

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Licenciatura en Ingeniería Física

# **Análisis vibratorio de una probeta de madera por medio de patrones de moteado láser**

T E S I S

Como parte de los requisitos para obtener el grado de  
Ingeniero Físico

Presenta:

José Zahid García Córdova

Director de tesis: Dr. Adolfo Huet Soto

Co-Director de tesis: Dr. Jesús Alejandro Torres Torres

---

Santiago de Querétaro, Qro. Julio 2022



*“Si he logrado ver más lejos,  
ha sido porque he subido a hombros de gigantes”.*  
*Isaac Newton.*

# Agradecimientos

Quiero agradecer a mis hermanas que estuvieron acompañándome en la carrera siempre con su apoyo incondicional y con un plato de comida que siempre estuvo en la casa. A mis amigos por hacer de aquellos días divertidos y que la carrera fuera mucho más sencilla de cursar y que siempre estuvieron en aquellos proyectos tediosos. A mis profesores por todos los conocimientos y consejos que me brindaron dentro y fuera del aula. Quiero agradecer al laboratorio de acústica del INBA Querétaro por recibirme por 5 años y enseñarme en especial que se puede platicar, reír y trabajar al mismo tiempo.

## Resumen

Los experimentos ópticos son una propuesta para la enseñanza de diversos temas de las diferentes áreas de ciencia, sobre todo en los cursos de física. La complejidad de los experimentos ópticos consiste en los materiales, ya que comúnmente estos son de precios altos o son objetos difíciles de conseguir, y además se tratan de materiales delicados que se pueden estropear con facilidad si no se tiene el manejo adecuado. Este trabajo muestra una propuesta de bajo presupuesto para la realización de un experimento de interferencia láser usando una técnica poco documentada nombrada “Laser streak pattern”, en la que se utilizan objetos que se pueden conseguir por medio de tiendas virtuales a un precio accesible. El laser streak pattern es una técnica de interferencia que se emplea para visualizar el gradiente de un objeto que se encuentre vibrando en un modo normal. El gradiente es una herramienta matemática que se enseña en cursos avanzados de cálculo y al tratarse de un concepto abstracto resulta ser de difícil comprensión al momento de dar ejemplos de aplicación. El trabajo muestra la implementación del experimento para la visualización del gradiente comparando sus resultados con otros 3 métodos para la validación de los mismos.

**Palabras clave:** Experimentos , Laser Streak pattern, gradiente, interferencia.

## Abstract

Optical experiments are a proposal for teaching various topics in different areas of science, especially in physics courses. The complexity of optical experiments consists in the materials, since these are commonly high-priced or difficult to obtain objects, and they are also delicate materials that can easily escape if they are not handled properly. This work shows a low-budget proposal to carry out a laser interference experiment using a little-documented technique called “Laser stripe pattern”, in which objects that can be obtained through virtual stores at an affordable price are used. . The “laser line pattern” is an interference technique used to visualize the gradient of an object that is vibrating in a normal mode. The gradient is a mathematical tool that is taught in advanced calculus courses and as it is an abstract concept it turns out to be difficult to understand when giving application examples. The work shows the implementation of the experiment for the visualization of the gradient comparing its results with other 3 methods for their validation.

**Key words:** Experiments, laser streak pattern, gradient, interference.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
Resumen . . . . .	II
<b>Lista de figuras</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	5
1.2.1. General . . . . .	5
1.2.2. Específicos . . . . .	5
1.3. Justificación . . . . .	5
1.4. Formulación del problema . . . . .	5
<b>2. Fundamentos teóricos</b>	<b>7</b>
2.1. Vibración en materiales elásticos . . . . .	7
2.2. Ecuación de onda en una cuerda libre . . . . .	8
2.2.1. Solución . . . . .	8
2.2.2. Análisis espacial . . . . .	13
2.3. Ecuación de onda en una membrana rectangular . . . . .	17
2.3.1. Solución . . . . .	17
2.3.2. Análisis espacial . . . . .	20
2.4. Interferencia . . . . .	25
2.4.1. Interferencia en ondas de luz . . . . .	29
2.4.2. Interferencia de patrones de moteado . . . . .	30
2.4.3. Laser Streak Pattern . . . . .	32
2.5. Gradiente y visualización . . . . .	33
<b>3. Metodología</b>	<b>36</b>
3.1. Visual Analyser . . . . .	36
3.2. Figuras de Chladni . . . . .	38
3.3. Ansys . . . . .	38
3.4. Interferometría . . . . .	41
3.5. Imágenes de gradiente . . . . .	42
<b>4. Resultados</b>	<b>45</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>50</b>

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VI
<b>A. Visualización del gradiente por medio de interferencia laser</b>	<b>52</b>
<b>B. Simulación de la probeta de madera en ANSYS APDL</b>	<b>54</b>
<b>C. Programa para obtención de imágenes de gradiente</b>	<b>56</b>

# Índice de figuras

1.1. (Hopkins and Tidbury, 1977) Dibujo de una cresta, pico y montura típicos junto con sus correspondientes patrones de moteado laser. Recuperado (03-01-2022) . . . . .	2
1.2. Metodo de Chladni como era aplicado por Ernst F. Chladni. "La placa es excitada en un punto a lo largo del borde, de manera que sea escuchado un sonido de un tono claro y sea obtenida una figura de Chladni. Esta es la resonancia de la placa a esa frecuencia en particula" (Hutchins, 1977). . . . .	3
2.1. Primer modo normal de una cuerda con los extremos libres, mostrando el nodo del sistema en rojo, el sistema inicial en azul y la evolución temporal en negro con líneas punteadas . . . . .	14
2.2. Segundo modo normal de una cuerda con los extremos libres, mostrando los nodo del sistema en rojo, los antinodos en naranja, el sistema inicial en azul y la evolución temporal en negro con líneas punteadas .	15
2.3. Modos 3 y 4 de una cuerda de extremos libres, se muestra su configuración inicial (Azul), evolución temporal (negro punteado), los puntos nodales (puntos rojos) y los antinodos (puntos naranjas) . . . . .	16
2.4. Membrana rectangular sin vibrar . . . . .	20
2.5. Membrana rectangular modo $n=0, m=1$ . . . . .	21
2.6. Membrana rectangular modo $n=1, m=1$ . . . . .	22
2.7. Torres (2006)Comparación de los modos de vibración visualizados mediante el método de Chladni y un análisis modal en ANSYS. Recuperado 03-01-2022 . . . . .	22
2.8. Comparación de los modos de vibración variando $n=0,1,2,3$ con $m=0,1,2,3$ , con las proyecciones en los planos $(z,x)$ y $(z,y)$ . . . . .	24
2.9. Superposición de dos ondas con la misma frecuencia y que se encuentran en fase <b>interferencia constructiva</b> . . . . .	28
2.10. Superposición de dos ondas con la misma frecuencia y que se encuentran en desfase <b>interferencia destructiva</b> . . . . .	28
2.11. Diagrama del experimento de young, con la onda inicial, y las secundarias mostrando así los puntos de interferencia constructiva . . . . .	29
2.12. Diagrama del experimento de young, con la onda inicial, y las secundarias mostrando así los puntos de interferencia constructiva, se muestran los elementos necesarios para conocer interferencia constructiva . . . . .	30

