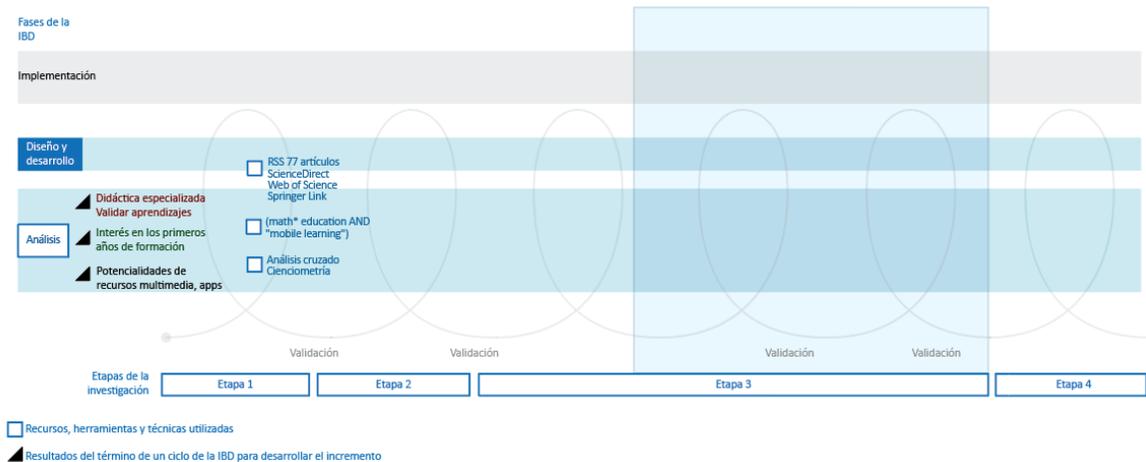


Figura 5. Etapa 1: Esquema de recursos, herramientas y técnicas utilizadas y de resultados al término de un ciclo de la IBD

En la etapa 1 de la investigación se esquematizó evidencia empírica reportada en la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en un entorno de aprendizaje móvil (EAM) con el objetivo de identificar componentes metodológicos, tecnológicos y pedagógicos que sirvieran como fundamento para el diseño de una propuesta que abordará el estudio de la variable.

Se determinaron los siguientes criterios de inclusión para seleccionar las publicaciones relevantes en relación al objetivo del estudio:

- CI1 El documento se centra en la enseñanza de las matemáticas mediante el uso de dispositivos móviles.
- CI2 El documento es un artículo de investigación con objetivos explícitos, preguntas de investigación, metodología de recolección de datos, análisis de datos y resultados.
- CI3 La publicación debió realizarse en el periodo del 2010-2019, considerando que los primeros estudios sobre el aprendizaje móvil datan del 2010 (Borba et al., 2016).

Se excluyeron los artículos que cumplían con al menos uno de los siguientes criterios:

- EC1 El artículo refiere al uso de dispositivos móviles, pero no con fines educativos.
- EC2 El artículo refiere a la enseñanza de un eje temático diferente de las matemáticas.

Los términos de búsqueda se seleccionaron utilizando dos ámbitos como punto de partida: *educación matemática* y *aprendizaje móvil*, por lo que los términos incluidos en los buscadores fueron: (*math* education AND "mobile learning"*), solamente en el caso de *Springer Link* fue posible limitar la búsqueda a una disciplina específica que fue Educación. Para todos los casos se consideró año de publicación y tipo de documento.

Se obtuvieron 90 artículos de *ScienceDirect*, 73 de *Web of Science* y 188 de *Springer Link*, para un total de 351 artículos. Posteriormente, se llevó a cabo la lectura de los resúmenes para determinar cuáles serían analizados quedando un total de 77 artículos para su lectura.

El proceso de análisis se realizó mediante la codificación de las categorías en *Microsoft Excel* y el análisis cruzado de los atributos, considerando las fases que describe la Tabla 1:

- Fase 1: Codificación y definición de los atributos de clasificación de los estudios: año de publicación, metodología de investigación, instrumentos de recolección de datos, población afectada, distribución geográfica de los estudios, enfoques pedagógicos, ejes temáticos abordados y elementos tecnológicos utilizados.
- Fase 2: Los estudios se codificaron de acuerdo con los atributos de clasificación de la fase 1 a través de un análisis de contenido en *Microsoft Excel*.

- Fase 3: Clasificación de los resultados reportados: favorable (si se reporta evidencia de un progreso significativo), logrado (si los objetivos del estudio se lograron) y no concluyente (si el estudio no era claro o no proporcionó información sobre los resultados anticipados).
- Fase 4: Se realizó un análisis cruzado de los atributos de clasificación mediante el software Pajek considerando la Cienciometría (Bracho-López et al., 2012).

Tabla 1. Fases para esquematizar la evidencia empírica en to mo al aprendizaje móvil y la enseñanza de las matemáticas

Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
Codificación y definición de los atributos de clasificación	Análisis de contenido en Microsoft Excel	Clasificación de los resultados reportados	Análisis cruzado de los atributos de clasificación

3.1.1.1. Análisis cruzado de los atributos de clasificación

Para el análisis de los atributos se utilizó el software *Pajek* para identificar patrones mediante los datos recopilados y sus relaciones, con base en la Cienciometría, que es un campo disciplinar que provee métodos e instrumentos para conocer una visión global de una disciplina científica a través del análisis de indicadores (Bracho-López et al., 2012); para este estudio nos referimos a dos ámbitos, el aprendizaje móvil y la enseñanza de las matemáticas.

La Figura 6 refiere a la relación entre los objetivos de los estudios, las metodologías de investigación y los instrumentos de recolección de datos. Los objetivos de percepción¹ e impacto² fueron los más recurrentes, mientras que diseño³ presentó el menor porcentaje. Se observó que el objetivo de estrategia⁴ es

¹ Refiere a estudios que trataron de identificar y analizar las percepciones de los participantes de diversos contextos en un EAM.

² Refiere a estudios que evidencian los factores positivos y negativos de un EAM.

³ Refiere a estudios que implementaron y evaluaron estrategias para la enseñanza de las matemáticas mediante un EAM.

⁴ Refiere a estudios que desarrollaron o propusieron metodologías, modelo o estrategias didácticas para el diseño de un EAM.

menos recurrente que el de percepción, pero es mayor la asociación con metodologías de investigación diversas. La encuesta fue el instrumento más utilizado, se empleó en todas las metodologías identificadas, lo que evidencia el interés por aspectos cualitativos del aprendizaje móvil en la enseñanza de las matemáticas.

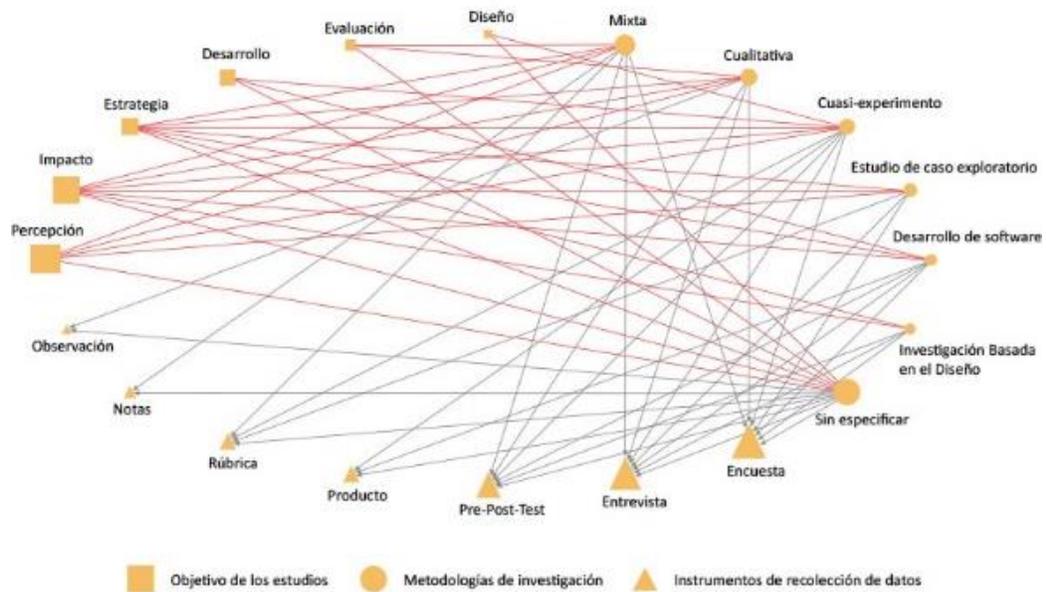


Figura 6. Relación entre los objetivos de los estudios, las metodologías de investigación y los instrumentos de recolección de datos identificados

La Figura 7 refiere a la relación entre el contexto educativo de los estudios, las poblaciones afectadas y los ejes temáticos identificados. Primaria y secundaria fueron los niveles académicos más recurrentes, mientras que el contexto informal el de menor porcentaje. Se observó un particular interés en los estudiantes, y los ejes temáticos de geometría y aritmética son recurrentes en los niveles de educación básica, lo que muestra que existe un interés por investigar la enseñanza de las matemáticas en un entorno de aprendizaje móvil en la educación formal, principalmente en los primeros años de formación.

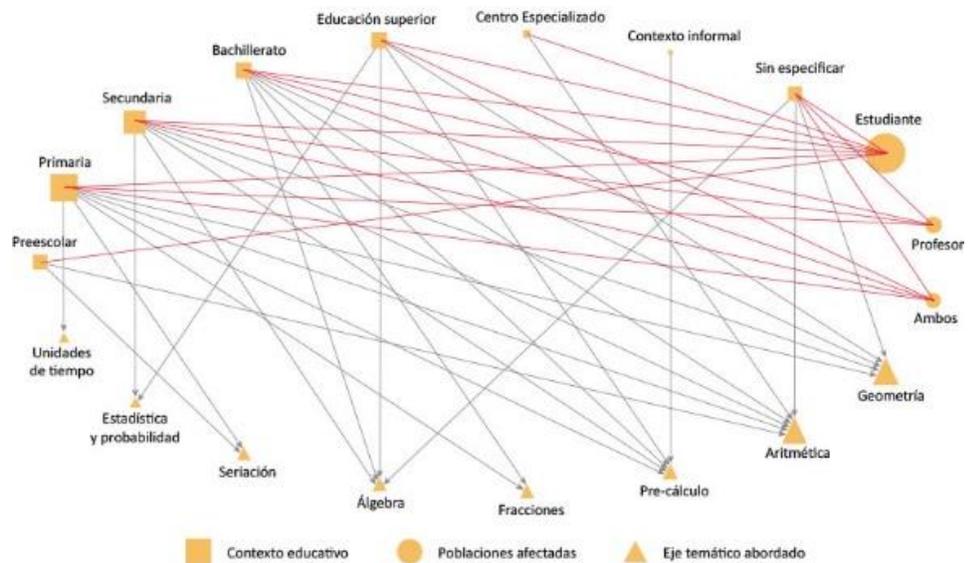


Figura 7. Relación entre el contexto educativo, las poblaciones afectadas y el eje temático abordado

La Figura 8 refiere a la relación entre los enfoques pedagógicos utilizados para la enseñanza de las matemáticas, los elementos tecnológicos utilizados y los resultados informados. La mayoría de los estudios no especificaron el enfoque pedagógico que fundamentó la enseñanza de las matemáticas, mientras que enfoques propios de la instrucción matemática como Educación Matemática Realista y el Modelo Van Hiele presentan porcentajes inferiores al aprendizaje basado en juego. Se observó que el uso de apps es significativamente mayor a recursos como multimedia, GPS y realidad aumentada. La mayoría de los resultados fueron favorable⁵ y logrado⁶, lo que sugiere que un entorno de aprendizaje móvil es una posibilidad viable para cambios curriculares y metodológicos en la enseñanza de las matemáticas.

⁵ Si se informó que los resultados del estudio tuvieron una mejora académica significativa, un cambio relevante o actitudes positivas (cómo interés o compromiso) en relación con la enseñanza de las matemáticas mediante un entorno de aprendizaje móvil.

⁶ Si se informó que los objetivos declarados del estudio se lograron.

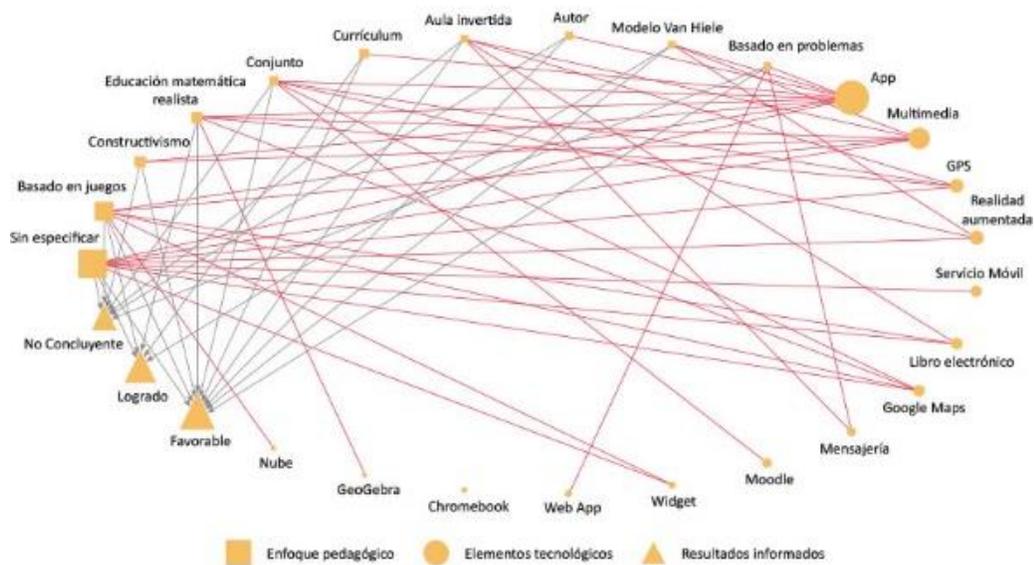


Figura 8. Relación entre el enfoque pedagógico, los elementos tecnológicos utilizados y los resultados informados en los estudios

Se identificó la necesidad de utilizar didáctica especializada para validar la pertinencia de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Por ello, la importancia del rigor metodológico y pedagógico cuando se incorporan elementos tecnológicos en la enseñanza de matemáticas en el aula. Se encontró que los estudios abordaban el enfoque pedagógico basado en juego, que tiene relación con el persistente interés de motivar al estudiante a estudiar matemáticas, evitando los prejuicios negativos sobre su estudio. En este sentido, no deben perderse de vista aspectos cualitativos como las percepciones, motivaciones e interés de los estudiantes en relación al uso de los dispositivos móviles en sus tareas matemáticas. Sin embargo, incorporar estos dispositivos en el ámbito escolar, tiene el propósito fundamental de desarrollar en el estudiante procesos de comprensión, abstracción y análisis de significados matemáticos mediante la interacción continua.

En un entorno de aprendizaje móvil se aprovechan las bondades de recursos tecnológicos factibles, asequibles, sencillos de utilizar y que requieran poco consumo de recursos, el propósito es el alto grado de disponibilidad desde un

dispositivo móvil. Por ello, es recurrente el uso de elementos tecnológicos como las apps, recursos multimedia, el uso de GPS y la realidad aumentada. Los estudios mostraron que hay recurrencia en la enseñanza de contenidos temáticos como la geometría y la aritmética en los primeros años de formación educativa, es decir, primaria y secundaria.

En el ámbito escolar en México, incorporar un EAM a la logística académica implica la selección de recursos tecnológicos asequibles tanto para docentes como para los estudiantes. También, considerando la relevancia del aprendizaje de las matemáticas en los primeros años de formación escolar, las trayectorias didácticas abordaron el estudio de la variable durante el primer año de educación secundaria en México, cuando ocurre el primer acercamiento formal al lenguaje algebraico.

3.1.2. Etapa 2: Primera intervención educativa en aula

En la etapa 2 de la investigación se llevó a cabo la primera trayectoria didáctica en aula. La noción de idoneidad didáctica fue la herramienta meta-didáctica utilizada en el ciclo de la IBD y durante las etapas siguientes de la investigación, como lo ilustra la Figura 9. La Figura 9 lista los resultados de esta etapa, los cuales determinaron la toma de decisiones para el siguiente incremento, estos son:

- La relevancia de la interacción durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- La posibilidad de gestionar recursos multimedia durante el desarrollo de una tarea matemática.
- La selección de tecnología asequible para la población de estudio.

En el capítulo 4 se detallan las fases de análisis, diseño y desarrollo, e implementación de la primera trayectoria didáctica en el aula. En esta sección se describen los resultados cuantitativos de 3 sesiones didácticas en aula definidas en la trayectoria didáctica implementada, así como las características operativas de tiempo, gestión y recursos.

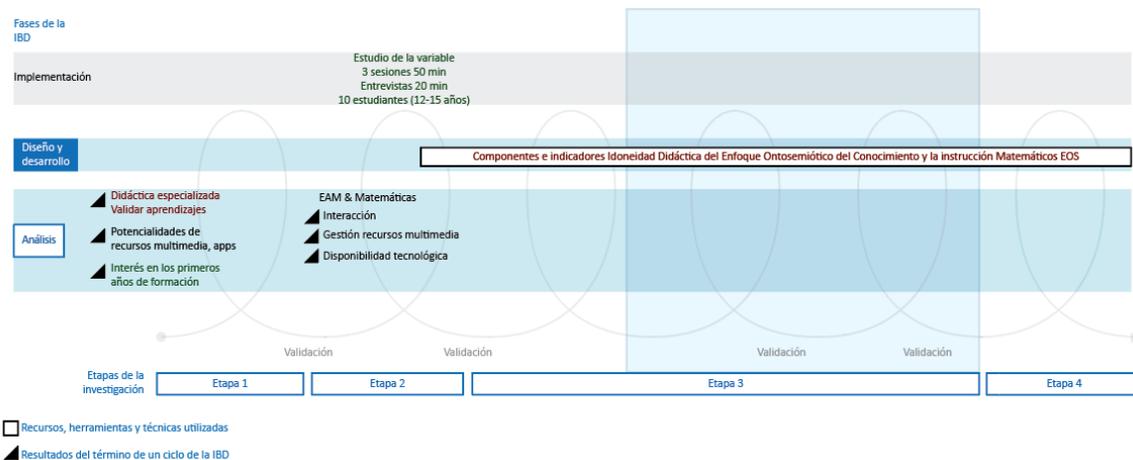


Figura 9. Etapa 2: esquema de recursos, herramientas y técnicas utilizadas y de resultados al término de un ciclo de la IBD

La presente investigación se llevó a cabo en el Colegio Gran Bretaña ubicado en el estado de Querétaro, México, donde se implementaron dos trayectorias didácticas en las que participaron estudiantes mexicanos del primer nivel de educación secundaria (12-15 años de edad).

En la etapa 2 de la investigación se implementó la primera trayectoria didáctica en aula durante el periodo del 21 de octubre del 2019 al 13 de diciembre del mismo año. Participó un grupo de diez estudiantes, 4 mujeres y 6 hombres. Las actividades se realizaron en las instalaciones del Colegio, durante el horario escolar, fueron 3 sesiones de 50 minutos cada una. Posterior a cada sesión se realizaron entrevistas semiestructuradas a cada estudiante sobre sus percepciones, dificultades y aprendizajes, cada entrevista duró un promedio de 20 minutos.

En la primera sesión el objetivo era asociar acciones de la vida cotidiana con una operación aritmética básica, suma, resta multiplicación y división. En la segunda sesión el objetivo era identificar el uso de la variable como número general asignando letras al precio de diversos productos, así como la suma de términos algebraicos en una lista de compras. En la tercera sesión el objetivo era identificar

el carácter multifacético de la variable, su uso como número general y cómo incógnita mediante el cálculo del perímetro de figuras geométricas regulares.

3.1.2.1. Primera sesión: el álgebra en la vida cotidiana

En la primera sesión se llevó a cabo la tarea matemática: el álgebra en la vida cotidiana, en la que se entregó a los estudiantes una hoja de trabajo con un enunciado, en el cuál debían identificar palabras semejantes a las operaciones aritméticas de sumar, restar, multiplicar y dividir; también se pidió que utilizarán letras o símbolos para identificar los componentes de la operación aritmética, por ejemplo, en la oración, “*El nivel del mar aumenta 10 centímetros*”, se esperaba que el estudiante identificará que la palabra “*aumentar*” se asocia con la suma, y los componentes en esa suma son “*nivel del mar*” y “*10 centímetros*”.

Se identificaron dos categorías en relación a los procedimientos que utilizados por los estudiantes para resolver la tarea:

- Secuencia narrativa del enunciado: se utilizaron símbolos para etiquetar a las palabras de la oración sustituyéndolas secuencialmente, ver Figura 10.

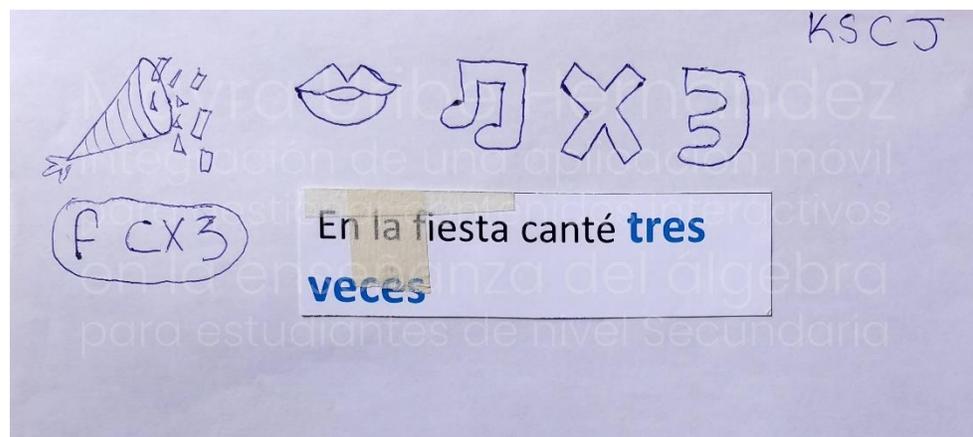


Figura 10. Procedimiento ejemplo de la categoría secuencia narrativa del enunciado

- Componentes de una expresión aritmética: se identificaron los componentes de una expresión aritmética utilizando símbolos o letras, ver Figura 11.

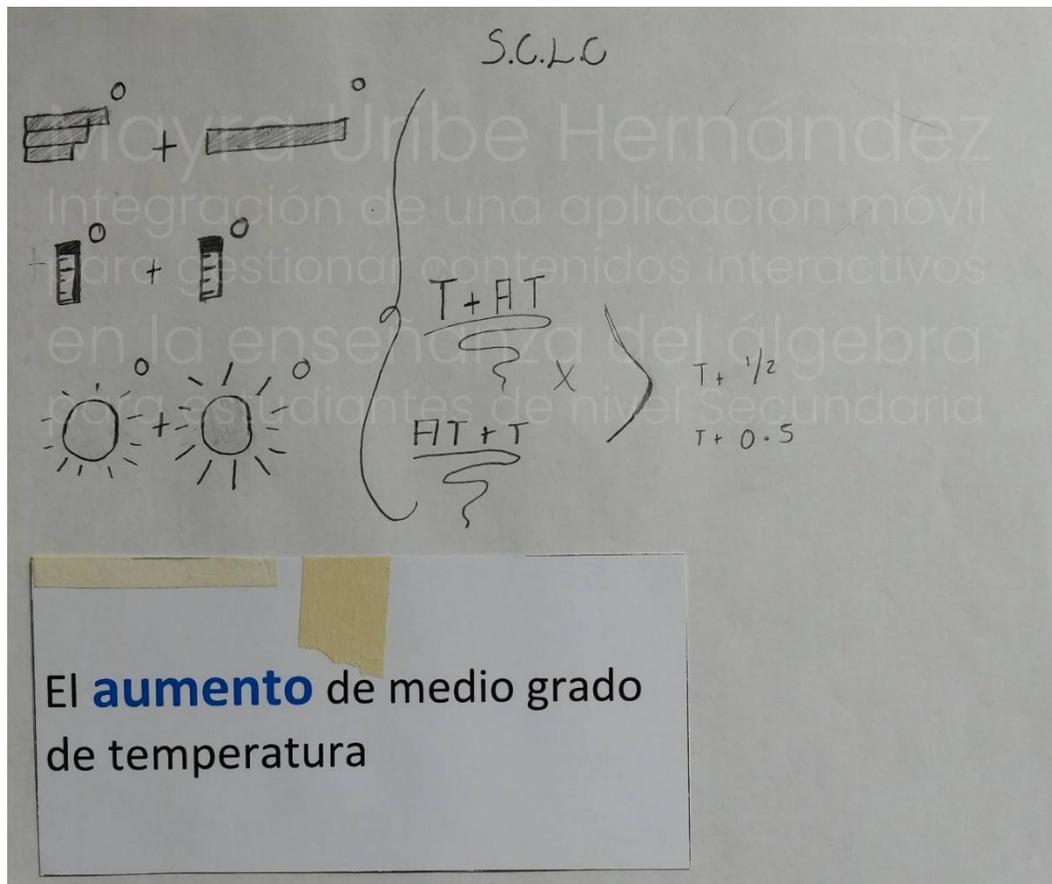


Figura 11. Procedimiento ejemplo de la categoría componentes de una expresión aritmética.

En algunos casos se identificaron ambas categorías del procedimiento, como se muestra en la hoja de respuesta de la Figura 12, en la cual se observan las categorías de secuencia narrativa del enunciado y componentes de una expresión aritmética, esto explica los porcentajes de la gráfica de la Figura 13.

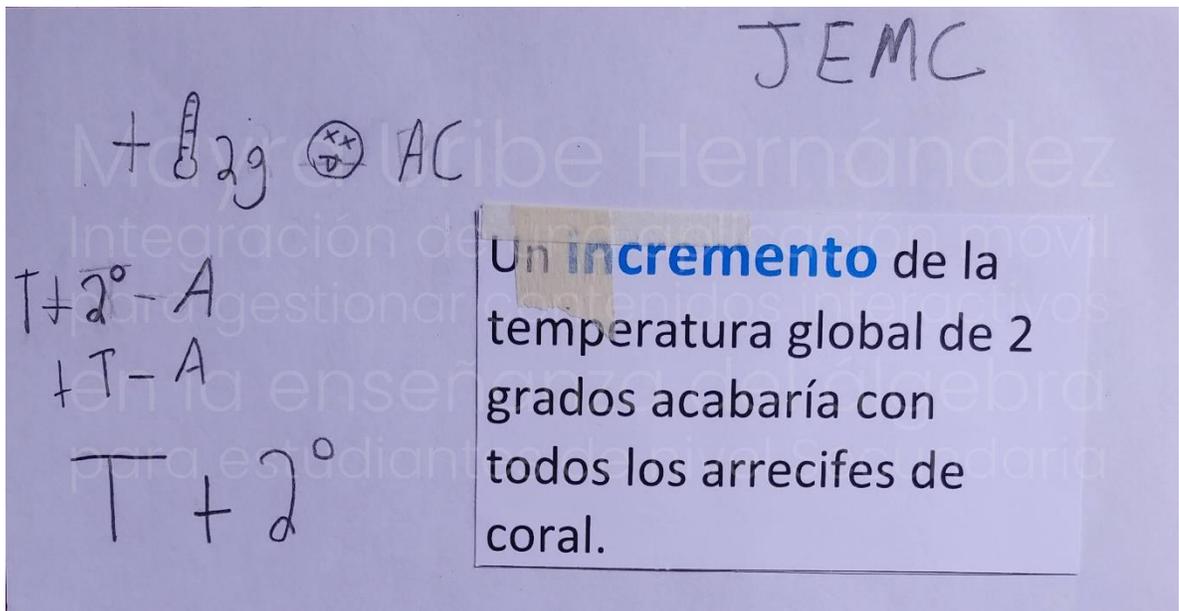


Figura 12. Procedimiento ejemplo de las categorías secuencia narrativa del enunciado y componentes de una expresión aritmética

La Figura 13 muestra la gráfica de las respuestas de los estudiantes en las hojas de trabajo, de acuerdo con las categorías de procedimientos identificadas. El 60% de las respuestas refirieron a la secuencia narrativa del enunciado, y el 50% logró identificar los componentes de la expresión aritmética.

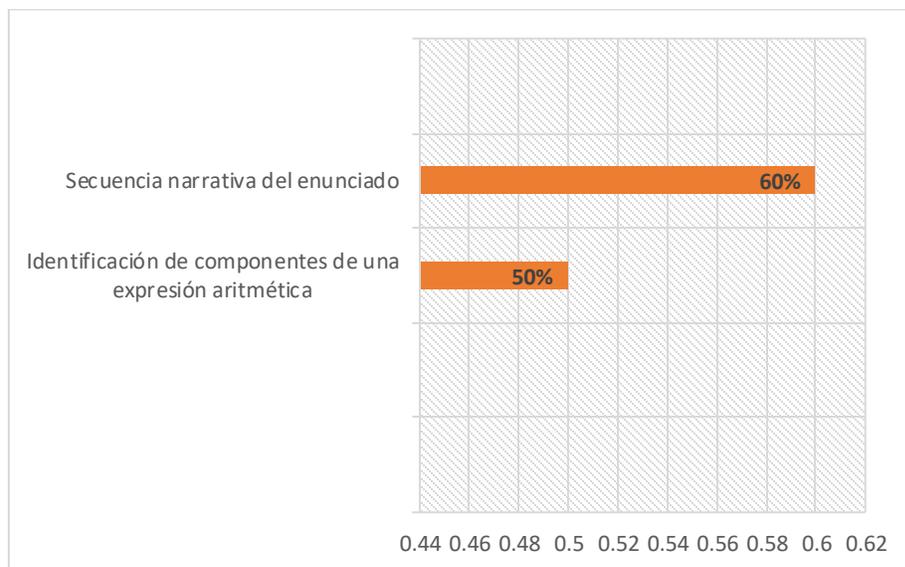


Figura 13. Porcentaje de las categorías identificadas en las hojas de trabajo de la primera sesión

3.1.2.2. Segunda sesión: tienda de productos ecológicos

Al inicio de la segunda sesión se llevó a cabo una actividad de refuerzo, ver Figuras 14 y 15, con el propósito de revisar los conceptos aprendidos en la sesión anterior.

Estudiante:	Hoja de trabajo segunda sesión 05 de Noviembre 2019
-------------	--

Indicaciones: En cada una de las siguientes oraciones marca la palabra que es posible expresar con alguna de estas operaciones matemáticas: suma, resta, división y multiplicación, escribe en el espacio superior el nombre de la operación matemática que representa y en el espacio inferior el símbolo matemático (+, -, x, ÷). Marca las palabras que componen la operación matemática que identificaste, asigna a cada una de éstas palabras una letra y escríbela en la parte inferior.

1. La temperatura aumento 1 grado
2. A mi ahorro le sume 100 pesos
3. El nivel del mar se incrementó 10 centímetro
4. A mi ahorro le reste 50 pesos
5. A mi ensalada le quite el brócoli
6. El mar podría tener menos arrecifes

Figura 14. Hoja de trabajo 1 de la actividad de refuerzo para la segunda sesión

7. Baile dos veces
8. Tengo el doble de aplicaciones en mi celular
9. Triplique mi puntaje en el juego
10. Terminé la mitad de mi tarea
11. La pizza se repartió entre los 12 estudiantes
12. Compartí el pastel con mis hermanos

Estudiante:	Hoja de trabajo segunda sesión 05 de Noviembre 2019
-------------	--

Figura 15. Hoja de trabajo 1 de la actividad de refuerzo para la segunda sesión

Se identificaron dos categorías en relación a los procedimientos que utilizaron los estudiantes para resolver la tarea:

- Identificación de componentes de una expresión aritmética: procedimientos en los que se identifican las palabras que expresan operaciones matemáticas utilizando el nombre y símbolo que corresponde. También, se identifican los componentes de la operación matemática asignado letras, ver Figuras 16 y 17.

Estudiante:	Hoja de trabajo segunda sesión 05 de Noviembre 2019
-------------	--

Indicaciones: En cada una de las siguientes oraciones marca la palabra que es posible expresar con alguna de estas operaciones matemáticas: suma, resta, división y multiplicación, escribe en el espacio superior el nombre de la operación matemática que representa y en el espacio inferior el símbolo matemático (+, -, x, ÷). Marca las palabras que componen la operación matemática que identificaste, asigna a cada una de éstas palabras una letra y escríbela en la parte inferior.

- Suma

1. La **temperatura** **aumentó** **1 grado**

$T + 1$
- suma

2. A mi **ahorro** le **sume** **100 pesos**

$A + 100$
- suma

3. El **nivel del mar** se **incrementó** **10 centímetros**

$n + 10$
- resta

4. A mi **ahorro** le **reste** **50 pesos**

$A - 50$
- menos

5. A mi **ensalada** le **quite** el **brócoli**

$e - B$
- resta

6. El **mar** podría tener **(menos)** **arrecifes**

$m - A$

Figura 16. Procedimiento ejemplo de la categoría Identificación de componentes de una expresión aritmética, hoja 1

Estudiante:	Hoja de trabajo segunda sesión 05 de Noviembre 2019
-------------	--

- multiplicación

7. **Baile** **dos veces**

$B \cdot 2 \cup 2B$
- multiplicación

8. Tengo el **doble** de **aplicaciones** en mi celular

$A \times 2 \cup 2A$
- multiplicación

9. **Triplique** mi **puntaje** en el juego

$\cdot 3P \cup 3P$
- división

10. Terminé la **mitad** de mi **tarea**

$\div \frac{1}{2}T$
- división

11. La **pizza** se **repartió** entre los **12** estudiantes

$P \div 12$
- división

12. **Compartí** el **pastel** con mis **hermanos**

$P \div h$

Figura 17. Procedimiento ejemplo de la categoría Identificación de componentes de una expresión aritmética, hoja 2

- Ejercicios incompletos: En los procedimientos no se identifican con claridad los componentes que corresponden a las operaciones aritméticas de multiplicación y/o división, ver Figura 18.

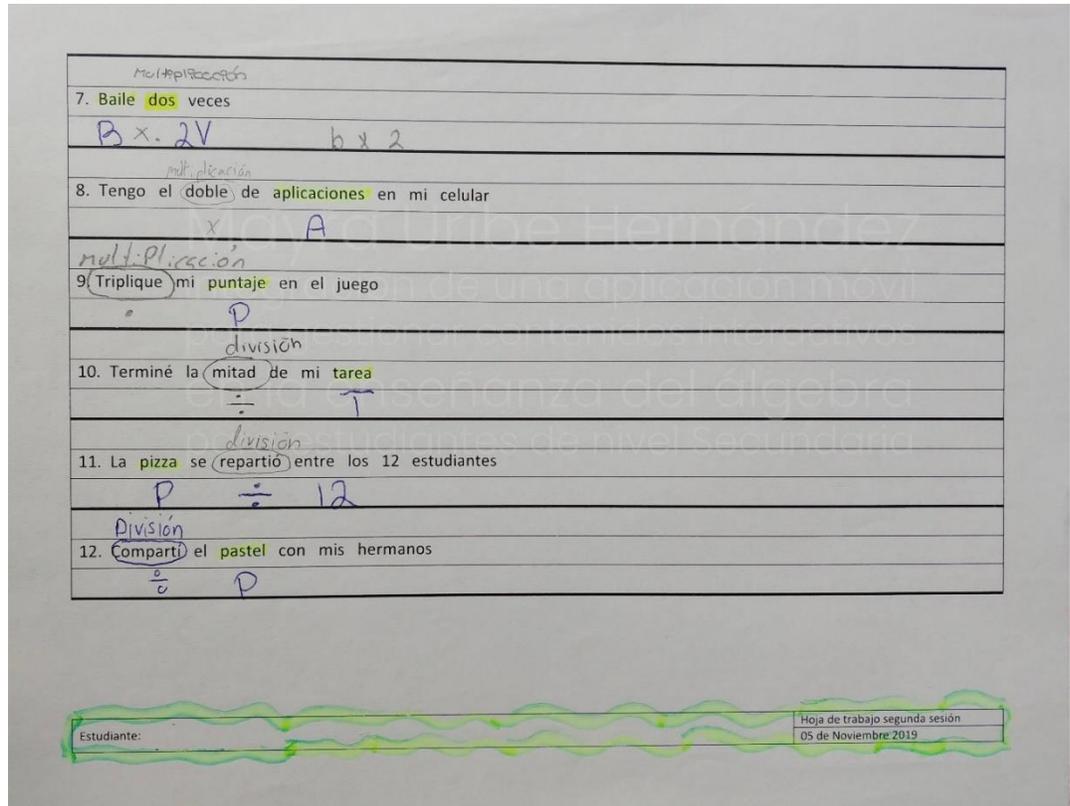


Figura 18. Procedimiento ejemplo de la categoría ejercicios incompletos, hoja 2

- Identificación de significados erróneos: cuando fue posible identificar en los procedimientos significados erróneos adquiridos por el estudiante, ver Figura 18.

Indicaciones: En cada una de las siguientes oraciones marca la palabra que es posible expresar con alguna de estas operaciones matemáticas: suma, resta, división y multiplicación, escribe en el espacio superior el nombre de la operación matemática que representa y en el espacio inferior el símbolo matemático (+, -, x, ÷). Marca las palabras que componen la operación matemática que identificaste, asigna a cada una de éstas palabras una letra y escríbela en la parte inferior.

1. La <u>temperatura</u> aumento 1 grado	
$T + 1$ (1T)	
2. A mi <u>ahorro</u> le <u>sume</u> 100 pesos	
$A + 100$ (100A)	
3. El <u>nivel del mar</u> se <u>incrementó</u> 10 centímetros	
$M + 10$ (10M)	
4. A mi <u>ahorro</u> le <u>reste</u> 50 pesos	
$A - 50$ (50A)	
5. A mi <u>ensalada</u> le <u>quite</u> el brócoli	
$E - B$	
6. El <u>mar</u> podría tener <u>menos</u> arrecifes	
$M - A$	

Figura 19. Procedimiento ejemplo de la categoría identificación de significados erróneos, hoja 1

- Uso de símbolos \$, cm, grados: cuando en los procedimientos los estudiantes utilizan símbolos para enfatizar a que refieren los valores asignados.

Estudiante:	Hoja de trabajo segunda sesión 05 de Noviembre 2019
-------------	--

Indicaciones: En cada una de las siguientes oraciones marca la palabra que es posible expresar con alguna de estas operaciones matemáticas: suma, resta, división y multiplicación, escribe en el espacio superior el nombre de la operación matemática que representa y en el espacio inferior el símbolo matemático (+, -, x, ÷). Marca las palabras que componen la operación matemática que identificaste, asigna a cada una de éstas palabras una letra y escríbelas en la parte inferior.

- Suma

1. La temperatura **aumento** 1 grado

$t + 1$
- Suma

2. A mi ahorro le **sume** 100 pesos

$h + 100 \$$
- Suma

3. El nivel del mar se **incrementó** 10 centímetro

$M + 10 \text{ cm}$
- resta

4. A mi ahorro le **reste** 50 pesos

$A - 50 \$$
- resta

5. A mi ensalada le **quite** el brócoli

$E - B$
- Resta

6. El mar podría tener **menos** arrecifes

$M - A$

Figura 20. Procedimiento ejemplo de la categoría uso de símbolos, hoja 1

La Figura 21 muestra la gráfica de las respuestas de los estudiantes en las hojas de trabajo de la actividad de refuerzo. El 90% de los estudiantes lograron identificar los componentes de una expresión aritmética; el 30% utilizó símbolos adicionales para enfatizar los valores referidos; el 20% de los estudiantes no completaron los ejercicios, mostrando dificultad principalmente en las operaciones aritméticas de división y multiplicación; sólo el 10% de las hojas de trabajo permitió identificar significados erróneos adquiridos.

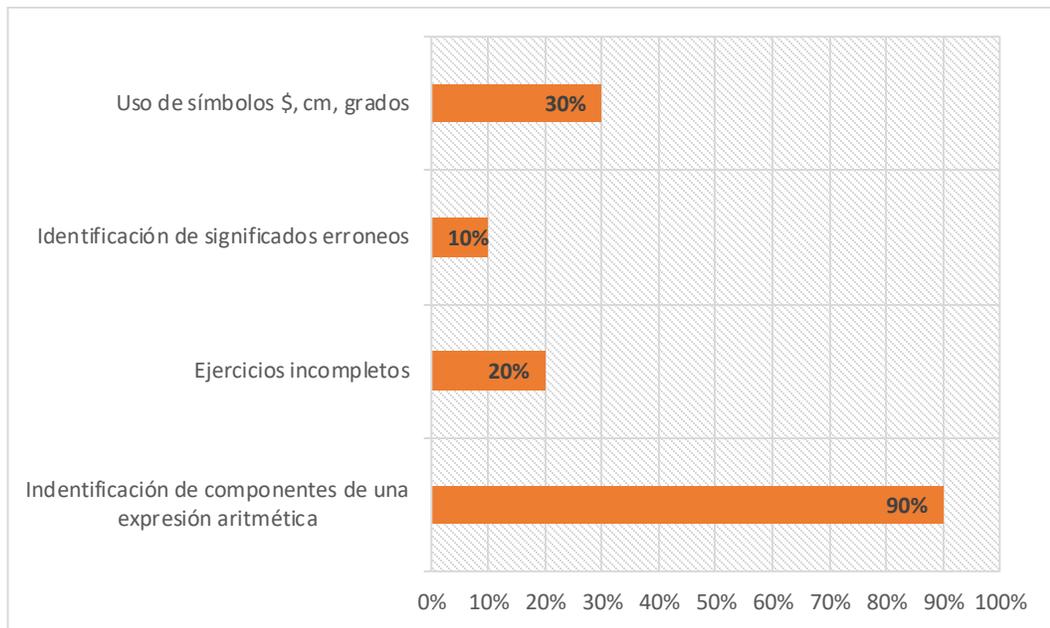


Figura 21. Porcentaje de las categorías identificadas en las hojas de trabajo de la actividad de repaso

La Figura 22 ilustra la hoja de trabajo de la segunda sesión: tienda de productos ecológicos. El objetivo de la sesión era identificar el uso de la variable como número general asignando letras al precio de diversos productos, así como la suma de términos algebraicos en una lista de compras.

Estudiante:	Hoja de trabajo segunda sesión 05 de Noviembre 2019
-------------	--

Indicaciones: En la siguiente lista de productos asigna con una letra el precio de cada uno. Después expresa el costo de las diferentes listas de compras.

Tienda de productos ecológicos		Lista de compras de Mauh	
Producto ecológico	Costo en pesos		
Champú en barra		*Dos champús de barra	
Cepillo de dientes hecho de bambú		*Tres cepillos de dientes	
Vajilla de madera		*Cuatro lapiceros	
Cargador móvil solar		*Una bolsa de Yuca	
Temporizador para la ducha			
Lapiceros hechos de botellas		Costo total	
Bolsas de almidón de yuca			

Mi lista de compras		Lista de compras de _____	
*		*	
*		*	
*		*	
*		*	
Costo total		Costo total	

Figura 22. Hoja de trabajo de la tarea matemática de la segunda sesión

Las categorías identificadas en las hojas de trabajo en relación a los procedimientos de los estudiantes fueron las siguientes:

- Ejercicio completo: implicó que el estudiante asignara letras para cada producto ecológico, expresó las cantidades de la lista de compras considerando las letras previamente definidas, y expresó la suma de la lista de compras, ver Figura 23.

Término algebraico: literal + coeficiente

Estudiante: _____

Hoja de trabajo segunda sesión
05 de Noviembre 2019

Indicaciones: En la siguiente lista de productos asigna con una letra el precio de cada uno. Después expresa el costo de las diferentes listas de compras.

Tienda de productos ecológicos		Lista de compras de Mauh	
Producto ecológico	Costo en pesos		
Champú en barra	M	*Dos champús de barra	$M + M = 2M$
Cepillo de dientes hecho de bambú	X	*Tres cepillos de dientes	$x + x + x = 3x$
Vajilla de madera	P	*Cuatro lapiceros	$L + L + L + L = 4L$
Cargador móvil solar	N	*Una bolsa de Yuca	$S = 1S$
Temporizador para la ducha	O		
Lapiceros hechos de botellas	L	Costo total	
Bolsas de almidón de yuca	S		

Mi lista de compras		Lista de compras de _____	
*		*	
*		*	
*		*	
*		*	
Costo total		Costo total	

Figura 24. Procedimiento ejemplo de la categoría ejercicio in completo

- Se evita el uso del signo igual: las hojas de trabajo permitieron identificar que algunos estudiantes evitaban el uso de signo igual para determinar expresiones equivalentes, ver Figura 25.

Estudiante:		Hoja de trabajo segunda sesión 05 de Noviembre 2019	
Indicaciones: En la siguiente lista de productos asigna con una letra el precio de cada uno. Después expresa el costo de las diferentes listas de compras.			
Tienda de productos ecológicos		Lista de compras de Mauh	
Producto ecológico	Costo en pesos		
Champú en barra	Z	*Dos champús de barra	$Z+Z$
Cepillo de dientes hecho de bambú	M	*Tres cepillos de dientes	$M+M+M$
Vajilla de madera	L	*Cuatro lapiceros	$L+L+L+L$
Cargador móvil solar	X	*Una bolsa de Yuca	R
Temporizador para la ducha	A		
Lapiceros hechos de botellas	O	Costo total	$2Z + 3M + 4L + R$
Bolsas de almidón de yuca	R		
Mi lista de compras		Lista de compras de _____	
*		*	
*		*	
*		*	
*		*	
Costo total		Costo total	

Figura 25. Procedimiento ejemplo de la categoría se evita el uso del signo igual

- Identificación de significado erróneo: en los procedimientos fue posible identificar la adquisición de un significado erróneo, ver Figura 26.

Estudiante		Hoja de trabajo segunda sesión 05 de Noviembre 2019	
Indicaciones: En la siguiente lista de productos asigna con una letra el precio de cada uno. Después expresa el costo de las diferentes listas de compras.			
Tienda de productos ecológicos		Lista de compras de Mauh	
Producto ecológico	Costo en pesos		
Champú en barra	S	*Dos champús de barra	$S+S = 2S$
Cepillo de dientes hecho de bambú	V	*Tres cepillos de dientes	$V+V+V = 3V$
Vajilla de madera	Z	*Cuatro lapiceros	$C+C+C+C = 4C$
Cargador móvil solar	N	*Una bolsa de Yuca	$H = 1H$
Temporizador para la ducha	M		$2S + 3V + 4C + 1H =$
Lapiceros hechos de botellas	C	Costo total	10
Bolsas de almidón de yuca	H		
Mi lista de compras		Lista de compras de _____	
*		*	
*		*	
*		*	
*		*	
Costo total		Costo total	

Figura 26. Procedimiento ejemplo de la categoría identificación de significado erróneo

La Figura 27 muestra la gráfica de las categorías identificadas en los procedimientos de los estudiantes, en algunos casos hay más de una categoría asociada en las hojas de respuesta, lo que explica los porcentajes presentados. El 60% de los estudiantes respondieron el ejercicio completo; el 40% no expresó el costo total de la compra; se identificó que el 30% de los participantes evitaron el uso del signo igual para expresar equivalencia; únicamente el 10% de las respuestas permitió la identificación de significados erróneos adquiridos.

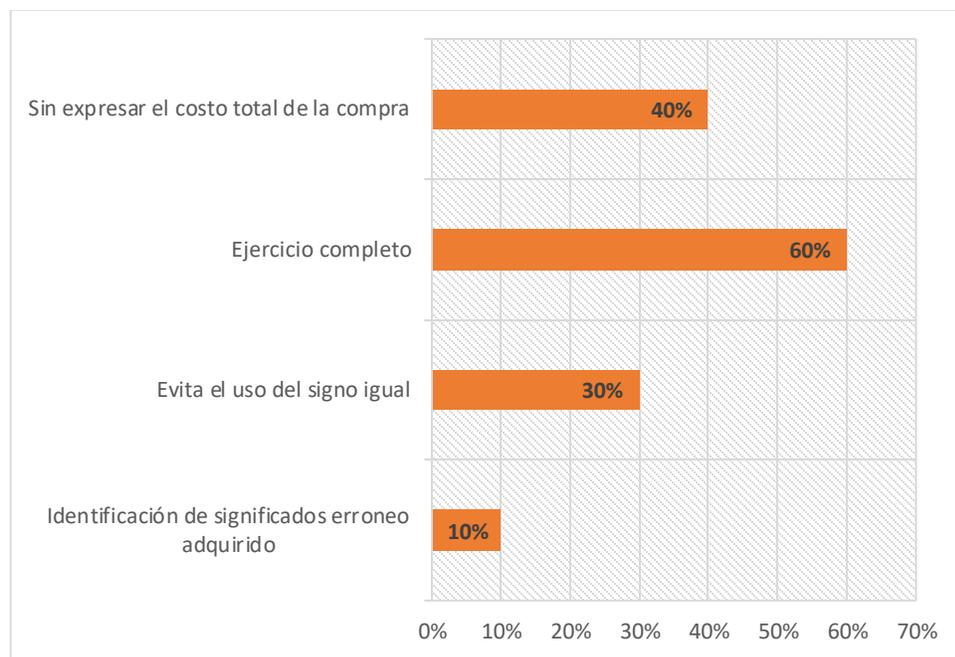


Figura 27. Porcentaje de las categorías identificadas en las hojas de trabajo de la segunda sesión

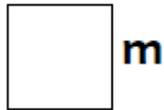
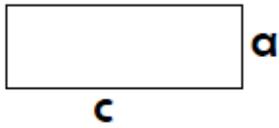
3.1.2.3. Tercera sesión: edificios verdes

En la tercera sesión el objetivo era identificar el carácter multifacético de la variable, su uso como número general y cómo incógnita mediante el cálculo del perímetro de figuras geométricas regulares. Se diseñó la hoja de trabajo que muestra la Figura 28.

Estudiante:

Hoja de trabajo tercera sesión
09 de Diciembre 2019

Indicaciones: Expresa el perímetro de las siguientes figuras geométricas utilizando como valores las letras propuestas para cada figura.



Indicaciones: Calcula el valor de las letras de las siguientes figuras considerando el perímetro y el valor de la altura.

<p>Perímetro= 34 metros</p> <p>10 metros</p> <p>m</p>	<p>Perímetro= 36 metros</p> <p>8 metros</p> <p>c</p>	<p>Perímetro= 30 metros</p> <p>10 metros</p> <p>b</p>
--	---	--

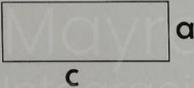
Figura 28. Hoja de trabajo de la tarea matemática de la tercera sesión.

Las categorías identificadas en las hojas de trabajo en relación a los procedimientos de los estudiantes fueron:

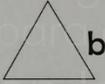
- Secuencia narrativa: el estudiante narró sus procedimientos de manera secuencial y escrita.
- Procedimientos aritméticos: el estudiante utilizó procedimientos aritméticos para resolver el ejercicio, ver Figura 29.

Estudiante:	Hoja de trabajo tercera sesión 09 de Diciembre 2019
-------------	--

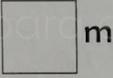
Indicaciones: Expresa el perímetro de las siguientes figuras geométricas utilizando cómo valores las letras propuestas para cada figura.



$a + a + c + c = (a \times 2) + (c \times 2)$



$b + b + b = (b \times 3)$



$m + m + m + m = (m \times 4)$

Indicaciones: Calcula el valor de las letras de las siguientes figuras considerando el perímetro y el valor de la altura.

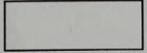
<p>Perímetro= 34 metros</p> <div style="text-align: center;">  <p>10 metros</p> <p>m</p> </div> <div style="border: 1px dashed blue; border-radius: 50%; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $10 + 10 = 20$ $34 - 20 = 14$ $14 \div 2 = 7$ </div>	<p>Perímetro= 36 metros</p> <div style="text-align: center;">  <p>8 metros</p> <p>c</p> </div> <div style="border: 1px dashed blue; border-radius: 50%; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $8 + 8 = 16$ $36 - 16 = 20$ $20 \div 2 = 10$ </div>	<p>Perímetro= 30 metros</p> <div style="text-align: center;">  <p>10 metros</p> <p>b</p> </div> <div style="border: 1px dashed blue; border-radius: 50%; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $10 + 10 = 20$ $30 - 20 = 10$ $10 \div 2 = 5$ </div>
--	--	--

Figura 29. Señalamiento de procedimiento ejemplo de la categoría procedimientos aritméticos

- Se evita el uso del signo igual: se identificó que persiste la acción de evitar el uso del signo igual para identificar equivalencias.
- Incorrecto e incompleto: cuando no se completó correctamente el ejercicio, ver Figura 30.

Estudiante:	Hoja de trabajo tercera sesión 09 de Diciembre 2019
-------------	--

Indicaciones: Expresa el perímetro de las siguientes figuras geométricas utilizando como valores las letras propuestas para cada figura.

$a_h = 3c$

$2a$
 $2c$

$a+a=2a +$
 $a \times 2 = + c \times 2$
yo hice una aproximación

b

m

Indicaciones: Calcula el valor de las letras de las siguientes figuras considerando el perímetro y el valor de la altura.

