Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Guía del Maestro

Para la materia de Cálculo Diferencial

Qué para obtener el grado de:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Ana Cristina Hernández Galván

Dirigida por:

M. C. Patricia Isabel Spíndola Yáñez.

Octubre 2014

Índice general

Planeación detallada de Cálculo Diferencial

En la siguiente tabla se muestra la dosificación semanal de acuerdo a la planeación del curso de cálculo diferencial, y la sección de está guia correspondiente a cada tema.

Parcial 1

Semana / sesión	Temas /subtemas
1° semana	**Preliminares**
Sesión 1	Subconjuntos de los reales. Propiedad de campo y orden
Sesión 2	Desigualdades e intervalos.
Sesión 3	Valor absoluto. Propiedades. Desigualdades con valor absoluto
2° semana	**Funciones polinomiales**
Sesión 1	Concepto de función. Dominio e imagen.
Sesión 2	Gráfica de funciones polinomiales.
Sesión 3	Desplazamiento de gráficas de funciones polinomiales. Álgebra de funciones $+, -, x$, composición
3° semana	.
Sesión 1	Concepto de límite. Introducción intuitiva
Sesión 2	Límites de funciones polinomiales. (Algebra de límites, $+$,- y mult.)
Sesión 3	Límites al infinito de funciones polinomiales.
4° semana	.
Sesión 1	Continuidad. Inroducción intuitiva3
Sesión 2	Concepto de derivada. Representación geométrica, física y su relación con la ánalitica
Sesión 3	Derivada de una función polinomial
5° semana	.
Sesión 1	Reglas elementales de la derivación. (Álgebra de derivadas, $+$,-,x, regla de la cadena)
Sesión 2	Aplicaciones. Máximos y mínimos
Sesión 3	Dibujo de funciones polinomiales
6° semana	Más aplicaciones

Parcial 2

Semana / sesión	Temas /subtemas
7° semana	**Funciones Racionales, Radicales y Seccionadas**
Sesión 1	Definición, Dominio e imagen de funciones racionales, radicales y seccionadas
Sesión 2	Gráfica de funciones racionales, radicales y seccionadas
Sesión 3	Desplazamiento de funciones racionales, radicales y seccionadas
8° semana	.
Sesión 1	Álgebra de funciones, $+, -, \times, /$, composición. Función inversa
Sesión 2	Idea intuitiva de límite y continuidad. Limite de una función.
Sesión 3	Operaciones entre límites
9° semana	.
Sesión 1	Límites laterales. Teorema de compresión
Sesión 2	Límites al infinito, propiedades. Asíntotas verticales.
Sesión 3	Límites infinitos, propiedades. Asíntotas horizontales.
10° semana	.
Sesión 1	Continuidad. Propiedades.
Sesión 2	Pendiente de la tangente a una curva.
Sesión 3	Razón de cambio y velocidad.
11° semana	.
Sesión 1	La derivada como función. Derivadas de funciones conocidas.
Sesión 2	Derivadas de orden superior. Reglas elementales de la derivación, Regla de la cadena.
Sesión 3	Derivación implicita.
12° semana	.
Sesión 1	Aplicaciones: Máximos y mínimos, dibujo de gráficas.
Sesión 2	Problemas de optimización.
Sesión 3	Diferenciales.

Parcial 3

Semana / sesión	Temas /subtemas
13° semana	**Funciones Trigonométricas y sus inversas**
Sesión 1	Funciones trigonométricas. Gráficas, identidades trigonométricas
Sesión 2	Límites, continuidad
Sesión 3	Derivadas, aplicaciones
14° semana	.
Sesión 1	Límites, Continuidad.
Sesión 2	Derivadas
Sesión 3	Aplicaciones
15° semana	**Funciones Exponenciales**
Sesión 1	Funciones exponenciales, Gráficas
Sesión 2	Límites. Continuidad.
Sesión 3	Derivadas. Aplicaciones
16° semana	**Funciones logarítmicas**
Sesión 1	Funciones logarítmicas. Gráficas.
Sesión 2	Límites. Continuidad.
Sesión 3	Derivadas. Aplicaciones
17° semana	**Más Aplicaciones**
Sesión 1	Formas indeterminadas y regla de L'Hospital
Sesión 2	Ceros de una función, Método de Newton.
Sesión 3	Más aplicaciones

Parte I

Preliminares y Funciones Polinomiales

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Subconjuntos de los reales

Definición 1.1.1 (Números naturales) *El conjunto de los números naturales son los números que utilizamos para contar. Se denota por* $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

Definición 1.1.2 (Números Enteros) *El conjunto de los números enteros esta compuesto por todo el conjunto de los naturales añadiendo además el cero, y todo el conjunto de los naturales con signo negativo. Se denota por* $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Definición 1.1.3 (Números Racionales) *El conjunto de los números racionales esta formado por todos los números que se pueden escribir como el cociente de dos enteros, y se denota por* $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$$

Todos los números enteros pertenecen tambien al conjunto de los números racionales ya que todo $z \in \mathbb{Z}$ puede escribirse de la forma

$$\frac{z}{1} = z$$

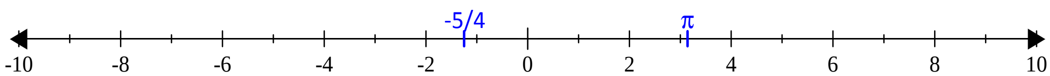
Definición 1.1.4 (Números Irracionales) *El conjunto de los números irracionales esta formado por todos aquellos números que no son enteros y que no se pueden escribir como el cociente de dos enteros, se denotan por* $\mathbb{Q}'$

Algunos ejemplos de números irracionales son: $\pi, \sqrt{2}$

Definición 1.1.5 (Números Reales) *El conjunto de los números reales, es el conjunto que contiene a todos los números racionales y a todos los números irracionales y se denota por*

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

Gráficamente representamos el conjunto de los números reales con la **recta real**



El conjunto de los números reales tiene la propiedad de Densidad, es decir, Entre cualesquiera dos números reales diferentes a y b, no importa qué tan cercanos se encuentren, existe otro número real.

1.2. Propiedades de campo de los Números Reales

Definición 1.2.1 (Propiedades de Campo de los números reales) .
Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

I) $a + b \in \mathbb{R}$ *Cerradura bajo la suma*

II) $a + b = b + a$ *Propiedad conmutativa de la suma*

III) $(a + b) + c = a + (b + c)$ *Propiedad asociativa de la suma*

IV) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $a + 0 = a$ *Neutro Aditivo*

V) $\exists\ (-a) \in \mathbb{R}$ *tal que* $a + (-a) = a - a = 0$ *Inverso Aditivo*

VI) $a \cdot b \in \mathbb{R}$ *Cerradura bajo el producto*

VII) $a \cdot b = b \cdot a$ *Propiedad conmutativa del producto*

VIII) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *Propiedad asociativa del producto*

IX) $\exists 1 \in \mathbb{R}$ *tal que* $a \cdot 1 = a$ *Neutro Multiplicativo*

X) *Si* $a \neq 0,\ \ \exists\ \dfrac{1}{a} \in \mathbb{R}$ *tal que* $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$ *Inverso Multiplicativo*

XI) $a\,(b + c) = ab + ac$ *Propiedad distributiva*

1.3. Propiedades de Orden de los números reales

Los números reales distintos de cero se dividen en dos conjuntos disjuntos, los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$) y los números reales negativos ($\mathbb{R}^-$). Escribiendo en notación de conjuntos tenemos:

Reales negativos: $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Reales positivos: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Este hecho nos permite intruducir la relación de orden $<$ (se lee "menor que") por medio de:

Dados dos números reales a y b. Se dice que a es menor que b y se denota $a < b$, si $b - a$ es positivo

$$a < b \qquad \iff \qquad b - a > 0$$

Si a es menor que b, también se dice que b es mayor que a y se escribe $b > a$.

El símbolo $a \leq b$ significa que a es menor o igual que b.

Si $a < b$, entonces a se representa en la recta real a la izquierda de b

Definición 1.3.1 (Propiedades de Orden) .

I) **Tricotomía**. *Para dos números reales, x, y se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones*

$$x < y \qquad o \qquad x = y \qquad o \qquad x > y$$

II) *Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces,* $a + b \in \mathbb{R}^+$

III) *Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces,* $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$

1.4. Desigualdades e intervalos

Definición 1.4.1 (Propiedades de las desigualdades) .
Sean a, b, c números reales

I) *Si $a < b$, entonces* $a + c < b + c$

II) *Si $a < b$ y $b < c$, o bien si $a < b < c$, entonces* $a < c$

III) *Si $a < b$ y $c < d$, entonces* $a + c < b + d$

IV) *Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces* $ab > 0$

V) *Si $a \neq 0$, entonces* $a^2 > 0$

VI) *Si $a < b$ y $p > 0$, entonces* $ap < bp$

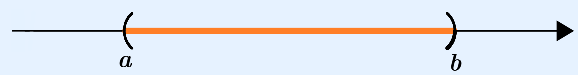
VII) *Si $a < b$ y $n < 0$, entonces* $an > bn$

En las desigualdades podemos realizar las mismas transformaciones que se hacen en las igualdades, la diferencia es que al multiplicar o dividir, ambos miembros, por un número negativo hay que invertir el sentido de la desigualdad.

Cuando resolvemos ecuaciones, encontramos como resultados números reales. Para resolver desigualdades o inecuaciones el resultado es un intervalo, es decir la solución a una desigualdad es el conjunto de números reales que la satisfacen.

Definición 1.4.2 (Intervalo abierto) *Para dos números reales a, b si $a < b$, al conjunto de todos los números reales que hay entre a y b, se le llama intervalo abierto y se denota por (a, b).*

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



los números a, b se llaman extremos del intervalo. En un intervalo abierto los extremos no están incluidos. La representación gráfica de un intervalo, consiste en un segmento de recta donde el parentesis indica que los extremos no están incluidos.

Definición 1.4.3 (Intervalo Cerrado) *Para dos números reales a, b donde $a \leq b$, Se llama intervalo cerrado de extremos a y b, al conjunto de puntos comprendidos entre a y b, incluidos los extemos. Se denota por $[a, b]$.*

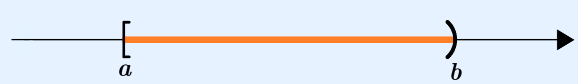
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

La representación gráfica de un intervalo cerrado, consiste en un segmento de recta donde el corchete indica que los extremos si están incluidos.

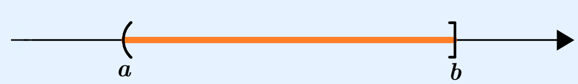
Podemos tener intervalos en los que los que solo se incluye uno de los extremos, o bien intervalos que incluyen todos los números mayores o menores que otro.

Definición 1.4.4 (Intervalos Semiabiertos)

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

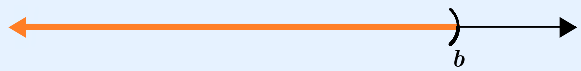


$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

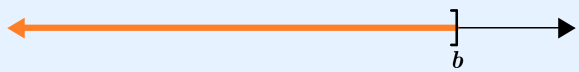


Definición 1.4.5 (Intervalos Infinitos)

$(\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

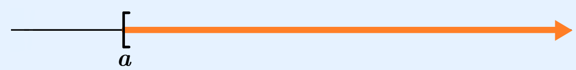


$(\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$



$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$



También podemos representar al conjunto de los números reales como un intervalo

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

1.4.1. Solución de desigualdades

Ahora podemos aplicar los conceptos vistos en la solución de desigualdades. Recordemos que:

1. Podemos sumar el mismo número en ambos lados de una desigualdad.
2. Podemos multiplicar ambos lados de la desigualdad por un número positivo.
3. Podemos multiplicar ambos lados de la desigualdad por un número negativo, pero debemos invertir el sentido de la desigualdad.

Ejemplo 1.4.1 *Encuentre la solución de las siguientes desigualdades y exprese la solución en terminos de intervalos*

a) $4x + 5 > 6x - 3$

b) $-1 < \dfrac{3 - 7x}{4} \leq 6$

c) $4x \geq -x + 5 \geq 3x - 4$

d) $x^2 - 5x - 6 > 0$

Solución.

a) Para resolver la desigualdad, haremos las operaciones en ambos lados de la desigualdad

$$\begin{array}{rcll}
4x+5 & > & 2x-3 & \\
4x+5-5 & > & 2x-3-5 & \text{sumamos } -5 \\
4x & > & 2x-8 & \\
4x-2x & > & 2x-8-2x & \text{sumamos } -2x \\
2x & > & -8 & \\
\dfrac{2x}{2} & > & \dfrac{-8}{2} & \text{multiplicamos por } \dfrac{1}{2} \\
x & > & -4 & \text{simplificando.}
\end{array}$$

La solución es $x \in (-4,\infty)$ o bien $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$,

Graficamente:

b) En este caso tenemos dos desigualdades, resolveremos haciendo las mismas operaciones en ambos lados de las desigualdades

$$\begin{array}{rcll}
-1 & < & \dfrac{3-7x}{4} \leq 6 & \\
(-1)\,4 & < & \left(\dfrac{3-7x}{4}\right)4 \leq (6)\,4 & \text{mutiplicamos por 4} \\
-4 & < & 3-7x \leq 24 & \\
-4-3 & < & 3-7x-3 \leq 24-3 & \text{sumamos } -3 \\
-1 & < & -7x \leq 21 & \\
\dfrac{-1}{-7} & > & \dfrac{-7x}{-7} \geq \dfrac{21}{-7} & \text{multiplicamos por } \tfrac{1}{-7}\text{, e invertimos el sentido de las desigualdades} \\
\dfrac{1}{7} & > & x \geq -3 & \text{simplificando} \\
-3 & \leq & x < \dfrac{1}{7} & \text{cambiamos el orden de las desigualdades}
\end{array}$$

podemos escribir el resultado como:

$\left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < \dfrac{1}{7}\right\}$, La gráfica es:

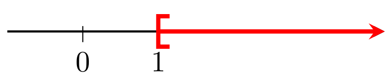
c) En este caso resolveremos primero la desigualdad del lado izquierdo y luego la del lado derecho, e intersectaremos los conjuntos solución

$4x \geq -x + 5 \geq 3x - 4$

La desigulddad del lado izquierdo

$$\begin{aligned} 4x &\geq -x+5 & \\ 5x &\geq 5 & \text{sumamos } x \\ x &\geq 1 & \text{multiplicamos por } \frac{1}{5} \end{aligned}$$

gráficamos la solución

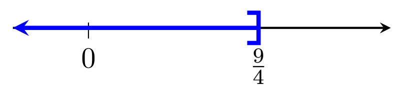


$x \in [1, \infty)$

La desigualdad del lado derecho

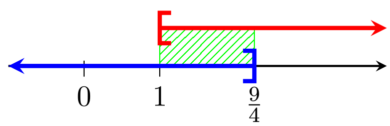
$$\begin{aligned} -x+5 &\geq 3x-4 & \\ -4x+5 &\geq -4 & \text{sumamos } -3x \\ -4x &\geq -9 & \text{sumamos } -5 \\ x &\leq \frac{9}{4} & \text{multiplicamos por } -\tfrac{1}{4} \text{ e invertimos el sentido de la desigualdad} \end{aligned}$$

gráficamos la solución



$x \in \left(-\infty, \dfrac{9}{4}\right]$

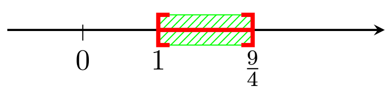
Para encontrar la solución final, intersectamos los dos intervalos obtenidos



$x \in \left(-\infty, \frac{9}{4}\right] \cap [1, \infty)$

.

El resultado de la desigualdad es:



$x \in \left[1, \frac{9}{4}\right]$ o bien $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq \frac{9}{4}\right\}$

.

d) $x^2 - 5x - 6 > 0$

En este caso primero factorizamos la ecuación sin modificar la desigualdad.

$x^2 - 5x - 6 > 0$, Solution is: $(-\infty, -1) \cup (6, \infty)$

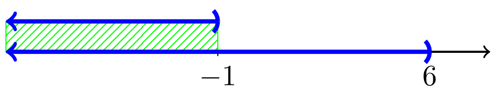
$(x+1)(x-6) > 0$

Ahora sabemos que para que el producto de dos números sea positivo ambos deben ser positivos, o bien, ambos negativos, por lo que tenemos dos opciones

Opción 1:

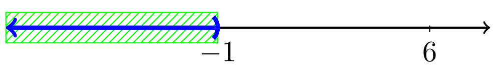
$$\begin{aligned} (x+1) &< 0 \quad y \quad (x-6) < 0 \\ x &< -1 \quad y \quad x < 6 \end{aligned}$$

Graficamente:



$x \in [(-\infty, 1) \cap (-\infty, 6)]$

Haciendo la intersección obtenemos:

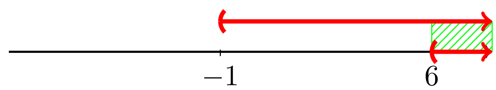


$x \in (-\infty, 1)$

Opción 2:

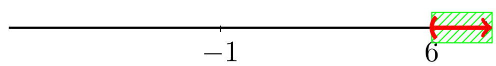
$$\begin{aligned} (x+1) &> 0 \quad y \quad (x-6) > 0 \\ x &> 1 \quad y \quad x > 6 \end{aligned}$$

Graficamente:



$x \in [(1, \infty) \cap (6, \infty)]$

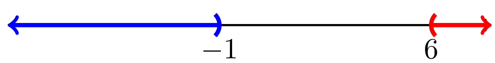
Haciendo la intersección obtenemos:



$x \in (6, \infty)$

El resultado de la desigualdad es la unión de las dos soluciones es decir

$x \in [(-\infty, 1) \cup (6, \infty)]$



■

1.5. Valor absoluto

Definición 1.5.1 (Valor Absoluto) .
Para todo número a definimos el valor absoluto $|a|$ como:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a \leq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.5.1 $|3| = 3$
$|-3| = -(-3) = 3$

Definición 1.5.2 (Propiedades de valor Absoluto) .
Para todos los números $a, b, c \in \mathbb{R}$, se tiene

1. $|a| < b$ *si y sólo si* $-b < a < b$
2. $|a| > b$ *si y sólo si* $a > b$ *o bien* $a < -b$
3. $|a| = b$ *si y sólo si* $a = b$ *o bien* $a = -b$
4. $|ab| = |a|\,|b|$
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ *si* $b \neq 0$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$
7. $|a - b| \geq ||a| - |b||$
8. $|a| = \sqrt{a^2}$
9. $(|a + b|)^2 = (a + b)^2$
10. $|x| < |y|$ *si y sólo si* $x^2 < y^2$
11. $|a| = 0$ *si y sólo si* $a = 0$

1.5.1. Distancia entre dos números

Definición 1.5.3 (Distancia entre dos números) *Si a y b son dos números cualesquiera en la recta real, la distancia entre a y b es*

$$d(a, b) = |b - a|$$

Así $|x-0| = |x|$ representa la distancia entre x y el origen. De manera análoga, $|x-a|$ es la distancia entre x y a.

Además usando las propiedades de valor absoluto podemos probar fácilmente que

$$d(a,b) = |b-a| = |a-b| = d(b,a)$$

1.5.2. Desigualdades y valor absoluto

Usamos las propiedades de valor absoluto para resolver algunas desigualdes

Ejemplo 1.5.2 *Resuelva las siguientes desigualdades y muestre su conjunto solución en la recta real.*

a) $|x+6| < 3$

Solución. Aplicando la propiedad 1 tenemos

$$\begin{aligned} 1 &< x+6<3 \\ -5 &< x<-2 \end{aligned}$$

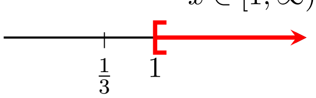
La solución es: $x \in (-5,-2)$, la grafica es: 

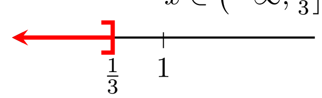
■

b) $|3x-2| \geq 1$

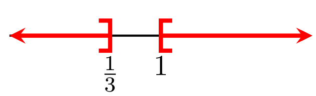
Solución. Aplicando a propiedad 2

$$\begin{aligned} 3x-2 &\geq 1 \\ 3x &\geq 3 \\ x &\geq 1 \\ x &\in [1,\infty) \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 3x-2 &\leq -1 \\ 3x &\leq 1 \\ x &\leq \frac{1}{3} \\ x &\in \left(-\infty,\tfrac{1}{3}\right] \end{aligned}$$





La solución es la unión de los dos intervalos

$x \in \left[\left(-\infty,\frac{1}{3}\right] \cup [1,\infty)\right]$, la grafica es: 

■

c) $\left|\dfrac{2x+3}{5}\right| < 2$

Solución. Aplicando propiedades de valor absoluto

$$\begin{aligned}
\frac{|2x+3|}{|5|} &< 2 && \text{propiedad 5}\\
\frac{|2x+3|}{5} &< 2 && \text{porque } |5|=5\\
|2x+3| &< 2 && \text{multiplicando por } 5\\
-2<2x+3 &< 2 && \text{propiedad } \ 1\\
-5<2x &< -1 &&\\
\frac{-5}{2}<x &< \frac{-1}{2} &&
\end{aligned}$$

La solución es: $x \in \left(\frac{-5}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, La grafica es:

d) $|x+1| < 3\,|x-2|$, Solution is: $\left(\frac{7}{2}, \infty\right) \cup \left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$

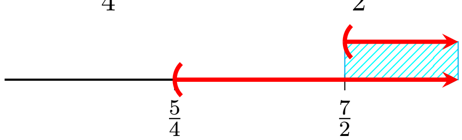
Solución. En este caso sabemos que $2=|2|$ podemos poner el 2 dentro del valor absoluto del y aplicar la propiedad 10

$$\begin{aligned}
|x+1| &< |3|\,|x-2| && \text{porque } \ 2=|2|\\
|x+1| &< |3\,(x-2)| && \text{propiedad } \ 4\\
|x+1| &< |3x-6| &&\\
(x+1)^2 &< (3x-6)^2 && \text{propiedad } \ 10\\
x^2+2x+1 &< 9x^2-36x+36 && \text{desarrollando los cuadrados}\\
-8x^2+38x-35 &< 0 &&\\
8x^2-38x+35 &> 0 && \text{cambiamos el signo}\\
(4x-5)\,(2x-7) &> 0 && \text{factorizando}
\end{aligned}$$

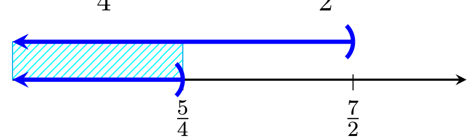
Aplicamos la propiedad 2

$4x-5>0$ y $2x-7>0$ o $4x-5<0$ y $2x-7<0$

$x>\frac{5}{4}$ $\quad x>\frac{7}{2}$ $\qquad\qquad x<\frac{5}{4}$ $\quad x<\frac{7}{2}$

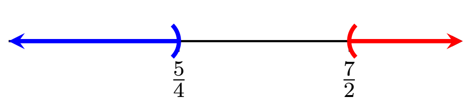


o



Obtenemos la solución uniendo los dos intervalos

$x \in \left[\left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty\right)\right]$,



Ejemplo 1.5.3 *Sea ε un número positivo. Encuentre un número positivo δ tal que*

$$|x-3|<\delta \Longrightarrow |6x-18|<\varepsilon$$

Solución. En este caso debemos considerar que el número que encontramos para δ debe depender de ε.

Iniciamos tomando la desigualdad del lado derecho

$$\begin{array}{rcll}
|6x-18| & < & \varepsilon & \\
|6(x-3)| & < & \varepsilon & \text{factorizamos} \\
|6|\,|x-3| & < & \varepsilon & \text{por la propiedad de valor absoluto } (|ab|=|a|\,|b|) \\
6\,|x-3| & < & \varepsilon & \text{ya que } |6|=6 \\
|x-3| & < & \frac{\varepsilon}{6} & \text{multiplicando por } \frac{1}{6}
\end{array}$$

Elegimos $\delta=\frac{\varepsilon}{6}$

Podemos probar que se cumple la implicación inicial sustituyendo el valor de δ

$$\begin{array}{rcl}
|x-3|<\delta & & \\
|x-3|<\frac{\varepsilon}{6} & \Longrightarrow & 6\,|x-3|<\varepsilon \\
& \Longrightarrow & |6|\,|x-3|<\varepsilon \\
& \Longrightarrow & |6(x-3)|<\varepsilon \\
& \Longrightarrow & |6x-18|<\varepsilon
\end{array}$$

Observación 1.5.1 *Cualquier número positivo δ más pequeño que $\frac{\varepsilon}{6}$ es aceptable. Por ejemplo $\delta=\frac{\varepsilon}{7}$ o $\delta=\frac{\varepsilon}{2\pi}$ son opciones correctas.*

■

Ejemplo 1.5.4 *Un vaso de precipitados de $\frac{1}{2}$ litro $(500$ centímetros cúbicos$)$ tiene un radio interno de 4 centímetros. ¿Con qué exactitud debemos medir la altura h del agua en el vaso para asegurar que tenemos $\frac{1}{2}$ litro de agua con un error de menos de $1\,\%$, es es, un error de menos de 5 centímetros cúbicos?*

Solución. El volumen del vaso de agua lo podemos calcular con la fórmula $V=\pi r^2 h$, como $r=4$ entonces el volumen es $V=16\pi h=500$. de aquí $h=\frac{500}{16\pi}$

Ahora si expresamos el error de medición de h como una distancia que a su vez tiene que ser menor a 5 cm debemos probar que $\left|h-\frac{500}{16\pi}\right|<5$

En este caso el error de medición lo podemos expresar como la diferencia del volumen calculado y el volumen real, es decir $|V-500|<5$ o de manera equivalente $\left|\pi r^2 h-500\right|<5$, resolviendo la desigualdad:

$$
\begin{aligned}
16\pi h\,\mathrm{cm}^3-500\,\mathrm{cm}^3 &< 5\,\mathrm{cm}^3 \\
\left|16\pi\left(h-\frac{500}{16\pi}\right)\right| &< 5\,\mathrm{cm}^3 && \text{factorizando} \\
\left|16\pi\,\mathrm{cm}^3\right|\left|\left(h-\frac{500}{16\pi}\right)\right| &< 5\,\mathrm{cm}^3 && \text{propiedad: } |a|\,|b|=|ab| \\
16\pi\,\mathrm{cm}^3\left|\left(h-\frac{500}{16\pi}\right)\right| &< 5\,\mathrm{cm}^3 && \text{ya que } 16\pi \text{ es un número positivo} \\
\left|\left(h-\frac{500}{16\pi}\right)\right| &< \frac{5\,\mathrm{cm}^3}{16\pi\,\mathrm{cm}^3} && \text{multiplicando por } \frac{1}{16\pi} \\
\left|\left(h-\frac{500}{16\pi}\right)\right| &< \frac{5}{16\pi}=0.09947\approx 0.1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la exactitud con que debemos medir h es de aproximadamente 1 milimetro. ■

Ejercicios 1.1

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

En cada problema del 1 al 9 exprese el conjunto solución de la desigualdad dada en notación de intervalos y bosqueje su gráfica.

1. $5x - 3 > 6x - 4$

2. $-3 < 1 - 6x \leq 4$

3. $5 > \dfrac{3 - 9x}{2} > -4$

4. $4x^2 - 5x - 6 < 0$

5. $\dfrac{4}{x^2 + 9} > 0$

6. $\left| \dfrac{4}{x^2 + 9} \right| > 0$

7. $|4x + 5| \leq 10$

8. $\left| \dfrac{2x}{7} - 5 \right| > 7$

9. $2\,|2x - 3| < |x + 10|$

10. Con palabras describa la interpretación gráfica de las desigualdades

a) $0 < |x - 3|$

b) $0 < |x - 3| < 5$

11. Muestre que la implicación indicada es verdadera

$$|x - 2| < 0.3 \Longrightarrow |4x - 8| < 1.2$$

12. Determine δ (dependiente de ε) de modo que la implicación dada sea verdadera.

$$|x + 5| < \delta \Longrightarrow |5x + 25| < \varepsilon$$

13. La fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

proporcional la resistencia total R en un circuito eléctrico debida a tres resistencias, R_1, R_2 y R_3, conectadas en paralelo. Si $10 \leq R_1 \leq 20$, $20 \leq R_2 \leq 30$, y $30 \leq R_3 \leq 40$, determine el rango de valores de R.

14. El número $\frac{1}{2}(a+b)$se le llama promedio, o media aritmética, de a y b. Demuestre que la media aritmética de dos números está entre los dos números; es decir, pruebe que

$$a < b \Longrightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$$

15. Para el circuito eléctrico que se muestra en la figura, la ley de Ohm afirma que $I = \dfrac{V}{R}$.

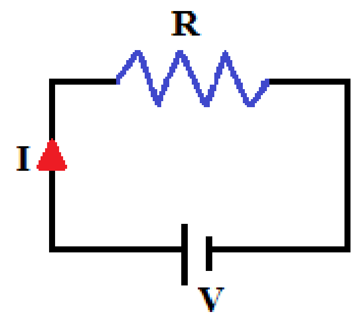
donde:

R es la resistencia (en ohms, Ω),

V es la diferencia de potencial (en volts, V)

I es la corriente (en amperes, A).

Si la tensión es de $110V$, ¿Qué valores de la resistencia producen una corriente que no excede de $10A$?



16. El radio de una esfera mida aproximadamente 10 pulgadas. Determine una tolerancia δ en la medición que asegure un error menor que 0.01 pulgadas cuadradas en el valor calculado del área de la superficie de la esfera.

17. Exprese la siguiente afirmación en palabras, lo mejor que pueda.

$$Para\ toda\quad \varepsilon > 0,\quad existe\ \ una\quad \delta > 0\quad tal\ \ que\quad |y-L| < \varepsilon\quad cuando\quad 0 < |x-a| < \delta$$

No use los simbolos $>, <$ ni $||$. Los simbolos ε y δ son letras griegas que representan números reales.

Evaluación 1

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Exprese el conjunto solución de las desigualdades dadas en notación de intervalos y bosqueje su gráfica

a) $3x - 5 > 4x - 6$

b) $x^2 + 2x - 12 < 0$

2. Con palabras describa la interpretación gráfica de las desigualdades

a) $0 < |x - 5|$

b) $0 < |x - 5| < 3$

3. Resuelve la desigualdad $2 < |x - 3| < 5$ y traza, sobre la recta numérica, el conjunto solución

4. Determine δ (dependiente de ε) de modo que la implicación $|x - 2| < \delta \Longrightarrow |4x - 8| < \varepsilon$ sea verdadera.

5. El peso w del café en latas que llena una empresa procesadora de alimentos satisface la expresión

$$\left| \frac{w - 12}{0.05} \right| \leq 1$$

donde w se mide en onzas. Determine el intervalo dentro del cual está w.

6. En un torno, usted desea fabricar un disco (cilindro circular recto delgado) con circunferencia de 10 pulgadas. Esto se realiza midiendo de manera continua el diámetro conforme se hace el disco más pequeño. ¿Qué tan exacto debe medir el diámetro si puede tolerar un error de, a lo sumo, 0.02 pulgadas en la circunferencia?

Capítulo 2

Funciones Polinomiales

2.1. Definición, Gráfica, Dominio e imagen.

2.1.1. Producto cartesiano.

Definición 2.1.1 (Producto Cartesiano) *Sean A y B dos conjuntos, El Producto Cartesiano de A y B que determinamos por $A \times B$ es: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$ es el conjunto de parejas ordenadas $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \quad y \quad b = d$*

Así $(a,b) \neq (b,a)$ y $\phi \times A = \phi = A \times \phi$

Ejemplo 2.1.1 *Sea $A = \{3, 6, -2\}$ y $B = \{1, 2\}$, encuentre $A \times B$ y dibuje su gráfica.*

Solución. $A{\times}B = \{(3,1), (3,2), (6,1), (6,2), (-2,1), (-2,2)\}$
La gráfica de $A \times B$ es un conjunto de puntos en el plano (figura 2.1)

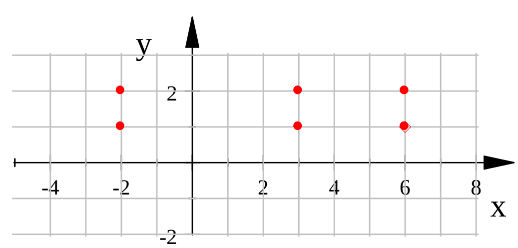


Fig. 2.1.

. ■

Definición 2.1.2 (Relación) *Una **relación** entre dos conjuntos A y B es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$. Si A y B son subconjuntos de los reales entonces podemos localizar en el plano a los elementos de la relación. A la colección de puntos así obtenidos se le llama gráfica de la relación.*

Sea $R \subset A \times B$. El conjunto $D \subset A$ formado por las primeras coordenadas de R se llama **dominio** de la relación y el subconjunto denotado por $R(D) \subset B$ formado por las segundas coordenadas de R se llama **imagen** o **rango** de R.

Ejemplo 2.1.2 *Encuentra el dominio, la imagen o rango y la gráfica de la relación dada*

$$R = \{(-7,6), (-1,-2), (-1,3), (0,3), (5,6), (6,5), (7,-4), (8,-2)\}$$

Solución.

La gráfica de R es un conjunto de puntos en el plano (figura 2.1.2)
$Dom = \{-7,-1,0,5,6,7,8\}$
$R(D) = \{-2,-4,3,5,6,\}$

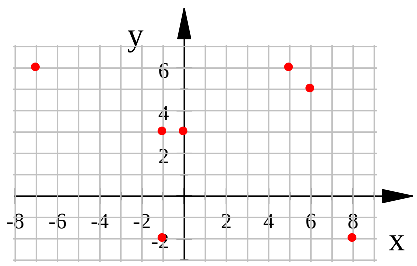


Fig. 2.1.

. ■

Ejemplo 2.1.3 *Encuentra el dominio, la imagen o rango y la gráfica de la relación dada*

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < -2 \;\; y \;\;\; y > 1\}$$

Solución. *La gráfica de R es la intersección de los semiplanos $x < -2$ y $y > 1$ (figura 2.2)*

Si un punto (x,y) está en el semiplano, el dominio son todos los valores que puede tomar x . $Dom(R) = (-\infty, -2)$
El Rango son todos los valores que puede tomar y. $R(D) = (1, \infty)$

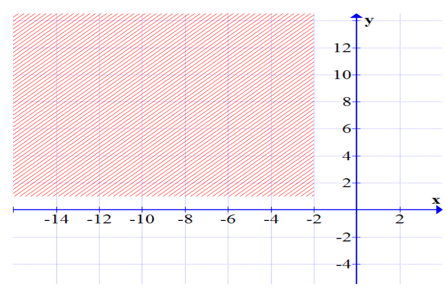


Fig. 2.2.

. ■

Ejemplo 2.1.4 *Sea* $R = \left\{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\; y = x^2\right\} = \left\{\left(x, x^2\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

Solución.

La gráfica de R es una parábola con vértice en $(0,0)$. (Figura 2.3)
El dominio son todos los valores que puede tomar x en la ecuación $y = x^2$
$Dom : \mathbb{R}$
El Rango son todos los valores de y que se obtienen al darle valores a x en la ecuación $y = x^2$
$R(D) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

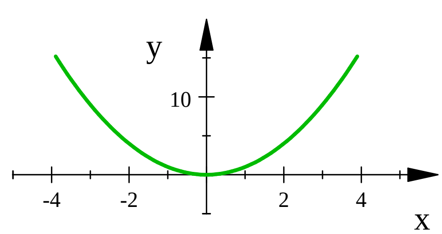


Fig. 2.3.

. ■

2.1.2. Funciones

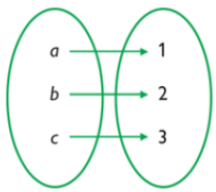
Definición 2.1.3 (Función) *Una **función** de un conjunto A a un conjunto B es una relación con dominio A e imagen contenida en B y su regla de correspondencia f asocia a cada elemento x de A un único elemento $f(x)$ en B. Se escribe $f : A \to B$. Al conjunto B se le llama contradominio o codominio de f*

Ejemplo 2.1.5 *Sea* $R = \{(-9,6), (-5,4), (-2,3), (2,4), (6,3)\}$

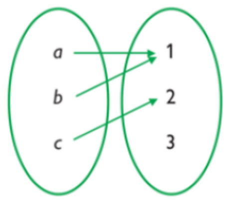
El dominio es $D = \{-9,-5,-2,2,6\}$, *y el rango* $R(D) = \{3,4,6\}$.

Podemos representar una función con:

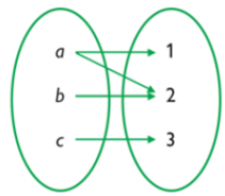
1. **Un diagrama:**



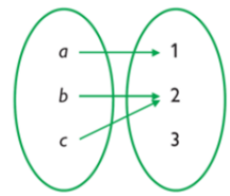
Si es función



Si es función



No es función



Si es función

2. **Una tabla**.

x	$f(x)$
-9	6
-5	4
2	4
6	3

Al representar una relación en una tabla, para que sea función no debe haber repeticiones en la columna donde van los valores de x

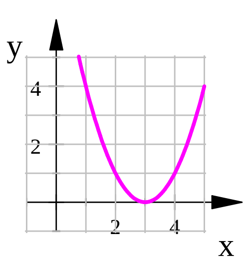
3. Una regla de correspondencia **(fórmula o ecuación).:**

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

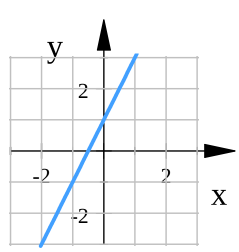
b) $y = 2x + 1$

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

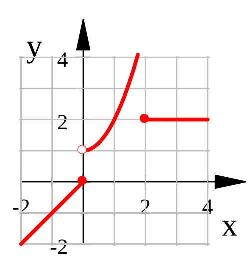
4. **Una gráfica**:



a)



b)



c)

Sea $f : A \to B$. A se llama el **dominio** de la función y se denota por $Dom\ f$; el contradominio o **codominio** es B y $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset B$ es el **rango** o **imagen** denotado por $f(A) = \operatorname{Im} f$

A x se le llama **variable independiente** o incógnita y $f(x)$ es la **variable dependiente**.

La gráfica de $f(x)$ es $f = \{x, f(x) \in A \times B \mid x \in A\}$

Ejemplo 2.1.6

Consideremos la la gráfica de la figura 2.4

a) Encuentra $f(-6)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(3)$ *y* $f(5)$

b) ¿Cúal es el dominio y rango de f*?*

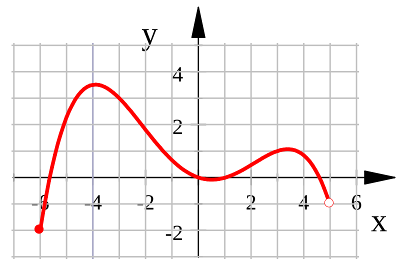


Fig. 2.4.

Solución.

a) En la gráfica podemos ver que$f(-6) = -2 f(-3) = 3 f(0) = 0 f(3) = 1$ $f(5)$ *no está definida en la grafica de* f

b) El dominio y rango de la función son:$Dom\ f = [-6, 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x < 5\} R(f) = \operatorname{Im}\ f = [-2, 3.5]$

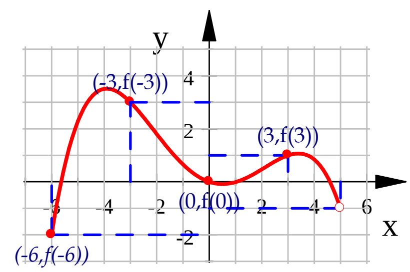


Fig. 2.5.

. ■

2.1.3. Función polinomial

Definición 2.1.4 (Función polinomial) *Una función se le llama polinomial (o polinomio) si se puede escribir de la forma:*

$$y\left(x\right)=a_{n}x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+..+a_{2}x^{2}a_{1}x+a_{0}$$

donde n es el grado de la función, n es un entero no negativo y todos los números a_0, $a_1, ..., a_n$ son números reales a los que se les llama coeficientes del polinomio.
Las funciones polinomiales están definidas para todos los reales, es decir el dominio de una función polinomial es $\mathbb{R}$.

En las figuras 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 se muestran algunos ejemplos de funciones polinomiales y sus gráficas.

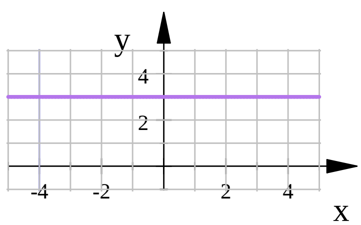


Fig. 2.6. $f\left(x\right)=3$

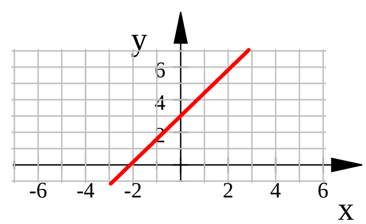


Fig. 2.7. $g\left(x\right)=\sqrt{2}x+3$

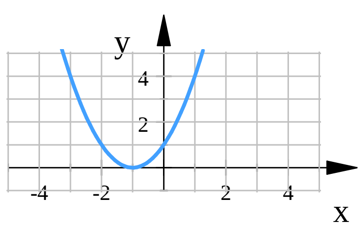


Fig. 2.8. $r\left(x\right)=x^{2}+2x+1$

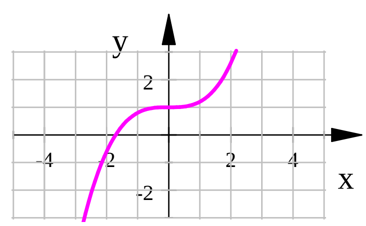


Fig. 2.9. $h\left(x\right)=\dfrac{1}{5}x^{3}+1$

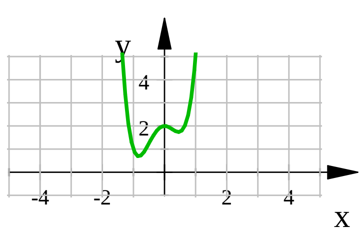


Fig. 2.10. $F\left(x\right)=4x^{4}+2x^{3}-3x^{2}+2$

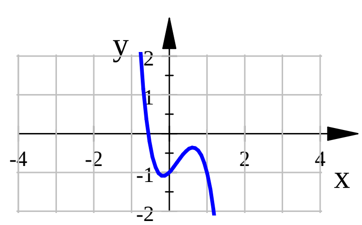


Fig. 2.11. $G\left(x\right)=-x^{5}+2x^{4}-4x^{3}+2x^{2}+x-1$

2.1.4. Gráfica de funciones polinomiales

Función Constante. Una Función constante es una función polinomial de grado cero

$$f(x) = a_0$$

su gráfica es una recta horizontal que cruza al eje y en a_0

Ejemplo 2.1.7 *Las funciones que se muestran en las figuras 2.12, 2.13 y 2.14 son funciones constantes*

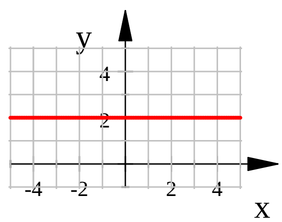


Fig. 2.12. $f(x) = 5$

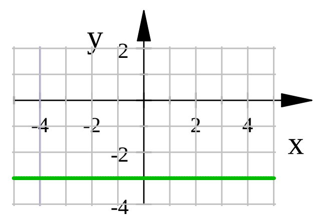


Fig. 2.13. $p(x) = -3$

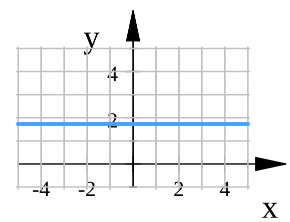


Fig. 2.14. $h(x) = \sqrt{3}$

Función lineal. Una función polinomial de grado uno tiene la forma

$$f(x) = a_1 x + a_0 \qquad \text{o bien} \qquad y = mx + b$$

tambien se le llama función lineal porque es la ecuación de una recta.

Ejemplo 2.1.8 *Las funciones que se muestran en las figuras 2.15, 2.16, 2.17 son funciones lineales*

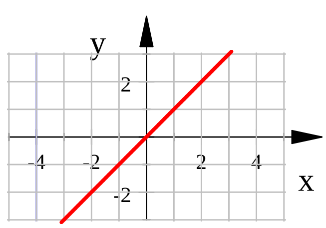


Fig. 2.15. $y = x$

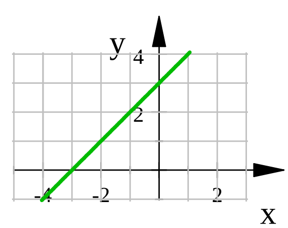


Fig. 2.16. $y = x + 3$

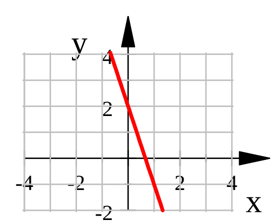
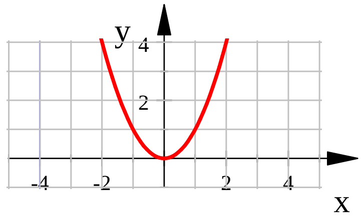


Fig. 2.17. $y = 2 - 3x$

Función cuadrática. Una función cuadrática es un polinomio de grado 2

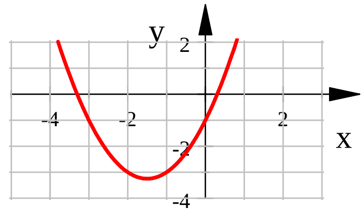
$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Ejemplo 2.1.9 *Funciones polinomiales de grado dos*



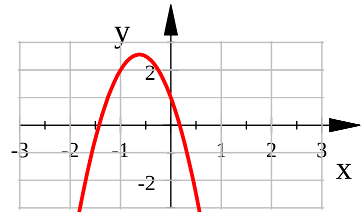
$y = x^2$

Fig. 2.18.



$y = x^2 + 3x - 1$

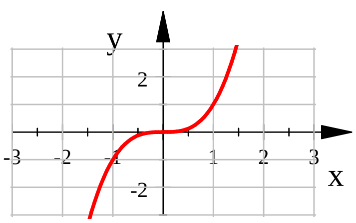
Fig. 2.19.



$f(x) = -4x^2 - 5x + 1$

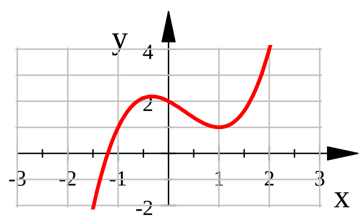
Fig. 2.20.

Ejemplo 2.1.10 *Funciones son polinomiales de grado tres*



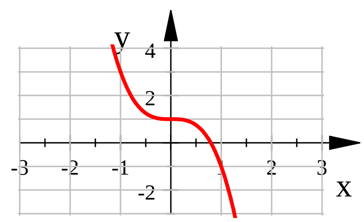
$y = x^3$

Fig. 2.21.



$y = x^3 - x^2 - x + 2$

Fig. 2.22.

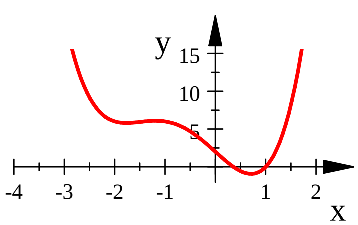


$f(x) = -2x^3 + 1$

Fig. 2.23.

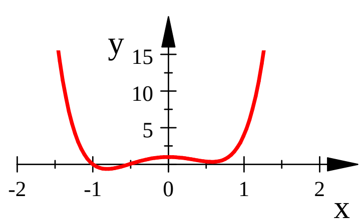
La gráfica de una función polinomial de la forma $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar, como ya vimos si $n = 1$ la gráfica de $f(x)$ es la gráfica de una recta, si n es par la gráfica de $f(x) = x^n$ es semejante a la de la parábola $y = x^2$, si n es impar la gráfica de $f(x) = x^n$ es semejante a la de la función $y = x^3$

Ejemplo 2.1.11 *Funciones polinomiales de grado par*



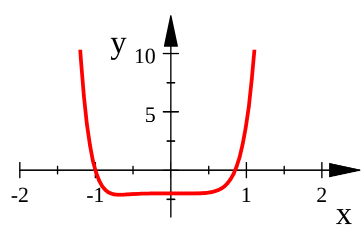
$f(x) = x^4 + 3x^3 - 6x + 2$

Fig. 2.24.



$f(x) =$
$2x^6 + x^5 + 3x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$

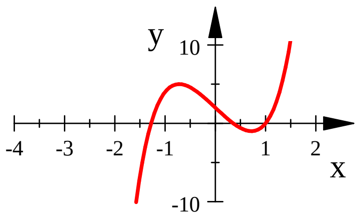
Fig. 2.25.



$f(x) = 4x^8 + 2x^5 - 2$

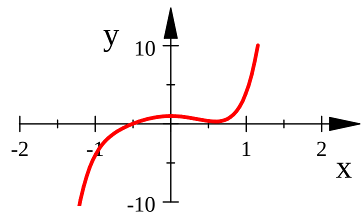
Fig. 2.26.

Ejemplo 2.1.12 *Funciones polinomiales de grado impar*



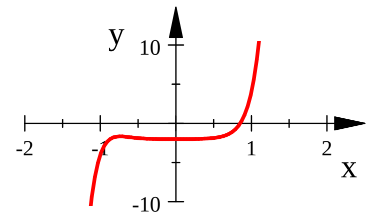
$f(x) = x^5 + 3x^3 - 6x + 2$

Fig. 2.27.



$y = 2x^7 + x^5 + 3x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$

Fig. 2.28.



$f(x) = 4x^9 + 2x^4 - 2$

Fig. 2.29.

Ejemplo 2.1.13 *Encuentra una gráfica, el dominio y el rango de las funciones*

(a) $f(x) = 2x - 1$ *(b)* $h(x) = x^2$

Solución.

$a)$ $(x) = 2x - 1$ *es la gráfica de una recta que pasa por* $(0, -1)$ *y con pendiente* 2 *(figura 2.30)*

Dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = \mathbb{R}$

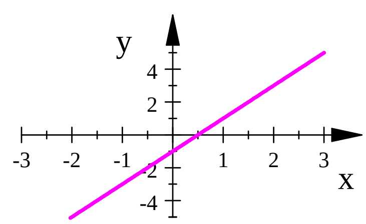


Fig. 2.30.

$b)$ $h(x) = x^2$ *es la gráfica de una parábola con vértice en* $(0, 0)$ *(figura 2.31)*

Dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

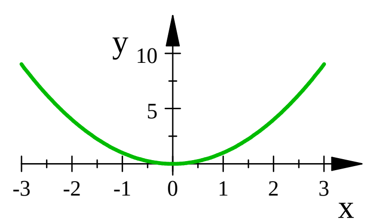


Fig. 2.31.

. ■

Prueba de la recta vertical. Una curva en el plano es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical se intersecta con la curva más de una vez.

Si cada recta vertical $x = a$ interseca una curva sólo una vez, en (a, b), entonces exactamente un valor de la función está definido por $f(a) = b$.Pero si una recta $x = a$ se intersecta con la curva dos veces, en (a, b) y (a, c), entonces la curva no puede representar una función, porque una función no puede asignar dos valores diferentes a a.

2.1.5. Simetría de Gráficas

Definición 2.1.5 (Función Par) *Si una función f satisface*

$$f(-x) = f(x)$$

para todo x en el dominio de f, entonces f se denomina función par.

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Ejemplo 2.1.14 $f(x) = x^2$ *(figura 2.32). es una función par ya que:*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

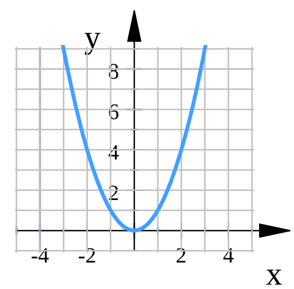


Fig. 2.32. Función par: $f(x) = x^2$

Definición 2.1.6 (Función impar) *Si una función f satisface*

$$f(-x) = -f(x)$$

paratodo x en el dominio de f, entonces f se denomina función impar.

La gráfica de una función impar es simetrica respecto al origen.

Si ya tenemos la gráfica para $x \geq 0$, podemos obtener la gráfica entera al hacerla girar $180°$ alrededor del origen

.

Ejemplo 2.1.15 $f(x) = x^3$ *es una función impar (figura 2.33) ya que:*

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \\ &= -x^3 \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

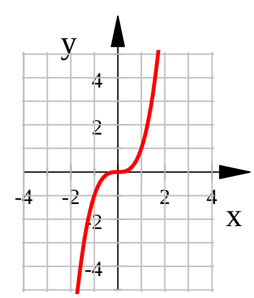


Fig. 2.33. Función impar: $f(x) = x^3$

Ejemplo 2.1.16 *Determine si cada una de las funciones siguientes es par, impar o ninguna de las dos cosas*

(a) $f(x) = x^5 + x$ *(b)* $g(x) = 2 - x^2$ *(c)* $h(x) = 3x - 2x^2$

Solución.

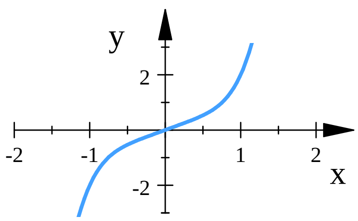


Fig. 2.34. $f(x) = x^5 + x$

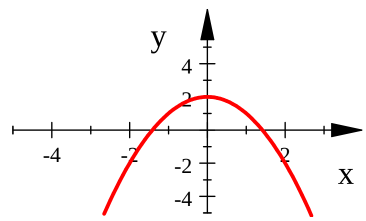


Fig. 2.35. $g(x) = 2 - x^2$

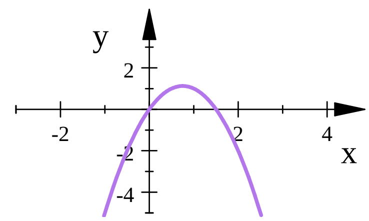


Fig. 2.36. $h(x) = 3x - 2x^2$

$a)$ *(figura 2.34)*

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^5 + (-x) \\
&= -x^5 - x \\
&= -\left(x^5 + x\right) \\
&= -f(x)
\end{aligned}
$$

$f(x)$ *es una función impar*

$b)$ *(figura 2.35)*

$$
\begin{aligned}
g(-x) &= 2 - (-x)^2 \\
&= 2 - x^2 \\
&= g(x)
\end{aligned}
$$

$g(x)$ *es una función par*

$c)$ *(figura 2.36)*

$$
\begin{aligned}
h(-x) &= 3(-x) - 2(-x)^2 \\
&= -3x - 2x^2
\end{aligned}
$$

$h(x)$ *no es función par ni impar.*

. ■

2.1.6. Funciónes Crecientes y Decrecientes

Definición 2.1.7 (Función Creciente y Decreciente) *Se dice que una función f es creciente sobre un intervalo I, si*

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } \ x_1 < x_2 \ en \ I$$

Se dice que una función f es decreciente sobre un intervalo I, si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } \ x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Ejemplo 2.1.17 *(a) La función $f(x) = x^3 + 2$ es creciente $\forall\ x \in \mathbb{R}$*

(b) La función $f(x) = -x^5$ es decreciente $\forall x \in \mathbb{R}$

(c) La función $f(x) = x^2$ es decreciente $\forall x \in (-\infty, 0)$ y creciente $\forall x \in (0, \infty)$

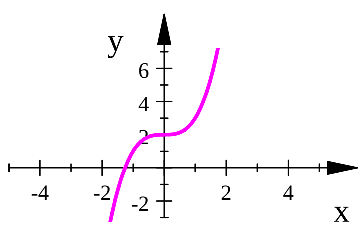


Fig. 2.37. $f(x) = x^3 + 2$

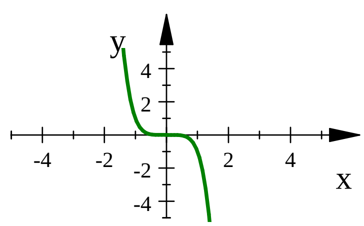


Fig. 2.38.

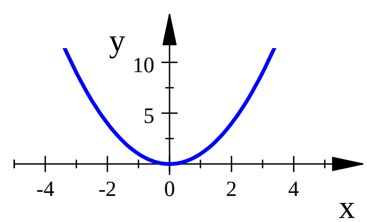


Fig. 2.39.

2.1.7. Transformación de funciones

La gráfica de una función nos ayuda a determinar fácilmente algunas caracteristicas de la función, como por ejemplo: dominio, rango, si es par o impar, creciente o decreciente, etc. En el caso de una función polinomica en la gráfica podemos ver cuales son las raices del polinomio, es decir, los valores de x donde y se hace cero.

Aunque la tabulación nos ayuda a gráficar cualquier función, no siempre es el método más óptimo.

Para poder graficar algunas funciones basta con saber el comportamiento de la misma y se puede hacer un bosquejo de la gráfica, además podemos desplazarla, estirarla o comprimirla para obtener otras funciones nuevas.

Desplazamientos verticales

Definición 2.1.8 (Desplazamientos Verticales) *Supóngase que se tiene una constante $c > 0$, y una función f. Entonces:*

1. $y = f(x) + c$ *es la gráfica de* $f(x)$ *desplazada* c *unidades hacia arriba*

2. $y = f(x) - c$ *es la gráfica de* $f(x)$ *desplazada* c *unidades hacia abajo.*

Ejemplo 2.1.18 *Si se tiene la función* $f(x) = x^3 - x$, *graficar:*

(a) $f(x)$ *(b)* $f(x) + 1$ *(c)* $f(x) - 1$

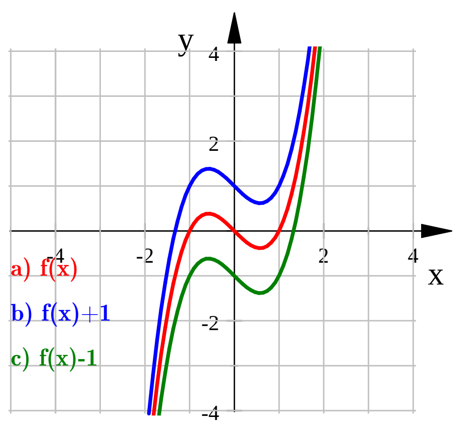
Solución. Graficamos $f(x) = x^3 - x$, La grafica de

$$f(x) + 1 = \left(x^3 - x\right) + 1$$

es la gráfica de $f(x)$ desplazada una unidad hacia arriba y la grafica de

$$f(x) - 1 = \left(x^3 - x\right) - 1$$

es la gráfica de $f(x)$ desplazada una unidad hacia abajo



Ejemplo 2.1.18: *Desplazamientos verticales*

■

Desplazamientos Horizontales

Definición 2.1.9 (Desplazamientos Horizontales) *Sea $c > 0$ constante, y f función . Entonces:*

1. $y = f(x - c)$ *es la gráfica de* $f(x)$ *desplazada* c *unidades hacia la derecha*

2. $y = f(x + c)$ *es la gráfica de* $f(x)$ *desplazada* c *unidades hacia la izquierda*

Ejemplo 2.1.19 *Si* $f(x) = x^3 - x$, *graficar:*

(a) $f(x)$ *(b)* $f(x+2)$ *(c)* $f(x-2)$

Solución. Graficamos $f(x) = x^3 - x$,

La gráfica de

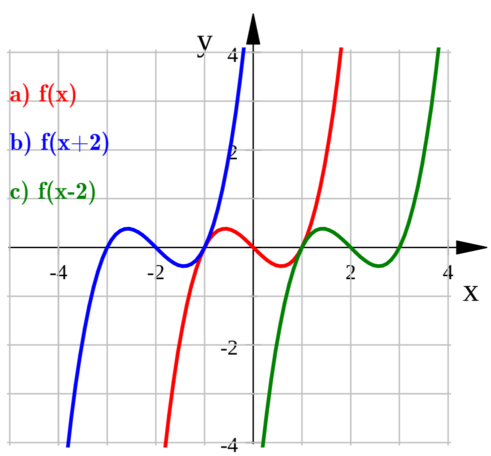
$$\begin{aligned} f(x+2) &= (x+2)^3 - (x+2) \\ &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \end{aligned}$$

es la gráfica de $f(x)$ desplazada dos unidades hacia la izquierda

La gráfica de

$$\begin{aligned} f(x-2) &= (x-2)^3 - (x-2) \\ &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \end{aligned}$$

es la gráfica de $f(x)$ desplazada dos unidades hacia la derecha



Ejemplo 2.1.19: *Desplazamientos horizontales*

■

Estiramiento vertical

Definición 2.1.10 (Estiramientos Verticales) *Sea $f(x)$ función y $c > 1$ constante. Entonces:*

1. $y = cf(x)$ *la gráfica de* $f(x)$ *se estira* c *veces en dirección vertical*
2. $y = (1/c)\, f(x)$ *la gráfica de* $f(x)$ *se comprime* c *veces en dirección vertical.*

Ejemplo 2.1.20 *Si* $f(x) = x^3 - x$, *graficar:*

(a) $f(x)$ *(b)* $2f(x)$ *(c)* $\frac{1}{2}f(x)$

Solución. Graficamos $f(x) = x^3 - x$,

La gráfica de

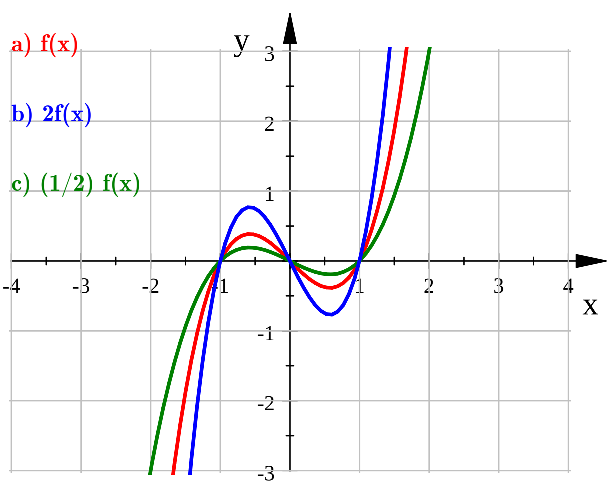
$$\begin{aligned} 2f(x+2) &= 2\left(x^3 - x\right) \\ &= 2x^3 - 2x \end{aligned}$$

es la gráfica de $f(x)$ estirada dos veces en dirección vertical

La gráfica de

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(x-2) &= \frac{1}{2}\left(x^3 - x\right) \\ &= \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

es la gráfica de $f(x)$ comprimida dos veces en dirección vertical



Ejemplo 2.1.20: *Estiramientos verticales*

■

Estiramiento Horizontal

Definición 2.1.11 (Estiramientos Horizontales) *Sea f función $c > 1$ constante. Entonces:*

1. *$y = f(cx)$ la gráfica de $f(x)$ se comprime c veces en dirección horizontal*

2. *$y = f(x/c)$ la gráfica de $f(x)$ se estira c veces en dirección horizontal*

Ejemplo 2.1.21 *Si $f(x) = x^3 - x$, graficar:*

(a) $f(x)$ *(b)* $f(2x)$ *(c)* $f\left(\frac{x}{2}\right)$

Solución. Graficamos $f(x) = x^3 - x$,

La gráfica de

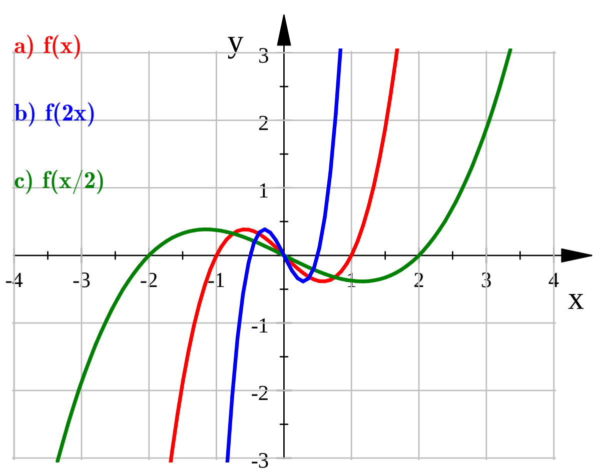
$$\begin{aligned} f(2x) &= (2x)^3 - (2x) \\ &= 8x^3 - 2x \end{aligned}$$

es la gráfica de $f(x)$ comprimida dos veces en dirección horizontal.

La gráfica de

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right) &= \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

es la gráfica de $f(x)$ estirada dos veces en dirección horizontal



Ejemplo 2.1.21: *Estiramientos horizontales*

■

Reflexiones

Definición 2.1.12 (Reflexiones) *Sea f función. Entonces:*

1. $y = -f(x)$ *es la gráfica de* $f(x)$ *se refleja respecto al eje* x.
2. $y = f(-x)$ *es la gráfica de* $f(x)$ *se refleja respecto al eje* y.

Ejemplo 2.1.22 *graficar:*

(a) Si $f(x) = x^2$ *graficar:* $f(x)$ *y* $-f(x)$

(b) Si $f(x) = x^3$ *graficar:* $f(x)$ *y* $f(-x)$

Solución.

(a) Graficamos $f(x) = x^2$. La gráfica de

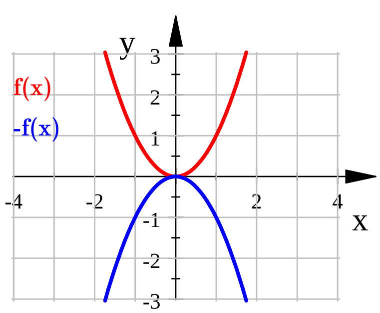
$$\begin{aligned} -f(x) &= -\left(x^2\right) \\ &= -x^2 \end{aligned}$$

es la gráfica de $f(x)$ reflejada respecto al eje x

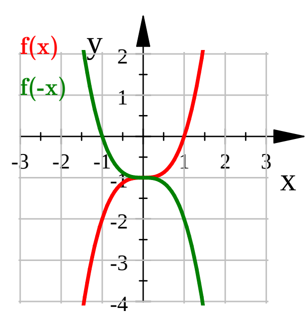
(b) Graficamos $f(x) = x^3 - 1$. La gráfica de

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 1 \\ &= -x^3 - 1 \end{aligned}$$

es la gráfica de $f(x)$ reflejada respecto al eje y



$Ejemplo$ 2.1.22:
a) $reflexión\ respecto\ al\ eje\ x$



$Ejemplo$ 2.1.22:
b) $reflexión\ respecto\ al\ eje\ y$

■

2.1.8. Álgebra de Funciones

Definición 2.1.13 (Operaciones con Funciones) *Sean* f *y* g *funciones, donde* $Dom\ f = A$ *y* $Dom\ g = B$.
Las operaciones entre funciones se definen de la siguiente manera:

1. $f + g : (f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad Dom(f+g) = A \cap B$
2. $f - g : (f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad Dom(f-g) = A \cap B$
3. $fg : (fg)(x) = f(x)\,g(x) \qquad Dom(fg) = A \cap B$
4. $f \circ g : (f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad Dom(f \circ g) = \{x \in B \mid g(x) \in A\}$

Ejemplo 2.1.23 *Para las funciones* $f(x) = x^2 + 4x,\ g(x) = x^4 + 1,$ *y* $h(x) = x - 5$. *Realiza las siguientes operaciones*

a) $(f+g)(x)$ *b)* $(g-h)(x)$ *c)* $(fg)(x)$

Solución.

a)

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= \left(x^2+4x\right)+\left(x^4+1\right)\\ &= x^4+x^2+4x+1\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(g-h)(x) &= \left(x^4+1\right)-(x-5)\\ &= x^4-x+6\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= \left(x^2+4x\right)\left(x^4+1\right)\\ &= x^6+4x^5+x^2+4x\end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.1.24 *Para las funciones* $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 2x^4$, *y* $h(x) = 1 - x$ *. Realiza las siguientes composiciones*

a) $(g \circ h)(x)$ *c)* $(f \circ h)(2)$ *e)* $(f \circ g \circ h)(x)$

b) $(h \circ g)(x)$ *d)* $(h \circ f)(2)$ *f)* $(g \circ h \circ f)(1)$

Solución.

a) $g(x) = 2x^4$, y $h(x) = 1 - x$

$$\begin{aligned} (g \circ h)(x) &= g(h(x)) \\ &= g(1-x) \\ &= 2(1-x)^4 \end{aligned}$$

b) $g(x) = 2x^4$, y $h(x) = 1 - x$

$$\begin{aligned} (h \circ g)(x) &= h(g(x)) \\ &= h\left(2x^4\right) \\ &= 1 - 2x^4 \end{aligned}$$

c) $f(x) = x^2 + 3x$, $h(x) = 1 - x$

$$\begin{aligned} (f \circ h)(2) &= f(h(2)) \\ &= f(1-2) \\ &= f(-1) \\ &= (-1)^2 + 3(-1) \\ &= 1 - 3 \\ &= -2 \end{aligned}$$

d) $f(x) = x^2 + 3x$, $h(x) = 1 - x$

$$\begin{aligned} (h \circ f)(2) &= h(f(2)) \\ &= h\left((2)^2 + 3(2)\right) \\ &= h(4+6) \\ &= h(10) \\ &= 1 - (10) \\ &= -9 \end{aligned}$$

e) $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 2x^4$

$h(x) = 1 - x$

$$\begin{aligned} (f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) \\ &= f(g(1-x)) \\ &= f\left(2(1-x)^4\right) \\ &= \left(2(1-x)^4\right)^2 + 3\left(2(1-x)^4\right) \\ &= 4(1-x)^8 + 6(1-x)^4 \\ &\quad . \end{aligned}$$

f) $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 2x^4$

$h(x) = 1 - x$

$$\begin{aligned} (g \circ h \circ f)(1) &= g(h(f(1))) \\ &= g\left(h\left(1^2 + 3(1)\right)\right) \\ &= g(h(1+3)) \\ &= g(h(4)) \\ &= g(1-4) \\ &= 2(1-4)^4 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.1.25 *Si* $F(x) = \left(x^4 - 3\right)^2$ *encuentre dos funciones* f *y* g *tal que* $(f \circ g)(x) = F(x)$

Solución. Debemos obtener dos funciones tales que $f(g(x)) = \left(x^4 - 3\right)^2$

Observemos que la composición es un binomio al cuadrado por tanto podemos hacer $g(x) = x^4 - 3$ y al sustituir en $F(x)$ tenemos $F(x) = g^2$, ahora hacemos $f(x) = x^2$ así:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f\left(x^4 - 3\right) \\ &= \left(x^4 - 3\right)^2 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.1.26 *Si* $f(x) = 3x + 2$ *y* $(f \circ g)(x) = 6x + 5$*. Encuentre la función* $g(x)$

Solución. La composición es

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 6x + 5 \\ 3g(x) + 2 &= 6x + 5 \\ g(x) &= \frac{6x + 5 - 2}{3} \\ g(x) &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Podemos hacer la comprobación efectuando nuevamente la composición

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 3(2x + 1) + 2 \\ &= 6x + 3 + 2 \\ &= 6x + 5 \end{aligned}$$

La función $g(x) = 2x + 1$ ■

Ejemplo 2.1.27 *Si* $g(x) = x + 4$ *y* $(\ f \circ g)(x) = (x + 4)^3 + 2$ *encuentre la función* $f(x)$

Solución.

$$\begin{aligned} f(x + 4) &= (x + 4)^3 + 2 \\ f(g(x)) &= g^3 + 2 \end{aligned}$$

de aquí podemos concluir que $f(x) = x^3 + 2$ ■

Ejercicios 2.1

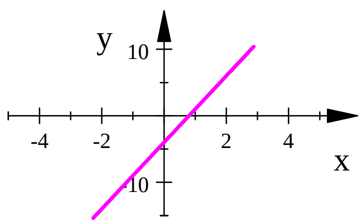
Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.
Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

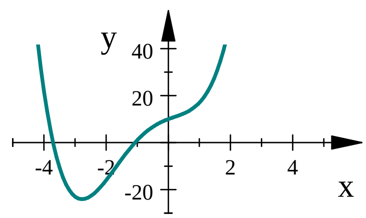
1. Sabemos que $x^2 < x^3$para toda $x > 1$. Pero ¿qué es mayor, $50x^2$ ó x^3?.

Justifica tu respuesta

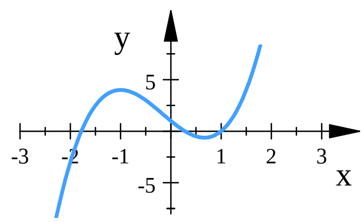
2. Usa la gráfica de las siguientes funciones para determinar el dominio y rango



$f(x) = 5x - 4$



$f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x + 10$



$f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$

3. Encuentra el dominio, rango y grafica la función

(a) $f(x) = 5 - 2x$

(b) $g(x) = 1 + x^2$

4. Sea $y = f(x) = x^2 + 2$

(a) Encuentra el valor de y cuando x es cero

(b) ¿A qué es igual $f(3)$?

(c) ¿Cuáles son los valores de x que hacen que y tome el valor de 11?

(d) ¿Existe algún valor de x que haga que el valor de y sea igual a 1?

5. Para cada una de las siguientes funciones determina:

(a) ¿Cuál es el grado del polinomio?

(b) ¿Qué función de potencia se aproxima a $f(x)$ para valores grandes de x?

(c) Sin utilizar una calculadora o computadora, esboza la gráfica de la función.

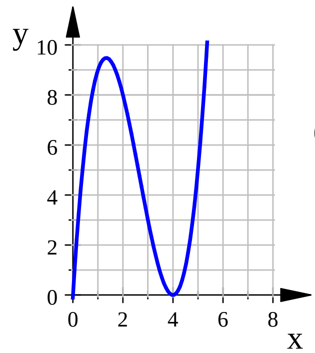
(d) Con una computadora, traza una gráfica de la función y compara con tu grafica

I) $f(x) = x^2 + 10x - 5$ II) $f(x) = 9x^5 + 82x^3 + 12x^2$ III) $f(x) = x^3 + 6x + 10$

6. Encuentra $f(5)$ de las siguientes funciones

(a) $f(x) = 2x + 3$

(b)



(c)

x	$f(x)$
2	2.8
3	3.2
4	3.7
5	4.1
6	5.0

7. Relaciona cada función con su gráfica y realiza lo siguiente

(a) Determina si la función es par, impar o ninguna de las dos

(b) Determina un intervalo donde la función es creciente.

(c) Determina un intervalo donde la función es decreciente.

a) $y = 5$

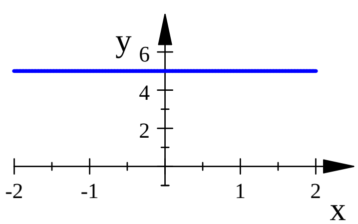
b) $y = -4x - 5$

c) $y = x^4$

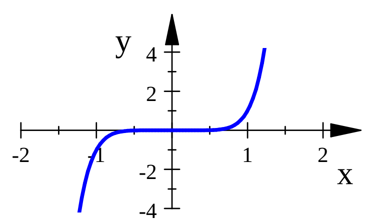
d) $y = x^7$

e) $y = x^{10}$

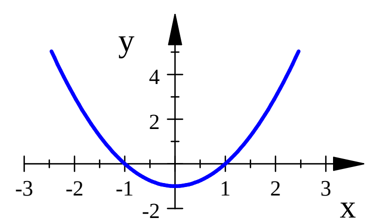
f) $y = x^2 - 1$



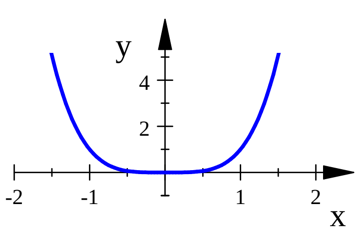
( )



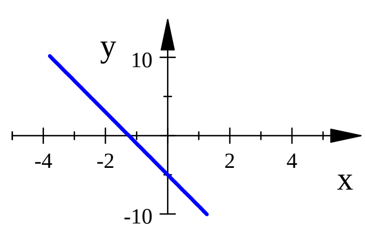
( )



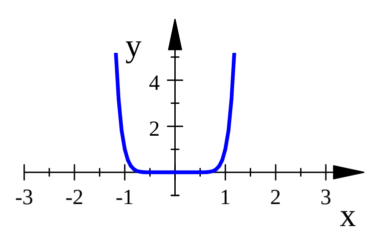
( )



( )



( )



( )

8. Encuentra todas las soluciones de la ecuación $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$

9. Traza la gráfica de las siguientes ecuaciones y explica por qué no son gráficas de alguna función de x

a) $|y| = x$ b) $y^2 = x$

10. Aplica las transformaciones apropiadas para trazar la gráfica de la función $y = (x+1)^2$

11. En los ejercicios siguientes se establecen cuántas unidades y en qué direcciones se trasladarán las gráficas de las ecuaciones dadas, determina una ecuación para la gráfica desplazada, después traza la gráfica de la función original.

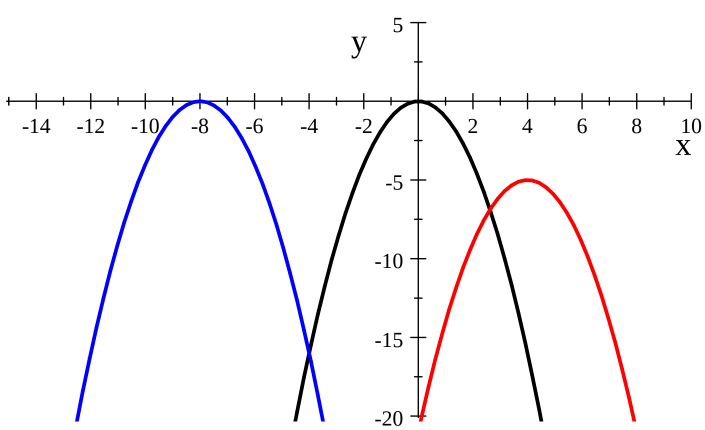
a) $x^2 + y^2 = 49$,abajo 3, izquierda 2

b) $y = 2x - 7$, arriba 7, derecha 2

c) $y = x^2 - 1$, estirada verticalmente por un factor de 3

d) $y = 1 - x^3$, Comprimida horizontalmente por un factor de 3.