2.13. Interferencia de moteado (Speckle) . . . . .	31
2.14. Formación de un patrón Speckle . . . . .	31
2.15. Seguimiento de un punto en una cuerda vibrante en su segundo modo de vibración . . . . .	32
2.16. Seguimiento de un punto sobre una superficie rugosa . . . . .	33
2.17. Gráfica de la función $\nabla f(x,y)=2x\hat{x}-2y\hat{y}$ , comúnmente conocida como gradiente de la silla de montar. . . . .	34
2.18. Gráfica del gradiente de la función $f(x,y)=x^2-y^2$ , comúnmente conocida como silla de montar. . . . .	35
3.1. Probeta de madera con anotaciones de sus dimensiones, peso y densidad.	36
3.2. Diagrama esquemático(izquierda) y montaje real (derecha) para la obtención de la frecuencia de resonancia de la probeta de madera. . .	37
3.3. Entorno de Visual Analyser . . . . .	37
3.4. Diagrama esquemático(Izquierda) y montaje real (derecha) para sostener la probeta para el experimento de Chladni . . . . .	38
3.5. Creación de la probeta con el comando "Block"- Cortesía de ANSYS	40
3.6. Creación de la probeta con el comando "Block" y mallado- Cortesía de ANSYS . . . . .	41
3.7. Diagrama esquemático (izquierda) y montaje real (derecha) para sostener la probeta de madera . . . . .	42
3.8. Diagrama esquemático (izquierda) y montaje real (derecha) para la obtención de imágenes del sistema interferométrico . . . . .	42
4.1. Grafica del análisis espectral de frecuencias (azul) resaltando los picos (rojo) acompañado de los resultados del método de chladni para la visualización de los modos normales de la probeta y con notación de la frecuencia. . . . .	45
4.2. Patrón de interferencia de Moteado sobre la probeta de madera . . .	46
4.3. Método de Chladni (A). Simulación en elemento finito-Cortesía de ANSYS (B). Método de interferencia (C). Simulación del gradiente (D). Probeta a una frecuencia de 293Hz, modo (2,0). . . . .	47
4.4. Método de Chladni (A). Simulación en elemento finito-Cortesía de ANSYS (B). Método de interferencia (C). Simulación del gradiente (D). Probeta a una frecuencia de 742Hz, modo (3,0). . . . .	48
4.5. Método de Chladni (A). Simulación en elemento finito-Cortesía de ANSYS. (B). Método de interferencia (C). Simulación del gradiente (D). Probeta a una frecuencia de 826Hz, modo (1,1). . . . .	49
4.6. Probeta de madera con sus dimensiones, peso, densidad, las 3 frecuencias junto con que modo corresponde y con las propiedades mecánicas Ex y Gxy. . . . .	49
A.1. Esquemático sobre la obtención de frecuencias de resonancia. . . . .	53
A.2. Esquemático sobre el montaje de materiales . . . . .	53

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

El interferometría de moteado laser o Laser speckle es un método de medición que involucra la interferencia de ondas de luz coherentes, es decir, laser. La técnica es aplicada sobre diversos materiales que tengan un grado de rugosidad. La interferometría de moteado es capaz de medir variaciones de desplazamientos de la superficie ya sea sobre objetos en movimientos u objetos en vibración.

El campo de estudio de la interferometría láser no existiría si no se hubiese construido una fuente de luz coherente, por lo tanto, con el nacimiento del láser en 1960 construido por Theodore Maiman ([Aboites, 1991](#)) se iniciaron nuevas líneas de investigación y descubrimientos en el campo de la óptica, entre ellos el fenómeno speckle.

El fenómeno speckle aparece siempre que se ilumina una superficie que tengan cierto grado de rugosidad y que sea iluminado con una fuente de alta coherencia, es decir, que sus ondas estén en fase y en la misma frecuencia. Otro dato importante es que este fenómeno de interferencia de moteado es sensible al movimiento del objeto iluminado, siendo así un portador de información sobre los cambios que sufra la superficie ([Gutierrez Hernandez, 2006](#)).

En el año 1968 se inició una nueva línea de investigación con la interferometria Speckle. [Massey \(1968\)](#) estudió el fenómeno de interferencia en objetos que estuvieran vibrando. El autor experimento y documento sus investigaciones del fenómeno speckle, utilizando un láser, una placa de metal y una bocina. La placa de metal fue pegada a la bocina y esta comenzó a vibrar con una frecuencia de 10 Hz hasta los 2000 Hz observando un fenómeno en el que las motas hacían un camino. [Massey \(1968\)](#) colocó los primeros pasos para la línea de investigación “laser Streak pattern” o “Patrón de camino láser”.

En 1971 [Fernelius and Tome \(1971\)](#) replicaron el experimento hecho por [Massey \(1968\)](#) modificando algunos parámetros. Su investigación fue enfocada al “patrón de camino láser” sobre una placa de metal de forma circular. La placa circular estuvo vibrando a frecuencias de 550 Hz, 825 Hz, 1130 Hz, 1625 Hz, 4650 Hz. Las frecuencias fueron escogidas por ser aquellas frecuencias en donde se observan los modos normales de vibración de la placa.

Los modos normales de vibración son casos especiales en el movimiento ondula-

torio. El movimiento corresponde al caso donde las partículas del sistema se mueven con la misma frecuencia y entre ellas mantiene una diferencia de fase constante. El sistema es capaz de almacenar y transferir energía entre dos o más formas de almacenamiento diferentes (Torres, 2006). Los modos normales tienen dos puntos importantes; los nodos que son aquellas regiones donde el sistema que está vibrando no se mueve o tiene amplitud nula y los antinodos que son aquellos lugares donde la amplitud es máxima.

Fernelius and Tome (1971) compararon sus resultados obtenidos de la interferencia con otro experimento. El otro experimento consiste en el método de Clhadni, método para visualizar puntos o zonas nodales de un sistema que se encuentra vibrando en un modo normal. Los autores notaron que el experimento de interferencia muestra las zonas de antinodos.

