Universidad Autónoma de Querétaro

Investigación de Operaciones II

Apuntes

Profesor: ISC Armando González Basaldúa
Alumna: Gabriela Ugalde Briseño
Expediente: 184005

2013

Contenido

CAPITULO 1

Introducción a la Investigación de Operaciones (IO)

1.1 Naturaleza de la Investigación de Operaciones

Como su nombre lo dice, la investigación de operaciones (IO) significa "hacer investigación sobre las operaciones". Entonces, la IO se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones o actividades dentro de una organización.

La parte de investigación significa que en gran medida se usa el método científico. En particular, el proceso comienza por la observación cuidadosa y la formulación del problema incluyendo la recolección de los datos pertinentes. El siguiente paso es la construcción de un modelo científico -por lo general matemático, que intenta abstraer la esencia del problema real. Se propone la hipótesis de que el modelo es una representación lo suficientemente precisa de las características esenciales de la situación como para que las conclusiones o soluciones obtenidas sean válidas también para el problema real. Después, se llevan a cabo los experimentos adecuados para probar esta hipótesis, modificarla si es necesario y eventualmente verificarla. Entonces, en cierto modo, la IO incluye la investigación científica creativa de las propiedades fundamentales de las operaciones. Sin embargo, existe más que esto, en particular, la IO se ocupa también de la administración práctica de la organización. Así, para tener éxito, deberá también proporcionar conclusiones claras que pueda usar el tomador de decisiones cuando las necesite.

Otras características de la IO es su amplio punto de vista que intenta resolver los conflictos de intereses entre las componentes de la organización de forma que el resultado sea el mejor para la organización completa y adicionalmente lo que la IO intenta es encontrar la mejor solución, llamada solución óptima. Se dice que se pretende obtener una mejor solución y no la mejor solución porque pueden existir muchas soluciones que empaten como la mejor. Es importante la "búsqueda de la optimidad" ya que es un aspecto importante dentro de la IO.

1.2 Impacto de la Investigación de Operaciones

La IO ha hecho contribuciones significativas al incremento de la productividad dentro de la economía de varios países. Hay ahora más de 30 países que son miembros de la International Federation of Operational Research Societies (IFORS), en la que muchos de estos países cuentan al día de hoy con una sociedad de IO. Sin duda, el impacto de la IO continuará aumentando.

1.3 Un poco de historia.

Las raíces de la investigación de operaciones se remontan a muchas décadas, cuando se hicieron los primeros intentos para emplear el método científico en la administración de una empresa. Sin embargo, casi siempre se atribuye a los servicios militares prestados a principios de la segunda guerra mundial el inicio de la actividad llamada IO. Debido a los esfuerzos bélicos, existía una necesidad urgente de asignar recursos escasos a las distintas operaciones militares y a las actividades dentro de cada operación, en la forma más efectiva. Por esto, las administraciones militares americana e inglesa hicieron un llamado a un gran número de científicos para que aplicaran el método científico a éste y a otros problemas estratégicos y tácticos. De hecho, se les pidió que hicieran investigación sobre operaciones militares. Estos equipos de científicos fueron los primeros equipos en aplicar la IO. Con el desarrollo de métodos efectivos para el uso del nuevo radar, estos equipos contribuyeron al triunfo del combate aéreo inglés. A través de sus investigaciones para mejorar el manejo de las operaciones antisubmarinas y de protección, jugaron también un papel importante en la victoria de la batalla del Atlántico Norte, entre otros.

Al terminar la guerra, el éxito de la IO en las actividades bélicas generó un gran interés en sus aplicaciones fuera del campo militar. Como la explosión industrial seguía su curso, los problemas causados por el aumento en la complejidad y especialización dentro de las organizaciones pasaron de nuevo a primer plano. Comenzó a ser evidente para un gran número de personas, incluyendo a los consultores industriales que habían trabajado con o para los equipos de IO durante la guerra, que estos problemas eran básicamente los mismos que los enfrentados por la milicia, pero en un contexto diferente. Cuando comenzó la década de 1950, estos individuos habían introducido el uso de la IO en la industria, los negocios y el gobierno. Desde entonces, esta disciplina se ha desarrollado con rapidez.

Se pueden identificar por lo menos otros dos factores que jugaron un papel importante en el desarrollo de la IO durante este período. Uno es el gran progreso que ya se había hecho en el mejoramiento de las técnicas disponibles en esta área. Después de la guerra, muchos científicos que habían participado en los equipos de IO o que tenían información sobre este trabajo, se encontraban motivados a buscar resultados sustanciales en este campo; de esto resultaron avances importantes. Un ejemplo sobresaliente es el método simplex para resolver problemas de programación lineal, desarrollado en 1947 por George Dantzing. Muchas de las herramientas características de la IO, como programación lineal, programación dinámica, líneas de espera y teoría de inventarios, fueron desarrolladas casi por completo antes del término de la década de 1950.

Un segundo factor que dio ímpetu al desarrollo de este campo fue el advenimiento de las computadoras. Para manejar de una manera efectiva los complejos problemas inherentes a esta disciplina, por lo general se requiere un gran número de cálculos. Llevarlos a cabo a mano puede resultar casi imposible. Por lo tanto, el desarrollo de la computadora electrónica digital, con su capacidad para realizar cálculos aritméticos, miles o tal vez millones de veces más rápido que los seres humanos, fue una gran ayuda para la IO. Un avance más tuvo lugar en la década de 1980 con el desarrollo de las computadoras personales cada vez más rápidas, acompañado de buenos paquetes de software para resolver problemas de IO, esto puso las técnicas al alcance de un gran número de personas. Hoy en día, literalmente millones de individuos tienen acceso a estos paquetes. En consecuencia, por rutina, se usa toda una gama de computadoras, desde las grandes hasta las portátiles, para resolver problemas de IO.

1.4 ¿Qué es la Investigación de Operaciones?

En pocas palabras, la investigación de operaciones es la disciplina de la aplicación de métodos analíticos avanzados para ayudar a tomar mejores decisiones.

Mediante el uso de técnicas como el modelado matemático para analizar situaciones complejas, la IO da a los ejecutivos la facultad de tomar decisiones más eficaces y construir sistemas más productivos sobre la base de:

- Datos más completos.

- Consideración de todas las opciones disponibles.
- Predicciones meticulosas de resultados y estimaciones de riesgo y el
- Uso de herramientas y técnicas de decisión más recientes

1.5 Una propuesta especialmente poderosa para la toma de decisiones.

La IO es única. Es lo mejor de su género, pues emplea métodos altamente desarrollados puestos en práctica por profesionales especialmente capacitados. Es poderosa, pues usa herramientas y tecnologías avanzadas para proporcionar potencia analítica que ningún software u hoja de cálculo ordinarios pueden proporcionar. Y se hace a la medida del usuario, debido a que un profesional de la IO le ofrece la posibilidad de definir su problema específico de manera que aproveche al máximo sus datos y descubrir las opciones más beneficiosas para usted. Para lograr estos resultados, los profesionales de la IO aprovechan las últimas tecnologías de análisis, incluyendo:

- **Simulación.** Da la habilidad de probar enfoques y poner a prueba las ideas para la mejora.

- **Optimización.** Se reducen las opciones que usted tiene hasta llegar a lo mejor de las mejores cuando existen virtualmente innumerables opciones viables y su comparación es difícil.

- **Probabilidad y Estadística**. Ayuda a medir el riesgo, hace minería de datos para encontrar conexiones e ideas valiosas, se ponen a prueba las conclusiones, y se hacen previsiones fiables.

La IO ha mejorado organizaciones y experiencias por dondequiera que usted mire. Desde una mejor programación para las tripulaciones de las aerolíneas hasta el diseño de líneas de espera en los parques temáticos de Disney. Desde un nuevo negocio formado por dos personas hasta los 500 líderes empresariales que figuran en la revista Fortune®. Desde la decisión de planear recursos globales hasta la optimización de cientos de rutas de entrega local. Todos se benefician directamente de la IO.

1.6 La Propuesta de Valor de la Investigación de Operaciones

La Investigación de Operaciones ofrece de manera consistente un valor – de estratégico a táctico, de antes a después de los gastos - importante y significativo a las organizaciones y los ejecutivos que la usan. En todo el mundo organizaciones de negocios, de la milicia, del cuidado de la salud y del sector público están descubriendo los beneficios del gran alcance de la IO, incluyendo:

- **Visión de Negocios**. Proporciona una comprensión profunda cuantitativa y de negocios de problemas complejos.

- **Rendimiento de Negocios**. Mejora el rendimiento del negocio mediante la incorporación de modelos inteligentes en los sistemas de información organizacionales para mejorar la toma de decisiones.

- **Reducción de costos**. Encuentra nuevas oportunidades para disminuir costos o inversión.

- **Toma de decisiones**. Evalúa los resultados probables de las alternativas de decisión y el descubrimiento de mejores alternativas.

- **Previsión**. Proporciona una mejor base para un pronóstico y planificación más precisos.

- **Mejora de la programación**. Eficiente programación de personal, equipos, eventos y más.

- **Planificación**. Se aplican técnicas cuantitativas para apoyar las operaciones, la planificación táctica y planificación estratégica.

- **Fijación de precios**. Determinación dinámica de precios de productos y servicios.

- **Productividad**. Ayuda a las organizaciones a encontrar la manera de hacer que los procesos y personas sean más productivos.

- **Utilidades.** El aumento de las ganancias o el retorno de la inversión, incrementando la participación en el mercado.

- **Calidad**. Mejora de la calidad, así como la cuantificación y el balance de las consideraciones cualitativas.

- **Recuperación**. Se obtiene un mayor control y se logra el *turn-around* (porcesamiento de órdenes).

- **Recursos.** Se logra una mayor utilización de equipos, instalaciones, dinero y personal limitados.

- **Riesgo**. Medición cuantitativa de riesgos y el descubrimiento de los factores críticos para la gestión y la reducción del riesgo.

- **Procesamiento**. Se aumenta la velocidad o el procesamiento y se disminuyen los retrasos.

La IO puede ayudar a los ejecutivos de hoy en día con muchos de los retos específicos que enfrentan, tales como:

- Decidir dónde invertir su capital para poder crecer.
- Descubrir la mejor manera de dirigir un centro de llamadas.
- Localizar un almacén o depósito para entregar materiales en distancias más cortas a un costo reducido.
- Prever las ventas para un nuevo tipo de producto que nunca ha sido comercializado antes.
- Resolver problemas complejos de programación.
- La planificación en respuesta a un posible ataque terrorista.
- Decidir cuándo aplicar un descuento, y de cuánto.
- Obtener más ciclos a partir de equipos de manifactura.
- Optimización de una cartera de inversiones, ya sea que contenga valores financieros o un inventario de productos farmacéuticos.
- Decidir el tamaño de un presupuesto que se dedica a las ventas por Internet en comparación con las ventas tradicionales.
- La plantación de cultivos tomando en cuenta la incertidumbre por causa del clima y la demanda de los consumidores.

- Acelerar el tiempo de respuesta, ya sea para la venta de un producto o para dar respuesta a una llamada de emergencia, como el 911 de Estados Unidos.

1.7 Historias de éxito.

Tenemos docenas de casos breves y relevantes que se pueden clasificar en industriales, área funcional o en términos del beneficio aportado, he aquí algunos ejemplos del valor:

- Ford utilizó la IO para optimizar la forma en que diseña y prueba los prototipos de vehículos, el ahorro fue de 250 millones de dólares.

- UPS utilizó la IO para rediseñar su red de entrega al día siguiente, el ahorro fue de 87 millones dólares, más un adicional de 189 millones de dólares durante la década siguiente.

- El Ejército de EE.UU. usó la IO para el reclutamiento de un 17.5% mientras que el ahorro fue del 20%.

- NBC utilizó la IO para mejorar los planes de ventas de publicidad, el aumento de ingresos fue de más de 200 millones de dólares.

- La ciudad de New Haven utilizó la IO para determinar de manera definitiva que su programa de cambio de agujas estaba reduciendo las tasas de infección por el VIH.

1.8 Conclusión

La IO es el procedimiento científico que está auxiliado por modelos y técnicas matemáticas, servible para diseñar y operar a los problemas complejos de la dirección y administración de grandes sistemas que forman una organización compleja en las cuales las decisiones son muy importantes y difíciles de elegir, ya que la eficacia de una decisión sobre guardará la supervivencia y desarrollo de ésta.

Capítulo 2

Concepto de error

2.1 Concepto

Los errores numéricos se generan con el uso de aproximaciones para representar las operaciones y cantidades matemáticas. Se describirán los errores por redondeo y por truncamiento respectivamente. Adicionalmente se muestra la clasificación general de los errores y la forma en que se pueden calcular. Finalmente se muestra la diferencia entre los términos precisión y exactitud.

2.2 Errores por truncamiento

Los errores por truncamiento resultan al representar aproximadamente un procedimiento matemático exacto, por ejemplo: para evaluar e^x se tiene una expresión matemática, dada por la sumatoria de términos, que representa esta función. La expansión de series de Maclaurin [Spiegel, 1968] para evaluar la expresión e^x es la siguiente:

$$e^x = 1 + x + \left(\frac{x^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!}\right) + \ldots \qquad 1.1$$

Esta expresión contiene un número infinito de términos que desde el punto de vista computacional, resultaría imposible evaluar. Para efectos prácticos será necesario decidir cuántos términos de la serie infinita deben utilizarse para alcanzar el valor de precisión deseado. El proceso de eliminación de términos de la serie infinita se conoce con el nombre de truncamiento. En la tabla 2.1 se muestra el valor de la expresión e^x cuando $x = 1$, para diferente número de términos de la serie infinita.

De los resultados de la tabla 2.1 puede observarse que conforme aumenta el número de términos incluidos en la evaluación, la diferencia entre los valores consecutivos tiende a cero.

Número de términos	e^x	Número de términos	e^x
1	1.0000	6	2.7167
2	2.0000	7	2.7181
3	2.5000	8	2.7182
4	2.6667	9	2.7183
5	2.7083	10	2.7183

TABLA 2.1 Valores de e^x de acuerdo al número de términos incluidos en la ecuación.

2.2 Errores por redondeo

Los errores por redondeo surgen de representar aproximadamente números exactos. En una calculadora o computadora digital este error es inevitable y se origina porque la aritmética realizada en una máquina involucra números con sólo un número finito de dígitos (lo cual quiere decir que la máquina no tiene una capacidad infinita para almacenar valores numéricos).

En la tabla 2.1 se mostraron los valores obtenidos al evaluar la expresión e^x usando un entero y cuatro decimales. La tabla 2.2 muestra la misma evaluación pero cuando se usan un entero y ocho decimales.

Número de términos	e^x	Número de términos	e^x
1	1.00000000	6	2.71666666
2	2.00000000	7	2.71805555
3	2.50000000	8	2.7182539
4	2.66666667	9	2.7182756
5	2.70833333	10	2.7182784

TABLA 2.2 Valores de e^x de acuerdo al número de términos incluidos en la ecuación 1.1

Una comparación de los términos de las tablas 2.1 y 2.2 muestran las diferencias generadas al emplear cuatro y ocho valores decimales en los cálculos. Al usar cuatro decimales no hay diferencia entre los valores de e^x cuando se usan 9 o 10 términos; mientras que cuando se usan ocho decimales sí existen diferencias entre ellos.

2.3 Clasificación de los Errores.

Para los dos tipos de errores mencionados en las secciones 2.1 y 2.2, la relación entre el valar exacto o verdadero y el valor aproximado está dado por la expresión:

$$\text{valor verdadero} = \text{valor aproximado} + \text{error} \qquad 1.2$$

en donde podemos observar que el error numérico es la diferencia entre los valores verdadero y aproximado:

$$\text{error} = \text{valor verdadero} - \text{valor aproximado} \qquad 1.3$$

que se representa como:

$$E_v = x - \bar{x} \qquad 1.4$$

donde E_v se utiliza para denotar el valor verdadero (exacto) del error,

x representa el valor verdadero, y
$\bar{x}$ representa el valor aproximado.

Un problema que se tiene al utilizar esta definición de error es que la magnitud no nos indica qué tan representativa es esta cantidad. Por ejemplo, no es lo mismo cometer un error de medición de 1 ml en un tanque de almacenamiento de 40,000 litros que en la elaboración de un medicamento de 10 ml. Para resolver esa posible deficiente interpretación de error se recurre a la normalización del mismo usando el valor verdadero como referente

$$\text{error relativo fraccionario} = \text{error verdadero} / \text{valor verdadero} \qquad 1.5$$

entonces:

$$E_r = \left(\frac{x - \bar{x}}{x}\right) \qquad 1.6$$

El error relativo también puede expresarse en forma porcentual al multiplicar por cien el error relativo fraccionario.

$$E_p = \left(\frac{(x - x}{x}\right) * 100 \qquad 1.7$$

A menudo el signo del error no tiene la relevancia de su magnitud, y para fines de poder comparar los errores de un cálculo contra los de otro, se prefiere utilizar sus correspondientes valores absolutos, teniendo así que:

$$Ey = |x - \bar{x}| \qquad 1.8$$

$$E_r = \left|\frac{x - \bar{x}}{x}\right| \qquad 1.9$$

$$E_p = \left|\frac{x - \bar{x}}{x}\right| * 100 \qquad 1.10$$

Los errores anteriores tienen el inconveniente de que para poder ser evaluados se requiere del valor verdadero, hecho que desafortunadamente no sucede en situaciones reales; así que se recurre a definiciones similares o paralelas para calcular errores aproximados, basados precisamente en aproximaciones consecutivas. En los métodos numéricos se usan esquemas iterativos donde se obtiene una aproximación actual sobre la base de una aproximación anterior. Este proceso se repite sucesivamente para calcular más y mejores aproximaciones a la solución. Así que el error se puede estimar como la diferencia entre la aproximación previa y la aproximación actual, teniendo entonces, como en los casos anteriores las siguientes definiciones de errores:

i) error aproximado

$$e_a = x_{i+1} - x_i \qquad 1.11$$

ii) error relativo fraccionario aproximado

$$e_r = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \qquad 1.12$$

iii) error relativo porcentual aproximado

$$e_p = \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right) * 100 \qquad 1.13$$

La mayoría de las ocasiones no interesa el signo del error, sino más bien su magnitud, por lo que quedan entonces expresados los diferentes errores de la siguiente manera:

$$e_a = |\, x_{i+1} - x_i \,| \qquad 1.14$$

$$e_r = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| \qquad 1.15$$

$$e_p = e_r * 100 = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| * 100 \qquad 1.16$$

El *coseno (x)* puede representarse por medio de la serie de Maclaurin como:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Para esta serie se calculará el valor de los errores relativos porcentuales (E_P) y error relativo porcentual aproximado (e_p) para el coseno de $(\pi/4)$.

El valor verdadero se tomará del calculado directamente con la función coseno de Excel, considerando desde 1 hasta 5 términos de la serie y 8 decimales en los cálculos.

Solución

$x = 0.78539816$ $\qquad\qquad$ $\cos(x) = 0.70710678$

		Numerador	Denominador	Signo	Término	Suma	E_p	e_p
No.	**Exponente**	x^n	$n!$					
1	0	1	1	1	1	1	41.421356	
2	2	0.61685028	2	-1	-0.3084251	0.6915749	2.196545	44.597506
3	4	0.38050426	24	1	0.0158543	0.7074292	0.0455979	2.241121
4	6	0.23471416	720	-1	-0.000326	0.7071032	0.0005044	0.0461024
5	8	0.14478349	40320	1	3.59E-06	0.7071068	3.46E-06	0.0005078

TABLA 2.3 Resultados del Ejemplo.

Como se puede observar en la tabla 2.3, el error aproximado es más conservador (mayor) que el error real, lo cual es conveniente, ya que se asegura que se está cometiendo un error menor al que pudiera realmente existir.

También se observa que a medida que aumenta el número de términos agregados a la serie, la aproximación al valor real es cada vez mejor, de tal forma que agregando un número infinito de términos obtendríamos la solución real. Esto en principio es cierto, pero debido al número de cifras significativas limitado con que opera la computadora, los errores de redondeo crecen a medida que aumenta el número de cálculos, aunque los errores de truncamiento decrecen conforme aumenta el número de términos; por lo tanto, se debe considerar que: la estrategia de disminuir el error de truncamiento agregando términos a la serie, lleva a un incremento en el error de redondeo.

El problema es identificar el punto donde se tiene el mínimo error numérico total, es decir, la mínima suma de los errores de truncamiento y redondeó. En realidad, la estimación de los errores en el análisis numérico es un arte, que depende en gran parte de las soluciones de prueba y error, además de la intuición y experiencia del analista.

El ***coseno(x)*** puede representarse por medio de la serie de Maclaurin como:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

En este ejemplo se calculará el valor de los errores relativos porcentuales (E_p) y error relativo porcentual aproximado (e_p) para el coseno de $(\pi/4)$, usando aritmética de cuatro decimales.
Considerando como valor verdadero el calculado directamente con la función coseno de Excel. Se usará desde 1 hasta 5 términos de la serie.

Solución

$x = 0.7854$ $\qquad\qquad\qquad$ $cos(x) = 0.7071$

No.	Exponente	x^n	n!	Signo	Término	Suma	E_p	e_p
1	0	1.0000	1	1	1.0000	1.0000	41.4214	
2	2	0.6169	2	-1	-0.3084	0.6916	2.1965	44.5975
3	4	0.3805	24	1	0.0159	0.7074	0.0456	2.2411
4	6	0.2347	720	-1	-0.0003	0.7071	0.0005	0.0461
5	8	0.1448	40320	1	0.0000	0.7071	0.0000	0.0005

TABLA 2.4 Resultados del Ejemplo 1.2

2.4 Precisión y exactitud

Muchas veces cuando conversamos usamos los términos precisión y exactitud de manera indistinta. Sin embargo, ambos términos tienen un significado diferente. El término precisión está relacionado con el nivel de cifras significativas de una medición y la reproducibilidad de las mismas. El término exactitud nos indica la cercanía de un valor con el valor verdadero o real. Si se compararan las mediciones del diámetro de un lápiz usando un vernier y un micrómetro, se pensaría de inmediato que la lectura del micrómetro será más exacta; pero no sería así, en el caso en que el micrómetro estuviera desajustado. Con respecto a la precisión, el vernier nos podría dar una lectura de hasta milímetros mientras que el micrómetro nos indicaría milésimas de milímetro; por lo tanto el micrómetro es un aparato más preciso que el vernier.

2.5 Ejercicios Resueltos

2.5.1 La serie infinita del ***ln*** se define como sigue:

$$\boldsymbol{ln\ (x+1)} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

es válida para el intervalo -1 < x < 1 y puede ser usada para el cálculo de logaritmos naturales.

a) Determine el valor del logaritmo natural de 1.5 usando esta serie infinita y 20 términos de la serie.
b) Calcule el error relativo porcentual usando el valor de logaritmo natural obtenido con la función Excel.
c) Marque los encabezados de las columnas con letras de color rojo y fondo azul.
d) Use números con cinco decimales en su tabla para los valores de los logaritmos, dos decimales para el error. Centre todos sus valores en cada columna.

2.5.2 La función seno puede ser calculada mediante la serie infinita:

$$sen\ (x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \ldots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

a) Determine el valor de *sen(3)* usando 5 términos de la serie infinita.
b) Calcule el error relativo porcentual usando el valor de *sen (3)* dado por la función Excel.
c) Marque los encabezados de las columnas con letras de color rojo y fondo azul.
d) Use números con cinco decimales en su tabla para los valores de *sen (3),* dos decimales para el error y centre los números en cada columna.

2.5.3 $ln\ (x) = x - \left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{3x}\right)^3 + \cdots$ válida para $x \geq 0.5$, puede ser usada para el cálculo de los logaritmos naturales.

a) Determine el valor del logaritmo de 1.5 usando esta serie infinita y 20 términos de la serie.
b) Calcule el error relativo porcentual usando como valor verdadero el valor de *ln (1.5)* obtenido con la función Excel.
c) Marque los encabezados de las columnas con letras de color rojo y fondo azul.
d) Use números con cinco decimales en su tabla para los valores de los logaritmos dos decimales para el error y centre los números en cada columna.

2.6 Ejercicios Propuestos

2.6.1 Existen muchas formas para el cálculo del valor aproximado de π. Una de ellas, llamada del producto de Wallis consiste en el producto infinito siguiente:

Calcule el valor del error relativo porcentual cuando se usan 10 términos de la serie infinita. Use aritmética de 8 decimales.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} * \frac{2}{3} * \frac{4}{3} * \frac{4}{5} * \frac{6}{5} * \frac{6}{7} \ldots$$

2.6.2 El logaritmo natural de 2 puede evaluarse por medio de la serie infinita:

Evalúe la función $ln(2)$ en Excel y use ese resultado como valor verdadero, para calcular los errores verdaderos, relativo fraccional, relativo fraccional porcentual y relativo fraccional porcentual aproximado cuando se emplean 20 términos de la serie infinita. Haga una gráfica del error relativo fraccionario porcentual aproximado contra el número de términos usados.

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

2.6.3 Repítase el problema de la tabla 2.1pero usando la serie infinita:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} . \frac{2}{3} . \frac{4}{3} . \frac{4}{5} . \frac{6}{5} . \frac{6}{7} \ldots$$

¿Cuál serie converge más rápido, la del problema la tabla 2.1o la del problema 2.3?

2.6.4 Repítase el problema de la tabla 2.1 pero usando la serie infinita:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

¿Cuál serie converge más rápido, la del problema 2.1, 2.3 o 2.4?

CAPITULO 3

Pronóstico

3.1 Introducción

La fecha es 15 de junio de 1941. Joachim von Ribbentrop, enviado especial de Hitler, está reunido en Venecia con el conde Ciano, el ministro italiano de relaciones exteriores, y von Ribbentrop dice: “Mi querido Ciano, no puedo decirle nada todavía, ya que todas las decisiones las tiene Führer encerradas en su impenetrable pecho. Sin embargo, una cosa es segura: si atacamos, la Rusia de Stalin quedará borrada del mapa en ocho semanas" (véase Bullock). Nueve días después, la Alemania nazi iniciaba la operación Barbarrosa y declaraba la guerra a Rusia. Con esta decisión se puso en marcha la cadena de eventos que llevó a la caída del Tercer Reich, y el curso de la historia cambió de manera dramática.

A pesar de que pocas decisiones tienen esta importancia, claramente se ve que muchas de las más importantes tomadas por individuos y organizaciones dependen de manera crucial de estimación del futuro. Por lo tanto se esperan de manera ferviente, y en algunos casos se persiguen con diligencia, predicciones o pronósticos con una precisión mayor a la lograda por el Estado Mayor Alemán. Existen unos cuantos dichos "sabios" que ilustran las promesas y frustraciones de los pronósticos:

> "Es difícil hacer un pronóstico, especialmente si se trata del futuro."
> "Lo difícil no es hacer un pronóstico, sino hacerlo de manera correcta."
> "¡Los números, si los torturas lo suficiente, confesarán cualquier cosa!"

El pronóstico económico, considerado por sí mismo, es una actividad importante. Las políticas gubernamentales y las decisiones empresariales se basan en pronósticos del producto interno bruto (PIB), del nivel de desempleo, de la demanda para refrigeradores, etc. En las más grandes empresas de seguros, es difícil encontrar un departamento de inversiones que no tenga un contrato celebrado con algún experto o empresa que le prepare pronósticos económicos de manera periódica. Miles de millones de dólares de inversión en hipotecas y bonos están influenciados por estos pronósticos. Más de 2,000 personas acuden cada año al Annual Forecast Luncheon, organizado por la Universidad de Chicago, para escuchar las opiniones de tres economistas sobre el panorama económico. Los datos son apabullantes. Los pronósticos juegan un papel cada vez más trascendental en la empresa moderna.

No sólo los pronósticos son cada vez más importantes, sino que los modelos cuantitativos desempeñan un papel cada vez más crucial en la función de pronosticar. Claramente hay también un crecimiento continuo en el uso de modelos de pronósticos cuantitativos en todos los niveles en la industria y en el gobierno. Un ejemplo muy visible es el uso generalizado de programas de control de inventarios que incluyen una subrutina de pronóstico. Otro ejemplo es la dependencia de varias industrias (aerolíneas, hoteles, automóviles de renta, cruceros) del sector económico de servicios en los pronósticos precisos de la demanda, como entrada para sus complejos optimizadores matemáticos usados en la administración de los ingresos (por ejemplo ¿qué tanto sobre boletaje? ¿Cuántas unidades deben estar disponibles, para cada nivel diferente de descuento?). Para entidades económicas como el PIB o los tipos de cambio de monedas, actualmente muchas empresas dependen de modelos econométricos para sus pronósticos. Estos modelos, que consisten en un sistema de ecuaciones estadísticamente estimadas, han tenido un considerable impacto en los procesos de decisiones, tanto en la industria como en el gobierno.

Hay muchas maneras de clasificar los modelos de pronóstico y la terminología varía según la clasificación. Por ejemplo, uno puede referirse a modelos a "largo plazo", de "plazo medio" y de "corto plazo". Existen modelos de "regresión", modelos de "extrapolación" y modelos "condicionales" o "basados en precedentes", así como modelos del "vecino más próximo". La distinción principal que emplearemos será entre ***técnicas de pronóstico cuantitativas y cualitativas***.

3.2 Mejoras en L.LBean.

L. Bean es un minorista ampliamente conocido de productos y ropa de alta calidad para el campismo y la cacería. La mayor parte de sus ventas se genera a través de pedidos telefónicos (vía un servicio 800), que fue introducido en 1986. El 10% de los $870 millones de las ventas de 1993 provino de transacciones en tienda y 18% fue pedido por correo, lo que deja la mayor parte (72%) a pedidos recibidos en el centro donde se toman las llamadas de la empresa.

Las llamadas al centro telefónico de L. L. Bean se clasifican en dos grupos principales: telemercadeo (TM) y preguntas por teléfono (PT), cada una con su propio número 800. Las llamadas TM son principalmente para colocar los pedidos que genera la gran mayoría de las ventas de la empresa. Los que llaman a PT son principalmente clientes que preguntan sobre el estado de sus pedidos, informan de problemas sobre los pedidos, etc. Entre estas dos clases, el volumen de llamadas y su duración promedio son bastante diferentes. El volumen anual de llamadas TM es muchas veces superior que el volumen de llamadas PT, pero su duración promedio es mucho menor. Los agentes PT son responsables de atender las preguntas de los clientes en una diversidad de áreas y requieren capacitación especial. Por lo tanto, es importante pronosticar con precisión por separado el volumen de llamadas entrante tanto para PT como para TM, a fin de programar apropiadamente estos dos grupos diferentes de servidores.

El verdadero objetivo de estos pronósticos es la tercera semana futura. Una vez que el pronóstico está hecho, los programadores pueden elaborar un horario semanal para sus operarios y dárselo con dos semanas de anticipación. Los pronósticos imprecisos resultan muy costosos para L.L.Bean, debido a que provocan un desequilibrio entre la oferta y la demanda. Cuando hay menos operarios TM que los necesarios se incrementan los costos de oportunidad, debido a la disminución en ingresos por pedidos perdidos (un porcentaje de los clientes que no se conectan de inmediato, abandonan la llamada y no vuelven a llamar). Cuando están presentes menos operarios PT que los necesarios, disminuye la satisfacción general de los clientes y se afecta su lealtad. En ambos casos, la falta de personal lleva a tiempos de cola de espera excesivos, lo cual provoca que los cargos de teléfono por conexión aumenten drásticamente. Por otro parte, si en cualquiera de los grupos sobra personal, se incurre en una penalización obvia por costos de mano de obra excesivos debido al número de agentes en servicio que son subutilizados.

Las decisiones de programación de personal serían bastante rutinarias si no fuera por la naturaleza errática y la extrema estacionalidad de los negocios de L.L.Bean. Por ejemplo, el periodo de tres semanas antes de Navidad puede salvar o hundir el año, ya que casi 20% de las llamadas anuales se reciben durante este corto lapso. Por lo general, durante este periodo L.L.Bean duplica el número de operarios y cuadruplica la cantidad de líneas telefónicas. Después de este lapso se presenta, por supuesto, el problema completamente opuesto, un proceso declinante. Además, durante todo el año existe un patrón muy fuerte en los días de la semana en ambos tipos de llamadas, con un volumen de llamadas más alto los lunes que se reduce de manera monótona hasta llegar al mínimo los domingos.

Otro factor que el modelo de pronóstico debe considerar es el efecto de los envíos de catálogos. Éstos se hacen generalmente de forma que la mayor parte de los catálogos lleguen alrededor del martes, lo que altera bastante el patrón normal de las llamadas. Muchos clientes ansiosos harán un pedido de inmediato, lo que crea una oleada de nuevas llamadas alrededor de la hora del "envío". El nuevo modelo de pronóstico que se desarrolló tenía mucha mayor precisión que el método anterior de L.L.Bean y fue capaz de producir un error porcentual medio absoluto de 7.4% para el grupo TM y 11.4% para el grupo PT en cinco años de datos históricos. Hasta ahora, en pronósticos para tres semanas en el futuro, el nuevo modelo de pronóstico ha tenido aproximadamente la misma precisión que demostró con datos históricos. Se estima que la mayor precisión conseguida por estos modelos se traducirá en $300,000 en ahorros anuales para L.L.Bean gracias a una programación más eficiente.

Los modelos de pronósticos cuantitativos poseen dos importantes y atractivas características:

1. Están expresados en flotación matemática. Por lo tanto, establecen un registro, carente de toda ambigüedad, sobre cómo se prepara el pronóstico. Esto es un excelente vehículo para una comunicación clara sobre el pronóstico entre aquellos a quienes concierne. Aún más, proporcionan la oportunidad de una modificación y mejoría sistemáticas de la técnica de pronóstico. En un modelo cuantitativo se pueden modificar los coeficientes y/o agregar términos hasta que el modelo dé buenos resultados. (Esto supone que la relación expresada en el modelo sea fundamentalmente sólida.)

2. Usando hojas de cálculo y computadoras, los modelos cuantitativos pueden basarse en una increíble cantidad de datos. Por ejemplo, una importante empresa petrolera estaba considerando la reorganización y expansión de sus instalaciones de comercialización nacional (estaciones de gasolina). Todos comprendían que se trataba de una decisión crucial para la empresa. Tan sólo el monto propuesto de inversión de capital, sin mencionar la posible influencia en ingresos provenientes de la venta de gasolina, indicaban que esta decisión tenía que ser tomada por la junta directiva. A fin de evaluar las estrategias alternativas de expansión, la junta necesitó pronósticos de la demanda de gasolina en cada una de las regiones comerciales (se incluyeron más de 100 regiones) para cada uno de los siguientes 15 años. Cada una de estas 1,500 estimaciones estuvo basada en una combinación de varios factores, incluyendo población y nivel de construcciones nuevas en cada región. Sin computadoras y modelos cuantitativos, en general hubiera sido imposible realizar un

estudio a ese nivel de detalle. De manera similar, sin modelos cuantitativos y computadoras no podrían construirse sistemas de control de inventarios para literalmente miles de artículos que requieren pronósticos que deben actualizarse cada mes.

La literatura técnica relacionada con los modelos de pronósticos cuantitativos es enorme, y en ciertas áreas es necesario un elevado nivel de conocimientos técnicos, principalmente estadísticos, para comprender las complejidades de los modelos. Existe una distinción entre dos categorías con base en el planteamiento subyacente. Estas son los ***modelos causales*** y los ***modelos de series de tiempo.***

3.3 Modelos de pronósticos causales

En un pronóstico causal, el pronóstico de la cantidad que nos interesa va "montada" sobre otra cantidad o conjunto de cantidades. En otras palabras, nuestro conocimiento del valor de una variable (o quizás de algunas variables) nos permite pronosticar el valor de otra variable. En términos más precisos, suponga que y indique el valor real de alguna variable de interés, y que $\tilde{y}$ sea un valor pronosticado de esa variable. Entonces, en un modelo causal,

$$\tilde{y} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

donde f es una regla de pronóstico, o función, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto de variables.

En esta representación, las variables x a menudo se conocen como ***variables independientes****,* en tanto $\tilde{y}$ que es la ***variable dependiente* o *de respuesta****.* La idea es que conocemos las variables independientes y las utilizamos en el modelo de pronóstico para predecir el valor de la variable dependiente.

Piense en los siguientes ejemplos:

1. Si y es la demanda de alimentos para bebés, entonces x podría ser el número de niños entre siete y 24 meses de edad.

2. Si y es la demanda de accesorios de plomería, x_1 y x_2 podrían ser la cantidad de inicios de construcción de casas y el número de casas existentes, respectivamente,

3. Si y es el volumen del tránsito en cierta autopista, x_1 y x_2 podrían ser el volumen de tránsito en cada una de las dos autopistas cercanas.

4. Si y es el rendimiento de la materia prima utilizable por kilo de ingredientes en una planta química específica, entonces x podría ser la misma cantidad, producida por una planta experimental a pequeña escala.

Para que un modelo causal resulte útil, hay que conocer de antemano cuáles son las variables independientes, o bien debe ser posible pronosticarlas con mayor facilidad que $\tilde{y}$, la variable dependiente. Por ejemplo, saber cuál es la relación funcional entre los kilos de col agria y la cantidad de salchichas vendidas en Milwaukee durante un mismo año podría interesar a los sociólogos, pero a menos que el consumo de col agria sea fácilmente predecible, la relación es de escaso valor para cualquiera en el negocio del pronóstico de venta de salchichas. De manera más general, al examinar resultados anteriores las empresas a menudo encuentra que su venta mensual está directamente relacionada con el PIB de cada mes, y por lo tanto, piensan que se podría elaborar un buen pronóstico utilizando el valor del PIB del mes siguiente. El único problema es que esta cantidad no es conocida, o puede que sólo sea un pronóstico, y por lo tanto no constituye una verdadera variable independiente.

Para utilizar un modelo de pronóstico causal, entonces, se deben cumplir dos condiciones:

1. Debe haber una relación entre los valores de las variables independiente y dependiente, de forma que la primera proporcione información sobre la segunda.

2. Los valores de las variables independientes deben ser conocidos y estar disponibles para quien hace el pronóstico en el momento en que éste deba hacerse.

Antes de seguir adelante, volvamos a enfatizar lo que significa el punto 1. Sólo porque exista una relación matemática, ello no es garantía de que realmente haya una causa y un efecto. Desde que el

Súper Tazón se instauró en 1967, casi siempre que gana un equipo de la NFC el indicador Standard & Poor 500 en la bolsa de valores aumenta en ese año. Cuando gana un equipo de la AFC, el mercado usualmente baja. ¡Durante 30 años esta regla ha funcionado 90% de las veces (27 de 30)! Si usted realmente creyera que hay una relación significativa entre estas dos variables (el equipo que gana el Súper Tazón y el desempeño en el mercado subsecuente de ese año), entonces en 1997 usted hubiera invertido todos sus ahorros (o quizás incluso pedido prestado) en el mercado, porque al principio de ese año los Empacadores de Green Bay (NFC) derrotaron a los Patriotas de Nueva Inglaterra (AFC).

Un método comúnmente utilizado para crear un modelo de pronóstico causal se conoce como ***ajuste de curvas***.

3.4 Ajuste de Curvas

Un recurso que se usa por lo común para construir un modelo de predicción causal se llama *ajuste de la curva.*

Las ideas fundamentales del ajuste de curvas se ilustran con facilidad mediante un problema en el que la variable independiente se usa para predecir el valor de la variable dependiente. Como ejemplo específico, considérese una compañía petrolera que planea expandir su red de modernas estaciones de gasolina de autoservicio. Piensan usar el flujo de tránsito (medido según el número promedio de carros por hora) para predecir las ventas (medidas según el promedio por hora de ventas en efectivo).

La empresa tiene cinco estaciones en operación desde hace más de un año y ha usado los datos anteriores para calcular los promedios que se muestran en la figura 3.1

ESTACIÓN	AUTOMÓVILES POR HORA	VENTAS POR HORA ($)
1	150	220
2	55	75
3	220	250
4	130	145
5	95	200

Figura 3.1 Datos de ventas y tránsito

En la figura 3.2 aparece una gráfica de estos datos. Con frecuencia se llama a dicha figura *diagrama de dispersión.* Ahora queremos usar esos datos para construir una función que nos permita predecir las ventas de cualquier localidad propuesta al medir el flujo del tránsito en esa localidad y calcular su valor mediante la función que hemos construido. En particular, supóngase que el flujo de tránsito en una localidad dada de Buffalo Grove es de 183 autos por hora. ¿Cómo podríamos usar los datos de la figura 3.2 para predecir las ventas de dicha localidad?

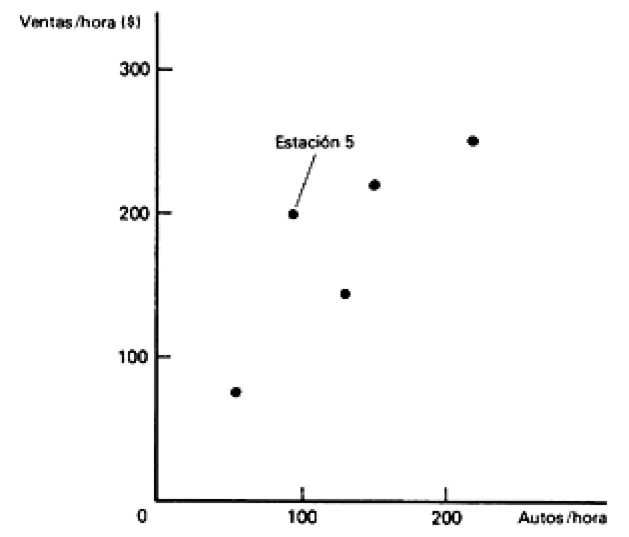


Figura 3.2. Ventas contra tránsito

3.4.1 Ajuste rápido y aproximado.

Un método que se usa por lo común cuando hay una sola variable independiente y se necesita producir un pronóstico con rapidez, consiste en ajustar “a ojo” un tipo particular de curva a los datos. El objetivo consiste en encontrar una “curva” que pase suficientemente cerca de los puntos del diagrama de dispersión para que cumpla con los requerimientos de la persona que necesita el pronóstico. Nótese que en este proceso no es necesario “tocar” ninguno de los datos, pero la línea podría pasar por algún punto si ello produce un buen ajuste.

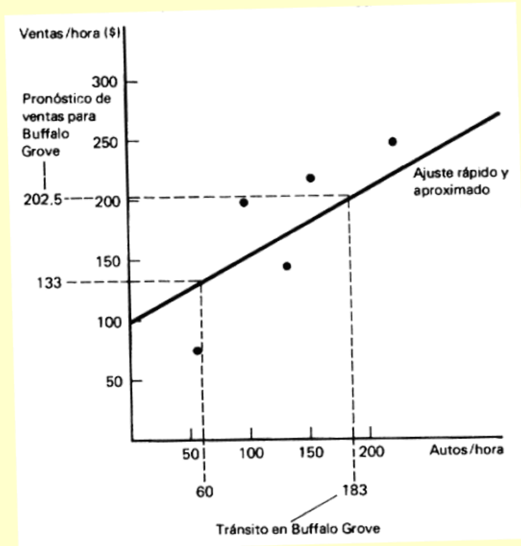


Figura 3.3 Ajuste visual de una línea

El tipo de curva usado con mayor frecuencia es la línea recta. Este proceso se ilustra en la fig. 3.3 La línea que se muestra no tiene propiedades especiales, excepto que parece que pasa cerca de los datos. Una vez que se ha dibujado la línea, se puede leer en la gráfica el pronóstico de ventas para cualquier flujo de tránsito en particular. La figura muestra que esta línea concreta produce un pronóstico de $202.50 para un flujo de tránsito de 183.

Una oficina mejor equipada no queda limitada a ajustar a ojo una línea recta. Un curvígrafo permite a quien toma las decisiones elegir la función que pase más cerca de los datos. La figura 3.4 ilustra este punto. Se muestra otra vez un pronóstico para un flujo de tránsito de 183.

Las líneas recta y curva elegidas en las figuras 3.3 y 3.4 producen aproximadamente el mismo pronóstico de la demanda (en ventas/hora) cuando el flujo de tránsito es de 183. Habría ocurrido una diferencia mayor, tanto en términos absolutos como relativos, si se usaran estas figuras para pronosticar la demanda en una localidad en la que el flujo de tránsito fuese de 60. La línea recta produciría un pronóstico de 133, en tanto que la curva darla 117. ¿Cuál modelo tiene razón?

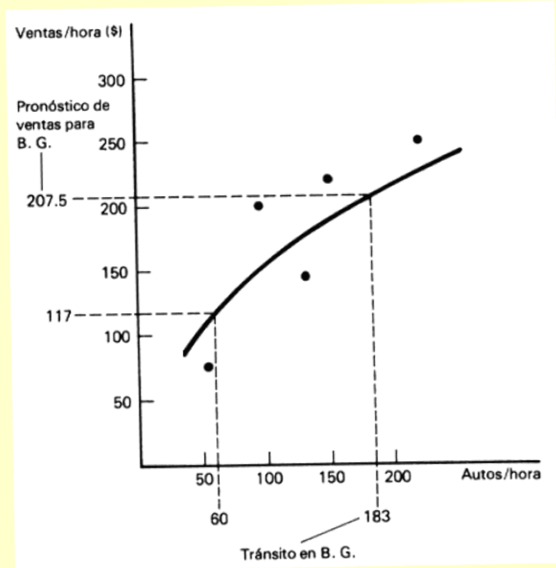


Figura 3.4. Ajuste visual de una curva

No hay respuesta afirmativa o negativa para esta pregunta, cuando la compañía decida si construye o no la estación de Buffalo Grove. Los modelos de predicción, como todos los demás, requieren el paso final de la aprobación administrativa. *El administrador, basándose en el criterio, que puede estar fuertemente influido por la expe*riencia *directa obtenida con un modelo de pronósticos, debe decidir si acepta un pronóstico concreto o dedica más recursos para obtener un mejor pronóstico (o sea una que le merezca mayor confianza).*

El método rápido y aproximado recién descrito tiene dos deficiencias principales:

1. Es imposible extenderlo a problemas con más de una variable independiente. Piense en cómo tratar de usar este enfoque si se tienen los valores de las ventas anteriores, el flujo de tránsito y el número de estaciones competidoras en un radio de 3 millas. De inmediato resulta claro que no proporcionarán gran ayuda la regla y el curvígrafo.

2. No hay una medida de lo que significa un “buen ajuste”. Una vez que un administrador ha escogido una forma funcional específica, no hay forma automática de elegir una línea que sea mejor que otras posibles. Claro está que el administrador puede buscarlas y escoger la que le guste. Sin embargo, si puede especificar una medida de la bondad, el proceso de ajuste de curvas puede ser reducido a técnicas de operaciones estandarizadas y más objetivas.

3.4.2 Ajuste Causal Lineal

Ajuste de mínimos cuadrados. El método de mínimos cuadrados es un procedimiento formal de ajuste de curvas que supera las dos deficiencias recién discutidas. Es un proceso de dos etapas:

1. Se elige una forma funcional específica (por ejemplo, una línea recta).

2. Dentro del conjunto de funciones especificadas en el paso 1, se escoge la función concreta que minimiza la suma de las desviaciones cuadráticas entre los puntos dados y los valores de la función.

Considérese el ejemplo de ventas y densidad de tránsito. Supóngase que en el paso 1 elegimos la línea recta; es decir, nos limitaremos a funciones de la forma $y = a + bx$. El paso 2 se ilustra en la figura 3.5. Aquí, se han escogido los valores de *a y b,* se ha dibujado la línea recta adecuada $y = a + bx$ y se indican las desviaciones entre los valores observados y la función. Por ejemplo,

$$d_1 = y_1 - [a + bx_1] = 220 - [a + 150b]$$

donde y_1 = ventas verdaderas (observadas)/hora, en la localidad 1 (o sea 220)
x_1 = densidad de tránsito verdadero (observado) en la localidad 1 (o sea 150)
a = ordenada al origen (sobre el eje vertical) para la función de la figura 3.5
b = pendiente de la función de la figura 3.5

El valor d_1^2 es una medida de cuán cerca del valor de la función $[a + bx_1]$ está del valor observado y_1 es decir, indica lo bien que se ajusta la función a este punto.