12. La figura siguiente muestra la gráfica de $y = -x^2$ desplazada a dos posiciones nuevas. Determina las funciones para las gráficas nuevas.



13. Para las funciones $f(x) = x^3 + 2x^3$, y $g(x) = 3x^2 - 1$, encuentra las siguientes operaciones, y da sus dominios.

(a) $(f+g)(x)$ (b) $(f-g)(x)$ (c) $(fg)(x)$

14. Sean las funciones $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = 3x + 2$, encuentra:

(a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(g \circ f)(x)$ (c) $(f \circ f)(x)$

15. Si $u(x) = 4x - 5$, $v(x) = x^2$, y $f(x) = 3x$, encuentra las siguientes composiciones

(a) $u(v(f(x)))$ (b) $v(f(u(x)))$ (c) $f(v(u(x)))$

16. Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 3$ Encuentra,

(a) $g(f(1))$ (b) $f(g(0))$ (c) $f(f(-5))$

17. Sean $f(x) = x - 3$, $g(x) = x^3$, $h(x) = 2x$. Expresa cada una de las funciones siguientes como una composición donde están involucaradas una o más funciones f, g, y h

a) $x^3 - 3$ b) $2x - 12$ c) $(2x - 6)^3$

18. En la siguiente tabla se muestran tres columnas, la primera columna corresponde a la función $f(x)$, la segunda a la función $g(x)$ y la tercera a la composición $(f \circ g)(x)$.

$f(x)$	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$
x^4	$x^2 - 3$	$(x^2 - 3)^4$

Completa la siguiente tabla siguiendo el ejemplo anterior

$f(x)$	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$
x^2		$(3x + 5)^2$
	x^3	$2x^3 + 1$
$x^2 + 2x$	$3x$	
	$2x^3 + 4x - 3$	$-2x^3 - 4x + 3$
	$-x$	$3x^4 - 2x + 1$
		$(4x^2 - 7)^3 - 1$

Evaluación 2

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Sea $f(x) = x^2 - 3$

a) Encuentra el valor de y cuando x es cero

b) ¿A qué es igual $f(2)$?

c) ¿Cuáles son los valores de x que hacen que y tome el valor de 13?

d) ¿Existe algún valor de x que haga que el valor de f sea igual a -4?

2. Encuentra el dominio, rango y grafica la función

a) $f(x) = 5 - 2x$ b) $y = 1 + x^2$ c) $f(x) = 4$

3. Encuentra dos funciones polinomicas f y g tales que

a) $f(x)$ es función par.

b) $f(x)$ es función impar.

4. Determina una ecuación para la gráfica de $y = x^3$

a) Desplazada 1 unidad a la izquierda y 1 hacia abajo.

b) Reflejada respecto al eje x, comprimda en un factor de 2

5. Si $u(x) = 4x - 5$, $v(x) = x^2$, y $f(x) = 3x$, encuentra:

a) $(f + v)(x)$

b) $(u - f)(x)$

c) $(uv)(x)$

d) $(f \circ u)(x)$

e) $(f \circ v \circ u)(x)$

f) $u(f(v(1)))$

g) Si $g(x) = (12x - 5)^2$, expresa g como una composición de u, v,y f.

2.2. Límites de Funciones Polinomiales

2.2.1. Concepto de Límite

Definición 2.2.1 (Intuitiva de límite) *La función $f(x)$ tiende hacia el límite L cerca de a, si se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca como queramos de L haciendo que x esté suficientemente cerca de a, pero siendo distinto de a.*
Notación:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Y se expresa como "El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

Esto quiere decir que si tomamos valores de x cada vez más cercanos al valor de a, pero no iguales a a, entonces el valor de $f(x)$ se aproxima cada vez más al valor de L.

Una función no necesariamente tiene que estar definida en a para que suceda que $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Ejemplo 2.2.1 *En las gráficas de las funciones de las figura 2.40, 2.41 y 2.42 se cumple que* $\lim_{x\to a} f(x) = L$

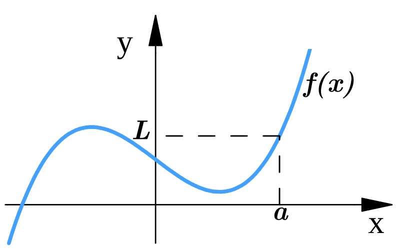


Fig. 2.40

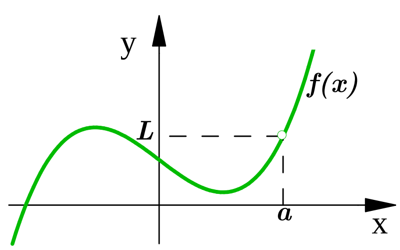


Fig. 2.41

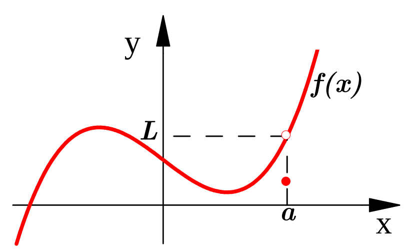


Fig. 2.42

.

Ejemplo 2.2.2 *Estime el valor de* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *para:*

a) $f(x) = 2x^2 + x - 1$ *(fig 2.43)*

b) $f(x) = 2x^2 + x - 1 \quad \forall x \neq 1$ *(fig 2.44)*

c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ *(fig 2.45)*

Graficamente tenemos:

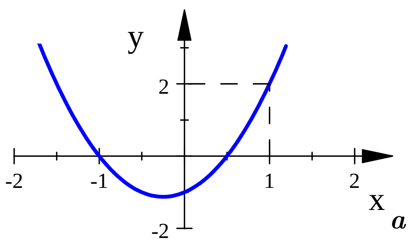


Fig. 2.43

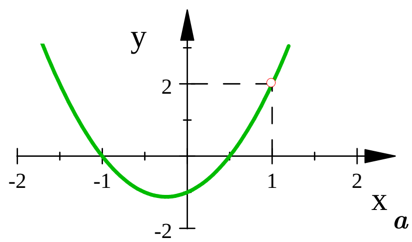


Fig. 2.44

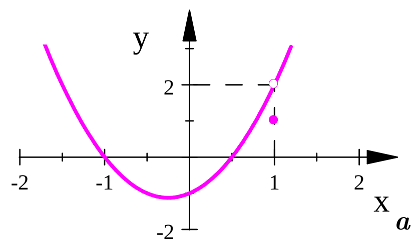


Fig. 2.45

Solución.

a) Tomamos valores para x muy cerca de 1

$x > 1$	$f(x) = 2x^2 + x - 1$
1.1	2.52
1.01	2.0502
1.001	2.005
1.0001	2.0005
1.00001	2.0001

$x < 1$	$f(x) = 2x^2 + x - 1$
0.9	1.52
0.99	1.9502
0.999	1.995
0.9999	1.9995
0.99999	2.0000

Cada que el valor de x se aproxima más a 1, los valores de la función se acercan más a 2, por lo tanto se supone que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

b) En este caso la función no está definida en el punto $x = 1$, pero la definición 2.2.1dice que x debe tomar valores muy cerca de 1 pero no iguales a 1,entonces para números distintos de 1 se tiene $f(x) = 2x^2 + x - 1$, y x toma los mismos valores que en el inciso anterior; por lo tanto en este caso tambien se supone que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

c) En este caso f si está definida en $x = 1$, pero nuevamente si seguimos la definición 2.2.1consideraremos solo los valores de x cerca de 1 pero no iguales a 1, y para todos ellos tomamos $f(x) = 2x^2 + x - 1$, por lo que nuevamente x toma los mismos valores que en inciso $a)$ y luego

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

■

2.2.2. Teoremas sobre límites

Para poder evaluar un límite o concluir que no existe no siempre es lo más practico usar una grafica, para esto es mejor utilizar los teoremas sobre límites, también llamados leyes de los límites. En esta sección mencionaremos unicamente los que se aplican a funciones polinomiales.

Teorema 2.2.1 (Propieades de límites) .

I) $\lim\limits_{x\to a} c = c,$ *donde* c *es una constante.*

II) $\lim\limits_{x\to a} x = a.$

Ejemplo 2.2.3 *a)* $\lim\limits_{x\to 2} 5 = 5$

b) $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}} x = \frac{2\pi}{3}$

Teorema 2.2.2 (Álgebra de límites) *Sea* c *una constante, y suponga que* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ *existen.*
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, *entonces:*

I) $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x) = cL$

II) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L\pm M$

III) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right) = L\ M$

Ejemplo 2.2.4 *Sea* $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$ *y* $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = -1,$ *encuentre:*

a) $\lim\limits_{x\to 3} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim\limits_{x\to 3} [4f(x) - g(x)]$

c) $\lim\limits_{x\to 3} [2g(x)\, f(x)]$

Solución. Usando los teoremas de límites:

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} [f(x) + g(x)] &= \lim_{x\to 3} f(x) + \lim_{x\to 3} g(x) \\ &= 4 + (-1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\left[4f(x)-g(x)\right] &= \lim_{x\to 3}4f(x)-\lim_{x\to 3}g(x)\\
&= 4\lim_{x\to 3}f(x)-\lim_{x\to 3}g(x)\\
&= 4(4)-(-1)\\
&= 17
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\left[2g(x)f(x)\right] &= \left(\lim_{x\to 3}2g(x)\right)\left(\lim_{x\to 3}f(x)\right)\\
&= \left(2\lim_{x\to 3}g(x)\right)\left(\lim_{x\to 3}f(x)\right)\\
&= (2(-1))(4)\\
&= -8
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.2.3 (Límite de una Potencia) *Sea* $\lim_{x\to a} f(x) = L$, *y* n *un entero positivo. Entonces*

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n == \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$$

En particular podemos observar que si $f(x) = x$, entonces $\lim_{x\to a} x = a$, luego $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

Ejemplo 2.2.5 *Evalue los siguientes límites*

a) $\lim_{x\to 1}(2x+4)$

b) $\lim_{x\to 2} x^4$

c) $\lim_{x\to -1}\left(4x^3+3x+1\right)$

d) $\lim_{x\to 0}(2x+4)^8$

e) $\lim_{x\to 2}\left[x^2(x-1)^{10}\right]$

Solución.

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}(2x+4) &= \lim_{x\to 1}2x+\lim_{x\to 1}4 && \text{teorema: 2.2.2 II)}\\
&= 2\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}4 && \text{teorema: 2.2.2 I)}\\
&= 2(1)+4 && \text{teorema: 2.2.1}\\
&= 6
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} x^4 &= 2^4 && \text{teorema 2.2.3} \\ &= 16 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1}\left(4x^3+3x+1\right) &= \lim_{x\to -1} 4x^3 + \lim_{x\to -1} 3x + \lim_{x\to -1} 1 && \text{teorema 2.2.2 II)} \\ &= 4\lim_{x\to -1} x^3 + 3\lim_{x\to -1} x + \lim_{x\to -1} 1 && \text{teorema 2.2.2 I)} \\ &= 4\left(-1\right)^3 + 3\left(-1\right) + 1 && \text{teoremas 2.2.3, 2.2.2, 2.2.1} \\ &= -6 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(2x+4\right)^8 &= \left(\lim_{x\to 0}\left(2x+4\right)\right)^8 && \text{teorema 2.2.3} \\ &= \left(\lim_{x\to 0} 2x + \lim_{x\to 0} 4\right)^8 && \text{teorema 2.2.2 II)} \\ &= \left(2\lim_{x\to 0} x + \lim_{x\to 0} 4\right)^8 \\ &= \left(2\left(0\right)+4\right)^8 \\ &= 4^8 \\ &= 65\,536 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2}\left[x^2\left(x-1\right)^{10}\right] &= \left(\lim_{x\to 2} x^2\right)\left(\lim_{x\to 2}\left(x-1\right)^{10}\right) && \text{teorema 2.2.2 III)} \\ &= \left(\lim_{x\to 2} x^2\right)\left(\left(\lim_{x\to 2}\left(x-1\right)\right)^{10}\right) && \text{teorema 2.2.3} \\ &= \left(\lim_{x\to 2} x^2\right)\left(\left(\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 1\right)^{10}\right) \\ &= \left(2^2\right)\left(2-1\right)^{10} \\ &= 4\left(1\right)^{10} \\ &= 4 \end{aligned}$$

■

2.2.3. Límite de funciones polinomiales

Para calcular el límite de una función polinomial pueden usarse los teoremas 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3.

Sí

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

es una función polinomial, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_2x^2 + a_1x + a_0\right) \\
&= \lim_{x\to c} a_n x^n + \lim_{x\to c} a_{n-1}x^{n-1} + .. + \lim_{x\to c} a_2x^2 + \lim_{x\to c} a_1 x + \lim_{x\to c} a_0 && \text{teorema } 2.2.2 \text{ II} \\
&= a_n \lim_{x\to c} x^n + a_{n-1}\lim_{x\to c} x^{n-1} + .. + a_2 \lim_{x\to c} x^2 + a_1 \lim_{x\to c} x + \lim_{x\to c} a_0 && \text{teorema } 2.2.2 \text{ I} \\
&= a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + .. + a_2c^2 + a_1c + a_0 && \text{teoremas } 2.2.3 \text{ y } 2.2.1
\end{aligned}$$

Teorema 2.2.4 (Límite de una función polinomial) *Sea $f(x)$ una función polinomica, y c un número real. Entonces*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Ejemplo 2.2.6 *Evalue los siguientes límites*

a) $\lim_{x\to 2}(3x+2)$ *b)* $\lim_{x\to 0}\left(6x^4+3x^3+x-1\right)$ *c)* $\lim_{x\to -3}\left(2x^2+3x+5\right)$

Solución. En los tres casos tenemos el límite de funciones polinomicas, por lo tanto aplicando el teorema 2.2.4 obtenemos

a) $\lim_{x\to 2}(3x+2) = 3(2)+2 = 8$

b) $\lim_{x\to 0}\left(6x^4+3x^3+x-1\right) = 6(0)^4 + 3(0)^3 + 0 - 1 = -1$

c) $\lim_{x\to -3}\left(2x^2+3x+5\right) = 2(-3)^2 + 3(-3) + 5 = 14$

■

2.2.4. Límites infinitos

La expresión **límites infinitos** siempre se refiere a un límite que no existe porque la función f exhibe un comportamiento no acotado, es decir si decimos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Esto no quiere decir que se considere a ∞ como un número. Simplemente se está describiendo de manera simbólica el comportamiento de una función f cerca del número a.

Recordemos que los símbolos ∞ y $-\infty$ **no son números**. Solo los usamos para indicar que una cantidad decrece o crece sin límite en la dirección negativa (en el plano xy, a la izquierda para x y hacia abajo para y) y en la dirección positiva (a la derecha para x y hacia arriba para y).

Definición 2.2.2 (Límites infinitos) *Sea f una función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en a misma. Por lo tanto*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

quiere decir que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (tan grandes como uno quiera) haciendo que x se acerque suficientemente a a, pero no es igual que a.

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer de manera arbitraria grandes y negativos al dar valores a x que estén muy cerca de a, pero sin que lleguen a ser iguales a a.

2.2.5. Límites en el infinito

La expresión **en el infinito** significa que se está intentando determinar si una función f posee un límite cuando se deja que el valor de la variable x disminuya o aumente sin límite es decir: $x \longrightarrow \infty$ o $x \longrightarrow -\infty$. Estos límites pueden o no existir

Definición 2.2.3 (Límites en el infinito) *Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). En tal caso*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a L tanto como desee, si escoge una x suficientemente grande.

Sea g una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. En tal caso

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = M$$

significa que los valores de $g(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a M haciendo que x sea lo suficientemente grande y negativa.

En términos aproximados, el comportamiento final de cualquier función f es simplemente la forma en que f se comporta para valores muy grandes de $|x|$.

En el caso de una función polinomial f de grado $n \geq 1$, su gráfica semeja la gráfica de $y = a_n x^n$, (figura 2.46).

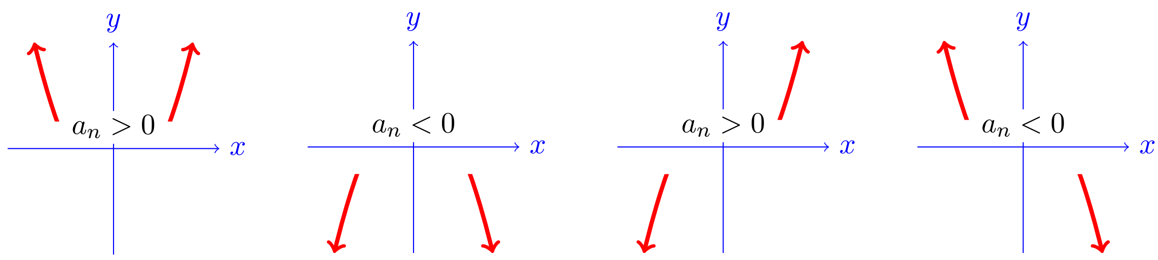


Fig. 2.46. Comportamiento Extremo de una función polinomial

Podemos decir que para la función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

los términos $a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ son irrelevantes cuando observamos globalmente la grafica de $f(x)$ para $|x|$ muy grande.

Así se tiene

$$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n = \lim_{x\to-\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right)$$

Sabemos que las funciones polinomiales están definidas en $(-\infty, \infty)$, podemos concluir que para una función polinomial $f(x)$ de grado $n \geq 1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

este límite constituye un ejemplo de **límite infinito en el infinito** y su valor $-\infty$ o ∞ dependera de los valores de a_n y n.

Ejemplo 2.2.7 *Encuentre* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 - x\right)$

Solución. Observe que no se pueden aplicar las leyes de los límites ya que de hacerlo obtendriamos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - x\right) &= \lim_{x\to\infty} x^2 - \lim_{x\to\infty} x \\ &= \infty - \infty\end{aligned}$$

y esto no es valido ya que ∞ no es un número y $\infty - \infty$ no está definido. Sin embargo se puede escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - x\right) &= \lim_{x\to\infty} x(x-1) \\ &= \infty\end{aligned}$$

ya que tanto x como $x - 1$ se hacen arbitrariamente grandes y, por lo tanto, también su producto. ■

Ejemplo 2.2.8 *Encuentre:*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(3x^5 - 2x^4 + 3\right)$ *(fig. 2.47)*

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-4x^6 + 3x + 1\right)$ *(fig. 2.48)*

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^3 + 6x^2 + 2\right)$ *(fig. 2.49)*

Solución. Se muestra la grafica de las funciones para x muy grandes en las figuras 2.47, 2.48 y 2.49.

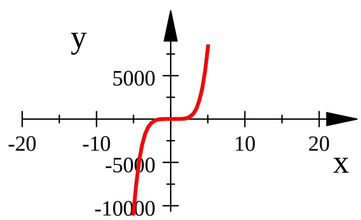


Fig. 2.47

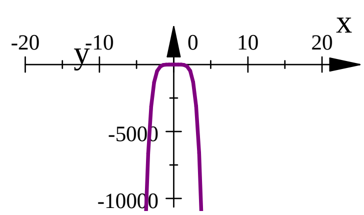


Fig. 2.48

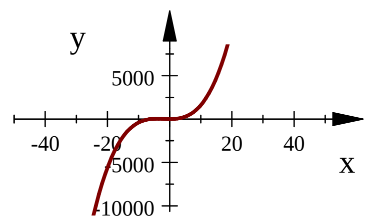


Fig. 2.49

Observando las graficas podemos concluir que

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(3x^5 - 2x^4 + 3\right) = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-4x^6 + 3x + 1\right) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^3 + 6x^2 + x - 2\right) = \infty$

Ahora bien, si queremos hacer el cálculo algebraicamente

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(3x^5 - 2x^4 + 3\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left[x^4 \left(3x - 2\right) + 3\right] = \infty$

ya que x^4 y $3x - 2$ se hacen arbitrariamente grandes, por lo tanto también su producto

De la misma forma para los siguientes,

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-4x^6 + 3x + 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[(-x)\left(4x^5 + 3\right) + 1\right] = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^3 + 6x^2 + x - 2\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left[x\left(x\left(x + 6\right) + 1\right) - 2\right] = \infty$

■

2.2.6. Definición formal de límite

Para demostrar la existencia de un límite no podemos basarno solamente en nuestra habilidad para graficar, o en tablas de valores. La definición 2.2.1 no siempre es aceptable, incluso es considerada como algo vago para usarlo en la demostración de teoremas.

Es necesario tener en cuenta que:

$|x-a|$ representa la distancia que hay de un número x a un número a (distancia en el eje x)

$|f(x)-L|$ representa la distancia que hay de un número $f(x)$ a un número L (distancia en el eje y)

Definición 2.2.4 (Formal de límite) *Sea f una función definida en un intervalo abierto, excepto quizas en un número a en el intervalo. Entonces:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Significa que para todo $\varepsilon > 0$,existe un número $\delta > 0$ tal que, para todo x si

$$0 < |x-a| < \delta, \quad \textit{entonces} \quad |f(x)-L| < \varepsilon$$

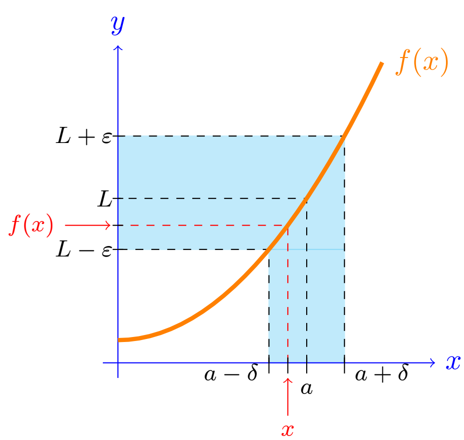


Fig. 2.50

Gráficamente podemos observar los términos de la definición en la figura 2.50Expresando la definición con palabras, decimos que: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ pueden ser tan cercanos como quiera a L al hacer que x se acerque lo suficiente a a (pero que no sea igual a a).

Ejemplo 2.2.9 *Demuestre que $\lim\limits_{x\to 3}(5x+2) = 17$*

Solución. Siguiendo la definición formal de límite debemos mostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$, arbitrario sin importar cuán pequeño sea, se quiere encontrar un $\delta > 0$, y debe cumplirse que si

$$0 < |x-3| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |(5x+2)-17| < \varepsilon$$

Lo primero que tenemos que encontrar es un valor para δ. Cosideramos

$$\begin{aligned} |(5x+2)-17| &= |5x-15| \\ &= |5(x-3)| \\ &= |5|\,|x-3| \\ &= 5\,|x-3| \end{aligned}$$

así tenemos que

$$\begin{aligned} |(5x+2)-17| &= 5\,|x-3| < \varepsilon \\ & |x-3| < \frac{\varepsilon}{5} \end{aligned}$$

Ahora podemos elegir $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ dada, seleccione $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

Entonces $0 < |x-3| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned} |(5x+2)-17| &= |5x-15| && \text{simplificando} \\ &= |5(x-3)| && \text{factorizando} \\ &= 5\,|x-3| && \text{propiedad } |ab| = |a|\,|b| \text{ y } |5| = 5 \\ &< 5\delta = 5\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) = \varepsilon && \text{porque consideramos inicialmente que } |x-3| < \delta \text{ luego } 5\,|x-3| < 5\delta \\ |(5x+2)-17| &< \varepsilon && \text{uniendo el primero y último término.} \end{aligned}$$

■ ■

Ejemplo 2.2.10 *Demuestre que* $\lim\limits_{x\to 4}\left(-x^2+2x+2\right) = -6$

Solución. Para un $\varepsilon > 0$ arbitrario es necesario encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-4| < \delta$ entonces $\left|\left(-x^2+2x+2\right)-(-6)\right| < \varepsilon$

Consideramos$x^2-2x-8 = (x+2)(x-4)$

$$\begin{aligned} \left|\left(-x^2+2x+2\right)-(-6)\right| &= \left|-x^2+2x+8\right| \\ &= \left|(-1)\left(x^2+2x+8\right)\right| \\ &= |-1|\left|x^2+2x+8\right| \\ &= \left|x^2+2x+8\right| \\ &= |(x+2)(x-4)| \\ &= |x+2|\,|x-4| \end{aligned}$$

se quiere hacer $|x+2|\,|x-4| < \epsilon$. Pero puesto que hemos acordado examinar valores de x cerca de 4, asi que es conveniente que $\delta \leq 1$, es decir sólo se consideraran aquellos valores para los cuales $|x-4| < 1$, así

$$\begin{aligned} |x-4| &< 1 \\ -1 < x-4 &< 1 \\ 3 &< x < 5 \\ 5 &< x+2 < 7 \end{aligned}$$

en consecuencia podemos escribir $|x+2| < 7$ y obtenemos Si $|x-4| < 1$ entonces $\left|\left(-x^2+2x+2\right)-(-6)\right| = |x+2|\,|x-4| < 7\,|x-4|$,

Ahora tenemos dos posibles valores para δ, $\delta = 7$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$ elegiremos el mínimo.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sea δ el mínimo entre 7 y $\frac{\varepsilon}{7}$, y escribimos $\delta = \text{mín}\{7, \frac{\varepsilon}{7}\}$, entonces $0 < |x-4| < \delta$ implica que

$$\left|\left(-x^2+2x+2\right)-(-6)\right| < 7\,|x-4| < 7\left(\frac{\varepsilon}{7}\right) = \varepsilon$$

■ ■

Ejemplo 2.2.11 *Demuestre que* $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$

Solución. Para un $\varepsilon > 0$ arbitrario es necesario encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-3| < \delta$ entonces $\left|x^2-9\right| < \varepsilon$

Para relacionar $\left|x^2-9\right|$ con $|x-3|$ escribimos $\left|x^2-9\right| = |(x-3)(x+3)| = |(x-3)|\,|(x+3)|$. Luego se quiere que

si $0 < |x-3| < \delta$ entonces $|(x-3)|\,|(x+3)| < \varepsilon$.

Observe que si puede encontrar una constante positiva C tal que $|(x+3)| < C$, después

$$|(x-3)|\,|(x+3)| < C\ |(x-3)|$$

y puede hacer $C\ |(x-3)| < \varepsilon$ tomando $|x-3| < \frac{\varepsilon}{C} = \delta$.

Se puede determinar tal número C si se restringe a x a quedar en un intervalo con centro en 3. En efecto, puesto que se está interesado sólo en valores de x que estén cercanos a 3, es razonable suponer que x está a una distancia 1 desde 3, es decir $|x-3| < 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 2 &< x < 4 \\ 5 &< x+3 < 7 \\ \text{Así} \quad |x+3| &< 7 \end{aligned}$$

y por eso $C = 7$ es una elección aceptable para la constante.

Pero ahora ya hay dos restriciones en $|x-3|$, a saber

$$|x-3|<1 \qquad \text{y} \qquad |x-3|<\frac{\varepsilon}{C}=\frac{\varepsilon}{7}$$

para tener la certeza de que ambas desigualdades se cumplen, haga que δ sea la más pequeña de los dos números 1 y $\frac{\varepsilon}{7}$.

Demostración. Dado $\varepsilon>0$, sea $\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{\varepsilon}{7}\right\}$. Si $0<|x-3|<\delta$, en tal caso

$$\begin{aligned} |x-3|<1 \quad &\Longrightarrow \quad 2<x<4 \\ &\Longrightarrow \quad |x+3|<7 \end{aligned}$$

También tiene que $|x-3|<\frac{\varepsilon}{7}$ de modo que

$$\left|x^2-9\right|=|x+3|\,|x-3|<7\left(\tfrac{\varepsilon}{7}\right)=\varepsilon$$

Esto demuestra que $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ ■ ■

Ejercicios 2.2

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Aplica el álgebra para determinar una distancia máxima de x a 2 que se asegure que x^2 esté a menos de 0.1 de distancia de 4.

Con un argumento parecido demuestra que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

2. Si $x^4 \le f(x) \le x^2$ para x en $[-1,1]$ y $x^2 \le f(x) \le x^4$ para $x < -1$ y $x > 1$, ¿en qué puntos c sabemos automáticamente que $\lim_{x\to c} f(x)$ existe? ¿Qué se puede decir respecto al valor del límite en esos puntos?

3. Se considera el polinomio de párametro $m : x^2 + (m-2)x - (m+3)$. Encuentra el valor de m para que la suma de los cuadrados de las raíces sea mínima.

(Sugerencia: si $(x - r_1)(x - r_2) = x^2 + (m-2)x - (m+3)$ donde r_1 y r_2 son las raices)

4. Prueba que $\lim_{x\to 1} (5x - 3) = 2$. ¿Para que valores de x, sucede que $|5x - 3 - 2| < \frac{1}{1000}$

5. Dado que $\lim_{x\to a} f(x) = -3$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. $\lim_{x\to a} h(x) = 8$, encuentra los límites que existan. Si el límite no existe, explica por qué.

a) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$
b) $\lim_{x\to a} [f(x)]^2$
c) $\lim_{x\to a} [g(x)h(x)]$
d) $\lim_{x\to a} 10h(x)$

6. En un mismo sistema de coordenadas, traza las gráficas de las funciones para $x \ge 0$,y usalas para responder las preguntas en cada uno de los siguientes ejercicios

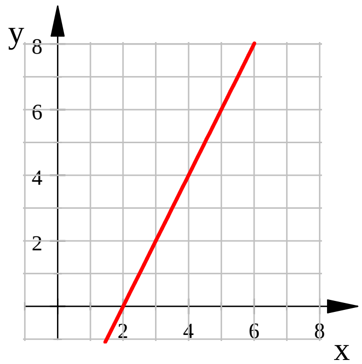
a) Cuando $x \to \infty$
¿Cuál de las tres funciones $y = 1000x^2$, $y = 20x^3$, $y = 0.1x^4$ toma los valores más altos?
¿Cuál toma los valores más bajos?

b) Sea $f(x) = x^5$, $g(x) = -x^3$, y $h(x) = 5x^2$
¿Cuál toma los valores positivos más altos cuando $x \to \infty$?
¿Cuando $x \to -\infty$?

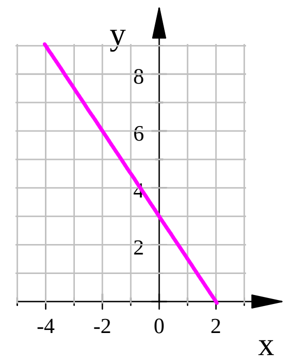
c) ¿Que función toma valores más grandes cuando $x \to \infty$ de $5x^3 + 20x^2 + 150x + 200$ ó $0.5x^4$?

7. En los siguientes ejercicicos, usa la gráfica para encontrar una $\delta > 0$ tal que para toda x, $0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

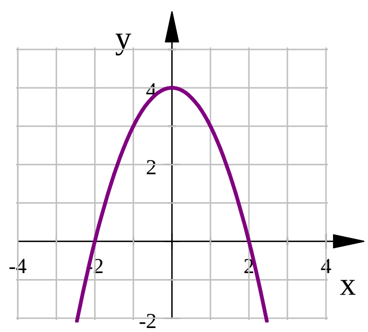
a) $f(x) = 2x - 4,\ \ x_0 = 5,\ L = 6,\ \varepsilon = 0.2$



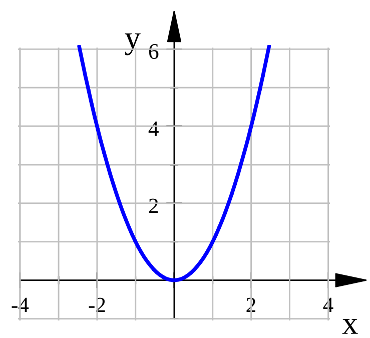
c) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3,\ \ x_0 = -3,\ \ L = 7.5,\ \varepsilon = 0.15$



b) $f(x) = 4 - x^2,\ \ x_0 = -1,\ \ L = 3,\ \varepsilon = 0.25$



d) $f(x) = x^2,\ \ x_0 = 2,\ \ L = 4,\ \varepsilon = 1$



8. En cada uno de los siguientes ejercicios se da una función $f(x)$ y los números L, x_0 y $\varepsilon > 0$. Encuentra, en cada caso, un intervalo abierto alrededor de x_0 en donde se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$. Después da un valor para $\delta > 0$ tal que para toda x que satisfaga $0 < |x - x_0| < \delta$ se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$

a) $f(x) = x + 1,\quad L = 5,\quad x_0 = 4,\quad \varepsilon = 0.01$
b) $f(x) = x^2 - 5,\quad L = 11,\quad x_0 = 4,\quad \varepsilon = 1$
c) $f(x) = mx + b,\ m > 0\quad L = \frac{m}{2} + b,\quad x_0 = \frac{1}{2},\quad \varepsilon = c > 0$

9. Encuentra $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ en cada caso siguiente

a) $f(x) = 10x^4$

b) $f(x) = 5x^3 - 20x^2 + 15x - 100$

c) $f(x) = 25 + 10x - 15x^2 - 3x^4$

10. Evalúa el límite $\lim_{x \to 5} \left(2x^2 - 3x + 4\right)$ y verifica númericamente

11. Con la definicion de límite

a) Encuentra la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = x^2 + 2x$, en el punto $(-3, 3.)$

b) Encuentra la ecuación de la recta tangente del inciso anterior

c) Gráfica la parábola y la recta tangente como una comprobación de su solución, acercándote al punto $(-3, 3)$ hasta que no pueda distinguirse la parábola y la recta tangente.

12. Para la función $y = x^3 - 4x + 1$

a) Encuentra la pendiente de la tangente a la curva en el punto donde $x = a$

b) Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes en los punto $(1, 2)$ y $(2, 1)$

c) Encuentra un polinomio de segundo grado en el cual se asemeje con la ecuación dada.

Evaluación 3

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Prueba que $\lim_{x \to -1} (2x+5) = 3$

2. Encuentra un intervalo abierto alrededor de x_0 en donde se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$. Después da un valor para $\delta > 0$ tal que para toda x que satisfaga $0 < |x - x_0| < \delta$ se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$, si tenemos que:

a) $f(x) = 2x^2 - 4, \qquad L = 4, \qquad x_0 = 2, \qquad \varepsilon = 0.01$

3. Dado que $\lim_{x \to a} f(x) = 2$, $\lim_{x \to a} g(x) = 5$, $\lim_{x \to a} h(x) = \dfrac{1}{3}$, encuentra los límites que existan. Si el límite no existe, explica por qué

a) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$

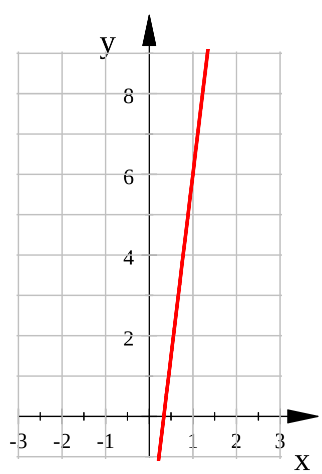
b) $\lim_{x \to a} [f(x)]^3$

c) $\lim_{x \to a} [f(x)\, h(x)\, g(x)]$

d) $\lim_{x \to a} 9h(x)$

4. Para $f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x + 1$, encuentra $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

5. Usa la gráfica para encontrar una $\delta > 0$ tal que para toda x, $0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$, Si $f(x) = 9x - 3$, $x_0 = 1$, $L = 8$, $\varepsilon = 0.1$



2.3. Continuidad

2.3.1. Definición

En matemáticas y ciencias se utiliza la palabra continuo para describir un proceso que se sigue sin cambios abruptos, lo cuál es una característica escencial de muchos procesos naturales. Si hablamos de continuidad en funciones podemos expresarlo intuitivamente de la siguiente manera.

Definición 2.3.1 (Intuitiva de continuidad) *Una función f es continua si su gráfica no contiene interrupciones, ni saltos ni oscilaciones indefinidas. De lo contrario es discontinua o bien no continua.*

En la figura 2.51 se muestran los tres casos posibles para que una función no sea continua

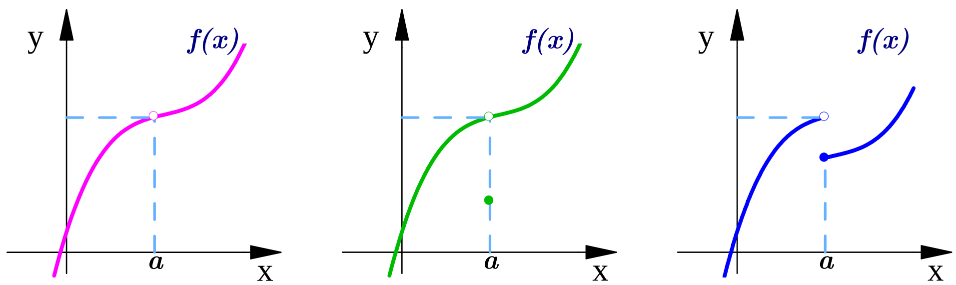


Fig. 2.51. Casos en los que una Función es discontinua

Aunque la definición intuitiva es suficiente para decidir si una función es continua observando simplemente su gráfica, es fácil engañarse, y la definición formal es muy importante.

Definición 2.3.2 (Continuidad) *La función f es continua en un punto a si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Con esta definición queremos decir que necesitamos 3 condiciones para que se cumpla la continuidad:

1. Que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exista,
2. Que $f(a)$ exista, es decir que a está en el dominio de f
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si cualquiera de estas tres no se cumple, entonces f es discontinua en a.

2.3.2. Continuidad de una función polinomial

Como hemos visto en la sección anterior el dominio de cualquier función polinomial son todos los números reales. Además en el teorema 2.2.4 implica lo siguiente

Teorema 2.3.1 (Continuidad de un polinomio) .
Una función polinomial es continua en todo número real c

2.3.3. Operaciones con funciones continuas

Es importante probar si la continuidad se preserva al hacer operaciones entre funciones continuas

Teorema 2.3.2 (Propiedades de continuidad) *Si f y g son funciones continuas en un punto a, y k es una constante distinta de cero entonces*

1. kf *es continua en* a
2. $f+g$ *es continua en* a
3. fg *es continua en* a

Demostración. Como f y g son continuas en a entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$

1)
$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}[kf(x)] &= k\lim_{x\to a} f(x) \\ &= kf(a) \end{aligned}$$
Luego kf es continua.

2)
$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \\ &= f(a)+g(a) \end{aligned}$$
Luego $f+g$ es continua.

3)
$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}[f(x)g(x)] &= \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) \\ &= f(a)g(a) \end{aligned}$$
Luego fg es continua.

■

La composición tambien preserva la continuidad, según el siguiente teorema

Teorema 2.3.3 (Continuidad de una composición de funciones) *Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ y si f es una función continua en L, entonces*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(L)$$

En particular, si g es una función continua en a, y f es una función continua en $g(a)$, entonces $f\circ g$ es continua en a.

Ejemplo 2.3.1 *Muestre que $h(x) = \left(x^2+5\right)^4$ es continua en todo número real*

Solución. Sea $f(x) = x^4$ y $g(x) = x^2+5$. Las dos funciones son continuas en todo número real, por lo tanto su composición

$$h(x) = f(g(x)) = \left(x^2+5\right)^4$$

también es continua en todo número real. ■

Hasta ahora solo hemos considerado la continuidad en un punto, pero tambien es importante considerar la continuidad en un intervalo.

Definición 2.3.3 (Continuidad en un Intervalo) *Una función f es continua sobre un intervalo si es continua en todo número en el intervalo. (Si f se define únicamente en un lado de un punto extremo del intervalo, continua quiere decir continua desde la derecha o continua desde la izquierda)*

Teorema 2.3.4 (Teorema del valor intermedio) *Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$, y sea W un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe al menos un número c entre a y b, tal que $f(c) = W$*

El teorema del valor intermedio afirma que una función continua toma todos los valores intermedios entre los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$. Un uso de este temorema es hallar las raíces de ecuaciones.

Ejemplo 2.3.2 *Demuestre que existe una raíz de la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ entre 1 y 2.*

Solución. Sea $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2,$ debemos probar que existe un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$

Por lo tanto, en el teorema 2.3.4, $a = 1, b = 2$ y $W = 0$

$$\begin{aligned} f(1) &= 4(1)^3 - 6(1)^2 + 3(1) - 2 = -1 < 0 \\ f(2) &= 4(2)^3 - 6(2)^2 + 3(2) - 2 = 12 > 0 \end{aligned}$$

■

por esto, $f(1) < 0 < f(2)$; es decir, $W = 0$ es un número entre $f(1)$ y $f(2)$. Ahora bien, f es continua porque es un polinomio, de modo que el teorema del valor intermedio afirma que existe un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. En otras palabras, la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tiene por lo menos una raíz c en el intervalo $(1, 2)$.

Ejercicios 2.3

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.
Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. ¿Por qué son continuas todas las funciones polinomiales?

2. Sea f discontinua en $x = a$ ¿Puede ser f^2 continua en a? (justifica tu respuesta con un ejemplo)

3. Usa los teoremas vistos en esta sección para demostrar que la ecuación $3x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$ tiene una raíz entre -1 y 0.

4. El costo de fabricación de q automóviles eléctricos, en miles de pesos, es de:

$$C(q) = 5q^3 + 13q^2 + 14$$

mientras que el ingreso, también en miles de pesos, es

$$I(q) = q^4 - 5q$$

Demuestra que existe un valor entre 2 y 10, de la variable q, donde la fábrica ni gana ni pierde. Justifica tu respuesta.

5. Demuestra la continuidad de la función: $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ en el punto $x_0 = -1$. Justifica tu respuesta.

6. ¿Es continua la función $f(x) = x + 2$ en el Intervalo $-3 \leq x \leq 3$? Justifica tu respuesta.

7. ¿Es continua la función $g(x) = x^2 + 2$ en el Intervalo $0 \leq x \leq 5$? Justifica tu respuesta.

2.4. Derivada

2.4.1. Secantes y Tangentes

Si queremos encontrar la recta tangente a una función $f(x)$ en un punto $P=(a,f(a))$, consideraremos un punto cercano $Q=(x,f(x))$ de tal forma que x sea distinto de a, y trazamos una recta que una al punto P con el punto Q como se muestra en la figura 2.52

La pendiente de la recta que une a P y Q es: $\quad m=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Si acercamos el punto Q a lo largo de la función $f(x)$, haciendo que x se acerque lo más posible a a, y trazamos rectas que pasen por P y Q

Entonces podemos decir que la tangente l a la curva $f(x)$ en el punto P, es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiende a P. (figura 2.53).

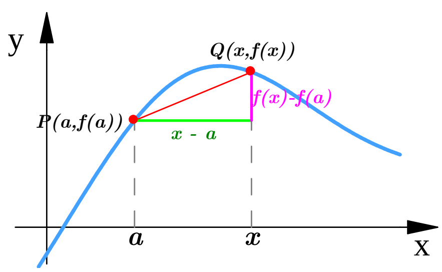


Fig. 2.52. Secante de una curva

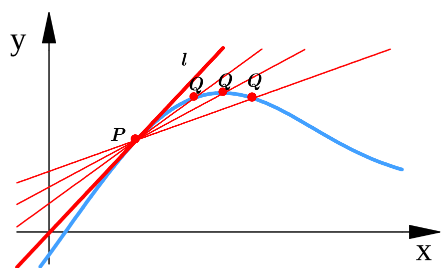


Fig. 2.53. Tangente en el punto P

Definición 2.4.1 (Pendiente) *La recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $P=(a,f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente*

$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

cuando el límite existe

Si ahora llamamos h a la distancia que hay entre a y x, entonces $x=a+h$, como se muestra en la figura 2.54. Cuando $x\to a$ significa que la distancia entre x y a se hace tan pequeña como se quiera, esto significa que $h\to 0$.

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P es

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

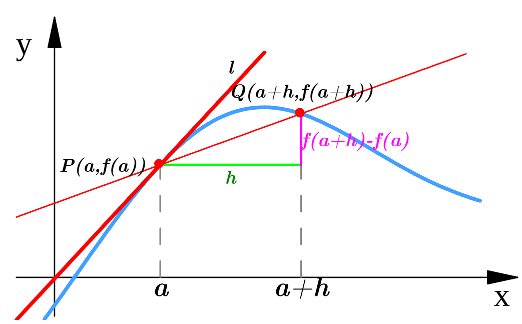


Fig. 2.54. Tangente a una curva

2.4.2. Definición de derivada

Definición 2.4.2 (Derivada de una función) *La derivada de una función f en un número a, se indica mediante*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Si el límite existe decimos que la función f es **derivable** en a.Decimos también que f es **derivable** si f es derivable en a para todo a del dominio de f.

Generalizando, si hacemos que el punto a varíe, y reemplazamos en la ecuación de derivada a a con una variable x tenemos que

La **Derivada de una función** es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para cualquier número x para el cual este límite exista.

Las notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D$$

2.4.3. Interpretación geométrica

Geometricamente la derivada de una función f en el punto a es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto a.

Ejemplo 2.4.1 *Para la función* $f(x) = x^2 + 1$ *encontrar*

a) La pendiente de la recta tangente en el punto $(-1, 2)$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto $(-1, 2)$

Solución.

a) Sea $(x, f(x))$ *un punto cualquiera de la gráfica de* f.

La pendiente de la recta tangente en él se tiene mediante:

$$\begin{aligned} m &= f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left((x+h)^2 + 1\right) - \left(x^2 + 1\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (h + 2x) \\ &= 2x \end{aligned}$$

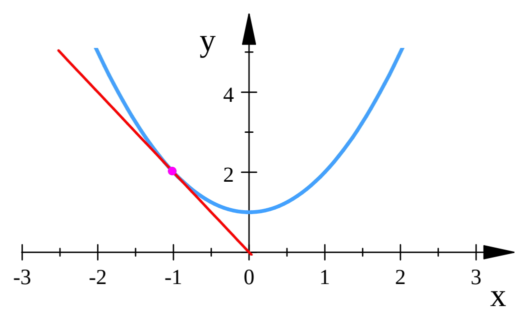


Fig. 2.55.

De tal manera, la pendiente en cualquier punto $(x, f(x))$ *de la gráfica de* f *es* $m = 2x$. *En el punto* $(-1, 2)$, $x = 0$, *así*

$$m = 2(-1) = -2$$

b) La ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 2)$ *y tiene por pendiente* $m = 2$, *es*

$$\begin{aligned} y - 2 &= -2(x - (-1)) \\ y &= 2x + 4 \end{aligned}$$

■

2.4.4. Interpretación Física. Velocidades

Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento del objeto respecto al origen, en el instante t.

La función f que describe el movimiento se conoce como **función de posición** del objeto.

En el intervalo de $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a+h) - f(a)$.

La **velocidad promedio** en este intervalo de tiempo de $t = a$ hasta $t = a + h$ es

$$v_{prom} = \frac{cambio\ en\ la\ posición}{cambio\ en\ el\ tiempo} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que es lo mismo que la pendiente de la secante PQ en la figura 2.54

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre lapsos $[a, a+h]$ más y más cortos, así se define la velocidad instantanea

Definición 2.4.3 (Velocidad Instantanea) *Si un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado con función de posición $f(t)$, entonces su velocidad instantánea en el instante a es*

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que el límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

En otras palabras, la función velocidad es la derivada de la función posición. La velocidad puede ser positiva, cero o negativa.

La rápidez de un objeto se define como el valor absoluto de su velocidad, y nunca es negativa.

La posición de un objeto en caída libre (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad se obtiene mediante la ecuación

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \qquad\qquad función\ posición$$

donde: s_0 es la altura inicial del objeto, v_0 la velocidad inicial y g la aceleración de la gravedad, que en la superficie terrestre es de $9.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ o bien $32\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}^2}$

Ejemplo 2.4.2 *Si se deja caer una bola de billar desde una altura de 100 pies, su altura s en el instante t se representa mediante la función posición $s(t) = -16t^2 + 100$ donde s se mide en pies y t en segundos. Encontrar su velocidad media en el intervalo $[1, 2]$*

Solución. *En este caso el incremento de tiempo es $h = 2 - 1 = 1$segundo. En el intervalo $[1, 2]$ el objeto cae desde una altura*

$s(a) = s(1) = -16(1)^2 + 100 = 84$ *pies,* *hasta*

$s(a+h) = s(2) = -16(2)^2 + 100 = 36$ *pies,* *La velocidad media o promedio es:*

$$v_{prom} = \frac{36 - 84}{1} = -48$$

Así la velocidad media es de -48 pies por segundo. (El signo negativo indica que el objeto va hacia abajo). ■

Ejemplo 2.4.3 *Un objeto, inicialmente en reposo, cae debido a la acción de la gravedad.*

a) Determine su velocidad instantánea en $t = 3.8$ segundos.

b) ¿Cuánto tiempo tardará el objeto para alcanzar una velocidad instantánea de 112 metros por segundo?

Solución.

a) La función que describe la posición del objeto en el instante t es $f(t) = 4.9t^2$

la posición en el instante $t + h$ es $f(t+h) = 4.9(t+h)^2 = 4.9t^2 + 9.8ht + 4.9h^2$

calculamos la velocidad instantánea

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(4.9t^2 + 9.8ht + 4.9h^2\right) - \left(4.9t^2\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4.9h^2 + 9.8th}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(4.9h + 9.8t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (4.9h + 9.8t) = 9.8t \end{aligned}$$

En el tiempo $t = 3.8$

$$v(3.8) = 9.8(3.8) = 37.24$$

Así la velocidad instantánea en 3.8 segundos es 37.24 metros por segundo.

b) Debemos encontrar el tiempo en que la velocidad instantánea sea 112 metros por segundo, hacemos $v = 112$ y despejamos t, así

$$\begin{aligned} v(t) = 9.8t &= 112 \\ 9.8t &= \frac{112}{9.8} \\ t &= 11.429 \end{aligned}$$

La solución es $t = 11.429$ segundos.

■

Ejemplo 2.4.4 *En el instante $t = 0$, un saltador se lanza desde un trampolín que está a 32 pies sobre el nivel del agua de la piscina. La posición del saltador está dada por $s(t) = 16t^2 + 16t + 32$ donde s se mide en pies y t en segundos*

a) ¿Cuánto tarda el saltador en llegar al agua?

b) ¿Cuál es su velocidad al momento del impacto?

Solución.

a) Para determinar el momento en que toca el agua hacemos $s = 0$ y despejamos t

$$\begin{aligned} s(t) = -16t^2 + 16t + 32 &= 0 \\ -16\left(t^2 - t - 2\right) &= 0 \\ -16(t+1)(t-2) &= 0 \\ t &= -1 \qquad o \qquad t = 2 \end{aligned}$$

Como el tiempo debe ser positivo, es decir $t \geq 0$, seleccionamos el valor positivo $t = 2$

Así que el saltador tarda 2 segundos en tocar el agua.

b) Su velocidad en el instante t está dada por

$$\begin{aligned} v(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left(-16(t+h)^2 + 16(t+h) + 32\right) - \left(-16t^2 + 16t + 32\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{16h - 32ht - 16h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(16 - 32t - 16h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (16 - 32t - 16h) \\ v(x) &= 16 - 32t \end{aligned}$$

La velocidad en el instante t está dada por $v(x) = 16 - 32t$

■

2.4.5. Otras razones de cambio

La velocidad de una partícula recibe a veces el nombre de "tasa de variación de su posición". Esta noción de la derivada, como una tasa de variación o tasa de cambio, se aplica a otras situaciones físicas en las cuales alguna cantidad varía con el tiempo.

Por ejemplo la tasa de variación de masa de un objeto en crecimiento significa la derivada de la función m donde $m(t)$ es la masa en el tiempo t.

Otras tasas de cambio consideradas son la densidad de un alambre (la tasa de cambio de la masa con respecto a la distancia); el costo marginal (la tasa de cambio del costo con respecto al número de artículos producidos), la corriente (la tasa de cambio de la carga eléctrica con respecto al tiempo), etc.

En cada caso se debe distinguir entre una tasa de cambio promedio en un intervalo y una tasa de cambio instantánea en un punto.

2.4.6. Derivada de una función Polinomial

No todas las funciones son derivables, es importante considerar lo siguiente

Definición 2.4.4 *Una función f es derivable en a si $f'(a)$ existe. Es derivable en un intervalo abierto (a, b) si es derivable en cada número del intervalo.*

Teorema 2.4.1 *Si una función $f(x)$ es derivable en el punto a entonces es continua en el punto a.*

Esto quiere decir que la diferenciabilidad implica continuidad, pero no el recíproco ya que la continuidad no implica diferenciabilidad, es decir, no porque una función sea continua en un punto tiene que ser derivable en ese punto.

Por lo tanto una función polinomial $f(x)$ está definida para cualquier número real; por lo que podemos decir que siempre existirá el límite

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

concluimos que una función polinomial siempre es derivable.

Ejemplo 2.4.5 *Encuentre la derivada de $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 1$*

Solución. *tenemos que* $f(x+h) = 3(x+h)^3 + 6(x+h)^2 + 1 =$

Así por la definición de derivada

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(3h^3+9h^2x+6h^2+9hx^2+12hx+3x^3+6x^2+1\right)-\left(3x^3+6x^2+1\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3h^3+9h^2x+6h^2+9hx^2+12hx}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(3h^2+9hx+6h+9hx^2+12x\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(3h^2+9hx+6h+9hx^2+12x\right) \\
f'(x) &= 9x^2+12x
\end{aligned}
$$

■

Ejercicios 2.4

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Considera la función $f(x) = x^2$ y un punto cualquiera de su dominio x_0; calcula $f'(x_0)$

2. Utiliza la definición de dierivada para probar que si la función: $f(x) = 2x^2 + 1$, entonces $f'(x) = 4x$

3. Si $f(x) = x^3 - x$, encuentra una fórmula para $f'(x)$ utilizando la definición

4. Confirma que la derivada de $g(x) = x^3$ es $g'(x) = 3x^2$

5. ¿La curva $y = x^3$ tiene alguna pendiente negativa? De ser así, ¿en qué valores de x?. Justifica tu respuesta.

6. Para $f(x) = 1 + 4x - x^2$, aplica la definición de derivada para encontrar $f'(x)$ y $f''(x)$. Usa algún software para graficar f, f', f'' en el mismo sistema coordenado.

7. Para la función $f(x) = x^2$

a) Calcula $f'(1)$

b) Usa la aproximación lineal para f en $a = 1$, con el fin de estimar $f(x)$ para $x = 0.9, 0.95, 0.99, 1.01, 1.05$ y 1.1. ¿Cómo se comparan estas estimaciones con los valores reales?

c) Grafica f y su tangente en $(1, 1)$¿Las gráficas apoyan sus comentarios al inciso anterior?

8. Encuentra una ecuación para la recta tangente dada en los siguientes ejercicios, por último dibuja la gráfica de la curva y su tangente en un mismo sistema de coordenadas

a) La recta tangente en $x = 1$, a la gráfica de $y = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$

b) La función es $f(t) = 6t - t^2$ en $t = 4$

9. Para la curva $y = x^3 - 4x + 1$

a) Encuentra la ecuación para la recta perpendicular a la tangente a la curva, en el punto $(2, 1)$.

b) ¿Cuál es la pendiente mínima en la curva? ¿En qué punto de la curva se da dicha pendiente?

c) Encuentra las ecuaciones para las tangentes a la curva en los puntos donde la pendiente de la curva es 8.

10. Para la curva $y = x^3 - x$

a) Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 0)$.

b) Utiliza un software para graficar en el mismo sistema de coordenadas la curva y la tangente. Si la tangente intersecta a la curva en otro punto, utiliza el software para estimar las coordenadas del punto.

c) Confirma tu estimación de las coordenadas del segundo punto de intersección resolviendo simultaneamente las ecuaciones de la curva y la tangente.

11. Un deposito contiene 1000 galones de agua que se drenan desde la parte inferior en media hora. Los valores que aparecen en la tabla muestran el volumen V de agua que resta en el tanque (en galones) una vez que transcurren t minutos.

$t\,(\text{mín})$	5	10	15	20	25	30
$V\,(gal)$	694	444	250	111	28	0

a) Si P es el punto $(15, 250)$ en la gráfica de V, encuentre las pendientes de las rectas secantes PQ cuando Q es el punto en la gráfica con $t = 5, 10, 20, 25$ y 30.

b) Estime la pendiente de la recta tangente en P promediando las pendientes de dos rectas secantes.

c) Use una gráfica de la función para estimar la pendiente de la recta tangente en P. (Esta pendiente representa la cantidad a la que fluye el agua desde el tanque después de 15 minutos)

Evaluación 4

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. ¿Porqué son continuas todas las funciones polinomiales? ¿porqué son derivables?

2. Muestra que la ecuación $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ tiene una raiz entre 0 y 1.

3. Es continua la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$

4. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2$ en el punto $(1, -1)$. Dibuja la gráfica y la tangente.

5. Usa la definición para calcular la derivada de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $g(x) = 3x^2 + 4x + 1$

6. Si se lanza una roca hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de $10\,\mathrm{m/s}$, su altura en metros t segundos despúes se proporciona mediante $y = 10t - 1.86t^2$

a) Hallar la velocidad promedio en los intervalos de tiempo $[1, 2]$, $[1, 1.5]$ y $[1, 1.1]$

b) Estimar la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

2.4.7. Reglas básicas de Derivación

El proceso de hallar la derivada de una función recibe el nombre de derivación. El proceso de hallar la derivada de una función utilizando la definición puede resultar generalmente laborioso.

Con algunos teoremas se puede obtener un conjunto de reglas y obtener así un proceso mecánico para derivar una clase muy amplia de funciones, formadas a partir de unas pocas funciones simples mediante el proceso de suma, multiplicación, división y composición.

No debemos olvidar que hay varias formas de denotar la derivada de una función $f(x)$, tales como $f'(x)$, $D_x f$, $\dfrac{d}{dx}f$, etc. En esta seccíon usaremos $f'(x)$ y $\dfrac{d}{dx}f(x)$.

La primera regla es para encontrar la derivada de una constante, la gráfica de una función constante es una recta horizontal que tiene pendiente cero en cualquier punto. Así:

Teorema 2.4.2 (Derivada de una constante) *Si $f(x) = c$, donde c es una constante, entonces para cualquier número x*

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

Demostración.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

■

Ejemplo 2.4.6 *Encuentre la derivada de*

$$f(x) = 5, \qquad g(x) = a, \qquad h(x) = \frac{2b}{\sqrt{3}}$$

Solución. En este caso para cada una de las funciones la variable de derivación es x, Así:

$$f'(x) = 0, \qquad g'(x) = 0, \qquad h'(x) = 0.$$

■

Cuando $f(x)$ es la función identidad, su gráfica es una recta que pasa por el origen con pendiente 1, así:

Teorema 2.4.3 (Derivada de la función identidad) *Si $f(x) = x$, entonces*

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

Demostración.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

■

Teorema 2.4.4 (Derivada de una Potencia) *Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo entonces*

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^2 - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h\right) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.4.7 *Encuentre la derivada de* $y = x^3, \qquad f(x) = x^{10}, \qquad g(x) = x^5$

Solución. $y = x^3, \qquad y' = 3x.$

$f(x) = x^{10}, \qquad f'(x) = 10x^9.$

$g(x) = x^5, \qquad g'(x) = 5x^4.$ ■

Teorema 2.4.5 (Regla del Múltiplo Constante) *Si c es una constante y f es una función derivable, entonces*

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x) = cf'(x)$$

Demostración. Sea $g(x) = cf(x)$, calculamos $g'(x)$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} c\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) \\
&= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= cf'(x)
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.4.8 *Encuentre la derivada de las siguientes funciones*

a) $f(x) = 3x$ *b)* $v(t) = 2\pi x$ *c)* $g(x) = \sqrt{2}x^4$ *d)* $r(s) = \frac{1}{7}s^2$

Solución.

$a)$ $f(x) = 3x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}[3x] \\ &= 3\frac{d}{dx}x \\ &= 3(1) = 3 \end{aligned}$$

$b)$ $v(t) = 2\pi x$

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{d}{dx}[2\pi x] \\ &= 2\pi\frac{d}{dx}x \\ &= 2\pi(1) = 2\pi \end{aligned}$$

$c)$ $r(s) = \frac{1}{7}s^2$

$$\begin{aligned} r'(s) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{7}s^2\right) \\ &= \frac{1}{7}\frac{d}{dx}\left(s^2\right) \\ &= \frac{1}{7}(2s) \\ &= \frac{2s}{7} \end{aligned}$$

$d)$ $g(x) = \sqrt{2}x^4$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt{2}x^4\right] \\ &= \sqrt{2}\frac{d}{dx}\left(x^4\right) \\ &= \sqrt{2}\left(4x^{4-1}\right) \\ &= 4\sqrt{2}x^3 \end{aligned}$$

. ■

Teorema 2.4.6 (Regla de la suma) *Si tanto f como g son derivables, entonces*

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) + g'(x)$$

Demostración. Sea $F(x) = f(x) + g(x)$, entonces

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

■

Teorema 2.4.7 (Regla de la Diferencia) *Si tanto f como g son derivables, entonces*

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)-g'(x)$$

Demostración. Sea $F(x)=f(x)-g(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-g(x+h)\right]-\left[f(x)-g(x)\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f'(x)-g'(x)
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.4.9 *Encuentre la derivada de* $f(x)=2x^4+\frac{3}{7}x^3-\sqrt{5}x^2-\frac{x}{2}+8$

Solución. *Usando las reglas de derivación*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(2x^4+\frac{3}{7}x^3-\sqrt{5}x^2-\frac{x}{2}+8\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left[2x^4\right]+\frac{d}{dx}\left[\frac{3}{7}x^3\right]-\frac{d}{dx}\left[\sqrt{5}x^2\right]-\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{2}\right]+\frac{d}{dx}8\\
&= 2\frac{d}{dx}x^4+\frac{3}{7}\frac{d}{dx}x^3-\sqrt{5}\frac{d}{dx}x^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}8\\
&= 2\left(4x^3\right)+\frac{3}{7}\left(3x^2\right)-\sqrt{5}\left(2x\right)-\frac{1}{2}(1)+0\\
&= 8x^3+\frac{9}{7}x^2-2\sqrt{5}x-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.4.10 *Encuentre sobre la curva* $y=x^4-6x^2+4$, *los puntos donde la recta tangente es horizontal.*

Solución. *Se tienen tangentes horizontales donde la derivada es cero. Observe que,*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x^4-6x^2+4\right)\\
&= \frac{d}{dx}x^4-6\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}4\\
&= 4x^3-6(2x)+0\\
&= 4x^3-12x
\end{aligned}$$

igualando a cero y despejando a x se tiene

$$\begin{aligned} 4x^3 - 12x &= 0 \\ 4x\left(x^2 - 3\right) &= 0 \\ 4x &= 0 \qquad \Longrightarrow x = 0 \\ x^2 - 3 &= 0 \qquad \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Así $y' = 0$ *cuando:* $x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3},$ *los puntos correspondientes a estos valores de* x *son:*

Si $x = 0,$ $\quad y = 0^4 - 6(0)^2 + 4 = 4$

Si $x = \sqrt{3},$ $\quad y = \sqrt{3}^4 - 6\left(\sqrt{3}\right)^2 + 4 = y = -5$

Si $x = -\sqrt{3}$ $\quad y = \left(-\sqrt{3}\right)^4 - 6\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 4 = y = -5$

Así los puntos sobre la gráfica donde la pendiente es totalmente horizontal son: $(0,4), \left(\sqrt{3}, -5\right)$ *y* $\left(-\sqrt{3}, -5\right)$ ■

Teorema 2.4.8 (Regla del Producto) *Si tanto f como g son derivables, entonces*

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\,g(x)\right] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

Demostración. Sea $F(x) = f(x)\,g(x)$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+x) - f(x)\,g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+x) - f(x+h)\,g(x) + f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{h} \text{ sumamos y restamos } f(x+h)\,g \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\left(g(x+x) - g(x)\right) + g(x)\left(f(x+h) - f(x)\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+x) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\frac{g(x+x) - g(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) \\ &= \left(\lim_{h\to 0} f(x+h)\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{g(x+x) - g(x)}{h}\right) + \left(\lim_{h\to 0} g(x)\right)\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) \\ &= f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x) \end{aligned}$$

se aplico $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ por definición de continuidad, considerando que la derivabilidad en un punto implica continuidad. ■

Ejemplo 2.4.11 *Encuentre la derivda de la función* $y = \left(2x^2+1\right)\left(x^4-x^3\right)$

Solución. *Aplicando la regla del producto*

$$\begin{aligned} y' &= \left(2x^2+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^4-x^3\right)+\left(x^4-x^3\right)\frac{d}{dx}\left(2x^2+1\right) \\ &= \left(2x^2+1\right)\left(4x^3-3x^2\right)+\left(x^4-x^3\right)(4x) \\ &= 8x^5-6x^4+4x^3-3x^2+4x^5-4x^4 \\ &= 12x^5-10x^4+4x^3-3x^2 \end{aligned}$$

■

2.4.8. Regla de la cadena

Con las reglas básicas de derivación vistas hasta ahora podemos derivar cualquier polinomio, pero si el polinomio está escrito como $P(x) = \left(x^2+4x-1\right)^{20}$, tendriamos que desarrollar la potencia para poder derivarlo, y estó resulta ser un proceso largo y tedioso.

Notemos que la función $P(x)$ podemos escribirla como una composición de las funciones $f(x) = x^{20}$, $g(x) = x^2+4x-1$ Así

$$P(x) = f(g(x)) = f\left(x^2+4x-1\right) = \left(x^2+4x-1\right)^{20}$$

La derivada de una composición de funciones recibe el nombre de Regla de la cadena

Teorema 2.4.9 (Regla de la Cadena) . *Sean* $y = f(u)$ *y* $u = g(x)$. *Si* g *es derivable en* x *y* f *es derivable en* $u = g(x)$, *entonces la función compuesta* $f \circ g$, *definida por* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, *es derivable en* x *y*

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x) = f'(u)\,u'(x)$$

O bien $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Ejemplo 2.4.12 *Encuentre la derivada de* $y = \left(x^2+4x-1\right)^{20}$

Solución. *en este caso* $u = g(x) = x^2+4x-1$, $f(u) = u^{20}$,

así $u'(x) = 2x+4$, $f'(u) = 20u^{19}$

$$\begin{aligned} y' &= f'(u)\,u'(x) \\ &= 20u^{19}(2x+4) \\ &= 20\left(x^2+4x-1\right)^{19}(2x+4) \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.4.13 *Encuentre la derivada de* $y = (4x+2)^5 - \left(6x^3+1\right)^9$

Solución. *por regla de la diferencia y regla de la cadena tenemos*

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}(4x+2)^5 - \frac{d}{dx}\left(6x^3+1\right)^9 \\ &= 5(4x+2)^4(4) - 9\left(6x^3+1\right)^8\left(18x^2\right) \\ &= 20(4x+2)^4 - 162x^2\left(6x^3+1\right)^9 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.4.14 *Encuentre la derivada de* $y = \left(x^2-5x+2\right)^3(5x+3)^{10}$

Solución. *Aplicando regla del producto y regla de la cadena tenemos,*

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\left[\left(x^2-5x+2\right)^3(5x+3)^{10}\right] \\ &= \left(x^2-5x+2\right)^3\frac{d}{dx}(5x+3)^{10} + (5x+3)^{10}\frac{d}{dx}\left(x^2-5x+2\right)^3 \\ &= \left(x^2-5x+2\right)^3\left[10(5x+3)^9(5)\right] + (5x+3)^{10}\left[3\left(x^2-5x+2\right)^2(2x-5)\right] \\ &= 50\left(x^2-5x+2\right)^3(5x+3)^9 + (6x-15)(5x+3)^{10}\left(x^2-5x+2\right)^2 \end{aligned}$$

■

Podemos generalizar la derivada de una potencia, si combinamos la derivada de una potencia con la regla de la cadena,

Teorema 2.4.10 (Regla de la Potencia) *Si* n *es cualquier entero positivo, y* $u = g(x)$ *es derivable, entonces*

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

2.4.9. Derivadas de orden superior

La razón de cambio de una razón de cambio de una cantidad, surge en una gran variedad de situaciones. Por ejemplo, la aceleración de un automóvil es la razón de camibo de su velocidad con respecto al tiempo, la cual a su vez es la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo. Si la distancia se mide en kilometros y el tiempo en horas, la velocidad se mide en kilometros por hora, y la aceleración se mide en kilometros por hora^2.

Las expresiones acerca de la razón de cambio de una razón de cambio también se utilizan con frecuencia en economía, en las tasas de inflación.

La razón de cambio de una función $f(x)$ con respecto a x está dada por su derivada es decir por $f'(x)$. De la misma forma la razón de cambio de $f'(x)$ está dada por su derivada es decir por $f''(x)$

Definición 2.4.5 (Segunda Derivada) *La segunda derivada de una función es la derivada de su derivada. Si* $y = f(x)$, *la segunda derivda se expresa como*

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{o bien} \quad f''(x)$$

la segunda derivada da la razón de cambio de la razón de cambio de la función original

Si se deriva una vez más la segunda derivada $f''(x)$ de una función $f(x)$, se obtendra la tercera derivada $f'''(x)$. Al derivar de nuevo se halla la cuarta derivada, que se representa por $f^{(4)}(x)$. En general, la derivada obtenida de $f(x)$ después de n derivaciones sucesivas se denomina derivada de n-ésimo orden o derivada de orden n.

Definición 2.4.6 (Derivada n-ésima) *Para cualquier entero positivo* n, *la n-ésima derivada de una función se obtiene derivando la función de modo sucesivo* n *veces. Si la función original es* $y = f(x)$, *la derivada n-ésima se simboliza por*

$$\frac{d^ny}{dx^n} \quad \text{o bien} \quad f^{(n)}(x)$$

Ejemplo 2.4.15 *Hallar la cuarta derivada de las siguientes funciones*

$a)$ $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1$

$b)$ $g(t) = \left(t^2 - 2t\right)^5$

Solución. $a)$ derivamos 4 veces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(4x^3 + 5x^2 + 6x - 1\right) = 12x^2 + 10x + 6 \\ f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(12x^2 + 10x + 6\right) = 24x + 10 \\ f'''(x) &= \frac{d}{dx}(24x + 10) = 24 \\ f^{(4)}(x) &= \frac{d}{dx}(24) = 0 \end{aligned}$$

$b)$ derivamos 4 veces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dt}\left(\left(1 - 2t^2\right)^5\right) = -20t\left(2t^2 - 1\right)^4 \\ f''(x) &= \frac{d}{dt}\left(-20t\left(2t^2 - 1\right)^4\right) = -20\left(2t^2 - 1\right)^3\left(18t^2 - 1\right) \\ f'''(x) &= \frac{d}{dt}\left(-20\left(2t^2 - 1\right)^3\left(18t^2 - 1\right)\right) = -960t\left(2t^2 - 1\right)^2\left(6t^2 - 1\right) \\ f^{(4)}(x) &= \frac{d}{dt}\left(-960t\left(2t^2 - 1\right)^2\left(6t^2 - 1\right)\right) = -161\,280t^6 + 134\,400t^4 - 28\,800t^2 + 960 \end{aligned}$$

■

Ejercicios 2.5

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

Encuentra la derivada de las siguientes funciones, usando las reglas de derivación

1. $y = \frac{\pi}{6}$

2. $y = 4x^{12}$

3. $y = 7x^2 - 4x$

4. $y = 6x^3 + 3x^2 - 10$

5. $y = -\frac{2}{3}x^6 + 4x^5 - 13x^2 + 8x + 2$

6. $y = (3x+5)^{97}$

7. $y = x^3\left(4x^2 - 5x - 6\right)$

8. $y = (9+x)^5(9-x)$

9. $y = \left(x^4 - 2x^3\right)^5(x-1)^4$

10. $y = \left(x + \left(x^2 - 4\right)^3\right)^{10}$

11. $y = \left(1 + \left(1 + \left(1 + x^3\right)^4\right)^5\right)^6$

2.5. Aplicaciones de derivada.

2.5.1. Máximos y Mínimos absolutos

Una de las aplicaciones de la derivación es encontrar los máximos y mínimos de una función.

Definición 2.5.1 (Máximo y Mínimo Absoluto) *Una función f tiene un* **máximo absoluto** *(o máximo global) en c si*

$$f(c) \geq f(x)$$

para todo x en D, donde D es el dominio de f. El número $f(c)$ se llama valor máximo de f en D.
De manera análoga, f tiene un **mínimo absoluto** *en c si*

$$f(c) \leq f(x)$$

para todo x en D; el número $f(c)$ se denomina valor mínimo de f en D.
Los valores máximo y mínimo de f se conocen como **valores extremos** *de f.*

Ejemplo 2.5.1

Se tiene la gráfica de la función $f(x)$ (figura 2.56)
La función tiene un máximo absoluto en $x = a$, y un minimo absoluto en $x = d$
$f(a)$ es el valor máximo de $f(x)$, y $f(d)$ es el valor mínimo de $f(x)$

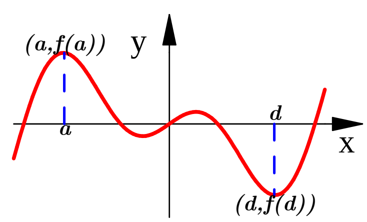


Fig. 2.56

Teorema 2.5.1 (Valor Extremo) *Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$*

En la figura 2.57 se muestran ejemplos del teorema del valor extremo.

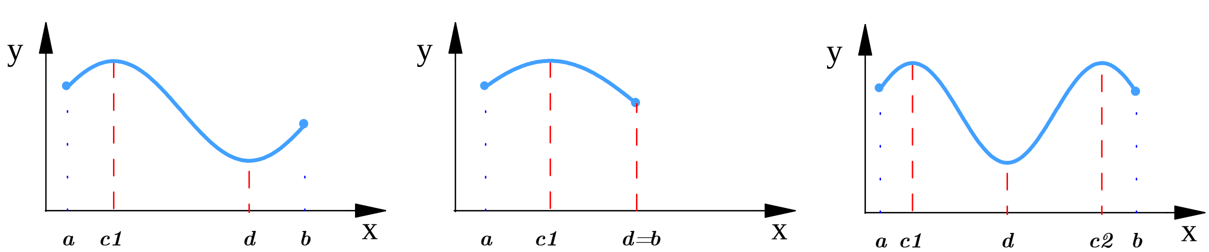


Fig. 2.57.

Si no se cumplen las condiciones de continuidad y de intervalo cerrado, la función no necesariamente tiene que poseer valores extremos.

Ejemplo 2.5.2 (Sin valores extremos)

La función de la gráfica 2.58 es dicontinua en $(0,2]$, *y tiene un valor mínimo en* $f(2)=0$, *pero no tiene valor máximo.*

.

La función de la gráfica 2.59 es continua en $(0,2)$, *y no tiene valor mínimo ni máximo.*

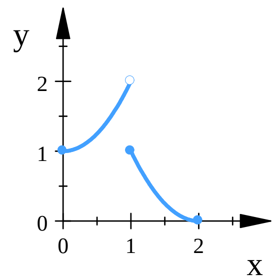


Fig. 2.58.

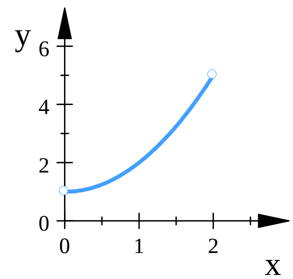


Fig. 2.59

Teorema 2.5.2 (De Fermat) *Si una función* f *tiene un máximo o un mínimo en* c *y si* $f'(c)$ *existe, entonces* $f'(c)=0$

Se define un número crítico como:

Definición 2.5.2 (Número Crítico) *Un número crítico de una función* f *es un número* c *en el domino de* f *tal que* $f'(c)=0$ *o bien* $f'(c)$ *no existe*

Ejemplo 2.5.3 *Encuentra los números críticos de* $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$

Solución. *Derivando la función,*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(3x^4-8x^3-6x^2+24x\right) \\ &= 12x^3-24x^2-12x+24 \end{aligned}$$

factorizamos e igualamos a cero,

$$12(x-1)(x-2)(x+1)= 0$$

Los números críticos son: $x_1=1, x_2=2, x_3=-1.$ ■

Teorema 2.5.3 *Si una función* f *tiene un máximo o mínimo en* c, *entonces* c *es un número crítico de* f.

Para hallar el máximo o mínimo absolutos de una función continua en un intervalo cerrado, podemos usar el siguiente procedimiento.

Método para encontrar máximo y mínimo absoluto de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a,b]$

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en el intervalo (a,b).
2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

Ejemplo 2.5.4 *Calcula los valores máximo y mínimo absolutos de la función* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ *en el intervalo* $[-2,3]$

Solución. Para encontrar los puntos críticos derivamos f

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\ f'(x) &= 6(x+1)(x-2) \\ & \quad 6(x+1)(x-2) = 0 \qquad \text{igualamos a cero} \end{aligned}$$

Los puntos críticos son

$$x = -1, x = 2$$

evaluamos en f, así los valores de f en los puntos críticos son

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 1 = 8 \\ f(2) &= 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 1 = -19 \end{aligned}$$

los valores de f en los extremos del intervalo son:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 12(-2) + 1 = -3 \\ f(3) &= 2(3)^3 - 3(3)^2 - 12(3) + 1 = -8 \end{aligned}$$

Así el mínimo absoluto es $f(2) = -19$

y el máximo absoluto es $f(-1) = 8$. (figura 2.60)

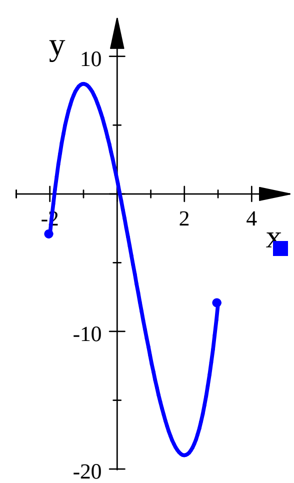


Fig. 2.60. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

2.5.2. Funciones Crecientes y Decrecientes

Definición 2.5.3 *Sea f definida en un intervalo I. Decimos que:*

I) *f es creciente en I si, para toda pareja de números x_1 y x_2 en I.*

$$x_1 < x_2 \quad \textit{entonces} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

II) *f es decreciente en I si, para toda pareja de números x_1 y x_2 en I,*

$$x_1 < x_2 \quad \textit{entonces} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

III) *f es estrictamente monótona en I, si es creciente en I o es decreciente en I.*

Usando la derivada podemos saber en que intervalos una función es creciente y decreciente.