Perímetro= 34 metros <div style="border: 1px solid black; width: 50px; height: 80px; margin: 5px auto;"></div> <div style="text-align: center; margin-top: 5px;">m</div> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">10 metros</div>	Perímetro= 36 metros <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 30px; margin: 5px auto;"></div> <div style="text-align: center; margin-top: 5px;">c</div> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">8 metros</div>	Perímetro= 30 metros <div style="border: 1px solid black; width: 50px; height: 80px; margin: 5px auto;"></div> <div style="text-align: center; margin-top: 5px;">b</div> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">10 metros</div>
---	--	---

Figura 30. Señalamiento de procedimiento ejemplo de la categoría incorrecto e incompleto

La Figura 31 ilustra la respuesta de Camila, en sus procedimientos se identifican dos categorías de las previamente descritas, por un lado evitó el uso del signo igual para señalar las equivalencias de los perímetros, y por otro lado, narró sus procedimientos de manera secuencial y narrativa.

Estudiante: _____	Hoja de trabajo tercera sesión 09 de Diciembre 2019	
Indicaciones: Expresa el perímetro de las siguientes figuras geométricas utilizando como valores las letras propuestas para cada figura.		
<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> a </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;"> c <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 30px; margin-right: 5px;"></div> b </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 30px; margin-right: 5px;"></div> m </div> </div>	<div style="font-size: 24px; margin-bottom: 10px;">$a + a + c + c$</div> <div style="font-size: 24px; margin-bottom: 10px;">$2a + 2c$</div> <div style="font-size: 24px; margin-bottom: 10px;">$b + b + b + b$</div> <div style="font-size: 24px; margin-bottom: 10px;">$3b$</div> <div style="font-size: 24px;">$m + m + m + m$</div> <div style="font-size: 24px;">$4m$</div>	
Indicaciones: Calcula el valor de las letras de las siguientes figuras considerando el perímetro y el valor de la altura.		
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> Perímetro= 34 metros <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 40px; margin: 5px 0;"></div> <p style="text-align: right; margin: 0;">10 metros</p> <p style="text-align: center; margin: 0;">$m = 7$</p> </div> <p style="margin: 0;"> $10 + 10 = 20$ Para 34 14 se divide y sale en número </p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> Perímetro= 36 metros <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 20px; margin: 5px 0;"></div> <p style="text-align: right; margin: 0;">8 metros</p> <p style="text-align: center; margin: 0;">$c = 10$</p> </div> <p style="margin: 0;"> Sumo $8 + 8$, después veo cuanto falta para 36 y ahí sale el número </p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> Perímetro= 30 metros <div style="border: 1px solid black; width: 60px; height: 40px; margin: 5px 0;"></div> <p style="text-align: right; margin: 0;">10 metros</p> <p style="text-align: center; margin: 0;">$b = 5$</p> </div> <p style="margin: 0;"> Sumo $5 + 5 = 10$ veo cuanto falta que 20 10 divido y me sale el resultado </p>

Figura 31. Señalamiento de procedimientos ejemplo de las categorías secuencia narrativa y se evita el uso del signo igual

La Figura 32 muestra la gráfica de las categorías identificadas en los procedimientos, el 50% de los estudiantes explicaron sus procedimientos de manera narrativa, el 30% utilizó operaciones aritméticas, en el 30% de los participantes persistió la acción de evitar el uso del signo igual para identificar equivalencias, únicamente el 10% de los participantes no completo el ejercicio de manera correcta.

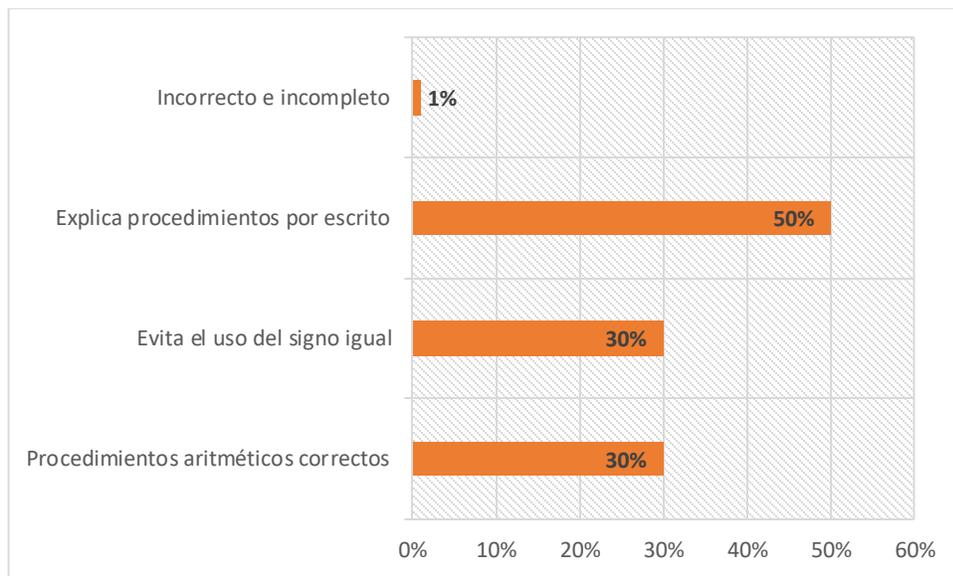


Figura 32. Porcentaje de las categorías identificadas en las hojas de trabajo de la tercera sesión

3.1.3. Etapa 3: Segunda intervención educativa en un EAM

En la etapa 3 de la investigación se llevó a cabo la segunda trayectoria didáctica durante el periodo del 12 de noviembre del 2020 al 21 de diciembre del mismo año. Debido a las condiciones de confinamiento durante la pandemia por COVID-19, todas las actividades fueron en línea. Se implementaron 4 actividades asíncronas y 4 sesiones sincrónicas en plataforma digital. Se utilizaron las herramientas de G Suite de Google con las que contaba la institución. Participaron 84 estudiantes, 49 mujeres y 35 hombres.

Para diseño de la trayectoria didáctica en esta etapa de la investigación se consideraron tres características de un EAM en un contexto escolar, resultado del análisis retrospectivo de la primera trayectoria didáctica, la cuál se explica a profundidad en el capítulo 4. Estas características fueron:

- Interacción constante entre los participantes para dar continuidad a los aprendizajes desarrollados.
- El potencial de la gestión de recursos multimedia que facilitará a los estudiantes la descripción de sus procedimientos.
- La disponibilidad tecnológica, es decir, la selección de herramientas tecnológicas viables, factibles y asequibles para estudiantes y docentes.

La Figura 33 ilustra el esquema de los recursos, herramientas y técnicas utilizadas, además, de los resultados obtenidos al término de un ciclo de la IBD, los cuales permitieron generar los incrementos en los siguientes ciclos. A continuación, se describe el desarrollo de cada ciclo de la IBD de la etapa 3 de la presente investigación.

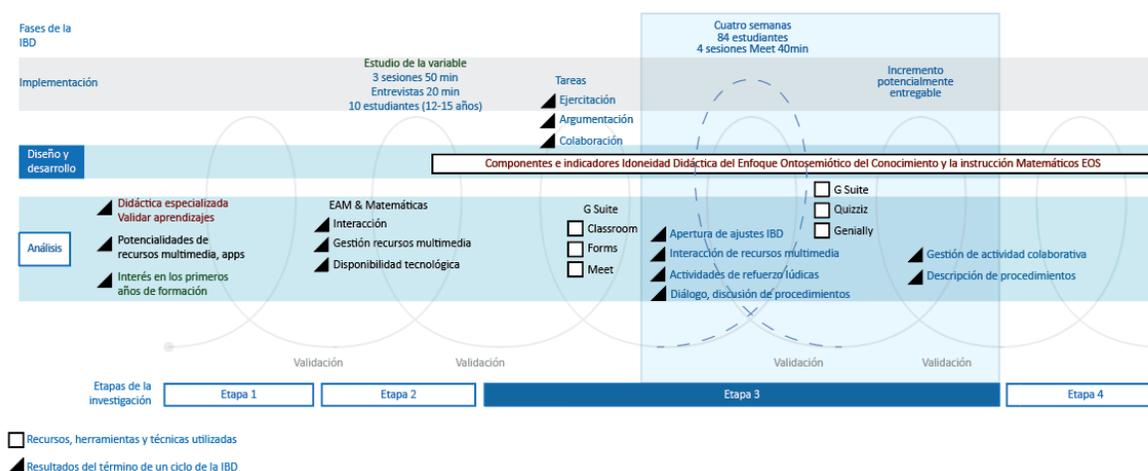


Figura 33. Etapa 3: recursos, herramientas, técnicas y resultados al término de un ciclo de la IBD

En el capítulo 5 se detallan las fases de análisis, diseño y desarrollo, e implementación de la segunda trayectoria didáctica en un EAM. En esta sección se describen los resultados cuantitativos de las sesiones didácticas

implementadas, así como el desarrollo de tres ciclos de la IBD que corresponden con la etapa 3 de la investigación.

En el primer ciclo de la etapa 3 se definió el diseño de tareas matemáticas para abordar el estudio de la variable en un entorno digital mediante sesiones sincrónicas y asíncronas. Se propusieron cuatro tipos de tarea matemática: ejercitación con respuestas múltiples, ejercitación con respuesta abierta, argumentación y colaboración, se definieron objetivos de aprendizaje y los recursos tecnológicos para su implementación, como se describe en la Tabla 2.

Tabla 2. Tipos de tarea, objetivos de aprendizaje y recursos tecnológicos para su implementación

Tipo de tarea	Objetivo	Recurso tecnológico
Ejercitación con respuestas múltiples	Desarrollar habilidades procedimentales, ejercicios semejantes al currículo escolar.	Google Classroom Google Forms
Ejercitación con respuesta abierta	Fomentar interacción mediante el diálogo y la explicación de procedimientos.	Google Classroom Edición de archivo pdf
Discusión	Promover la autonomía y reflexión en la solución de tareas matemáticas; identificación de procedimientos correctos e incorrectos.	Google Meet
Colaboración	Promover la negociación y acuerdos comunes de significados y procedimientos.	Google Classroom Google Meet

Las tareas propuestas se gestionaron en Google Classroom, se llevaría a cabo las 4 tareas para cada semana de trabajo considerando los bloques temáticos descritos en la Tabla 3. En la primera semana de trabajo se implementaría una actividad preliminar para garantizar la usabilidad de los recursos tecnológicos y un video tutorial para describir las tareas matemáticas propuestas, con el propósito de familiarizar a los estudiantes con la plataforma de trabajo.

Tabla 3. Bloque temático, objetivo y semana de trabajo definidos en el ciclo de la IBD

Bloque temático	Objetivo	Semana de trabajo
Actividad preliminar	Identificar habilidades digitales del estudiante en la plataforma	Primera
Uso del lenguaje algebraico	Uso del lenguaje aritmético mediante equivalencias numéricas	Segunda
Uso de valores aritméticos, simbología y lenguaje algebraico	Calcular un valor desconocido mediante procedimientos aritméticos para evidenciar la asociación de la aritmética y el álgebra. Definición del concepto de equivalencia matemática y el uso del signo igual.	Tercera
Identificación del carácter multifacético de la variable	Identificación del uso de la variable como número general y como incógnita utilizando letras.	Cuarta

En el segundo ciclo de la etapa 3 se llevó a cabo la trayectoria didáctica, la figura 10 ilustra dos espirales sobrepuestas, uno en línea continua y otro de mayor dimensión en línea discontinua, para ilustrar la apertura de ajustes de los ciclos de la IBD, ya que durante la primera semana de trabajo se identificó la necesidad de reducir el número de tareas por semana, por lo que se realizaron los siguientes cambios en la implementación:

- La integración de actividades lúdicas de refuerzo utilizando las herramientas de Genially y Quizziz.
- La relevancia de compartir los procedimientos de la tarea de ejercitación de respuestas múltiples.
- La necesidad de priorizar los momentos de diálogo y discusión en las sesiones sincrónicas.

En el ciclo 3 se analizaron los resultados de la implementación de la trayectoria didáctica. A continuación, se describen las gráficas que ilustran los resultados

cuantitativos en relación a tipos de recursos multimedia compartidos, conceptos identificados, puntajes, asistencia y desarrollo de procedimientos para las tareas matemáticas propuestas.

3.1.3.1. Actividad preliminar: ¿Quién soy?

La actividad preliminar ¿Quién soy? que se ilustra en la Figura 34 tuvo el propósito de identificar si el estudiante era capaz de editar un archivo pdf o imagen, compartir contenido multimedia, entregar una tarea y utilizar el chat en la plataforma de Google Classroom. Además que, fue una estrategia efectiva para conectar con los participantes mediante sus intereses.



Figura 34. La actividad preliminar ¿Quién soy?

La Figura 35 ilustra la gráfica de los tipos de recursos multimedia compartidos por los estudiantes en la plataforma, el 54% de los estudiantes utilizaron pdf, aunque no necesariamente editaron el archivo original se identifica la habilidad de exportar un archivo en el formato de pdf; el 27% de los estudiantes enviaron una imagen en formato jpg y en menor porcentaje, sólo el 3%, en formato png, estos archivos refieren a capturas de pantalla, fotografías, edición del pdf original pero exportado en otro formato; el 14% de los participantes recrearon la actividad en un documento de Word o compartieron texto; únicamente el 2% utilizó un video en formato MP4.

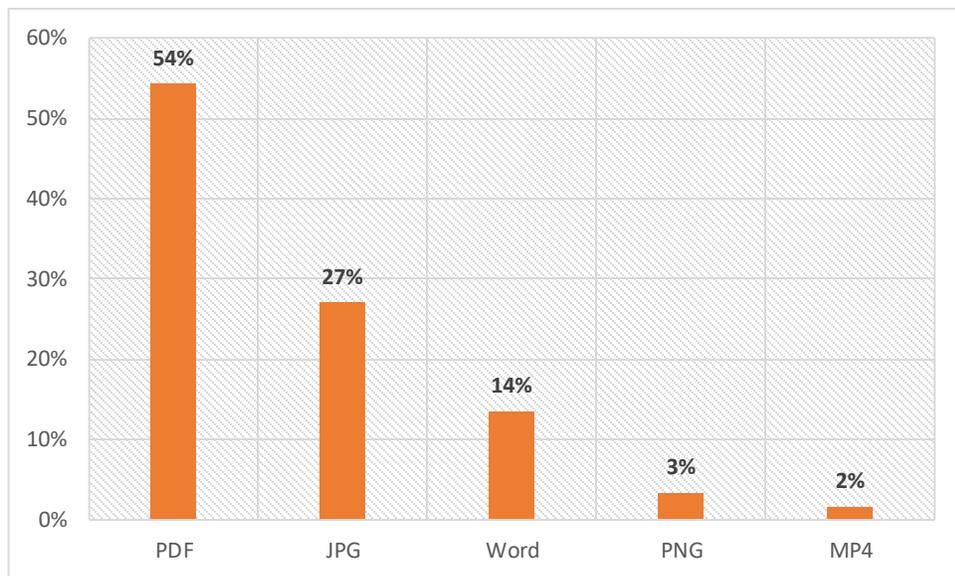


Figura 35. Porcentajes de los tipos de archivos multimedia utilizados en la actividad preliminar

Además de identificar el tipo de recurso multimedia compartido en la plataforma, también se identificaron las técnicas utilizadas por los estudiantes para su creación o edición, como se ilustra en la gráfica de la Figura 36. El 53% de los participantes editaron el archivo original para compartir sus respuestas, mostrando un alto dominio de las herramientas; el 20% hizo una edición del archivo de manera digital y compartió impresión de pantalla de su respuesta; el 10% de los participantes recrearon la actividad en Word, mostrando un alto dominio de la herramienta; el 5% imprimió la hoja de trabajo resolviéndola a mano y tomando

fotografía de su respuesta; el 3% utilizó un archivo de Word para dar respuesta a la actividad mediante texto; el 2% recreo la actividad en su cuaderno y tomó fotografía; el 2% tomó impresión de pantalla de la edición del archivo original en pantalla táctil, es decir, se respondió directamente en el dispositivo móvil; el 2% envió un archivo en formato MP4 de su respuesta; finalmente el 2% entregó un archivo pdf con la edición del archivo original utilizando la pantalla táctil del dispositivo.

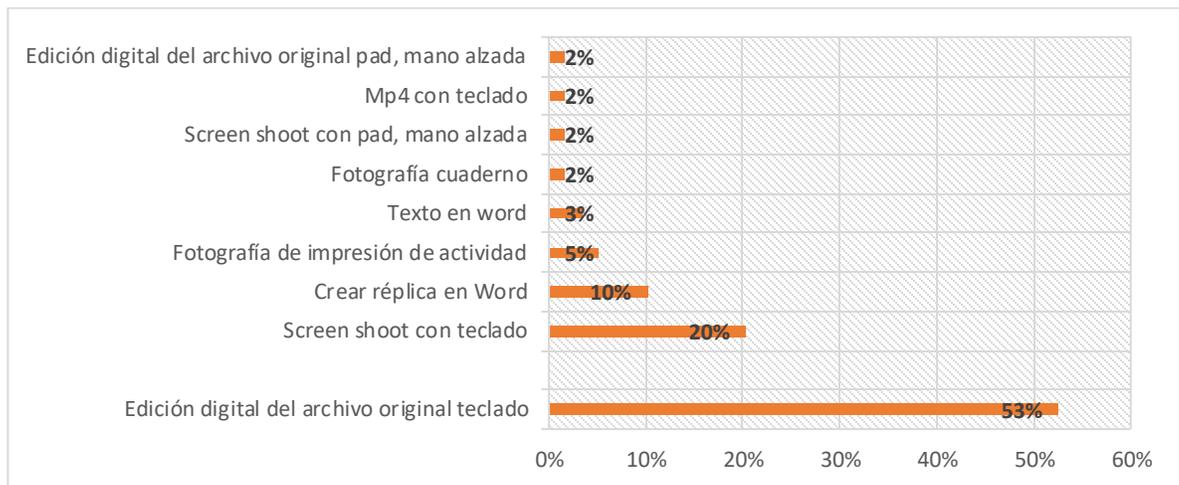


Figura 36. Porcentaje de técnicas utilizadas para la creación o edición de recursos multimedia de la actividad preliminar

Esta actividad se diseñó considerando que los estudiantes editaran el archivo pdf directamente desde un dispositivo móvil. Sin embargo, la gráfica de la figura muestra que únicamente el 4% de los participantes emplearon esa técnica, en su mayoría utilizaron edición digital desde una computadora.

La actividad preliminar: ¿Quién Soy? permitió identificar intereses, inquietudes y percepciones personales de los participantes, esta información fue relevante para conectar con ellos, para conocerlos y abordar algunos temas desde narrativas de su interés. La Figura 37 muestra la gráfica en relación a los videojuegos favoritos, el 54% jugaba Among us, un juego de deducción social multijugador en línea; el 29% jugaba Fortnite, juego cooperativo de supervivencia con diversas ediciones, como Fortnite Battle Royale, juego de batalla gratuito y Fortnite Creative, en el que

los jugadores crean mundos y campos de batalla; el 25% jugaba Roblox, videojuego que permite comprar, vender y crear elementos virtuales para decorar el avatar en la plataforma; el 17% jugaba Minecraft, un creativo mundo 3D en bloques, con terreno infinito, en el que es posible extraer materias primas, crear herramientas y elementos, y construir estructuras o movimientos de tierra; finalmente, el 15% jugaba FreeFire, un juego de disparos de supervivencia disponible para dispositivos móviles.

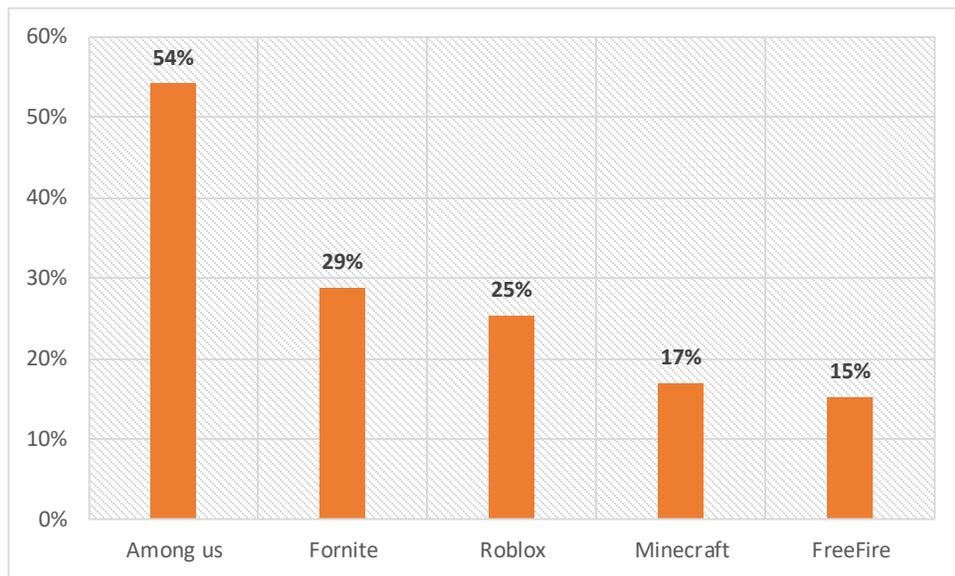


Figura 37. Porcentaje de los videos más jugados por los participantes

La Figura 38 muestra la gráfica de cinco categorías recurrentes en torno a aquellos aspectos que consideraban sus talentos. El 44% refirió practicar algún deportes, estas son las actividades a las que hicieron referencia: patinar, gimnasia, nadar, taekwondo, tenis, correr, atletismo, football americano, basketball, baseball, capoeira, danza aérea, volleyboll y boxeo; el 31% se consideró hábil para dibujar; el 29% consideró que su talento era bailar, para este caso sólo se registraron respuestas de mujeres, es decir, ningún hombre refirió que tenía este talento; el 22% consideró que su talento era jugar videojuegos; finalmente el 14% hicieron referencia a que su talento era el cálculo mental y el estudio de las matemáticas.

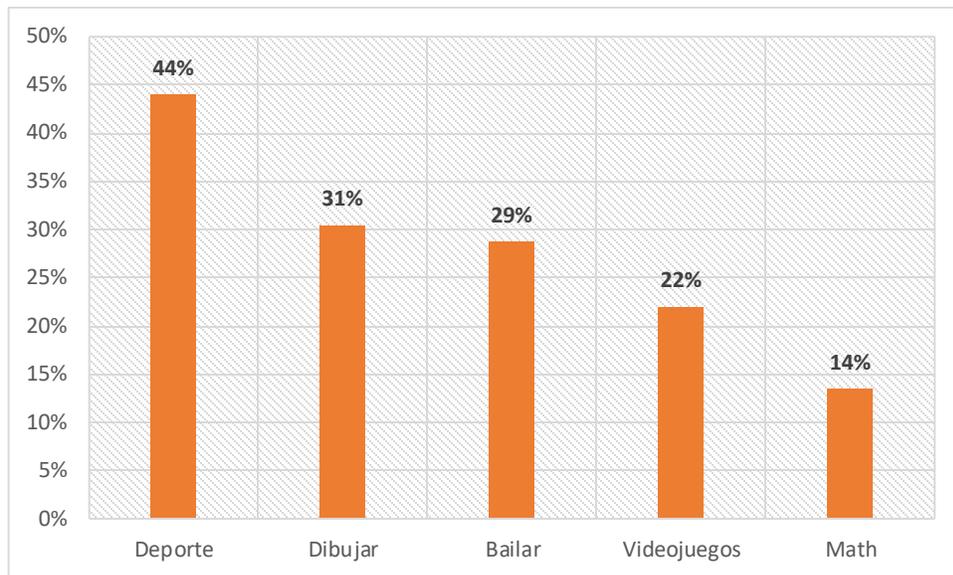


Figura 38. Porcentaje de categorías sobre aspectos que consideraban talentos personales

También se encontraron respuestas interesantes en torno a las percepciones que tenían los estudiantes sobre sí mismos, asociando talentos con aspectos cualitativos y no necesariamente en torno a una actividad concreta, por ejemplo, el orden, la creatividad, la imaginación, el liderazgo, la empatía, la responsabilidad y la perseverancia. Se encontraron también frases concretas que refieren a afirmaciones sobre sí mismas, sólo mujeres expresaron en oraciones claras estos talentos:

Escucho a las personas, las apoyo, las comprendo.

Soy inteligente.

Soy muy paciente.

Soy inteligente, trabajadora y perseverante.

Soy buena escuchando a los demás.

Me considero una buena líder y también me considero una buena amiga.

Me considero muy guapa.

La Figura 39 muestra la gráfica de cinco categorías recurrentes en torno a aquellos aspectos que les resultaba desagradables. El 31% refirió a que sentirse ignorado era una cuestión desagradable; el 20% refirió a aspectos como la hipocresía, la traición y las mentiras; el 14% refirió a la importancia de sentirse respetados en sus ideas y decisiones; el 14% mostró preocupación por la contaminación y el maltrato animal; finalmente, el 10% consideró que la discriminación es una práctica repulsiva.

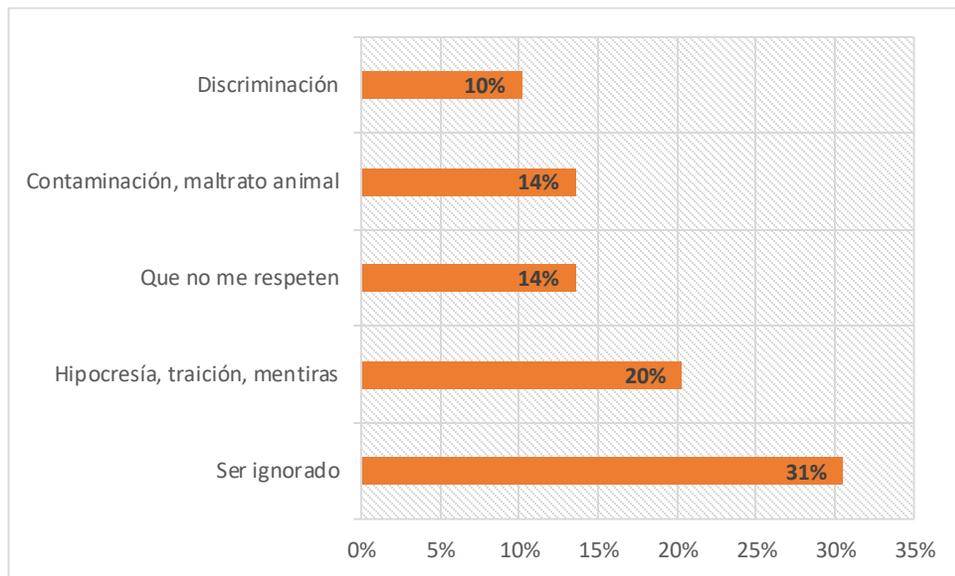


Figura 39. Porcentaje de categorías sobre aspectos que consideraban desagradables

Considerando que esta trayectoria didáctica se llevó a cabo durante el periodo de confinamiento en México por COVID-19, conocer los aspectos de alto valor en su vida resultó reflexivo para todos. La Figura 40 muestra la gráfica de cuatro categorías identificadas en torno a responder, *las cosas que amo*; el 63% refirió que los amigos son de alto valor y relevancia en sus vidas; el 61% considero que amaban a su familia; el 39% refirió que amaban a sus mascotas y el 19% refirió que amaban los videojuegos.

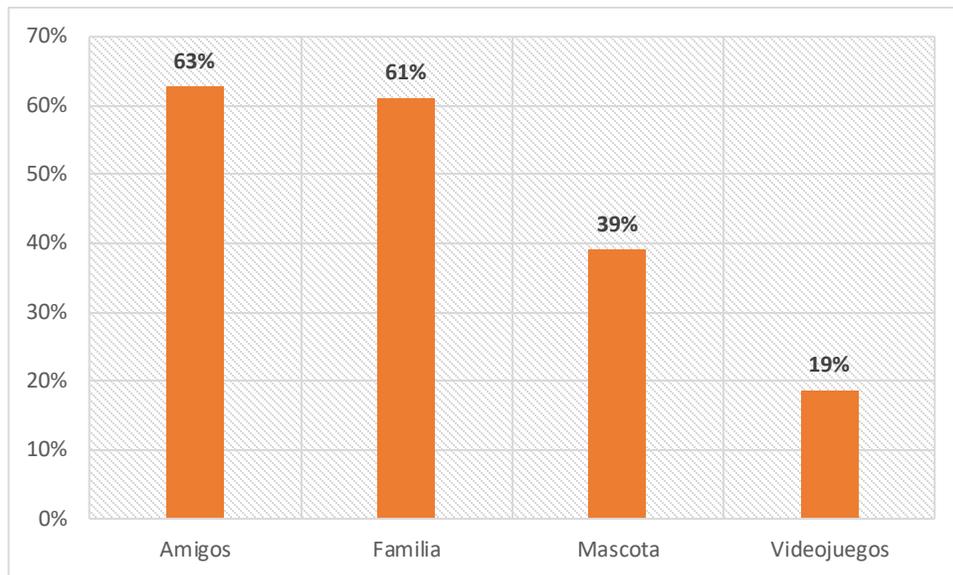


Figura 40. Porcentaje de categorías sobre aspectos que consideraban relevantes en su cotidianidad

En torno a responder cuáles eran los retos que tenían presentes, se encontraron poca diversidad de respuestas, como lo ilustra la gráfica de la figura. El 63% de los participantes mostraron preocupación sobre su desarrollo académico, considerando como reto mejorar sus notas escolares, principalmente en tres áreas temáticas, historia, geografía y matemáticas; el 20% respondió aspectos fuera del contexto escolar, como: pintar, dibujar, aprender un idioma, viajar, actuar, bailar, crear un negocio propio, estabilidad emocional, cantar, trabajar, edición multimedia; finalmente, el 17% refirió a la mejora en un deporte que practicaban en la actualidad.

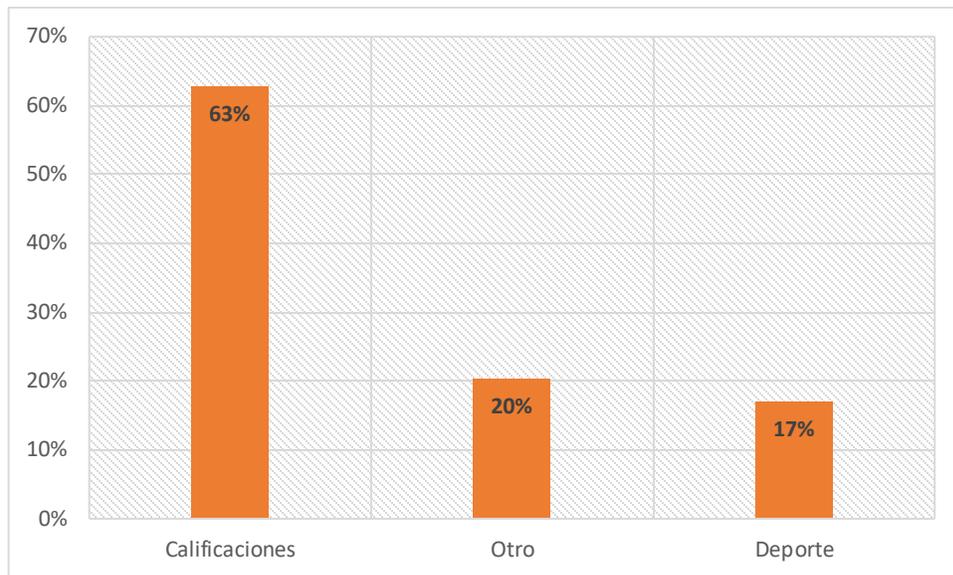


Figura 41. Porcentajes de categorías sobre retos personales a corto plazo

3.1.3.2. Tarea de ejercitación de respuestas múltiples

La tarea de ejercitación de respuestas múltiples tuvo el objetivo de desarrollar habilidades procedimentales en los estudiantes mediante el diseño de ejercicios semejantes al currículo escolar. Se creó un formulario en Google Forms con los ejercicios que se muestran en las siguientes figuras, ver Figuras 42 a la 46. Algunos ejercicios tenían más de una respuesta correcta, por lo que Google Forms consideró incorrectas aquellas respuestas en las que no se seleccionaron todas las opciones correctas disponibles.

Elige las respuestas correctas:

Valor de los rectángulos morados 12 puntos

60-30 ✓
 60+30
 30 ✓
 15
 10

Comentarios para respuestas correctas ✎ 🗑
 Tienes talento para esto eh! Muy bien!

Comentarios para respuestas incorrectas ✎ 🗑
 Ups! Podemos mejorar esta puntuación! Vamos, tu puedes!

Listo

Figura 42. Ejercicio 1 de la Tarea de ejercitación de respuesta múltiple

Elige las respuestas correctas:

Valor de un rectángulo rojo 12 puntos

56-22
 La mitad de 22
 La tercera parte de 45 ✓
 3 veces 15
 15 ✓

Comentarios para respuestas correctas ✎ 🗑
 Súper!

Comentarios para respuestas incorrectas ✎ 🗑
 Observa bien tus respuestas, que falló? Recuerda que aprender de los errores nos hace mejores...

Listo

Figura 43. Ejercicio 2 de la Tarea de ejercitación de respuesta múltiple

Enumerar la(s) respuesta(s) correcta(s):

Valor de la línea rosa 25 puntos

3 ✕
 Tres ✕
 tres ✕

Agregar una respuesta correc...

Marcar todas las demás respuestas como incorrectas

Agregar comentarios a la respuesta

Listo

Figura 44. Ejercicio 3 de la Tarea de ejercitación de respuesta múltiple

Enumerar la(s) respuesta(s) correcta(s):

Valor del rectángulo amarillo 25 puntos

12 ✕
 Doce ✕
 doce ✕

Agregar una respuesta correc...

Marcar todas las demás respuestas como incorrectas

Agregar comentarios a la respuesta

Listo

Figura 45. Ejercicio 4 de la Tarea de ejercitación de respuesta múltiple

111

Enumerar la(s) respuesta(s) correcta(s):

Valor de un círculo 26 puntos

$$\text{Círculo} + \text{Círculo} + \text{Triángulo} + \text{Triángulo} + \text{Triángulo} = 28$$

$$\text{Triángulo} + \text{Triángulo} = 8$$

8 ×

Ocho ×

ocho ×

Agregar una respuesta correc...

Marcar todas las demás respuestas como incorrectas

Figura 46. Ejercicio 5 de la Tarea de ejercitación de respuesta múltiple

La gráfica de la Figura 47 ilustra las respuestas registradas para esta tarea. Las barras en color azul en la gráfica de la figura muestran las puntuaciones registradas en Google Forms, obteniendo un promedio grupal de 50; las barras en color naranja muestran las puntuaciones considerando al menos una respuesta correcta cuando había mas de una opción de respuesta correcta por seleccionar, incrementando el promedio grupal con un 59; las barras en color gris muestran las puntuaciones obtenidas en un segundo formulario, se registró un promedio grupal de 76, sin embargo, debe aclararse que se consideraron a los estudiantes que compartieron sus procedimientos del primer formulario para obtener acceso a una segunda oportunidad, por lo que en algunos casos compartieron procedimientos sin responder al segundo formulario.

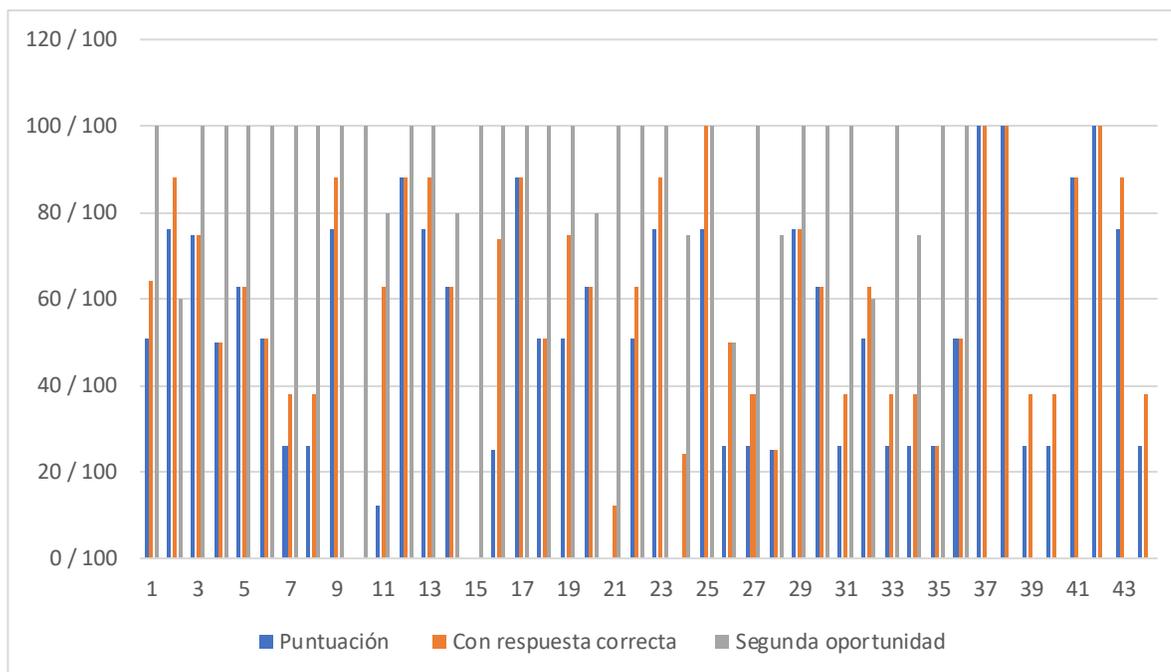


Figura 47. Puntuaciones de la tarea de ejercitación de respuesta múltiple

Para compartir sus procedimientos se identificaron cinco tipos de recurso multimedia, los cuáles se ilustran en la gráfica de la Figura 48. El 32% compartió sus procedimientos tomando fotografía de su cuaderno; el 14% utilizó un archivo de Word mostrando un alto dominio de la herramienta; el 9% exportó un archivo en formato pdf; el 5% tomó impresión de pantalla de su dispositivo móvil; finalmente el 2% envió un archivo de Power Point.

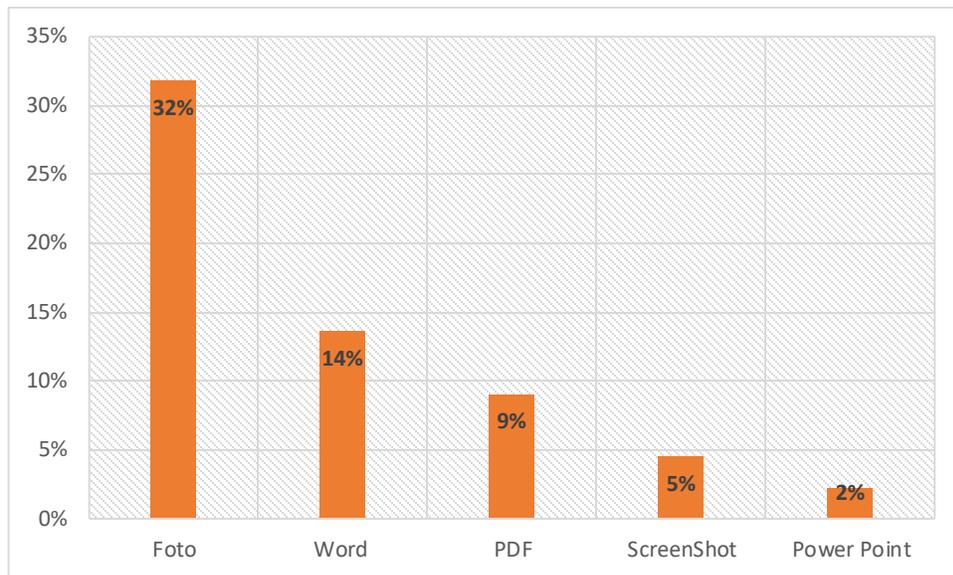


Figura 48. Porcentajes de los tipos de archivos multimedia utilizados en la tarea de ejercitación de respuesta múltiple

Se identificaron 4 categorías en el desarrollo de los procedimientos de los estudiantes, las cuáles se analizan a profundidad en el capítulo 4, estas fueron:

- Procedimientos aritméticos: fueron aquellos procedimientos en los que se identificaron expresiones aritméticas, ver Figura 49.

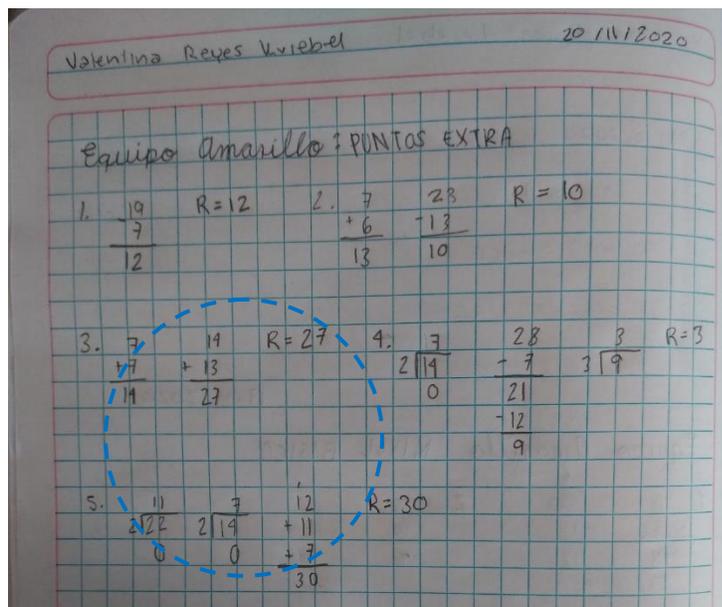


Figura 49. Señalamiento de procedimientos ejemplo de la categoría procedimientos aritméticos

- Uso de gráficos: fueron aquellos procedimientos en los se identificó el uso de dibujos, esquemas o gráficos para enfatizar la respuesta, ver Figura 50.

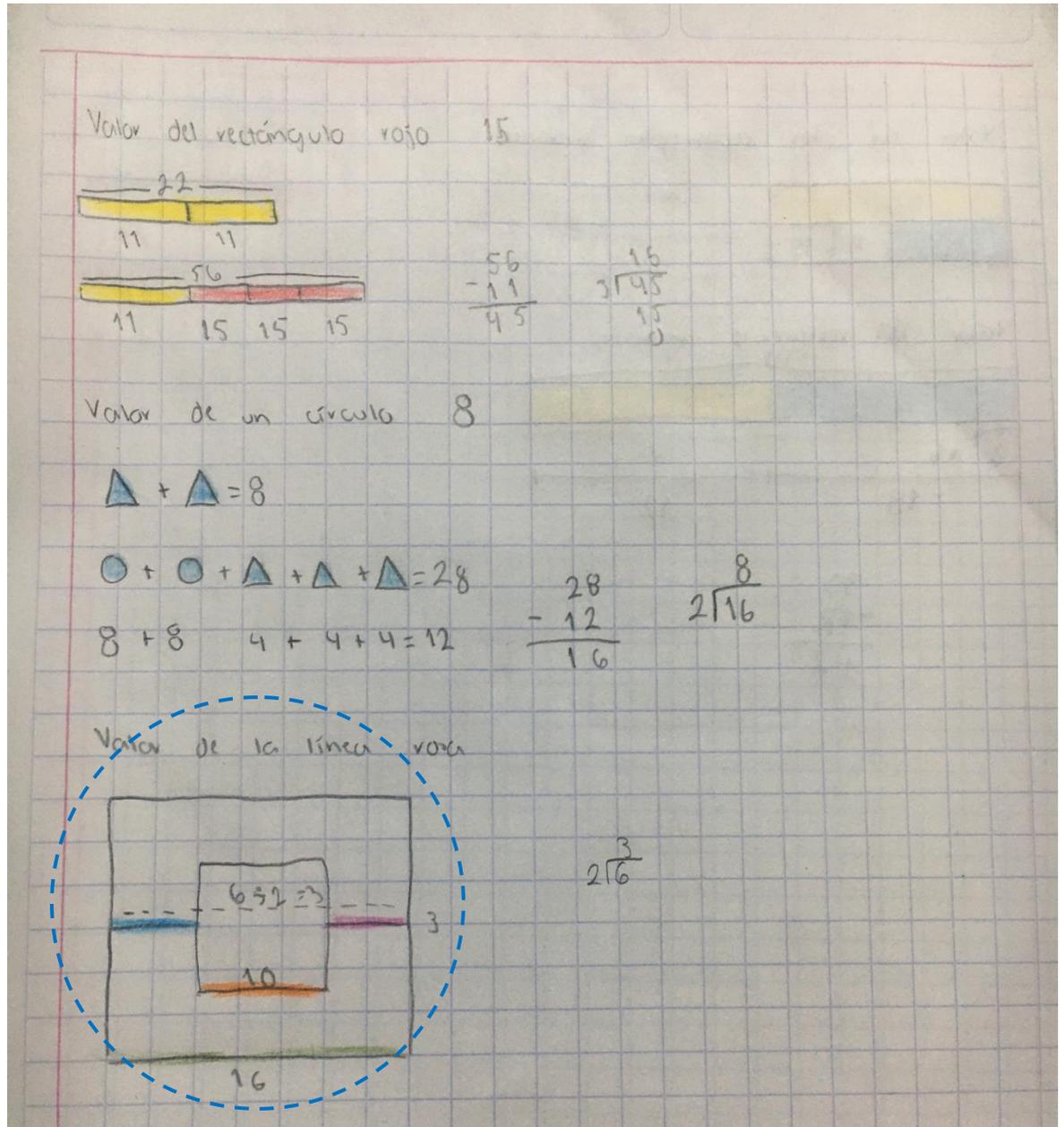


Figura 50. Señalamiento de procedimientos ejemplo de la categoría uso de gráficos

- Texto: fueron aquellos procedimientos en los que de manera narrativa se explicaron los pasos a seguir para resolver el ejercicio, ver Figura 51.

♥: 1
 Creo que en el primer es 12
 porque si dice que vale 30 y son
 6 cuadros que valen 3 son 18 y
 faltan 12 para llegar

♥: 2
 creo que es 15 cada uno porque
 ya son 30 y todo vale 60 y 30
 entre 2 : 15 entonces sería 30

♥: 3
 Es 8 el valor de el círculo
 Ya que
 Abajo la suma es el resultado 8 y
 8 entre dos
 Conclusión que los triángulos
 valen 4 y los círculos 8

Figura 51. Señalamiento de procedimientos ejemplo de la categoría texto

- Narración de generalidades: fueron aquellos procedimientos en los que el estudiante expresa generalidades sin explicar concretamente porcedimientos matemáticos, ver Figura 52.

¿Te gustaría mejorar el puntaje del 20/Nov/2020
 per reto?

Utilice un poco de calcula mental, como sumar y restar y puse un poco de lógica para poder responder. Aunque al ver la puntuación vi que me faltaba o más bien no supe hacer bien la lógica.

Y sí, me gustaría mejorar mi puntaje.

Figura 52. Señalamiento de procedimientos ejemplo de la categoría narración de generalidades

La gráfica de la Figura 53 ilustra los porcentajes de categorías identificadas en los procedimientos compartidos por los estudiantes, para algunos casos se identificó más de una categoría, por ejemplo, la figura muestra procedimientos aritméticos y el uso de gráficos. Se encontró un 36% de recurrencia en el uso de procedimientos aritméticos, seguido del uso de texto con un 30%, en un 20% se encontró el uso de gráficos y en un 14% el uso de la narrativa de generalidades.

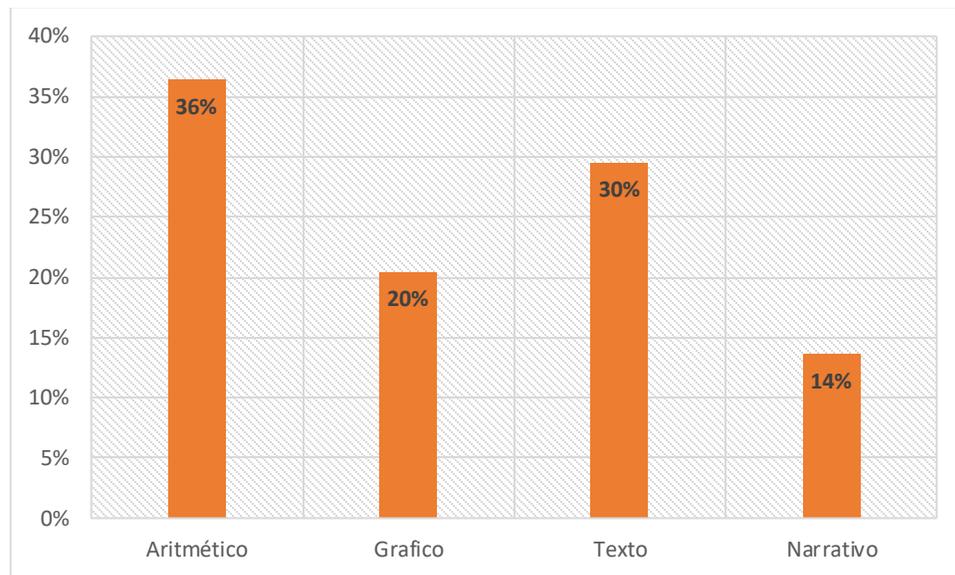
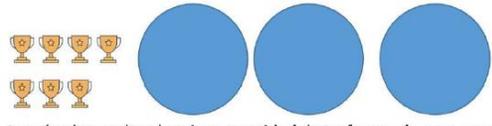


Figura 53. Porcentaje de las categorías identificadas en los procedimientos de la tarea de ejercitación de respuesta múltiple

3.1.3.3. Tarea de ejercitación de respuesta abierta

La tarea de ejercitación de respuesta abierta tenía el objetivo de fomentar interacción entre los participantes, partiendo de la explicación de sus procedimientos y mediante el diálogo con sus pares sobre las técnicas utilizadas en su respuesta. La Figura 54 muestra el ejemplo de la tarea propuesta, se esperaba que el estudiante utilizará el espacio disponible para agregar texto, procedimientos aritméticos, dibujos o gráficos explicando su respuesta.

Mi móvil como cuaderno
Nivel básico



Los círculos ocultan la **misma cantidad** de trofeos **cada uno**, y en **total hay 46 trofeos** ¿Cuántos trofeos oculta **un círculo**?

The image shows a math problem interface. At the top right, it says "Mi móvil como cuaderno" and "Nivel básico". On the left, there are 7 gold trophy icons arranged in two rows: the top row has 4 trophies and the bottom row has 3 trophies. To the right of the trophies are three large blue circles. Below the trophies and circles, the text reads: "Los círculos ocultan la misma cantidad de trofeos cada uno, y en total hay 46 trofeos ¿Cuántos trofeos oculta un círculo?".

Figura 54. Tarea de ejercitación de respuesta abierta

La Figura 55 muestra la gráfica en relación a los tipos de recursos multimedia utilizados por los estudiantes para resolver esta tarea. El 47% subió a la plataforma un archivo en formato pdf, el 24% replicó la tarea en un archivo de Word, el 16% compartió una imagen, finalmente, el 13% subió la fotografía que tomó de su cuaderno.

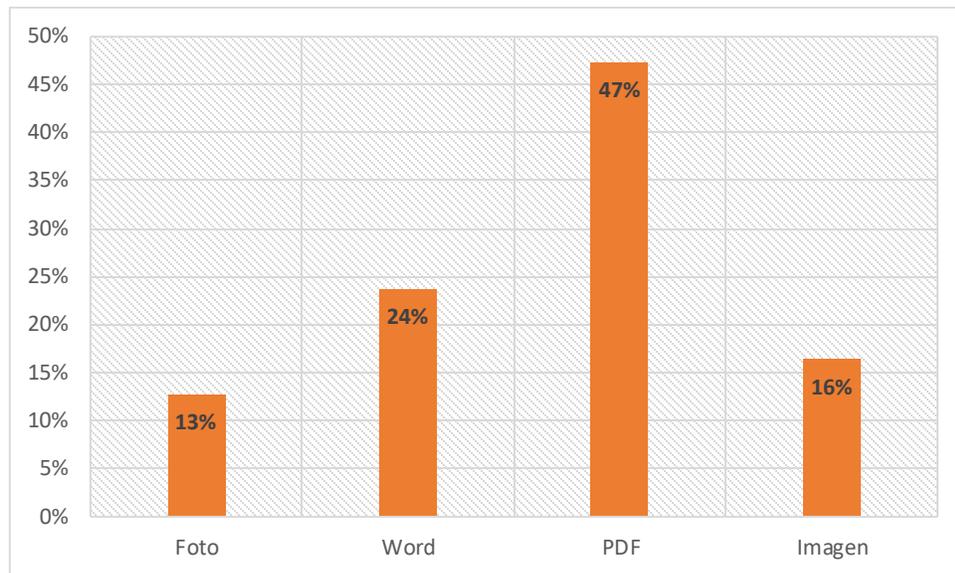


Figura 55. Porcentajes de los tipos de archivos multimedia utilizados en la tarea de ejercitación de respuesta abierta

Se identificaron 3 categorías en el desarrollo de los procedimientos de los estudiantes, las cuáles se analizan a profundidad en el capítulo 4, estas fueron:

- Procedimientos aritméticos: fueron aquellos procedimientos en los que se identificaron expresiones aritméticas, ver Figura 56.

Mi móvil como cuaderno
Nivel básico

Los círculos ocultan la **misma cantidad** de trofeos **cada uno**, y en **total hay 46 trofeos** ¿Cuántos trofeos oculta **un círculo**?

$$\begin{array}{r} 46 \\ -7 \\ \hline 39 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 3 \overline{)39} \\ \underline{39} \\ 0 \end{array}$$

**Cada círculo oculta
13 trofeos**

Página 1 / 1

Figura 56. Procedimientos ejemplo de las categoría procedimientos aritméticos

- Texto: fueron aquellos procedimientos en los que de manera narrativa se explicaron los pasos a seguir para resolver el ejercicio, ver figura.