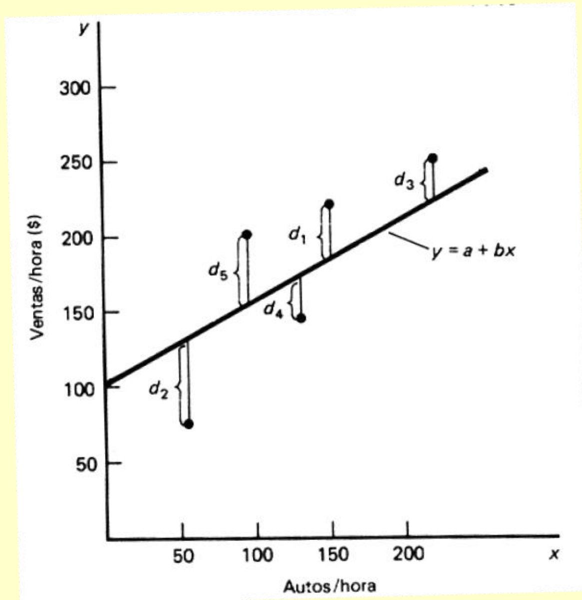


Figura 3.5 Métodos de mínimos cuadrados

Queremos que la función se ajuste bien a todos los puntos. Una medida de la bondad del ajuste total es la suma de las desviaciones cuadráticas, que es $\sum_{i=1}^{5} d_i^2$. Consideremos ahora un problema general con n observaciones en lugar de 5. Entonces, dado que cada $d_i = y_i - (a + bx_i)$, la suma de las desviaciones cuadráticas se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{5} = (y_i - [a + bx_i])^2 \qquad 3.1$$

Usando el método de mínimos cuadrados, elegimos a y b de modo que la suma que aparece en la expresión 3.1 sea mínima. Se puede usar la regla del cálculo diferencial para determinar los valores de a y b que minimizan esa suma. El procedimiento consiste en obtener la derivada parcial de la suma en la expresión 3.1 con respecto a a e igualar a cero la expresión resultante. Esto produce la primera ecuación. Se deduce una segunda ecuación siguiendo el mismo procedimiento con b. Las ecuaciones que resultan de este procedimiento son

$$\sum_{i=1}^{n} -2(y_i - [a + bx_i]) = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - [a + bx_i]) = 0$$

Recuérdese que los valores de x_i y y_i, son observaciones y que nuestra meta es encontrar los valores de **a** y **b** que satisfacen esas dos ecuaciones. Se puede demostrar que la solución es

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad 3.2$$

El siguiente paso consiste en determinar los valores de $\sum x_i$, $\sum x_i^2$, $\sum y_i$, $\sum x_i\ y_i$. Nótese que estas cantidades dependen sólo de los datos que hemos observado y que podemos encontrarlos mediante simples operaciones aritméticas. La tabla de la figura 3.6 está destinada a este propósito.

i	x_i (AUTOS/HORA)	y_i (VENTAS/HORA)	$x_i y_i$	x_i^2
1	150	220	33,000	22,500
2	55	75	4,125	3,025
3	220	250	55,000	48,400
4	130	145	18,850	16,900
5	95	200	19,000	9,025
∑	650	890	129,975	99,850

Figura 3.6 Cálculos del mínimo cuadrado: caso lineal

Asignando valores numéricos a las ecuaciones que aparecen en la expresión 3.2 y haciendo $n = 5$, se obtiene

$$b = 0.93$$

$$a = 57.1$$

La línea de mínimos cuadrados resultante aparece en la figura 3.7 con trazo grueso. La línea rápida y aproximada de la figura 3.3 se muestra con trazo punteado. Esta figura sugiere que al menos algunos individuos no son buenos para elegir a ojo la línea que se ajusta bien a los datos (mediante el criterio de los mínimos cuadrados).

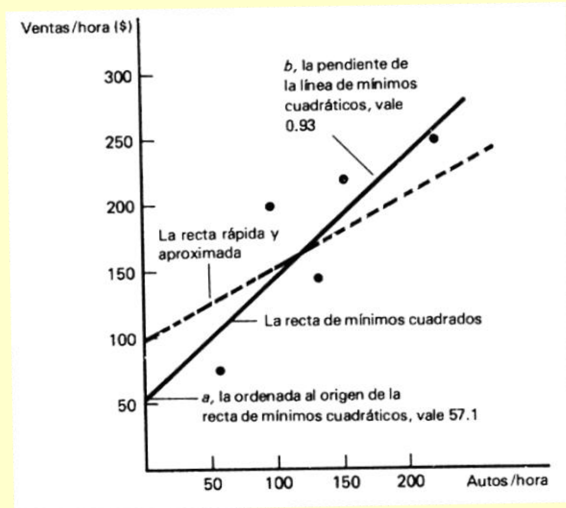


Figura 3.7 Recta de mínimos cuadrados

3.4.3 Ajuste Causal Cuadrático

El ejemplo anterior muestra cómo hacer el *ajuste lineal* para el caso de una variable independiente. Pero el método de mínimos cuadrados se puede usar para cualquier número de variables independientes y con cualquier forma funcional. Como ilustración, supóngase que queremos ajustar una función cuadrática de la forma

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

A nuestros datos previos, con el método de mínimos cuadrados. El objetivo, entonces, consiste en elegir a_0, a_1 y a_2 con el propósito de minimizar la suma de las desviaciones cuadráticas, lo cual es ahora

$$\sum_{i=1}^{5} = (y_i - [a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2])^2 \qquad 3.3$$

Procedamos a igualar a cero las derivadas parciales con respecto a a_0, a_1, y a_2. Esto da las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
5a_0 + (\sum x_i)a_1 + (\sum x_i^2)a_2 &= \sum y_i \\
(\sum x_i)a_0 + (\sum x_i^2)a_1 + (\sum x_i^3)a_2 &= \sum x_i y_i \\
(\sum x_i^2)a_0 + (\sum x_i^3)a_1 + (\sum x_i^4)a_2 &= \sum x_i^2 y_i
\end{aligned}
\qquad 3.4
$$

Encontrar los valores numéricos de los coeficientes es un trabajo directo. Procedamos en la misma forma tabular como en la figura 3.6. Necesitamos en realidad todos los valores ahí calculados. Para ahorrar espacio, usamos la flotación científica para expresar los números como potencias de 10. Por ejemplo, escribimos el número 22,500 como 2.25×10^4. Los cálculos, con una precisión de dos decimales, aparecen en la figura 3.8

i	$x_i \times 10^2$	$y_i \times 10^2$	$x_i y_i \times 10^4$	$x_i^2 \times 10^4$	$x_i^3 \times 10^6$	$x_i^4 \times 10^8$	$x_i^2 y_i \times 10^6$
1	1.50	2.20	3.30	2.25	3.38	5.06	4.95
2	0.55	0.75	0.41	0.30	0.17	0.09	0.23
3	2.20	2.50	5.50	4.84	10.65	23.43	12.10
4	1.30	1.45	1.89	1.69	2.20	2.86	2.45
5	0.95	2.00	1.90	0.90	0.86	0.81	1.80
$\sum$	6.50	8.90	13.00	9.98	17.26	32.25	21.53

Figura 3.8 Cálculos para mínimos cuadrados: el caso cuadrado

Los valores numéricos de la figura 3.8 pueden asignarse ahora a las ecuaciones presentadas en la expresión 3.4 para producir

$$
\begin{aligned}
5a_0 + 650a_1 + 99{,}800a_2 &= 890 \qquad 3.5 \\
6.50a_0 + 998a_1 + 172{,}600a_2 &= 1300 \qquad 3.6 \\
9.98a_0 + 1726a_1 + 322{,}500a_2 &= 2153 \qquad 3.7
\end{aligned}
$$

Se han dividido ambos miembros de la ecuación 3.6 entre 10^2, así como ambos miembros de la ecuación 3.7 entre 10^4 para obtener las expresiones que se muestran.

Ahora nos queda el trabajo directo basado en el método de Cramer para resolver tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Al concluir este ejercicio se obtiene:

$$a_0 = -65.726$$

$$a_1 = 3.015$$

$$a_2 = -0.0074$$

Para hacer la gráfica de esta función, evaluémosla primero para cuatro valores de x como se muestra en la figura 3.9

x	- 65.726 + 3.015x - 0.0074xx^2
0	-65.726
50	66.46
100	161.52
200	240.22

Figura 3.9 Evaluación de la función cuadrática

En la figura 3.10 se ha hecho la gráfica de estos puntos y se ha trazado una curva a través de ellos. También se muestra la recta de ajuste lineal de mínimos cuadrados. Parece que la función cuadrática se ajusta mejor a los datos, pero ¡cuidado! Hemos visto al usar métodos rápidos y aproximados que el ojo no siempre es una guía confiable para lo que está sucediendo.

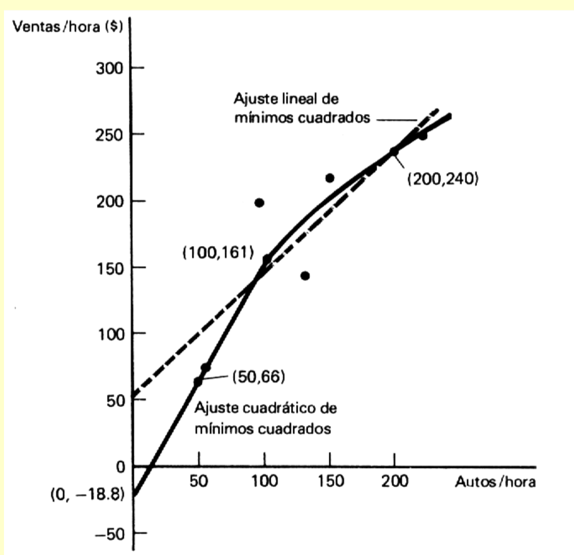


Figura 3.10 Función Cuadrática

3.5 Modelos de Pronósticos mediante Series de Tiempo

Otra clase de técnicas de pronósticos cuantitativa comprende los llamados ***modelos de series de tiempo***. Estos modelos generan pronósticos, mediante ***la extrapolación del comportamiento anterior de los valores de una variable simple particular que interese***. Por ejemplo, quizá queramos conocer las ventas de un artículo concreto, o en la fluctuación de un precio particular del mercado con respecto al tiempo. Los modelos de las series de tiempo usan cierta técnica para ***extrapolar*** hacia futuro el comportamiento anterior. En sentido figurado, la serie es elevada hacia el futuro "por su propia fuerza".

Para proporcionar varios ejemplos de estos métodos, vamos a suponer que tenemos a la mano los precios de cierre diarios que en enero se obtuvo con un contrato de futuros para el fríjol soya, por los 12 días pasados, incluyendo hoy, y que a partir de esa corriente de datos queremos predecir el precio de cierre para mañana. Vienen a la mente varias posibilidades.

1. Se piensa que todos los valores anteriores tienen importancia y que todos ellos tienen igual potencia predictiva, por lo que se puede tomar el ***promedio*** de los 12 valores pasados como la mejor predicción para mañana.
2. Si se piensa que el valor de hoy (el décimo segundo) es el más importante, este podría ser nuestra mejor predicción para mañana.
3. Puede pensarse que en el actual "mercado de rápida tendencia" los primeros seis valores son demasiado anticuados, pero que los seis más recientes son importantes y que tienen igual fuerza predictiva. Entonces se podrían promediar estos últimos seis como la mejor predicción para mañana.
4. Se puede pensar que ***todos*** los valores pasados contienen información útil, pero que la de hoy (la 12a. información) es la más importante de todas y, en sucesión, la 11a., 10a., 9a. etc. observaciones tienen una importancia decreciente. En este caso, podemos tomar un ***promedio ponderado*** de las 12 observaciones, asignando pesos en orden crecientes, desde el 1 hasta el 12 de las observaciones, de modo que los doce pesos sumen 1.
5. Podemos hacer la verdadera grafica de los 12 valores como función del tiempo y dibujar después una "*línea de tendencia*" recta, que pase cerca de todos los valores. Esta línea se podrá usar después para predecir el valor de mañana.

Supongamos ahora que se observa el verdadero precio de cierre de mañana y se considera una predicción para pasado mañana, utilizando los 13 valores pasados disponibles. Los métodos 1 y 2 se pueden aplicar de una manera directa, Consideremos ahora el método 3. En este caso, podríamos tomar el precio verdadero observado de mañana, junto con el de hoy y los cuatro precios anteriores, para obtener un nuevo promedio de seis días. Esta técnica se llama ***promedio móvil simple de seis días***.

Refinamos ahora al método 4. En este ejemplo, dado que se emplean todos los valores anteriores, podemos usar los 13 en lugar de los 12 valores, asignándoles nuevos pesos. Una clase importante de técnicas llamada ***modelos de suavizado exponencial*** operan en este sentido.

Se analizará con más detalle la técnica mencionada en el inciso 5. Esto proporciona otra ilustración de pronósticos mediante el ***método para ajuste de curvas***.

Mencionemos en este punto que siempre que se tengan valores de una variable particular que interese (simple), con la que se pueda hacer una grafica contra el tiempo, a menudo esos valores se llamaran series de tiempo y cualquier método que se use para analizar y extrapolar tales series en el futuro caen dentro de la categoría general de ***análisis de series del tiempo***. En la actualidad, esta es un área muy activa de investigación en estadística y ciencia de la administración.

3.5.1 Ajuste de Curvas

Ya hemos considerado este tema durante el estudio de los modelos causales. Al usar ajuste de curvas dentro del contexto de las series de tiempo, la principal diferencia será que en esta situación la variable independiente será el tiempo. Las observaciones pasadas de la variable dependiente serán graficadas contra el tiempo y la curva se ajustará después de estos datos. La curva se prolongará entonces hacia el futuro para producir predicciones. En este contexto, prolongar la curva no significa más que evaluar la función derivada para valores mayores de t, el tiempo. Este procedimiento se ilustra mediante una línea recta en la figura 3.11

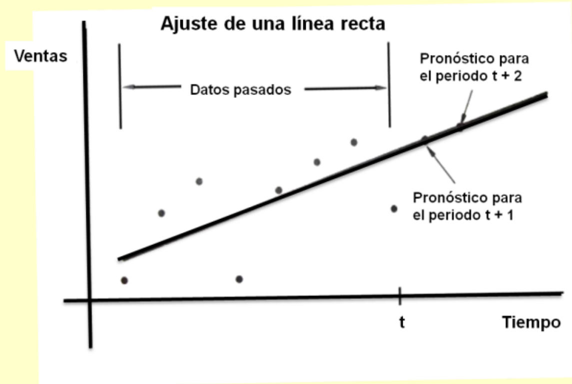


Figura 3.11 Ajuste de una línea recta

El uso del tiempo como variable independiente tiene muchas implicaciones serias más que alterar unas cuantas fórmulas, un administrador debe comprender la importante diferencia que hay entre un modelo causal que usa el ajuste de curvas y el modelo de serie de tiempo que también lo usa. Las técnicas matemáticas de ajuste de curvas son idénticas, pero el razonamiento, o filosofía, que hay detrás de los modelos es muy diferente en lo fundamental. Para entender esta diferencia, piénsese en la variable que interesa, y que es producida por un proceso o sistema particular subyacente. El modelo causal presupone que cuando el sistema subyacente cambia para producir diferentes valores de ***y*,** también produce diferencias correspondientes en la variable independiente x**,** por lo tanto, al conocer la variable independiente se puede deducir un buen pronostico de y. El modelo de serie de tiempos presupone que el sistema que produce a y es, en esencia, ***estacionario*** (***o estable***) y que continuará actuando en el futuro como lo fue en el pasado. Las trayectorias futuras del movimiento de y recordarán estrechamente las trayectorias pasadas. Esto significa que el tiempo es un sustituto de muchos factores que pueden ser difíciles de medir, pero que parecen variar de una manera consistente y sistemática con el tiempo. Si el sistema que produce a y cambia en forma significativa (por ejemplo, debido a cambios ambientales, tecnológicos o políticos) entonces el supuesto de un ***proceso estacionario*** no es válido y en consecuencia, un pronóstico basada en el tiempo como variable independiente puede ser un grave error.

Tal como en los modelos causales, por supuesto es posible usar otras funciones que no sean lineales, para extrapolar una serie de observaciones (i.e., para predecir el futuro). Como se puede imaginar, una alternativa que a menudo se sugiere en la práctica consiste en suponer que y es un polinomio de orden superior en t, es decir,

$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_k t^k.$$

Como en los casos vistos antes, los valores adecuados de los parámetros $b_{0,}\ b_1,..,b_k$ deben ser deducidos de las observaciones previas en forma matemática.

Ejercicio para resolver

La demanda de un artículo en inventario durante los últimos 10 meses se resume en la siguiente tabla. Aplicar el modelo de Ajuste de Curvas cuadrática para pronosticar el onceavo mes y obtenga la demanda para el mes (11) correspondiente.

Mes (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Demanda (y_i)	25	15	30	38	58	62	85	88	60	40

3.6 Promedios Móviles: Predicción de ventas

La suposición que apoya los modelos de este tipo es que el funcionamiento promedio en el pasado reciente es un buen pronóstico del futuro. Es quizá sorprendente que estos modelos "ingenuos" sean importantes en extremo en las aplicaciones. Casi todos los paquetes de control de inventarios incluyen una subrutina de pronósticos, basada en un tipo particular de promedio móvil, llamado promedios móviles exponencialmente ponderados. Sobre la base de un criterio como la "frecuencia de uso", el método de promedios móviles es, con seguridad, un importante procedimiento de pronósticos.

Una persona que tiene un profundo interés por el uso de modelos de pronósticos simples es Víctor Kowalski, el nuevo vicepresidente de operaciones de la Steco. Dado que es responsable del inventario de miles de artículos, los modelos de predicción simples (i.e, no costosos) son importantes para él. Con el objeto de familiarizarse con los diversos modelos decidió "someter a prueba" diferentes modelos con algunos datos anteriores. En particular, decidió usar los datos de las ventas mensuales de puntales de acero inoxidable del año pasado, para aprender lo relativo a diferentes modelos y ver qué tan bien habrían funcionado si la Steco los hubiese usado el año anterior. Se está realizando lo que se llama un estudio de ***validación***.

Los modelos para pronósticos se presentan, con notación matemática. Por lo tanto se presenta la siguiente notación para el modelo:

y_{t-1} = ventas observadas de artículos durante el mes $t-1$

$\hat{y}_t$ = predicción de las ventas de puntales en el periodo t

El interés es el pronóstico de ventas con un mes de antelación; es decir, se consideraran los valores anteriores conocidos $y_1, y_2, ..., y_{t-1}$ (demanda desde el mes 1 al $t-1$) y usa esta información para producir $\hat{y}_t$, la predicción para y_t. Dicho en otra forma, usará las ventas pasadas verdaderas, por ejemplo, hasta mayo, y las usará para predecir las ventas de junio; después usará las ventas hasta junio para predecir las ventas de julio, etc. Este proceso producirá una sucesión de valores de $\hat{y}_t$ .Comparando esos valores con los observados, y_t, se obtendrá una indicación de cómo habría trabajado el modelo para pronósticos si efectivamente hubiera sido usado el año pasado.

3.6.1 Promedio móvil simple para n-periodos.

El modelo más sencillo de la clase de promedio móvil es el de ***promedio móvil simple*** *n-* ***periodos***. En este modelo, el promedio de un número fijo (digamos n) de las observaciones más recientes se usa como estimación del siguiente valor de y. Por ejemplo, si n es igual a 4, entonces, después de haber observado el valor de $\mathbf{y}$ en el periodo 15, nuestra estimación para el periodo 16 sería

$$\hat{Y}_{16} = (y_{15} + y_{14} + y_{13} + y_{12})/4$$

En general

$$\hat{y}_{t+1} = (y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-n+1})/n$$

La aplicación del promedio móvil de tres o cuatro periodos en la Steco se muestra en la siguiente figura.

MES	VENTAS (EN MILES)	PRONÓSTICO MEDIANTE PROMEDIO MÓVIL SIMPLE DE 3 MESES	PRONÓSTICO MEDIANTE PROMEDIO MÓVIL SIMPLE DE 4 MESES	ERROR CUADRÁTICO MEDIO	
Enero	$20				
Febrero	24				
Marzo	27				
Abril	31	(20+24+27)/3 = 23.67		53.78	
Mayo	37	27.33	(20+24+27+31)/4 = 25.50	93.44	132.25
Junio	47	31.67	29.75	235.11	297.56
Julio	53	38.33	35.50	215.11	306.25
Agosto	62	45.67	42.00	266.78	400.00
Septiembre	54	54.00	49.75	0.00	18.06
Octubre	36	56.33	54.00	413.44	324.00
Noviembre	32	50.67	51.25	348.44	370.56
Diciembre	29	40.67	46.00	136.11	289.00
				195.80	267.21

Se ve que el promedio móvil de tres meses pronostica para las ventas de abril el promedio de las ventas de enero, febrero y marzo, $(20 + 24 + 27)/3$, o sea 23.67. *Expost* (i.e., después de la predicción), las ventas verdaderas de abril fueron 31. Entonces, el pronóstico de ventas difirió en este caso de las ventas verdaderas, $31-23.67$, o sea *7.33*.

La inspección de los datos de la figura anterior sugiere que ninguno de los métodos de predicción parece preciso en lo particular. No obstante, es conveniente cambiar esta impresión cualitativa por alguna medida cuantitativa de qué tan bien funcionan los dos métodos. Una medida de comparación que se usa por lo regular es el promedio de errores cuadráticos, donde

$$\text{error cuadrático medio} = \frac{\displaystyle\sum_{\text{todas las predicciones}} (\text{ventas predichas} - \text{ventas verdaderas})^2}{\text{número de predicciones}}$$

3.7 Regresión Lineal y Regresión Múltiple

Se puede comprender la relación de dos o más variables y relacionarlas mediante ecuaciones, una variable en relación de la otra variable se le llama *Regresión Lineal* y a una variable en relación a otras variables *Regresión múltiple*.

Casi constantemente en la práctica de la investigación estadística, económica y administrativa, se encuentran variables que de alguna manera están relacionados entre sí, por lo que es posible que una de las variables puedan relacionarse matemáticamente en función de otra u otras variables.

Se define como un procedimiento mediante el cual se trata de determinar si existe o no relación de dependencia entre dos o más variables. Es decir, conociendo los valores de una variable independiente, se trata de estimar los valores, de una o más variables dependientes.

La regresión en forma gráfica, trata de lograr que una dispersión de las frecuencias sea ajustada a una línea recta o curva.

El análisis de regresión determina la relación entre una variable *dependiente* (por ejemplo, la demanda de un artículo) y una variable *independiente* (por ejemplo, el tiempo). La fórmula general de regresión entre la variable independiente x y la variable dependiente y es:

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \varepsilon$$

Las constantes b_o , b_1, ... , b_n son parámetros desconocidos que se deben determinar a partir de los ***datos disponibles***. El error aleatorio ε tiene media cero y desviación estándar constante.

3.7.1 Clases de Regresión

La regresión puede ser lineal y curvilínea o no lineal, ambos tipos de regresión pueden ser a su vez:

3.7.1.1 Regresión Lineal Simple

Este tipo se presenta cuando una variable independiente ejerce influencia sobre otra variable dependiente. Ejemplo: $y = f(x)$

Esta regresión se utiliza con mayor frecuencia en las ciencias económicas y administrativas, y sus disciplinas tecnológicas. Cualquier función no lineal, es ajustada a una línea para su estudio y efectos prácticos en las ciencias mencionadas, modelos no lineales y lineales a multi- ecuaciones.

Objetivo: Se utiliza la regresión lineal simple para:

1. Determinar la relación de dependencia que tiene una variable respecto a otra.
2. Ajustar la distribución de frecuencias de una línea, es decir, determinar la forma de la línea de regresión.
3. Predecir un dato desconocido de una variable partiendo de los datos conocidos de otra variable.

Por ejemplo: Podría ser una regresión de tipo lineal:

En una empresa de servicio de Internet busca relacionar las ganancias que obtiene cada computadora con el número de usuarios que ingresan a dicha cabina diariamente. En la tabla representa Y (Ganancias en miles de $) y X (Número de usuarios)

Y	100	98	99	102	102	111	97	104	102	96
X	116	96	110	105	99	106	100	109	98	108

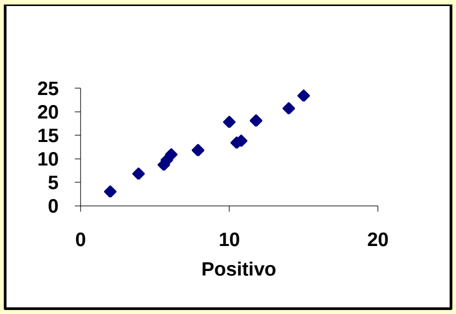
Coeficiente de Regresión

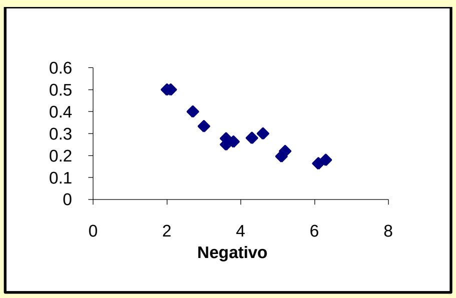
Indica el número de unidades en que se modifica la variable dependiente *“Y”* por efecto del cambio de la variable independiente *“X”* o viceversa en una unidad de medida.

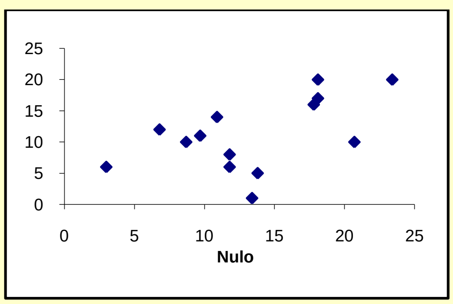
Clases de coeficiente de Regresión:

El coeficiente de regresión puede ser: Positivo, Negativo y Nulo.

- Es positivo cuando las variaciones de la variable independiente ***"X"*** son directamente proporcionales a las variaciones de la variable dependiente ***"Y"***
- Es negativo, cuando las variaciones de la variable independiente ***"X"*** son inversamente proporcionales a las variaciones de las variables dependientes ***"Y"***
- Es nulo o cero, cuando entre las variables dependientes ***"Y"*** e independientes ***"X"*** no existen relación alguna.







Procedimiento para determinar el Coeficiente de Regresión

La forma más sencilla de modelo de regresión supone que la variable dependiente varía en forma lineal respecto a la variable independiente, esto es, que

$$\hat{y} = a + bx$$

Las constantes a y b se calculan aplicando el ***criterio de los mínimos cuadrados***, que minimiza la suma del cuadrado de las diferencias entre los valores observados y los estimados. Dado el *i-ésimo* punto de dato (x_i, y_i), $i = 1,2,..., n$, la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los valores observados y estimados se define como

$$S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$$

Los valores de a y b se calculan resolviendo las siguientes condiciones necesarias para minimizar S:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)x_i = 0$$

Con algo de manipulación algebraica se obtiene la siguiente solución:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\bar{y}\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

En donde

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Estas ecuaciones indican que primero se necesita calcular b, a partir del cual se puede calcular a.

Se puede probar lo bien que se ajusta el estimador lineal $\hat{y} = a + bx$ a sus datos calculando el **coeficiente de correlación,** r, con la fórmula

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\bar{y}\bar{x}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$$

En donde $-1 \leq r \leq 1$.

Si $r \pm 1$, existe un ajuste lineal perfecto entre x y y. En general, mientras más se acerque el valor de $|r|$ a 1, el ajuste lineal es mejor. Si $r = 0$, puede ser o puede no ser que sean independientes, ya que dos variables *dependientes* pueden dar como resultado

Para determinar el valor del coeficiente de regresión de una manera fácil y exacta es utilizando el método de los Mínimos Cuadrados de dos maneras:

3.7.1.2 Regresión Lineal Múltiple

Este tipo se presenta cuando dos o más variables independientes influyen sobre una variable dependiente. Ejemplo: $y = f(x, w, z)$.

Por ejemplo: Podría ser una regresión de tipo múltiple:

Una Empresa de desarrollo de software establece relacionar sus Ventas en función del número de pedidos de los tipos de software que desarrolla (Sistemas, Educativos y Automatizaciones Empresariales), para atender 10 proyectos en el presente año.

En la Tabla representa Y (Ventas miles de \$) e X (Nº pedidos de sistemas), W (Nº de pedidos de Aplicaciones Educativas) y Z (Nº de pedidos de Automatizaciones empresariales).

Y	440	455	470	510	506	480	460	500	490	450

X	50	40	35	45	51	55	53	48	38	44
W	105	140	110	130	125	115	100	103	118	98
Z	75	68	70	64	67	72	70	73	69	74

Aplicación de regresión múltiple

Mediante el siguiente problema podremos ilustrar la aplicación de ***Regresión Múltiple***:

Para lo cual se escoge al azar una muestra de 15 alumnos y ellos registran notas promedios en las asignaturas (materias cursadas) de PHP, Algoritmos, Base de Datos y Programación como se muestran en el siguiente cuadro.

Alumno	PHP	Algoritmos	Base de Datos	Programación
1	13	15	15	13
2	13	14	13	12
3	13	16	13	14
4	15	20	14	16
5	16	18	18	17
6	15	16	17	15
7	12	13	15	11
8	13	16	14	15
9	13	15	14	13
10	13	14	13	10
11	11	12	12	10
12	14	16	11	14
13	15	17	16	15
14	15	19	14	16
15	15	13	15	10

Lo que se busca es construir un modelo para determinar la dependencia que exista de aprendizaje reflejada en las notas de la asignatura de PHP, conociendo las notas de las asignaturas Algoritmos, Base de Datos y Programación.

Se presentara la siguiente ecuación a resolver:

$$Y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$$

Utilizando las fórmulas de las ecuaciones normales a los datos obtendremos los coeficientes de regresión o utilizando Regresión de Análisis de datos, en la Hoja de Cálculo de Excel podemos calcular también los coeficientes de regresión:

	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	p-valor	Inferior 95%	Superior 95%
Intercepción	2.551	2.369	1.077	0.305	-2.663	7.766
Algoritmos	0.583	0.267	2.186	0.051	-0.004	1.169
Base de Datos	0.373	0.144	2.589	0.025	0.056	0.691
Programación	-0.242	0.270	-0.893	0.391	-0.837	0.354

Por lo tanto podemos construir la ecuación de regresión que buscamos:

$$Y = 2.551 + 0.583x_1 + 0.373x_2 - 0.242x_3$$

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.83489314
Coeficiente de determinación R^2	0.69704656
R^2 ajustado	0.6144229
Error típico	0.86126471
Observaciones	15

3.7.1.3 Análisis de Regresión Múltiple

Dispone de una ecuación con dos variables independientes adicionales:

$$\boxed{Y' = a' + b_1x_1 + b_2x_2}$$

Se puede ampliar para cualquier número "m" de variables independientes:

$$\boxed{Y' = a' + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \ldots\ldots + b_mx_m}$$

Para poder resolver y obtener a, b_1 y b_2 en una ecuación de regresión múltiple el cálculo se presenta laborioso porque se tienen que atender tres ecuaciones que se generan por el método de mínimo de cuadrados:

$$\sum y = na + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2$$

$$\sum x_1 y = a \sum x_1 + b_1 \sum x_1^{\ 2} + b_2 \sum x_1 x_2$$

$$\sum x_2 y = a \sum x_2 + b_1 \sum x_1 x_2 + b_2 \sum x_2^{\ 2}$$

El error estándar de la regresión múltiple (S_{xy})

Es una medida de dispersión la estimación se hace más precisa conforme el grado de dispersión alrededor del plano de regresión se hace más pequeño.
Para medirla se utiliza la formula:

$$\boxed{S_{xy} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n - m - 1}}}$$

Y: Valores observados en la muestra.

$\hat{Y}$: Valores estimados a partir a partir de la ecuación de regresión.

n : Número de datos.

m : Número de variables independientes.

3.8 Pronósticos Cualitativos

3.8.1 Juicio de expertos.

Muchos pronósticos importantes no se basan en modelos formales. Este punto parece evidente en el ámbito de los eventos mundiales (en cuestiones de guerra y de paz, por poner un ejemplo). Quizá lo más sorprendente, también en asuntos económicos con frecuencia sea la verdad. Por ejemplo, durante el periodo de altas tasas de interés de 1980 y 1981, los pronosticadores más influyentes de tasas de interés no rivalizarían con los modelos econométricos accionados por equipos de econometristas. En vez de ello, fueron con Henry Kaufman, de Salomon Brothers, y Albert Wojnilower, del First Boston, los llamados Doctores Ruina y Tristeza en el mundo de las tasas de interés. Estos caballeros combinaron factores relevantes, tales como la oferta de dinero y el desempleo, así como los resultados de modelos cuantitativos y su propio método intuitivo (sus propios modelos “internos”) para producir pronósticos que tuvieron una credibilidad ampliamente difundida e impactante en la comunidad financiera.

La moraleja para los administradores es que los pronósticos cualitativos puede ser una importante fuente de información. Los administradores deben acudir a una extensa variedad de fuentes de datos, antes de tomar una decisión. La opinión del experto no debe ser ignorada. Una medida sobria y útil de todos los pronósticos (cuantitativos y cualitativos) son un registro de realización del pasado. El buen funcionamiento en el pasado es un tipo sensible de prueba nula. Un excelente registro de los datos no promete buenos resultados para el futuro. Sin embargo, un pobre registro difícilmente despertará entusiasmo por grandes logros en el futuro. Por lo tanto, los administradores, deben escuchar con cautela a los expertos y llevarlos a un funcionamiento estándar.

Existen dos maneras de abordar todos los modelos de decisiones. Uno es el análisis cuantitativo; el otro el enfoque cualitativo. Los pronósticos cuantitativos utilizan una variedad de modelos matemáticos que se apoyan en datos históricos o en variables causales para pronosticar la demanda. Los pronósticos cualitativos o subjetivos incorporan aquellos factores como la intuición, las emociones, las experiencias personales y el sistema de valores de quien toma la decisión para llegar al pronóstico. Las empresas emplean uno u otro enfoque, pero en la práctica, muchos de ellos utilizan la combinación de ambos con este enfoque es casi siempre efectivo el pronóstico.

3.8.2 Panorama de los métodos cualitativos.

A continuación se presentan cuatro tecnicas de pronósticos cualitativos:

1. Jurado de opinión de ejecutivos. Con este método, las opiniones de un grupo de expertos o administradores de alto nivel, a menudo en combinación con los modelos estadísticos, convergen para llegar a una estimación grupal de la demanda. Bristol-Myers Squibb Company (compañía farmacéutica) por ejemplo, emplea 220 científicos destacados como jurado de opinión de ejecutivos, con el fin de tener una idea de las tendencias futuras en el mundo de la investigación médica.

2. Metodo Delphi. Hay tres tipos de participantes del método Delphi: los que toman decisiones, el personal y los entrevistados. Los primeros suelen ser un grupo de 5 a 10 expertos que irán elaborando el pronóstico real. El personal ayuda a los que toman decisiones al preparar, distribuir, recolectar y resumir la serie de cuestionarios y los resultados de las encuestas. Los entrevistados forman un grupo de personas, a menudo localizadas en distintos sitios, cuyos juicios se valoran. Este grupo proporciona información a quienes toman las decisiones antes de hacer el pronóstico.

   El estado de Alaska, por ejemplo, ha empleado el método Delphi para desarrollar su pronóstico económico a largo plazo. Un sorprendente 90% del presupuesto estatal deriva de los 1.5 millones de barriles de petróleo que alimentan al oleoducto en Prudhoe Bay. El enorme panel de expertos de Delphi debe presentar a todos los grupos de opinión en el estado y a todas a las áreas geográficas. Delphi fue la herramienta de pronóstico ideal porque pudo evitarse el viaje de los panelistas. Tambien significo que los ciudadanos líderes de opinión pudieran participar sin que las reuniones y distancias afectaran sus horarios.

3. Composición de la fuerza de ventas. En este enfoque, cada vendedor estima cuales serán las ventas de su región. Tras revisar las estimaciones para asegurar que sean realistas, se combinan a nivel de distrito y nacional para llegar a un propósito global.

4. Encuesta en el mercado de consumo. Este método solicita información a los clientes sobre sus planes de compra futuros. Ayuda no solo a preparar el pronóstico, sino también a mejorar

el diseño del producto y la planeación de nuevos productos. En ocasiones, tanto la encuesta en el mercado de consumo como la composición de la fuerza de ventas son técnicas que adolecen de un optimismo exagerado que surgen de la información de los clientes. La caída de la industria de telecomunicaciones en 2001, fue resultado de la sobreexpansión que pretendía satisfacer una "demanda explosiva de clientes". ¿De dónde salió esta información? Oplink Communications, un proveedor de Nortel Netwoks, dice que "durante los últimos años los pronósticos de su compañía se basaron principalmente en conversaciones informales con sus clientes".[RENDER, 2004]

3.9 Ejercicios Resueltos

PRONÓSTICOS

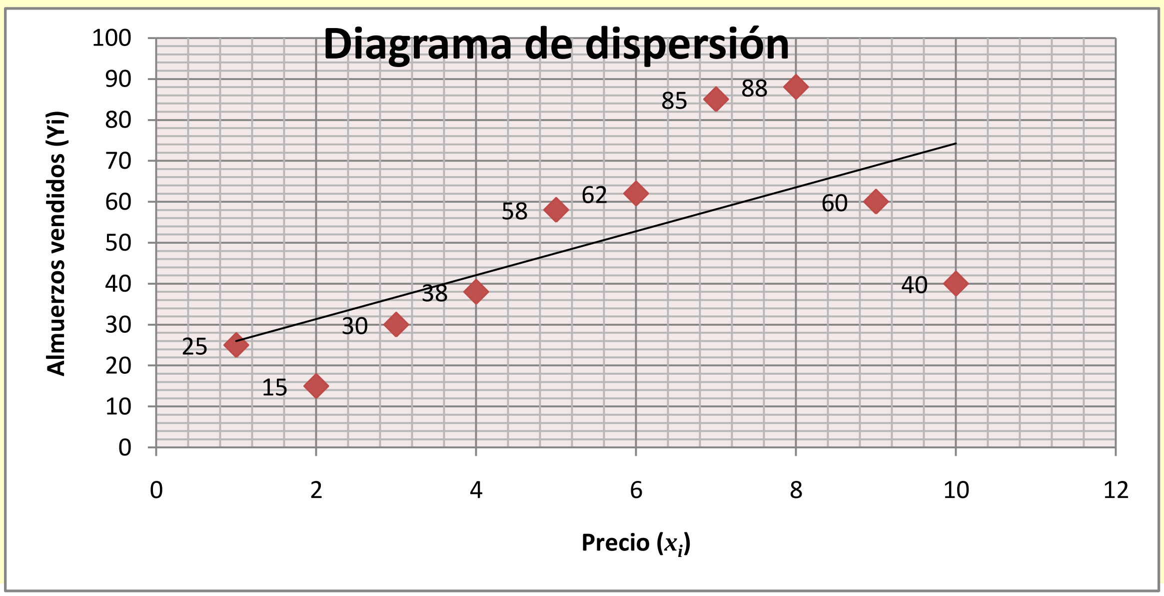
"Método Lineal"

$$\hat{y} = a + bx$$

Chiken Palace ofrece periódicamente almuerzos que incluyen cinco piezas de pollo para llevar a casa, a precios especiales. Sea y el número de almuerzos vendidos y x el precio. A partir de las observaciones históricas y los cálculos que presentamos en la siguiente tabla, determine usted la expresión lineal para obtener el pronóstico deseado.

					Valor Calculado	Error Absoluto $\epsilon = Vt - Vc$	Error Relativo $\rho = \epsilon / Vc$	Error Iterativo (Ita)
Iteración	x_i	y_i	$x_i y_i$	x^2_i	$\hat{y}$	ϵ	ρ	η
1	2.70	760	2,052	7.29	705.00894881	54.99105119	0.0780005	_
2	3.50	510	1,785	12.25	482.90657439	27.09342561	0.0561049	-0.45992825
3	2.00	980	1,960	4.00	899.34852643	80.65147357	0.08967766	0.463048462
4	4.20	250	1,050	17.64	288.56699678	-38.56699678	-0.13365006	-2.11660216
5	3.10	320	992	9.61	593.95776160	-273.95776160	-0.46124115	0.514162428
6	4.05	480	1,944	16.40	330.21119198	149.78880802	0.45361518	-0.79872087
Sumatoria:	**19.55**	**3,300**	**9,783**	**67.19**	**3,300.00000000**	**0.00000000**	**0.08250703**	**-2.39804039**

$\sum x_i \wedge 2 =$ 382

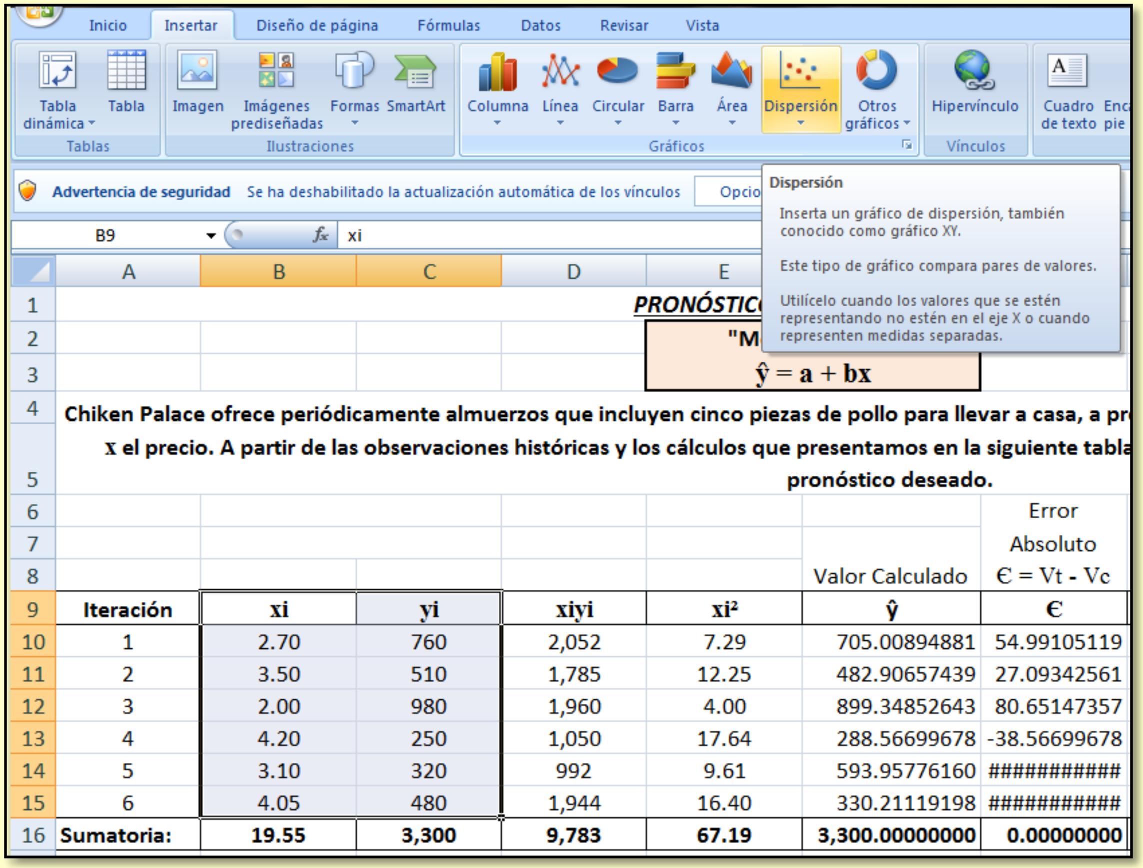


$$b = \frac{\sum x_i y_i - (1/n * \sum x_i * \sum y_i)}{\sum x^2_i - 1/n\ (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{-969.50}{3.49} = -277.62796802$$

$$a = 1/n\ (\sum y_i) - (b * 1/n * \sum x_i)$$

$$a = 1454.604462$$



	A	B	C	D	E		
6							Error
7							Absoluto
8						Valor Calculado	€ = Vt - Vc
9	Iteración	xi	yi	xiyi	xi²	ŷ	€
10	1	2.70	760	2,052	7.29	705.00894881	54.99105119
11	2	3.50	510	1,785	12.25	482.90657439	27.09342561
12	3	2.00	980	1,960	4.00	899.34852643	80.65147357
13	4	4.20	250	1,050	17.64	288.56699678	-38.56699678
14	5	3.10	320	992	9.61	593.95776160	###########
15	6	4.05	480	1,944	16.40	330.21119198	###########
16	Sumatoria:	19.55	3,300	9,783	67.19	3,300.00000000	0.00000000

PRONÓSTICOS

"Método Cuadrático"

$\hat{y} = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2$

Considere el siguiente conjunto de datos:

x	y
1	2.0
2	1.5
3	4.5
4	4.0
5	5.5
6	4.5
7	6.0

a) Construya el diagrama de dispersión de los datos.

b) Realice el ajuste causal cuadrático

Iteración	x_i	y_i	x^2_i	x^3_i	x^4_i	x_iy_i	$x^2_i\,y_i$
1	1	2.0	1	1	1	2.0	2.0
2	2	1.5	4	8	16	3.0	6.0
3	3	4.5	9	27	81	13.5	40.5
4	4	4.0	16	64	256	16.0	64.0
5	5	5.5	25	125	625	27.5	137.5
6	6	4.5	36	216	1,296	27.0	162.0
7	7	6.0	49	343	2,401	42.0	294.0
Sumatoria:	**28**	**28.0**	**140**	**784**	**4,676**	**131.0**	**706.0**

$5a_0 + (\sum x_i)a_1 + (\sum x_i^2)a_2 = \sum y_i$

$5a_0 + 28a_1 + 140a_2 = 28$ *

$(\sum x_i)a_0 + (\sum x_i^2)a_1 + (\sum x_i^3)a_2 = \sum x_iy_i$

$28a_0 + 140a_1 + 784a_2 = 131$

$(\sum x_i^2)a_0 + (\sum x_i^3)a_1 + (\sum x_i^4)a_2 = \sum x_i^2y_i$

$140a0 + 784a1 + 4{,}676 = 706$

Regla del Sistema Cramer

x	*y*	*z*	**Total**
5	28	140	28
28	140	784	131
140	784	4,676	706

DS

5	28	140	5	28				
28	140	784	28	140				
140	784	4,676	140	784				
2,744,000	3,073,280	3,665,984	3,273,200	3,073,280	3,073,280			
(	9,483,264)	-	(	9,419,760)	=	**63,504**		

DX

28	28	140	28	28				
131	140	784	131	140				
706	784	4,676	706	784				
13,837,600	17,210,368	17,151,568	18,329,920	15,498,112	14,378,560			a_0
(	48,199,536)	-	(	48,206,592)	=	-7,056	÷ 63,504=	**-0.11111111**

DY

5	28	140	5	28				
28	131	784	28	131				
140	706	4,676	140	706				
2,567,600	2,767,520	3,665,984	3,062,780	3,073,280	2,767,520			a_1
(	9,001,104)	-	(	8,903,580)	=	97,524	÷ 63,504=	**1.53571429**

DZ

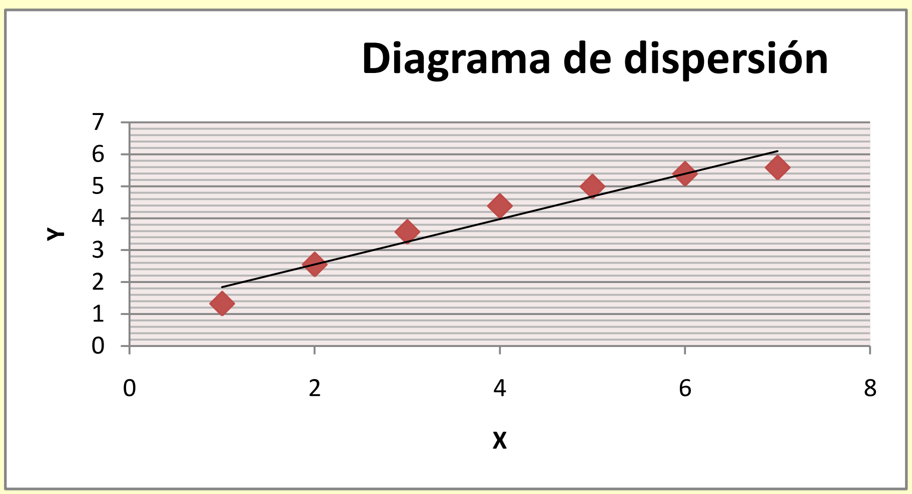
5	28	28	5	28				
28	140	131	28	140				
140	784	706	140	784				
548,800	513,520	553,504	494,200	513,520	614,656			a_2
(	1,615,824)	-	(	1,622,376)	=	-6,552	÷ 63,504=	**-0.1031746**

Comprobación:			
5(-0.11111111) + 28(1.53571429) + 140(-0.1031746) = 28			
-0.555555556	43	-14.44444444	**28** *
28(-0.11111111) + 140(1.53571429) + 784(-0.1031746) = 131			
-3.111111111	215	-81	**131**

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_i + a_2x^2_i$$

Iteración	x_i	y_i	x^2_i	Valor Calculado $\hat{y}$
1	1	2.0	1	1.321428571
2	2	1.5	4	2.547619048
3	3	4.5	9	3.567460317
4	4	4.0	16	4.380952381
5	5	5.5	25	4.988095238
6	6	4.5	36	5.388888889
7	7	6.0	49	5.583333333
Sumatoria:	**28**	**28**	**140**	27.77777778
Promedio:	**4.00**	**4.00**	**20.00**	**3.97**
2	16.00	16.00		

x_i	$\hat{y}$
1	1.32142857
2	2.54761905
3	3.56746032
4	4.38095238
5	4.98809524
6	5.38888889
7	5.58333333



PRONÓSTICOS

"Series de Tiempo"

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x_i + a_2 x^2_i$$

La Escuela Superior de Agronomía está teniendo cada vez menor demanda de alumnos de nuevo ingreso, situación que tiene muy preocupados a sus directivos, su estadística de los últimos 10 años en millares en la siguiente:

Año	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
Alumnos	15.3	14.08	13.5	12.95	12.43	11.98	11.47	10.88	10.32	9.57

Al utilizar el sistema Cramer resulto:

a_0	a_1	a_2
-0.00023604	0.85191505	-0.00791001

¿Cuál será el pronóstico para los tres próximos años?