Teorema 2.5.4 (Función Creciente y Decreciente) *Sea f continua en el intervalo I y derivable en todo punto interior de I*

I) *Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, en tal caso f es creciente en ese intervalo.*

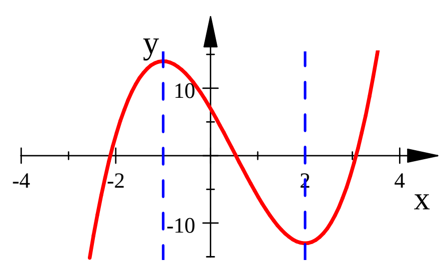
II) *Si $f'(x) < 0$ sobre un intevalo, en consecuencia f es decreciente en ese intervalo.*

Ejemplo 2.5.5 *Si $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, encuentre en dónde f es creciente y en dónde es decreciente.*
Solución. *La función es continua en $\mathbb{R}$. Encontramos la derivada*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\ &= 6(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

necesitamos determinar donde $(x+1)(x-2) > 0$ *y donde* $(x+1)(x-2) < 0$

Así
Para $(x+1)(x-2) > 0$, *la solución es:* $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
para $(x+1)(x-2) < 0$, *la solución es:* $(-1, 2)$
La función se divide en 3 intervalos que son: $(-\infty, -1), (-1, 2), (2, \infty)$. *(fig. 2.61)*
Es creciente en $(-\infty, -1)$ *y* $(2, \infty)$
Es decreciente en $(-1, 2)$



$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$

Fig. 2.61.

Podemos evitar el resolver las desigualdades haciendo una tabla con los intervalos cuyos extremos son los puntos críticos, para saber el signo de f' que corresponde a cada intervalo solo evaluamos a f' en cualquier valor dentro del intervalo.

En este caso como $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$ los puntos críticos son $x = -1$, y $x = 2$, La tabla queda de la siguiente forma:

Intervalos	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	*crece*	*decrece*	*crece*

■

2.5.3. Cóncavidad y convexidad

Definición 2.5.4 (Convexidad y concavidad en un intervalo) .

- *Se dice que una función es convexa en un intevalo, si para todo a y b de este intervalo, el segmento rectilíneo que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f.*
- *Se dice que una función es cóncava en un intevalo, si para todo a y b de este intervalo, el segmento rectilíneo que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por debajo de la gráfica de f.*

En las figuras 2.62 y 2.63 se muestran los ejemplos de una función concava y una convexa

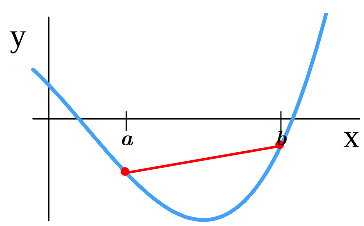


Fig. 2.62. Función Convexa

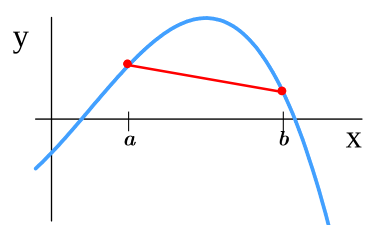


Fig. 2.63. Función Cóncava

La segunda derivada de una función nos ayuda a determinar la concavidad o convexidad de una función en un intervalo.

Teorema 2.5.5 (Concavidad y convexidad) *Sea f una función dos veces derivable en un intervalo I.*

a) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces f es cóncava en I.

b) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces f es convexa en I.

Definición 2.5.5 (Puntos de Inflexión) *Sea f continua en a. Llamamos al punto $(a, f(a))$ un punto de inflexión de la gráfica de f, si f es cóncava a un lado de a y convexa del otro lado de a.*

Esta definición nos lleva a suponer que los puntos de inflexión se pueden encontrar en los puntos donde $f''(x) = 0$, o bien donde $f''(x)$ no existe. Se debe tener cuidado ya que el hecho de que la segunda derivada sea igual a cero en un punto, no implica que esté sea un punto de inflexión.

Una forma fácil de determinar los intervalos donde la función es cóncava o convexa es haciendo una tabla similar a la que hicimos para determinar si es creciente y decreciente.

Ejemplo 2.5.6 *Determine los intervalos donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$ es creciente, decreciente, cóncava y convexa. Determine también los puntos de inflexión.*

Solución. *Para determinar los intervalos donde la función es creciente y decreciente obtenemos la primera derivada de f*

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x+2)(x-4)$$

Igualamos a cero para obtener los puntos críticos

$$\begin{aligned} 3(x+2)(x-4) &= 0 \\ x &= -2, \quad x = 4 \end{aligned}$$

Los intervalos tienen como extremos a -2 y 4. Dividimos el intervalo $(-\infty, \infty)$ en -2, y 4. Hacemos la tabla y evaluamos a f' en cada intervalo

Intervalos	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 4$	$4 < x < \infty$
Signo de f'	$+$	-	$+$
Comportamiento de f	*crece*	*decrece*	*crece*

Luego:

- *La función es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(4, \infty)$*
- *La función es decreciente en $(-2, \infty)$*

Para determinar los intervalos donde la función es cóncava o convexa obtenemos la segunda derivada de f

$$f'' = 6x - 6 = 6(x-1)$$

Igualamos a cero para obtener los posibles puntos de inflexión

$$\begin{aligned} 6(x-1) &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Dividimos el intervalo $(-\infty, \infty)$ en $x = 1$ y evaluamos el valor de f'' en cada intervalo

Intervalos	$-\infty < x < 1$	$1 < x < \infty$
Signo de f''	$-$	$+$
Comportamiento de f	*concava*	*convexa*

Luego

- $f(x)$ *es convexa en el intervalo* $(-\infty, 1)$
- $f(x)$ *es cóncava en el intervalo* $(1, \infty)$
- $f(x)$ *tiene un punto de inflexión en* $x = 1$

  $f(1) = -22$, *así* $(1, -22)$ *es un punto de inflexión de* f

En la fígura 2.64 se muestra la gráfica de la función

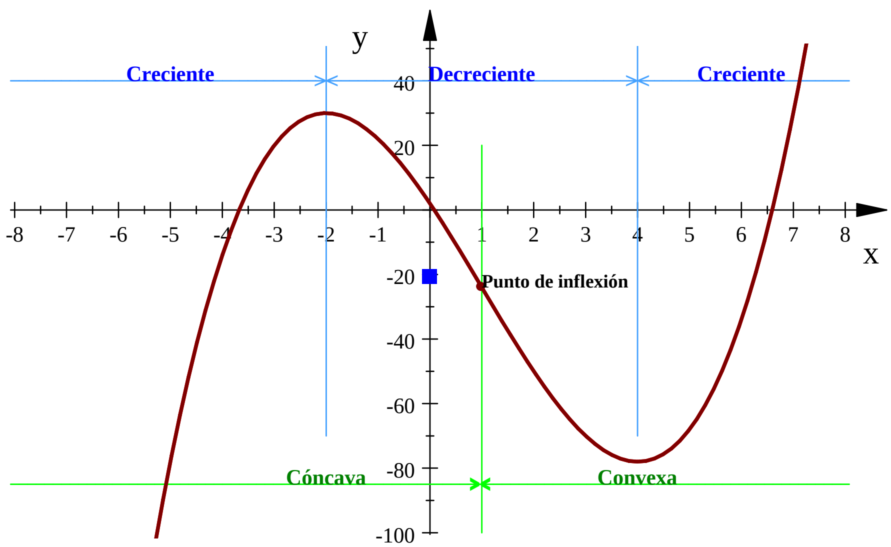


Fig. 2.64.

2.5.4. Máximos y mínimos locales (extremos relativos)

Definición 2.5.6 (Extremos Relativos) *Una función f posee un máximo local (o máximo relativo) en c si $f(c) \geq f(x)$ cuando x está cercano a c.*
De manera análoga, f tiene un mínimo local en c si $f(c) \leq f(x)$, cuando x está cerca de c.

Podemos escribir nuevamente el teorema del punto crítico, de la siguiente forma:

Teorema 2.5.6 *Si una función f tiene un máximo o mínimo local en c, entonces c es un número crítico de f.*

Ejemplo 2.5.7 *A continuación se muestran los máximos y mínimos locales y absolutos de algunas funciones;*

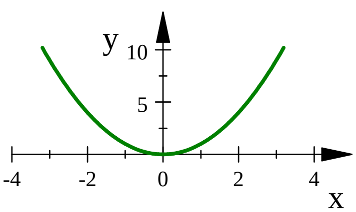


Fig. 2.65. $g(x) = x^2$

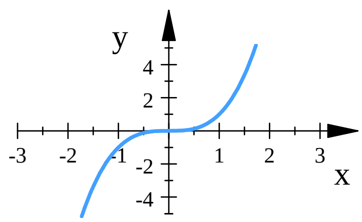


Fig. 2.66. $h(x) = x^3$

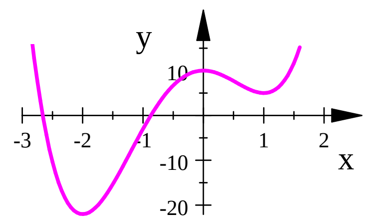


Fig. 2.67. $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 10$

- *Si $g(x) = x^2$, (fig. 2.65) entonces $f(x) \geq f(0)$ porque $x^2 \geq 0$ para todo x, por lo tanto $f(0)$ es el valor mínimo absoluto y local de f. Notemos que aquí no hay un punto máximo.*
- *En la gráfica de la función $f(x) = x^3$ (fig.2.66), podemos ver que está función no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto de hecho tampoco posee valores extremos locales.*
- *La función $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 10$ (fig.2.67)posee un mínimo absoluto en $x = -2$, un mínimo relativo en $x = 1$, un máximo relativo en $x = 0$. En este caso no hay máximo absoluto.*
- *Para la función $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ (fig.2.68), en el intervalo $[-1, 4]$ se puede ver en la gráfica que:*

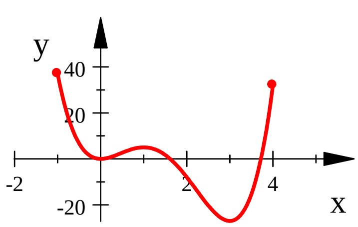
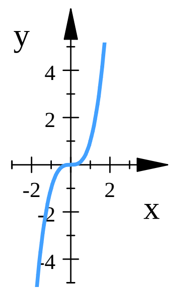


Fig. 2.68. $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$

$f(1) = 5$ es un máximo relativo,
$f(-1) = 37$ es el máximo absoluto
$f(0) = 0$ es un mínimo relativo y
$f(3) = -27$ es un mínimo tanto relativo como absoluto.
Observemos que en $x = 4$ no existe valor máximo relativo porque es un extremo, y tampoco es el máximo absoluto

Aunque el teorema afirma que si hay un máximo o mínimo local o absoluto en un punto c y la derivada existe en ese punto entonces la derivada en el punto c es igual a cero, el recíproco no se cumple, es decir si para algun número a se cumple que $f'(a) = 0$, no necesariamente hay un máximo o mínimo en ese punto.

Ejemplo 2.5.8



Si $f(x) = x^3$, *entonces* $f'(x) = 3x^2$, *de modo que* $f'(0) = 0$. *Pero* f *no tiene máximo ni mínimo en* 0. *Podemos observar en la gráfica que* $x^3 > 0$ *para cualquier* $x > 0$, *pero tambien* $x^3 < 0$ *para cualquier* $x > 0$, *así que el hecho de que* $f'(0) = 0$ *sólo significa que la función* $y = x^3$ *tiene una tangente horizontal en* $(0,0)$. *(fig. 2.69)*

Para encontrar máximos y mínimos locales en una función podemos usar el criterio de la primera o segunda derivada.

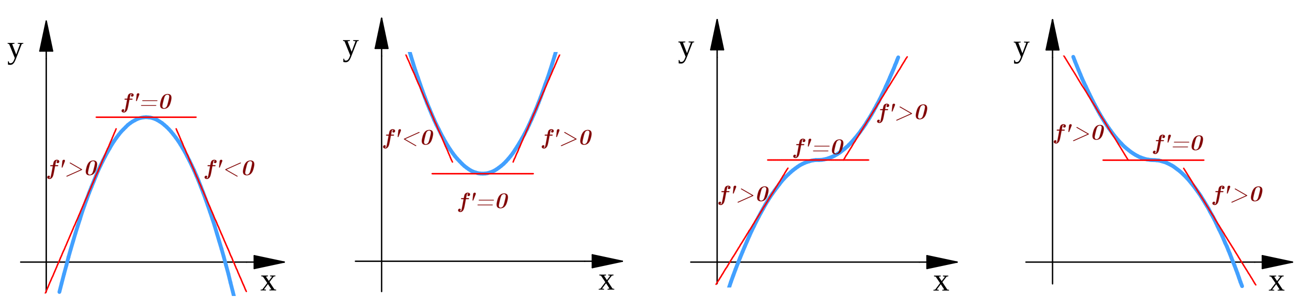
Teorema 2.5.7 (Critero de la primera derivada) *Supongamos que* c *es un número crítico de una función continua* f.

a) Si f' *cambia de positiva a negativa en* c, *o bien si* $f' > 0$ *en algún intervalo a la izquierda de* c *y* $f' < 0$ *en algún intervalo a la derecha de* c, *entonces* f *tiene un* **máximo local** *en* c.

b) Si f' *cambia de negativa a positiva en* c, *o bien si* $f' < 0$ *en algún intervalo a la izquierda de* c *y* $f' > 0$ *en algún intervalo a la derecha de* c, *entonces* f *tiene un* **mínimo local** *en* c.

c) Si f' *tiene el mismo signo en algún intervalo a la izquierda de* c *que en algún intervalo a la derecha, entonces* c *no es un punto máximo ni mínimo local.*

La relación entre f y f' para determinar si un punto es máximo o mínimo local se pueden mostrar gráficamente en las figura 2.70,



a) Máximo local *b) Mínimo local* *c) Ni mínimo ni máximo* *d) Ni mínimo ni máximo*

Fig. 2.70. Relación entre una función y su derivada

Ejemplo 2.5.9 *Encuentre los máximos y mínimos locales de la función* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ *en el intervalo* $(-\infty, \infty)$

Solución. La función es continua en $\mathbb{R}$. Encontramos la derivada y los puntos críticos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\ &= 6(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

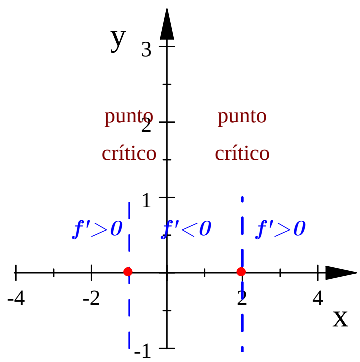


Fig. 2.71.

$$6(x+1)(x-2) = 0$$

Los puntos críticos son: $x = -1, x = 2$

$$f(-1) = 14$$

$$f(2) = -13$$

Dividimos el intervalo $(-\infty, \infty)$ en $x = -1$, y $x = 2$ (fig. 2.71), evaluamos f' en cada intervalo

Intervalos	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	crece	decrece	crece

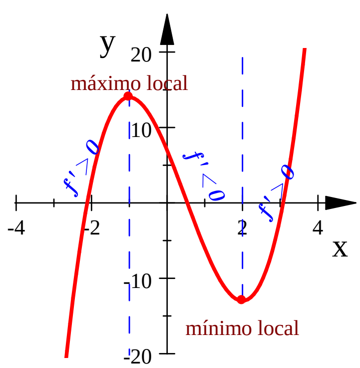


Fig. 2.72

Luego:

- $f(x)$ Es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(2, \infty)$
- $f(x)$ Es decreciente en $(-1, 2)$
- $f(-1) = 14$ es un máximo local
- $f(2) = -13$ es un mínimo local

La gráfica de la función se muestra en la figura 2.72.

. ■

Teorema 2.5.8 (Criterio de la segunda derivada) *Supóngase que* f' *y* f'' *existen en todo punto de un intervalo abierto* (a, b) *que contiene a* c, *y supóngase que* $f'(c) = 0$

a) Si $f''(c) < 0$, $f(c)$ *es un valor máximo local de* f.

b) Si $f''(c) > 0$, $f(c)$ *es un valor mínimo local de* f.

Ejemplo 2.5.10 *Use el críterio de la segunda derivada para encontrar los valores máximo y mínimo de la función* $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$

Solución. *Encontramos los puntos críticos*

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ &= (x-1)(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-1)(x-2)(x+2) &= 0 \\ \textit{Los puntos críticos son:} \quad x &= 1, x = -2, x = 2 \end{aligned}$$

usando el críterio de la segunda derivada

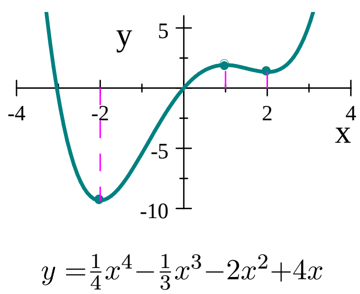


Fig. 2.73.

$f''(x) = 3x^2 - 2x - 4$

$f''(1) = -3 \quad \therefore \quad f(1) = \frac{23}{12}$ *es un máximo local*

$f''(-2) = 12 \quad \therefore \quad f(-2) = -\frac{28}{3}$ *es un mínimo local*

$f''(2) = 4 \quad \therefore \quad f(2) = \frac{4}{3}$ *es un mínimo local.*

(figura 2.73) ■

Observación 2.5.1 *Se debe tener cuidado cuando* $f''(c) = 0$, *ya que el criterio de la segunda derivada no proporciona información en esté caso. Si estó llegase a suceder, debe aplicarse el criterio de la primera derivada.*

2.5.5. Dibujo de funciones polinomiales

El cálculo proporciona una herramienta poderosa para analizar la estructura fina de una gráfica, en especial para identificar los puntos en donde cambian las características de la gráfica. Podemos localizar puntos máximos locales, puntos mínimos locales y puntos de inflexión; podemos determinar, con precisión, en dónde la gráfica es creciente o en dónde es cóncava o convexa.

Para trazar la gráfica de funciones polínomicas es importante determinar:

1. Los puntos críticos de f.
2. Si los puntos críticos son máximos o mínimos.
3. El signo de f' en las regiones entre puntos críticos. (Dónde la gráfica es creciente y en dónde es decreciente)
4. Dónde la gráfica es cóncava y dónde convexa, localizar los puntos de inflexión.
5. Los números x tales que $f(x) = 0$ (si esto es posible)
6. El comportamiento de $f(x)$ cuando x se hace grande o grande negativo (si es posible)
7. Hacer un bosquejo de la gráfica.

Observación 2.5.2 *En algunos casos, el comprobar si una función es par o impar, puede ahorrar mucho trabajo.*

Ejemplo 2.5.11 *Haga un análisis de la función* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$

Solución.

1. Derivamos para encontrar los puntos críticos de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 6x^2 - 6x - 12 &= 0 \\ 6(x+1)(x-2) &= 0 \\ x &= 2,\ x = -1 \end{aligned}$$

2. Usamos el críterio de la segunda derivada para determinar máximos y mínimos

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x - 6 \\ f''(2) &= 12(2) - 6 = 18 \therefore\ f(2) = -17 < 0 \quad \text{es un mínimo.} \\ f''(-1) &= 12(-1) - 6 = -18 \therefore\ f(-1) = 10 > 0 \text{ es un máximo} \end{aligned}$$

3. Para determinar los intervalos donde la función es creciente dividimos el intervalo $(-\infty,\infty)$ en $x=-1$ y $x=2$, luego

Intervalos	$-\infty<x<-1$	$-1<x<2$	$2<x<\infty$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	crece	decrece	crece

- la función es creciente en $(-\infty,-1)$ y $(2,\infty)$
- la función es decreciente en $(-1,2)$

4. Para determinar la concavidad de la función hacemos determinamos los posibles puntos de inflexión haciendo $f''=0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x-6 \\ 12x-6 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para determinar los intervalos donde la función es cóncava o convexa dividimos el intervalo $(-\infty,\infty)$ en $x=\frac{1}{2}$

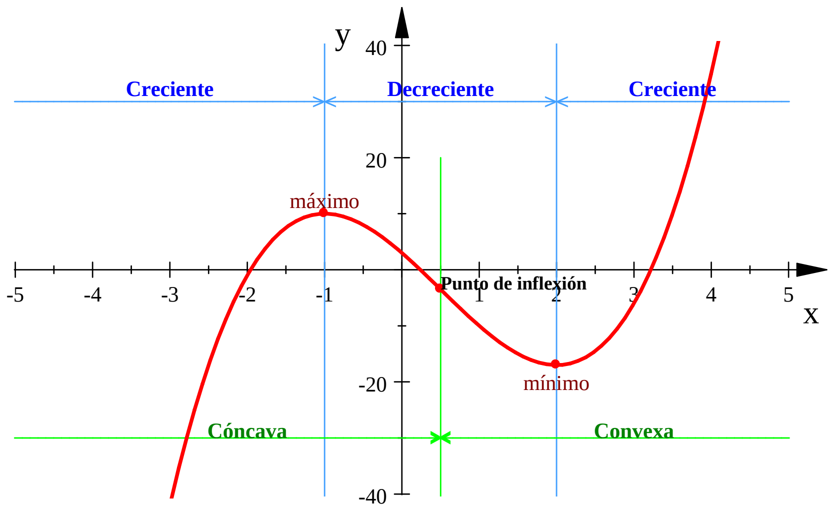
Intervalos	$-\infty<x<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<\infty$
Signo de f''	$-$	$+$
Comportamiento de f	cóncava	convexa

- $f(x)$ es cóncava en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$
- $f(x)$ es convexa en $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
- $f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{2}$ $\quad\therefore$ el punto de inflexión es $\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)$

5. En esté caso no es fácil determinar los puntos donde $f(x)=0$, por lo tanto no lo haremos, ya que no es indispensable.

6. Como $f(x)$ es un polinomio cúbico y el coeficiente de x^3 es positivo, entonces cuando $x\to-\infty$, $f(x)$ es negativa, y cuando $x\to\infty$, $f(x)$ es positiva

7. Hacemos un bosquejo de la gráfica usando toda la información obtenida



■

Ejercicios 2.6

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.
Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Encuentra los números críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 3$

b) $s(t) = t^4 + 4t^3 + 2t^2$

2. Encuentra los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = 3x - x^3$

c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$

d) $f(x) = x^4 - 27x^2$

e) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

3. Para $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 15$, usa derivada para identificar máximos y mínimos locales, y los puntos de inflexión.

4. Para $y = f(x) = x^{10} - 10x$, siendo $0 \leq x \leq 2$, determina el o los valores de x donde:

a) $f(x)$ tiene un máximo o un mínimo local. Indica cuáles son máximos y cuáles mínimos.

b) $f(x)$ tiene un máximo o mínimo global.

5. Encuentra los valores máximos y mínimos absolutos de f sobre el intervalo dado:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2, \qquad [0, 3]$

b) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1, \qquad [-2, 2]$

c) $f(x) = x^2 + 2, \qquad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

6. Demuestra que la función $y = x^3 - 8$ no tiene máximos ni mínimos.

7. Haz un análisis de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ y bosqueja su grafica

Evaluación 5

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Encuentra las tres primeras derivadas de la función $f(x) = 4x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + \dfrac{3x}{2} - 1$

2. Deriva la función $f(x) = (x+1)^4 (2x+3)$

3. Encuentra los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ sobre el intervalo $[0, 3]$

4. Para la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

a) Encuentra los máximos y mínimos de la funcion

b) Determina los intervalos donde es creciente y decreciente

c) Determina los intervalos donde es concáva o convexa

d) Dibuja un bosquejo de su gráfica donde se muestren los 3 puntos anteriores.

5. Demuestra que la función $y = x^3 - 8$ no tiene máximos ni mínimos.

2.5.6. Movimiento Rectilíneo

El movimiento de un objeto en una línea recta, horizontal o vertical, es un movimiento rectilíneo. una función $s = s(t)$ que proporciona la coordenada del objeto sobre una recta horizontal o vertical se denomina función posición. La variable t representa el tiempo y el valor de la función $s(t)$ representa una distancia dirigida, que se mide en centímetros, meros, pies, millas, etc., a partir de un punto de referencia $s = 0$ sobre la recta.

Sobre una escala horizontal, consideramos la dirección s positiva a la derecha de $s = 0$ y sobre una escala vertical, la dirección s positiva la consideramos hacia arriba.

Si la velocidad media de un cuerpo en movimiento sobre un intervalo de tiempo de longitud h es

$$\frac{\text{cambio en posición}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

entonces la razón de cambio instantánea, o velocidad del cuerpo, está dada por

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

Definición 2.5.7 (Función Velocidad) *Si $s(t)$ es una función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su función velocidad $v(t)$ en el instante t es*

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

la rápidez del objeto en el instante t es $|v(t)|$

La velocidad se mide en centímetros por segundo $(\mathrm{cm/s})$, metros por segundo $(\mathrm{m/s})$, pies por segundo $(\mathrm{ft/s})$, kilómetros por hora $(\mathrm{km/h})$, millas por hora $(\mathrm{mi/h})$, etc.

También es posible calcular la razón de cambio de la velocidad

Definición 2.5.8 (Función Aceleración) *Si $v(t)$ es la función velocidad de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su función aceleración $a(t)$ en el instante t es*

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Las unidades típicas para medir la velocidad son $\left(\mathrm{cm/s^2}\right)$, $\left(\mathrm{m/s^2}\right)$, $\left(\mathrm{ft/s^2}\right)$, $\left(\mathrm{km/h^2}\right)$, $\left(\mathrm{mi/h^2}\right)$, etc.

Para un objeto en movimiento rectilíneo

- Desacelera cuando su velocidad y aceleración tienen signos algebraicos opuestos
- Acelera cuando su velocidad y aceleración tienen el mismo signo algebraico.

Ejemplo 2.5.12 *Un objeto se mueve sobre una recta horizontal según la función posición* $s(t) = t^4 - 18t^2 + 25$ *donte* s*, se mide en centímetros y* t *en segundos. Encuentre las funciones velocidad y aceleración del objeto, y la posición y velocidad en* $t = 2$.

Solución.

$$\begin{aligned} \text{velocidad:} \quad & v(t) = s'(t) = 4t^3 - 36t \\ \text{aceleración:} \quad & a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 36 \\ \text{posición en } t = 2\text{:} \quad & s(2) = (2)^4 - 18(2)^2 + 25 = -31\,\text{cm} \\ \text{Velocidad en } t = 2\text{:} \quad & v(2) = 4(2)^3 - 36(2) = -40 = -0.4\,\text{m/s} \end{aligned}$$

■

2.5.7. Aplicaciones a los negocios y economía

Suponga que $C(x)$ es el costo total en que una compañía incurre al producir x unidades de cierto artículo. La función C se llama **función de costo**. Si el número de artículos producidos se incrementa de x_1 hasta x_2, el costo adicional es $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ y la razón de cambio promedio del costo es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Los economistas llaman **costo marginal** al límite de esta cantidad, cuando $\Delta x \to 0$ es decir, la razón de cambio instantánea del costo con respecto al número de artículos producidos:

$$\text{costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

Si se toma $\Delta x = 1$ y n grande (de modo que Δx sea pequeño en comparación con n), tiene

$$C'(n) \approx C(n+1) - C(n)$$

Así entonces, el costo marginal de producir n unidades es aproximadamente igual al costo de elaborar una unidad más [la $(n+1)$-ésima unidad].

A menudo, resulta apropiado representar una función de costo total con un polinomio

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

donde a representa el costo de los gastos generales (renta, calefacción, mantenimiento) y los demás términos representan el costo de las materias primas, la mano de obra y demás. (El costo de las materias primas puede ser proporcional a x, pero los costos de la mano de obra podrían depender en parte de potencias mayores de x, debido a los costos del tiempo extra y de las faltas de eficiencia relacionadas con las operaciones a gran escala).

Ejemplo 2.5.13 *El costo (en dólares) de producir x yardas de una cierta tela es*

$$C(x) = 1200 + 12x - 0.1x^2 + 0.0005x^3$$

a) Hallar la función costo marginal.

b) Hallar $C'(200)$ y explique su significado. ¿Qué predice?

c) Compare $C'(200)$ con el costo de fabricación de la yarda 201 de tela.

Solución.

a) La función de costo marginal es

$$C'(x) = 12 - 0.2x + 0.001\,5x^2$$

b) El costo marginal en el nivel de producción de 200 artículos es

$$\begin{aligned} C'(200) &= 12 - 0.2(200) + 0.001\,5(200)^2 = 32 \\ C'(200) &= \$32/artículo \end{aligned}$$

esto da la cantidad a la cual se incrementan los costos con respecto al nivel de producción, cuando $x = 200$, y predice el costo del artículo 201

c) El costo real de proucir el artículo 201 es

$$\begin{aligned} C(201) - C(200) &= \left(1200 + 12(201) - 0.1(201)^2 + 0.0005(201)^3\right) + \\ &\quad - \left(1200 + 12(200) - 0.1(200)^2 + 0.0005(200)^3\right) \\ &= 32.\,201 \\ C(201) - C(200) &= \$32.\,201/artículo \end{aligned}$$

podemos observar que

$$C'(200) \approx C(201) - C(200)$$

■

Ahora consideremos el mercadeo. Sea $p(x)$ el precio por unidad que la compañia carga si vende x unidades. En tal caso p se llama **función de demanda** (o **función de precio**) y cabe esperar que sea una función decreciente de x. Si se venden x unidades y el precio por unidad es $p(x)$, en consecuencia el ingreso total es

$$R(x) = xp(x)$$

y R se llama **función de ingreso** (o **función de ventas**). La derivada R' de la función de ingreso se denomina **función de ingreso marginal** y es la relación de cambio del ingreso con respecto al número de unidades vendidas.

Si se venden x unidades, después la utilidad total es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

y P es la **función de utilidad**. La **función de utilidad marginal** es P', la derivada de la función de utilidad.

Ejemplo 2.5.14 *Una tienda ha vendido* 200 *quemadores de DVD a la semana, a* $\$350$ *cada uno. Una investigación de merado indica que por cada \$10 de descuento que se ofrezca a los compradores, el número de apartos vendidos se incrementará en 20 a la semana. Encuentre la funciones de demanda y de ingreso, ¿Qué tan grande debe ser la rebaja para maximizar el ingreso?*

Solución. Si x denota los reproductores vendidos a la semana, por lo tanto, el incremento semanal en las ventas es $x - 200$. Por cada incremento de 20 reproductores vendidos, el precio disminuye $\$10$. De manera que por cada reproductor adicional vendido, la dismininución en el precio es $\left(\frac{1}{20}\right)(10) = \frac{1}{2}$ y la función de demanda es

$$\begin{aligned} p(x) &= 350 - \frac{1}{2}(x - 200) \\ &= 450 - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

La función de ingreso es

$$\begin{aligned} R(x) &= xp(x) = x\left(450 - \frac{1}{2}x\right) \\ &= 450x - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Calculemos el máximo de está función

$$R'(x) = 450 - x$$

$$\begin{aligned} 450 - x &= 0 \\ x &= 450 \end{aligned}$$

Por la prueba de la primer derivada podemos ver que

$$\begin{aligned} R'(445) &= 450 - 445 = 5 \\ R'(455) &= 450 - 455 = -5 \end{aligned}$$

Así la función $R'(x)$ tiene un máximo en $x = 450$, y además podemos concluir que es un máximo absoluto. El precio correspondiente es

$$p(450) = 450 - \frac{1}{2}(450) = 225$$

ahora calculamos el descuento haciendo la diferencia entre el precio original y el precio que da el mayor ingreso

$$350 - 225 = 125$$

por consiguiente, para maximizar el ingreso la tienda debe ofrecer un descuento de $\$125$ ■

Ejercicios 2.7

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Un modelo del índice de precios de los alimentos, entre $1984 y 1994$, se expresa con la función $I(t) = 0.00009045t^5 + 0.001438t^4 - 0.06561t^3 + 0.4598t^2 - 0.6270t + 99.33$ donde t se mide en años, desde la mitad del año 1984, de modo que $0 \leq t \leq 10$ e $I(t)$ se mide en dólares de 1987 y a una escala tal que$I(3) = 100$. Estima los tiempos en los que los alimentos estuvieron más baratos y más caros durante el periodo $1984 - 1994$.

2. Se lanza una naranja directo hacia arriba con una velocidad inicial igual a 50 pies/seg. Cuando sale de la mano, se encuentra a 5 pies sobre el suelo. Su altura, en el momento t, se expresa con $y = -16t^2 + 50t + 5$ ¿Hasta qué altura llega antes de regresar al suelo?

3. Cuando uno estornuda, la tráquea se contrae. La rapidez v con la que sale el aire depende del radio r de la tráquea. Si R es el radio normal (en reposo) de la tráquea, entonces, cuando $r \leq R$, la rapidez se expresa con $v = a(R - r)r^2$ siendo a una constante positiva. ¿Qué valor de r maximiza la velocidad de salida?

4. Entre $0\,°\mathrm{C}$ y $30\,°\mathrm{C}$, el volumen V (en cm^3) de $1\,\mathrm{kg}$ de agua a una temperatura T se expresa aproximadamente mediante la fórmula siguiente: $V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$. Encuentra la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima.

5. El 24 de abril de 1990, el transbordador espacial desplegó el telescopio espacial Hubble. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el despegue en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprendieron en $t = 126\,\mathrm{s}$, se expresa mediante $v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$ (en $\mathrm{ft/s}$). Con este modelo, estima los valores máximo y mínimo absolutos de la aceleración del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares.

6. La demanda de boletos de entrada a un parque de diversiones está dada por la ecuación $p = 70 - 0.02q$, donde p es el precio de un boleto en dólares y q es el número de personas que asisten a dicho precio.

a) ¿Cuál es el precio que genera una asistencia de $3,000$ personas? ¿Cuál es el ingreso total a ese precio? ¿Cuál es el ingreso total si el precio es de $\$20$?

b) Escriba la función de ingreso como una función de la asistencia, q, al parque de diversiones

c) ¿Qué asistencia maximiza el ingreso?

d) ¿Qué precio debe cobrarse para maximizar el ingreso?

e) ¿Cuál es el ingreso máximo?

f) ¿Cuál es la ganancia correspondiente?

7. Una partícula se mueve según una ley del movimiento $s = f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t,\ t \geq 0$, donde t se mide en segundos y s en metros.

a) Encuentra la velocidad en el instante t

b) ¿Cuál es la velocidad después de $3\,\mathrm{s}$?

c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?

d) ¿Cuándo se mueve hacia adelante?

e) Encuentra la distancia total recorrida durante los primeros $8\,\mathrm{s}$

f) Encuentra la aceleración en el instante t y después de $3\,\mathrm{s}$

g) ¿Cuándo se acelera y desacelera la partícula?

8. Si Galileo hubiera dejado caer una bala de cañón desde la torre de Pisa, a 179 pies sobre el nivel del piso, la altura de la bala a t segundos de la caída habría sido $s = 179 - 16t^2$.

a) ¿Cuáles habrían sido la velocidad, la rapidez y la aceleración de la bala en el tiempo t?

b) ¿Cuánto habría tardado la bala en llegar al suelo?

c) ¿Cuál habría sido la velocidad de la bala en el momento del impacto?

Evaluación 6

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.
Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Una partícula se mueve según una ley del movimiento $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 18t,\ t \geq 0$, donde t se mide en segundos y s en metros.

a) Encuentra la velocidad en el instante t

b) ¿Cuál es la velocidad después de $2\,\mathrm{s}$?

c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?

d) ¿Cuándo se mueve hacia adelante?

e) Encuentra la distancia total recorrida durante los primeros $5\,\mathrm{s}$

f) Encuentra la aceleración en el instante t y después de $2\,\mathrm{s}$

g) ¿Cuándo se acelera y desacelera la partícula?

2. El 24 de abril de 1990, el transbordador espacial desplegó el telescopio espacial Hubble. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el despegue en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprendieron en $t = 126\,\mathrm{s}$, se expresa mediante $v(t) = 0.001203t^3 - 0.09209t^2 + 23.16t - 3.038$ (en $\mathrm{ft/s}$). Con este modelo, estima los valores máximo y mínimo absolutos de la aceleración del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares.

3. La demanda de boletos de entrada a un parque de diversiones está dada por la ecuación $p = 80 - 0.02q$, donde p es el precio de un boleto en dólares y q es el número de personas que asisten a dicho precio.

a) ¿Cuál es el precio que genera una asistencia de $4,000$ personas? ¿Cuál es el ingreso total a ese precio? ¿Cuál es el ingreso total si el precio es de $\$30$?

b) Escriba la función de ingreso como una función de la asistencia, q, al parque de diversiones

c) ¿Qué asistencia maximiza el ingreso?

d) ¿Qué precio debe cobrarse para maximizar el ingreso?

e) ¿Cuál es el ingreso máximo?

f) ¿Cuál es la ganancia correspondiente?

Parte II

Funciones Racionales Radicales y Seccionadas

Capítulo 3

Funciones racionales, radicales y seccionadas.

3.1. Funciones

3.1.1. Funciones Racionales.

Del mismo modo que un número racional puede escribirse como el cociente de dos enteros, una **función racional** puede expresarse como el cociente de dos polinomios.

Definición 3.1.1 (Función Racional) *Una función Racional es cualquier función que se puede escribir como el cociente de dos polinomios, es decir*

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n y $Q_m(x)$ es un polinomio de grado m

Ejemplo 3.1.1 *La función $y = \dfrac{1}{x}$ (figura3.1), es una función racional*

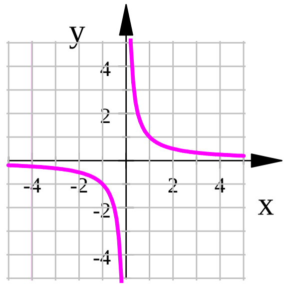


Fig. 3.1.

en este caso:

$P(x) = 1$ es un polinomio de grado cero, y

$Q(x) = x$ es un poliniomio de grado 1

Ejemplo 3.1.2 *La función* $y = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$ *(figura 3.2) es una función racional*

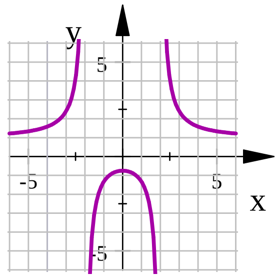


Fig. 3.2

en este caso:

$P(x) = x^2 + 3$ *es un polinomio de grado* 2, *y*

$Q(x) = x^2 - 4$ *es un poliniomio de grado* 2

Notemos que como una función racional es un cociente, debemos evitar la división entre cero, por lo tanto el dominio de la función seran todas las $x \in \mathbb{R}$ para las cuales $Q(x) \neq 0$.

Pero los únicos valores que hacen cero a $Q(x)$ son su raices, entonces,

Dominio de una función racional. Para una función racional de la forma

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

donde $x_1, x_2, .., x_m$ son las raices del polinomio $Q_m(x)$ de grado m , El dominio de $f(x)$ es:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, .., x_m\}$$

Ejemplo 3.1.3 *Encuentre el dominio de la función* $f(x) = \dfrac{x^3+2x}{x^2+2x+1}$

Solución.

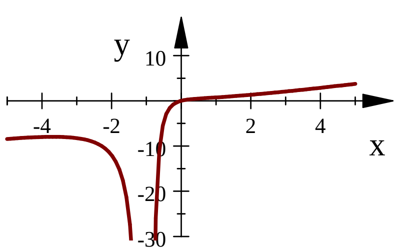


Fig. 3.3. $f(x) = \dfrac{x^3+2x}{x^2+2x+1}$

Primero encontramos las raices de $x^2 + 2x + 1$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 0 \\ x + 1 &= 0, \\ x &= -1 \end{aligned}$$

El dominio de la función es: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

. ■

Ejemplo 3.1.4 *Encuentre el dominio de la función* $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+4}$

Solución.

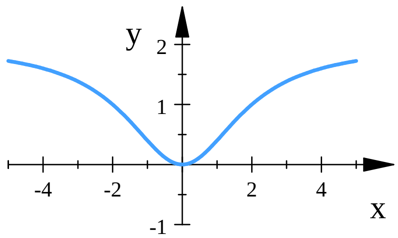


Fig. 3.4

Para encontrar los valores de x *para los cuales el denominador se hace cero tenemos* $x^2+4=0$*pero esta ecuación no tiene soluciones reales, por lo que no hay ningún número real que haga que el denominador de la función sea cero. Así podemos concluir que el dominio de la función son todos los números reales.*

El dominio de la función es: $Dom(f) = \mathbb{R}$

. ■

La gráfica de las funciones del tipo $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ para n entero positivo, tienen comportamientos semejantes dependiendo de si n es par o impar

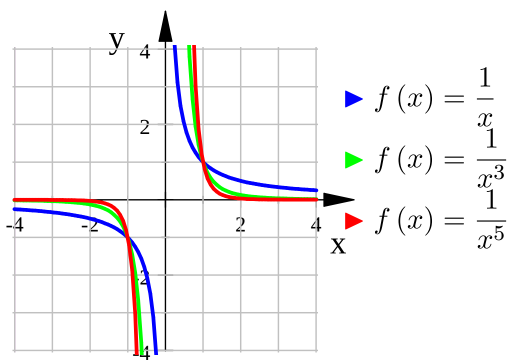


Fig. 3.5. $y = \frac{1}{x^n}$, n *impar*

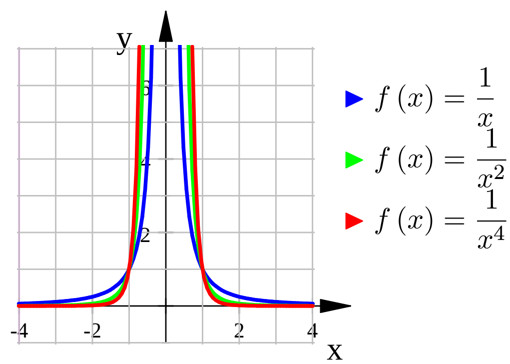


Fig. 3.6. $y = \frac{1}{x^n}$, n *par*

Ejemplo 3.1.5 *Un árbol se planta a* 30 *pies de la base de un poste que mide* 25 *pies de altura. (figura 3.7). Exprese la longitud de la sombra del árbol como una función de su altura.*

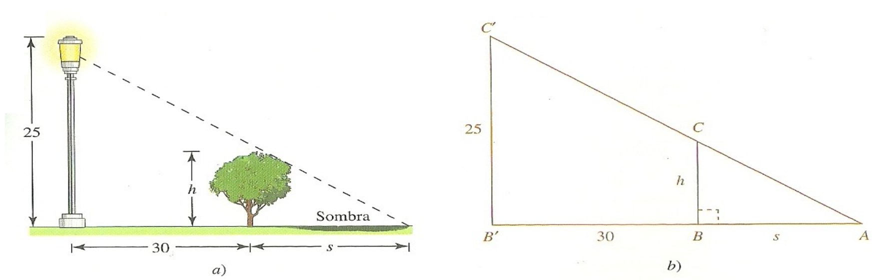


Fig. 3.7. Ejemplo 3.1.5

Solución. Como se muestra en la figura 3.7 a) h y s denotan la altura del árbol y la longitud de su sombra, respectivamente. Debido a que los triángulos mostrados en la figura 3.7 b) son triángulos rectángulos, podria pensarse en utiizar el teorema de Pitágoras. Para este problema, no obstante, el teorema de Pitágoras llevaría por mal camino. La cuestión importante que debe observarse aquí es que los triángulos ABC y AB'C' son semejantes. Luego aplicamos el hecho de que las razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales para escribir

$$\begin{aligned} \frac{h}{s} &= \frac{25}{s+30} \\ h\left(s+30\right) &= 25s \\ 30h &= 25s - ha \\ 30h &= s\left(25-h\right) \\ s &= \frac{30h}{25-h} \end{aligned}$$

Así la función buscada es $s\left(h\right) = \dfrac{30h}{25-h}$.

Tiene sentido físico tomar el dominio de la función $s\left(h\right)$ como $Dom\left(s\right) = \{h \in \mathbb{R} \mid 0 \leq h < 25\}$. Ya que si $h > 25$ entonces $s\left(h\right)$ es negativo, lo cual no tiene sentido en el contexto físico del problema. ([6], p.57, ejemplo 6.). ■

3.1.2. Funciones Radicales

Definición 3.1.2 (Función Radical) *A las funciones de la forma*

$$f\left(x\right) = \left(g\left(x\right)\right)^{1/n} = \sqrt[n]{g\left(x\right)}$$

donde n es un entero positivo, se les llama funciones radicales.

Las funciones $f\left(x\right) = \sqrt{x}$, y $f\left(x\right) = \sqrt[3]{x}$, Son funciones radicales

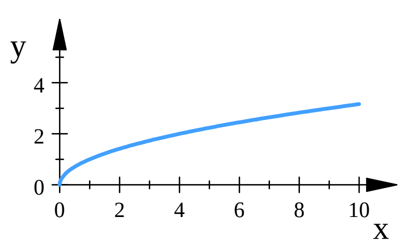


Fig. 3.8. $f\left(x\right) = \sqrt{x}$

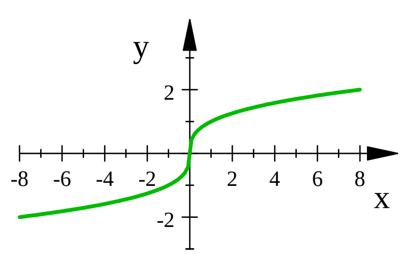


Fig. 3.9. $f\left(x\right) = \sqrt[3]{x}$

El dominio de una función radical $f\left(x\right) = \left(g\left(x\right)\right)^{1/n} = \sqrt[n]{g\left(x\right)}$ es:

- Para n par, el dominio de la función son todos los valores de x tales que $g\left(x\right) \geq 0$;
- Para n impar, el dominio de la función son todos los números reales. que esten en el dominio de $g\left(x\right)$

Ejemplo 3.1.6 *Encuentre el dominio de la función* $f(x)=\sqrt{4x-1}$

Solución.

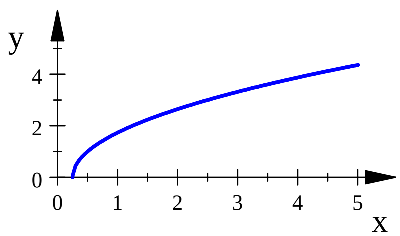


Fig. 3.10. $f(x)=\sqrt{4x-1}$

Como se tiene una raíz par, entonces todo lo que esta dentro de la raíz debe ser positivo es decir debe cumplirse la desigualdad

$$4x-1\geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x\geq \frac{1}{4}$$

■

El dominio de la función es:
$Dom(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq\frac{1}{4}\right\}$, o bien lo podemos escribir como
$Dom(f)=x\in\left[\frac{1}{4},\infty\right)$
El rango de la función es $Rango=\mathbb{R}^{+}$

Ejemplo 3.1.7 *Encuentre el dominio de la función* $f(x)=\sqrt[3]{4x-1}$

Solución.

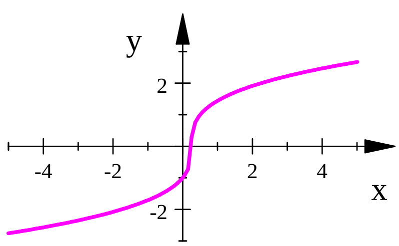


Fig. 3.11. $f(x)=\sqrt[3]{4x-1}$

En este caso como se tiene una raíz impar, y $4x-1$ *está definida para todo número real entonces el dominio de la función son todos los números reales.*
$Dom(f)=\mathbb{R}$, *y el rango es* $Rango=\mathbb{R}$

. ■

La gráfica de las funciones del tipo $f(x)=\sqrt[n]{x}$ para n entero, tienen comportamientos semejantes dependiendo de si n es par o impar

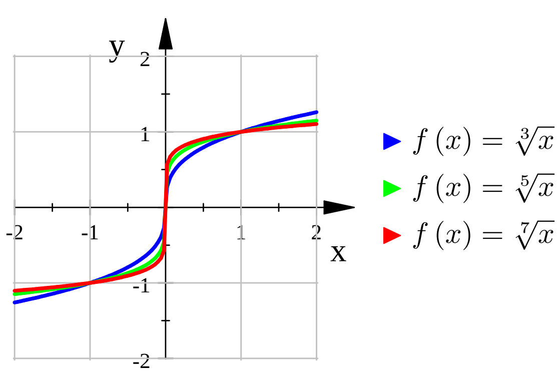


Fig. 3.12. $y=\sqrt[n]{x}$, n *impar*

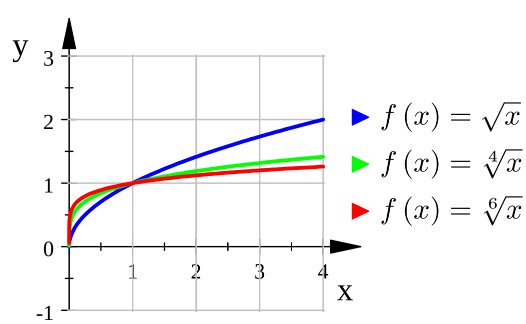


Fig. 3.13. $y=\sqrt[n]{x}$, n *par*

Ejemplo 3.1.8 *Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa fija de longitud* h *y un cateto tiene longitud* x*. Determine una fórmula para el otro cateto ([4], ej. 35, p. 34.)*

Solución.

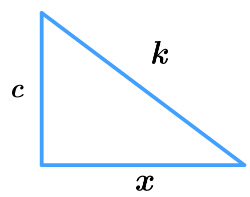


Fig. 3.14.

Podemos calcular la longitud del otro cateto usando el teorema de Pitagoras, Así: $c = \sqrt{k^2 - x^2}$.
La función que determina la longitud del otro cateto es $c(x) = \sqrt{k^2 - x^2}$

. ■

No debemos olvidar las siguientes equivalencias

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}, \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

$$\text{Así una función radical} \quad f(x) = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$$

3.1.3. Funciones por Secciones

Definición 3.1.3 (Función por Secciones) *Una función por secciones es una función en la que el dominio esta dividido en varios intervalos y para cada intervalo se da una regla de correspondencia diferente.*

Por ejemplo para una función $f(x)$ definida en el intevalo I dividido en n secciones la podemos escribir de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si} \quad x \in I_1 \\ f_2(x) & \text{si} \quad x \in I_2 \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ f_n(x) & \text{si} \quad x \in I_n \end{cases}$$

El dominio de la función es la unión de los dominios de cada función

$$Dom(f) = Dom(f_1) \cup Dom(f_2) \cup \ldots \cup \ Dom(f_n)$$

El valor absoluto es una función seccionada, ya que

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

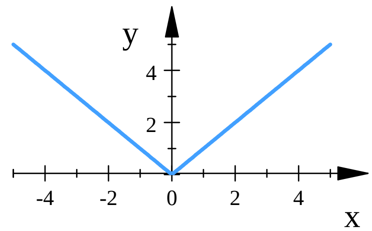


Fig. 3.15. $f(x) = |x|$

Ejemplo 3.1.9 *La siguiente es una función por secciones, cada sección es una función polinomial distinta*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & si \quad x \leq 1 \\ x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Si evaluamos la función en $x = 0, x = 1$ *y* $x = 2$ *obtenemos los siguientes valores*

$f(0) = 1 - 0 = 1$ *ya que* $0 \leq 1$

$f(1) = 1 - 1 = 0$ *ya que* $1 \leq 1$

$f(2) = 2^2 = 4$ *ya que* $2 > 1$

En este caso el dominio de $1 - x$ *es* $\mathbb{R}$*; y el dominio de* x^2 *es* $\mathbb{R}$.

Por lo tanto Dom $f = \mathbb{R}$

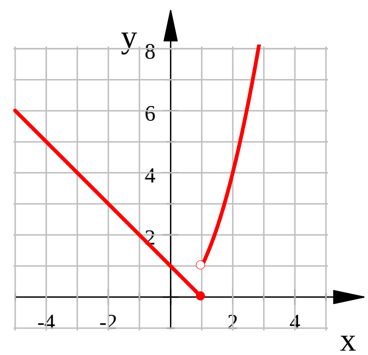


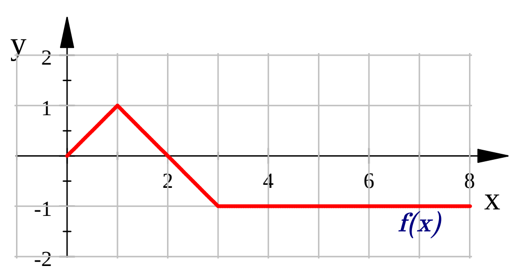
Fig. 3.16.

Ejemplo 3.1.10 *Encuentra una fórmula para la función* f *graficada en la figura 3.17*

Solución.

En el intervalo $[0, 1]$ *tenemos la gráfica de la recta* $y = x$, *en el intervalo* $(1, 3]$ *tenemos la gráfica de la recta* $y = 2 - x$, *y en el intervalo* $(3, \infty)$ *el valor es constante entonces le corresponde* $y = -1$.*La Función seccionada correspondiente a la gráfica es*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & si \quad 1 < x \leq 3 \\ -1 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$



.

Fig. 3.17.

■

.

Ejemplo 3.1.11 *En cierto estado la velocidad máxima permitida en las autopistas es* $65\,\mathrm{mi/h}$ *y la mínima es* $40\,\mathrm{mi/h}$ *. La multa* F *por violar estos límites es* $\$15$ *por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo. Escribe una función que determine la multa* F.

Solución. *La función se divide en 2 partes, expresaremos la velocidad como* v

- *Si la velocidad es menor que* $40\,\mathrm{mi/h}$ *estaremos en el intervalo* $0 < v < 40$, *para determinar cuantas millas estamos debajo de* 40 *hacemos* $40 - v$, *y para calcular el costo multiplicamos por* 15, *así en el intervalo* $0 < v < 40, \implies F(v) = 15(40 - v) = 600 - 15v$

- *Si la velocidad esta entre* 40 *y* $65\ \mathrm{mi/h}$ *es decir* $40 \leq x \leq 65$ *entonces estamos en el rango permitido, por lo tanto no hay multa.*

- *Si la velocidad es mayor a* $65\,\mathrm{mi/h}$, *es decir si* $v > 65$, *determinamos las millas excedentes haciendo* $v - 65$ *y despúes multiplicamos por* 15,*así en el intervalo* $v > 65 \implies F(v) = 15(v - 65) = 15v - 975$

- *La función que determina el costo de la multa queda determinada por:*

$$F(v) = \begin{cases} 600 - 15v & \textit{si} \quad 0 < v < 40 \\ 15v - 975 & \textit{si} \quad v > 65 \end{cases}$$

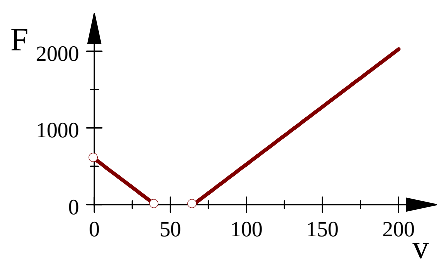


Fig. 3.18. $F(v)$

. ■

3.1.4. Transformación de funciones

Usaremos las definiciones 2.1.8, 2.1.9, 2.1.10, 2.1.11, 2.1.12 que se vieron anteriormente para hacer transformaciones de funciones

Definición 2.1.8 (Desplazamientos verticales). *Supóngase que se tiene una constante $c > 0$, y una función f. Entonces:*

1. $y = f(x) + c$ *es la gráfica de* $f(x)$ *desplazada* c *unidades hacia arriba*
2. $y = f(x) - c$ *es la gráfica de* $f(x)$ *desplazada* c *unidades hacia abajo.*

Definición 2.1.9 (Desplazamientos horizontales). *Sea $c > 0$ constante, y f función . Entonces:*

1. $y = f(x - c)$ *es la gráfica de* $f(x)$ *desplazada* c *unidades hacia la derecha*
2. $y = f(x + c)$ *es la gráfica de* $f(x)$ *desplazada* c *unidades hacia la izquierda*

Definición 2.1.10 (Estiramientos verticales). *Sea $f(x)$ función y $c > 1$ constante. Entonces:*

1. $y = cf(x)$ *la gráfica de* $f(x)$ *se estira* c *veces en dirección vertical*
2. $y = (1/c)\, f(x)$ *la gráfica de* $f(x)$ *se comprime* c *veces en dirección vertical.*

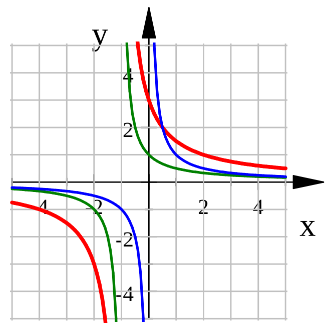
Definición 2.1.11 (Estiramientos horizontales). *Sea f función $c > 1$ constante. Entonces:*

1. $y = f(cx)$ *la gráfica de* $f(x)$ *se comprime* c *veces en dirección horizontal*
2. $y = f(x/c)$ *la gráfica de* $f(x)$ *se estira* c *veces en dirección horizontal*

Definición 2.1.12 (Reflexiones). *Sea f función. Entonces:*

1. $y = -f(x)$ *es la gráfica de* $f(x)$ *se refleja respecto al eje* x.
2. $y = f(-x)$ *es la gráfica de* $f(x)$ *se refleja respecto al eje* y.

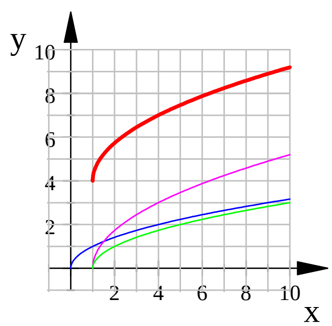
Ejemplo 3.1.12 *Si queremos graficar la función* $g(x) = \frac{3}{x+1}$, *para obtener la gráfica de* $g(x)$ *hacemos* $f(x) = \frac{1}{x}$ *la desplazamos una unidad hacia la izquierda, y luego la estiramos* 3 *unidades en dirección vertical*



- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x+1) = \frac{1}{x+1}$
- $3f(x+1) = \frac{3}{x+1}$

Fig. 3.19.

Ejemplo 3.1.13 *Para graficar la función* $g(x) = \sqrt{3x-3} + 4$, *hacemos* $f(x) = \sqrt{x}$, *luego la desplazamos* 1 *unidad a la derecha y la comprimimos* 3 *en dirección horizontal y por último* 3 *unidades hacia arriba.*



- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x-1) = \sqrt{x-1}$
- $f(3(x-1)) = \sqrt{3(x-1)}$
- $f(3(x-1)) + 4 = \sqrt{3(x-1)} + 4$

Fig. 3.20.

Ejemplo 3.1.14 *Graficar la función* $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ \sqrt{x} + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Solución.

Para las $x < 0$, *desplazamos la gráfica de la función* $\frac{1}{x}$, 2 *unidades hacia la izquierda y luego la reflejamos respecto al eje* x; *para las* $x > 0$ *desplazamos dos unidades hacia arriba la gráfica de la función* $\sqrt{x}$

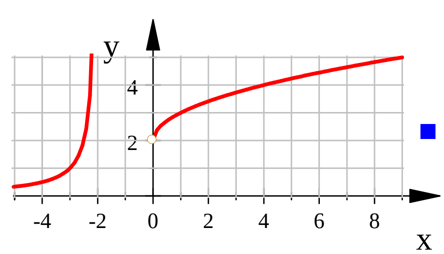


Fig. 3.21.

Ejercicios 3.1: Funciones Radicales, Racionales y Seccionadas

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Encuentra el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10x + 25}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

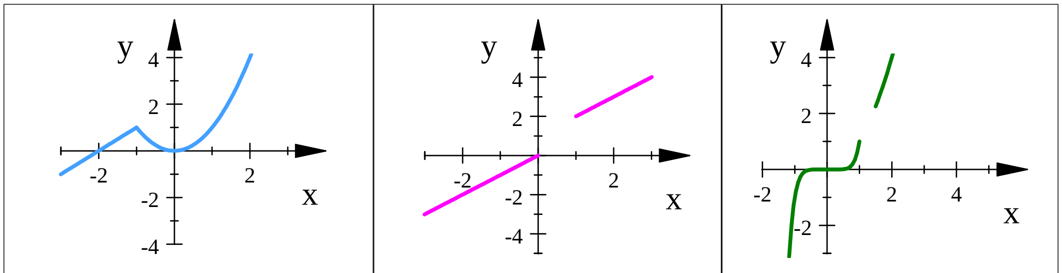
c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 1}$

d) $f(x) = \sqrt{15 - 5x}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

f) $f(x) = \sqrt{x(4 - x)}$

2. Usa la gráfica de las siguientes funciones para determinar su dominio y rango.



$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

$r(x) = \begin{cases} x^7 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

3. Encuentra el dominio, rango y grafica la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

4. Use transformaciones para trazar la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 1 \\ (x - 1)^2 + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

5. Traza la gráfica de cada función sin tabular y aplicando la transformación apropiada.

a) $y = -\sqrt{2x + 1}$

b) $y = 1 + \sqrt[3]{x - 1}$

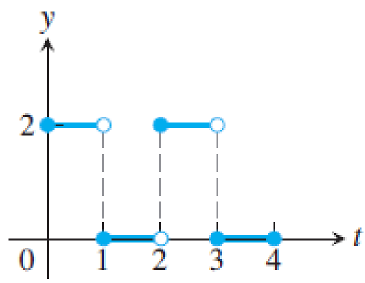
c) $y = \dfrac{1}{x - 3}$

d) $y = \dfrac{3}{(x + 1)^2}$

6. Encuentra una ecuación para $y = \sqrt{x+1}$, comprimida horizontalmente en un factor de 4.

7. Encuentra una ecuación para $y = \sqrt{4-x^2}$, estirada horizontalmente por un factor 2.

8. Encuentre una formula para la función graficada como



9. La función de Heaviside H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

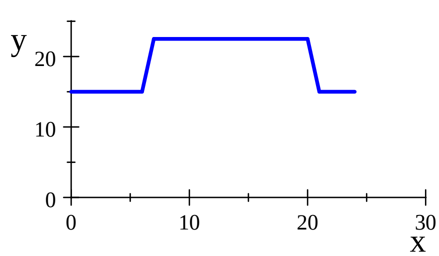
se usa en el estudio de los circuitos eléctricos para representar la oleada repentina de corriente eléctrica, o de voltaje, cuando un interruptor se cierra instantaneamente.

a) Dibuje la función de Heaviside

b) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$en un circuito, si el interruptor se cierra en el instante $t = 0$ y se aplican instantáneamente 120 volts al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$.

c) Dibuje el voltaje $V(t)$ en un circuito, si el interruptor se cierra en el instante $t = 5$ segundos y se aplican de manera instantánea 240 volts al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$.

10. Un termostato controlado de manera electrónica está programado para reducir la temperatura automáticamente durante la noche (ver figura). La temperatura T, en grados Celsius, está dada en términos de t, el tiempo en horas de un reloj de 24 horas.



Calcular $T(4)$, y $T(15)$

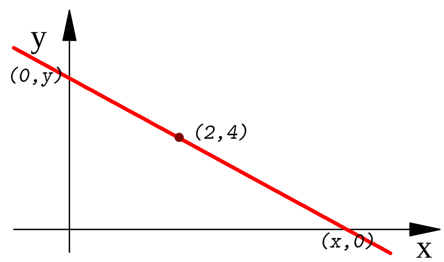
11. Grafica la función piso (tambien llamada función mayor entero), que se denota por: $y = \lfloor x \rfloor$ y que se define como sigue

$$\lfloor x \rfloor = \text{mayor entero } \leq x$$

12. Grafica la función techo (tambien llamada función menor entero), que se denota por $f(x) = \lceil x \rceil$, y que se define como

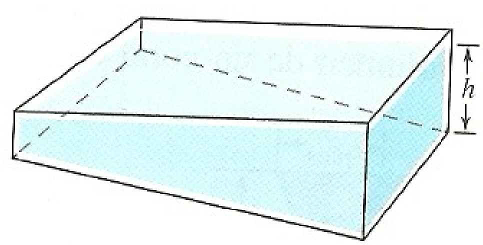
$$\lceil x \rceil = \text{menor entero } \geq x$$

13. Exprese la longitud del segmento de recta que contiene al punto $(2, 4)$ como una función de x.



14. Exprese como una función de x la distancia de un punto (x, y)sobre la gráfica de $x + y = 1$ al punto $(2, 3)$.

15. La piscina que se muestra en la figura mide 3 pies de profundidad en la parte poco profunda, 8 pies en la profunda, 40 pies de largo, 30 pies de ancho y el fondo es un plano inclinado. Hacia la piscina se bombea agua. Exprese el volumen del agua en la piscina como una función de la altura h del agua por arriba del extremo profundo. [*Sugerencia:* El volumen es una función definida por partes con dominio definido por $0 \leq h \leq 8$]



Evaluación 7

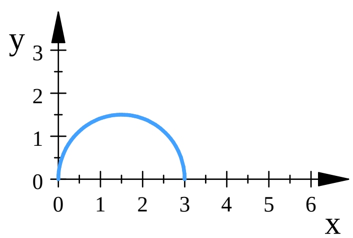
Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.
Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

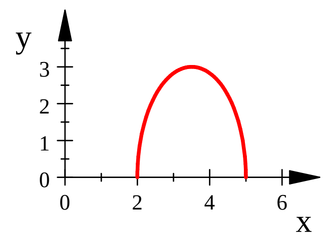
1. Determina el dominio y rango de las siguientes funciones

$a)\quad y=\sqrt{3x+9}$ $\qquad b)\quad f(x)=\dfrac{4}{x-5}$ $\qquad c)\quad f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x<0 \\ x+1 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$

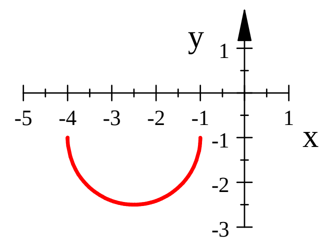
2. Se da la gráfica de $y=\sqrt{3x-x^2}$. Use transformaciones para crear una función cuya gráfica sea como la que se ilustra en $a)$ y $b)$



$y=\sqrt{3x-x^2}$

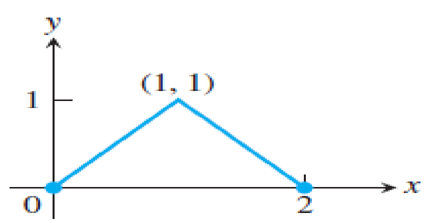


$a)\quad y=$



$b)\quad y=$

3. Encuentre la función que corresponde a la siguiente gráfica.



4. Un envase cilíndrico puede contener 4π pulgadas cúbicas de jugo de naranja helado. El costo de construcción de una pulgada cuadrada de las partes metálicas superior e inferior equivale a dos veces el costo de construcción de una pulgada del lado de cartón. Expresar el costo de construcción del envase como una función de su radio, si el costo del lado de cartón es 0.02 centavos por pulgada cuadrada.

5. Una compañía de taxis cobra $\$35.\,00$ por los primeros $5\ \mathrm{km}$ y $\$4.\,00$ por cada km (o parte) subsiguiente. Expresé el Costo C (en pesos) de un viaje como función de la distancia x recorrida en (km) para una distancia máxima de $50\ \mathrm{km}$. Dibuje la gráfica de la función.

3.1.5. Álgebra de funciones

Se pueden combinar funciones polinomicas, racionales, radicales y seccionadas para formar funciones nuevas. Para esto utilizamos las operaciones vistas en la definición 2.1.13:

Definición 2.1.13 (Operaciones con funciones). Sean f y g funciones, donde $Dom\ f = A$ y $Dom\ g = B$.
Las operaciones entre funciones se definen de la siguiente manera:

1. $f + g : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad Dom(f + g) = A \cap B$
2. $f - g : (f - g)(x) = f(x) - g(x) \qquad Dom(f - g) = A \cap B$
3. $fg : (fg)(x) = f(x)\, g(x) \qquad Dom(fg) = A \cap B$
4. $f \circ g : (f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad Dom(f \circ g) = \{x \in B \mid g(x) \in A\}$

Agregamos una operación más

Definición 3.1.4 (División de funciones) *Sean f y g funciones, donde $Dom\ f = A$ y $Dom\ g = B$. La división de funciones se define de la siguiente manera*

$$f/g : \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{donde } g(x) \neq 0, \qquad Dom\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$$

Ejemplo 3.1.15 *Para las funciones*

$$f(x) = \sqrt{x+3}, \qquad g(x) = \frac{2x}{x+1}$$

encuentra las funciones que resutan al combinarlas realizando las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y composición. Determina el Dominio de cada una de ellas.

Solución. Primero determinamos los dominios

Para la función $f(x) = \sqrt{x+3}$ el dominio es:

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} \\ &= x \in [-3, \infty) \end{aligned}$$

Para la función $g(x) = \dfrac{2x}{x+1}$, el dominio es la intersección del dominio del númerador y el dominio del denominador y además el denominador debe ser distinto de cero, así

$$\begin{aligned} Dom(g) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\} \\ &= (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) \end{aligned}$$

La intersección de los dominios de f y g queda:

$$\begin{aligned} Dom\,(f) \cap Dom\,(g) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3 \wedge x \neq -1\} \end{aligned}$$

- Suma:

$$(f+g)\,(x) = \sqrt{x+3} + \frac{2x}{x+1}, \qquad Dom\,(f+g) = Dom\,(f) \cap Dom\,(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3 \wedge x \neq -1\}$$

- Resta

$$(f-g)\,(x) = \sqrt{x+3} - \frac{2x}{x+1}, \qquad Dom\,(f-g) = Dom\,(f) \cap Dom\,(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3 \wedge x \neq -1\}$$

$$(g-f)\,(x) = \frac{2x}{x+1} - \sqrt{x+3}, \qquad Dom\,(g-f) = Dom\,(f) \cap Dom\,(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3 \wedge x \neq -1\}$$

- Multiplicación

$$(fg)\,(x) = \left(\sqrt{x+3}\right)\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \frac{2x\sqrt{x+3}}{x+1},$$

$$\begin{aligned} Dom\,(fg) &= Dom\,(f) \cap Dom\,(g) \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3 \wedge x \neq -1\} \end{aligned}$$

- División

$$(f/g)\,(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\frac{2x}{x+1}} = \frac{(x+1)\,\sqrt{x+3}}{2x},$$

$$\begin{aligned} Dom\,(f/g) &= \{x \in (Dom\,(f) \cap Dom\,(g)) \mid g(x) \neq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3 \wedge x \neq -1 \wedge \frac{2x}{x+1} \neq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3 \wedge x \neq -1, 0\} \end{aligned}$$

$$(g/f)\,(x) = \frac{\frac{2x}{x+1}}{\sqrt{x+3}} = \frac{2x}{(x+1)\,\sqrt{x+3}},$$

$$\begin{aligned} Dom\,(g/f) &= \{x \in (Dom\,(f) \cap Dom\,(g)) \mid f(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3 \wedge x \neq -1 \wedge \sqrt{x+3} \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3 \wedge x \neq -1\} \end{aligned}$$

- Composición

$$(f \circ g)\,(x) = f\,(g\,(x)) = f\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \sqrt{\frac{2x}{x+1} + 3} = \sqrt{\frac{5x+3}{x+1}},$$

$$\begin{aligned} Dom(f \circ g) &= \{x \in Dom\,(g) \mid g(x) \in Dom\,(f)\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \wedge x \geq -\frac{3}{5}\right\} \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x+3}\right) = \frac{2\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+1},$$

$$\begin{aligned} Dom(g \circ f) &= \{x \in Dom(f) \mid f(x) \in Dom(g)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} \end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.1.16 *Determinar las siguientes composiciones dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, y $g(x) = x + 1$, encuentre*

Encuentre la solución de las siguientes desigualdades y exprese la solución en terminos de intervalos

a) $(f \circ g)(x)$ *b)* $(g \circ f)(x)$ *c)* $(f \circ f)(x)$ *d)* $(g \circ g)(x)$

Solución.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$ $\quad Dom : [-1, \infty)$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$ $\quad Dom : [0, \infty)$

c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$ $\quad Dom : [0, \infty)$

d) $(g \circ g)(x) = g(f(x)) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x+1) + 1 = x + 2$ $\quad Dom : (-\infty, \infty)$

Para comprender por qué el dominio de $f \circ g$ es $[-1, \infty)$, observe que $g(x) = x + 1$ está definida para todo númer real x, pero pertenece al dominio de f solamente si $x + 1 \geq 0$, por estar dentro de la raíz $x \geq -1$.

Observe que si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, entonces $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$. Sin embargo, el dominio de $f \circ g$ es $[0, \infty)$. y no $(-\infty, \infty)$.

([8], p. 41) ■

Hay funciones que puden escribirse como la composición de funciones más simples.

Ejemplo 3.1.17 *Escriba la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{x^2+1}}$ como la composición de funciones simples*

Solución. podemos usar dos o más funciones más simples que f

- Sea $g(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$, $\quad h(x) = \sqrt{x}$, $\quad$ así:

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\frac{2}{x^2+1}}$$

- Sea $p(x) = \sqrt{x}$, $\quad q(x) = \dfrac{2}{x}$, $\quad r(x) = x^2 + 1$, $\quad$ así:

$$(p \circ q \circ r)(x) = p(q(r(x))) = \sqrt{(q(r(x)))} = \sqrt{\frac{2}{r(x)}} = \sqrt{\frac{2}{x^2+1}}$$

Tambien podemos hacer la sustitución de adentro hacia afuera

$$(p \circ q \circ r)(x) = p(q(r(x))) = p\left(q\left(x^2+1\right)\right) = p\left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \sqrt{\frac{2}{x^2+1}}$$

■

Ejemplo 3.1.18 *Sean* $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, $\quad$ *y* $\quad (f \circ g)(x) = x$, *Encuentre* $g(x)$.

Solución. Tenemos que:

$$f(g(x)) = 1 + \frac{1}{g(x)} = x$$

despejando g obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} &= x - 1 \\ g(x) &= \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

hagamos la composición para verificar

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + \frac{1}{\dfrac{1}{x-1}} = x$$

■

Observemos que al hacer combinaciones de funciones polinomicas, racionales, radicales y seccionadas usando operaciones obtenemos en algunos casos funciones que ya no pertenecen a ninguna de las antes mencionadas.

Definición 3.1.5 (Funciones Algebraicas) *Una función Algebraica es la que se construye a partir de polinomios usando operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división y con raices). ([8], p. 31)*

3.1.6. Función inversa

Una función es una regla de correspondencia que asigna a cada punto de su dominio un valor dentro de su rango, aunque algunas funciones asignan el mismo valor del rango a varios puntos del dominio. En la fig. 3.22 podemos ver un ejemplo gráfico de ello.

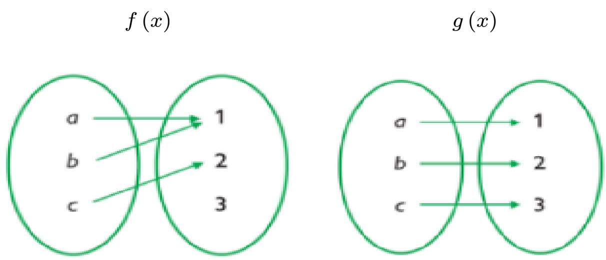


Fig. 3.22

Cuando en una función cada elemento del rango está asociado a solo un elemento del dominio, la función recibe el nombre de función inyectiva o función uno a uno.

Definición 3.1.6 (Función inyectiva o función uno a uno) *Decimos que una función* $f : A \to B$ *es inyectiva si* $x_1 \neq x_2$ *implica que* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *o lo que es equivalente si* $f(x_1) = f(x_2)$ *entonces* $x_1 = x_2$

Ejemplo 3.1.19 *Demuestre que las siguientes funciones son uno a uno*

a) $f(x) = 2x + 1$ *b)* $g(x) = \sqrt{x}$ *c)* $h(x) = x^2 - 3$

Solución.

a) Sean $x_1, x_2 \in Dom(f) = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 2x_1 + 1 &= 2x_2 + 1 \\ 2x_1 &= 2x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Luego $f(x) = 2x + 1$ es uno a uno.

b) Sean $x_1, x_2 \in Dom(g) = [0, \infty)$

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(x_2) \\ \sqrt{x_1} &= \sqrt{x_2} \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Luego $g(x) = \sqrt{x}$ es uno a uno.

c) Sean $x_1, x_2 \in Dom\,(g) = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h\,(x_1) &= h\,(x_2) \\ (x_1)^2 - 3 &= (x_2)^2 - 3 \\ (x_1)^2 &= (x_2)^2 \end{aligned}$$

En esté caso podemos concluir que la función no es uno a uno y lo probaremos con un contraejemplo

Para $x_1 = 2, x_2 = -2$

$$2 \neq -2$$

pero

$$\begin{aligned} (2)^2 - 3 &= (-2)^2 - 3 \\ h\,(2) &= h\,(-2) \end{aligned}$$

Luego $h\,(x) = x^2 - 3$ no es uno a uno.