Años después Hopkins and Tidbury (1977) utilizaron un panel rectangular para hacerlo vibrar, en su estudio identificaron 3 formas básicas; una cresta, un pico y una silla de montar. Ellos identificaron cada patrón que se formaba con la interferencia. Los autores dedujeron que el “láser streak pattern” presenta el gradiente de deformación de la figura en oscilación. La figura 1.1 muestra las formas básicas obtenidas por Hopkins and Tidbury (1977), y también muestra el patrón de interferencia de cada una de ellas.

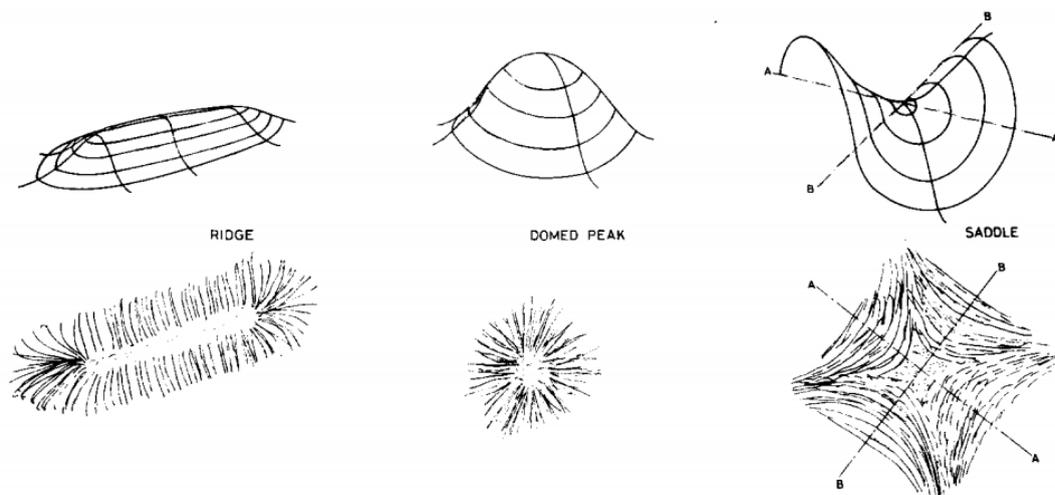


Figura 1.1: (Hopkins and Tidbury, 1977) Dibujo de una cresta, pico y montura típicos junto con sus correspondientes patrones de moteado láser. Recuperado (03-01-2022)

La técnica de interferencia fue usada después por Torres and Boulosa (2009) en su artículo como parte complementaria sobre el análisis de una tapa de guitarra. En el artículo la tapa de guitarra se mantuvo vibrando desde una frecuencia de 10 Hz hasta 2000 Hz. Con el barrido de frecuencias se ve cómo cambia la vibración de la tapa de guitarra viendo el gradiente de todas sus fases.

Años después Torres et al. (2022) implementaron la técnica sobre la tapa y el fondo de un violín. El violín fue cubierto con cinta reflectante en forma circular, de manera que el reflejo del haz láser sea más notorio. En el trabajo muestra cuatro

fotografías, en donde se acompaña los resultados de la interferencia y una simulación de la movilidad del violín.

Por otro lado, los estudios sobre vibraciones han ido creciendo con el tiempo y entre los fenómenos más estudiados son los modos normales de vibración. Hutchins (1977) implemento un método que desarrollo Ernst F. Chladni, para observar los modos de vibración en placas planas que tuvieran geometrías diversas.

El método de Chladni consiste en tener una placa plana de vidrio, metal, o madera y de cualquier geometría, colocarla de manera horizontal y poner un polvo fino encima de la placa. La placa se pone en resonancia ya sea con un excitador externo o haciéndola vibrar con un arco de violín provocando que el polvo fino se reacomode a los lugares donde la placa no tiene vibración (Hutchins, 1977).

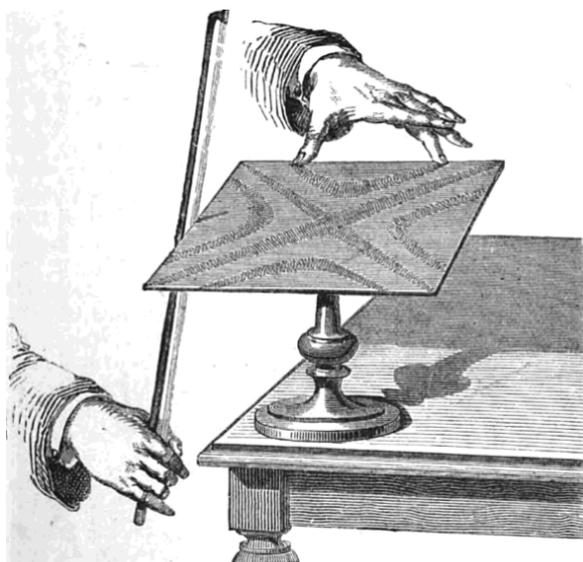


Figura 1.2: Metodo de Chladni como era aplicado por Ernst F. Chladni. "La placa es excitada en un punto a lo largo del borde, de manera que sea escuchado un sonido de un tono claro y sea obtenida una figura de Chladni. Esta es la resonancia de la placa a esa frecuencia en particula" (Hutchins, 1977).

Años después, Caldersmith (1984) recupero una función de la frecuencia de los modos de vibración que depende de las propiedades mecánicas. Caldersmith (1984) formuló para una geometría rectangular una función para las frecuencias de los modos de vibración ( $f$ ) que dependiera del modulo de Young ( $E$ ), el número de líneas nodales( $n$ ), la densidad( $\rho$ ), el grosor( $h$ ) y la longitud ( $l$ ). Esta función corresponde a la ecuación 1.1.

$$f_n^2 = 1.06 \frac{Eh^2}{\rho} \left( \frac{2n-1}{3.011l} \right)^4 \quad (1.1)$$

Torres and Torres-Torres (2015) caracterizaron la madera de una tapa de guitarra donde utilizaron una versión reducida de la ecuación anterior para calcular el modulo de Young ( $E$ ). La ecuación 1.2 es un despeje del modulo de Young ( $E$ ) de la ecuación de 1.1, donde depende de la densidad ( $\rho$ ), la longitud ( $l$ ), la frecuencia ( $f$ ) y el grosor

(h). La ecuación 1.2 solamente funciona para una placa rectangular con 2 líneas nodales.

$$E = \frac{\rho l^4 f^2}{1.0446h^2} \quad (1.2)$$

Torres and Torres-Torres (2015) hicieron una simulación por elemento finito para calcular el módulo de torsión ( $G$ ) de una muestra de madera que correspondía a la tapa de la guitarra y encontraron que el modo de vibración (1,1) depende del módulo de torsión ( $G$ ).