Figura 57. Procedimientos ejemplo de la categoría texto

- Sin procedimientos: fueron aquellos trabajos en los cuáles el estudiante sólo escribió la respuesta, ver figura.



Figura 58. Respuesta ejemplo de la categoría sin procedimientos

La gráfica de la Figura 59 ilustra los porcentajes de categorías identificadas en los procedimientos compartidos por los estudiantes, para algunos casos se identificó más de una categoría. El 64% de los participantes utilizaron procedimientos aritméticos para resolver la actividad, el 38% utilizó texto para explicar de manera

narrativa como resolvía la tarea, finalmente, el 24% no desarrollo procedimientos en su hoja de trabajo.

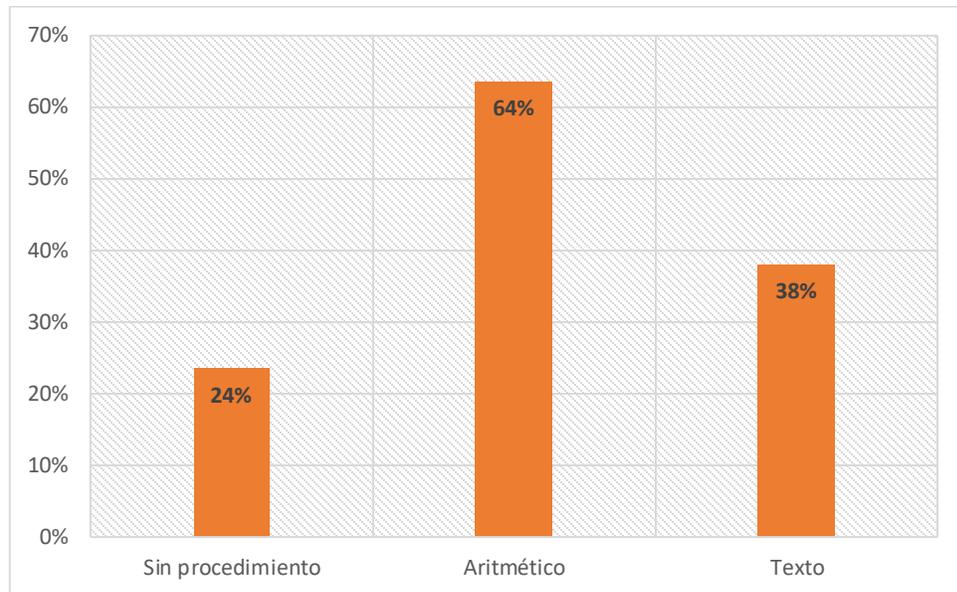


Figura 59. Porcentaje de las categorías identificadas en la tarea de ejercitación de respuesta abierta

La Figura 60 muestra los porcentajes en relación a las respuestas correctas e incorrectas dadas por los estudiantes. El 25% respondió de manera incorrecta la tarea matemática; el 75% contestó correctamente, sin embargo, en ese porcentaje se consideraron aquellos trabajos que no contenían el desarrollo de un procedimiento, por lo tanto, la gráfica muestra también que el 55% de los participantes contestó correctamente el ejercicio, y fue posible validar su aprendizaje mediante sus procedimientos; el 20% de los participantes contestó correctamente sin la evidencia de procedimientos, por lo que no es posible garantizar la validez de su aprendizaje.

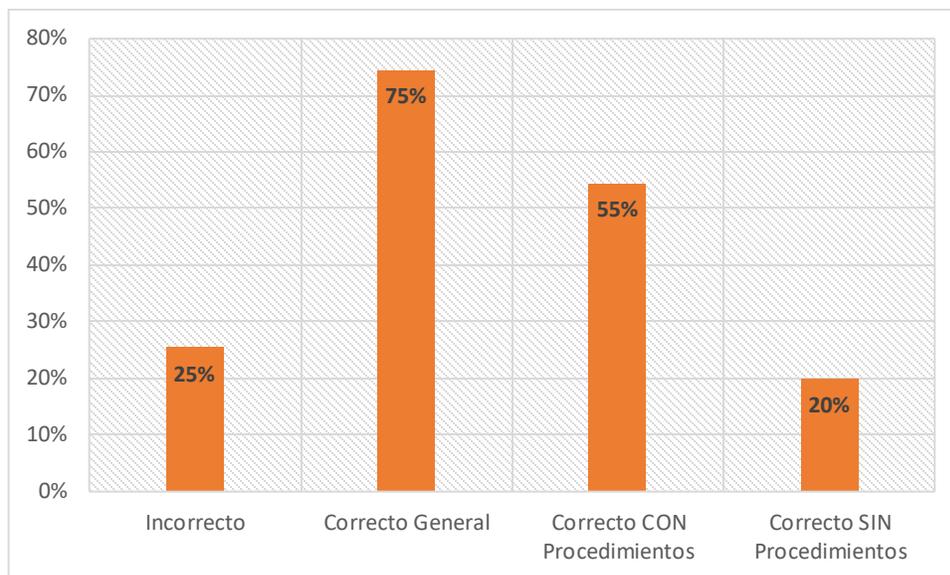


Figura 60. Porcentaje de respuestas correctas e incorrectas de la tarea de ejercitación de respuesta abierta

3.1.3.4. Tareas de discusión y colaboración

El objetivo de la Tarea de discusión fue promover la autonomía y reflexión en la solución de tareas matemáticas, fomentando el diálogo en torno a los procedimientos del estudiante y los de sus compañeros, logrando identificar respuestas correctas e incorrectas; esta tarea se llevó a cabo durante las sesiones en Google Meet. La interacción sincrónica se consideró para la ejecución de la Tarea de Colaboración, en la cual se esperaba promover la negociación de acuerdos comunes de significados y procedimientos. Sin embargo, la Tarea de discusión demandó más tiempo del considerado, por lo que se dio prioridad a los momentos de diálogo y la solución de dudas. En el capítulo 4 se explica a detalle el ajuste de la trayectoria didáctica considerando la versatilidad de los ciclos de la IBD.

La Figura 61 muestra la gráfica de asistencia de la primera y segunda sesiones en Meet. Se observa que tres grupos incrementaron el porcentaje de asistencia en la segunda sesión en Meet las siguientes proporciones, del 8%, 27% y 7%; mientras

que los otros tres grupos redujeron el porcentaje de asistencia en las siguientes proporciones 25%, 8% y 16%.

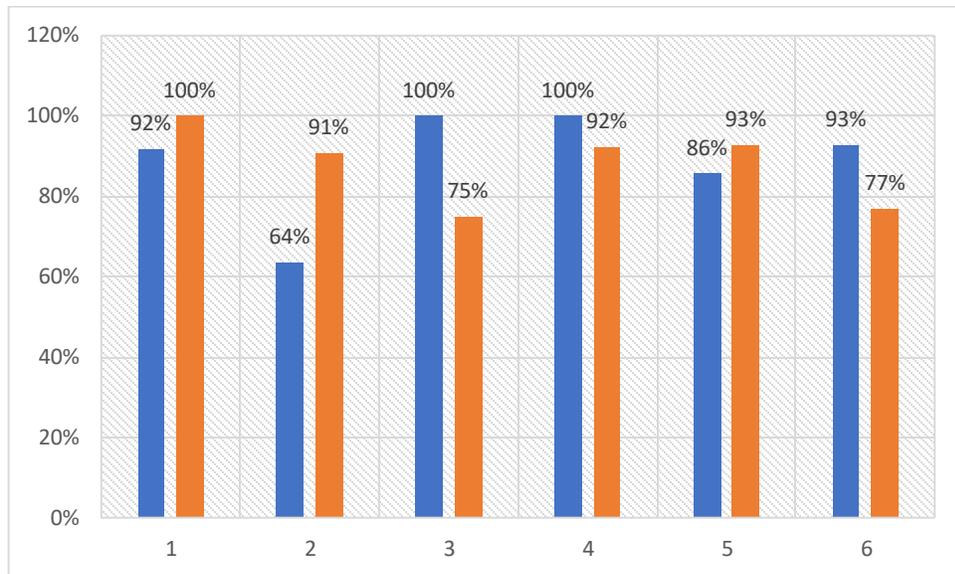


Figura 61. Porcentaje de asistencia de la primera y segunda sesiones en Meet

Para la sesión final en Meet se ajustaron los grupos en relación al nivel de comprensión identificado en la *Tarea de pregunta abierta*. La Figura 62 muestra la gráfica con el número de estudiantes que participaron en cada grupo, las primeras tres barras refieren a los grupos que mostraron mayor dificultad en resolver los ejercicios, es decir, los grupos 1, 2 y 3; las barras 4, 5 y 6, refieren a los grupos que mostraron un mayor dominio en los conceptos abordados durante las sesiones. Esta estrategia de agrupar a los estudiantes en relación al grado de dificultad identificado permitió resolver dudas concretas y validar los aprendizajes adquiridos, además, trabajar con grupos reducidos permitió la participación de todos.

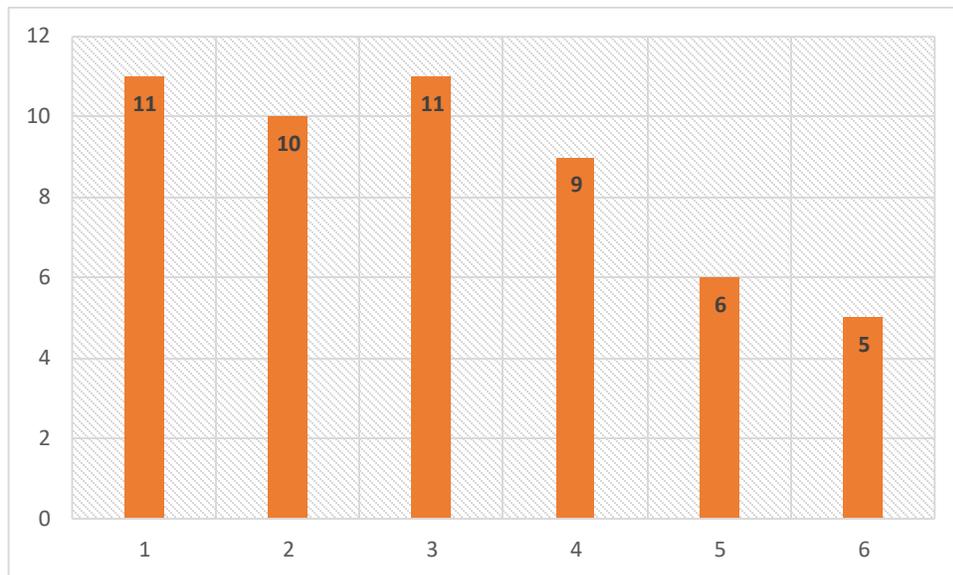


Figura 62. Número de estudiantes que participaron en cada grupo de la sesión final en Meet

3.1.4. Etapa 4: Propuesta de una EAM para abordar el estudio de la variable

En la etapa 4 de la investigación se diseñó y desarrollo el EAM para abordar el estudio de la variable. La Figura 63 muestra el esquema general en relación a los recursos, herramientas y técnicas utilizadas a lo largo de cada etapa de la investigación, y su confluencia con las fases de la IBD, cuyos resultados posibilitaron el incremento de las trayectorias didácticas. En esta etapa se diseña un EAM que considera 6 tipos de tarea y 3 ejes temáticos por abordar. Las fases del último ciclo de la IBD para esta etapa de la investigación se describen a detalle en el Capítulo 6. Diseño de un EAM para abordar el estudio de la variable.

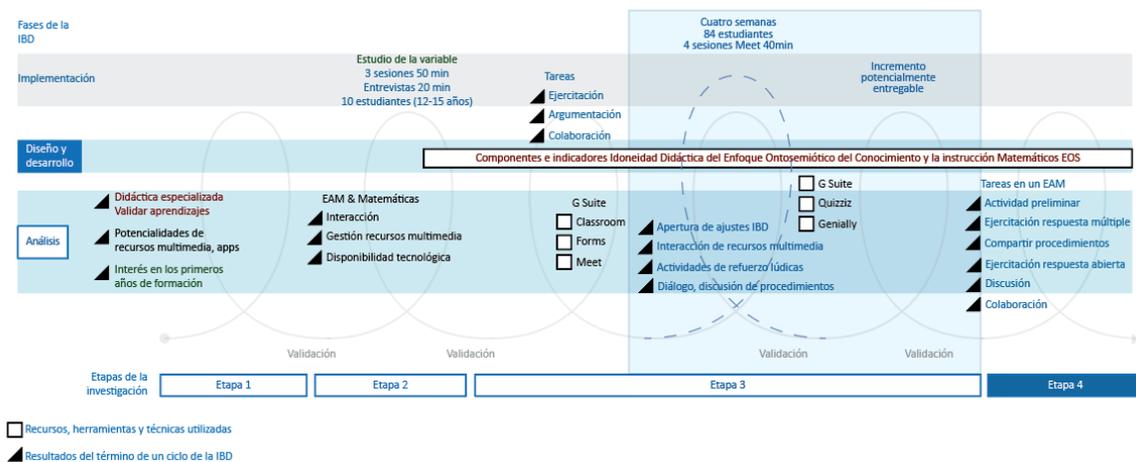


Figura 63. Etapa 4: recursos, herramientas, técnicas y resultados al término de un ciclo de la IBD

Se propusieron las siguientes seis tareas con sus objetivos de aprendizaje:

- Actividad preliminar. Identificar habilidades digitales básicas del estudiante en la plataforma y conocer sus intereses personales.
- Ejercitación con respuestas múltiples. Desarrollar habilidades procedimentales.
- Compartir procedimientos. Explicar el proceso de solución de la actividad matemática.
- Ejercitación con respuesta abierta. Promover la interacción mediante la explicación de procedimientos.
- Discusión. Promover la reflexión e identificación de procedimientos correctos e incorrectos.
- Colaboración. Promover la autonomía y la negociación de acuerdos comunes de significados y procedimientos.

Se definieron tres bloques temáticos y sus objetivos de aprendizaje:

1. Uso del lenguaje algebraico, en el cual el estudiante desarrollará habilidades procedimentales y hará uso del lenguaje aritmético mediante equivalencias numéricas.

2. Uso de valores aritméticos, simbología y lenguaje algebraico, el objetivo de aprendizaje consistirá en calcular un valor desconocido mediante procedimientos aritméticos para evidenciar la asociación de la aritmética y el álgebra.

3. Identificación del carácter multifacético de la variable, el objetivo de aprendizaje consistirá en identificar expresiones algebraicas equivalentes mediante lenguaje algebraico, identificación del uso de la variable como número general y como incógnita.

La Figura 64 muestra el esquema de la temporalidad, el bloque temático y los tipos de tarea durante la etapa de implementación. El diagrama ilustra un espiral, ya que el propósito de la propuesta es replicar la secuencia de las tareas matemáticas incrementando el nivel en los ejercicios, usando como punto de partida el avance de los estudiantes.

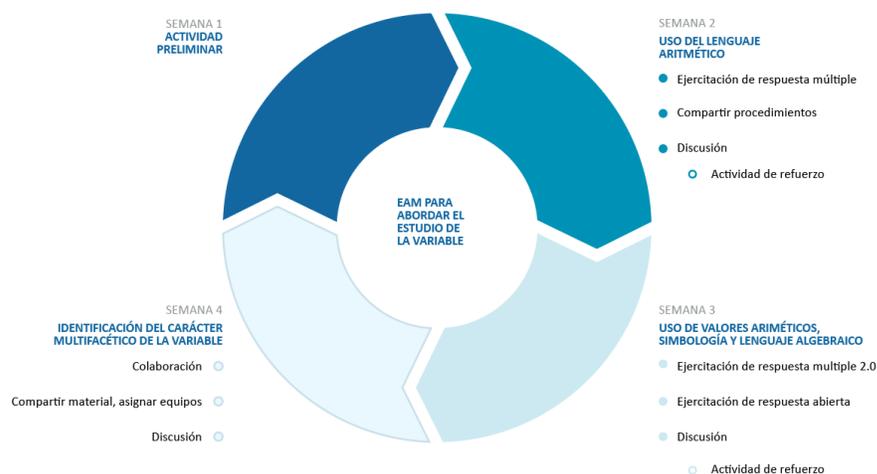


Figura 64. Trayectoria didáctica, temporalidad, bloque temático y los tipos de tarea

La Figura 65 muestra la estructura de las tareas en la plataforma de Google Classroom y en Google Meet. Cada bloque temático corresponde a un tema en Google Classroom; las tareas de actividad preliminar, compartir procedimientos y ejercitación con respuesta abierta corresponden a una tarea en la que deberán

adjuntar un archivo multimedia; las tareas de discusión corresponde en Classroom a una pregunta, que podrán contestar al finalizar la sesión en Google Meet en dónde se emplean las herramientas de Quizizz y Genially para las actividades de refuerzo, y una pizarra interactiva en Jamboard para el análisis de los ejercicios. La actividad de colaboración se gestionará mediante una pizarra interactiva en Jamboard y el correo electrónico para gestionar equipos de trabajo. Como se muestra en la figura, para etiquetar los bloques temáticos se optó por emplear la narrativa de los videojuegos.



Figura 65. Estructura de las tareas en la plataforma de Google Classroom y en Google Meet

En el capítulo 5 se describen a detalle las fases de análisis, diseño y desarrollo de la IBD del EAM propuesto en esta investigación, tomando como fundamento la

herramienta meta-didáctica el EOS y las nociones de idoneidad didáctica y trayectoria didáctica.

CAPÍTULO 4. PRIMERA TRAYECTORIA DIDÁCTICA EN AULA

La primera intervención educativa se llevó a cabo en el periodo del 21 de octubre del 2019 al 13 de diciembre del mismo año. Participó un grupo de diez estudiantes, 4 mujeres y 6 hombres. Las actividades se realizaron en las instalaciones del Colegio, durante el horario escolar, fueron 3 sesiones de 50 minutos cada una. Posterior a cada sesión se realizaron entrevistas semiestructuradas a cada estudiante sobre sus percepciones, dificultades y aprendizajes, cada entrevista duró un promedio de 20 minutos.

Se abordó la comprensión del concepto variable en un grupo de diez estudiantes mexicanos de nivel secundaria (11-12 años), considerando que la dificultad en el aprendizaje de conceptos algebraicos fundamentales refiere a una incapacidad de interpretar el significado de operaciones con símbolos abstractos.

4.1. DISEÑO DE LA PRIMERA TRAYECTORIA DIDÁCTICA

Se definieron los objetivos instruccionales considerando los objetivos del currículo escolar, se propusieron actividades similares al libro de trabajo que utiliza la institución educativa (Ojeda et al., 2012); el documento de referencia para el análisis de los contenidos matemáticos refiere al eje temático: Número, álgebra y variación para primer grado de Secundaria (SEP, 2017). Para cada sesión se consideraron las prácticas definidas por la institución para la solución de los problemas propuestos, éstas prácticas se contrastan con los procedimientos que describe el estudiante en las hojas de trabajo (J. Godino et al., 2014).

Para delimitar el proceso de aprendizaje que permita contrastar cambios significativos en el razonamiento de los estudiantes, se definieron los recursos manipulativos para implementar las tareas en aula. A continuación, se describe el diseño del contenido temático del proceso de instrucción para la enseñanza del concepto variable, particularmente sus usos como número general y cómo

incógnita, así como la implicación del álgebra con disciplinas como la aritmética, geometría y ecología.

La trayectoria didáctica considero como contexto teórico el análisis de la noción de idoneidad didáctica del EOS. En diversos trabajos, se han propuesto una serie de criterios, y sus descriptores, para cada uno de los tipos de idoneidad que propone el EOS (Breda et al., 2018; J. Godino et al., 2012). La Tabla 4 presenta los criterios, componentes e indicadores, para cada tipo de idoneidad propuestos (J. Godino, 2013).

Tabla 4. Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad del EOS. Fuente: Elaboración propia basada en (J. Godino, 2013)

Criterio	Componente	Indicador
Idoneidad epistémica	Situaciones-problema	Identificar situaciones de la vida cotidiana con la operación matemática equivalente. Asignar una letra al precio de un producto y asociarla a una lista de compras. Obtener el perímetro utilizando letras.
	Lenguajes	Identificar los diferentes usos de la variable mediante expresiones abiertas, suma de términos semejantes y perímetros.
	Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Definición el concepto variable y sus usos como número general e incógnita. Validez de expresiones abiertas. Reducción de términos semejantes. Diferencia entre resultado y equivalencia.
	Argumentos	Se identifica el carácter multifacético de la variable.
	Relaciones	Se presentan situaciones que evidencian los diferentes usos de la variable.
Idoneidad Cognitiva	Conocimientos previos	Operaciones aritméticas básicas y perímetro
	Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	Actividades de ampliación y refuerzo al inicio y final de cada sesión
	Aprendizaje	Comprensión del concepto variable e identificación de sus diferentes usos

Idoneidad afectiva	Intereses y necesidades	Reflexión de acciones que involucran el cambio climático y el diseño de ciudades sustentables
	Actitudes	Actividades individuales para el diseño de una ciudad sustentable
	Emociones	Relevancia del álgebra para dar orden a ideas, analizar datos y calcular valores desconocidos
Idoneidad Interaccional	Interacción docente-discente	El docente define el objetivo de la actividad al inicio de cada sesión Se promueve la participación mediante la resolución de tareas individuales y colectivas Retroalimentación inmediata
	Interacción entre alumnos	Actividades colaborativas que permitan llegar a acuerdos sobre los significados aprendidos
	Autonomía	Actividades individuales mediante hojas de trabajo
	Evaluación formativa	Acompañamiento del docente en cada dinámica
Idoneidad Mediacional	Recursos materiales	Material didáctico, hojas de trabajo, tarjetas, plantillas de figuras geométricas y prismas regulares. Uso de proyector.
	Número de alumnos, horario y condiciones del aula	Grupo reducido (10 estudiantes). Aula en condiciones óptimas. Sesiones en horario escolar
	Tiempo	50 minutos por sesión, 3 sesiones semanales
Idoneidad Ecológica	Adaptación al currículo	Primer acercamiento a conceptos algebraicos en relación al currículo escolar
	Apertura hacia la innovación didáctica	Diseño didáctico basado en resultados obtenidos en la comunidad científica referente a las dificultades de los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra, particularmente el concepto de variable y sus diferentes usos
	Adaptación socio-profesional y cultural	Reflexión sobre problemas del contexto actual, como el cambio climático Relevancia de las matemáticas para la toma de decisiones
	Educación en valores	Se fomenta el respeto y cuidado del medio ambiente

	Se promueve el trabajo colaborativo y la equidad
Conexiones intra e interdisciplinarias	Contenidos relacionados con aritmética, geometría y ecología

4.1.1. Primera sesión: El álgebra en nuestra vida cotidiana

El objetivo de la sesión fue analizar la implicación del álgebra en la vida cotidiana, se analizó información sobre el cambio climático (BBC, 2018) para identificar acciones que refieren a operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división). Se pide al estudiante que realice las siguientes prácticas:

Identificar verbos que puedan expresarse con una operación matemática como se ilustra en la Tabla 5.

Expresar una lista de oraciones mediante símbolos o letras, el docente explica la relevancia del álgebra para dar orden a ideas mediante el uso de variables.

Tabla 5. Acciones que refieren a operaciones matemáticas

Operación matemática	Ejemplo de expresiones cotidianas
Suma	Más, aumento, adicionar, sumar, incremento, elevar
Resta	Diferencia, restar, incremento o decremento de una cantidad en comparación con otra, disminuir
Multiplicación	N veces, doble, triple, multiplicar
División	Dividir, mitad, la tercera parte, repartir, compartir

Se pudo suponer que el estudiante identificaba las operaciones aritméticas básicas que refieren a los elementos conceptuales para comprender las prácticas operativas del álgebra. Se esperaba que el estudiante justificará la identificación de una acción de la vida cotidiana con la operación matemática equivalente, como: *El incremento de 2 grados en la temperatura global sería catastrófico*, la palabra

incremento refiere a la operación aritmética de sumar. Los procedimientos y propiedades de la aritmética se utilizaron para introducir el uso de variables y facilitar la transición de aprendizajes aritméticos a los algebraicos.

4.1.2. Segunda sesión: Tienda de productos ecológicos

El objetivo de la sesión fue identificar el uso de la variable como número general asignando letras al precio de diversos productos, así como la suma de términos algebraicos en una lista de compras. Se pidió al estudiante que realizara las siguientes prácticas:

1. Resolver actividad de ampliación y refuerzo de la sesión previa que refiere a expresar con notación algebraica un conjunto de oraciones.
2. Asignar letras al precio de una lista de productos y expresar el costo total de una compra.

En la sesión se abordó el uso de la variable como número general, el concepto de término algebraico, el concepto de términos semejantes y la reducción de términos semejantes. Se pudo suponer que el estudiante identificaba las palabras que pueden expresarse con una operación matemática.

Para la actividad de ampliación y refuerzo se esperaba que el estudiante expresara con notación algebraica un conjunto de oraciones, como: *El nivel del mar incremento 10 centímetros*, la palabra *incremento* refiere a la operación aritmética de sumar, los elementos que componen esta operación matemática son nivel del mar y 10 centímetros, el objetivo de la actividad era que el estudiante asociara una letra para el primer componente e identificará que 10 centímetros es un valor conocido. Se propuso una segunda actividad en la que se esperaba que el estudiante identificara el uso de la variable como número general, al asignar letras al precio de una lista de productos y representar mediante las variables asignadas el costo total de una compra.

4.1.3. Tercera sesión: Edificios verdes

El objetivo de la sesión fue identificar el carácter multifacético de la variable, su uso como número general y cómo incógnita mediante el cálculo del perímetro de figuras geométricas regulares. Se pidió al estudiante que realizará las siguientes prácticas:

1. Identificar las figuras geométricas que ilustran terrenos para la construcción de edificios verdes.
2. Expresar el perímetro utilizando las letras que refieren a los lados de las figuras.
3. Calcular el valor de las variables en un conjunto de figuras utilizando los datos proporcionados, como su perímetro y altura.

Se esperaba que el estudiante fuera capaz de definir que es una variable y operarla identificando dos de sus usos, como número general y como incógnita. Los procedimientos y propiedades de la geometría se utilizaron para evidenciar la relación del álgebra con otros campos disciplinares.

4.2. EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LA PRIMERA TRAYECTORIA DIDÁCTICA

En este apartado se describe la etapa de experimentación de la primera intervención educativa mediante la implementación de una trayectoria didáctica con fundamento en el EOS, particularmente en la noción de idoneidad didáctica como herramienta para una intervención efectiva en aula.

Para el contraste y revisión de conjeturas sobre el proceso de aprendizaje previsto, se realizó el análisis retrospectivo entre las etapas de preparación del experimento y la experimentación.

4.2.1. Primera sesión: el álgebra en la vida cotidiana

Los estudiantes no mostraron dificultad en identificar acciones de la vida cotidiana con su operación matemática equivalente, incluso para identificar la operación matemática la mayoría de los estudiantes referían a la acción concreta, por ejemplo, la acción de sumar, para identificar la operación suma. Sin embargo, los estudiantes presentaron dificultades para diferenciar la suma de la multiplicación, en el caso de la división no fueron capaces de definir qué componentes referían a dividendo o divisor. Esto, no necesariamente se asocia a un concepto erróneo del estudiante, es probable que la actividad no fuera clara al definir éstos componentes. Por ejemplo: Las frases “*Conozco un tercio de la ciudad*” o “*Terminé la mitad de mi tarea*” podrían resultar confusas, ya que expresan que lo que se divide no son cantidades o números, sino objetos cotidianos como una ciudad o una tarea.

En relación al lenguaje utilizado por los estudiantes, se identificó el uso de íconos, símbolos, índices y letras. La Figura 66 muestra la respuesta del estudiante E ante el planteamiento de expresar una oración cotidiana utilizando letras y símbolos matemáticos; se observa que el estudiante traduce la oración palabra por palabra, dibuja un sujeto que refiere a la palabra “*Caminé*”, para especificar la persona del sujeto, “Yo caminé”; utiliza simbología que conoce para expresar la unidad de medida del kilómetro; identifica la operación aritmética asociada que es la resta, y al no encontrar como representar la palabra “*que*” la escribe tal cual; usa un ícono para ilustrar la palabra “*ayer*”, un sol y una luna que refieren al trayecto de un día y flechas en sentido contrario a las manecillas del reloj indicando el tiempo en retroceso. Proporciona una segunda respuesta utilizando únicamente la letra “*c*” que etiqueta la palabra “*caminé*” y el signo de la resta con la simbología conocida para identificar un kilómetro.

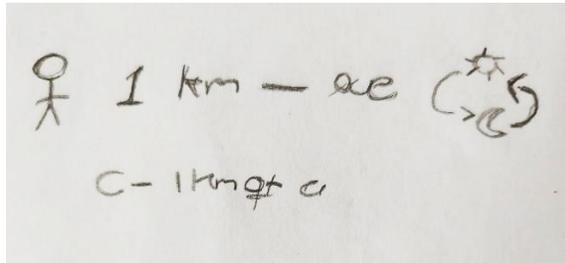


Figura 66. Respuesta del estudiante E a la actividad de la primera sesión

La mayoría de los estudiantes lograron identificar operaciones aritméticas básicas sin asociar los componentes que operan en cada expresión. Sin embargo, hubo estudiantes que lograron asociar los componentes utilizando íconos como se ilustra en la Figura 67, con el ejemplo de “El nivel del mar aumentaría 10 centímetros”, el estudiante A usa dibujos, que pueden interpretarse como íconos según Pierce (1974), para expresar con detalle la idea de la oración; en un segundo ejemplo etiqueta el “nivel del mar” con una única letra e indica la unidad de medida de centímetros por metros.

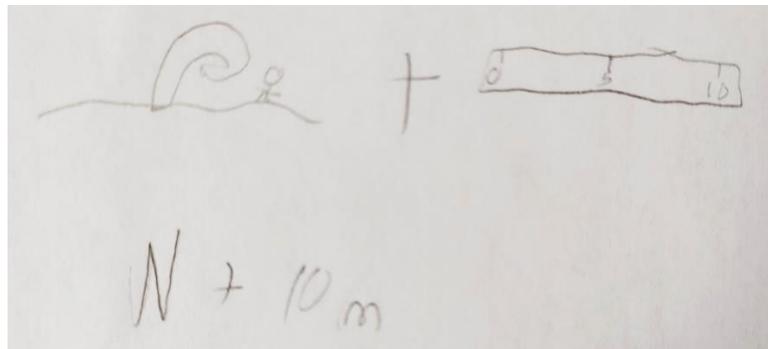


Figura 67. Respuesta del estudiante A

Se identificó la acción de etiquetar componentes en lugar de asignar variables para operarlas, esta es la respuesta del estudiante A cuando se le preguntó en entrevista qué fue lo más difícil de resolver en las actividades de la primera sesión:

Estudiante A: Así como que a veces pues encontrar una letra para algunas donde era, no sé, nivel del mar junto encontrar una letra sola para explicar el nivel del mar.

Docente: ¿Por qué te cuesta encontrarla?

Estudiante A: Pues como que eran muchas palabras, entonces dije, como le hago para resumirla en una letra, porque en las otras, por ejemplo, pizza era una y nada más le pusimos la p, más fácil la primera letra.

4.2.2. Segunda sesión: tienda de productos ecológicos

La segunda sesión consideró gran parte del tiempo a actividades de ampliación y refuerzo, por lo que los estudiantes percibieron la sesión como una actividad de repaso; estas son algunas de las frases que utilizaron los estudiantes cuando se le pidió que relatará cuales fueron los objetivos de la sesión: *“estuvimos trabajando de nuevo eso de los números”, “estábamos practicando”, “es practicar los conceptos que vimos en la otra sesión”*.

A diferencia de la primera sesión, en la que los estudiantes manifestaron dificultad en asignar letras a los componentes de una operación aritmética, durante la segunda sesión asignaron con facilidad letras al precio de un producto para asociarlo a una lista de compras. Sin embargo, persistió la acción de etiquetar el nombre de los productos. Los estudiantes no operaban las letras como una variable.

La siguiente respuesta refiere a las actividades de la segunda sesión, confirmando que la acción de etiquetar generó un conflicto cognitivo causando dificultad y confusión:

Docente: ¿Qué fue lo más difícil para ti en la sesión?

Estudiante B: Ponerle una letra a cada cosa

Docente: ¿Por qué fue difícil?

Estudiante B: No sé, porque me confundía, por que al principio le ponía la letra que iniciaba, pero no se podía repetir y me empezaba a confundir

Docente: ¿No se podía repetir con qué?

Estudiante B: La letra, en la hojita que me toco siempre le ponía la letra que empezaba, pero había varias que empezaba con la misma letra, y me empezaba a confundir.

Esto último haciendo referencia a la indicación del docente sobre que los costos de los productos debían ser diferentes entre sí.

Se identificaron diversos lenguajes para expresar la operación aritmética de la multiplicación, un ejemplo es la respuesta de la Figura 68, el estudiante F utilizó diversos signos para expresar la operación, todos correctos, aunque se evidencia cierta resistencia al uso del signo igual para indicar que las expresiones son equivalente, como el caso de $B \bullet 2 = 2B$.

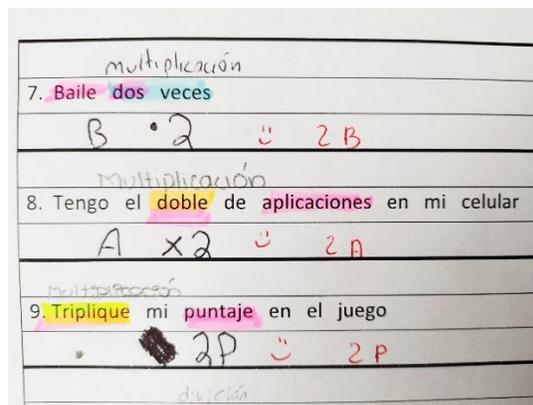


Figura 68. Respuesta del estudiante F a la actividad de la segunda sesión

En relación a la simbología para expresar unidades de medida, se identificó un conflicto cognitivo debido a que los estudiantes no estaban seguros si se trataba de otra variable, consideraban relevante identificar a qué tipo de valores se hacía referencia. En la Figura 69 se ilustra la respuesta del estudiante E, quien incluso para expresar “nivel del mar” utiliza un acrónimo de la expresión “NdM”.

1. La temperatura aumento 1 grado	$T + 1^\circ$
2. A mi ahorro le sume 100 pesos	$A + 100 \$$
3. El nivel del mar se incremento 10 centímetro	$N d M + 10 cm$
4. A mi ahorro le reste 50 pesos	$A - 50 \$$

Figura 69. Respuesta del estudiante E a la actividad de la segunda sesión

La Figura 70 muestra un error cognitivo persistente, si bien en principio podría decirse que el estudiante reduce términos semejantes de manera correcta, en realidad se identifica que realiza el procedimiento sin comprender que cada variable es un objeto particular, cuando expresa el costo total de la compra suma todos los coeficientes asociando la letra a una etiqueta sin valor, los valores numéricos que el estudiante identifica como operables refieren a los coeficientes.

Tienda de productos ecológicos		Lista de compras de Mauh	
Producto ecológico	Costo en pesos		
Champú en barra	S	*Dos champús de barra	$S+S = 2S$
Cepillo de dientes hecho de bambú	V	*Tres cepillos de dientes	$V+V+V = 3V$
Vajilla de madera	Z	*Cuatro lapiceros	$C+C+C+C = 4C$
Cargador móvil solar	N	*Una bolsa de Yuca	$H = 1H$
Temporizador para la ducha	M		$2S+3V+4C+1H =$
Lapiceros hechos de botellas	C	Costo total	10
Bolsas de almidón de yuca	H		

Figura 70. Respuesta del estudiante D a la actividad de la segunda sesión

Los argumentos de los estudiantes durante las entrevistas permitieron identificar el nivel de comprensión del concepto variable, este dato es difícil de identificar en las hojas de trabajo, ya que las actividades consideraban aspectos procedimentales, sin embargo, su resolución no garantizaba la comprensión correcta del concepto

variable. Los estudiantes asociaban una variable con términos como letra, palabra, objeto, variante, componente, opción o símbolo. Para algunos la variable es un objeto o lugar del mundo real, lo que evidencian expresiones como:

- *"La bolsa tiene más comida, la bolsa es la variable"*

- *"Esas letras es como el significado de la pizza o ensalada"*

- *"...forma de representar algo"*

Sin embargo, algunos estudiantes identificaron que la variable puede referir a la representación de valores, que pueden ser específicos o descubiertos mediante cierta información, como lo manifiestan las siguientes expresiones:

- *"...un número que no se conoce pero que se puede conocer con ciertos datos"*

- *"...maneras variadas de representar un valor específico"*

- *"...como un número nuevo reemplazable, sería como para llenar un hueco, pero para luego cambiarlo pues por un número"*

- *"...algo que da igual"*

4.2.3. Tercera sesión: edificios verdes

Los estudiantes identificaron equivalencia en la suma de términos semejantes con su expresión reducida, como se ilustra en la Figura 71, pero no garantiza la comprensión de la variable para operarla matemáticamente, pareciera que seguían reglas de manera procedimental o por convención.

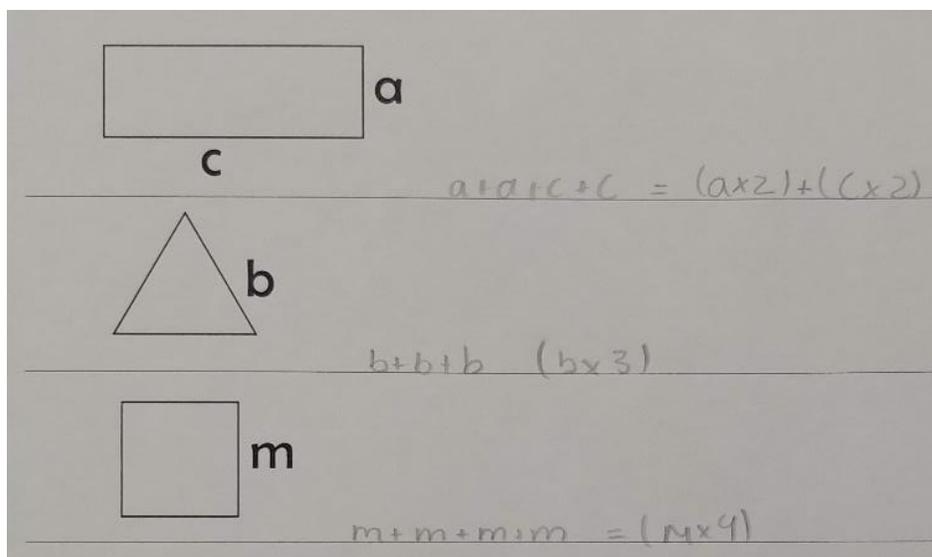


Figura 71. Respuesta de la estudiante C, actividad de la tercera sesión

Se identificaron significados erróneos sobre el perímetro y el área, aunque los estudiantes conocían las fórmulas para calcularlos no podía definir a que refería el perímetro de una figura geométrica y cuál era la diferencia con el área. Sin embargo, a excepción de un estudiante, todos terminaron las tareas definidas en cada sesión y de manera correcta. Esto podría deberse a que las adaptaciones curriculares tenían semejanza con las actividades del libro de trabajo de la institución, con excepción de la primera sesión que dio la libertad de trabajar en una hoja en blanco.

Esta sesión permitió que el estudiante asociará dos usos de la variable, como un número general y como un valor fijo, se alcanza parcialmente el objetivo de la trayectoria didáctica, ya que los estudiantes no identificaron el uso de la variable como incógnita. Para expresar el perímetro de figuras geométricas se proponen dos actividades, el docente pregunta si para el primer caso, ver Figura 72, la letra "c" puede tomar cualquier valor, los estudiantes responden afirmativamente y con seguridad; cuando propone la segunda actividad, ver Figura 73, el docente pregunta lo mismo, ¿puede la letra "c" tomar cualquier valor?, aunque algunos contestan afirmativamente, otros esperan, reflexionan y responden, no.



Figura 72. Primera actividad de la tercera sesión

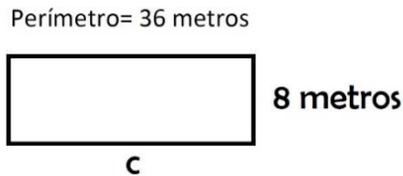


Figura 73. Segunda actividad de la tercera sesión

Se observa que los estudiantes identifican que la variable “c” tiene un valor fijo, definido por los datos que proporciona el problema de la Figura 74. Sin embargo, para obtener el valor de la variable no es necesario operarla, la letra puede ser ignorada durante el procedimiento de resolución, el cual fue aritmético, aunque en algunos casos se usaron expresiones del lenguaje natural.

<p>Perímetro= 34 metros</p> <p>10 metros</p> <p>m 7</p> <p>$10 + 10 = 20$ Para 34 14 se divide y Sale en numero</p>	<p>Perímetro= 36 metros</p> <p>8 metros</p> <p>c 10</p> <p>Sumo 8+8, despues veo cuanto falta Para 36 y que Sale el numero</p>	<p>Perímetro= 30 metros</p> <p>10 metros</p> <p>b 5</p> <p>Sumo 5+5 = 10 veo cuanto falta que 20 lo divido y me sale el resultado</p>
--	--	---

Figura 74. Respuesta del estudiante C en la tercera sesión

Los estudiantes fueron capaces de diferenciar dos usos de la variable, como un valor general y como un valor fijo. Sin embargo, no operan las variables para resolver las actividades, utilizan procedimientos aritméticos mediante diversas formas de expresión; la estudiante B resuelve mediante expresiones aritméticas y el lenguaje natural, es decir, relata el orden en el que resuelve la actividad valiéndose de expresiones como sumas y restas, como se ilustra en la Figura 5.

El estudiante A, ver Figura 75 utiliza operaciones aritméticas sin indicar ningún orden, las expresa de la forma convencional, sin asociar expresiones de equivalencia o igualdad.

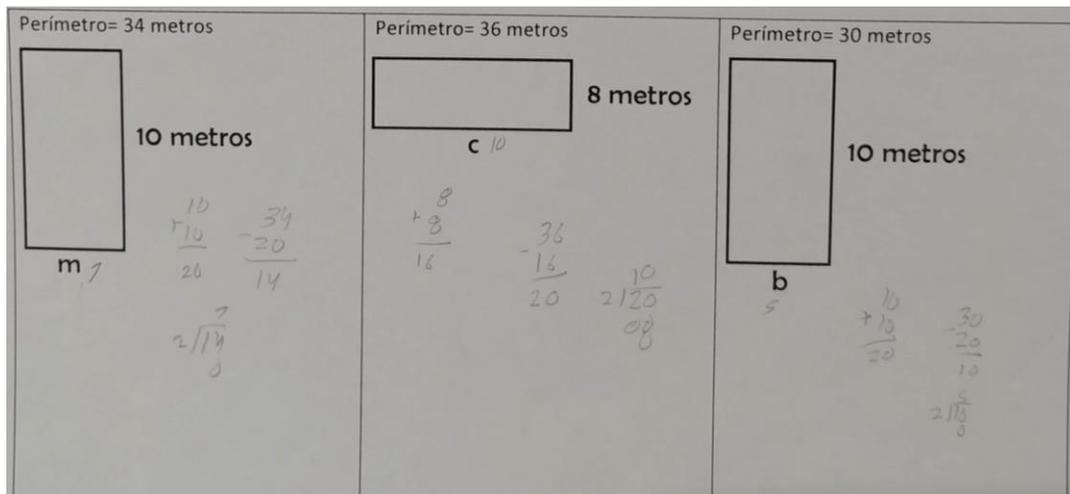


Figura 75. Respuesta del estudiante A en la tercera sesión

El estudiante C emplea una codificación ordenada, indicando las operaciones horizontales y de forma procedimental, similar a la formalidad de expresiones algebraicas que denotan equivalencia, ver Figura 76. En estos ejemplos los estudiantes ignoraron el signo igual, "=", para indicar el valor de la variable.

Indicaciones: Calcula el valor de las letras de las siguientes figuras considerando el perímetro y el valor de la altura.

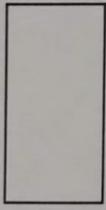
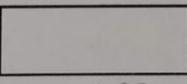
Perímetro= 34 metros	Perímetro= 36 metros	Perímetro= 30 metros
 <p>10 metros</p> <p>m</p>	 <p>8 metros</p> <p>c</p>	 <p>10 metros</p> <p>b</p>
$10 + 10 = 20$ $34 - 20 = 14$ $14 \div 2 = \underline{7}$	$8 + 8 = 16$ $36 - 16 = 20$ $20 \div 2 = 10$	$10 + 10 = 20$ $30 - 20 = 10$ $10 \div 2 = 5$

Figura 76. Respuesta del estudiante C en la tercera sesión

Otro ejemplo es el de la respuesta del estudiante D, ver Figura 77, aunque reduce de manera correcta los términos semejantes ignora el signo igual, no asocia o no está seguro de que se trató de una equivalencia. Los estudiantes utilizaron el signo igual cuando se trataba del resultado de una expresión aritmética.

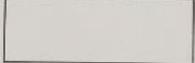
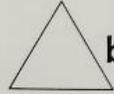
 <p>c</p>	$a + a + c + c$	$(2a + 2c)$
 <p>b</p>	$b + b + b$	$(3b)$
 <p>m</p>	$m + m + m + m$	$(4m)$

Figura 77. Respuesta del estudiante D a la actividad de la tercera sesión

Un aspecto relevante es la poca autonomía del estudiante, ya que para cada tarea era necesaria la confirmación del docente que indicará que era correcto el procedimiento. Estas son las respuestas de dos estudiantes cuando en entrevista se le preguntó sobre cómo sabrían si sus respuestas son correctas:

“Pues paso al pizarrón, aunque no haya acabado, ósea se me hace como lo más relevante, porque así el profe sabe que ya le entendí al tema. Te puede checar la libreta y ponle tienes 3 de 3 bien, pero el profe no sabe si tardaste mucho, si todavía no entiendes y si pasas al pizarrón pues, al menos yo, me siento al frente, pues ahí el profe ya ve que hace el procedimiento correcto, ya sabe que lo entendiste”

“Porque así lo tenían los demás y pues estoy segura”

Estas respuestas manifiestan la necesidad de fomentar la autonomía en el estudiante, que está relacionada con la capacidad de comprobar y validar sus procedimientos, lo que implica dotarlo de diversas herramientas matemáticas que le permitan comprobar sus respuestas de manera autónoma.

4.3. RESULTADOS DE LA PRIMERA TRAYECTORIA DIDÁCTICA

Los resultados presentados en cada una de las fases permitieron identificar la pertinencia de las actividades propuestas considerando los criterios de idoneidad del EOS. Las actividades propuestas evidenciaron dos usos de las variables considerando diversas situaciones; el primer acercamiento refiere a la asociación de expresiones de la vida cotidiana con el uso de letras y símbolos matemáticos, en donde las variables representan objetos o lugares. En relación a su uso como un número general, se propone asociar la variable al costo de un producto para expresar el costo total de una compra, los estudiantes utilizan recursos aritméticos como la suma. Los estudiantes lograron resolver las actividades asociando la variable como un valor general y como un valor fijo mediante el cálculo del

perímetro de figuras geométricas regulares. Sin embargo, no lograron operar las variables asociando su uso como una incógnita.

En relación al criterio de idoneidad cognitiva, el análisis preliminar sobre el aprendizaje del álgebra con fundamento en los resultados reportados en la investigación, permitió identificar como dificultad recurrente la comprensión del carácter multifacético de la variable. Aspectos como la disposición y colaboración de la institución educativa facilitó la identificación de objetivos institucionales, métodos de trabajo y consideraciones curriculares. Sin embargo, en relación a los aprendizajes esperados, persisten las dificultades asociadas con la abstracción e identificación de los elementos que operan en una expresión aritmética, así como el uso de variables para expresar equivalencias. Aunque se identificaron dos usos de la variable, no se logró el objetivo de operar la variable como una incógnita, debido a que las actividades propuestas no demandaban operar las letras, sino encontrar un valor desconocido fijo.

Sobre el criterio de idoneidad epistémica se consideraron escasas las oportunidades de argumentación, este resultado tiene relación con componentes del criterio mediacional tales como los recursos utilizados, es decir, las hojas de trabajo con actividades procedimentales, así como el tiempo asignado para cada actividad, el cual era limitado debido a que la trayectoria didáctica se llevó a cabo durante el horario escolar de los estudiantes.

El criterio de idoneidad ecológica consideró la disposición y comunicación con directivos y docentes para el diseño de actividades con relación al currículo escolar; la institución promueve entre sus valores institucionales el cuidado del medio ambiente, incluso cuenta con reconocimientos en este ámbito, lo que motivó que la trayectoria didáctica considerará como contexto el cambio climático, el consumo de productos ecológicos y el diseño de edificios verdes. Sin embargo, éstos temas no despertaron mayor interés en los estudiantes, debido a que no fue clara la asociación con el álgebra, se abordaron únicamente como un contexto preliminar con breves explicaciones.

La idoneidad mediacional consideró espacios adecuados; trabajar con un grupo reducido permitió la diversidad de materiales didácticos como tarjetas, plantillas, recortes de figuras geométricas y tableros de trabajo. Sin embargo, el tiempo asignado para cada sesión fue limitado, ya que se trabajó durante el horario escolar considerando la disponibilidad de horarios de las materias.

En relación a la idoneidad afectiva, los estudiantes manifestaron entusiasmo y curiosidad al inicio de cada sesión, fue poco el interés por temas referentes al contexto ecológico y su relación con el álgebra. Para algunos las sesiones eran una forma de evadir sus clases seculares, un distractor de la rutina diaria; para otros, al no tener un valor curricular que impactará su desempeño académico restaron importancia al logro de los objetivos planteados. En este sentido se evidencia una práctica común en el ámbito escolar, la necesidad de recibir una recompensa que garantice que vale la pena el esfuerzo de la tarea matemática, éstas recompensas están asociadas con valores cuantitativos que impactan la calificación del estudiante, es decir, ellos relacionan la importancia de ciertas tareas con el valor de cierta puntuación.

La idoneidad interaccional evidenció conflictos semióticos difíciles de identificar debido a las pocas oportunidades para la negociación y argumentación. Además de la poca autonomía del estudiante para comprobar y validar sus procedimientos. Los argumentos sobre la identificación del carácter multifacético de la variable son escasos, fueron pocos los espacios para el diálogo durante las sesiones, debido al tiempo asignado para cada sesión, 50 minutos, insuficiente para las actividades asignadas y, por otro lado, el diseño de las actividades favoreció aspectos procedimentales debido la semejanza con las tareas curriculares de la institución. Las entrevistas dan muestra de la apropiación de significados erróneos, como, "una variable es cualquier cosa".

4.4. REFINAMIENTO DE LA PRIMERA TRAYECTORIA DIDÁCTICA

Se identificó que la trayectoria didáctica propuesta favoreció aspectos procedimentales, con pocas oportunidades de argumentación e interacción, fundamentales para la comprensión y negociación de los aprendizajes adquiridos por el estudiante. La adaptación de las actividades con el proyecto educativo y las directrices curriculares resultó en hojas de trabajo que dificultaron la identificación de conceptos erróneos, los cuáles se identificaron durante las entrevistas.

Para la enseñanza efectiva de las matemáticas el docente requiere la especialización sobre el desarrollo de contenidos matemáticos curriculares, esto implica que la práctica docente es un proceso reflexivo y de mejora constante en relación al avance progresivo del estudiante; en este sentido el EOS proporcionó herramientas operativas para valorar la pertinencia didáctica en cada una de las etapas del estudio, identificando áreas de oportunidad en los métodos de enseñanza implementados.

Se consideraron insuficientes los componentes que refieren al lenguaje, reglas y argumentos. Este resultado coincide con una discontinuidad en las configuraciones de la trayectoria epistémica, Godino (2015) asocia esta brecha con la complejidad en el uso de diversos registros de representación semiótica, tratamiento y conversión, lo que fue evidente en la dificultad de los estudiantes para operar la variable como un objeto matemático. Considerando los niveles para describir los usos de la letra que propone Küchemann (1978), los estudiantes consideraron la variable como el nombre o abreviatura de un objeto; en algunos casos pudieron identificarla como un valor específico, aunque desconocido, que no requiere ser evaluado; hubo estudiantes que ignoraron la letra, ya que la actividad no demandaba su manejo o transformación para resolver la tarea.

Los estudiantes manifestaron dificultades cuando identificaban unidades de medida en las actividades, como km para kilómetro o el signo \$ para indicar pesos, se preguntaban si entonces también se trataba de variables; por lo que se

identifica la necesidad de distinguir las propiedades que tienen los objetos de una expresión algebraica, como lo define Peirce (1974), se relacionan diversos tipos de signos en la escritura matemática, las letras son índices, los signos como $+$, $-$, $=$, que se identifican como símbolos y la expresión global como un ícono, ya que la expresión algebraica es la traducción del enunciado verbal al lenguaje matemático.

Se identificó cierta resistencia en el uso del signo igual cuando había que establecer relaciones entre valores conocidos con las variables implicadas, como el caso de las figuras geométricas y su perímetro. Es recurrente la visión operativa del signo igual, los estudiantes lo usan como un total o una respuesta, Frost (2015) lo denomina como el procedimiento de resolver, los estudiantes no consideran válidas expresiones abiertas y hay poca comprensión sobre los conceptos de equivalencia o igualdad.