Las gráficas de las funciones $f, g,$ y h se observan en las figuras 3.23, 3.24 y 3.25 respectivamente. ■

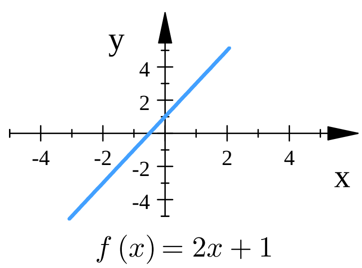


Fig. 3.23. Función inyectiva

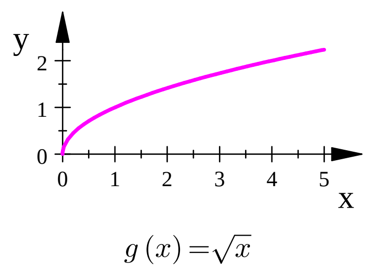


Fig. 3.24. Función inyectiva

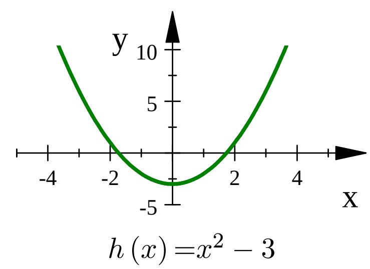


Fig. 3.25. Función no inyectiva

En una gráfica podemos identificar las funciones inyectivas usando la prueba de la recta horizontal

Prueba de la recta horizontal Una función $y = f\,(x)$ es inyectiva o uno a uno si y sólo sí su gráfica interseca cada recta horizontal cuando mucho una vez.

En las en las fig. 3.23, 3.24 podemos observar que al trazar una recta horizontal cortará en un sólo punto a la gráfica de la función, mientras que en la fig. 3.25 al trazar la recta $y = c$ para $c > 3$ corta dos veces la función.

En una función f uno a uno, se produce pares de la forma (a, b) donde cada valor b proviene de un solo valor a, el efecto de esta función puede ser invertido, es decir podemos ahora formar una función invirtiendo los pares para tener (b, a).

Definición 3.1.7 (Función inversa) *Si $f(x)$ es una función uno a uno con dominio A y rango B. La función inversa de f, que se denota como f^{-1} se define como*

$$f^{-1}(y) = x \text{ si y solo si } f(x) = y$$

el dominio de f^{-1} es B, y su rango es A.

Observemos que $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$ nos lleva a que

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x \qquad \text{y} \qquad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Observación 3.1.1 *No debe confundirse la notación de la función inversa, ya que*

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$$

Teorema 3.1.1 *Si f es una función continua y uno a uno en un intervalo, entonces f es o bien creciente o bien decreciente en dicho intervalo.*

Por lo tanto para determinar si una función tiene inversa o no, basta con probar que es uno a uno, o bien que es creciente o decreciente.

Pasos para determinar la función inversa Para encontrar la función inversa de una función uno a uno, se puede hacer los siguientes pasos

1. Escribir $y = f(x)$ y expresar x como una función en términos de y.
2. Intercambiar x y y para obtener $y = f^{-1}(x)$.

Para probar que dos funciones son inversas, solo basta hacer la composición $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$ o bien $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$

Ejemplo 3.1.20 *Encuentra la función inversa de las siguientes funciones. Comprueba tu resultado haciendo la composición de la función con su inversa.*

a) $f(x) = 2x + 1$ *b)* $g(x) = \sqrt{x}$ *c)* $h(x) = x^2 - 3,\ x \geq 0$

Solución. En el ejemplo 3.1.19 probamos que las funciones f y g son uno a uno, por lo tanto tienen inversa, en el caso de la función h ya vimos que considerando su dominio como $x \in \mathbb{R}$ la función no es uno a uno, pero es creciente en el intervalo $[0, \infty)$ y usando el teorema 3.1.1 podemos concluir que es uno a uno en ese intervalo , por lo tanto tambien tiene inversa.

a) $f(x) = 2x + 1$

1) Despejamos x en términos de y

$$\begin{aligned} y &= 2x+1 \\ x &= \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

2) Intercambiamos x y y, para hacer $y = f^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} x &= \frac{y-1}{2} \\ y &= \frac{x-1}{2} \\ f^{-1}(x) &= \frac{x-1}{2} \end{aligned}$$

Probemos que f y f^{-1} son inversas

$$\begin{aligned} \left(f \circ f^{-1}\right)(x) &= f\left(f^{-1}(x)\right) \\ &= f\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 \\ &= x - 1 + 1 \\ &= x \end{aligned}$$

$\therefore f(x) = 2x + 1$ y $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$ son funciones inversas

b) $g(x) = \sqrt{x}$, en este caso debemos tener cuidado con los dominios de g y g^{-1}, f está definida unicamente para $x \geq 0$, lo cuál implica que $y \geq 0$, no debemos olvidar que el dominio de g^{-1} es el rango de g y el rango de g^{-1} es el dominio de g.

1) Despejamos x en términos de y

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} \qquad x, y \geq 0 \\ (y)^2 &= \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \\ x &= y^2, \qquad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

2) Intercambiamos x y y, para hacer $y = g^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} x &= y^2 \\ y &= x^2\,, \qquad x \geq 0 \\ g^{-1}(x) &= x^2, \qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

Probemos que g y g^{-1} son inversas

$$\begin{aligned}\left(g \circ g^{-1}\right)(x) &= g\left(g^{-1}(x)\right) \\ &= g\left(x^2\right) \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= x\end{aligned}$$

$\therefore g(x) = \sqrt{x}$ y $g^{-1}(x) = x^2$ son funciones inversas

c) $h(x) = x^2 - 3$, $x \geq 0$

1) Despejamos x en términos de y

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 3 & x \geq 0 \\ x^2 &= y + 3 & x \geq 0 \Longrightarrow 3 + y \geq 0 \Longrightarrow y \geq -3 \\ x &= \sqrt{y+3} & y \geq -3\end{aligned}$$

2) Intercambiamos x y y, para hacer $y = h^{-1}(x)$

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{y+3} & y \geq -3 \\ y &= \sqrt{x+3} & x \geq -3 \\ h^{-1}(x) &= \sqrt{x+3}, & x \geq -3\end{aligned}$$

Probemos que h y h^{-1} son inversas

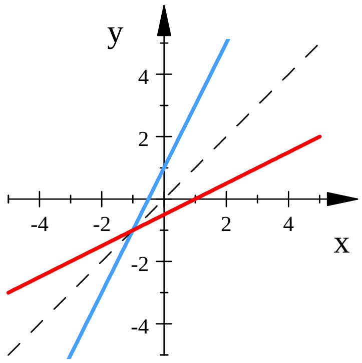
$$\begin{aligned}\left(h \circ h^{-1}\right)(x) &= h\left(h^{-1}(x)\right) \\ &= h\left(\sqrt{x+3}\right) \\ &= \left(\sqrt{x+3}\right)^2 - 3 \\ &= x + 3 - 3 \\ &= x\end{aligned}$$

$\therefore h(x) = x^2 + 3$ y $h^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$ son funciones inversas

■

La gráfica de $f^{-1}(x)$ es la reflexion de la gráfica de $f(x)$ con respecto a la recta $y = x$.

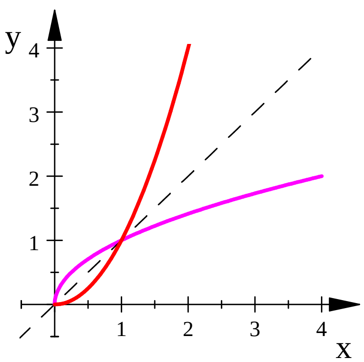
Si trazamos las gráficas del ejemplo 3.1.20 obtenemos



- $f(x) = 2x + 1$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

$Dom\,(f) = \mathbb{R}$ $\qquad Dom\,(f^{-1}) = \mathbb{R}$

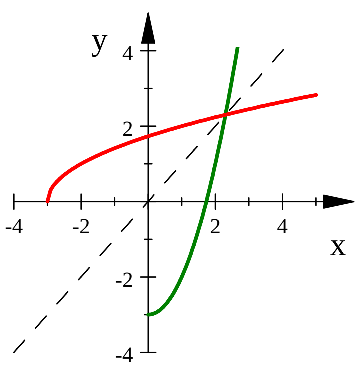
$Rango\,(f) = \mathbb{R}$ $\qquad Rango\,(f^{-1}) = \mathbb{R}$



- $g(x) = \sqrt{x}$
- $g^{-1}(x) = x^2$

$Dom\,(g) = [0, \infty)$ $\qquad Dom\,(g^{-1}) = [0, \infty)$

$Rango\,(g) = [0, \infty)$ $\qquad Rango\,(g^{-1}) = [0, \infty)$



- $h(x) = x^2 - 3$
- $h^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$

$Dom\,(h) = [0, \infty)$ $\qquad Dom\,(h^{-1}) = [-3, \infty)$

$Rango\,(h) = [-3, \infty)$ $\qquad Rango\,(h^{-1}) = [0, \infty)$

Ejercicios 3.2: Operaciones y Función inversa

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Para las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$, y $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, determina cada uno de los valores

a) $(f+g)(x)$ c) $(f/g)(x)$ e) $(fg)(x)$ g) $(g \circ f)(3)$

b) $(f-g)(2)$ d) $(g/x)(0)$ f) $(f \circ g)(x)$ h) $(f \circ f)(8)$

2. Completa la siguiente tabla

$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
$x-7$	$\sqrt{x}$	
	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	
$\frac{1}{x}$		x
$\frac{1}{x-1}$	$\lvert x\rvert$	
	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x}{x+1}$
	$\sqrt{x}$	$\lvert x\rvert$
$\sqrt{x}$		$\lvert x\rvert$

3. Sea $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$. Demuestra que $f(f(f(x))) = x$,siempre y cuando $x \neq \pm 1$.

4. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Determina y simplifica cada valor.

a) $(f)\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $(f(f(x)))$ c) $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$

5. Expresa la función como la composición de dos o más funciones

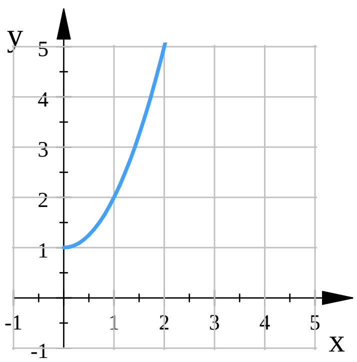
a) $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ b) $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ c) $F(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1+x}}$ d) $F(x) = \sqrt[4]{2+|x|}$

6. Encuentra una fórmula para la inversa de las siguientes funciones. Para comprobar su resultado muestre que $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$. En cada caso identifique el dominio de f y de f^{-1}

a) $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$ b) $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$ c) $f(x) = 2x^3 + 3$

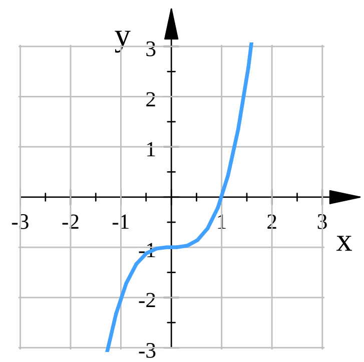
7. En cada uno de los siguientes ejercicios se da una función $y = f(x)$ y su gráfica. Encuentra una fórmula para f^{-1} y dibuja su gráfica en el mismo sistema de ejes coordenados.

a)



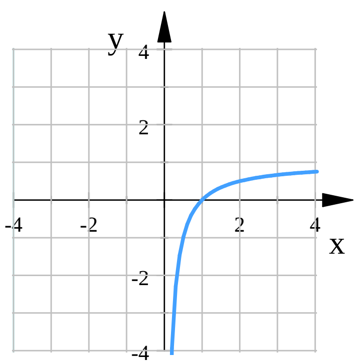
$f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$

c)



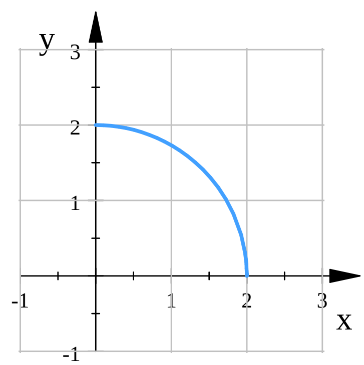
$f(x) = x^3 - 1$

b)



$f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}, \quad x \geq 0$

d)



$f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \ \ 0 \leq x \leq 2$

3.2. Límites

En la sección 2.2 se dío la definición intuitiva de límite, y en la sección 2.2.6 se dio la definición formal. Retomemos nuevamente esas definiciones.

Definición 2.2.1 (Intuitiva de límite). *La función $f(x)$ tiende hacia el límite L cerca de a, si se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca como queramos de L haciendo que x esté suficientemente cerca de a, pero siendo distinto de a.*
Notación:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Y se expresa como "El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

Observese que en la definición de límite cuando decimos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ nunca consideramos $x = a$, por lo que $f(x)$ no necesariamente tiene que estar definida en a, lo que importa es como se comporta la función para x cerca de a.

Ejemplo 3.2.1 *Estime el valor de $\lim_{x \to 2} f(x)$ para:*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \textit{si} \quad x \neq 2 \\ 1 & \textit{si} \quad x = 2 \end{cases}$

Solución. *La gráfica de las funciones se muestran en las figuras 3.26 y 3.27*

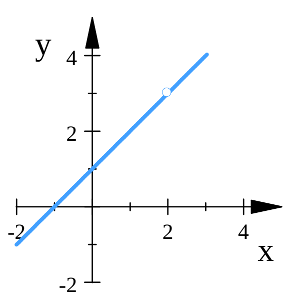


Fig. 3.26. $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

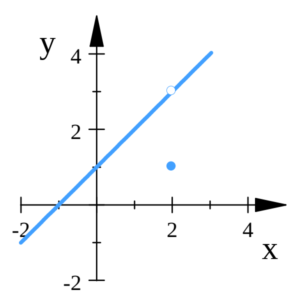


Fig. 3.27. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \textit{si} \quad x \neq 2 \\ 1 & \textit{si} \quad x = 2 \end{cases}$

La función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$, no esta definida en $x = 2$ (fig. 3.26)

y la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \textit{si} \quad x \neq 2 \\ 1 & \textit{si} \quad x = 2 \end{cases}$ si está definida en $x = 2$ (fig. 3.27),

en ambas funciones únicamente buscamos el comportamiento de la función cuando x se acerca a 2 es decir

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

Si damos valores a x menores y mayores que 2 obtenemos

$x < 2$	$f(x)$
1.99	2.99000
1.999	2.99900
1.9999	2.99990
1.99999	3.00000

$x > 2$	$f(x)$
2.01000	3.01000
2.00100	3.00100
2.00010	3.00010
2.00001	3.00000

Así concluimos que:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3\,,$$

por lo que en $a)$ y $b)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

■

3.2.1. Teoremas sobre límites

Recordemos los teoremas de los límites también llamados leyes de los límites

Teorema (Leyes de los límites).

Sea c una constante, y suponga que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existen.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, entonces:

I) $\lim\limits_{x\to a} c = c$ (constante) (Teorema 2.2.1)

II) $\lim\limits_{x\to a} x = a$ (identidad) (Teorema 2.2.1)

III) $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x) = cL$ (multiplo constante) (Teorema 2.2.2 I)

IV) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \pm M$ (suma) (Teorema 2.2.2 II)

V) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right) = L\ M$ (producto) (Teorema 2.2.2 III)

Agregamos una operación más:

Teorema 3.2.1 *Suponga que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existen.*
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, entonces:

$$\lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M} \qquad \textit{si } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0 \qquad (\textit{cociente})$$

Para funciones polinomicas se tienen los siguientes teoremas:

I) **Teorema** 2.2.3:**(Límite de una potencia).** Sea $\lim_{x\to a} f(x) = L$, y n un entero positivo. Entonces

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$$

El caso particular para $f(x) = x$

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

II) **Teorema** 2.2.4:**(Límite de un polinomio).** Sea $f(x)$ una función polinomica, y c un número real. Entonces

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Generalizando la regla de la potencia para n número real, tenemos

Teorema 3.2.2 (Regla de la potencia) *Sean r, s y $s \neq 0$, Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ entonces*

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

o bien

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{r/s} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{r/s} = \sqrt[s]{\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^r} = \sqrt[s]{L^r}$$

Siempre y cuando $L^{r/s}$ sea un número real. (Si s es par, suponemos que $L > 0$).

Ejemplo 3.2.2 *Si $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1} g(x) = 8$ $\lim_{x\to 1} h(x) = 0$, encuentre:*

a) $\lim_{x\to 1} \left[(f(x))^2 \sqrt[3]{g(x)}\right]$

b) $\lim_{x\to 1} \left[2f(x) + \dfrac{4}{3g(x)} - \dfrac{h(x)}{2}\right]$

c) $\lim_{x\to 1} \left[\dfrac{h(x)}{f(x)}\right]$

d) $\lim_{x\to 1} \left[\dfrac{f(x)}{h(x)}\right]$

Solución. *Como $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 1} g(x)$ y $\lim_{x\to 1} h(x)$ existen, aplicaremos las leyes de los límites*

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \left[(f(x))^2 \sqrt[3]{g(x)}\right] &= \left[\lim_{x\to 1} (f(x))^2\right]\left[\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{g(x)}\right] && \textit{producto} \\
&= \left[\left(\lim_{x\to 1} f(x)\right)^2\right]\left[\sqrt[3]{\lim_{x\to 1} g(x)}\right] && \textit{potencia} \\
&= \left[(2)^2\right]\left[\sqrt[3]{8}\right] && \textit{Sustituimos el valor de los límites} \\
&= (4)(2) && \textit{Simplificamos} \\
&= 8
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left[2f(x)+\frac{4}{3g(x)}-\frac{h(x)}{2}\right] &= \lim_{x\to 1}(2f(x))+\lim_{x\to 1}\left(\frac{4}{3g(x)}\right)-\lim_{x\to 1}\left(\frac{h(x)}{2}\right) && \textit{suma}\\
&= 2\lim_{x\to 1}f(x)+\frac{4}{3}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{g(x)}\right)-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}(h(x)) && \textit{multiplo constante}\\
&= 2\lim_{x\to 1}f(x)+\frac{4}{3}\left(\frac{\lim_{x\to 1}1}{\lim_{x\to 1}g(x)}\right)-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}h(x) && \textit{cociente}\ \left(\lim_{x\to 1}g(x)\neq 0\right)\\
&= 2(2)+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{8}\right)-(0) && \textit{sustituimos el valor de los límites}\\
&= 4+\frac{1}{6} && \textit{simplificamos}\\
&= \frac{25}{6}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left[\frac{h(x)}{f(x)}\right] &= \frac{\lim_{x\to 1}h(x)}{\lim_{x\to 1}f(x)} && \textit{podemos aplicar la regla del cociente ya que}\ \lim_{x\to 1}f(x)\neq 0\\
&= \frac{0}{2} && \textit{sustituimos el valor de los límites}\\
&= 0
\end{aligned}$$

d) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)}{h(x)}\right]$ *en este caso no podemos aplicar la regla del cociente ya que* $\lim_{x\to 1}h(x)=0$, *por lo que con la información que se tiene no es posible calcular esté límite.*

■

Ejemplo 3.2.3 *Evalúe el siguiente límite* $\lim_{x\to 2}\frac{4x^3-6x^2+x-1}{2x-3}$

Solución. *Usando las leyes de los límites:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{4x^3-6x^2+x-1}{2x-3} &= \frac{\lim_{x\to 2}\left(4x^3-6x^2+x-1\right)}{\lim_{x\to 2}(2x-3)}\\
&= \frac{\lim_{x\to 2}4x^3-\lim_{x\to 2}6x^2+\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}1}{\lim_{x\to 2}2x-\lim_{x\to 2}3}\\
&= \frac{4\lim_{x\to 2}x^3-6\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}1}{2\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}3}\\
&= \frac{4\left(2^3\right)-6\left(2^2\right)+2-1}{2(2)-3}\\
&= 9
\end{aligned}$$

■

Cuando una función es continua en $x = a$ el límite en a se puede calcular por sustitución directa, es decir $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

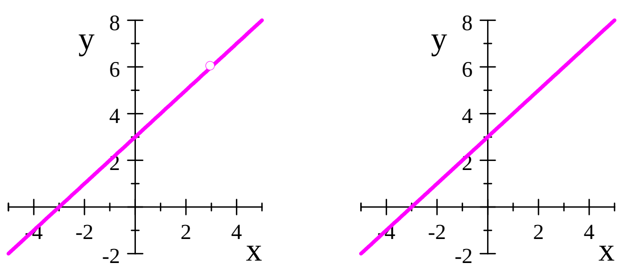
Cuando dos funciones son iguales punto a punto, excepto en un punto $x = a$, entonces sus límites tambien son iguales.

Es decir, Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, en caso de que exista el límite

Ejemplo 3.2.4 *Encuentre* $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

Solución. Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. No podemos hallar el límite sustituyendo $x = 3$ ya que $f(3)$ no está definido. Tampoco podemos aplicar la ley del cociente porque el límite del denominador es cero. Lo que haremos será factorizar y simplificar la función.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} &= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} && \text{factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&= \lim_{x \to 3} (x+3) && \text{simplificamos (podemos hacerlo ya que } x \text{ tiende a } 3 \text{ pero } x \neq 3, \text{ y } x - 3 \neq 0 \\
&= 3 + 3 && \text{Calculamos el límite de la función de forma directa} \\
&= 6
\end{aligned}
$$



$f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ $\qquad$ $g(x) = x + 3$

Fig. 3.28

Note que las funciones $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ y $g(x) = x + 3$ son iguales para toda $x \neq 3$. y al calcular el límite conforme x se aproxima a 3 no se considera cuando $x = 3$. Observe la gráfica en la figura 3.28

. ■

Ejemplo 3.2.5 *Evalúe* $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$

Solución. *No podemos evaluar en forma directa porque el denominador se hace cero*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} &= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} && \textit{Factorizamos} \\
&= \lim_{x \to -2} (x - 1) && \textit{Simplificamos} \\
&= -2 - 1 && \textit{Evaluamos} \\
&= -3
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 3.2.6 *Evalúe* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-5)^2-25}{x}$

Solución. *No podemos evaluar en forma directa porque el denominador se hace cero*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(x-5)^2-25}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-10x}{x} && \textit{Desarrollando el cuadrado}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x(x-10)}{x} && \textit{Factorizando}\\
&= \lim_{x\to 0}(x-10) && \textit{Simplificando}\\
&= -10 && \textit{Evaluamos el límite}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.2.7 *Evalúe* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

Solución. *Si sustituimos* $x=0$ *el denominador se hace cero, y no hay factores comunes obvios en el denominador y denominador. Podemos crear un factor común multiplicando denominador y númerador por* $\sqrt{x+4}+2$ *(que se obtiene al cambiar el signo que aparece después de la raíz cuadrada)*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}\right] && \textit{Notese que en realidad estamos multiplicando la función por un uno, y en el numerador tenemos un binomio conjugado.}\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(x+4)-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}\right] && \textit{Multiplicando algebraicamente}\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}\right] && \textit{Simplificamos el numerador, } x \textit{ es factor común}\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}\right] && \textit{Eliminamos } x \textit{ para } x\neq 0\\
&= \frac{1}{\sqrt{0+4}+2} && \textit{Sustituimos } x=0\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

■

3.2.2. Definición formal de límite

Definición 2.2.6 (Formal de límite). *Sea* f *una función definida en un intervalo abierto, excepto quizas en un número* a *en el intervalo.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Significa que para todo $\varepsilon>0$,*existe un número* $\delta>0$ *tal que, para todo* x *si*

$$0<|x-a|<\delta, \qquad \text{entonces} \qquad |f(x)-L|<\varepsilon$$

Ejemplo 3.2.8 *Demuestre que* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-3x-2}{x-2} = 5$

Solución. *Análisis preliminar: Estamos buscando una* δ *tal que*

$$0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon$$

ahora, para $x \neq 2$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon \quad & \Longleftrightarrow \quad \left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon \\
& \Longleftrightarrow \quad |(2x+1) - 5| < \varepsilon \\
& \Longleftrightarrow \quad |2(x-2)| < \varepsilon \\
& \Longleftrightarrow \quad |2| \, |x-2| < \varepsilon \\
& \Longleftrightarrow \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Esto indica que $\delta = \varepsilon/2$ *funcionara.*

Demostración. *Sea* $\varepsilon > 0$ *dada. Elegimos* $\delta = \varepsilon/2$. *Entonces* $0 < |x-2| < \delta$ *implica que*

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5 \right| &= \left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| \\
&= |2x+1-5| \\
&= |2(x-2)| \\
&= 2|x-2| < 2\delta = 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon
\end{aligned}$$

■

La cancelación del factor $x-2$ *es válida porque* $0 < |x-2|$ *implica que* $x \neq 2$, *y* $\dfrac{x-2}{x-1} = 1$ *siempre que* $x \neq 2$. *[[4], p.64]* ■

Ejemplo 3.2.9 *Demuestre que si* $c > 0$ *entonces* $\lim\limits_{x\to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$

Solución. *Para un* $\varepsilon > 0$ *arbitrario, debemos determinar un* $\delta > 0$ *tal que si*

$$0 < |x-c| < \delta \Longrightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| < \varepsilon$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| &= \left| \left(\sqrt{x} - \sqrt{c}\right) \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{c}\right)}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \right| \\
&= \left| \frac{x-c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \right| \\
&= \frac{|x-c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \leq \frac{|x-c|}{\sqrt{c}} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Se requiere que tengamos

$$|x-c| < \varepsilon\sqrt{c}$$

Demostración. *Sea* $\varepsilon > 0$ *dada. Elegimos a* $\delta = \text{mín}\{\sqrt{c}, \varepsilon\sqrt{c}\}$. *Entonces* $0 < |x - c| < \delta$ *implica que*

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| &= \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c})(\sqrt{x} + \sqrt{c})}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| \\ &= \left|\frac{x - c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| \\ &= \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \leq \frac{|x - c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \varepsilon \end{aligned}$$

([4], p. 65*)* ■ ■

Ejemplo 3.2.10 *Probar que* $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ *si:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Solución. Nuestra tarea consiste en probar que dado $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - 2| \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - 4| < \varepsilon$$

1. Resolver la desigualdad $|f(x) - 4| < \varepsilon$ para encontrar un intervalo abierto que contenga a $x_0 = 2$ en el que la desigualdad se satisfaga para toda $x \neq x_0$.

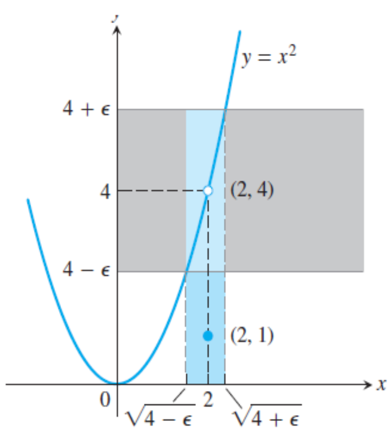


Fig. 3.29. Ejemplo 3.2.10

Para $x \neq x_0 = 2$, tenemos que $f(x) = x^2$, y la desigualdad a resolver es $\left|x^2 - 4\right| < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \left|x^2 - 4\right| &< \varepsilon \\ -\varepsilon < x^2 - 4 &< \varepsilon \\ 4 - \varepsilon < x^2 &< 4 + \varepsilon \\ \sqrt{4 - \varepsilon} < |x| &< \sqrt{4 + \varepsilon} \quad \text{Suponga que } \varepsilon < 4 \\ \sqrt{4 - \varepsilon} < |x| &< \sqrt{4 + \varepsilon} \end{aligned}$$

La desigualdad $|f(x) - 4| < \varepsilon$ se satisface para toda $x \neq 2$ en el intervalo abierto $\left(\sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon}\right)$. (Fig. 3.29)

2. Encontrar un valor de $\delta > 0$ que coloque el intervalo centrado $(2 - \delta, 2 + \delta)$ dentro del intevalo $\left(\sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon}\right)$.

   Sea δ la distancia de entre $x_0 = 2$ y el extremo más cercano de $\left(\sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon}\right)$. En otras palabras, tomamos $\delta = \text{mín}\left\{2 - \sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon} - 2\right\}$, es decir, el mínimo de los números $2 - \sqrt{4 - \varepsilon}$ y $\sqrt{4 + \varepsilon} - 2$. Si δ tiene éste o cualquier valor menor positivo, la desigualdad $0 < |x - 2| < \delta$ colocará automáticamente a x entre $\sqrt{4 - \varepsilon}$ y $\sqrt{4 + \varepsilon}$ para hacer que $|f(x) - 4| < \varepsilon$. Para toda x,

$$0 < |x - 2| \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - 4| < \varepsilon$$

Esto completa la prueba.

¿A qué se debe que sea correcto suponer que $\varepsilon < 4$? A que al buscar una δ que también funcionaría para cualquier ε más grande.

Por último, observe la libertad que obtenemos al tomar $\delta = \text{mín}\left\{2 - \sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon} - 2\right\}$. De esta forma ya no tenemos que perder tiempo en decidir cuál de los dos números es menor. Simplemente representamos el menor mediante δ y continuamos para concluir el argumento. ([8], p. 97) ■

.

Ejercicios 3.3

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Dado que: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -3, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to a} h(x) = 8$

Encuentra los límites que existan. Si el límite no existe, explica porque.

a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + h(x)]$

b) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^2$

c) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{h(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)}$

f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

g) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

h) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

i) $\lim\limits_{x\to a} (3f(x)\, h(x))$

2. Encuentra el valor de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1}$

3. Evalúa el límite siguiente y justifica cada paso: $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

4. Evalúa los límites, si existen

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-x+12}{x+3}$

b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h-5)^2-25}{h}$

c) $\lim\limits_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

d) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

5. ¿Hay un número a tal que $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ exista? Si es así, encuentra los valores de a y el límite.

6. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $L = \dfrac{1}{4}$, $x_0 = 4$, $\varepsilon = 0.05$. Encuentra un intervalo abierto alrededor de x_0 en donde se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$. Después da un valor para $\delta > 0$ tal que para toda x que satisface $0 < |x - x_0| < \delta$ se cumpla la desigualdad

7. Sea $f(x) = \sqrt{x+1}$, $L = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $x_0 = -1$. $|f(x) - L| < \varepsilon$. Encuentra un intervalo abierto alrededor de x_0 en donde se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$. Después da un valor para $\delta > 0$ tal que para toda x que satisface $0 < |x - x_0| < \delta$ se cumpla la desigualdad.

Evaluación 8

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

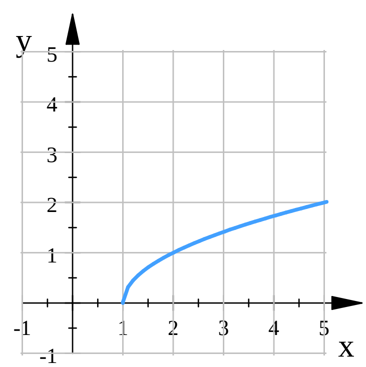
1. Para las funciones $f(x) = \sqrt{x-1}$, y $g(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$, determina cada uno de los valores

a) $(f+g)(x)$ b) $(f/g)(x)$ c) $(g/f)(1)$ d) $(f \circ g)(x)$

2. Expresa la función como la composición de dos o más funciones $F(x) = \sqrt{\dfrac{3x+2}{\sqrt{x}}}$

3. Encuentra una fórmula para f^{-1} y dibuja su gráfica en el mismo sistema de ejes coordenados.

Determina el dominio de f y f^{-1}



$f(x) = \sqrt{x-1}, \quad x \geq 1$

4. Evalúa los siguientes límites, si existen

a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+9}-3}{h}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+12}{x+3}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{81-x^4}{9-x^2}$

5. Sea $f(x) = \sqrt{x+1}$, $L = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $x_0 = -1$. $|f(x) - L| < \varepsilon$. Encuentra un intervalo abierto alrededor de x_0 en donde se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$. Después da un valor para $\delta > 0$ tal que para toda x que satisface $0 < |x - x_0| < \delta$ se cumpla la desigualdad.

3.2.3. Límites Laterales

Aunque hasta ahora en todos los ejemplos que hemos realizado hemos encontrado el límite buscado, no significa para todas las funciones existe el límite en cualquier punto $x = a$.

Ejemplo 3.2.11 *La función de Heaviside*[1] *se define por*

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Su gráfica se muestra en la figura 3.30.

Conforme t se acerca a 0 desde la izquierda, $H(t)$ tiende a 0. Cuando t se aproxima a 0 desde la derecha, $H(t)$ tiende a 1. No existe un número único al que $H(t)$ se aproxime cuando t tiende a 0. Por consiguiente $\lim_{x\to 0} H(t)$ no existe. ■ *([2] p. 106)*

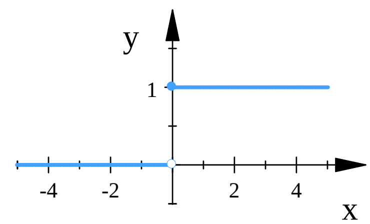


Fig. 3.30. Función de Heaviside

Para que una función f tenga límite L cuando x se aproxima a a, debe estar definida a ambos lados de a, y los valores de $f(x)$ deben aproximarse a L a medida que x se aproxima a a.

Definición 3.2.1 (Límites laterales) *Decimos que L es el* **límite izquierdo** *de $f(x)$ en a, y lo escribimos como*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad a - \delta < x < a \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Decimos que L es el **límite derecho** *de $f(x)$ en a, y lo escribimos como*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad a < x < a + \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Esto significa que si el límite izquierdo existe, podemos aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como queramos, escogiendo valores de x que esten cerca de a pero que sean menores que a. De igual forma si el límite derecho existe, podemos aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como queramos, escogiendo valores de x que esten cerca de a pero que sean mayores que a.

[1] Esta función recibe ese nombre en honor al ingeniero electricista Oliver Heaviside (1850-1925) y se puede usar para describir una corriente eléctrica que se hace circular en el instante $t = 0$

Una función $f(x)$ puede tener sólo un límite lateral en un punto a es decir x puede aproximarse a a sólo por un lado. En la figura 3.31 podemos ver que la función tiene un límite lateral derecho en el punto a, y en la figura 3.32 podemos ver que la función tiene un límite lateral izquierdo en el punto a.

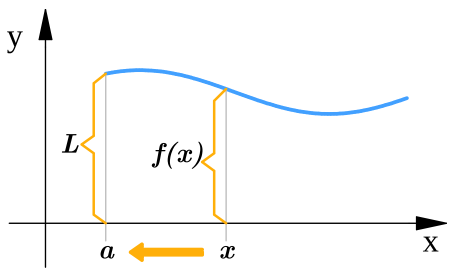


Fig. 3.31. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$

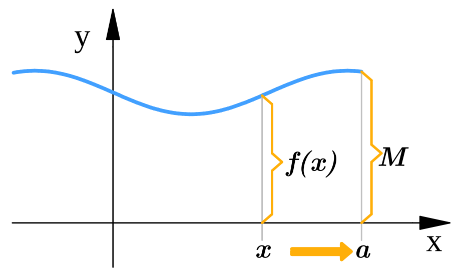


Fig. 3.32. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = M$

Los límites laterales se relacionan con la definición de límite con el siguiente teorema

Teorema 3.2.3 *Para una función $f(x)$, decimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, si y solo si los límites laterales existen y son iguales, es decir*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = L \qquad y \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Con el teorema 3.2.3 nos será más fácil probar que un límite no existe, ya que solo debemos mostrar que sus límites laterales son distintos.

Podemos calcular los límites laterales de una función a partir de su gráfica.

Ejemplo 3.2.12 *Use la gráfica de la figura 3.33 para calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ para $a = -2, 0$ y 2*

Solución.

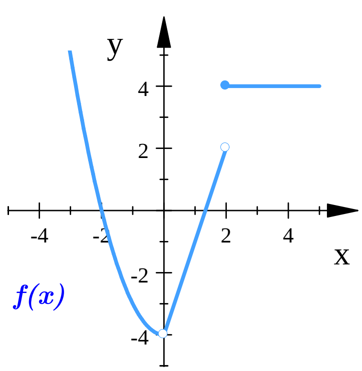


Fig. 3.33. Ejemplo 3.2.12

Observemos en la gráfica que:

$f(-2) = 0$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 0, \qquad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0, \qquad \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$

ya que los límites laterales izquierdo y derecho son iguales.

.

$f(0)$ *no existe, ya que la función no está definida en* $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -4, \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -4, \qquad \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -4$

ya que los límites laterales izquierdo y derecho son iguales

.

$f(2) = 4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4, \qquad \lim\limits_{x\to -2} f(x) \nexists$

ya que los límites laterales izquierdo y derecho son distintos.

■

Ejemplo 3.2.13 *Evalúe* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

Solución. .

Calcularemos los límites laterales, es decir para $x > 0$ *y* $x < 0$

Si $x > 0$, *entonces* $|x| = x$, *así* $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$. *por lo que*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

Si $x < 0$, *entonces* $|x| = -x$, *así* $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$. *por lo que*

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

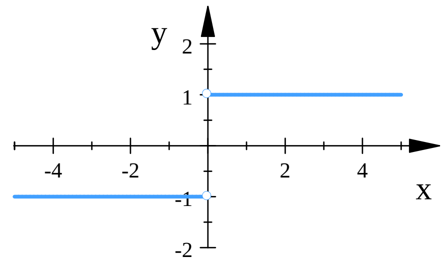


Fig. 3.34. $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Los límites laterales son distintos, luego por el teorema 3.2.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ *no existe.*

(Observe la gráfica de la función en la figura 3.34). ■

Ejemplo 3.2.14 *Sea* $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, *encuentre* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Solución. *Como la función está definida para valores mayores y menores que* 1 *calcularemos los límites laterares*

Para el límite lateral izquierdo consideramos $f(x) = 2x - 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (2x-2) \\ &= \lim_{x\to 1^-} 2x - \lim_{x\to 1^-} 2 \\ &= 2 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para el límite lateral izquierdo consideramos $f(x) = \sqrt{x-1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} \\ &= \sqrt{\lim_{x\to 1^+} (x-1)} \\ &= \sqrt{\lim_{x\to 1^+} x - \lim_{x\to 1^+} 1} \\ &= \sqrt{1-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

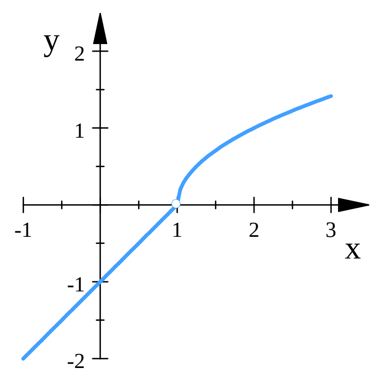


Fig. 3.35. Ejemplo 3.2.14

Los límites laterales existen y son iguales, por lo tanto $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ *(Podemos observar la grafica de la función en la figura: 3.35.* ■

Ejemplo 3.2.15 *Sea* $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \textit{si} \quad x<0 \\ -\sqrt{x} & \textit{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ *, encuentre* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Solución. *Calcularemos los límites laterares en* $x=0$

Para el límite lateral izquierdo consideramos $f(x) = x^2+1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \left(x^2+1\right) \\
&= \lim_{x\to 0^-} x^2 + \lim_{x\to 0^-} 1 \\
&= 0+1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Para el límite lateral izquierdo consideramos $f(x) = -\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left(-\sqrt{x}\right) \\
&= -\sqrt{\lim_{x\to 0^+} x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

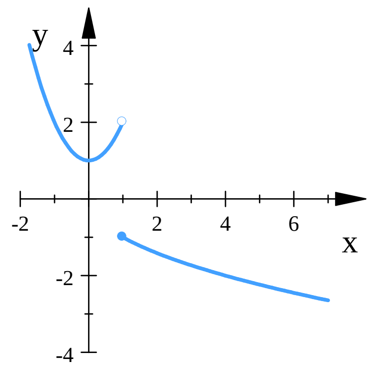


Fig. 3.36. Ejemplo 3.2.15

Los límites laterales existen pero son distintos, por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *no existe. (Podemos observar la grafica de la función en la figura: 3.36.* ■

Tambien podemos aplicar la definición formal de límite para encontrar un límite lateral.

Ejemplo 3.2.16 *Probar que* $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Solución. *Sea* $\varepsilon > 0$ *dada. queremos encontrar un* $\delta > 0$ *tal que para toda* x

$$0 < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon$$

o

$$0 < x < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\sqrt{x}\right| < \varepsilon$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la última desigualdad, tenemos

$$x < \varepsilon^2 \qquad \textit{Si} \qquad 0 < x < \delta$$

Si elegimos $\delta = \varepsilon^2$ *tenemos*

$$0 < x < \delta = \varepsilon^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x} < \varepsilon$$

o

$$0 < x < \varepsilon^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon$$

De acuerdo con la definición esto prueba que $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ *([8], p.* 104*)* ■

Ejemplo 3.2.17 *Un gas (como el vapor de agua o el oxígeno) se mantiene a temperatura constante dentro de un cilindro. Cuando el gas se comprime el volumen disminuye hasta que se llega a una presión crítica. Al rebasar esta presión el gas se convierte en un líquido. Utiliza la gráfica de la figura 3.37 para interpretar y calcular*

$$\lim_{p\to 100^-} V \qquad y \qquad \lim_{p\to 100^+} V$$

Solución. *En la figura 3.37 vemos que cuando la presión P (en torrs*[2]*) es baja la sustancia es gaseosa y el volumen V (en litros) es grande.*

Cuando P se acerca a 100 tomando valores menores que 100, V disminuye y tiende a 0.8, es decir,

$$\lim_{p\to 100^-} V = 0.8$$

Cuando P tiende a 100 tomando valores menores que 100 la sustancia es líquida y V aumenta muy lentamente (los líquidos son casi incompresibles) tendiendo a 0.3, es decir,

$$\lim_{p\to 100^+} V = 0.3$$

Cuando $P = 100$ las formas líquida y gaseosa coexisten en equilibrio y la sustancia no se puede clasificar como gas ni como líquido.

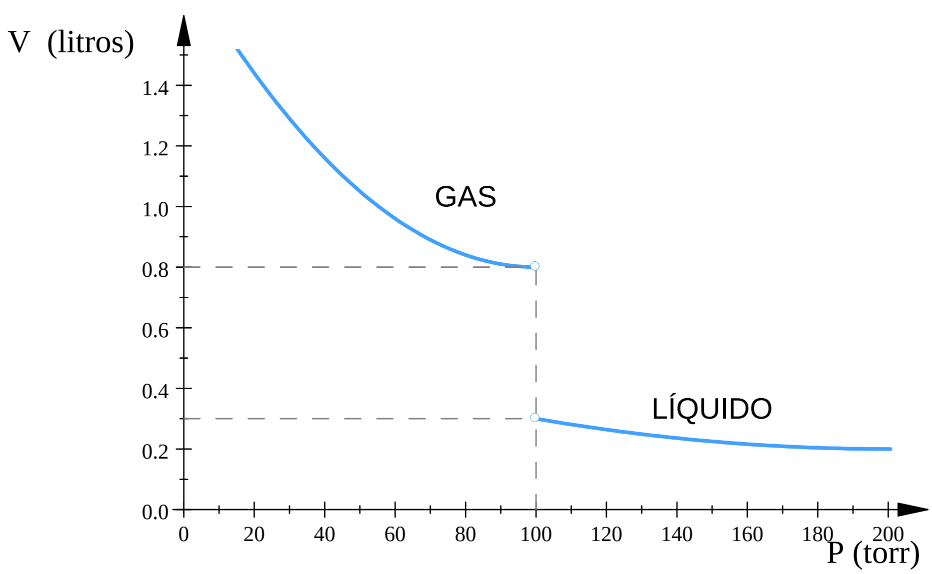


Fig. 3.37. Ejemplo 3.2.17

([3], p. 82) ■

[2]La definición de esta unidad de presión, el torr o milímetro de mercurio, puede encontrarse en libros de física.

3.2.4. Teorema de Compresión

El teorema de compresión o tambien llamado teorema del sandwich, nos ayuda a calcular límites de funciones cuyos valores están entre los valores de otras dos funciones.

Los dos teoremas siguientes son propiedades adicionales de los límites.

Teorema 3.2.4 *Sean $f(x), g(x)$ funciones, a número real. Si $f(x) \leq g(x)$, cuando x está cerca de a (excepto posiblemente en a), y los límites de f y g existen cuando x tiende a a, por lo tanto*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Teorema 3.2.5 (De Compresión (o del Sandwich)) *Sean $f(x), g(x), h(x)$ funciones, a número real.Supongamos que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x en algún intevalo abierto que contenga a a, excepto posiblemente en el mismo $x = a$. Supongamos también que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

Entonces, $\lim_{x \to a} g(x) = L$

Ejemplo 3.2.18 *Dado que*

$$1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} \qquad para\ todo\ x \neq 0$$

encontrar $\lim_{x \to 0} u(x)$, sin importar que tan complicado sea u.

Solución.

como

$$\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 1 \qquad y \qquad \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) = 1$$

el teorema 3.2.5 implica que $\lim_{x \to 0} u(x) = 1$ (ver figura 3.38)

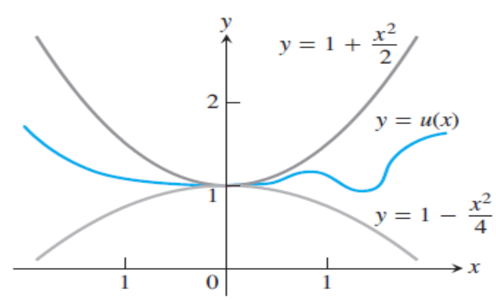


Fig. 3.38. Ejemplo 3.2.18

([8], p. 88) ■

3.2.5. Límites infinitos

Los límites infinitos proveen símbolos y conceptos útiles para describir el comportamiento de funciones cuyos valores positivos o negativos se vuelven arbitrariamente grandes.

Retomando lo que se menciono en la sección 2.2.4:

La expresión **límites infinitos** siempre se refiere a un límite que no existe porque la función f exhibe un comportamiento no acotado, es decir si decimos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Esto no quiere decir que se considere a ∞ como un número. Simplemente se está describiendo de manera simbólica el comportamiento de una función f cerca del número a.

Recordemos que los símbolos ∞ y $-\infty$ **no son números**. Solo los usamos para indicar que una cantidad decrece o crece sin límite en la dirección negativa (en el plano xy, a la izquierda para x y hacia abajo para y) y en la dirección positiva (a la derecha para x y hacia arriba para y).

En la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (figura 3.39) podemos observar que cuando x se aproxima a 0 por la izquierda el valor de $f(x)$ disminuye sin cota alguna. De la misma forma cuando x se aproxima a 0 por la derecha los valores de $f(x)$ aumentan sin cota alguna.

Por lo tanto escribimos:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ No existe.

Ocurre lo mismo para cualquier función que surja al hacer transformaciones de la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (ver figura 3.40)

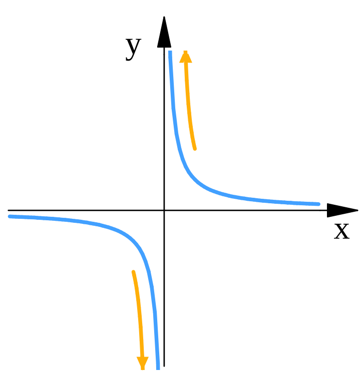
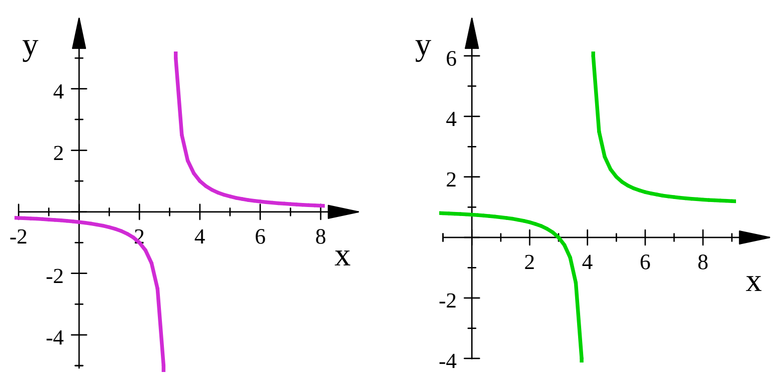


Fig. 3.39. $f(x) = \frac{1}{x}$



$$f(x) = \frac{1}{x-3} \qquad\qquad f(x) = \frac{1}{x-4} + 1 = \frac{x-3}{x-4}$$

Fig. 3.40

La definición formal de límites infinitos es:

Definición 3.2.2 (Límites infinitos) .

1. *Decimos que $f(x)$ tiende al infinito cuando x se aproxima a a, y escribimos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

si para todo número real positivo M existe un $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - a| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) > M$$

2. *Decimos que $f(x)$ tiende a menos infinito cuando x se aproxima a a, y escribimos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si para todo número real negativo N existe un $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - a| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) < N$$

Ejemplo 3.2.19 *Probar que* $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

Solución. *La gráfica de la función se muestra en la figura 3.41. Usando la definición*

Sea $M > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - 0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{x^2} > M$$

Pero

Demostración. $$\frac{1}{x^2} > M \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 < \frac{1}{M} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Tambien si se elige

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{M}} \qquad y \qquad 0 < |x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{x^2} > M$$

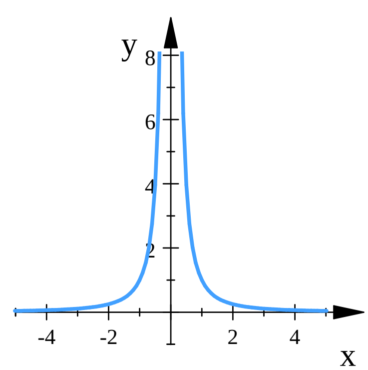


Fig. 3.41. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Esto demuestra que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$. *([2], p. 116)* ■ ■

Para calcular límites infinitos de forma más directa podemos usar las siguientes propiedades

Teorema 3.2.6 (Propiedades de Límites infinitos) *Sean a y L números reales, y f y g funciones tales que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad y \qquad \lim_{x\to a} g(x) = L$$

1. $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \infty$ *Suma o diferencia*
2. $\lim_{x\to a} (f(x)\, g(x)) = \infty$, *si* $L > 0$ *Producto*
   $\lim_{x\to a} (f(x)\, g(x)) = -\infty$, *si* $L < 0$
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0,$ *Cociente*

Propiedades análogas son válidas para límites laterales y para funciones cuyo límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ es $-\infty$. *([5], p. 87)*

Ejemplo 3.2.20 *Evalúe* $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}+4\right)$

Solución. *Como* $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = \infty$ *y* $\lim_{x\to 0} 4 = 4$ *entonces por la propiedad* 1 *del teorema 3.2.6*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+4\right) = \infty$$

■

Ejemplo 3.2.21 *Evalúe* $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$

Solución.

La gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ es la gráfica de $\dfrac{1}{x}$ desplazada dos unidades hacia la derecha (ver figura 3.42)

Los límites laterales $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2} = -\infty$, *y* $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2} = \infty$

Luego podemos concluir que $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$ *no existe*

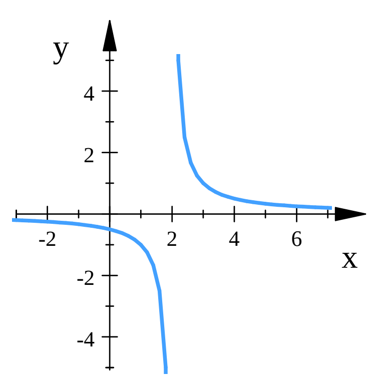


Fig. 3.42. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

. ■

3.2.6. Asíntotas verticales

Cuando la gráfica de una función se aproxima a una recta vertica, o bien la distancia entre un punto de la gráfica y la recta vertical se aproxima a cero, decimos que la recta es una ásintota de la función.

Definición 3.2.3 (Asíntota Vertical) *Una recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función $y = f(x)$ si se cumple que o*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad o \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Para las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ el eje y es una asíntota vertical ya que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Ejemplo 3.2.22 *Encuentre las asíntotas verticales de $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$, (la gráfica se muestra en la figura 3.43)*

.

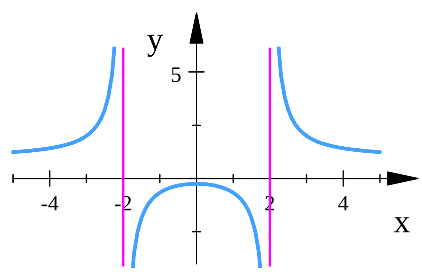


Fig. 3.43

Solución. *Los puntos donde no está definida la función son $x = \pm 2$. $\pm$. Podemos hacer la división algebraica para obtener*

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1 + \frac{5}{x^2-4} \\ &= 1 + \left(\frac{5}{x+2}\right)\left(\frac{1}{x-2}\right) \end{aligned}$$

así por el teorema 3.2.6 tenemos que

$$\lim_{x\to -2^+} 1 = 1, \qquad \lim_{x\to -2^+} \left(\frac{5}{x^2-4}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} 1 = 1, \qquad \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{5}{x^2-4}\right) = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} &= \lim_{x\to -2^+} \left(1 + \frac{5}{x^2-4}\right) = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} &= \lim_{x\to 2^+} \left(1 + \frac{5}{x^2-4}\right) = \infty \end{aligned}$$

así las rectas $x = 2$ y $x = 2$ son asintotas verticales de la función $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$. ■

3.2.7. Límites al infinito

La expresión **al infinito** o **en el infinito** significa que se está intentando determinar si una función f posee un límite cuando se deja que el valor de la variable x disminuya o aumente sin límite es decir: $x \longrightarrow \infty$ o $x \longrightarrow -\infty$. Estos límites pueden o no existir.

Retomamos la definición **2.2.3** de límites al infinito del cápitulo 2 y la reescribimos ahora con la notación formal

Definición 3.2.4 (Límites al infinito) *Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). En tal caso*

1. *Decimos que $f(x)$ tiene el límite L cuando x tiende al infinito, y escribimos*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

si, para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número M correspondiente tal que para toda x

$$x > M \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

2. *Decimos que $f(x)$ tiene el límite L cuando x tiende a menos infinito, y escribimos*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si, para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número N correspondiente tal que para toda x

$$x < N \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Es decir $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a L tanto como desee, si se escoge una x suficientemente grande.

Y $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = L$ significa que los valores de $g(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L haciendo que x sea lo suficientemente grande y negativa.

Debemos considerar que según lo visto en la sección 2.2.4

1. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} K = K.$ Donde K es una constante.

2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Donde $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ es una función polinomial de grado $n \geq 1$ definida en $(-\infty, \infty)$. Este límite constituye un ejemplo de **límite infinito en el infinito** y su valor $-\infty$ o ∞ dependera de los valores de a_n y n.

3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty.$ Se deduce del anterior.

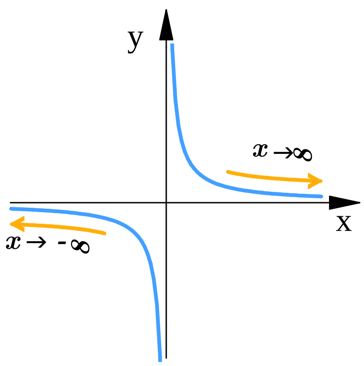


Fig. 3.44. $f(x) = \frac{1}{x}$

Si observamos la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en la figura 3.44 podemos ver que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ejercicio 3.2.1 *Pruebe que para* $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad y \qquad b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Demostración. $a)$ *Sea* $\varepsilon > 0$ *dada. Debemos encontrar un número* M *tal que para toda* x

$$x > M \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

Esta implicación se satisface si $M = \frac{1}{\varepsilon}$ *o a cualquier número positivo mayor que* $\frac{1}{\varepsilon}$. *Esto prueba que* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

$b)$ *Sea* $\varepsilon > 0$ *dada. Debemos encontrar un número* N *tal que para toda* x

$$x < N \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

Esta implicación se satisface si $N = -\frac{1}{\varepsilon}$ *o a cualquier número positivo menor que* $\frac{1}{\varepsilon}$. *Esto prueba que* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$ *([8]. p. 108)* ■

Teorema 3.2.7 *Si* $r > 0$ *es un número racional, entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Si $r > 0$ *es un número racional tal que* x^r *está definida para toda* x, *entonces*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Las propiedades de los límites al infinito son similares a las leyes de los límites vistas hasta ahora.

Teorema 3.2.8 (Propiedades de los límites al infinito) *Sea c, M, N números reales y suponga que:* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$ *existen. Si*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \qquad y \qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M,$$

entonces:

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} cf(x) = c \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = cL$ **Regla del múltiplo constante**

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = L\pm M$ **Regla de la suma**

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)\, g(x)] = \left(\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)\right) = L\, M$ **Regla del producto**

4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ *si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = M \neq 0$ **Regla del cociente**

5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x))^{r/s} = \left(\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)\right)^{r/s} = L^{r/s}$ **Regla de la potencia**

   $$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x))^{r/s} = \sqrt[s]{\left(\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\right)^r} = \sqrt[s]{L^r} = L^{r/s}$$

   siempre y cuando $L^{r/s}$ sea un número real. (Si s es par, damos por hecho que $L > 0$).

Se debe tener cuidado al aplicar las leyes de los límites al infinito, ya que el teorema especifica que los límites de f y g deben ser números reales. Recuerde que el simbolo ∞ **no es un número**.

Ejemplo 3.2.23 *Evalúe* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+4x^2-5}{8x^3+2x}$

Solución. *No podemos aplicar la regla del cociente ya que tanto el númerador como el denominador tienden a crecer conforme x hace más grande. Para poder evaluar el límite haremos´en la función algunas operaciones algebraicas para que cada uno de los términos tanto del numerador como del denominador sean de la forma $\frac{1}{x^r}$ y poder aplicar el teorema. Para esto primero debemos identificar la potencia más grande del denominador 3.2.7*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+4x^2-5}{8x^3+2x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3+4x^2-5}{8x^3+2x} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}\right)$$

Multiplicamos numerador y denominador por $\frac{1}{x^3}$ ya que x^3 es la potencia más grande del denominador

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{2x^3+4x^2-5}{x^3}}{\frac{8x^3+2x}{x^3}}\right)$$

Esto es equivalente a dividir numerador y denominador entre x^3

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}-\frac{5}{x^3}}{\frac{8x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}}\right) && \textit{Separando términos}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^3}}{8+\frac{2}{x^2}}\right) && \textit{Simplificamos la expresión}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(8+\frac{2}{x^2}\right)} && \textit{Aplicando la regla del cociente}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}8+2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} && \textit{Aplicando la regla de la suma y múltiplo constante}\\
&= \frac{2+4(0)-5(0)}{8+2(0)} && \textit{Por el teorema 3.2.7}\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

. ■

Ejemplo 3.2.24 *Calcule* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Solución. *Ya que tanto* $\sqrt{x^2+1}$ *como* x *son grandes cuando* x *es grande, es díficil ver qué sucede con su diferencia, por eso, use el álgebra para escribir de nuevo la función. En primer lugar multiplique el numerador y el denominador por el radical conjugado*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)
\end{aligned}
$$

Se podría aplicar el teorema de la compresión para demostrar que este límite es 0*, Pero un método más fácil es dividir el numerador y el denominador entre* x*. Al efectuar esto y aplicar las leyes de los límites obtiene*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{0}{\sqrt{1+0}+1}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

([2]. p. 135*)* ■

3.2.8. Asintotas horizontales

Cuando la gráfica de una función se aproxima a una recta fija y si la distancia entre la gráfica de una función y la recta fija se aproxima a cero cuando un punto de la gráfica se aleja cada vez más del origen, decimos que la gráfica de la función se aproxima asintóticamente a la recta, y esa recta es una asíntota de la gráfica.

Definición 3.2.5 (Asíntota horizontal) *Una recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $y = f(x)$ si*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \textit{o bien} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Ejemplo 3.2.25 *Encuentre las asíntotas horizontales de la gráfica de la función* $f(x) = \dfrac{2x^2-7x+3}{x^2+4}$

Solución. *Para encontrar las asintotas horizontales necesitamos evaluar los límites cuando* $x \to \pm\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-7x+3}{x^2+4} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-7x+3}{x^2}}{\frac{x^2+4}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-7x+3}{x^2+4} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x^2-7x+3}{x^2}}{\frac{x^2+4}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

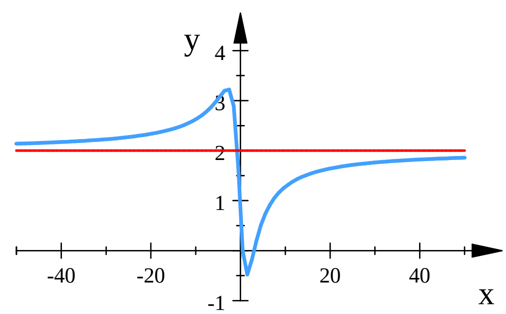


Fig. 3.45. Ejemplo 3.2.25

Por lo tanto la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función (Figura 3.45). ■

3.2.9. Asíntotas oblicuas

Si el grado del numerador de una función racional es mayor en una unidad que el grado del denominador, la gráfica tiene una asíntota oblicua (inclinada). Encontramos una ecuación para la asíntota dividiendo el numerador entre el denominador, con el propósito de expresar f como una función lineal más un residuo que tiende a cero cuando $x \to \pm\infty$

Ejemplo 3.2.26 *Encontrar una asíntota oblicua de la gráfica de* $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{7x+4}$
Solución. *Dividiendo los polinomios encontramos*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2-3}{7x+4} \\ &= \underbrace{\left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right)}_{\text{función lineal } g(x)} + \underbrace{\frac{-115}{49(7x+4)}}_{\text{residuo}} \end{aligned}$$

A medida que $x \to \pm\infty$, *el residuo, cuya magnitud representa la distancia vertical entre las gráficas de* f *y* g *, tiende a cero, haciendo que la recta (oblicua)*

$$g(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$$

sea una asíntota de la gráfica de $f(x)$.

La recta $y = g(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$ *es una asíntota tanto a la derecha como a la izquierda. La gráfica se muestra en la Figura 3.46). ([8], p.* 111*).*

.

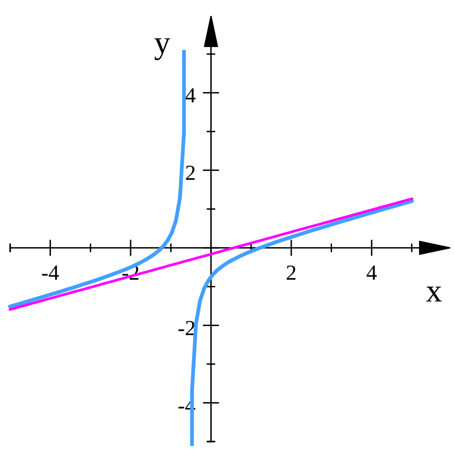


Fig. 3.46. Ejemplo 3.2.26

. ■

Ejercicios 3.4

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.
Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. En los siguientes ejercicios explica por qué no existe el limite y gráfica cada una de ellas.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$

2. Sea $f(x) = \dfrac{(x^2-1)}{(|x|-1)}$

a) Haz una tabla para consignar los valores de f en los valores de x que se acercan a $x_0 = -1$, por debajo y por arriba. Después estima $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

b) Apoya las concluciones a que se llegó en el inciso (a) graficando f cerca de $x_0 = -1$, y estima los valores de y cuando $x \to -1$.

c) Encuentra $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ algebraicamente.

3. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ es $[-2, 2]$; Encuentra los límites laterales de la función en los puntos $x = -2$ y $x = 2$.

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si} \quad x < 2 \\ \frac{x}{2}+1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) Encuentra el $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

b) ¿$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe? Si es asi, ¿Cuál es? Si tu respuesta es negativa, explica por qué

c) Encuentra $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

d) ¿$\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ existe? Si es así, ¿Cuál es?. Justifica tu respuesta.

5. Para las siguientes funciones: Calcula los límites laterales $L^- = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x), L^+ = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ¿existe $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ en el punto x_0?. Dibuja la gráfica de la función.

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}, \qquad x_0 = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}, \qquad x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}, \qquad x_0 = 0$

6. Evalua $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \pi & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

6. Para la función $h(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ 8-x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

I) Evalúa cada uno de los límites siguientes, si existe. (Justifica la respuesta):

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

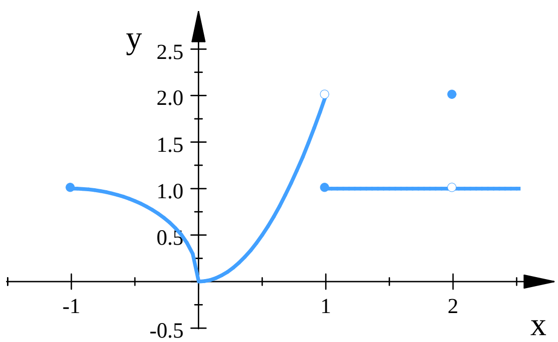
d) $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

II) Traza la gráfica de h

7. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciónes acerca de la función $y = f(x)$, cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderas y cuáles son falsas.



a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe.

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$

e) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$

f) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 0$

i) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ no existe.

j) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe para toda c en el intervalo abierto $(-1, 1)$.

k) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe para toda c en el intervalo abierto $(1, 3)$.

8. Evalúa los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x^2 - x + 3}{27x^2 + 4x + 1}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

9. Trace la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla con todas las condiciones dadas

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$
- $f(2) = 1$
- $f(0)$ no está definida.

10. Encuentra las asíntotas horizontales y verticales de cada curva. Usa algún software para graficar la función y comprobar las asintotas encontradas.

a) $y = \dfrac{x^3}{x^3 - 2x + 1}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 1}$ c) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 1}$

11. Encuentra los límites de los siguientes ejercicios:

I) $\lim \dfrac{1}{x^2 - 4}$ cuando:

a) $x \to 2^+$ b) $x \to 2^-$ c) $x \to -2^+$ d) $x \to -2^-$

II) $\lim \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x} \right)$ cuando:

a) $x \to 0^+$ b) $x \to 0^-$ c) $x \to \sqrt[3]{2}$ d) $x \to -1$

III) $\lim \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2}$ cuando:

a) $x \to 0^+$ b) $x \to 2^+$ c) $x \to 2^-$ d) $x \to 2$

e) ¿Qué se puede decirse acerca del límite conforme $x \to 0$?

Evaluación 9

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Encuentra los límites laterales $L^- = \lim_{x \to x_0^-} f(x), L^+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y di si existe el límite $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ en el punto x_0.

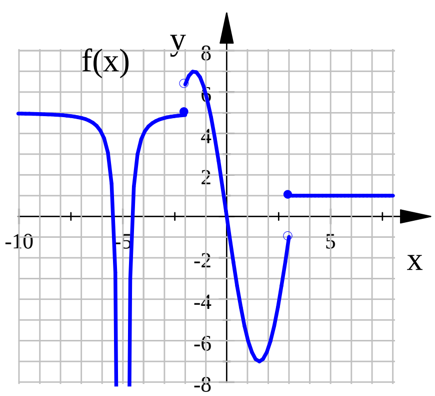
si $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}, \qquad x_0 = 0$

2. Calcula el siguiente límite $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - x + 2}{27x^3 + 6x + 1}$

3. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ es $[-3, 3]$; Encuentra los límites laterales de la función en los puntos $x = -3$ y $x = 3$.

4. Encuentra las asíntotas horizontales y verticales de la curva $y = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 1}$

5. Usa la gráfica de la función para determinar:



$\lim_{x \to -5^-} f(x) =$

$\lim_{x \to -5^+} f(x) =$

$\lim_{x \to -5} f(x) =$

$f(-5) =$

$f(0) =$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) =$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to -2} f(x) =$

$f(-2) =$

$\lim_{x \to 0} f(x) =$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) =$ $\quad \lim_{x \to 3^+} f(x) =$ $\quad \lim_{x \to 3} f(x) =$ $\quad f(3) =$

$\lim_{x \to 5} f(x) =$ $\quad \lim_{x \to 5^-} f(x) =$ $\quad \lim_{x \to 5^+} f(x) =$ $\quad f(5) =$

3.3. Continuidad

3.3.1. Definición

En la sección 2.3 se analizaron las definiciones sobre la continuidad de una función.

Definición ??. (Intuitiva de continuidad). Una función f es continua si su gráfica no contiene interrupciones, ni saltos ni oscilaciones indefinidas. De lo contrario es discontinua o bien no continua.

Definición 2.3.2. (Continuidad en un punto). La función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Las condiciones para que se cumpla la continuidad son:

1. Que $\lim_{x \to a} f(x)$ exista,
2. Que $f(a)$ exista, es decir que a está en el dominio de f
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si cualquiera de estas tres no se cumple, entonces f es discontinua en a.

Teorema 2.3.2. (Continuidad de un polinomio).
Una función polinomial es continua en todo número real c

Definiremos ahora la continuidad en un punto extremo

Definición 3.3.1 (Continuidad en un punto extremo) *Una función $f(x)$ es continua en un punto extremo iquierdo a o es continua en un punto extremo b de su dominio si*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad o \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = f(b)$$

Las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (fig. 3.47) y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (fig. 3.48) son discontinuas en $x = 0$, ya que aunque existan los límites laterales la función no está definida en cero.

.

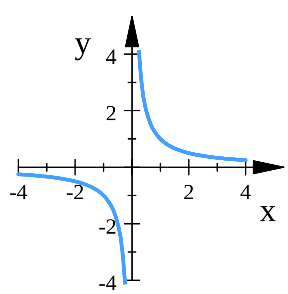


Fig. 3.47.

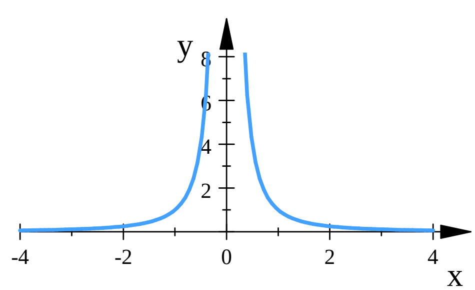


Fig. 3.48.

Para probar la continuidad de una función probaremos que es continua en todos los puntos de su dominio, es decir usaremos la continuidad en un itervalo.

Recordemos que una función es continua en un itervalo si es continua en todos los puntos del intervalo. Según la definición 3.3.1 en los extremos se considera la continuidad por derecha en extremo izquierdo del intervalo y la continuidad por la uzquierda en el extremo derecho del intervalo.

Ejemplo 3.3.1 *Verifique la continuidad de* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Solución.

Sea $a \in (-1,1)$

$$\begin{aligned} f(a) &= \sqrt{1-x^2} \quad y \quad \lim_{x\to a} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to a}(x^2-1)} = \sqrt{1-a^2} \\ f(-1) &= 0 \quad y \quad \lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0 \\ f(1) &= 0 \quad y \quad \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 \end{aligned}$$

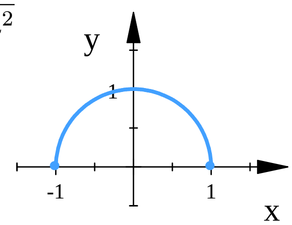


Fig. 3.49.

Luego la función es continua en todos los puntos del intervalo. $[-1,1]$. *La gráfica de la función se muestra en la figura 3.49.*

. ■

Ejemplo 3.3.2 *Verifique la continuidad de* $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Solución.

En este caso $f_1(x) = x^2$ *es continua para todo número real, en particular para* $x < 0$, *y* $f_2(x) = 1$ *también es continua en para todo número real.*

El punto que tenemos que verificar es $x = 0$ *ya que es el punto donde se cambia de* f_1 *a* f_2. *Evaluamos los límites laterales*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \end{aligned}$$

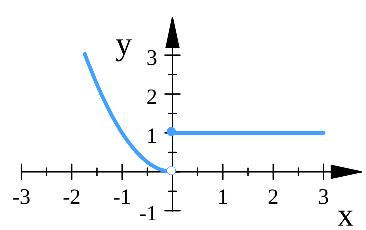


Fig. 3.50.

Luego, concluimos que como los límites laterales son distintos, entonces el límite no existe, por lo tanto la función es discontinua en $x = 0$. *La gráfica de la función se muestra en la figura 3.50.* ■

Ejemplo 3.3.3 *Verifique la continuidad de la función* $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+2}$. *(figura 3.51).*

Solución.

Para cualquier número real $a \neq -2$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2+x-2}{x+2} = \frac{a^2+a-2}{a+2} = f(a)$$

lo que significa que la función es continua en $x \neq -2$

Aunque

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x+2} = \lim_{x\to -2} (x-1) = -3$$

La función no está definida para $x=-2$. *por lo tanto concluimos que la función tiene una discontinuidad en* $x=-2$.

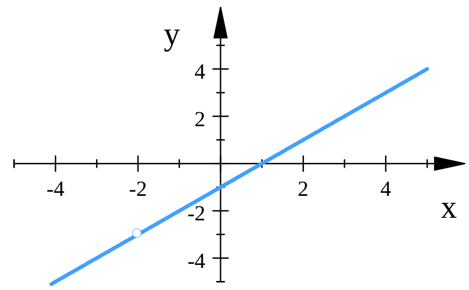


Fig. 3.51.

. ■

Podemos clasificar las discontinuidades como:

Discontinuidad Removible: presenta solo un agujero en $x=a$ en la gráfica de la función. Existe el límite en $x=a$ y podemos evitar la discontinuidad si se redefine el valor de $f(a)$, es decir haciendo que $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. Se muestra un ejemplo gráfica en la figura 3.52.

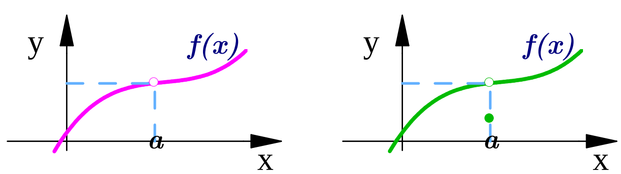


Fig. 3.52. Discontinuidad removible

Discontinuidad De Salto: Existen los límites laterales pero tienden a valores distintos. La función "salta"de un valor a otro. Se muestra un ejemplo gráfica en la figura 3.53.

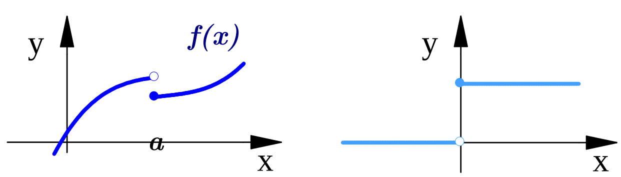


Fig. 3.53. Discontinuidad de salto

Discontinuidad Infinita: Los límites laterales tienden a $\pm\infty$. Se muestra un ejemplo gráfica en la figura 3.54.

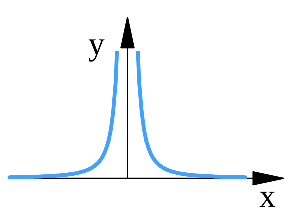


Fig. 3.54. Discontinuidad infinita

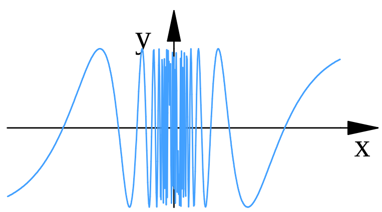


Fig. 3.55. Discontinuidad Oscilante

Discontinuidad Oscilante: Oscila demasiado para tener un límite cuando $x \to a$. Se muestra un ejemplo gráfica en la figura 3.55.

Ejemplo 3.3.4 *Encuentre los puntos donde la función* $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ *es discontinua. Identifique si es una discontinuidad removible, de ser así remueva la discontinuidad y reescriba nuevamente la función.*

Solución. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ *no esta definida en* $x = 3$, *luego*

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

reescribiendo la nueva función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si} \quad x \neq 3 \\ 6 & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$$

■

3.3.2. Propiedades de Continuidad

Las propiedades de las funciones continuas se muestran en el siguiente teorema

Teorema 3.3.1 (Propiedades de las Funciones Continuas) *Si* $f(x)$ *y* $g(x)$ *son funciones continuas en un punto* $x = a$, *y* k *es una constante distinta de cero entonces*

1. kf *es continua en* a
2. $f+g$ *es continua en* a
3. $f-g$ *es continua en* a
4. fg *es continua en* a
5. $\dfrac{f}{g} = f/g$ *es continua en* a. *Siempre y cuando* $g(a) \neq 0$
6. $f^{r/s}$ *es continua en* a.*Siempre y cuando esté definida en un intervalo abierto que contenga a* a, *donde* r *y* s *son enteros.*

Ejemplo 3.3.5 *Determite si $f(x) = |x|$ es continua*

Solución. *La función$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ es continua en todo valor de x. Ya que si $x > 0$, tenemos $f(x) = x$, una función polinomial. Si $x < 0$, tenemos $f(x) = -x$, otra función polinomial. Finalmente, en $x = 0$*

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 = |x|$$

■

Teorema 3.3.2 (Composición de funciones continuas) *Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces:*

$$g \circ f = g(f(x)) \qquad \text{es continua en } a$$

La continuidad de composiciónes se cumple para cualquier número finito de funciones. El único requerimiento es que cada función sea continua donde está aplicada.