El método de elementos finitos es un método numérico de resolución de problemas de mecánica de sólidos. Es una herramienta de cálculo que permite a la persona resolver distintos problemas. La desventaja de los métodos finitos para la resolución de ecuaciones es que no dan una solución exacta. La solución por elemento finito es algo cercano a los fenómenos reales que contiene un porcentaje de error (Soto et al., 2019).

El método de elemento finito consiste en dividir una estructura en pequeñas fracciones. Cada fracción tiene información específica del modelo por lo que al momento de perturbarlo es posible seguir su comportamiento numérico. De esta manera es posible realizar un estudio sobre la geometría establecida (torres González, 2018).

Mecánica APDL, es un software desarrollado por parte de ANSYS y que viene en el paquete de ANSYS Academic. ANSYS es un software que ayuda a encontrar soluciones a problemas de ingeniería a través de la teoría de los elementos finitos para estructuras y de los volúmenes finitos para fluidos (ANSYS®, 2020).

Se utiliza para cálculos estáticos y resuelve problemas lineales y no lineales para estructuras, transferencia de calor, dinámica de fluidos, problemas acústicos y electromagnéticos (ANSYS®, 2020).

Los conceptos clave sobre vibraciones, ondas, e interferencia así como su análisis matemático han sido estudiados por varios autores y documentados en diferentes libros de texto. El libro de vibración y ondas de French (1974) contiene los conceptos necesarios para el desarrollo de esta tesis así como también el desarrollo matemático necesarios para el entendimiento de los tópicos.

Las ecuaciones diferenciales son herramientas matemáticas que pueden modelar a sistemas e interpretar sistemas físicos más cercanos a la realidad. Zill and Cullen (2013) en su libro de "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones al modelado" tiene los métodos matemáticos necesarios para la solución de ecuaciones diferenciales. Tiene soluciones a los casos clásicos como la ecuación del movimiento armónico simple (MAS). El MAS es un sistema al que se pueden reducir varios sistemas con ciertas aproximaciones, reduciendo problemas muy complejos a una solución mucho más sencilla. Zill and Cullen (2013) también propone una solución para la ecuación de onda por el método de separación de variables, que es un problema que bajo ciertas condiciones se pueden aproximar a sistemas más conocidos como por ejemplo: la onda en una placa rectangular con condiciones de frontera fijas.

Nebot (2019) Propone la ecuación de onda con condiciones de frontera en el que los extremos estén libres. Propone que en los cuatro lados de la placa, deben ser puntos de amplitud máxima o mínima. Estos puntos se escriben matemáticamente como una derivada espacial igualada a 0. Recordando que la primera derivada

igualada a 0 es la condición para el cambio de pendiente, es decir, se encuentra un mínimo o un máximo.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. General

Desarrollar un experimento de bajo costo para la visualización del gradiente de deformación. El experimento se desarrollara por medio de métodos de interferencia láser aplicado a una probeta de madera. La probeta de madera también será sometida a varios estudios para la visualización de sus modos normales de vibración.

### 1.2.2. Específicos

- Realizar un análisis espectral de frecuencias para la identificación de las resonancias de una probeta de madera.
- Realizar el experimento de Chladni para la determinar los modos normales de vibración con las frecuencias de resonancia ya identificadas.
- Crear una base fija para la colocación del láser y expandir el haz láser para cubrir la probeta de madera.
- Utilizar interferometría speckle para la visualización de los modos normales de vibración de la probeta de madera.
- Realizar una simulación en elemento finito para la obtención de imágenes de los modos de vibración de la probeta.
- realizar una simulación de gradiente con las soluciones de la ecuación de onda para la comparación con los resultados visuales de interferencia.

## 1.3. Justificación

El conocimiento de habilidades matemáticas a menudo se encuentra solamente en definiciones y resulta ser de difícil comprensión para los estudiantes en definiciones como el gradiente de una función. Se buscó obtener un sistema de interferometría LSP en el que se observe el gradiente de deformación de sistemas en vibración. El sistema de interferometría utilizado representa un bajo costo de inversión por lo que podrá ser implementado como prácticas de laboratorio en cursos de óptica.

## 1.4. Formulación del problema

El área de estudio de la interferometría es un campo que ha sido estudiado desde la invención del láser. Un campo de investigación es la textbfinterferometría Speckle, que principalmente es aplicada a deformaciones.

De la interferometría Speckle surgen otras sub áreas: el ESPI y el Laser Streak Pattern. El ESPI que es el más estudiado dentro de centros de estudios enfocados a ciencias ópticas y se encuentra en constante desarrollo.

El “laser streak pattern” (**LSP**) ha sido una técnica de interferencia poco usada ya que la documentación sobre ella ha sido con años muy separados a comparación de otros estudios. La ampliación de conocimiento de este fenómeno sería de gran utilidad si se quiere ver deformaciones en materiales o ciertos comportamientos, esto con bajo presupuesto y de manera mas rápida y se trata de una prueba no destructiva, ya que hacerlos por otro medio podría resultar más caro, más tiempo empleado y con la prueba el material podría quedar inutilizable.

Una de las áreas donde se puede aprovechar es en ámbitos de investigación para materiales acústicos y de ingeniería, ya sea como una demostración de interferencia en cursos de óptica, viendo un gradiente de deformación en cursos de calculo de varias variables, o teniendo conocimientos mas específicos para la determinación de las propiedades mecánicas de una pieza.

Para este proyecto se busca una manera diferente de interpretar las deformaciones de una probeta de madera con el fin de explicar y dar un enfoque más abierto sobre el fenómeno LSP.

# Capítulo 2

## Fundamentos teóricos

### 2.1. Vibración en materiales elásticos

Es bien sabido que las vibraciones gobiernan gran parte del estudio sobre la física. Virtualmente todo sistema tiene la capacidad de vibrar y la mayoría de los sistemas pueden hacerlo libremente de formas diferentes (French, 1974).

El estudio sobre las oscilaciones ha ido evolucionando, estas investigaciones han ido desde los fenómenos más simples como la vibración de una cuerda tensa por los extremos (French, 1974) hasta sistemas más complejos.

Una de las condiciones para que un sistema esté en vibración es que el sistema debe estar en el régimen elástico. Los materiales elásticos tiene como característica que si se les llega a aplicar una fuerza tal que llegue a cambiar su geometría inicial y después esta fuerza deja de ejercer, el material regresara a su posición inicial o estado de equilibrio sin sufrir ningún tipo de deformación, a esta propiedad de llegar a su configuración original es lo que caracteriza el régimen elástico (Torres, 2006).