Estos resultados coinciden con Larios-Osorio (2017) en relación a la necesidad de propuestas didácticas que doten de sentido el uso del Álgebra como una herramienta útil para el estudiante; su enseñanza debe abordarse como un medio para aprehender técnicas, lenguaje y procesos cognitivos; la relevancia de validar la pertinencia del proceso de enseñanza-aprendizaje mediante un enfoque desarrollado en el marco de la Didáctica de las Matemáticas como el EOS, permitió identificar áreas de oportunidad, proporcionando una visión ampliada de la enseñanza de la variable y su carácter multifacético.

La Figura 78 muestra el esquema general de la primera trayectoria didáctica en aula descrita en este capítulo, considerando la temporalidad, el objetivo de aprendizaje y las prácticas a desarrollar por las y los estudiantes.

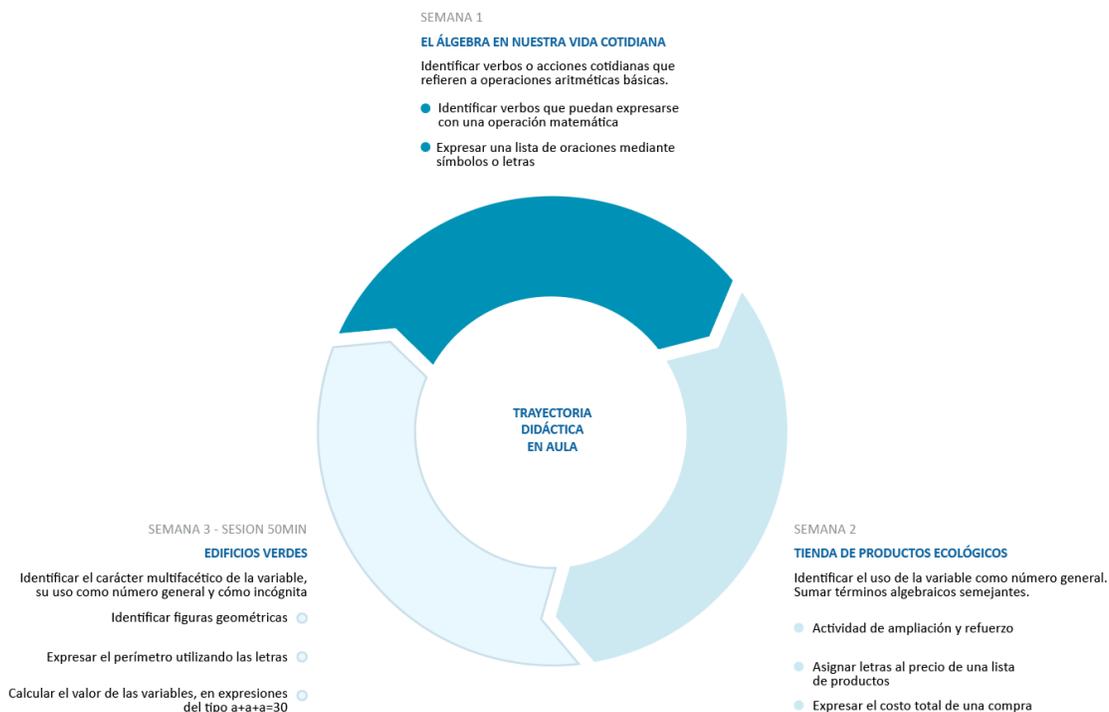


Figura 78. Esquema general de la primera trayectoria didáctica en aula

Las áreas de mejora identificadas en la primera trayectoria didáctica refieren a estos cuatro aspectos: significados erróneos adquiridos que persistieron en los estudiantes, la definición del contenido temático abordado, estrategias para promover la descripción de procedimientos matemáticos y espacios de mayor interacción para compartir ideas.

Estos aspectos se consideraron para el diseño de la segunda trayectoria didáctica, la cual se llevó a cabo en un entorno de aprendizaje móvil:

1. Identificar el uso del signo igual: definir como se usa el signo igual para explicar su relación con el concepto de equivalencia matemática.
2. Definir bloques temáticos: transitar del lenguaje aritmético al lenguaje algebraico progresivamente mediante el uso de símbolos y figuras.
3. Editar y compartir archivos multimedia: analizar los procedimientos de los estudiantes para resolver las tareas propuestas.

4. Interactuar en sesiones en vivo: incrementar la interacción entre estudiantes y docente, compartir y escuchar ideas, dudas y procedimientos.

CAPÍTULO 5. SEGUNDA TRAYECTORIA DIDÁCTICA EN UN ENTORNO DE APRENDIZAJE MOVIL

La segunda intervención educativa se llevó a cabo en el periodo del 12 de noviembre del 2020 al 21 de diciembre del mismo año. Fueron 4 actividades asíncronas en plataforma digital y 4 sesiones sincrónicas en plataforma digital. Se utilizaron las herramientas de G Suite de Google con las que contaba la institución, la segunda intervención fue totalmente a distancia. Participaron 84 estudiantes, 49 mujeres y 35 hombres. Se dividieron en 6 grupos según se ilustra en la Tabla 6.

Tabla 6. Distribución de los grupos para la segunda trayectoria didáctica

Equipo	Número de estudiantes	
	Mujeres	Hombres
Naranja	8	5
Rosa	8	6
Amarillo	7	7
Morado	8	6
Rojo	8	6
Verde	10	5
Total	49	35

5.1. DISEÑO DE LA TRAYECTORIA DIDÁCTICA EN UN ENTORNO DE APRENDIZAJE MOVIL

Se abordó la identificación del carácter multifacético de la variable, asociando dos de sus usos, como número general y cómo incógnita, también se abordó la enseñanza del concepto de equivalencia matemática y el uso del signo igual. La secuencia de actividades matemáticas de la trayectoria didáctica ocurrió en un entorno de aprendizaje móvil, lo que garantizó la continua interacción entre estudiante y docente fuera del aula escolar. La Tabla 7 describe los criterios, componentes e indicadores de la noción de idoneidad didáctica del EOS.

Tabla 7. Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad del EOS

Criterio de idoneidad	Componente	Indicador
Epistémica	Situaciones-problema	<ul style="list-style-type: none"> -Situaciones de contextualización mediante lenguaje aritmético y uso de símbolos. -Actividades para la identificación de la variable cómo número general y como incógnita.
	Lenguajes	<ul style="list-style-type: none"> -Modos de expresión matemática, natural, gráfica y simbólica. -Traducciones y conversiones entre el lenguaje aritmético y el lenguaje algebraico. -Uso de expresiones algebraicas para validar equivalencias matemáticas.
	Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	<ul style="list-style-type: none"> -Dificultad progresiva de las actividades, desde conceptos aritméticos básicos y uso de símbolos, hasta la identificación del carácter multifacético de la variable. -Situaciones para negociar la definición de equivalencia matemática, el uso de la variable como número general y como incógnita.
	Argumentos	<ul style="list-style-type: none"> -Explicaciones y comprobaciones de forma escrita, verbal y gráfica. -Actividad colaborativa por tema, para compartir ideas, procedimientos y explicar los resultados obtenidos.
	Relaciones	<ul style="list-style-type: none"> -Relación entre procedimientos aritméticos, la definición de equivalencia matemática y los usos de la variable. -Se identifican y articulan los significados parciales del signo igual como un <i>estado</i>.
Cognitiva	Conocimientos previos	<ul style="list-style-type: none"> -Procedimientos aritméticos básicos. -El contenido se presenta de manera progresiva en actividades cortas.
	Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	<ul style="list-style-type: none"> -Actividades de ampliación y de refuerzo al inicio de cada tema, y antes de introducir conceptos nuevos. -El estudiante tiene acceso al avance de las actividades con la retroalimentación correspondiente.
	Aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> - Competencia comunicativa y argumentativa para comunicar procedimientos y aprendizajes, proponer procedimientos; fluencia procedimental mediante procesos aritméticos básicos. - La evaluación considera niveles de comprensión y dificultad en relación a la competencia identificada en el estudiante. - Los resultados de las evaluaciones se difunden para su

		discusión.
Afectiva	Intereses y necesidades	-Se promueve la idea de la actividad matemática como un desafío mental.
	Actitudes	-Se promueve la participación, la perseverancia y responsabilidad. -Libre expresión de ideas mediante recursos multimedia en un espacio colaborativo.
	Emociones	-Se motiva al estudiante mediante un sistema de logros para resaltar el progreso del aprendizaje.
Interaccional	Interacción docente-discente	-Definición de los objetivos de aprendizaje en cada tema. -Sesión de trabajo colaborativo. -Inclusión de los estudiantes mediante el seguimiento de sus participaciones en la plataforma digital.
	Interacción entre alumnos	-Tarea colaborativa en la que deben llegar a acuerdos para compartir un proceso de solución. -Todos los estudiantes participan de las actividades individuales y colectivas en condiciones de igualdad.
	Autonomía	-Tareas individuales en las que se solicita la validación de su respuesta.
	Evaluación formativa	-Seguimiento continuo del progreso del estudiante y del grupo.
Mediacional	Recursos materiales	-Uso de las herramientas de G Suite de Google: Classroom, Forms, Meet, Gmail, Jamboard. -Uso de pizarrón interactivo, recursos multimedia, formularios, y mesas de debate.
	Número de alumnos, horario y condiciones del aula	-84 estudiantes distribuidos en 6 grupos. -Las actividades de cada tema se presentan al inicio de la semana, el estudiante dispone de 6 días para entregar tres actividades propuestas. -Una sesión colaborativa al cierre de la semana para evaluar aprendizajes. -Entorno de aprendizaje móvil, uso de dispositivos móviles.
	Tiempo	-Actividad en la plataforma de Google Classroom 20min, sesión colaborativa en Google Meet 40min. -Se aborda un tema por semana, la trayectoria didáctica tiene una duración de 4 semanas.
Ecológica	Adaptación al	-Los contenidos, su implementación y evaluación corresponden

currículo	con las directrices curriculares de la institución. -Se aborda el eje temático Número, álgebra y variación del primer nivel de educación secundaria en México
Apertura hacia la innovación didáctica	Diseño actividades matemáticas en un entorno de aprendizaje móvil para abordar el estudio de la variable, identificando su carácter multifacético.
Adaptación socio-profesional y cultural	-Se promueve el interés por destrezas matemáticas como un ejercicio que implica creatividad y perseverancia.
Educación en valores	-Se promueve el trabajo colaborativo, la equidad y la expresión libre de ideas.
Conexiones intra e interdisciplinarias	-Relación interdisciplinar entre la aritmética y el álgebra. -Desarrollo de habilidades digitales: edición de contenido multimedia.

Las actividades matemáticas se diseñaron para un entorno de aprendizaje móvil, por lo que se propusieron cuatro tipos de actividad con características particulares considerando los recursos materiales que refieren al criterio de idoneidad mediacional y la apertura hacia la innovación didáctica del criterio de idoneidad ecológica. La Tabla 8 describe los tipos de actividad propuestos para el estudiante, el objetivo de aprendizaje y las características de la actividad.

Tabla 8. Características de los tipos de tarea propuestos para un entorno de aprendizaje móvil

Tipo de tarea	Objetivo	Características
Ejercitación con respuestas múltiples	Desarrollar habilidades procedimentales	Enunciados cortos Opciones de respuesta múltiple Pregunta cerrada Puntuación cuantitativa Cuestionario abierto Explicación escrita para respuestas correctas e incorrectas.
Ejercitación con respuesta abierta	Promover la interacción mediante la explicación de procedimientos	Archivo digital disponible para su edición. El estudiante expresa sus ideas

		gráfica y textualmente. Comunicación escrita para la reflexión y análisis de procedimientos
Discusión	Promover la autonomía, reflexión e identificación de procedimientos correctos e incorrectos	<i>Recomendación:</i> respuesta de un compañero a una actividad de ejercitación con respuesta abierta. <i>Opción alternativa:</i> selección de un ejercicio significativo de dificultad manejable. Comunicación escrita para la reflexión y análisis de los procedimientos de un compañero de clase.
Colaboración	Promover la negociación y acuerdos comunes de significados y procedimientos	Interacción mediante una plataforma de videoconferencias con grupos reducidos. Comunicación verbal y escrita entre los estudiantes para negociar acuerdos

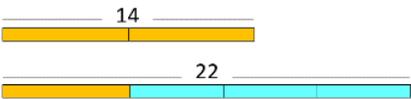
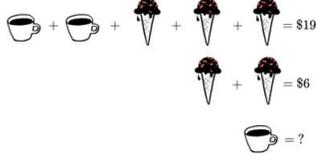
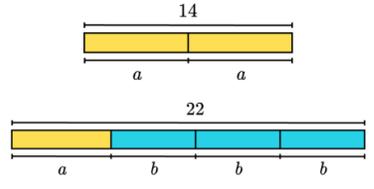
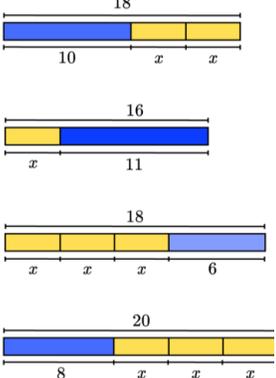
La trayectoria didáctica consideró una actividad preliminar y tres bloques temáticos que se describe a continuación:

1. Uso del lenguaje algebraico, en el cuál el estudiante desarrolla habilidades procedimentales y hace uso del lenguaje aritmético mediante equivalencias numéricas.
2. Uso de valores aritméticos, simbología y lenguaje algebraico, el objetivo de aprendizaje consistió en calcular un valor desconocido mediante procedimientos aritméticos para evidenciar la asociación de la aritmética y el álgebra. Se abordó el concepto de equivalencia matemática y el uso del signo igual. Se promueve el uso de símbolos e íconos como antecedentes del lenguaje algebraico, con el objetivo de afirmar el significado de la equivalencia matemática
3. Identificación del carácter multifacético de la variable, cuyo objetivo de aprendizaje consistió en identificar expresiones algebraicas equivalentes mediante lenguaje algebraico para la identificación del uso no-operativo del

signo igual. También se identificó el uso de la variable como número general y como incógnita utilizando letras, promoviendo el uso del lenguaje algebraico formal para resolver actividades matemáticas.

La Tabla 9 muestra los ejercicios propuestos para cada bloque temático: uso del lenguaje aritmético; uso de valores aritméticos, simbología y lenguaje algebraico; identificación del carácter multifacético de la variable.

Tabla 9. Ejercicios propuestos por bloque temático

Bloque temático	Actividad ejemplo
Uso de lenguaje aritméticos	<p data-bbox="677 709 1149 741"><i>¿Cuál es el valor de un rectángulo azul?</i></p> 
Uso de valores aritméticos, simbología y lenguaje algebraico	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div data-bbox="677 955 1047 1276" style="width: 48%;"> <p data-bbox="677 955 1047 1018"><i>¿Cuál es el costo de una taza de café?</i></p>  </div> <div data-bbox="1047 955 1453 1276" style="width: 48%;"> <p data-bbox="1047 955 1453 987"><i>¿Cuál es el valor de la letra b?</i></p>  </div> </div>
Identificación del carácter multifacético de la variable	<p data-bbox="677 1297 1047 1329"><i>¿Cuál es el valor de la letra x?</i></p> 

La Figura 79 ilustra el esquema general del diseño de la trayectoria didáctica en un entorno de aprendizaje móvil, se especifican las etiquetas utilizadas en la plataforma para motivar el interés de las y los estudiantes. Se definen cuatro tipos de tareas:

1. La *tarea de ejercitación con respuestas múltiples* tuvo el propósito de desarrollar en el estudiante habilidades procedimentales, semejantes a ejercicios del currículo escolar.
2. La *tarea de ejercitación con respuesta abierta* tuvo el objetivo de promover la interacción entre estudiante y docente mediante el diálogo y la explicación de sus procedimientos.
3. La *tarea de discusión* tuvo el objetivo es promover la autonomía y reflexión en la solución de tareas matemáticas, además, de identificar y explicar procedimientos correctos e incorrectos.
4. La *tarea de colaboración* tuvo el objetivo de promover la negociación y acuerdos comunes de significados y procedimientos; tuvo un alto grado de dificultad.

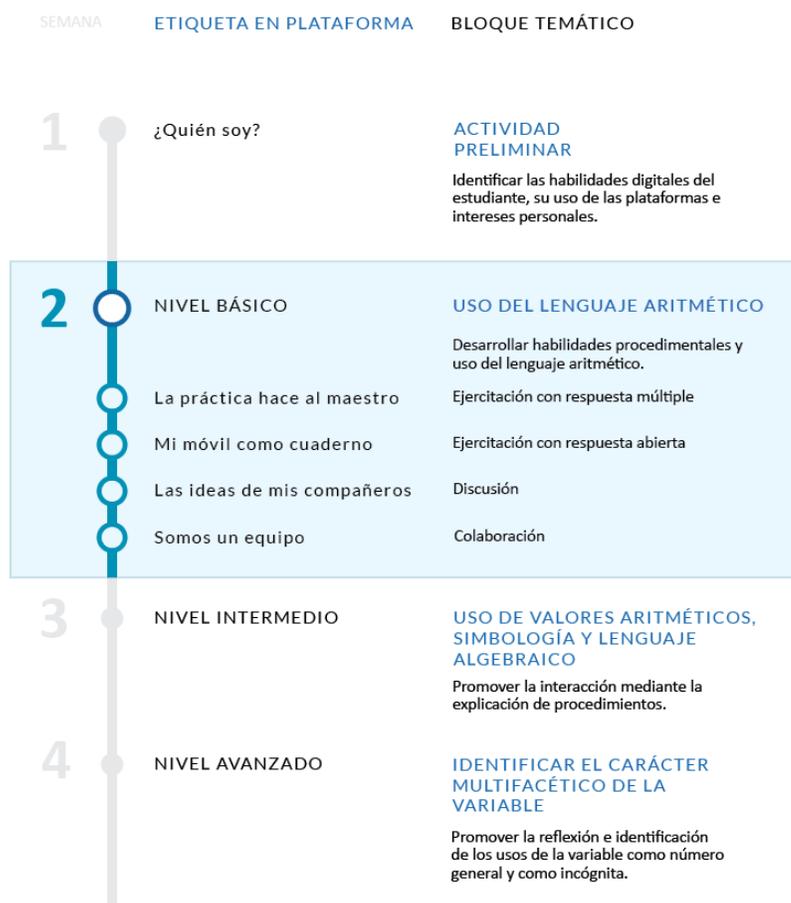


Figura 79. Línea del tiempo de la segunda trayectoria didáctica en un EAM

5.1.1. Actividad preliminar

Se diseñó un video tutorial con duración de 1min 56 segundos con el objetivo de explicar las distintas actividades a resolver y el uso de la plataforma para gestionar su avance. La Tabla 10 ilustra la secuencia de imágenes del video tutorial en el que se explicó cómo utilizar la plataforma para entregar las tareas asignadas, las características de cada tarea y su objetivo didáctico, además de identificar los valores promovidos en cada nivel.

Tabla 10. Secuencia de imágenes del video tutorial par el uso de la plataforma



En la primera semana se llevó a cabo la actividad preliminar ¿Quién soy?, que se ilustra en la Figura 80, para identificar las habilidades digitales del estudiante en la

plataforma, así como sus intereses personales. La actividad tuvo el propósito de identificar si el estudiante era capaz de editar un archivo pdf o imagen, compartir contenido multimedia, entregar una tarea y utilizar el chat en la plataforma de Google Classroom.

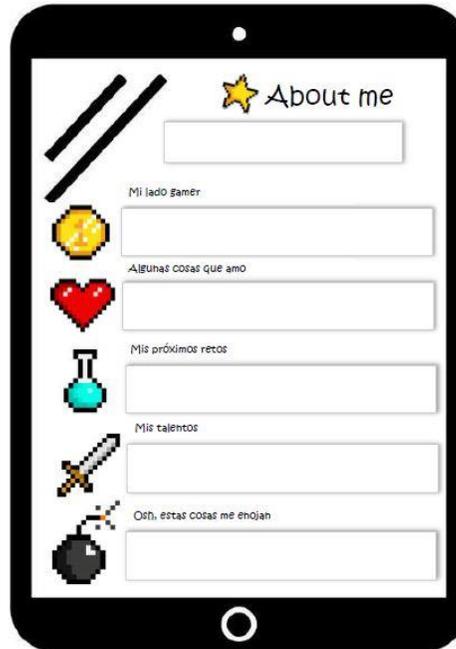


Figura 80. Actividad preliminar para identificar competencias digitales de los estudiantes

5.1.2. Tarea de ejercitación con respuesta múltiple

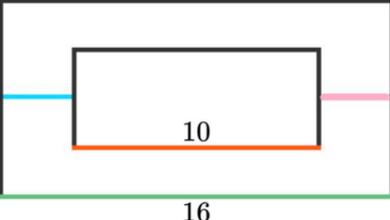
La *tarea de ejercitación con respuestas múltiples* tuvo el propósito de desarrollar en el estudiante habilidades procedimentales, semejantes a ejercicios del currículo escolar. El estudiante debía resolver un formulario corto en Google Forms en el que se utiliza una imagen clara, preguntas o enunciados cortos con un bajo grado de dificultad, el tipo de pregunta es cerrada y se evalúa cuantitativamente, el cuestionario contiene opciones de respuesta múltiple, con una o más respuestas correctas para inducir en el estudiante la idea de que existen diversas formas de representar un valor numérico. El cuestionario fue abierto, es decir, estaba disponible para resolverse las veces más de una vez. El cuestionario presentaba explicaciones por escrito para respuestas correctas e incorrectas.

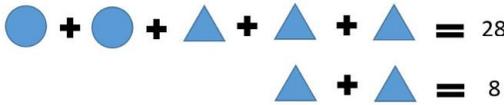
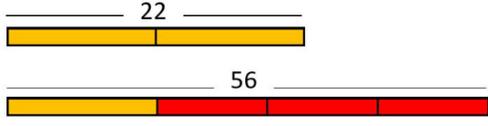
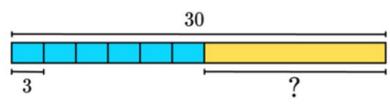
Se diseñó un formulario en Google Forms con 5 ejercicios, los cuales tienen similitud con los ejercicios en los libros de trabajo escolar, son ejercicios sencillos, breves y de dificultad manejable, se proporcionan opciones de respuesta con más de una respuesta correcta y respuesta abiertas ya que existe la posibilidad que el estudiante responda al azar.

Este tipo de tarea dificulta la identificación de aprendizajes adquiridos y la adquisición de significados erróneos, fue algo que se identificó en la primera trayectoria didáctica. Sin embargo, esta actividad permitió gestionar de manera casi inmediata la entrega de la actividad y un puntaje, este puntaje fue una aproximación para determinar el nivel de dificultad de los ejercicios en relación con las capacidades de las y los estudiantes. Esta tarea también permitió redistribuir la organización del grupo y los tipos de tarea para cada estudiante.

Para el bloque uso del lenguaje aritmético, se propusieron los ejercicios que muestra Tabla 11 que refieren a la tarea Ejercitación con respuesta múltiple. De estos ejercicios se selecciona uno de dificultad manejable para la tarea de Ejercitación con respuesta abierta.

Tabla 11. Ejercicios propuestos para el bloque temático: uso del lenguaje aritmético

<p>Valor de los rectángulos morados *</p>  <p> <input type="checkbox"/> 60-30 <input type="checkbox"/> 60+30 <input type="checkbox"/> 30 <input type="checkbox"/> 15 <input type="checkbox"/> 10 </p>	<p>Valor de la línea rosa *</p>  <p>Texto de respuesta breve</p> <hr/>
--	--

<p>Valor de un círculo *</p>  <p>Texto de respuesta breve</p>	<p>Valor de un rectángulo rojo *</p>  <p> <input type="checkbox"/> 56-22 <input type="checkbox"/> La mitad de 22 <input type="checkbox"/> La tercera parte de 45 <input type="checkbox"/> 3 veces 15 <input type="checkbox"/> 15 </p>
<p>Valor del rectángulo amarillo *</p>  <p>Texto de respuesta breve</p>	

5.1.3. Tarea de ejercitación con respuesta abierta

La *tarea de ejercitación con respuesta abierta* tuvo el objetivo de promover la interacción entre estudiante y docente mediante el diálogo y la explicación de sus procedimientos. El estudiante editó un archivo digital contenido en la plataforma de Google Classroom, podía agregar contenido explicando sus procedimientos gráfica y textualmente; también, podía adjuntar recursos multimedia y agregar comentarios con dudas o explicaciones. La evaluación requirió de la comunicación escrita entre docente y estudiante para la reflexión y análisis de los procedimientos y aprendizajes adquiridos.

Para el bloque uso del lenguaje aritmético, se propuso el ejercicio que se muestra en la Figura 81. Este ejercicio se retoma de la actividad previa, *ejercitación con respuesta múltiple*. Se compartió un archivo pdf con espacio suficiente para que el estudiante explicará sus procedimientos.

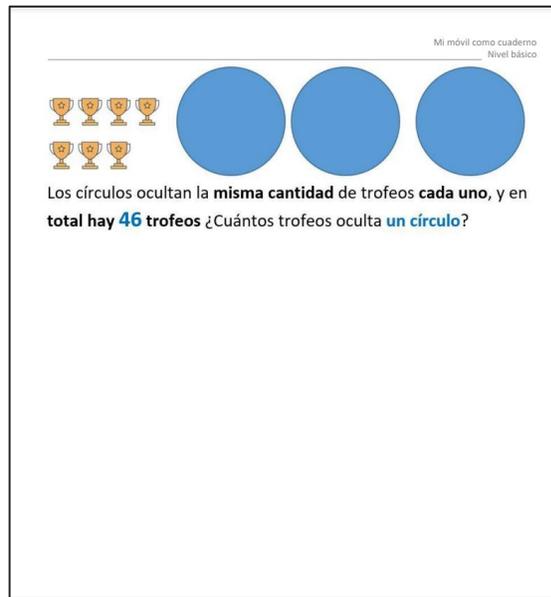


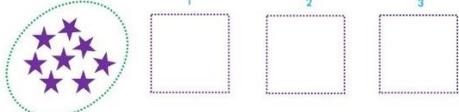
Figura 81. Ejercicio de la Tarea de ejercitación con respuesta abierta

5.1.4. Tarea de discusión

La *tarea de discusión* tuvo el objetivo es promover la autonomía y reflexión en la solución de tareas matemáticas, además, de identificar y explicar procedimientos correctos e incorrectos. Para esta actividad se seleccionó la respuesta de compañeros de clase de la actividad previa para su discusión, es decir, se discutió sobre los procedimientos de la tarea de ejercitación con respuesta abierta; para algunos momentos una opción alternativa fue la selección de un ejercicio significativo de dificultad manejable que evidenciaba un error recurrente en el grupo. El estudiante debía expresar sus ideas mediante texto, símbolos, íconos, gráficos, explicando si los procedimientos expuestos en la tarea son correctos o no y por qué. Esta actividad tiene un alto nivel de interacción.

La Tabla 12 muestra ejercicios para el bloque *uso de valores aritméticos, simbología y lenguaje algebraico*, en el que se ilustran opciones de respuesta recurrentes en los ejercicios.

Tabla 12. Ejercicios para el bloque uso de valores aritméticos, simbología y lenguaje algebraico

 <p>Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, y en total hay 107 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?</p> <p>107 - 8 = 99</p> <p>99 ÷ 3 = 33</p> <p>R= Hay 33 estrellas en cada cuadrado</p>	 <p>Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, y en total hay 107 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?</p> <table border="0"> <thead> <tr> <th>Datos</th> <th>Operación</th> <th>Resultado</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3 cuadrados 107 estrellas</td> <td>$107 \div 3 = 35.6$</td> <td>35.6 estrellas</td> </tr> </tbody> </table>	Datos	Operación	Resultado	3 cuadrados 107 estrellas	$107 \div 3 = 35.6$	35.6 estrellas
Datos	Operación	Resultado					
3 cuadrados 107 estrellas	$107 \div 3 = 35.6$	35.6 estrellas					
 <p>Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, y en total hay 107 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?</p> <table border="0"> <thead> <tr> <th>Datos</th> <th>Operación</th> <th>R= por lo tanto la cantidad no es 107, es 24, ya que si divides 107 entre 3=35.6 y si divides 24 entre 3=8</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Estrellas son 8 Cuadrados 3 ¿En cada uno?</td> <td>$8 \times 3 = 24$ no llega a 107</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>En conclusión, cada cuadrado oculta 8 estrellas</p>	Datos	Operación	R= por lo tanto la cantidad no es 107, es 24, ya que si divides 107 entre 3=35.6 y si divides 24 entre 3=8	Estrellas son 8 Cuadrados 3 ¿En cada uno?	$8 \times 3 = 24$ no llega a 107		
Datos	Operación	R= por lo tanto la cantidad no es 107, es 24, ya que si divides 107 entre 3=35.6 y si divides 24 entre 3=8					
Estrellas son 8 Cuadrados 3 ¿En cada uno?	$8 \times 3 = 24$ no llega a 107						

5.1.5. Tarea de colaboración

La *tarea de colaboración* tuvo el objetivo de promover la negociación y acuerdos comunes de significados y procedimientos. El docente seleccionó un ejercicio que consideró de una complejidad manejable, es decir, difícil en relación a las tareas previas, pero para el cual los estudiantes tenían aprendizajes adquiridos previos que los posibilitaban para resolver el ejercicio. Se buscó identificar la adquisición de significados erróneos. Se trabajó con grupos reducidos, 15 a 20 estudiantes, en una plataforma de videoconferencias de Google Meet, para que los estudiantes verbalizaran sus procedimientos y en colaboración con sus compañeros logaran acuerdos. Esta tarea tiene un alto nivel de interacción entre los estudiantes, quienes discutieron la validez de sus procedimientos y el de sus compañeros de clase.

Se calendarizaron las sesiones de Meet en Google Calendar, cada sesión contenía una descripción con las instrucciones de la sesión para anticipar a los estudiantes sobre los temas que se abordaría. La Figura 82 muestra el ejemplo de una sesión de discusión al cierre de la semana.

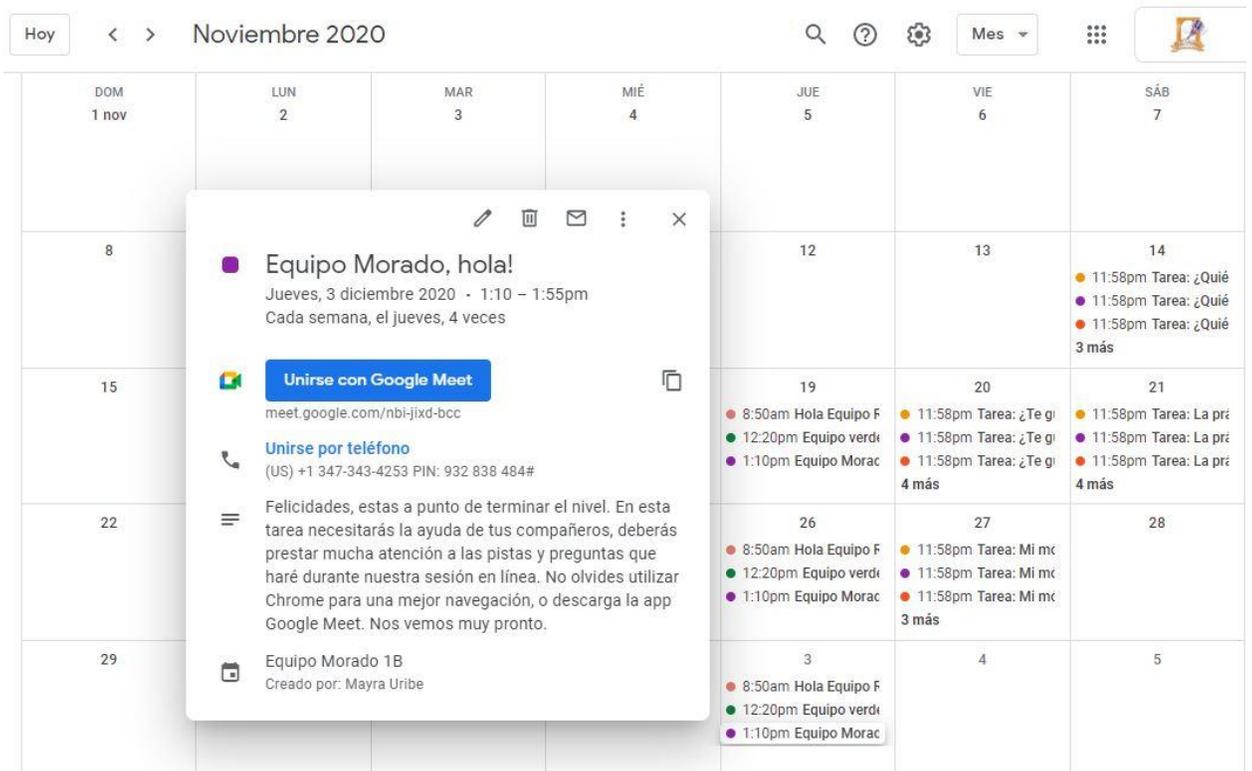


Figura 82. Ejemplo de una sesión de discusión al cierre de la semana en el calendario de Google

La Tabla 13 muestra los ejercicios propuestos para el bloque Identificación del carácter multifacético de la variable, los cuales debían resolver en equipo mediante una pizarra interactiva.

Tabla 13. Ejercicios propuestos para el bloque Identificación del carácter multifacético de la variable

 $\text{Círculo} + 12 + \text{Triángulo} = \text{Estrella}$	$b + c = 20 - a$
 $\text{Triángulo} + \text{Triángulo} = 14$	$a = 5$
 $\text{Círculo} + \text{Círculo} = 22$	$c = a + 2$

5.2. EXPERIMENTACIÓN Y ANALISIS DE LA SEGUNDA TRAYECTORIA DIDACTICA

En este apartado se describe la etapa de experimentación de la segunda intervención educativa mediante la implementación de una trayectoria didáctica con fundamento en el EOS, particularmente en la noción de idoneidad didáctica como herramienta para una intervención efectiva en aula, en un entorno de aprendizaje móvil.

Para el contraste y revisión de conjeturas sobre el proceso de aprendizaje previsto, se realizó el análisis retrospectivo entre las etapas de preparación del experimento y la experimentación.

5.2.1. Actividad preliminar

En la primera semana se llevó a cabo la actividad preliminar ¿Quién soy?, la cual tuvo el objetivo de identificar habilidades digitales del estudiante, no sólo en el uso de la plataforma, sino también en la edición de contenido multimedia. Por otro lado, la actividad también permitió conocer los intereses de los estudiantes y creó un vínculo entre docente-estudiante, ya que la docente compartió sus respuestas a modo de ejemplo. La Figura 83 ilustra las respuestas que compartió la docente con los grupos, las y los estudiantes debían idealmente editar el archivo pdf original y subirlo en la plataforma de Classroom.



Figura 83. Respuesta que compartió la docente a modo de ejemplo

Los estudiantes utilizaron las siguientes estrategias para resolver la actividad, lo que permitió identificar el grado de apropiación digital:

1. Editar el archivo pdf conservando el estilo digital del documento, agregar texto desde un teclado.
2. Editar el archivo pdf conservando el estilo digital del documento, se agrega texto desde una pantalla táctil en un dispositivo móvil, tableta o celular, no muestra dificultad en la edición del archivo.
3. Crear un nuevo documento en Word, respetando el diseño, reestructurando la información o únicamente con las respuestas a la actividad.
4. Imprimir el documento, responder a mano y subir una foto como evidencia.

Las Figuras 84, 85 y 86 muestran las respuestas de estudiantes que editaron el archivo pdf conservando el estilo digital del documento, agregando texto desde un teclado. No mostraron dificultad en la edición del documento, ni en el uso de la plataforma para agregar la tarea, se observó gran interés por compartir sus ideas,

hay información muy valiosa sobre las percepciones que tienen de sí mismos y del entorno.

Sofía mostró una peculiar forma de redactar sus ideas para dar énfasis, por ejemplo, en la expresión, *D-I-O-S-A :D*, con un símbolo de cara sonriente, o cuando escribe *dormir XD*, que implica una sonrisa con mayor énfasis, asoció sus talentos a aspectos cualitativos como creatividad e imaginación, que están relacionados con las cosas que ama hacer, ver Figura 25.



Figura 84. Respuesta de Sofia a la actividad preliminar

Valentina redactó respetando signos de puntuación, tuvo la capacidad de aprovechar el espacio destinado a su respuesta en el documento para expresar ideas un poco más largas, resultó interesante como se expresa de las cosas que le enoja, *la escuela (mayormente por algunas actividades que son muy peri muy aburridas)*, también asoció sus talentos a aspectos cualitativos, y se refirió a sí

misma con afirmaciones como: *soy creativa e inteligente, una buena líder, buena amiga*, ver Figura 85.

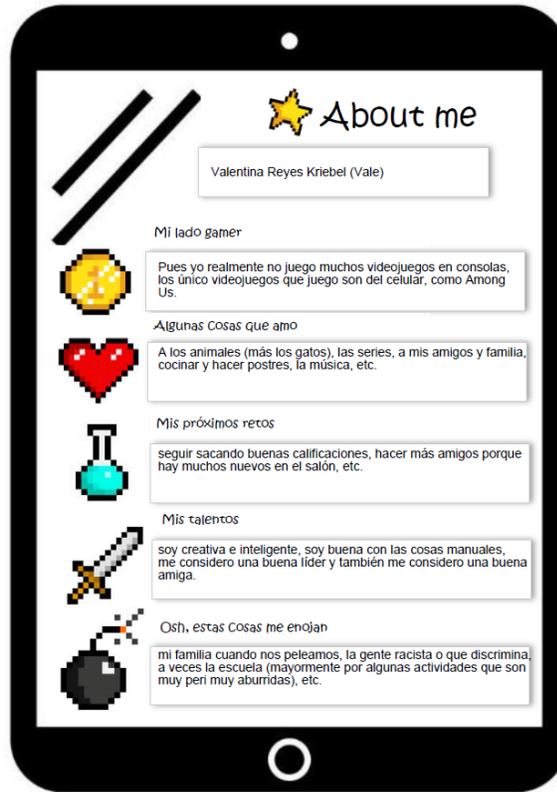


Figura 85. Respuesta de Valentina a la actividad preliminar

Valeria mostró una alta capacidad de comunicar ideas, aunque no usó signos de puntuación, mostró una forma peculiar de redactar interactuando con el lector, en este caso la docente, con expresiones como: *deberías jugarlo si no los has jugado está bien cool, si quieren me pueden ir a seguir ntc, que caminen lento upsi*. Ver Figura 86.

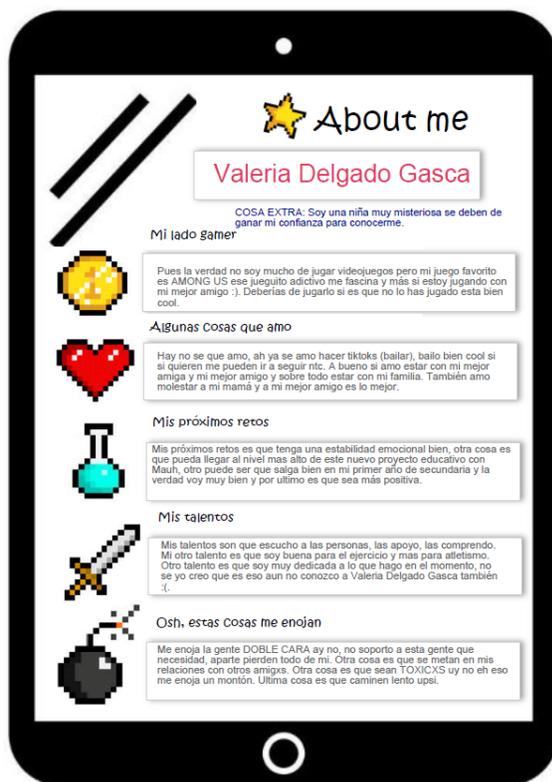


Figura 86. Respuesta de Valeria a la actividad preliminar

Las figuras 87 y 88 muestran las respuestas de estudiante que editaron el archivo pdf desde una pantalla táctil en un dispositivo móvil, tableta o celular, conservando el estilo digital del documento.

Andra expresó ideas breves, ya que el espacio era insuficiente, también manifiesto que tuvo dificultad en escribir: *perdón por la letra, es difícil*. Ver Figura 87.



Figura 87. Respuesta de Andra a la actividad preliminar

Fer envió una impresión de pantalla de su trabajo, el cuál editó desde el móvil, así como Andra, usa frases cortas por la dificultad de editar el archivo desde un dispositivo móvil y el limitado espacio disponible. Ver Figura 88.

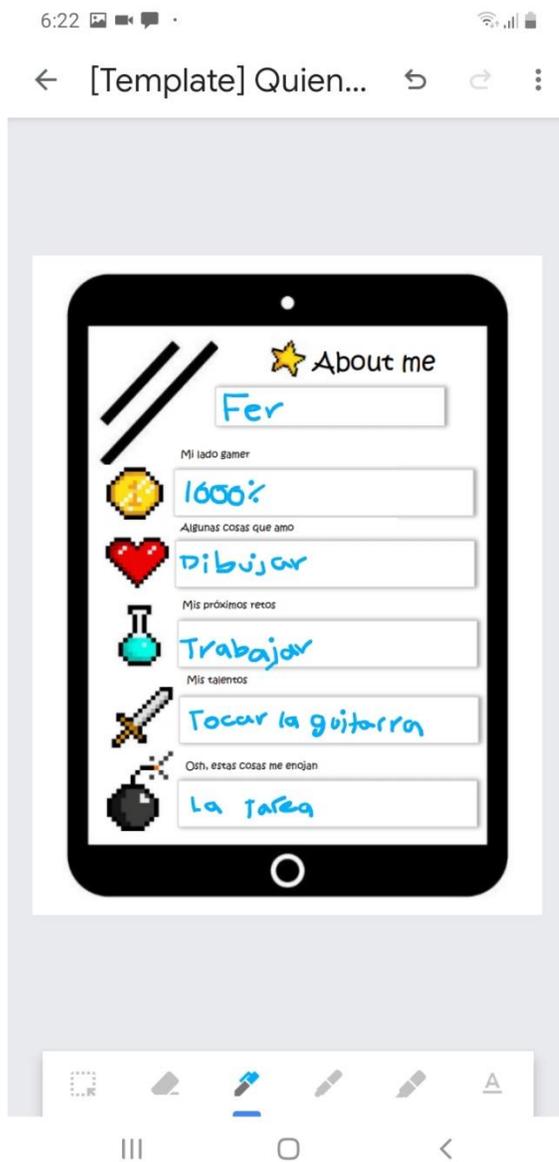


Figura 88. Respuesta de Sofía a la actividad preliminar

Las Figuras 89, 90 y 91 muestran las respuestas de estudiantes que crearon un nuevo documento en Word, respetando el diseño, reestructurando la información o redactando únicamente las respuestas de la actividad.

José mostró una alta capacidad para crear un archivo nuevo y replicar la actividad respetando el diseño original y dándole un toque personal, es decir, ajustó el

archivo según sus necesidades. En su redacción respetó signos de puntuación, coherencia en las ideas, además, enriqueció el texto con emojis para dar énfasis, resultó interesante las afirmaciones que hace sobre sí mismo: *soy responsable y perseverante*. Ver Figura 89.

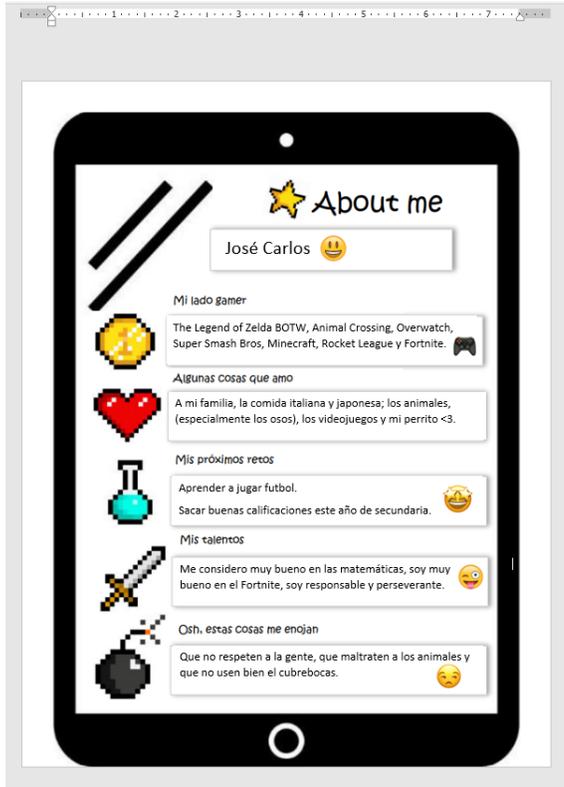


Figura 89. Respuesta de José Carlos a la actividad preliminar

Abraham creo un nuevo documento agregando elementos gráficos del diseño original, no logra replicarlo con exactitud. Ver Figura 90. Es muy interesante la forma en que expresó las cosas que le enojan, la lectura resulta amena:

Que se vaya la luz a la mitad de una película o jugando, que se vaya el internet a mitad de una película o jugando, que se metan en la fila, que después de mucho tiempo no logre algo y que se metan en la fila.

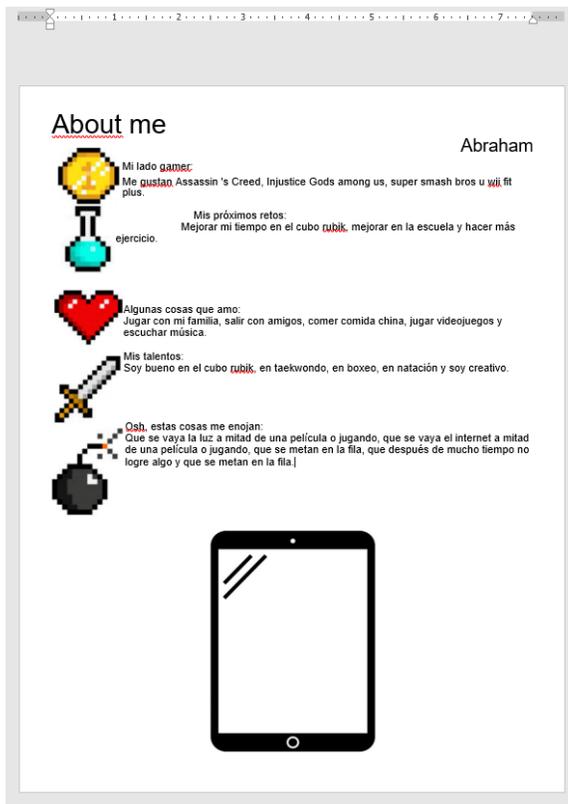


Figura 90. Respuesta de Sofía a la actividad preliminar

Daniela creó un nuevo documento en Word, listó únicamente las respuestas a la actividad, sin replicar el diseño original. Aunque son breves las frases que redactó, resultan interesantes algunas afirmaciones: *Algunas cosas que amo: estar en silencio. Mis próximos retos: seguir sobreviviendo al 2020.* Ver Figura 91.

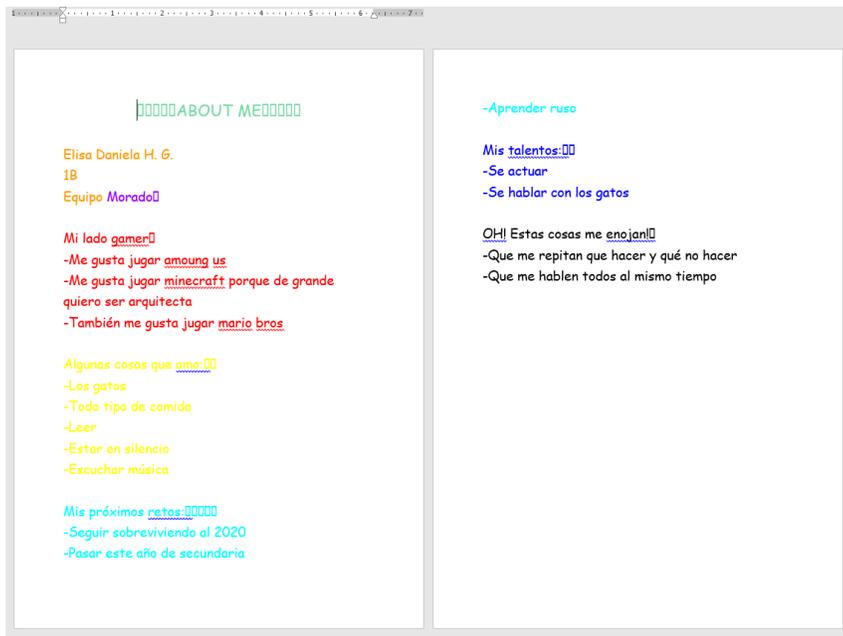


Figura 91. Respuesta de Sofía a la actividad preliminar

Las Figuras 92 y 93 muestran las respuestas de estudiantes que imprimieron el archivo pdf, respondieron a mano y subieron la foto de sus respuestas como evidencia en la plataforma. Christopher imprime el archivo original, ver Figura 92, mientras que Andrea, replica en su cuaderno la actividad, ver Figura 93.

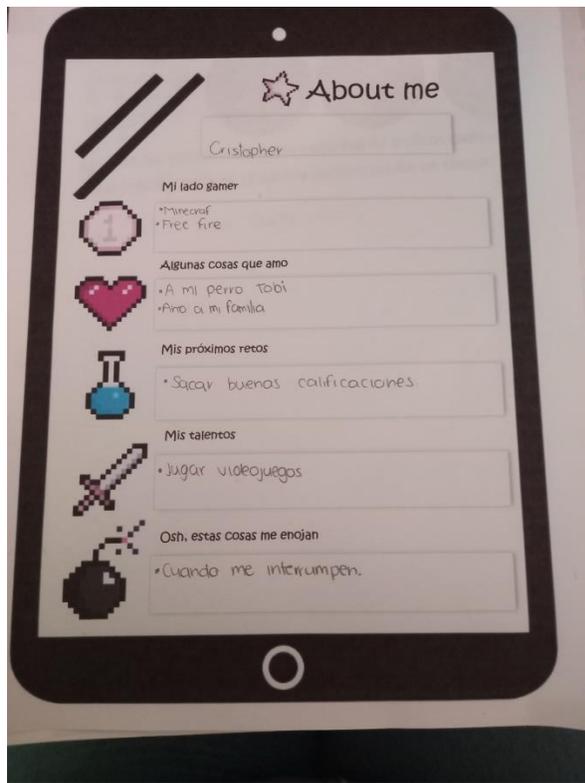


Figura 92. Respuesta de Christopher a la actividad preliminar

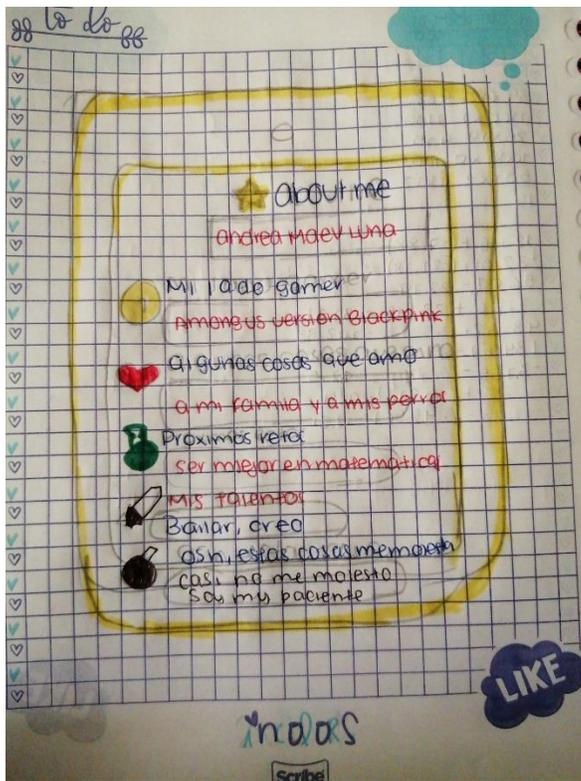


Figura 93. Respuesta de Andrea a la actividad preliminar

Esta actividad dio cuenta de las capacidades digitales de los estudiantes y las alternativas que usaron para cumplir con el objetivo de la actividad. Mostraron deseos de compartir sobre sus gustos e intereses. Aunque se esperaba que fueran capaces de editar el archivo pdf desde el móvil, quienes lo hicieron así tuvieron dificultad en escribir en el espacio disponible, quienes lo editaron desde una computadora tuvieron mayor libertad creativa. Resultó interesante, que una alternativa sencilla y práctica fue imprimir el documento, escribir a mano y subir una foto como evidencia, incluso replicar la dinámica en cuaderno.

5.2.2. Tarea de ejercitación con respuesta múltiple

Los formularios de Google Forms no contienen los procedimientos de los estudiantes, que son fundamentales para la identificación de los significados

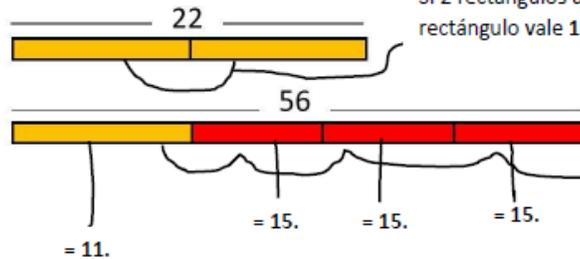
matemáticos adquiridos. Por lo que se agregó una actividad adicional que era opcional, en la que la y el estudiante podía compartir sus procedimientos para mejorar el puntaje obtenido en la actividad de Google Forms, el estudiante tendría acceso a un segundo formulario y se respetaría la puntuación más alta que haya obtenida. La participación de las y los estudiantes fue alta, incluso participaron quienes obtuvieron puntajes favorables.