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2$$

Iteración	x_i	y_i	x^2_i	Valor Calculado $\hat{y}$
1	86	15.30	7396	14.76204503
2	87	14.08	7569	14.24552884
3	88	13.50	7744	13.71319263
4	89	12.95	7921	13.1650364
5	90	12.43	8100	12.60106016
6	91	11.98	8281	12.02126391
7	92	11.47	8464	11.42564764
8	93	10.88	8649	10.81421136
9	94	10.32	8836	10.18695506
10	95	9.57	9025	9.543878751
Sumatoria:	**905**	**122**	**81,985**	122.4788198
Promedio:	**90.50**	**12.25**	**8,198.50**	**12.25**
2	8,190.25	150.01		

Cuando x = 96:

$\hat{Y} = a_0 + a_1(96) + a_2(96)^2 =$ 8.884982425

Cuando x = 97: 8.210266085

Cuando x = 98: 7.51972973

PRONÓSTICOS

"Promedios Móviles"

$$\hat{y}n = \frac{(y_i + \ldots + yn)}{n}$$

"Abarrotes Fernandenses" tiene un registro de sus ventas de azúcar en los pasados 10 meses, los cuales son los siguientes.

Mes	Venta toneladas
1	44
2	42
3	48
4	45
5	46.3
6	44.9
7	45.7
8	47.4
9	47.2
10	46.9

¿Cuál será el pronóstico para el mes próximo?
Aplica promedios móviles utilizando los últimos 5 meses.
Calcula el ECM

x_i	y_i	**Pronóstico mediante promedio móvil simple de 5 meses.**	**Error Cuadrático Medio**
1	44		
2	42		
3	48		
4	45		
5	46.3		
6	44.9	45.06	2,030.40
7	45.7	45.24	2,046.66
8	47.4	45.98	2,114.16
9	47.2	45.86	2,103.14
10	46.9	46.30	2,143.69
11		**46.42**	2,154.82
Promedio			**2,098.81**

PRONÓSTICOS

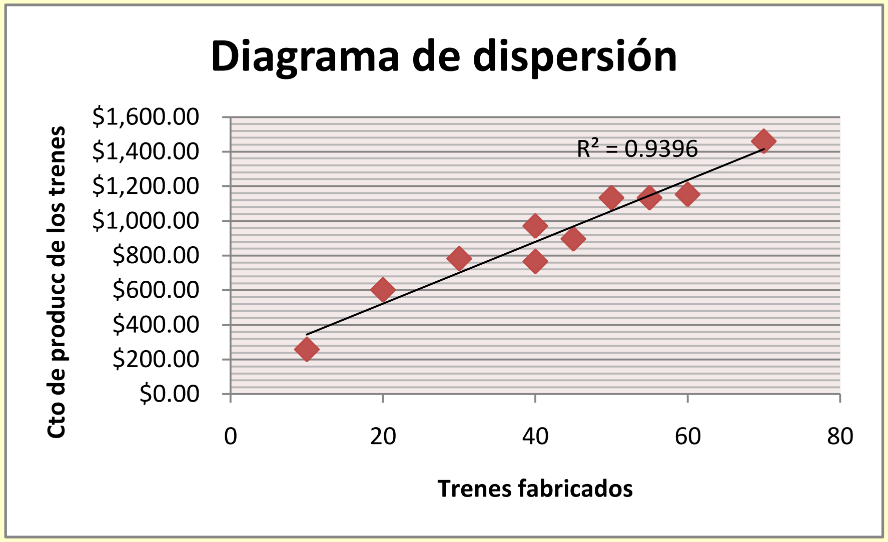
"Regresión Lineal Simple"

$$r = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\sum x^2_i - n\ddot{x}^2)(\sum y^2_i - n\bar{y}^2)}}$$

Durante 10 semanas Giapetto ha observado el número de trenes producidos cada semana y el costo total de producción de aquellos trenes. Esta información se proporciona en la tabla.

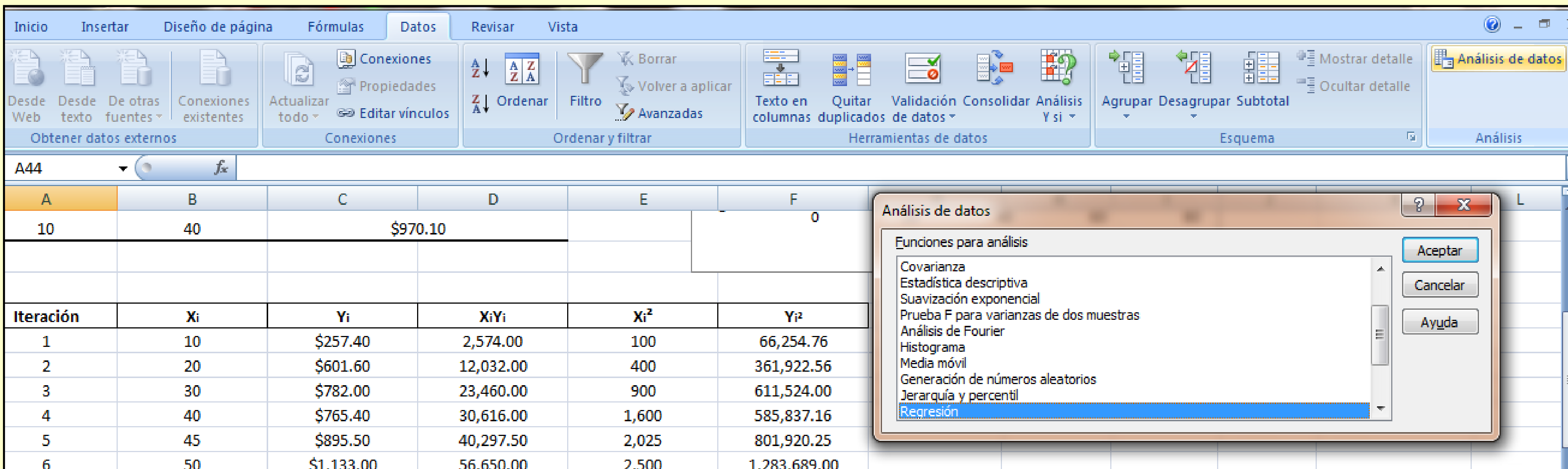
Realiza la gráfica de dispersión y resuelve por el modelo de regresión lineal simple.

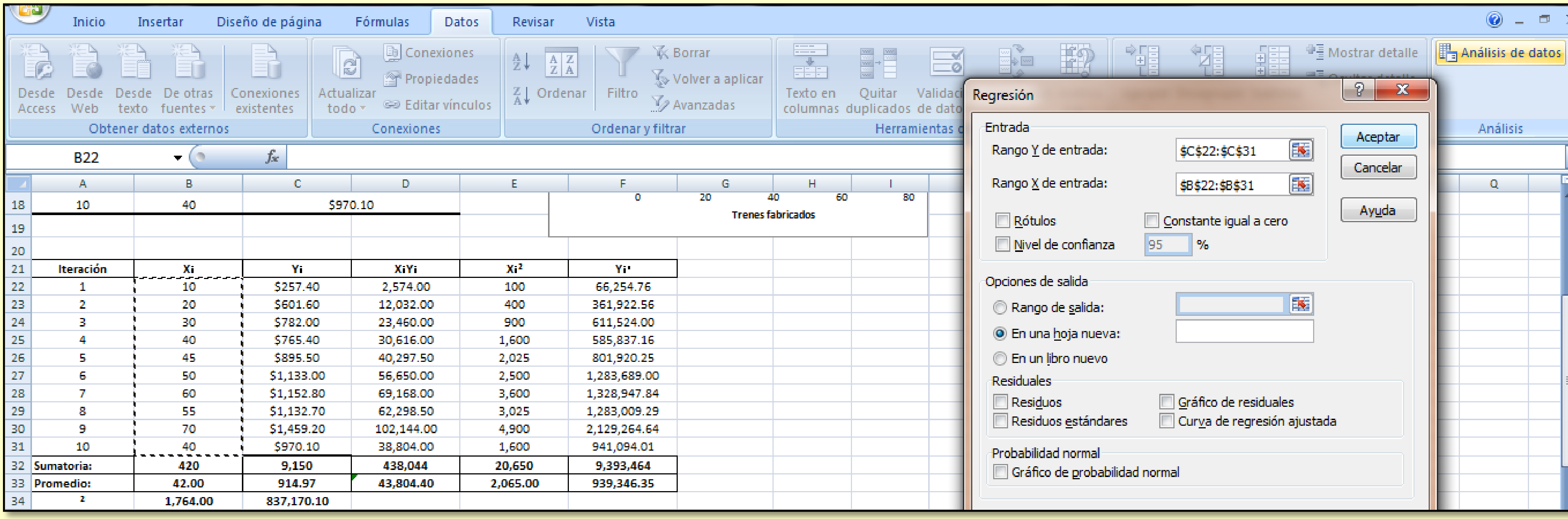
Semana	Trenes fabricados	Costo de producción de los trenes
1	10	$257.40
2	20	$601.60
3	30	$782.00
4	40	$765.40
5	45	$895.50
6	50	$1,133.00
7	60	$1,152.80
8	55	$1,132.70
9	70	$1,459.20
10	40	$970.10



Iteración	x_i	y_i	x_iy_i	x^2_i	$\hat{y}$
1	10	$257.40	2,574.00	100	66,254.76
2	20	$601.60	12,032.00	400	361,922.56
3	30	$782.00	23,460.00	900	611,524.00
4	40	$765.40	30,616.00	1,600	585,837.16
5	45	$895.50	40,297.50	2,025	801,920.25
6	50	$1,133.00	56,650.00	2,500	1,283,689.00
7	60	$1,152.80	69,168.00	3,600	1,328,947.84
8	55	$1,132.70	62,298.50	3,025	1,283,009.29
9	70	$1,459.20	102,144.00	4,900	2,129,264.64
10	40	$970.10	38,804.00	1,600	941,094.01
Sumatoria:	**420**	**9,150**	**438,044**	**20,650**	**9,393,464**
Promedio:	**42.00**	**914.97**	**43,804.40**	**2,065.00**	**939,346.35**
	2		**1,764.00**		**837,170.10**

$$r = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\sum x_i^2 - n\ddot{x}^2)(\sum y_i^2 - n\bar{y}^2)}} = 0.969334265011811$$





Resumen

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.969334265
Coeficiente de determinación R^2	0.939608917
R^2 ajustado	0.932060032
Error típico	87.82464323
Observaciones	10

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	*Suma de cuadrados*	*Promedio de los cuadrados*	*F*	*Valor crítico de F*
Regresión	1	960057.1573	960057.1573	124.4698887	3.72837E-06
Residuos	8	61705.34367	7713.167959		
Total	9	1021762.501			

	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95%	Superior 95%	Inferior 95.0%	Superior 95.0%
Intercepción	164.877907	72.7433294	2.266570809	0.053174264	-2.868511283	332.6243252	- 2.868511283	332.6243252
Variable X 1	17.85933555	1.600785517	11.1566074	3.72837E-06	14.16791753	21.55075357	14.16791753	21.55075357

PRONÓSTICOS

"Regresión Lineal Múltiple"

Deseamos predecir el gasto por mantenimiento (y), durante el año actual, de un camión, a partir de las variables independientes x_1= millas recorridas (en miles) durante el presente año, y x_2= antigüedad del camión (en años) a principios del año actual. Contamos con la información de la tabla.

y	x_1	x_2
$832.00	6	8
$733.00	7	7
$647.00	9	6
$553.00	11	5
$467.00	13	4
$373.00	15	3
$283.00	17	2
$189.00	18	1
$96.00	19	0

Determine el resultado por medio del método de regresión lineal múltiple.

Resumen

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.99997345
Coeficiente de determinación R^2	0.99994691
R^2 ajustado	0.99992921
Error típico	2.10615703
Observaciones	9

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	*Suma de cuadrados*	*Promedio de los cuadrados*	*Valor crítico de F*
Regresión	2	501267.385	250633.692	1.49665E-13
Residuos	6	26.6153846	4.43589744	
Total	8	501294		

	Coeficientes	*Error típico*	*Estadístico t*	*Probabilidad*	*Inferior 95%*	*Superior 95%*	*Inferior 95.0%*	*Superior 95.0%*
Intercepción	17.7384615	31.0270968	0.57170871	0.588280636	-58.1821092	93.6590323	-58.1821092	93.6590323
Variable X 1	4.06153846	1.56741977	2.59122575	0.041144122	0.226200459	7.89687646	0.22620046	7.89687646
Variable X 2	98.5076923	2.75642815	35.7374425	3.20051E-08	91.76295562	105.252429	91.7629556	105.252429

Por lo tanto pronosticaríamos un costo de mantenimiento anual para un camión a partir de:

$$\hat{y} = 17.74 + 4.06x_1 + 98.51x_2$$

En el caso de un vehículo de 5 años de antigüedad que recorrió 10,000 millas durante un año, pronosticaríamos costos de mantenimiento anual de:
17.74 + 4.06 (10) + 98.51 (5) = $550.89

3.10 Ejercicios Propuestos

1.- Considere el siguiente conjunto de datos:

x	100	70	30	40	80	60	50	20	10	90
y	57	40	35	33	56	46	45	26	26	53

a) Construya un diagrama de dispersión con esos datos.

b) Ajuste una línea recta a los datos usando en método de mínimos cuadrados.

c) Use la función deducida en la parte b para pronosticar un valor de y cuando x=120

2.-Considere el siguiente conjunto de datos, considerando que x es la variable independiente y y la dependiente.

x	30	25	20	15	10	5
y	65	60	50	30	25	10

a) Haga el diagrama de dispersión de esos datos.

b) Ajuste una línea recta a los datos mediante el método de mínimos cuadrados.

3.- Considere el siguiente conjunto de datos:

Tiempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Demanda	96	78	40	65	92	60	50	70	100	84	46	78

a) Grafique esta serie de tiempo. Una los puntos mediante una línea recta.

b) Use el promedio móvil simple de 4 periodos para la demanda del periodo 13.

c) ¿Le parece un buen recurso de predicción a la vista de los datos?

d) Repita las indicaciones de los incisos anteriores con el siguiente conjunto de datos:

Tiempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Demanda	20	34	14	7	18	30	22	9	20	35	25	13

4.- La Escuela Normal Río Verde tiene una estadística de sus alumnos de nuevo ingreso durante los pasados 10 años, la cual es la siguiente:

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de Alumnos	550	485	525	530	542	493	487	502	528	499

¿Cuál será el pronóstico para el año próximo?

Resuelva por promedios móviles utilizando los últimos 4 años.

5.- "Bebidas Finas de la Zona Media" tiene su registro de ventas de los pasados 3 años. El cual se presenta desglosado por meses en la siguiente tabla.

Mes y Año	**1993**	**1994**	**1995**
Enero	1500	1600	1610
Febrero	1750	1700	1720
Marzo	2500	2300	2400
Abril	2800	2850	2800
Mayo	3100	3150	3150
Junio	2950	3050	3000
Julio	2900	2850	2850
Agosto	2850	2830	2820
Septiembre	2500	2620	2550
Octubre	2470	2510	2500
Noviembre	2100	2080	2100
Diciembre	1800	1790	1800
Total	29220	29330	29300

¿Cuál será el pronóstico para cada mes del año 96?

6.-"Helados Ricosa" tiene registros de ventas en litro de helado por trimestre de los 3 años pasados, los que se incluyen en la siguiente tabla.

¿Cuál será el pronóstico para cada trimestre del año entrante?

	Año		
Periodo	1	2	3
Trimestre 1	1200	1250	1420
Trimestre 2	2400	2700	2860
Trimestre 3	2600	3100	3160
Trimestre 4	1700	1900	2060
Total	7900	8950	9500

7.- La empresa "Don Cacahuate" tiene sus ventas de los últimos 10 años, las cuáles se presentan en la siguiente tabla en millares de toneladas.

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Venta	3.7	4.1	4.4	4.85	5.35	6	6.6	6.95	7.4	7.8	57.15

¿Cuánta venta se pronostica para los próximos 5 años?

8.- La tienda SAM lleva un registro sobre su venta de switches de tipo M r de tipo N, la cual es la siguiente expresada en miles.

Año	89	90	91	92	93	94	95
Tipo M	89.3	95.6	103.1	109.4	116	123.1	129.6
Tipo N	145	153	162	171	179.7	187.3	195

¿Cuál será el pronóstico para los 3 años próximos para cada tipo de switch?

CAPITULO 4

Modelos de redes de programación lineal (PL)

4.1 Introducción

El tema de los modelos de redes es uno de los más interesantes de los que estudian en la actualidad los científicos de la administración. En este capítulo consideraremos a las redes en general y mostraremos como se puede plantear como problemas de programación lineal. Después se intentará revisar las numerosas y variadas aplicaciones de estas redes de PL.

Se comenzará el análisis con el estudio de un caso referido a un ejemplo clásico de red. Se planteará este caso como problema de programación lineal y se analizarán las características de ese planteamiento. Presentaremos definiciones y terminología que se utilizan en el estudio de redes. En este punto, se presentarán y se revisarán 6 modelos de redes que son bien conocidos.

El capitulo se orientará más que nada a los planteamiento, dado que estaremos interesados en mostrar que diferentes problemas de redes tienen planteamientos similares que pueden resolverse a través de la programación lineal.

4.1.2 Caso Toyonson Motors, Inc.

El gerente de programación de la Toyoson Motors Inc, de la región oriental de Estados Unidos, Sam Jenkins, está interesado en elaborar un plan semanal para el envió de automóviles de su puerto de entrada a diversos distribuidores regionales. Para elaborar el plan, ha recopilado datos sobre costos de transporte por automóvil en todo el país, necesidades mensuales de automóviles de cada distribuidor y llegadas mensuales de automóviles a cada puerto de entrada. Los automóviles se pueden enviar en forma directa a cada distribuidor o puede enviarse un conjunto de ellos a un distribuidor, descargar algunos, y enviar el resto a algún distribuidor. E el mapa de la figura 4.1 se muestra las demandas de los distribuidores locales en los puertos de entrada de las respectivas disponibilidades.

En la tabla 4.1 se muestran, en dólares por automóvil, los costos del transporte entre los puertos de entrada, las ciudades de transbordo y las ciudades que son destinos finales. En los casos en que no existe relación directa entre un par de ciudades no se muestran los costos.

Sam necesita determinar cuántos automóviles se deben enviar de Jacksonville y Nueva Orleans a cada una de las otras ciudades, para que sean vendidos allí o transferidos a alguna otra ciudad. Se da cuenta de que no es difícil encontrar un plan de envíos que satisfaga las necesidades de todas las ciudades pero, ¿será el plan más económico? Dado que Sam tiene una maestría en administración de empresas, sabe que existen modelos matemáticos como la programación lineal que pueden utilizarse para determinar una asignación de costo mínimo de algunos recursos, sujeta a algún conjunto de restricciones. Pero no está seguro de la forma en que se ajustaría un modelo de estos a un problema como el que enfrenta. Le preocupan un par de cosas acerca del uso de la PL. En primer lugar está el supuesto de divisibilidad: ¿una solución de PL implicaría enviar una fracción de automóvil a alguna ciudad? Es evidente que una solución así no sería utilizable. En segundo lugar, aunque parece que el problema de la región oriental es un tanto reducido, si se considera a la totalidad de Estados Unidos, la magnitud del problema de distribución podría ser enorme. ¿Podría la programación lineal manejar todas las combinaciones diferentes de ciudades que podrían existir?

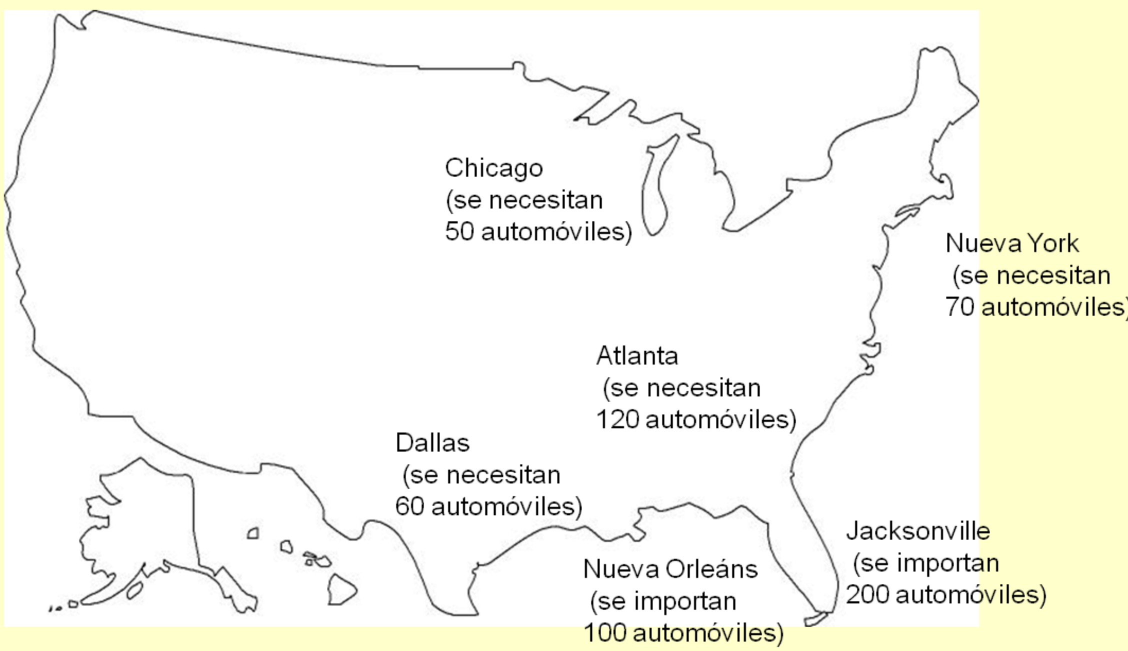


Figura 4.1 Red de distribución de Toyonson

De: ciudad	A: ciudad Atlanta	Dallas	Nueva York	Chicago
Jacksonville	$ 75.00	-	$ 150.00	-
Nueva Orleáns	$ 125.00	$ 100.00	-	-
Atlanta	-	-	$ 125.00	$ 150.00
Dallas	-	-	-	$ 100.00

Tabla 4.1 Toyonson Motors, Inc; costos del transporte por automóvil

4.1.3 Análisis de la Toyonson Motors Inc.

El problema de Sam Jenkins consiste en determinar la forma de enviar los automóviles de manera que se minimicen los costos y, al mismo tiempo, que se satisfagan las necesidades de todos los distribuidores. Para ayudar a comprender el problema, se presenta en una forma distinta en la figura 4.2, en la cual los círculos representan a cada uno de los puertos de entrada y los distribuidores y las flechas las relaciones entre ellos. También se utilizan flechas para mostrar las disponibilidades y las de mandas en cada ciudad. Una flecha que llega a una ciudad indica automóviles que llegan a ésta para su distribución, y una flecha que sale de una ciudad representa su demanda. Por ejemplo, Dallas tiene una demanda de 60 automóviles, los cuales deben obtenerse en Nueva Orleáns, pero también podría actuar como un punto de transbordo para automóviles que van Chicago. Se puede observar que la demanda total de los distribuidores es igual a la disponibilidad u oferta en los puertos de entrada. Aunque esto no es indispensable para formular el problema, simplifica las cosas.

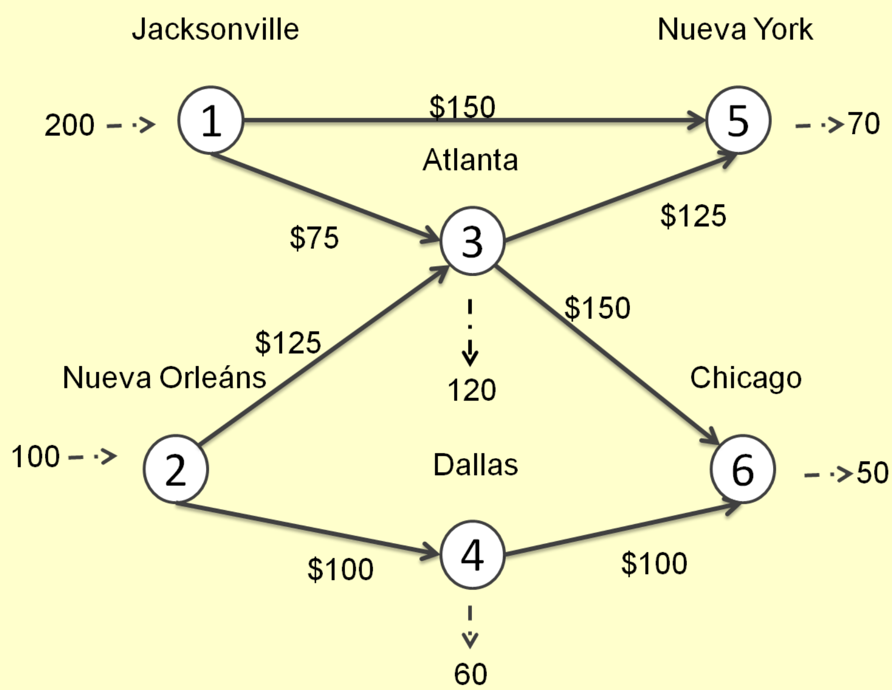


Figura 4.2 Red modificada de distribución Toyonson

4.2 Terminología de Redes

Puede considerarse que cualquier red está formada por 3 componentes: (1) nodos, (2) arcos y (3) flujo de arcos. Observe la figura 4.3, que ilustra esto. Los círculos son los nodos, y están unidos por arcos. En esta figura se observan 2 tipos de arcos, dirigidos y no dirigidos. Un arco dirigido es aquel sobre el cual puede moverse el flujo en una sola dirección, y uno no dirigido es aquel sobre el cual puede moverse el flujo en cualquier sentido. El arco que une los nodos 1 y 2 es un arco dirigido; elo arco que une los nodos 1 y 3 es no dirigido.

Por lo general, los nodos se enumeran, tal como se ha mostrado en la figura 4.3, y los arcos se denotan por los nodos que unen. Por ejemplo, el arco que une los nodos 1 y 2 se identificaría como arco 12. El flujo que pasa de un nodo a otro a través de una arco es un factor desconocido en la red y que se denota como x_{ij} para el flujo entre los nodos i y j

El flujo de una red puede constar de muchos bienes o productos distintos. Unos cuantos ejemplos serían: gas natural en un gasoducto; distribución de artículos de mayoristas a detallistas o entre fábricas y almacenes; y asignación de producción a periodos de tiempo. El costo unitario del flujo para cada arco se denota como c_{ij} para los nodos i y j. En el caso de la Toyonson Motors, las ciudades son los nodos y las rutas de transporte entre las ciudades son los arcos. El costo por automóvil para cada ruta es el costo de flujo. En algunos problemas pueden existir capacidades para cada arco que limiten la cantidad de flujo.

Puede definirse una red como un conjunto de nodos, arcos y flujos que pasan de un nodo a otro a través de los arcos. En una red, existirán ciertas combinaciones de nodos y arcos que tienen propiedades especiales. Una **cadena** es una sucesión de nodos y arcos que conectan un nodo *L* a un nodo *K*. En la figura 4.3, el conjunto de nodos 1, 2, 3, 4 y los correspondientes arcos forman una cadena, tal como se muestra en la figura 4.4. Una cadena que conecta a un nodo consigo mismo es un **anillo**. Por ejemplo en la figura 4.3, la cadena que conecta al nodo 1 consigo mismo, a través de los nodos 2 y 3, es un anillo. Esto se representa en la figura 4.5.

Se conoce como **árbol abierto** a un subconjunto de los arcos de la red original que conecta todos los nodos pero que no pero que no contiene ningún circuito. Un ejemplo de un árbol abierto para figura 4.3 se muestra en la figura 4.6. Observe que la cadena que se presenta en la figura 4.4 es también un árbol abierto.

Un árbol abierto de una red es especial porque corresponde a una solución básica para las restricciones de la programación lineal que corresponden al problema de la red. Por ejemplo, la solución óptima para el problema de la Toyonson Motors es:

$$x_{15} = 70, \quad x_{13} = 130, \quad x_{24} = 100, \quad x_{46} = 40, \quad x_{36} = 10$$

Si trazamos una red incluyendo sólo estos arcos, obtendremos la figura 4.7, que evidentemente es un árbol abierto; también esto es básico en un problema de programación lineal. En general, todos los arboles abiertos corresponden a soluciones básicas, pero no siempre a soluciones *factibles* básicas. Esta correspondencia entre árboles abiertos y soluciones básicas de programación lineal es otra propiedad importante de las redes, que permite el uso de métodos especiales de programación lineal para resolver con rapidez redes que se plantean en forma de problemas de programación lineal.

Por último un problema de *flujo de costo mínimo* es un problema de redes en que se pretende encontrar un flujo de costo mínimo entre nodos y arcos que satisfaga todas las demandas utilizando toda la oferta disponible.

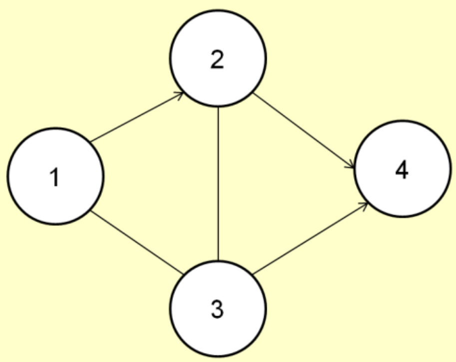


FIGURA 4.3.Red

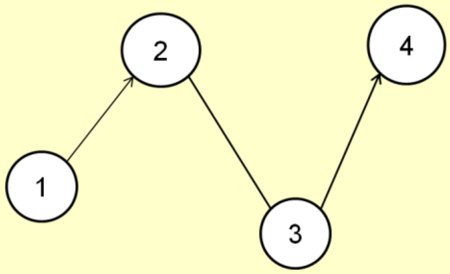


FIGURA 4.4 Cadena

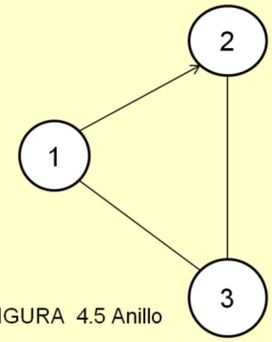


FIGURA 4.5 Anillo

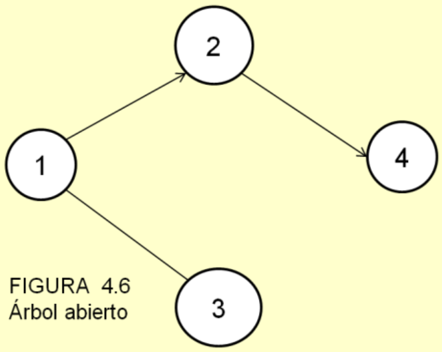


FIGURA 4.6
Árbol abierto

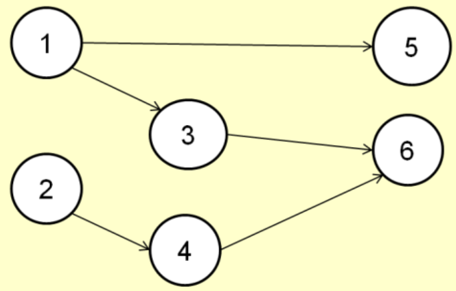
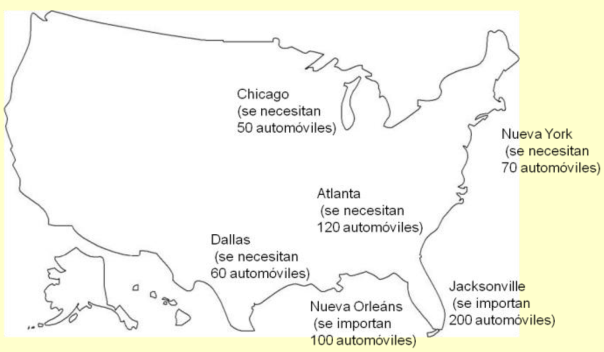
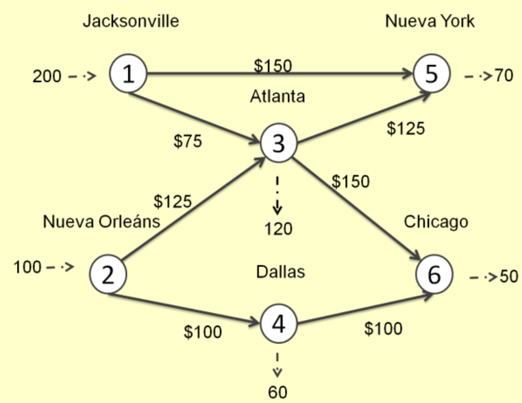


FIGURA 4.7 Solución básica

4.3 Análisis de una Red de Distribución de Automóviles





El problema consiste en determinar la forma de enviar los automóviles de manera que se minimicen los costos y al mismo tiempo que se satisfagan las necesidades de todos los distribuidores, la figura que se presenta es un mapa de la distribución de la red de ciudades, en la cual los círculos representan a cada uno de los puertos de entrada y los distribuidores y las flechas las relaciones entre ellos. También se utilizan flechas para mostrar las disponibilidades y las demandas de cada ciudad. Una flecha que llega a una ciudad indica automóviles que llegan a esta para su distribución y una flecha que sale de una ciudad representa su demanda, por ejemplo, Dallas tiene una demanda de 60 automóviles, los cuales deben obtenerse en Nueva Orleans, pero también podría actuar como punto de transbordo para automóviles que van de Chicago. Se puede observar que la demanda total de los distribuidores es igual a la disponibilidad u oferta en los puertos de entrada.

4.3.1 Planteamiento de Programación Lineal (PL)

Para definir las variables de este problema, hemos numerado las ciudades del 1 al 6. Entonces las variables representarán el número de automóviles que se transportan de una ciudad a otra, es decir, x_{ij} = número de automóviles que se envían de la ciudad i a la j

Por ejemplo, x_{13} = numero de automóviles que se envían de Jacksonville a Atlanta, y x_{36} = numero de automóviles que se envían de Atlanta a Chicago.

El objetivo es minimizar el costo total del transporte de automóviles. Si c_{ij} = costo de enviar un automóvil de la ciudad i a la ciudad a la j, entonces el costo total para esta ruta es $c_{ij}\, x_{ij}$. Por ejemplo, $75x_{13}$. Entonces, la función objetivo es:

MINIMIZAR: $$75x_{13} + 150x_{15} + 125x_{23} + 100x_{24} + 125x_{35} + 150x_{36} + 100x_{46}$$

En Jacksonville (ciudad 1), se debe anotar una restricción que dé cuenta de todos los automóviles que llegan. En este puerto de entrada, se deben enviar los 200 automóviles que llegan cada mes ya sea a Atlanta o a la ciudad de Nueva York. En términos matemáticos, esta restricción sería:

$$x_{13} + x_{15} = 200$$

Número de automóviles que salen de Jacksonville = Número de automóviles que llegan a Jacksonville

De manera similar, desde nueva Orleans deben enviarse todos los automóviles que llegan a Atlanta o a Dallas. En términos matemáticos esto se representa como:

$$x_{23} + x_{24} = 100$$

Número de automóviles que salen de Nueva Orleans = Número de automóviles que llegan a Nueva Orleans

En Atlanta se tienen automóviles que llegan, otros que salen y otros que se quedan ahí. Aquí es importante recordar que la diferencia entre el número de automóviles que llegan y el número de los que salen debe ser igual al número de automóviles que permanece en Atlanta. En términos matemáticos, esto se escribe como:

$$x_{13} + x_{23} - x_{35} - x_{36} = 120$$

Número de automóviles que llegan a Atlanta – Número de automóviles que salen de Atlanta = Demanda en Atlanta

Esta clase de relación es aplicable también a Dallas, en donde la restricción tendría la siguiente forma:

$$x_{24} - x_{46} = 60$$

Numero de automóviles que llegan a Dallas –Número de automóviles que salen de Dallas = Demanda en Dallas

A la ciudad de Nueva York y a Chicago solo llegan automóviles para satisfacer su demanda. En este caso, la suma de los automóviles que llegan debe ser igual a la demanda. En términos matemáticos, para la ciudad de Nueva York, la restricción es:

$$x_{15} + x_{35} = 70$$

Número de automóviles que llegan a Nueva York = Demanda en Nueva York

Por último, la restricción para Chicago sería:

$$x_{36} + x_{46} = 50$$

Número de automóviles que llegan a Chicago = Demanda en Chicago

En conjunto, el planteamiento de programación lineal

MINIMIZAR:

$75x_{13}$ +	$150x_{15}$ +	$125x_{23}$ +	$100x_{24}$ +	$125x_{35}$ +	$150x_{36}$ +	$100x_{46}$	
x_{13} +	x_{15}						= 200
		x_{23} +	x_{24}				= 100
x_{13} +		x_{23} –		x_{35} –	x_{36}		= 120
			x_{24} –			x_{46}	= 60
	x_{15} +			x_{35}			= 70
					x_{36} +	x_{46}	= 50
x_{13},	x_{15},	x_{23},	x_{24},	x_{35},	x_{36},	x_{46}	$\geq$ 0

Ahora podría resolverse este problema a través de programación lineal utilizando los procedimientos simplex comunes. Si esto se llevara a cabo, encontraríamos que la solución óptima es:

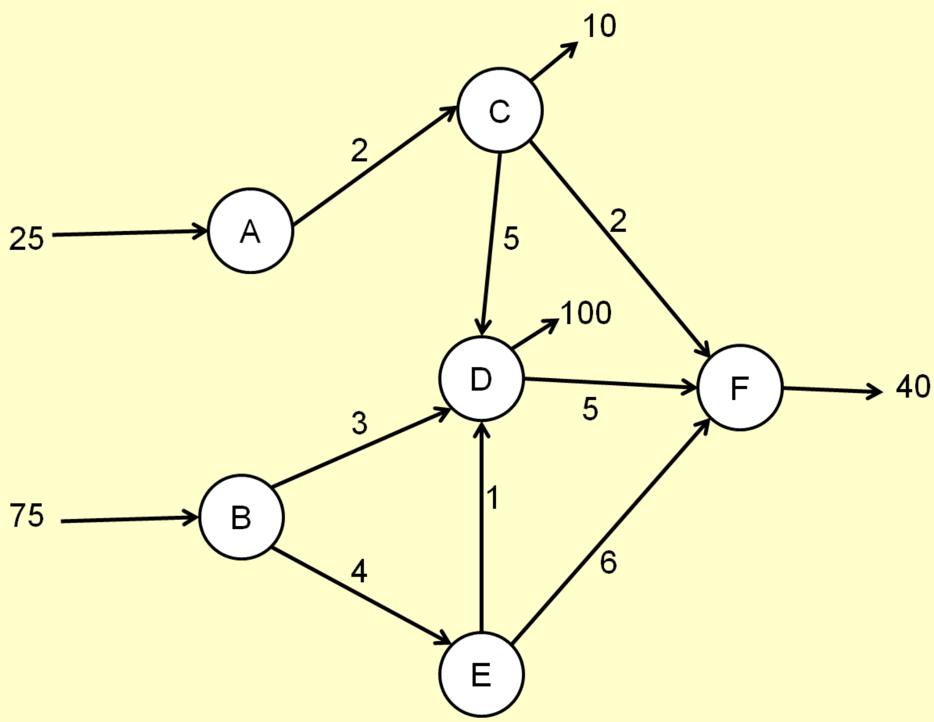
$$x_{15} = 70, \quad x_{13} = 130, \quad x_{24} = 100, \quad x_{46} = 40, \quad x_{36} = 10$$

lo que da un costo total de $35,750.

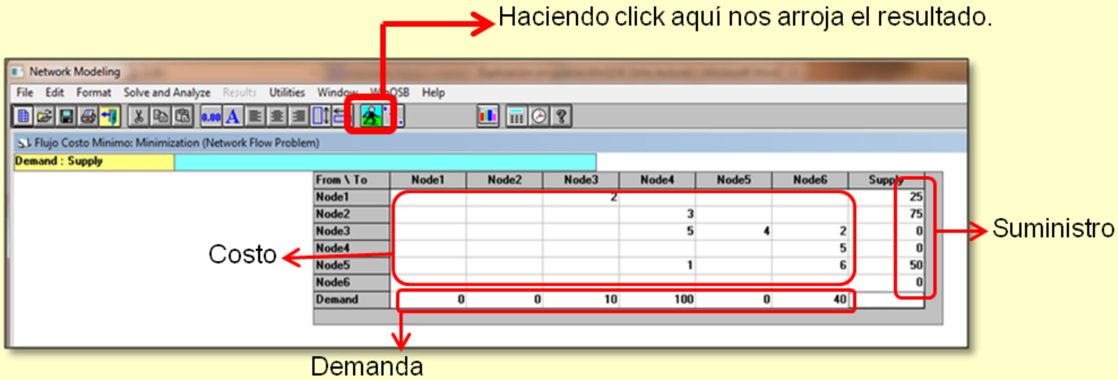
4.4 Problemas propuestos de Flujo de Costo Mínimo.

Considerando las siguientes representaciones en forma de red de un problema de costo mínimo que aparecen en las siguientes figuras, desarrolle el planteamiento de programación lineal considerando que se muestran los costos mínimos para cada arco. Determine el menor costo para un problema de transbordo (flujo de costo mínimo) y la ruta más corta.

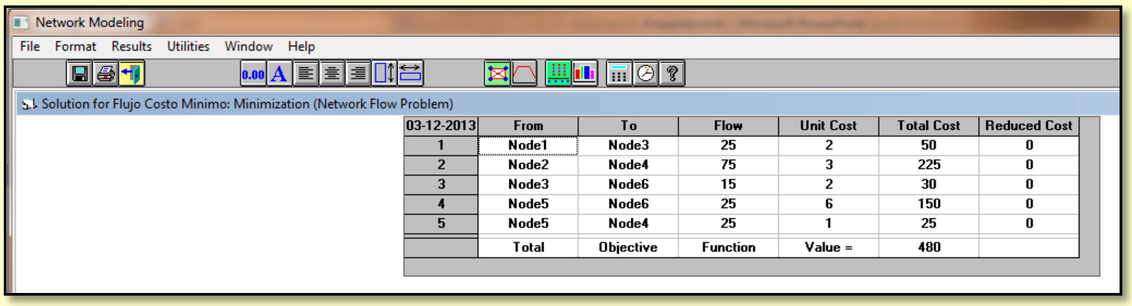
a)



F.O.	$2x_{ac}$	$+ 3x_{bd}$	$+ 4x_{be}$	$+ 5x_{cd}$	$+ 2x_{cf}$	$+ 5x_{df}$	$+ 1x_{ed}$	$+ 6x_{ef}$	
S.A.	x_{ac}								= 25
		x_{bd}	$+ x_{be}$						= 75
	x_{ac}			$- x_{cd}$		$- x_{df}$			= 10
		x_{bd}		$+ x_{cd}$		$- x_{df}$	$+ x_{ed}$		100
			x_{be}				$- x_{ed}$	$- x_{ef}$	= 50
					x_{cf}	$+ x_{df}$		$+ x_{ef}$	= 40

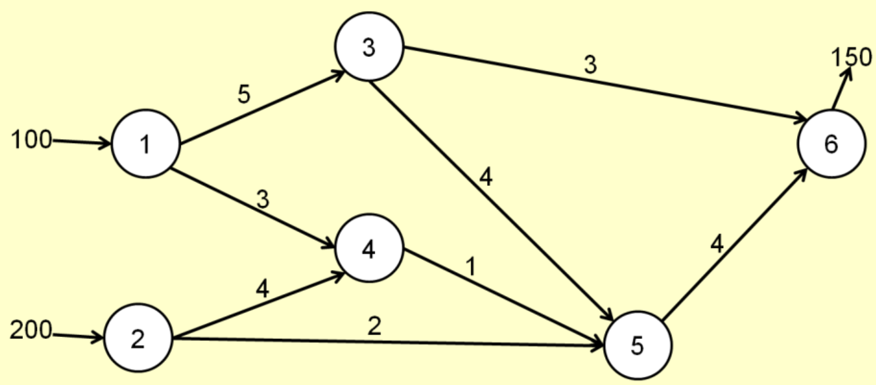


From \ To	Node1	Node2	Node3	Node4	Node5	Node6	Supply
Node1			2				25
Node2				3			75
Node3				5	4	2	0
Node4						5	0
Node5				1		6	50
Node6							0
Demand	0	0	10	100	0	40	

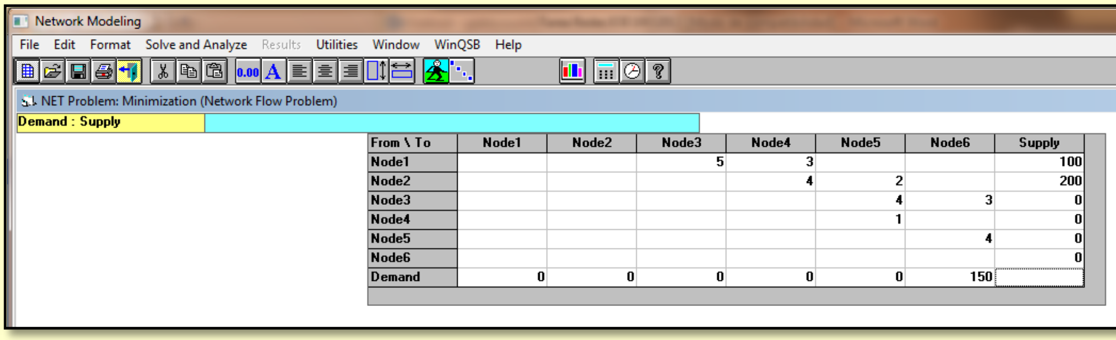


03-12-2013	From	To	Flow	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Node1	Node3	25	2	50	0
2	Node2	Node4	75	3	225	0
3	Node3	Node6	15	2	30	0
4	Node5	Node6	25	6	150	0
5	Node5	Node4	25	1	25	0
	Total	Objective	Function	Value =	480	

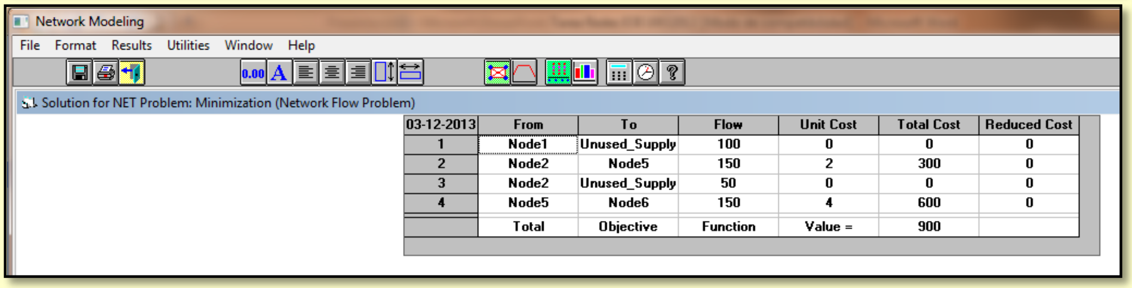
b)



F.O.	$5x_{13}$	$+ 3x_{14}$	$+ 4x_{24}$	$+ 2x_{25}$	$+ 4x_{35}$	$+ 3x_{36}$	$+ 1x_{45}$	$+ 4x_{56}$	
S.A.	x_{13}	$+ x_{14}$							$= 100$
			x_{24}	$+ x_{25}$					$= 200$
	x_{13}				$- x_{35}$	$- x_{36}$			$= 0$
		x_{14}	$+ x_{24}$				$-x_{45}$		$= 0$
				x_{25}	$+ x_{35}$		$+ x_{45}$	$- x_{56}$	$= 150$
						x_{36}		$+ x_{56}$	$= 150$



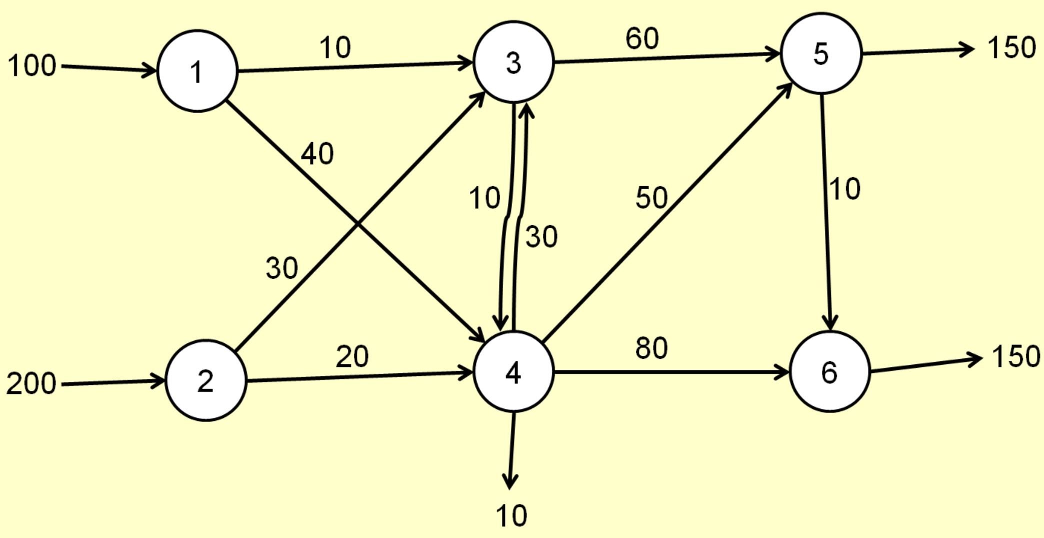
From \ To	Node1	Node2	Node3	Node4	Node5	Node6	Supply
Node1			5	3			100
Node2				4	2		200
Node3					4	3	0
Node4					1		0
Node5						4	0
Node6							0
Demand	0	0	0	0	0	150	



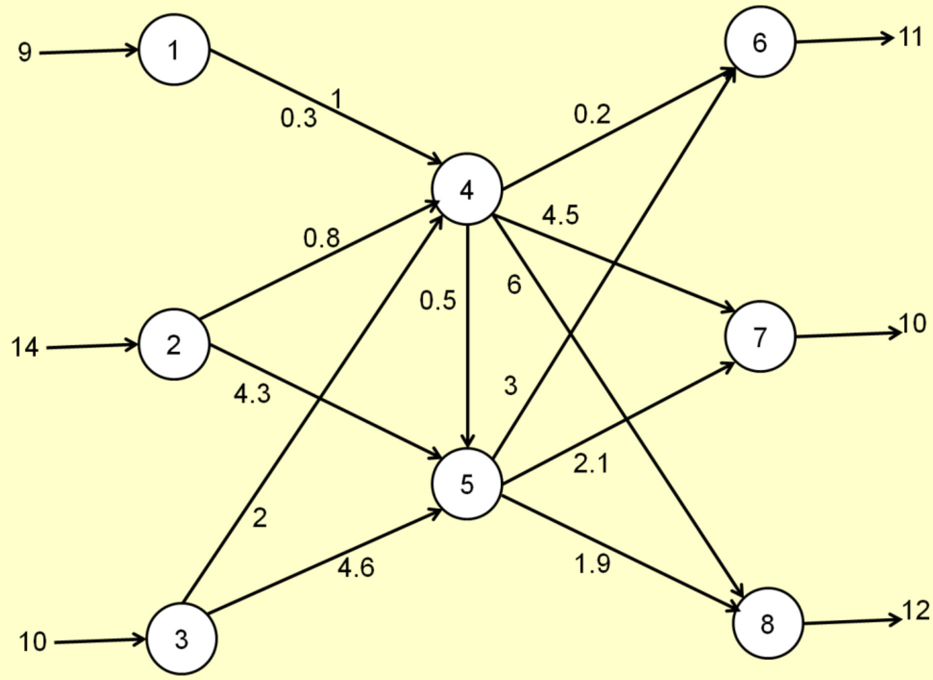
03-12-2013	From	To	Flow	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Node1	Unused_Supply	100	0	0	0
2	Node2	Node5	150	2	300	0
3	Node2	Unused_Supply	50	0	0	0
4	Node5	Node6	150	4	600	0
	Total	Objective	Function	Value =	900	

Los siguientes problemas consisten en determinar la forma de minimizar los costos y, al mismo tiempo, que se satisfagan las necesidades de todos los distribuidores/proveedores. Se puede observar que la demanda total de los distribuidores/proveedores es igual a la disponibilidad u oferta en los puertos de entrada. Realice un planteamiento de programación lineal para los siguientes modelos de redes.