Ejemplo 3.3.6 *Pruebe que la función $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ es continua en todos los puntos de su dominio.*

Solución. *Sea $g = \sqrt{x}$, g es continua en $[0, \infty]$, y sea $f = x^2 - 2x - 5$, f es continua en $(-\infty, \infty)$*

$$y = g \circ f = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$$

Luego $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ es continua en cualquier punto de su dominio. ■

Ejemplo 3.3.7 *Pruebe que la función $y = \dfrac{x^{2/3}}{2 + x^2}$ es continua en todos los puntos de su dominio.*

Solución. *Sea $f = x^{2/3}$, y sea $g = 2 + x^2$, tanto f como g son continuas en $(-\infty, \infty)$*

$$y = \frac{f}{g} = \frac{x^{2/3}}{2 + x^2}$$

Luego $y = \dfrac{x^{2/3}}{2 + x^2}$ es continua en cualquier punto de su dominio ■

Ejemplo 3.3.8 *Pruebe que la función $y = \left| \dfrac{x - 2}{x^2 - 2} \right|$ es continua en todos los puntos de su dominio.*

Solución. *Sea $g = |x|$, continua, y sea $f = \dfrac{x - 2}{x^2 - 2}$, continua en $x \neq \pm\sqrt{2}$*

$$y = g \circ f = g(f(x)) = |f(x)| = \left| \frac{x - 2}{x^2 - 2} \right|$$

Luego $y = \left| \dfrac{x - 2}{x^2 - 2} \right|$ es continua en cualquier punto de su dominio ■

La mayor parte de las funciones conocidas hasta ahora son continuas en cada punto de sus dominios.

Teorema 3.3.3 *Las funciones: Polinomicas, Racionales, Radicales y la función Valor absoluto, son continuas en cada punto contenido en su dominio.*

Ejercicios 3.5

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.
Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Verifica la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2$. Da una justificación de tu respuesta?

2. Para $G(x) = \dfrac{x^4 + 17}{6x^2 + x - 1}$ Encuentra el dominio de la función y demuestra qué la función es continua en todo número en su dominio.

3. ¿Para qué valor de la constante c la funcion $f(x) = \begin{cases} cx + 1 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ cx - 1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$ es continua sobre $(-\infty, \infty)$?

4. Sea f una función real de variable real, definida por: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si} \quad \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

¿ f es continua en algún punto de $\mathbb{R}$?

5. Determina los valores de a, b para que la siguiente función $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} & x < 0 \\ \dfrac{4 - \sqrt{4x+4}}{x^2 - 2x - 3} & \text{si} & x \geq 0, \quad x \neq 3 \\ b & \text{si} & x = 3 \end{cases}$

sea continua en $x = 0$ y en $x = 3$

6. Determina los valores constantes c y k que hacen continua la función en $x = 1$ y en $x = 4$ de

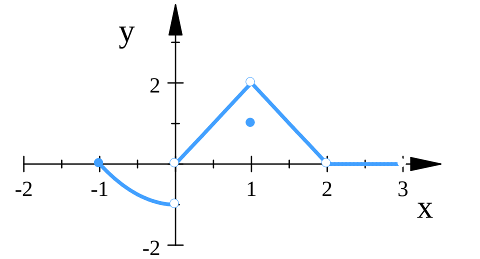
$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} & x \leq 1 \\ cx + k & \text{si} & 1 < x < 4 \\ -2x & \text{si} & 4 \leq x \end{cases}$ y después gráficala.

7. Analiza la continuidad de $f(x)$ para $x = 1$. Haz una gráfica de la función.

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 5 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ (x-1)^3 + 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

8. Contesta las siguientes preguntas para

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad -1\le x<0 \\ 2x & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 1 & \text{si} \quad x=1 \\ -2x+4 & \text{si} \quad 1<x<2 \\ 0 & \text{si} \quad 2<x<3 \end{cases}$$ cuya gráfica es:



$f(x)$

a) ¿ $f(-1)$ existe?

b) ¿ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ existe?

c) ¿ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$?

d) ¿es f continua en $x=1$?

e) ¿Está f definida en $x=2$?

f) ¿Es f continua en $x=1$?

g) ¿En que valores de x es continua f ?

9. Traza una posible gráfica de una función f que cumpla con las siguientes condiciones:

- $f(x)=1$ si $4<x<6$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$
- $f(-2)=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 1$ y señale los puntos de discontinuidad esencial.

10. Traza una posible gráfica de una función f que cumpla con las siguientes condiciones:

- $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=2$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-2$
- $f(x)$ tiene una discontinuidad removible en $x=0$

11. ¿En dónde son discontinuas cada una de las funciónes siguientes?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{si} \quad x\neq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x=2 \end{cases}$$

12. Probar que la función $y=\sqrt{x^2-2x-5}$ es continua en todos los puntos de sus respectivos dominios

13. Aplicar la continuidad para evaluar el límite $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}$

14. La temperatura T (en $^\circ C$) a la que el agua hierve esta dada por la fórmula: $T(h)=100.862-0.0415\sqrt{h+431.03}$ donde h es la altura sobre le nivel del mar (medida en metros). Use el Teorema del Valor Intermedio y di si entre 4000 y 4500 metros sobre el nivel del mar hay una altitud a la cual hierve a $98^\circ C$. Justifica tu respuesta.

3.4. Derivada

3.4.1. Pendiente de la recta tangente a una curva

En la sección 2.4.1 se definio la pendiente de la recta tangente a una curva.

Definición 2.4.1(Pendiente). La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P = (a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

cuando el límite existe

Ecuación de la recta tangente a una curva.
Si queremos encontrar la ecuación de la recta tangente de la función $f(x)$, en algún punto $P(x_0, y_0)$. La ecuación tiene la forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

donde $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, siempre que el límite exista

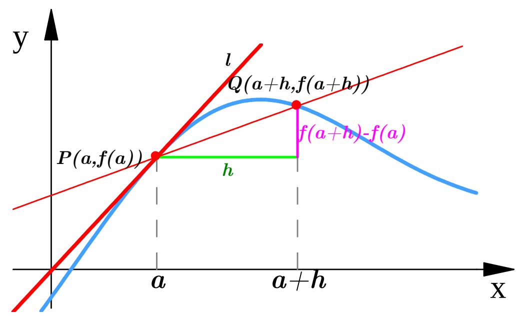


Fig. 3.56. Tangente a una curva

Ejemplo 3.4.1 *Para* $f(x) = \frac{1}{x}$

a) *Encuentra la pendiente de la curva* $y = f(x)$ *en* $x = a \neq 0$

b) *¿En qué punto la pendiente es igual a* $-\frac{1}{4}$*?*

c) *¿Qué pasa con la tangente a la curva en el punto* $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ *a medida que cambia* a*?*

Solución.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, *La pendiente en el punto* $\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $\quad a \neq 0$ *es:*

$$\begin{aligned} m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a - (a+h)}{ha(a+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{ha(a+h)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente es

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a} \\ &= -\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a} \end{aligned}$$

b) La pendiente de $y=\frac{1}{x}$ *en el punto donde* $x=a$ *es* $-\frac{1}{a^2}$. *Será* $-\frac{1}{4}$ *siempre y cuando*

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a^2} &= -\frac{1}{4} \\ a &= \sqrt{4}=\pm 2 \end{aligned}$$

La curva tiene pendiente $-\frac{1}{4}$ *en los dos puntos,* $(2,\frac{1}{2})$ *y* $(-2,-\frac{1}{2})$. *(figura 3.57)*

c) Observe que la pendiente $-\frac{1}{a^2}$ *siempre es negativa si* $a\neq 0$. *Cuando* $a\to 0^+$ *la pendiente tiende a* $-\infty$ *y la tangente se hace cada vez más inclinada (figura 3.58)*

La misma situación ocurre cuando $a\to 0^-$. *A medida que a se aleja del origen en cualquier dirección, la pendiente se aproxima a* 0^- *y la tangente tiende a hacerse horizontal.*

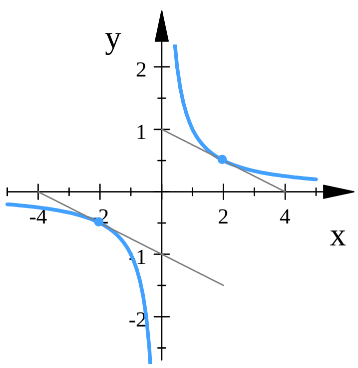


Fig. 3.57. $m=-\frac{1}{4}$

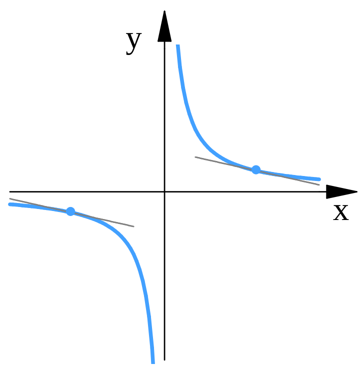


Fig. 3.58. Las pendientes de las tangentes se inclinan cerca del origen

([8], p. 138*).* ■

Ejemplo 3.4.2 *Demuestre que la gráfica de* $f(x)=|x|$ *no tiene tangente en* $(0,0)$

Solución. *La gráfica de la función* $f(x)=|x|$ *que se muestra en la figura 3.59 tiene un pico en el origen. Para demostrar que la gráfica de* f *no posee una recta tangente en el origen es necesario examinar*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

Por la definición de valor absoluto

$$|h| = \begin{cases} h & \text{si} \quad h > 0 \\ -h & \text{si} \quad h < 0 \end{cases}$$

observamos que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \\ mientras \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

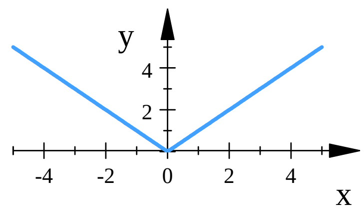


Fig. 3.59. $f(x) = |x|$

Puesto que los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales, se concluye que $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ *no existe. Aunque la función* $f(x) = |x|$ *es continua en* $x = 0$, *la gráfica de* f *no posee ninguna tangente en* $(0,0)$. *([6], p.* 114*).* ■

Ejemplo 3.4.3 *Encuentra la pendiente de la recta tangente a la función* $f(x) = \sqrt{x+1}$ *en* $x = 8$

Solución. *Evaluando el límite*

$$\begin{aligned} m = \lim_{h\to 0} \frac{f(8+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(8+h)+1} - \sqrt{8+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+h} - \sqrt{9}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt{9+h} - \sqrt{9}}{h} \cdot \frac{\sqrt{9+h} + \sqrt{9}}{\sqrt{9+h} + \sqrt{9}} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{9+h-9}{h\left(\sqrt{9+h} + \sqrt{9}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{9+h} + \sqrt{9}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{9+h} + \sqrt{9}} \\ &= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

calculamos el valor de f *cuando* $x = 8$ *y obtenemos* $f(8) = \sqrt{8+1} = 3$. *El punto por donde debe pasar la recta tangente es* $P = (8,3)$

La ecuación es

$$y = \frac{1}{6}(x-8) + 3 = \frac{1}{6}x + \frac{5}{3}$$

■

3.4.2. Razón de cambio y velocidad

El hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto $x = a$, y hallar la velocidad de un objeto, involucran un mismo tipo de límite. A esta clase de límites se les llama derivada, y es interpretada como una razón de cambio.

La mayoría de las cantidades que aparecen en la vida diaria cambian o varían en el tiempo. Por ejemplo la rápiedez con que cierta sustancia se disuelve en el agua, la intensidad con la que la corriente varía en alguna parte de un circuito, la rápidez con la que las bacterias en un cultivo aumenta o disminuyen, etc.

En la sección 2.4.4 se mencionarón las deficiniciones referentes a la velocidad, que es interpretada como la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo.

Definición 2.4.4(Velocidad Promedio).
La **velocidad promedio** en este intervalo de tiempo de $t = a$ hasta $t = a + h$ es

$$v_{prom} = \frac{cambio\ en\ la\ posición}{cambio\ en\ el\ tiempo} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que es lo mismo que la pendiente de la secante PQ en la figura 3.56

Definición 2.4.3. **(Velocidad Instantánea).** Si un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado con función de posición $f(t)$, entonces su velocidad instantánea en el instante a es

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que el límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

- La velocidad puede ser positiva, cero o negativa.
- La rápidez de un objeto se define como el valor absoluto de su velocidad, y nunca es negativa.
- La posición de un objeto en caída libre (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad se obtiene mediante la ecuación

  $$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0 \qquad \textit{función posición}$$

  donde: s_0 es la altura inicial del objeto, v_0 la velocidad inicial y g la aceleración de la gravedad, que en la superficie terrestre es de $9.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ o bien $32\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}^2}$

Ejemplo 3.4.4 *Una partícula se mueve a lo largo de un eje coordenado.Su distancia dirigida en centímetros, medida desde el origen al final de t segundos está dada por $s = f(t) = \sqrt{5t+1}$. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula al final de 3 segundos.*

Solución. *La figura 3.60 muestra la distancia recorrida como función del tiempo. La velocidad instantánea en el instante $t = 3$ es igual a la pendiente de la recta tangente en $t = 3$.*

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5(3+h)+1} - \sqrt{5(3)+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5h+16} - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt{5h+16}-4}{h} \cdot \frac{\sqrt{5h+16}+4}{\sqrt{5h+16}+4} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{5h+16-16}{h\left(\sqrt{5h+16}+4\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h\left(\sqrt{5h+16}+4\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{5h+16}+4} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

concluimos que la velocidad instantánea al final de 3 segundos es de $\frac{5}{8}$ de centímetro por segundo.

.

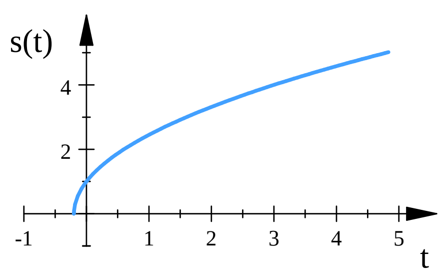


Fig. 3.60.

. ■

Ejercicios 3.6

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Si $y = \sqrt{x}$, encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto $(1, 1)$

2. Encuentra una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\sqrt{x}$, en el punto $(1, 1)$. Ilustra al trazar las gráficas de la curva y su recta tangente.

3. Encuentra los puntos de la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ donde la tangente es

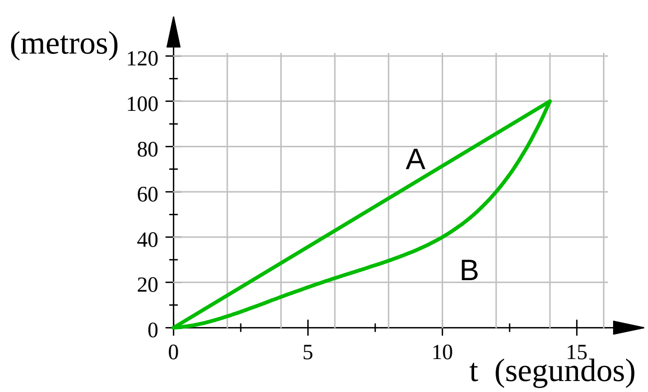
a) Perpendicular a la recta $y = 1 - \left(\frac{x}{24}\right)$

b) Paralela a la recta $y = \sqrt{2} - 12x$

4. Para $y = \frac{1}{x^2}$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$.

5. Si $f(x) = x + \frac{9}{x}$, deriva la función y encuentra la pendiente de la recta tangente en $x = -3$

6. Se muestran las gráficas de las funciones de posición de dos competidoras, A y B, quienes compiten en los $100\,\mathrm{m}$ y terminan en empate



a) Relata y compara cómo desarrollaron la competencia.

b) ¿En qué momento la distancia entre las competidoras es la más grande?

c) ¿En qué momento tienen la misma velocidad?

7. Se coloca una lata tibia gaseosa en un refrigerador frío. Gráfica la temperatura de la gaseosa como función del tiempo. ¿La razón inicial de cambio de la temperatura es mayor o menor que la razón de cambio después de una hora?

8. Sea $s = \frac{25}{t^2} - \frac{5}{t}, 1 \leq t \leq 5$, se dan posiciones $s = f(x)$ de un cuerpo que se mueve en una recta coordenada, tomando s en metros y t en segundos.

a) Encuentra el desplazamiento del cuerpo y la velocidad promedio para el intervalo de tiempo dado.

b) Determina la rapidez y la aceleración del cuerpo en los extremos del intervalo.

c) ¿En qué momento durante el intervalo, si es que esto pasa, cambiará la dirección del cuerpo?.

9. Para drenar por completo un tanque de almacenamiento se necesitan 12 horas, el fluido del tanque sale al abrir la válvula en su base. La profundidad y del fluido en el tanque t horas después de abrir la válvula está dada por la fórmula $y = 6\left(1 - \frac{t}{12}\right)^2 m$

a) Encuentra la razón $\frac{dy}{dt}(m/h)$ a la que el tanque esta drenando en el tiempo t .

b) ¿En qué momento está decendiendo más rápido el nivel del fluido en el tanque? ¿En qué momento lo hace mas despacio? ¿Cuáles son los valores de $\frac{dy}{dt}$ en esos tiempos?

c) Gráfica juntas y y $\frac{dy}{dt}$, y discute el comportamiento de y en relación con los signos y valores de $\frac{dy}{dt}$.

10. La ley de Boyle expresa que cuando se comprime una muestra de gas a una temperatura constante, el producto de la presión y el volumen se mantiene constante: $PV = C$

a) Encuentra la razón de cambio de volumen en relación con la presión.

b) Una muestra de gas ésta en un recipiente a baja presión y se le comprime paulatinamente a temperatura constante durante 10 minutos ¿El volumen disminuye con mayor rapidez al principio o al final de los 10 minutos? Justifica

c) Prueba que la comprensibilidad isotérmica se expresa con $\beta = \frac{1}{P}$.

11. La posición de una partícula se da con la ecuación del movimiento $s = f(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ donde t se mide en segundos y s en metros. Encuentra la velocidad y la rapidez después de 2 segundos.

Evaluación 10

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

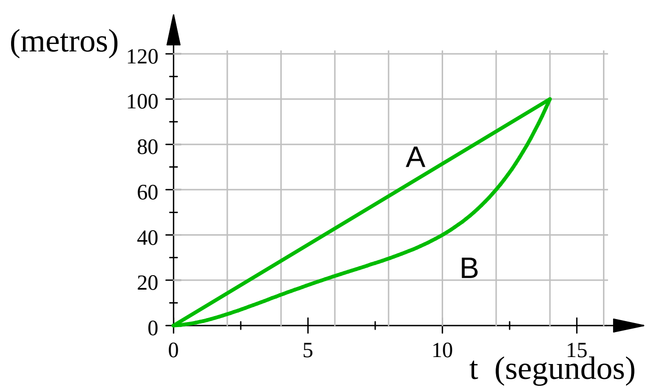
1. Determina la constante c de manera que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq \frac{1}{2} \\ c - x^2 & \text{si} \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$ sea continua en $\frac{1}{2}$.

2. Encuentra los números en que la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 3x & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ es discontinua.

¿En cuáles de estos puntos f es continua desde la derecha, desde la izquierda o desde ninguno de los dos lados?. Traza la gráfica de f.

3. Para $y = \frac{1}{x^2}$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto $\left(3, \frac{1}{9}\right)$.

4. Se muestran las gráficas de las funciones de posición de dos competidoras, A y B, quienes compiten en los $100\,\mathrm{m}$ y terminan en empate



a) Relata y compara cómo desarrollaron la competencia.

b) ¿En qué momento la distancia entre las competidoras es la más grande?

c) ¿En qué momento tienen la misma velocidad?

3.4.3. La derivada como función

Definición 2.4.2(Derivada en un punto).

La derivada de una función f en un número a, se indica mediante

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Si el límite existe decimos que la función f es **derivable** en a.Decimos también que f es **derivable** si f es derivable en a para todo a del dominio de f.

Generalizando, si hacemos que el punto a varíe, y reemplazamos en la ecuación de derivada a a con una variable x tenemos que

Definición 2.4.2 (Derivada de una función).

La **Derivada de una función** es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para cualquier número x para el cual este límite exista.

Las notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D$$

No todas las funciones son derivables, es importante considerar lo siguiente

Definición 3.4.1 Funciones derivables.

- *Una función f es derivable en un punto $x = a$ si $f'(a)$ existe.*
- *Una función es derivable en un intervalo abierto (a, b), (o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$) si es derivable en todo número del intervalo.*
- *Una función es derivable en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es derivable en el interior de (a, b) y si los límites*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(Derivada en } a \text{ por la derecha)}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(Derivada en } a \text{ por la izquierda)}$$

existen en los extremos.

Ejemplo 3.4.5 *Si* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, *(fig. 3.61) encuentre* $f'(x)$. *Establezca el dominio de* $f'(x)$

Solución.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

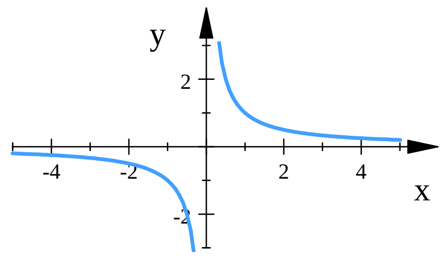


Fig. 3.61. $f(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ *existe si* $x \neq 0$, *el dominio de* $f'(x)$ *es* $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. ■

Ejemplo 3.4.6 *Si* $f(x) = \sqrt{x}$, *encuentre la derivada de* f *para* $x > 0$.

Solución.

Aplicando la definición

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

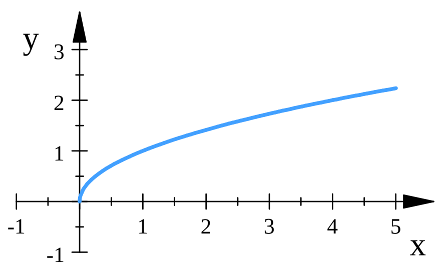


Fig. 3.62.

. ■

Ejemplo 3.4.7 *Muestre que* $f(x) = \sqrt{x}$ *no es diferenciable en* $x = 0$

Solución. *Como el intervalo donde Aplicamos la definición 3.4.1 para averiguar si la derivada existe en* $x = 0$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Como el límite lateral derecho no es finito, no hay derivada en $x = 0$ *y como las pendientes de las rectas secantes que unen el origen con los puntos* $\left(h, \sqrt{h}\right)$ *en la gráfica de* $f(x) = \sqrt{x}$ *se aproximan a* ∞, *la gráfica tiene una tangente vertical en el origen. ([8], p.* 153 *).* ■

Ejemplo 3.4.8 *Encuentre f' si $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$*

Solución.

Aplicando la definición y suponiendo que $x \neq -2$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \dfrac{1-x}{2+x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{(2+x+h)(2+x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(2-x-hx-x^2-2h\right) - \left(h-x-hx-x^2+2\right)}{h(2+x+h)(2+x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} \\
&= \frac{-3}{(2+x)^2}
\end{aligned}$$

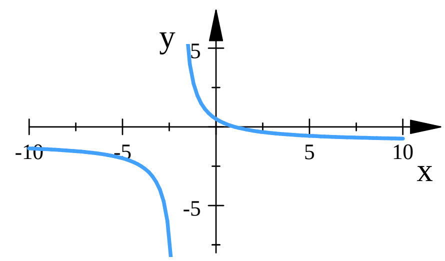


Fig. 3.63.

([2], p. 156). ■

Ejemplo 3.4.9 *¿Donde es derivable la función $f(x) = |x|$?*

Solución. *Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y puede elegir h suficientemente pequeño que $x + h > 0$, de donde $|x+h| = x+h$. Por tanto para $x > 0$ tiene*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

y así f es derivable para cualquier $x > 0$.

De manera análoga, para $x < 0$ tiene que $|x| = -x$ y puede elegir h suficientemente pequeño que $x+h > 0$, de donde $|x+h| = x+h$. Por tanto para $x < 0$ tiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0} (-1) = -1$$

y así f es derivable para cualquier $x < 0$.

Para $x = 0$ debe investigar

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

Por la definición de valor absoluto

$$|h| = \begin{cases} h & \textit{si} \quad h > 0 \\ -h & \textit{si} \quad h < 0 \end{cases}$$

Comparando los límites laterales

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$mientras \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

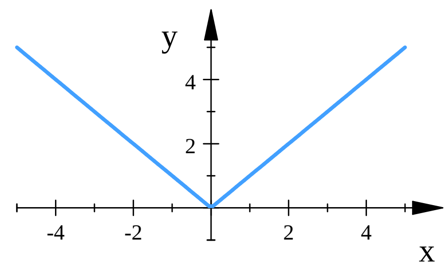


Fig. 3.64.

como los límites laterales son diferentes, $f'(0)$ no existe. Así, $f = |x|$ es derivable en toda $x \neq 0$. ([2], p. 157). ■

Teorema 3.4.1 *Si una función $f(x)$ es derivable en el punto a entonces es continua en el punto a.*

Esto quiere decir que la diferenciabilidad implica continuidad, pero no el recíproco ya que la continuidad no implica diferenciabilidad, es decir, no porque una función sea continua en un punto tiene que ser derivable en ese punto.

Una función f no es derivable en el punto a si:

1. La función tiene una esquina o un rizo en a. (Fig. 3.65). Estó es porque la grafica de f no tiene una tangente en ese punto.
2. Si la función tiene una discontinuidad en a. (Fig. 3.66)
3. Si la tangente de $f(x)$ en el punto $x = a$ es una recta vertical. (Fig. 3.67)

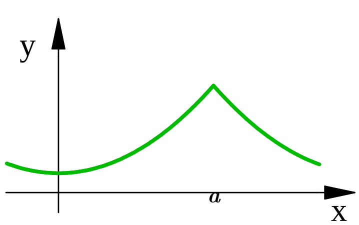


Fig. 3.65. Función con un pico o esquina

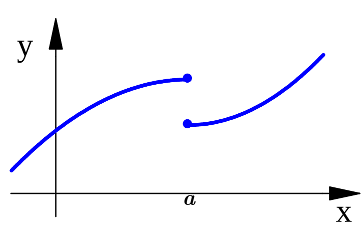


Fig. 3.66. Función Discontinua

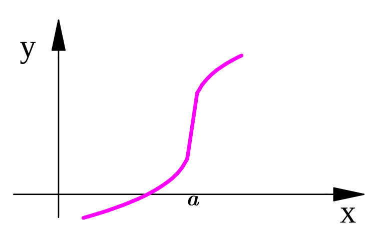


Fig. 3.67. Función con tangente vertical

3.4.4. Reglas de derivación

Las reglas de derivación son un conjunto de reglas obtenidas con algunos de los teoremas vistos hasta ahora. Las reglas de derivación nos permiten hallar la derivada de una función sin hacer el proceso que implica aplicar la definición.

Las reglas demostradas en la sección 2.4.7 son:

Reglas de derivación

Sea $f(x), g(x),$ y $h(x)$ funciones derivables, c constante

1. $\dfrac{d}{dx}c = 0$ derivada de una constante
2. $\dfrac{d}{dx}x = 1$ derivada de la identidad
3. $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ derivada de una potencia para n entero positivo
4. $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$ derivada del multiplo constante
5. $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$ derivada de una suma
6. $\dfrac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$ derivada de una diferencia
7. $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ derivada de un producto

Demostramos la derivada de $f(x) = x^n$ para n entero positivo. Presentamos ahora una versión más general que nos servira para derivar funciones con radicales y exponentes negativos, aunque omitiremos la demostración. Agregaremos también la derivada de un cociente.

Teorema 3.4.2 (Regla de la potencia) *Si n es cualquier número real, entonces*

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Teorema 3.4.3 (Regla del cociente) *Sea f y g funciones derivables, entonces*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}f(x) - f(x)\dfrac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Ejemplo 3.4.10 *Encuentra la derivada de las siguientes funciones.*

a) $y = \dfrac{1}{x^3}$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = \sqrt{\dfrac{4}{x^5}}$ d) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$

Solución. *Las derivadas de todas estas funciones las podemos encontrar usando la regla de la potencia, ya que usando propiedades algebraicas todas se pueden escribir como una potencia de x.*

$$\begin{aligned} a)\ y &= \frac{1}{x^3} = x^{-3} \\ y' &= \frac{d}{dx}x^{-3} \\ &= -3x^{-3-1} \\ &= -3x^{-4} \\ &= -\frac{3}{x^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)\ y &= \sqrt{x} = x^{1/2} \\ y' &= \frac{d}{dx}x^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}x^{1/2-1} \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2x^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c)\ y &= \sqrt{\frac{4}{x^5}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{x^5}} = \frac{2}{x^5} = 2x^{-5/2} \\ y' &= \frac{d}{dx}\left(2x^{-5/2}\right) \\ &= 2\frac{d}{dx}x^{-5/2} \\ &= 2\left(-\frac{5}{2}x^{-5/2-1}\right) \\ &= -5x^{-7/2} \\ &= \frac{-5}{x^{7/2}} \\ &= \frac{-5}{x^3\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d)\ y &= \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{x^{1/2}}{x^2} = x^{-3/2} \\ y' &= \frac{d}{dx}x^{-3/2} \\ &= -\frac{3}{2}x^{-3/2-1} \\ &= -\frac{3}{2}x^{-3/2-1} \\ &= -\frac{3}{2}x^{-2} \\ &= -\frac{3}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

. ■

Ejemplo 3.4.11 *Encuentre la derivada de* $f(x) = \dfrac{x^2 + 3\sqrt{x} - 4}{x}$

Solución. *La función es un cociente de dos polinomios, aunque en este caso no es necesario usar la regla del cociente para encontrar $f'(x)$, si antes de derivar reescribimos $f(x)$ separando cada uno de los terminos* *obtenemos una suma de potencias de x*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+3\sqrt{x}-4}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x} - \frac{4}{x} = x + 3x^{-1/2} - 4x^{-1} \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x + 3x^{-1/2} - 4x^{-1}\right) \\ &= \frac{d}{dx}x + 3\frac{d}{dx}x^{-1/2} - 4\frac{d}{dx}x^{-1} \\ &= 1 + \frac{3}{2}x^{-3/2} + 4x^{-2} \\ &= 1 + \frac{3}{2x\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.4.12 *Encuentre la derivada de* $y = \dfrac{3x-1}{x^2+2}$

Solución. *Usamos la regla del cociente*

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(x^2+2\right)\frac{d}{dx}(3x-1) - (3x-1)\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+2\right)^2} \\ &= \frac{\left(x^2+2\right)(3) - (3x-1)(2x)}{\left(x^2+2\right)^2} \\ &= \frac{\left(3x^2+6\right) - \left(6x^2-2x\right)}{\left(x^2+2\right)^2} \\ &= \frac{-3x^2+2x+6}{\left(x^2+2\right)^2} \end{aligned}$$

■

3.4.5. Regla de la cadena

La regla de la cadena es la regla para derivar la composición de funciones.

Teorema ??. (Regla de la cadena). Sean $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Si g es derivable en x y f es derivable en $u = g(x)$, entonces la función compuesta $f \circ g$, definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, es derivable en x y

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x) = f'(u)\, u'(x)$$

$$\text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Teorema 3.4.4 (Regla de la cadena para Potencias) *Si n es cualquier número real, y $u = g(x)$ es derivable, entonces*

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 3.4.13 *Encuentre la derivada de* $y = \dfrac{1}{(2x+1)^5}$

Solución. *Reescribimos la función como* $y = (2x+1)^{-5}$, *hacemos* $u = 2x+1$, $n = -5$, *usando la regla de la cadena*

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx}(2x+1)^{-5} \\ &= -5(2x+1)^{-6}\ \frac{d}{dx}(2x+1) \\ &= -5(2x+1)^{-6}(2) \\ &= -10(2x+1)^{-6} \\ &= -\frac{10}{(2x+1)^6} \end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.4.14 *Encuentre la derivada de* $g(x) = \dfrac{9}{\sqrt{x^2+1}}$

Solución. *Escribimos a g como una potencia de x. Así* $g(x) = \dfrac{9}{\sqrt{x^2+1}} = 9\left(x^2+1\right)^{-1/2}$, *hacemos* $u = x^2+1$, $n = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} g'(x) = 9\frac{dy}{dx}\left(x^2+1\right)^{-1/2} &= 9\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-3/2}\frac{dy}{dx}\left(x^2+1\right)\right) \\ &= 9\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-3/2}(2x)\right) \\ &= -9x\left(x^2+1\right)^{-3/2} \end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.4.15 *Encuentre la derivada de* $y = \left(\dfrac{x^3+2x}{x-1}\right)^5$

Solución. *En este caso* $u = \dfrac{x^3+2x}{x-1}$, $n = 5$. *Usando la regla de la cadena*

$$\begin{aligned}
y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+2x}{x-1}\right)^5 &= 5\left(\frac{x^3+2x}{x-1}\right)^4 \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+2x}{x-1}\right)\\
&= 5\left(\frac{x^3+2x}{x-1}\right)^4 \left(\frac{(x-1)\frac{d}{dx}\left(x^3+2x\right) - \left(x^3+2x\right)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}\right)\\
&= 5\left(\frac{x^3+2x}{x-1}\right)^4 \left(\frac{(x-1)\left(3x^2+2\right) - \left(x^3+2x\right)(1)}{(x-1)^2}\right)\\
&= 5\left(\frac{x^3+2x}{x-1}\right)^4 \left(\frac{2x^3-3x^2-2}{(x-1)^2}\right)\\
&= \frac{5\left(x^3+2x\right)^4\left(-x^3+3x^2-3x-2\right)}{(x-1)^6}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.4.16 *Encuentre la derivada de* $y = (t-1)^3\sqrt{t^2+4}$

Solución. *Usaremos la regla del producto y para derivar cada termino usaremos la regla de la cadena*

$$\begin{aligned}
y' = \frac{d}{dt}\left[(t-1)^3\sqrt{t^2+4}\right] &= (t-1)^3\frac{d}{dt}\left(t^2+4\right)^{1/2} + \left(t^2+4\right)^{1/2}\frac{d}{dt}(t-1)^3\\
&= (t-1)^3\left(\frac{1}{2}\left(t^2+4\right)^{-1/2}\frac{d}{dt}\left(t^2+4\right)\right) + \left(t^2+4\right)^{1/2}\left(3(t-1)^2\frac{d}{dt}(t-1)\right)\\
&= (t-1)^3\left(\frac{1}{2}\left(t^2+4\right)^{-1/2}(2t)\right) + \left(t^2+4\right)^{1/2}\left(3(t-1)^2(1)\right)\\
&= t(t-1)^3\left(t^2+4\right)^{-1/2} + 3\left(t^2+4\right)^{1/2}(t-1)^2\\
&= \frac{t(t-1)^3}{\sqrt{t^2+4}} + 3(t-1)^2\sqrt{t^2+4}
\end{aligned}$$

■

3.4.6. Derivadas de orden superior

Una derivada de n-esimo orden o derivada de orden n se simboliza por: $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ o bien $f^{(n)}(x)$
Algunas veces se representa a las 3 primeras derivadas como $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$

Ejemplo 3.4.17 *Encuentre las 4 primeras derivadas de las siguientes funciones*

a) $y = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

Solución.

a) $y = \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}\\
y'' &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1\left(-2x^{-3}\right) = \frac{2}{x^3}\\
y''' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x^3}\right) = 2\left(-3x^{-4}\right) = -\frac{6}{x^4}\\
y^{(4)} &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{6}{x^4}\right) = -6\left(-4x^{-5}\right) = \frac{24}{x^5}
\end{aligned}$$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
f' &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}x^{-!/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\\
f'' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/3}\right) = -\frac{1}{4x^{3/2}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\\
f''' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4x^{3/2}}\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\right) = -\frac{3}{8x^{5/2}} = -\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}\\
f^{(4)} &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{8x^{5/2}}\right) = -\frac{3}{8}\left(-\frac{5}{2}x^{-7/2}\right) = \frac{15}{16x^{7/2}} = \frac{15}{16x^3\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

■

3.4.7. Derivación implicita

Hasta ahora hemos encontrado derivadas de funciones expresadas de la forma $y = f(x)$. Sin embargo algunas funciones se definen implicitamente por medio de una relación entre x y y.

Algunas veces es posible despejar a y para escribirla en forma explicita en función de x y después obtener y'.

Cuando no es posible escribir una función como $y = f(x)$, podemos obtener su derivada de forma implicita.

Para obtener la derivada implicita solo debemos derivar tratando a y como una función derivable en x, agrupar los terminos que contengan y' en un mismo lado de la ecuación y resolver para y'.

Ejemplo 3.4.18 *Para la expresión $x^2 + y^2 = 4,$ encuentre y'*

a) Escribiendo primero a $y = f(x)$

b) De forma implicita

Solución.

a)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ y^2 &= 4 - x^2 \\ y &= \pm\sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

Consideraremos soló $y = \sqrt{4 - x^2}$, encontramos la derivada

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4 - x^2} \\ y' &= \frac{1}{2}\left(4 - x^2\right)^{-1/2}(-2x) \\ &= -x\left(4 - x^2\right)^{-1/2} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \end{aligned}$$

b) Derivamos implicitamente

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) &= \frac{d}{dx}(4) && \textit{derivamos ambos lados de la ecuación} \\ \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 &= \frac{d}{dx}4 \\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 && \textit{derivamos tomando a } y \textit{ como función de } x \\ 2y\frac{dy}{dx} &= -2x && \textit{despejamos } y' \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

Si sustitiuimos el valor de y que despejamos en $a)$ obtenemos $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

■

Ejemplo 3.4.19 *Encontrar* $\dfrac{dy}{dx}$ *si* $x^2 + y^3 = 2xy$

Solución. *En este caso no es fácil escribir la función como $y = f(x)$, por lo que debemos derivar implicitamente*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^3\right) &= \frac{d}{dx}(2xy) && \text{derivamos ambos lados de la ecuación} \\
\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^3 &= 2\frac{d}{dx}xy && \\
2x + 3y\frac{dy}{dx} &= 2x\frac{dy}{dx} + y(1) && \text{derivamos a } y \text{ como función de } x \\
3y\frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} &= y - 2x && \text{agrupamos los terminos que continen } \tfrac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx}(3y - 2x) &= y - 2x && \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y - 2x}{3y - 2x} && \text{Resolviendo para } \tfrac{dy}{dx}
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 3.4.20 *Encontrar* $\dfrac{dy}{dx}$ *si* $\sqrt{x+y} = 1 + x^2 + y^2$

Solución. *Derivando implicitamente*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sqrt{x+y} &= \frac{d}{dx}\left(1 + x^2y^2\right) \\
\frac{d}{dx}(x+y)^{1/2} &= \frac{d}{dx}1 + \frac{d}{dx}x^2y^2 \\
\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}\frac{d}{dx}(x+y) &= 0 + x^2\frac{d}{dx}y^2 + y^2\frac{d}{dx}x^2 \\
\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) &= 2x^2y\frac{dy}{dx} + 2xy^2 \\
\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} + \frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}\frac{dy}{dx} &= 2x^2y\frac{dy}{dx} + 2xy^2 \\
\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}\frac{dy}{dx} - 2x^2y\frac{dy}{dx} &= 2xy^2 - \frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} \\
\left(\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} - 2x^2y\right)\frac{dy}{dx} &= 2xy^2 - \frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2xy^2 - \frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}}{\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} - 2x^2y}
\end{aligned}
$$

■

Ejercicios 3.7

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Sea h diferenciable sobe $[0,\infty)$ y definamos $G(x) = h(\sqrt{x})$

a) ¿Dónde G es diferenciable?

b) Encuentra una expresión para $G'(x)$

2. Suponga que u y v son funciones de x, diferenciables en $x = 0$, y que $u(0) = 5$, $u'(0) = -3$, encuentra los valores de las siguientes derivadas en $x = 0$.

a) $\dfrac{d}{dx}(uv)$, b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$, c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$, d) $\dfrac{d}{dx}(7v - 2u)$

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ -x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ¿ f es diferenciable en $x = 0$? Justifica las respuestas.

4. Sea la función $f(u) = \dfrac{2u}{u^2+1}$, $u = g(x) = 10x^2 + x + 1$, encuentra el valor de $(f \circ g)'$ en $x = 0$

5. Suponga que las funciones f y g y sus derivadas con respecto a x tienen los valores siguientes en $x = 2$ y $x = 3$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	$\frac{1}{3}$	-3
3	3	-4	2π	5

Encuentre las derivadas con respecto a x de las combinaciones siguientes en el valor dado de x

a) $2f(x)$, $x = 2$

b) $f(x) + g(x)$, $x = 3$

c) $f(x)\,g(x)$, $x = 3$

d) $\dfrac{1}{g^2(x)}$, $x = 3$

e) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x = 2$

f) $f(g(x))$, $x = 2$

g) $\sqrt{f(x)}$, $x = 2$

h) $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$, $x = 2$

6. Sea $f(x) = x + \frac{1}{x}$, Encuentre el o los valores de c, que satisfacen la ecuación $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ en la conclusión del teorema del valor medio en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

7. ¿La siguiente función $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ $[0,1]$, satisface la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado, y si no explica? Justifica tu respuesta

8. Deriva las siguientes funciones

a) $F(t) = \sqrt{t}(a + bt)$

b) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

c) $y = \dfrac{5x^2}{x^3 + 1}$

d) $f(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + t - 2}$

e) $y = \dfrac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$

f) $v = (1 - t)\left(1 + t^2\right)^{-1}$

g) $f(s) = \dfrac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1}$

h) $g(t) = (9t + 2)^{2/3}$

i) $g(t) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

j) $y = \sqrt{\dfrac{t}{t^2 - 2}}$

k) $f(x) = \left(\dfrac{3x^2 - 2}{2x + 3}\right)^3$

l) $y = (2x + 1)^3 \sqrt{3x^2 - 2x}$

m) $\left[x^2 - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-4}\right]^2$

9. Encuentra $y' = \dfrac{dy}{dx}$ de las funciones implícitas siguientes

a) $\sqrt{3x^3y^2} + \dfrac{1}{3x^3y} - 2x^2 + 5y + 2 = 0$

b) $y^2 = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

c) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$

d) $\dfrac{x + y}{x - y} = x$

e) $x^5 - 6xy^3 + y^4 = 1$

f) $y^{-3}x^6 + y^6x^{-3} = 2x + 1$

Evaluación 11

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Encuentra el intervalo donde es diferenciable la función $y = \sqrt{25 - x^2}$. Justifica tu respuesta.

2. Sea la función $f(u) = \dfrac{u}{u-1}$, $u = g(x) = x^2 - 2x + 3$, encuentra el valor de $(f \circ g)'$ en $x = 0$

3. Encuentra la derivada de las siguientes funciones

a) $y = \dfrac{1 + 3x^3 - 4x^2 + x}{\sqrt{x}}$

b) $y = \dfrac{1}{(x^3 - 2x^2 + 7)^4}$

c) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$

d) $y = \left[\dfrac{1}{(x^3 - x + 1)^2}\right]^4$

e) $g(t) = \left(2t^2 - 3\right)\sqrt{t + 1}$

4. Usa la derivación implicita para encontrar y' si $y^{-3}x^6 + y^6x^{-3} = 2x + 1$

3.5. Aplicaciones de Derivada

3.5.1. Máximos y mínimos

En la sección 2.5.1 Usamos los criterios de primera y segunda derivada para encontrar máximos y mínimos de funciones polinomiales. Usaremos estos mismos criterios ahora para funciones algebraicas.

Revisemos las definiciones y teoremas necesarios para encontrar máximos y mínimos.

Número crítico:(Definición 2.5.2)
Un número crítico de una función f es un número c en el domino de f tal que $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe. Si una función f tiene un máximo o mínimo en c, entonces c es un número crítico de f.

Función Creciente y Decreciente(Definición 2.5.3)
Para f continua en el intervalo I y derivable en todo punto interior de I

- Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, f es creciente en ese intervalo.
- Si $f'(x) < 0$ sobre un intevalo, f es decreciente en ese intervalo.

Criterio de la primer derivada para encontrar máximos y mínimos locales(teorema 2.5.7).
Supongamos que c es un número crítico de una función continua f.

a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, o bien si $f' > 0$ en algún intervalo a la izquierda de c y $f' < 0$ en algún intervalo a la derecha de c, entonces f tiene un máximo local en c.

b) Si f' cambia de negativa a positiva en c, o bien si $f' < 0$ en algún intervalo a la izquierda de c y $f' > 0$ en algún intervalo a la derecha de c, entonces f tiene un mínimo local en c.

c) Si f' tiene el mismo signo en algún intervalo a la izquierda de c que en algún intervalo a la derecha, entonces c no es un punto máximo ni mínimo local.

Criterio de la segunda derivada para encontrar máximos y mínimos locales. (Teorema 2.5.8)
Supóngase que f' y f'' existen en todo punto de un intervalo abierto (a, b) que contiene a c, y supóngase que $f'(c) = 0$

a) Si $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un valor máximo local de f.

b) Si $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un valor mínimo local de f.

Método para encontrar máximo y mínimo absoluto.

Si f es una función continua sobre un intervalo $[a, b]$

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en el intervalo (a, b).
2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

Ejemplo 3.5.1 *Encuentra los máximos y mínimos de la función* $y = \dfrac{x}{x^2+4}$

a) Usando el criterio de la primera derivada

b) Usando el criterio de la segunda derivada

Solución.

Obtenemos y'

$$
\begin{aligned}
y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+4}\right) &= \frac{(x^2+4) - x(2x)}{(x^2+4)^2} \\
y' &= \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}
\end{aligned}
$$

hacemos $y' = 0$ *para encontrar los puntos críticos.*

$$
\begin{aligned}
\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} &= 0 \\
-x^2+4 &= 0 \\
x &= \pm 2
\end{aligned}
$$

tenemos dos puntos críticos $x_1 = -2$ *y* $x_2 = 2$.

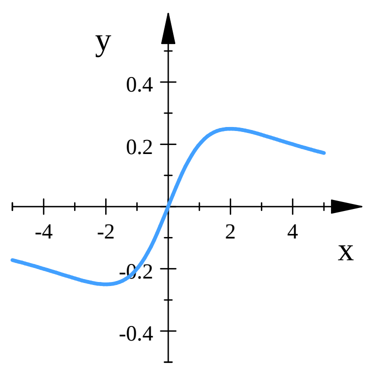


Fig. 3.68. $y = \dfrac{x}{x^2+4}$

Por el criterio de la primera derivada: dividimos el intervalo $(-\infty, \infty)$ *en* $x = -2$ *y* $x = 2$. *Evaluamos* f' *en cada intervalo*

Intervalos	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Signo de f'	$-$	$+$	$-$
Comportamiento de f	*decrece*	*crece*	*decrece*

- $f(x)$ *tiene un mÍnimo local en* $x = -2$

  $f(-2) = -\dfrac{1}{4}$, *el punto* $\left(-2, -\dfrac{1}{4}\right)$ *es un punto mínimo local de* f

- *$f(x)$ tiene un máximo local en $x=2$*

  $f(2)=\dfrac{(2)}{(2)^2+4}=\dfrac{1}{4}$, *el punto* $\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$ *es un punto máximo local de* f

Para usar el criterio de la segunda derivada, obtenemos y''

$$\begin{aligned} y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}\right) &= \frac{(x^2+4)^2(-2x)-(-x^2+4)\left(2(x^2+4)(2x)\right)}{\left((x^2+4)^2\right)^2} \\ &= \frac{(-2x^5-16x^3-32x)-(64x-4x^5)}{(x^2+4)^4} \\ y'' &= \frac{2x^5-16x^3-96x}{(x^2+4)^4} \end{aligned}$$

Evaluamos y'' *en* $x_1=-2$ *y* $x_2=2$.

$$\begin{aligned} y''(-2) &= \frac{2(-2)^5-16(-2)^3-96(-2)}{\left((-2)^2+4\right)^4}=\frac{1}{16}>0 \\ y''(2) &= \frac{2(2)^5-16(2)^3-96(2)}{\left((2)^2+4\right)^4}=-\frac{1}{16}<0 \end{aligned}$$

Luego

- $y''(-2)>0$, *entonces* y *tiene un mínimo local en* $x=-2$,

  $f(-2)=\dfrac{(-2)}{(-2)^2+4}=-\dfrac{1}{4}$, *es un mínimo local de* f

- $y''(-2)<0$, *entonces* y *tiene un máximo local en* $x=2$

  $f(2)=\dfrac{(2)}{(2)^2+4}=\dfrac{1}{4}$, *es un máximo local de* f

■

Ejemplo 3.5.2 *Halle los máximos y mínimos locales y absolutos de* $f(t)=t\sqrt{4-t^2}$ *en el intervalo* $[-1,2]$
Solución. *Igualamos a cero la derivada para obtener los puntos críticos*

$$\begin{aligned} f' &= t\left(\frac{1}{2}(4-t^2)^{-1/2}(-2t)+(4-t^2)^{1/2}(1)\right) \\ &= -t^2(4-t^2)^{-1/2}+(4-t^2)^{1/2} \\ &= \frac{-t^2}{\sqrt{4-t^2}}+\sqrt{4-t^2} \\ &= \frac{-2t^2+4}{\sqrt{4-t^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-2t^2+4}{\sqrt{4-t^2}} &= 0\\ -2t^2+4 &= 0\\ t &= \pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

Consideramos como punto crítico unicamente a $t=\sqrt{2}$*, ya que* $-\sqrt{2}$ *no esta dentro del intervalo* $[-1,2]$. *Usaremos el criterio de la primera derivada. Dividimos el intervalo* $[-1,2]$ *en* $t=\sqrt{2}$

Intervalos	$-1<x<\sqrt{2}$	$\sqrt{2}<x<2$
Signo de f'	$+$	$-$
Comportamiento de f	*crece*	*decrece*

- *La función tiene un máximo local en* $x=\sqrt{2}$

  $f\left(\sqrt{2}\right)=2$, *es un máximo local de* f

- *Evaluamos* f *en los extremos del intervalo* $[-1,2]$

  $f(-1)=(-1)\sqrt{4-(-1)^2}=-\sqrt{3}$

  $f(2)=(2)\sqrt{4-(2)^2}=0$

  Luego:

- $f(-1)=-\sqrt{3}$ *es el mínimo absoluto de* f *en* $[-1,2]$

- $f\left(\sqrt{2}\right)=2$ *es el máximo absoluto de* f *en* $[-1,2]$

■

3.5.2. Dibujo de gráficas

Usaremos los conocimientos adquiridos hasta ahora para trazar gráficas de funciones algebraicas.
Estrategias para graficar funciones:

- **Dominio:** Identificar el dominio de la función.
- **Intersecciones:** Para determinar las intersecciones con los ejes hacemos
  - $f(x) = 0,$ para intersecciones con el eje x
  - $f(0) = y,$ para intersecciones con el eje y

  Podemos omitir este procedimiento sobre todo cuando es díficil resolver la ecuación.
- **Simetría:**
  - Si $f(-x) = f(x),$ la función es par y la curva simétrica respecto al eje y
  - Si $f(-x) = -f(x),$ la función es impar y la curva simétrica respecto al origen.
- **Asintotas:** para L, m y b números reales.
  - Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ o bien $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L,$ la recta $y = L$ es asíntota horizontal.
  - Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ o bien $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty,$ la recta $x = a$, es una asintota vertical.
  - Si $f(x) = mx + b + h(x),$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = 0,$ entonces la recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua.
- **Intervalos de incremento o decremento:** En un intervalo I
  - Si $f'(x) > 0$, para toda x en I, entonces f es creciente en I
  - Si $f'(x) < 0$, ara toda x en I, entonces f es decreciente en I.
- **Máximos y mínimos:**
  - Hacer $f'(x) = 0,$ para determinar los puntos críticos de f.
  - Aplicar el criterio de la primera o segunda derivada para determinar los máximos y mínimos locales.
- **Concavidad y puntos de inflexión:** En un intervalo I
  - Si $f''(x) < 0,$ para toda x en I, entonces f es cóncava en I.
  - Si $f''(x) > 0,$ para toda x en I, entonces f es convexa en I.

Ejemplo 3.5.3 *Dibuja la gráfica de la función* $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-4}$

Solución. ■

Solución.

- Dominio: El dominio de la función es todos los puntos que satisfacen $x^2 - 4 \neq 0$,

  Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

  Intersecciones:

  Si $y = 0$, $\dfrac{3x^2}{x^2-4} = 0$, entonces $x = 0$,

  Si $x = 0$, $\dfrac{3(0)^2}{(0)^2-4} = y$, entonces $y = 0$,

  f pasa por $(0,0)$, (figura 3.69)

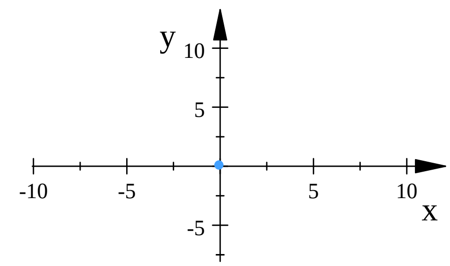


Fig. 3.69.

- Simetría: $f(-x) = \dfrac{3(-x)^2}{(-x)^2-4} = \dfrac{3x^2}{x^2-4} = f(x)$, $\Longrightarrow$ $f(x)$ es simétrica respecto al eje y.

- Asíntotas verticales: como f no está definida en $x = -2, 2$ hacemos:

  $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-4} = 3 + \dfrac{12}{x^2-4} = 3 + \dfrac{12}{(x-2)(x+2)}$

  $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(3 + \dfrac{12}{x^2-4}\right) = \infty$, $x = 2$ es asíntota vertical

  $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(3 + \dfrac{12}{x^2-4}\right) = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to -2^+}\left(3 + \dfrac{12}{x^2-4}\right) = -\infty$, $x = -2$ es asíntota vertical

  $\lim\limits_{x\to -2^-}\left(3 + \dfrac{12}{x^2-4}\right) = \infty$

  (figura 3.70)

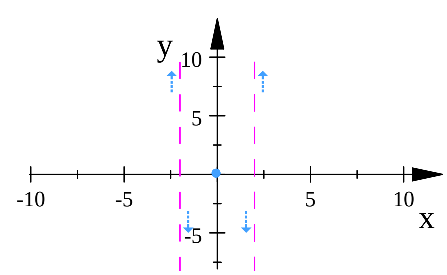


Fig. 3.70.

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2-4} = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 3, \text{ es asíntota horizontal}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2-4} = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 3, \text{ es asíntota horizontal}$$

(figura 3.71)

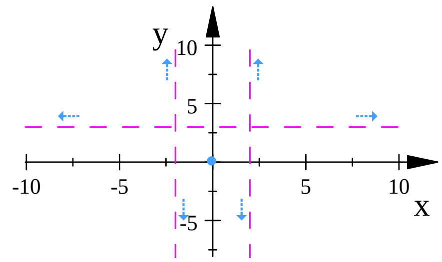


Fig. 3.71.

- Máximos y mínimos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2}{x^2-4}\right) = \frac{-24x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$$\frac{-24x}{\left(x^2-4\right)^2} = 0 \qquad \Longrightarrow x = 0 \text{ es un punto crítico.}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-24x}{\left(x^2-4\right)^2}\right) = \frac{24\left(3x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$$

$$f''(0) = \frac{24\left(3(0)^2+4\right)}{\left((0)^2-4\right)^3} = -\frac{3}{2} < 0$$

luego $f(0) = 0$ es un máximo. (figura 3.72)

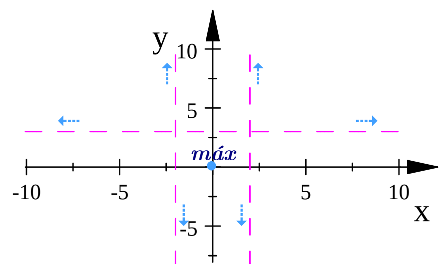


Fig. 3.72.

- Intervalos de incremento o decremento

$f'(x) = \dfrac{-24x}{\left(x^2-4\right)^2}$, punto crítico $x = 0$

el dominio de la función es $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

partimos el intervalo en $x = 0$

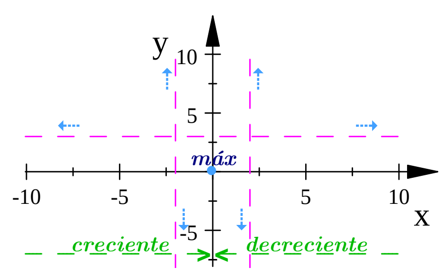


Fig. 3.73.

Intervalos	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Signo de f'	$+$	$+$	$-$	$-$
Comportamiento de f	crece	crece	decrece	decrece

(figura 3.73)

- Concavidad y convexidad

  $f''(x) = \dfrac{24\left(3x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$

  como $24\left(3x^2+4\right) > 0$ para toda x

  $f''(x) > 0$ si $\left(x^2-4\right)^3 > 0, \qquad \Longrightarrow \qquad f''(x) > 0$ en $(2,\infty)$ y $(-\infty,-2)$

  $f''(x) < 0$ si $\left(x^2-4\right)^3 < 0, \qquad \Longrightarrow \qquad f''(x) < 0$ en $(-2,2)$

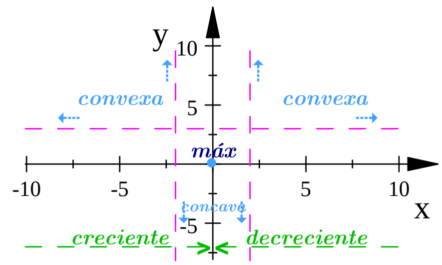


Fig. 3.74.

Intervalos	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Signo de f''	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	convexa	concáva	convexa

No hay puntos de inflexión ya que no hay valores de x que hagan $f'' = 0$ (figura 3.75)

Por último trazamos la función

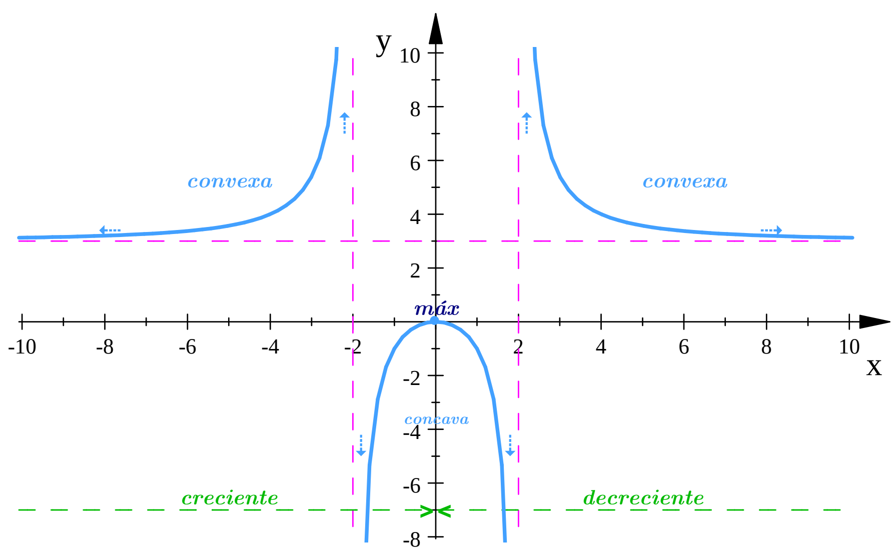


Fig. 3.75.

. ■

Ejemplo 3.5.4 *Dibuja la gráfica de la función* $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

Solución.

- *Dominio: La función esta definida para toda* $x \in \mathbb{R}$
- *Simetrías:* $f(-x) = \dfrac{(-x+1)^2}{(-x)^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}, \implies$ *No tiene simetrías.*
- *Intersecciones:* (*figura 3.76*)

  si $x = 0 \implies y = \dfrac{(0+1)^2}{0^2+1} = 1,$ *intersecta al eje* y *en* $y = 1$

  si $y = 0 \implies \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = 0 \implies x = -1,$ *intersecta al eje* x *en* $x = -1$
- *Asíntotas verticales: como la función está definida para cualquier número real entonces no tiene asíntotas verticales*
- *Asíntotas horizontales:*

  $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = 1,$ *la recta* $y = 1$ *es asíntota horizontal*

  $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = 1.$ *la recta* $y = 1$ *es asíntota horizontal*

  (*figura 3.77*)
- *Máximos y mínimos:* (*figura 3.78*)

  $f'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

  $\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0, \implies \begin{array}{c} x = 1 \\ x = -1 \end{array},$ *Los puntos críticos son:* $x = 1, x = -1$

  $f''(x) = \dfrac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$

  $f''(1) = -1 < 0 \implies f(1) = 2$ *es un máximo*

  $f''(-1) = 1 > 0 \implies f(-1) = 0$ *es un mínimo*

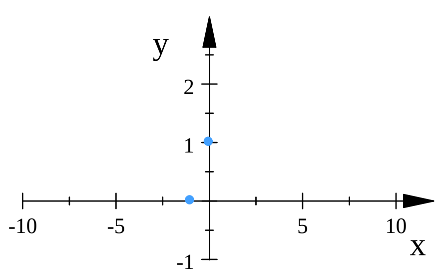


Fig. 3.76. Intersecciones con los ejes

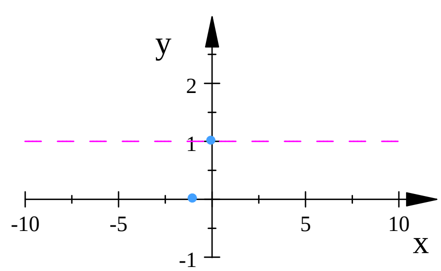


Fig. 3.77. Asíntota horizontal

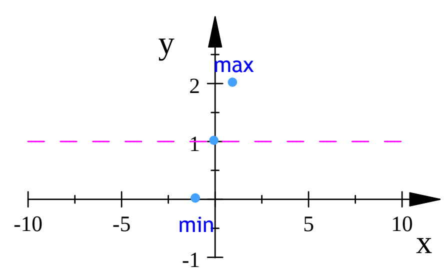


Fig. 3.78. Máximos y mínimos

- *Incremento o decremento: El dominio es* $(-\infty, \infty)$, *los puntos críticos son* $x = -1, 1$

  $f'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

Intervalos	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Signo de f'	$-$	$+$	$-$
Comportamiento de f	*decrece*	*crece*	*decrece*

(figura 3.79)

- *Concavidad y puntos de inflexión*

  $f''(x) = \dfrac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$

  Si $\dfrac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3} = 0$, *entonces* $x = 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$

Intervalos	$-\infty < x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$\sqrt{3} < x < \infty$
Signo de f''	$-$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	*cóncava*	*convexa*	*cóncava*	*convexa*

Los puntos de inflexión son:

$$\left(-\sqrt{3}, f\left(-\sqrt{3}\right)\right) = \left(-\sqrt{3}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \approx (-1.7, 0.1)$$

- $(0, f(0)) = (0, 1)$

- $\left(\sqrt{3}, f\left(\sqrt{3}\right)\right) = \left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\right) \approx (1.7, 1.8)$

  (Figura 3.80)

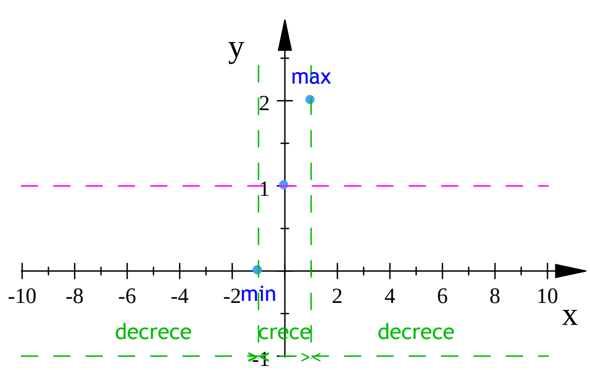


Fig. 3.79. Crecimiento y decrecimiento

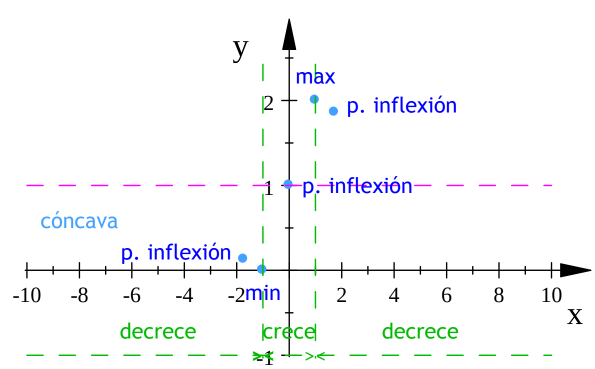


Fig. 3.80. Puntos de inflexión

Por último trazamos la curva (figura 3.81)

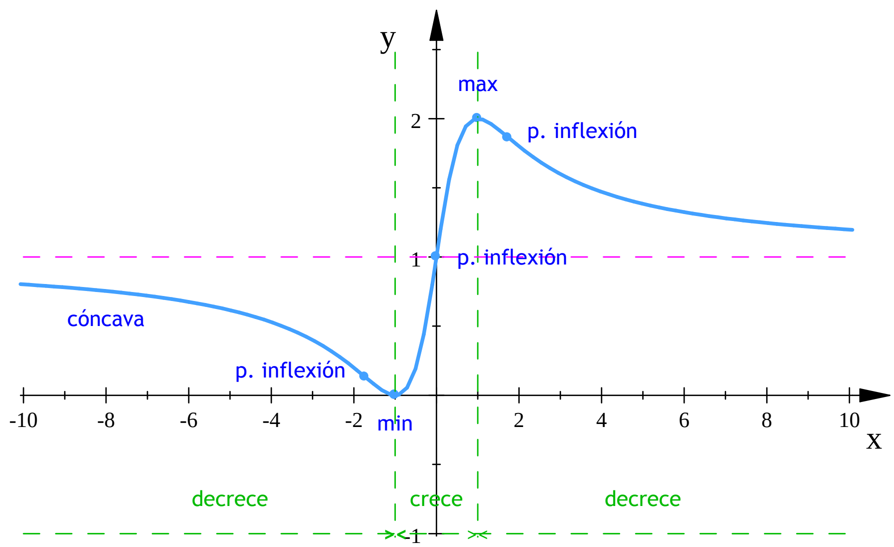


Fig. 3.81. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

. ■

Ejemplo 3.5.5 *Dibuja la gráfica de* $y = \dfrac{x^2+1}{x+1}$

Solución.

- *Dominio: El dominio es Dom* $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

- *Intersecciones con los ejes:*

  Si $x = 0, \quad \Longrightarrow \quad y = \dfrac{(0)^2+1}{(0)+1} = 1,$ *Intersecta al eje* y *en* $y = 1$

  Si $y = 0, \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{x^2+1}{x+1} = 0,$ *Como no hay solución en* $\mathbb{R}$ *para* x*, entonces la curva no cruza al eje* x*.*

- *Simetría:* $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{(-x)+1} = -\dfrac{x^2+1}{x-1},$ *No hay simetrías.*

- *Asíntotas horizontales:*

  $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x+1} = \infty,$ *y* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{x+1} = -\infty$

  por lo tanto la curva no tiene asíntotas horizontales.

- *Asíntotas verticales: la función no está definida en* $x = -1$*. Haciendo la división algebraica*

  $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \dfrac{2}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1^-}\left(x-1+\frac{2}{x+1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\left(x-1+\frac{2}{x+1}\right)=\infty,$$ *La recta $x=-1$ es una asíntota vertical.*

- *Asíntotas oblicuas: Como el grado del numerador es más grande en una unidad que el grado del denominador, la curva tiene una asíntota oblicua, haciendo la división algebraica obtenemos*

  $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}=x-1+\dfrac{2}{x+1}$, *como* $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2}{x+1}=0$, *entonces escribimos:* $f(x)=\underbrace{x-1}_{mx+b}+\underbrace{\dfrac{2}{x+1}}_{residuo}$

  así: $y=x-1$ *es una asíntota oblicua de* f

- *Máximos y mínimos:*

  $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$ *y* $f''(x)=\dfrac{4}{(x+1)^3}$

  Si $\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=0$, *entonces* $x=-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1$ *son puntos críticos de* f

  Usamos el criterio de la seguna derivada

  $f''\left(-\sqrt{2}-1\right)=\dfrac{4}{\left(\left(-\sqrt{2}-1\right)+1\right)^3}=-\sqrt{2}<0 \implies f\left(-\sqrt{2}-1\right)=-2\sqrt{2}-2$, *es un máximo*

  $f''\left(\sqrt{2}-1\right)=\dfrac{4}{\left(\left(\sqrt{2}-1\right)+1\right)^3}=\sqrt{2}>0, \implies f\left(\sqrt{2}-1\right)=2\sqrt{2}-2,$ *es un mínimo.*

- *Intervalos de incremento o decremento:*

Intervalos	$-\infty<x<-\sqrt{2}-1$	$-\sqrt{2}-1<x<-1$	$-1<x<\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1<x<\infty$
Signo de f'	$+$	$-$	$-$	$-$
Comportamiento de f	*crece*	*decrece*	*crece*	*decrece*

- *Concavidad y puntos de inflexión:*

  $f''(x)=\dfrac{4}{(x+1)^3}$

  No hay puntos de inflexión

Intervalos	$-\infty<x<-\sqrt{2}-1$	$-\sqrt{2}-1<x<-1$	$-1<x<\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1<x<\infty$
Signo de f''	$-$	$-$	$+$	$+$
Comportamiento de f	*cóncava*	*cóncava*	*convexa*	*convexa*

- *Por último dibujamos la gráfica.*

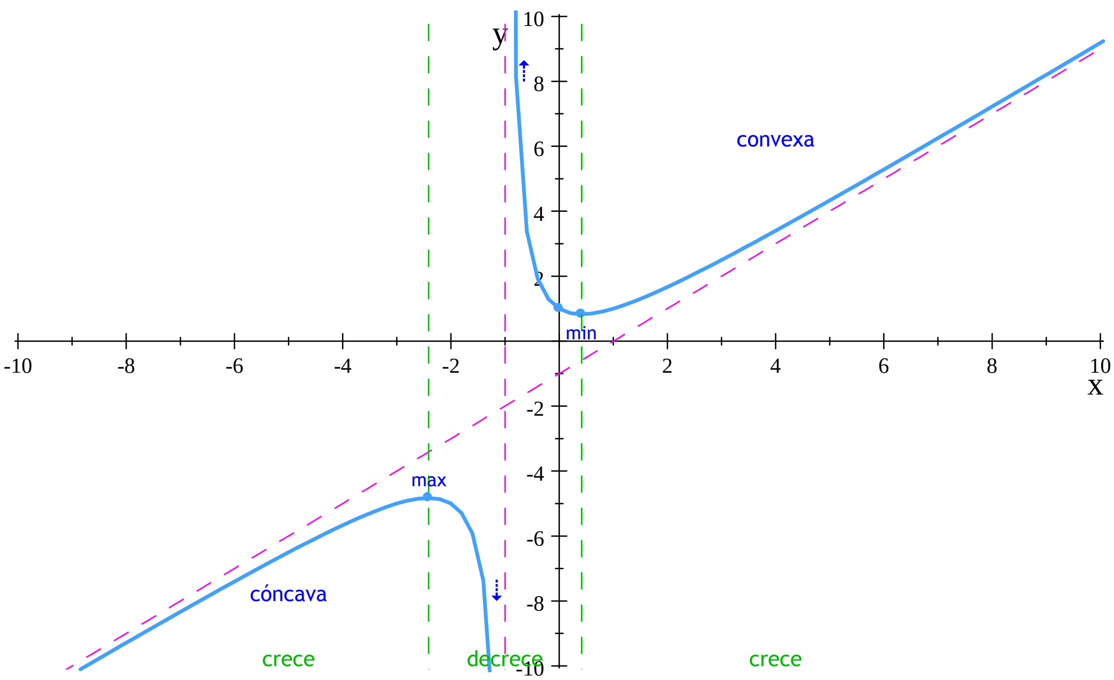


Fig. 3.82. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

.

■

3.5.3. Problemas de optimización

En ciencia, ingeniería y negocios a menudo tenemos interés en los valores máximo y mínimo de una función; por ejemplo, una empresa tiene interés natural en maximizar sus ganancias a la vez que minimiza los costos. El hecho de que todas las latas de un volumen específico tengan la misma forma (mismos radio y altura) no es coincidencia, puesto que hay dimensiones específicas que minimizan la cantidad de metal usado y, entonces, reducen los costos de construcción de la lata a una empresa. En el mismo tenor, muchos de los denominados automóviles económicos comparten muchas características extraordinariamente semejantes. Esto no es tan simple como el que una empresa copie el éxito de otra empresa, sino, en vez de ello, que un gran número de ingenieros buscan el diseño que minimice la cantidad de material usado. ([6]. p. 235).

Optimizar algo significa maximizar o minimizar uno de sus aspectos. ¿Cómo se pueden determinar las dimensiones de un rectángulo con perímetro fijo y área máxima? ¿Qué forma debe tener una lata cilíndrica para que su producción resulte lo más barata posible ? ¿Qué cantidad de la producción es la más rentable? El cálculo diferencial es una herramienta poderosa para resolver problemas que requieren maximizar o minimizar una función. ([8]. p. 278)

Pasos para la resolución de problemas aplicados de optimización

1. **Leer el problema**. Lea el problema hasta que lo entienda. ¿Qué datos se dan? ¿Cuál es la cantidad desconocida que hay que optimizar?

2. **Hacer un dibujo:** identifique con una etiqueta cualquier parte que pueda ser importante para el problema

3. **Introducir variables:** haga una lista de las relaciones que encuentre en el dibujo y en el problema como una ecuación o una expresión algebraica, e identifique la variable desconocida.

4. Escribir una ecuación para la cantidad desconocida: de ser posible, exprese la incógnita como función de una sola variable o en dos ecuaciones con dos incógnitas. Para ello puede ser necesaria una manipulación considerable.

5. Examinar los puntos críticos y los extremos del dominio de la incógnita: use la información con que cuenta acerca de la forma de la gráfica de la función. Emplee la primera y segunda derivadas para identificar y clasificar los puntos críticos de la función.

([8], p. 278)

Ejemplo 3.5.6 *Encontrar dos números no negativos cuya suma sea 5 tales que el producto de uno con el cuadrado del otro sea el más grande posible.*

Solución. *Sean $a > 0$ el primer número, y $b > 0$ el segundo.*

Llamaremos P a la función que denota el producto con de el primer número con el cuadrado del otro. Así

$$P = ab^2$$

El dominio de P serán todos los reales no negativos que su suma sea 5 es decir:

$$\begin{aligned} a + b &= 5 \\ a &= 5 - b \qquad \textit{despejamos uno de los números} \end{aligned}$$

sustituimos el valor de a en la función P

$$\begin{aligned} P &= (5 - b)\, b^2 \\ &= 5b^2 - b^3 \end{aligned}$$

Ahora P depende unicamente de b, P es la función que debemos máximizar

Obtenemos la primera y segunda derivada

$$\begin{aligned} P &= 5b^2 - b^3 \\ P' &= 10b - 3b^2 \\ P'' &= 10 - 6b \end{aligned}$$

hacemos $P' = 0$ para obtener los puntos criticos

$$\begin{aligned} P' &= 0 \\ 10b - 3b^2 &= 0 \\ -b\,(3b - 10) &= 0 \\ b &= \frac{10}{3}, b = 0 \end{aligned}$$

Los puntos críticos son: $\quad b = \frac{10}{3}, b = 0$, *ninguno de los dos es negativo por lo que ambos valores están en el dominio de la función. Por el criterio de la segunda derivada*

$P''(0) = 10 - 6(0) = 10 > 0 \qquad \Longrightarrow P(0) = 0 \qquad$ *es un mínimo*

$P''\left(\frac{10}{3}\right) = 10 - 6\left(\frac{10}{3}\right) = -10 < 0 \qquad \Longrightarrow P\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{500}{27}$ *es un máximo.*

Es decir que

$$b = \frac{10}{3},$$

Calculamos el valor de a

$$\begin{aligned} a &= 5 - b \\ &= 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Así los números no negativos que suman 5 y cuyo producto de uno con el cuadrado del otro es máximo, son: $a = \frac{5}{3}, b = \frac{10}{3}$. ■

Ejemplo 3.5.7 *Un rectángulo se inscribe en un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área máxima que puede tener el rectángulo y cuáles son sus dimensiones?*

Solución.

Sean $\left(x, \sqrt{4-x}\right)$ las coordenadas del vértice del rectángulo obtenido al colocar el círculo y el rectángulo en el plano coordenado (figura 3.5.7). La longitud de la base, altura y área del rectángulo pueden expresarse en términos de la posición x del vértice inferior derecho:

$$\begin{aligned} Longitud\ de\ la\ base &= 2x, \qquad Altura = \sqrt{4-x^2} \\ \acute{A}rea &= 2x\sqrt{4-x^2} \end{aligned}$$

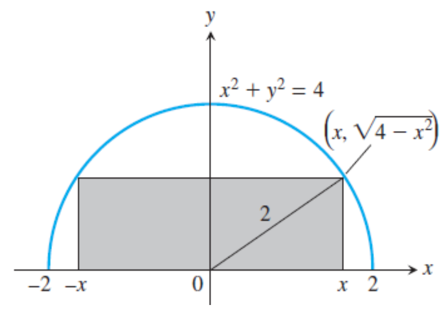


Fig. 3.82.

Observe que los valores de x tienen que estar en el intervalo $0 \leq x \leq 2$ (dominio de $A(x)$), donde está el vértice seleccionado del rectángulo. Nuestro objetivo es encontrar el valor máximo absoluto de la función

$$A(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$$

en el dominio $[0, 2]$.