Se diseñaron dos tareas extra de Ejercitación de respuesta múltiple, es decir, dos formularios adicionales en Google Forms, que no se consideraron en el diseño preliminar, esto se debió a que se identificó la necesidad para algunos estudiantes de retomar los ejercicios propuestos con un nivel inferior al establecido, pero para quienes participaron de la actividad extra aun con puntajes favorables se propusieron ejercicios similares.

En la Figuras 94 y 95, José mostró una alta capacidad de editar archivos multimedia, agregar texto, gráficas, líneas y exportar el documento en un archivo pdf. En el primer ejercicio afirmó: *Resté 11 al 56*, y al dar la respuesta al ejercicio expresó dos formas de enunciar la misma cantidad, *La tercera parte de 45 y 15*. En el segundo ejercicio se preguntaba el valor de los rectángulos morados, con el objetivo de que los estudiantes identificaran que debían sumar el valor de ambos rectángulos, para algunos estudiantes no fue claro si se trataba de dar el valor de un solo rectángulo o de ambos, como el caso de José. En el cuarto ejercicio usa la expresión, *Hay una distancia de 6 entre el 10 y el 16*, quizá lo relacionó con la forma en que se muestra el problema, con líneas, y *Tenemos que llegar al 16*, diferenciando que el 16 es el valor total, hizo lo mismo en el ejercicio 5, expresó, *Tenemos que llegar al 30* identificándolo como el referente que determinará que valores son los desconocidos. El estudiante narró con claridad los procedimientos aritméticos.

La práctica hace al maestro PROCEDIMIENTOS.

Valor de un rectángulo rojo:

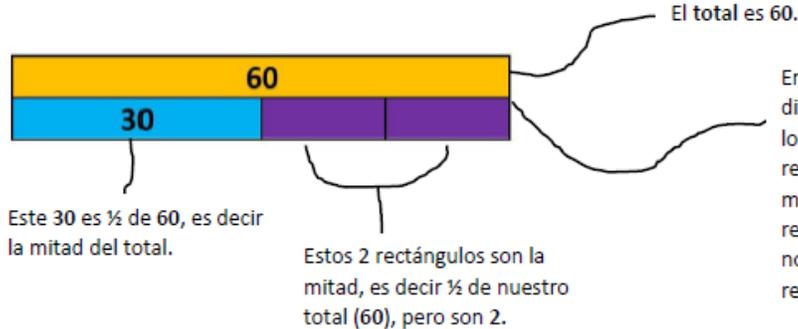


Si 2 rectángulos amarillos son 22 entonces, 1 rectángulo vale 11.

Resté 11 al 56. Ya tenemos 11 (lo que vale el rectángulo amarillo). La resta nos da 45. Son 3 rectángulos rojos, entonces hice una pequeña división: $45/3 = 15$, sumamos $15 + 15 + 15 + 11 = 56$ (el total de los rectángulos).

R= La tercera parte de 45 y 15.

Valor de los rectángulos morados:



Este 30 es $\frac{1}{2}$ de 60, es decir la mitad del total.

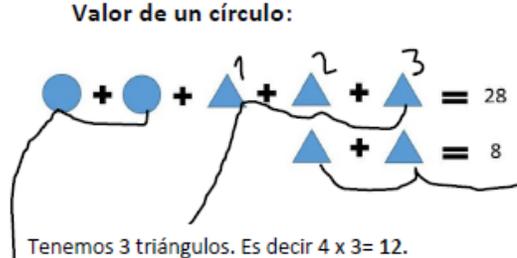
Estos 2 rectángulos son la mitad, es decir $\frac{1}{2}$ de nuestro total (60), pero son 2.

El total es 60.

En este caso hice una pequeña división: $30/2$, ¿Por qué 30?, El 30 lo puse porque es lo que representa a los 2 rectángulos morados. Y el 2 porque son 2 rectángulos morados. Esta división nos da 15, entonces nuestra respuesta es 15.

R= 15.

Valor de un círculo:



Tenemos 3 triángulos. Es decir $4 \times 3 = 12$.

Nos sobran 16 (es decir los 2 círculos), como son 2, hice una división $(16/2)$, a lo que nos da 8, llegando a la conclusión de que cada círculo vale 8.

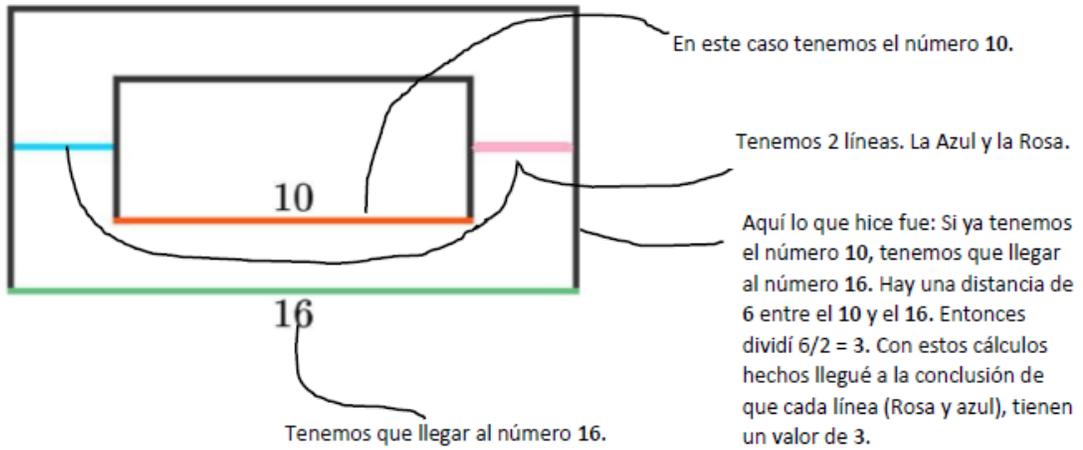
Aquí nos dan unos datos importantes: Si 2 triángulos son 8 entonces c/u vale 4.

Aquí resté $28 - 12$, ¿Por qué? Porque 28 es nuestro total, ya sumando todos los triángulos y los 2 círculos; y 12 porque anteriormente ya calculamos lo que valen los 3 triángulos. Entonces nuestra respuesta a la resta es 16.

R= Cada círculo vale 8.

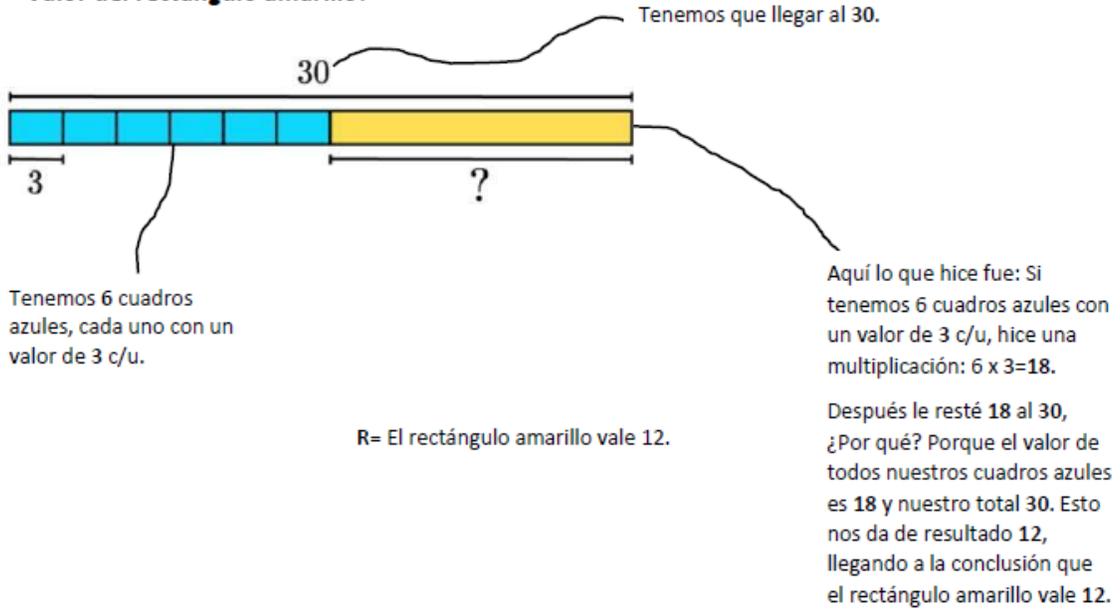
Figura 94. Respuesta de José a la actividad de compartir sus procedimientos. Hoja 1.

Valor de la línea rosa:



R= El valor de la línea rosa es 3.

Valor del rectángulo amarillo:



R= El rectángulo amarillo vale 12.

Figura 95. Respuesta de José a la actividad de compartir sus procedimientos. Hoja 2.

En la Figura 96, Joana explicó sus procedimientos usando expresiones aritméticas y texto, no utilizó gráficos, en el recuadro verde explicó cuál fue su confusión en relación al ejercicio de la figura, como le ocurrió a José. La estudiante reconoce que el error se debió a la interpretación del ejercicio, e identificó que sólo bastaba con obtener la mitad de 60, *Por que la mitad de 60 es 30.*

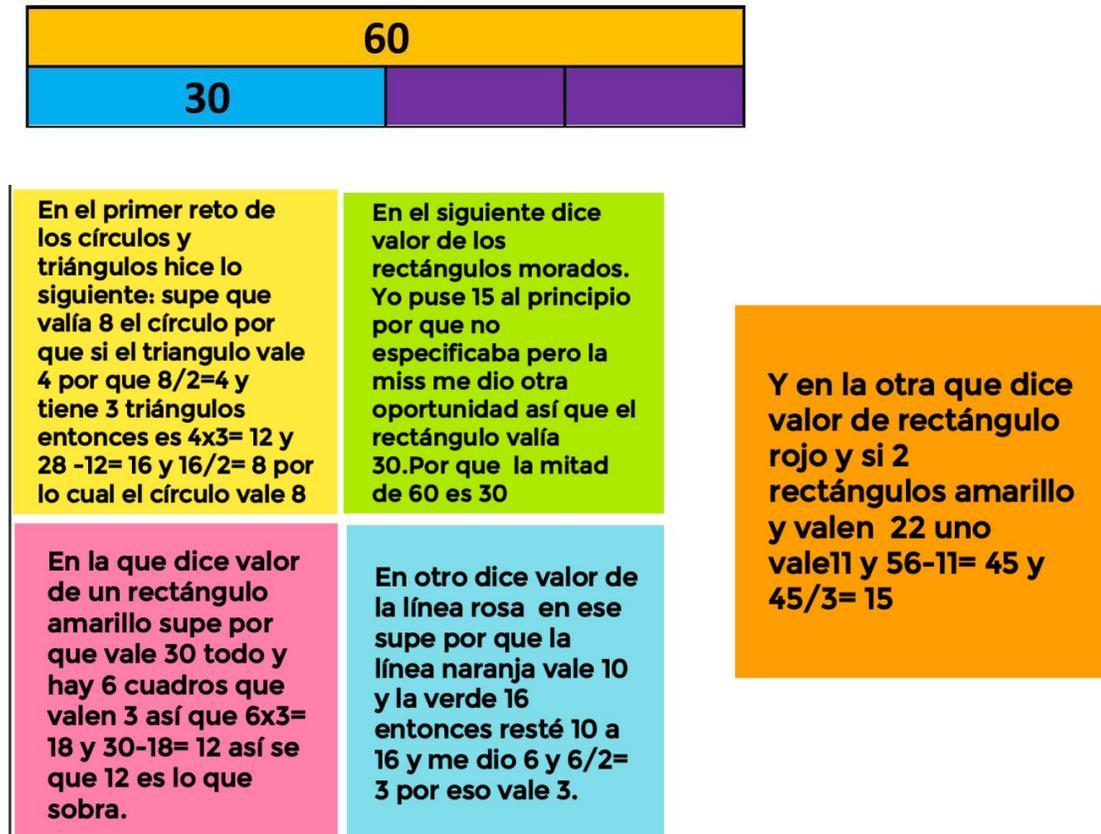


Figura 96. Respuesta de Joana a la actividad de compartir sus procedimientos.

Tiana utilizó texto para explicar sus procedimientos, incluso para explicar una operación matemática, los valores numéricos los expresó con el símbolo que corresponde, por ejemplo, *se divide 22 entre 2 igual a 11; 56 menos 11 igual a 45 entre 3; 28 menos 12 son 16; 3 por 6 son 18 y 30 menos 18 son 12.* Ver Figuras 97 y 98.

✓ Valor de los rectángulos morados *

12/12

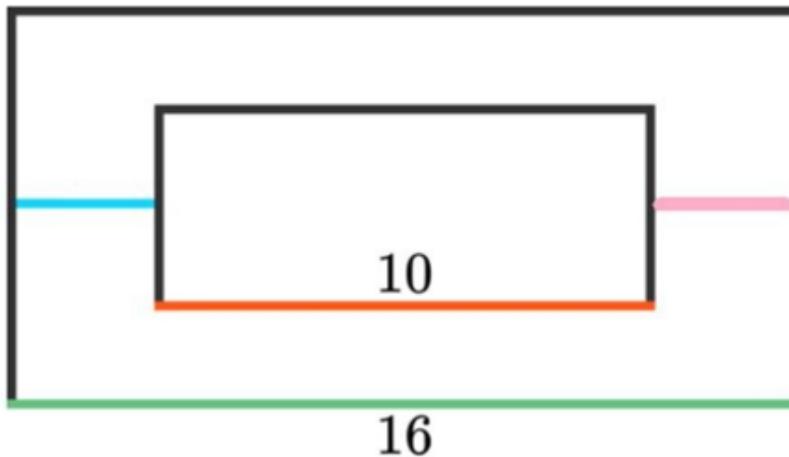


Lo que hice fue ver cuánto medía la mitad del rectángulo.

amarillo como ahí decía 30 y era el mismo espacio con los rectángulos morados, iba a dar lo mismo que en el azul, o sea 30. $R=30$

✓ Valor de la línea rosa *

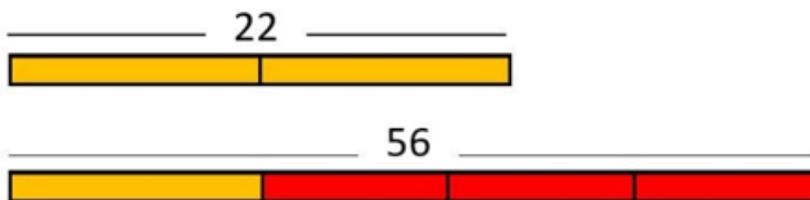
25/25



En esta vi cuanto era de todo o sea 16 menos 10 que es otra línea ya medida, sobran 6 y como son dos espacios es 6 entre 2 igual a 3.

✓ Valor de un rectángulo rojo *

12/12



Aquí vi que dos rectángulos amarillos son 22 y como son 2 se divide 22 entre 2 igual a 11, entonces sabemos que un

rectángulo amarillo vale 11. Abajo hay solo uno y lo que podemos hacer es restar 56 menos 11 para ver cuánto es de los 3 rectángulos rojos, 56 menos 11 igual a 45 entre 3 porque son 3 rectángulos son 15 así que por cada rectángulo rojo son 15.

Figura 97. Respuesta de Tiana a la actividad de compartir sus procedimientos. Hoja 1.

✓ Valor de un círculo *

26/26

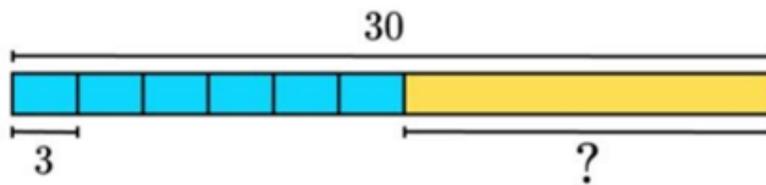
$$\begin{array}{ccccccccccc} \bigcirc & + & \bigcirc & + & \triangle & + & \triangle & + & \triangle & = & 28 \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & \triangle & + & \triangle & = & 8 \end{array}$$

Vemos que dos triángulos dan 8 quiere decir que uno solo da 4, ahora si sumamos 3

triángulos nos da 12 y 28 menos 12 son 16 que son los dos círculos y como son dos cada uno daría 8. R=8

✓ Valor del rectángulo amarillo *

25/25



Como la imagen nos dice que todo el

rectángulo mide 30 y cada cuadrado azul 3, y son 6 cuadrados azules, 3 por 6 son 18 y 30 menos 18 son 12 la respuesta es 12 que es lo que mide el rectángulo amarillo.

Figura 98. Respuesta de Tiana a la actividad de compartir sus procedimientos. Hoja 2.

Carla describió sus procedimientos narrando de manera lineal las operaciones aritméticas, usó verbos que identifican las acciones de dividir, sumar, multiplicar, quitar, y para definir el resultado usa la expresión, *me dio*, por ejemplo, *a 28 le quite 12 y me dio 16*. Ver Figura 99.

- 1.- Dividí 8 entre 2 y me dió 4 que es el valor del triángulo, sumé los otros 3 triángulos y me dió 12, a 28 le quité 12 y me dió 16, a 16 lo dividí entre 2 y me dió 8 que es el valor del círculo.
- 2.- Multipliqué 3 por 6 y me dió 18 entonces al 30 le quité 18 y me dió 12.
- 3.- A 16 le quité 10 y me dió 6, dividí 6 entre 2 y me dió 3.
- 4.- A 60 le quité 30 y me dió 30, lo dividí entre 2 y me dió 15.
- 5.- Dividí 22 entre 2 y me dió 11, a 56 le quite 11 y me dió 45, 45 entre 3 es 15 y 15 por 3 es 45.

Figura 99. Respuesta de Carla a la actividad de compartir sus procedimientos.

Romina describió sus procedimientos explicando el razonamiento que la llevo a dar una respuesta, ver Figura 100. En el formulario de Google Forms fueron incorrectas sus respuestas a los ejercicios 2 y 3. Sin embargo, ella explicó que el error se debió a una confusión en la interpretación del ejercicio.

1. El primero se me hizo muy fácil porque abajo decía cuánto valen los dos triángulos así que solo dividí 8 y me salió 4 así que ya sólo al 28 le reste los tres triángulos que valían 4 cada uno y después el resultado lo dividí y me dio 8.
2. En el segundo me confundí cuando arriba no sabía si el número 22 era de ambos rectángulos o representaba a cada uno, así que pense que era el valor de cada rectángulo así que por eso le reste 56 a 22 pensando que así eliminaría el ractangulo amarillo.
3. En el tercer problema me equivoqué pensando que tenía que sacar solo el valor de uno de los cuadrados morados así que elegí la opción 15 que es la mitad de 30.
4. En el cuarto el procedimiento que realice fue que cada cuadrado azul vale 3 entonces sume cada cuadro y me dio 18 entonces reste el total que es 30 y me dio 12.
5. El último se me hizo muy sencillo y divertido ya que venía la línea que tenía valor de 10 y otra de 16 tenía que saber el valor de la pequeña pero como estaban acomodadas de una forma que podía poner la linar con valor de diez encima entonces oslo sobra 6 y eso lo dividi entre las dos líneas pequeñas y me dio 3.

Figura 100. Respuesta de Romina a la actividad de compartir sus procedimientos

Para el ejercicio 2, ver Figura 101, ella dio esta explicación, *Me confundí... no sabía si el número 22 era de ambos rectángulos o representaba cada uno*, entonces ella restó a 56 el valor 22. Para el ejercicio 3 explicó, *no sabía si el ejercicio preguntaba el valor de uno o de dos cuadrados morados*.

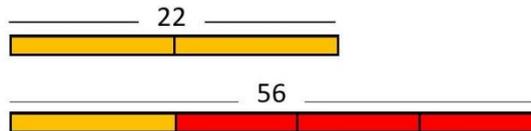


Figura 101. Segundo ejercicio de la Tarea de ejercitación de respuesta múltiple.

En las siguientes respuestas las y los estudiantes optaron por escribir en cuaderno sus procedimientos y subir una foto como evidencia.

Alondra describió sus procedimientos utilizando texto y símbolos que podían leerse de manera lineal, también dio la impresión de querer abreviar, por ejemplo, *fue multiplicar 3x6 (el número de cuadritos) = 18 y le reste 30 y es 12*. Ver Figura 102.

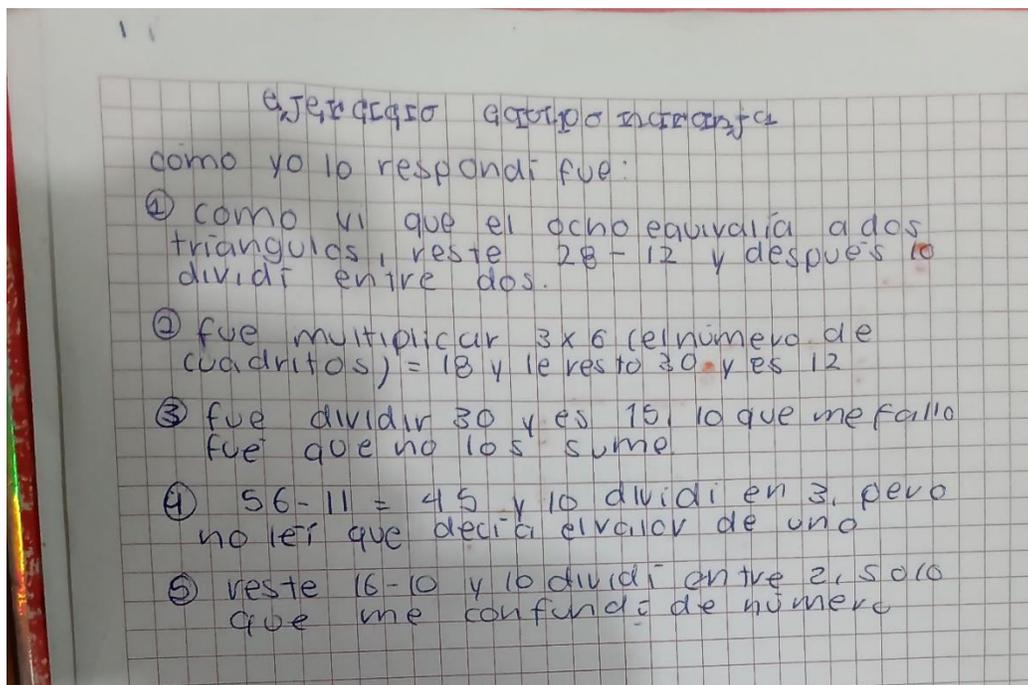


Figura 102. Respuesta de Alondra a la actividad de compartir sus procedimientos

En la Figura 103, Azul utilizó los gráficos de los ejercicios para identificar los valores que encontró. Se observó un error recurrente en el uso del signo igual, que tiene relación con como la estudiante utiliza una lectura lineal de un conjunto de expresiones aritméticas. Este error se retomó en la Tarea de discusión de cierre de semana. Las expresiones erróneas fueron las siguientes:

$$30 \div 2 = 15 \times 2 = 30$$

$$3 \times 6 = 18 - 30 = 12$$

$$16 - 10 = 6 \div 2 = 3$$

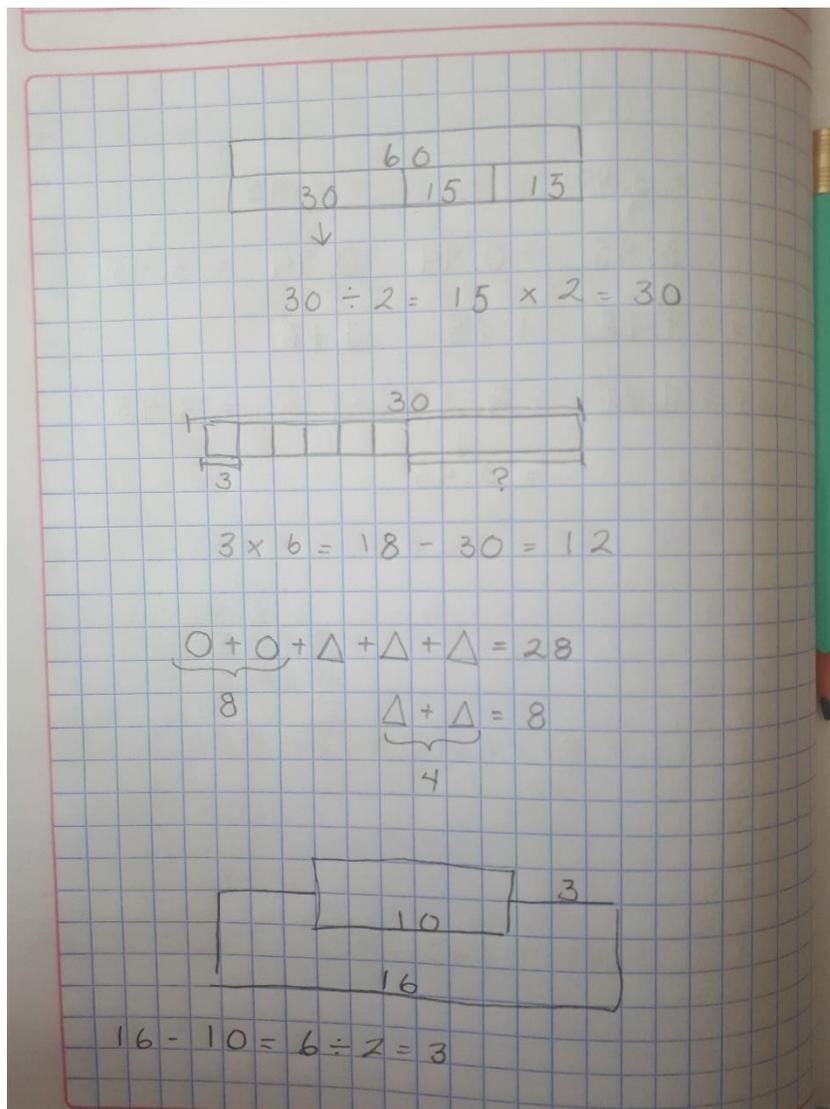


Figura 103. Respuesta de Azul a la actividad de compartir sus procedimientos

Dulce replicó los diagramas y utilizó operaciones aritméticas para explicar sus resultados. Expresó las operaciones de suma y resta de forma horizontal siguiendo la forma del gráfico, por ejemplo, en el ejercicio 2 sumó 6 veces el número 3 para dar un total de 18. Sin embargo, en el ejercicio 4, multiplicó el valor 4 por 3, es decir, que identificó que esa operación es equivalente a sumar 3 veces el 4. Ver Figura 104.

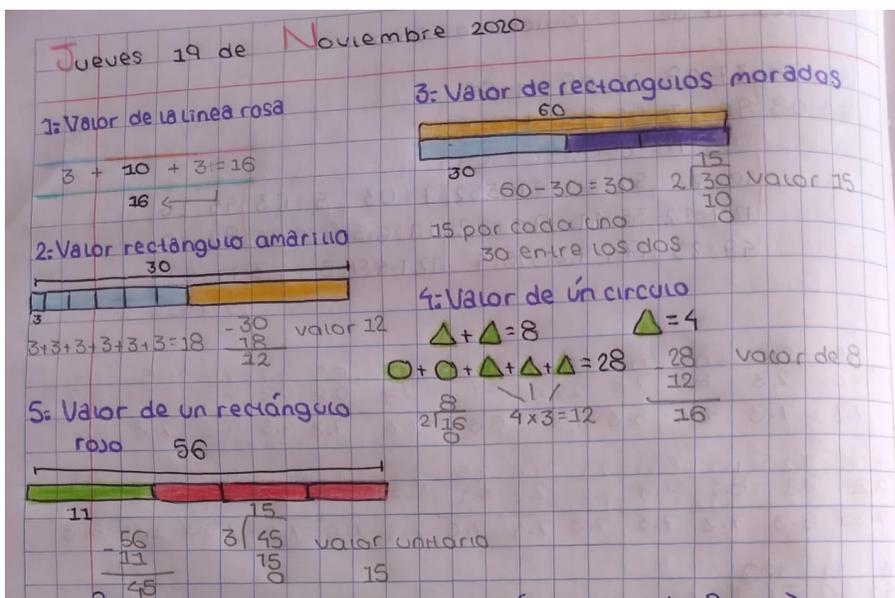


Figura 104. Respuesta de Dulce a la actividad de compartir sus procedimientos

Valentina no narró sus procedimientos, únicamente mostró las operaciones aritméticas que resolvió para obtener la respuesta de cada ejercicio. En el ejercicio 1 utilizó una multiplicación, y para el ejercicio 4 utilizó sumas. Ver Figura 105.

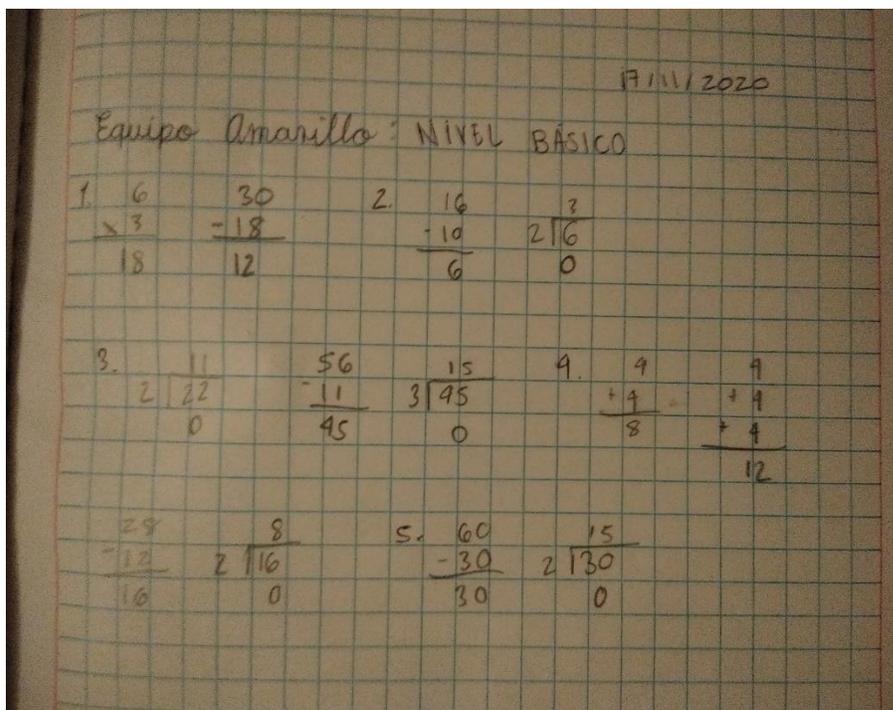


Figura 105. Respuesta de Valentina a la actividad de compartir sus procedimientos

5.2.3. Tarea de ejercitación con respuesta abierta

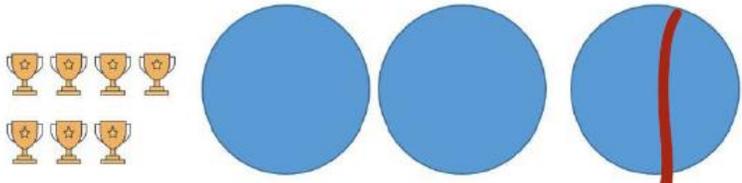
Esta tarea se llevó a cabo la tercera semana de la TD, ya que la Tarea de ejercitación con respuesta múltiple demandó más tiempo del esperado, principalmente por la revisión de los procedimientos compartidos de los estudiantes y el diseño de dos Tareas de ejercitación múltiple. Sin embargo, se respetaron los bloques temáticos asignados por semana, para lo cual correspondía al Bloque Uso de términos aritméticos, simbología y lenguaje algebraico.

Se compartió un ejercicio en pdf en la plataforma de Google Classroom, los estudiantes podían editar el documento, recrearlo o subir la foto de su procedimiento en cuaderno.

En la Figura 106, Andrea tuvo dificultad para interpretar el problema, no logró relacionar la información de la gráfica con la información proporcionada en el

texto. Una primera opción fue dividir 46 entre 3. La segunda opción fue, sumar a 46 los 7 trofeos visibles y dividir entre 3.

Mi móvil como cuaderno
Nivel básico



Los círculos ocultan la **misma cantidad** de trofeos **cada uno**, y en **total hay 46 trofeos** ¿Cuántos trofeos oculta **un círculo**?

habría que dividir 46 entre 3 y daría el resultado en este caso el resultado es 15

o se suma 46+ los trofeos visibles que son 7 y da 53 y se divide entre los círculos y da 17

Colegio Gran Bretaña
UAQ

Figura 106. Respuesta de Andrea a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.

En chat el docente compartió la siguiente explicación, ver Figura 107.

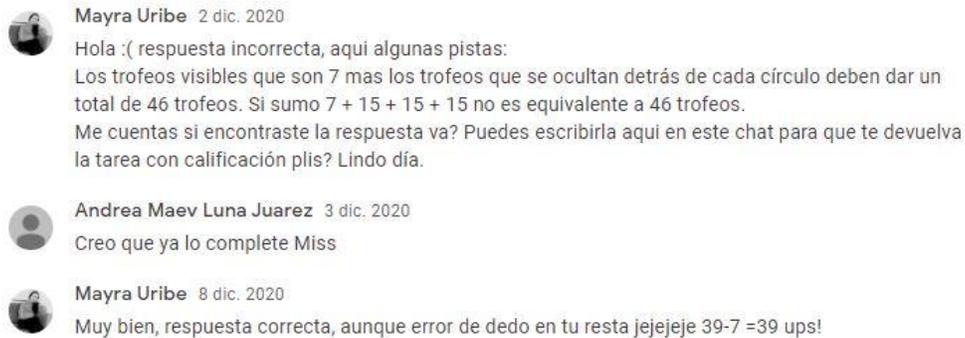


Figura 107. Captura de pantalla del chat en Google Classroom con la estudiante Andrea

Andrea envió un segundo archivo corrigiendo su respuesta, ver Figura 108, identificó que los valores conocidos son 46, valor que describe el texto del problema y 7 que corresponde al número de trofeos visibles, es decir, asocio el texto del problema con el gráfico, ya que ambos elementos le daban pistas para resolver el problema. Aunque cometió un error en la resta $39-7= 39$, es evidente que se trató de un error por omisión, ya que su explicación fue clara.

Mi móvil como cuaderno
Nivel básico

Los círculos ocultan la **misma cantidad** de trofeos **cada uno**, y en **total hay 46 trofeos** ¿Cuántos trofeos oculta **un círculo**?

primero hay que restar 7 con
 46 porque son las cantidades
 que nos da el problema

$$39 - 7 = 39$$

Y después hay que dividir el
 número que nos dio entre la
 cantidad de círculos

$$39 \text{ entre } 3 = 13$$

**R= hay 13 trofeos en
 cada círculo**

Colegio Gran Bretaña
UAQ

Figura 108. Segunda respuesta de Alondra a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.

En la Figura 109, Carolina asoció que los 46 trofeos en total sólo refieren a los trofeos ocultos, de ser así, no debería sumar los 7 trofeos visibles. Como Andrea, Carolina tuvo dificultad para asociar los datos del problema en el texto y el apoyo visual de la gráfica.

Mi móvil como cuaderno
Nivel básico

Los círculos ocultan la **misma cantidad** de trofeos **cada uno**, y **total hay 46 trofeos** ¿Cuántos trofeos oculta **un círculo**?

Si sumamos los 7 trofeos que están a lado de los círculos más los trofeos que nos indica el problema que tenemos 53 entre 3 que es la cantidad de círculos es 17.6

Colegio Gran Bretaña
UAQ

Figura 109. Respuesta de Carolina a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.

En la Figura 110, Valeria interpretó que el enunciado del problema omite los 7 trofeos visibles, consideró que debían sumarse a la cantidad total que indica el problema, es decir, el total de trofeos es 53.

Mi móvil como cuaderno
Nivel básico

Los círculos ocultan la **misma cantidad** de trofeos **cada uno**, y en **total hay 46 trofeos** ¿Cuántos trofeos oculta **un círculo**?

En cada círculo hay 17 trofeos por que hay siete trofeos que no están tomados en cuenta en los 46 trofeos así que $46 \text{ más } 7 = 53$ y después lo dividimos entre 3 por que son tres círculos.

Figura 110. Respuesta de Valeria a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.

En la Figura 111, Dania identificó que los 7 trofeos que muestra la ilustración son un dato del problema también, *como primer paso restamos la pista que nos da*, refiriéndose a los trofeos visibles. Expresó textualmente de manera incorrecta la división que realizó, *3 entre 39*, aunque es correcta la operación aritmética. Explicó que la respuesta debe comprobarse mediante la suma de los resultados, *último paso comprobar*.

Mi móvil como cuaderno
Nivel básico

Los círculos ocultan la **misma cantidad** de trofeos **cada uno**, y en **total hay 46 trofeos** ¿Cuántos trofeos oculta **un círculo**?

Como primer paso restamos la pista que nos da en este caso $7 - 46$

$$\begin{array}{r} -46 \\ \quad 7 \\ \hline 39 \end{array}$$

Como segundo paso el resultado que te dé entre los círculos que hay, en este caso 3, es decir, 3 entre 39

$$\begin{array}{r} 13 \\ 3 \overline{)39} \end{array}$$

Y como último paso comprobar (opcional), y Argumentar tu respuesta

$$13 \times 3 = 39$$

$$13 \times 3 + 7 = 46$$

Cada círculo tiene 13 trofeos

Colegio Gran Bretaña
UAQ

Figura 111. Respuesta de Dania a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.

En la Figura 112, Samirah explicó con texto su procedimiento y lo sustenta con operaciones aritméticas. Interpretó correctamente el problema.

Mi móvil como cuaderno
Nivel básico

Los círculos ocultan la **misma cantidad** de trofeos **cada uno**, y en **total hay 46 trofeos** ¿Cuántos trofeos oculta **un círculo**?

restamos 46 - 7 ya que 46 es el total de trofeos pero hay 7 que están afuera y el resultado es 39 lo dividimos 39 entre 3 y es 13 cada círculo tendrá 13 trofeos

$$\begin{array}{r} 46 \\ - 7 \\ \hline 39 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 3 \overline{)39} \\ \underline{30} \\ 09 \\ \underline{09} \\ 0 \end{array}$$

Figura 112. Respuesta de Samirah a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.

En la Figura 113, Sofía editó el archivo pdf agregando texto para narrar las operaciones aritméticas, las cuáles escribió posiblemente con una digitalizadora, hizo anotaciones para señalar información del problema. Sofía interpretó correctamente el problema, su respuesta manifestó las posibilidades que presenta compartir ideas en archivos digitales.

7 1 2 3
Mi mamá tiene un cuaderno Nivel básico

Los círculos ocultan la misma cantidad de trofeos cada uno, y en total hay 46 trofeos ¿Cuántos trofeos oculta un círculo?

46 trofeos en total
7 trofeos visibles

Restamos 46 menos 7

$$\begin{array}{r} 46 \\ - 7 \\ \hline 39 \end{array}$$

El número que ocultan los círculos sería 13, porque si sumamos 13 más 13 más 13 más 7 nos daría el resultado de 46.

sumamos 39 que es el resultado de 13×3 con los 7 trofeos ya visibles

$$\begin{array}{r} 39 \\ + 7 \\ \hline 46 \end{array}$$

dividimos 39 entre 3 (que son los círculos con la cantidad oculta)

$$\begin{array}{r} 13 \\ 3 \overline{) 39} \\ \underline{09} \end{array}$$

multiplicamos 13 (que es el resultado de la división) y 3 (que son los círculos)

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 3 \\ \hline 39 \end{array}$$

Colegio Gran Bretaña - UAG

Figura 113. Respuesta de Sofía a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.

Abigail consideró que los 7 trofeos que muestra la ilustración refieren a los trofeos ocultos detrás de los círculos, y que el objetivo del problema era identificar si el valor 46 correspondía con ello. Se evidenció dificultad de analizar el texto del problema y la información que proporciona la gráfica. Ver Figura 114.

Mi móvil como cuaderno
Nivel básico

Los círculos ocultan la **misma cantidad** de trofeos **cada uno**, y en **total hay 46 trofeos** ¿Cuántos trofeos oculta **un círculo**?

Datos
trofeos son 7
Círculos 3
¿En cada uno?

Operaciones
 $7 \times 3 = 21$ no llega a 42

R= por lo tanto la cantidad ~~no~~ es 46 si no 21 ya que si divides 46 entre 3 = 15.3 y si divides 21 entre 3 = 7

En conclusión cada círculo tiene 7 trofeos

Figura 114. Respuesta de Abigail a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.

En la Figura 115, Camila explicó sus procedimientos con texto y operaciones aritméticas, identificó la relación del texto del problema con los datos del gráfico, *en total son 46 ya contando los 7 de afuera*, refiriéndose a los trofeos visibles.

Mi móvil como cuaderno
Nivel básico

Los círculos ocultan la **misma cantidad** de trofeos **cada uno**, y en **total hay 46 trofeos** ¿Cuántos trofeos oculta **un círculo**?

Datos:	Operación:	Resultado:
-Total de 46 trofeos.	Primero:	Hay 13 trofeos en cada círculo y si multiplicamos $13 \times 3 = 39$ y a ese
-7 trofeos afuera.	$46 - 7 = 39$	39 le sumamos los 7 trofeos de
- ¿Cuántos trofeos oculta un círculo?	A 46 le vamos a restar 7	afuera nos da el total de 46 trofeos.
	Que son los trofeos de Afuera porque en total son 46 ya contando los 7 de afuera.	
	Segundo:	
	$39/3 = 13$	
	El resultado de la resta de 46-7 Nos da un total de 39, ese 39 lo Vamos a dividir entre la cantidad De círculos que hay en este caso 3 Lo que nos da un total de 13.	

Colegio Gran Bretaña
UAQ

Figura 115. Respuesta de Camila a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.

En la Figura 116, Audolina dividió el valor 46 entre 4, asoció que los círculos corresponden a un conjunto de trofeos, por lo que los trofeos visibles corresponden a otro círculo, y son 4 círculos ya que hay copas de sobra.

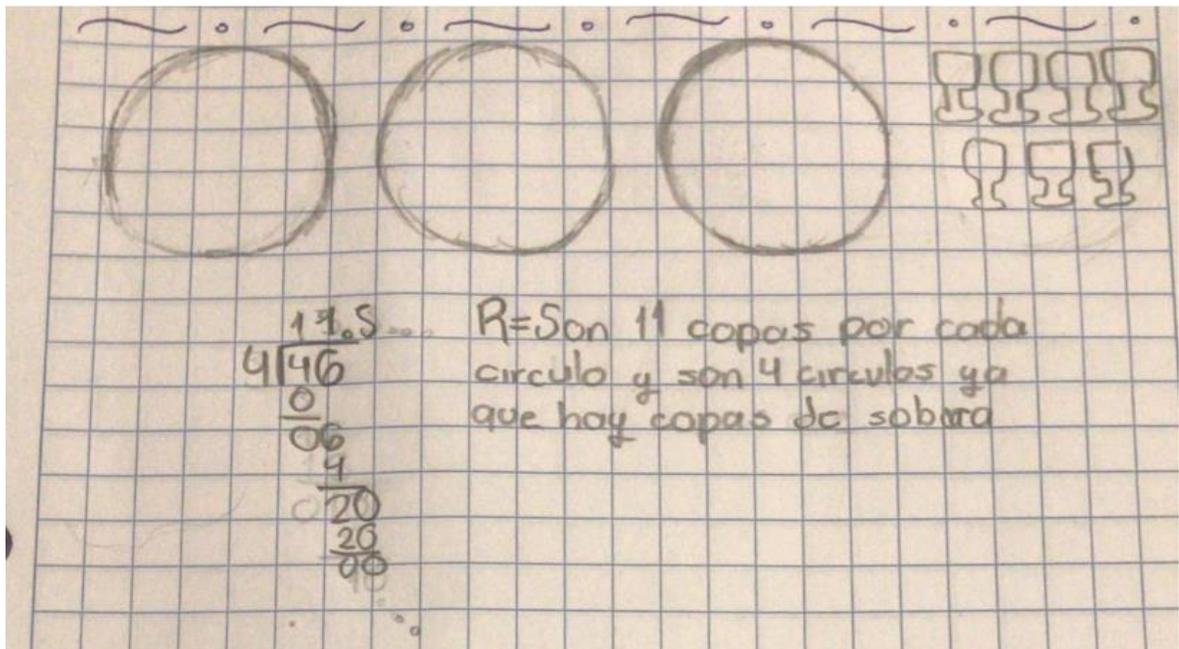


Figura 116. Respuesta de Audolina a la Tarea de ejercitación de respuesta abierta.

Al inicio de la cuarta semana se comparte la tarea de ejercitación abierta con el propósito de identificar la capacidad del estudiante en la adquisición del concepto variable y sus diversos usos que refiere al bloque 3, Identificación del carácter multifacético de la variable. La actividad se describe en las Figura 117, se envió por correo electrónico ya que no fue posible crear pizarras en jamboard por cada estudiante, además que la plataforma de Classroom no permite crear sub grupos para asignar tareas distintas. Se crearon tres niveles para la tarea, la identificación y gestión de los estudiantes según las competencias adquiridas identificadas son aspectos que no es posible gestionar en Classroom.

Estas insignias representan los logros que van a desbloquearse en cada reto. Te cuento de que van:

-  **Más me gusta:** Esta insignia la ganan aquellos que dan un extra en su trabajo, cuidan cada detalle y explican súper bien.
-  **Wow! Súper creativo:** No es fácil obtener este logro, lo obtienen quienes comparten sus ideas con diferentes recursos multimedia de manera original.
-  **Brillaste en Meet:** Es para quienes participan y comparten su linda voz y sus creativas ideas en nuestras reuniones grupales.
-  **Soy un gran compañero de equipo:** Cuando ayudas a un compañero en apuros.
-  **El mejor ranking de respuestas correctas:** Sólo para quienes no se dan por vencidos y buscan hasta encontrar la respuesta correcta.

¿Me ayudas a descubrir a cuántos puntos equivale cada insignia?
En las siguientes hojas de este Jamboard encontrarás algunas pistas. Mucho éxito!!!!

Figura 117. Texto preliminar de la Tarea Final de ejercitación con respuesta abierta.

La tarea de nivel inicial contenía un único ejercicio. Se proporcionó una explicación para aproximar al estudiante hacia una posible forma de resolver el ejercicio. Ver Figura 118.

Sigue estas pistas:

	6 puntos	=		4 puntos
	=	¿A cuántos puntos equivale?		
	=	¿A cuántos puntos equivale?		

Tip: en una igualdad matemática deben ser iguales los valores de ambos lados del signo igual "=", por ejemplo

$$5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$$

Si deseo sumar o restar un valor debo hacerlo en ambos lados del signo igual, por ejemplo, **resto** el mismo valor en ambos lados del signo igual

$$5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$$

también puedo **sumar** el mismo valor en ambos lados del signo igual

$$5 + 2 + 10 = 2 + 3 + 1 + 1 + 10$$

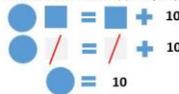
Esto me ayuda cuando quiero descubrir valores desconocidos, por ejemplo

	+		=		+	10
	/		=		/	10
	=	10				

Figura 118. Tarea Final de ejercitación con respuesta abierta, nivel inicial.

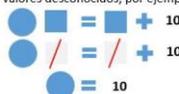
La tarea de nivel básico incluía un segundo ejercicio, en el que se esperaba que el estudiante considerara como válidas respuestas distintas a un valor numérico, en este caso, la equivalencia entre un conjunto de símbolos. Ejercicios de la Tabla 14.

Tabla 14. Tarea Final de ejercitación con respuesta abierta, nivel básico.

<p>Sigue estas pistas:</p>  <p>6 puntos =</p>  <p>4 puntos</p> <p>¿A cuántos puntos equivale?</p> <p>¿A cuántos puntos equivale?</p> <p>[Tip: en una igualdad matemática deben ser iguales los valores de ambos lados del signo igual "=", por ejemplo $5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$</p> <p>Si deseo sumar o restar un valor debo hacerlo en ambos lados del signo igual, por ejemplo, resto el mismo valor en ambos lados del signo igual $5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$</p> <p>también puedo sumar el mismo valor en ambos lados del signo igual $5 + 2 + 10 = 2 + 3 + 1 + 1 + 10$</p> <p>Esto me ayuda cuando quiero descubrir valores desconocidos, por ejemplo</p> 	<p>Sigue estas pistas:</p>  <p>=</p>  <p>¿A Cuántas insignias Soy un gran compañero de equipo equivale?</p>
---	---

La tarea de nivel medio incluía ejercicios de equivalencias matemáticas, y un ejercicio que se explica con texto, sin apoyo gráfico. Ejercicios de la Tabla 15.

Tabla 15. Tarea Final de ejercitación con respuesta abierta, nivel medio.

<p>Sigue estas pistas:</p>  <p>6 puntos =</p>  <p>4 puntos</p> <p>¿A cuántos puntos equivale?</p> <p>¿A cuántos puntos equivale?</p> <p>[Tip: en una igualdad matemática deben ser iguales los valores de ambos lados del signo igual "=", por ejemplo $5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$</p> <p>Si deseo sumar o restar un valor debo hacerlo en ambos lados del signo igual, por ejemplo, resto el mismo valor en ambos lados del signo igual $5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$</p> <p>también puedo sumar el mismo valor en ambos lados del signo igual $5 + 2 + 10 = 2 + 3 + 1 + 1 + 10$</p> <p>Esto me ayuda cuando quiero descubrir valores desconocidos, por ejemplo</p> 	<p>Sigue estas pistas:</p>  <p>= 40 puntos</p>  <p>= 75 puntos</p>  <p>= ¿A cuántos puntos equivale?</p>
---	--

<p>Sigue estas pistas:</p> 	<p>El total de puntos de todas las insignias es de 115 puntos, ¿a cuántos puntos equivale la insignia <i>El mejor ranking de respuestas correctas</i>?</p>
--	--

5.2.3.1. Tarea de respuesta abierta – Nivel inicial

En la Figura 119, Abigail interpretó que las expresiones de cada lado del signo igual son independientes entre sí, es decir, las insignias de cada lado de la ecuación equivalen al valor numérico, por ejemplo, dos insignias azules y la roja suman 6, tres insignias verdes y una roja deberían sumar cuatro, considera que ese 4 es un valor incorrecto, *no es 4 ya que si es la igualdad de la primera por lo tanto debe dar el mismo resultado*. Se identificó que ella sabe que al existir un signo igual deben respetarse las equivalencias. El diseño del ejercicio omite los símbolos de suma para identificar que los elementos de cada lado del signo igual corresponden a la misma expresión.

Sigue estas pistas:



El Trofeo vale 2 al igual que la pantalla

Pero el resultado de la segunda igualdad no es 4 ya que si es la igualdad de la primera por lo tanto debe dar el mismo resultado

Tip: en una igualdad matemática deben ser iguales los valores de ambos lados del signo igual "=", por ejemplo
 $5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$
 Si deseo sumar o restar un valor debo hacerlo en ambos lados del signo igual, por ejemplo, **resto** el mismo valor en ambos lados del signo igual
 $5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$
 también puedo **sumar** el mismo valor en ambos lados del signo igual
 $5 + 2 + 10 = 2 + 3 + 1 + 1 + 10$
 Esto me ayuda cuando quiero descubrir valores desconocidos, por ejemplo

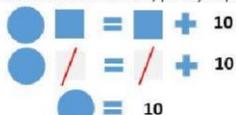


Figura 119. Respuesta de Abigail a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.

Así como Abigail, en la Figura 120, Abraham interpretó que las expresiones de cada lado del signo igual son independientes, y que el valor conocido es el resultado de una igualdad, buscó valores que respetarán esa igualdad, para el el trofeo vale 10 y la pantalla -2, estos valores cumplen las igualdades que él asocia.

$$\text{Pantalla} + \text{pantalla} + \text{trofeo} = 6$$

$$-2-2+10=6$$

$$\text{Pantalla}+\text{pantalla}+\text{pantalla}+\text{trofeo} = 4$$

$$-2-2-2+10=4$$

Sigue estas pistas:



=



=

¿A cuántos puntos equivale? El trofeo vale 10 puntos



=

¿A cuántos puntos equivale? La pantalla vale -2 puntos

Tip: en una igualdad matemática deben ser iguales los valores de ambos lados del signo igual "=", por ejemplo

$$5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$$

Si deseo sumar o restar un valor debo hacerlo en ambos lados del signo igual, por ejemplo, **resto** el mismo valor en ambos lados del signo igual

$$5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$$

también puedo **sumar** el mismo valor en ambos lados del signo igual

$$5 + 2 + 10 = 2 + 3 + 1 + 1 + 10$$

Esto me ayuda cuando quiero descubrir valores desconocidos, por ejemplo

$$\begin{aligned} \bullet & \square = \square + 10 \\ \bullet / & = / + 10 \\ \bullet & = 10 \end{aligned}$$

Figura 120. Respuesta de Abraham a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.

En la Figura 121, Sofía Vega utilizó el mismo razonamiento que Abraham, ambos son de grupos distintos, esto implica que existe un significado erróneo adquirido en relación a la interpretación de estos ejercicios, por lo que deben considerarse usar simbología previamente, que especifique que elementos se suman o restan.

Buscar dos números iguales y uno diferente que sumados o restados te den 6

Buscar tres números iguales y uno diferente que sumados o restados te den 4

Sigue estas pistas:

 6 puntos
 $-(-2) \quad -(-2) \quad +10$



 4 puntos
 $-(-2) \quad -(-2) \quad -(-2) \quad +10$
 $= 10$ ¿A cuántos puntos equivale?
 $= 2$ ¿A cuántos puntos equivale?

Sofía Vega Camacho 1ºB Secundaria

Figura 121. Respuesta de Sofía a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.