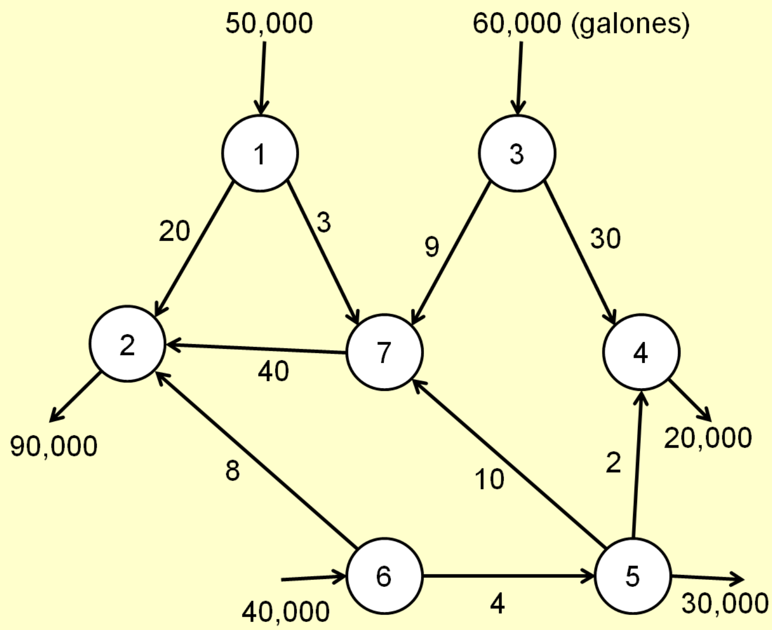
c)



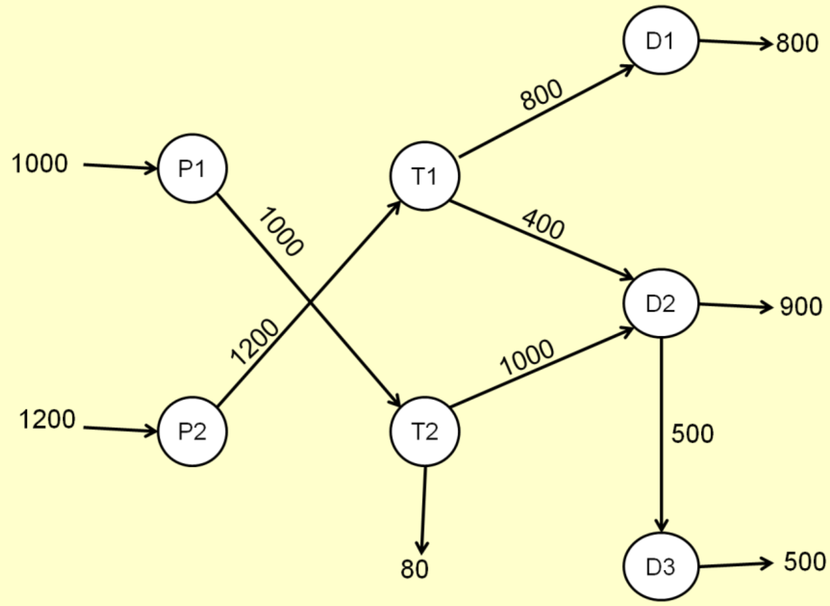
d)


9
14
10
1
2
3
4
5
6
7
8
1
0.3
0.8
4.3
2
4.6
0.5
6
3
0.2
4.5
2.1
1.9
11
10
12

e)


50,000
60,000 (galones)
1
3
2
7
4
6
5
20
3
9
30
40
90,000
8
10
2
20,000
40,000
4
30,000

f)



4.5 WinQSB 2.0

WinQSB 2.0 es un paquete de herramientas desarrolladas por el Dr. Yih-Long Chang para solucionar y automatizar problemas de carácter complejo.

Concretamente, WinQSB 2.0 incluye módulos para el análisis de muestreos, programación dinámica, elaboración de pronósticos, teoría y sistemas de inventarios, programación de jornadas de trabajo, procesos y cadenas de Markov, planificación de recursos, modelado de redes, programación no lineal, PERT y CPM, programación cuadrática, entre otras posibilidades.

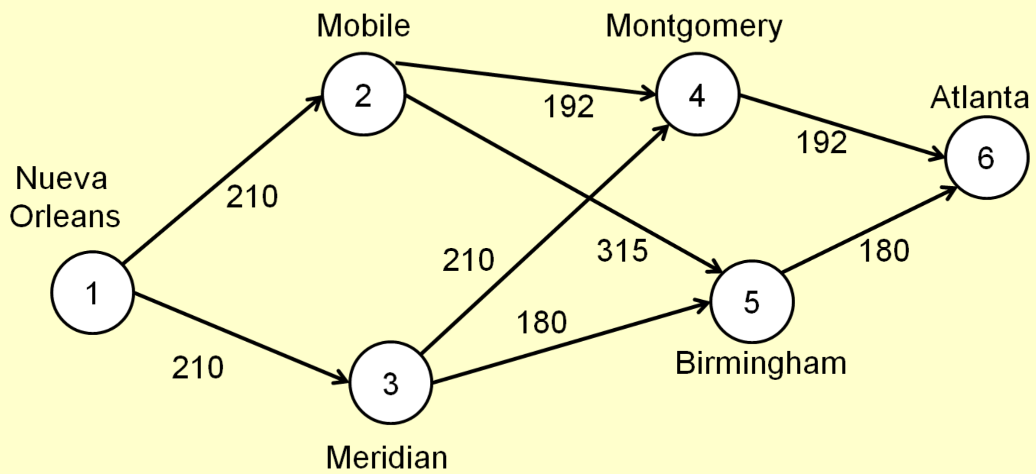
En total, el paquete incluye un total de 19 módulos especializados. Cada módulo dispone de su propio entorno, una serie de ejemplos, ayudas y las funciones necesarias para plantear, analizar y solucionar los problemas.

4.6 El problema de la ruta más corta

Si se define una red de manera que los coeficientes de cada arco sean no negativos (tal como medidas de distancia), entonces podríamos estar interesados en encontrar la ruta más corta entre dos nodos de la red. A este problema se le conoce como el problema de la ruta más corta.

Considere el problema de viajar en automóvil de Nuevo Orleans a Atlanta en el tiempo más corto, dentro de lo legal.

Las carreteras que enlazan estas dos ciudades forman la red que se muestra en la siguiente figura, en donde las "distancias" son los tiempos de viaje en automóvil dados en minutos.



Ruta de manejo de Nueva Orleans a Atlanta

Observe que con el objeto de plantear este problema en forma de problema de costo mínimo, puede elegirse en cualquier nodo sólo el camino a través de un arco. Esto implica que es necesario tener los siguientes flujos en los arcos.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si se viaja a través de la carretera entre la ciudad } \boldsymbol{i} \text{ y la ciudad } \boldsymbol{j}. \\ 0 \text{ de 0tra manera.} \end{cases}$$

Si se recorre la ruta ***(i , j)***, esto significa que no puede utilizarse ninguna otra ruta que parta de la ciudad i. Por ejemplo, si se viaja por la carretera de Nueva Orleans a Mobile, entonces el flujo entre esas ciudades será igual a ***1*** y x_{13} será cero.

Es posible satisfacer estas condiciones utilizando en la red un flujo imaginario de una unidad. Este flujo parte del nodo de salida u ***origen*** y llega al nodo final o ***terminal***. En otras palabras, existe un ***suministro*** de una unidad en el origen y una ***demanda*** de una unidad en el nodo terminal. En nuestro ejemplo, habría un suministro (u oferta) de una unidad en Nueva Orleans y una demanda por esa misma unidad en Atlanta.

La última pregunta que permanece pendiente es: ¿Qué costos deben utilizarse en este problema de flujo mínimo? Para responder esta pregunta, observe que si x_{ij} = 1, entonces será necesario viajar de los nodos i al j. Si se denotan estas distancias mediante d_{ij} y si se utiliza la ruta entre i y j, entonces el costo para esa ruta se convierte en $d_{ij}x_{ij}$. Dado que x_{ij} es cero ó uno, el costo para cualquier ruta será d_{ij}, o cero. Por esto, podemos utilizar las distancias, d_{ij}, como los costos para el problema del flujo de costo mínimo. Ahora, podemos plantear el problema de la siguiente manera:

Minimizar:	$210x_{12}$	$+210x_{13}$	$+192x_{24}$	$+315x_{25}$	$+210x_{34}$	$+180x_{35}$	$+192x_{46}$	$+180x_{56}$	
Sujeto a:									
Nueva Orleans	x_{12}	$+x_{13}$							$= 1$
Mobile	x_{12}		$-x_{24}$	$-x_{25}$					$= 0$
Meridian		x_{13}			$-x_{34}$	$-x_{35}$			$= 0$
Montgomery			x_{24}		$+x_{34}$		$-x_{46}$		$= 0$
Birmingham				x_{25}		$+x_{35}$		$-x_{56}$	$= 0$
Atlanta							x_{46}	$+x_{56}$	$= 1$
		$x_{ij} \geq 0$ para toda i y toda j							

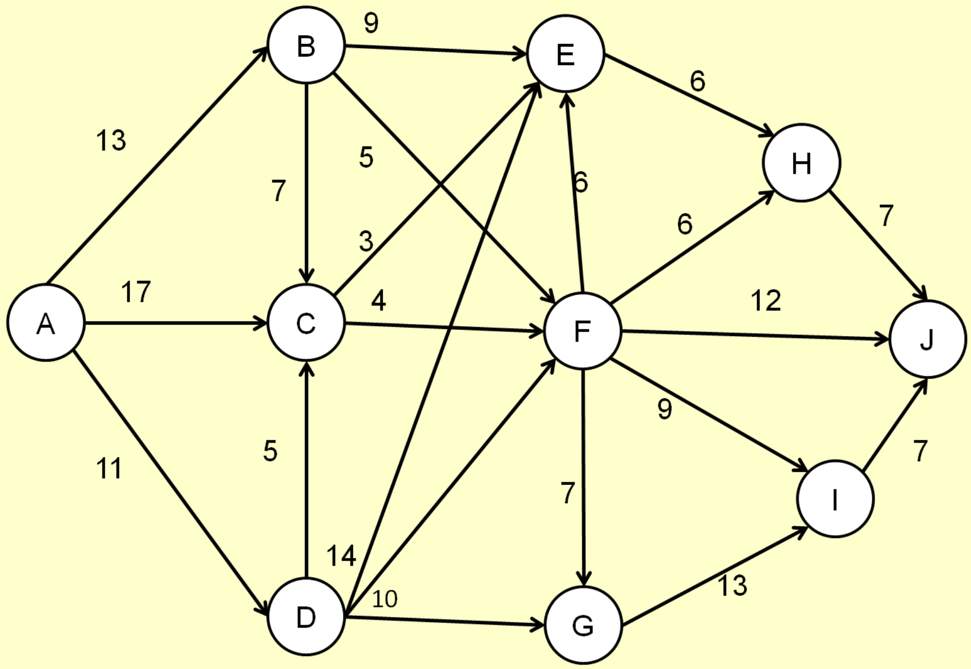
Para propósitos de análisis, se ha anotado con qué ciudad se relaciona cada restricción. La restricción de Nueva Orleans establece que puede utilizarse la carretera que va a Mobile o la que va a Meridian, pero no ambas. Se sabe que las soluciones de programación lineal para problemas de redes son enteras, por lo cual estamos seguros de que $x_{12} = 1$ ó 0 y que $x_{13} = 1$ ó 0, al tiempo que la restricción impone que $x_{12} = 1$ ó que $x_{13} = 1$, pero no ambas.

Las restricciones de Mobile, Meridian, Montgomery y Birmingham requieren todas que el flujo que llega a esos nodos (ciudades) sea igual al flujo que sale, puesto que no existe demanda en ninguno de ellos. La restricción para Atlanta exige llegar a esta ciudad ya sea de Birmingham o de Montgomery, obligando a que la suma de los flujos sea igual a 1.

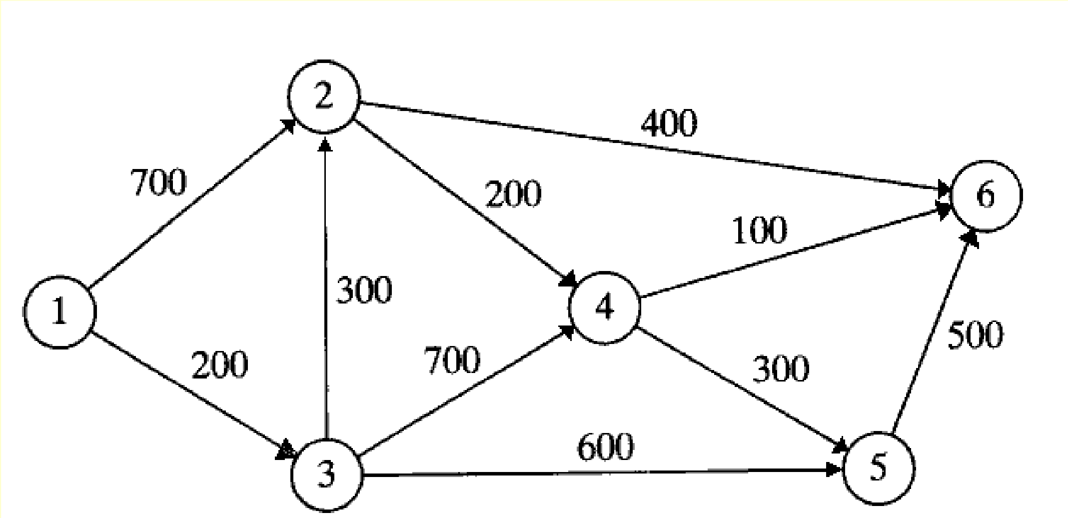
En un problema de la ruta más corta puede haber arcos dirigidos y arcos no dirigidos. Para el caso de arcos no dirigidos sería necesario tener una variable de i a j y otra de j a i y el planteamiento exigiría manejar variables en ambas direcciones.

4.6.1 Problemas propuestos de la Ruta más Corta

a) Obtener la Ruta Más Corta de A a J.

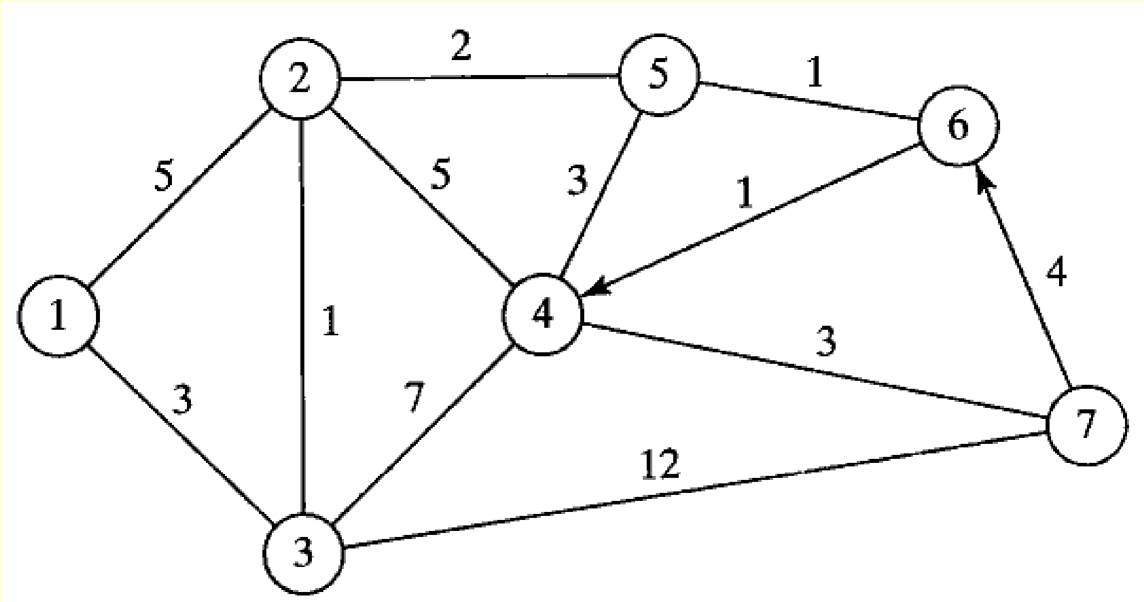


b) La telefonia Tell-All da servicio a seis áreas geográficas. Las distancias (en millas) de satelites entre seis areas se ven en la figura Tell-All debe determinar las rutas de mensaje más eficientes que se van a establecer entre cada par de áreas en la red.



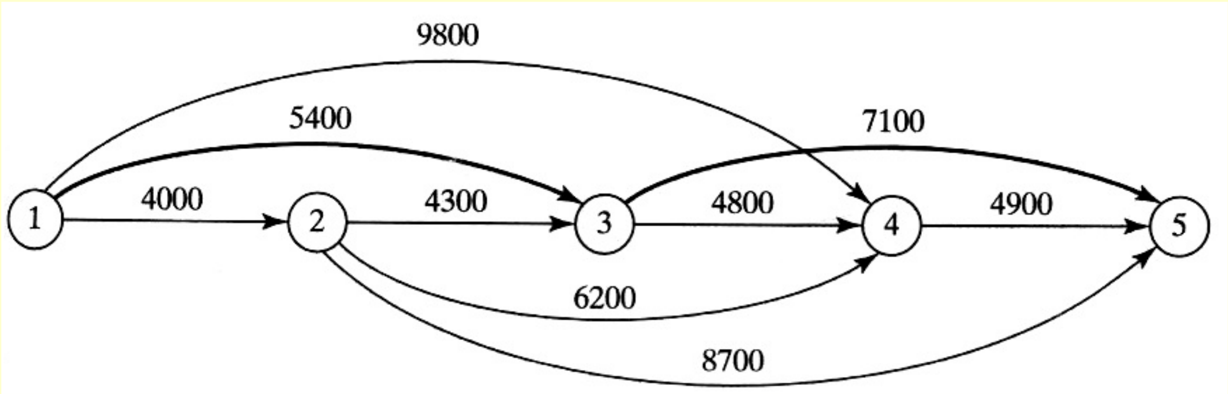
c) Determine la ruta más corta entre los siguientes pares de nodos:

- Del 1 al 7
- Del 7 al 1
- Del 6 al 7

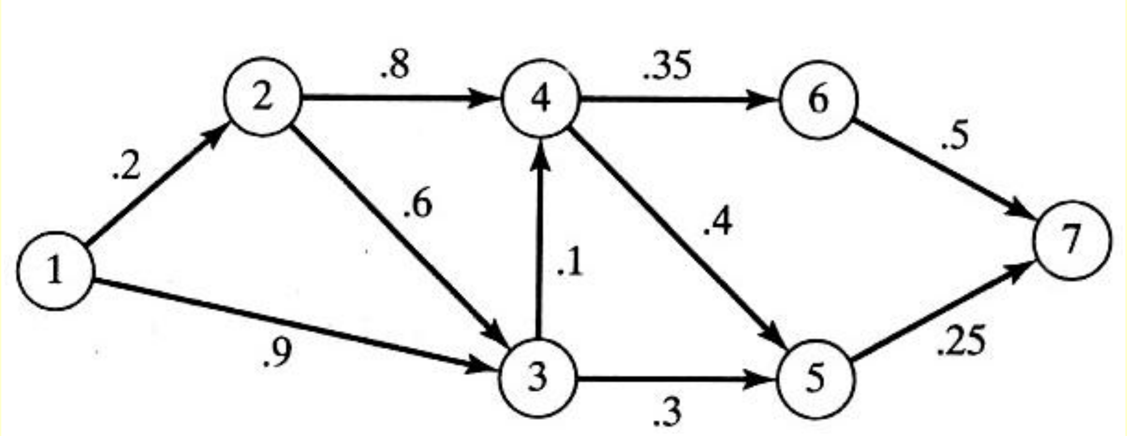


Resolver los siguientes problemas de redes por medio del método de la ruta más corta.

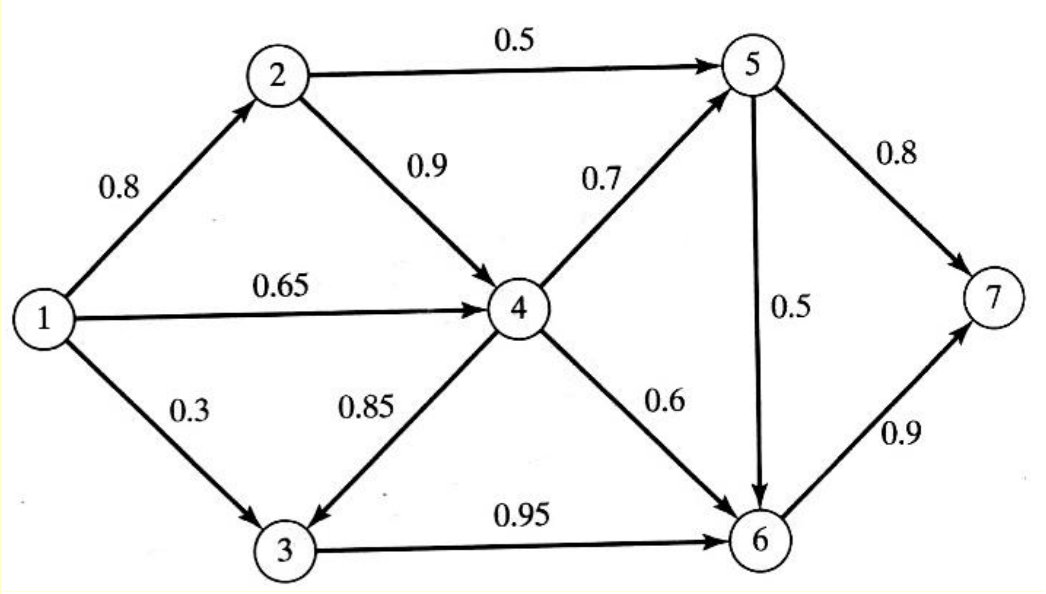
d)



e)



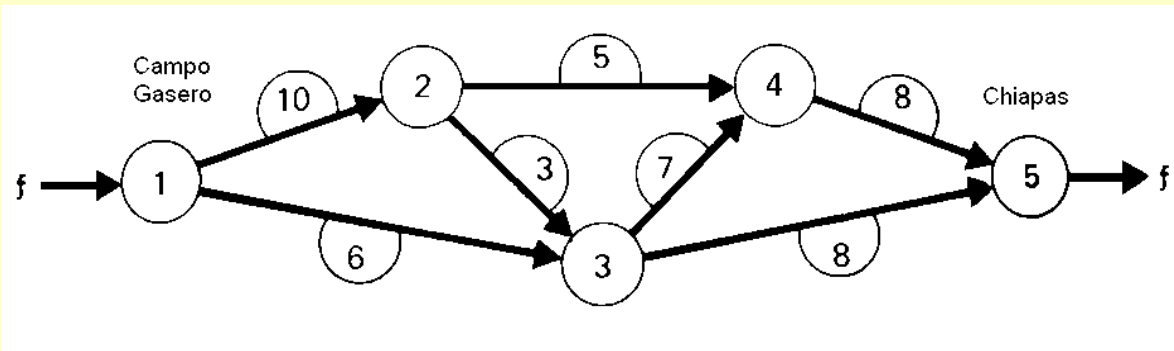
f)



4.7 El Problema de Flujo Máximo

En los problemas anteriores estábamos interesados en los valores que se generan a través de cierto flujo que pasa por una red. Este valor puede estar dado en términos de dinero, distancia, tiempo o alguna otra medida. Existen problemas en los que el valor del flujo no es tan importante como la *cantidad de flujo* que pasa a través de la red. Los gasoductos y las líneas de transmisión de electricidad son ejemplos de esta situación. Los problemas en los que interesa determinar el flujo máximo que pasa a través de una red se denominan ***problemas de flujo máximo***.

En estos problemas, es necesario suponer que existen restricciones de capacidad en los arcos. Si no fuera así, el flujo máximo que pasaría a través de la red sería infinito. Considere en siguiente caso donde se desea enviar gas natural desde un campo de gas que se encuentra en Campeche hasta Chiapas, a través de una red de gasoductos. La siguiente figura muestra la red. Los valores que se encuentran encerrados en semicírculos en cada arco representan las restricciones de capacidad en millones de pies cúbicos de gas por hora.



Red de Campeche a Chiapas

Aquí se muestra también una cantidad de flujo desconocida, f, que entra en el gasoducto en el nodo 1(el campo de gas) y que sale del gasoducto en el nodo 5 (la Terminal de Chiapas). Utilizando este flujo, f, puede plantearse el problema de la siguiente forma.

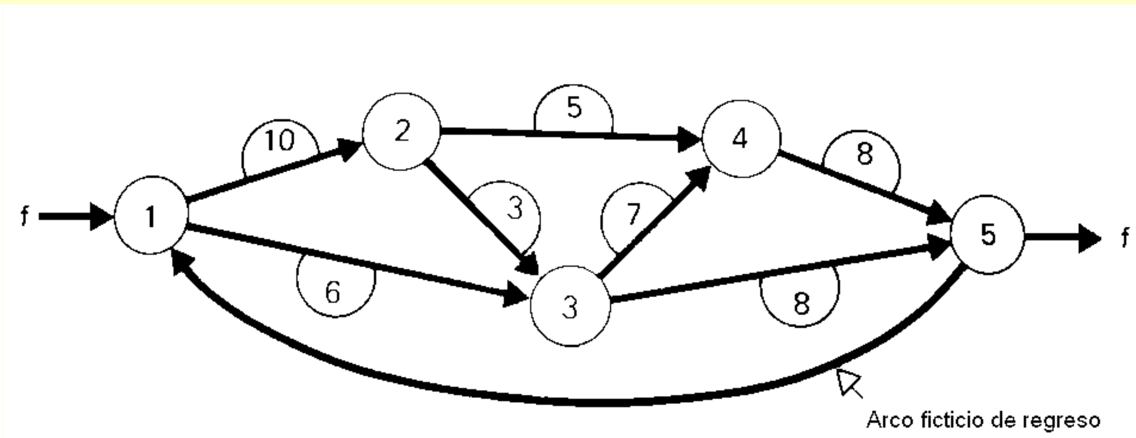
MAXIMIZAR:	f							
SUJETO A:	x_{12} +	x_{13}						$= f$ (1)
	x_{12}		$- x_{23}$	$- x_{24}$				$= 0$ (2)
		x_{13} +	x_{23}		$- x_{34}$	$- x_{35}$		$= 0$ (3)
				x_{24} +	x_{34}		$- x_{45}$	$= 0$ (4)
						x_{35} +	x_{45}	$= f$ (5)

$x_{12} \leq 10,\ x_{13} \leq 6,\ x_{23} \leq 3,\ x_{24} \leq 5,\ x_{34} \leq 7,\ x_{35} \leq 8,\ x_{45} \leq 8.$

$x_{ij} \geq$ **para toda *i* y *j***

Este planteamiento no se ajusta a nuestra formulación estándar de programación lineal de flujo de costo mínimo, puesto que el flujo que se desconoce, f, aparece tanto como variable de la función objetivo como en forma de valor del lado derecho de las restricciones. Si se plantea de esta manera no es posible utilizar el método del flujo de costo mínimo para resolverlo.

Para evitar esta dificultad, en primer lugar se elimina el flujo ***f*** y se introduce un arco artificial o ficticio que conecta los nodos 5 y 1. El objetivo se convierte entonces en maximizar el flujo que pasa por este arco ficticio. Maximizar el flujo que regresa del nodo 5 al nodo 1, por un arco ficticio que no tiene capacidad, dará la cantidad de flujo que va del nodo 1 al nodo 5 a lo largo de la red de capacidades. La siguiente figura se muestra la red de gasoductos, incluyendo el arco de regreso.



Red modificada de los gasoductos

Ahora, utilizando esta nueva red de gasoductos, se tiene un planteamiento modificado, que puede verse en esta figura, en el que el objetivo es maximizar x_{51}:

MAXIMIZAR:	x_{51}								
SUJETO A:	x_{51}	$- x_{12}$	$- x_{13}$						$= 0$ *(1)*
		x_{12}		$- x_{23}$	$- x_{24}$				$= 0$ *(2)*
			$x_{13}\ +$	x_{23}		$- x_{34}$	$- x_{35}$		$= 0$ *(3)*
					$x_{24}\ +$	x_{34}		$- x_{45}$	$= 0$ *(4)*
							$x_{35}\ +$	x_{45}	$= f$ *(5)*

$$x_{12} \leq 10,\ x_{13} \leq 6,\ x_{23} \leq 3,\ x_{24} \leq 5,\ x_{34} \leq 7,\ x_{35} \leq 8,\ x_{45} \leq 8.$$

$$x_{ij} \geq \ \textit{para toda i y j}$$

Ahora queda planteado el problema de flujo máximo en forma estándar de programación lineal de redes, excepto que no existen ofertas y demandas. Los problemas de este tipo se ***nominan redes circulares***.

Solución:

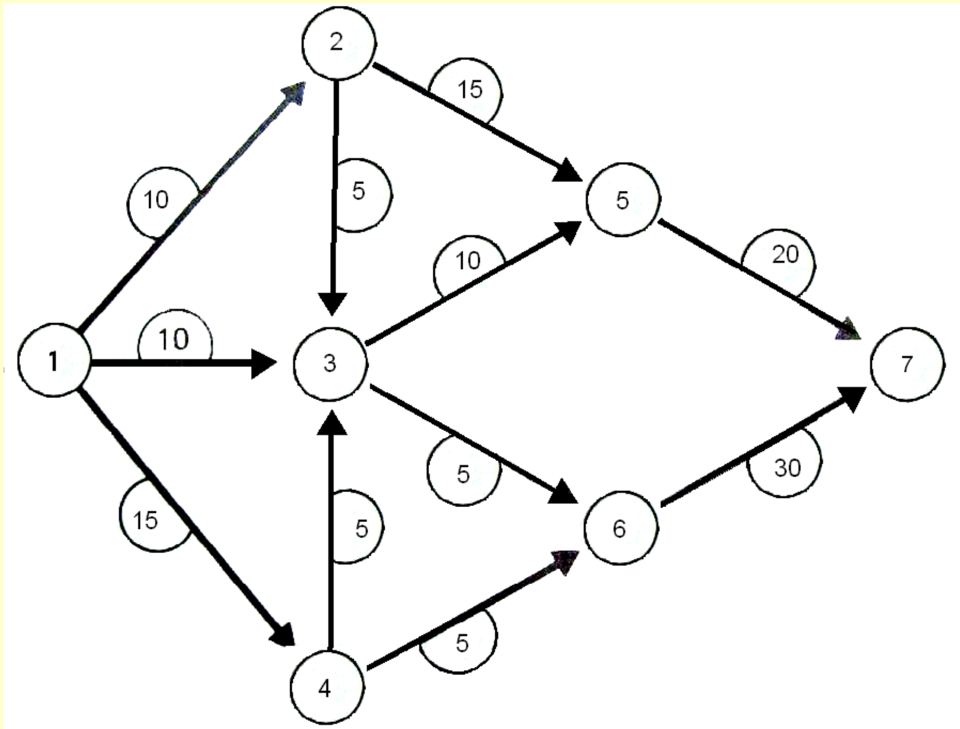
NET	PMF	MFP	Maximization	Matrix	Asymmetry
5	0	0			
From/To	Node1	Node2	Node3	Node4	Node5
Node1		10	6		
Node2			3	5	
Node3				7	8
Node4					8
Node5	-1				
0					

Solution for Maximal Flow Problem PMF				
03/10/2009	From To	Net Flow	From To	Net Flow
1	Node1Node28	5	Node3Node41	
2	Node1Node36	6	Node3Node58	
3	Node2Node33	7	Node4Node56	
4	Node2Node45			
Total	Net Flow	From Node 1	To Node 5	= 14

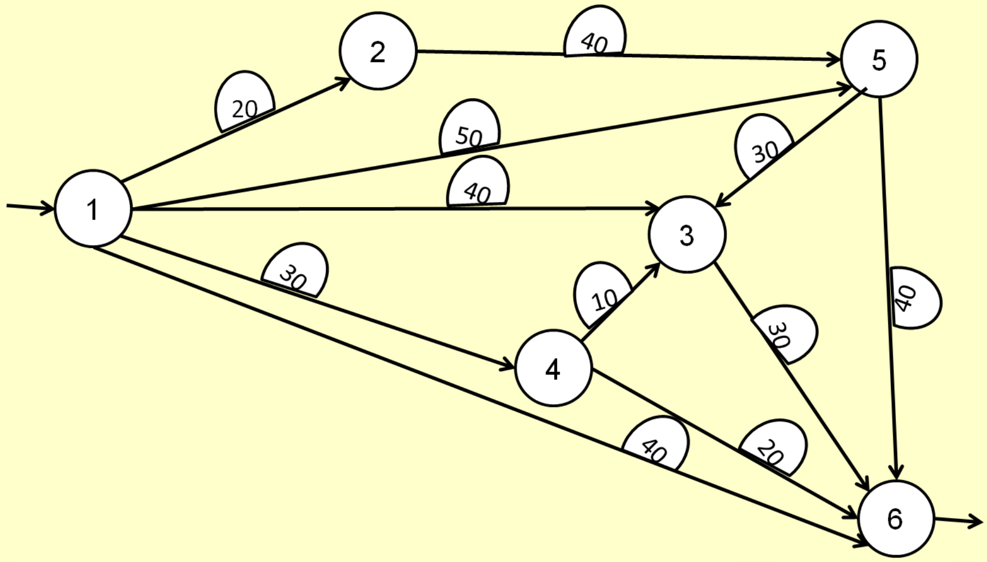
4.7.1 Problemas propuestos de Máximo Flujo.

Resolver las siguientes redes por el método del máximo flujo.

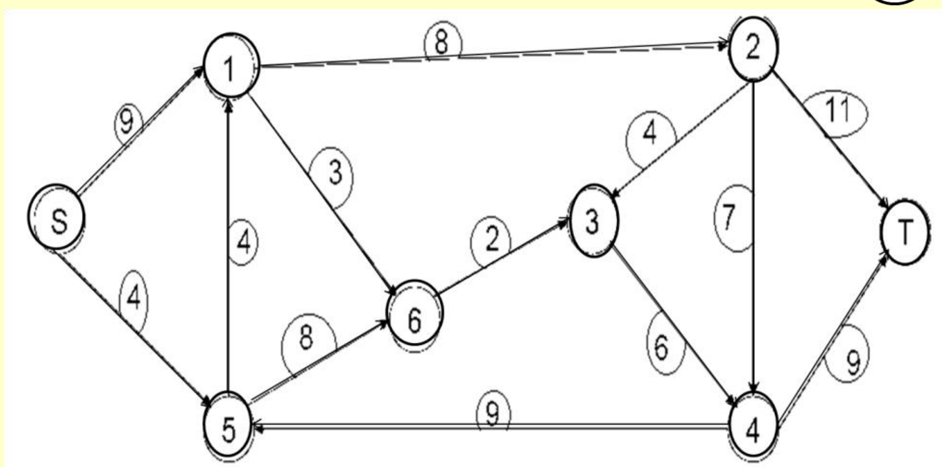
a)



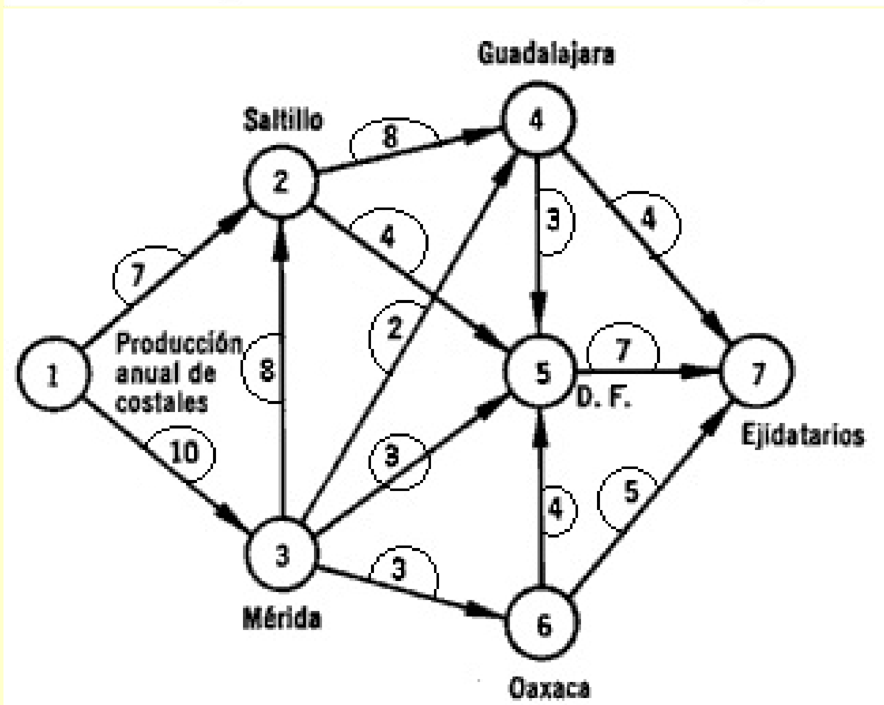
b)


1
2
3
4
5
6
20
40
50
40
30
30
10
30
40
40
20

c)


S
1
2
3
4
5
6
T
9
8
11
4
3
4
7
2
4
8
6
9
9

d)


Guadalajara
Saltillo
Producción
anual de
costales
D. F.
Ejidatarios
Mérida
Oaxaca
1
2
3
4
5
6
7
8
7
4
3
4
2
8
7
10
3
4
5
3

4.8 Algoritmo de Árbol de Expansión Mínima

Es un problema clásico de optimización combinatoria, formulado en 1926 por Boruvka quien lo planteó para resolver el problema de hallar la forma más económica de distribuir energía eléctrica en el sur de Moravia. La formulación de este problema ha sido útil para la realización de muchas investigaciones en varios campos como el transporte, electrónica, telecomunicaciones e investigación de operaciones.

El modelo contempla un conjunto de arcos que conectan todos los nodos de la red sin crear un solo ciclo o vuelta. El problema consiste en determinar el árbol que minimiza la distancia de conexión total; se resuelve por el Algoritmo de Etiquetado

El algoritmo de Árbol de expansión mínima enlaza los nodos de una red, en forma directa o indirecta, con la mínima longitud de ramas que se encuentran ligadas. Una aplicación característica es en la construcción de carreteras pavimentadas que unen varias poblaciones. El camino entre dos poblaciones puede pasar por uno o más poblaciones adicionales. El diseño más económico del sistema de caminos indica que se minimice la distancia total de caminos pavimentados, resultado que se obtiene implementando el algoritmo de árbol de expansión mínima.

Los pasos del procedimiento son los siguientes. Sea $N = \{1, 2,..., n\}$ el conjunto de nodos de la red, y se definen

C_k = Conjunto de nodos que se han conectado en forma permanente en la iteración k

$\hat{C}_k$ = Conjunto de nodos que todavía se deben conectar en forma permanente.

Algoritmo

Paso 0. El conjunto $C_0 = \Theta$ **y** $\hat{C}_0 = N$.

Paso 1. Comenzar con ***cualquier*** nodo en el conjunto $\hat{C}_0$ no conectado (o“inconexo”), e igualar $C_1 = \{i\}$, con lo que $\hat{C}_1 = N - \{i\}$. Igualar $k = 2$.

Paso general k. Seleccionar un nodo j^* en el conjunto no conectado $\hat{C}_{k-1}$ que produzca el arco más corto a un nodo, en el conjunto conectado C_{k-1}. Enlazar a j^* en forma permanente con C_{k-1} y sacarlo de $\hat{C}_{k-1}$, esto es $C_k = C_{k-1} + \{j^*\}$, $\hat{C}_k = \hat{C}_{k-1} - \{j^*\}$

Si el conjunto $\hat{C}_k$, de nodos no conectados es vacío, detenerse. En cualquier otro caso, igualar $k = k + 1$ y repetir el paso.

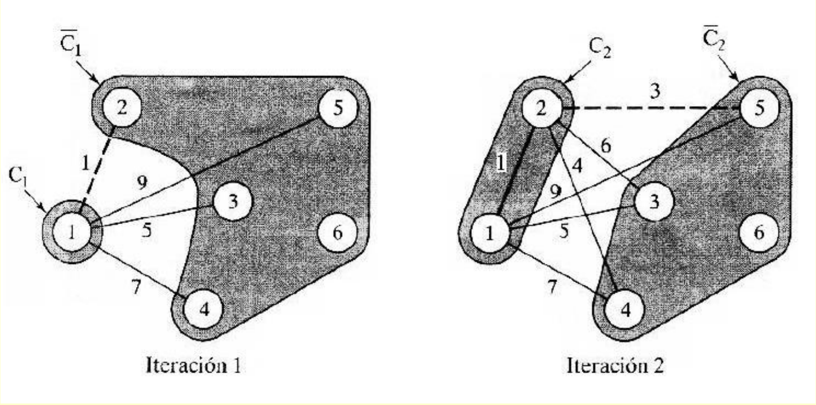
El algoritmo comienza en el nodo 1 (podría ser cualquier otro nodo), con lo que se obtiene

$$C_1 = \{1\}, \hat{C}_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Las iteraciones del algoritmo se resumen en la figura 2. Los arcos con líneas delgadas son todos los enlaces posibles entre C y $\hat{C}$. Las ramas gruesas representan los enlaces permanentes entre los nodos del conjunto conectado (o "conexo") C, y la rama con línea interrumpida representa el nuevo enlace (permanente) que se agrega a cada iteración. Por ejemplo, en la iteración 1, la rama (1,2) es la más corta (= 1 milla) entre todas las ramas posibles del nodo 1 a los nodos 2, 3, 4, y 5 del conjunto no conectados $\hat{C}_1$. Por consiguiente, el enlace (1, 2) se vuelve permanente y $j^* = 2$, con lo que se obtiene

$$C_2 = \{1, 2\}, \hat{C}_2 = \{3, 4, 5, 6\}$$

La solución se expresa con el árbol de expansión mínima que se ve en la iteración 6, la figura 2. La cantidad mínima de millas necesarias para proporcionar el servicio de cable que se desea resulta ser 1+3+4+3+5 = 16 millas.



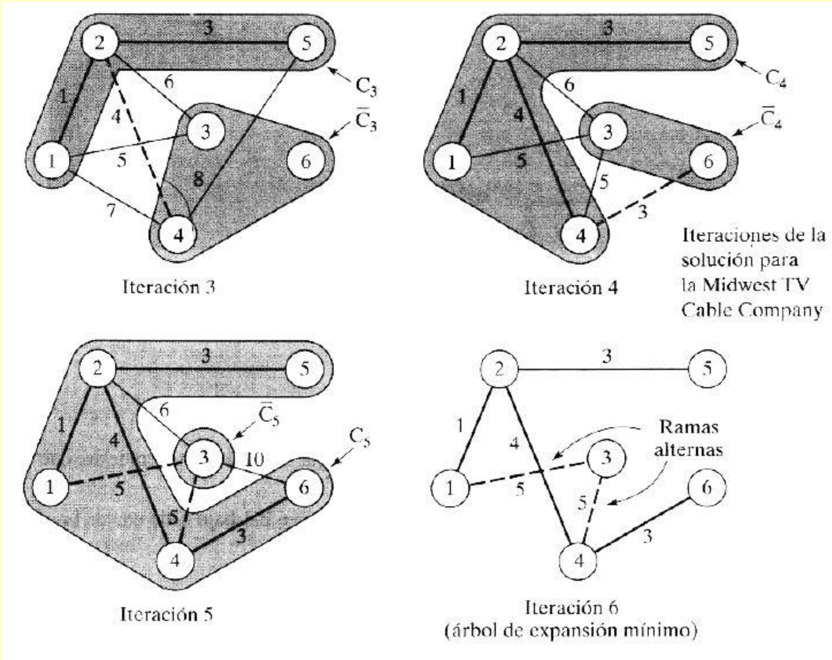
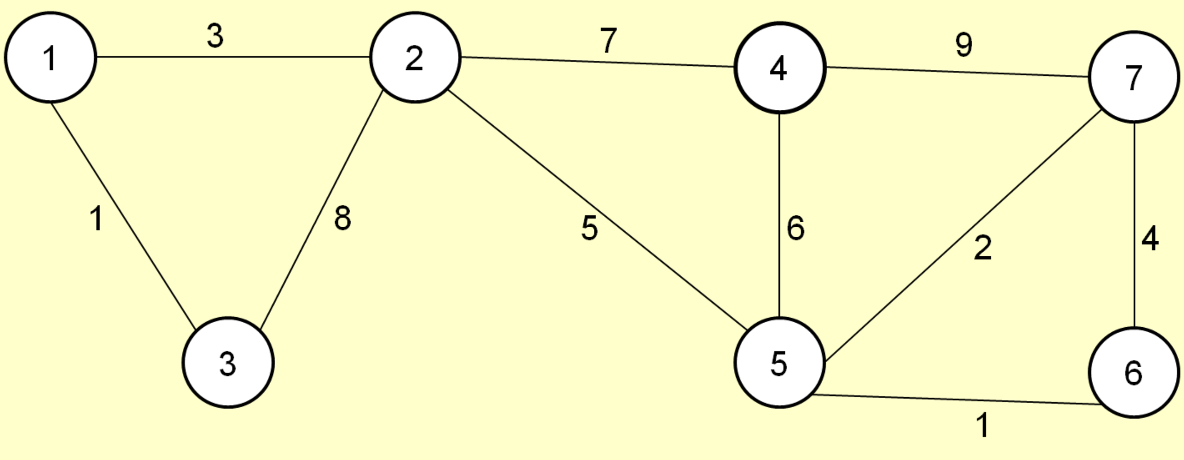


Figura 4.2 Algoritmo de árbol de expansión mínima.