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\left(2x\sqrt{4-x^2}\right) = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$$

Buscamos los puntos criticos

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} &= 0 \\ \frac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}} &= 2\sqrt{4-x^2} \\ x^2 &= 4-x^2 \\ 2x^2 &= 4 \\ x &= -\sqrt{2}, \sqrt{2} \end{aligned}$$

Los puntos criticos son $x = -\sqrt{2}$, y $x = \sqrt{2}$, pero solo $x = \sqrt{2}$ esta en el interior del dominio de la función. Los valores de A en los extremos del intervalo y en este punto crítico son

$$\begin{aligned} A\left(\sqrt{2}\right) &= 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4 \\ A(0) &= 2(0)\sqrt{4-(0)^2} = 0 \\ A(2) &= 2(2)\sqrt{4-(2)^2} = 0 \end{aligned}$$

El área tiene un valor máximo igual a 4 cuando el rectángulo tiene $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$ unidades de altura y $2x = 2\sqrt{2}$ unidades de largo. ([8]. p. 281). ■

Ejemplo 3.5.8 *Un granjero intenta delimitar un terreno rectangular que tenga un área de $1500\,\mathrm{m}^2$. El terreno estará cercado y dividido en dos partes iguales por medio de una cerca adicional paralela a dos lados. Encuentre las dimensiones del terreno que requiere la menor cantidad de cerca.*

Solución.

Como se muestra en la figura 3.83, x y y denotan las dimensiones del terreno cercado. La función que queremos minimizar es la cantidad total de cerca; es decir, la suma de las longitudes de las cinco porciones de cerca. Si esta suma se denota por el símbolo L, tenemos

$$L = 2x + 3y$$

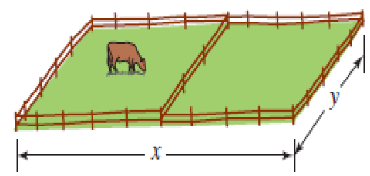


Fig. 3.83. Terreno rectangular

Debido a que el área del terreno cercado debe ser de $1500\ \mathrm{m}^2$, x y y deben estar relacionados por el requisito de que $xy = 1500$. Usamos esta restricción en la forma $y = \dfrac{1500}{x}$ para escribir la función objetivo L como una función de x:

$$\begin{aligned} L &= 2x + 3\left(\frac{1500}{x}\right) \\ & \quad 2x + \frac{4500}{x} \end{aligned}$$

Puesto que $x$representa una dimensión física que satisface $xy = 1500$, concluimos que es positiva. Pero aparte de esta restricción, sobre x no hay ninguna otra restricción. Por tanto, la función en consideración $L(x)$ está definida sobre el intervalo no acotado $(0, \infty)$.

Para encontrar los puntos críticos

$$L'(x) = 2 - \frac{4500}{x^2}$$

$$\begin{aligned} 2 - \frac{4500}{x^2} &= 0 \\ 2x^2 &= 4500 \\ x &= -15\sqrt{10}, 15\sqrt{10} \end{aligned}$$

El único punto crítico que está dentor del intervalo de dominio de la función es $x = 15\sqrt{10}$.

Por el críterio de la segunda derivada

$$\begin{aligned} L''(x) &= \frac{9000}{x^3} \\ L''\left(15\sqrt{10}\right) &= \frac{9000}{\left(15\sqrt{10}\right)^3} = \frac{2}{75}\sqrt{10} > 0 \end{aligned}$$

Así,

$$L\left(15\sqrt{10}\right) = 2\left(15\sqrt{10}\right) + \frac{4500}{15\sqrt{10}} = 60\sqrt{10}\,\mathrm{m}$$

es la cantidad mínima requerida de cerca.

Volviendo a la restricción

$$y = \frac{1500}{x}$$

encontramos que el valor correspondiente de y *es*

$$y = \frac{1500}{x} = \frac{1500}{15\sqrt{10}} = 10\sqrt{10}$$

En consecuencia, las dimensiones del terreno deben ser $15\sqrt{10} \times 10\sqrt{10}\,\mathrm{m}$ ■

3.5.4. Diferenciales

Se empezo el análisis de la derivada con el problema de encontrar la recta tangente a la gráfica de una función y $f(x)$ en un punto $(a, f(a))$. Intuitivamente, es de esperar que una recta tangente esté muy próxima a la gráfica de f siempre que x esté cerca del número a.

En otras palabras, cuando x está en una pequeña vecindad de a, los valores de la función $f(x)$ están muy próximos al valor de las coordenadas y de la recta tangente. Así, al encontrar una ecuación de la recta tangente en $(a, f(a))$ podemos usar esa ecuación para aproximar $f(x)$.

Una ecuación de la recta tangente mostrada en la figura 3.84 está dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \qquad \text{o bien,} \qquad y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

que podemos escribirla como $\quad L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

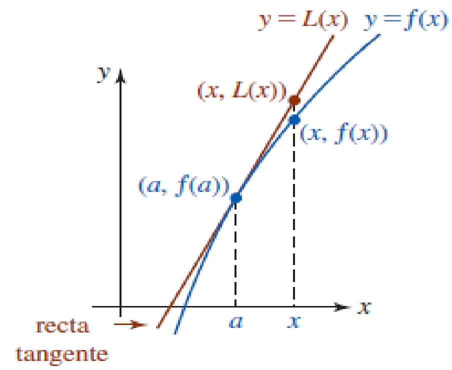


Fig. 3.84.

Definición 3.5.1 (Linealización) *Si una función $y = f(x)$ es diferenciable en un número a, entonces decimos que la función*

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

es una linealización de f en a. Para un número x próximo a a, la aproximación

$$f(x) \approx L(x)$$

se denomina aproximación lineal local de f en a.

La ecuación de linealización no es más que la forma punto-pendiente de una recta tangente en $(a, f(a))$.

La idea fundamental de linealización de una función originalmente fue expresada en la terminología de diferenciales. Suponga que $y = f(x)$ es una función diferenciable en un intervalo abierto que contiene al número a. Si x_1 es un número diferente sobre el eje x, entonces los incrementos Δx y Δy son las diferencias

$$\Delta x = x_1 - a \qquad \text{y} \qquad \Delta y = f(x_1) - f(a)$$

Pero ya que $x_1 = a + \Delta x$, el cambio en la función es

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Para valores de Δx que están próximos a 0, el cociente diferencial

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es una aproximación del valor de la derivada de f en a:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(a) \qquad \text{o bien,} \qquad \Delta y \approx f'(a)\,\Delta x$$

Las cantidades Δx y $f'(a)\,\Delta x$ se denominan diferenciales y se denotan por los símbolos dx y dy, respectivamente. Es decir,

$$\Delta x = dx \qquad \text{y} \qquad dy = f'(a)\,dx$$

Como se muestra en la figura 3.85, para un cambio dx en x la cantidad $dy = f'(a)\,dx$ representa el cambio en el ascenso en la recta tangente en $(a, f(a))$. Y cuando $dx \approx 0$, el cambio en la función Δy es aproximadamente el mismo que el cambio en la linealización dy. Es decir $\Delta y \approx dy$.

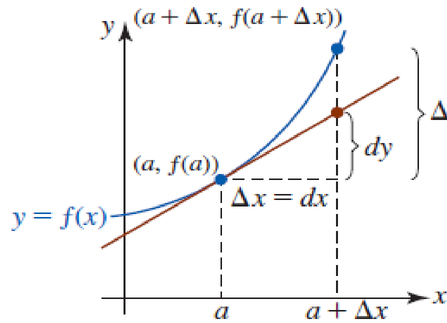


Fig. 3.85.

Definición 3.5.2 (Diferenciales) *La diferencial de la variable independiente x es el número diferente de cero Δx y se denota por dx; es decir,*

$$dx = \Delta x$$

Si f es una función diferenciable en x, entonces la diferencial de la variable dependiente y se denota por dy; es decir,

$$dy = f'(x)\,\Delta x = f'(x)\,dx$$

([6], p. 249)

En resumen:

- Uno de los objetivos fundamentales del cálculo infinitesimal es estudiar cómo varía una función cuando el valor de su variable independiente cambia. Si x es la variable independiente de la función $y = f(x)$ y su valor cambia desde x_1 hasta x_2, el aumento o disminución que experimenta dicha variable se llama **incremento de** x y se denota por Δx.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

- Cuando la variable independiente de $y = f(x)$ experimenta un incremento Δx, generalmente la función también experimenta un aumento o disminución de su valor, el cual se denomina **incremento de la función** y se denota por Δy es decir

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) \qquad \text{o bien} \qquad \Delta y = f(\Delta x + x_1) - f(x_1)$$

- La palabra incremento la usamos para referirnos tanto a un aumento como a una disminución.

- La diferencial dy es una aproximación al incremento de la función Δy, para un incremento en Δx pequeño.

$$dy = f'(x)\,\Delta x = f'(x)\,dx \approx \Delta y$$

Ejemplo 3.5.9 *Encuentre Δy y dy para $f(x) = 5x^2 + 4x + 1$, compare los valores de Δy y dy para $x = 6$, $\Delta x = 0.02$*

Solución.

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(\Delta x + x) - f(x)\\ &= \left[5(\Delta x + x)^2 + 4(\Delta x + x) + 1\right] - \left[5x^2 + 4x + 1\right]\\ &= 4\Delta x + 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dy &= f'(x)\,dx\\ &= (10x + 4)\,dx\end{aligned}$$

ahora para $x = 6$, $dx = \Delta x = 0.02$

$$\begin{aligned}\Delta y &= 4\Delta x + 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2\\ &= 4(0.02) + 10(6)(0.02) + 5(0.02)^2\\ &= 1.282\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dy &= (10x + 4)\,dx\\ &= (10(6) + 4)(0.02)\\ &= 1.28\end{aligned}$$

el valor $\Delta y = 1.282$ es la cantidad exacta por la cual la función cambia cuando x cambia de 6 a 6.02. La diferencial $dy = 1.28$ representa una aproximación de la cantidad por la cual cambia la función. Para un cambio o incremento pequeño en la variable independiente, el cambio correspondiente en la variable dependiente puede aproximarse por la diferencial dy. ([6], p. 250) ■

Ejemplo 3.5.10 *Utiliza diferenciales para aproximar $\sqrt{16.5}$*

Solución. *Primero identificamos la función $f(x) = \sqrt{x}$,*

Debemos calcular el valor aproximado de $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$ cuando $\Delta x = 0.5$, y $x = 4$, escribimos

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\,dx$$

ahora bien

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

por tanto

$$f\left(x+\Delta x\right)=f\left(x\right)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

así para $\Delta x=0.5,$ *y* $x=4,$ *la aproximación es*

$$f\left(16.5\right)=\sqrt{16.5}=\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}\left(0.5\right)=2.125$$

$\blacksquare$

Los físicos e ingenieros tienden a hacer un uso libre de las aproximaciones de Δy mediante dy. Así sucede en la práctica al estimar los errores propagados por los aparatos (dispositivos) de medida. Porejemplo, si x denota el valor medido de una variable y $x+\Delta x$ represnta el valor exacto, entonces Δx es el error de medida (medición). Por último, si el valor medido x se usa para calcular otro valor $f\left(x\right),$ la diferencia entre $f\left(x+\Delta x\right)$ y $f\left(x\right)$ es el error propagado.

$$\underbrace{f(x+\overbrace{\Delta x}^{\text{Error de medición}})}_{\text{Valor exacto}}-f\underbrace{(x)}_{\text{valor medido}}=\overbrace{\Delta y}^{\text{Error propagado}}$$

([5], p. 237)

Un error en el cálculo se define por

$$\begin{aligned}
error &= valor\ verdadero-valor\ aproximado\\
error\ relativo &= \frac{error}{valor\ verdadero}\\
error\ porcentual &= error\ relativo\cdot 100
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.11 *La arista de un cubo mide* $30\ \text{cm}$ *con un error posible de* $\pm 0.02\ \text{cm}.$*¿Cuál es el máximo error posible aproximado en el volumen del cubo?*

Solución. *El volumen de un cubo es* $V=x^3$, *donde* x *es la longitud de la arista. Si* Δx *representa el error en la longitud de la arista, entonces el error correspondiente en el volumen es*

$$\Delta V=\left(x+\Delta x\right)^3-x^3$$

Para simplificar la situación se utiliza la diferencial $dV=3x^2dx=3x^2\Delta x$ *como una aproximación a* ΔV. *Así, para* $x=30$ *y* $\Delta x=\pm 0.02$ *el máximo error aproximado es*

$$dV=3\left(30\right)^2\left(\pm 0.02\right)=\pm 54\,\text{cm}^3$$

Un error de alrededor de $54\,\mathrm{cm}^3$ *en el volumen para un error de* $0.02\,\mathrm{cm}$ *en la longitud de la arista parece considerable. Sin embargo, observe que si el error relativo es* $\frac{\Delta V}{V}$, *entonces el error relativo aproximado es* $\frac{dV}{V}$. *Cuando* $x = 30$ *y* $V = (30)3 = 27000$, *el error porcentual máximo es* $\frac{54}{27000} = \frac{1}{500}$, *y el error porcentual máximo es aproximadamente de sólo* $\pm 0.2\,\%$. *([6], p. 251).* ■

Ejemplo 3.5.12 *Se mide el radio de una bola de un cojinete y e encuentra que es igual a* 0.7 *pulgadas, Si la medición no tienen un error mayor a* 0.01 *´pulgadas, estimar el error propagado en el volumen* V *de la bola del cojinete.*

Solución. *La fórmula para el volumen de una esfera es* $V = \frac{1}{3}\pi r^3$, *donde* r *es el radio de la esfera. De tal modo, es posible escribir:* $r = 0.7$ *es el radio medido. y*

$$-0.01 \leq \Delta r \leq 0.01 \qquad \text{es el error posible}$$

Para aproximar el error propagado en el volumen,

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

así

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx dV \\ &= 4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi\,(0.7)^2\,(\pm 0.01) \\ &\approx \pm 0.06158\ \mathrm{in}^3 \end{aligned}$$

De este modo, el volumen ha propagado un error de casi $0.06\,\mathrm{in}^3$. *([5], p. 237)* ■

Ejercicios 3.8

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.
Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Encuentra los máximos y mínimos de las siguientes funciónes:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 9}$

b) $y = x^{4/3}(1-x)^{1/3}$

c) $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \qquad -2 \leq x \leq 3$

d) $F(x) = -\frac{1}{x^2}$, $0.5 \leq x \leq 2$

e) $h(x) = \sqrt[3]{x} \qquad -1 \leq x \leq 8$

f) $g(x) = \sqrt{4 - x^2} \qquad -2 \leq x \leq 1$

g) $g(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

2. Responde las siguientes preguntas acerca de la función cuya derivada es $f'(x) = x^{-\frac{1}{3}}(x+2)$.

a) ¿Cuáles son los puntos críticos de f ?

b) ¿En qué intervalo f es creciente o decreciente?

c) ¿En qué puntos, si hay alguno, alcanza f valores máximo y mínimo locales?

3. En los siguientes ejercicios:

a) Encuentra los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.

b) Después, identifica los valores extremos locales de la función, si hay alguno, especificando en dónde se alcanza.

c) ¿Cúales de los valores extremos, si hay alguno, son absolutos?.

d) Revise sus resultados en la computadora.

I) $H(t) = \frac{3}{2}t^4 - t^6$

II) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3}{x - 2}, x \neq 2$

III) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+8)$

IV) $h(x) = x^{\frac{1}{3}}(x^2 - 4)$

4. Para las funciones $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

a) Encuentra las asíntotas verticales y horizontales.

b) Encuentra los intervalos donde crece o decrece.

c) Encuentra los valores máximos y mínimos locales.

d) Encuentra los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

e) Usa la información de los incisos para gráficar f y g.

5. Un anillo circular de alambre, de radio r_0, yace en un plano perpendicular al eje x y está centrado en el origen. Este anillo tiene una carga eléctrica positiva repartida uniformemente en él. El campo eléctrico E en la dirección x en el punto s del eje se expresa con $E = \dfrac{kx}{\left(x^2 + r_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ para $k > 0$. ¿En qué punto del eje x el campo es máximo? ¿En qué punto es mínimo?

6. La eficiencia de un tornillo, E, se define como $E = \dfrac{\theta - \mu\theta^2}{\mu + \theta}, \theta > 0$, siendo θ el ángulo del paso de la rosca y μ el coeficiente de fricción entre los materiales que es constante y positivo ¿Qué valor θ maximiza a E?

7. Un almacén que vende cemento tiene que decir cuándo y qué cantidades ordenar nuevamente. Es mas barato, en promedio, colocar órdenes grandes porque esto reduce el costo unitario. Por otra parte, las órdenes grandes implican costos de almacenamiento más altos. El almacén siempre solicita órdenes de cemento en la misma cantidad, q. El costo total semanal, $C = \frac{a}{q} + bq$, donde a, b son constantes positivas.

a) ¿Cúal de los terminos , $\frac{a}{q}$ y bq, representa el costo de ordenar y cuál representa el costo de almacenar?

b) ¿Cúal valor de q genera el costo total mínimo?.

8. Un tanque contiene 5000 litros de agua pura. Se bombea al tanque salmuera que contiene 30 gramos de sal por litro de agua, a razón de $25l/\text{mín}$. La concentración de sal después de t minutos es: $C(t) = \dfrac{30t}{200 + t}$ (en grs/I). ¿Qué sucede con la concentración cuando el tiempo transcurre indefinidamente.

9. Un viaje subsidiado por una escuela costará a cada estudiante 150 pesos si viajan no más de 150 estudiantes, sin embargo el costo de pagar por estudiantes se reduciría a 5 pesos por cada uno más que se inscriba al grupo de los 150. Exprese los ingresos brutos recibidos por la escuela en función del número de inscritos a dicho viaje.

10. Encuentra dy y Δy

a) $y = (x + 1)^2$

b) $y = \sqrt{\dfrac{4}{x^5}}$

c) $y = \dfrac{3x + 1}{x}$

11. Muchas pelotas de golf constan de una cubierta esférica sobre un núcleo sólido. Encuentre el volumen exacto de la cubierta si su grosor es t y el radio del núcleo es r.

[Sugerencia: El volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r$. Considere esferas concéntricas cuyos radios son r y $r + \Delta r$.]

Use diferenciales para encontrar una aproximación al volumen de la cubierta. Encuentre una aproximación al volumen de la cubierta si $r = 0.8$ y $t = 0.04$ pulgadas

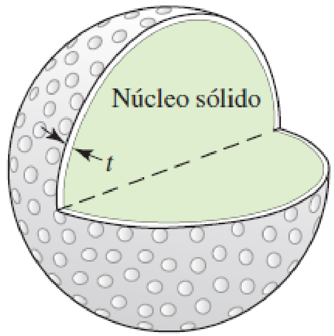


Fig. 3.85. Pelota de Golf

12. El área de un cuadrado cuyo lado mide x es $A = x^2$. Suponga, que cada lado del cuadrado se incrementa por una cantidad Δx. Dibuje el cuadrado e identifique las áreas ΔA, dA y $\Delta A - dA$

Evaluación 12

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Sea $f\ (x) = x^2 + \frac{2}{x},\ \ \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Encuentra los valores máximos y mínimos absolutos de f sobre el intervalo dado.

2. Para la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 3}{x - 2},\ \ x \neq 2$

a) Encuentra los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.

b) Después, identifica los valores extremos locales y absolutos de la función

c) Encuentra los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

d) Usa los resultados obtenidos para dibujar la gráfica de f

3. Se desea construir una caja rectangular cerrada con base cuadrada y volumen de $32000\,\mathrm{cm}^3$. Encuentre las dimensiones de la caja que requiera la menor cantidad de material.

4. El lado de un cuadrado mide $10\,\mathrm{cm}$ con un error posible de $\pm 0.3\,\mathrm{cm}$. Use diferenciales para encontrar una aproximación al error máximo en el área. Encuentre el error relativo aproximado y el error porcentual aproximado.

Parte III

Funciones Trigonométricas, Exponenciales y Logaritmicas

Capítulo 4

Funciones Trigonométricas

4.1. Funciones, gráficas, dominio y rango

4.1.1. Ángulos

Retomemos algunos conceptos básicos de trigonometría

Definición 4.1.1 (Ángulo) *Un ángulo está determinado por dos rayos o semirrectas l_1 y l_2 que tienen el mismo punto inicial O. Dos puntos A y B sobre l_1 y l_2, respectivamente, determinan el ángulo AOB. Un ángulo también se puede considerar como dos segmentos rectilíneos finitos con un punto extremo en común.*

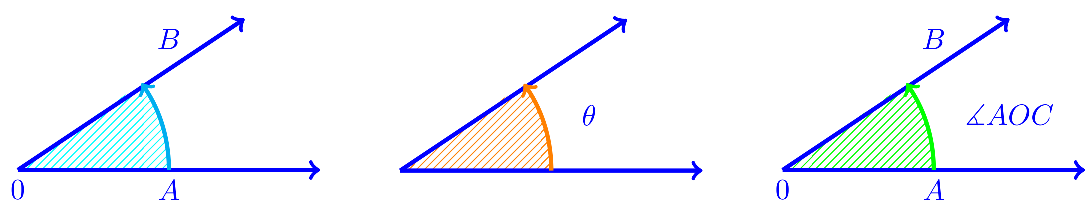


Fig. 4.1. Ángulo

Los ángulos se interpretan como rotaciones de rayos. Se comienza con un rayo fijo l_1 que tiene un extremo O y que gira alrededor de O sobre un plano hasta otra posición especificada por el rayo l_2. A l_1 se le llama lado inicial, a l_2 lado final y a O vértice del ángulo AOB. La magnitud y el sentido de la rotación no se restringen de ninguna manera. Se puede hacer que l_1 de varias vueltas o revoluciones alrededor de O en uno u otro de los dos sentidos antes de llegar a la posición l_2. Así hay muchos ángulos diferentes que tienen los mimos lados inicial y final.

Algunos puntos importantes que debemos considerar sobre ángulos son:

- **Medida**: La medida de un ángulo da una idea de la abertura entre sus lados

- **Notación:** Los ángulos se denotan por tres letras mayusculas, o por el símbolo $\measuredangle$seguido de una o tres letras mayusculas, o bien por una letra griega. Ejempos: ángulo $AOB, \measuredangle AOB, \measuredangle A, \theta, \alpha$. (figura 4.1)

- En un sistema de coordenadas rectangulares, se dice que un ángulo está en su **posición normal o estándar** si tiene el vértice en el origen y su lado inicial l_1 coincide con la parte positiva del eje x.
- **Medida**: Los ángulos se miden en grados o en radianes. Los ángulos se miden en el sentido contrario de giro de las manecillas del reloj (figura 4.2).
- Si se requiere medir un ángulo en el sentido de las manecillas del reloj, se considera su **medida negativa**. (figura4.3)
- Los **Grados** Sexagesimales son una unidad de medida del ángulo, y equivalen a $\frac{1}{360}$ parte de la vuelta completa. Se denota con el símbolo $^\circ$, generalmente solo se le llama "grado"
- Un **Radián** es la medida de un ángulo con vértice en el centro de un círculo y cuyos lados intersectan un arco de circunferencia de longitud igual al radio. Se denota como rad. Si $\theta = 1$, (es decir, si θ es un ángulo de $1\,\mathrm{rad}$), entonces θ intersecta o abarca un arco de logitud r sobre la circunferencia de radio r. (figura 4.4)

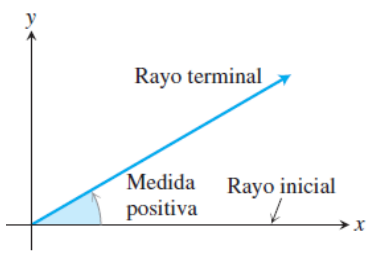


Fig. 4.2. Ángulo positivo

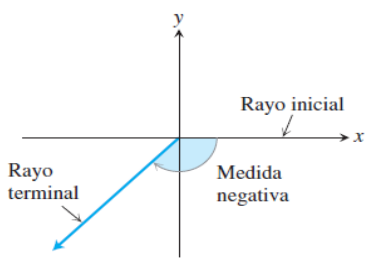


Fig. 4.3. Ángulo negativo

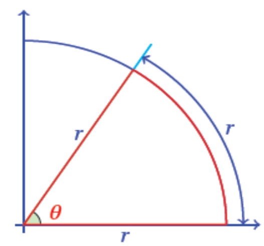


Fig. 4.4. $\theta = 1\ \mathrm{rad}$

Si un ángulo en posición normal es generado mediante media vuelta en la dirección positiva, entonces su medida en grados es 180° y su medida en radianes es π.

Relaciones entre grados y radianes.

$$180^\circ = \pi\,\mathrm{rad}, \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}, \qquad 1\,\mathrm{rad} = \frac{180}{\pi}$$

Teorema 4.1.1 (Conversiones de grados y radianes) .

- *Para convertir un valor en radianes a uno en grados hay que multiplicar por* $\dfrac{180}{\pi}$
- *Para convertir un valor en grados a uno en radianes hay que multiplicar por* $\dfrac{\pi}{180}$

Ejemplo 4.1.1 *Exprese en radianes los siguientes ángulos*

a) $25\,^\circ$ *b)* $255\,^\circ$

Solución.

$$\begin{array}{ll} a) & 25\,^\circ = 25\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{5\pi}{36}\,\text{rad} \\ b) & 255\,^\circ = 255\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{17\pi}{12}\,\text{rad} \end{array}$$

■

Ejemplo 4.1.2 *Exprese en grados los siguientes ángulos*

a) $\dfrac{7\pi}{6}$ *b)* 2.3

Solución.

$$\begin{array}{llll} a) & \dfrac{7\pi}{6} & = & \dfrac{7\pi}{6}\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = 210\,^\circ \\ b) & 2.3 & = & 2.3\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = \left(\dfrac{414.0}{\pi}\right) = 131.78\,^\circ \end{array}$$

■

En cálculo la unidad usal para medir ángulos es el radian. Cuando se considere un ángulo expresado en radianes, no se indicará esta unidad, es decir cuando hablemos del ángulo $\pi/4$ nos estaremos refiriendo al ángulo $\pi/4\,\text{rad}$. Cuando se haga referencia a un ángulo en grados siempre debe llevar el símbolo $^\circ$, por ejemplo $\theta = 5$ es una ángulo que tiene un valor en radianes, $\theta = 5^\circ$ es un ángulo que tiene un valor en grados.

Cuando se usan ángulos para describir rotaciones en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, nuestras medidas pueden ser arbitrariamente mayores que 2π radianes o 360^o. De manera similar, los ángulos que describen rotaciones en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj pueden tener medidas negativas de cualquier tamaño (figura 4.5).

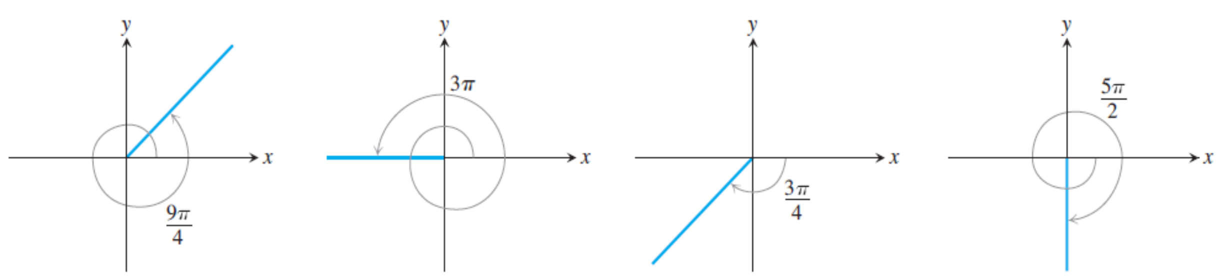


Fig. 4.5.

La medida en radianes de un ángulo se puede obtener a partir de una circunferencia con cualquier radio. Sea θ un ángulo con vértice en el centro de la circunferencia de radio r que determina un arco en la circunferencia cuya longitud es s, donde $0 \leq s \leq 2\pi r$. Para calcular la medida o valor en radianes de θ, se coloca θ en la posición normal sobre un sistema de coordenadas rectangulares y se sobrepone una circunferencia unitaria (figura 4.6).

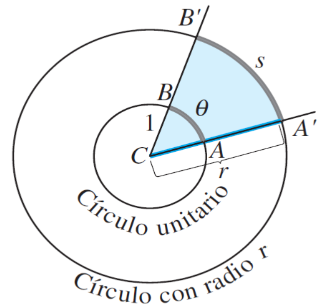


Fig. 4.6.

Si θ intersecta un arco de longitud t en la circunferencia unitaria, entonces por definición, se puede escribir $\theta = t$, y obtenemos la relación

$$\frac{t}{s} = \frac{1}{r} \qquad \text{o bien} \qquad t = \frac{s}{r}$$

sustituyendo t por θ se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 4.1.2 (Longitud de arco) *Si un ángulo central θ de una circunferencia de radio r intersecta un arco de longitud s, entonces la medida en radianes de θ es:*

$$\theta = \frac{s}{r}$$

de aquí se deduce que,

$$s = r\theta$$

es la longitud de arco s de un círculo con radio r cuando el ángulo subtendido θ que produce el arco se mide en radianes.

La fórmula $\theta = \dfrac{s}{r}$ para la medida en radianes de un ángulo es independiente del tamaño de la circunferencia. La medida en radianes de un ángulo no tiene dimensiones y se puede considerar como un número real $\theta = t$ radianes.

4.1.2. Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas se pueden definir mediante una circunferencia unitaria, es decir una circunferencia de radio $r = 1$, o bien por medio de triángulos rectángulos.

Consideremos una circunferencia unitaria, con centro en el origen. Entonces la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$.

Dado cualquier número real t, denotemos por θ al ángulo en posición normal cuya medida en radianes es t. En la circunferencia unitaria denotemos con P al punto de intersección del lado final de θ con la circunferencia unitaria. (figura 4.7).

Para todo $t > 0$ se puede pensar que el ángulo θ fue generado al girar un rayo coincidente con la parte positiva del eje x alrededor del origen en sentido positivo. En este caso t es la distancia sobre la circunferencia que el punto P recorre antes de llegar a su posición final. Si $t < 0$, entonces $|t|$ es la distancia recorrida por P sobre la circunferencia en sentido negativo.

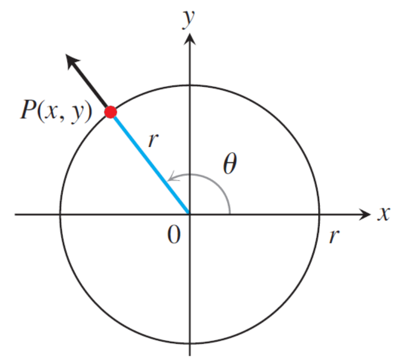


Fig. 4.7.

De esta forma, podemos asociar a cada número real t, un punto único P en la circunferencia unitaria. Las seis funciones trigonométricas se pueden definir a partir de las coordenadas (x, y) de P. Estas funciones son el seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, denotadas por los símbolos $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \csc$ respectivamente. Si t es un número real, la función seno asocia a t otro número real que se denota como $\sin t$. Para las otras cinco funciones se usa una notación similar.

Ahora bien $P\,(x, y)$ puede ser cualquier punto en el plano xy.

Definición 4.1.2 (Funciones Trigonométricas) *Si t es un número real y θ un ángulo con medida t radianes. Sea θ un ángulo en la posición normal sobre un sistema de coordenadas rectangulares y sea $P\,(x, y)$ cualquier punto distinto de O sobre el lado final de θ. De modo que si r es la distancia de O a P, entonces*

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} \quad (para\ y \neq 0)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad (para\ x \neq 0)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad (para\ x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (para\ y \neq 0)$$

Cuando $r = 1$, es decir, si el punto $P\,(x, y)$ está sobre la circunferencia unitaria, la definición se reduce a

$$\sin\theta = y \qquad \csc\theta = \frac{1}{y} \quad (para\ y \neq 0)$$

$$\cos\theta = x \qquad \sec\theta = \frac{1}{x} \quad (para\ x \neq 0)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad (para\ x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (para\ y \neq 0)$$

Ejemplo 4.1.3 *Calcular los valores de las funciones trigonométricas en*

a) $t = 0$ *b)* $t = \frac{\pi}{4}$ *c)* $t = \frac{\pi}{2}$

Solución. $a)$ *Para* $t = 0$*, tomamos* $x = 1$ *y* $y = 0$*, (figura 4.8), así por la definición 4.1.2*

θ	(x, y)	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
0	$(1, 0)$	0	1	1	*no está definida*	1	*no está definida*

$b)$ *Para* $t = \frac{\pi}{4}$*, la recta que pasa por* O *y biseca al primer cuadrante y* P *tiene coordenadas de la forma* (x, x)*, (figura 4.9). Usando la ecuación* $x^2 + y^2 = 1$ *en la circunferencia unitaria, obtenemos*

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 1 \\ 2x^2 &= 1 \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

así tenemos $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$*, utilizando las coordenadas de* P *en la definición obtenemos*

θ	(x, y)	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1

$c)$ *Para* $t = \frac{\pi}{2}$ *sustituimos* $x = 0$ *y* $y = 1$ *en la definición. (figura ??). Y obtenemos*

θ	(x, y)	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$	1	0	*no está definida*	1	*no está definida*	0

■

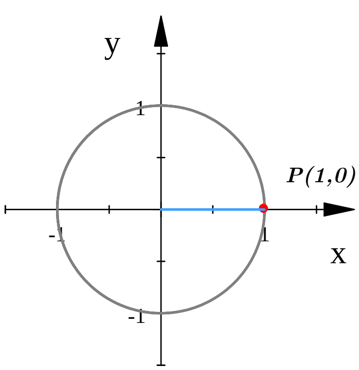


Fig. 4.8.

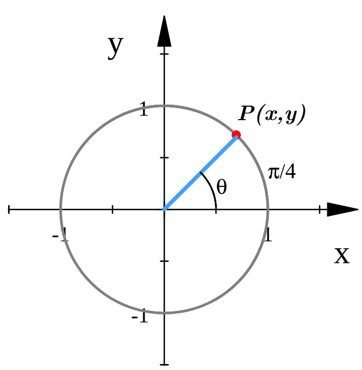


Fig. 4.9.

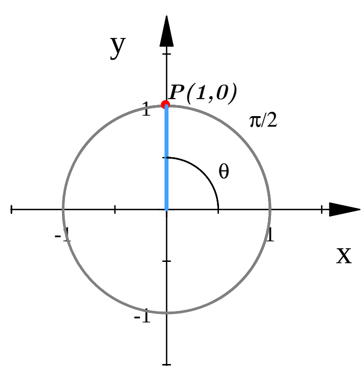


Fig. 4.10.

En el caso de ángulos agudos, los valores de las funciones trigonométricas pueden interpretarse como razones de las longitudes de los lados de un tríangulo rectángulo. Si un triángulo rectángulo se coloca en un sistema de coordenadas rectangulares, como en la figura 4.11, entonce las longitudes del cateto adyacente y el cateto opuesto a θ son, respectivamente la abscisa y la ordenada del punto P que es el vértice del triángulo donde se unen la hipotenusa y el cateto opuesto.

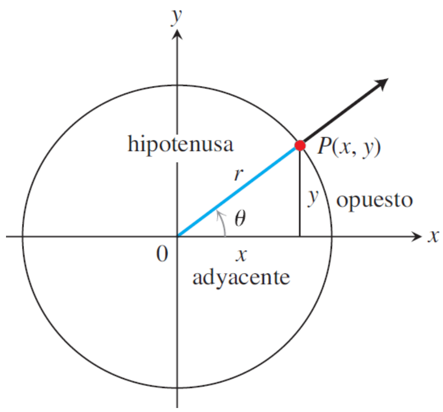


Fig. 4.11.

Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

$$\sin\theta = \frac{co}{h} \qquad \csc\theta = \frac{h}{co}$$

$$\cos\theta = \frac{ca}{h} \qquad \sec\theta = \frac{h}{ca}$$

$$\tan\theta = \frac{co}{ca} \qquad \cot\theta = \frac{ca}{co}$$

Para calcular el valor de las funciones trigonométricas de ángulos de $\pi/2, \pi/3, \pi/4$ en grados y radianes, podemos usar los triangulos rectángulos de la figura 4.12.

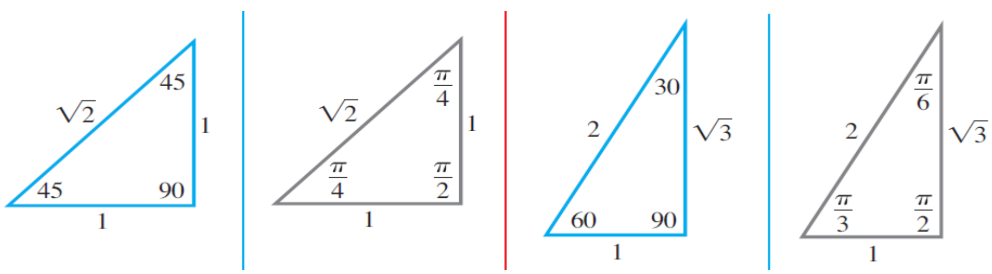


Fig. 4.12.

En la siguiente tabla se muestran los valores exactos de algunos ángulos, así como su equivalencia en grados y radianes

θ **Grados**	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
θ **Radianes**	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no está definida	0	no está definida	0
$\cot\theta$	no está definida	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	no está definida	0	no está definida
$\sec\theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	no está definida	-1	no está definida	1
$\csc\theta$	no está definida	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	no está definida	-1	no está definida

Los **signos de las funciones trigonométricas** de cualquier ángulo, dependen de los signos de la ordenanda y de la abscisa de un punto arbitrario $P\left(x,y\right)$ del lado terminal.

- Cuando éste pasa de un cuadrante a otro, la distancia r del origen a P permanece siempre positivo, en tanto que siempre hay un cambio en el signo de la abscisa o de la ordenanda.
- En el primer cuadrante ambas coordenadas son positivas
- En el segundo cuadrante la abscisa x es negativa y la ordenada y es positiva
- En el tercer cuadrante ambas son negativas.
- El el cuarto cuadrante la abscisa x es positiva y la ordenada y es negativa

Podemos ver los signos de las funciones trigonométricas en los 4 cuadrantes en la siguiente tabla:

Cuadrante	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
I	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
II	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
III	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
IV	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

Ejemplo 4.1.4 *Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo* $\theta = \frac{2\pi}{3}$
Solución. *Dibujamos en el plano el ángulo de* $\frac{2\pi}{3}$ *y vemos que su ángulo reducido es* $\frac{\pi}{3}$ *(figura 4.13), usando los valores de la tabla de valores exactos para* $\theta = \frac{\pi}{3}$ *, y la tabla de signos podemos calcular el valor de las* 6 *funciones trigonométricas*

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \sec\frac{2\pi}{3} = -2$$

$$\tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3} \qquad \cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

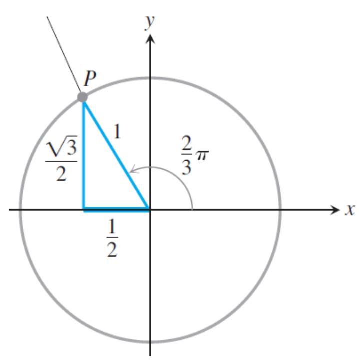


Fig. 4.13.

. ■

Ejemplo 4.1.5 *Si* $\tan\theta = \frac{3}{2}$ *y* $0 < \theta < \pi/2$, *encuentre los valores de las otras cinco funciones trigonométricas de* θ.

Solución. *A partir de* $\tan\theta = \frac{3}{2}$ *, construimos un triángulo rectángulo (figura 4.14) con altura* 3 *(cateto opuesto) y base* 2 *(cateto adyacente). El teorema de Pitágoras nos da la longitud de la hipotenusa,* $r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Así tenemos que $x = 2$, $y = 3$, $r = \sqrt{13}$. *Una vez que encontramos los valores de cada lado del triángulo, escribimos los valores de las otras cinco funciones trigonométricas:*

$$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\cot\theta = \frac{2}{3}$$

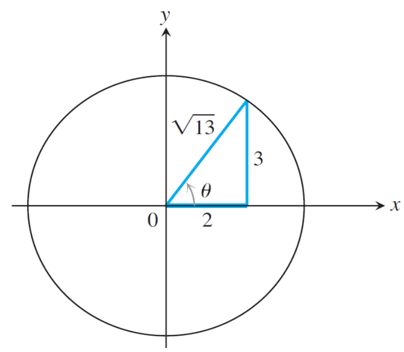


Fig. 4.14.

([8]. p. 51) ■

4.1.3. Gráfica de las funciones trigonométricas

Como el perimetro de la circunferencia unitaria es 2π ocasiona que cuando un ángulo de medida θ y un ángulo que mide $\theta + 2\pi$ están en posición estándar, sus lados terminales coinciden. Por lo tanto, las funciones trigonométricas de los dos ángulos tienen los mismos valores:

$$\begin{array}{ccc} \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta & \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta & \tan(\theta + 2\pi) = \tan\theta \\ \cot(\theta + 2\pi) = \cot\theta & \sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta & \csc(\theta + 2\pi) = \csc\theta \end{array}$$

De manera similar, $\sin(\theta - 2\pi) = \cos\theta$ y así sucesivamente.

Para describir este comportamiento repetitivo decimos que las funciones trigonométricas son periódicas.

Definición 4.1.3 (Función periódica) *Una función* $f(x)$ *es periódica si existe un número positivo* k *tal que* $f(x + k) = f(x)$ *para todo valor* x*. El menor de los posibles valores de* k *es el periodo de* f*.*

Las gráficas de las funciones trigonométricas se pueden obtener analizando lo que sucede a las coordenadas del punto $P(x, y)$ cuando P se mueve alrededor de la circunferencia unitaria (figura 4.15) y se localizan algunos puntos. Al recordar que la función es periódica, podemos extenderla en ambas direcciones repitiendo la forma de la función tantas veces como se requiera.

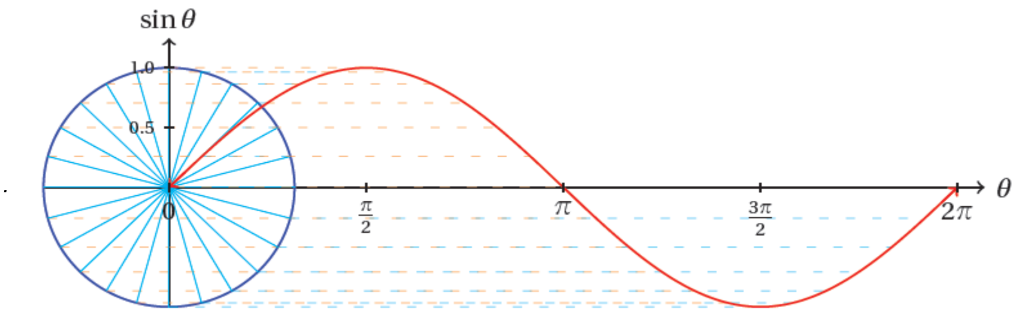


Fig. 4.15. Gráfica de la función seno

Cuando graficamos funciones trigonométricas en el plano cartesiano, por lo general denotamos la variable independiente mediante x en lugar de hacerlo con θ.

Las gráficas de las funciones trigonométricas son: (la parte marcada con amarillo indica el periodo)

$y = \sin x$

Dominio: $-\infty < x < \infty$

Rango: $-1 \leq y \leq 1$

Periodo: 2π

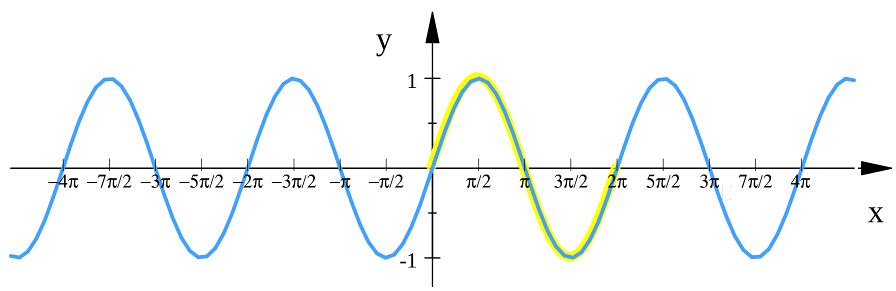


Fig. 4.16 $y = \sin x$

$y = \cos x$

Dominio: $-\infty < x < \infty$

Rango: $-1 \leq y \leq 1$

Periodo: 2π

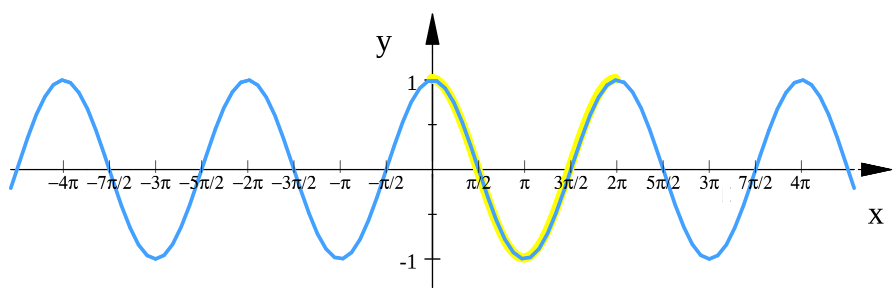


Fig. 4.17 $y = \cos x$

$y = \tan x$

Dominio: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, ..., \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}$

Rango: $\infty < y < \infty$

Periodo: π

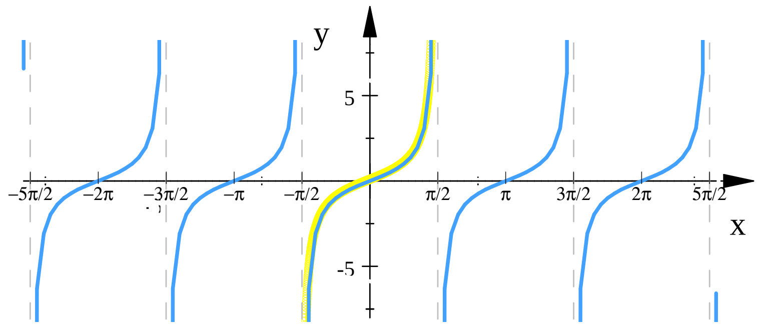


Fig. 4.18 $y = \tan x$

$y = \cot x$

Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ..., n\pi$

Rango: $\infty < y < \infty$

Periodo: π

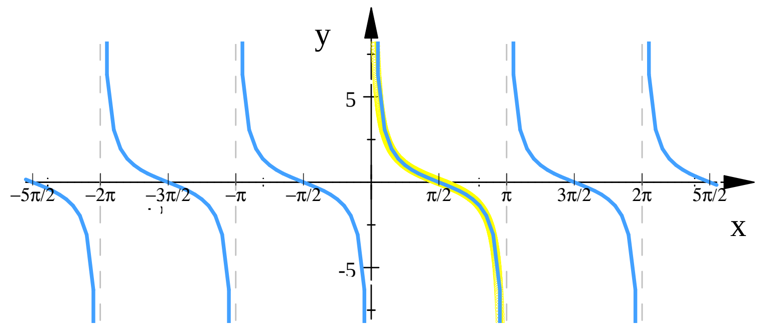


Fig. 4.19 $y = \cot x$

$y = \sec x$

Dominio: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, ..., \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}$

Rango: $y \in (-\infty, 1] \cup [1, \infty)$

Periodo: 2π

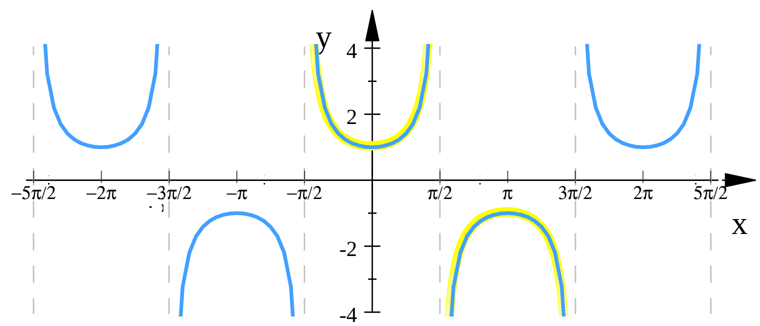


Fig. 4.20 $y = \sec x$

$y = \csc x$

Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ..., n\pi$

Rango: $y \in (-\infty, 1] \cup [1, \infty)$

Periodo: 2π

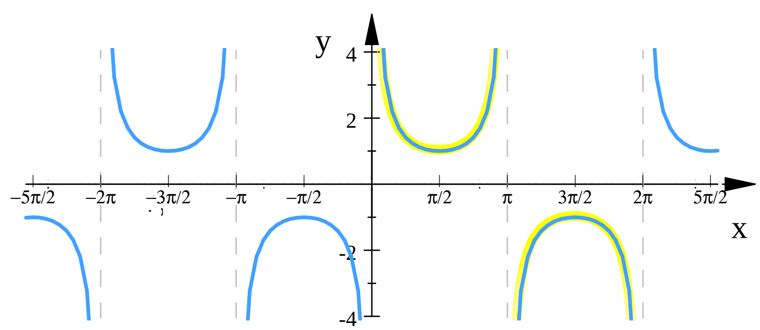


Fig. 4.21 $y = \csc x$

En las figuras 4.17, 4.20, las simetrías de las gráficas revelan que las funciones coseno y secante son pares y las otras cuatro funciones son impares, así tenemos que

Funciones trigonométricas pares:	Funciones trigonométricas impares:
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\cot(-x) = -\cot x$
.	$\csc(-x) = -\csc x$

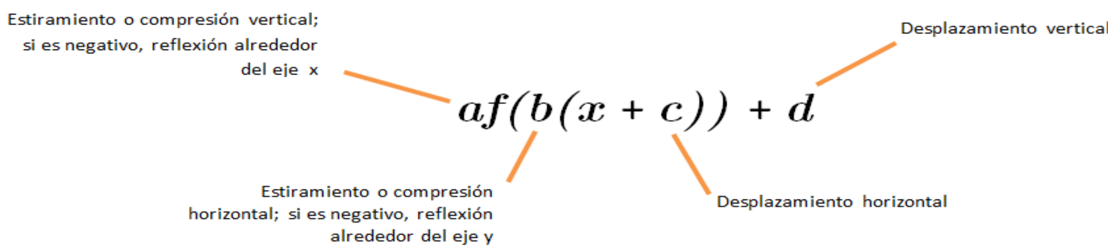
4.1.4. Transformaciones de las gráficas de funciones trigonométricas

Las reglas de desplazamientos, estiramientos, compresión y reflexión de la gráfica de una función se aplican también a las funciones trigonométricas.

Si a es una constante positiva la gráfica de la función $y = a \sin x$ nos da la función seno estirada a unidades en dirección vertical, lo cual es la función seno con una amplitud a que es el valor máximo que alcanzara y.

Si b es una constante positiva la gráfica de la función $y = \sin bx$ nos da la gráfica de la función comprimida b veces en dirección horizontal, lo cuál nos da la gráfica de la función seno con un periodo $2\pi/b$

Con el siguiente diagrama podemos facilitar el dibujo de gráficas



Para una función trigonométrica

Amplitud: a

Periodo: $\frac{2\pi}{b}$

Ejemplo 4.1.6 *Por ejemplo para la función*
$f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$

$|A|$ *es la amplitud*
$|B|$ *es el periodo*
C *es el desplazamiento horizontal*
D *es el desplazamiento vertical*

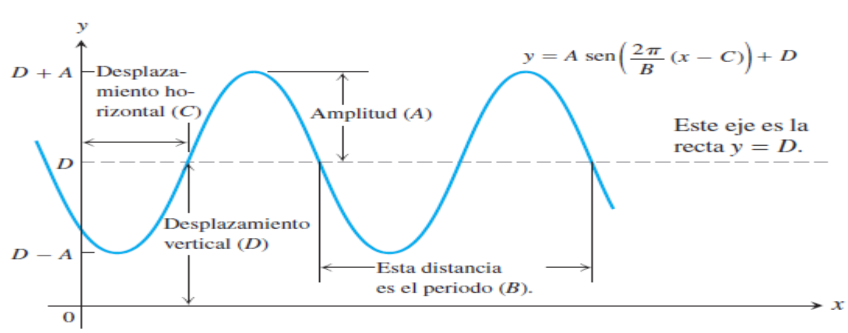


Fig. 4.22.

Ejemplo 4.1.7 *Dibuja la gráfica de la función* $y = 3\sin 2x + 1$

Solución.

Es una función senoidal con
Amplitud: 3
Periodo: $\frac{2\pi}{2} = \pi$
Desplazamiento vertical: 1 *hacia arriba.*

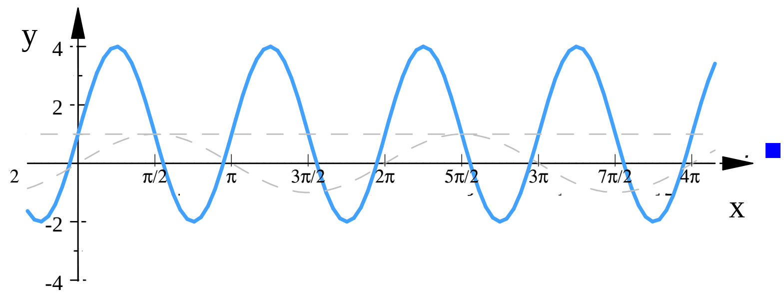


Fig. 4.23.

Ejemplo 4.1.8 *Traze la gráfica de* $y = -\cos 2\pi x$

Solución.

Es una función cosenoidal con
Amplitud: 1, *reflejada respecto a* x
Periodo: $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$

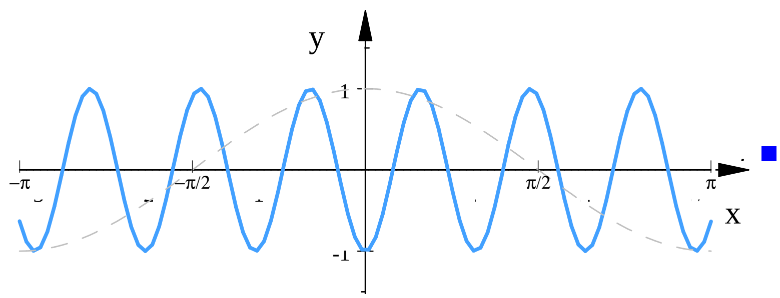


Fig. 4.24.

Ejemplo 4.1.9 *Traze la gráfica de* $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Solución.

Es una función cosenoidal con
Amplitud: 1
Periodo:2π
desplazada $\frac{\pi}{4}$ *hacia la izquierda*

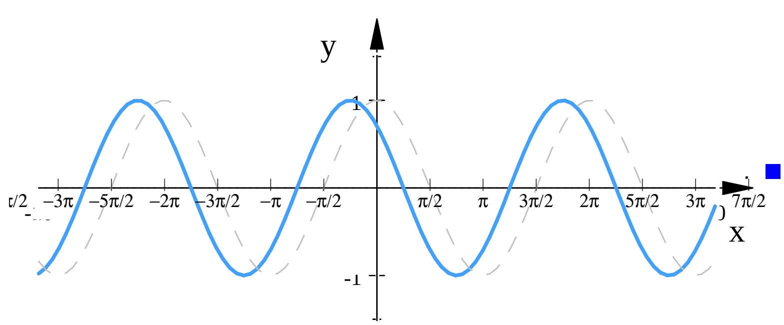


Fig. 4.25.

4.1.5. Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas son relaciones entre las funciones trigonométricas, se usan para simplificar y son válidas para cualquier valor permitido de x.

Usaremos el círculo unitario para determinar las identidades fundamentales.

Cuando tomamos un punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria, la definición de funciones trigonométricas es:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= y & \csc\theta &= \frac{1}{y} \quad (para\ y \neq 0) \\ \cos\theta &= x & \sec\theta &= \frac{1}{x} \quad (para\ x \neq 0) \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} \quad (para\ x \neq 0) & \cot\theta &= \frac{x}{y} \quad (para\ y \neq 0) \end{aligned}$$

de aquí tenemos:

Teorema 4.1.3 (Identidades fundamentales) .

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{1}{\csc\theta} & \csc\theta &= \frac{1}{\sin\theta} \\ \cos\theta &= \frac{1}{\sec\theta} & \sec\theta &= \frac{1}{\cos\theta} \\ \tan\theta &= \frac{1}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} & \cot\theta &= \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned}$$

Demostración. Las demostraciones se deducen de las definiciones de las funciones trigonométricas. Así,

$$\begin{aligned} \csc\theta &= \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\tan\theta}, \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned}$$

siempre y cuando ninguno de los denominadores sea cero. ■

Por otra parte, Las coordenadas de cualquier punto $P(x, y)$ en el plano pueden expresarse en términos de la distancia entre el punto y origen, y el ángulo que hace el rayo OP con el eje x positivo. Como

$$\frac{x}{r} = \cos\theta, \qquad y \qquad \frac{y}{r} = \sin\theta,$$

tenemos

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

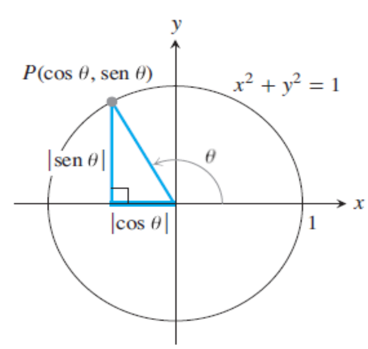


Fig. 4.25.

Cuando podemos aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de referencia en la figura 4.1.5, y obtener la ecuación

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Si $\sin^2\theta \neq 0$, dividimos la ecuación entre $\sin^2\theta$ para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} &= \frac{1}{\sin^2\theta} \\ 1 + \tan^2\theta &= \sec^2\theta \end{aligned}$$

Si $\cos^2\theta \neq 0$, dividimos la ecuación entre $\cos^2\theta$ para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\ 1 + \cot^2\theta &= \csc^2\theta \end{aligned}$$

Estas identidades son llamadas identidades Pitagóricas.

Teorema 4.1.4 (Identidades Pitagóricas) *Las identidades pitagoricas son:*

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Algunas otras identidades son:

Periodicas

- Periodo $= 2\pi$
  - $\sin\varphi = \sin(\varphi + 2\pi n)$, $\sin(\varphi \pm \pi) = -\sin\varphi$
  - $\cos\varphi = \cos(\varphi + 2\pi n)$, $\cos(\varphi \pm \pi) = -\cos\varphi$
  - $\sec\varphi = \sec(\varphi + 2\pi n)$, $\sec(\varphi \pm \pi) = -\sec\varphi$
  - $\csc\varphi = \csc(\varphi + 2\pi n)$, $\csc(\varphi \pm \pi) = -\csc\varphi$
- Periodo $= \pi$
  - $\tan\varphi = \tan(\varphi + \pi n)$
  - $\cot\varphi = \cot(\varphi + \pi n)$

Suma y resta de ángulos

- $\sin(\varphi \pm \theta) = \sin\varphi\cos\theta \pm \cos\varphi\sin\theta$

- $\cos(\varphi \pm \theta) = \cos\varphi\cos\theta \mp \sin\varphi\sin\theta$
- $\tan(\varphi \pm \theta) = \dfrac{\tan\varphi \pm \tan\theta}{1 \mp \tan\varphi\tan\theta}$

Casos especiales

- $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi$
- $\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$

Identidades de ángulo doble

- $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$
- $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = 1 - 2\sin^2\varphi$
- $\tan 2\varphi = \dfrac{2\tan\varphi}{1 - \tan^2\varphi}$

Identidades de mitad de ángulo

- $\sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$ (positivo si $\frac{\varphi}{2}$ en cuadrantes I o II, negativo en otro caso)
- $\cos\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$ (positivo si $\frac{\varphi}{2}$ en cuadrantes I o IV, negativo en otro caso)
- $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$ (positivo si $\frac{\varphi}{2}$ en cuadrantes I o III, negative en otro caso)

Identidades de ángulo multiple

- $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$
- $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$
- $\sin n\varphi = 2\sin((n-1)\varphi)\cos\varphi - \sin(n-2)\varphi$
- $\cos n\varphi = 2\cos((n-1)\varphi)\cos\varphi - \cos(n-2)\varphi$

Otras identidades

- $\sin\varphi \pm \sin\theta = 2\sin\frac{\varphi \pm \theta}{2}\cos\frac{\varphi \mp \theta}{2}$

- $\cos\varphi + \cos\theta = 2\cos\dfrac{\varphi+\theta}{2}\cos\dfrac{\varphi-\theta}{2}$
- $\cos\varphi - \cos\theta = -2\sin\dfrac{\varphi+\theta}{2}\sin\dfrac{\varphi-\theta}{2}$
- $\sin^2\varphi = \dfrac{1-\cos 2\varphi}{2}$
- $\cos^2\varphi = \dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}$
- $\sin^3\varphi = \dfrac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}$
- $\cos^3\varphi = \dfrac{3\cos\varphi + \cos 3\varphi}{4}$
- $\sin\varphi\sin\theta = \dfrac{\cos(\varphi-\theta) - \cos(\varphi+\theta)}{2}$
- $\cos\varphi\cos\theta = \dfrac{\cos(\varphi-\theta) + \cos(\varphi+\theta)}{2}$
- $\sin\varphi\cos\theta = \dfrac{\sin(\varphi+\theta) + \sin(\varphi-\theta)}{2}$
- $2\cos^2\varphi\,(1+2\cos\varphi) = 1 + 3\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi$

4.1.6. Funciones trigonométricas inversas

Por definición de función inversa:

Si f es una función uno a uno con dominio D y rango E, entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio E y rango D. Además

$$y = f^{-1}(x) \qquad \text{si y solo si} \qquad f(y) = x$$

para todo x en D y para todo y en E.

No debemos olvidar que la composición de funciones inversas es igual a la identidad, es decir:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(f(x)) = x$$

Las funciones trigonométricas no son uno a uno, por lo tanto no tienen funciones inversas. Sin embargo, si se restringen sus dominios, pueden obtenerse funciones que toman los mismos valores que las funciones trigonométricas y que sí tienen funciones inversas.

En la función seno si se restringe el domino a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, se obtiene una función creciente que toma todos sus valores de la función seno una y sólo una vez. Esta nueva función con dominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y rango $[-1, 1]$, es continua y creciente, es decir es uno a uno, y por lo tanto tiene una función inversa que tambien es uno a uno.

Podemos definir la función seno inverso denotada por $\sin^{-1} x$ mediante

$$y = \sin^{-1} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad \sin y = x$$

para todo $-1 \leq x \leq 1$ y $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Podemos obtener su gráfica al tomar la gráfica de la función $\sin x$ solamente de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y reflejarla respecto a la recta $y = x$

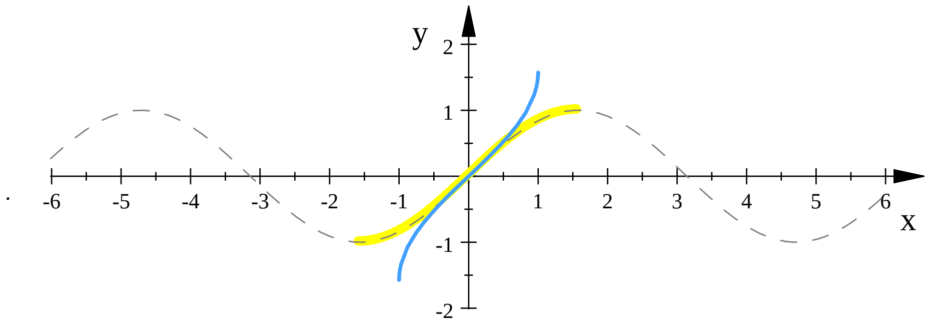


Fig. 4.26.

A la función seno inverso tambien se le llama función arco seno y se denota por $\arcsin x$ en vez de $\sin^{-1} x$

Análogamente, podemos hacer lo mismo para definir las otras cinco funciones trigonométricas inversas.

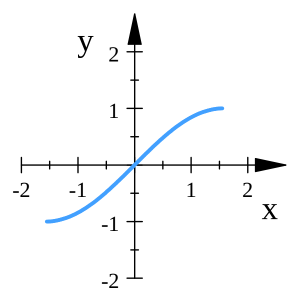
El símbolo $^{-1}$ en $\sin^{-1}$ y las demás funciones trigonométricas, no debe considerarse un exponente sino sólo un signo para denotar la inversa de una función o función inversa.

Definición 4.1.4 (Función seno inverso) *La función seno inverso o arco seno, se define mediante*

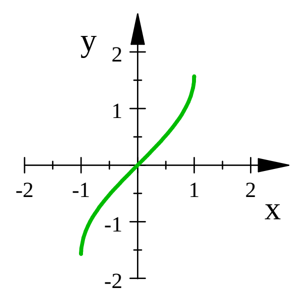
$$y = \sin^{-1} x = \arcsin x \quad \textit{si y sólo si} \quad \sin y = x$$

para todo

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad y \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$



$y = \sin x$



$y = \sin^{-1} x$

Como $\sin^{-1} x$ y $\sin x$ son funciones inversas entre sí, entonces

$$\begin{array}{rcll} \sin^{-1}(\sin x) & = & x & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin\left(\sin^{-1} x\right) & = & x & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \end{array}$$

También pueden escribirse como

$$\arcsin(\sin x) = x \qquad \text{y} \qquad \sin(\arcsin x) = x$$

Ejemplo 4.1.10 *Evaluar* $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Solución. *Si* $y = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, *entonces* $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *y por lo tanto* $y = \frac{\pi}{4}$

Nótese que es necesario escoger y *en el intervalo* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *un número como* $\frac{3\pi}{4}$ *es un a respuesta incorrecta a pesar de que* $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ■

Ejemplo 4.1.11 *Evaluar* $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

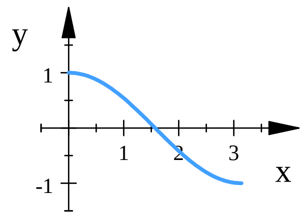
Solución. *Si* $y = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, *entonces* $\sin y = -\frac{1}{2}$ *y, por consiguiente,* $y = -\frac{\pi}{6}$ ■

Definición 4.1.5 (Función coseno inverso) *La función coseno inverso o arco coseno, se define mediante*

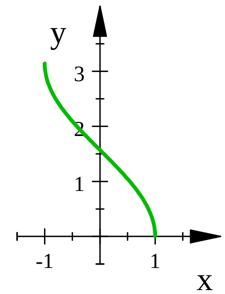
$$y = \cos^{-1} x = \arccos x \quad \textit{si y sólo si} \quad \cos y = x$$

para todo

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad y \qquad 0 \leq y \leq \pi$$



$y = \cos x$



$y = \cos^{-1} x$

Como $\cos^{-1} x$ y $\cos x$ son funciones inversas entre sí, entonces

$$\begin{aligned} \cos^{-1}(\cos x) &= x \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \cos\left(\cos^{-1} x\right) &= x \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

También pueden escribirse como

$$\arccos(\cos x) = x \qquad \text{y} \qquad \cos(\arccos x) = x$$

Ejemplo 4.1.12 *Calcular* $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Solución. *Si* $y = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *entonces* $\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

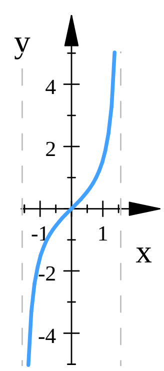
como y *se debe restringir al intervalo* $[0, \pi]$, *resulta que* $y = \frac{5\pi}{6}$ ■

Definición 4.1.6 (Función tangente inversa) *La función tangente inversa o arco tangente, se define mediante*

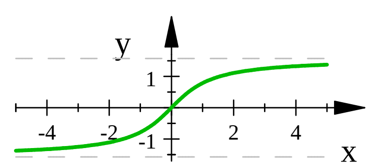
$$y = \tan^{-1} x = \arctan x \quad \textit{si y sólo si} \quad \tan y = x$$

para todo

$$-\infty < x < \infty \qquad y \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$



$y = \tan x$



$y = \tan^{-1} x$

Como $\tan^{-1} x$ y $\tan x$ son funciones inversas entre sí, entonces

$$\begin{aligned} \tan^{-1}(\tan x) &= x \quad \text{si} \quad -\infty < x < \infty \\ \tan\left(\tan^{-1} x\right) &= x \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

También pueden escribirse como

$$\arctan(\tan x) = x \qquad \text{y} \qquad \tan(\arctan x) = x$$

Ejemplo 4.1.13 *Calcular* $\sec\left(\arctan\frac{2}{3}\right)$ *sin usar calculadora.*

Solución. *Si* $y = \arctan\frac{2}{3}$, *entonces* $\tan y = \frac{2}{3}$. *Aplicando* $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$ *y el hecho de que* $\sec y > 0$ *para* $0 < y < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sec y = \sqrt{1 + \tan^2 y} &= \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{13}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{3} \end{aligned}$$

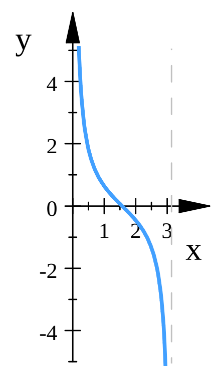
por lo tanto, $\sec\left(\arctan\frac{2}{3}\right) = \sec y = \frac{\sqrt{13}}{3}$ ■

Definición 4.1.7 (Función cotangente inversa)
La función cotangente inversa o arco cotangente, se define mediante

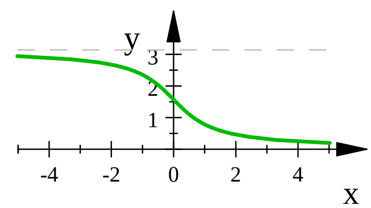
$$y = \cot^{-1} x = \operatorname{arccot} x \qquad \textit{si y sólo si} \qquad \cot y = x$$

para todo

$$-\infty < x < \infty \qquad y \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$



$y = \cot x$



$y = \cot^{-1} x$

Ejemplo 4.1.14 *Determine* $\cot\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$

Solución. *Si* $y = \arcsin\frac{2}{3}$, *entonces* $\sin y = \frac{2}{3}$, *dibujamos* y *como un ángulo en un triángulo rectángulo con cateto opuesto* 2 *e hipotenusa* 3. *La longitud del otro cateto es*

$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

Agregamos esta información a la figura y luego, con base en el triángulo completo podemos calcular

$$\cot y = \cot\left(\arcsin\frac{2}{3}\right) = \sqrt{5}$$

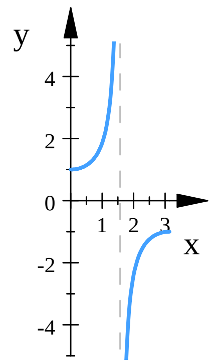
■

Definición 4.1.8 (Función secante inversa) *La función secante inversa o arco secante, se define mediante*

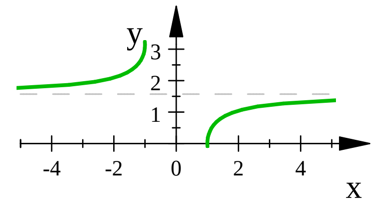
$$y = \sec^{-1} x = \operatorname{arcsec} x \quad \textit{si y sólo si} \quad \sec y = x$$

para todo

$$|x| \geq 1 \qquad y \qquad 0 \leq y \leq \pi,\ y \neq \frac{\pi}{2}$$



$y = \sec x$



$y = \sec^{-1} x$

Ejemplo 4.1.15 *Escribir* $\cos\left(\sin^{-1} x\right)$ *como una expresión algebraica en* x *para* $-1 \leq x \leq 1$.

Solución. *Sea* $y = \sin^{-1} x$. *Entonces,* $\sin y = x$

Deseamos expresar $\cos y$ *en términos de* x. *Como* $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, *resulta que* $\cos y \geq 0$ *y por lo tanto*

$$\begin{aligned} \sin^2 y + \cos^2 y &= 1 \\ \cos y &= \sqrt{1 - \sin^2 y} \\ &= \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\cos\left(\sin^{-1} x\right) = \sqrt{1 - x^2}$ ■

Ejemplo 4.1.16 *Verificar la identidad* $\frac{1}{2}\cos^{-1} x = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ *para* $|x| < 1$

Solución. *Sea* $y = \cos^{-1} x$. *Por demostrar* $\frac{y}{2} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

Aplicando la identidad para mitad de un ángulo

$$\left|\tan \frac{y}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos y}{1 + \cos y}}$$

Como $y = \cos^{-1} x$ *y* $|x| < 1$, *resulta que* $0 < y < \pi$ *y, por lo tanto,* $0 < \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2}$. *De manera que* $\tan \frac{y}{2} > 0$ *se puede eliminar el símbolo de valor absoluto con lo que se obtiene*

$$\tan \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos y}{1 + \cos y}}$$

Usando el hecho de que $\cos y = x$, *tenemos*

$$\tan \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

o, bien

$$\frac{y}{2} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

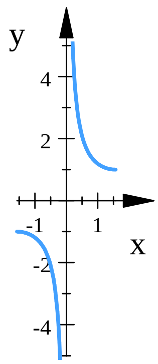
■

Definición 4.1.9 (Función cosecante inversa)
La función cosecante inversa o arco cosecante, se define mediante

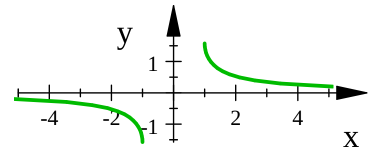
$$y = \csc^{-1} x = \operatorname{arccsc} x \quad \textit{si y sólo si} \quad \csc y = x$$

para todo

$$|x| \geq 1 \qquad y \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$



$y = \csc x$



$y = \csc^{-1} x$

Ejemplo 4.1.17 *Durante un vuelo de Chicago a San Luis, el piloto determina que el avión se ha desviado* 12 *millas de su curso, como se muestra en la figura 4.27. Determine el ángulo a para un curso paralelo al original, el curso correcto, el ángulo* b *y el ángulo de corrección* $c = a + b$.

Solución.

$$\begin{aligned} a &= \sin^{-1}\frac{12}{180} \approx 0.067 \approx 3.8^\circ \\ b &= \sin^{-1}\frac{12}{62} \approx 0.195 \approx 11.2^\circ \\ c &= a + b \approx 15^\circ \end{aligned}$$

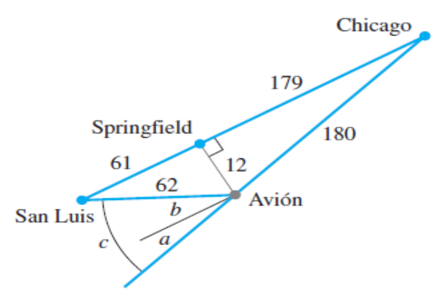


Fig. 4.27.

([8]. p. 524) ■

Ejemplo 4.1.18 *Encontrar las soluciones de la ecuación*

$$5\sin^2 t + 3\sin t - 1 = 0$$

en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Solución. *Podemos considerar la ecuación como una de segundo grado en* $\sin t$. *Aplicando la fórmula general*

$$\begin{aligned}
\sin t &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)} \\
&= \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10} \\
t &= \sin^{-1}\left(\frac{-3-\sqrt{29}}{10}\right) \\
t &= \sin^{-1}\left(\frac{-3+\sqrt{29}}{10}\right)
\end{aligned}$$

■

([3]. Capítulo 8, p. 396-437)

Los siguientes son ejemplos de relaciones entre las funciones trigonométricas inversas.

Teorema 4.1.5 (Identidades de funciones trigonométricas inversas) *Para todo* x

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

para $|x| \geq 1$

$$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2}$$

Ejercicios 4.1

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.
Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Prueba que $f(x) = \sin x$ es periódica con periocidad $k = 2\pi$. Usando la proposición $f(x+2\pi) = f(x)$,entonces por lo anterior queremos demostrar que $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

2. ¿Cuál es la diferencias entre $\sin x^2$, $\sin^2 x$ y $\sin(\sin x)$?. Expresa cada una de las tres funciones como una composición (Nota: $\sin^2 x = (\sin x)^2$)

3. Encuentra la función inversa de $y = \cos^2 x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

4. En los ejercicios siguientes, una de las funciones, $\sin x, \cos x$ y $\tan x$ está dada. Encontrar las otras dos si x está en el intervalo indicado

a) $\sin x = \frac{3}{5}, \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
b) $\cos x = \frac{1}{3}, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$
c) $\tan x = \frac{1}{2}, \qquad x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

5. Expresa la cantidad dada en términos de $\sin x$ y cosx (usando las formulas de suma).

a) $\cos(\pi + x)$
b) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

6. Evalúa $\sin \frac{7\pi}{12}$ como $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

7. Dada $F(x) = \cos^2(x+9)$, encuentre las funciones f, g y h tales que $F = f \circ g \circ h$

8. Sean f y g las funciones dadas. Encuentra $f\left(g\left(\pi\right)\right)$ y $g\left(f\left(\pi\right)\right)$

a) $f\left(t\right) = \cos t, \qquad g\left(t\right) = \frac{t}{4}$
b) $f\left(t\right) = \tan t, \qquad g\left(t\right) = \frac{t}{4}$

9. Encuentra todas las soluciones de las siguientes ecuaciones correcta hasta dos cifras decimales y grafícalas:

a) $2\sin x = x$ b) $\cos x = x$

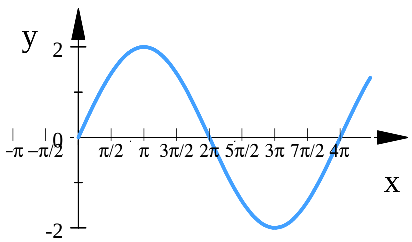
10. Traza las gráficas de las funciones trigonométricas dadas. ¿Cuál es el periodo de cada función?, da el dominio, rango e intersecciones con el eje x y con el eje y

a) $y = \cos \pi x$ c) $y = 3\sec x$ e) $y = -\csc 2x$

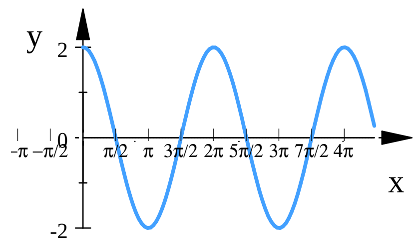
b) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ d) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ f) $y = \cot 2x$

11. Haz corresponder las siguientes funciones con las gráficas de la siguiente figura:

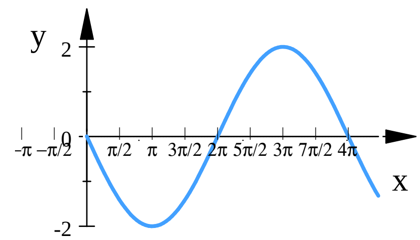
a) $y = 2\cos\left(\frac{t-\pi}{2}\right)$ b) $y = 2\cos t$ c) $y = 2\cos\left(\frac{t+\pi}{2}\right)$



$f(x) =$



$f(x) =$



$f(x) =$

12. Calcula el valor exacto sin usar tablas ni calculadora

a) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ c) $\tan\left(\arctan\frac{3}{4} + \arccos\frac{3}{5}\right)$ e) $\cos\left(\sin^{-1} 0\right)$

b) $\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ d) $\sin\left(2\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$ f) $\tan^{-1}(\cos 0)$

13. Escribe la expresión $\tan(\arccos x)$ como una expresión algebraica en x

14. Demuestra que la ecuación $\tan^{-1} x = \frac{1}{\tan x}$ no es una identidad.

15. Encuentra las soluciones de la ecuación en el intervalo dado usando las funciones trigonométricas inversas.

a) $2\tan^2 t + 9\tan t + 3 = 0;$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

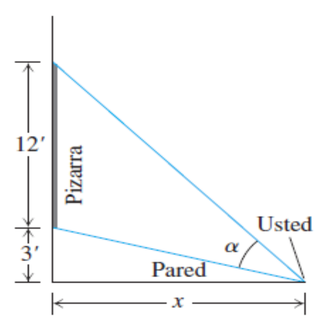
b) $3\sin^2 t + 7\sin t + 3 = 0;$ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

16.