En la Figura 122, Adrián tuvo claro que debía respetarse una igualdad matemática, así que buscó números que cumplieran la igualdad, si bien no posee las herramientas para realizar procedimientos algebraicos, como los que se muestran en la explicación del ejemplo, logró identificar el uso del signo igual en la equivalencia matemática.

Sigue estas pistas:

 6 puntos
 $=$
 4 puntos
 $= 0$ ¿A cuántos puntos equivale?
 $= 2$ ¿A cuántos puntos equivale?

Tip: en una igualdad matemática deben ser iguales los valores de ambos lados del signo igual "=", por ejemplo
 $5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$
 Si deseo sumar o restar un valor debo hacerlo en ambos lados del signo igual, por ejemplo, **resto** el mismo valor en ambos lados del signo igual
 $5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$
 también puedo **sumar** el mismo valor en ambos lados del signo igual
 $5 + 2 + 10 = 2 + 3 + 1 + 1 + 10$
 Esto me ayuda cuando quiero descubrir valores desconocidos, por ejemplo





fui quitando las pantallas de cada operación por así decirle y cada una me dio 2
 lo que hice fue sumarle a mi posible resultado el 6 y me dio 10, luego al hacer el otro me dio el mismo resultado

Figura 122. Respuesta de Adrián a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.

En la Figura 123, Karla resolvió partiendo de los valores conocidos, identificó que del lado derecho del signo igual faltan 2 puntos para obtener un 6, y del lado derecho sobran dos puntos al 6 para ser equivalente con el 4, y además falta una insignia color azul, por lo tanto, la insignia azul tendría que valer 2, que es la cantidad que sobra.

Sigue estas pistas:

 2 2	 3	6 puntos	=	2 2 2 3  4	puntos
		 	=	¿A cuántos puntos equivale?	
		 	=	¿A cuántos puntos equivale?	

Equivale a 3 puntos

Equivale a 2 puntos

Dan 13 en los 2 lados del signo igual porque en uno a los 4 puntos le faltan 2 para llegar al 6 y en otro le sobran 2 puntos para tener 4 pero tiene una insignia menos y la otra tiene una más

Tip: en una igualdad matemática deben ser iguales los valores de ambos lados del signo igual "=", por ejemplo
 $5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$
 Si deseo sumar o restar un valor debo hacerlo en ambos lados del signo igual, por ejemplo, **resto** el mismo valor en ambos lados del signo igual

$5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$

también puedo **sumar** el mismo valor en ambos lados del signo igual
 $5 + 2 + 10 = 2 + 3 + 1 + 1 + 10$
 Esto me ayuda cuando quiero descubrir valores desconocidos, por ejemplo

$$\begin{aligned} \bullet &= \square + 10 \\ \bullet / &= / + 10 \\ \bullet &= 10 \end{aligned}$$

Figura 123. Respuesta de Karla a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.

En la Figura 124, José buscó valores que cumplieran la igualdad, dando valores distintos a la misma insignia, según su respuesta los valores serían estos:

$$2 + 2 + 2 + 6 = 1 + 1 + 1 + 3 + 4$$

Parece que buscó que la igualdad se cumpliera únicamente entre las insignias, sin considerar los valores conocidos de 6 y 4.

Sigue estas pistas:

 6 puntos =  4 puntos

siguiendo el tip que dice abajo

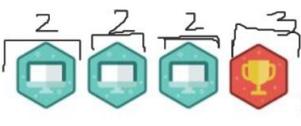
 = ¿A cuántos puntos equivale? en el 1 vale 2 y en el otro 3

 = ¿A cuántos puntos equivale? en el 1 2 y en el 2 1

Figura 124. Respuesta de José a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.

Sofía partió del razonamiento que debe buscarse el valor total de las expresiones, incluso lo señala. Sofía identificó que ambas expresiones son equivalentes, y esa equivalencia corresponde a un valor, y que los valores que se asignen a las insignias deben respetar esa condición. Ver Figura 125.

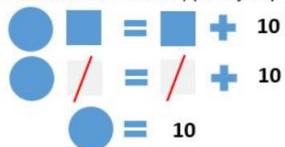
Sigue estas pistas:

 6 puntos =  4 puntos = 13

 = ¿A cuántos puntos equivale? 3

 = ¿A cuántos puntos equivale? 2

Tip: en una igualdad matemática deben ser iguales los valores de ambos lados del signo igual "=", por ejemplo
 $5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$
 Si deseo sumar o restar un valor debo hacerlo en ambos lados del signo igual, por ejemplo, **resto** el mismo valor en ambos lados del signo igual
 $5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$
 también puedo **sumar** el mismo valor en ambos lados del signo igual
 $5 + 2 + 10 = 2 + 3 + 1 + 1 + 10$
 Esto me ayuda cuando quiero descubrir valores desconocidos, por ejemplo



lo que hacemos es considerar la cantidad de puntos que nos señalan afuera para la operación y luego buscamos numeros que al sumarlos juntos en ambos lados nos de el mismo resultado en este caso trece desde el principio de

la suma consideramos los puntos (6 y 4) y a base de eso buscamos los numeros que al sumarlo coincida su resultado

Figura 125. Respuesta de Sofía a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.

Andrea pidió una sesión en Meet con la docente para explicar sus dudas sobre el ejercicio, la sesión tuvo una duración aproximada de 25 minutos. Cuando la docente preguntó sobre cuál era su duda ella explicó lo siguiente:

Andrea: es que mi conflicto es que aqui hay dos y aqui hay tres, no va a estar balanceado

Andrea también asoció que los valores numéricos en el ejercicio son los resultados de una equivalencia matemática, y por lo tanto no es posible encontrar valores que cumplan ambas condiciones respetando la equivalencia. En este sentido, ella sabe que para una u otra expresión el símbolo en color turquesa debe valer lo mismo, así como el símbolo en color rojo, pero al considerar el 6 como resultado de la primera equivalencia y al 4 como resultado de la segunda, no logró encontrar valores que cumplan las expresiones. La docente explicó que se trataba de una misma expresión, que el lado izquierdo del signo igual equivale al lado derecho del signo igual, después de la explicación Andrea enunció lo siguiente:

Andrea: ósea miss aquí es más, más y más? Aaaah, ya le entendí miss, ósea esto es igual a esto, aunque suene tonto

Refiriéndose a los elementos de cada lado del signo igual, sin embargo, parece que no le resultó del todo coherente la expresión, si bien parece no encontrarle un sentido práctico entendió lo que expresaba el gráfico, logro interpretarlo, y enunció lo siguiente al referirse al símbolo en color rojo.

Andrea: hay varias respuestas miss

La Figura 126 muestra los procedimientos del razonamiento de Andrea, explicó que las insignias azules y los puntos, los valores numéricos, son equivalentes, *dan lo mismo*, logró interpretar que puede existir una equivalencia entre los símbolos y los valores numéricos aunque fuera distinto el número de símbolos azules, entonces considerando esto, el símbolo en color rojo puede tomar cualquier valor, ya que la equivalencia se respetaría, esta estudiante logró asociar a un símbolo un valor fijo, y al mismo tiempo comprendió que otro símbolo puede tomar distintos

valores, lo que indica una aproximación a la comprensión de los diversos usos de la variable.

Sigue estas pistas:

6 puntos = 4 puntos

¿A cuántos puntos equivale? 3

¿A cuántos puntos equivale? 2

miss para mi puede ser cualquier número por que las insignias azules y los puntos dan lo mismo entonces las rojas pueden ser cualquier número.

Tip: en una igualdad matemática deben ser iguales los valores de ambos lados del signo igual "=", por ejemplo

$$5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$$

Si deseo sumar o restar un valor debo hacerlo en ambos lados del signo igual, por ejemplo, **resto** el mismo valor en ambos lados del signo igual

$$5 + \cancel{2} = \cancel{2} + 3 + 1 + 1$$

también puedo **sumar** el mismo valor en ambos lados del signo igual

$$5 + \cancel{2} + 10 = \cancel{2} + 3 + 1 + 1 + 10$$

Esto me ayuda cuando quiero descubrir valores desconocidos, por ejemplo

$$\text{blue circle} + \text{blue square} = \text{blue square} + 10$$

$$\text{blue circle} + \text{blue square with slash} = \text{blue square with slash} + 10$$

$$\text{blue circle} = 10$$

Figura 126. Respuesta de Andrea a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.

5.2.3.2. Tarea de respuesta abierta – Nivel básico

Romina logró resolver el ejercicio utilizando el procedimiento ejemplo, por un lado, logró identificar que es posible reducir elementos equivalentes de ambos lados del signo igual, como lo muestra la figura, al tachar el elemento en color naranja. Por otro lado, también prestó atención a lo que pregunta el ejercicio, a cuántos rombos verdes equivale la expresión. Ver Figuras 127 y 128.

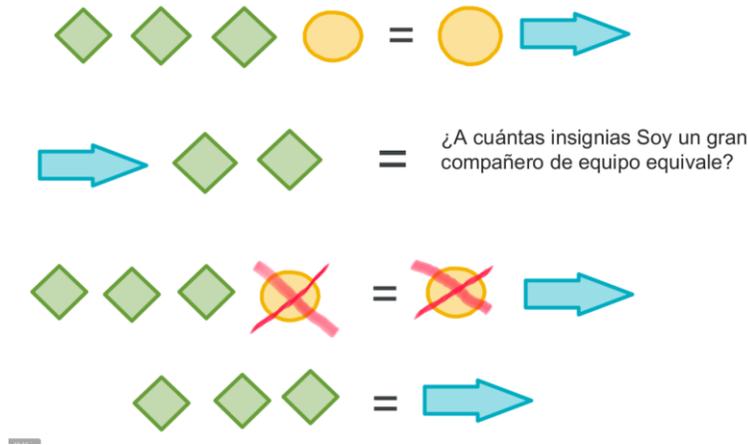


Figura 127. Respuesta de Romina a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja 1.



Equivale a 5 insignias de soy un gran compañero

Figura 128. Respuesta de Romina a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja 2.

Andrea también logró resolver el ejercicio siguiendo la lógica de Romina, pero, además, narró su razonamiento, lo que da muestras de la riqueza de información que el estudiante comparte en los documentos digitales, es poca la resistencia para escribir, trazar, dibujar y crear nuevos documentos para explicar su razonamiento, además que eso ayuda a que se concentren en el proceso y no es una respuesta binaria de correcto o incorrecto. Ver Figura 129.

Andrea logró identificar que la expresión es una igualdad por sí sola. Sin embargo, para el obtener el valor de las insignias debe expresar otras equivalencias matemáticas, sumó los valores conocidos para crear una nueva equivalencia

matemática que le permitiera saber el valor de la insignia roja, se dio cuenta que los valores conocidos y las insignias azules valen 10, por lo tanto, las insignias en color rojo pueden tomar cualquier valor.

Primero haria como el ejemplo para poder sacar el valor de la insignia brillante en meet, es decir quitaria dos insignias de brillante en meet y una de el mejor ranking de respuestas correctas que quede como a continuación:



Después como solo me quedo un cuadro en donde estan los 4 puntos voy a ver cuanto le falta a 4 para llegar a 6 que serian 2 entonces el cuadro vale 2

$$\text{[Blue Badge]} = 2 \quad 6 - 4 = 2$$

Y luego sumaria ya sabiendo el valor de la insignia de brillante en meet sumaria las primeras $2 + 2 + 6 \text{ puntos} = 10$ y de el otro lado haria lo mismo $2 + 2 + 2 + 4 = 10$ y el valor de la insignia el mejor ranking de respuestas correctas podria ser cualquier número ya que no hay forma o otra insignia de esa del otro lado pues no se puede sacar para esa insignia lo que quiere decir que puede ser cualquier número

$$\begin{aligned} \text{[Red Badge]} &= 4 \\ \text{[Blue Badge]} &= 2 \end{aligned}$$

Figura 129. Respuesta de Andrea a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja 1.

Los estudiantes parecen familiarizarse con el hecho de que los resultados no necesariamente son valores fijos numéricos, puede tratarse de una respuesta del tipo: *Puede tomar cualquier valor, equivale a 5 insignias.*

En el segundo ejercicio, Andrea, identificó que una insignia azul es equivalente a tres insignias verdes, si bien no logró explicarlo del todo en el texto, señaló en el gráfico esa asociación para justificar su respuesta. Ver Figura 130.

Esto dio cuenta de la riqueza de elementos que usan los estudiantes para explicar sus procedimientos y también para lograr encontrar la respuesta a los ejercicios, por ello la importancia de promover diversos contextos para que los estudiantes encuentren flexibles los medios para expresar sus ideas, gráfica, textual y

verbalmente; las actividades que se consideran fundamentales es el análisis de sus procedimientos y los espacios para el diálogo.

Sigue estas pistas:



¿A Cuántas insignias **Soy un gran compañero de equipo** equivale?

Aquí primero lo analice y me di cuenta que la insignia más me gusta equivale a 3 insignias de soy un gran compañero de equipo ya que en la igualdad pasaron igual la insignia de soy un gran compañero de equipo pero las otras no lo que significa que la insignia más me gusta equivale a 3 de soy un gran compañero de equipo



Entonces lo que me daría como resultado a la pregunta de a cuántas insignias Soy un gran compañero de equipo equivale sería a 5 ya que sumamos las insignias que equivale la insignia más me gusta que serían 3 insignias de Soy un gran compañero de equipo y a esas 3 insignias le sumamos las 2 otras insignias de Soy un gran compañeor de equipo



Figura 130. Respuesta de Andrea a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja2.

Audolina resolvió el ejercicio usando un lenguaje próximo al lenguaje algebraico, sólo que usa símbolos e indica las equivalencias tachando los elementos idénticos. Ver Figura 131.

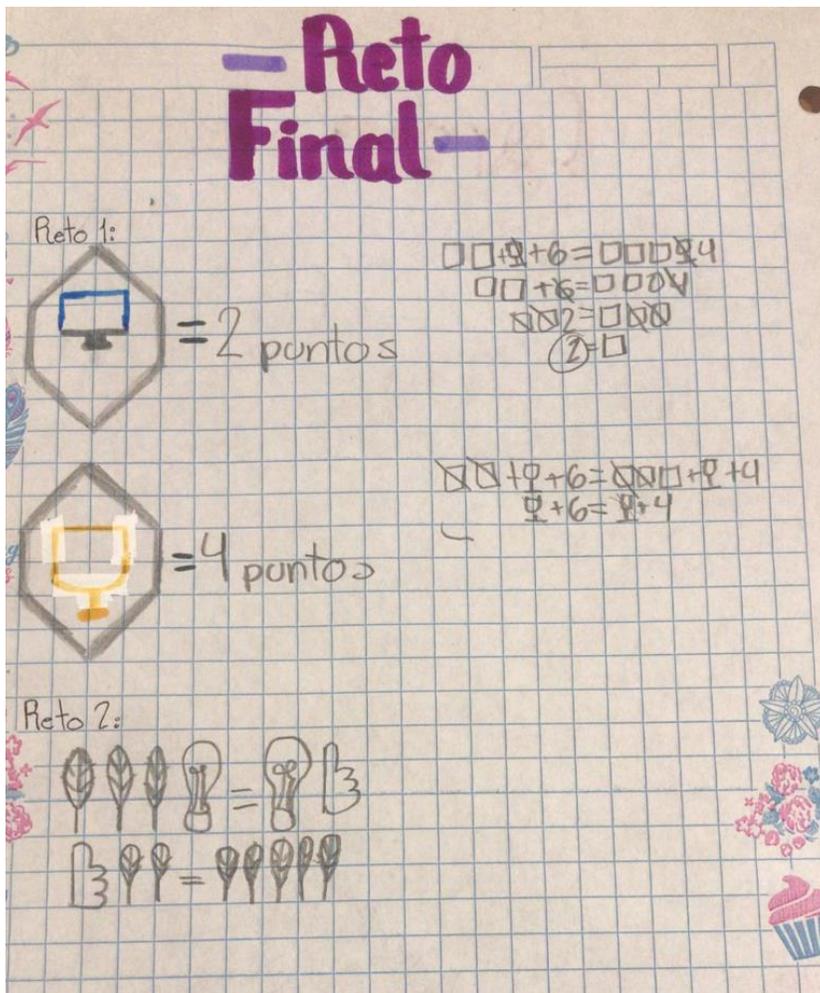


Figura 131. Respuesta de Audolina a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.

Fabiana también logró resolver el ejercicio usando el razonamiento que se explicó con Andrea. Para explicar su procedimiento se ve en la necesidad de identificar las expresiones con letras, un mecanismo utilizado para identificar las ecuaciones algebraicas. Ver Figura 132.

Sigue estas pistas:

Hay dos puntos de diferencia de 1 y 2 (me refiero la cantidad que esta subrayada de amarillo). Y hay en el 2 una insignia más de brillante en meet, entonces significa que por esa insignia extra en el 2 la cantidad dada tiene 2 puntos menos porque la insignia brillante en meet vale dos puntos.

Tip: en una igualdad matemática deben ser iguales los valores de ambos lados del signo igual "=", por ejemplo $5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$

Si deseo sumar o restar un valor debo hacerlo en ambos lados del signo igual, por ejemplo, **resto** el mismo valor en ambos lados del signo igual $5 + 2 = 2 + 3 + 1 + 1$

también puedo **sumar** el mismo valor en ambos lados del signo igual $5 + 2 + 10 = 2 + 3 + 1 + 1 + 10$

Esto me ayuda cuando quiero descubrir valores desconocidos, por ejemplo

En A hay tres insignias de soy un gran compañero de equipo y una de Wow! super creativo, en B hay una de Wow super creativo igual que A, y una de Más me gusta. Tanto como A y B hay solo una insignia de Wow super creativo significa que la insignia azul que está en la B equivale a 3 insignias de gran compañero de equipo.

Sigue estas pistas:

¿A Cuántas insignias Soy un gran compañero de equipo equivale?

3 + 1 + 1 = 5 insignias Soy un gran compañero de equipo

Figura 132. Respuesta de Fabiana a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.

En la Figuras 133, 134 y 135, José logró distinguir que existe relación en un conjunto de ecuaciones, para el primer ejercicio analiza izquierda y derecha del signo igual, para el segundo ejercicio donde hay un conjunto de igualdades relacionadas usa la expresión, *lo que tengo arriba y lo que tengo abajo*, denotando que las expresiones no son independientes, sino que pertenecen a un solo sistema.

Estudiantes como José pueden narrar sus procedimientos textualmente sin utilizar gráficos, si bien logró resolver correctamente el ejercicio y su explicación es extensa, no debe dejarse de lado el promover el uso de símbolo para expresar las equivalencias matemáticas, para aproximar al estudiante al lenguaje algebraico formal.

EL RETO FINAL *Procedimientos*

Sigue estas pistas:

6 puntos = 4 puntos

¿A cuántos puntos equivale?

¿A cuántos puntos equivale?

Tip: en una igualdad matemática deben ser iguales los valores de ambos lados del signo igual "=", por ejemplo $5 + 2 = 2 + 5 + 3 + 1$

Si deseo sumar o restar un valor debo hacerlo en ambos lados del signo igual, por ejemplo, **resto** el mismo valor en ambos lados del signo igual $5 + 2 = 2 + 5 + 3 + 1 + 1$

también puedo **sumar** el mismo valor en ambos lados del signo igual $5 + 2 + 10 = 2 + 5 + 3 + 1 + 10$

Esto me ayuda cuando quiero descubrir valores desconocidos, por ejemplo

ANÁLISIS 1:

Analizando el problema llegué a la conclusión que es un problema de igualdad matemática.

-En el lado izquierdo tenemos 2 hexágonos verdes (Los que están rodeados de color azul).

-También tenemos 1 hexágono rojo (El que está rodeado de rojo).

-Tenemos 6 puntos.

ANÁLISIS 2:

Del lado derecho tenemos:

-3 hexágonos verdes (los que están rodeados con verde).

-1 hexágono rojo (el que está rodeado con color naranja)

-También tenemos 4 puntos.

Figura 133. Respuesta de José a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja 1.

Sigue estas pistas:

¿A Cuántas insignias Soy un gran compañero de equipo equivale?

ANÁLISIS 1:

En la parte de arriba tenemos:

-3 insignias verdes. (Encerradas con rojo)

-2 insignias amarillas. (Encerradas con azul)

-1 insignia azul. (Encerradas con verde)

Llegué a la conclusión de:

Este problema es de igualdad matemática.

ANÁLISIS 2:

En la parte de abajo tenemos:

-1 insignia azul.

-2 insignias verdes.

También tenemos la pregunta a este problema:

¿A cuántas insignias Soy un gran compañero de equipo equivale?

Procedimientos:

Como analizamos anteriormente tenemos en el lado de arriba: 3 insignias verdes, 2 insignias amarillas y una insignia azul.

Después de analizar el problema llegué a la siguiente conclusión:

1 insignia verde = 3.

1 insignia amarilla = 4.

Del lado izquierdo de la parte de arriba con estos cálculos tenemos los siguientes resultados:

$3 \times 3 = 9$

¿Por qué?, Porque con los cálculos anteriores llegamos a la conclusión que cada insignia verde vale 3.

$9 + 4 = 13$

¿Por qué?, Porque 4 es lo que vale la insignia amarilla y el 9 es el valor de las 3 insignias verdes.

Después hice lo siguiente le resté 13, (nuestro valor) al 4.

¿Por qué?, porque el 13 es nuestro valor que sacamos con anterioridad y el 4 es lo que vale una insignia amarilla. Todo esto es del lado derecho de la parte de arriba.

Figura 134. Respuesta de Abigail a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja 2.

Procedimientos 2:

Esta resta nos da 9, llegando a la conclusión que la insignia azul vale 9.

En el lado de abajo tenemos:

1 insignia azul y 2 verdes.

Aquí está más sencillo, ya que antes calculamos los valores de la insignia verde y de la insignia azul.

1 insignia verde = 3.

1 insignia azul = 9.

Entonces sería:

$3 \times 2 = 6$, (El valor de las 2 insignias verdes).

$9 + 6 = 15$, (La suma de las 2 insignias las verdes y la azul)

Después busqué un divisor de 15 que nos de 3.

Resultado:

Con los cálculos pasados llegué a la conclusión de:

¿A cuántas insignias Soy un gran compañero de equipo equivale?

R= Equivale a 5 insignias.

Figura 135. Respuesta de José a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta. Hoja 3

5.2.3.3. Tarea de respuesta abierta – Nivel medio

El ejercicio 3 sólo contiene texto, sin grafico como soporte, aunque fue sencillo, demandó que el estudiante leyera con atención. En su mayoría resolvieron sin dificultad, la Figura 136 muestra la respuesta de Christopher, es demasiado el texto que refiere a las etiquetas de las insignias, no el procedimiento en si, por lo que debe prestó mayor atención en diseños posteriores para asignar etiquetas sencillas que no saturen al estudiante con información innecesaria.

El total de puntos de todas las insignias es de 115 puntos, ¿a cuántos puntos equivale la insignia *El mejor ranking de respuestas correctas*?

Los puntos de insignias anteriores dan un resultado de 90 puntos. Enonces si hacemos una resta vemos que como resultdo la insignia " El mejor ranking de respuestas correctas" seria de 25 puntos



$$20+20+25+25= 90 \text{ puntos}$$

$$\begin{array}{r} 115 \text{ puntos (total)} \\ - 90 \text{ puntos} \\ \hline 25 \text{ puntos} \end{array}$$

Figura 136. Respuesta de Cristopher a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.

Valeria explicó sus procedimientos sin mencionar las etiquetas de las insignias, indicó únicamente los valores que encontró, y narró las operaciones aritméticas que realizó para encontrar la respuesta. Ver Figura 137.

El total de puntos de todas las insignias es de 115 puntos, ¿a cuántos puntos equivale la insignia *El mejor ranking de respuestas correctas*?

La insignia ROJA vale 25 por que se tiene que sumar todos los resultados los sumas que es $20+20+25+25=90$ y el resultado de $40+75=115$ tienes que restar 90 por que te teda la suma de todas las insignias entonces $115-90= 25$

Figura 137. Respuesta de Valeria a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.

Karla logró resolver el ejercicio utilizando el método de eliminación, ya que restó 65 menos 45, también indicó las equivalencias matemáticas del gráfico con las sumas de los valores que encontró. Ver Figura 138.

Sigue estas pistas:

 = 45 puntos
 = 65 puntos
 = ¿A cuántos puntos equivale?

$R = 25$

$$\begin{array}{r} 65 \\ - 45 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$20 + 25 = 45$$

$$25 + 25 + 20 = 65$$

Figura 138. Respuesta de Karla a la tarea final de ejercitación con respuesta abierta.

5.2.4. Tareas de discusión y colaboración

Las tareas de colaboración no se llevaron a cabo como se consideraba en el diseño preliminar, debido a que el tiempo fue insuficiente, además de que, gestionar este tipo de dinámica en un entorno de aprendizaje móvil requiere ciertas consideraciones, como garantizar la participación de todos, la claridad en la dinámica y la continua comunicación en la plataforma. Por lo tanto, la interacción en las reuniones en Meet refirieron a la discusión de procedimientos y a compartir ideas o dudas. Se llevaron a cabo al cierre de cada semana y en todas se incluyó una actividad de refuerzo al inicio de la sesión.

La naturaleza de la plataforma facilitó la interacción entre los participantes, por lo que se consideró que este espacio era la oportunidad para corregir significados erróneos adquiridos, así como escuchar las ideas de las y los estudiantes en torno al trabajo realizado a lo largo de la semana.

Aunque el tiempo fue insuficiente para llevar a cabo las tareas de colaboración, hubo grupos que según su ritmo de trabajo fue posible compartir ejercicios planteados para la Tarea de colaboración.

5.2.4.1. Sesión 1

Se agregaron actividades de refuerzo al inicio de las sesiones, que permitieron anticipar al estudiante sobre las tareas que se revisarían en la sesión. Se utilizó la herramienta de Quizziz, que permite crear un juego en línea con un tablero de posiciones que indica el puntaje en tiempo real, como se ilustra en la Figura 139. La barra azul indica que el estudiante terminó el ejercicio antes del tiempo, la barra verde indica las respuestas correctas y la roja las respuestas incorrectas. La docente determinó en que momento finalizaba el juego, dando oportunidad a que los participantes tuvieran al menos 3 respuestas correctas.



Figura 139. Tablero de posiciones que indica el puntaje en tiempo real en Quizziz

La Tabla 16 indica los ejercicios que refieren a la tarea de refuerzo, fueron ejercicios sencillos de equivalencia matemática en los que se ocultaban valores numéricos. Esta actividad evitó los tiempos muertos al inicio de la sesión por motivos de conexión, fue una actividad breve y de dificultad manejable para prácticamente todo el grupo.

Tabla 16. Ejercicios de la tarea de refuerzo de la primera sesión de Meet

<p>1. Valor que oculta la tarjeta azul</p> <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> 17 + = 33 </div> <p> <input checked="" type="checkbox"/> 15 <input checked="" type="checkbox"/> 18 <input checked="" type="checkbox"/> 33 - 17 <input checked="" type="checkbox"/> 17 - 33 </p>	<p>2. Valor que oculta la tarjeta azul</p> <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> + 17 = 29 </div> <p> <input checked="" type="checkbox"/> 14 <input checked="" type="checkbox"/> 12 <input checked="" type="checkbox"/> 21 <input checked="" type="checkbox"/> 15 </p>
<p>3. Valor que oculta la tarjeta azul</p> <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> 12 + 17 = </div> <p> <input checked="" type="checkbox"/> 20 + 9 <input checked="" type="checkbox"/> 28 <input checked="" type="checkbox"/> 19 <input checked="" type="checkbox"/> 17 - 12 </p>	<p>4. Valor que oculta la tarjeta azul</p> <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> 24 + 3 = 12 + </div> <p> <input checked="" type="checkbox"/> 18 <input checked="" type="checkbox"/> 15 <input checked="" type="checkbox"/> 27 - 12 <input checked="" type="checkbox"/> 24 - 3 </p>
<p>5. Valor que oculta la tarjeta azul</p> <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> 15 + = 13 + 14 </div> <p> <input checked="" type="checkbox"/> 12 <input checked="" type="checkbox"/> 20 - 15 <input checked="" type="checkbox"/> 17 <input checked="" type="checkbox"/> 14 </p>	

Se utilizó como primer ejercicio la notación recurrente en los trabajos compartidos por los estudiantes, ver Figura 140. El docente preguntó a las y los estudiantes, ¿es correcta la siguiente expresión? Todos respondieron afirmativamente casi de manera inmediata y con seguridad.

$$30 \div 2 = 15 \times 2 = 30$$

Figura 140. Ejercicio para su discusión en Meet

Entonces el docente preguntó, ¿cuándo usamos el signo igual? La gran mayoría asocia su uso como un símbolo operativo que determina un resultado, esto se evidenció con respuesta como:

...al final de una operación para sacar un resultado.

...se usa para expresar el resultado de cualquier ecuación u operación.

...cuando vamos a poner que ya tenemos el resultado?

...lo usa cuando ya tiene la respuesta, ya cuando, pues ya va a anotar la respuesta.

...cuando terminamos una operación.

... para decir que lo anterior da resultado a la otra cosa

...para finalizar una resta? para finalizar! para sumar, perdón, todos los... para sumar o restar?

Hubo algunas respuestas que refirieron a su uso para denotar expresiones equivalentes

...para decir que dos fracciones son equivalentes o iguales.

...cuando hay una equivalencia?

...para dar el resultado de la operación, la operación es otra manera de decir el resultado, si yo digo 15×2 es una manera de decir 30, entonces es igual. $5 \times 2 = 10$ & $5 \times 2 = 5 + 2 + 3$ Es la misma operación, pero representada de otra manera.

Un estudiante dio la siguiente respuesta utilizando como soporte el gráfico de la expresión de la figura, para referirse que por un lado el signo igual evidenciaba una equivalencia y por otro lado el resultado de una operación. Esto implica que el estudiante sabía que el signo igual se usa en ambas situaciones, por lo que no le pareció incorrecta la expresión.

...una te refiere a equivalencia y otra de refiere a resultado.

Otro estudiante preguntó que signo igual es el correcto, el que indica un resultado o el que indica una equivalencia matemática

... en esa expresión que signo igual es el que cuenta

El docente utilizó ejemplos de equivalencias matemáticas para que los estudiantes interpretaran su uso, y pidió compartir ejemplos de equivalencias matemáticas, la Figura 141 muestra las respuestas de los estudiantes del equipo amarillo y la Figura 142 del equipo rojo.

$5=50-99+54=500-500+$
 $5=5+5-10=20+600-80$
 $25-4+6+2$
 $+1005+61-2714+5$
atte:jesus

20 entre
5= 4x5= 20

$$10 / 2 = 15-3 -2=5-3$$
$$50/2=19+4+2=25$$
$$25 - 10= 3 \times 5 = 7.5 \times 2$$
$$15 \div 3 = -30 + 50 + -15$$

(Axel)

$$16+8=12 \times 2=24$$
$$\sqrt{36} = 2 \times 3 = 20 - 14 = 36 \div 6$$

valentina

$16+10=$
 13×2

Figura 141. Respuestas del equipo amarillo. Primera sesión en Meet.

$$4 + 6 = 20 / 2 = 5 + 5$$

$400/2=100 \times 2$

$$(9 \times 2) \div 3 = 3 \times 2$$
$$5 \times 21 = 55 + 50$$
$$6 \times 5 = 120 \div 4 = 30$$

$29+1 = 60/2=20+10 :D$

$$8+12= 10+10= 80/4$$

Figura 142. Respuestas del equipo rojo. Primera sesión en Meet.

Después de este ejercicio, algunos estudiantes lograron comprender que el signo igual se usa para expresar equivalencia matemática, no únicamente un resultado concreto, un número conocido y definido. Aquí la reflexión de una estudiante:

Estudiante: miss, un ejemplo, yo hago una suma de 32 mas 7 el resultado es 39 pero para no poner así el resultado sólo, yo puedo hacer 30 mas 9? y ese sería el resultado?

Docente: así es, es correcto

Abigail: miss, ya con esa explicación yo pienso que no, ya que no llegan al mismo resultado, por que 30 entre 2 da 15 y 15 por 2 da 30, entonces no llegan al mismo resultado.

El docente preguntó nuevamente si la expresión de la figura es correcta, entonces algunos estudiantes identificaron el error, ya que aunque al leerse de manera lineal parece correcta, su expresión usando los símbolos matemáticos no lo es.

...No por que 30 entre dos es quince y quince por dos es treinta, osea no son equivalentes, uno es quince y otro es treinta, no es lo mismo

... No miss, por que 30 entre 2 da 15 pero no da 15 por 2, que sería 30

Una estudiante hizo la aclaración de que las expresiones matemáticas podrían ser correctas si se analizan por separado, pero si se trata de una única expresión, no son correctas, ya que no existe equivalencia

es que si dices que 30 entre 2 es igual a 15 y luego 15 por 2 es igual a 30 entonces si está bien, pero si dices que 30 entre 2 es igual a 15 por 2, está mal.

No todos los estudiantes participaron activando su micrófono, pero expresaron en jamboard su respuesta con texto, la Figura 143 muestra las respuestas del equipo Rosa, donde lograron identificar el error en la expresión, dando respuestas como, *las operaciones dan distintos resultados.*

Buenos y dulces días

$30 \div 2 = 15 \times 2 = 30$

Hey! No lleguen tarde a su clase de tecnología!

Que es la igualdad matemática? Quién me dice?

Esta expresión es correcta? Me cuentan que opinan aquí plis!

Yo Azul, pienso que es incorrecta ya que las 2 operaciones nos dan diferentes resultados, porque $30 \div 2$ No sería igual a 15×2 , sino sería igual a (un ejemplo) 3×5 , ya que $30 \div 2$ Es igual a 15 y no a 30

Daniela Aguirre → dan diferentes resultados en las 2 operaciones, aparte el signo de igual quiere decir que si la operación $30 \div 2$ es igual a la operación 15×2 y para que sean iguales las operaciones deben tener mismo

Daniela, muy bien!

yo digo que es correcta porque $30 \div 2$ son 15, y dice 15 ahí. Luego 15×2 son 30 y viene ahí.

Resuelve esto, 30 más 10, luego al resultado restale 7. Cuál fue el valor? Ojo cuando digo al resultado... 33...?

Figura 143. Respuestas del equipo rosa. Primera sesión en Meet.

El tiempo no fue suficiente para abordar el ejercicio colaborativo planeado en todos los grupos, ver la Figura 144. Sin embargo, estas son las respuestas de los grupos que resolvieron colaborativamente el ejercicio, el docente planteó si son correctos los valores que se indican para cada círculo y triángulo. El objetivo era mostrar formas de solución que usan los estudiantes para debatir y analizar en conjunto.

$$\underbrace{\bigcirc + \bigcirc}_{8} + \underbrace{\triangle + \triangle}_{4} + \triangle = 28$$

$$\underbrace{\triangle + \triangle}_{4} = 8$$

Figura 144. Ejercicio colaborativo. Primera sesión en Meet.

Este ejercicio es la réplica de la respuesta de un estudiante, no se compartió la imagen original con el propósito de evitar la sensación de ser exhibido, ya que se analizan también respuestas erróneas. Los valores numéricos en color gris son las respuestas al ejercicio, pero al conservar el mismo formato digital, y estilo, algunos estudiantes asumieron que era datos del mismo ejercicio, por lo que no quedaba claro el objetivo de la actividad.

Andrea para responder a la pregunta, ¿es correcta esta respuesta?, narró el procedimiento aritmético para llegar al resultado:

Yo opino que está bien, bueno lo que yo hice fue primero dividir 8 entre 2 para saber cuánto era el resultado de los triángulos y después multiplique 4 por 3 para ver cuánto era en el de arriba, me dio 12, después a 28 le reste 12 y me dio 16, y luego a ese 16 lo divide entre 2

Ángel hizo una observación en relación a que debe clarificarse la respuesta:

yo digo que está mal porque el 8 debería ser por cada círculo no por los dos, o 16 por los dos...

En este ejercicio Mally logró identificar que la figura del triángulo en esa expresión tiene un valor, ese valor es el mismo para todos los triángulos, no consideró la respuesta incorrecta, sino que faltaba especificar el valor del triángulo, ya que los corchetes abarcan a dos triángulos e indicaban el valor 4 que corresponde a un triángulo.

...porque los dos triángulos son la misma figura, quiere decir que ambos valen lo mismo, entonces 8 entre dos es cuatro. Especificar que un solo triángulo vale 4 y que un solo círculo vale ocho.

Estas respuestas fomentan la importancia de analizar el procedimiento para encontrar una respuesta correcta, ya que podría suceder que procedimiento fue correcto, pero no hubo claridad en cómo se expresó el resultado. La idea de que

en matemáticas se espera como resultado correcto o incorrecto resta importancia al proceso, del cual se enriquece la comprensión de los significados matemáticos.

Ana manifiesto que no comprendía la respuesta que dio el estudiante, esto propicio que los estudiantes reflexionaran sobre la importancia de que los procedimientos matemáticos deben ser claros, y que también, existen diversas formas de resolver una misma tarea matemática.

...espere, yo tengo duda en el triangulo por que no se a que se refiere, osea estos dos triangulos sumados valen 4 o si sólo un triángulo vale 4.

Concluido el tiempo en Meet, algunos equipos resolvieron el ejercicio colaborativo fuera de la sesión, este fue un indicador de interés ya que la docente sólo hace la invitación a que revisen el ejercicio si tienen tiempo, se trataba de una actividad extra y voluntaria. Esto permitió analizar cómo trabajan en una pizarra colaborativa sin la supervisión de un docente, si bien el ejercicio tiene el propósito de fomentar la colaboración, en realidad sólo compartieron sus ideas, no hay evidencia de negociación o acuerdos, por lo que la tarea de colaboración requiere pautas que propicien el diálogo entre pares, ya que no están acostumbrados a analizar las respuestas de sus compañeros.

La Figura 145 muestra la respuesta del equipo verde, identificaron que debe especificarse el valor de cada figura, no utilizaron términos como “está mal”, “es incorrecto”, “error”, algunos explicaron el procedimiento.

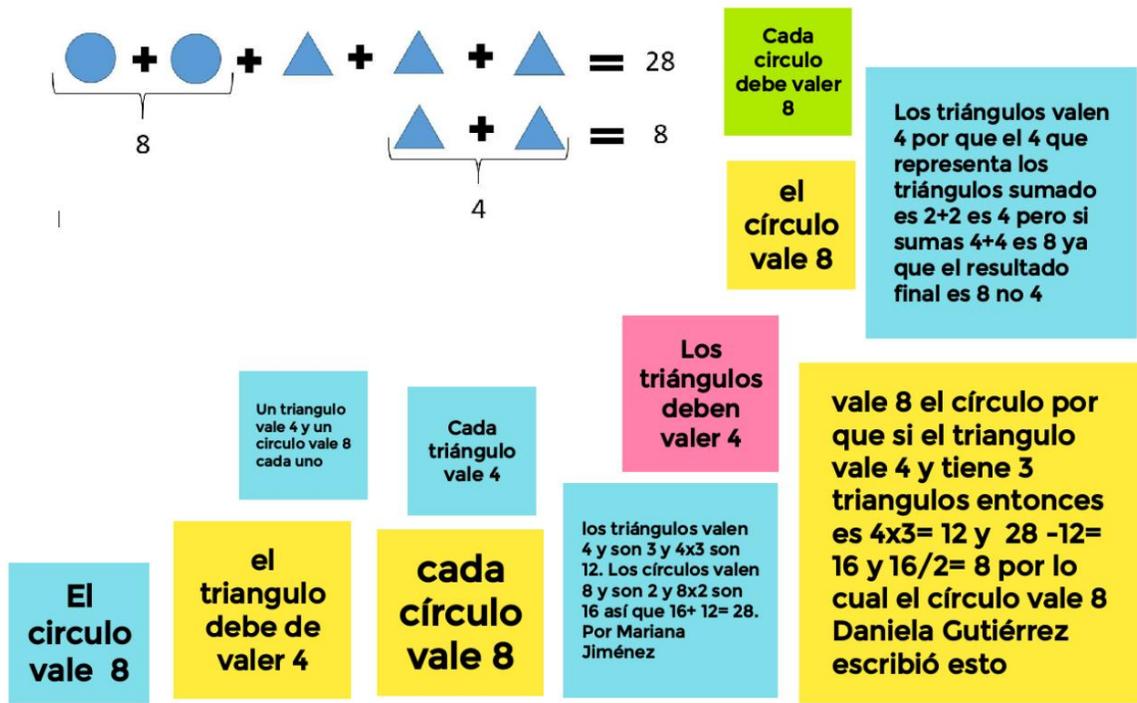


Figura 145. Respuesta al Ejercicio colaborativo del equipo verde. Primera sesión en Meet.

La Figura 146 muestra la participación de algunos estudiantes del equipo Rojo, especificaron con símbolos el valor de las figuras e hicieron señalamientos y anotaciones.

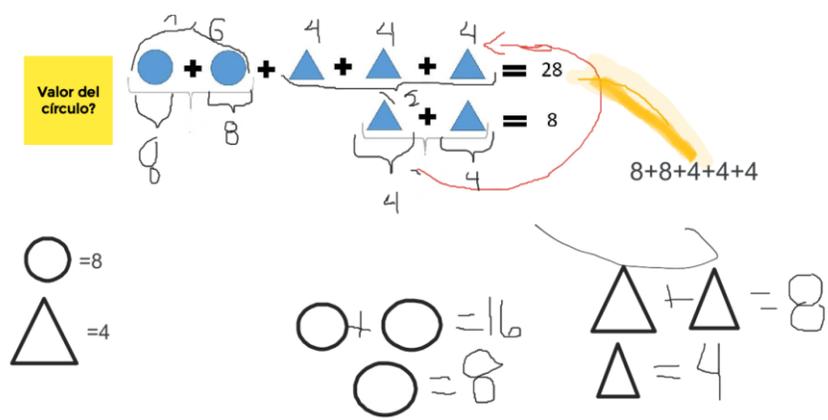


Figura 146. Respuesta al Ejercicio colaborativo del equipo rojo. Primera sesión en Meet.

La Figura 147 ilustra el segundo ejercicio colaborativo, como se explicó anteriormente, las letras en cursiva describen el procedimiento de un estudiante. El docente preguntó: ¿Es correcta la expresión triángulo por tres iguales a doce, es decir, matemáticamente correcta?

$$\begin{array}{r}
 \bullet + \bullet + \blacktriangle + \blacktriangle + \blacktriangle = 28 \\
 \blacktriangle + \blacktriangle = 8 \\
 \triangle = 4 \\
 \triangle^4 \times 3 = 12 \\
 28 - 12 = 16 \\
 16 / 2 = 8 \\
 \circ = 8
 \end{array}$$

Figura 147. Segundo ejercicio colaborativo.

Los estudiantes respondieron:

...Siempre y cuando sepas su valor

...Si pero que haya algún modo de que el lector sepa que significa tres, si no se va a confundir

...Creo que no, si no sabes si valor creo que no porque no sabes por qué estarías multiplicando, sólo es la figura, tendrías que saber el valor de...

...Si miss, porque el triángulo equivale a 4

...Maestra yo diría que sí, pero lo que podríamos hacer en ese caso que no supiéramos a cuanto equivaldría sería buscar un número que multiplicado por 3 nos diera 12

Estas respuestas implican que para las y los estudiantes persistió la idea de que los símbolos son etiquetas de valores fijos, aún no lograban operarlo o distinguir otros usos. Sin embargo, hubo estudiantes que intuyeron que esos símbolos se pueden sustituir por letras como es común en álgebra, de esto dan cuenta las siguientes afirmaciones:

Joshua: pero ahí es cuando, en mi opinión llegaría x , sería triángulo por tres 28 y después de que sacaras cuanto vale un triángulo ya harías lo del círculo, eso sería como valor de X no miss?

Docente: Que significa valor de X Joshua?

Joshua: un número o algo así, un número que no sabes aún su valor

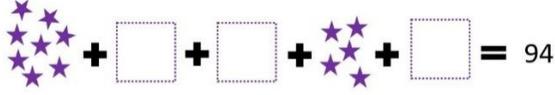
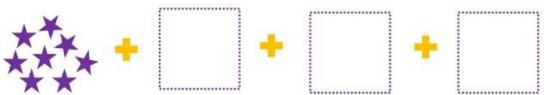
...se puede usar un signo de interrogación o una x

Se observó que los espacios para el diálogo requieren tiempo y atención, son fundamentales, por lo que se prioriza que el tiempo destinado a ese espacio, aunque fueron menos ejercicios abordados, la comprensión de la identificación del uso del signo igual les facilitó resolver los ejercicios posteriores como dan cuenta los diálogos de las sesiones que se describen a continuación.

5.2.4.2. Sesión 2

Se asignó un ejercicio para cada estudiante, tuvieron un límite de tiempo de 15 minutos para resolverlo, ya que no todos podían participar explicando sus procedimientos se utilizó una ruleta online para ser elegidos al azar. La Tabla 17 muestra los ejercicios propuestos, se usaron tres formas de expresar el ejercicio, ya que se identificó que algunos estudiantes requerían simbología aritmética para comprender lo que significaban las figuras, así como la dificultad en la comprensión del texto del problema.

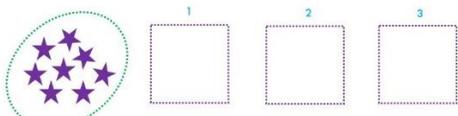
Tabla 17. Ejercicios propuestos para la segunda sesión de Meet. Primeros 3 grupos.

 <p>Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?</p>	 <p>Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, y en total hay 107 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?</p>
 <p>Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, y en total hay 94 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?</p>	

El primer ejercicio se explicaba casi en su totalidad con el gráfico, ya que indicaba una suma y un total. En el segundo ejercicio era necesario identificar datos que proporciona el texto del problema. Para el tercer ejercicio no se utilizan símbolos aritméticos y los datos se encuentran en el texto.

Para la segunda mitad de grupos la docente decide compartir los procedimientos identificados en los primeros grupos, ver Tabla 18, se distinguió la información que correspondía al procedimiento de la información del problema para evitar confusiones. Este ajuste a los ejercicios individuales proporcionó una mayor riqueza de diálogos y análisis por parte de las y los estudiantes. Se esperaba que fueran capaces de identificar procedimientos incorrectos y explicar su razonamiento.

Tabla 18. Ejercicios propuestos para la segunda sesión de Meet. Segundos 3 grupos.

 <p>Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, y en total hay 107 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?</p> <p> $107 - 8 = 99$ $99 \div 3 = 33$ R= Hay 33 estrellas en cada cuadrado </p>	 <p>Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, y en total hay 107 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?</p> <table border="0"> <tr> <td>Datos</td> <td>Operación</td> <td>Resultado</td> </tr> <tr> <td>3 cuadrados 107 estrellas</td> <td>$107 \div 3 = 35.6$</td> <td>35.6 estrellas</td> </tr> </table>	Datos	Operación	Resultado	3 cuadrados 107 estrellas	$107 \div 3 = 35.6$	35.6 estrellas
Datos	Operación	Resultado					
3 cuadrados 107 estrellas	$107 \div 3 = 35.6$	35.6 estrellas					

Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, y en total hay 107 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?

Datos
Estrellas son 8
Cuadrados 3
¿En cada uno?

Operación
 $8 \times 3 = 24$ no llega a 107

R= por lo tanto la cantidad no es 107, es 24, ya que si divides 107 entre 3=35.6 y si divides 24 entre 3=8

En conclusión, cada cuadrado oculta 8 estrellas

En la Figura 148, Daniela comprendió que el objetivo del ejercicio era verificar si las operaciones matemáticas eran correctas, sin relacionar esa información con los datos del problema, lo que manifiesta la relevancia de fomentar en aula la revisión de los procedimientos de otros compañeros. El razonamiento de Daniela no es del todo incorrecto en el sentido de que ella verifica que las operaciones aritméticas sean correctas, y en sentido estricto lo son, ya que no llevan a la respuesta correcta del ejercicio.

$$8 \text{ estrellas} + 3 \text{ cuadrados} = 107$$

Hernández
González Elisa
Daniela

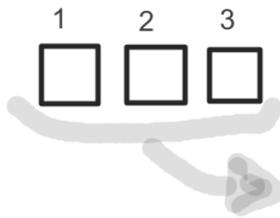
Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, y en total hay 107 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?

Datos
3 cuadrados
107 estrellas

Operación
 $107 \div 3 = 35.6$

Resultado
35.6 estrellas

Hay tres cuadrados, y 107 estrellas, que operación debemos realizar?



$$\begin{array}{r}
 3 \ 5.6\dots \\
 3 \overline{)107} \\
 \underline{17} \\
 20 \\
 \underline{2\dots}
 \end{array}$$

En cada cuadrado hay 35.6 estrellas :D

Figura 148. Respuesta de Daniela. Segunda sesión en Meet.

Para explicar la respuesta que dio al ejercicio, Daniela explicó los pasos procedimentales de una división aritmética:

Pues como hay 107 estrellas y hay 3 cuadrados tenemos que dividir, entonces del 3 al 10 no mas le caben 3 veces y como nos da 9 le sobra 1, y despues bajamos el 7 y entonces el 3 le cabe 5 veces a 17 y da 15 y le faltan 2 para llegar entonces como un 3 no cabe en el 2 ponemos punto decimal y ponemos un cero y da 6 y nos vuelven a sobrar 2 y así se vuelve infinita la división, por eso en cada cuadrado hay 35.6 estrellas

Alejandro no consideró valida la respuesta, no por identificar que el procedimiento no lleva a la solución, sino porque consideró invalido el valor de 0.6 en el resultado. La Figura 149 ilustra el trabajo de Alejandro, en el que señala que la respuesta correcta es sólo 35.

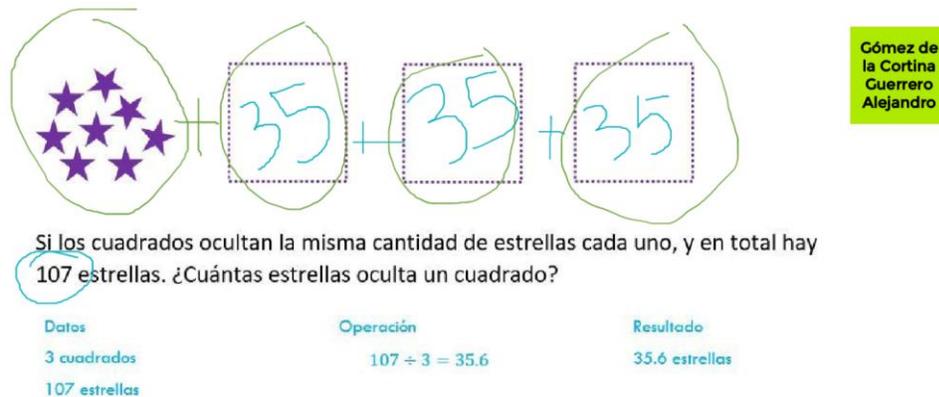


Figura 149. Respuesta de Alejandro. Segunda sesión en Meet.

La docente preguntó: *¿y que pasa con las 8 estrellas del gráfico?*

Alejandro: es que a mí no me dijeron que esas contaban miss

Por lo que se entiende que él analizó el procedimiento sin relacionarlo con los datos del problema, este tipo de dinámicas desarrolla la capacidad de analizar los procedimientos de otros, por lo que se debe prestar atención al problema

integralmente, de entrada, el estudiante debe identificar lo que se plantea en el ejercicio para luego analizar si el procedimiento corresponde con lo que pregunta el ejercicio, no sólo verificar el componente procedimental de la operación aritmética.

En el análisis que hizo Sofía, ver Figura 150, identificó que el procedimiento no corresponde con lo que requiere el problema, explicó el problema y el procedimiento, como se ilustra en la figura.

García
Castillo
Sofía
Daniela

Ya tenemos 8 estrellas y en total son 107 entonces restamos $107 - 8$ que son las que ya están afuera = 99 y lo dividimos entre 3 que es la cantidad de cuadrados

en conclusión la operación está mal y el verdadero resultado es 33 :p

Datos
Estrellas son 8
Cuadrados 3
¿En cada uno?

Operación
 $8 \times 3 = 24$ no llega a 107

R= por lo tanto la cantidad no es 107, es 24, ya que si divides 107 entre 3 = 35.6 y si divides 24 entre 3 = 8

En conclusión, cada cuadrado oculta 8 estrellas

$$\begin{array}{r} 107 \\ - 8 \\ \hline 99 \end{array}$$

$$3 \overline{) 99} \\ \underline{33} \\ 09 \\ \underline{09} \\ 00$$

Figura 150. Respuesta de Sofía. Segunda sesión en Meet.

Al pedirle que explique cómo llegó a esa conclusión, narra su procedimiento y enuncia: *el resultado estaría mal ...*

Pues ahí, como yo lo entendí ya tenemos 8 estrellas, sólo que están afuera, y si el total de estrellas son 107 vamos a restar 107 menos 8 y el resultado sería 99 pero como los 99 se tienen que dividir entre 3 cuadrados sería 99 entre 3 y serían 33 entonces el resultado estaría mal y sería 33 estrellas

Se observó una recurrente dificultad en determinar que un procedimiento es correcto, es decir, relacionar un conjunto de operaciones con la información del problema.

La Figura 151 muestra la respuesta de Ángel, si bien no explicó gráficamente como llegó a esa conclusión, si explica con detalle verbalmente cuando activó su micrófono en Meet.