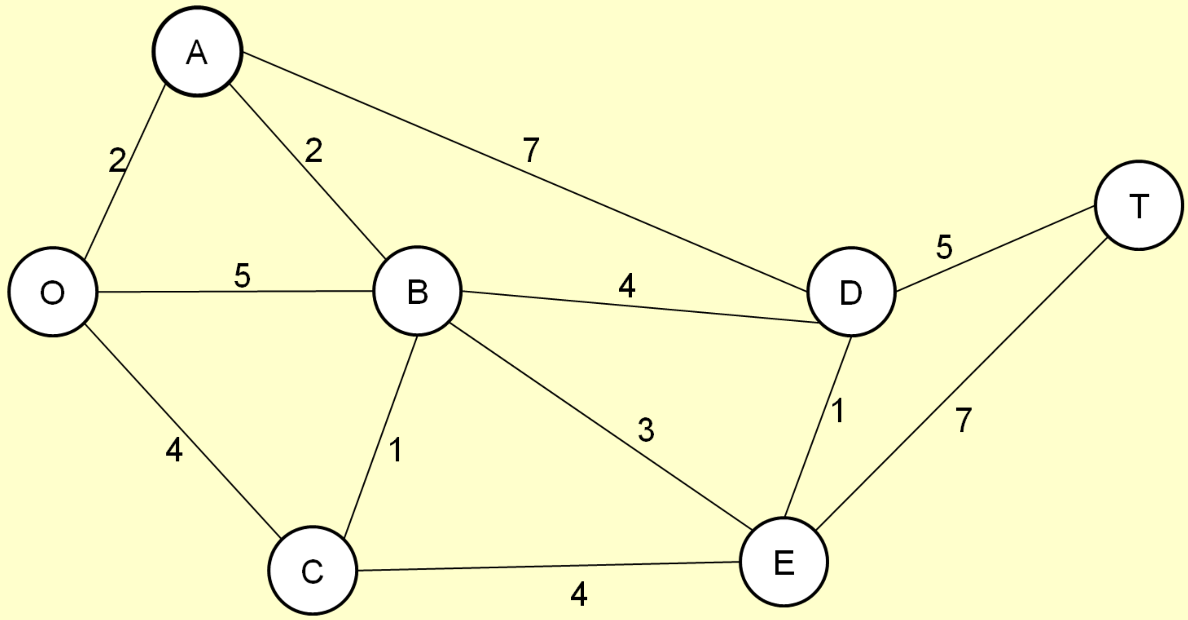
4.8.1 Actividades

1. Estudiar el presente tema y realizar las correspondientes tarjetas del contenido
2. Para el modelo de red de la figura 1, deberá Interpretar el modelo para obtener solución en el WINQSB (software).
3. Para el modelo de red de la figura 1 Resolver la red con el Algoritmo de Árbol de Expansión Mínima.
4. Determinar el árbol de mínima expansión para las siguientes figuras:

a)



b)



4.9 PERT/CPM/LPU/ROY/RAMPS

Para solucionar los problemas planteados en el Gráfico de Gantt se presentan los sistemas de trayectoria crítica, es decir, PERT, CPM, LPU, ROY y RAMPS.

A mediados de 1957, la E.I. Du Pont de Nemours de los Estados Unidos estaba interesada en ampliar cerca de 300 fábricas, lo cual implicaba un gran número de actividades; pensemos que cada ampliación tuviera 100 actividades, esto implicaba 30,000 actividades, las cuales no podían ser planeadas en Gráfica de Gantt. Morgan Walker de Du Pont y James E. Kelley de la Remington Rand pensaron que la única posibilidad era utilizar la computadora e idearon un sistema que denominaron CPM Critical Path Method (Método de la Ruta Crítica).

A fines de 1957 la Oficina de Proyectos Especiales de la Armada de los Estados Unidos, fue encargada de administrar el gran proyecto Polaris. Se trataba de fabricar, probar y dejar en posición de combate un cohete balístico llamado Polaris. Dicha Oficina contrató la asesoría de las firmas Lockheed Aircraft y Booz, Allen y Hamilton para que propusiera métodos apropiados al control del proyecto con tan especiales características de incertidumbre. Este grupo desarrolló los procedimientos que dieron origen al PERT Program Evaluation and Review Technique (Técnicas de Evaluación y Revisión de Programas).

Existe un sistema llamado LPU Lines Points Union (Líneas y Puntos de Unión) desarrollado en 1961 por John W. Fondahl profesor de la Universidad de Stanford. Este trabajo inicialmente se denominó Sistema de Actividades en los Nodos; luego la IBM desarrolló en base a él un programa llamado Diagrama de Precedencias. La diferencia fundamental con el CPM / PERT es que este modelo (LPU) está orientado hacia el proceso manual y no hacia el computador.

En Europa un grupo constituido por ingenieros de los Chantiers de l'Atlantique, la SEMA, la Compagnie des Machines BULL y el Matemático Francés B.Roy estudió el problema del equilibrado de las curvas de carga de las diferentes especialidades que intervienen en las operaciones de armamentos de buques; estos trabajos dieron origen al ROY o Método de los Potenciales. La principal ventaja del ROY sobre el PERT es que no exige tareas ficticias.

En un afán por sincronizar el mecanismo de la acción empresarial, respondiendo a ese deseo de mayor orden, mayor productividad y mayor gestión que imponen las nuevas formas de la economía actual y que viene sintetizado en la llamada gestión integrada, ha surgido el método RAMPS

(*Resource Allocation and Multi Project Scheduling*) que se preocupa en coordinar los medios disponibles y las tareas de varios proyectos que se llevan a cabo a la vez.

Los modelos más extendidos en cuanto a su aplicación en nuestro medio y sus principales diferencias son:

PERT	CPM
1. Probabilístico. **2.** Se basa en eventos. **3.** Orientado a quien controla **4.** Se puede utilizar en proyectos de investigación	**1.** Determinístico. **2**. Se basa en actividades **3.** Orientado a quien ejecuta **4.** Se puede utilizar para todo tipo de proyecto

Es importante advertir las ventajas de los sistemas de trayectoria crítica (PERT / CPM / LPU / ROY / RAMPS) sobre el sistema tradicional de barras (Gráfica de Gantt):

1. Se puede conocer exactamente la secuencia de las actividades.
2. Podemos analizar el efecto de cualquier atraso o adelanto de una actividad en relación al proyecto.
3. Se pueden estudiar rápidamente diferentes alternativas.
4. Podemos analizar todas las variables (tiempo, costos, recursos).
5. Se pueden conocer cuáles son las actividades que sufriendo retrasos no modifican el proyecto.
6. La efectividad del sistema es directamente proporcional al número de actividades; cuantas más actividades existan más detalles y más conocimientos del proyecto tenemos.
7. Podemos visualizar todos los problemas y situaciones en el papel, antes que ellos ocurran en la realidad.

4.9.1 Problema de PERT/CPM

En los modelos de PERT/CPM conocidos con anterioridad, se supuso que existía un proyecto en proceso de planeación y que el proyecto estaba formado por trabajos que debían llevarse a cabo. En general, se supone que algunos trabajos preceden a otros. El objeto de estos modelos es encontrar la secuencia de actividades o tareas que requiere del *mayor* tiempo para su terminación. A esta secuencia de trabajo se le denomina *ruta crítica,* dado que no es posible concluir el proyecto total que se considera si no se han terminado las actividades que se encuentran en esa ruta crítica. Como ejemplo de un análisis de red de actividades, considérese la siguiente situación:

La Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Autónoma de Querétaro está planeando una conferencia para ejecutivos de negocios. En la siguiente tabla, se listan las actividades que deben llevarse a cabo antes de la conferencia, y también se presentan los tiempos estimados para terminar cada una de las labores.

Actividad	*Descripción*	*Tiempo estimado (semanas)*	*Actividades precedentes*
A	Elaborar el programa	3	—
B	Recopilar la lista de asistentes	5	—
C	Contactar a los oradores para que asistan	9	A
D	Elaborar el folleto para el programa	2	B
E	Hacer arreglos físicos	4	A
F	Enviar los folletos	4	D
G	Preparar el programa de las conferencias	3	E
H	Detalles de último minuto	1	C, G, F

Este problema de planeación también se muestra en un formato de redes (Figura 4.3), y se ilustran en forma directa en los arcos el tiempo estimado para terminar la actividad y los símbolos que representan a las actividades y en él también se enumeraron los nodos.

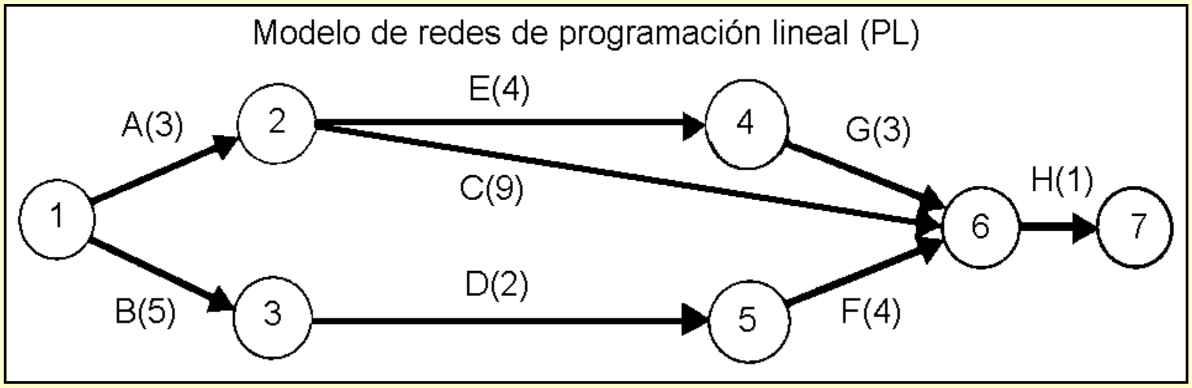


Figura 4.3. Red de planeación de conferencias.

Lo que se pretende es descubrir cuál es la ruta crítica más larga en esta red, se plantea una situación opuesta al problema de la ruta más corta. No obstante, este problema puede plantearse en forma similar. En este caso, los tiempos estimados para cada arco se utilizan como “distancias”, que van a maximizarse en vez de minimizarse. De nuevo, se incluye un suministro imaginario de una unidad de flujo en el primer nodo y una demanda imaginaria de una unidad en el último. El planteamiento de programación lineal de este problema se convierte entonces en:

MAXIMIZAR:	$3x_{12}$ +	$5x_{13}$ +	**4x24 +**	$9x_{26}$ +	$2x_{35}$ +	$3x_{46}$ +	$4x_{56}$ +	$1x_{67}$	
SUJETO A:	x_{12} +	x_{13}							**= 1**
	x_{12}		**- x24**	**- x26**					**= 0**
		x_{13}			**- x35**				**= 0**
			x_{24}			**- x46**			**= 0**
					x_{35}		**- x56**		**= 0**
				x_{26}		$+x_{46}$	**+x46**	**- *X67***	**= 0**
								x_{67}	**= 1**
	x, ≥ 0 para toda i y toda j								

El cual puede resolverse por medio de programación lineal para cada una de las variables expuestas en el planteamiento y deja a los estudiantes de 9º semestre, grupo 5 de LA su solución.

4.10 Métodos CPM y PERT

Los métodos CPM (método de la ruta crítica o del camino crítico, *critical path method* y PERT (técnica de evaluación y revisión de programa, *program evaluation and review technique)* se basan en redes, y tienen por objeto auxiliar en la planeación. programación y control de proyectos. Se define un proyecto como conjunto de actividades interrelacionadas, en la que cada actividad consume tiempo y recursos. El objetivo del CPM y del PERT es contar con un método analítico para programar las actividades. En la figura 4.4 se resumen los pasos de estas técnicas. Primero se definen las actividades del proyecto, sus relaciones de precedencia y sus necesidades de tiempo.

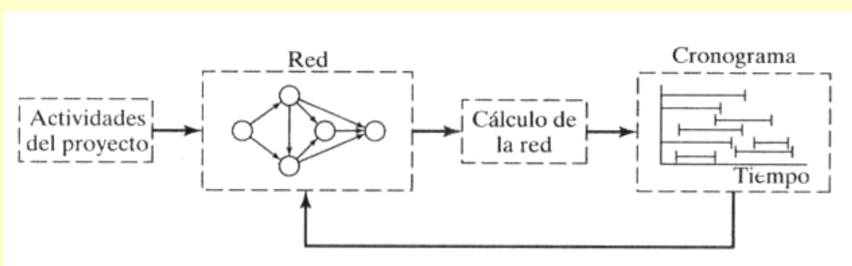


Figura 4.4 Fases de la planeación de un proyecto con CPM o PERT

A continuación, el proyecto se traduce en una red que muestre las relaciones de precedencia entre las actividades. El tercer paso implica cálculos específicos de redes, que forman la base del desarrollo del programa del proyecto en función del tiempo.

Durante la ejecución del proyecto, podría no cumplirse el programa que estaba planeado, causando que algunas de las actividades se adelanten o se atrasen. En este caso será necesario actualizar el programa para que refleje la realidad. Ésta es la razón de incluir un bucle, lazo o ciclo de retroalimentación entre la fase de programa y la fase de red, como se ve en la figura 4.4.

Las dos técnicas, CPM y PERT, que se desarrollaron en forma independiente, difieren en que en el CPM se supone duraciones determinísticas de actividad, mientras que en PERT se suponen duraciones probabilísticas.

4.10.1 Representación en red

Cada actividad del proyecto se representa con un arco que apunta en la dirección de avance del proyecto. Los nodos de la red establecen las relaciones de precedencia entre las diferentes actividades del proyecto.

Para configurar la red se dispone de dos reglas:

Regla 1. *Cada actividad se representa con un arco, y uno sólo.*

Regla 2. *Cada actividad se debe identificar con dos nodos distintos.*

La figura 4.5 muestra cómo se puede usar una actividad ficticia para representar dos actividades concurrentes, *A y B.* Por definición, la actividad ficticia, que normalmente se representa con un arco de línea interrumpida, no consume tiempo o recursos. La inserción de una actividad ficticia en una de las cuatro formas que se ven en la figura 4.5, mantiene la concurrencia de *A* y *B,* y también proporciona nodos finales únicos para las dos actividades (para satisfacer la regla 2).

Regla 3. *Para mantener las relaciones de precedencia correctas, se deben contestar las siguientes preguntas cuando se agrega a la red cada actividad:*

a) *¿Qué actividades deben anteceder inmediatamente a la actividad actual?*

b) *¿Qué actividades deben seguir inmediatamente a la actividad actual?*

e) *¿Qué actividades deben efectuarse en forma concurrente o simultánea con la actividad actual?*

Para contestar estas preguntas se podrá *necesitar* el uso de actividades ficticias, para asegurar las precedencias correctas entre las actividades. Por ejemplo, considere al siguiente segmento de un proyecto:

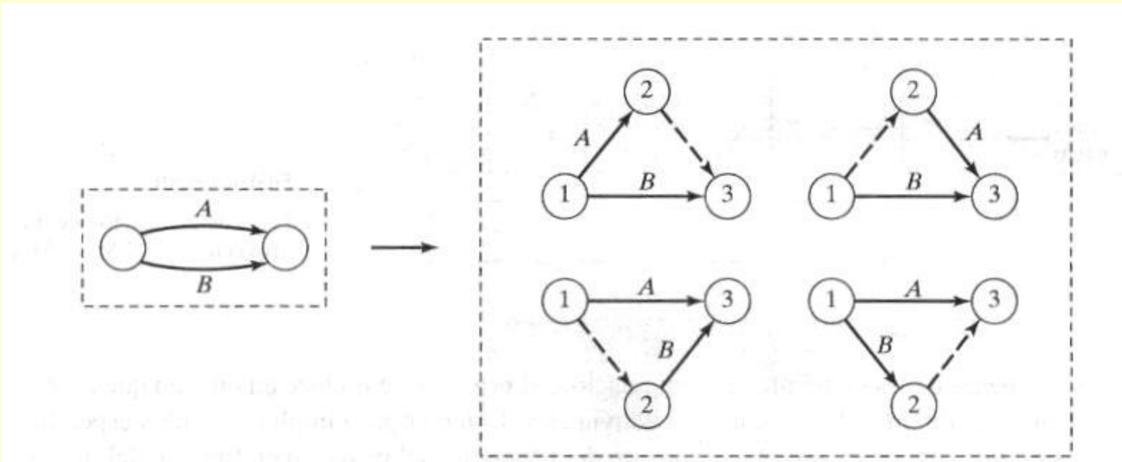


Figura 4.5 Uso de una actividad ficticia para tener representación única de las actividades concurrentes A y B

1. La actividad *C* comienza de inmediato después de haber terminado *A* y *B.*
2. La actividad *E* se inicia después de que sólo terminó la actividad *B.*

La parte (a) de la figura 4.6 muestra la representación incorrecta de esta relación de precedencia, porque pide que *A* y *B* terminen antes de poder iniciar *E.* En la parte *(b)* se corrige la situación con el uso de la actividad ficticia.

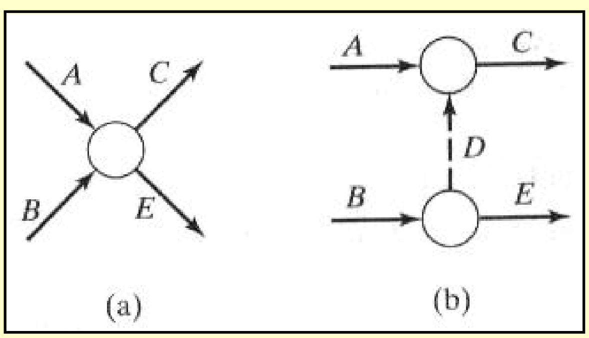


Figura 4.6 Uso de una actividad ficticia para asegurar una relación de precedencia correcta.

4.10.2 Ejemplo

Un editor tiene un contrato con un autor, para publicar su libro de texto. Las actividades (simplificadas) relacionadas con la producción del libro se ven a continuación. Formular la red asociada al proyecto.

Actividad	Predecesor(es)	Duración (semanas)
A: **Lectura del manuscrito por el editor**	____	3
B: Preparación de páginas muestra por el tipógrafo	____	2
C: Diseño de la portada del libro	____	4
D: Preparación de las figuras del libro	____	3
E: Aprobación por el autor del manuscrito editado y las páginas muestra	A,B	2
F: Tipografía del libro	E	2
G: Revisión por el autor de las páginas tipografiadas	F	2
H: Revisión de las figuras por el autor	D	1
I : Producción de las placas de impresión	G,H	2
J: Producción y encuadernación del libro	C,I	4

La figura 4.7 muestra la red que describe las relaciones de precedencia entre las diversas actividades. Con la actividad ficticia (2, 3) se obtienen nodos finales únicos para las actividades concurrentes *A* y *B.* La numeración de los nodos se hace en forma que indique el avance en el proyecto.

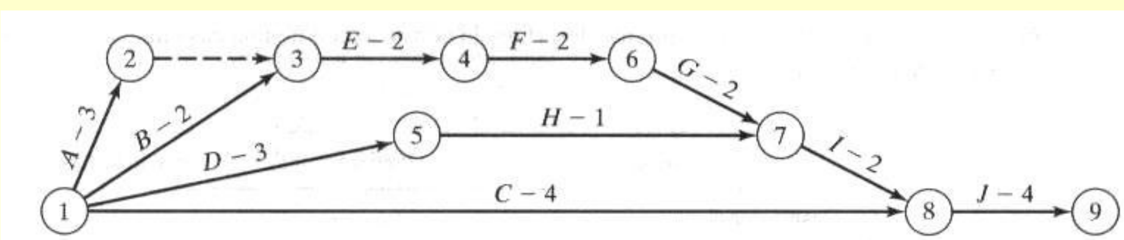


Figura 4.7 Red del proyecto para el ejemplo

4.10.3 Glosario de términos

Modelo Determinístico: En un modelo determinístico, las relaciones funcionales, es decir, los parámetros del modelo, se conocen con certidumbre. El siguiente modelo

$$Z = 12x_1+10x_2+8x_3$$

Este modelo puede emplearse para pronosticar las utilidades sólo si se proporcionan ciertos valores de x_1, x_2 y x_3.

Modelo Probabilístico: Cualquier enfoque analítico de los problemas estadísticos supone la evaluación de la medida en que es posible que ciertos sucesos hayan ocurrido o vayan a ocurrir***. Un suceso o evento se define como un subconjunto de los resultados posibles en una situación de toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre***. Por ejemplo, a un político tal vez le interese saber la confianza que puede tener en los resultados de una encuesta que indica que va a ganar las próximas elecciones; o un inversionista puede desear saber qué riesgos corre su dinero si compra si compra ciertas acciones poco seguras. Estos son ejemplos de casos en los que se trata de averiguar la probabilidad de un suceso o de un conjunto de sucesos.

Una probabilidad es un número comprendido entre 0 y 1, que indica cuán posible es la ocurrencia de un suceso. Si un suceso tiene un probabilidad de 0, entonces su ocurrencia es imposible; si tiene probabilidad 1, entonces su ocurrencia es segura.

4.10.4 Problemas propuestos CPM/PERT

a) Las actividades para suministrar un servicio de coro se ven en la lista de la siguiente tabla:

Actividad	Predecesor(es)	Duración (días)
A: Seleccionar la música	____	2
B: Aprender la música	A	14
C: Hacer copias y comprar libros	A	14
D: Pruebas	B,C	3
E: Ensayos	D	70
F: Rentar local	D	14
G: Decorar local	F	1
H: Preparar los escenarios	D	1
I : Pedir las togar para el coro	D	7
J: Revisar el sistema de sonido	D	7
K: Seleccionar las pistas musicales	J	14
L: Preparar el sistema de sonido	K	1
M: Ensayo general	E,G,L	1
N: Fiesta del coro	H,L,M	1
O: Programa final	I,N	1

Construir la red para las actividades previas y resolver por medio de programación lineal para cada una de las variables expuestas en el planteamiento.

b) Formule la red del proyecto formada por las actividades A a L con las siguientes relaciones de precedencia:

1. A, B, Y C son las primeras actividades del proyecto y se pueden ejecutar en forma concurrente.
2. A y B anteceden a D.
3. B antecede a E, F y H.
4. F y C anteceden a G.
5. E y H anteceden a I y J.
6. C, D, F, y J anteceden a K.
7. K anteceden a L.
8. I, G, y L son las actividades finales del proyecto.

c) Formule la red del proyecto formado por las actividades A a P con las siguientes relaciones de precedencia:

1. A, B y C son las primeras actividades del proyecto y se pueden ejecutar en forma concurrente.
2. D, E, y F siguen de A.
3. I y G siguen tanto a B como a D.
4. H sigue tanto a C como a G.
5. K y L siguen a I
6. J sigue tanto a E como a H.
7. M y N siguen a F, pero no pueden comenzar sino hasta que se hayan terminado E y H.
8. O sigue a M y a L.
9. P sigue a J, L y O.
10. K, N y P son las actividades finales del proyecto.

d) Las actividades de la tabla siguiente describen la construcción de una casa nueva. Formule la red asociada para el proyecto.

Actividad	Predecesor(es)	Duración (días)
A: Desmontar el sitio	____	1
B: Levar servicios al sitio	____	2
C: Excavar	A	1
D: Colar los cimientos	C	2
E: Plomería exterior	B, C	6
F: Cimbrar la casa	D	10
G: Instalación electrica	F	3
H: Tender el piso	G	1
I : Colar el techo	F	1
J: Plomería interior	E, H	5
K: Tejado	I	2
L: Recubrimiento aislante exterior	F, J	1
M: Instalar ventanas y puertas exteriores	F	2
N: Poner ladrillo	L, M	4
O: Aislar paredes y techo	G, J	2
P: Aplanado de paredes y techo	O	2
Q: Aislar techo	I, P	1
R: Acabados interiores	P	7
S: Acabados exteriores	I, N	7
T: Acondicionar terreno	S	3

CAPITULO 5

Análisis de procesos de líneas de espera

5.1 Introducción

En diferentes ocasiones en la vida, la mayoría de las personas que viven en la sociedad moderna han esperado en una fila para recibir algún tipo de servicio. Esperar podría incluir situaciones como:

- Esperar en fila para pagar las compras en la caja de una tienda de abarrotes
- Esperar en fila en una estación de gasolina para adquirir combustible
- Esperar ser atendido cuando uno llama por teléfono a la compañía de electricidad para hacer aclaraciones con respecto a la factura
- Esperar que el cajero de un banco lleve a cabo alguna transacción financiera
- Esperar en fila para comprar boletos para algún evento importante, deportivo o de entretenimiento.

Esta lista podría ampliarse en forma indefinida y, aún asÍ no agotar todas las posibles situaciones en las que las personas esperan en una fila, o “cola”, para ser atendidas. Pero las líneas de espera implican algo más que personas. Aunque es probable que no hayamos considerado esas colas, cuando una máquina se descompone y requiere mantenimiento, también debe esperar en una cola para que la atienda el personal de servicio. Por ello, puede decirse que una línea de espera, o cola, se forma cuando alguna unidad (persona, máquina, etc.) requiere servicio y éste no se proporciona en forma instantánea.

Dado que las líneas de espera son tan frecuentes en la sociedad moderna, no resulta sorprendente que se haya desarrollado un campo del conocimiento a partir de su estudio, dicho campo, que comúnmente se denomina teoría de líneas de espera lo inició un ingeniero danés de teléfonos, A. K. Erlang, quien en 1910 realizó los primeros trabajos sobre problemas de filas. Erlang estaba interesado en los problemas que tenían las personas que llamaban a un conmutador telefónico.

Al hablar con frecuencia de un sistema de líneas de espera. Con esto, se hace referencia a todos los componentes que conforman un arreglo de líneas de espera: unidades que solicitan servicio, la línea de espera propiamente dicha, las instalaciones de servicio y las unidades que se retiran después de recibir servicio.

A diferencia de un modelo simple como el de la programación lineal, la teoría de líneas de espera (o de colas) abarca un grupo muy grande de modelos, en donde cada uno se refiere a un tipo diferente de situación de línea de espera. Sin embargo, todos estos modelos tienen algunas cosas en común. En primer lugar, no pretenden "resolver" problemas de líneas de espera; más bien, ***describen el sistema de líneas de espera al calcular las características de operación de la línea***. Éstas incluyen elementos como el número promedio de unidades que esperan el servicio y el tiempo promedio que una unidad espera para ser atendida. Para calcular las características operativas, el usuario debe especificar ciertos parámetros del sistema de líneas de espera, tales como la forma en que las unidades llegan para ser atendidos y la forma en que se maneja el servicio real. El objetivo de los modelos de líneas de espera es más de descripción que de optimización, y cualquier optimización que tenga lugar debe llevarla a cabo el usuario variando los parámetros del sistema para obtener diferentes conjuntos de características de operación. El conjunto de características de operación que se ajusta en forma más estrecha a las necesidades del usuario define la "mejor" estructura del sistema. Por esta razón, es común que los modelos de líneas de espera sean descriptivos más que normativos.

Dado que muchos de los parámetros de los modelos de líneas de espera no se conocen con certidumbre, estos modelos son más bien estocásticos que determinísticos. Los parámetros como tasas de llegada y tasas de servicio se describen a través de distribuciones de probabilidad; por ello, en el modelo se utilizan valores esperados o promedio. Al mismo tiempo, los modelos de líneas de espera son estáticos y ***no*** lineales en vez de dinámicos y lineales, debido a que se supone que los parámetros no varían con el tiempo y que los cambios en las características de operación no son proporcionales a los cambios en los parámetros del modelo.

5.2 CASO Guarantee Bank and Trust Company, Inc.

El Sr. James T. Smith del Guarantee Bank and Trust Company es el nuevo vicepresidente auxiliar de servicio a clientes en el banco. Su primera tarea **es** investigar un nuevo plan para reducir el tiempo de espera de los clientes al ser atendidos en las cajas para automovilistas. Por lo general, al elegir una caja para automovilistas el cliente selecciona la fila más corta. Pero este procedimiento no siempre funciona bien porque, debido a diferencias en los tiempos de las transacciones, algunas filas tienden a moverse con mayor rapidez que otras. Entonces, sucede con frecuencia que un cliente que elige una línea corta debe esperar un periodo desproporcionado de tiempo si los clientes que están antes que él tienen transacciones prolongadas.

El señor Smith ha investigado diversas formas en las que otros bancos manejan ese problema. Se dio cuenta que un método popular implica hacer que todos los clientes que llegan en automóvil esperen en una sola fila. Después, cada cliente pasa al primer cajero que queda disponible cuando su automóvil llega al primer lugar de la fila. Al comparar el procedimiento actual con el que se propone, el criterio para decidir si debe implantar la operación con una sola fila será el tiempo promedio que un cliente espera en la fila. Si se encuentra que el nuevo método de fila única produce un tiempo promedio de espera menor, entonces se adoptará sin investigar ninguno de los otros procedimientos. Ambos procedimientos se ilustran en la figura 5.1

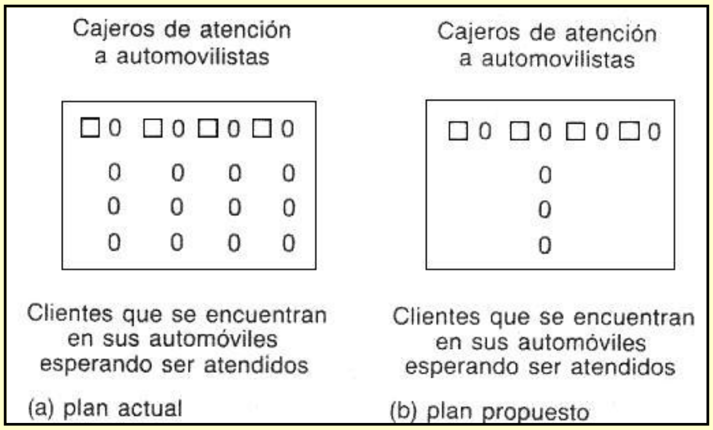


FIGURA 5.1 Planes actual y propuesto

En la figura la, se observa que los clientes automovilistas esperan ser atendidos en cuatro filas individuales, en tanto que en la figura 5.1b, los clientes esperan en una sola fila para que quede disponible alguno de los cuatro cajeros.

Un estudio previo de este problema, realizado por el señor Smith, muestra que los clientes llegan a una tasa promedio de 16 por hora y que cada cajero maneja transacciones a una tasa promedio de 8 por hora.

Para analizar el caso, es necesario determinar las características de operación de cada uno de los sistemas de líneas de espera. Dado que se ha llevado a cabo una gran cantidad de investigaciones sobre los modelos de líneas de espera, un punto razonable de inicio para el análisis sería determinar si cualquiera de los planes se ajusta a alguno de los modelos disponibles. Si es así entonces simplemente podría aplicarse el modelo conocido a la situación que se enfrenta y calcular las características operativas que se desean para el sistema.

5.3 Clasificación de los sistemas de líneas de espera (colas)

Con el objeto de verificar si una situación determinada del sistema de líneas de espera se ajusta o no a un modelo conocido, se requiere un método para clasificar las líneas de espera. Esa clasificación debe responder preguntas como las siguientes:

1. ¿El sistema de líneas de espera tiene un solo punto de servicio o existen múltiples puntos de servicio en secuencia?
2. ¿Existe sólo una instalación de servicio o son múltiples las instalaciones de servicio que pueden atender a una unidad?
3. ¿Las unidades que requieren servicio llegan siguiendo algún patrón o llegan en forma aleatoria?
4. ¿E1 tiempo que se requiere para el servicio se da en algún patrón o asume duraciones aleatorias de tiempo?

5.4 Número de etapas y de canales de servicio

Para responder las preguntas 1 y 2, en primer lugar, debe decidirse si una unidad ha de pasar a través de un solo punto de servicio o a través de varios. Si se trata del primer caso, entonces se tiene sólo una *entrada* al punto de servicio y una *salida* del punto de servicio. Esto se denomina sistema de *etapa única.* Si la salida del primer punto de servicio se convierte en la entrada a un segundo punto de servicio, y así sucesivamente, se tiene un sistema de líneas de espera de *etapas múltiples,* que es mucho más complejo y difícil de analizar que los sistemas de etapa única, Por esta razón, consideraremos sólo los sistemas de este último tipo.

En la figura 5.2 se muestran en un diagrama ambas estructuras de sistema de líneas de espera. Observe que en el sistema de etapas múltiples la salida de la primera etapa es la entrada para la segunda, y así sucesivamente para todas las etapas.

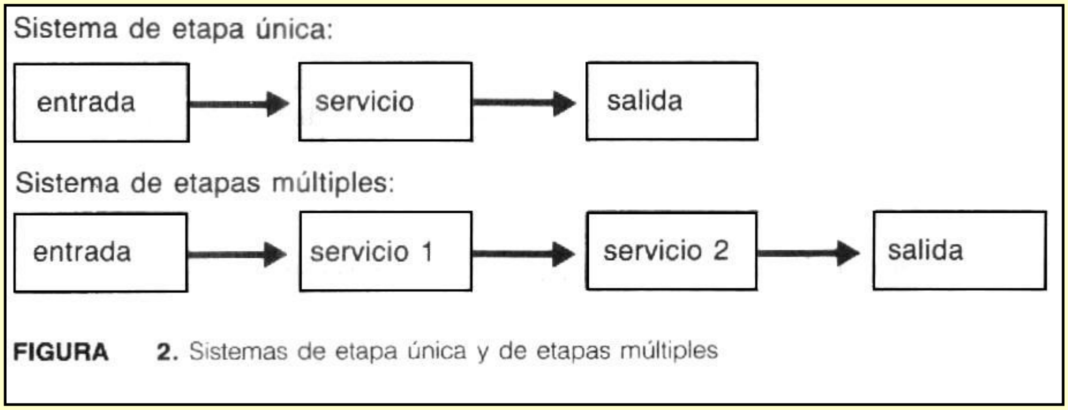


Figura 5.2 Sistemas de etapa única y de etapas múltiples

Si nos restringimos a los sistemas de etapa única, entonces nos ocuparemos en forma exclusiva del número y disposición de las líneas de espera en una sola etapa. En la 5.3 se muestran tres casos importantes de este tipo de sistemas. El primer caso (a) es una instalación de servicio único, o ***canal***, como con frecuencia se denomina, con una sola línea de espera. El segundo caso (b) tiene instalaciones de servicio o canales múltiples y también líneas de espera múltiples. Estas son en esencia las simples en paralelo y pueden analizarse como tales. Este es el sistema que se presenta en el banco. El tercer caso (c) es una sola línea de espera atendida por instalaciones de servicio múltiple. Esta es la disposición que se propone para el banco. En ambos casos (b y c), se supone en general que todas las instalaciones de servicio tienen una eficiencia equivalente.

5. 5 Notación de Kendall

Por lo general, las tasas de llegada y de servicio no se conocen con certidumbre sino que son de naturaleza estocástica o probabilística. Es decir, los tiempos de llegada y de servicio deben describirse a través de distribuciones de probabilidad, y las distribuciones de probabilidad que se elijan deben describir la forma en que se comportan los tiempos de llegada o de servicio.

En teoría de líneas de espera o de colas se utilizan tres distribuciones de probabilidad bastante comunes:

1. de Markov
2. determinística
3. general

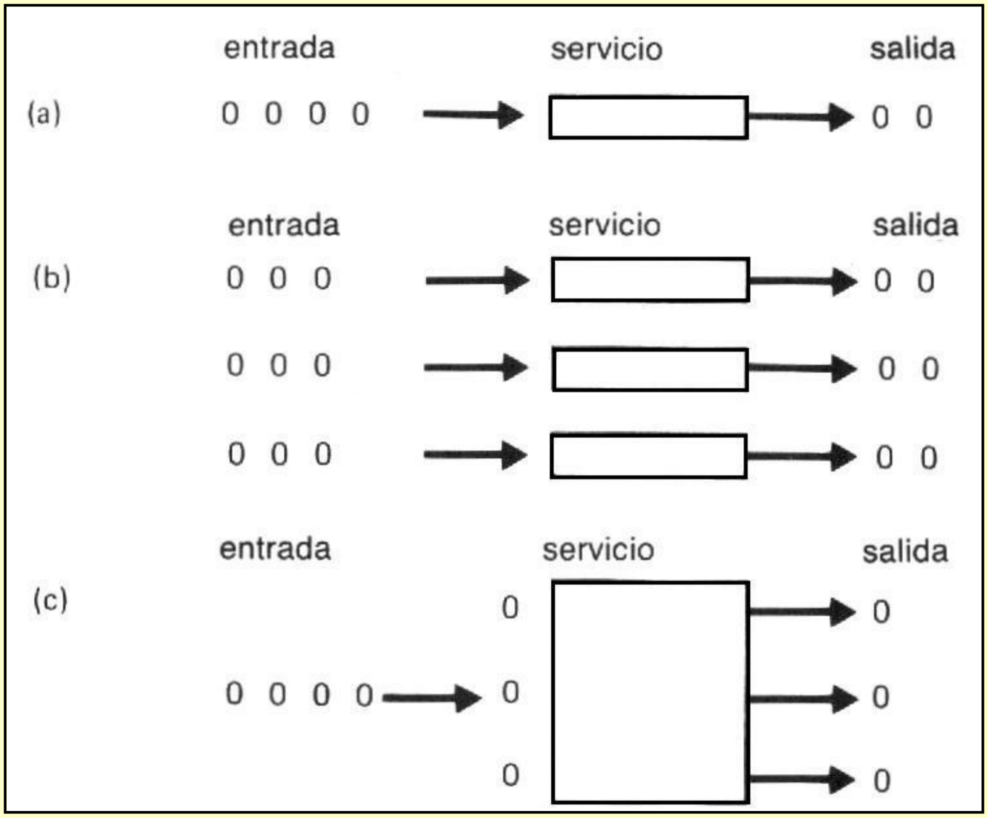


Figura 5.3 Ejemplos de sistemas de etapa única

Una distribución de *Markov* (en honor de A. A. Markov, matemático que identificó los eventos “sin memoria”) se utiliza para describir ocurrencias aleatorias, es decir, aquellas de las que puede decirse carecen de memoria acerca de eventos pasados. Una distribución *determinística* es aquella en la que los sucesos ocurren en forma constante y sin cambios. Por último, una distribución *general* sería cualquier otra distribución de probabilidad. Es posible describir el patrón de llegadas por medio de una distribución de probabilidad y el patrón de servicio a través de otra.

Para permitir a los investigadores y estudiantes de la teoría de líneas de espera comunicarse entre sí con facilidad acerca de diversos sistemas de líneas de espera, Kendall, matemático británico, elaboró una notación abreviada para describir en forma sucinta los parámetros de un sistema de este tipo. En la **notación de Kendall** un sistema de líneas de espera se designa como

A/B/C

en donde

A se sustituye por **una** letra que denote la distribución de llegada

B se sustituye por una letra que denote la distribución de servicio

C se sustituye por un entero positivo que denote el número de canales de servicio.

La notación de Kendall utiliza también

M = Markoviano

D = determinística y

G = general.

Por ejemplo, un sistema de líneas de espera con llegadas aleatorias, servicio determinístico y 3 canales de servicio se identificaría en notación Kendall como

M/D/3

En todos los casos, se supone que existe sólo una línea de entrada.

5.6 Otras consideraciones

Es evidente que existen otros atributos aparte de los que se analizaron antes y que deben tomarse en consideración cuando se analiza un sistema de líneas de espera. Estos incluyen

- El tamaño de la población de la que provienen los elementos que ingresan al sistema de líneas de espera (la "población que llega")
- La forma en que las unidades llegan para ingresar al sistema de líneas de espera; por ejemplo, una por una o en grupos
- La disciplina de la línea de espera, o el orden en que se atienden las unidades (ase atienden las unidades en el orden en que llegan, es decir, el primero en llegar es el primero que se atiende, o existe algún otro sistema de prioridad para el servicio?)

- Si las unidades *rechazan* o no debido a la longitud de la línea de espera y no ingresan al sistema
- Si las unidades se arrepienten y *abandonan* el sistema después de haber aguardado un tiempo en la fila
- Si existe o no espacio suficiente para que todas las unidades que llegan aguarden en la fila

Las diversas respuestas a preguntas de este tipo, junto con las diferentes disposiciones de probabilidad y los diferentes números de canales de servicio, sirven para generar una gran variedad de tipos de sistemas de líneas de espera que deben analizarse. En este análisis introductorio de las líneas de espera, nos restringiremos a los casos más simples; en particular supondremos:

- Una población infinita que llega
- Las llegadas son en forma individual
- Las unidades que llegan se atienden en el orden en que llegan
- Las llegadas no se rechazan ni abandonan por la longitud de la línea de espera siempre hay suficiente espacio para que se forme la línea de espera.

5.7 Análisis del Caso del Guarantee Bank And Trust Company

Volviendo al problema del Guarantee Bank, es necesario clasificar el sistema actual de líneas de espera y el que se propone, para determinar si es posible describirlos a través de algunos de los modelos conocidos. Si existe un modelo, entonces pueden calcularse las características de operación de cada uno de los sistemas y compararlas con el criterio del señor Smith, el tiempo promedio de espera por cliente, para determinar cuál es el mejor sistema.

5.8 Comparación de los sistemas actual y propuesto

Los dos sistemas son similares en varios sentidos. En primer lugar, en definitiva se trata de sistemas de una sola etapa. En segundo lugar, comparten la misma población que llega y el patrón de llegadas es el mismo para ambos. Por último, el patrón de servicios será también el mismo, es decir, los cajeros atienden a todos los clientes de la misma manera.

También es necesario considerar los otros aspectos, es decir, el tamaño de la población, la llegada de las personas, el patrón de servicio y las personas que rechazan o abandonan el sistema. Para la situación de los cajeros para automovilistas del Guarantee Bank and Trust Company, puede suponerse que la población de clientes es tan grande que para todo propósito práctico puede considerarse infinita. Dado que los clientes llegan en automóviles, por lo general lo hacen de manera individual. También, y dado que los clientes se encuentran en automóviles, se les atiende sobre la base de que al primero que llega se le atiende primero y no pueden abandonar la fila una vez que se encuentran formados. Aunque podrían arrepentirse, lo que provocaría rechazo, este no es el caso común, puesto que la mayoría de las personas necesitan realizar sus transacciones y por lo general esperan para hacerlo.

La principal diferencia entre los dos sistemas radica en la disposición de las instalaciones de servicio. Consultando la 5. 3, el sistema actual está constituido por cuatro filas en paralelo (fig. 5.3b) en tanto que el sistema que se propone está formado por una sola línea de espera con cuatro centros de servicio (fig. 5.3c). El sistema actual puede clasificarse como si fueran cuatro sistemas de filas de canal único, separados, pero idénticos, y el sistema propuesto puede considerarse como un solo sistema con centros múltiples de servicio. El sistema actual funciona como cuatro filas paralelas puesto que una vez que un automóvil ha ingresado a la línea de espera no es fácil que se cambie a otra.

5.9 Patrones de llegada y de servicio

Examinemos ahora los patrones de llegada y de servicio. Parece lógico suponer que la llegada de los clientes será aleatoria puesto que la mayoría de los que llegan a realizar sus transacciones por lo general no tienen ninguna relación con los otros clientes que desean hacer lo mismo. También, podría suponerse que los tiempos de servicio son aleatorios puesto que la mayor parte de las transacciones no tendrá relación con las otras. Algunas de ellas requerirán un tiempo breve, en tanto que otras pueden ser un tanto prolongadas, pero la distribución general de los tiempos de servicio será aleatoria. En estos momentos existen cuatro líneas diferentes de entrada, cada una de las cuales tiene las mismas unidades. Es decir, los clientes que llegan, en promedio, se distribuirán equitativamente entre las cuatro filas. Con respecto al servicio, son cuatro las personas que atienden y cada una de ellas tiene una tasa de servicio igual a las demás. En este caso, existen cuatro filas que podrían clasificarse en la notación de Kendall como M/M/l: esto es, entrada aleatoria, tiempo de servicio aleatorio y un solo canal de servicio.

Para el sistema propuesto, es posible seguir suponiendo que las llegadas son aleatorias al igual que los tiempos de servicio, pero con cuatro canales de servicio. Por ello, en notación de Kendall, esta situación se describiría como M/M/4.

En este capítulo se consideran primordialmente los canales M/M/ 1 y M/M/S (en donde S es un entero mayor que uno, que indica el número de canales de servicio). Se hace hincapié en estos tipos de líneas de espera por dos razones principales. En primer lugar, la ocurrencia de tasas de llegadas y tiempos de servicio aleatorios es muy común en situaciones cotidianas. En segundo lugar, resulta fácil calcular las características de operación de ese tipo de sistemas de líneas de espera. También examinamos en forma breve otros sistemas.

5.10 Características de las Líneas de Espera M/M/1

5.10.1 Llegadas aleatorias

En las situaciones cotidianas es fácil encontrar ejemplos de llegadas aleatorias, puesto que las llegadas serán aleatorias en cualquier caso en el que una de ellas no afecte a las otras. Un ejemplo clásico de llegadas aleatorias son las llamadas que arriban a un conmutador telefónico o un servicio de emergencia.

Se ha determinado que las ocurrencias aleatorias de un tipo especial pueden describirse a través de una distribución discreta de probabilidad bien conocida, la distribución de Poisson. Este tipo especial de llegadas aleatorias supone dos características acerca de la corriente de entrada.

- En primer lugar, se supone que las llegadas son por completo independientes entre sí y con respecto al estado del sistema.
- En segundo lugar, la probabilidad de una llegada durante un periodo especifico no depende de cuándo ocurre el periodo, sino más bien, depende sólo de La longitud del intervalo.

Se dice que estas ocurrencias *carecen de "memoria".* Si conocemos el número promedio de ocurrencias por periodo, podemos calcular las probabilidades acerca del número de eventos que ocurrirán en un periodo determinado, utilizando las propiedades conocidas de la distribución de Poisson.

En particular, si existe un promedio de λ llegadas en un periodo, *T,* la probabilidad de *n* llegadas en el mismo periodo está dada por:

$$P[n \text{ llegadas en el tiempo } T] = \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} \qquad 5.1$$

en donde

$$e = 2.71828$$
$$n! = (n)(n-1)(n-2)\dots(2)(1)$$

Por ejemplo, si existe un promedio de 6 llegadas aleatorias por hora, la probabilidad de que haya sólo 3 llegadas durante una hora está dada por

$$\textbf{P [3 llegadas en una hora]} = e^{-6}(6)^3/3! = 0.0892$$

5.10.2 Tiempos de servicio aleatorios

Al igual que con las llegadas aleatorias, la ocurrencia de tiempos de servicio aleatorios, carentes de memoria, es un suceso bastante común en las situaciones cotidianas de líneas de espera. Y, al igual que con las llegadas aleatorias, los tiempos de servicio carentes de memoria se describen a través de una distribución a probabilidad. La diferencia entre las llegadas aleatorias y los tiempos de servicio aleatorios es que éstos se describen a través de una distribución continua en tanto que las llegadas se describen a través de la distribución de Poisson, que es discreta. Si la duración de los tiempos de servicio es aleatoria, la **distribución exponencial negativa** describe ese tipo de tiempo de servicio. Si μ es la tasa promedio de servicio, es decir, el inverso del tiempo promedio de servicio, entonces la distribución está dada por:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad 5.2$$

Es posible emplear esta fórmula para calcular la probabilidad de que el servicio sea más prolongado que alguna duración especificada de tiempo *T.* Es decir,

$$\mathbf{P}(\text{el servicio se tarda más que T}) = P(t > T)$$

en donde t = tiempo de servicio. Utilizando la distribución exponencial negativa, encontramos que:

$$P(t \leq T) = 1 - e^{-\mu T} \qquad 5.3$$

lo cual muestra que:

$$P(t > T) = e^{-\mu T}$$

dado que:

$$P(t > T) = 1 - P(t \leq T) \qquad 5.4$$

5.10.3 Comentarios sobre las distribuciones de probabilidad

Las distribuciones exponencial negativa y de Poisson que se analizaron antes pueden considerarse como *distribuciones duales.* Es decir, si ocurren llegadas de acuerdo con la distribución de Poisson, entonces el *tiempo entre llegadas* (tiempo que transcurre entre una llegada y otra) será de acuerdo con la distribución exponencial negativa. Esto quiere decir que si:

$$P(0 \text{ llegadas en el tiempo } T) = \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^0}{0!} = e^{-\lambda T} \qquad 5.5$$

en donde 0! = 1

entonces, esto equivale a:

$$P(\text{la primera llegada es después del tiempo } T) = e^{-\lambda T} \qquad 5.6$$

Por ello, cuando la distribución del *tiempo de servicio* sigue una distribución exponencial negativa, el *número de servicios* sigue una distribución de Poisson. Así, las ocurrencias aleatorias y los tiempos aleatorios entre ocurrencias son equivalentes. En La 5.4 se observan ejemplos tanto de la distribución exponencial negativa como de la de Poisson.