El Modulo de Young o el módulo de elasticidad  $E$  es un coeficiente que relaciona la fuerza sobre una área entre el cambio de longitud unitario, esto se puede ver en la ecuación 2.1 (French, 1974) donde  $F$  es la fuerza,  $A$  es una superficie,  $L$  es la longitud del material estudiado.

$$-E = \frac{dF/A}{dL/l} \quad (2.1)$$

La ecuación 2.1 puede ser escrita como una ecuación diferencial, de la forma:

$$-EAdl = LdF$$

Integrando la distancia de 0 a  $x$  y la fuerza de 0 a  $F$  se obtiene:

$$\int_0^x -EAdL = \int_0^F LdF$$

De modo que:

$$-EAx = LF \quad (2.2)$$

Reordenando términos:

$$F = -\frac{EA}{L}x \quad (2.3)$$

Usando la segunda ley de Newton, donde  $\ddot{x}$  representa la aceleración y se obtiene:

$$m\ddot{x} = -\frac{EA}{L}x \quad (2.4)$$

Observando que la igualdad 2.4 toma la forma de una ecuación diferencial de segundo grado, definiendo  $\omega^2$  como:

$$\omega^2 = \frac{EA}{mL} \quad (2.5)$$

La ecuación 2.4 queda reducida como:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2.6)$$

Siendo conocida como la ecuación de Movimiento armónico simple (**MAS**) (Zill and Cullen, 2013, 183-190), se nota que la frecuencia angular depende de la masa del objeto ( $m$ ), el módulo de elasticidad ( $E$ ), el área transversal ( $A$ ) y la longitud del objeto ( $L$ ).

Una de las soluciones más conocida del MAS, es una combinación lineal de senos y cosenos, que queda expresada de la forma:

$$X(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (2.7)$$

Donde las constantes  $A$  y  $B$  son determinadas si el problema tiene condiciones iniciales (Zill and Cullen, 2013).

## 2.2. Ecuación de onda en una cuerda libre

### 2.2.1. Solución

Las vibraciones dentro del área de la mecánica se ha estudiado con la ley de Hooke, pero también existen sistemas de ecuaciones diferenciales con más variables y obtener resultados similares, como el caso de una onda en una cuerda. Para describir matemáticamente este fenómeno se parte de la ecuación de onda en una dimensión 2.8, aquí se ve que la función de onda  $u$  tiene una parte temporal y una parte espacial, más aparte un término  $v^2$  que es la velocidad.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.8)$$

Si la cuerda tiene extremos libres como condición de frontera, se escriben de la forma de derivadas parciales en  $x$  (Nebot, 2019) como:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

Estas condiciones de derivadas indican que la cuerda no está fija en los extremos, ya que explica que esos extremos siempre serán puntos máximos de oscilación y que al momento de solucionar el problema dará una solución diferente a la conocida que si se tuviera los extremos fijos.

La ecuación 2.8 se reescribirá pasando la velocidad a los términos donde la derivada temporal se encuentra.

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

Aplicando el método de variables separadas explica que la solución de la ecuación de onda, es una multiplicación de las partes espaciales y temporales (Zill and Cullen, 2013, 445-450), aplicándolo a la ecuación como:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.10)$$

Donde la parte  $X(x)$  representa la parte espacial y  $T(t)$  representa la evolución temporal de la onda.

Sustituyendo la ecuación anterior en la expresión 2.9 se obtiene:

$$X(x)v^2 \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \quad (2.11)$$

Por practicidad se utilizara la notación de LaGrange en las derivadas parciales.

Con la expresión anterior se divide entre el producto de las funciones espaciales y temporales, es decir  $X(x)T(t)$  obteniendo:

$$v^2 \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (2.12)$$

Se observa que la ecuación debe estar igualada a una constante la cual se nombrara como  $\lambda$ , esta constante ayudara a resolver la ecuación de onda.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (2.13)$$

Reescribiendo:

$$X''(x) = -\lambda X(x) \quad (2.14)$$

Se observa que la expresión 2.14 es una variante de la ecuación del movimiento armónico simple visto en la sección de vibración en materiales elásticos, en la ecuación 2.4, por lo que que la soluciones sera una combinación de senos y cosenos:

$$X(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad (2.15)$$

Para la aplicación de las condiciones de frontera, se deriva la expresión anterior, obteniendo:

$$X'(x) = -A\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (2.16)$$

Aplicando la primera condición de frontera, que indica que por el extremo izquierdo de la cuerda la derivada parcial será igual a cero, haciendo alusión de que la cuerda se encuentra libre o en máxima amplitud.

$$\begin{aligned} X'(0) &= -A\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}0) + B\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}0) \\ X'(0) &= -A\sqrt{\lambda} \cos(0) + \cancel{B\sqrt{\lambda} \sin(0)} \end{aligned}$$

$$X'(0) = -A\sqrt{\lambda} = 0 \quad (2.17)$$

De la expresión anterior se concluye que la constante  $A$  debe ser igual a 0, ya que de otro modo la igualdad no se podría cumplir, por lo que la solución queda reducida a solo la amplitud  $B$  de la forma:

$$X(x) = B \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad (2.18)$$

Aplicando la segunda condición de frontera:

$$\begin{aligned} X'(x) &= B\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ X'(L) &= B\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \end{aligned}$$

Para que la igualdad sea igual a cero, el seno debe valer cero y los valores en los que esto se cumple son en múltiplos de  $\pi$

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \quad (2.19)$$

La expresión 2.19 dice que la constante  $\lambda$ , tiene una definición que involucra la longitud de la cuerda ( $L$ ),  $\pi$  y  $n$ , esta expresión es denominada como los valores propios para el problema.

Con la definición anterior se reescribe la parte espacial de la ecuación de onda como:

$$\boxed{X(x) = B \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} \quad (2.20)$$

Esta solución corresponde a las funciones propias del problema en la parte espacial, abarca una familia de soluciones que van de  $n = 1$  hasta el infinito.