The image shows a screenshot from a Meet session. On the left, there is a circular graphic containing 8 purple stars. To its right are three yellow squares, each containing the number '33'. Above the squares are the numbers 1, 2, and 3. Below the squares are three equations: $107 - 8 = 99$, $99 \div 3 = 33$, and $R = \text{Hay } 33 \text{ estrellas en cada cuadrado}$. To the right of the squares is a yellow box with the text 'Cuadrarama Ángel Gael'. Below the equations is another yellow box with the text 'el procedimiento y la respuesta es correcta al igual que las operaciones'.

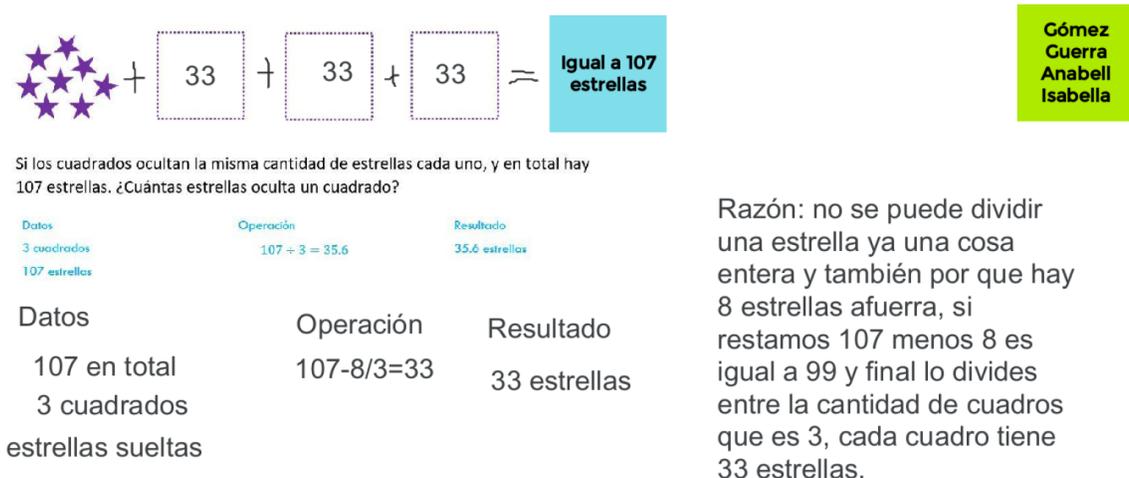
Figura 151. Respuesta de Ángel. Segunda sesión en Meet.

No estoy seguro si escribí todo, pero les puedo explicar por que yo sé que esta correcto todo. Pues bueno, ahí nos esta especificando que tenemos 107 estrellas, y arriba podemos contar que hay 8 estrellas sueltas, y a eso como viene en la parte de abajo a 107 le restamos 8 y ahi nos va a dar un resultado de 99 y en ese 99 lo tenemos que dividir entre 3 para que lo podamos colocar en cada uno de los tres recuadros como no lo pide. Y pues el resultado si nos da 33 por que multiplicando 33 por 3 99 y en la respuesta si hay 33 estrellas en cada cuadro.

Anabel consideró inválido que en la división aritmética del ejercicio se obtenga un 0.6, ya que, en su razonamiento, se trata de objetos concretos que no pueden dividirse, lo consideró ilógico, esta fue su explicación:

... la razón por la que esto esta incorrecto es porque una estrella no se puede dividir, cuando vas a compartir un libro, no le vas a dar la mitad del libro a una persona y la otra mitad a otra persona, es ilógico y tampoco contaron las 8 estrellas sueltas

En Jamboard Anabell resuelve el ejercicio como se ilustra en la Figura 152, si bien no es correcta la visión de que no son válidos los números decimales o solo en situaciones concretas, ella logró identificar que dato omitieron y que es fundamental para obtener la respuesta al ejercicio, *tampoco contaron las 8 estrellas sueltas*, dijo.



Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, y en total hay 107 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?

Datos	Operación	Resultado
3 cuadrados 107 estrellas	$107 \div 3 = 35.6$	35.6 estrellas
Datos 107 en total 3 cuadrados 8 estrellas sueltas	Operación $107 - 8 \div 3 = 33$	Resultado 33 estrellas

Razón: no se puede dividir una estrella ya una cosa entera y también por que hay 8 estrellas afuera, si restamos 107 menos 8 es igual a 99 y final lo divides entre la cantidad de cuadros que es 3, cada cuadro tiene 33 estrellas.

Gómez Guerra Anabell Isabella

Figura 152. Respuesta de Anabell. Segunda sesión en Meet.

Abraham logró hacer una distinción importante sobre la naturaleza del ejercicio, por afirma que las operaciones aritméticas expresadas son correctas, diciendo, *los datos están bien a excepción de la pregunta*, refiriéndose al hecho de que son

incorrectos en relación con lo que pregunta el enunciado del ejercicio. Ver Figura 153.

Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, y en total hay 107 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?

Datos
Estrellas son 8
Cuadrados 3
¡En cada uno!

Operación
 $8 \times 3 = 24$ no llega a 107

R- por lo tanto la cantidad no es 107, es 24, ya que si divides 107 entre 3=35,6 y si divides 24 entre 3=8

En conclusión, cada cuadrado oculta 8 estrellas

Castillo
Murcio
Abraham

Los datos estan bien a excepcion de la pregunta, la operacion es incorrecta, el mal interpreto los datos porque las ocho estrallas de afuera son parte de las 107 en tonces la operacion correcta seria: $107-8=99$ $99/3=33$ y por lo tanto su resultado es incorrecto porque su operacion es incorrecta.

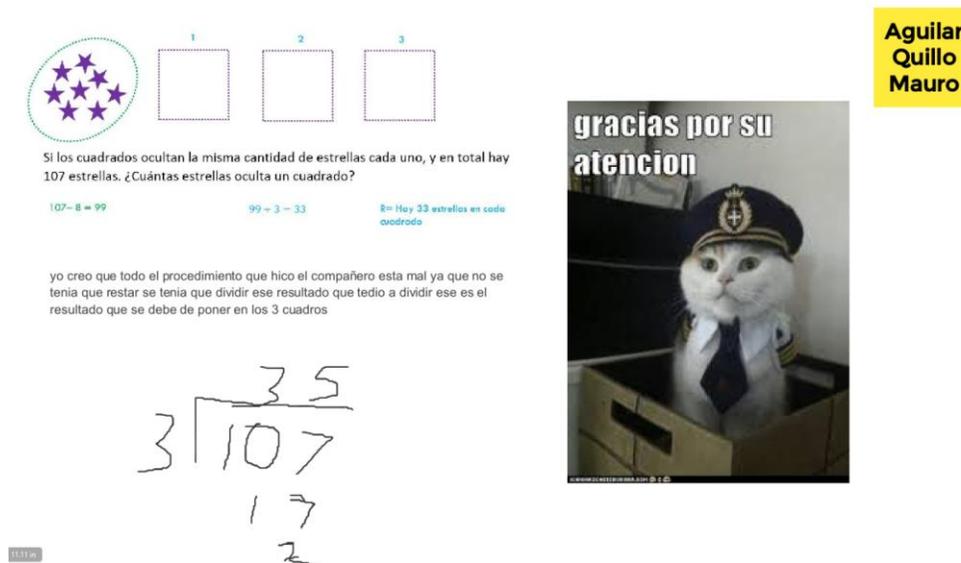
Figura 153. Respuesta de Abraham. Segunda sesión en Meet.

Esta fue la explicación que dio a su ejercicio, que reafirma lo que expresa en la pizarra, consideró incorrecto el procedimiento, y hace énfasis en la aclaración, además, comparte una posible interpretación del razonamiento de su compañero:

No soy muy bueno explicando, pero yo digo que el procedimiento esta incorrecto, dice aquí que hay estrellas afuera y hay 3 cuadrados, pero él pensaba que las estrellas sueltas eran todas las que había, aunque en el problema específicamente te dicen que son 107. Entonces el malinterpreto los datos y eso le costó un error en la operación, eso significa que su resultado es incorrecto porque aquí hay 8 estrellas que se le deben restar a las 107 para poder dividirlo, lo divides entre 3 porque son el número de lugares que hay y ese es el resultado.

Mauro ignoró los datos que proporciona el gráfico y sólo identificó los valores que proporciona el texto del problema, y al observar el procedimiento, no se cuestionó

su procedimiento, al considerarlo correcto determinó que el procedimiento del compañero era incorrecto, ver la Figura 154.



Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, y en total hay 107 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?

107 ÷ 3 = 99
99 × 3 = 33
8 = Hay 33 estrellas en cada cuadrado

yo creo que todo el procedimiento que hizo el compañero esta mal ya que no se tenia que restar se tenia que dividir ese resultado que tedio a dividir ese es el resultado que se debe de poner en los 3 cuadros

gracias por su atencion

Figura 154. Respuesta de Mauro. Segunda sesión en Meet.

Mauro reafirma su repuesta con la siguiente explicación:

...pero, aquí en mi jamboard que soy el número uno, aquí mi compañero saco otro resultado, que fue 33 estrellas y bueno yo, yo lo corregí, yo hice una división para sacar todo eso y 107 entre 3, que en total me salía 35 y me sobraron 2, osea que en cada cuadro debe haber 35 estrellas, osea yo concuerdo con lo de Carolina.

Carolina en principio no compartió procedimientos en el documento de jamboard, pero comparte la siguiente explicación:

Carolina: Miss, ya, yo quiero volver a hablar, es que bueno, con lo de las estrellas que están aparte creo que se debería dividir entre 4, porque en sí son como, ¿se puede decir como 4 casillitas de estrellas? y pues en vez de dividirlo por tres cuadros, pues otro apartado con estrellas, se puede dividir entre cuatro, porque en sí, son cuatro espacios.

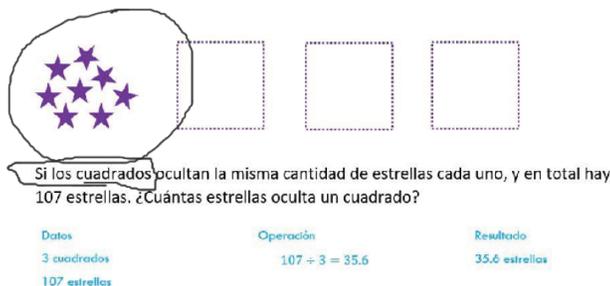
Docente: bueno, pero el problema dice que los cuadrados ocultan la misma cantidad, ¿cuántos cuadrados hay?

Carolina: ah bueno, solamente son tres cuadrados

Docente: aja, solamente son tres cuadrados, los datos que nos da el problema son los tres cuadrados, las 107 estrellas y hay otro dato que nos está dando aquí el problema (señala con el apuntador la ilustración)

**Carolina: pues que hay como otro espacio con estrellas*

La docente explicó que para resolver la tarea debemos ajustarnos a los datos que proporcional el problema, para Carolina cada cuadrado representaba un conjunto de estrellas, sin importar la cantidad, es la etiqueta que indica un conjunto de estrellas, expresa, *como otro espacio de estrellas*. Posteriormente compartió en Jamboard la explicación que ilustra la Figura 155.



Martínez
Mata
Carolina

Esta mal porque antes de dividir 107 entre 3 se deben restar las estrellas que están en la imagen dando como resultado 33.

Figura 155. Respuesta de Carolina. Segunda sesión en Meet.

Hubo un momento de colaboración en el que los compañeros del equipo intervienen para corregir la respuesta de su compañero. La Figura 156 ilustra la

respuesta de Giovanni, quien únicamente verificó que las operaciones aritméticas fueran correctas, sin relacionarlas con la información del problema.



Si los cuadrados ocultan la misma cantidad de estrellas cada uno, y en total hay 107 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta un cuadrado?

Datos

Estrellas son 8

Cuadrados 3

¿En cada uno?

Operación

$8 \times 3 = 24$ no llega a 107

R= por lo tanto la cantidad no es 107, es 24, ya que si divides 107 entre 3=35.6 y si divides 24 entre 3=8

En conclusión, cada cuadrado oculta 8 estrellas

todo los resultados estan bien porque si multiplicas y divides te da el resultado y hay otras formas de llegar a el como sumar etc.

Figura 156. Respuesta de Giovanni. Segunda sesión en Meet.

Giovanni: La número tres, yo digo que está bien, yo lo volví a multiplicar por mi propia cuenta y todos los resultados me salieron exactos. Bueno, yo sólo hice lo que estaba ahí, luego lo hice por mi cuenta de otra forma y era sumando.

Docente: ¿alguien del equipo 3 tiene una respuesta distinta?

Sofí y Azul: Yo miss

Docente: Sofí, ¿quieres ayudar a tu compañero?

Sofí: Si, yo digo que esta incorrecto por que las estrellas que como visibles se le tienen que restar a las que están ocultas, y da 99, entonces si ese 99 lo divides entre los tres cuadros, te da 33, entonces esta incorrecto.

Docente: muy bien, ¿qué piensas tu Azul?

Azul: tengo lo mismo que Sofía

Para el grupo Amarillo fue insuficiente el tiempo para abordar la tarea colaborativa. Sin embargo, antes de cerrar la sesión se les presentó el ejercicio de las Figura 157 y 158, las cuales ilustran un ejercicio en el que se pretende identificar que un mismo símbolo puede tener diferentes valores, el docente hace la siguiente pregunta: *¿Valen lo mismo el círculo rosa de la primera expresión que el de la segunda?*



Figura 157. Primer ejercicio colaborativo. Segunda sesión en Meet.



Figura 158. Segundo ejercicio colaborativo. Segunda sesión en Meet.

En este ejercicio fue una muestra de la importancia de cómo se presentan gráficamente los ejercicios a los estudiantes, es decir, diferenciar expresiones matemáticas independientes de un sistema de ecuaciones.

Jesús identificó que aunque se trate de la misma figura, un círculo, su valor es distinto en cada expresión.

Son diferentes la primera y la segunda, en la primera, tendríamos que hacer 141 entre 3, pero ahí no hay que confundir estas dos, se dividen, son operaciones diferentes porque aunque estén usando los mismos círculos,

en la operación de la segunda, la de abajo sería 141 menos 9, y luego el resultado lo dividimos entre 3, con eso nos va a dar el resultado correcto, y nos va a salir diferente, cada círculo que la operación de arriba y la de abajo, porque la de abajo tiene 9 estrellas de diferencia y nos va a dar menos

Se compartió el ejercicio de la Figura 159, para identificar que una variable puede tener más de un valor, además de la validez de expresiones abiertas.

Dos triángulos y un círculo ocultan en total 10 estrellas.

¿Cuántas estrellas debería oculta el círculo?



Figura 159. Tercer ejercicio colaborativo. Segunda sesión en Meet.

Angélica logró dar respuesta al ejercicio, ella identificó que los triángulos representan el mismo valor, pero distinto al del círculo y que debe respetarse la igual matemática:

...todavía no he hecho la operación miss, pero por lo que entiendo son, dos triángulos, creo que deberían tener un valor equivalente, ósea igual, y pues el círculo tendría que ser diferente, entonces, tendríamos que buscar un número que al sumar los dos triángulos nos dé un resultado, más el círculo nos de 10 estrellas. Da como resultado $2+4+4$.

El docente preguntó: *muy bien, ¿es la única respuesta?*

Estas son las reflexiones de algunos estudiantes que lograron identificar que las figuras pueden tomar distintos valores respetando la relación de equivalencia matemática:

Audolina: miss yo lo hice de otra forma, que era algo así, yo tome en cuenta los tres lados del triángulo, como tres estrellas (4+3+3)

Docente: Carla ¿ambas respuestas son correctas?

Carla: pues yo digo que si por que no te especifica cual es como las estrellas que tienen los triángulos, entonces, puedes hacer muchas combinaciones mientras los triángulos tengan el mismo valor

**Docente: hay otra posible solución Leonardo*

**Leonardo: si, hay un montón, pues que el círculo tengan 6, entonces por lo tanto los triángulos tendrían que tener 2 para formar un 4.*

5.2.4.3. Sesión 3

En la última sesión de Meet se reagruparon los estudiantes considerando los resultados de la actividad final que se envió por correo electrónico, la cual refería a una tarea de ejercitación de respuesta abierta.

Se inició la sesión con una actividad en Genially, en la que se hizo una recopilación de lo visto en las sesiones previas. La Tabla 19 muestra los ejercicios propuestos:

Tabla 19. Ejercicios de la actividad de refuerzo. Tercera sesión en Meet.



QUIZ

PREGUNTA 1/5

Valor de DOS rectángulos amarillos

10	10	10	10	10
----	----	----	----	----

50 - 20 30 - 20 10 + 10

genially

QUIZ

PREGUNTA 2/5

Valor de TRES rectángulos amarillos

40	10
----	----

40 - 10 40 - 20 15 + 15 + 15

genially

QUIZ

PREGUNTA 3/5

Valor del rectángulo amarillo

50
20

30 25 20

genially

QUIZ

PREGUNTA 4/5

Valor del rectángulo amarillo

77
9

36 77 - 36 77 - 9

genially

QUIZ

PREGUNTA 5/5

Valor de la línea rosa

7
19

0 + 7 19 - 7 7 + 7

genially

PULSA SOLO EN LAS AFIRMACIONES CORRECTAS 1/3

Puedes interactuar con tu pantalla táctil en modo interactivo

genially

PULSA SOLO EN LAS AFIRMACIONES CORRECTAS 1/3

$10 + 10 = 5 + 15$

genially

PULSA SOLO EN LAS AFIRMACIONES CORRECTAS 2/3

$11 + 9 = 20 - 9$

genially

PULSA SOLO EN LAS AFIRMACIONES CORRECTAS 2/3

$$25 - 3 = 11 + 11$$

$$9 - 4 = 5 - 2 = 3$$

EN QUÉ IMAGEN EL CÍRCULO ROSA TIENE EL VALOR DE DOCE

	= 36		= 42
	= 24		= 28

EN QUÉ IMAGEN EL CÍRCULO ROSA TIENE EL VALOR DE VEINTE

	= 40		= 51
	= 10		= 11

EN QUÉ IMAGEN EL CÍRCULO ROSA TIENE EL VALOR DE CINCO

	=		=
	= 10		= 22

¿CUÁL ES LA FORMA QUE SIGUE?

Elige la forma correcta:

Opción 01:
 Opción 02:
 Opción 03:
 Opción 04:
 Opción 05:
 Opción 06:

¿CUÁL ES LA FORMA QUE SIGUE?

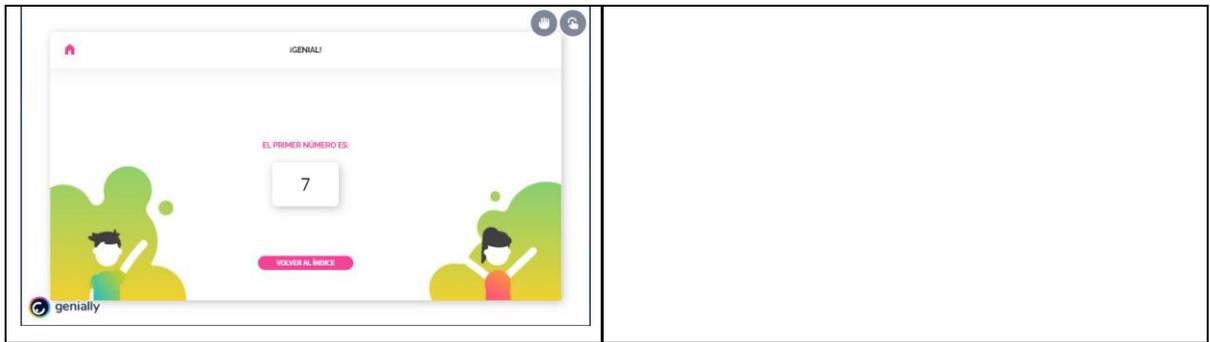
Elige la forma correcta:

Opción 01:
 Opción 02:
 Opción 03:
 Opción 04:
 Opción 05:
 Opción 06:

¿CUÁL ES LA FORMA QUE SIGUE?

Elige la forma correcta:

Opción 01:
 Opción 02:
 Opción 03:
 Opción 04:
 Opción 05:
 Opción 06:



El primer ejercicio de la sesión de discusión de cierre, refirió al que muestra la Figura 160, el docente pregunta: *¿puedo saber el valor de la estrella?*

$$\text{Círculo} + 12 + \text{Triángulo} = \text{Estrella}$$

Figura 160. Primer ejercicio. Tercera sesión en Meet.

Este es el flujo de los diálogos que surgieron en uno de los grupos, en el persiste la idea de que una expresión matemática debe especificar un total, un resultado, la estrella al estar a la izquierda del signo igual implica un resultado, por lo tanto, ese no puede ser un valor desconocido.

Daniel: tenemos que saber el número de cada figura

Estudiante: estoy de acuerdo con que tenemos que saber cuánto vale el círculo y el triángulo para saber cuánto vale la estrella

Estudiante: Exacto, o al menos cuánto vale el círculo o la estrella

Angélica: pueden ser muchas combinaciones, pueden dar muchos resultados, sólo necesitamos saber el de la estrella

Docente: ¿Puedo saber cuánto vale esta estrella?

Andrea: si

Daniel: yo creo que no

Docente: ¿porque no puedo saber el valor?

Daniel: bueno, según yo, por que no conocemos un dato, por ejemplo, el valor de la estrella, y creo que es el importante

Entonces la docente asigna un valor de 7 al triángulo y pregunta nuevamente: *¿puedo saber el valor de la estrella?*

Daniel: bueno, haciendo una operación a lo mío por ejemplo $12+7$ es 19 y se podría decir que el círculo da cero y la estrella valdría 19

Sofía: yo digo que no, si no hay otro como número pues no sabemos el resultado

El docente presentó un segundo ejercicio, ver Figura 161, y plantea la misma pregunta: *¿puedo saber el valor de la estrella?*

The figure shows three equations arranged vertically. The first equation is: a blue circle followed by a plus sign, the number 12, another plus sign, a blue triangle, an equals sign, and a blue star. The second equation is: a blue triangle followed by a plus sign, another blue triangle, an equals sign, and the number 14. The third equation is: a blue circle followed by a plus sign, another blue circle, an equals sign, and the number 22.

Figura 161. Segundo ejercicio. Tercera sesión en Meet.

Estas son las respuestas de los estudiantes, los cuales respondieron con mayor rapidez, narrando el procedimiento aritmético:

Abraham: si, el triángulo más el triángulo da 14 entonces cada triángulo debe valer 7, $7+7$ son 14, entonces, el triángulo ya vale 7, los dos círculos

valen 22, cada círculo vale 11, luego si suma $11+12$ son 23 más 7 son 30 y el resultado es 30

Carlos: bueno en este caso, primero tenemos que ver los otros dos, porque esos dos sumados dan catorce entonces, diríamos que la mitad es 7 y del círculo es 11, si sumamos $11+12$ y más el 7, daría 30, entonces es 30

Docente: Axel, ¿porque en este ejercicio si puedo saber el valor de la estrella y en el otro no?

Axel: porque en este si tenemos un valor

Docente: ¿cómo que valores?

Axel: ¿cómo el 12?

Docente: ¿que otros datos nos da el problema que nos permite encontrar el valor de la estrella? Karla, ¿quisieras ayudar a Axel?

Karla: yo creo que en el del 14 si se puede resolver por qué se puede dividir entre dos, igual el 22

Hasta este momento del diálogo fue que el docente identificó que para Axel cada expresión era independiente, no tenía claro que se ilustraba un sistema de equivalencias matemáticas, por lo que compartió la siguiente explicación:

Axel: ah se refieren a ese, creí que el de arriba

Axel: entonces si se puede, porque podemos dividir el 22 entre dos porque son 2 círculos, y nos daría 11, entonces el círculo vale 11, y así podríamos saber también con el triángulo

Un primer acercamiento al lenguaje algebraico se dio cuando la docente presentó el ejercicio de la Figura 162 y planteó la siguiente pregunta: *¿cuál es el valor de b?*

$$b + c = 20 - a$$

$$a = 5$$

$$c = a + 2$$

Figura 162. Tercer ejercicio. Tercera sesión en Meet.

En este ejercicio persistió la confusión que tuvo Axel en el ejercicio anterior, Daniel entendió que cada expresión es independiente, y da respuesta a la primera expresión. Por otro lado, también persistió la idea de que los valores conocidos del lado izquierdo del signo igual, refieren al resultado total, se observó que buscaba números cuya suma de 20:

Daniel: puede valer cualquier número que sea menos a 20, ósea puede valor 11 y que la c valga 9 o puede valer 10 y que la c valga 10 igual

Carlos: vale 13

Docente: ¿como llegaste a ese valor?

Carlos: primero dice, $a=5$, ya tenemos el a , entonces $a+2$ te daría 7, 7 es la c , si a 20 le restamos 7 te da 13

Docente: a Carlos se le paso restar a 20 los 5

Carlos: Ah miss, pensé que era hasta el final, primero es el resultado ya después restarlo

Ante la observación de la docente, la respuesta de Carlos manifestó que persiste la idea en algunos estudiantes que las expresiones de cada lado del signo igual

son independientes entre sí, y de igual modo, las operan de manera independiente.

Algunos estudiantes explicaron sus procedimientos sin dificultad, como se evidencia en los siguientes diálogos, en el caso de Abraham parece que en principio asigna a c el valor de 2, pero se da cuenta de su error y corrige:

Abraham: creo que es 13, porque aquí dice que a es igual a 5, y c es igual a $a+2$, ó sea $5+2=7$ y $b + c$ es igual a 20 menos a y a es igual a 5

Abraham: ya le entendí, es que a es igual a 5, entonces c es igual a $5+2$, eso significa 7, $b+c$ sería como $b+7$ es igual a 20 menos a , a vale 5, si le restas 5 a 20 sería 15, y los 7 de la c , porque no es el valor de la b , sería 8

Parece que Leonardo entendió como resolver el problema, pero cometió un error al asignar 15 al valor de a , pareciera un error por distracción y no necesariamente un error en el procedimiento.

Leonardo: puedo decir a cuanto equivale, a 3. Es que entonces sería, si c equivale a $a +2$, entonces equivaldría a $15 +2$ nos daría 17 para 20 sería 3

Angélica estuvo de acuerdo con el procedimiento de su compañero, pero en su explicación parece ignorar la letra c en la expresión,

Angélica: es que pues como dijo mi compañero Abraham, si c es igual a 7 debemos buscar un número que sea igual a 20 menos a , que es 20 menos 5, que nos daría 15.

Daniel identificó que la letra c puede operar en dos expresiones y su valor es el mismo, lo que evidencia expresiones como:

y c es igual a $a+2$, eso es 7, y la c de $b+c$ es 7, y como el resultado es 15,

Daniel narró su procedimiento, para lo cual fue necesario el soporte visual del ejercicio y hacer anotaciones para clarificar las ideas para el resto de los compañeros:

Daniel: como está diciendo que a es igual a 5 ya está 20, $b+c = 20-a$, entonces a es igual a 5 entonces saldría 15 el resultado, y c es igual a $a+2$, eso es 7, y la c de $b+c$ es 7, y como el resultado es 15, b sería 8

La Figura 163 muestra el ejercicio que se trabajó con el segundo grupo de estudiantes, en quienes se identificó un mayor nivel de abstracción, como se evidencia en las siguientes respuestas:

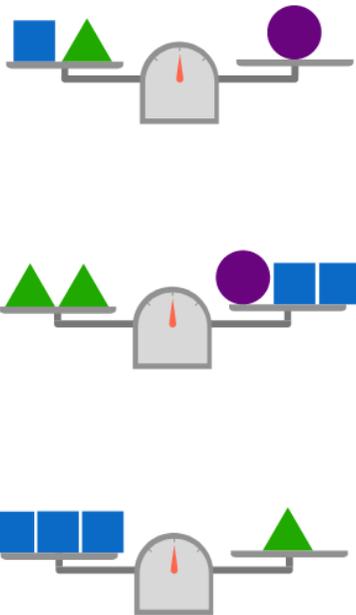


Figura 163. Primer ejercicio. Tercera sesión en Meet. Segundo grupo de estudiantes.

Docente: ¿puedo saber que valores puede tener el triángulo verde, puedo saber que valores numéricos puede tener?

En su mayoría los estudiantes respondieron que es posible encontrar un valor numérico para cada figura, lo que implica que más bien son capaces de asociar valores numéricos respetando las condiciones de la equivalencia matemática.

Joana: yo pienso que, si se puede saber, pues como en los lados de la balanza hay diferentes cosas, más o menos deduciendo cual podría ser la cantidad de cada figura

Carla: miss yo digo que podrían ser varios valores, porque no te da la cantidad exacta, como todas las figuras sumadas, entonces podría sacar muchas combinaciones de equivalencias

Dark Moon: miss, yo tengo una opción, ¿la puedo decir? Yo talvez diga que un cuadrado vale 100, tres cuadritos es igual a triangulo entonces triangulo es igual a 300, arriba, cuando hay un triángulo y un cuadrado nos daría en total 100 más 300, entonces 400, entonces ese círculo vale 400, y aquí sería dos triángulos en medio igual a 600, un círculo vale 400 más dos cuadrados que valen 200 darían 600

Valentina: si, bueno es que yo ya descubrí los números, el cuadrado vale 2, el triángulo vale 6, y el círculo vale 8.

Algunos estudiantes lograron identificar que las figuras no tienen un valor fijo, se pueden asignar distintos valores respetando la equivalencia matemática:

Malillany: yo creo que pueden tener más que uno y ahorita estoy viendo cuál otro podría ser.

En estas sesiones se evidencio una aproximación de los estudiantes sobre el carácter multifacético de la variable, además de la comprensión del concepto de equivalencia matemática:

Docente: ¿qué es una igualdad matemática?

Malillany: se refiere a que en los dos lados es el mismo resultado, por ejemplo, 8 es igual a 2 por 4

Jesus: es algo que equivale, por ejemplo, 2 es igual a 1 + 1: Es lo mismo pero representado de otra manera

Valentina: cuando dos resultados de una suma o dos valores te dan el mismo resultado de ambos lados

Sofia: puede ser como una figura, o números o letras o en ocasiones operaciones que valen lo mismo, por ejemplo, $5 \cdot 2$ que es igual a 10 que es igual a triángulo

Sofía entendió que en una equivalencia matemática entran en juego diversos elementos, como símbolos, figuras, letras.

Se plantearon ejercicios en los que se usaron letras en lugar de símbolos, el docente interactuó con los estudiantes para promover la reflexión en torno a por que algunas veces las letras tienen valores fijos y en otras pueden tomar varios valores.

La Figura 164 planeta la respuesta de Gael, en la que expuso los valores correctos, pero no planteó a ningún procedimiento. Sin embargo, el diálogo con él permitió identificar aspectos importantes.

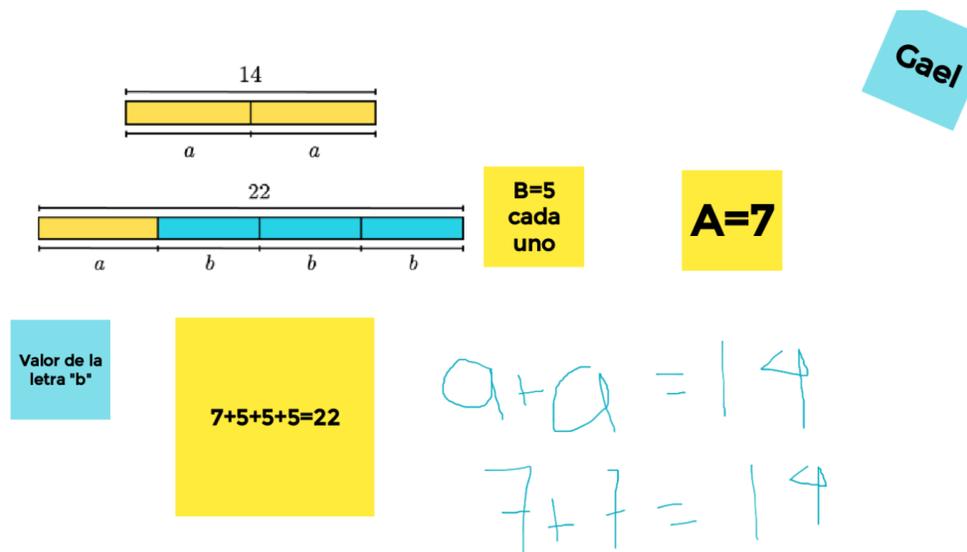


Figura 164. Respuesta de Gael al ejercicio de la tercera sesión en Meet.

Docente: ¿por qué aquí b si tiene un valor específico, por qué no le puedo dar otro valor?

Gael: porque ya tenemos otro valor fijo que en este caso sería el de a , a ya nos está planteando que su valor es 7, por lo que no le podemos cambiar ese valor, porque pues ya tenemos el de a que ya es fijo, ósea que, eso nos da como a entender que b también ya tiene uno ... y pues es que no sé cómo explicar, pues no sé cómo explicarme, pero ese es el valor

Se logró familiaridad con el lenguaje alegórico, utilizando letras para expresar equivalencias matemáticas, lo que evidenció la respuesta de Isabella, ver Figura 165, en la que usa diversas letras para asignar distintas asociaciones, por ejemplo, $z-b=E$; $E/R=A$. Si bien, podría ser que sólo etiquetó los valores encontrados mediante las operaciones aritméticas, este tipo de representación implica que la estudiante comienza a familiarizarse de manera natural con el uso de letras para explicar sus procedimientos.

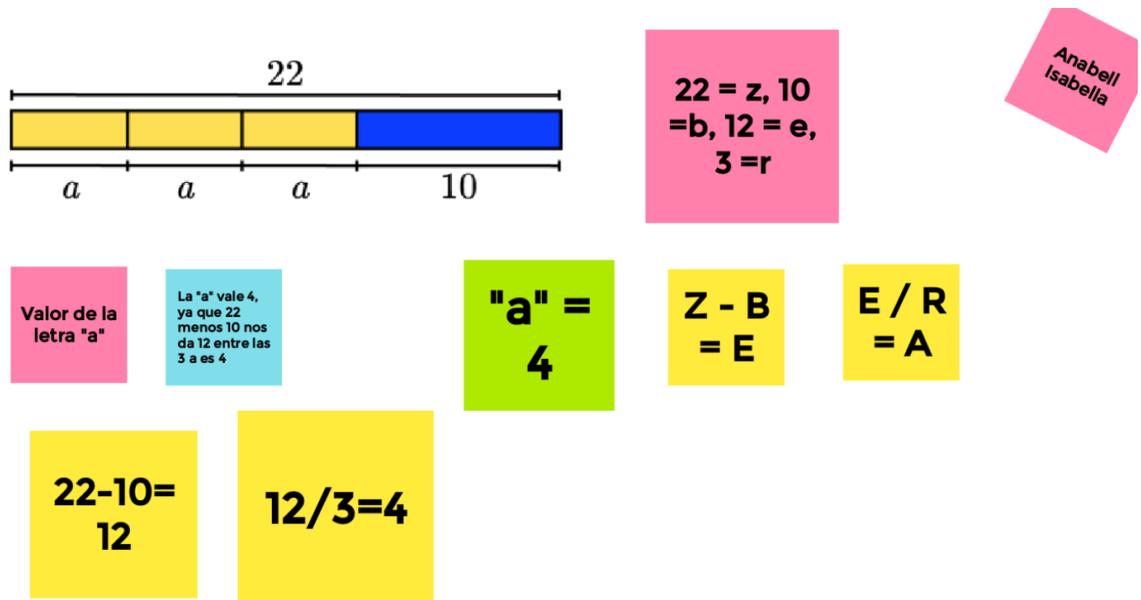


Figura 165. Respuesta de Isabella al ejercicio de la tercera sesión en Meet.

La Figura 166 muestra la respuesta de Paola, quien usó la expresión, $22-a=15$ y $15/3=5=b$. Esto implica que, de manera intuitiva utilizan las letras para explicar sus procedimientos.

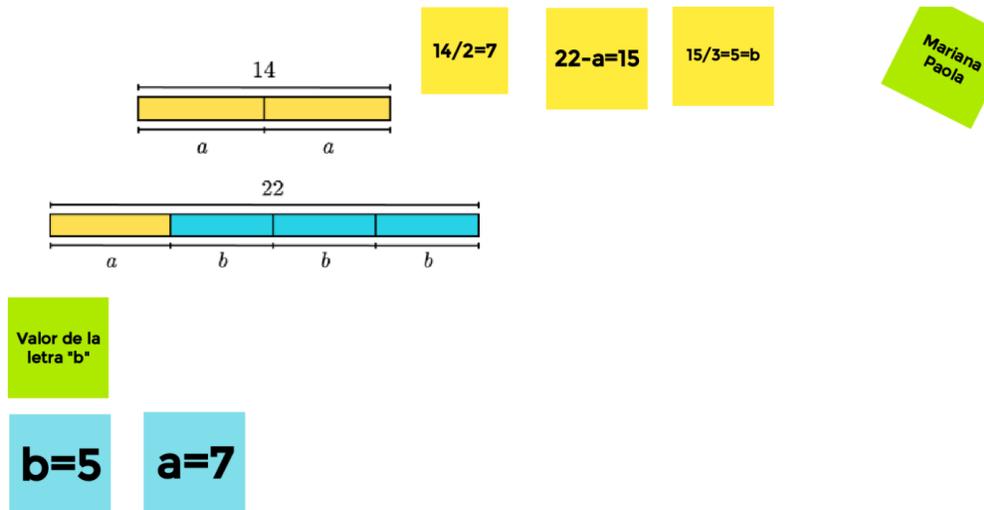


Figura 166. Respuesta de Mariana al ejercicio de la tercera sesión en Meet.

La Figura 167 muestra el procedimiento de Carlos, quien utilizó únicamente lenguaje aritmético para resolver el ejercicio.

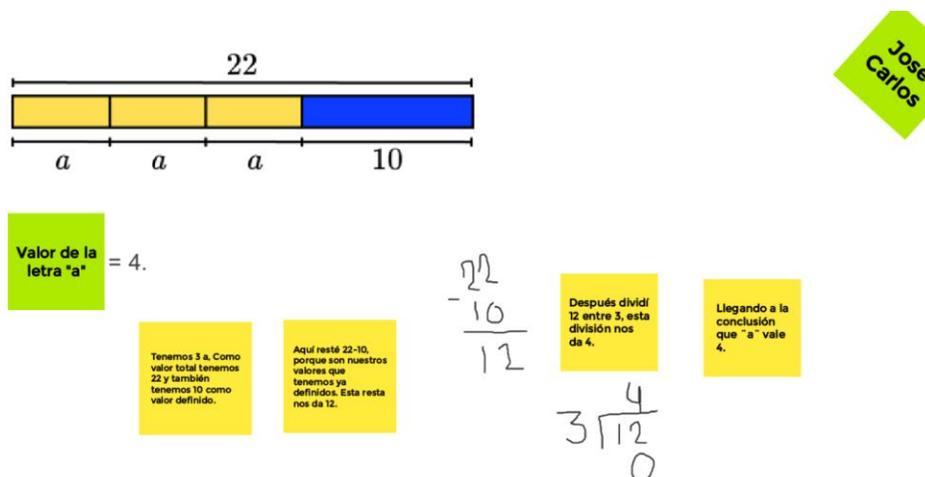
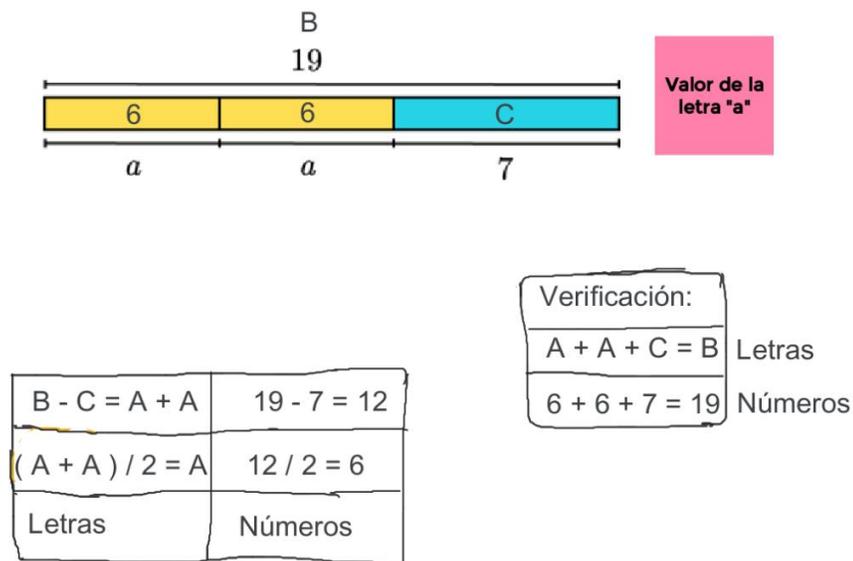


Figura 167. Respuesta de José al ejercicio de la tercera sesión en Meet.

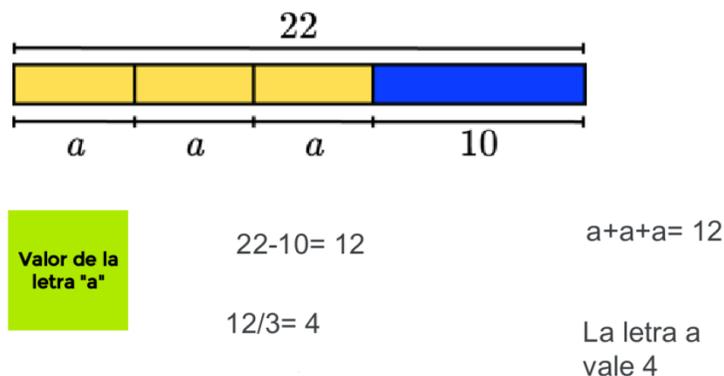
Carla escribió expresiones utilizando letras, no parece que se trate de solo etiquetar, ya que para la expresión: $B-C=A+A$ la asocia con la expresión aritmética de $19-7=12$, sabe que $A+A = 6+6=12$. Ver Figura 168.



Carla

Figura 168. Respuesta de Cala al ejercicio de la tercera sesión en Meet.

Valentina utilizó la expresión $a+a+a= 12$, estas respuestas dan cuenta de una aproximación al uso de letras del lenguaje algebraico. Ver Figura 169.



Valentina

Figura 169. Respuesta de Valentina al ejercicio de la tercera sesión en Meet.

Las impresiones de los estudiantes sobre el trabajo que realizaron en el entorno de aprendizaje móvil fueron en su mayoría positivas, como dan muestra comentarios espontáneos durante la sesión de cierre.

Gael: a mí me gustó mucho esto, pero como que nos faltó tiempo, para irme acostumbrando pues

Daniel Garzón: voy a extrañar esta clase

Valentina: estuvo muy padre, lo que me gusto es que las actividades eran muy interactivas, entonces te entretenías haciéndolas

Malillany: A mí me gustaron las actividades, la última si fue un poquito complicada, pero si, al final le entendí y pues me gusto Jamboard por que sirve para que entre todos estemos colaborando en el mismo trabajo

Jesus: A mí me gustó mucho la verdad miss, porque era mucho de estar pensando. Me gustó mucho su clase miss, fue muy divertida.

Sofía: A mí también me gusto trabajar en Jamboard

5.3. RESULTADOS DE LA SEGUNDA TRAYECTORIA DIDACTICA

Los resultados presentados en cada una de las fases de la IBD de la segunda trayectoria didáctica, permitieron identificar la pertinencia de los tipos de tareas propuestos en relación a la noción de idoneidad del EOS, estas tareas promovieron la identificación del carácter multifacético de la variable, concretamente sus usos como número general y cómo incógnita específica. Por otro lado, el diseño del entorno de aprendizaje móvil consideró herramientas tecnológicas gratuitas y con un alto grado de usabilidad, las interacciones en el EAM permitieron identificar habilidades digitales que impactaron positivamente el desempeño de los estudiantes.

En relación al criterio de idoneidad epistémica se consideraron pertinentes las situaciones problema planteadas en la Tarea de ejercitación de respuesta múltiple,

la cual fue el punto de partida para introducir progresivamente el uso de símbolos y posteriormente el uso de letras. Se identificó que el uso de archivos multimedia representa una oportunidad para que los estudiantes expresen sus ideas con texto, gráficos, símbolos y señalamientos con el propósito de clarificar para el docente lo que desean explicar.

Se identificó un avance progresivo en los estudiantes en la identificación de los diversos usos de la variable, así como la asociación de la aritmética con el álgebra, en principio sus procedimientos únicamente mostraban el uso del lenguaje aritmético y progresivamente incorporaron símbolos y letras para explicar sus procedimientos. Si bien los estudiantes no lograron argumentar por que unos procedimientos son correctos y otros no, si fueron capaces de narrar sus procedimientos, y de formas diversas, lo que resulta fundamental en el proceso de identificación de los significados adquiridos.

La trayectoria didáctica dio relevancia al proceso de aprendizaje, evitando la idea de que el propósito de las matemáticas es la obtención de resultados binarios, correctos o incorrectos, esto se relaciona con el criterio de idoneidad afectiva, en cuanto a fomentar una actitud positiva ante las tareas matemáticas, en las que se da importancia a las ideas de los estudiantes. En este sentido los espacios de diálogo en Meet, que refieren a la tarea de discusión, permitieron que expresaran sus ideas verbalmente, aunque no lograron negociar acuerdos, si identificaron procedimientos incorrectos y los corrigieron, diferenciando que, si bien las operaciones aritméticas eran correctas, el procedimiento no correspondía con lo que plantea el problema, esta actividad amplía la visión del estudiante sobre como resuelven los problemas sus compañeros.

En relación al criterio de idoneidad cognitiva, el progreso gradual de los estudiantes consideró conocimientos aritméticos previos y de tipo procedimental, con actividades similares a las que contempla el currículo institucional, esto se relaciona con el componente de adaptación al currículo del criterio de idoneidad ecológica y por otra lado, con la idoneidad afectiva, en el sentido de que el estudiante se sintió capaz de utilizar sus propias herramientas para resolver la tarea matemática, lo que facilitó que compartiera sus ideas y procedimientos, debido a la familiaridad de los ejercicios. Sobre las adaptaciones curriculares y las diferencias individuales se consideraron dos aspectos, por un lado fueron fundamentales las actividades de ampliación y refuerzo, que si bien se plantearon como actividades sencillas de repaso, durante la trayectoria didáctica se identificó la necesidad de despertar su interés mediante actividades lúdicas, lo que impactó además de la idoneidad afectiva, el componente de la apertura de la innovación didáctica de la idoneidad ecológica, ya que se utilizaron dos plataformas que gamifican cuestionarios, Quizziz y Genially.

La plataforma de Classroom permitió una gestión continua de las tareas, así como el seguimiento del avance de los estudiantes, una comunicación continua y un esquema de la secuencia del trabajo. Los resultados de la etapa de la experimentación dieron evidencias de la amplia capacidad de comunicar ideas y procedimientos. La TD fue flexible en relación a la diversidad de ejercicios y el nivel de complejidad identificado, lo que implicó una constante revisión y seguimiento inmediato de las respuestas de los estudiantes. Se logró para poco más de la mitad de los estudiantes la identificación del uso no operativo del signo igual, la validez de expresiones abiertas y la identificación de que una letra puede tener un valor fijo o varios valores según sean las condiciones del problema, si bien persistió aun la acción de etiquetar cuando se usan letras, en esta segunda trayectoria didáctica incrementó el número de estudiantes que identifican que es posible operarla. En este sentido posiblemente se requiere ampliar el tiempo de trabajo.

La idoneidad afectiva fue favorable, lo que se evidenció por la amplia participación en las actividades, en relación a este criterio se logró conectar con el estudiante gracias a la actividad preliminar, durante la primera semana se destinó tiempo para conocer a los estudiantes. Se fomentó la idea de que las matemáticas son desafíos mentales al alcance de todas y todos, y que sus ideas eran importantes, lo que hizo que se concentraran en explicar sus procedimientos. Los estudiantes manifestaron ideas positivas sobre las actividades, mostraron confianza al expresar sugerencias.

En relación a la idoneidad interaccional, los estudiantes interactuaron sin dificultad en las diversas plataformas, aunque era la primera vez que utilizaban Meet, Jamboard, Quizizz y Genially. Esto debido al diseño pertinente del entorno de aprendizaje móvil, ya que se seleccionaron recursos tecnológicos al alcance de la institución y de los estudiantes, aspectos considerados en el criterio de idoneidad mediacional. El diseño de las actividades consideró los objetivos de aprendizaje, prestando mayor atención a la interacción, aspecto que en la primera TD fue insuficiente. Se asignaron semanalmente sesión de discusión en Meet, que fueron fundamentales para garantizar la interacción y resolver dudas de manera inmediata, además que fueron los espacios para explicaciones extensas. El tiempo fue insuficiente para dar seguimiento a actividades colaborativas y por otro lado no se consideraron aspectos en cuanto a cómo promover el trabajo en equipo. Las herramientas tecnológicas del EAM facilitaron la gestión y el seguimiento de las actividades, dando autonomía a los estudiantes y una constante evaluación formativa.

La idoneidad mediacional consideró que los recursos materiales seleccionados estuvieran al alcance de la institución, de docentes y estudiantes, es decir, es posible replicar el EAM en un contexto de educación formal totalmente en línea. Se trabajó con los grupos del primer grado de educación secundaria, se distribuyeron grupos reducidos, cada grupo se dividió en 2, por lo que se trabajó con un promedio de 15 estudiantes por grupo. Las sesiones de discusión tuvieron

una duración de 40min, tiempo suficiente para incluir una actividad de refuerzo y diversos ejercicios para su discusión. Este aspecto impacta directamente a la idoneidad ecológica, ya que los recursos seleccionados refieren a la apertura a la innovación didáctica. Se implementó un EAM para abordar el estudio de la variable, considerando que los procesos de enseñanza en un entorno digital presentan nuevos retos, y en muchas ocasiones están relacionados con las capacidades de la institución, del estudiante y la pertinencia de la tecnología para lograr objetivos de aprendizaje específicos.

El criterio de idoneidad ecológica consideró que los contenidos implementados correspondieran a las directrices curriculares de la institución y a los programas educativos oficiales de este nivel educativo. La TD promovió valores como el respeto y la expresión libre de ideas, como se evidencia en los diálogos registrados. El uso de archivos multimedia para expresar sus ideas fomentó el desarrollo de habilidades digitales, no conocían la herramienta de jamboard y no habían usado Meet para tomar clases, su curva de aprendizaje fue corta y se sintieron cómodos utilizando las pizarras para dibujar, escribir y señalar sus procedimientos.

5.4. REFINAMIENTO DE LA SEGUNDA TRAYECTORIA DIDÁCTICA

La Figura 170 ilustra el diseño preliminar de la trayectoria didáctica, en el cual se planteó que se resolverían semanalmente los 4 tipos de tarea propuestos, y se abordaría un bloque temático por semana. Sin embargo, durante la experimentación se identificó la necesidad de destinar mayor tiempo a cada tipo de actividad, aunque respetando los bloques temáticos semanales, como se ilustra en la Figura 171.

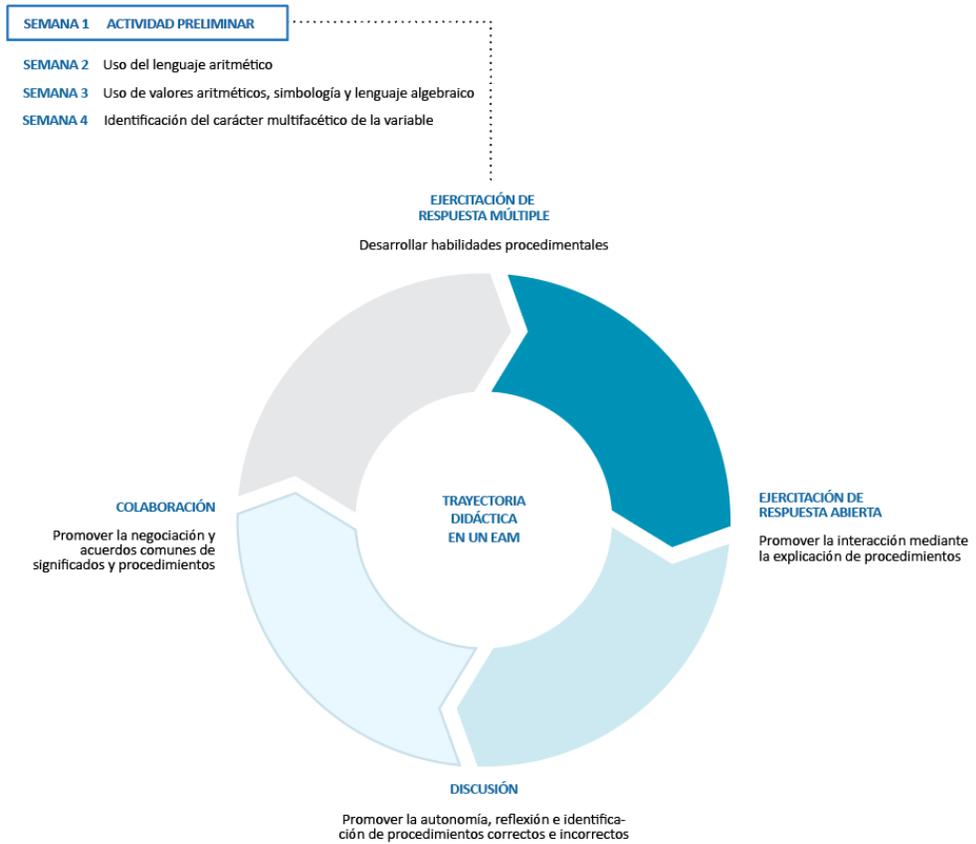


Figura 170. Diseño preliminar de la trayectoria didáctica en un entorno de aprendizaje móvil

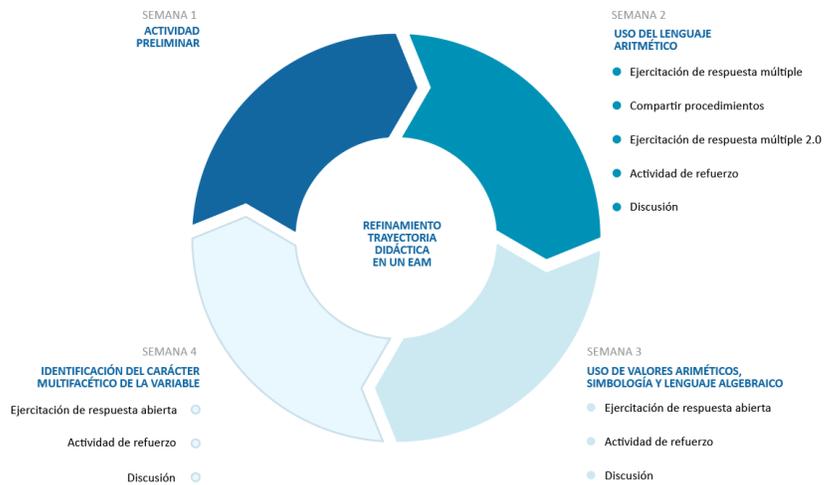


Figura 171. Ajuste de la trayectoria didáctica en un entorno de aprendizaje móvil

De esta TD se identifican aspectos valiosos a considerar, por un lado, se consideraron pertinentes las tareas propuestas. Se consideró fundamental la actividad de refuerzo en la tarea de discusión. Compartir sus procedimientos fue la única vía para identificar significados erróneos adquiridos. Debe rediseñarse la tarea de colaboración, ya que son necesarias pautas específicas para que todos participen y colaboren, de lo contrario sólo expresaran sus ideas, pero sin la necesidad de aportar o ayudar a otro.