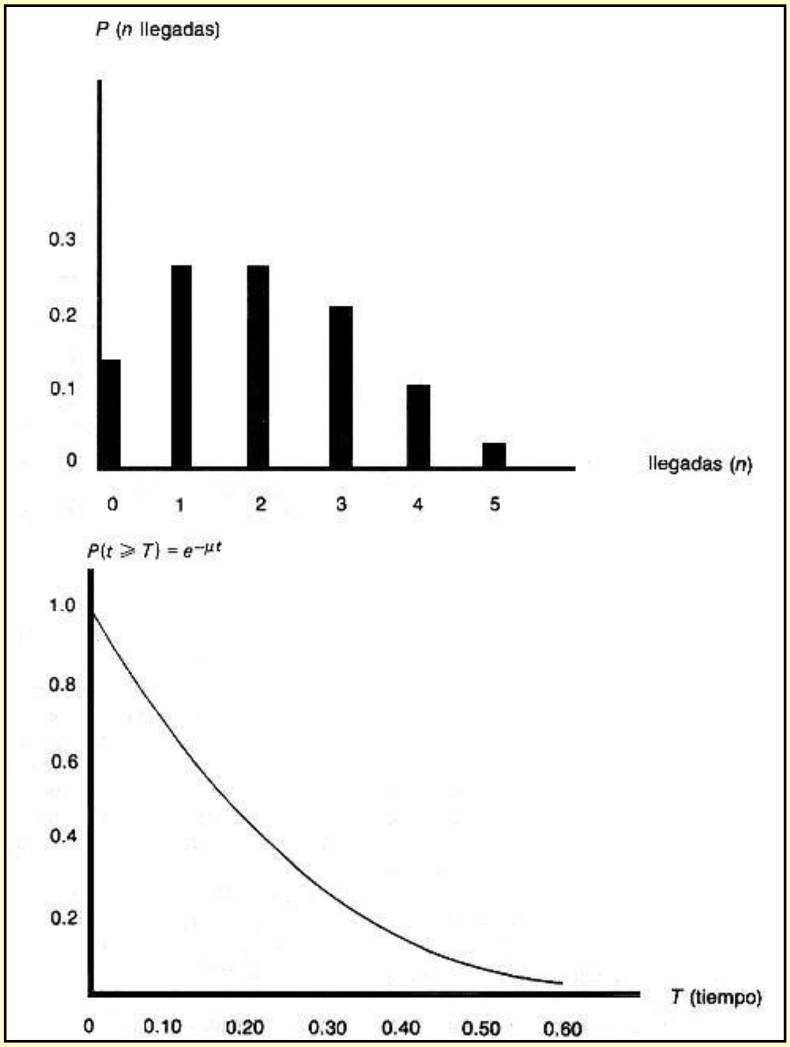


Figura 5.4 Patrones de distribución.

Una propiedad importante de la aleatoriedad es que las ocurrencias tienden a agruparse. Contrario a lo que intuitivamente se pensaría, las ocurrencias no se presentan en forma separada, sino en grupos. Quien quiera que haya trabajado en una situación en la que llegan clientes en forma aleatoria puede atestiguarlo. El hecho de que estamos trabajando con tasas promedio no garantiza que cada uno de los eventos ocurrirá a este ritmo durante cualquier periodo determinado; pero, en promedio, esta tasa se presenta a largo plazo.

5.10.4 Condiciones de estado estacionario

En muchas situaciones de sistemas de líneas de espera, existe un periodo inicial, que es cuando comienza el periodo que se estudia. Este periodo inicial tiene muchas características transitorias que no son similares a los valores promedio a largo plazo que se encuentran cuando se estabiliza el sistema de líneas de espera. Un ejemplo de periodo transitorio es la entrada inicial y apresurada de clientes en un banco cuando se abren sus puertas. No nos interesa este periodo. Deseamos investigar las características promedio a largo plazo que se presentan cuando el sistema ha alcanzado el *estado estacionario* o estable. Estas son las denominadas condiciones de estado estacionario que se calcularán para las líneas de espera M/M/1 y M/M/S. Se analizan estos valores de estado estacionario porque no dependen de la duración del tiempo que el sistema ha estado operando. Aunque es cierto que algunos sistemas no alcanzan nunca el estado estacionario, muchos de ellos se aproximan lo suficiente para que las características de este estado estacionario resulten útiles para describir el sistema.

5.10.5 Recopilación de datos y distribuciones de probabilidad

Con objeto de emplear un modelo determinado de líneas de espera, en primer lugar se debe validar el modelo; es decir, se debe probar que la situación real de línea de espera "se ajusta" a ese modelo. En este caso, y para utilizar el modelo M/M/1, interesa probar que las llegadas son aleatorias y que los tiempos de servicio tienen duración aleatoria. Para hacerlo, se necesita probar que la tasa real de llegadas se ajusta a la distribución de Poisson y que la tasa real de servicio se ajusta a la distribución exponencial negativa. En primer lugar, se debe recopilar datos sobre los tiempos de llegada y de servicio. Después, puede utilizarse una técnica estadística bien conocida que se denomina prueba de bondad de ajuste ***ji*** cuadrada (χ^2) para determinar si los datos se ajustan en realidad a las distribuciones mencionadas.

Para ajustar un modelo particular, por ejemplo el M/M/l, se necesita recopilar datos sobre la tasa promedio de llegadas, λ, y el tiempo promedio de servicio, $1/\mu$. Para encontrar la tasa promedio de llegadas se mantiene un registro del número de llegadas por unidad de tiempo: hora, día, o el que sea. Después, resulta bastante sencillo calcular el promedio para todos los periodos para los que se recopilaron, datos. Por supuesto, se debe tener cuidado de asegurarse que la tasa de llegadas no fluctúa tanto, que haga que el uso de un solo valor de λ resulte poco realista.

Medir los tiempos de servicio es un poco más difícil puesto que no es posible contar simplemente el número de casos de servicio que ocurrieron durante un periodo. Es evidente que a largo plazo este número siempre será igual a la tasa de llegadas y por ello no sería una medida válida del tiempo promedio de servicio. Es necesario medir en forma individual los tiempos de los servicios. Después, pueden utilizarse estos tiempos para calcular un tiempo promedio de servicio, $1/\mu$.

5.10.6 Consideraciones para las líneas de espera M/M/1

Con el objeto de utilizar las líneas de espera M/M/1, se tiene que suponer llegadas con distribución de Poisson y distribución de servicio exponencial negativa. Para obtener las características de este tipo de líneas de espera, se deben hacer otras consideraciones. En primer lugar, debe haber un solo canal de servicio al cual ingresan las unidades que entran una por una. En segundo lugar, se considera que existe una población infinita de entre la cual se originan las llegadas. También se supone que existe un espacio infinito para dar cabida a las llegadas que esperan en la fila. Por último, se supone que las unidades que llegan se atienden sobre la base de "primero que llega, primero que se atiende" (que también se conoce como PEPS, "primero que entra, primero que sale"). La siguiente lista incluye todas las consideraciones para las líneas de espera M/M/ 1:

- Llegadas aleatorias únicas (distribución de Poisson)
- Tiempos de servicio aleatorios (distribución exponencial negativa)
- Existe una situación de estado estacionario
- Un solo canal de servicio
- Población que llega infinita
- Espacio de espera infinito
- Disciplina de servicio de primero que llega primero que se atiende
- No hay rechazo
- No hay abandono

Ya se han analizado con detalle las tres primeras consideraciones. La cuarta de ellas, la de un solo canal de servicio, se explica por sí misma. Las dos consideraciones siguientes, población que llega infinita y espacio de espera infinito, simplemente significan que siempre estarán llegando clientes y que existe espacio adecuado para que esas unidades que llegan esperen. Estas consideraciones aseguran que la situación de línea de espera no se complique porque exista dependencia entre las llegadas o porque éstas abandonen el sistema por falta de espacio para esperar. La consideración de que el primero que llega es el primero que se atiende asegura que las unidades que llegan posteriormente no son atendidas antes que las que llegaron con anterioridad.

5.10.7 Características de operación de las líneas de espera M/M/1

Para calcular las características de operación de una cola M/M/l, primero debemos observar que si **λ** = tasa promedio de llegadas y ***μ*** = tasa promedio de servicio, entonces **λ** debe ser menor que ***μ*** Si no fuera así, el promedio de llegadas sería superior al número promedio de unidades que se atienden, y el número de unidades que están esperando se volvería infinitamente grande. Si hacemos que ***ρ*** = **λ/μ** puede denominarse a ***ρ*** **factor de utilización**. Este valor, ***ρ*** = **λ/μ**, es la *fracción promedio de tiempo que el sistema está ocupado* (ocupado se define como una o más unidades esperando y/o siendo atendidas). Observe que también puede considerarse que ***ρ*** es el *número promedio de unidades que están siendo atendidas en cualquier momento.* En términos de probabilidad:

P_W = probabilidad de que el sistema esté ocupado

$$P_W = \frac{\lambda}{\mu} = \rho \qquad 5.7$$

Entonces, la probabilidad de que el sistema no esté trabajando, o esté vacío, ***P_0*,** puede obtenerse por medio de:

$$P_0 = 1 - P_W = 1 - \lambda/\mu = 1 - \rho \qquad 5.8$$

A partir de esto podemos obtener la *probabilidad de que haya **n** unidades en el sistema,* ***P_n*** mediante:

$$P_n = (P_0)(\lambda/\mu)^n = P_0\rho^n \qquad 5.9$$

en donde ***n*** es cualquier entero no negativo. Este importante resultado nos permite calcular las características de operación de las líneas de espera.

La primera característica de operación que se calculará es el *número promedio de unidades que se encuentran en el sistema,* ya sea esperando o siendo atendidas. Denominaremos a este número promedio de unidades, ***L.*** Recuérdese que el valor promedio o valor esperado para una distribución discreta de probabilidad está dado por:

$$E(X) = \sum_{X=0}^{\infty} XP(X)$$

Por ello, el número esperado de unidades en el sistema está dado por

$$L = \text{número esperado de unidades en el sistema}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} nP_0\rho^n \qquad 5.10$$

o

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Ahora se puede utilizar ***L,*** número esperado de unidades en el sistema, para calcular todas las otras características que se desean. En primer lugar, se desea conocer el *número promedio de unidades que esperan ser atendidas* o $\boldsymbol{L_q}$**.** Dado que ***L*** es el número promedio de unidades que están esperando o están siendo atendidas, y $\boldsymbol{\rho}$ es el número promedio de unidades que están siendo atendidas en algún momento dado, entonces $\boldsymbol{L = L_q + \rho}$. A partir de esto es fácil observar que:

$$L_q = L - \rho \qquad 5.11$$

o

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Examinando ahora el tiempo de espera. Se utilizará ***W*** *para* representar el *tiempo promedio o esperado que una unidad se encuentra en el sistema.* Para encontrar ***W****, se* observa que si ***L*** es el número esperado de unidades en el sistema y **λ** es el número promedio de unidades que llegan para ser atendidas por periodo, entonces el tiempo promedio que cualquier unidad que llega debe estar en el sistema está dado por:

$$W = \text{tiempo esperado de una unidad en el sistema}$$

$$= \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad 5.12$$

De manera similar, el *tiempo esperado o promedio que una unidad tiene que esperar antes de ser atendida,* $\boldsymbol{W_q}$, está dado por:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \qquad 5.13$$

Obsérvese que $W = W_q + 1/\mu$. Esto indica que el total de tiempo invertido en el sistema, W, es igual al tiempo de espera (W_q) más el tiempo de servicio ($1/\mu$).

5.10.8 Ejemplo ilustrativo

Antes de prestar atención al caso del Guarantee Bank and Trust, observemos un ejemplo simple de la M/M/l. Sea λ = 20 unidades por hora y μ = 30 unidades por hora, de manera que ρ = 2/3 < 1. Ahora podemos calcular las características de este sistema de líneas de espera utilizando las ecuaciones (5.7) — (5.13). En primer lugar:

$$\begin{aligned} P_W &= \text{probabilidad de que el sistema esté ocupado} \\ &= \rho = 2/3 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} P_0 &= \text{probabilidad de que el sistema no esté ocupado} \\ &= 1 - \rho = 1/3 \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} P_n &= \text{probabilidad de que haya } n \text{ unidades en el sistema} \\ &= P_0(\rho)^n \\ &= (1/3)(2/3)^n \end{aligned}$$

En la figura 5, se graficó la distribución de probabilidad para valores de n = 0, 1, 2,... es decir, $P = (1/3)(2/3)^n$. Obsérvese que la probabilidad de que haya 0 unidades en el sistema, P_0, siempre es mayor que P_n para cualquier n > 0. También se ha marcado el número promedio de unidades en el sistema L. Este valor se encuentra de la siguiente manera:

$$L = \text{número esperado de unidades en el sistema}$$
$$= \frac{\rho}{1-\rho}$$
$$= \frac{2/3}{1-2/3} = 2 \text{ unidades}$$

Por ello, habrá un promedio de 2 unidades en el sistema.

Utilizando la ecuación (5.11) es posible calcular L_q:

$$L_q = \text{número esperado de unidades que esperan ser atendidas}$$
$$= L - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$
$$= 2 - 2/3 = 4/3$$

Entonces, en promedio habrá 4/3 unidades esperando ser atendidas y 2/3 de unidad siendo atendida.

Puede calcularse el tiempo promedio que se está en el sistema utilizando la ecuación (5.12).

$$W = \text{tiempo esperado que una unidad permanece en el sistema}$$
$$= \frac{L}{\lambda} = \frac{2 \text{ unidades}}{20 \text{ unidades por hora}} = \frac{1}{10} \text{ de hora}$$
$$= 6 \text{ minutos}$$

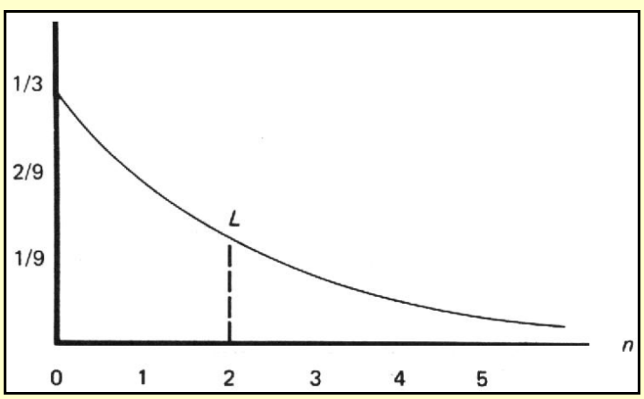


Figura 5.5 Distribución de P_n

De manera similar, el tiempo promedio que una unidad espera para ser atendida está dado por la ecuación (5.13):

$$W_q = \text{tiempo esperado que una unidad permanece esperando ser atendida}$$

$$= \frac{L_q}{\lambda} = \frac{4/3 \text{ unidades}}{20 \text{ unidades por hora}} = \frac{1}{15} \text{ de hora}$$

$$= 4 \text{ minutos}$$

Observe que dada la tasa de μ = 30 unidades/hora, entonces el tiempo de servicio es l/ μ, o 1/30 **(=** 2 minutos). Utilizando esto, puede verse que:

$$W = W_q + 1/\mu$$

$$= 4 \text{ minutos } + 2 \text{ minutos}$$

$$= 6 \text{ minutos}$$

En este punto resulta útil observar el efecto que tiene cambiar la tasa de servicio. En los cálculos anteriores encontramos que para λ **=** 20 por hora y μ **=** 30 por hora, P_0= 1-2/3 **=** 1/3. Esto señala que el sistema no está siendo utilizado 1/3 del tiempo. Podría llegarse a la conclusión de que existe algo de holgura en el sistema, la que podría eliminarse reduciendo la tasa de servicio, por ejemplo a través de una reducción del número de trabajadores que atienden la instalación de servicio. Para investigar este efecto, se construye la tabla 5.1 para diversos valores de μ, la tasa de servicio.

En esta tabla puede observarse que cuando el tiempo muerto se reduce de 1/3 a 1/11, la longitud promedio de la línea de espera aumenta en un factor de 5; de 2 a 10 unidades. También se observa que el tiempo que una unidad invierte en el sistema aumenta en un factor de 5, de 6 minutos a 30. Esto ilustra una característica clave de los sistemas de líneas de espera: *el tiempo muerto es necesario para que cualquier sistema de líneas de espera opere de manera eficiente.*

μ (unidades/horas)	P_0	L (unidades)	L_q (unidades)	W (minutos)	W_q (minutos)
30	1/3	2	1 1/3	6	4
28	2/7	2 1/2	1 11/14	7 1/2	5 5/14
25	1/5	4	3 1/5	12	9 3/5
22	1/11	10	9 1/11	30	27 3/11

TABLA 5.1. Características de las líneas de espera con λ = 20

El tiempo muerto no sería necesario si las tasas de llegada y de servicio fueran constantes, pero en el sistema M/M/1, las llegadas ocurren al azar y por ello es necesario tener holgura en el sistema que permita manejar los periodos en los que la tasa de llegada es mayor que la tasa promedio. Si no fuera así, el sistema se sobrecargaría con rapidez ya que habría un flujo de unidades solicitando servicio superior al promedio. En los modelos de líneas de espera resulta común encontrar que un cambio en los parámetros produce un cambio no lineal en las características de operación.

5.10.9 Comentarios sobre el caso del Guarantee Bank and Trust

En el caso del Guarantee Bank and Trust, los clientes automovilistas llegan al azar a razón de 16 por hora. Cada cajero para automovilistas puede manejar transacciones a una tasa de 8 por hora. El servicio se da sobre la base de que se atiende al primero que llega y existe espacio suficiente en el estacionamiento del banco para dar cabida a cuantos automóviles sea necesario. Dado que en la actualidad existen cuatro líneas en paralelo que funcionan de manera independiente entre sí, es posible dividir la tasa de llegadas en forma equitativa entre las filas. Si se hace esto, se tienen cuatro filas, cada una de ellas con $\lambda = 4$ y $\mu = 8$.

Ahora puede analizarse cada uno de los cuatro cajeros en forma individual y combinar los resultados, En este caso, $\rho = 4/8 = 1/2$ y $P_0 = 1-1/2 = 1/2$. Por tanto,

$$L = \frac{1/2}{1 - 1/2} = \text{un promedio de 1 automóvil en el sistema}$$

$$L_q = 1 - 1/2 = \text{un promedio de 1/2 de automóvil en la línea de espera}$$

$$W = 1/4 \text{ de hora} = \text{un promedio de 15 minutos en el sistema}$$

$$W_q = \frac{1/2}{4} = 1/8 \text{ de hora} = \text{un promedio de 7 1/2 minutos en la línea de espera para cada cajero de atención a automovilistas}$$

El criterio del señor Smith para tomar una decisión es el tiempo promedio que un cliente invierte esperando en la fila. Con la disposición actual, el tiempo promedio que un cliente espera para obtener servicio es 7 1/2 minutos.

5.11 Características de las Líneas de Espera *M/M/S.*

El modelo que supone llegadas y tiempos de servicio aleatorios para canales de servicios múltiples tiene las mismas consideraciones que el modelo de canal único de servicio (M/M/1), excepto que ahora existe una sola fila de entrada que alimenta los canales múltiples de servicio con iguales tasas de servicio. El cálculo de las características de la línea de espera para el modelo M/M/S es algo más complicado que los cálculos para el caso de canal único, y dado que primordialmente nos interesan las implicaciones de estas características más que las fórmulas necesarias para calcularlos, nos apoyaremos en el uso de tablas elaboradas a partir de estas fórmulas para hacer los cálculos.

5.11.1 Características de operación

En el modelo M/M/S, si μ es la tasa promedio de servicio para cada uno de los S canales de servicio, entonces ya no se requiere que $\mu > \lambda$, pero $S\mu$ debe ser mayor que λ para evitar una acumulación infinita de líneas de espera. En el caso de M/M/S, la característica clave que se utilizará para hacer los demás cálculos es la probabilidad de que el sistema esté ocupado. En otras palabras, la probabilidad es de que haya S o más unidades en el sistema. En este caso, todos los canales de servicio se estarán utilizando y por ello se dice que el sistema está ocupado. Esto se escribe como:

$$\textbf{P(sistema ocupado)} = \text{P}(\mathbf{n} \geq \mathbf{S}) \qquad 5.14$$

y puede calcularse utilizando la fórmula:

$$P(\text{sistema ocupado}) = \frac{\rho^S(\mu S)}{S!\,(\mu S - \lambda)} \times P_0 \qquad 5.15$$

$$\text{en donde} \quad P_0 = 1 \div \left[\sum_{n=0}^{n=S-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \left(\frac{S\mu}{S\mu - \lambda}\right)\right] \qquad 5.16$$

Encontrar P(sistema ocupado) utilizando la ecuación **(5.15)** no es difícil si se tiene el valor de P_0, pero el cálculo de P_0 utilizando la ecuación (**5.16**) es tedioso. En vez de tener que llevar a cabo la laboriosa tarea de calcular P_0 cada vez que se le necesita, es posible elaborar una tabla que proporcione el valor de P_0 para diversos valores de ρ (i.e., λ/μ) y S.

Ahora puede utilizarse esta peculiaridad del sistema para calcular sus demás características. En el modelo M/M/S, al igual que en el M/M/l, se tiene que $L = L_q + \rho$, pero aquí usamos el valor de ***P*** (sistema ocupado) para calcular L_q:

$$L_q = P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S - \rho} \quad 5.17$$

Y después se calcula L: 5.18

$$L = P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S - \rho} + \rho$$

En el caso M/M/S, al igual que en el M/M/l, $W = L/\lambda$ y $W_q = L_q/\lambda$, por ello, se tiene:

$$W = \frac{1}{\lambda}\left[P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S - \rho} + \rho \right] \quad 5.19$$

$$W_q = \frac{1}{\lambda}\left[P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S - \rho} \right] \quad 5.20$$

Todo lo que se necesita hacer es utilizar los parámetros que definen la situación específica, ρ y S, para encontrar un valor de P_0. Después se emplea este valor para calcular ***P*** (sistema ocupado) y todas las demás características de operación.

5.11.2 Ejemplo ilustrativo

Para ejemplificar el modelo M/M/S, suponga que existen cinco canales de servicio con tasas promedio de servicio $\mu = 6$ y una tasa de llegadas λ de 24 unidades por hora. Esto implica que $S = 5$ y

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{6} = 4$$

Encontramos que para una $S = 5$ y $\rho = 4$, $P_o = 0.0130$. Después, haciendo uso de la ecuación (5.15), ***P***(sistema ocupado) = 0.5547. Utilizando este valor, tenemos:

$$L_q = P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S-\rho}$$

$$= (0.5547)\left(\frac{4}{5-4}\right) = 2.2188 \text{ unidades}$$

$$L = 2.2188 + 4 = 6.2188 \text{ unidades}$$

Empleando las ecuaciones 5.19 y 5.20,

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{6.2188 \text{ unidades}}{24 \text{ unidades por hora}} = 0.2591 \text{ de hora}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.2188}{24} = 0.0925 \text{ de hora}$$

5.11.3 Comentarios sobre el caso del Guarantee Bank and Trust (continuación)

Para continuar la comparación de los servidores únicos o simples múltiples (situación actual) con el plan que se propone de canales de servicio múltiple en el Guarantee Bank and Trust, necesitamos calcular primero las características de la línea de espera para este último caso utilizando los resultados del modelo M/M/S.

El sistema que se propone consta de cuatro canales de servicio, todos ellos con tasas de servicio de 8 por hora. La tasa de entrada es de 16 clientes por hora. Por ello, los parámetros son $\boldsymbol{\rho}$ = 16/8 = 2 y $\boldsymbol{S}$ = 4. Para estos valores, se localiza $\boldsymbol{P_0}$ = 0.1304 y se calcula ***P***(sistema ocupado) = 0.1739 usando la ecuación (5.15). Utilizando este valor de ***P***(sistema ocupado), pueden calcularse las características de la línea de espera como sigue:

$$L_q = P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S-\rho}$$

$$= (0.1739)\left(\frac{2}{4-2}\right) = \text{un promedio de 0.1739 de automóvil en la línea de espera}$$

$$L_q = P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S-\rho}$$

$$= (0.1739)\left(\frac{2}{4-2}\right) = \text{un promedio de } 0.1739 \text{ de automóvil en la línea de espera}$$

$$L = L_q + \rho = \text{un promedio de } 2.1739 \text{ automóviles en el sistema}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2.1739}{16} = \text{un tiempo promedio en el sistema de } 0.1359 \text{ de hora u } 8.154 \text{ minutos}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.1739}{16} = \text{un tiempo promedio en la línea de espera de } 0.0109 \text{ de hora o } 0.654 \text{ de minuto}$$

Si se compara el $\boldsymbol{W_q}$ de **7 1/2** minutos para 4 filas individuales (el sistema actual de la Guarantee) con un $\boldsymbol{W_q}$ de 0.654 minutos para una sola fila, se tiene un mejoramiento drástico en el servicio.

5.11.4 Ejemplo Económico

En el caso del Guarantee Bank and Trust Company, nos ocupamos del tiempo que los clientes esperaban antes de ser atendidos, en vez del tiempo total que un cliente invierte en el sistema, puesto que es probable que el cliente promedio no considere el tiempo que se invierte en atenderlo como parte del tiempo que invierte en esperar. Por otra lado, existen ejemplos muy definidos en los que el tiempo que se invierte en el sistema es la clave determinante del servicio. Por ejemplo, considere la Wheat-n-Corn Shipping Company.

La Wheat-n-Corn Shipping Company envía trigo, maíz, avena y otras semillas al extranjero en barcos cargueros. La compañía *no* es propietaria de los barcos de carga sino que simplemente le vende los granos al propietario de los barcos en los casos en que llega un carguero para ser atendido. No hay un programa fijo de llegadas de barcos porque dependen del clima, del precio de los granos, de las condiciones internacionales, etc., y por ello puede suponerse que las naves llegan al azar, lo que sucede a una tasa promedio de una diaria. Debido a las diversas capacidades de los barcos y distintas configuraciones de la carga, la compañía no puede conocer con exactitud cuánto tiempo llevará cargar uno. En el momento actual, existe espacio para cargar un solo barco a la vez. También, debido a diversos acuerdos sindicales, toda la labor de carga deben llevarla a cabo empleados de la Wheat-n-Corn Company y no la tripulación del carguero. Esta restricción significa que mientras el barco espera ser cargado y mientras se está cargando, la tripulación del navío permanece desocupada. Dado que la utilidad del propietario de los barcos depende de un tiempo breve (entre el momento en que los barcos llegan a ser cargados y el momento en que se termina esta labor), y puesto que la Wheat-n-Corn Company atiende un mercado de compradores debido al superávit de producción de granos en los Estados Unidos, la Wheat-n-Corn Company ha acordado pagarles a los propietarios de los buques $1,000 por día completo que el barco invierte en ser cargado *o* en esperar que se le cargue. Este pago es para compensar al propietario de los barcos por las utilidades que pierde mientras el buque se carga en el muelle de la Wheat-n-Corn.

De acuerdo con los registros de la compañía, un equipo de tres estibadores puede cargar los barcos a una tasa promedio de 1/4 de barco por día. Los equipos pueden trabajar juntos sin interferencia entre ellos, por lo que la tasa resultante de carga está dada por

Barcos que se cargan por día = (número de equipos) (1/4 barco por día por equipo)

Por ejemplo, 3 equipos podrían cargar 3/4 de barco por día de trabajo. En el momento actual los equipos trabajan turnos de 8 horas, 7 días a la semana, y los trabajadores de cada equipo reciben de la compañía $10 por hora.

Es necesario determinar cuántos equipos deben tenerse disponibles para cargar los buques. Nos gustaría minimizar los costos totales, es decir, la cantidad de la cuota diaria que se paga a los barcos que se encuentran en el sistema de carga y el costo de los equipos para cargarlos.

El problema que enfrenta la Wheat-n-Corn es de intercambios. Si se utiliza un solo equipo, se obtiene un costo de mano de obra reducido (costo por cargar), pero se incurre en una cuota de muelle considerable (costo de espera). Si se utiliza un número grande de equipos se obtiene como resultado una cuota menor de muelle, pero también se elevan los costos de mano de obra. El intercambio o equilibrio de los costos de cargar y los costos de espera se muestran en la figura 5.6

Dado que los modelos de línea de espera son *descriptivos* más que *normativos,* no es posible determinar el número óptimo de equipos usando un algoritmo. Tendremos que calcular las características de la línea de espera y los costos para diversos números de equipos y elegir después la situación que produzca el menor costo. Como auxiliar en este análisis, puede utilizarse un método tabular en el cual se listan los números de equipos, las características de sus líneas de espera y sus costos asociados.

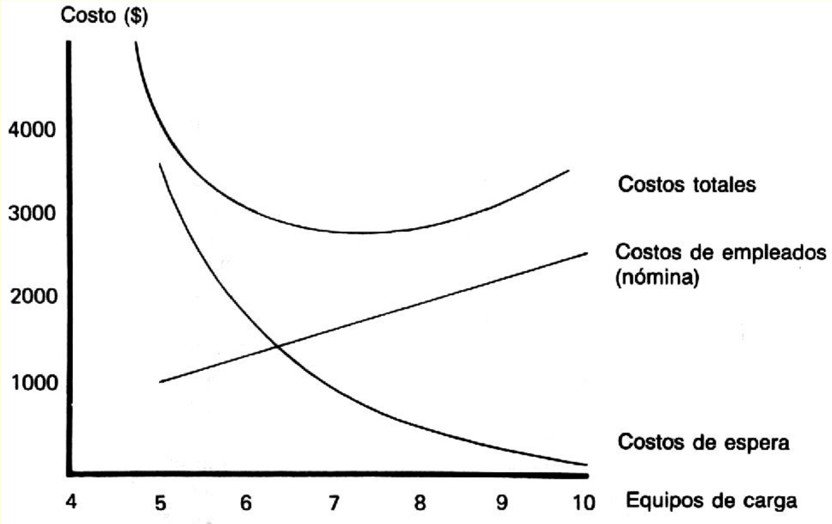


Figura 5.6 Comparación de costos totales, de empleados (nómina) y de espera

5.11.5 Solución para el ejemplo del caso M/M/1

En primer lugar, observe que la llegada de los barcos y los tiempos de carga son aleatorios y que sólo existe una instalación de servicio; por ello, se presenta una situación de filas tipo M/M/1. En este caso, λ = 1 por día y μ = (m)(1/4) en donde m = número de equipos. Es evidente que m deber ser mayor que 4 con el objeto de que $\mu > \lambda$. Observe también que cada equipo cuesta **$** 240 por día ($10 por hora x 8 horas x 3 personas). Recuerde también que la compañía paga $1,000 por día y por barco que se encuentra en el sistema. Por ello, el costo diario total, ***TC***, está dado por:

costos de los empleados (nómina) + cuotas de los barcos

es decir,

$$TC = 240m + 1000L \qquad 5.21$$

Utilizando esta relación determinaremos ahora los valores de ***TC*** para diversos números de equipos. Para hacer esto, necesitamos calcular las características de las líneas de espera. Los resultados se muestran en la tabla 5.2

Se observa que la Wheat-n-Corn Company minimizaría sus costos si utilizara 8 equipos para cargar los barcos que llegan. El costo mínimo es $2,920 por día. En promedio, los barcos estarán en el sistema un solo día e invertirán la mitad de ese día esperando para ser cargados.

5.11.6 Solución al ejemplo del caso para *M/M/S*

Supongamos ahora que la Wheat-n-Corn Company tiene la oportunidad de rentar en $500 diarios una instalación adicional para cargar.

	Número de equipos (m)					
	5	6	7	8	9	10
λ	1	1	1	1	1	1
μ	5/4	6/4	7/4	8/4	9/4	10/4
ρ	4/5	4/6	4/7	4/8	4/9	4/10
P_0	1/5	1/3	3/7	1/2	5/9	6/10
L	4	2	4/3	1	4/5	2/3
L_q	16/5	4/3	16/21	1/2	16/45	4/15
W	4	2	4/3	1	4/5	2/3
W_q	16/5	4/3	16/21	1/2	16/45	4/15
Costo de los empleados (nómina)	$1200	$1440	$1680	$1920	$2160	$2400
Costo de espera	$4000	$2000	$1333.3	$1000	$800	$666.7
Costo total	$5200	$3440	$3013.3	$2920	$2960	$3066.7

Tabla 5.2 Costos para una sola instalación de carga

La instalación disponible es muy similar a la que se utiliza en la actualidad y los equipos de empleados que laboran en la instalación actual pueden trabajar con la misma eficiencia en la instalación rentada. La compañía desea determinar si le resultaría más económico rentar la segunda instalación o quedarse con su plan actual.

El caso de las dos instalaciones es un ejemplo de una situación de colas M/M/S en la que ***S*** = 2. Para examinar el caso supondremos que se asignarán números iguales de equipos a cada una de las instalaciones. En este caso, $\boldsymbol{\lambda}$ = 1 y $\boldsymbol{\mu}$ = (***m***)(1/4), en donde ***m*** = número de equipos en cada instalación. En esta situación, deberemos tener:

$$\lambda < \mu S \qquad \text{o bien} \qquad 1 < (m)(1/4)\ (2)$$

dado que $\boldsymbol{\lambda}$ = 1, entonces ***m*** > 2 en cada instalación.

En primer lugar, necesitamos calcular:

$$P(\text{sistema ocupado}) = \frac{\rho^S \mu S}{S!(\mu S - \lambda)} \times P_0$$

para diversos valores de *m* > 2. Después, necesitamos encontrar las características de las líneas de espera y los costos para esos valores de *m.* Si el costo mínimo para el plan con dos instalaciones es inferior que los costos para una instalación, recomendaríamos que la Wheat-n-Corn Company rentara la instalación extra.

Para el caso de dos instalaciones el costo diario total está dado por:

costo de los empleados (nómina) + cuotas de los barcos + costo de rentas

o bien:

$$TC = (2)(m)(240) + (L)(l000) + 500 \qquad 5.22$$

	Número de equipos por instalación (m)			
	3	*4*	*5*	*6*
λ	1	1	1	1
μ	3/4	1	5/4	6/4
ρ	4/3	1	4/5	2/3
P_0	0.1993	0.3333	0.4286	0.5050
P(sistema ocupado)	0.5315	0.3333	0.2286	0.1683
L_q	1.0630	0.3333	0.1524	0.0842
L	2.3963	1.3333	0.9524	0.7509
W_q	1.0630	0.3333	0.1524	0.0842
W	2.3963	1.3333	0.9524	0.7509
Costo de los empleados (nómina)	$1440	$1920	$2400	$2880
Cuota de los barcos	2396	1333	952	751
Cuota de rentas	500	500	500	500
Costo total	$4336	$3753	$3852	$4131

Tabla 5.3 Costos para dos instalaciones

Observe que se ha duplicado el costo de los empleados (nómina) porque se utilizan ***m*** equipos en cada instalación. Los cálculos necesarios para evaluar el plan de costo mínimo se presentan en la tabla 5.3

En esta tabla puede observarse que la configuración de menor costo para el caso de las dos instalaciones tiene un costo de $3,753 y emplea cuatro equipos por instalación (***m*** = 4). Este costo es más elevado que la configuración más económica utilizando una sola instalación de carga, y por ello *no* sería aconsejable que la Wheat-n-Corn Company rentara y asignara personal a la instalación adicional.

5.12 Otros Modelos de Líneas de Espera

Tal como se analizó, existen muchos tipos de modelos de líneas de espera, aparte de los modelos M/M/l y M/M/S que se han analizado hasta este punto.

5.12.1 El caso M/G/1

El primer caso que se considera es la situación en la que las llegadas se distribuyen de acuerdo con la distribución de Poisson, al igual que en los casos anteriores, pero los tiempos de servicio no necesariamente se distribuyen de acuerdo con la distribución exponencial negativa. Si consideramos el caso en el que existe un solo canal, estamos considerando el caso M/G/1, es decir, llegadas tipo Markov, tiempo de servicio general y un canal de servicio. Obsérvese que este caso incluye también el caso M/D/1.

La razón por la que podemos considerar el caso M/G/l es que las fórmulas que se utilizan para calcular sus características de operación son bastante simples. Al igual que con el caso M/M/S, no es posible calcular en forma directa L, número esperado de unidades en el sistema. Más bien, debe calcularse L_q, número de unidades que esperan ser atendidas, y utilizar el resultado de que $L = L_q + \rho$ para encontrar el valor de L. Para calcular L_q, debemos conocer el valor de la *desviación estándar de la distribución* que describe los tiempos de servicio, σ. Si no se conoce la distribución de los tiempos de servicio no es posible determinar las características de operación. Sin embargo, si conocemos la desviación estándar y la media de la distribución de los tiempos de servicio, puede obtenerse la fórmula para el valor de L_q, a partir de la ecuación 5.23:

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1 - \lambda/\mu)} \qquad 5.23$$

Utilizando L_q, podemos ahora determinar el valor de L a través de 5.24:

$$L = L_q + \rho \qquad 5.24$$

Al igual que con las características de operación de los casos M/M/1 y M/M/S, podemos determinar W, tiempo esperado en el sistema de líneas de espera, y W_q, tiempo de espera que se invierte antes de ser atendido, dividiendo L y L_q entre el valor de λ, es decir,

$$W = L/\lambda \qquad 5.25$$

y

$$W_q = L_q/\lambda \qquad 5.26$$

Por ejemplo, suponga que se ha encontrado que en el caso del Guarantee Bank and Trust los tiempos de servicio para los cajeros que atienden automovilistas siguen una distribución normal con media $1/\mu$ o 1/8 de hora y desviación estándar de 1/12 de hora. Utilizando estos valores, junto con una tasa de llegadas, λ, de 4 por hora en las ecuaciones (5.23)-(5.26), obtenemos:

$$L_q = \frac{4^2(1/12)^2 + (4/8)^2}{2(1 - 4/8)} = \text{un promedio de 0.36 personas en la línea de espera}$$

$$L = 0.36 + 0.5 = \text{un promedio de 0.86 personas en el sistema}$$

$$W_q = 0.36/4 = 0.090 \text{ de hora o 5.4 minutos en la línea de espera}$$

$$W = 0.86/4 = 0.2150 \text{ de hora o 12.9 minutos en la línea de espera}$$

Si comparamos estos valores con los que se obtuvieron para el caso M/M/1, encontramos que los valores de este modelo son mayores. Esto es así porque la desviación estándar de la distribución exponencial negativa es igual a su media, es decir, 1/8, lo que es mayor que la desviación estándar de la distribución de nuestro ejemplo modificado, 1/12. Este valor mayor de la desviación estándar da como resultado un valor L_q de 0.5 personas en la fila, que es mayor en el caso de la distribución exponencial negativa que para el caso de la distribución normal.

5.12.2 El caso M/D/1

El caso en el que los tiempos de servicio son determinísticos es el M/D/1, que es un caso especial de la situación M/G/l que se analizó antes y en el que la desviación estándar es igual a cero. En este caso, se obtiene el valor de L_q a través de la siguiente fórmula:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^2}{2(1 - \lambda/\mu)} \qquad 5.27$$

y todas las demás características de operación pueden determinarse a partir de este valor.

Por ejemplo, suponga que el Guarantee Bank and Trust ha decidido instalar un cajero automatizado de atención a automovilistas, para las personas que desean hacer un solo retiro o depósito. El banco ha entablado pláticas con respecto a esta unidad automatizada con un fabricante y se le ha informado que en estos casos el tiempo de servicio es *constante* con 7 1/2 minutos (8 por hora). Para determinar las características de operación de este nuevo sistema, es necesario utilizar la ecuación (5.27) para obtener el valor de L_q con una desviación estándar de cero, puesto que no existe varianza en los tiempos de servicio:

$$L_q = \frac{(4/8)^2}{2(1 - 4/8)} = 0.25 \text{ personas en la línea de espera}$$

A partir de esto obtenemos:

$$L = 0.25 + 0.5 = 0.75 \text{ personas en el sistema}$$
$$W = 0.25/4 = 0.0625 \text{ de hora o } 3.75 \text{ minutos}$$
$$W_q = 0.75/4 = 0.1875 \text{ de hora o } 11.25 \text{ minutos}$$

Observe que estos tiempos son aún menores que los que se obtuvieron para el caso general. De nuevo, esto es resultado de la menor desviación estándar (en este caso de cero).

5.13 Resumen

En este capítulo hemos considerado el amplio campo de estudio conocido como *teoría de líneas de espera* y su aplicación a problemas en áreas como servicio a clientes y economía. Estas son sólo dos de las muchas aplicaciones de la teoría de líneas de espera.

Hicimos notar que los modelos de líneas de espera son *descriptivos y estocásticos.* También vimos que los diversos modelos de líneas de espera se diferencian mediante las consideraciones en que se basa cada uno, *y* que cada modelo se distingue por *parámetros* tales como la tasa de llegadas y número de canales de servicio. Utilizando estos parámetros, es posible calcular las *características de operación* para cada modelo. Puesto que los modelos son descriptivos, la única manera de optimizarlos es cambiando los parámetros del modelo *y* volviendo a calcular las características de operación hasta encontrar el conjunto de parámetros que mejor se ajuste a las necesidades del usuario.

Este proceso se aplicó a dos modelos bastante conocidos de líneas de espera. En la notación de Kendall, fueron los modelos M/M/ 1 y M/M/S. En ambos casos, se supone que las llegadas y los servicios ocurren al azar. En el primero existe sólo un canal de servicio en tanto que en el segundo existen 8 canales de servicio. En ambos casos, se vieron las características de operación como funciones de la tasa de llegadas, λ, y la tasa de servicio, μ. Después, se aplicaron estos modelos a un problema de servicio a clientes ya un problema económico para determinar el mejor plan para las instalaciones y/o los trabajadores.

Además de los modelos M/M/ 1 y M/M/8, comentamos también los modelos M/G/ 1 y M/D/l. Las características de operación para los sistemas de líneas de espera que tienen llegadas tipo Markov y tiempos de servicio generales o determinísticos pueden calcularse utilizando las fórmulas que se presentaron para estos modelos. En el caso del modelo M/G/l, es necesario conocer la desviación estándar de la distribución del tiempo de servicio.

Los lectores no deben pensar que M/M/1, M/M/S, M/G/1 *y* M/D/1 son los únicos modelos de líneas de espera que pudieran encontrarse. Por el contrario, en casi cualquier edición de las revistas

Operations Research o *Management Science,* aparecen nuevos trabajos sobre modelos más complejos de líneas de espera. Algunos ejemplos recientes incluyen trabajos sobre sistemas de líneas de espera de servidores y sistemas de líneas de espera bajo condiciones transitorias más que estacionarias.

5.14 Glosario

- ***Canal***: instalación de servicio.
- ***Características de operación***: valores promedio que describen la forma en que se comporta el sistema de líneas de espera. Por ejemplo, el tiempo promedio de espera.
- ***Condición estacionaria***: condición de un sistema de líneas de espera en la que las condiciones iniciales no afectan el cálculo de las características de operación.
- ***Distribución exponencial negativa***: distribución de probabilidad que describe el tiempo que transcurre entre ocurrencias aleatorias.
- ***Distribución de Poisson***: distribución probabilística que describe el número de ocurrencias aleatorias en un periodo determinado.
- ***Factor de utilización***: razón entre la tasa de llegada promedio (λ) y la tasa promedio de servicio (μ). Esta es la fracción de tiempo que el sistema se encuentra ocupado.

TABLA (A) *Valores de* P_0

ρ	S = 1	2	3	4	5	6	7
0.100	0.9000	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048
0.200	0.8000	0.8182	0.8187	0.8187	0.8187	0.8187	0.8187
0.300	0.7000	0.7391	0.7407	0.7408	0.7408	0.7408	0.7408
0.400	0.6000	0.6667	0.6701	0.6703	0.6703	0.6703	0.6703
0.500	0.5000	0.6000	0.6061	0.6065	0.6065	0.6065	0.6065
0.600	0.4000	0.5385	0.5479	0.5487	0.5488	0.5488	0.5488
0.700	0.3000	0.4815	0.4952	0.4965	0.4966	0.4966	0.4966
0.800	0.2000	0.4286	0.4472	0.4491	0.4493	0.4493	0.4493
0.900	0.1000	0.3793	0.4035	0.4062	0.4065	0.4066	0.4066
1.000		0.3333	0.3636	0.3673	0.3678	0.3679	0.3679
1.100		0.2903	0.3273	0.3321	0.3328	0.3329	0.3329
1.200		0.2500	0.2941	0.3002	0.3011	0.3012	0.3012
1.300		0.2121	0.2638	0.2712	0.2723	0.2725	0.2725
1.400		0.1765	0.2360	0.2449	0.2463	0.2466	0.2466
1.500		0.1429	0.2105	0.2210	0.2228	0.2231	0.2231
1.600		0.1111	0.1872	0.1993	0.2014	0.2018	0.2019
1.700		0.0811	0.1657	0.1796	0.1821	0.1826	0.1827
1.800		0.0526	0.1460	0.1616	0.1646	0.1652	0.1653
1.900		0.0256	0.1278	0.1453	0.1487	0.1494	0.1495
2.000			0.1111	0.1304	0.1343	0.1351	0.1353
2.100			0.0957	0.1169	0.1213	0.1222	0.1224
2.200			0.0815	0.1046	0.1094	0.1105	0.1107
2.300			0.0683	0.0933	0.0987	0.0999	0.1002
2 400			0.0562	0.0831	0.0889	0.0903	0.0906
2.500			0.0449	0.0737	0.0801	0.0816	0.0820
2.600			0.0345	0.0651	0.0721	0.0737	0.0742
2.700			0.0249	0.0573	0.0648	0.0666	0.0671
2.800			0.0160	0.0502	0.0581	0.0601	0.0606
2.900			0.0077	0.0437	0.0521	0.0543	0.0548
3.000				0.0377	0.0466	0.0490	0.0496
3.100				0.0323	0.0417	0.0441	0.0448
3.200				0.0273	0.0372	0.0398	0.0405
3.300				0.0227	0.0330	0.0358	0.0366
3.400				0.0186	0.0293	0.0322	0.0331
3.500				0.0148	0.0259	0.0290	0.0298
3.600				0.0113	0.0228	0.0260	0.0269
3.700				0.0081	0.0200	0.0233	0.0243
3.800				0.0051	0.0174	0.0209	0.0219
3.900				0.0025	0.0151	0.0187	0.0198
4.000					0.0130	0.0167	0.0178
4.100					0.0111	0.0149	0.0160
4.200					0.0093	0.0132	0.0144
4.300					0.0077	0.0117	0.0130
4.400					0.0063	0.0104	0.0117
4.500					0.0050	0.0091	0.0105
4.600					0.0038	0.0080	0.0094
4.700					0.0027	0.0070	0.0084
4.800					0.0017	0.0061	0.0075
4.900					0.0008	0.0053	0.0067
5.000						0.0045	0.0060

5.15 Ejercicios Solucionados

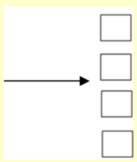
1.-Utilizando la notación de Kendall, describa cada una de las siguientes situaciones de líneas de espera:

a. Estudiantes que llegan al azar para utilizar una maquina copiadora y cada estudiante hace una sola copia.

   R: M/M/1

b. Botellas que salen de una línea de ensamble a una tasa constante para inspección. El tiempo de inspección es de duración aleatoria y hay 4 inspectores.

   R: D/M/4



c. Estudiantes que llegan al azar a una oficina de registro previo para el trimestre de otoño. El tiempo de registro es de duración aleatoria y existe un asesor disponible para el registro.

   R: M/M/1

2.- El autocinema Oconce tiene tres taquillas, cada una de las cuales atiende una fila de clientes. Los automóviles llegan al autocinema a una tasa total de 90 automóviles por hora y cada taquilla puede atender 40 automóviles por hora. Tanto las llegadas como los servicios son por completo aleatorios son por completo aleatorios. Con base en esta información responda las siguientes preguntas:

a. ¿Qué tipo de situación de líneas de espera es esta? (Sea preciso)

   R: λ= 90/3 =30 μ= 40, λ<μ M/M/1 en Paralelo.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que, si consideramos una sola de las taquillas, se encuentre desocupada? ¿Cuál es la probabilidad de que este atendiendo a tres automóviles o haya tres automóviles esperando en la fila?