La parte temporal del problema queda escrita de manera similar a la parte espacial a diferencia que se tiene la velocidad de la onda, es decir:

$$v^2 T''(t) = -\lambda T(t) \quad (2.21)$$

Se observa que se trata de otra ecuación de un armónico simple, por lo que las soluciones es la suma de senos y cosenos, la diferencia será el argumento dentro de las funciones trigonométricas, ya conocido  $\lambda$  por la ecuación 2.19 se sustituye directamente, que nuestra solución:

$$T(t) = C \sin\left(\frac{n\pi}{Lv}t\right) + D \cos\left(\frac{n\pi}{Lv}t\right) \quad (2.22)$$

Por lo tanto, la ecuación de onda que escrita como:

$$u(x, t) = \left[ C \sin\left(\frac{n\pi}{Lv}t\right) + D \cos\left(\frac{n\pi}{Lv}t\right) \right] B \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.23)$$

La constante  $B$ , será absorbida por las constantes  $C$  y  $D$ , de tal modo que la expresión queda de la forma:

$$u(x, t) = \left[ C \sin\left(\frac{n\pi}{Lv}t\right) + D \cos\left(\frac{n\pi}{Lv}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.24)$$

La solución solo muestra las funciones propias de la ecuación diferencial resuelta, y el resultado general es la suma de todas estas en términos de  $n$ , de la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C \sin\left(\frac{n\pi}{Lv}t\right) + D \cos\left(\frac{n\pi}{Lv}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.25)$$

Las condiciones iniciales para saber las constantes  $C$  y  $D$  estarán definidas por las siguiente expresión, que dice que al tiempo cero la cuerda tendrá una configuración  $f(x)$  y que la velocidad de la onda corresponde a otra función  $G(x)$ .

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ u'(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

Aplicando la primera condición, se obtiene:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C \sin\left(\frac{n\pi}{Lv}0\right) + D \cos\left(\frac{n\pi}{Lv}0\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} D \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Se aprecia que la ecuación 2.26 tiene similitud con la serie de Fourier de cosenos ([Zill and Cullen, 2013](#), pag 404-407), que es:

$$f(t) \sin \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right] \quad (2.27)$$

Donde las constantes están definidas como:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (2.28)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt \quad (2.29)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt \quad (2.30)$$

Por lo tanto, se observa la similitud entre  $a_n$  y nuestra constante  $D$ , de las ecuaciones 2.29 y 2.26, por lo que se puede definir la constante  $D$  como:

$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (2.31)$$

Aplicando la segunda condición en la derivada se obtiene:

$$\partial_t u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C \frac{n\pi}{Lv} \cos\left(\frac{n\pi}{Lv}t\right) - D \frac{n\pi}{Lv} \sin\left(\frac{n\pi}{Lv}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.32)$$

$$\partial_t u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C \frac{n\pi}{Lv} \cos\left(\frac{n\pi}{Lv}0\right) - D \frac{n\pi}{Lv} \sin\left(\frac{n\pi}{Lv}0\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C \frac{n\pi}{Lv} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x)$$

Notando que es la misma expresión que en el caso anterior, por lo que su constante quedara definida como:

$$C_n = \frac{2v}{n\pi} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (2.33)$$

En resumen de la solución de la ecuación de onda, se observa que es una combinación de la parte espacial que depende solamente del coseno y la parte temporal que depende de senos y cosenos. Las constantes dependen de las condiciones iniciales en la configuración inicial que tengan, más a parte que la suma de cada solución que dé  $n$  acercara más al fenómeno real, es decir:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \underbrace{C_n \sin\left(\frac{n\pi}{Lv}t\right) + D_n \cos\left(\frac{n\pi}{Lv}t\right)}_{\text{Parte temporal}} \right] \underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{Parte espacial}} \quad (2.34)$$

### 2.2.2. Análisis espacial

La parte espacial de la ecuación 2.34 es importante, ya que mostrara la forma que tendrá la onda en ciertas frecuencias, a esta forma se le conocerá como modos normales de vibración (Zill and Cullen, 2013, 408) y es estudiado como ondas estacionarias.

Los modos normales de vibración son casos especiales en el movimiento de osciladores, corresponden al caso en que las partículas del sistema se mueven con la misma frecuencia y mantienen una diferencia de fase constante. Es decir, alcanzaran su amplitud máxima y mínima en el mismo instante. (Torres, 2006).

Los modos normales presentan varios puntos, los nodos, los antinodos y de esto la forma característica del sistema. También es importante que los sistemas tiene un numero discreto de modos normales (Nebot, 2019).

Los puntos nodales son aquellos lugares donde el sistema no se mueve, siempre parecen constantes y se encuentran en la posición de equilibrio del sistema. Los antinodos, son aquellos puntos en que la amplitud es máxima o mínima (Nebot, 2019).

En ondas estacionarias el modo normal de vibración está dado por la parte espacial de la solución de la ecuación de onda, es decir:

$$X(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.35)$$

El primer modo normal, cuando  $n = 1$  se le conoce como frecuencia fundamental, los demás modos de  $n = 2, 3, 4, 5...$  se les conoce como los armónicos y tienden a ser múltiplos del primer modo fundamental (French, 1974).

La figura 2.1 muestra el primer modo fundamental de la cuerda con extremos libres, se observa que el nodo se encuentra en la mitad de la longitud de la cuerda donde el coseno vale 0.

Los nodos son calculados de manera que el  $X(x) = 0$  (Nebot, 2019) esto es cuando el  $\cos(wx)$  vale 0, es decir:

$$\begin{aligned} X(x) &= \cos\left(\frac{n_m\pi}{L}x\right) = 0 \\ \frac{n_m\pi}{L}x &= n\pi - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Despejando x se obtiene:

$$x_n = \frac{L}{n_m} (n - 1/2) \quad (2.36)$$

Se encuentran los antinodos de la misma manera, es decir, cuando el coseno es máximo (Nebot, 2019):

$$\begin{aligned} X(x) &= \cos\left(\frac{n_m\pi}{L}x\right) = 1 \\ \frac{n_m\pi}{L}x &= n\pi \end{aligned}$$