Se lograron los objetivos de aprendizaje, los estudiantes transitaron del lenguaje aritmético al algebraico, identificaron que un símbolo puede adquirir un valor fijo, un conjunto de valores o incluso referir a una expresión. Aunque queda trabajo por hacer en relación a operar las letras.

Este trabajo manifiesta una visión de las matemáticas que presta atención a los procedimientos de los estudiantes, a utilizar sus propias expresiones e ideas para discutir y debatir, evitando la idea binaria de que en una tarea matemática lo importante es dar con la respuesta correcta, ignorando el proceso, se dio prioridad al proceso. Por otro lado, fue evidente que los espacios digitales son contextos en los que el estudiante se siente familiarizado, mostraron interés y agrado por la edición digital, usando esa herramienta para compartir sus procedimientos, hay una gran capacidad de expresión que debemos aprovechar como docentes e investigadores.

Un EAM requiere que las herramientas tecnológicas utilizadas sean recursos asequibles, se da prioridad al fundamento pedagógico, a las estrategias didácticas para ayudar al estudiante en su proceso de aprendizaje, las herramientas tecnológicas facilitan que esas interacciones, la gestión y el seguimiento sean pertinentes.

CAPITULO 6. PROPUESTA DE UN EAM PARA ABORDAR EL ESTUDIO DE LA VARIABLE

Se propone un entorno de aprendizaje móvil con el objetivo de abordar el estudio de la variable en el que se identifique su carácter multifacético, asociando dos de sus usos, como número general y como incógnita, además, de abordar el concepto de equivalencia matemática y el uso del signo igual. La secuencia de las actividades propuestas ocurrirá en un entorno de aprendizaje móvil, en el que la interacción entre estudiantes y docente este mediada por dispositivos móviles en el espacio digital. La Tabla 20 describe los criterios, componentes e indicadores de la noción de idoneidad didáctica del EOS.

Tabla 20. Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad del EOS

Criterio de idoneidad	Componente	Indicador
Epistémica	Situaciones-problema	-Situaciones de contextualización mediante lenguaje aritmético y uso de símbolos. -Actividades para la identificación de la variable como número general y como incógnita.
	Lenguajes	-Modos de expresión matemática, verbal, gráfica y simbólica. -Traducciones y conversiones entre el lenguaje aritmético y el lenguaje algebraico. -Uso de expresiones algebraicas para validar equivalencias matemáticas.
	Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	-Dificultad progresiva de las actividades, desde conceptos aritméticos básicos y uso de símbolos, hasta la identificación del carácter multifacético de la variable. -Situaciones para negociar la definición de equivalencia matemática, el uso de la variable como número general y como incógnita.
	Argumentos	-Explicaciones y comprobaciones de forma escrita, verbal y gráfica. -Actividad de discusión por bloque temático, para compartir ideas, procedimientos y explicar los resultados obtenidos.
	Relaciones	-Relación entre procedimientos aritméticos, la definición de

		<p>equivalencia matemática y los usos de la variable.</p> <p>-Se identifican y articulan los significados parciales del signo igual como un <i>estado</i>.</p>
Cognitiva	Conocimientos previos	<p>-Procedimientos aritméticos básicos.</p> <p>-El contenido se presenta de manera progresiva en actividades cortas.</p>
	Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	<p>-Se abordan en las sesiones de discusión procedimientos compartidos por los estudiantes para su análisis.</p> <p>-Actividades de ampliación y refuerzo al inicio de las sesiones de discusión y antes de introducir conceptos nuevos.</p> <p>-El estudiante gestiona la entrega y avance de las actividades en la plataforma con la retroalimentación correspondiente.</p>
	Aprendizaje	<p>- Competencia comunicativa y argumentativa para comunicar procedimientos y aprendizajes, proponer procedimientos; fluencia procedimental mediante procesos aritméticos básicos.</p> <p>- Las actividades propuestas consideran niveles de comprensión y dificultad en relación a la competencia identificada en el estudiante.</p> <p>- Los resultados de las actividades se difunden para su discusión.</p>
	Intereses y necesidades	<p>-Se diseña una actividad preliminar para conocer los intereses e inquietudes de los estudiantes, durante la primera semana de trabajo el propósito es conectar con el estudiante.</p> <p>-Se promueve la idea de la actividad matemática como un desafío mental.</p>
Afectiva	Actitudes	<p>-Se promueve la participación, la perseverancia y responsabilidad.</p> <p>-Libre expresión de ideas mediante recursos multimedia en un espacio colaborativo.</p>
	Emociones	<p>-Se evita la idea de obtener un puntaje para medir el avance del trabajo, se valora el error como una oportunidad de mejora, y se da oportunidad repetir los ejercicios sin restricción.</p>
	Interacción docente-discente	<p>-Definición de los objetivos de aprendizaje en cada tema.</p> <p>-Sesiones de discusión sincrónicas con el grupo por cada bloque temático.</p> <p>-Comunicación continua mediante el chat de la plataforma y correo electrónico.</p> <p>-Inclusión de los estudiantes mediante el seguimiento de sus participaciones en la plataforma digital.</p>

	Interacción entre alumnos	<ul style="list-style-type: none"> -Tarea colaborativa en la que deben llegar a acuerdos para compartir un proceso de solución. -Todos los estudiantes participan de las actividades individuales, de discusión y colectivas en condiciones de igualdad.
	Autonomía	<ul style="list-style-type: none"> -Tareas individuales en las que se solicita la validación de su respuesta.
	Evaluación formativa	<ul style="list-style-type: none"> -Seguimiento continuo del progreso del estudiante y del grupo mediante la plataforma.
Mediacional	Recursos materiales	<ul style="list-style-type: none"> -Tutorial para describir las herramientas básicas de la plataforma siguiendo la secuencia de las actividades. -Uso de las herramientas de G Suite de Google: Classroom, Forms, Meet, Gmail, Jamboard. -Uso de pizarrón interactivo, recursos multimedia, formularios, y mesas de debate. -Para actividades de refuerzo: Genially y Quizizz.
	Número de alumnos, horario y condiciones del aula	<ul style="list-style-type: none"> -6 grupos con un máximo de 14 estudiantes cada uno. -Las actividades de cada tema se presentan al inicio de la semana, el estudiante dispone de 6 días para entregar dos actividades propuestas. -Una sesión de discusión al cierre de la semana para evaluar aprendizajes. -Entorno de aprendizaje móvil, uso de dispositivos móviles.
	Tiempo	<ul style="list-style-type: none"> -Dos actividades semanales en la plataforma de Google Classroom 90min. -Sesión semanal de discusión en Google Meet 40min. -La trayectoria didáctica tiene una duración de 4 semanas: Actividad preliminar y 3 bloques temáticos.
	Adaptación al currículo	<ul style="list-style-type: none"> -Los contenidos, su implementación y evaluación corresponden con las directrices curriculares definidas en el plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación de la Secretaría de Educación Pública, SEP, en México. -Se aborda el eje temático Número, álgebra y variación del primer nivel de educación secundaria en México.
Ecológica	Apertura hacia la innovación didáctica	<ul style="list-style-type: none"> Diseño actividades matemáticas en un entorno de aprendizaje móvil para abordar el estudio de la variable, identificando su carácter multifacético.
	Adaptación	<ul style="list-style-type: none"> -Se promueve el interés por destrezas matemáticas como un

socio-profesional y cultural	ejercicio que implica creatividad y perseverancia.
Educación en valores	-Se promueve el trabajo colaborativo, la equidad y la expresión libre de ideas.
Conexiones intra e interdisciplinarias	-Relación interdisciplinar entre la aritmética y el álgebra. -Desarrollo de habilidades digitales: edición de contenido multimedia.

La trayectoria didáctica consideró tres bloques temáticos para abordar las actividades matemáticas propuestas. A continuación, se describen los objetivos de aprendizaje de cada bloque temático:

1. Uso del lenguaje algebraico, en el cual el estudiante desarrollará habilidades procedimentales y hará uso del lenguaje aritmético mediante equivalencias numéricas.
2. Uso de valores aritméticos, simbología y lenguaje algebraico, el objetivo de aprendizaje consistirá en calcular un valor desconocido mediante procedimientos aritméticos para evidenciar la asociación de la aritmética y el álgebra. El estudiante utilizará el lenguaje aritmético, se abordará el concepto de equivalencia matemática y el uso del signo igual.
3. Identificación del carácter multifacético de la variable, el objetivo de aprendizaje consistirá en identificar expresiones algebraicas equivalentes mediante lenguaje algebraico para la identificación del uso no-operativo del signo igual, además, se identificará el uso de la variable como número general y como incógnita utilizando letras, promoviendo el uso del lenguaje algebraico formal para resolver actividades matemáticas.

Las actividades matemáticas se diseñaron para un entorno de aprendizaje móvil, por lo que se propusieron seis tipos de actividad con características particulares considerando los recursos materiales que refieren al criterio de idoneidad mediacional y la apertura hacia la innovación didáctica del criterio de idoneidad

ecológica. La Tabla 21 describe los tipos de actividad propuestos para el estudiante, el nivel de dificultad, el objetivo de aprendizaje y las características de la actividad.

El nivel de dificultad refiere a las capacidades del estudiante para comunicar, analizar y negociar sus ideas en torno a una tarea matemática, es decir, se utiliza como punto de partida para el docente, no evalúa el avance del estudiante, ya que se presta atención a cómo el estudiante resuelve la tarea matemática, qué herramientas usa y que significados han sido adquiridos erróneamente, énfasis en los espacios de diálogo y de negociación entre pares.

Un nivel bajo indica que los ejercicios demandan aspectos procedimentales de operaciones aritméticas básicas, son similares a ejercicios del nivel educativo previo, se espera que el estudiante resuelva sin dificultad la tarea. Un nivel medio refiere que el estudiante tiene la capacidad de explicar textual o gráficamente sus procedimientos para resolver una tarea matemática. Un nivel medio-alto implica que el estudiante reflexiona, analiza e identifica significados erróneos adquiridos y es capaz de corregir sus planteamientos. Un nivel alto refiere a que el estudiante es capaz de negociar acuerdos con sus compañeros para resolver en conjunto una tarea matemática.

Tabla 21. Características de los tipos de tarea propuestos para un entorno de aprendizaje móvil

Tipo de tarea	Nivel de dificultad	Objetivo	Características	Herramienta digital
Actividad preliminar	Nulo	Identificar habilidades digitales básicas del estudiante en la plataforma y conocer sus intereses personales	Archivo multimedia para edición libre Lista de intereses Docente comparte intereses personales a modo de presentación (ejemplo)	Archivo multimedia Google Classroom
Ejercitación con respuestas múltiples	Bajo	Desarrollar habilidades procedimentales	Enunciados cortos Opciones de respuesta múltiple	Google Classroom Google Forms

			<p>Pregunta cerrada</p> <p>Puntuación cuantitativa</p> <p>Cuestionario abierto</p> <p>Explicación escrita para respuestas correctas e incorrectas.</p>
Compartir procedimientos	Medio	Explicar el proceso de solución de la actividad matemática	<p>Formato libre: archivo Word, pdf, jamboard, fotografía del cuaderno</p> <p>Tarea opcional</p> <p>Requerida para habilitar una segunda tarea de Ejercitación con respuesta abierta 2.0 (mejorar puntaje)</p>
Ejercitación con respuesta abierta	Medio	Promover la interacción mediante la explicación de procedimientos	<p>Archivo digital disponible para su edición.</p> <p>El estudiante expresa sus ideas gráfica y textualmente.</p> <p>Comunicación escrita para la reflexión y análisis de procedimientos</p>
Discusión	Medio-Alto	Promover la reflexión e identificación de procedimientos correctos e incorrectos	<p>Requiere una actividad de refuerzo y ampliación al inicio de la sesión</p> <p><i>Recomendación:</i> respuesta de un compañero a una actividad de ejercitación con respuesta abierta.</p> <p><i>Opción alternativa:</i> selección de un ejercicio significativo de dificultad</p>

Archivo multimedia
Google Classroom

Archivo multimedia
Google Classroom

Goglee Classroom
Google Meet
Quizizz
Genially
Jamboard

			manejable. Comunicación verbal y escrita para la reflexión y análisis de los procedimientos compartidos por el grupo.
Colaboración	Alto	Promover la autonomía y la negociación de acuerdos comunes de significados y procedimientos	<p>Interacción mediante una pizarra colaborativa con grupos reducidos</p> <p>Interacción mediante una plataforma de videoconferencias con grupos reducidos.</p> <p>Comunicación verbal y escrita entre los estudiantes para negociar acuerdos</p>

La Figura 172 describe la trayectoria didáctica considerando la temporalidad, el bloque temático y los tipos de tarea previamente descritos. El diagrama ilustra un espiral, ya que el propósito de la propuesta es replicar la secuencia de las tareas matemáticas incrementando el nivel en los ejercicios, usando como punto de partida el avance de los estudiantes, es decir, de los procedimientos de los estudiantes se obtiene información sobre el proceso de aprendizaje y los significados adquiridos, es fundamental que exista riqueza en los ejercicios, mostrar diversos problemas y situaciones.

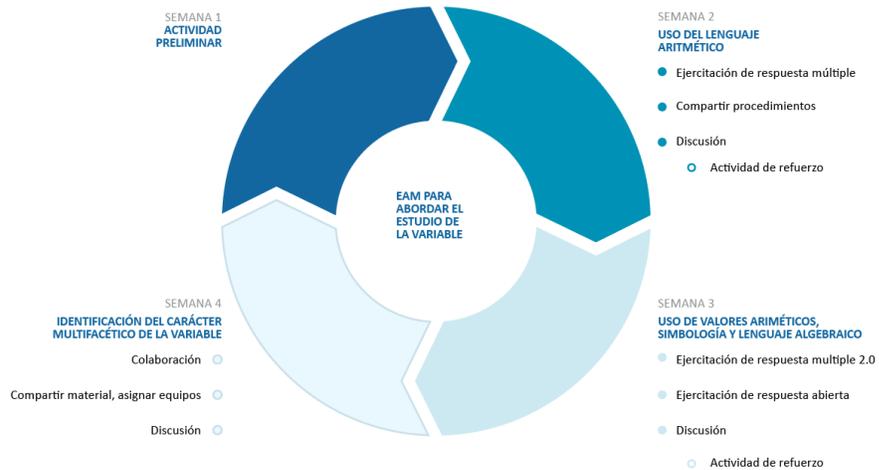


Figura 172. Trayectoria didáctica, temporalidad, bloque temático y los tipos de tarea

En relación a la dimensión afectiva de los criterios de idoneidad del EOS, se describe para los estudiantes la TD utilizando las etiquetas de la Figura 173, para despertar su interés y fomentar la idea de que las tareas matemáticas son desafíos mentales al alcance de todas y todos, se asocia a cada bloque temático un valor equivalente a una insignia, y se etiquetan los tipos de tarea como misión que deberán completar para obtener la insignia.



Figura 173. Etiquetas utilizadas en la plataforma para describir los tipos de tarea y los bloques temáticos

La Figura 174 muestra la estructura de las tareas en la plataforma de Google Classroom y en Google Meet. Cada bloque temático corresponde a un tema en Google Classroom, esta plataforma gestionará el avance de los estudiantes en sentido cuantitativo, permitirá visualizar el avance en cada una de las actividades; las tareas de actividad preliminar, compartir procedimientos y ejercitación con respuesta abierta corresponden a una tarea en la que deberán adjuntar un archivo multimedia; las tareas de discusión corresponden en Classroom a una pregunta, que podrán contestar al finalizar la sesión en Google Meet en donde se emplean las herramientas de Quizizz y Genially para las actividades de refuerzo, y una pizarra interactiva en Jamboard para el análisis de los ejercicios. La actividad de colaboración se gestionará mediante una pizarra interactiva en Jamboard y el correo electrónico para gestionar equipos de trabajo de 5 estudiantes máximo, ya que Classroom no permite gestionar en la misma clase subgrupos. Sin embargo, para evaluar el avance en la plataforma deberán subir la evidencia de la actividad mediante un archivo adjunto.



Figura 174. Estructura de las tareas en la plataforma de Google Classroom y en Google Meet

Que el estudiante tenga claro el esquema de los que trabajará ayudara a que gestione mejor sus tareas, estará atento y anticipado sobre los ejercicios que estarán disponibles cada inicio de semana. La figura ilustra la secuencia de actividades en la plataforma de Google Classroom, las actividades de cierre de semana que refieren a la misión 3, se llevan a cabo en Google Meet utilizando la pizarra de Jamboard, que será la evidencia del trabajo del grupo, para las semanas 2 y 4 se llevan a cabo actividades de refuerzo en las herramientas de Quizizz y Genially, para la última semana se lleva a cabo una sesión corta colaborativa en Meet, se plantea un ejercicio que deberán resolver en colaboración, para ello a lo largo de la semana cada integrante del equipo descifro una pista que deberá compartir con sus compañeros, existe un tiempo límite para resolver el desafío.

6.1. Actividad preliminar

El objetivo de la actividad es identificar las habilidades digitales del estudiante para utilizar la plataforma, para editar un archivo multimedia y para expresar sus ideas. Por otro lado, esta actividad corresponde a la primera semana de trabajo, en la que se busca interactuar con las y los estudiantes, conocer sus intereses y conectar con ellos, además de transmitir la idea de que las actividades de trabajo refieren a desafíos mentales, no se espera un resultado binario de correcto o incorrecto, sino el disfrute del proceso de descifrar un misterio.

La Figura 175 ilustra el archivo pdf que el estudiante editará, la docente comparte el archivo con su información personal para que los estudiantes también la conozcan, para esta trayectoria se unifico el estilo y diseño de las actividades a modo de videojuego de 8bits, sólo por ese bonito sentimiento de nostalgia de aquellos juegos y sus sonidos.



The image shows a digital form titled "GAMER TAG" with a blue background and a light blue border. The form is designed to look like a video game interface. At the top left, there is a brown scroll icon with the text "GAMER TAG" in white. To the right of the scroll is a text input field labeled "About me...". Below the scroll is a white cloud icon. The form contains several sections, each with an icon and a text input field:

- Mi lado gamer:** A gold coin icon followed by a text input field.
- Algunas cosas que amo:** A red heart icon followed by a text input field.
- Mis proximos retos:** A blue diamond icon followed by a text input field.
- Mis talentos:** A crossed sword icon followed by a text input field.
- Osh! Estas cosas me enojan:** An hourglass icon followed by a text input field.

Figura 175. Actividad preliminar

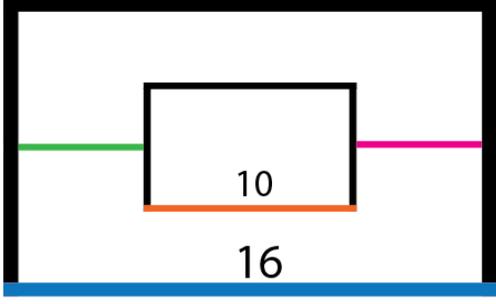
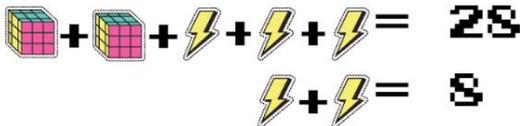
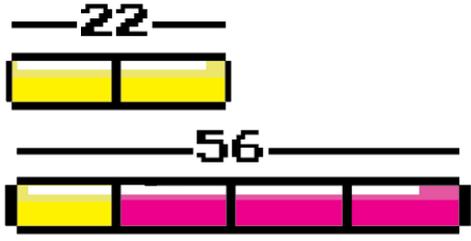
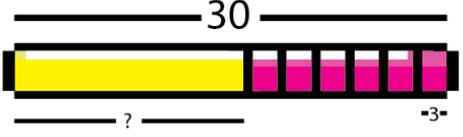
6.2. Tarea de ejercitación con respuesta múltiple

La *tarea de ejercitación con respuestas múltiples* tiene el propósito de desarrollar habilidades procedimentales, de baja demanda cognitiva y semejantes a ejercicios del currículo escolar. El estudiante resuelve un formulario de 5 ítems en Google Forms en el que se utiliza una imagen clara, preguntas o enunciados cortos con un bajo grado de dificultad, el tipo de pregunta es cerrada y se evalúa cuantitativamente, el cuestionario contiene opciones de respuesta múltiple, con una o más respuestas correctas para inducir en el estudiante la idea de que existen diversas formas de representar un valor numérico. El cuestionario es abierto, es decir, está disponible para resolverse más de una vez.

Esta tarea permite gestionar de manera inmediata las entregas y puntuación de los estudiantes, lo que facilita la identificación parcial de los niveles de competencia de los grupos, para reorganizarlos y asignar la tarea de Ejercitación 2.0 según el nivel identificado.

Para el bloque Uso del lenguaje aritmético, se proponen los ejercicios que muestra Tabla 22. Para mejorar el puntaje se propone al estudiante una actividad opcional en la que deberán compartir los procedimientos que realizaron para resolver estos ejercicios, para ello se analizan sus respuestas y el puntaje obtenido lo que permitirá determinar el nivel de un segundo formulario. El objetivo es incrementar o disminuir la dificultad según sea el caso.

Tabla 22. Ejercicios del Bloque temático: uso del lenguaje aritmético

<p>Valor de los rectángulos verdes:</p>  <p> <input type="checkbox"/> 60-30 <input type="checkbox"/> 60+30 <input type="checkbox"/> 30 <input type="checkbox"/> 15 <input type="checkbox"/> 10 </p>	<p>Valor de la línea verde:</p>  <p>Tu respuesta _____</p>
<p>Valor del cubo rubik:</p>  <p>Tu respuesta _____</p>	<p>Valor de un rectángulo rosa:</p>  <p> <input type="checkbox"/> 56-22 <input type="checkbox"/> La mitad de 22 <input type="checkbox"/> La tercera parte de 45 <input type="checkbox"/> 3 veces 15 <input type="checkbox"/> 15 </p>
<p>Valor de un rectángulo amarillo:</p>  <p>Tu respuesta _____</p>	

6.3. Compartir procedimientos

Esta tarea es fundamental para la identificación de los significados adquiridos por el estudiante, la actividad previa no da cuenta por si sola sobre el proceso de

razonamiento del estudiante. El estudiante es libre de utilizar las herramientas que considere pertinentes para subir su archivo multimedia: un documento de Word, un pdf, una pizarra en jamboard, la fotografía de su cuaderno, las múltiples posibilidades permiten que el estudiante de más importancia a cómo sería la mejor herramienta para explicar sus ideas, que por aprender a usar una herramienta en sí. La Figura 176 ilustra un ejemplo de las instrucciones de la tarea en Google Classroom.



Figura 176. Instrucciones de la tarea compartir procedimientos en Google Classroom

Con los trabajos compartidos es posible identificar algunas expresiones, significados y procedimientos que por lo general son comunes al grupo, aquellos que son erróneos se abordan en la sesión de discusión para su análisis.

6.4. Tarea de ejercitación con respuesta abierta

La *tarea de ejercitación con respuesta abierta* tiene el objetivo de promover la interacción entre estudiante y docente mediante la explicación de sus procedimientos. El estudiante edita un archivo digital con el ejercicio propuesto contenido en la plataforma de Google Classroom, puede agregar contenido explicando sus procedimientos gráfica y textualmente; también, puede adjuntar recursos multimedia y agregar comentarios con dudas o explicaciones. El grado

de dificultad de esta tarea es medio, la evaluación requiere de la comunicación escrita entre docente y estudiante para la reflexión y análisis de los procedimientos y aprendizajes adquiridos.

Para el bloque uso del lenguaje aritmético, se propuso el ejercicio que se muestra en la Figura 177. Este ejercicio se retoma de la actividad ejercitación con respuesta múltiple. Se comparte un archivo pdf con espacio suficiente para que el estudiante comparta sus procedimientos. Las respuestas a esta actividad se compartirán entre los compañeros de clase, respetando el anonimato del ejercicio, para la tarea de Discusión. La revisión de los trabajos demanda tiempo.



Figura 177. Tarea de ejercitación con respuesta abierta

6.5. Tarea de discusión

La *tarea de discusión* tiene el objetivo es promover la autonomía y reflexión en la solución de tareas matemáticas, además, de identificar y explicar procedimientos correctos e incorrectos. Para esta actividad se selecciona la respuesta de compañeros de clase de la actividad Ejercitación de respuesta abierta para discutir y reflexionar sobre los procedimientos compartidos; para algunos momentos una opción alternativa es la selección de un ejercicio significativo de dificultad manejable que evidenciaba un error recurrente en el grupo. Esta tarea es de dificultad medio-alto; el estudiante debe expresar sus ideas mediante texto, símbolos, íconos, gráficos, explicando si los procedimientos expuestos en la tarea son correctos o no y por qué. Esta actividad tiene un alto nivel de interacción. La Tabla 23 muestra ejercicios para el bloque *uso de valores aritméticos, simbología y lenguaje algebraico*, en el que se ilustran diversas formas de expresar el ejercicio, considerando aspectos identificados en el refinamiento de la propuesta.

Para el primer ejercicio se utilizan símbolos aritméticos para mayor claridad, el texto no incluye datos para operar. Para el segundo ejercicio se emplea una expresión abierta, en la que se requiere de los datos que proporciona el texto para resolver la dinámica. En el tercer ejercicio el estudiante debe construir las equivalencias matemáticas con los datos que proporciona la gráfica y le texto.

Tabla 23. Ejercicios para el bloque uso de valores aritméticos, simbología y lenguaje algebraico

 <p>Las nubes ocultan la misma cantidad de estrellas cada una. ¿Cuántas estrellas oculta una nube?</p>	 <p>Las nubes ocultan la misma cantidad de estrellas cada una, y en total hay en el cielo 107 estrellas. ¿Cuántas estrellas oculta cada nube?</p>
---	---

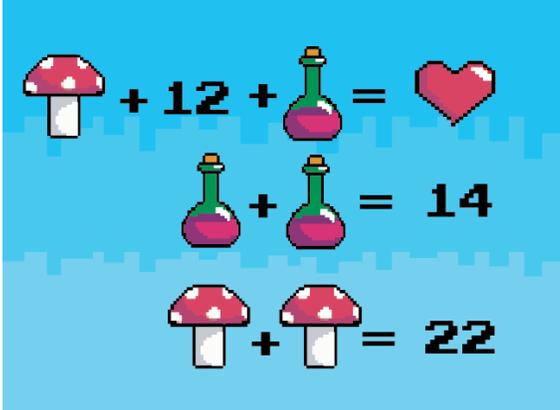
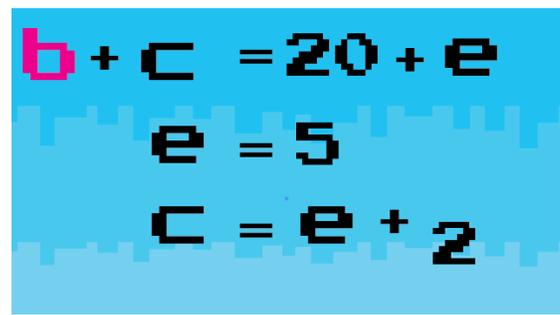


6.6. Tarea de colaboración

La tarea de colaboración tiene el propósito de promover la negociación de acuerdos comunes en relación a significados y procedimientos en torno a una tarea matemática, tiene un alto grado de dificultad. Se proponen los ejercicios que ilustra la Tabla 24. La docente asigna grupos de trabajo pequeños, entre 4 y 5 estudiantes, envía por correo electrónico el enlace a una pizarra colaborativa en Jamboard, los estudiantes deberán acordar como y cuando trabajarán el ejercicio, y de manera individual subirán el archivo como evidencia en Classroom. Este ejercicio colaborativo será similar al que resolverán en la última sesión en Meet, tarea de discusión.

Se plantea transitar del uso de símbolos como se muestra en el ejercicio de la figura hasta el uso de letras como el ejercicio de la figura. Esta sesión está estrechamente ligada con la última sesión en Meet, ya que se espera analizar las ideas y explicaciones del estudiante en torno a la identificación del carácter multifacético de la variable, identificando su uso como número general y como incógnita.

Tabla 24. Ejercicios del bloque temático: identificación del carácter multifacético de la variable

 <p>$\text{Mushroom} + 12 + \text{Flask} = \text{Heart}$ $\text{Flask} + \text{Flask} = 14$ $\text{Mushroom} + \text{Mushroom} = 22$</p>	 <p>$b + c = 20 + e$ $e = 5$ $c = e + 2$</p>
--	---

La Figura 178 ilustra los incrementos que han tenido las trayectorias didácticas, resultado del análisis retrospectivo entre el diseño preliminar y la etapa de experimentación, con fundamento en la noción de idoneidad del EOS. Los elementos resaltados en color naranja refieren a los ajustes implementados, se observa que las propuestas implementadas transitaron de 3 sesiones presenciales, hasta 4 semanas de trabajo en un entorno de aprendizaje móvil.

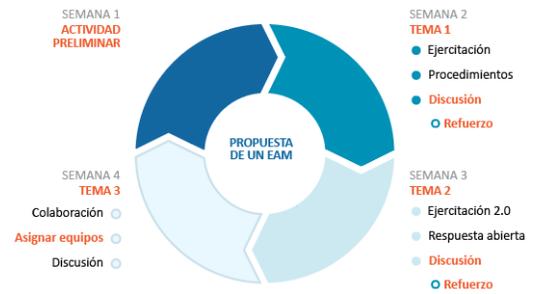
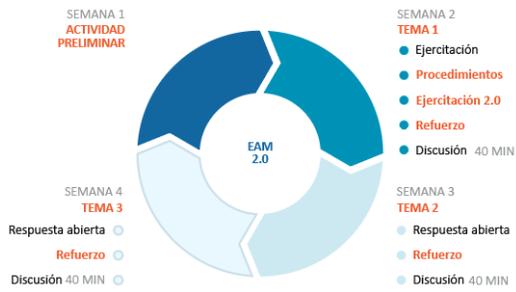
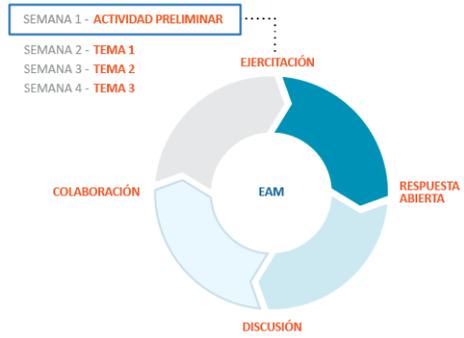


Figura 178. Incrementos de la trayectoria didáctica

CAPITULO 7. CONCLUSIONES

Este trabajo de investigación dio como resultado el diseño de un entorno de aprendizaje móvil, EAM, para abordar el estudio de dos usos de la variable: cómo número general y cómo incógnita. Las tareas propuestas consideraron los contenidos temáticos del currículo escolar de estudiantes mexicanos de nivel secundaria, cuyas edades oscilan entre los 12 y 15 años. La tecnología integrada al EAM fue seleccionada considerando el grado de asequibilidad por parte de estudiantes y docentes, lo que permitió identificar las potencialidades de los recursos multimedia y de aplicaciones móviles para el contexto escolar.

El presente trabajo de investigación, propone un entorno de aprendizaje móvil para abordar el estudio de la variable durante el primer acercamiento del estudiante al lenguaje algebraico formal, mediante la definición de 3 ejes temáticos y la implementación de 6 tipos de tarea. Los ejes temáticos propuestos permiten que el estudiante transite progresivamente del lenguaje aritmético al algebraico mediante diversas técnicas de expresión, es decir, se familiariza con el uso de símbolos, gráficos o dibujos para expresar sus procedimientos matemáticos. En convergencia con los ejes temáticos se abordan diversas tareas para que el estudiante analice e identifique progresivamente la naturaleza multifacética de la variable algebraica. Las tareas son concretas, breves y de dificultad manejable, sus características básicas facilitan su implementación con herramientas tecnológicas asequibles.

Resultado de esta investigación fue la identificación de componentes para el diseño pertinente de un EAM que aborde el estudio de la variable. El diseño de las tareas matemáticas del EAM consideraron un enfoque didáctico y pedagógico para validar la adquisición de aprendizajes matemáticos por parte de los estudiantes. La interacción entre participantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas fue mediada por las potencialidades de los recursos multimedia y el uso de aplicaciones móviles lúdicas y de gestión. La toma

de decisiones en torno a las herramientas tecnológicas incorporadas al EAM se basó en su grado de asequibilidad, factibilidad y usabilidad.

El EAM para abordar el estudio de la variable que se propone en la presente investigación está diseñado para su implementación en el contexto escolar, concretamente, la educación básica de nivel secundaria en México. Se identificaron componentes clave para la integración pertinente del EAM que permitió valorar los aprendizajes adquiridos por los estudiantes, estos componentes son:

- El alto grado de disponibilidad por parte del personal directivo y docente de la institución educativa, mediante diversos canales de comunicación y la interacción constante.
- La posibilidad de gestionar el número de estudiantes para cada grupo de trabajo, creando grupos reducidos y la segmentación en relación a los aprendizajes adquiridos, con esto es posible abordar tareas matemáticas considerando una dificultad manejable y pertinente.
- La disponibilidad de las herramientas tecnológicas de las que dispone la institución y la selección de aquellas de fácil acceso y usabilidad por parte de estudiantes y docentes.

Un aporte de la presente investigación es la identificación de componentes metodológicos para el diseño de un EAM para un campo disciplinar específico, las matemáticas:

- El componente fundamental refiere a la definición de un enfoque didáctico-pedagógico para la enseñanza de las matemáticas, es decir, las estrategias didácticas en torno a objetivos de aprendizaje concretos determinan la selección e integración de las herramientas tecnológicas.
- Considerando la amplitud de los contenidos temáticos en torno a las matemáticas, es fundamental delimitar los conceptos que desean abordarse en un EAM, para abordar su enseñanza desde diversas narrativas y

mediante diversas técnicas priorizando los momentos de interacción para profundizar en la comprensión de un concepto concreto.

- La posibilidad de los diversos tipos de interacción entre los participantes en un EAM incrementa los momentos para el diálogo, el debate, para narrar procedimientos, compartir dudas e identificar la adquisición de aprendizajes adquiridos. Esto refiere una potente herramienta para validar el aprendizaje de conceptos matemáticos.

El EAM resultado de esta investigación baso la propuesta de las tareas matemáticas en las nociones de trayectoria didáctica e idoneidad didáctica del EOS. El análisis del criterio mediacional determinó la selección de las herramientas tecnológicas que se integraron al EAM, fueron considerados los recursos materiales de la institución, el número de estudiantes participantes, el horario y las condiciones del aula, así como, el tiempo disponible para la implementación de las actividades.

La constante interacción que posibilita un EAM permitió la gestión, edición y creación de contenido multimedia, mediante aplicaciones móviles asequibles. Se dio prioridad a los momentos de interacción sincrónica, no sólo durante la fase de implementación, también se asignaron recursos para su análisis retrospectivo, con el propósito de incrementar el grado de dificultad de las tareas matemáticas con referencia al progreso de los aprendizajes adquiridos.

El diseño y desarrollo del EAM propuesto en esta investigación, requirió de la articulación de los ciclos de la Investigación Basada en el Diseño, IBD, y las nociones de trayectoria didáctica e idoneidad didáctica. Por un lado, se hace un análisis cualitativo de las trayectorias didácticas para identificar el grado de idoneidad didáctica efectivo, por otro lado, las trayectorias didácticas transitan un proceso con base a los ciclos recursivos de la IBD para la mejora del producto, en este caso, del EAM propuesto. Este trabajo de investigación enfatiza los resultados obtenidos al cierre de cada ciclo de la IBD, los cuales posibilitaron la

mejora del producto final, se presenta un histórico sobre los recursos, herramientas y técnicas utilizadas para el desarrollo del EAM.

La presente investigación describe el proceso de desarrollo de un EAM para abordar el estudio de la variable, se valoró su integración en el contexto escolar mediante la implementación de dos trayectorias didácticas y el análisis retrospectivo de la noción de idoneidad didáctica.

Se identificó también el desafío de promover actitudes y emociones positivas hacia las actividades matemáticas, las cuales deben proponer situaciones que evidencien la utilidad de los aprendizajes adquiridos.

Estos resultados dan cuenta de la relevancia de analizar a profundidad el diseño, implementación y valoración de intervenciones educativas condicionadas por el contexto. El presente trabajo de investigación evidenció el logro de los aprendizajes esperados, identificando componentes involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje en un entorno de aprendizaje móvil, como el diálogo, la interacción, la explicación de los procedimientos. La valoración de estos componentes en los procedimientos matemáticos es compleja, por lo que es restringida una visión cuantitativa para valorar el grado de idoneidad didáctica de tareas matemática.

Los resultados obtenidos han evidenciado la importancia de reflexionar sobre la compleja naturaleza del concepto variable y sus diversas representaciones en los problemas algebraicos, así como la relevancia de promover actividades didácticas que inviten a la búsqueda, diálogo, ejercitación y validación de resultados. Aunque, la condicionante del tiempo y su relación con un plan académico limitan el diseño e implementación de actividades con alta idoneidad didáctica, las características de un entorno de aprendizaje móvil facilitan la gestión de tareas interactivas y diversas, creando contextos educativos que promueven la interacción constante.

El análisis retrospectivo entre el diseño e implementación de la trayectoria didáctica permitió la identificación de áreas de mejora que permitirán progresivamente diseñar trayectorias didácticas con mayor pertinencia considerando las restricciones normativas del contexto escolar formal. Así, la noción de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores fueron de utilidad para orientar el reconocimiento de aspectos de mejora para los ciclos de rediseño y experimentación.

Este trabajo presenta una propuesta de innovación tecnológica para abordar el estudio de la variable, promueve un análisis reflexivo y a profundidad para comprender las dificultades que enfrenta el estudiante ante una tarea matemática, cómo resuelve esas dificultades y qué factores impactan su proceso de aprendizaje; además de, vincular la didáctica descriptiva del EOS y su aplicación en una trayectoria didáctica cuyos resultados podrían enriquecer el trabajo en el aula, como el aprendizaje de conceptos abstractos en un nivel educativo crucial para la adquisición de habilidades algebraicas.

Referencias

- Alsina, À., y Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(1), 7–32.
- Aragón, E., Castro, C., Gómez, B., y González, R. (2009). Objetos de aprendizaje como recursos didácticos para la enseñanza de matemáticas. *Apertura: Revista de Innovación Educativa*, 1(1), 100–111.
- Barraza, R. I., Cruz, V. G., y Vergara, O. O. (2015). A pilot study on the use of mobile augmented reality for interactive experimentation in quadratic equations. *Mathematical problems in engineering*, 1–13. <https://doi.org/10.1155/2015/946034>
- BBC. (2018). *Por qué 2030 es la fecha límite de la humanidad para evitar una catástrofe global*. BBC Noticias. <https://www.bbc.com/mundo/noticias-45785972>
- Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A. M., Sawrey, K., y Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 181–202. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0>
- Borba, M. C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S., y Aguilar, M. S. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 48(5), 589–610. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0798-4>
- Bracho-López, R., Maz-Machado, A., Gutiérrez-Arenas, P., Torralbo-Rodríguez, M., Jiménez-Fanjul, N. N., y Adamuz-Povedano, N. (2012). La investigación en Educación Matemática a través de las publicaciones científicas españolas. *Revista Española de Documentación Científica*, 32(2), 262–280. <https://doi.org/10.3989/redc.2012.2.870>

- Bray, A., y Tangney, B. (2015). Enhancing student engagement through the affordances of mobile technology: a 21st century learning perspective on realistic mathematics education. *Mathematics Education Research Journal*, 28(1), 173–197. <https://doi.org/10.1007/s13394-015-0158-7>
- Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255–278. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Brizuela, B., Blanton, M., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A., y Sawrey, K. (2015). Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología*, 36(1), 138–165. <https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000027>
- Çetinkaya, L. (2019). The effects of problem based mathematics teaching through mobile applications on success. *Eğitim ve Bilim*, 44(197), 65–84. <https://doi.org/10.15390/EB.2019.8119>
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–112.
- Crompton, H. (2013). Mobile learning: New approach, new theory. En *Handbook of mobile learning* (pp. 47–57). Routledge.
- Crompton, H. (2015). Understanding angle and angle measure: A design-based research study using context aware ubiquitous learning. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, 22(1), 19–30. https://doi.org/10.1564/tme_v22.1.02
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime*, 177–195.
- D'Amore, B., y Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de

la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(2), 191–218.

De Benito, B., y Salinas, J. M. (2016). La investigación basada en diseño en tecnología educativa. *Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa (RIITE)*, 0, 44–59.
<https://doi.org/http://dx.doi.org/10.6018/riite/2016/260631>

Dominguez, A. (2005). Comprensión de la noción de variable algebraica por estudiantes universitarios. *Tercer ciclo de videoconferencias del seminario repensar las matemáticas*, October.

Fessakis, G., Karta, P., y Kozas, K. (2018). Designing math trails for enhanced by mobile learning realistic mathematics education in primary education. *International journal of engineering pedagogy*, 8(2), 49–63.
<https://doi.org/10.3991/ijep.v8i2.8131>

Figueras-Maz, M., Ferrés, J., y Mateus, J.-C. (2018). Percepciones de los/as coordinadores/as de la innovación docente en las universidades españolas sobre el uso de dispositivos móviles en el aula. *Prisma Social*, 160–179.

Fößl, T., Ebner, M., Schön, S., y Holzinger, A. (2016). A field study of a video supported seamless-learning-setting with elementary learners. *Educational Technology & Society*, 19(1), 321–336.

Freudenthal, H. (2002). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Springer, Dordrecht. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/0-306-47202-3>

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*.

Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 8(11), 111–132.

- Godino, J., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221–252.
- Godino, J. D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *IV Congreso Internacional de Ensino da Matematica*, 25–27.
- Godino, J., Rivas, H., y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Práxis educativa*, 7(2), 331–354.
- Godino, J., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., y Wilhelmi, M. (2014). Ingeniería didáctica basada en el Enfoque Ontológico-Semiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2), 167–200.
- Goffree, F. (1993). HF: Working on mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 25, 21–49. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF01274100>
- Handal, B., Campbell, C., Cavanagh, M., y Petocz, P. (2016). Characterising the perceived value of mathematics educational apps in preservice teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 28(1), 199–221. <https://doi.org/10.1007/s13394-015-0160-0>
- Herrera, H., Cuesta, A., y Escalante, J. (2016). El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato. *Educacion Matematica*, 28(3), 217–240. <https://doi.org/10.24844/em2803.08>
- INEGI. (2019). *Encuesta nacional sobre disponibilidad y uso de tecnologías de la información en los hogares (ENDUTIH)* (pp. 1–9). https://www.inegi.org.mx/contenidos/saladeprensa/boletines/2019/OtrTemEcon/ENDUTIH_2018.pdf
- Jiménez Espinosa, A., y Gutiérrez Sierra, A. S. (2017). Realidades escolares en

las clases de matemáticas. *Educación matemática*, 29(3), 109–130.
<https://doi.org/10.24844/EM2903.04>

Joo Nagata, J., García-Bermejo Giner, J., y Martínez Abad, F. (2017). Augmented reality in pedestrian navigation applied in a context of mobile learning: Resources for enhanced comprehension of science, technology, engineering and mathematics. *International journal of engineering education*, 33(2), 768–780.

Joung-Souk, S. (2009). U-Learning model design based on ubiquitous environment. *International Journal of Advanced Science and Technology*, 13, 77–88.

Juhan, J., y Halkias, D. (2017). Middle school mathematics teachers' experiences with student learning using the hands-on equations iPad application: a narrative inquiry. *International Journal of Technology Enhanced Learning*, 9(1), 51–69. <https://doi.org/10.1504/IJTEL.2017.10004886>

Kizito, R. N. (2012). Pretesting mathematical concepts with the mobile phone: Implications for curriculum design. *Internal review of research in open and distance learning*, 13(1), 38–54. <https://doi.org/10.19173/irrodl.v13i1.1065>

Küchemann, D. (1978). Children ' S Understan of Numerical. *Mathematics in School*, 7(4), 23–26.

Laine, T. H., Nygren, E., Dirin, A., y Suk, H.-J. (2016). Science Spots AR: a platform for science learning games with augmented reality. *Educational Technology Research and Development*, 64(3), 507–531.
<https://doi.org/10.1007/s11423-015-9419-0>

Lucariello, J., Tine, M. T., y Ganley, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, 33(1), 30–41. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.09.001>

Ludwig, M., y Jesberg, J. (2015). Using mobile technology to provide outdoor

- modelling tasks - The MathCityMap-Project. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 191, 2776–2781. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.04.517>
- Marino, T., y Isla Zuvialde, D. (2018). Usos de la variable, sentido simbólico y metacognición. *Revista Paradigma*, 39(1), 246–266.
- NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. En *Reston: National council of teachers of mathematics*.
- Nedungadi, P., y Raman, R. (2012). A new approach to personalization: Integrating e-learning and m-learning. *Educational Technology Research and Development*, 60(4), 659–678. <https://doi.org/10.1007/s11423-012-9250-9>
- Nicolete, P., Bilessimo, S., Cristiano, A., Simão, J., y da Silva, J. (2017). Technology integration actions in mathematics teaching in brazilian basic education: Stimulating STEM disciplines. *RED Revista de Educación a Distancia*, 52. <https://doi.org/10.6018/red/52/7>
- OCDE. (2018). *Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA)*.
- Ojeda, L. F., Martínez, C., y Manjarrez, E. I. (2012). *A practicar matemáticas 1 cuaderno de trabajo*. Castillo Macmillan.
- Papadakis, S., Kalogiannakis, M., y Zaranis, N. (2017). Educational apps from the Android Google Play for Greek preschoolers: a systematic review. *Computers & Education*, 116, 139–160. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.09.007>
- Pegg, J. (2018). The van Hiele Theory. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (In: Lerman). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_183-4
- Peirce, C. S. (1974). *La ciencia de la semiótica*. Nueva visión.
- Radford, L. (2004). Sensible things , essences, mathematical objects, and other ambiguities. *La Matematica e la sua didattica*, 1(1), 4–23.

- Ramírez Martinell, A., Casillas Alvarado, M. Á., y Aguirre González, I. R. (2018). Habilitación tecnológica de profesores universitarios y docentes en educación básica. *Apertura: Revista de Innovación Educativa*, 10(2), 124–139.
- Rodríguez, G., Spiegel, A., Salviolo, M., y Peña, A. (2015). Math, english and netbooks at the university. Learning across contexts? *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 176, 714–721. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.531>
- Şahin, Ö., y Soylu, Y. (2011). Mistakes and misconceptions of elementary school students about the concept of 'variable'. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 15, 3322–3327. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.04.293>
- Salvat, B. G. (2018). La evolución del e-learning: del aula virtual a la red. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 21(2), 69–82. <https://doi.org/10.5944/ried.21.2.20577>
- Schuck, S. (2016). Enhancing teacher education in primary mathematics with mobile technologies. *Australian Journal of Teacher Education*, 41(3), 126–139. <https://doi.org/10.14221/ajte.2016v41n3.8>
- SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria*. (Primera ed).
- Shih, S.-C., Kuo, B.-C., y Liu, Y.-L. (2012). Adaptively ubiquitous learning in campus math path. *Educational Technology & Society*, 15(2), 298–308.
- Silva, M. J. F. da, Gaita, C., y Almouloud, S. A. (2018). Una articulación teórica entre competencia algebraica, proceso de algebrización y modelización algebraica. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 13(1), 1–30. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2018v13n1p1>
- Soldano, C. (2016). Learning with touchscreen devices: game strategies to improve geometric thinking. *Mathematics Education Research Journal*. <https://doi.org/10.1007/s13394-015-0166-7>

- Tangarife Chalarca, D. (2018). Teaching Mathematics to People with Down Syndrome Using Mobile Devices. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 20(4), 144–153. <https://doi.org/10.24320/redie.2018.20.4.1751>
- Ursini, S., Fortino, E., Montes, D., y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa* (Trillas (ed.); Primera).
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12*, 5, 8–19.
- Weinberg, A., Dresen, J., y Slater, T. (2016). Students' understanding of algebraic notation: A semiotic systems perspective. *Journal of Mathematical Behavior*, 43, 70–88. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.06.001>
- Wijers, M., Jonker, V., y Drijvers, P. (2010). MobileMath: exploring mathematics outside the classroom. *ZDM Mathematics Education*, 42(7), 789–799. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0276-3>
- Zhao, X., Wan, X., y Okamoto, T. (2010). Adaptive content delivery in ubiquitous learning environment. *The 6th IEEE International Conference on Wireless, Mobile, and Ubiquitous Technologies in Education*, 19–36. <https://doi.org/10.1109/MMUTE.2010.10>

Anexo

Clave	Referencia del estudio	Clave	Referencia del estudio
E1	(Baran et al., 2016)	E40	(Miller, 2018)
E2	(Barraza et al., 2015)	E41	(Tucker et al., 2016)
E3	(Başaran & Haruna, 2017)	E42	(Muir & Geiger, 2016)
E4	(Bray & Tangney, 2015)	E43	(Nedungadi & Raman, 2012)
E5	(Bullock et al., 2017)	E44	(Nicolete et al., 2017)
E6	(Castro et al., 2016)	E45	(Orlando & Attard, 2015)
E7	(Çetinkaya, 2019)	E46	(Ozdamli & Ozdamli, 2017)
E8	(Chiu & Churchill, 2015)	E47	(Özdener & Demirci, 2018)
E9	(Coimbra et al., 2015)	E48	(Piper et al., 2016)
E10	(Crompton, 2015)	E49	(Reeves et al., 2017)
E11	(Curto Prieto et al., 2019)	E50	(Reychav & Wu, 2016)
E12	(Dobbins & Denton, 2017)	E51	(Roberts & Vanska, 2011)
E13	(Fabian et al., 2018)	E52	(Roberts et al., 2015)
E14	(Fernández-López et al., 2013)	E53	(Rodríguez et al., 2015)
E15	(Fessakis et al., 2018a)	E54	(Roschelle et al., 2010)
E16	(Föböl et al., 2016)	E55	(Ryokai et al., 2012)
E17	(Gan & Balakrishnan, 2014)	E56	(Ryu et al., 2015)
E18	(Goodman et al., 2016)	E57	(Sahin et al., 2016)
E19	(Grant et al., 2015)	E58	(Schuck, 2016)
E20	(Halloluwa et al., 2018)	E59	(Sergi et al., 2017)
E21	(Handal et al., 2016)	E60	(Shih et al., 2012)
E22	(Holden, 2016)	E61	(Sinclair et al., 2015)
E23	(Wang et al., 2013)	E62	(Skiada et al., 2014)
E24	(Hung et al., 2014)	E63	(Soldano, 2016)
E25	(Ingram et al., 2015)	E64	(Sommerauer & Müller, 2014)
E26	(Jagušt et al., 2018)	E65	(Stork, 2017)
E27	(Jarvis, 2016)	E66	(Tangarife Chalarca, 2018)
E28	(Joo Nagata et al., 2017)	E67	(Tucker et al., 2016)
E29	(Juhan & Halkias, 2017)	E68	(Tumkor, 2018)
E30	(Kay & Kwak, 2018)	E69	(Vadachalam & Chimbo, 2017)
E31	(P. Kim et al., 2012)	E70	(Vate-U-Lan, 2015)
E32	(H. J. Kim & Jang, 2015)	E71	(Volk et al., 2017)
E33	(Kizito, 2012)	E72	(Wafa & Audi, 2015)
E34	(Kyriakides et al., 2016)	E73	(Wei et al., 2011)
E35	(T. Laine et al., 2016)	E74	(White & Martin, 2014)
E36	(C.-Y. Liu et al., 2017)	E75	(Wijers et al., 2010)

E37	(J. Liu & Zhang, 2017)	E76	(Zander et al., 2016)
E38	(Ludwig & Jesberg, 2015)	E77	(Zhao et al., 2010)
E39	(Mezhennaya & Pugachev V, 2019)		