   R: ρ = λ/μ = 30/40 = ¾ = 0.75 Sistema Ocupado

   No Ocupado = 1 – ρ = 1- 0.75 = 0.25

   Pn = P0(ρ)n => P3 = P0(ρ)3= (1/4)(3/4)3=27/256 = 0.10546875

c. ¿Cuál es el número promedio de automóviles en el sistema de líneas de espera de cada una de las taquillas (esperando y siendo atendidos)?

   R: *L = ρ/(1- ρ) = 0.75/(1-0.75) = 0.75/0.25 = 3*

d. ¿Cuál es el tiempo promedio que un automóvil espera antes de llegar a la taquilla?

R: $W_q = \rho^2/\lambda(1-\rho) = (0.75)^2/30[1-0.75] = 3/40 = 0.0075(60) = 4.5$ ***mins***

e. Si el autocinema decide utilizar una sola fila para la venta de todos los boletos en las tres taquillas, ¿Qué característica de operación esperaría usted que cambiara más? ¿Por qué?

R: L_q ***y*** W_q

3.- En un estudio de un expendio local de venta de hamburguesas conocido como Sally Jo`s, los estudiantes de la North Avenue School hicieron las siguientes observaciones: parecen que los clientes llegan al azar; todos los clientes se colocan en una sola fila para hacer y recibir sus pedidos; debido a diferencias en el volumen y la complejidad en los pedidos; la duración del tiempo para atender a cada cliente es aleatoria.

Después los estudiantes recopilaron datos sobre tiempos de llegada y de servicio. Se observaron las llegadas para periodos de una hora y se anotaron los números de llegadas durante cada periodo de 10 minutos durante la hora. Los resultados de este conteo son:

Intervalo	Llegadas
0-10 min	14
10-20 min	5
20-30 min	10
30-40 min	8
40-50 min	12
50-60 min	7

Para muestreo aleatorio de las llegadas anteriores, los tiempos de servicio (en segundos) fueron:

25	20	45
25	13	52
35	25	25
45	25	38
42	55	45
15	70	20
28	30	55
32	58	65
10	85	50
13	10	30
45	15	30

Suponiendo que estos tiempos de llegadas y de servicio se ajustan de verdad las distribuciones de probabilidad de Poisson y exponencial negativa:

a. Calcule la tasa de promedio de llegadas y la tasa de servicio.

R:

1	**14**
2	**5**
3	**10**
4	**8**
5	**12**
6	**7**

56/6

9.3333

λ=9.334 c/10 mins

Tiempo servicio: 1176/33 = 1/μ = 35.6363

μ = 1/35.6363 = 0.0280612244 seg

μ = 0.0280612244(60) = 1.6863 mins

μ = 16.863 c/10 mins

b. Determine las siguientes características de operación: P_0, *L, Lq, W y Wq*

R: **c/10 mins**

λ/μ	***ρ=***	**0.554343434**
	Po=	**0.445656566**
	L=	**1.243880326**
	Lq=	**0.689536892**
	W=	**0.133272892**
	Wq=	**0.073878953**

4.- El jefe de la oficina de admisión de una escuela de negocios bien conocida, maneja solicitudes de ingreso a la maestría de administración de empresas sobre la base de que el primero que llega es el primero que se atiende. Estas solicitudes llegan aleatoriamente a razón de 5 por día. La distribución de probabilidad en los tiempos de servicio es tal que la desviación estándar es 1/10 de día y al media es 1/9 de día. ¿Cuál es el tiempo promedio que una solicitud espera para ser procesada? En promedio, ¿Cuántas solicitudes están en espera de ser procesadas en cualquier momento?

R:

λ=	**5**	**x día**
σ=	**0.1**	**x día**
μ=	**9**	**x día**

ρ=	**0.55555556**
Lq=	**0.62847222**
Wq=Lq/λ=	**0.12569444**

5.16 Problemas propuestos Líneas de Espera.

1.- Comente si cada una de las siguientes situaciones de líneas de espera ajusta a las consideraciones de modelo M/M/1 o M/M/S.

a. Un restaurante de comida instantánea con múltiples posiciones de servicio. Las posiciones se abren conforme es necesario.
b. Un restaurante de comida instantánea con una sola fila de servicio, por la cual deben de pasar todos los clientes para hacer y recibir sus pedidos (de diferente volumen y complejidad).
c. En un banco la ventanilla para automovilistas.
d. Una instalación para lavado de automóviles con una sola fila que conduce a instalaciones múltiples de lavado.
e. Una tienda de abarrotes grande en un poblado universitario y que tiene múltiples cajas de salida.

2.- En el mostrador de libros de la principal biblioteca de la Universidad de Hard Knocks llegan estudiantes al azar (los colores de la escuela son negro y azul). En el mostrador de salida deben abrir cualesquier bolsas, portafolios, etc; que traigan para que el dependiente verifique si no hay robo de libros, revistas o documentos. El tiempo que se requiere para hacer está verificación es de duración aleatoria debido al diferente numero de libros y bolsas que los estudiantes llevan. Se ha determinado que la tasa promedio de llegadas es 20 estudiantes por hora y que el tiempo promedio para realizar la revisión de las bolsas es de un minuto.

a. ¿Qué valores tiene λ y μ para este problema?
b. ¿Cuál es el factor de utilización?
c. ¿Qué tiempo le llevará a un estudiante promedio pasar por la revisión de bolsas?
d. En promedio, ¿Cuántos estudiantes se encuentran esperando en la fila en cualquier momento?
e. ¿Durante que fracción de tiempo estará libre el empleado que revisa las bolsas para poder dedicarse a estudiar?

3.- El centro de reparación de computadoras TV Shak de McLeod, Montana, maneja la reparación de las microcomputadoras que vende TV Shak. Un problema común de reparación es la alineación de unidades de disco. Al llegar las microcomputadoras al centro de reparación se asigna en forma rotatoria a uno de los tres técnicos para que haga la alineación. Por razones de control de calidad, una vez que se asigna una microcomputadora a un técnico, no se asigna a otro. Suponiendo que las tasa de llegada y de servicio son aleatorias y de 30 por mes y 2 por día por cada técnico (20 días hábiles por mes), responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál será el tiempo promedio de una microcomputadora permanece en el centro de servicio?
b. En promedio, en cualquier momento, ¿Cuántas micros estarán esperando a cada técnico para que les dé servicio?
c. ¿Cómo respondería usted las preguntas anteriores si una microcomputadora que llega pasara al primer técnico disponible para que le diera servicio, en vez de que se asignara en forma rotatoria?

4.- Para usar una máquina cajera automática de un banco, llegan clientes al azar a una tasa de 5 por hora.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen más de tres clientes a solicitar servicio durante un periodo de una hora?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún cliente solicite servicio durante un periodo de una hora?
c. ¿Cuál es la probabilidad de dos clientes exactamente en una hora? ¿Tres clientes?

5.- Suponga que para la máquina cajera automática de los dos problemas anteriores, los clientes llegan al azar y el tiempo necesario para dar servicio aun cliente es también aleatorio. Suponga demás que la tasa de llegadas es de 5 por hora y la tasa de servicio es de 10 por hora.

Responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que a un cliente se le atienda de inmediato, a su llegada, en la cajera automática.
b. ¿Cuál es el promedio de tiempo que un cliente invierte con la cajera automática (tanto en espera del servicio como recibiéndolo)?
c. Trace la gráfica de P_n con respecto a n, donde n = número de clientes en el sistema. Marque en la gráfica el valor esperado de n.
d. En promedio, ¿Cuántos clientes se encuentran esperando en la línea para que la cajera automática los atienda?

6.- Comente si cada una de las siguientes situaciones de líneas de espera se ajusta a las consideraciones del modelo M/M/1 o M/M/S.

a. Un restaurante de comida instantánea con múltiples posiciones de servicio. Las posiciones se abren conforme es necesario.
b. Un restaurante de comida instantánea con una sola fila de servicio, por la cual deben pasar todos los clientes para hacer y recibir sus pedidos (de diferente volumen y complejidad).
c. En un banco, ventanilla para automovilistas.
d. Una instalación para lavado de automóviles con una sola fila que conduce a instalaciones múltiples de lavado.
e. Una tienda de abarrotes grande en un poblado universitario y que tiene múltiples cajas de salida.

7.- La línea rápida del K-Roger Supermarker atiende solo clientes con 12 artículos o menos, y como resultado, es mucho más veloz para estos clientes que las filas normales. El gerente Wayne Edwuards, ha estudiado esta fila y ha determinado que los clientes llegan a una tasa aleatoria de 30 por hora y que, en promedio el tiempo de servicio para un cliente es de un minuto. Suponiendo que la tasa de servicio también es aleatoria, responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuáles son μ y λ para la caja rápida?
b. En promedio, ¿A cuántos clientes se está atendiendo o están esperando?
c. En promedio, ¿Cuánto debe esperar un cliente antes de poder retirarse?

8.- La compañía arrendadora de automóviles U-Drive-'em opera su propia instalación de lavado y limpieza de automóviles para prepararlos para su renta. Los automóviles llegan a la instalación de limpieza en forma aleatoria a una tasa de 5 por día. La compañía arrendadora ha determinado que los automóviles pueden limpiarse a un ritmo de $2n$ por día, en donde n es el número de personas que trabajan en un automóvil. Por ejemplo, si se encuentran 4 personas trabajando la tasa de lavado es de 8 automóviles por día. Se ha determinado que este procedimiento de lavado se ajusta a la distribución exponencial negativa. La compañía les paga a sus trabajadores $30.- por día y ha determinado que el costo por un automóvil que no esté disponible para rentarlo es de $25.-

a. Calcule el número de empleados que deben contratarse en la instalación de lavado, para que produzca el menor costo.
b. Calcule las características de operación *L, Lq, W, Wq* para el número de empleados que eligió.

9.- La Ozella Fish Company utiliza sus propios botes camaroneros para pescar camarón y después lo empaca para enviarlo a otras partes. Cuando estos botes llegan durante la temporada, hay que descargarlos tan rápido como sea posible para que puedan volver al mar. El gerente de producción de la Ozella Fish Company estima que el costo de que un bote camaronero permanezca detenido es de $50.- por hora (esto incluye los salarios al igual que el tiempo perdido de pesca). Los trabajadores que descargan los botes ganan $8.- por hora ya sea que estén trabajando o no. Si el patrón de llegadas para los botes camaroneros es aleatorios y el tiempo de descarga también lo es, ¿Cuál es número de trabajadores que la Ozella debe utilizar para descargar los botes y que produzca el menos costo total? Los botes camaroneros llegan a una tasa promediode uno por hora y cada trabajador puede descargar medio bote por hora.

10.- El padre Mulcahy utiliza en la actualidad dos confesionarios con dos filas separadas para atender las necesidades de sus feligreses. Se ha observados que sus llegadas son aleatorias, aun ritmo promedio de 30 personas por hora y el tiempo de servicio tiende a ser aleatorio también, puesto que las cantidad de pecados por persona puede diferir en gran medida. Se ha determinado que el tiempo promedio en que se permanece en el confesionario es de 3 minutos. Se ha obtenido también que las llegadas se distribuyen en forma equitativa entre las dos líneas. El padre Mulcahy esta considerando cambiar a un sistema en el que se utilice una sola fila que alimente ambos confesionarios. El padre desea saber que sistema (el actual o el propuesto), conducirá al tiempo promedio más breve en el sistema para sus feligreses.

a. Bajo estas nuevas condiciones, determinese si la compañía U-Drive-`em debe añadir la instalación adicional o no.
b. Calcule las características de operación para el plan que determine usted que tiene el menor costo.

11.- Proposiciones Falso/Verdadero:

a. Los modelos de líneas de espera son mismo tiempo descriptivo y determinísticos.
b. Las características de operación para los modelos de líneas de espera son valores promedio a largo plazo, y no valores que pueden ocurrir en realidad.
c. En un sistema de líneas de espera de etapas múltiples, en el que la primera etapa es M/M/1, el patrón de llegadas a la segunda etapa sería determinístico.
d. Un sistema de líneas de espera con filas paralelas, en el que los clientes pueden cambiarse de línea (denominado “maniobrar”) pueden de cualquier manera plantarse como un sistema múltiple M/M/1.
e. Una característica de la distribución de Poisson es el “agrupamiento” de los eventos.
f. Para calcular el tiempo promedio de servicio, solo es necesario contar el número de ocurrencias por hora y tomar el reciproco de este número.

g. El número promedio de unidades que se encuentra en el sistema debe ser siempre mayor que el número promedio de unidades que esperan en la fila.
h. Es posible eliminar la “holgura” de un sistema de líneas de espera aumentando la tasa de servicio sin afectaren forma adversa el tiempo de espera de los clientes.
i. El modelo M/M/S, no se considera que el sistema esté “ocupado” a menos que todos los canales de servicio estén llenos.
j. La Formula de la Llamada Perdida de Erlang solo funciona cuando las llegadas son Poissony los tiempos de servicio son exponenciales negativos.

12.- El First Nacional Bank está planeando instalar una variedad especial de cajeros automáticos en la librería de la universidad local. Este cajero automático será especial porque permitirá sólo hacer retiros (necesidad común en la universidad). Puesto que el cajero solo permitirá retiros, tendrá un tiempo determinístico de servicio de 60 segundos. Si las llegadas son aleatorias y a razón de 30 por hora, ¿Cuál será el tiempo promedio que un estudiante pasará en la fila y haciendo su retiro? En promedio, ¿Cuántos estudiantes estarán en espera de hacer retiros?

13.- Un hospital local esta planeando ofrecer un servicio a la población en general. Este servicio consistirá en dar información médica sobre diversos temas a las personas que marquen el número de información en el hospital, que es público. El hospital pronostica que habrá aproximadamente 10 llamadas por hora y que serán de duración aleatoria. Una operadora contestará a las personas que llamen e intentará responder sus preguntas. La experiencia ha mostrado que la llamada promedio dura 5 minutos. El hospital desea reducir la probabilidad de que las personas que llamen encuentren ocupada la línea, a menos de 0.05 aumentando las líneas telefónicas. Habrá solo una línea telefónica por operador. Utilice la Fórmula de la Llamada Perdida de Erlang para calcular el número de líneas telefónicas necesarias para alcanzar el nivel deseado de probabilidad del hospital.

CAPITULO 6

Programación Dinámica

6.1 Introducción

Los modelos estáticos son aquellos en los que los parámetros permanecen iguales durante el periodo que se considera. Por ejemplo, al utilizar la programación lineal se supone que todas las utilidades (o costos), las ofertas (y/o demandas) y las tasas físicas de su sustitución permanecen iguales durante el periodo completo. Aun cuando consideramos algunos modelos de periodos múltiples en los capítulos de programación lineal y programación de metas, eran modelos estáticos dado que se supuso que todos los parámetros permanecían constantes. Esto permitió resolver un problema para todos los periodos. En este capitulo examinaremos un modelo dinámico que puede dar cabida a cambios de los parámetros en el tiempo. A este modelo se le denomina **programación dinámica.**

La programación dinámica (PD) es un método de optimización que puede aplicarse a numerosos problemas. En general, la PD intenta encontrar una solución de un problema de optimización en forma secuencial. A diferencia de la programación lineal, la PD no es un algoritmo de solución única sino, más bien, un método para resolver un problema grande y único resolviendo una secuencia de problemas más pequeños. Este método permite resolver un problema que depende del tiempo en forma de una secuencia de problemas de un solo periodo, en los que los parámetros de cada periodo dependen del periodo que se considera. De hecho, es posible que no se conozcan los parámetros de cada periodo sino hasta que éste llega, La programación dinámica se formalizó por primera vez en Un libro de Richard Bellman, a quien se considera su **iniciador.** [BELLMAN, 1957]

Los parámetros que intervienen en la programación dinámica pueden ser determinísticos o estocásticos, pero en este capítulo nos restringiremos a los casos más simples de la PD, los que implican la resolución de problemas con parámetros determinísticos.

6.2 CASO Fábrica de Tortillas Mi Tierra

La Fábrica de Tortillas Mi Tierra es una pequeña compañía ubicada en San Antonio, Texas. En ella se fabrican diversos productos de maíz y de harina de trigo para el creciente mercado de los alimentos mexicanos. Los principales productos que se elaboran son tortillas de harina y de maíz (en general, cuando se habla tortillas de harina, se trata de tortillas de harina de trigo). Las tortillas de maíz se utilizan para enchiladas, tacos y tostadas, por lo general, las tortillas de harina se utilizan para elaborar “burritos”. El gerente y principal propietario de Mi tierra es Juan Valdez.

Juan ha trabajado mucho para obtener un contrato con una de las nuevas compañías de alimentos instantáneos que se especializan en comida mexicana. Esta misma semana, se enteró de que la Burrito Bell Company ha decidido adquirir tortillas de harina de Mi tierra. La Burrito Bell desea adquirir 200 cajas de tortillas de harina ***en cada uno*** de los próximos siete meses (cada caja contiene 1,000 tortillas) a un precio bajo.

De inmediato Juan comenzó a calcular las cifras de utilidades para Mi Tierra y llegó a la conclusión de que la compañía obtendría $1,000 mensuales sí Mi Tierra produjera exactamente la cantidad que se requiere para ese mes. Después de pensarlo un momento, Juan calculó también las utilidades que se obtendrían al fabricar más cajas de las necesarias para un solo mes. Lo hizo porque es posible fabricar las tortillas de harina y congelarlas hasta por cuatro meses. Mi Tierra podría fabricar más tortillas en cualquier mes trabajando tiempo extra y contratando ayuda adicional. Esto no afectaría la elaboración de otros productos, que continuaría todos los meses.

En la tabla 6.1 se muestran los cálculos que hizo Juan para las utilidades de producción de diversas cantidades de tortillas o, tal como se les llama, tamaño de lote.

Tamaño de lote	***Utilidad***
200 cajas	$1,000
400 cajas	$2,500
600 cajas	$3,750
800 cajas	$4,750

Tabla 6.1 Utilidades de varios tamaños de lote.

Debido a una combinación de factores económicos y de almacenamiento, se logran ahorros al fabricar lotes grandes, pero también se incurren en gastos por el congelamiento de las tortillas y otros que son resultado del deterioro de algunas de ellas. Después de un periodo de dos meses, el deterioro ocasionado por el congelamiento se incrementa en forma notable.

Puesto que Juan deseaba obtener las mayores utilidades del contrato con la Burrito Bell quisiera fabricar tamaños de lote que condujeran a la utilidad total más elevada. Juan se daba cuenta de que podría resolver su pequeño problema listando todas las combinaciones posibles, pero no podría hacer esto si la Burrito Bell decidiera asignarle a Mi Tierra un contrato más prolongado en el futuro.

Juan acababa de asistir a una conferencia para propietarios de negocios pequeños acerca de la aplicación de modelos financieros y cuantitativos a problemas de negocios de tamaño reducido. Rápidamente se dio cuenta de que su problema implicaba **buscar la optimización de una función de utilidades**. En ese sentido, se asemejaba algo a los modelos de programación lineal que había comentado la profesora Sandra Toney en la conferencia. Sin embargo, también parecía que existían algunas diferencias cruciales. Por un lado, la PL considera respuestas fraccionarias, pero su problema implicaba lotes de tamaño preciso. También la PL por lo general no implica decisiones en el tiempo, mientras que el problema de producción de tortillas podría dividirse en una secuencia de decisiones. Dado que necesitaba resolver su problema para determinar el tamaño del lote que proporcionara las mayores utilidades. Juan decidió pedirle a la profesora Toney que le ayudara a resolver su problema.

Cuando llegó Sandra, lo primero que hizo fue pedirle a Juan que le explicara el proceso de producción de las tortillas. Después examinó la tabla de utilidades y tamaño de lote (tabla 1). Se dio cuenta de que **el problema de Juan implicaba una secuencia de decisiones que debían tomarse con el tiempo**, y que se suponía que los parámetros (utilidades, demandas, etc.) se conocían con certeza***. Decidió que la principal cuestión que enfrentaba Juan era determinar cuánto debía fabricar cada mes para maximizar las utilidades totales para el período de planeación completo (siete meses)***. Por último, observó que ***existía la restricción*** de fabricar cuando más la demanda de cuatro meses en una sola ocasión debido a la descomposición del producto después de ese tiempo.

Tal como Sandra le explicó a Juan, este problema de tamaño de lote puede plantearse en forma de programación matemática, considerando lo siguiente:

w_1 = número de veces que se fabrica la demanda de un mes (200 cajas)

w_2 = número de veces que se fabrica la demanda de dos meses (400 cajas)

w_3 = número de veces que se fabrica la demanda de tres meses (600 cajas)

w_4 = número de veces que se fabrica la demanda de cuatro meses (800 cajas)

Utilizando estas definiciones de variables, Sandra elaboró entonces el siguiente planteamiento para el problema del lote:

MAXIMIZAR:

$$1000w_1 + 2500w_2 + 3750w_3 + 4750w_4 \qquad 1$$

SUJETA A:

$$w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 4w_4 = 7 \qquad 2$$

$$w_i = 0,1,2,3,\ldots, \text{ para cada } i \qquad 3$$

Juan observó el planteamiento y dijo: “esto se parece a los problemas de programación lineal que revisamos en la conferencia para negocios pequeños. ¿Puede resolverse como problema de PL?”

“No, no podemos utilizar métodos de PL para este problema debido al requerimiento de que las variables w_i asuman valores discretos. Podríamos utilizar métodos de programación en enteros, pero dado que este es un problema secuencial en el tiempo, yo sugeriría utilizar otro método que se denomina programación dinámica, o PD.

“La PD aborda un problema en forma de una secuencia de decisiones y lo que hace es tomar la serie de decisiones que conducen a la más alta utilidad, sujetas a cualesquiera restricciones que existan para el problema.”

“¡Parece que eso es lo que tenemos que hacer!”, exclamó Juan. ¿Cómo funciona?

“La PD requiere que modifiquemos nuestra perspectiva. Debemos dejar de tomar una sola decisión y contemplar esto como una serie de decisiones. La forma usual para hacer esto es comenzar al final del periodo de planeación y trabajar hacia atrás hasta el comienzo del periodo de planeación. En cada caso, nos aseguramos de que la secuencia de decisiones es óptima desde esa primera decisión hasta la última. En su caso, comenzaríamos en el séptimo mes y tomaríamos una decisión respecto a cuánto debe fabricarse.”

“El contrato termina en el séptimo mes, y por ello no deseamos fabricar más de 200 cajas para este mes, si sólo consideramos este séptimo mes”, observó Juan.

“Correcto”, contestó Sandra, “y la utilidad que obtendría con esa decisión sería de $1,000 con 200 cajas’.

“En realidad no hubo ninguna decisión aquí, ¿pero qué hay acerca del sexto mes?”, preguntó Juan.

“Para el sexto mes, tenemos dos alternativas.

En primer lugar, podríamos fabricar 200 cajas en el sexto mes, y después 200 cajas adicionales en el mes 7 para obtener utilidades de $1,000 más $1,000, que darían un total de $2,000. O podríamos fabricar el total de la demanda para los dos meses, 400 cajas, en el sexto mes, y no fabricar nada en el séptimo. En este caso, la utilidad es de $2,500, de acuerdo con su tabla de tamaños de lote y utilidades. Usando estas alternativas, puede observarse que el tamaño del lote para el sexto mes debe ser fabricar 400 cajas para atender el total de demanda de los dos meses.”

“Hasta este punto, lo único que parece que está usted haciendo es listar todas las alternativas, ¿Es eso todo lo que hace la PD?”, preguntó Juan.

Sandra sonrió y dijo: “No, la PD es más eficiente que eso. Creo que le resultará clara la diferencia al tomar la tercera *decisión con respecto al quinto mes.*

En este mes, se tienen tres alternativas, fabricar 200, 400 o 600 cajas. Si fabricamos 200 cajas para satisfacer la demanda del quinto mes, obtenemos utilidades inmediatas de $1,000 pero entonces tenemos que tomar otra decisión con respecto a los meses seis y siete.

“Pero ya antes descubrimos que la mejor política para el sexto mes era fabricar toda la demanda restante en ese mes”, observó Juan.

“¡Ya está usted entendiendo! La utilidad para la mejor decisión que se obtiene de la decisión del quinto mes se suma a la utilidad inmediata para ese mes. Por ello, si fabricamos 200 cajas en el mes 5 y obtenemos utilidades de $1,000 la mejor política para las 400 cajas restantes es fabricarlas todas en el mes 6 para alcanzar utilidades de $2,500. El total de estas dos cifras es $3,500 de utilidades. La segunda alternativa era fabricar 400 cajas en el mes 5 para obtener una utilidad inmediata de $2,500. Esto hace que sólo se requieran 200 cajas, y ya habíamos visto que este número debería fabricarse en el mes 7 y que arrojaría utilidades por $1,000. Sumando estas dos cantidades, obtenemos utilidades totales de $3,500. Por último, si fabricamos el total de la demanda de 600 cajas en el quinto mes, obtenemos utilidades de $3,750. Dado que esta es la cantidad más alta de las tres, elegiríamos esta política en todos los casos en los que el número de cajas restantes por fabricar fueran 600.”

“Ya veo”, dijo Juan. “Para una decisión determinada, sumamos las utilidades para un nivel determinado de producción y la utilidad más alta para la cantidad restante que es necesario fabricar para alcanzar los requerimientos de la producción total.

¿Siempre resultará que Mi Tierra debe fabricar la mayor cantidad posible?

“No lo creo, pero revisémoslo. Calcularemos la unidad más alta para cada mes, comenzando con el séptimo. En cada caso, se mostrará cuál es la demanda más alta posible para ese mes, las diversas alternativas de producción, la utilidad para cada alternativa, la cantidad restante que debe fabricarse con base en esa alternativa, la utilidad más alta para la demanda restante y la utilidad total para cada alternativa. Se marcará la utilidad más alta con un asterisco (*).”

“¿Qué sucede en caso de que la demanda de algún mes sea inferior al máximo, debido a un nivel previo de producción? ¿No tenemos que considerar este caso?”, preguntó Juan.

“No. Si tenemos una demanda menor que la total posible, esto significa que quedó algún inventario de un periodo previo de producción y que en este periodo no se requiere fabricar nada.”

Después, Sandra elaboró siete tablas, una para cada mes (tablas 2 a 8).

“¡Espere un minuto!”, interrumpió Juan, “Entendí las primeras tres tablas pero me perdí en el cuarto mes. ¿Podría explicarme esta tabla?”

“De acuerdo. En el cuarto mes debemos satisfacer la demanda en ese mes, Por ello, la demanda total es 4 x 200 = 800 cajas. Tenemos cuatro alternativas de producción o tamaños de lote. Cada alternativa proviene de fabricar la demanda de uno, dos, tres o cuatro meses en el cuarto mes. Encontramos el valor inmediato de las utilidades de la tabla de utilidades y tamaños de lote (tabla 6.1). Encontramos la demanda restante para cada alternativa de producción restando el tamaño del lote de la demanda total. Los valores de la ‘mejor utilidad sobre la demanda restante’ se obtienen determinando una tabla cuyo total de demanda sea igual a la demanda restante. Después, se utiliza la más alta utilidad de esta tabla como la ‘mejor utilidad para la demanda restante’. Por ejemplo, en la tabla para el cuarto mes, si se decide fabricar 400 cajas, entonces la demanda restante es 800 - 400 = 400 cajas. Después pasamos a la tabla que tiene una demanda total de 400 cajas y encontramos que la mayor utilidad es $2,500. Sumamos la utilidad *inmediata* y la utilidad *más alta* para la demanda restante y encontramos una utilidad *total* para esta alternativa de producción.”

Mes	*Demanda*	*Alternativas de producción*	*Utilidad inmediata*	*Demanda restante*	*Mayor utilidad para la demanda restante*	*Utilidad total*
7	200	200	$1,000	0	0	$1,000*

TABLA 6.2. **Tabla de decisión del séptimo mes**

Mes	*Demanda*	*Alternativas de producción*	*Utilidad inmediata*	*Demanda restante*	*Mayor utilidad para la demanda restante*	*Utilidad total*
6	400	200	$1,000	200	$1,000	$2,000
		400	$2,500	0	0	$2,500*

TABLA 6.3. **Tabla de decisión del sexto mes**

Mes	*Demanda*	*Alternativas de producción*	*Utilidad inmediata*	*Demanda restante*	*Mayor utilidad para la demanda restante*	*Utilidad total*
5	600	200	$1000	400	$2500	$3500
		400	$2500	200	$1000	$3500
		600	$3750	0	0	$3750*

TABLA 6.4. **Tabla de decisión del quinto mes**

Mes	Demanda	Alternativas de producción	Utilidad inmediata	Demanda restante	Mayor utilidad para la demanda restante	Utilidad total
4	800	200	$1000	600	$3750	$4750
		400	$2500	400	$2500	$5000*
		600	$3750	200	$1000	$4750
		800	$4750	0	0	$4750

TABLA 6.5 **Tabla de decisión del cuarto mes**

Mes	Demanda	Alternativas de producción	Utilidad inmediata	Demanda restante	Mayor utilidad para la demanda restante	Utilidad total
3	1000	200	$1000	800	$5000	$6000
		400	$2500	600	$3750	$6250*
		600	$3750	400	$2500	$6250*
		800	$4750	200	$1000	$5750

TABLA 6.6. **Tabla de decisión del tercer mes**

Mes	Demanda	Alternativas de producción	Utilidad inmediata	Demanda restante	Mayor utilidad para la demanda restante	Utilidad total
2	1200	200	$1000	1000	$6250	$7250
		400	$2500	800	$5000	$7500*
		600	$3750	600	$3750	$7500*
		800	$4750	400	$2500	$7250

TABLA 6.7 **Tabla de decisión del segundo mes**

Mes	Demanda	Alternativas de producción	Utilidad inmediata	Demanda restante	Mayor utilidad para la demanda restante	Utilidad total
1	1400	200	$1000	1200	$7500	$8500
		400	$2500	1000	$6250	$8750*
		600	$3750	800	$5000	$8750*
		800	$4750	600	$3750	$8500

TABLA 6.8 **Tabla de decisión del primer mes**

Después de que Juan movió la cabeza en señal de que había comprendido, Sandra continuó con las tablas restantes. Cuando terminó las tablas, le preguntó a Juan: “¿comprendes qué es lo que dice esta última tabla?”

Juan pensó por un momento y después dijo, “creo que si. Parece que en el mes 1, al principio del contrato, tendré una demanda total de 1,400 cajas que deberé fabricar. Puedo fabricar 200, 400, 600 u 800 en ese mes. Si fabrico 200 cajas en el mes 1 obtendré utilidades inmediatas de $1,000 y me restaría fabricar 1,200 cajas. Si se sigue la mejor política para estas 1,200 cajas, entonces la utilidad sobre ellas seria de $7,500. Entonces, la más alta utilidad total al fabricar 200 cajas en el mes 1 es la suma de $1,000 y $7.500, u $8,500. Y veamos, la utilidad total de fabricar 400 o 600 cajas en el mes

1 es $8.570. Esto es lo más alto, y por ello fabricaría 400 o 600 cajas. ¿Pero, cómo podré saber qué debo hacer después de producir, digamos, 400 cajas?”

“Bueno, si fabrica usted 400 cajas, su demanda restante sería de 1,000 cajas. Para ello, consulte la tabla que tiene una demanda total de 1,000 cajas y encuentre la siguiente alternativa de producción. En este caso, encontramos que es la tabla del tercer mes (tabla 6.6) y la alternativa de producción que arroja la mayor utilidad es fabricar 400 o 600 cajas. Si de nuevo fabricamos 400 cajas, la demanda restante es 600 cajas. Ahora pasamos a la tabla que tiene una demanda total de 600 cajas para determinar la siguiente alternativa de producción. Encontramos una demanda total de 600 cajas en la tabla del quinto mes (tabla 6.4) con una alternativa de producción de 600 cajas para obtener la mayor utilidad. Puesto que la demanda restante es cero, hemos terminado. Permítame ahora diagramar su programa de producción.”

En este momento, Sandra trazó un diagrama del programa de producción de más alta utilidad, que se muestra en la figura 6.1

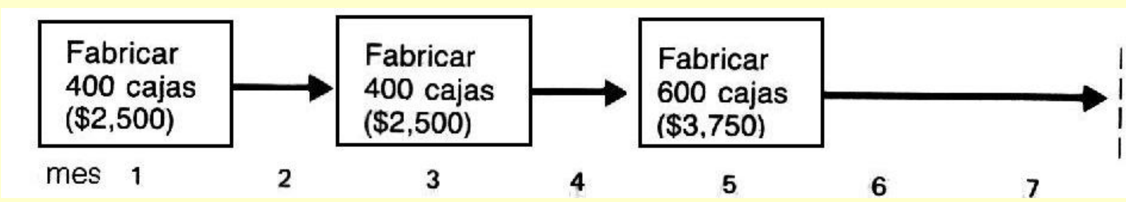


Figura 6.1 Programa de producción de mayores utilidades.

“Se ve muy bien”, dijo Juan al observar el programa de producción y los valores para las utilidades. “Son $1,750 por encima de lo que hubiera obtenido fabricando la demanda de Burrito Bell mes tras mes. ¿Puede utilizarse este procedimiento para contratos mayores?”

“Por supuesto”, contestó Sandra. “La única diferencia será el número de tablas que se requerirán, pero una computadora no tendría ningún problema en manejar algo así.

6.3 Consideraciones y Terminología de la Programación Dinámica.

En el caso anterior se ha intentado explicar el proceso que se utiliza para resolver problemas a través de la programación dinámica, Como se ilustró, la PD resuelve un problema grande al resolver numerosos problemas pequeños. Antes de pasar a otras aplicaciones de la PD, resulta útil contemplar las consideraciones y la terminología de esta técnica.

Al igual que cualquier otro método para resolver problemas, la programación dinámica tiene su propio conjunto de consideraciones y terminología. En primer lugar, se revisará las consideraciones y a continuación, la terminología para después relacionar ambas con el caso de Mi Tierra.

6.3.1 Descomposición

La principal consideración de la PD es que un problema grande y único puede descomponerse o segmentarse en una secuencia de subproblemas más pequeños y fáciles de resolver; los problemas que implican adición o multiplicación son ejemplos clásicos de problemas que es posible descomponer. Se encuentran implícitos en la consideración de la descomposición los supuestos de que:

(a) el problema grande puede resolverse a través de una secuencia de decisiones y

(b) los problemas menores pueden resolverse "con mayor facilidad".

También se encuentra implícito en el uso de la descomposición en la programación dinámica el concepto conocido como **Principio de Optimidad de Bellman**:

> ***Un conjunto óptimo de decisiones (una política) tiene la propiedad de que, si una decisión determinada es óptima, entonces todas las decisiones subsecuentes que dependen de esa decisión específica también deben ser óptimas.***

Este principio, junto con la descomposición de un problema grande en una secuencia de problemas pequeños, sugiere el método retrospectivo que se utilizó en el caso de Mi Tierra. En esencia, se comienza al final del proceso y se trabaja hacia atrás, usando siempre la decisión óptima proveniente de una decisión anterior. Al hacer esto, nos aseguramos de encontrar el conjunto óptimo de decisiones.

6.3.2 Etapas, variables de estado, rendimientos, decisiones y relaciones recurrentes

Al analizar la PD, los términos clave son *etapas, variables de estado, rendimientos, decisiones* y la *relación recurrente.* Resultará conveniente para el análisis revisar la figura 6.2

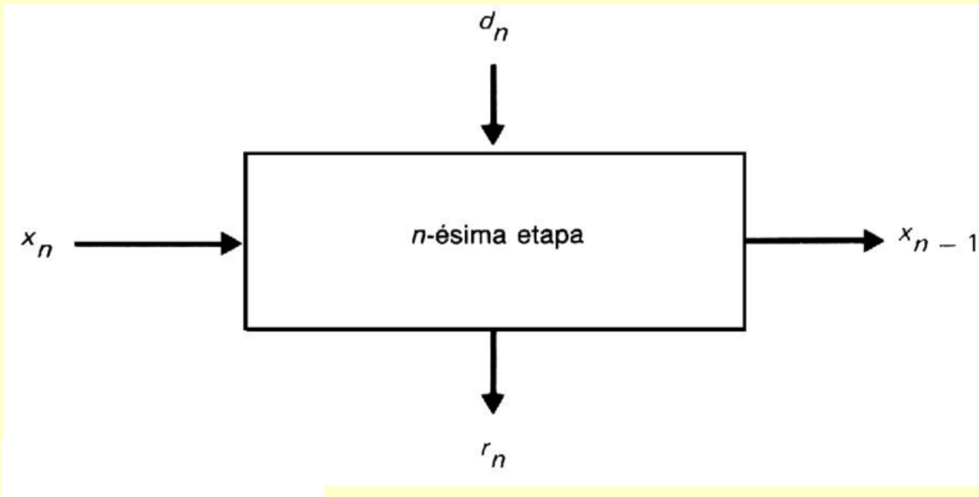


Figura 6.2 Una sola etapa

En la figura 6.2 se muestran las entradas y las salidas en cualquier punto de la secuencia de solución que se utiliza en la programación dinámica. Esta es la ***n-ésima etapa*** del problema y existen dos entradas. Estas son la **variable de estado** $\boldsymbol{x_n}$ y la decisión $\boldsymbol{d_n}$. La variable de estado relaciona la etapa actual con la anterior. Esta variable de estado nos permite calcular la cantidad restante del recurso escaso o demanda; también se utiliza junto con la decisión para determinar el resultado de la etapa. Los resultados de esta etapa son el **rendimiento** en la etapa $\boldsymbol{n}$, que se denota $\boldsymbol{r_n}$ y la variable de estado ($\boldsymbol{x_{n-1}}$) para la etapa $\boldsymbol{(n - 1)}$. El rendimiento en cualquier etapa es la contribución a las utilidades (o el aumento en los costos) que ocurre en *esa* etapa debido a la decisión y a la variable de estado $\boldsymbol{x_n}$. En cualquier etapa, la decisión es cuánto asignar a cada una de las demandas que compiten, y por lo general se hace resolviendo un problema simple en cada una de las etapas. Las variables de estado de etapas sucesivas, $\boldsymbol{x_n}$ y $\boldsymbol{x_{n-1}}$, se enlazan a través de la **relación recurrente** que calcula el valor de $\boldsymbol{x_{n-1}}$, utilizando el valor de $\boldsymbol{x_n}$ y la decisión en esa etapa, $\boldsymbol{d_n}$.

Refiriéndonos de nuevo al caso de **Mi Tierra**, cada **etapa es un mes** y **la variable de estado en cada etapa representa el total de la demanda no satisfecha en una etapa previa**, es decir, en un mes posterior. **La decisión en el caso de Mi Tierra es cuánto producir en el mes** (etapa) que se considera, y el r**endimiento es la utilidad asociada con cada decisión y cada variable de estado**. La principal diferencia que existe entre esta notación de x_n, x_{n-1}, d_n y r_n y el caso de Mi Tierra es el sistema de numeración. En PD hacemos que la etapa 1 sea la última decisión y que la etapa ***n*** sea la primera. Por ello, en el caso de Mi Tierra, la etapa 1 es el mes 7, la etapa 2 es el mes 6 y así sucesivamente, hasta la etapa 7 que es el mes 1 del horizonte de planeación. Se hace esto para simplificar el aspecto retroactivo del enfoque de programación dinámica para encontrar las soluciones.

En términos de variables de estado, etapas, decisiones y rendimientos, la etapa 1 del problema de Mi Tierra corresponde al mes 7. En esta etapa, las entradas son la variable de estado de x_1, y la decisión d_1. Los resultados o salidas para la etapa 1 son las utilidades que se obtienen de los valores de x_1 y d_1 (es decir, r_1) y la variable de estado siguiente, x_0. Es evidente que no se desea ningún resultado después del periodo del contrato, y por ello $x_0 = 0$. Se encuentra el valor de x_0 también a través de la relación $x_0 = x_1 - d_1$, la cual señala que la demanda resultante *después* de la etapa 1 debe ser igual a la demanda restante *antes,* menos la cantidad que se fabricó en la etapa 1. Dado que $x_0 = 0$, entonces $x_1 = d_1$ y en la etapa 1 siempre se fabricará una cantidad igual a la demanda restante. La utilidad de este mes es igual a la que se obtiene fabricando la cantidad d_1, puesto que ésta es la primera etapa.

Si retrocedemos a la etapa 2, las entradas son x_2 y d_2, al tiempo que las salidas son x_1 y r_2. La demanda restante antes de la etapa 2, x_2, menos la cantidad fabricada en la etapa 2, d_2, es igual a la demanda no satisfecha en la etapa 1 ($x_1 = x_2 - d_2$). La utilidad en la etapa 2 para una decisión particular será la utilidad asociada con d_2 *más* la mayor utilidad asociada con $x_1 = x_2 - d_2$, que es la demanda restante después de fabricar d_2.

Se continúa el retroceso en este sentido hasta que se alcanza la etapa *n.* En cada etapa, se encuentra la decisión óptima para cada valor de la variable de estado y se utiliza esa decisión y su utilidad cuando se les necesita en etapas posteriores.

Volviendo a la primera tabla del análisis del caso, la tabla 6.2, la única demanda que debe considerarse cuando sólo resta un mes es 200 cajas. Por ello, $\boldsymbol{x_1}$ = 200, lo cual implica que $\boldsymbol{d_1}$ = 200. La mayor utilidad para $\boldsymbol{d_1}$ = 200 es $1,000. Para la etapa 2, la 6.3 muestra que el único valor que debe considerarse para $\boldsymbol{x_1}$ es 400. Si $\boldsymbol{x_1}$ es inferior a 400, esto implica que quedó inventario de un periodo previo y $\boldsymbol{d_2}$ debe ser igual a cero, puesto que no se requiere nueva producción. Entonces, los valores de $\boldsymbol{d_2}$ pueden ser 200 o 400. El valor de $\boldsymbol{d_2}$ no puede ser inferior a 200 porque no podría satisfacerse la demanda de los meses restantes. Para cada decisión en la que $\boldsymbol{d_2}$ = 200 o 400, calculamos la suma de las utilidades para el valor de la decisión y la utilidad óptima para $\boldsymbol{x_2 - d_2}$. Después, se maximizan estas decisiones para encontrar cuál es la mejor decisión para cada uno de los valores de la variable de estado. Dado que no interesa maximizar las utilidades para cualquier periodo que no sea el que comienza en el mes 1, esperamos hasta alcanzar la etapa 7 para determinar la solución óptima para el periodo completo.

En la figura 6.3 se presenta un diagrama de este proceso. En cada etapa $\boldsymbol{x_{n-1} = x_n - d_n}$ y $\boldsymbol{r_n}$ = utilidad de $\boldsymbol{d_n}$, *más* la utilidad óptima de $\boldsymbol{x_{n-1}}$.

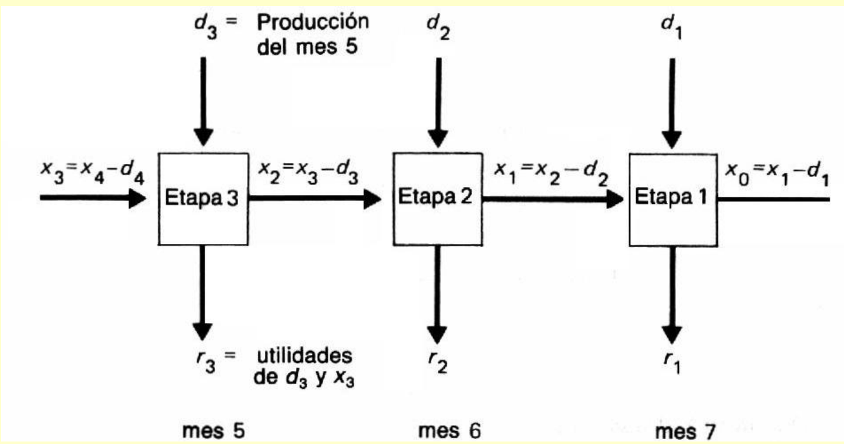


Figura 6.3 Presentación diagramática de la programación dinámica.

Se utilizará esta terminología y notación para analizar problemas adicionales en los que se utiliza la programación dinámica.

6.4 Aplicaciones de la Programación Dinámica.

6.4.1 Revisión del problema de la ruta más corta

El problema de la ruta más corta y se planteó como un problema de red. Además, se dijo que se podría resolver ese planteamiento de red a través de una versión especializada del método símplex, pero que también existían otros procedimientos para resolver problemas de ruta más corta. Uno de esos procedimientos es una aplicación directa de la programación dinámica.

Para ilustrar la forma en que puede utilizarse la PD para resolver problemas de ruta más corta, hemos vuelto a trazar en el figura 6.4 el problema de viajar de Nueva Orleáns a Atlanta (las distancias están en minutos).

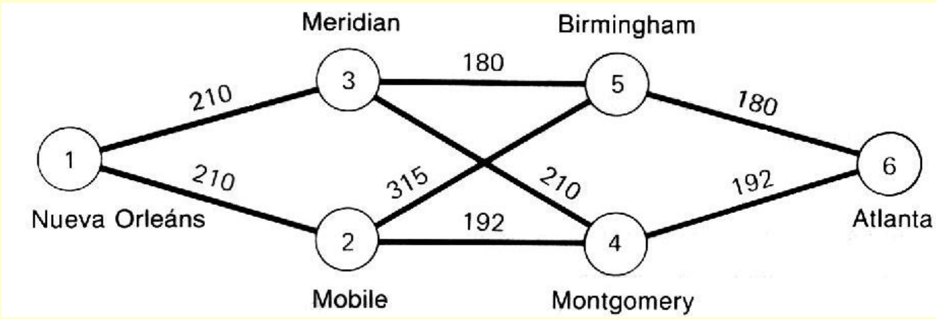


Figura 6.4 Ruta por carretera de Nueva Orleáns a Atlanta

Para aplicar la PD necesitamos dividir el problema en etapas y decidir con respecto a las variables de estado. En la figura 6.5 se ilustra de nuevo el problema y se le divide en tres etapas. Estas etapas son similares a los tres puntos del viaje en los que es necesario tomar decisiones. Observe que las etapas comienzan con la número 1 en Montgomery y Birmingham, dado que vamos a utilizar el enfoque retroactivo para resolver este problema.

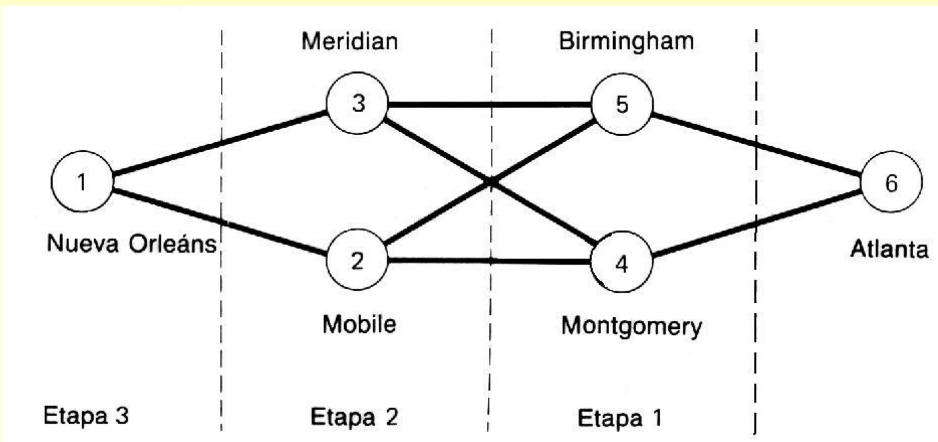


Figura 6.5 Etapas para el viaje entre Nueva Orleáns y Atlanta.

Las variables de estado son las ciudades en las que se encuentra el viajero cuando es necesario tomar una decisión. Por ejemplo, en la etapa 1, la variable de estado x_1 es Birmingham o Montgomery. La decisión en cada etapa es cuál ciudad visitar. Por ejemplo, en la etapa 1, la decisión es simple puesto que se debe ir a Atlanta sin importar en qué lugar nos encontremos. La recompensa o rendimiento asociado con cada variable de estado y con cada decisión en una etapa específica es el tiempo del viaje en minutos. Por ejemplo, en la etapa 1 en la que x_1 = Birmingham y la decisión es ir a Atlanta (la única decisión posible), el rendimiento es 180. Recuerde que en este problema lo que queremos es minimizar y no maximizar.

Para la primera etapa, suponemos que ya hemos llegado a Atlanta. La pregunta se convierte entonces en: ¿cómo llegamos ahí en el tiempo más breve? Es evidente que veníamos de Birmingham o Montgomery. Este razonamiento se presenta en la tabla 6.9

Variable de estado (x_1)	*Decisión*	*Decisión óptima*	*Rendimiento óptimo*
4	pasar a 6	pasar a 6	192
5	pasar a 6	pasar a 6	180

Tabla 6.9 Tabla de decisión de la etapa 1

Ahora utilizamos estas decisiones óptimas en la siguiente etapa, en la que x_2 = Meridian o Mobile. Hacemos esto porque el Principio de Optimidad de Bellman, aplicado a los problemas de redes, puede plantearse de la siguiente manera:

Si la ruta óptima incluye un nodo, entonces la ruta más corta de ese nodo al final es una parte de la ruta óptima.