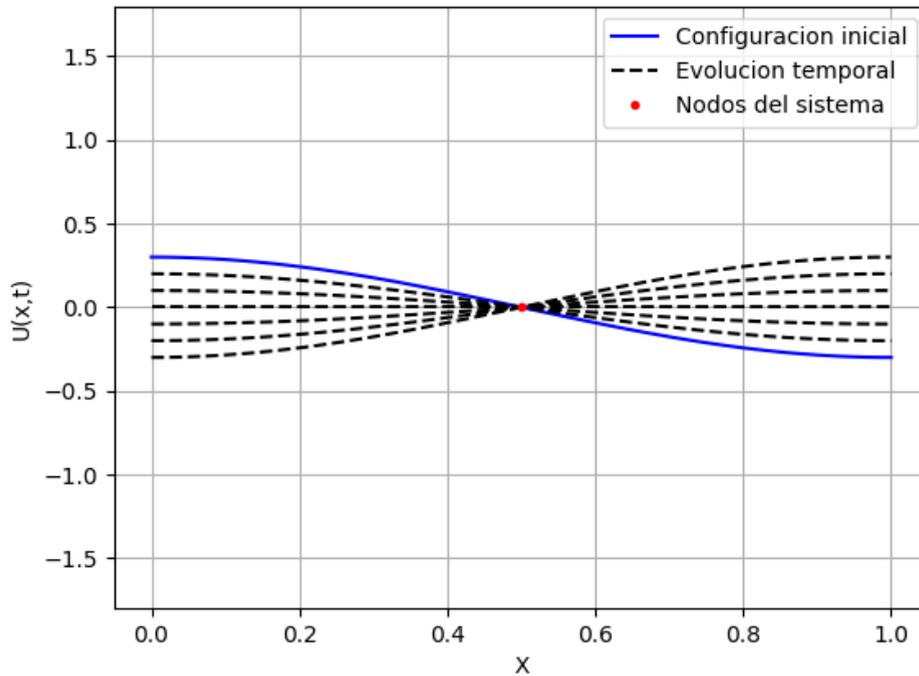


Figura 2.1: Primer modo normal de una cuerda con los extremos libres, mostrando el nodo del sistema en rojo, el sistema inicial en azul y la evolución temporal en negro con líneas punteadas

Despejando  $x$  se obtiene:

$$x_n^+ = \frac{Ln}{n_m} \quad (2.37)$$

Donde  $L$  es la longitud de la cuerda,  $n_m$  es el número del modo normal de vibración y  $n$  es la posición del nodo que abarca números enteros positivos desde el 1 hasta  $n_m$ , es decir  $n = 1, 2, \dots, n_m$

Para el primer modo normal ( $n_m = 1$ ) de una cuerda de longitud  $L$ , se obtiene que  $x = L/2$ , en que el nodo se encuentra a la mitad de la cuerda, esto se observa en la figura 2.1 donde el nodo se muestra con un punto color rojo.

En la gráfica del segundo modo normal de vibración de la cuerda, es decir  $n_m = 2$  se observa que existen dos puntos nodales, puntos donde la amplitud de la cuerda es 0, y también se localiza con un antinodo (Naranja) que es el punto donde la amplitud es máxima.

La localización de los nodos está dada por la formula 2.36, que para el segundo caso son:

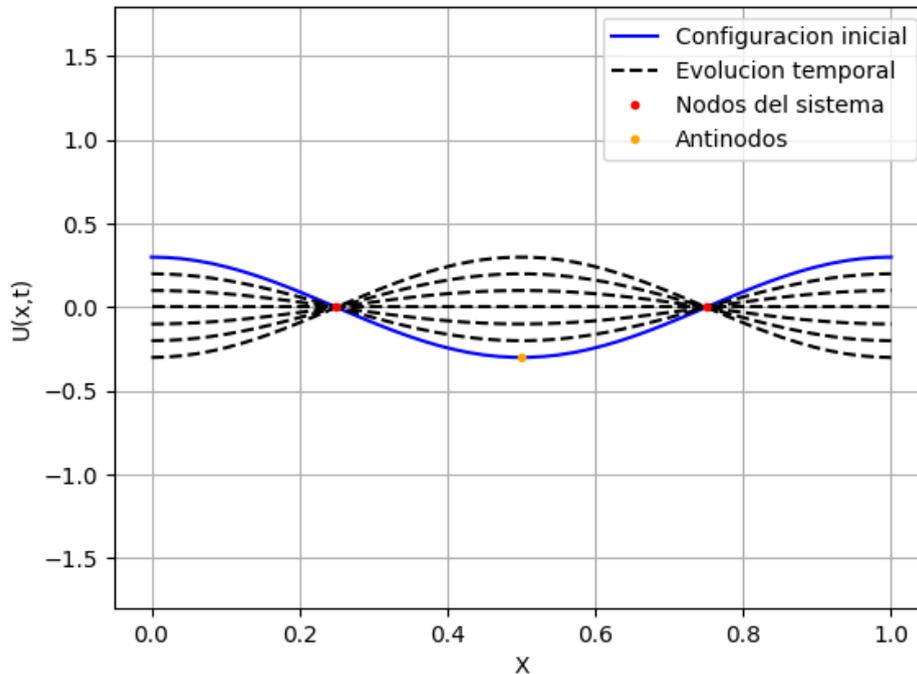


Figura 2.2: Segundo modo normal de una cuerda con los extremos libres, mostrando los nodo del sistema en rojo, los antinodos en naranja, el sistema inicial en azul y la evolución temporal en negro con líneas punteadas

$$x_1 = \frac{L}{2} (1 - 1/2) = \frac{L}{4}$$

$$x_2 = \frac{L}{2} (2 - 1/2) = \frac{3L}{4}$$

Y los antinodos están dados por la formula 2.37, aplicando se obtiene:

$$x_1^+ = \frac{L * 1}{2} = \frac{L}{2}$$

A partir de este análisis, se ve que la secuencia aumenta en trozos de un cuarto de cuerda, comenzando con un máximo que es la condición de frontera, luego en el primer cuarto un nodo, que corresponde al punto  $x_1$ , después a un antinodo que es el punto  $x_1^+$  y volviendo por otro nodo correspondiente al punto  $x_2$ .

Se puede intuir que la cantidad de nodos será igual al modo normal de vibración, si se encuentra en el modo 3, se encontrara con 3 nodos y con los antinodos sin contar los extremos se puede intuir que sucede algo similar, que es el modo de vibración

menos 1, es decir, si se encuentra el tercer modo, se presentara con dos antinodos en el sistema. Esto solo aplica para el problema de la cuerda con extremos libres.

Todo esto se puede apreciar en la figura 2.2, que muestra la fase inicial de la cuerda (azul), la evolución temporal que tiene (negro punteado), los nodos (puntos rojo) y los antinodos (naranja).

Modo de vibración	Modo 1	Modo 2	Modo 3	modo 4
Nodo 1	$L/2$	$L/4$	$L/6$	$L/8$
Nodo 2	x	$3L/4$	$3L/6$	$3L/8$
Nodo 3	x	x	$5L/6$	$5L/8$
Nodo 4	x	x	x	$7L/8$

Cuadro 2.1: Localización de los puntos nodales de 4 modos normales de vibración de una cuerda de extremos libres

La tabla 2.1 muestra la cantidad de nodos existentes de cada modo de vibración, se aprecia que la separación de cada nodo es dos veces la unidad, es decir, del punto 1 pasa al 3 para ser otro nodo. se intuye que los puntos faltantes son los antinodos, que se pueden calcular con la formula 2.37, dando como resultado la tabla 2.2.