En un salón de clases, te encuentras sentado junto a una pared, mirando al pizarrón que se encuentra al frente. Éste mide 12 pies de largo y empieza a 3 pies de la pared que está junto a ti. Demuestra que el ángulo de visión es

$$\alpha = \cot^{-1}\frac{x}{15} - \cot^{-1}\frac{x}{3}$$

si te encuentras a x pies de la pared de enfrente



4.2. Límites de funciones Trigonométricas

En las expresiones trigonométricas que se usaran para determinar los límites de las funciones trigonométricas, se supondrá que las variables son números reales o medidas de un ángulo en radianes.

En algunas de las demostraciones de los teoremas de esta sección usaremos el teorema de compresión visto anteriormete

Teorema 3.2.5 (De Compresión (o del Sandwich)).
Sean $f(x), g(x), h(x)$ funciones, a número real.Supongamos que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en algún intevalo abierto que contenga a a, excepto posiblemente en el mismo $x = a$. Supongamos también que

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

Entonces, $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Teorema 4.2.1

$$\lim_{t\to 0} \sin t = 0$$

Demostración. Se probará primero que $\lim_{t\to 0^+} \sin t = 0$.

Como para esto solo interesan los valores positivos de t cercanos a cero, puede suponerse que $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Sea U la circunferencia unitaria con centro en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y sea A el punto $(1,0)$. Si $P(x,y)$ es el punto de U tal que el arco que va de A a P es igual a t, como se muestra en la figura 4.28, entonces la medida en radianes del ángulo AOP es t. en la figura se ve que $0 < y < t$ o como

$$y = \sin t, \qquad 0 < \sin t < t$$

En vista de que $\lim_{t\to 0^+} t = 0$, por el teorema de compresión se deduce que $\lim_{t\to 0^+} \sin t = 0$

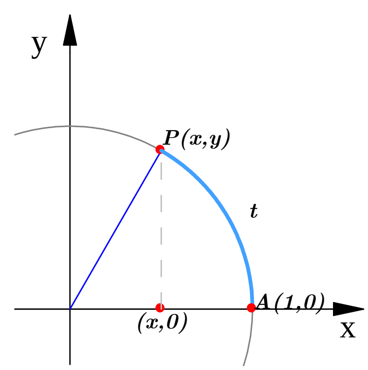


Fig. 4.28.

Para completar la demostración basta probar que $\lim_{t\to 0^-} \sin t = 0$. Si $-\frac{\pi}{2} < t < 0$, entonces $0 < -t < \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto, de la primera parte de la demostración,

$$0 < \sin(-t) < -t$$

Multiplicando por -1 la última desigualdad y usando la identidad trigonométrica $\sin(-t) = -\sin t$, se obtiene

$$t < \sin t < 0$$

como $\lim_{t\to 0^-} t = 0$, del teorema de compresión se deduce que $\lim_{t\to 0^-} \sin t = 0$, por lo tanto $\lim_{t\to 0} \sin t = 0$ ■

Teorema 4.2.2

$$\lim_{t\to 0} \cos t = 1$$

Demostración. Debido a que $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, resulta que $\cos t = \pm\sqrt{1-\sin^2 t}$. Si $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, entocnes $\cos t$ es positivo y por lo tanto $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \cos t &= \lim_{t\to 0} \sqrt{1-\sin^2 t}\\ &= \sqrt{\lim_{t\to 0}\left(1-\sin^2 t\right)}\\ &= \sqrt{1-0}\\ &= 1\end{aligned}$$

■

Teorema 4.2.3 (Límites de las funciones trigonométricas) *Para todo número real a en el dominio de la función*

$$\lim_{t\to a} \sin t = \sin a \qquad \lim_{t\to a} \cos t = \cos a$$
$$\lim_{t\to a} \tan t = \tan a \qquad \lim_{t\to a} \cot t = \cot a$$
$$\lim_{t\to a} \sec t = \sec a \qquad \lim_{t\to a} \csc t = \csc a$$

Ejemplo 4.2.1 *Encuentre* $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^2\cos t}{t+1}$

Solución.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2\cos t}{t+1} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^2}{t+1}\cos t\right) = \left(\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t+1}\right)\left(\lim_{t\to 0}\cos t\right) = 0\,(1) = 0$$

■

Teorema 4.2.4 (Área de un sector circular) *Si θ es el valor en radianes de un ángulo central de una circunferencia de radio r, entonces el área A del sector circular determinado por θ es*

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

Teorema 4.2.5 (C)

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Demostración. Si $0 < t < \frac{\pi}{2}$, se tiene la situación ilustrada en la figura 4.2, done $P\,(x, y)$ es el punto de la circunferencia unitaria U tal que el arco que va del punto A al punto P es igual a t, y M es el punto $(x, 0)$.

Si A_1 es el área del triángulo AOP, A_2 el área del sector circular AOP y A_3 el área del triángulo AOQ, entonces

$$A_1 < A_2 < A_3$$

Usando la fórmula para el área del un triángulo y el teorema del área de un sector circular, se obtiene

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}(1)\,d(M,P) = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\sin t \\ A_2 &= \frac{1}{2}(1)^2 t = \frac{1}{2}t \\ A_3 &= \frac{1}{2}(1)\,d(A,Q) = \frac{1}{2}\tan t \end{aligned}$$

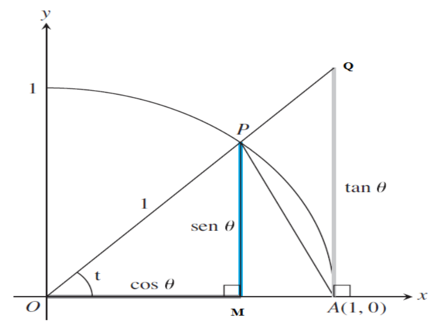


Fig. 4.28.

por lo tanto

$$\frac{1}{2}\sin t < \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\tan t$$

usando la identidad $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ y dividiendo entre $\frac{1}{2}\sin t$, se obtiene

$$1 < \frac{t}{\sin t} < \frac{1}{\cos t}$$

o bien

$$1 > \frac{\sin t}{t} > \cos t \tag{4.2.1}$$

Si $-\frac{\pi}{2} < t < 0$, entonces $0 < -t < \frac{\pi}{2}$ y de los resultados ya establecidos,

$$1 > \frac{\sin(-t)}{t} > \cos(-t)$$

Como $\sin(-t) = -\sin t$ y $\cos(-t) = \cos t$, esta igualdad se reduce a 4.2.1. Esto demuestra que 4.2.1 también se satisfce para $-\frac{\pi}{2} < t < 0$, y por lo tanto, para todo t en el intervalo abierto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, excepto $t = 0$. Como $\lim\limits_{t\to 0}\cos t = 1$ y $\frac{\sin t}{t}$ está siempre entre $\cos t$ y 1, del teorema de compresión se deduce que:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

■

Teorema 4.2.6

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} = 0$$

Demostración. Se puede cambiar la forma de $\dfrac{1-\cos t}{t}$ como sigue

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos t}{t} &= \frac{1-\cos t}{t}\cdot\frac{1+\cos t}{1+\cos t}\\
&= \frac{1-\cos^2 t}{t\,(1+\cos t)}\\
&= \frac{\sin^2 t}{t\,(1+\cos t)}\\
&= \frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin t}{1+\cos t}
\end{aligned}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)\\
&= \left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)\\
&= 1\left(\frac{0}{1+0}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.2.2 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$

Solución. *No es posible aplicar directamente el teorema 4.2.5 porque la expresión dada no está en la forma* $\frac{\sin t}{t}$. *Sin embargo, podemos llegar a ella haciendo las siguientes manipulaciones algebraicas:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin 5x}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{5}\cdot\frac{1}{2}\frac{\sin 5x}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\right)\\
&= \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}
\end{aligned}$$

De la definición de límite se deduce que $x\to 0$ *se puede sustituir por* $5x\to 0$. *Por lo tanto, aplicando el teorema 4.2.5 con* $t=5x$, *obtenemos que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x} &= \frac{5}{2}(1)\\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.2.3 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2x}$

Solución. *Usando el hecho de que* $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0} \cos x}\right) \\
&= \frac{1}{2}(1)(1) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 4.2.4 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x+1-\cos x}{3x}$

Solución. *Separamos términos*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2x+1-\cos x}{3x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{3x}+\frac{1-\cos x}{3x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)\\
&= \frac{2}{3}+\frac{1}{3}(0)=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.2.5 *Probar que* $y=\sin\frac{1}{x}$ *no tiene límite cuando* x *se aproxima a cero por cualquier lado (fig. 4.29)*

Solución.

Cuando x *se aproxima a cero, su recíproco,* $\frac{1}{x}$ *, aumenta sin cota y los valores de* $\sin\frac{1}{x}$ *se repiten periódicamente entre* -1 *y* 1*. No hay un solo número* L *al que los valores de la función estén suficientemente cercanos cuando* x *se aproxima a cero. Esto es cierto aún cuando restrinjamos* x *a valores positivos o a valores negativos. La función no tiene límites laterales izquierdo o derecho en* $x=0$.

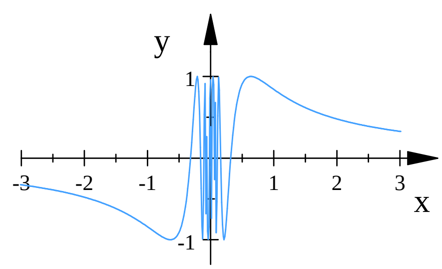


Fig. 4.29.

. ■

Ejemplo 4.2.6 *Demuestre que* $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0$

Solución. *No podemos aplicar la regla del producto ya que como se demostro en el ejercicio anterior* $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ *no existe.*

sin embargo como $\quad -1\le \sin\frac{1}{x}\le 1 \quad$ *multiplicamos por* x^2 *(figura 4.30)*

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

como $\quad \lim\limits_{x \to 0} \left(-x^2\right) = 0 \qquad$ *y* $\qquad \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

entonces por el teorema de compresión se obtiene

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

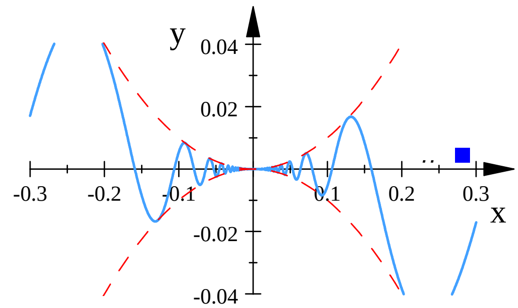


Fig. 4.30.

Ejemplo 4.2.7 *Encontrar* $\lim\limits_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x}$

Solución.

Introducimos una nueva variable, $t = \frac{1}{x}$. *De acuerdo con el ejemplo* 6, *sabemos que* $t \to 0^+$ *cuando* $x \to \infty$, *(figura 4.31) Por lo tanto,*

$$\lim_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \to 0^+} \sin t = 0$$

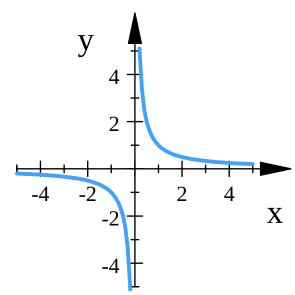


Fig. 4.31.

. ■

Ejemplo 4.2.8 *Usar el teorema de compresión para encontrar la asíntota horizontal de la curva*

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

Solución. *Estamos interesados en lo que ocurra cuando* $x \to \pm\infty$. *Como*

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

y como

$$\lim_{x \to \pm\infty} 0 = 0 \qquad y \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

de acuerdo con el teorema de compresión (el teorema de compresión tambien se cumple para límites cuando $x \to \pm\infty$*) tenemos que*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

En consecuencia,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2+\frac{\sin x}{x}\right)=2+0=2$$

y la recta $y=2$ *es una asíntota horizontal de la curva, tanto a la izquierda como a la derecha. (figura 4.32).* ■

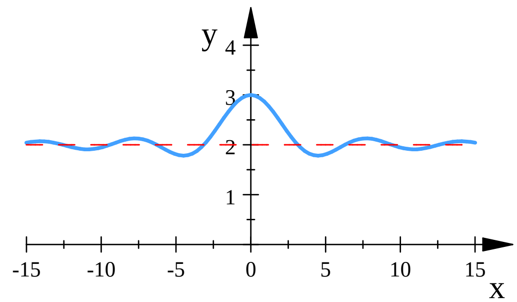


Fig. 4.32.

Ejercicios 4.2

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Encuentra los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+\dfrac{\cos 5x}{10000}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\dfrac{1}{\sin x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 4x}{x}$

f) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta+\tan\theta}$

g) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos 3t}{t}$

h) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\sin t}{t^2+1}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}$

j) $\lim\limits_{\theta\to\infty}\dfrac{\cos\theta}{3\theta}$

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x+\sin x}{x+\cos x}$

2. Demuestra la igualdad del límite para todos los números reales a y b diferentes de cero

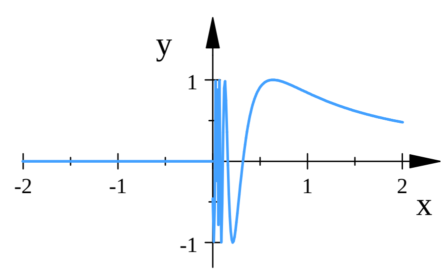
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

3. Sea $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\leq 0\\ \sin\frac{1}{x} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$

a) ¿ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es?, Si su respuesta es negativa, explique porque?

b) ¿ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es?, Si su respuesta es negativa, explique porque?

c) ¿$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es?, Si su respuesta es negativa, explique porque?



Evaluación 13

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Encuentra los valores de las 6 funciones trigonométricas de θ si: $\cot\theta = -\frac{3}{2}$

2. Dibuja la gráfica de la función $y = -4\sin x$

3. Para $f(t) = \cos t, \qquad g(t) = \frac{t}{4}$. Encuentra $f(g(\pi))$

4. Calcula el valor exacto de $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2} + \operatorname{arc}\cos 0\right)$

5. Dado que $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$, determina $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sec\alpha$

6. Evalúa los siguientes límites si es que existen

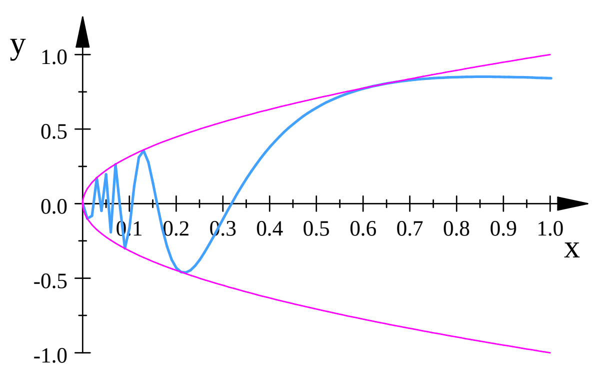
a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}$ c) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 3t}{t}$

7. Sea $f(x) = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$

a) ¿ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es?, Si su respuesta es negativa, explique porque?

b) ¿ $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es?, Si su respuesta es negativa, explique porque?

c) ¿$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ existe? Si es así, ¿cuál es?, Si su respuesta es negativa, explique porque?



4.3. Continuidad de funciones trigonométricas

Las propiedades de las funciones continuas son

Propieadades de las funciones continuas.
Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un punto $x = a$, y k es una constante distinta de cero entonces

1. kf es continua en a
2. $f + g$ es continua en a
3. $f - g$ es continua en a
4. fg es continua en a
5. $\dfrac{f}{g} = f/g$ es continua en a. Siempre y cuando $g(a) \neq 0$
6. $f^{r/s}$ es continua en a.Siempre y cuando esté definida en un intervalo abierto que contenga a a, donde r y s son enteros.

Teorema 3.3.2 (Composición de funciones continuas). Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces:

$$g \circ f = g(f(x)) \qquad \text{es continua en } a$$

Teorema 4.3.1 (Continuidad de funciones trigonométricas) *Las funciones seno y coseno son continuas en todo número real a. Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, así como sus inversas son continuas en todo número real a en sus dominios.*

Demostración. El teorema 4.2.3 dice ue para todo número real a en el dominio de la función

$$\begin{aligned} \lim_{t \to a} \sin t &= \sin a \\ \lim_{t \to a} \cos t &= \cos a \end{aligned}$$

y así sucesivamente para las seis funciones trigonométricas.

Por lo tanto las funciones trigonométricas son continuas en cada número real en sus respectivos dominios.

■

Ejemplo 4.3.1 (Continuidad en puntos del dominio) *Prueba que la función* $y = \left|\dfrac{x \sin x}{x^2+2}\right|$ *es continua en todos los puntos de su dominio*

Solución.

Debido a que la función seno es continua en todos los puntos de su dominio, el término del numerador $x \sin x$ *es el producto de funciones continuas, y el término del denominador* $x^2 + 2$ *es una función polinomial positiva en todos sus puntos.*
Así la función $y = \left|\dfrac{x \sin x}{x^2+2}\right|$ *es continua ya que es una composición de un cociente de funciones continuas con la función continua valor absoluto. (figura 4.33). ([8]. p. 129)*

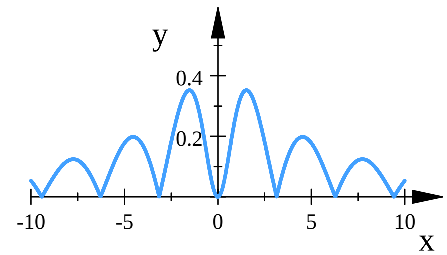


Fig. 4.33. $y = \left|\dfrac{x \sin x}{x^2+2}\right|$

. ■

Ejemplo 4.3.2 (Discontinuidad removible) *Analiza la continuidad de la función* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, *Extiende el dominio de la función para que sea continua en toda la recta real.*

Solución. *El numerador es continuo para todo número real, el denominador tambien es continuo, por lo tanto para cualquier* $x \neq 0$ *la función es continua.*

Además

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Por lo que es posible extender el dominio de la función para incluir el punto $x = 0$. *Definimos*

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \textit{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \textit{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Así

$$\lim_{x \to 0} F(x) = 1 \qquad \textit{y} \qquad F(0) = 1$$

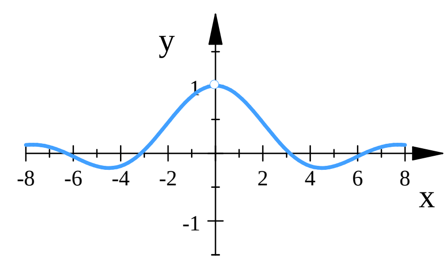


Fig. 4.34. $F(x)$

. ■

Ejemplo 4.3.3 *Determine todos los puntos de discontinuidad de* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x(1-x)}$ *para* $x \neq 0, 1$

Solución. *El numerador es continuo en todo número real, y* $x(1-x)$ *es continuo en todo número real, pero cuando* $x = 0$ *o* $x = 1$ *el denominador es cero, por tanto* f *es continua en todo número real excepto* $x = 0$ *y* $x = 1$*,*

Como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x(1-x)} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1-x}\right)\\
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}\right)\\
&= (1)(1)\\
&= 1
\end{aligned}$$

podriamos definir $f(0) = 1$ *y allí, la función sería continua. Por lo que* $x = 0$ *es una discontinuidad removible.*

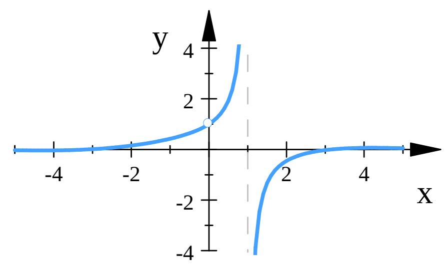


Fig. 4.35. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x(1-x)}$

Además como

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin x}{x(1-x)} = -\infty \qquad y \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{\sin x}{x(1-x)} = \infty$$

no existe forma de definir $f(1)$ *para hacer que* f *sea continua en* $x = 1$*. Por lo tanto,* $x = 1$ *es una discontinuidad no removible. (figura 4.35). ([4]. p.85).* ■

Ejemplo 4.3.4 (Continuidad en un intervalo) *Describe el intervalo donde es continua la función*

$$f(x) = \tan x$$

Solución.

La función $f(x) = \tan x$ *no está definida en:*

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ *donde* n *es un entero*

En todos los demás puntos es continua. De tal modo, $f(x) = \tan x$ *es continua en todos los intervalos abiertos*

$$\ldots, \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \ldots$$

La gráfica se muestra en la figura 4.36.

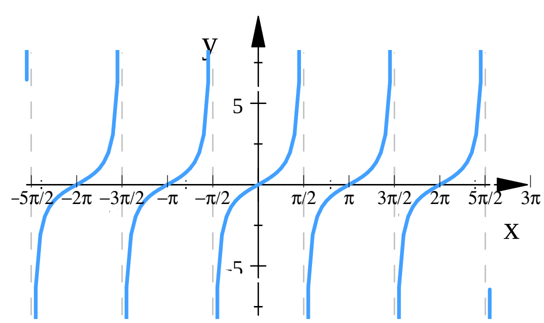


Fig. 4.36 $y = \tan x$

([5]. p. 76) ■

Ejemplo 4.3.5 (Continuidad en un intevalo) *Determine los intervalos donde la función*

$$g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \textit{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua

Solución.

Puesto que tanto $f = \frac{1}{x}$ *es continua en* $x \neq 0$, *y* $h = \sin x$ *es continua para todo número real, la composición* $h(f(x)) = \sin\frac{1}{x}$ *es continua en todos los números reales, excepto en* $x = 0$.

Por otra parte $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ *no existe, por lo tanto* $g(x)$ *no es continua en* $x = 0$.

La función $g(x)$ *es continua en los intervalos* $(-\infty, 0)$ *y* $(0, \infty)$

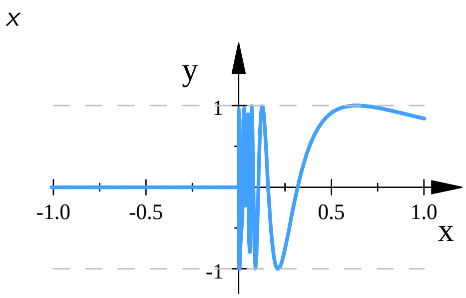


Fig. 4.36. $g(x)$

. ■

Ejemplo 4.3.6 *Determine los intervalos donde la función*

$$h(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \textit{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua

Solución.

En este caso aunque la función $\sin\frac{1}{x}$ *oscila demasiado cerca de cero, estas oscilaciones están amortiguadas por el factor* x. *Si aplicamos el teorema de compresión, se obtiene*

$$-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|, \qquad x \neq 0$$

y se puede concluir que

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

de tal manera, $h(x)$ *es continua en toda la recta real.*

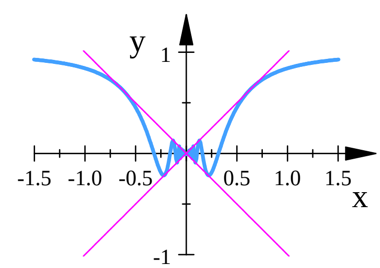


Fig. 4.36.

([5]. p. 76). ■

Ejercicios 4.3

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. ¿En qué puntos son continuas las siguientes funciones?

a) $y = |x-1| + \sin x$

b) $y = \dfrac{\cos x}{x}$

c) $y = \csc 2x$

d) $y = \dfrac{x \tan x}{x^2+1}$

2. Encuentra los límites de los siguientes ejercicios. ¿Las funciones son continuas en el punto en que se aproxima?

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \sin(x - \sin x)$

b) $\lim\limits_{y\to 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$

c) $\lim\limits_{t\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{19 - 3\sec 2t}}\right)$

d) $\lim\limits_{t\to 0} \tan\left(\frac{\pi}{4}\cos\left(\sin x^{1/3}\right)\right)$

4.4. Derivada de Funciones Trigonométricas

4.4.1. Reglas básicas de derivación

Es importante recordar que cuando se habla de la función f definida para todos los números reales x por $f(x) = \sin x$, se entiende que $\sin x$ significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es x. Se cumple una convención similar para las demás funciones trigonométricas.

Teorema 4.4.1 (Derivada de funciones trigonométricas) .

- $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
- $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
- $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

.

Demostración. Sea $f(x) = \sin x$. Si $f'(x)$ existe, entonces

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Usando la identidad

$$\sin(\varphi + \theta) = \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta$$

tenemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) \\
&= \left(\lim_{h \to 0} \sin x \right) \left(\lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} \right) + \left(\lim_{h \to 0} \cos x \right) \left(\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \right)
\end{aligned}$$

como

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} = 0 \qquad y \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 0$$

entonces

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\lim_{h \to 0} \sin x \right)(0) + \left(\lim_{h \to 0} \cos x \right)(1) \\
&= \lim_{h \to 0} \cos x \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$$

Para obtener la derivada de la función coseno se toma $f(x) = \cos x$. En este caso,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

usando la identidad

$$\cos(\varphi + \theta) = \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x\sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\cos x\frac{(\cos h - 1)}{h} - \sin x\frac{\sin h}{h}\right) \\
&= \left(\lim_{h\to 0}\cos x\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h - 1)}{h}\right) - \left(\lim_{h\to 0}\sin x\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right)
\end{aligned}$$

como

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h - 1)}{h} = 0 \qquad y \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 0$$

entonces

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\lim_{h\to 0}\cos x\right)(0) - \left(\lim_{h\to 0}\sin x\right)(1) \\
&= \lim_{h\to 0}\sin x \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

Para hallar la derivada de la función tangente se utiliza la identidad fundamental

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

y se aplica la regla del cociente como sigue

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\
&= \frac{\cos x\left(\frac{d}{dx}\sin x\right) - \sin x\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = -\sec^2 x}$$

Para la función secante hacemos $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ y derivamos usando la regla del cociente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sec x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) \\
&= \frac{\cos x\left(\frac{d}{dx}1\right) - (1)\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x\,(0) - (1)\,(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \sec x \tan x
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec x \tan x}$$

■

Ejemplo 4.4.1 *Encuentra la derivada de* $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

Solución. *Usando la regla del cociente*

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(1+\cos x)\left(\frac{d}{dx}\sin x\right) - (\sin x)\left(\frac{d}{dx}[1+\cos x]\right)}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{(1+\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos^2 x + \cos x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) + \cos x}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{1}{1+\cos x}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.4.2 *Encuentra la derivada de* $y = \sec x \tan x$

Solución. *usando la regla del producto*

$$\begin{aligned}
y' &= \sec x\left(\frac{d}{dx}\tan x\right) + \tan x\left(\frac{d}{dx}\sec x\right) \\
&= \sec x\left(\sec^2 x\right) + \tan x\,(\sec x \tan x) \\
&= \sec x\left(\sec^2 x + \tan^2 x\right)
\end{aligned}$$

Si usamos la identidad $1+\tan^2 x = \sec^2 x$*, podriamos escribir esté resultado de diversas formas.* ■

Ejemplo 4.4.3 *Encontrar la derivada de* $y = \sec x \cot x$

Solución. *Podriamos usar la regla del producto como en el ejemplo anterior, sin embargo, es más fácil usar una identidad para obtener*

$$y = \sec x \cot x = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{1}{\sin x} = \csc x$$

así

$$y' = \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

■

([3]. p. $414-417$)

4.4.2. Regla de la cadena

Las reglas de derivación de funciones trigonométricas usando la regla de la cadena son:

Teorema 4.4.2 (Derivada de funciones trigonométricas) *Sea* $u = g(x)$, *donde* g *es una función derivable y* x *se restringe a los valores para los que la función trigonométrica está definida, entonces*

- $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$

.

Ejemplo 4.4.4 *Encuentra la derivada de* $y = \cos 5x^3$

Solución. *En este caso* $u = 5x^3$ *así usando la regla de la cadena*

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\left(\cos 5x^3\right) \\ &= \cos 5x^3 \cdot \frac{d}{dx}\left(5x^3\right) \\ &= \left(-\sin 5x^3\right)\left(15x^2\right) \\ &= -15x^2 \sin 5x^3 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.4.5 *Encuentra la derivada de* $f(x) = \tan^3 4x$

Solución. *Observe que* $f(x) = \tan^3 4x = (\tan 4x)^3$, *derivamos usando la regla* $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ *donde* $u = \tan 4x$ *y* $n = 3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(\tan 4x)^3 \\ &= 3(\tan 4x)^2 \cdot \frac{d}{dx}(\tan 4x) \\ &= 3(\tan 4x)^2 \left(\sec^2 4x\right)\left(\frac{d}{dx}4x\right) \\ &= 3(\tan 4x)^2 \left(\sec^2 4x\right)(4) \\ &= 12\sec^2 4x \tan^2 4x \end{aligned}$$

([3], p. 417) ■

Ejemplo 4.4.6 *Encontrar la derivada de* $f(t) = \sin(1 - \sec 2t)$

Solución. *Observe que esta es una composición de tres funciones, si hacemos* $g(t) = \sin(1-t)$, $h(t) = \sec t$, $u(t) = 2t$, *podemos escribir a* $f(t)$ *como*

$$\begin{aligned} f(t) &= g \circ h \circ u \\ &= g(h(u)) = g(h(2t)) = g(\sec 2t) = \sin(1 - \sec 2t) \end{aligned}$$

Para encontrar la derivada usamos la regla de la cadena

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt}\sin(1 - \sec 2t) \\ &= \cos(1 - \sec 2t)\frac{d}{dt}(1 - \sec 2t) \\ &= \cos(1 - \sec 2t)\left(0 - \sec 2t \tan 2t \cdot \frac{d}{dt}2t\right) \\ &= \cos(1 - \sec 2t)(-\sec 2t \tan 2t \cdot 2) \\ &= -2\sec 2t \tan 2t \cos(1 - \sec 2t) \end{aligned}$$

■

4.4.3. Derivada de las funciones trigonométricas inversas

En el siguiente teorema se presentan las reglas para derivar funciones trigonométricas inversas.

Teorema 4.4.3 (Derivada de las funciontes trigonométricas inversas) .

- $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad |x| > 1$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad |x| > 1$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

.

Demostración. Sea $y = \sin^{-1} x$ y $\sin y = x$

estas ecuaciones son equivalentes si $-1 < x < 1$ y $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

derivando $\sin y = x$ implicitamente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin y &= \frac{d}{dx}x \\
\cos y\frac{dy}{dx} &= 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y}
\end{aligned}$$

como $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $\cos y$ es positivo y por consiguiente

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

Entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin^{-1} y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

para $|x| < 1$. La función inversa del seno no es derivable en ± 1. Esto se puede evidenciar gráficmente ya que en los extremos de la gráfica las rectas tangentes son verticales.

Para encontrar la derivada de la función inversa del coseno, hacemos

$$y = \cos^{-1} x \qquad \text{y} \qquad \cos y = x$$

para $|x| < 1$ y $0 < y < \pi$. Derivando $\cos y = x$ implicitamente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos y &= \frac{d}{dx}x \\
-\sin y\frac{dy}{dx} &= 1 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sin y}
\end{aligned}$$

como $0 < y < \pi$, $\sin y$ es positivo y por consiguiente

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx} \cos^{-1} y = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

para $|x| < 1$.

Para demostrar que la función inversa de la tangente es derivable en todos los números reales, Consideramos las ecuaciones equivalentes

$$y = \tan^{-1} x \qquad \text{y} \qquad \tan y = x$$

para $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Derivando $\tan y = x$ implícitamente, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan y &= \frac{d}{dx} x \\ \sec^2 y \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} \end{aligned}$$

usando el hecho de que $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, se obtiene

$$\boxed{\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{x^2 + 1}}$$

Para demostrar la derivada de la secante inversa consideramos las ecuaciones

$$y = \sec^{-1} x \qquad \text{y} \qquad \sec y = x$$

para y en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ o en $(\pi, 3\pi/2)$ y derivando $\sec y = x$ implícitamente, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sec y &= \frac{d}{dx} x \\ \sec y \tan y \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec y \tan y} \end{aligned}$$

aplicando el hecho de que $\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$se obtiene

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}}$$

para $|x| > 1$. La función inversa de la secante no es derivable en $x = \pm 1$. ■

Si usamos la regla de la cadena, la derivada de las funciones trigonométricas inversas es

Teorema 4.4.4 (Derivada de las funciontes trigonométricas inversas) *Sea $u = g(x)$, donde g es una función derivable y x se restringe a los valores para los que la función trigonométrica inversa está definida, entonces*

- $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1} u\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\csc^{-1} u\right) = -\dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\cos^{-1} u\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\sec^{-1} u\right) = \dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\tan^{-1} u\right) = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\cot^{-1} u\right) = -\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

.

Ejemplo 4.4.7 *Evaluar* $\frac{dy}{dx}$ *para* $y = \sin^{-1} 3x - \cos^{-1} 3x$

Solución. *Aplicando la regla de la cadena*

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx}\left(\sin^{-1} 3x - \cos^{-1} 3x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}(3) - \frac{-1}{\sqrt{1-(3x)^2}}(3) \\ &= \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{1-9x^2}} \end{aligned}$$

([3]. p. 440) ■

Ejemplo 4.4.8 *Evaluar* $f'(x)$ *para* $f(x) = \tan^{-1} x^2$

Solución. *Usando la rega de la cadena*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x^2\right) \\ &= \frac{1}{1+(x^2)^2}(2x) \\ &= \frac{2x}{1+x^4} \end{aligned}$$

([3]. p. 440) ■

Ejemplo 4.4.9 (Derivación implicita) *Encuentre* $y'(x)$ *si* $x^2 = y^2 + \tan xy$

Solución. *Derivando ambos lados de la expresión*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^2\right) &= \frac{d}{dx}\left(y^2 + \tan xy\right) \\
2x &= 2y\frac{dy}{dx} + \sec^2 xy \left(\frac{d}{dx}xy\right) \\
2x &= 2y\frac{dy}{dx} + x\sec^2 xy\frac{dy}{dx} \\
2x &= \frac{dy}{dx}\left(2y + x\sec^2 xy\right) \\
\frac{2x}{2y + x\sec^2 xy} &= \frac{dy}{dx}
\end{aligned}
$$

luego $y'(x) = \dfrac{2x}{2y + x\sec^2 xy}$ ■

Ejercicios 4.4

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.
Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Encuentra la derivada de las siguientes funciones

a) $y = \sin x + \cos x$

b) $y = x^2 \cos x$

c) $y = 2\cot x - \sqrt{x}\sec x$

d) $y = \dfrac{\tan x}{x}$

e) $y = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$

f) $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$

g) $y = \dfrac{\cot x}{1 + \cot x}$

h) $s = \tan t - t$

i) $y = cos^3 x$

j) $y = \dfrac{x \sin x}{x^2 + 1}$

k) $y = \sqrt{\sin x}$

l) $y = \cos^2 \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

m) $y = x^2 \sin x$

n) $y = \sec^{-1}(2s + 1)$

ñ) $y = s\sqrt{1 - s^2} + \cos^{-1} s$

o) $y = \sin^{-1}(1 - t)$

p) $y = \cot^{-1}\sqrt{t - 1}$

q) $y = \cot^{-1}\frac{1}{x} - \tan^{-1} x$

r) $y = x\sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$

2. Usa la derivación implicita para encontrar $y' = \frac{dy}{dx}$ en las siguientes expresiones

a) $\dfrac{\sin^3(xy)}{\cos^3(xy)} + \sin(xy) + 3 = 0$

b) $y^2 = x^2 + \sin xy$

c) $x = \tan y$

d) $x + \tan(xy) = 0$

e) $y \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - xy$

3. Encuentra las constantes A y B tales que la función $y = A\sin x + B\cos x$ satisface la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = \sin x$

4. Si n es un entero positivo, prueba que $\frac{d}{dx}(\sin^n x \cos nx) = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x$

5. Encuentra una fórmula para la derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que sea semejante a la del ejercicio anterior

6. Si $y = \cos(\tan x)$. Escribe la función como una composición en la forma $f(g(x))$. (Idenifica la función interior $u = g(x)$ y la exerior $t = f(u)$. Luego encuentra $\frac{dy}{dx}$

4.5. Aplicaciones de derivada

4.5.1. Máximos y mínimos

Usaremos los criterios para encontrar máximos y mínimos vistos en los capítulos anteriores

Ejemplo 4.5.1 *Sea* $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$. *Calcular los máximos y mínimos locales y trazar la gráfica de* f *en el intervalo* $[0, 2\pi]$

Solución. *Derivamos e igualamos a cero para encontrar los puntos críticos*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos x + (-\sin 2x)(2) \\ &= 2\cos x - 2\sin 2x \qquad \textit{usamos la identidad } \sin 2x = 2\sin x\cos x \\ &= 2\cos x - 4\sin x\cos x \\ &= 2\cos x(1 - 2\sin x) \end{aligned}$$

La derivada existe para todo x *, y*

$$\begin{aligned} 2\cos x(1 - 2\sin x) &= 0 \\ 2\cos x &= 0 \qquad o \qquad 1 - 2\sin x = 0 \\ \cos x &= 0 \qquad o \qquad \sin x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

por lo tanto los puntos críticos de f *en el intervalo* $[0, 2\pi]$ *son:*

$$x = \frac{\pi}{6}, \qquad x = \frac{5\pi}{6}, \qquad x = \frac{\pi}{2}, \qquad x = \frac{3\pi}{2}$$

La segunda derivada de f *es*

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(2\cos x(1 - 2\sin x)) \\ &= 2\cos x\frac{d}{dx}(1 - 2\sin x) + (1 - 2\sin x)\frac{d}{dx}(2\cos x) \\ &= 2\cos x(-2\cos x) + (1 - 2\sin x)(-2\sin x) \\ &= -4\cos^2 x - 2\sin x + 4\sin^2 x \\ &= -4\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) - 2\sin x \qquad \textit{usamos la identidad } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ f''(x) &= -4\cos 2x - 2\sin x \end{aligned}$$

evaluamos en los puntos críticos

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4\cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3 < 0$ *por lo tanto* $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ *es un máximo*

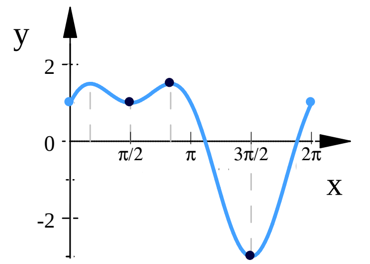
$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -4\cos 2\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3 < 0$ *por lo tanto* $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ *es un máximo*

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0$ *por lo tanto* $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ *es un mínimo*

$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -4\cos 2\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 6 > 0$ *por lo tanto* $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$ *es un mínimo*

Dibujamos la gráfica de la función

.



. ■

Ejemplo 4.5.2 (Alcance máximo) *Cuando se ignora la resistencia del aire, el alcance horizontal R de un proyectil está dado por*

$$R(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

donde v_0 es la velocidad inicial constante, g es la aceleración de la gravedad y θ es el ángulo de elevación o salida. Encuentre el alcance máximo del proyectil

Solución. *Como modelo físico del problema podemos imaginar que el proyectil es una bala de cañón. (figura 4.37). Para ángulos θ mayores que la bala de cañón mostrada en la figura debe salir hacia atrás. Por tanto, tiene sentido físico restringir la función R al intervalo cerrado $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.*

Buscamos los puntos críticos para encontrar el máximo 2

$$\begin{aligned} R'(\theta) &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_0^2}{g}\sin\theta\right) \\ &= 2\frac{v_0^2}{g}\cos 2\theta \end{aligned}$$

si $$2\frac{v_0^2}{g}\cos 2\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

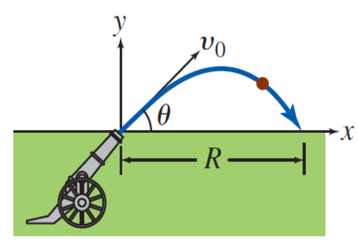


Fig. 4.37.

evaluamos en el punto crítico y en los extremos

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta \\ R\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\frac{\pi}{4} = \frac{v_0^2}{g} \\ R(0) &= \frac{v_0^2}{g}\sin 0 = 0 \\ R\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

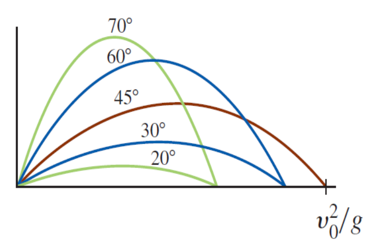


Fig. 4.38.

Puesto que $R(\theta)$ es continua sobre el intervalo cerrado $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, estos valores indican que el alcance máximo es $R\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0^2}{g}$. En otras palabras, para lograr la distancia máxima, el proyectil debe ser lanzado a un ángulo de $45°$ con respecto a la horizontal. ■

4.5.2. Ecuación de la recta tangente

Ecuación de la recta tangente a una curva.

Si queremos encontrar la ecuación de la recta tangente de la función $f(x)$, en algún punto $P(x_0, y_0)$. La ecuación tiene la forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

donde $m = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, siempre que el límite exista

Ejemplo 4.5.3 *Determinar una ecuación para la recta tangente a la gráfica de* $y = \cot^{-1} x$ *en* $x = -1$

Solución. *primero observamos usando la identidad* $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$ *tenemos:*

$$\begin{aligned} \cot^{-1}(-1) &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(-1) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

La pendiente de la recta tangente es

$$m = \frac{d}{dx} \cot^{-1} x = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

en $x = -1$

$$m = -\frac{1}{(-1)^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es

$$\begin{aligned} y - \frac{3\pi}{4} &= \frac{1}{2}(x - (-1)) \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

([8]. p. 528) ■

Ejemplo 4.5.4 *Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva* $y = \sin 5x$ *en el punto donde* $x = \frac{\pi}{3}$.

Solución.

$$\begin{aligned} m = y' &= \frac{d}{dx} \sin 5x \\ &= (\cos 5x)(5) \\ &= 5 \cos 5x \end{aligned}$$

$$\textit{si} \qquad x = \frac{\pi}{3}, \qquad \Longrightarrow \qquad m = 5 \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{5}{2}$$

■

Ejemplo 4.5.5 *Demostrar que la pendiente de toda recta tangente a la curva* $y = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$ *es positiva.*

Solución. *La pendiente de la recta tangente a y en cualquier punto x es:*

$$\begin{aligned} m = y' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-2x)^3}\right) \\ &= -3(1-2x)^{-4}(-2) \\ &= \frac{6}{(1-2x)^4} \end{aligned}$$

$m = \dfrac{6}{(1-2x)^4}$ *es el cociente de dos números positivos, por lo tanto para cualquier valor de x, m es positiva. ([8]. p. 195)* ■

Ejemplo 4.5.6 *Encuentre la recta tangente y la recta normal a la curva descrita por $2xy + \pi \sin y = 2\pi$ en el punto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$*

Solución. *La pendiente de la recta tangente es y', derivamos implicitamente la expresión*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(2xy + \pi \sin y) &= \frac{d}{dx}2\pi \\ 2x\frac{dy}{dx} + 2y + \pi \cos y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx}(2x + \pi \cos y) &= -2y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-2y}{2x + \pi \cos y} \end{aligned}$$

evaluando en $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2(1) + \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\pi}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{\pi}{2}x + \pi \end{aligned}$$

La recta normal es la recta ortogonal a la tangente, entonces está dada por $m_2 = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}$, *la ecuación de la recta normal es*

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{\pi}(x-1) + \frac{\pi}{2} \\ y &= \frac{2}{\pi}x + \frac{1}{2}\pi - \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

■

4.5.3. Razón de cambio y Velocidad

Retomando las definiciones vistas en capítulos anteriores

.

Posición en caida libre: $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$

Velocidad: $v(t) = s'(t)$

Aceleración: $a(t) = v'(t) = s''(t)$

Rápidez: $|v(t)|$

Ejemplo 4.5.7 *Una partícula se mueve a lo largo del eje x, de modo que su posición en cualquier instante $t \geq 0$ es $x(t) = \tan^{-1}\sqrt{t}$ ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $t = 16$?*

Solución. *La velocidad $v(t) = x'(t)$*

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt}\tan^{-1}\sqrt{t} \\ &= \frac{1}{1+\left(\sqrt{t}\right)^2} \cdot \frac{d}{dt}\sqrt{t} \\ &= \frac{1}{1+t}\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t}\,(1+t)} \end{aligned}$$

cuando $t = 16$ la velocidad es

$$v(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}\,(1+16)} = \frac{1}{136}$$

([8]. p. 526) ■

Ejemplo 4.5.8 *Un objeto se mueve a lo largo del eje x, de manera que su posición en cualquier tiempo $t \geq 0$, está dada por*

$$x(t) = \cos\left(t^2+1\right)$$

Determinar la velocidad del objeto como una función de t.

Solución. *La velocidad es $v(t) = x'(t)$, usando la regla de la cadena*

$$\begin{aligned} v(t) = x'(t) &= \frac{d}{dt}\cos\left(t^2+1\right) \\ &= -\sin\left(t^2+1\right)(2t) \\ &= -2t\sin\left(t^2+1\right) \end{aligned}$$

La velocidad es $v(t) = -2t\sin\left(t^2+1\right)$ *([8], p. 193)* ■

Ejemplo 4.5.9 *Un faro está situado en una isla pequeña a $2\,\mathrm{mi}$ de la costa. La baliza del faro gira a razón constante de 6 $grados/s$. ¿Cuán rápido se mueve el haz del faro a lo largo de la costa en un punto a $3\,\mathrm{mi}$ del punto sobre la costa que es el más próximo al faro?*

Solución. *Primero se introducen las variables θ y x como se muestra en la figura 4.39.*

Además, se cambia la información sobre θ a radianes al recordar que 1° es equivalente a $\frac{\pi}{180}$ radianes.

Así,

Dado

$$\frac{d\theta}{dt} = 6^\circ = 6\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{30}\,\mathrm{rad}$$

y debemos encontrar $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 3$

A partir de la trigonometría de un triángulo rectángulo, por la figura vemos que

$$\frac{x}{2} = \tan\theta \qquad \text{o bien,} \qquad x = 2\tan\theta$$

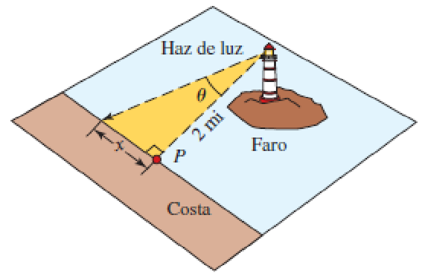


Fig. 4.39.

Al derivar la última ecuación con respecto a t y usar la razón dada obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2\tan\theta) &= 2\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} \\ &= \left(2\sec^2\theta\right)\left(\frac{\pi}{30}\right) \\ &= \frac{\pi}{15}\sec^2\theta \end{aligned}$$

En el instante en que $x = 3$, $\tan\theta = \frac{3}{2}$, de modo que por la identidad trigonométrica $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, obtenemos $\sec^2\theta = \frac{13}{4}$. Por tanto, $x'(3) = \frac{\pi}{15}\left(\frac{13}{4}\right) = \frac{13\pi}{60}$ ■

Solución. *Por lo tanto el faro se mueve con una rápidez de $\frac{13\pi}{60}\,\mathrm{mi/s}$* ■

4.5.4. Movimiento armonico simple

Las funciones seno y coseno desempeñan un papel importante en el estudio de las entidades físicas que vibran o tienen un movimiento periódico.

Definición 4.5.1 (Movimiento armónico simple) *Si un punto P se mueve sobre una recta coordenada $l$de manera que su distancia $s(t)$ al origen al tiempo t está dada por*

$$s(t) = a\cos(\omega t + b)$$

o bien

$$s(t) = a\sin(\omega t + b)$$

donde a y b son números reales arbitrarios y $\omega > 0$, entonces se dice que P está en movimiento armónico simple

El movimiento armónico simple también se puede definir como aquél en que la aceleración $a(t)$ satisface la condición

$$a(t) = -\omega^2 s(t) \qquad \text{para todo } t.$$

El movimiento armónico simple aparece en diversos tipos de movimientos odulatorios, tales como la solas formadas en el agua, ondas sonoras, ondas de radio, ondas luminosas y ondas de distorsión en los cuerpos vibrantes. En el análisis de los circuitos eléctricos en los que interviene una tensión y una corriente alternas, aparecen funciones del mismo tipo que las de la definición de movimiento armónico simple.

El movimiento que describe un objeto oscilando libremente hacia arriba y hacia abajo, en el extremo de un resorte o una cuerda elástica, es un ejemplo de movimiento armónico simple. El número $s(t)$ representa la coordenada de un punto P del cuerpo. La amplitud $|a|$ del movimiento es constante cuando no hay fuerzas de fricción que se opongan al movimiento. Cuando existe rozamiento o fricción, la amplitud de la oscilación disminuye con el tiempo y se dice que el movimiento es amortiguado.

Ejemplo 4.5.10 *Un cuerpo oscila de tal forma que su posición en el tiempo t está dada por*

$$s(t) = 10\cos\frac{\pi}{6}t$$

donde t está en segundos y $s(t)$ en centímetros. Describir el movimiento del cuerpo.

Solución. *De acuerdo con la definición 4.5.1, el movimiento es armónico simple, con*

$a = 10, \qquad b = 0, \qquad \omega = \frac{\pi}{6}.$

La amplitud a es de $10\,\mathrm{cm}$.

El periodo es $\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12\,\mathrm{s}$

La frecuencia es $\dfrac{\omega}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi} = \frac{1}{12} = \frac{1}{\textit{periodo}}$, es decir hay $\frac{1}{12}$ de oscilación cada segundo.

Analicems el movimiento durante el intervalo de tiempo $[0, 12]$. Las funciones de velocidad y aceleración están dadas por

$$\begin{aligned} v(t) = s'(t) &= \frac{d}{dt}\left(10\cos\frac{\pi}{6}t\right) \\ &= 10\left(-\sin\frac{\pi}{6}t\right)\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{5\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{d}{dt}\left(-\frac{5\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}t\right) \\ &= -\frac{5\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}t\right)\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{5}{18}\pi^2\cos\frac{\pi}{6}t \end{aligned}$$

Los puntos donde la velocidad se anula son donde $v(t) = 0$

$$\begin{aligned} v(t) = -\frac{5\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}t &= 0 \\ \sin\frac{\pi}{6}t &= 0 \\ &\Longrightarrow \qquad t = 0 \\ &\qquad\qquad t = 6 \end{aligned}$$

Los puntos donde la aceleración se anula son donde $a(t) = 0$

$$\begin{aligned} a(t) = -\frac{5}{18}\pi^2 \cos\frac{\pi}{6}t &= 0 \\ \cos\frac{\pi}{6}t &= 0 \\ \Longrightarrow \quad & t = 3 \\ & t = 9 \end{aligned}$$

Analizamos los intervalos donde el tiempo y la velocidad son distintos de cero, que son $(0,3), (3,6)$ *y* $(9,12)$

Intervalo de tiempo	*Signo de* $v(t)$	*Dirección del movimiento*	*Signo de* $a(t)$	*Comportamiento de* $v(t)$
$(0,3)$	$-$	*hacia abajo*	$-$	*Decreciente*
$(3,6)$	$-$	*hacia abajo*	$+$	*Creciente*
$(6,9)$	$+$	*hacia arriba*	$+$	*Creciente*
$(9,12)$	$+$	*hacia arriba*	$-$	*Decreciente*

Si $0 < t < 3$, *la velocidad* $v(t)$ *es negativa y decreciente; es decir,* $v(t)$ *se hace más negativa. Esto implica que la rápidez* $|v(t)|$ *es creciente.*

Si $3 < t < 6$, *la velocidad es negativa y creciente (*$v(t)$ *se hace menos negativa). En este caso la rápidez de* P *es decreciente en el intervalo de tiempo* $(3,6)$. *Se pueden hacer observaciones similares para los intervalos* $(6,9)$ *y* $(9,12)$.

El movimiento de P *se puede resumir como sigue: en* $t = 0$, $s(0) = 10$ *y* P *está* $10\,\mathrm{cm}$ *arriba del origen* O. *Luego se mueve hacia abajo ganando rápidez hasta llegar a un punto* $10\ \mathrm{cm}$ *abajo de* O, *al cabo de* $6\,\mathrm{s}$. *Entonces la dirección del movimiento se invierte y el cuerpo se mueve hacia arriba aumentando su rápidez hasta llegar a* O *en* $t = 9$, *despueés de lo cual comienza a disminuir hata llegar a su posición inicial al cabo de* $12\,\mathrm{s}$. *En ese momento la dirección del movimiento se vuelve a invertir y se repite lo mismo indefinidamente.*

La gráfica de la función es:

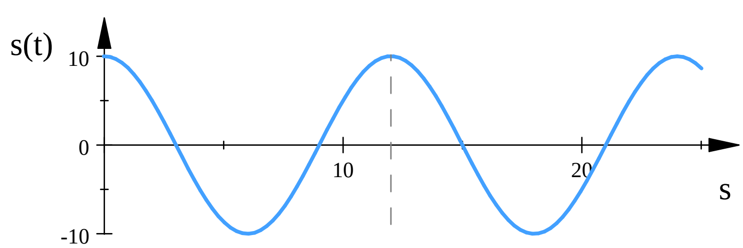


Fig. 4.40. $s(t) = 10\cos\frac{\pi}{6}t$

([3], p. 421) ■

Ejemplo 4.5.11 *([8], p. 187)*

Un objeto que cuelga de un resorte (figura 4.41) se estira 5 unidades desde su posición de reposo y se suelta en el tiempo $t = 0$ para que se mueva hacia arriba y hacia abajo. Su posición en cualquier tiempo t posterior es

$$s(t) = 5\cos t$$

¿Cuáles son su velocidad y su aceleración en el tiempo t?

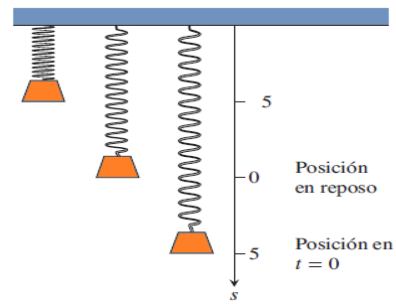
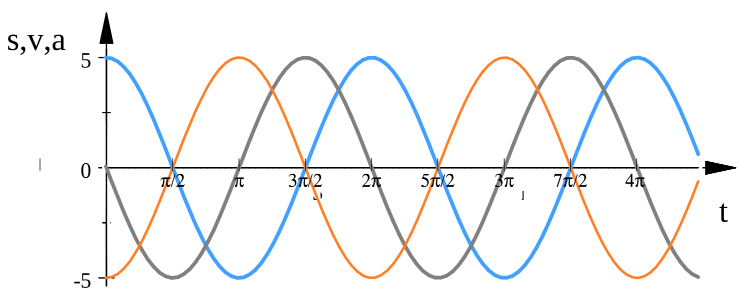


Fig. 4.41.

Solución. *Tenemos que:*

$$\begin{aligned}
Posición &: \quad s(t) = 5\cos t \\
Velocidad &: \quad v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(5\cos t) = -5\sin t \\
Aceleración &: \quad a(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}(-5\sin t) = -5\cos t
\end{aligned}$$

Observe todo lo que podemos aprender de estas ecuaciones: (la gráfica de las tres ecuaciones se muestra en la figura 4.42)



- $s(t) = 5\cos t$
- $v(t) = -5\sin t$
- $a(t) = -5\cos t$

Fig. 4.42.

■

Ejercicios 4.5

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Encuentra una ecuación de la recta tengente a la curva $y = x\cos x$ en el punto $(\pi, -\pi)$. Traza una gráfica de la función y la recta tangente en un mismo sistema de coordenadas.

2. Calcula la recta tangente y la recta normal a la curva $y = \sin x$ en el punto $P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$

3. Sea $f(x) = x - 2\sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ ¿En qué intervalo f es creciente?

4. Encuentra los máximos y mínimos de la función $f(x) = \sin 2x$

5. En los siguientes ejercicios, encuentra los valores máximo y mínimo absoluto de cada función en el intervalo dado. Después gráfica la función. Identifica en la gráfica los puntos en dónde se alcanzan los extremos absolutos e incluye sus coordendas

a) $f(\theta) = \sin\theta$, $\quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

b) $g(x) = \csc x$, $\quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$

c) Para $f(x) = \sin x + \cos x$, $\quad \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

6. Una pelota de béisbol golpeada en un ángulo θ con la horizontal, cuya velocidad inicial es v_0, tiene un alcance horizontal R determinado por $R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$ En este caso, g es una constante, la aceleración de la gravedad. Traza R en función de θ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ¿Qué ángulo produce el alcance máximo? ¿Cuál es el alcance máximo?

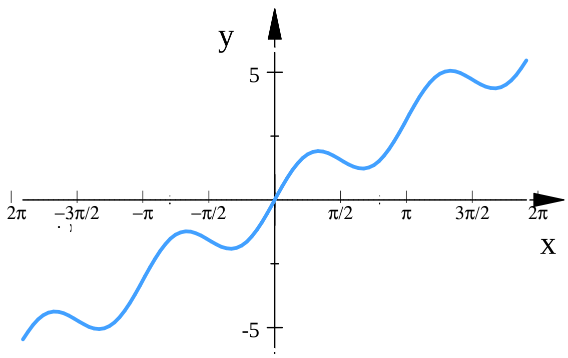
7. Cuando se dispara una flecha al aire, su alcance R se define como la distancia horizontal del arquero hasta el punto donde la flecha llega al suelo. Si el terreno es horizontal y no se toma en cuenta la resistencia del aire, se puede demostrar que $R = \dfrac{v_0\sin(2\theta)}{g}$, donde v_0 es la velocidad inicia de la flecha, g es la aceleración (constante) debida de la gravedad y θ es el ángulo de tiro sobre la horizontal, es decir $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ¿Qué ángulo de tiro maximiza a R?

8. Un bote anclado sube y baja en la superficie del mar. La distancia vertical y en pies, entre el lecho del mar y el bote, está dada como una función del tiempo t, en minutos, por $y = 15 + \sin(2\pi t)$

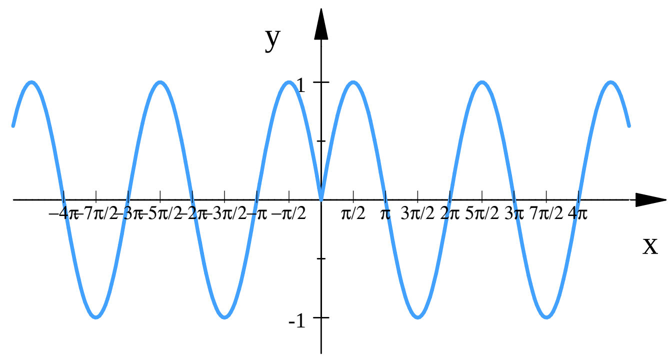
a) Encuentra la velocidad vertical, v, del bote en el tiempo t

b) Haz un dibujo aproximado de y y v respecto a t

9. En las siguientes funciones graficadas Identifica los puntos de inflexión, los máximos y mínimos locales y los intervalos en los que las funciones son cóncavas o convexas, crecientes o decrecientes.



$y = x + \sin 2x$



$y = \sin|x|$

10. En un círculo con radio de 10m

a) ¿cuál es la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de $\frac{4\pi}{5}$ radianes?

b) ¿cuál es su longitud si el ángulo central es de $110°$?

11. Se requiere construir un ángulo de $80°$ haciendo un arco en el perímetro de un disco de 12 pulgadas de diámetro, y dibujando rectas de los extremos del arco al centro del disco ¿De qué longitd debe ser el arco, redondenado a décimos de pulgada?

12. El 10 de febrero de 1990, la pleamar (marea alta) en Boston se dio a media noche. El nivel del agua en ese momento fue 9.9 pies. Después, en la bajamar, fue de 0.1 pie. Suponiendo que la siguiente pleamar se presenta exactamente a mediodía, y que la altura del agua se exprese con una curva senoide o cosenoide, deduce una formula para el nivel del agua en Boston, en función del tiempo.

13. El voltaje V de un contacto eléctrico doméstico se expresa en función del tiempo t(en segundos) como sigue: $V = V_0 \cos(120\pi t)$

a) ¿Cuál es el periodo de la oscilación?

b) ¿Qué representa V_0

c) Traza una gráfica de V en función de t.

14. Una escalera de $10ft$ de largo está apoyada en una pared vertical. Sea θ el ángulo entre la parte superior de la escalera y la pred, y x la distacia del extremo inferior de aquélla hasta la pared. Si el extremo inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared. ¿con qué rapidez cambia x con respecto a θ cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$?

15. Un hombre camina a lo largo de una senda recta a una velocidad de $4\,\mathrm{ft/s}$. Un reflector está en el piso $20\,\mathrm{ft}$ de la senda y se mantiene enfocado sobre el hombre. ¿Con qué rapidez gira el reflector cuando el hombre está a $15\,\mathrm{ft}$ del puento de la senda más cercano al reflector?

16. Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo $4cm$ más allá de su posición de reposo, para estirar el resorte, y se deja en libertad en el instante $t = 0$. (la dirección hacia abajo es positiva). Su posición en el instante t es $s = f(t) = 4\cos t$. Encuentra la velocidad y la aceleración en instante t y úsalas para analizar el movimiento del objeto.

17. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada, en un movimiento armónico simple. Su ecuación de movimiento es $x(t) = 8\sin t$ donde t está en segundos y x en centímetros

a) Encuentra la velocidad y la aceleración en el instante t

b) Encuentra la posición, la velocidad y la aceleración de la masa en el instante $t = \frac{2\pi}{3}$. ¿En qué dirección se mueve en ese instante? ¿Se acelera o desacelera?

Evaluación 14

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Para las siguientes expresiones, encuentra $y' = \frac{dy}{dx}$

a) $y = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$

b) $y = 2\cot x - \sqrt{x}\sec x$

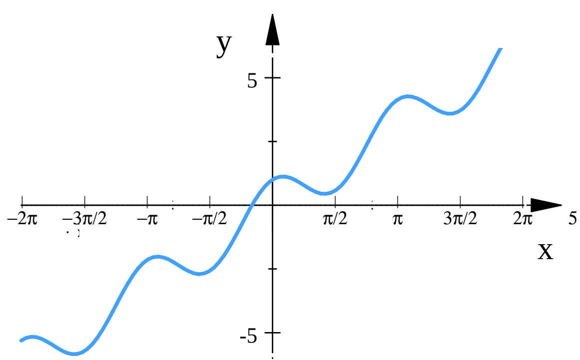
c) $y = \cot^{-1}\frac{1}{x} - \tan^{-1} x$

d) $x + \tan(xy) = 0$

2. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \sin x$ en $x = \pi$.

3. Una pelota de béisbol golpeada en un ángulo θ con la horizontal, cuya velocidad inicial es v_0, tiene un alcance horizontal R determinado por $R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$ En este caso, g es una constante, la aceleración de la gravedad. Traza R en función de θ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ¿Qué ángulo produce el alcance máximo? ¿Cuál es el alcance máximo?

4. En la gráfica de la función $y = x + \sin 2x$ Identifica los puntos de inflexión, los máximos y mínimos locales y los intervalos en los que la funciones es cóncavas o convexas, crecientes o decrecientes en $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$



$y = x + \sin 2x$

Capítulo 5

Funciones exponenciales

5.1. Definición, gráfica, dominio y rango

Hasta ahora hemos considerado funciones como $f(x) = x^n$, es decir, una función con una base variable x y una potencia o exponente constante. Ahora abordaremos funciones como $f(x) = 3^x$ con una bae constante y un exponente variable x.

Definición 5.1.1 (Función exponencial) *Si a es un número real y $a > 0$ y $a \neq 1$*[1]*, entonces una función exponencial $y = f(x)$ es una función de la forma*

$$f(x) = a^x$$

el número a se denomina base y x se denomina exponente

El domino de una función exponencial f es el conjunto de números reales, es decir el dominio de $f(x) = a^x$ es $\{x \mid -\infty \leq x \leq \infty\}$ y el rango es $(0, \infty)$

Debido a que el dominio de una función exponencial $f(x) = a^x$ es el conjunto de números reales, el exponente x puede ser un número racional o irracional. Por ejemplo, si la base $b = 3$ y el exponente x es un número racional, y entonces $x = \frac{1}{5}$ y $x = 1.4$, son

$$3^{1/5} = \sqrt[5]{3} \qquad \text{y} \qquad 3^{1.4} = 3^{14/10} = 3^{7/5} = \sqrt[5]{3^7}$$

La función $f(x) = a^x$ también está definida para todo número irracional x. El siguiente procedimiento ilustra una forma para definir un número como $3^{\sqrt{2}}$. A partir de la representación decimal $= 1.414213562...$ se observa que los números racionales

$$1, 1.4, 1.41, 1.4141, 1.41421, ...$$

[1] En 1, la base b se restringe a números positivos para garantiar que a^x sea un número real. También, $b = 1$ carece de interés puesto que $f(x) = 1^x = 1$

son sucesivamente mejores aproximaciones a $\sqrt{2}$. Al usar estos números racionales como exponentes, es de esperar que los números

$$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, 3^{1.41421}, \ldots$$

sean sucesivamente mejores aproximaciones a $3^{\sqrt{2}}$. De hecho, puede demostrarse que esto es cierto con una definición precisa de a^x para un valor irracional de x.

Puesto que a^x está definido para todos los números reales x cuando $a > 0$, puede demostrarse que las leyes de los exponentes se cumplen para todos los exponentes que sean números reales.

Leyes de los exponentes. Si $a > 0, b > 0$ y x, x_1, x_2 denotan números reales, entonces

I) $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$

II) $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$

III) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$

IV) $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$

V) $(ab)^x = a^x b^x$

VI) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

5.1.1. Gráfica de funciones exponenciales

Para la función $f(x) = a^x$ se distinguen dos tipos de gráficas, dependiendo de si la base a satisface $a > 1$ o $0 < a < 1$. Como a siempre es positivo los valores de $f(x) = a^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ siempre son positivas, es decir los valores de $f(x)$ no pueden ser 0 para ninguna x, de modo que las gráficas de $f(x)$ no tienen intersecciones con el eje x.

También $a^0 = \left(\frac{1}{a}\right)^0 = a^{-0} = 1$, significa que las gráficas de la función exponencial simpre pasan por el punto $(0, 1)$ sin importar el valor de a.

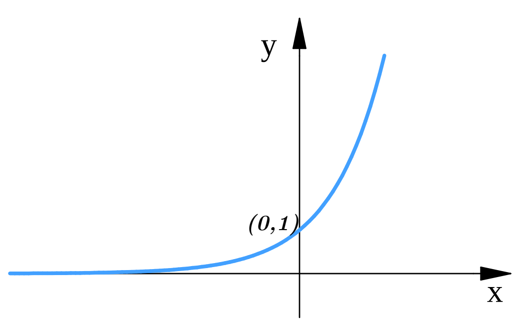


Fig. 5.1. $f(x) = a^x$

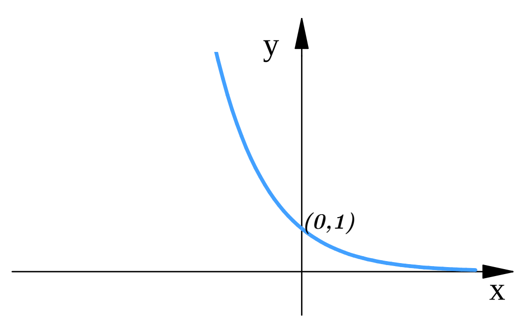


Fig. 5.2. $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

Aunque todas las gráficas de $y = a^x$ cuando $a > 1$ comparten la misma forma básica y todas pasan por el mismo punto $(0, 1)$, hay algunas diferencias sutiles. Mientras más grande es la base a, el ascenso de la gráfica es más pronunciado cuando x crece. En la figura 5.3 se comparan para algunos valores de a, sobre los mismos ejes de coordenadas. A partir de esta gráfica observamos que los valores de y $(1.2)^x$ crecen lentamente cuando x crece. El hecho de que $f(x) = a^x$ es una función uno a uno se puede concluir partir de la prueba de la recta horizontal.

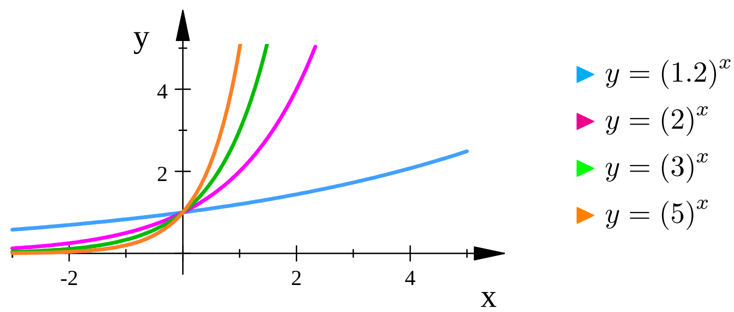


Fig. 5.3. $f(x) = a^x$

5.1.2. El número e

De todas las base posibles para una función exponencial, existe una que es más conveniente para los propósitos del cálculo. La elección de una base a se ve influida por la manera en que la gráfica de $y = a^x$ cruza al eje y. Para los propósitos actuales, puede imaginarse la línea tangente a una gráfica exponencial en un punto como la recta que toca la gráfica sólo en ese punto.

Algunas de las fórmulas del cálculo se simplificarán en gran medida si elige la base a de manera que la pendiente de la línea tangente a la función $y = a^x$ en $(0, 1)$ sea exactamente 1. De hecho existe tal número y es denotado por la letra e. (esta notación la escogió el matemático suizo Leonhard Euler en 1727, probablemente porque es la primera letra de la palabra exponencial).

El número e es un número entre $2.7 < e < 2.8$, su valor aproximado $e \approx 2.71828$.

La definición usual del número e es que se trata del número al que se acerca la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ cuando se deja que x crezca sin cota en la dirección positiva. Si el símbolo de flecha $\rightarrow$ representa la expresión *se acerca*, entonces el hecho de que $f(x) \rightarrow e$ cuando $x \rightarrow \infty$. es evidente en la tabla de valores numéricos de f

x	100	1000	10000	100000	1000000
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2.704814	2.716924	2.718146	2.718268	2.718280

y a partir de la gráfica en la figura 5.4. En la figura, la recta horizontal $y = e$ es un asíntota horizontal de la gráfica de f. También se dice que e es

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

A menudo observará una definición alterna del número e. Si se hace $h = \frac{1}{x}$, entonces

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$$

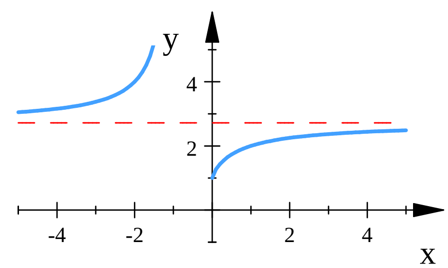


Fig. 5.4. $y = e$ es asintota de f

5.1.3. La función exponencial natural

Cuando la base en de $f(x) = a^x$ se escoge como $a = e$, la función $f(x) = e^x$ se denomina función exponencial natural. Para $a = e > 1$ y $a = \frac{1}{e} < 1$, las gráficas de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ se muestran en la figura 5.5.

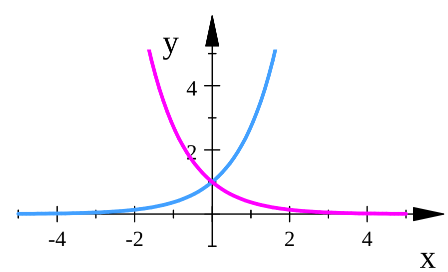


Fig. 5.5.

La función exponencial natural es usada para describir modelos de crecimiento.

La función inversa de la función $f(x) = e^x$ es la función $y = \ln x$ (que se analizara en el siguiente capítulo). Así

$$y = e^x \qquad \text{si y solo si} \qquad x = \ln x$$

con lo cual

$$e^{\ln x} = x, \qquad \text{y} \qquad \ln(e^x) = x$$

Ejemplo 5.1.1 *Para probar los efectos de un antibiótico en un estreptococo patógeno que infecta las heridas, un químico bacteriólogo cultiva una cepa de tales microorganismos. Con el fin de determinar la rapidez de reproducción de las bacterias, el investigador las coloca en un medio altamente favorable para su desarrollo. La población inicial es de 600 bacterias y observa que cada hora se duplica la cantidad existente.*

Escribe un modelo exponencial que describa el crecimiento de la colonia

600×2 *en 1 hora* $t = 1$

$600 \times 2 \times 2$ *en 2 horas* $t = 2$

$600 \times 2 \times 2 \times 2$ *en 3 horas* $t = 2$

con esto podemos decir que el modelo es

$$P(t) = 600(2)^t$$

¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 12 horas?

En $t = 12$

$$P(t) = 600(2)^{12} = 2457\,600$$

Hallar un modelo donde la población se triplique cada hora

600×3 *en 1 hora* $t = 1$

$600 \times 3 \times 3$ *en 2 horas* $t = 2$

$600 \times 3 \times 3 \times 3$ *en 3 horas* $t = 2$

con esto podemos decir que el modelo es

$$P(t) = 600(3)^t$$

5.2. Límites

El límite de una función exponencial es

Teorema 5.2.1 (Límite de una función exponencial) *Para* $a > 0$, x, c *un número real*

$$\lim_{x \to c} a^x = a^c$$

En particular

$$\lim_{x \to c} e^x = e^c$$

Cuando se trabaja con funciones que contienen la función exponencial natural, los cuatro siguientes límites ameritan una atención especial:

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$$

La figura 5.6 ilustra las dos formas generales que puede tener la gráfica de un función exponencia $f(x) = e^x$. Podemos ver que la función tiene una asintota horizontal en el eje x ya que

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

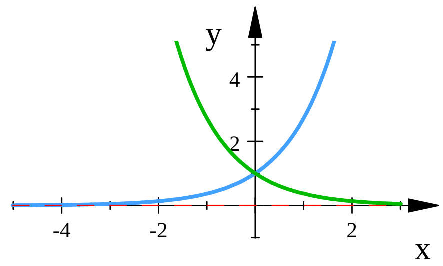


Fig. 5.6. $f(x) = e^x$

5.3. Continuidad

Como la función $f(x) = a^x$ está definida en $(-\infty, \infty)$ y $\lim\limits_{x \to c} a^x = a^c$, entonces podemos afirmar que la función exponencial es continua para todo x en $(-\infty, \infty)$.

En particular $f(x) = e^x$ es continua para todo x en $(-\infty, \infty)$.

5.4. Derivada

Para encontrar la derivada de una función exponencial $f(x) = a^x$ usamos la definición de la derivada.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^x \left(a^h - 1\right)}{h} \\
&= a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\left(a^h - 1\right)}{h}
\end{aligned}$$

Advierta que el límite es el valor de la derivada de f en 0; esto es,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(a^h - 1\right)}{h} = f'(0)$$

En consecuencia, ha demostrado que, si la función exponencial $f(x) = a^x$ es derivable en 0, en tal caso es derivable en todas partes y

$$f'(x) = f'(0)\, a^x$$

En esta ecuación se afirma que la relación de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la propia función. (La pendiente es proporcional a la altura).

$$\text{Para } a = 2, \qquad f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{(2^h-1)}{h} \approx 0.69$$
$$\text{Para } a = 3, \qquad f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{(3^h-1)}{h} \approx 1.10$$

Si se establecen los límites existentes y, correctos hasta cinco cifras decimales, los valores son

$$\frac{d}{dx}(2^x) = 0.693\,15, \qquad \frac{d}{dx}(3^x) = 0.761\,5$$

Así
$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)\,2^x, \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (0.76)\,3^x$$

De todas las ecuaciones posibles para la base a de la ecuación $f'(x) = f'(0)\,a^x$, setiene la fórmula más sencilla de derivación cuando $f'(0) = 1$. En vista de la estimaciones de $f'(0)$ para $a = 2$ y $a = 3$, parece razonable que exista un número a entre 2 y 3 para el que $f'(0) = 1$. Es tradicional denotar este valor con la letra e.