Para la etapa 2, la tabla que se utiliza para tomar la decisión es similar a la 6.9, excepto que ahora hay más de una ciudad por visitar. Las ciudades que es posible visitar después (a las que con frecuencia se les denomina variables de decisión) se listan como encabezados de columna. El rendimiento asociado con cada decisión es la suma de la distancia que va de la variable de estado a la variable de decisión, más la distancia óptima que va de la variable de decisión al final.

	Decisiones			
Variable de estado (x_2)	*4*	*5*	*Decisión óptima*	*Rendimiento óptimo*
2	192 + 192	315 + 180	pasar a 4	384
3	210 + 192	180 + 180	pasar a 5	360

Tabla 6.10 Tabla de decisión de la etapa 2

Por ejemplo, en la tabla 6.10, si nos encontramos en Mobile (2), la decisión óptima es ir a Montgomery (4), con un tiempo total de 384 minutos. Y si nos encontramos en Meridian (3), la decisión óptima es ir a Birmingham (5), con un tiempo total de 360 minutos.

Continuamos ahora retrocediendo hacia Nueva Orleáns (1) y se toma la decisión con respecto a cuál es la siguiente ciudad que debe visitarse. Esto se observa en la tabla 6.11

	Decisiones			
Variable de estado (x_3)	*2*	*3*	*Decisión óptima*	*Rendimiento óptimo*
1	210 + 384	210 + 360	pasar a 3	570

Tabla 6.11 Tabla de decisión de la etapa 3

Aquí, al igual que en las decisiones de la etapa 2, el rendimiento para una decisión particular es el tiempo que va de la variable de estado a la variable de decisión, más el tiempo óptimo que va de la variable de decisión al final. Por ejemplo, para una decisión de ir a Mobile (2), el tiempo más corto es la suma del tiempo más corto para ir a Mobile más el tiempo más corto para ir de Mobile a Atlanta. Este segundo valor se encuentra observando la tabla de decisión de la etapa anterior (tabla 6.10) en la que Mobile (2) era una variable de estado para encontrar que el rendimiento óptimo es 570.

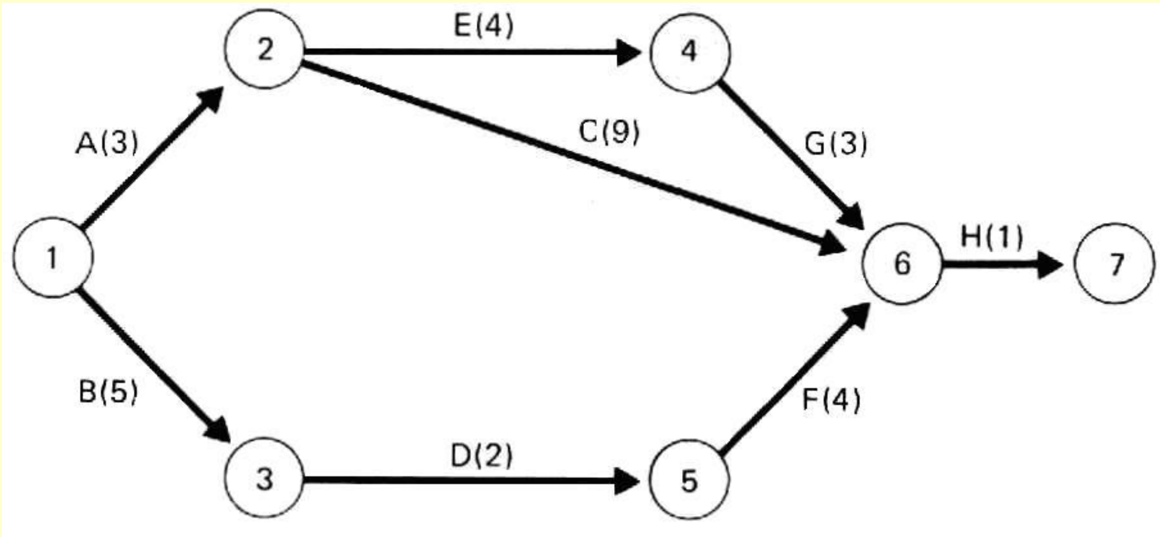
Se observa ahora que el tiempo más breve para ir en automóvil de Nueva Orleáns a Atlanta es 570 minutos, pero ¿cómo encontramos la ruta que tiene este tiempo de viaje? Para determinar la ruta óptima, hacemos un *recorrido hacia adelante* las tablas de decisión de Nueva Orleáns a Atlanta. Si nos encontramos en Nueva Orleáns (1), la decisión óptima a partir de la tabla 6.11 es ir a Meridian (3). Por ello, la primera parte del viaje es ir a Meridian. Para determinar a dónde debemos ir al salir de Meridian, consideramos esta ciudad como la variable de estado y observamos la tabla de decisión de la etapa 2 (tabla 6.10). Al hacer esto, se encuentra que la decisión óptima es ir a Birmingham (5). Una vez que estamos en Birmingham, revisamos la tabla de decisión de la etapa 1 para determinar a dónde debemos continuar. En este caso, la decisión es pasar a Atlanta (6).

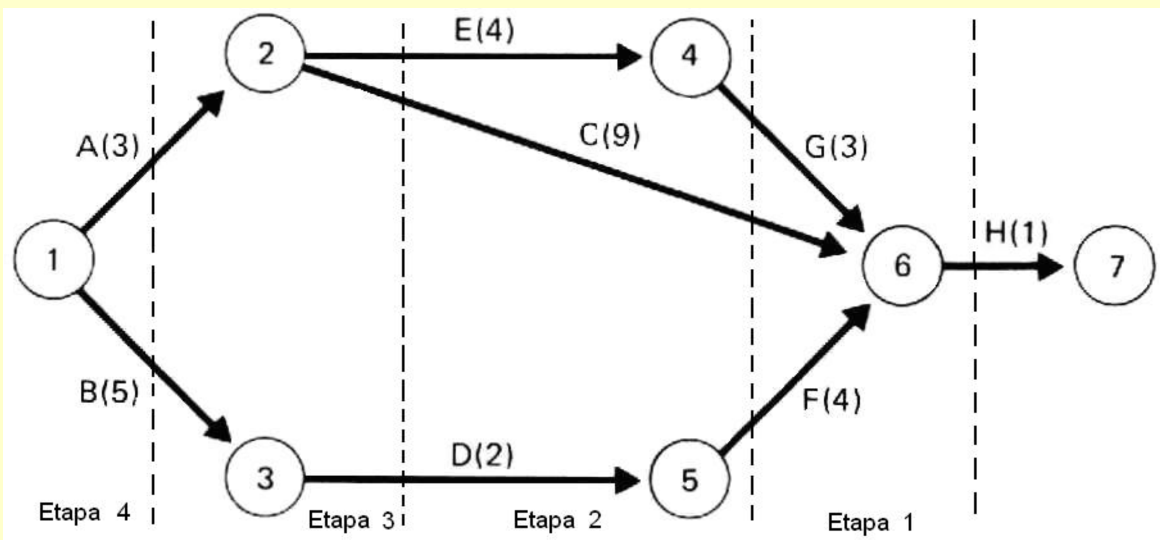
El resultado de este recorrido hacia adelante por las tablas de decisión es la ruta más corta entre Nueva Orleáns y Atlanta, la que es:

Nueva Orleáns → Meridian → Birmingham → Atlanta

6.5 Ejercicios de Programación Dinámica

Una red que ilustra el problema de PERT que implica la organización de una conferencia. Se muestra en la siguiente figura. Calcule la ruta más larga por medio de programación dinámica.





- Variables de Estado – Son las Actividades (nodos): 1, 2,…, 7. En la Etapa 1 $\mathbf{x_1} = 6$.
- Decisión en cada etapa cual es la actividad a realizar.
- La recompensa o rendimiento asociado con cada variable de estado y con cada decisión en una etapa es la ruta más larga.

Etapa 1			
Variable de Estado x_1	Decisión	Decisión Óptima	Rendimiento
6	Pasar a 7	Pasar a 7	1

Etapa 2			
Variable de Estado x_2	Decisión 6	Decisión Óptima	Rendimiento
2	9 + 1	Pasar a 6	10
4	3 + 1	Pasar a 6	4
6	4 + 1	Pasar a 6	5

Etapa 3
No aplica por Principio de Optimidad

Etapa 4			
Variable de Estado x_4	Decisión 2	Decisión Óptima	Rendimiento
1	10 + 3	Pasar a 2	13

$$\boxed{1} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{6} \rightarrow \boxed{7} = \boxed{13}$$

George P. Burdell recién graduado de una reconocida escuela de ingeniería del este, de Estados Unidos está planeando realizar un viaje a la costa oeste antes de comenzar a trabajar.

No está interesado en visitar los puntos intermedios de su ruta al oeste, sino que solo le interesa llegar a Los Ángeles en el menor tiempo posible conduciendo su automóvil.

Utilizando un atlas, dibujo que aparece en la figura 4.8, en el que las distancias están dadas en horas de tiempo de manejo.

En calidad de amigo de George, sugiera cual es la ruta más rápida que debe utilizar para llegar de Atlanta a Los Ángeles.

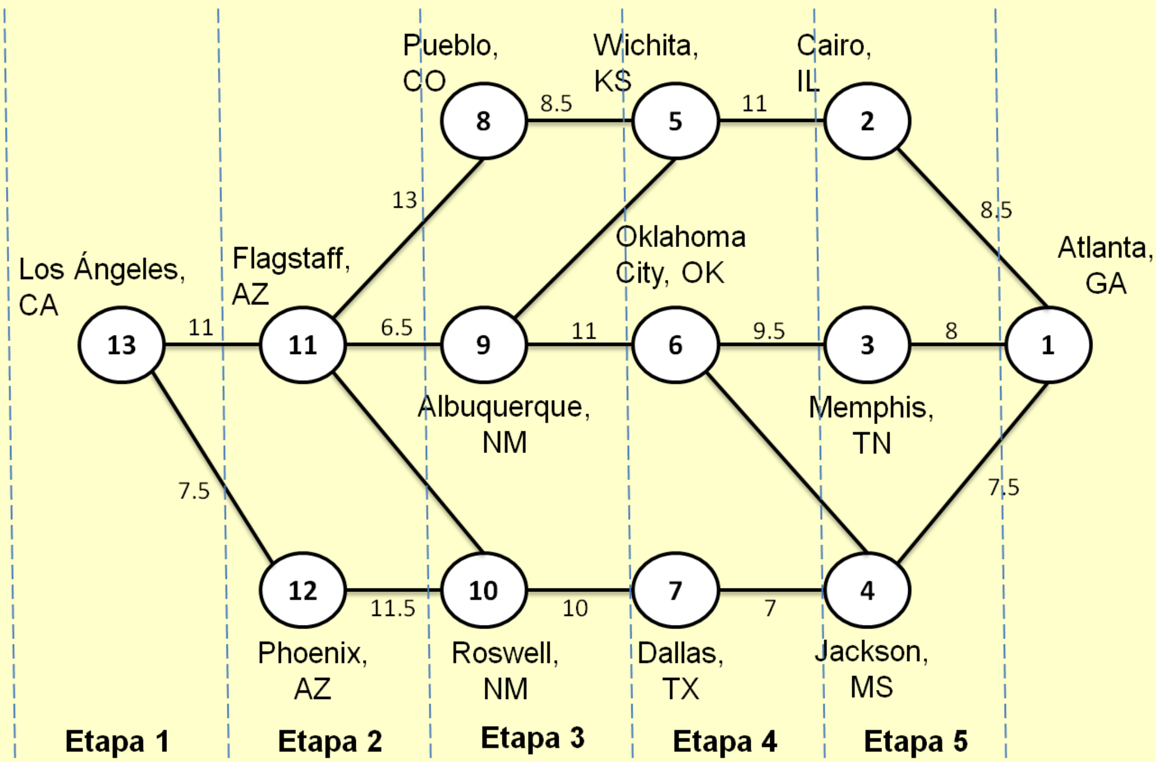


Figura 4.8 Tiempos de viaje en el automóvil ente ciudades.

Etapa 1

Variable de Estado X1	Decisión 11	Decisión 12	Decisión Optima	Recompensa
13	11 + 34.5	-	Pasar a 11	45.5
	-	7.5 + 36	Pasar a 12	43.5 *

Etapa 2

Variable de Estado X2	Decisión 8	9	10	Decisión Optima	Recompensa
11	13 + 28	6.5 + 28.5	10 + 24.5	Pasar a 10	34.5 *
12	-	-	11.5 + 24.5	Pasar a 10	36

Etapa 3

Variable de Estado X3	Decisión 5	6	7	Decisión Optima	Recompensa
8	8.5 +19.5	-	-	Pasar a 5	28
9	12.5 + 19.5	11 + 17.5	-	Pasar a 6	28.5
10	-		10 + 14.5	Pasar a 7	24.5 *

Etapa 4

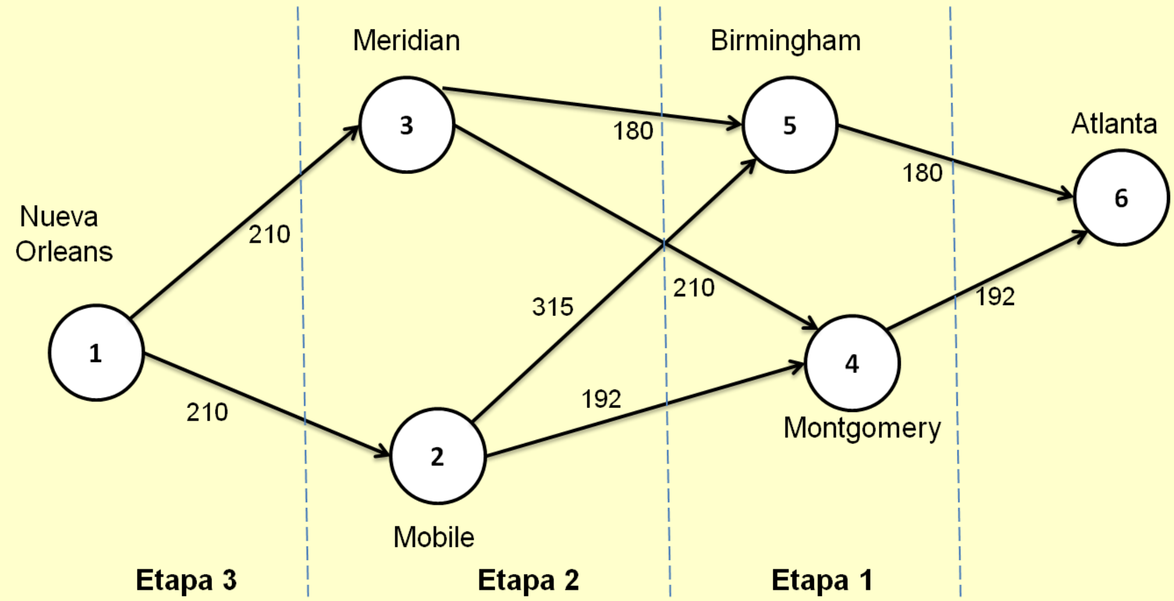
Variable de Estado X4	Decisión 2	3	4	Decisión Optima	Recompensa
5	11 + 8.5	-	-	Pasar a 2	19.5
6	-	9.5 + 8	11.5 + 7.5	Pasar a 3	17.5
7	-	-	7 + 7.5	Pasar a 4	14.5 *

Etapa 5

Variable de Estado X5	Decisión	Decisión Optima	Recompensa
2	Pasa a 1	Pasa a 1	8.5
3	Pasa a 1	Pasa a 1	8
4	Pasa a 1	Pasa a 1	7.5 *

Resultado (Ruta): 13 – 11 – 10 – 7 – 4 – 1

Sugiera cual es la ruta más corta nuevamente en el problema de viajar de Nueva Orleans a Atlanta (las distancias están en minutos).



Rutas por carretera de Nueva Orleans a Atlanta (Etapas para el viaje).

Etapa 1

Variable de Estado X1	Decisión	Decisión Optima	Recompensa
4	Pasa a 6	Pasa a 6	192
5	Pasa a 6	Pasa a 6	180*

Etapa 2

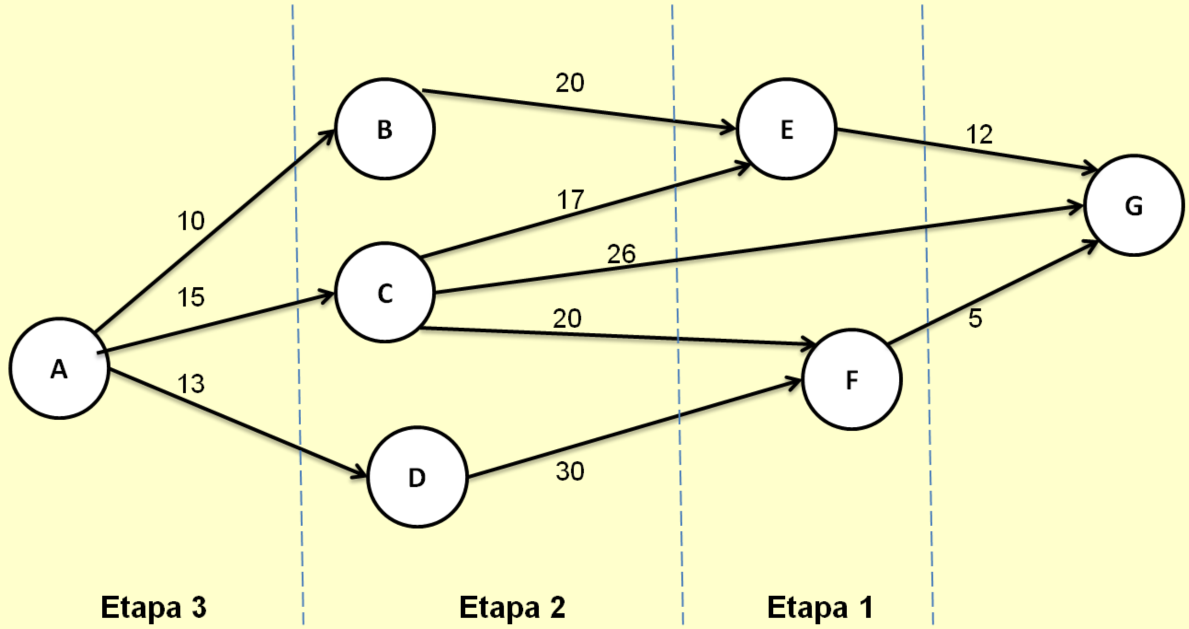
Variable de Estado X2	Decisión 4	Decisión 5	Decisión Optima	Recompensa
2	192 + 192	315+180	Pasar a 4	384
3	210 + 192	180+180	Pasar a 5	360 *

Etapa 3

Variable de Estado X3	Decisión 2	Decisión 3	Decisión Optima	Recompensa
1	210+384	210+360	Pasar a 3	570

Resultado (Ruta): 1 – 3 – 5 – 6

Determine la ruta más corta para ir del punto A al punto G utilizando la programación dinámica.



Etapa 1

Variable de Estado X1	Decisión	Decisión Optima	Recompensa
E	Pasa a G	Pasa a G	12
F	Pasa a G	Pasa a G	5*

Etapa 2

Variable de Estado X2	Decisión			Decisión Optima	Recompensa
	E	F	G		
B	20+12	-	-	Pasar a E	32
C	17+12	20+5	26	Pasar a F	25*
D	-	30+5	-	Pasar a F	35

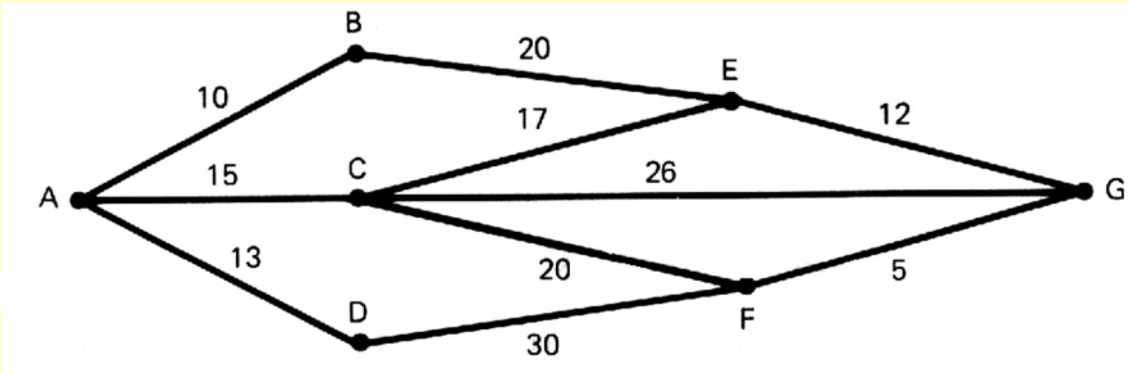
Etapa 3

Variable de Estado X2	Decisión			Decisión Optima	Recompensa
	B	C	D		
A	10+30	15+25	13+35	Pasar a C	40*

Resultado (Ruta): A – C – F – G

6.6 Problemas propuestos con Programación Dinámica

Para la red de la siguiente figura, determine la ruta más corta para ir del punto A al punto G utilizando programación dinámica.



CAPITULO 7

Simulación

7.1 Introducción

La simulación es una de las herramientas que más se utilizan en el campo de la ciencia de la administración. La simulación se ha aplicado a:

- *Producción*
- *Control de inventarios*
- *Sistemas de transporte*
- *Análisis de estrategias de mercado*
- *Patrones de crecimiento urbano e industrial*
- *Control del medio ambiente*
- *Y muchas otras áreas.*

Sin embargo, la simulación difiere en forma considerable de otros modelos y técnicas. Los problemas que se examinaron en los capítulos anteriores se modelaron y resolvieron en forma analítica (matemática)

En simulación no se requieren muchas de las consideraciones que son necesarias para plantear modelos de problemas para resolverlos en forma analítica; por ello es posible estudiar sistemas más grandes y complejos. En muchas situaciones la simulación es el único medio viable para el análisis. Por ejemplo, es posible aproximar las características de operación de sistemas complejos de líneas de espera utilizando simulación, pero no es posible resolver esos mismos modelos a través de métodos analíticos.

El enfoque será en la estructura y uso de los modelos de simulación. En forma específica,

1. Se dará una definición amplia de la simulación,
2. Se identificará una estructura de simulación y modelos,
3. Se identificará y definirá la terminología que es común en la simulación,

4. Se identificarán y describirán aplicaciones de la simulación,
5. Se dará un panorama breve de algunos de los lenguajes de simulación más comunes,
6. Y se identificarán algunos de los problemas operativos que pueden ocurrir al elaborar e implantar un modelo de simulación.

7.2 Conceptos y terminología

7.2.1 Definición de simulación.

Se definirá simulación como:

El proceso de desarrollar un modelo de un problema y estimar medidas de su comportamiento llevando a cabo experimentos muestrales sobre el modelo.

Para comprender mejor esta definición puede examinarse la relación que existe entre la simulación y los modelos que se utilizaron anteriormente. La simulación difiere en forma considerable de la estructura de solución de estos modelos. En los modelos previos se puso énfasis en el planteamiento y la construcción de modelos matemáticos y su solución analítica o matemática. En la mayoría de los casos las soluciones analíticas tenían forma de algoritmos que producían soluciones "óptimas". La simulación no hace hincapié en ninguno de estos factores; es un proceso descriptivo de planteamiento de modelos en contraste con un proceso normativo. El proceso de modelado asociado con la simulación por lo general implica recopilar datos para describir factores de entrada y factores operativos y para definir las interrelaciones que existen entre los factores (variables), entradas y otros componentes del problema que se estudia. La salida de un modelo de simulación tiene la forma de *descripciones* del comportamiento. Al ensayar el modelo es posible explorar las características del problema. En la figura 7.1 se ilustra el proceso de planteamiento de modelos y simulación.

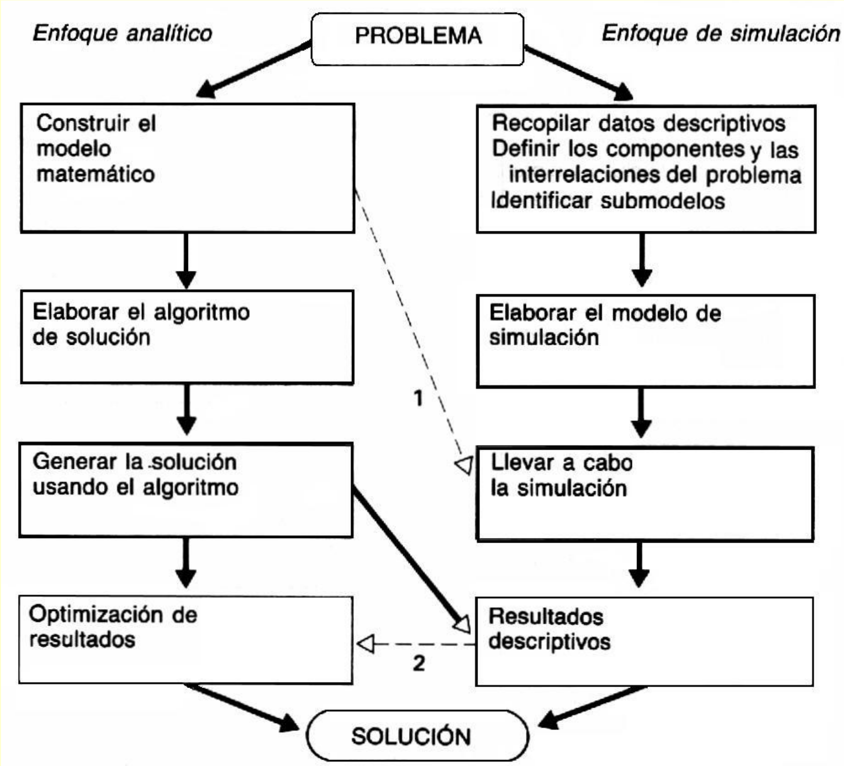


Figura 7.1 Comparación de los métodos de simulación y analítico en el proceso solución de modelos.

Es posible utilizar la simulación para generar soluciones a modelos que resulta poco práctico resolver en forma analítica. (Esto se muestra como la línea punteada que tiene el número 1 en la figura 7.1) También debe señalarse que aunque las salidas de la simulación son siempre de naturaleza descriptiva, puede incluirse una “rutina de búsqueda” en el modelo de simulación para obtener una solución óptima, o *cercana a la óptima.* (Esto se representa como la línea punteada con el número 2.) Se utiliza el término *casi óptima* debido a que la solución puede ser óptima en términos del modelo que se define, pero esto no garantiza que la solución sea un óptimo global. Por ello, la optimidad en simulación puede ser una aproximación de la optimidad que ocurre en la programación matemática.

La línea oscura que conecta el rectángulo de “generar la solución utilizando el algoritmo” con el rectángulo de “resultados descriptivos” en la figura 7.1, refleja el hecho de que no todos los modelos analíticos necesariamente dan como resultado una solución óptima.

7.2.2 Proceso de planteamiento de modelos y simulación

La figura 7.2 es una representación más detallada del proceso de planteamiento de modelos y simulación que se muestra del lado derecho de la figura 7.1

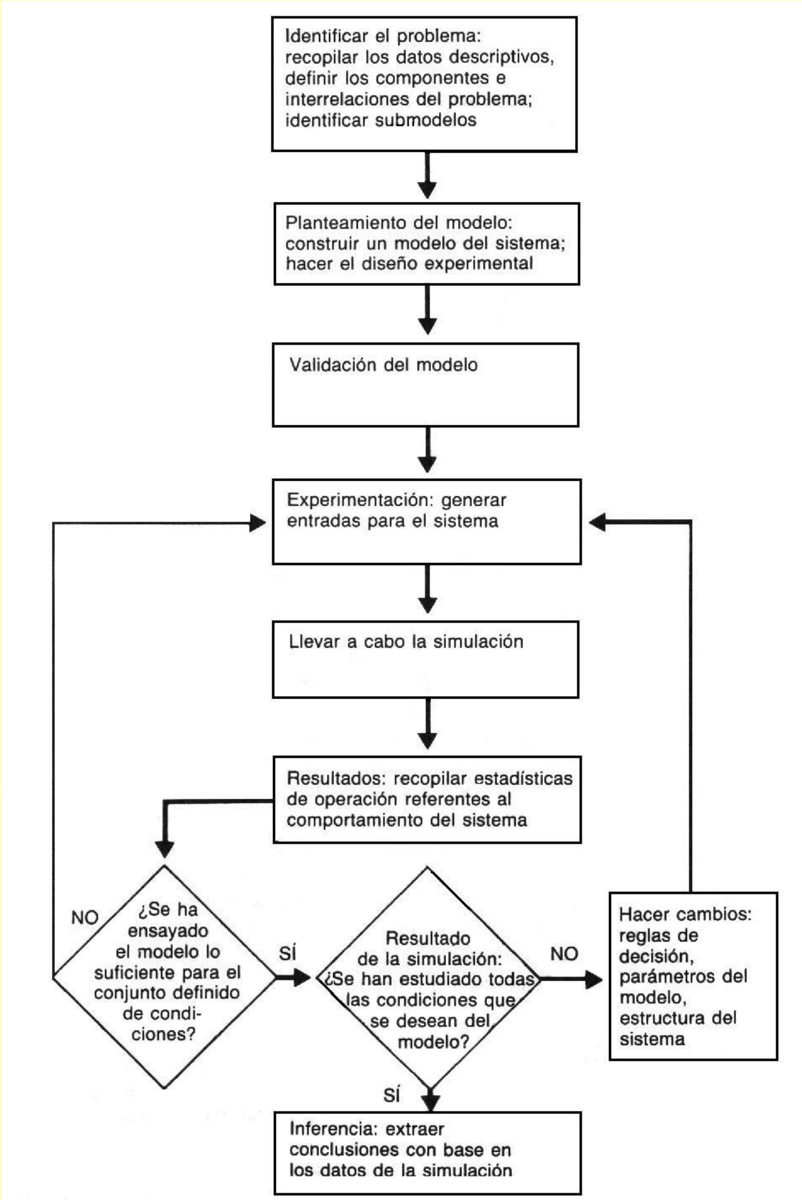


Figura 7.2 Proceso de modelos de simulación

Como se mencionaba antes, la *primera etapa, identificación del problema,* implica la recopilación de datos que describen las diferentes variables de entrada, la identificación de los límites o cotas del sistema, definición de los componentes del problema y sus interrelaciones, etcétera.

La *segunda etapa* del proceso de simulación, el *planteamiento del modelo,* se refiere a construir el modelo de simulación y a definir los procedimientos estadísticos (diseño experimental) que se utilizarán para aplicar el modelo. Dado que la simulación implica llevar a cabo experimentos muestrales en un modelo del sistema del mundo real, los resultados que se obtienen son observaciones muestrales o estadísticas muestrales. El objetivo del análisis estadístico es asegurar que el problema se aborda en forma adecuada desde el punto de vista estadístico, es decir, que el número de condiciones y casos del modelo que se examina sea suficiente para obtener inferencias estadísticas válidas a partir de los resultados.

La validación, es decir la *tercera etapa,* se refiere a asegurar que las entradas al modelo de simulación sean adecuadas y que el modelo responda a esas entradas de manera similar al problema real. En la validación se utilizan diversas pruebas y procedimientos estadísticos. Si un modelo determinado no simula en forma adecuada la respuesta del sistema real, entonces resulta necesario volver a examinar las dos primeras etapas (identificación del problema y planteamiento del modelo) con el objeto de identificar los factores o relaciones que no se hayan considerado.

Es posible comenzar con el proceso de simulación propiamente dicho (análisis), una vez que se ha validado el modelo. Esta actividad implica (1) generar entradas al sistema, (2) aplicar el modelo y (3) recopilar los datos provenientes de la simulación. En el proceso de simulación deben considerarse dos aspectos.

- En primer lugar, para un conjunto dado de condiciones del modelo, es necesario asegurarse que se lleve a cabo un número adecuado de experimentos muestrales (repeticiones de la simulación). Cada iteración de la simulación es similar a una observación simple o única; por tanto, llevar a cabo ***n*** iteraciones es análogo a extraer una muestra de tamaño ***n***. En terminología estadística, la media de la muestra de ***n*** observaciones sería *X*, media muestral. Si van a hacerse inferencias acerca de la media de la población (***μ***) para el problema del mundo real, entonces resulta necesario utilizar una muestra de tamaño adecuado. El que la media muestral se aproxime o no a la media de la población depende de las condiciones iniciales de la simulación y del número de iteraciones que se llevan a cabo. El lado izquierdo de la 7. 2, que contiene el circuito de retroalimentación, ilustra el proceso de muestreo.

- El segundo aspecto que debe abordarse en el proceso de simulación es que si van a hacerse inferencias con respecto al funcionamiento del problema en el mundo real, es necesario analizar diferentes condiciones y parámetros del modelo. Las condiciones, reglas de decisión y estructuras del sistema que se examinan se identifican como parte del diseño experimental (segunda etapa). El circuito de retroalimentación del lado derecho de la figura 7.2 ilustra el proceso de simulación asociado con diferentes configuraciones de diseño.

7.2.3 Manejo de una simulación a través del tiempo

Es necesario estar conscientes de los diferentes problemas de muestreo que se enfrentan al llevar a cabo simulaciones, pero también debe tenerse presente la necesidad de llevar un registro de los tiempos de todos los eventos (llegadas, salidas, fallas, pedidos de los clientes, envíos, etc.) que ocurren con el paso del tiempo. Por ejemplo, en el caso de una compañía de reparación de maquinaria industrial, debe llevarse un registro de los momentos en que ocurren descomposturas o cuando una persona de servicio inicia la actividad de reparación y del momento cuando la reparación se termina y la máquina está de nueva cuenta disponible para dar servicio. Existen dos métodos básicos para llevar los registros de los eventos en una simulación: **incremento fijo de tiempo** (que con frecuencia se denomina “secciones de tiempo”) e **incremento variable de tiempo** (que por lo general se denomina “secuenciación de eventos”).

En una simulación con incremento fijo de tiempo, el reloj del sistema avanza con un incremento fijo de tiempo (Δt). En cada punto sucesivo del tiempo simulado se examina el modelo para determinar si han ocurrido cualesquier eventos en el incremento del tiempo. Cuando se encuentra que ha ocurrido un evento se actualiza el modelo; si no ocurren eventos se vuelve a incrementar el reloj del sistema. La principal ventaja del método de incremento fijo es que no resulta necesario registrar la secuencia real de los eventos, puesto que la ocurrencia de cada uno de los posibles eventos se verifica en cada uno de los incrementos en el tiempo. La desventaja del método es que los incrementos de tiempo deben ser breves en comparación con el tiempo promedio de los eventos; por ello, se lleva a cabo una revisión innecesaria puesto que durante algunos de los incrementos de tiempo no sucede nada.

En la simulación con incrementos variables de tiempo, el reloj del sistema se adelanta hasta el momento del siguiente evento, sin importar si se trata de un día o meses del tiempo simulado. Al utilizar el método del incremento variable debe llevarse un *calendario de tiempos* para cada evento, pero es más eficiente desde el punto de vista de los cálculos.

La mayoría de las simulaciones utilizan el método del incremento variable del tiempo, y la mayor parte de los lenguajes de simulación se han construido con base en este concepto.

7.2.4 Muestreo Monte Carlo

El origen de los métodos modernos de simulación proviene de lo que se conoce como **muestreo Monte Carlo**, técnica que fue utilizada en primer lugar por J. von Neumann y otros diversos investigadores, junto con equipos militares de investigación durante la Segunda Guerra Mundial. A partir de mediados de la década de 1940, el procedimiento se ha aplicado con éxito a diversas áreas tales como planeación financiera probabilística, valuación de seguros y modelos de inventarios, por mencionar sólo unas cuantas.

El término *Monte Carlo* se refiere a un proceso que se utiliza en forma aleatoria para elegir valores muestrales a partir de una distribución probabilística. Después, esos valores muestrales se utilizan como entradas o valores operativos para un modelo de simulación. Por ello, ***el muestreo Monte Carlo no es simulación*** sino que es, más bien, un procedimiento o método que se utiliza con modelos probabilísticos de simulación.

Para ilustrar el proceso, suponga que la distribución probabilística que se presenta en la tabla 7.1 representa las toneladas de basura que cada día recoge el departamento de salubridad de una ciudad. El objetivo es simular las toneladas de basura que se recogen en un día específico. Para comenzar el proceso, es necesario elaborar una *distribución probabilística acumulada.* Es decir, necesitamos conocer la probabilidad de que las toneladas de basura recogidas en un día determinado sean menos que, o igual a, un valor determinado. Esto puede lograrse sumando las probabilidades comenzando con la recolección de 10 toneladas por día. En la tabla 7.2 se presentan la distribución probabilística original y su distribución acumulada asociada.

Dado que para cualquier distribución probabilística acumulada las probabilidades caen en el intervalo de 0 a 1, es posible generar una ocurrencia aleatoria correspondiente a una distribución probabilística específica, seleccionando un número al azar entre 0 y 1, encontrando el intervalo de la distribución acumulada dentro del cual cae el número aleatorio e identificando el valor asociado. Para ilustrar la forma en que esto se realiza, es posible elaborar una curva de distribución acumulada para los datos que se presentan en la 7.2. La figura 7.3 es dicha curva. Observe que la longitud de la línea vertical en cada uno de los escalones corresponde al valor de la probabilidad para cada nivel de recolección. Si se genera al azar un número entre 0 y 1 (éste puede leerse de una tabla o bien obtenerse en forma matemática), entonces al determinar la ubicación del número generado aleatoriamente en el eje vertical, se obtiene un valor muestral asociado para ese nivel de recolección. Por ejemplo, suponga que generamos el número aleatorio 0.4764; el nivel de recolección asociado sería 30. Si generamos el número aleatorio 0.8416, el nivel asociado de recolección sería de 50 toneladas de basura. Para el número aleatorio 0.9434, el nivel asociado de recolección es 60. Si repitiéramos este proceso de muestreo un gran número de veces (iteraciones), esperaríamos obtener un valor de 30 toneladas para el nivel de recolección el 25% de las veces, un valor de recolección de 50 toneladas el 12% de las veces, un valor de recolección de 60 toneladas el 7% de las veces, y así sucesivamente. Por ello, los valores simulados para un número grande de iteraciones corresponderían a la distribución original de la recolección de basura.

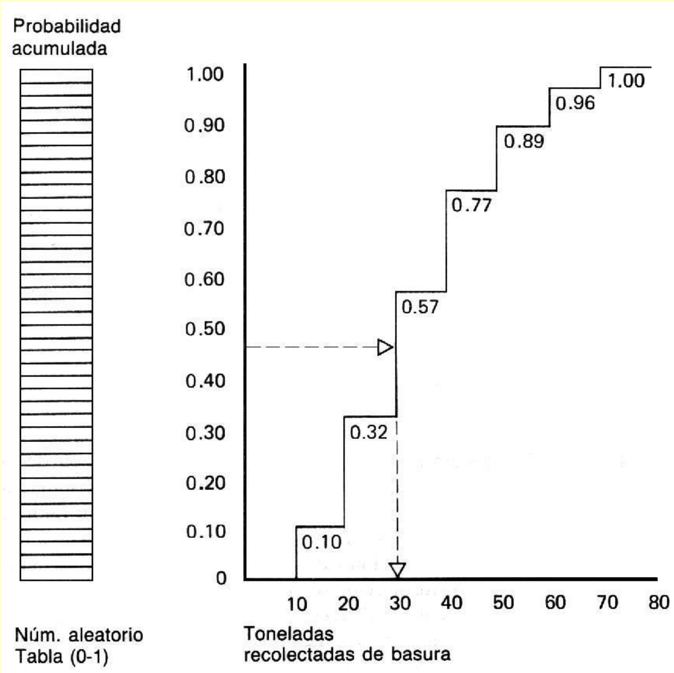


Figura 7.3 Curva de distribución acumulada de recolección diaria de toneladas de basura.

El muestreo a partir de una distribución probabilística utilizando el método de Monte Carlo es bastante simple una vez que se ha elaborado la curva (distribución) probabilística acumulada. Sin embargo, para suponer que el proceso es correcto desde el punto de vista estadístico, debemos asegurarnos que los números aleatorios tengan en realidad una distribución aleatoria uniforme entre 0 y 1. Para llevar a cabo una simulación manual puede utilizarse una tabla de números aleatorios.

Un aspecto que debe señalarse con relación a generar números aleatorios en el intervalo de 0 a 1 es que los números están en realidad entre 0 y 0.9999, excluyendo el 1. El efecto de esto es mínimo. Para el ejemplo anterior, simplemente significa que Los números aleatorios que se encuentran entre 0 y 0.0999 estarían asociados con un nivel de recolección de 10 toneladas, que los números aleatorios que se encuentran entre 0.1000 y 0.3199 estarían asociados con un nivel de recolección de 20 toneladas, y así sucesivamente.

Toneladas de basura recolectadas por día (d)	*Probabilidad p(d)*
10	0.10
20	0.22
30	0.25
40	0.20
50	0.12
60	0.07
70	0.04

TABLA 7.1 Distribución probabilística de toneladas de basura recolectadas por día

Toneladas de basura recolectadas por día (d)	*Probabilidad p(d)*	*Probabilidad acumulada P(d) = prob (recolección ≤ d)*
10	0.10	0.10
20	0.22	0.32
30	0.25	0.57
40	0.20	0.77
50	0.12	0.89
60	0.07	0.96
70	0.04	1.00

TABLA 7.2 Distribución probabilística acumulada de recolección de toneladas de basura por día

7.3 CASO B & D Manufacturing, Inc.

Los administradores de laS & D Manufacturing, Inc., han observado que el tiempo muerto de la maquinaria en el área de producción ocasiona considerables pérdidas de producción, aumenta los pedidos atrasados que no se han surtido y hace que se pierdan oportunidades de ventas. Los administradores opinan que es posible reducir en forma significativa el problema utilizando un número adecuado de personal de mantenimiento. El salario por hora (incluyendo prestaciones) para el personal de mantenimiento es $8. Los administradores consideran que se pierden $30 por hora cuando una máquina no está en operación; este costo incluye las utilidades que se pierden, así como también el costo del tiempo muerto de los operadores. La B & D necesita determinar el número óptimo del personal de mantenimiento. Es decir, la compañía necesita saber en qué punto el costo del personal de mantenimiento equivale a los costos esperados por el tiempo muerto de los operadores y las utilidades que se pierden.

El gerente de producción de la B & D ha recopilado datos con respecto al tiempo que transcurre entre descomposturas. Estos datos se presentan en la tabla 7.3. No se recopilaron datos con respecto al tiempo que el personal de mantenimiento invierte en reparar una máquina; sin embargo, el gerente proporcionó una estimación aproximada de los tiempos de servicio y de las probabilidades asociadas, y estos datos aparecen en la tabla 7.4

Procederemos con la solución del problema de la B & D después de analizar algunos conceptos y metodología sobre simulación.

Tiempo entre descomposturas (minutos)	***Frecuencia de ocurrencia***
15	**7**
16	**14**
17	**15**
18	**28**
19	**36**
20	**27**
21	**15**
22	**8**
Total	**150**

TABLA 7.3. Tiempo entre descomposturas de las máquinas

Tiempo de servicio (minutos)	***Probabilidad***
5—15	0.05
15—25	0.25
25—35	0.40
35—45	0.25
45—55	0.05

TABLA 7.4. Estimaciones de los tiempos de servicio para la reparación de maquinaria ***modelo de simulación***

ANEXOS

Método de la Regla de Cramer

Definición:

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es un ***sistema de Cramer*** si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo.

Los ***sistemas de Cramer*** son siempre compatibles y determinados.

"Dado un sistema lineal no homogéneo (un sistema es homogéneo cuando todos los términos independientes de las ecuaciones que lo componen son cero) de igual nº de ecuaciones que de incógnitas, el valor de cada incógnita se obtiene dividiendo el determinante de la incógnita por el determinante del sistema".

Así la resolución de un sistema de ecuaciones lineales puede efectuarse mediante la llamada regla de Cramer que afirma:

> *"En un sistema de Cramer, cada incógnita puede obtenerse mediante el cociente de dos determinantes. El primero es el determinante de la matriz de los coeficientes en el que se ha sustituido la columna correspondiente a la incógnita a despejar por la columna de los términos independientes y el segundo es el determinante de la matriz de los coeficientes*".

Sea el sistema de Cramer, de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$

Escrito en forma matricial quedaría:

$$AX = B$$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Los pasos a seguir para calcular los sistemas de ecuaciones según la regla de Cramer son los siguientes:

1. Hallar la matriz ampliada $(A \vdots b)$ asociada al sistema de ecuaciones, esto es: que la primera columna esté formada por las entradas de los coeficientes de la primera incógnita de las ecuaciones; que la segunda columna la formen las de la segunda incógnita, y así hasta llegar a la última columna, que estará constituida por las entradas de los términos independientes de las ecuaciones.
2. Calcular el determinante de A.

3. Aplicar la regla de Cramer, que consiste en:

a) ir sustituyendo la primera columna del det (A) por los términos independientes;

b) dividir el resultado de este determinante entre el det (A) para hallar el valor de la primera incógnita;

c) continuar sustituyendo los términos independientes en las distintas columnas para hallar el resto de las incógnitas.

Dado el sistema

$$u_1x+v_1y = b_1$$

$$u_2x+v_2y = b_2$$

$$\text{Si } D = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & v_1 \\ b_2 & v_2 \end{vmatrix}}{D} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & b_1 \\ u_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D} \quad \text{El sistema es compatible determinado}$$

$$\text{Si } D = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0 \begin{cases} \nearrow \text{ y } \begin{vmatrix} b_1 & v_1 \\ b_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ o } \begin{vmatrix} u_1 & b_1 \\ u_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ El sistema es incompatible, sin solucion} \\ \searrow \text{ y } \begin{vmatrix} b_1 & v_1 \\ b_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} u_1 & b_1 \\ u_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ El sistema es compatible indeterminado} \end{cases}$$

Es decir,

$$\text{Si } D = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & v_1 \\ b_2 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & b_1 \\ u_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}} \quad \text{El sistema es compatible determinado}$$

Si alguna de las dos fracciones anteriores vale $\pm\infty$, el sistema es incompatible

Si las dos fracciones anteriores resultan $\frac{0}{0}$, el sistema es compatible indeterminado

Ejemplo*:*

Sea el sistema de ecuaciones lineales formado por dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ x + 5y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Encontrar el valor de x e y mediante la regla de Cramer.

Empezaremos con el primer paso, que consiste en hallar la matriz ampliada $A \vdots b$ asociada al sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} x & & y & & b \end{array} \\
A \vdots b = & \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{array}\right).
\end{array}
$$

El segundo paso es calcular el determinante de A. Así pues:

$$
\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17.
$$

(-) (+)

Y el tercero y último paso consiste en calcular las incógnitas:

$$
x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{17} = \frac{5+6}{17} = \frac{11}{17}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{9-1}{17} = \frac{8}{17}
$$

Por tanto los valores de las incógnitas x y y son:

x= 11/17 y = 8/ 17

Así como este análisis y ejemplo se hizo para un sistema de 2 incógnitas es el mismo que se realiza para ecuaciones de grado n. Por tanto es fácil demostrar la regla de Cramer para sistemas de n ecuaciones con n incógnitas. Su uso se muestra en el siguiente ejemplo:

Resolver para x, y, z

$$3x + y + z = 6$$
$$x + y - z = 0$$
$$x - y + 2z = 5$$

Solución: *Tenemos que* $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$ *Entonces*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{D}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{D}$$

$$x = \frac{-4}{-2} = 2, \quad y = \frac{2}{-2} = -1, \quad z = \frac{-2}{-2} = 1$$

Así las soluciones son $(2, -1, 1)$

Bibliografía

GOULD F.J., EPPEN G.D., SCHMIDT C.P. Investigación de Operaciones de la Ciencia Administrativa. 3ª Edición. México: Prentice Hall 1992. Págs. 660-676 y 693-694.

RENDER Barry, Principios de administración de operaciones. 5ª Edición. México: Pearson Educación Págs. 106-107.

IZAR LANDETA JUAN MANUEL. Fundamentos de investigación de operaciones para administración. Editorial Universitaria Potosina. Págs. 146-147.

KRAJEWSKI Lee J., RITZMAN Larry P. Administración de operaciones: estrategia y análisis. 5ª Edición México: Pearson Educación 2000. Pág. 526.

WINSTON Wayne L. Investigación de Operaciones. 4ª Edición. Editorial Thomson. Págs. 1302-1303.

BELLMAN Richard. Dynamic programming (Princeton, N.J.: Princeton University Press), 1957.

WINSTON Wayne L. Investigación de Operaciones. Modelos para pronósticos. 4º Edición. Editorial Thomson. Págs. 1302- 1319.