Si se define el número e tal que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(a^h-1)}{h} = 1$

Geometricamente, esto significa que de todas las funciones exponenciales posibles $y = a^x$, la función $f(x) = e^x$ es aquella cuya recta tangente en $(0,1)$ tiene una pendiente $f'(0)$ que es exactamente 1.

Si se pone $a = e$ y, por lo tanto, $f'(0) = 1$ en la ecuación $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(a^h-1)}{h} = f'(0)$, se convierte en la importante fórmula de derivación que se proporciona a continuación.

Teorema 5.4.1 (Derivada de la función exponencial natural)

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

De donde la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene la propiedad de que es su propia derivada. El significado geométrico de esto es que la pendiente de una recta tangente a la curva $y = e^x$ es igual a la cooordenada y del punto.

Usando la regla de la cadena tenemos

Teorema 5.4.2 (Límite de una función exponencial) *Para $a > 0$, $g(x)$ función, x en el dominio de $g(x)$ y c un número real*

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 5.4.1 *Encuentre la derivada de $f(x) = e^x + 4x$*

Solución.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x + 4x) = e^x + 4$$

■

Ejemplo 5.4.2 *Encuentre la derivada de* $y = 3e^{2x+3}$

Solución.

$$\begin{aligned} y' = \frac{d}{dx}\left(3e^{2x+3}\right) &= \left(3e^{2x+3}\right)(2) \\ &= 6e^{2x+3} \end{aligned}$$

■

Ejemplo 5.4.3 *Encuentre la* $n - esima$ *derivada de* $f(x) = xe^x$

Solución. *Por la regla del producto se tiene*

$$\begin{aligned} f'(x) &= xe^x + e^x \\ f''(x) &= xe^x + e^x + e^x \\ f'''(x) &= xe^x + e^x + e^x + e^x \\ f^{(4)}(x) &= xe^x + e^x + e^x + e^x + e^x \end{aligned}$$

así podemos concluir que $f^{(n)}(x) == xe^x + ne^x = (x+n)e^x$ ■

Teorema 5.4.3 (Derivada de una función exponencial)

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Demostración. Podemos aplicar la regla de la cadena para derivar una función exponencial con cualquier base $a > 0$, como e^x y $\ln x$ son funciones inversas, entonces $a = e^{\ln a}$. De este modo

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x(\ln a)}$$

y la regla de la cadena da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^x) &= \frac{d}{dx} e^{x(\ln a)} \\ &= e^{x(\ln a)} \frac{d}{dx}(\ln a)x \\ &= e^{x(\ln a)} \ln a \\ &= a^x \ln a \end{aligned}$$

porque $\ln a$ es una constante. ■

5.5. Aplicaciones de derivada

Las funciones exponenciales aumentan o disminuyen muy rápidamente con cambios en la variable independiente, tal como puede observarse en una amplia variedad de situaciones naturales e industriales. La diversidad de modelos que tienen como base estas funciones explica, en parte, su importancia.

5.5.1. Ley de cambio Exponencial

Al modelar muchas situaciones reales, una cantidad y aumenta o disminuye a una velocidad proporcional a su magnitud en un instante dado, t. Ejemplos de tales magnitudes incluyen la cantidad de un material radiactivo que decae, fondos que generan interés en una cuenta bancaria, el tamaño de una población y la diferencia de temperaturas entre una taza de café caliente y la de la habitación. Tales cantidades cambian de acuerdo con la ley de cambio exponencial.

exponencial, que deduciremos en esta sección.

Si denominamos por y_0 a la cantidad presente en el instante $t = 0$, podemos determinar y como una función de t, resolviendo el problema de valor inicial siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \text{Ecuación diferencial} & : & \dfrac{dy}{dt} = ky \\ \text{Condición inicial} & : & y = y_0 \qquad \text{cuando} \qquad t = 0 \end{array}$$

Si y es positiva y creciente, entonces k es positiva y decimos, de acuerdo con la ecuación diferencial, que la tasa de crecimiento es proporcional a lo que se tiene acumulado. Si y es positiva y decreciente, entonces k es negativa y decimos, de acuerdo con la ecuación diferencial, que la tasa de decaimiento es proporcional a la cantidad que aún queda.

La solución al problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ky \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

eta dada por

$$y = y_0 e^{kt}$$

Así

Ley de cambio exponencial

$$y = y_0 e^{kt}$$

cuando es crecimiento $k > 0$, cuando es decaimiento $k < 0$.

El número k es la tasa constante de la ecuación.

Ejemplo 5.5.1 *Un modelo para analizar cómo erradicar una enfermedad tratándola de manera apropiada, supone que la tasa $\frac{dy}{dt}$ a la que el número de individuos infectados cambia es proporcional al número y. El número de personas sanadas es proporcional al número de individuos infectados. Suponga que, en el curso de cualquier año dado, el número de casos de individuos afectados por una enfermedad se reduce $20\,\%$. Si actualmente hay $10,000$ casos, ¿cuántos años serán necesarios para reducir el número a 1000?*

Solución. *Utilizamos la ecuación*

$$y = y_0 e^{kt}$$

Hay tres valores por determinar: el de y_0, el de k y el tiempo t cuando $y = 1000$.

Para calcular el valor de y_0: Tenemos libertad de iniciar la cuenta del tiempo en cualquier instante. Si contamos a partir de hoy, entonces $y = 10,000$ cuando $t = 0$, de manera que $y_0 = 10,000$.

Ahora, nuestra ecuación es

$$y = 10000e^{kt}$$

Para calcular el valor de k : Cuando $t = 1$ año, el número de casos será $80\,\%$ de su valor actual, es decir, 8000. De aquí que,

$$\begin{aligned} 8000 &= 10000e^{k(1)} \\ e^k &= 0.8 \\ \ln\left(e^k\right) &= \ln(0.8) \\ k &= \ln(0.8) < 0 \end{aligned}$$

en cualquier instante t

$$y = 10000e^{(\ln 0.8)t} =$$

Para encontrar el valor de t, que hace $y = 1000$

$$\begin{aligned} 1000 &= 10000e^{(\ln 0.8)t} \\ e^{(\ln 0.8)t} &= \frac{1000}{10000} \\ e^{(\ln 0.8)t} &= 0.1 \\ (\ln 0.8)\, t &= 0.1 \\ t &= \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} \approx 10.32 \text{ años} \end{aligned}$$

Se requerirá un poco más de 10 años para reducir a 1000 el número de casos. ■

Interes compuesto

Interés compuesto de forma continua La función que calcula la cantidad de dinero que habra en una cuenta bancaria al cabo de t años es

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

De acuerdo con esta fórmula, decimos que el interés que se paga se compone de manera continua

r : es la tasa de interes continua.
t : tiempo en años.

Ejemplo 5.5.2 *Suponga que se depositan $\$621$ en una cuenta bancaria que paga $6\,\%$ de interés compuesto de manera continua. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta 8 años después?*

Solución. *Utilizamos la ecuación con* $A_0 = 621$, $r = 0.06$, *y* $t = 8$

$A(8) = 621e^{(0.06)(8)} = 621e^{0.48} = 1003.6$

Si el banco pagase el interés trimestralmente (k = 4 en la ecuación 5), la cantidad que habría en la cuenta al final del periodo sería de $\$1000.01$. *En consecuencia, el efecto del interés compuesto de manera continua ha dado lugar a una suma adicional de* $\$3.57$. *Un banco podría decidir que vale la pena pagar esa suma adicional para poder anunciar, "Sus intereses se capitalizan cada segundo, día y noche", o mejor aún, "Sus intereses se capitalizan de manera continua".* ■

Radiactividad

Algunos átomos son inestables y pueden emitir masa o radiación espontáneamente. Este proceso se denomina decaimiento radiactivo, y al elemento cuyos átomos lo sufren de manera espontánea se le llama elemento radiactivo. Cuando un átomo emite parte de su masa en este proceso de radiactividad, suele ocurrir que el resto de los átomos se reestructuren para formar algún nuevo elemento. Por ejemplo, el carbono 14 radiactivo decae en nitrógeno, y el radio, a lo largo de varios pasos radiactivos intermedios, se transforma en plomo.

Los experimentos han demostrado que, en cualquier instante, la tasa a la que decae un elemento radiactivo (medida como el número de núcleos que cambian por unidad de tiempo), es aproximadamente proporcional al número de núcleos radiactivos presentes.

Por lo tanto el decaimiento de un elemento radiactivo se describe por medio de la ecuación $\frac{dy}{dt} = -ky$, $k > 0$. Por convención aquí se utiliza $-k \quad (k > 0)$ en lugar de $k \quad (k < 0)$ para hacen hincapié en el hecho de que y decrece. Si y_0 es el número de núcleos radiactivos presentes en el instante cero, su número en cualquier instante posterior t será

$$y = y_0 e^{-kt}, \qquad k > 0$$

Ejemplo 5.5.3 *La vida media de un elemento radiactivo es el tiempo que se requiere para que la mitad de los núcleos de una muestra del mismo se desintegren. Resulta interesante mencionar que la vida media es una constante que no depende del número de núcleos radiactivos que había al principio en la muestra, sino de la sustancia radiactiva de que se trate.*

Para comprender por qué, sea y_0 *el número de núcleos radiactivos al principio en la muestra. Entonces, el número* y *de núcleos en cualquier instante* t *será* $y = y_0 e^{-kt}$.*Buscamos el valor de* t *en el que el número de núcleos radiactivos presentes sea igual a la mitad del número original:*

$$\begin{aligned} y(0)\, e^{-kt} &= \frac{1}{2} y_0 \\ e^{-kt} &= \frac{1}{2} \\ -kt &= \ln \frac{1}{2} \\ &= -\ln 2 \\ t &= \frac{\ln 2}{k} \end{aligned}$$

Este valor de t es la vida media del elemento. Depende únicamente del valor de k; el número y_0 no ejerce ninguna influencia.

$$\text{vida media}=\frac{\ln 2}{k}$$

Ejemplo 5.5.4 *La vida efectiva de radiactividad del polonio 210 es tan breve que se mide en días en lugar de hacerlo en años. En una muestra que inicialmente tenía y_0 átomos radiactivos, el número de átomos radiactivos restantes, al cabo de t días, es*

$$y = y_0 e^{-5\times 10^{-3}t}$$

Determine la vida media del elemento.

Solución.

$$\begin{aligned} vida\ media &= \frac{\ln 2}{k} \\ &= \frac{\ln 2}{5 \times 10^{-3}} \\ &\approx 139\ días \end{aligned}$$

■

Ejercicios 5.1

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.
Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

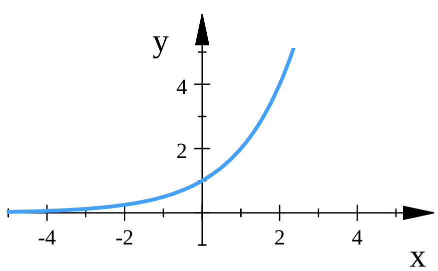
1. Gráfica las siguientes funciones y determina su dominio y su rango

a) $y = 3 - 2^x$

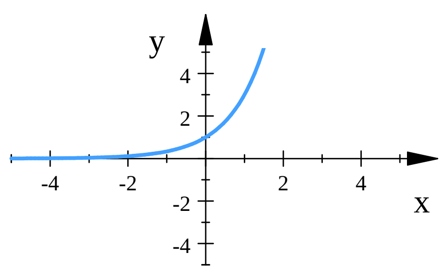
b) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

2. Traza una figura aproximado de la gráfica de cada función (no uses calculadora). Sólo utiliza las gráficas dadas de la siguiente figura, si es necesario, usa las transformaciones de funciones.

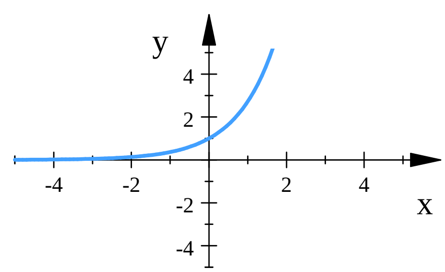
4) $y = 2^x + 1$ 4) $y = 3^{-x}$ 4) $y = -3^{-x}$ 4) $y = 3 - e^x$



$y = 2^x$



$y = 3^x$



$y = 3^x$

3. Con base en la gráfica de $y = e^x$,escriba la ecuación de la gráfica que se obtiene de:

a) Desplazar 2 unidades hacia abajo

b) Desplazar 2 unidades a la derecha

c) Reflejar respecto al eje x

d) Reflejar respecto al eje y

e) Reflejar respecto al eje x y, a continuación, respecto al eje y.

4. Convierte las siguientes funciones a la forma $P = P_0 a^x$¿Cuáles representan crecimiento exponencial y cuáles decaimiento exponencial?

a) $P = 2e^{-0.5x}$ b) $P = 79e^{-2.5x}$ c) $P = 7e^{-\pi x}$

5. Si $g(x) = \dfrac{2}{e^x + 5}$

a) ¿Es g creciente o decreciente?

b) Explica por qué g es invertible y determina una fórmula para g^{-1}

6. Di si cada una de las funciones en los problemas siguientes tienen una asíntota horizontal. Si la tiene, determina su ecuación:

a) $f(x) = 5(1 - (0.8)^x)$

b) $g(x) = 3 + (0.1)^x$

7. Cuando se efectuaron los Juegos Olímpicos de 1986 en la ciudad de México, hubo muchos argumentos sobre el efecto que tendría la gran altitud (7340 $pies$) sobre los atletas. Suponiendo que la presión atmosférica decrece en forma exponencial en $0.4\,\%$ cada 100 $pies$ ¿en qué porcentaje se reduce la presión atmosférica al pasar del nivel del mar a la Ciudad de México?

8. Durante 1988, la inflación en Nicaragua fue, en promedio, $1.3\,\%$ diario. Esto quiere decir que, en promedio, los precios subieron $1.3\,\%$ de un día al siguiente.

a) ¿En qué porcentaje aumentaron los precios en Nicaragua durante junio de 1988?

b) ¿Cuál fue la tasa anual de inflación en Nicaragua durante 1988?

9. La presión atmosférica, P, disminuye exponencialmente en función de la altura h sobre la superficie de la Tierra: $P = P_0 e^{-0.00012h}$ en la que P_O es la presión atmosférica a nivel del mar y h esta en metros

a) Si uno sube a la cima del Monte McKinley, a 6198 metros sobre el nivel del mar, ¿Cuál es la presión del aire, como porcentaje de la presión al nivel del mar?

b) La altura máxima el crucero de un turborreactor comercial e, de más o menos, $12,000$ metros. A esta altura, ¿Cuál es la presión atmosférica como porcentaje de su valor al nivel del mar?

10. La población de México era de 226.5 millones en 1980 y 248.7 millones en 1990 ¿en qué año se espera que esa población rebase los 300 millones?

11. Supón que la vida media de cierta sustancia radiactiva es 5 años. En un principio hay 20 kg de esa sustancia

a) ¿Qué tanto de la sustancia queda después de 10 años?

b) Lo que queda de la desintegración se puede manejar con seguridad cuando la cantidad de material radiactivo es de 0.1 kg o menos ¿Cuánto tiempo debe pasar para que se pueda manejar con seguridad?

12. La población P de México, en millones, era de 3.6 en 1990 y crecía a una tasa anual de $3.4\,\%$. Sea x el tiempo, en años, partir de 1990

a) Expresa a P como una función de la forma $P = P_0 a^x$

b) Exprese a P como una función exponencial usando la base e

c) Compara las tasas de crecimiento anual y continua.

13. Da el valor de a de forma que $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 4$

14. Las gráficas globales de los siguientes ejercicios se encuentran en la figura correspondiente ¿Qué función corresponde a cada curva)

a) $y = e^x$,
b) $y = \ln x$,
c) $y = x^2$
d) $y = x^{\frac{1}{2}}$
e) $y = x^5$,
f) $y = 100x^2$
g) $y = 3^x$

15. Demuestre que $\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{10}} = 0$

a) Mediante algún software gráfica $y = e^{-\frac{x}{10}}$ y $y = 0.1$ en una pantalla común, descubra cuanto tiene que aumentar x de modo que $e^{-\frac{x}{10}} < 0.1$

b) ¿Puede resolver el inciso (a) sin ningún aparato graficador?

16. Localiza la discontinuidad de la función: $y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ e ilústrala trazando una gráfica.

17. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{e^{(1+x)}}$

18. Si $f(x) = e^x \sin 5x$ entonces explica por qué la función es continua en todo numero en su dominio. Da el dominio.

19. Da una justificación informal de que la derivada de $f(x) = e^x$ es $f\,'(x) = e^x$

20. Encuentra $f(x) = xe^x$ la n-ésima derivada de $f^{(n)}(x)$

21. Calcula la derivada de los siguientes ejercicios:

a) $y = 4e^x + 3\frac{1}{x}$
b) $y = \sin(e^{x^2+3x-2})$
c) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$
d) $f(x) = 2e^x + x^2$
e) $y = 5^x + 2$
f) $y = 5x^2 + 2^x + 3$
g) $y = 4 \cdot 10^x - x^3$
h) $y = \dfrac{3^x}{3} + \dfrac{33}{\sqrt{x}}$
i) $f(x) = e^{1+x}$
j) $y = e^{\theta-1}$
k) $z = (\ln 4)4^x$
l) $f(t) = (\ln 3)^t$
m) $y = 5 \cdot 5^t + 6 \cdot 6^t$
n) $f(x) = x^{\pi^2} + (\pi^2)^x$
ñ) $y = x^{\sqrt{x}}$
o) $y = e^x(\tan x - x)$

22. Determina la pendiente de la gráfica de $f(x) = 1 - e^x$ en el punto donde cruza al eje de las x

a) Deduzca la ecuación de la tangente a la curva en ese punto

b) Deduzca la ecuación de la recta perpendicular a la tangente en ese punto. (esa línea se llama normal).

23. Encuentra y'' de la función implícita: $e^{xy} + \ln(xy) + 3 = 0$

24. Si para $y = e^{\sqrt{x}}$. Escriba la función composición en la forma $f(g(x))$.(Identifica la función interior $u = g(x)$ y la exterior $t = f(u)$). Luego, encuéntrala derivada $\frac{dy}{dx}$

25. Aplica la derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función de los siguientes ejercicios:

a) $y = x^x$

b) $y = x^{\sin x}$

c) $y = (\ln x)^x$

26. encuentra $\frac{dy}{dx}$

27. A partir del 1 de enero de 1960 la formula $P(x) = 35000(0.98)^x$, describe a población de México, siendo P la población de esa ciudad y x los años a partir del 1960¿Con qué rapidez cambiaba la población el 1 de enero de 1983?

28. El precio de algunos muebles antiguos aumentó con mucha rapidez en las décadas de 1970 y 1980. Por ejemplo, el valor de determinada mecedora se describe muy bien con $V(x) = 75(1.35)^x$, donde V está en pesos y x es a cantidad de años a partir de 1975. determina la rapidez de aumento de precio en pesos por año.

29. Una población de abejas criada en un apiario se inició con 50 de ellas, en el instante $t = 0$, se modelo por la función $P(t) = \dfrac{75200}{1 + 1503e^{-0.5932t}}$ donde t es el tiempo en semanas, $0 \leq t \leq 25$. Usa una gráfica para estimar el momento en que la población de abejas creció con la mayor rapidez. Enseguida, usa las derivadas para dar una estimación más exacta.

30. Un cultivo de bacterias crece exponencialmente de manera que la cantidad de éstas con respecto al tiempo viene dada por la función $N(t) = 5000.000 \cdot e^{0.405t}$

a) Encuentra la razón de cambio con la que las bacterias crece al cabo de una hora

b) ¿Qué cantidad de bacterias se acumulará al cano de ese lapso de tiempo?

31. La cantidad (en mg) de un medicamento en la sangre en el tiempo x (en minutos) está dada por $Q = 25(0.8)^x$. Determina la razón de cambio de la cantidad en $x = 3$ y explica tu respuesta.

32. Calcula la derivada de $f(x) = 2^x$ en $x = 0$ tanto gráfica como numéricamente (con razón de cambio).

33. Un gramo de carbono 14 radiactivos se desintegra de acuerdo a la fórmula $Q(t) = e^{-0.000121t}$, donde Q es el número de gramos de carbono 14 que permanecen después de t años

a) Encuentra la razón a la cual se desintegra el carbono 14 (en gramos/años)

b) Traza en una gráfica la razón que usted determino en el inciso (a) respecto al tiempo.

34. La cantidad demandada de cierto producto, q, está dada en términos de p, el precio, por $q = 1000e^{-0.02p}$

a) Escriba el ingreso, I, como función del precio

b) Encuentra la razón de cambio del ingreso respecto al precio

c) Encuentra el ingreso y la razón de cambio del ingreso respecto al precio cuando el precio es de $\$10$. interpreta tus respuestas en términos económicos.

Evaluación 15

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Si $g(x) = \dfrac{2}{e^x + 5}$

a) ¿Es g creciente o decreciente?

b) Explica por qué g es invertible y determina una fórmula para g^{-1}

2. Encuentra la derivada de

a) $y = x^{\pi^2} + \left(\pi^2\right)$

b) $y = \sin\left(e^x\right)$

c) $y = e^x(\tan x - x)$

3. Di si cada una de las funciones en los problemas siguientes tienen una asíntota horizontal. Si la tiene, determina su ecuación:

4. La liberación de los clorofluorocarbonos, que se usan en los acondicionadores de cabello y, en menor grado, en los aerosoles domésticos (para cabello, crema de rasurar, etc.) destruyen al ozono de la atmosfera superior. En la actualidad la cantidad de ozono, Q, está disminuyendo a una tasa continua de $0.25\,\%$ anual. ¿Cuál es la vida media del ozono? En otras palabras, con esta rapidez, ¿Cuánto tiempo tardará en desaparecer la mitad del ozono?

5. Si el tamaño de una colonia de bacterias se duplica en 5 horas ¿cuánto tiempo pasa para que se triplique la cantidad de bacterias?

Capítulo 6

Funciones Logaritmicas

6.1. Definición, gráfica, dominio y rango.

Puesto que una función exponencial es uno a uno, $y = a^x$ es uno a uno, se sabe que tiene una función inversa. Para encontrar su inversa, se intercambian las variables x y y para obtener $x = a^y$. Esta última fórmula define a y como una función de x donde y es el exponente de la base a que produce x

Al sustituir la palabra exponente por la palabra logaritmo, la línea precedente puede volver a escribirse como:

y es el logaritmo de la base a que produce x.

La última línea se abrevia usando la notación $y = \log x$ y se denomina función logarítmica

Definición 6.1.1 (Función Logaritmica) *La función logarítmica con base $a > 0$, $a \neq 1$, se define por*

$$y = \log_a x \qquad \textit{si y sólo si} \qquad x = a^y$$

Para $a > 0$, no hay ningún número real y para el cual a^y sea 0 o negativo. Así, a partir de $x = a^y$ se concluye que $x > 0$. En otras palabras, el dominio de una función logarítmica $y = \log_a x$ es el conjunto de números reales positivos $(0, \infty)$

Para enfatizar, todo lo que se ha dicho en las frases precedentes es: La expresión logarítmica $y = \log_a x$ y la expresión exponencial $x = a^y$ son equivalentes. Es decir, significan lo mismo. Como una consecuencia, dentro de un contexto específico como al resolver un problema, es posible usar cualquier forma que sea la más conveniente.

6.1.1. Gráfica

Debido a que una función logarítmica es la inversa de una función exponencial, es posible obtener la gráfica de la primera al reflejar la gráfica de la segunda en la recta $y = x$.

La intersección en el eje y en $(0, 1)$ de la función exponencial se vuelve la intersección con el eje x en $(1, 0)$ de la función logarítmica. También, cuando la función exponencial se refleja en la recta $y = x$, la asíntota horizontal $y = 0$ para la gráfica de $y = a^x$ se vuelve una asíntota vertical para la gráfica de $y = \log_a x$. Para $a > 1$, $x = 0$, que es la ecuación del eje y, es una asíntota vertical para la gráfica de $y = \log_a x$.

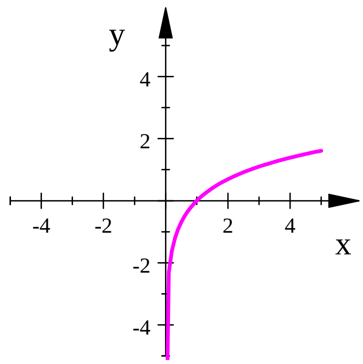


Fig. 6.1. $y = \log_a x$

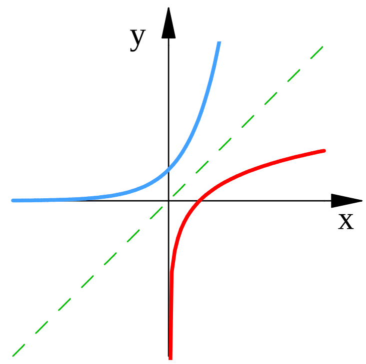


Fig. 6.2. $y = \log_a x$

Además como $f^{-1}(x) = \log_a x$ y $f(x) = a^x$ son funciones inversas se cumple que

$$\begin{aligned} \log_a (a^x) &= x && \text{para toda } x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} &= x && \text{para toda } x > 0 \end{aligned}$$

Propiedades de las funciones logarítmicas $y = \log_a x$

- El dominio de f es el conjunto de números reales positivos; es decir, $(0, \infty)$.
- El rango de f es el conjunto de números reales; es decir, $(-\infty, \infty)$
- La intersección con el eje x de f es $(1, 0)$. La gráfica de f no tiene intersección con el eje y.
- La función f es creciente sobre el intervalo $(0, \infty)$ para $a > 1$ y decreciente sobre el intervalo $(0, \infty)$ para $0 < a < 1$.
- El eje y, es decir, la recta $x = 0$, es una asíntota vertical para la gráfica de f.
- La función f es uno a uno.

También,

$$\begin{aligned} \log_a 1 &= 0 && \text{puesto que} && a^0 = 1 \\ \log_a a &= 0 && \text{puesto que} && a^1 = a \end{aligned}$$

este resultado significa que además de $(1, 0,)$ la gráfica de cualquier función logarítmica con base a también contiene al punto $(a, 1)$. La equivalencia de $y = \log_a x$ y $x = b^y$ también produce dos identidades útiles algunas veces.

Al sustituir $y = \log_a x$ en $x = a^y$, y luego $x = a^y$ en $y = \log_a x$, se obtiene

$$x = b^{\log_b x} \qquad \text{y} \qquad y = \log_b b^y$$

Ejemplo 6.1.1 $2^{\log_2 10} = 10$ *y* $\log_3 3^7 = 7$

Teorema 6.1.1 (Leyes de los logarítmos) *Si x y y son números positivos, entonces*

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a (x^r) = r \log_a x$ *donde r es cualquier número real*
4. $\log_a (e^x) = x$ *por ser composición de funciones inversas.*

Ejemplo 6.1.2 *Use las leyes de logaritmos para evaluar* $\log_2 80 - \log_2 5$

Solución. *Al usar la ley 2 de logaritmos tenemos* *p*

$$\begin{aligned} \log_2 80 - \log_2 5 &= \log_2 \frac{80}{5} \\ &= \log_2 16 \\ &= 4 \qquad \textit{porque } 2^4 = 16 \end{aligned}$$

■

6.1.2. Logaritmo natural

Los logaritmos con base $b = 10$ se denominan logaritmos comunes y los logaritmos con base $b = e$ se llaman logaritmos naturales. Además, suele ser costumbre escribir el logaritmo natural $\log_a x$ como $\ln x$.

Logaritmo Natural Al logaritmo con base e se le llama logaritmo natural y tiene una notación especial

$$\log_e x = \ln x$$

Si se pone $a = e$ y se sustituye $\log_a$ con $\ln$ las propiedades que definen al logaritmo natural se convierten en

$$\ln x = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^y = x$$

Además como $f^{-1}(x) = \log_e x$ y $f(x) = e^x$ son funciones inversas se cumple que

$$\begin{aligned} \ln(a^x) &= x \qquad \text{para toda } x \in \mathbb{R} \\ a^{\ln x} &= x \qquad \text{para toda } x > 0 \end{aligned}$$

En particular, si establece que $x = 1$, obtiene

$$\ln e = 1$$

También aplican las propiedades de logaritmos

Teorema 6.1.2 (Leyes de los logarítmos) *Si x y y son números positivos, entonces*

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
2. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
3. $\ln(x^r) = r \ln x$ *donde r es cualquier número real*
4. $\ln(e^x) = x$ *por ser composición de funciones inversas.*

Ejemplo 6.1.3 *Encuentre x si $\ln x = 5$*

Solución. $\ln x = 5$ *significa* $e^5 = x$

por lo tanto, $x = e^5$

o bien

$$\ln x = 5$$

y aplicando la función exponencial a ambos lados de la ecuación

$$e^{\ln x} = e^5$$

por propiedades de logaritmos

$$x = e^5$$

■

Ejemplo 6.1.4 *Resuelva la ecuación $e^{5-3x} = 10$*

Solución. *Tome logaritmos naturales de ambos lados de la ecuación y por propiedades de logaritmos*

$$\begin{aligned} e^{5-3x} &= 10 \\ \ln\left(e^{5-3x}\right) &= \ln(10) \\ 5 - 3x &= \ln 10 \\ 3x &= 5 - \ln 10 \\ x &= \frac{5}{3} - \frac{\ln 10}{3} \\ x &\approx 0.899\,14 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 6.1.5 *Exprese* $\ln a + \frac{1}{2}\ln b = \ln a + \ln b^{1/2}$ *como un solo logaritmo*

Solución. *Usando las leyes de logaritmos*

$$\begin{aligned} \ln a + \frac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln b^{1/2} \\ &= \ln\left(ab^{1/2}\right) \\ &= \ln\left(ab^{1/2}\right) \\ &= \ln\left(a\sqrt{b}\right) \end{aligned}$$

■

Ejemplo 6.1.6 *Resuelva la ecuación logarítmica* $\ln 2 + \ln(4x-1) = \ln(2x+5)$ *para* x

Solución. *por propiedades de logaritmos, el miembro izquiedo de la ecuación puede escribirse*

$$\begin{aligned} \ln 2(4x-1) &= \ln(2x+5) \\ \ln(8x-2) &= \ln(2x+5) \end{aligned}$$

entonces, la ecuación original es

$$\begin{aligned} \ln(8x-2) - \ln(2x+5) &= 0 \\ \ln\frac{8x-2}{2x+5} &= 0 \end{aligned}$$

aplicando la función exponencial de ambos lados

$$\begin{aligned} \frac{8x-2}{2x+5} &= e^0 \\ \frac{8x-2}{2x+5} &= 1 \\ 8x-2 &= 2x+5 \\ x &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

■

La fórmula siguiente muestra que los logaritmos con cualquier base pueden expresarse en términos del logaritmo natural.

Teorema 6.1.3 (Cambio de base) *Para cualquier número positivo* $a \quad (a \neq 1)$, *tiene*

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Demostración. Sea $y = \log_a x$. En tal caso por la definición de logaritmos $a^y = x$.

al tomar los logaritmos naturales de ambos lados de la ecuación, obtiene $y \ln a = \ln x$.Por consiguiente

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

■

Ejemplo 6.1.7 *Evalue* $\log_8 5$ *correcto hasta 5 cifras decimales*

Solución. *La fórmula* $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$$\begin{aligned} \log_8 5 &= \frac{\ln 5}{\ln 8} \\ &\approx 0.773\,98 \end{aligned}$$

■

Las gráficas de la función exponencial $y = e^x$ y su función inversa, la función logaritmo natural. Debido a que la curva $y = e^x$ cruza al eje y con una pendiente de 1, se deduce que la curva reflejada $y = \ln x$ cruza al eje x con una pendiente de 1. (figura 6.3)

Al igual que todas las demás funciones logaritmicas que tienen una base mayor que 1, el logaritmo natural es una función creciente que se define sobre $(0, \infty)$ y el eje y es una asintota vertical.

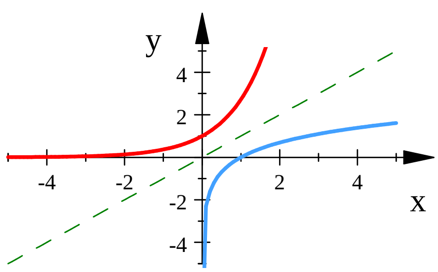


Fig. 6.3. $f = e^x, f^{-1} = \ln x$

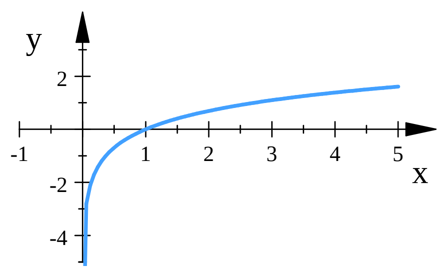


Fig. 6.4. $y = \ln x$

Si bien $\ln x$ es una función creciente, crece muy despacio cuando $x > 1$. De hecho $\ln x$ crece más despacio que cualquier potencia positiva de x.

6.2. Límites

Teorema 6.2.1 (Límites de logaritmos) *Para* $a > 1$, c *número real,* $x > 0$

a) $\lim_{x \to c} \log_a x = \log_a c = \dfrac{\ln c}{\ln a}$

b) $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$

c) $\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty$

d) $\lim_{x \to c} \ln x = \ln c$

e) $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

f) $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$

6.3. Continuidad

Teorema 6.3.1 (Continuidad de funciones logaritmicas) *Las funciones logarítmicas son continuas en todo número de su dominio*

Esto se deduce debido a que si $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \ln x$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} \log_a x &= \log_a c = f(c) \\ \lim_{x\to c} \ln x &= \ln c = g(c) \end{aligned}$$

6.4. Derivada

Usaremos la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones logarítmicas $y = \log_a x$ y en particular de la función logaritmo natural $y = \ln x$

Teorema 6.4.1 (Derivada de funciones logarítmicas)

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a} \qquad y \qquad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Demostración. Sea $y = \log_a x$. Por lo tanto

$$a^y = x$$

Si se deriva esta ecuación de manera implícita con respecto a x, ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^y) &= \frac{d}{dx}x \\ a^y \ln a\frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{a^y \ln x} \\ &= \frac{1}{x\ln a} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$

Si $a = e$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\log_a x &= \ln x \\ &= \frac{1}{x\ln e} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

■

Aplicando la regla de la cadena

Teorema 6.4.2 (Derivada de funciones logarítmicas) *Para x en el dominio de $u(x)$, y $u(x) > 0$, a número real*

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx} \qquad y \qquad \frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 6.4.1 *Derive* $y = \ln\left(x^3+1\right)$

Solución. *Usando la regla de la cadena*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln\left(x^3+1\right) &= \frac{1}{x^3+1}\frac{d}{dx}\left(x^3+1\right)\\ &= \frac{1}{x^3+1}\left(3x^2\right)\\ &= \frac{3x^2}{x^3+1}\end{aligned}$$

■

Ejemplo 6.4.2 *Encuentra la derivada de* $y = \ln(\sin x)$

Solución. *usando regla de la cadena*

$$\begin{aligned}y' &= \frac{d}{dx}(\ln(\sin x))\\ &= \frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\sin x\\ &= \frac{\cos x}{\sin x}\\ &= \cot x\end{aligned}$$

■

Ejemplo 6.4.3 *Derive* $f(x) = \sqrt{\ln x}$

Solución. *Usando regla de la cadena*

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}\sqrt{\ln x}\\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}\ln x\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}\end{aligned}$$

■

Ejemplo 6.4.4 *Derive* $f(x) = \log_{10}(2+\sin x)$

Solución.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}\log_{10}(2+\sin x)\\ &= \frac{1}{(2+\sin x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2+\sin x)\\ & \frac{\cos x}{(2+\sin x)\ln 10}\end{aligned}$$

■

Ejemplo 6.4.5 *Encuentre* $\dfrac{d}{dx}\left(\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)$

Solución. *Usando regla de la cadena*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right) &= \frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x-2}\,(1)-(x+1)\left(\frac{1}{2}(x-2)^{-1/2}\right)}{x-2} \\ &= \frac{x-2-\frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-5}{(x+1)(x-2)}\end{aligned}$$

Si en primer lugar se simplifica la función usando propiedades de logarítmos, entonces la derivación se vuelve más fácil.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\ln(x+1)-\ln\sqrt{x-2}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\ln(x+1)-\ln(x-2)^{1/2}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x-2)\right) \\ &= \frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)\end{aligned}$$

Podemos simplificar para que el resultado sea igual al que obtuvimos en el primer procedimiento

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right) &= \frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right) \\ &= \frac{(x-2)-\frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{x-5}{(x+1)(x-2)}\end{aligned}$$

■

6.4.1. Derivación logarítmica

Con frecuencia, el cálculo de derivadas de funciones complicadas que comprenden productos, cocientes o potencia se puede simplificar tomando logarítmos.

Para derivar una función usando la derivación logaritmica seguimos los siguientes pasos

Pasos en la derivación logarítmica.

1. Tome logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilice las leyes de los logaritmos para simplificar
2. Derive implícitamente con respecto a x
3. Resuelva la ecuación resultante par y'

Ejemplo 6.4.6 *Derive* $y=\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$

Solución. *Tomamos logaritmos de ambos lados de la ecuación y simplificamos usando las leyes de los logaritmos*

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\\ &= \ln x^{3/4}\sqrt{x^2+1}-\ln(3x+2)^5\\ &= \ln x^{3/4}+\ln\sqrt{x^2+1}-5\ln(3x+2)\\ &= \frac{3}{4}\ln x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-5\ln(3x+2)\end{aligned}$$

derivamos implicitamente

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln y &= \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}\ln x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-5\ln(3x+2)\right)\\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x)-5\left(\frac{1}{3x+2}\right)(3x)\\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{3}{4x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{15x}{3x+2}\\ \frac{dy}{dx} &= y\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{15x}{3x+2}\right)\\ \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{15x}{3x+2}\right)\end{aligned}$$

■

Ejemplo 6.4.7 *Derivar* $y=x^{\sin x}$

Solución. *No podemos aplicar la regla de la potencia debido a que* $\sin x$ *no es constante. Usando la derivación logaritmica*

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln x^{\sin x}\\ \ln y &= \sin x\ln x\end{aligned}$$

derivando ambos miembros de la ecuación

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx}(\sin x\ln x)\\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \sin x\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x\cos x\\ \frac{dy}{dx} &= y\left(\frac{\sin x}{x}+\ln x\cos x\right)\\ \frac{dy}{dx} &= x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\ln x\cos x\right)\end{aligned}$$

■

6.5. Aplicaciones de derivada

6.5.1. Logaritmos de base 10

Magnitud de un terremoto

Los logaritmos en base 10, con frecuencia denominados logaritmos comunes, aparecen en muchas fórmulas científicas. Por ejemplo, la intensidad de los terremotos suele medirse en la escala Richter, que es logarítmica. La fórmula es

$$\text{Magnitud } R = \log_{10}\left(\frac{a}{T}\right) + B$$

en donde a es la amplitud del movimiento telúrico en micras, registrada en la estación receptora, T es el periodo de la onda sísmica en segundos y B es un factor empírico que considera el debilitamiento de la onda sísmica al aumentar la distancia desde el epicentro del terremoto.

Ejemplo 6.5.1 (Magnitud de un terremoto) *En el caso de un terremoto que ocurre a $10,000$ km de distancia de la estación receptora, $B = 6.8$. Si el movimiento vertical del suelo registrado es de $a = 10$ micras y el periodo es $T = 1$ segundo, calcule la intesidad del terremoto.*

Solución. *la magnitud del terremoto es*

$$\begin{aligned} R &= \log_{10}\left(\frac{10}{1}\right) + 6.8 \\ &= 1 + 6.8 \\ &= 7.8 \end{aligned}$$

Un terremoto de esta magnitud puede causar grandes daños en el área cercana a su epicentro. ■

Escala de PH

La escala del pH, para medir la acidez de una solución, es una escala logarítmica en base 10. El valor del pH (potencial de hidrógeno) de la solución es el logaritmo común del recíproco de la concentración de iones de hidronio de la solución $[H_3O^+]$:

$$pH = \log_{10}\frac{1}{[H_3O^+]} = -\log_{10}\left[H_3O^+\right]$$

La concentración del ión hidronio se mide en moles por litro. El vinagre tiene un pH de tres, el agua destilada un pH de 7, el agua de mar un pH de 8.15 y el amoníaco de uso doméstico un pH de 12. Los rangos completos de la escala van desde alrededor de 0.1 para el ácido clorhídrico normal, hasta 14 para una solución normal de hidróxido de sodio.

Casí todos los alimentos son ácidos $(pH < 7)$

Alimento	Valor de pH
Plátano	$4.5 - 4.7$
Toronja	$3.0 - 3.3$
Naranja	$3.0 - 4$
Limón	$1.8 - 2.0$
Leche	$6.3 - 6.6$
Bebidas gaseosas	$2.0 - 4.0$
Espinacas	$5.1 - 5.7$

Nivel de sonido

Otro ejemplo del uso de logaritmos comunes es la escala de decibeles (dB) para medir la intensidad del sonido. Si I es la intensidad del sonido en watts por metro cuadrado, el nivel del sonido, en decibeles, es

$$\text{Nivel de sonido} = 10\log_{10}\left(I \times 10^{12}\right) dB$$

Si alguna vez se ha preguntado por qué al duplicar la la potencia de su amplificador de audio el nivel del sonido sólo aumenta unos cuantos decibeles, la ecuación de nivel de sonido le dará la respuesta. Duplicar I sólo provoca un aumento de alrededor de $3\ dB$.

Niveles comunes de sonido	
Umbral de audición	$0\ dB$
Movimiento de las hojas	$10\ dB$
Susurro promedio	$20\ dB$
Automóvil poco ruidoso	$50\ dB$
Conversación normal	$65\ dB$
Taladro neumático	$90\ dB$
a 10 pies de distancia	
Umbral de dolor	$120\ dB$

Ejemplo 6.5.2 (Intensidad del sonido) *Al duplicar I en la ecuación de nivel de sonido, la intensidad del sonido aumenta cerca de $3\ dB$.*

$$\begin{aligned}
\textit{Nivel de sonido al duplicar } I &= 10\log_{10}\left(2I \times 10^{12}\right)\\
&= 10\log_{10}\left(2 \cdot I \times 10^{12}\right)\\
&= 10\log_{10} 2 + 10\log_{10}\left(I \times 10^{12}\right)\\
&= \textit{nivel original de sonido} + 10\log_{10} 2\\
&\approx \textit{nivel original de sonido} + 3
\end{aligned}$$

Ejercicios 6.1

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.
Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Demuestra que para cualquier número positivo a donde $(a \neq 1)$, se tiene $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

2. Traza la gráfica de la función $y = \ln(x-2) - 1$ usando transformaciones y explicala.

3. Traza un esquema aproximado de las gráficas de la función, sin calculadora. Sólo usa las gráficas siguientes)

a) $y = \log_{10}(x+5)$ b) $y = -\ln x$.

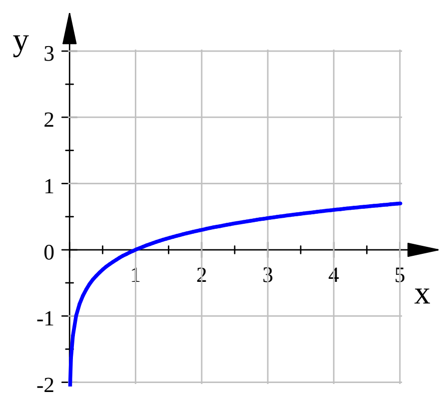


Fig. 6.4. $y = \log_{10} x$

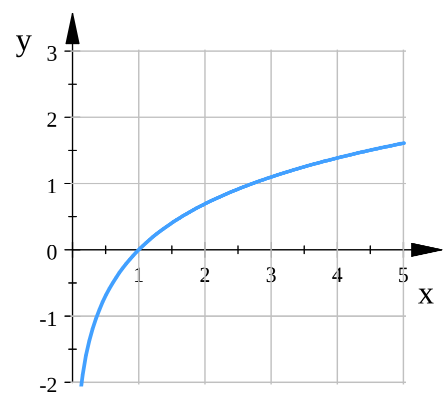


Fig. 6.4. $y = \ln x$

4. A partir de la gráfica de $y = \ln x$, encuentra la ecuación de la gráfica que resulta de

a) desplazarla 3 unidades hacia arriba

b) desplazarla 3 unidades a la izquierda

c) reflejarla respecto al eje x.

d) reflejarla respecto al eje y.

e) reflejarla respecto a la recta $y = x$

f) reflejarla respecto al eje x y, después, respecto a la recta $y = x$ (g) reflejarla respecto al eje y y, depués, respecto a la recta $y = x$

g) desplazarla 3 unidades a la izquierda y, a continuación, reflejarla respecto a la recta $y = x$.

5. Encuentra el valor exacto de cada expesión siguiente:

a) $\log_2 64$

b) $\log_6 \frac{1}{6}$

c) $\log_{10} 1.25 + \log_{10} 80$

d) $\log_5 10 + \log_5 20 - 3\log_5 2$

6. Resuelve los siguientes ejercicios con logaritmos, (puedes comprobar tu respuesta en la computadora).

a) $17^x = 2$

b) $20 = 50(1.04)^x$

c) $2.5^x = 11.7^x$

7. Resuelve cada ecuación para x

a) $e^x = 16$

b) $\ln x = -1$

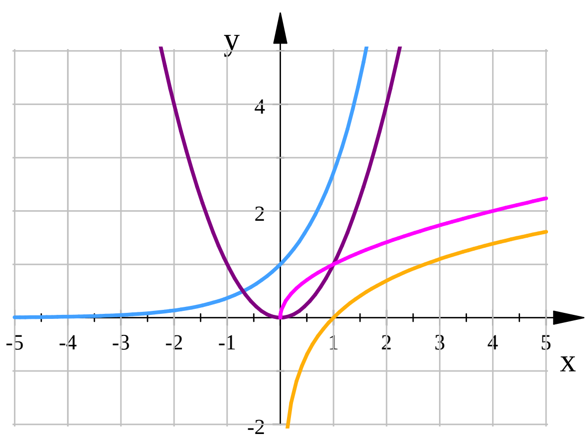
c) $2^{x-5} = 3$

d) $\ln x + \ln(x-1) = 1$

e) $e^{5-3x} = 10$

8. Se muestran en la siguiente figura las graficas de $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = x^2$ y $y = x^{\frac{1}{2}}$

a) ¿qué función corresponde a cada curva?



b) ¿Qué función toma valores más grandes cuando $x \to \infty$ de $x^{\frac{1}{2}}$ ó $\ln x$?

9. Encuentra las asíntotas de $y = \ln(x-2) + 3$ y $y = -2\ln(-x)$

10. ¿En dónde es continua la función $f(x) = \ln(1 + \cos x)$?

11. Estudia la continuidad de la siguiente función $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)\ln x}$

12. En el siguiente ejercicio $G(t) = \ln(t^4 - 1)$ Da su dominio. Explica por qué la función es continua en todo número en su dominio.

13. Encuentra una fórmula para $f^{(n)}(x)$, si $f(x) = \ln(x-1)$

14. Calcula la derivada de los siguientes ejercicios:

a) $y = \ln\sqrt{x^4 + 5x^3 + 7}$

b) $y = \ln^4(\sin x)$

c) $y = 5\ln(t + 7e^t - 4t^2 + 12)$

d) $f(\theta) = \ln(\cos\theta)$

e) $f(x) = \log_3(x^2 - 4)$

f) $g(x) = \ln\frac{a-x}{a+x}$

g) $F(x) = \ln\sqrt{x}$

h) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$

i) $y = \ln(x^3 + 1)$

j) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

k) $f(x) = \log_{10}(2 + \sin x)$

l) $f\prime(x)$ si $f(x) = \ln|x|$

m) y' y y'' de $y = \log_{10} x$

15. Encuentra y'' de la función implícita: $e^{xy} + \ln(xy) + 3 = 0$

16. Para $f(x) = x^2\ln(1 - x^2)$ deriva f y encuentra su domino.

17. Para $y = (\ln x)^x$ explica la derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función.

18. Encuentra los máximos y mínimos de $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$

19. Cuándo llegará la población de México a 200 millones. Donde la población está dada por $p(t) = 67.38(1.026)^t$

20. Calcular la vida media de la exponencial decreciente $P = P_0(0,8)^x$ que usamos para modelar la eliminación de contaminantes del combustible de aviación. ¿Qué significa la respuesta, en terminos prácticos?

21. La vida media de una sustancia radioactiva es 12 días. Si hay al principio 10.32 gramos,

a) Escribe una ecuación para determinar la cantidad A de la sustancia en función del tiempo.

b) ¿Cuándo se habrá reducido esa sustancia a 1 gramo

22. Calcula la razón de cambio instantánea de la función $f(x) = x\ln x$ en $x = 2$. ¿Qué indican estos valores sobre la concavidad de la curva de la función entre 1 y 2?

23. El término t (en años) de una hipoteca de $\$120000$ a $10\,\%$ de interés puede aproximarse por $t = \dfrac{5.315}{-6.7968 + \ln x}$, $x > 1000$ donde x es la mensualidad en dólares.

a) Representa el modelo en una computadora

b) Usa el modelo para aproximar el término de una hipoteca de \$1 167.41 de mesualidad. ¿Cuál es la cantidad a pagar?

c) Usa el modelo para aproximar el término de una hipoteca de \$1 068.45. ¿Cuál es la cantidad total a pagar?

d) Encuentra el ritmo de cambio instantáneo o tasa de t con respecto a x cuando $x = 1068.45$.

e) Escribe un pequeño parráfo describiendo las ventajas de pagar mensualidades altas.

24. La relación entre el número de decibeles β y la intensidad del sonido I en watts por cm^2 es $\beta = 10\log_{10}\left(\dfrac{I}{10^{-16}}\right)$. Usa las propiedades de logaritmos para simplificar la fórmula y determina el número de decibeles de un sonido con intencidad de 10^{-10} watts por cm^2.

Evaluación 16

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Traza la gráfica de la función $y = \ln(x+3) - 1$ usando transformaciones y explicala.

2. Resuelve sin usar calculadora $20 = 50(1.04)^x$

3. Resuelve para x. $\ln x + \ln(x-1) = 1$

4. Estudia la continuidad de la siguiente función $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)\ln x}$

5. Deriva la función $f(x) = \log_{10}(2 + \sin x)$

6. Deriva la función $g(x) = \ln \dfrac{a-x}{a+x}$

7. Usa la definición logaritmica para encontrar la derivada de la función: $y = \dfrac{x^{1/3}\sqrt{x^4 - 2x}}{(x^2+5)\sqrt{x+1}}$

8. En 1980 había, en Estados Unidos, unos 170 millones de vehículos (autos y camionetas) y unos 227 millones de personas. Si la cantidad de vehículos ha crecido al $4\,\%$ anual, y las personas al $1\,\%$ anual, ¿en qué año habra, en promedio, un vehículo por persona?

Capítulo 7

Otras Aplicaciones

7.1. Regla de L'Hôpital

John Bernoulli descubrió una regla para calcular límites de fracciones cuyos numeradores y denominadores tendían a cero o a $+\infty$. La regla se conoce hoy en día como la regla de L'Hôpital, en honor de Guillaume de L'Hôpital, un aristócrata francés que escribió el primer de texto introducción al cálculo diferencial para principiantes, donde apareció impresa por primera vez dicha regla.

Teorema 7.1.1 (Regla de L'Hôpital) *Surge que f y g son funciones derivables y que $g'(x) \neq 0$ en un intervalo abierto I que contienen a a (excepto quizás en a). Suponga que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad y \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o del $\frac{\infty}{\infty}$). Por lo tanto

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si el límite en el lado derecho existe (o es ∞ o es $-\infty$)

Al aplicar la regla de L'Hôpital debemos considerar lo siguiente:

- La regla de L'Hôpital afirma que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se satisfagan las condiciones dadas. Antes de aplicar la regla de L'Hôpital es muy importante comprobar las condiciones referentes a los límites de f y g
- La regal de L'Hôpital tambien es válida para los líites laterales y los límites en el infinito o en el infinito negativo; es decir, $x \to a$ se puede reemplazar con cualquiera de los símbolos siguientes $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

- No se pretende sugerir que las formas indeterminadas como $\infty \cdot 0$ o $\infty - \infty$ son un número. Son sólo notaciones para comportamientos funcionales cuando consideramos límites.

7.1.1. Forma indeterminada 0/0

Si las funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ son cero en $x = a$ entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

no se puede encontrar sustituyendo $x = a$. La sustitución produce $\frac{0}{0}$, una expresión que no tiene sentido, que no podemos evaluar. Usamos $\frac{0}{0}$ como una notación para una expresión conocida como forma indeterminada. Algunas veces, pero no siempre, los límites que conducen a formas indeterminadas pueden encontrarse mediante eliminación, reorganización de términos, u otras manipulaciones algebraicas.

La regla de L'Hôpital nos permite utilizar nuestro conocimiento respecto de las derivadas para evaluar límites que, de otra manera, nos conducirían a formas indeterminadas.

Ejemplo 7.1.1 *Evalua* $\lim_{x \to 0} \dfrac{3x - \sin x}{x}$

Solución. *como* $\lim_{x \to 0} (3x - \sin x) = 0$ *y* $\lim_{x \to 0} x = 0$, *aplicamos la regla de L'Hôpital*

$$\frac{d}{dx}(3x - \sin x) = 3 - \cos x \qquad y \qquad \frac{d}{dx}x = 1$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{3 - \cos x}{1} \\ &= \lim_{x \to 0} (3 - \cos x) = 2 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 7.1.2 *Evaluar* $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$

Solución. *Al evaluar obtenemos la forma indeterminada* $\frac{0}{0}$, *derivamos numerador y denominador*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} - \frac{1}{2} \\ \frac{d}{dx}x^2 &= 2x \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} - \frac{1}{2}}{2x}$$

Como aún sigue siendo una forma indeterminada volvemos a derivar para obtener

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} - \frac{1}{2}}{2x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-\left(\frac{1}{4}\right)(1+x)^{-3/2}}{2} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

■

Ejemplo 7.1.3 *Evaluar* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

Solución. *Como es una forma indeterminada de la forma* $\frac{0}{0}$ *Aplicamos la regla de L'Hôpital*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} && \textit{Todavía } \frac{0}{0}, \textit{ derivamos nuevamente}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} && \textit{Todavía } \frac{0}{0}, \textit{ derivamos nuevamente}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} && \textit{No es } \frac{0}{0}, \textit{ evaluamos.}\\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

■

7.1.2. Formas indeterminadas $\frac{\infty}{\infty}, \infty\cdot 0, \infty-\infty$

Algunas veces cuando intentamos evaluar un límite cuando $x\to a$. sustituyendo $x=a$, obtenemos una expresión ambigua como $\frac{\infty}{\infty}, \infty\cdot 0$ o $\infty-\infty$ en lugar de $\frac{0}{0}$.

Las formas indeterminadas $\infty\cdot 0$, y $\infty-\infty$ Algunas veces estas formas se pueden manipular algebraicamente para convertirlas en una forma $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$

Ejemplo 7.1.4 (Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$) *Encontrar* $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sec x}{1+\tan x}$

Solución. *El numerador y el denominador son discontinuos en* $x=\frac{\pi}{2}$ *de manera que investigamos los límites unilaterales ahí. Para aplicar la regla de L'Hôpital, podemos escoger como* I *cualquier intervalo abierto con* $x=\frac{\pi}{2}$ *como uno de sus extremos*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{1+\tan x} && \frac{\infty}{\infty} \textit{ por la izquierda}\\
&= \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x\tan x}{\sec^2 x}\\
&= \lim_{x\to(\pi/2)^-}\sin x\\
&= 1
\end{aligned}$$

El limite lateral derecho también es 1, con $\frac{-\infty}{-\infty}$ *como la forma indeterminada. Por lo tanto, el límite bilateral es igual a* 1 ■

Ejemplo 7.1.5 (Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$) *Encontrar* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2}{3x^2+5x}$

Solución.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x-2x^2}{3x^2+5x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{1-4x}{6x+5}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-4}{6}\\
&= -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 7.1.6 (Forma indeterminada $\infty\cdot 0$) *Encontrar* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$

Solución. *Escribimos el producto como un cociente*

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Ahora bien cuando $x\to\infty$, $\frac{1}{x}\to 0^+$, *hacemos un cambio de variable* $h=\frac{1}{x}$ *y* $x\to 0^+$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\sin h\right)\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\cos h}{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

■

Ejemplo 7.1.7 (Forma indeterminada $\infty-\infty$) *Encontrar* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

Solución. *Si* $x\to 0^+$ *y* $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\to\infty-\infty$

Si $x\to 0^-$ *y* $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\to -\infty-(-\infty)=\infty-\infty$

Ninguna de estas formas revela qué pasa en el límite. Para averiguarlo, primero combinamos las fracciones:

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

Después aplicamos la regla de L'Hôpital al resultado para obtener

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\end{aligned}$$

como sigue siendo forma indeterminada volvemoa a aplicar la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}\\ &= \frac{0}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

■

7.2. Método de Newton

Uno de los problemas básicos en matemáticas es resolver ecuaciones. Hay fórmulas más complicadas para resolver , como polinomios de grado $1, 2, 3$ o 4, pero el matemático noruego Niels Abel probó que no existe una fórmula para resolver polinomios de grado cinco. Tampoco hay una fórmula para resolver ecuaciones como $\sin x = x^2$, que involucre funciones transcendentes así como polinomiales u otras funciones algebraicas.

El método de Newton o método de Newton-Raphson, que es una técnica de aproximación a la solución de una ecuación $f(x) = 0$. En esencia, este método usa rectas tangentes en lugar de la gráfica de $y = f(x)$ cerca de los puntos donde f es cero. (Un valor de x donde f es cero es una raíz de la función f y una solución de la ecuación $f(x) = 0$).

7.2.1. Procedimiento del método de Newton

El objetivo del método de Newton para estimar una solución de $f(x) = 0$, una ecuación es producir una sucesión de aproximaciones que se acerquen a la solución. Escogemos el primer número x_0 de la secuencia. Luego, en circunstancias favorables, el método hace el resto moviéndose paso a paso hacia un punto donde la gráfica de f cruza el eje x (figura 7.1).En cada paso el método se aproxima a un cero de f con un cero de una de sus linealizaciones.

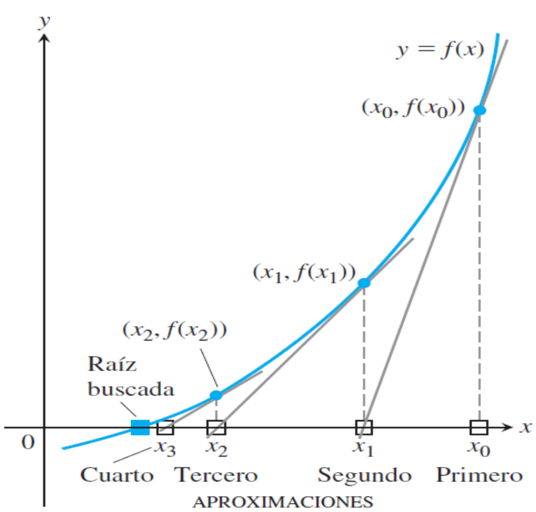


Fig. 7.1.

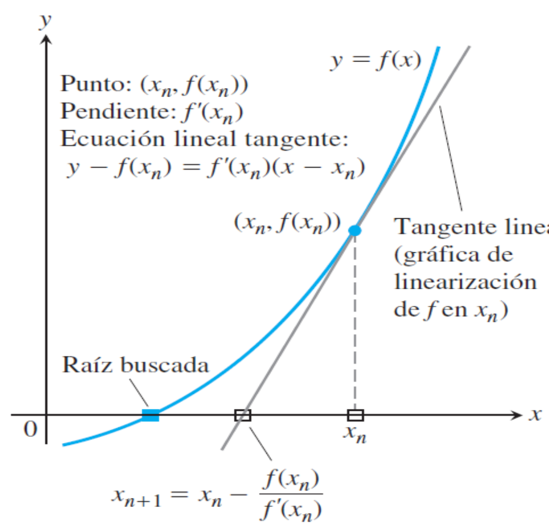


Fig. 7.2.

La estimación inicial, x_0 se puede encontrar gráficamente o simplemente adivinando. Después, el método usa la tangente a la curva $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$ para aproximar la curva, llamando punto x_1 al punto donde la tangente corta el eje x (figura 7.1). En general, el número x_1 es una mejor aproximación a la solución que x_0. El punto x_2, donde la tangente a la curva en $(x_1, f(x_1))$ cruza el eje x, es la siguiente aproximación en la secuencia.

Continuamos así, usando cada aproximación para generar la siguiente, hasta estar suficientemente cerca de la raíz para terminar.

Podemos obtener una fórmula para generar las aproximaciones sucesivas de la siguiente manera. Dada la aproximación x_n, la ecuación punto-pendiente de la tangente a la curva en $(x_n, f(x_n))$ es

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Podemos encontrar en dónde corta el eje x haciendo $y = 0$. (figura 7.2).

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \\ -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= x - x_n \\ x &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{si } f'(x_n) \neq 0 \end{aligned}$$

Este valor de x es la siguiente aproximación x_{n+1}.

Procedimiento del método de Newton.

1. Adivine una primera aproximación a la solución de la ecuación $f(x) = 0$.Una gráfica de $y = f(x)$ podría ayudar a hacerlo.

2. Use la primera aproximación para obtener la segunda, la segunda para obtener la tercera, y así sucesivamente, usando la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{si } f'(x_n) \neq 0$$

Ejemplo 7.2.1 *Empiece con $x_1 = 2$, y encuetre la tercera aproximación x_3 para la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$*

Solución. *Aplicando el método de Newton con* $\quad y \quad f'(x) =$

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \qquad y \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$$

aplicando

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

con $n = 1$ tenemos

$$x_2 = 2 - \frac{(2)^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = \frac{21}{10} \approx 2.1$$

Con $n = 2$ se obtiene

$$x_3 = 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 2(2.1) - 5}{3(2.1)^2 - 2} \approx 2.0946$$

Resulta que esta tercera aproximanción $x_3 \approx 2.0946$ es exacta hasta cuatro cifras decimales. ■

Suponga que quiere lograr una exactitud dada, hasta ocho cifras decimales, aplicando el método de Newton. ¿Como saber cuándo detenerse?. La regla empírica que se usa en general es parar cuando las aproximaciones sucesivas x_n, y x_{n+1} concuerdan hasta las ocho cifras decimales.

7.3. Más Aplicaciones

Ejemplo 7.3.1 (Transacciones comerciales) *El número y de transacciones comerciales (en millones) en la bolsa de valores de Nueva York desde 1990 hasta 2002 puede ser modelado por*

$$y = 36663e^{0.1902t}$$

donde t representa el año, $t = 0$ corresponde a 1990. ¿A qué ritmo o velocidad cambió el número de transacciones comerciales en 1998?

Solución. *La derivada del modelo es*

$$y' = (0.1902)\,(36663)\,e^{0.1902t} \approx 6.973e^{0.1902t}$$

Al evaluar la derivada cundo $t = 8$, se puede concluir que el ritmo o velocidad de cambio en 1998 era alrededor de $31,933$ millones de transacciones por año. ■

7.3.1. Crecimiento y decaimiento naturales

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = kx \quad \text{donde } k \text{ es constante}$$

funciona como modelo matemático de fenómenos naturales que contengan una cantidad cuya tasa de cambio sea proporcional a su valor en curso.

Crecimiento poblacional

La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población $P(t)$ con indices constantes de nacimiento y mortalidad es, en muchos casos simples, proporcional al tamaño de la población, es decir

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Interes compuesto

Sea $A(t)$ la cantidad en dólares de una cuenta de ahorros en el tiempo t (en años) y supóngase que el interés es continuamente compuesto a una tasa de interés anual r. Interes compuesto continuo significa que en un pequeño intervalo de tiempo

$$\frac{dA}{dt} = rA$$

Desintegración radioactiva

Si Q es la cantidad de material radioactivo presente en el instante t, entonces la ecuación diferencial es

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

donde k es la constante de desintegración.

Se llama tiempo de vida media (semivida) de un material radioactivo al tiempo necesario para que se desintegren la mitad de los átomos en una cantidad inicial N_0

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{1}{2}N_0 \\ \frac{1}{2}N_0 &= N_0 e^{kt} \end{aligned}$$

La clave del método de determinación de la antigüedad fechado mediante radiocarbono estriba en que una proporción constante de átomos de carbono de cualquier organismo viviente está formada por el isótopo radioactivo C^{14} del carbono. Esta proporción permanece constante, ya que la fracción de C^{14} en la atmósfera se conserva casi constante, y la materia viva está tomando carbono del aire continuamente, o está consumiendo otras materias vivientes que contienen la misam razón constante de átomos de C^{14} a los átomos de carbono C^{12} ordinario. La misma razón perdura toda la vida, debido a que los procesos orgánicos parecen no hacer distinción entre los dos isótopos.

La vida media del C^{14} es aproximadamente 5600 años

Eliminación de medicamentos

En muchos casos la cantidad $A(t)$ de cierto medicamento en la corriente sanguinea, medida por el exceso sobre su nivel natural, disminuira en forma proporcional a al cantidad excedente actual. Es decir

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda A$$

en la que $\lambda > 0$. El parámetro λ se denomina constante de eliminación del medicamento.

Ley de Torricelli

La ley de Torricelli establece que la tasa de cambio con respecto al tiempo del volumen V de agua en un tanque que se vacía es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad y del agua en el tanque:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -av \\ \frac{dV}{dt} &= -a\sqrt{2gy} \end{aligned}$$

donde:

$y(t) =$ la profundidad del agua en el tanque en el tiempo t

$V(t) =$ el volumen del agua del tanque en el tiempo t

$v(t) = \sqrt{2gy}$ velocidad del agua que sale del tanque

$a =$ área del agujero por el cuál el agua está saliendo en el tiempo t

$g =$ gravedad.

Si $A(y)$ denota el área de la sección transversal horizontal del tanque a la altura y, tenemos una forma alterna de la ley de Torricelli:

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

Problemas de mezclas

Una solución es una mezcla de un soluto (que puede ser líquido, sólido o gaseoso), en un solvente que puede ser líquido o gaseoso.

Tipos de mezclas o soluciones :

i) Soluciones líquidas cuando disolvemos un sólido o un líquido en un líquido.

ii) Soluciones gaseosas cuando se disuelve un gas en un gas.

Ecuación de Continuidad:

Tasa de acumulación = Tasa de entrada - Tasa de salida.

Cantidad de sustancia en el tiempo t

$$\frac{dX}{dt} = Tasa\ de\ entrada - Tasa\ de\ salida$$

Movimiento libre amortiguado

En el movimiento armónico simple, se supone que no hay fuerzas de retardo que actúen sobre la masa en movimiento. Esto no es algo totalmente real. A menos que la masa esté colgada en un vació perfecto, cuando menos habrá una fuerza de resistencia debida al medio que rodea al objeto, incluso la masa podría estar suspendida en un medio viscoso o conectada a un dispositivo amortiguador.

Cuando el cuerpo sujeto al resorte se mueve en un medio que produce fricción sobre el cuerpo, entonces decimos que el movimiento se efectúa con amortiguamiento supongamos que el amortiguamiento es directamente proporcional a la velocidad. Por la segunda ley de Newton tenemos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}$$

donde β es una constante de amortiguamiento positiva y el signo negativo es consecuencia del hecho que la fuerza amortiguadora actúa en dirección opuesta a la del movimiento.

onde β es una constante de amortiguamiento positiva y el signo negativo es consecuencia del hecho que la fuerza amortiguadora actúa en dirección opuesta a la del movimiento.

Dividimos la ecuación entre m

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{m}x - \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt}\\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 x - 2\lambda\frac{dx}{dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x &= 0\\ x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x &= 0\end{aligned}$$

donde: $2\lambda = \frac{\beta}{m}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$

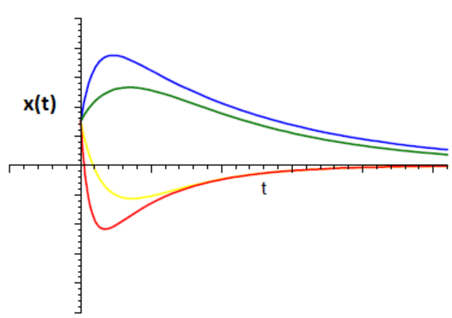
Al resolver la ecuación tenemos tres casos posibles que dependen del signo de $\lambda^2 - \omega^2$

- **Caso** (1) $\lambda^2 - \omega^2 > 0.$ al sistema se le dice **Sobreamortiguado**, ya que el amortiguador ofrece una resistencia mayor al movimiento que la del resorte o se tiene una masa muy pequeña. La solución de la ecuación o función de posición en éste caso estará dada por

  $$x(t) = C_1 e^{r_1}t + C_2 e^{r_2}t$$

  donde r_1 y r_2 son valores reales y negativos.

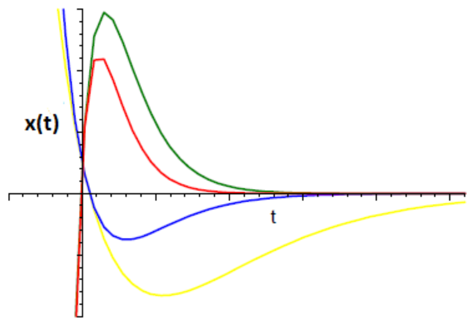
  En este caso el sistema no oscila. Inicia lo que parece una oscilación y pasa a situación de equilibrio.



$$x(t) = C_1 e^{r_1}t + C_2 e^{r_2}t$$

- **Caso** (2) $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ Se dice que el sistema está criticamente amortiguado puesto que cualquier pequeña disminución de la fuerza de amortiguamiento originaría un movimiento oscilatorio. La solución general de la ecuación es

$$x(t) = C_1 e^{r_1} t + C_2 t e^{r_1} t$$



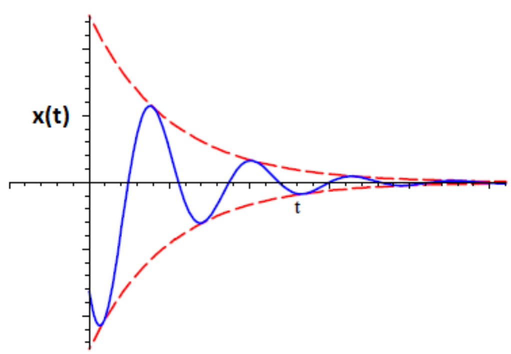
En este caso el sistema no oscila. Inicia lo que parece una oscilación y rápidamente pasa a situación de equilibrio.

- **Caso** (3) $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ Se dice que el sistema está **subamortiguado** porque el coeficiente de amortiguamiento es pequeño en comparación con la constante del resorta. Es decir, que el amortiguador no ofrece una resistencia tal que evite que la masa oscile. Las raices r_1 y r_2 son complejas

$$r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} i$$

La solución es

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(C_1 \cos \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t + C_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t \right)$$



En este caso el sistema oscila con movimiento armonico simple. La amplitud y la energía del sistema disminuyen de manera exponencial con el tiempo

Oscilaciones forzadas no amortiguadas

En ausencia de una fuerza de amortiguación, no habrá término transitorio en la solución de un problema. Además la aplicación de una fuerza periódica de frecuencia cercana, o igual, a la frecuencia de las oscilaciones libres no amortiguadas puede causar un problema serio en cualquier sistema mecánico oscilatorio.

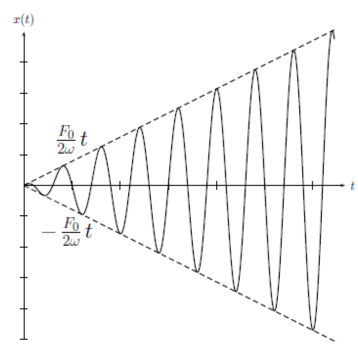
En los sistemas físicos reales siempre hay algo de amortiguamiento, o al menos fricción.

La ecuación de un sistema oscilatorio forzado no amortiguado es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \sin \omega_f t$$

Este problema se llama de **Resonancia** cuando la velocidad angular (o frecuencia angular ω_f) de la fuerza exterior $(F_0 \sin \omega_f t)$ esta en resonancia con la velocidad angular (o frecuencia angular) del cuerpo, es decir, $\omega = \omega_f$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \sin \omega t$$



Observacion: Si en la realidad un sistema mecánico fuera descrito por una función de resonancia pura, el sistema fallaría necesariamente, ya que a la larga, las grandes oscilaciones del cuerpo forzarían a este más allá de lo permitido por su límite elastico.

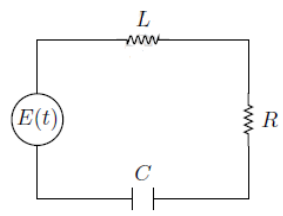
La alas de los aviones no son perfectamente rígidas. Una vibración razxonable no solo es tolerada sino que además es necesaria para impedir que el ala se quiebre como una varilla de vidrio.

Los puentes son buenos ejemplos de sistemas vibratorios sometidos de manera constante a fuerzas exteriores, ya sea por personas que caminana, por autos y camiones que circulan, por el agua que azota sus cimitnos, o bien, por el viento que sopla contra su estructura. Tal es el caso del puente de Tacoma en Washington, que según las investigaciones el diseño deficiente de la superestructura hacía que el viento que la atravesaba se arremolinara en forma periódica. Cuando la frecuencia de esta fuerza periódica se acercaba a la frecuencia natural del puente, se produción grandes levantamientos de la calzada.

Circuitos eléctricos

La ecuación diferencial del movimiento vibratorio de los resortes también seaplica en Circuitos en serie, en este caso, la ecuación diferencial es

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E\left(t\right)$$



donde:

$q(t)$ es la carga instantánea (medida en culombs)

$E(t)$ es el voltaje o fuerza electromotriz suministrada (medida en volts)

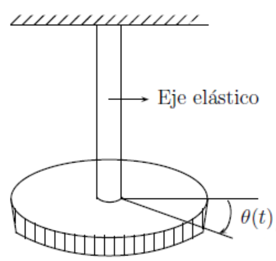
L es la inductancia (medida en hertz)

R es la resistencia (medida en ohms)

C es la capacitancia (medida en faradios)

Barra de torsión

La ecuación diferencial que rige el movimiento de torsión de un cuerpo suspendido del extremo de un eje elástico es



$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{dq}{dt} + k\theta = T\left(t\right)$$

donde:

I es el momento de inercia del cuerpo suspendido

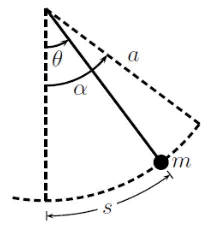
c es la constante de amortiguación

k es la constante elástica del eje

$T(t)$ es la fuerza de torsión exterior suministrada al cuerpo

Movimiento pendular;

Un péndulo es una masa m atada al extremo de una cuerda de longitud a y de masa despreciable y el otro extremo fijo.



La ecuación que rige su movimiento sin fricción es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0$$

La ecuación que rige su movimiento amortiguado es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0$$

donde c es la constante de amortiguamiento

Ejercicios 7.1

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.
Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Use la regla de L'Hôpital para evaluar los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$

b) $\lim\limits_{\theta\to \pi} \dfrac{\sin \theta}{\pi - \theta}$

c) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x - \sqrt{x^2+x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x \tan \dfrac{1}{x}\right)$

h) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{10(\sin t - t)}{t^3}$

2. Use el método de Newton para estimar las soluciones de la ecuación $x^2+x-1=0$.Empiece con $x_0=-1$ para la solución de la izquierda, y con $x_0=1$ para la solución de la derecha.

3. Aplique el método de Newton para aproximar la raíz de $x^4-2x^3+5x^2-6=0$ en el intervalo $[1,2]$

4. Use el método de Newton para encontrar todas las raices de $(x-2)^2=\ln x$

Evaluación 17

Nombre del Alumno:	Grupo:
	Fecha:

Instrucciones: Lee con cuidado y contesta lo que se te pide.

Escribe tus resultados con el procedimiento de forma clara y ordenada, marca el resultado final.

1. Use la regla de L'Hôpital para encontrar $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln x$

2. Use la regla de L'Hôpital para encontrar $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

3. Use la regla de L'Hôpital para encontrar $\lim\limits_{x\to \pi/4} (1-\tan x)\sec x$

4. Encuentre, correcta hasta seis cifras decimales, la raíz de la ecuación $\cos x = x$

Bibliografía

[1] Spivak, Michael, *Cálculo Infinitesimal.* Segunda Edición., Reverté, S. A., México, 1996

[2] .Stewart, James, *Cálculo de una Variable: Trascendentes tempranas.* Sexta Edición, CENGAGE Learning, México, 2008.

[3] Swokowski, Earl W., *Cálculo con Geometría Analiítica.* Segunda edición, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1988.

[4] Purcell, Edwin J.; Varberg, Dale; Rigdon, Steven E., *Cálculo.* Novena edición., Pearson Educatión, México, 2007.

[5] Larson, Ron; Hostetler, Robert P.; Edwards, Bruce H., *Cálculo con geometría analítica.* Octava edición., McGraw-Hill Interamericana, México, 2006.

[6] Zill, Dennis G.; Wright, Warren S., *Cálculo de una varialbe. Trascendentes tempranas.* Cuarta edición, McGraw-Hill Interamericana, México, 2011.

[7] Zill, Dennis G.; Dewar, Jacqueline M., *Precálculo con avances de cálculo.* Cuarta edición, McGraw-Hill Interamericana, México, 2008.

[8] George B.Thomas, Jr., *Cálculo una variable,* Undecima edición, Pearson Educatión, México, 2006.