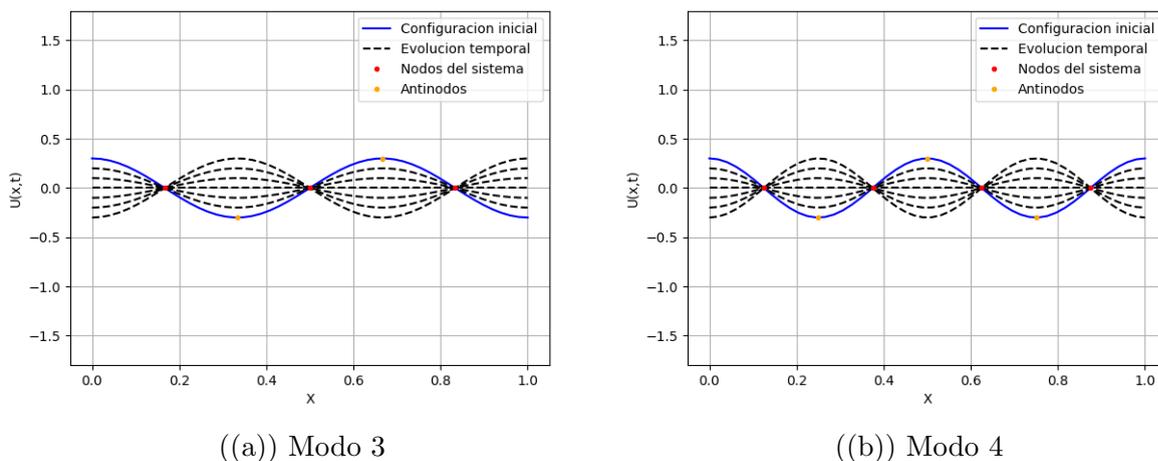


Figura 2.3: Modos 3 y 4 de una cuerda de extremos libres, se muestra su configuración inicial (Azul), evolución temporal (negro punteado), los puntos nodales (puntos rojos) y los antinodos (puntos naranjas)

Modo de vibración	Modo 1	Modo 2	Modo 3	modo 4
Antinodo 1	x	$2L/4$	$2L/6$	$2L/8$
Antinodo 2	x	x	$4L/6$	$4L/8$
Antinodo 3	x	x	x	$6L/8$

Cuadro 2.2: Localización de los Antinodos de 4 modos normales de vibración de una cuerda de extremos libres

La figura 2.3 muestra los modos 3 y 4 de la cuerda, en la imagen 2.3(a) corresponde al modo de vibración 3, en esta se ven 3 nodos que corresponden a los de la tabla 2.1 y los antinodos que se encuentran referenciados de la tabla 2.2, lo mismo sucede con la imagen 2.3(b), donde hay 4 nodos y 3 antinodos sin contar los extremos.

## 2.3. Ecuación de onda en una membrana rectangular

### 2.3.1. Solución

La definición para la ecuación de onda para una membrana rectangular, debe ser una ecuación que tenga dos coordenadas espaciales y una variable de evolución temporal. Esta ecuación de onda bidimensional esta escrita en la ecuación 2.11 (Nebot, 2019):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.38)$$

Las condiciones de contorno están regidas a que los extremos se encuentren libres y sean puntos máximos, escrito de manera matemática es aplicando derivadas espaciales e igualando a 0:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L_x} &= 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=L_y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Y las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= F(x, y) \\ \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= G(x, y) \end{aligned} \quad (2.40)$$

La solución es por separación de variables, por lo tanto, indicando que nuestra función principal será una multiplicación de las 3 funciones que la definen, dos espaciales y una temporal.

$$U(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (2.41)$$

Sustituyendo la función 2.41 a la ecuación de onda 2.38 se obtiene: En este punto se usara la notación de LaGrange.

$$X(x)Y(y)T''(t)v^2 = Y(y)T(t)X''(x) + X(x)T(t)Y''(y) \quad (2.42)$$

Dividiendo la expresión anterior por  $X(x)Y(y)T(t)$  se obtiene:

$$v^2 \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (2.43)$$

Como se ve en la sección anterior de la ecuación de onda en una dimensión, las partes espaciales se igualan a una constante, a  $\lambda$  y a  $\gamma$ , así se obtiene la ecuación del armónico simple.

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\lambda \\ \frac{Y''(y)}{Y(y)} &= -\gamma \end{aligned} \quad (2.44)$$

Reordenando:

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\lambda X(x) \\ Y''(y) &= -\gamma Y(y) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Se hace notar que las soluciones serán las mismas que la ecuación 2.20, por lo que nuestras funciones espaciales son:

$$\begin{aligned} X(x) &= \cos\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) \\ Y(y) &= \cos\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Donde las condiciones de contorno dan a conocer el valor de las constantes:

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 \\ \gamma &= \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Conociendo estos datos, se pasa a la parte temporal. Las constantes, se sustituyen en la ecuación 2.43, obteniendo:

$$v^2 \frac{T''(t)}{T(t)} = -(\lambda + \gamma) \quad (2.48)$$

Sumando los términos de los paréntesis:

$$\lambda + \gamma = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2$$

$$\lambda + \gamma = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2}\right)$$

Redefiniendo

$$\omega_{nm}^2 = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2}\right) \quad (2.49)$$

Por lo que la ecuación 2.48 queda como:

$$v^2 \frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega_{nm}^2 \quad (2.50)$$

De la misma manera que en el caso de una dimensión, se obtiene la misma solución, a diferencia que las constantes tendrán dos integrales de la serie de Fourier por cada coordenada espacial, de forma que la solución temporal será:

$$T(t) = C_{nm} \sin\left(\frac{\omega_{mn} t}{v}\right) + D_{nm} \cos\left(\frac{\omega_{mn} t}{v}\right) \quad (2.51)$$

Donde las constantes  $C_{nm}$  y  $D_{nm}$  están definidas como:

$$D_{nm} = \frac{2}{L_x} \frac{2}{L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} F(x, y) \cos\left(\frac{n\pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right) dy dx \quad (2.52)$$

$$C_{nm} = \frac{2}{L_x} \frac{2}{L_y} \frac{v}{\omega_{nm}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} G(x, y) \cos\left(\frac{n\pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right) dy dx \quad (2.53)$$

Por lo tanto, la solución completa corresponde a la multiplicación de la parte espacial y la parte temporal, con los índices en aumento que van desde el 0 hasta el infinito.

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[ \underbrace{C_{nm} \sin\left(\frac{\omega_{mn} t}{v}\right) + D_{nm} \cos\left(\frac{\omega_{mn} t}{v}\right)}_{\text{Parte temporal}} \right] \underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right)}_{\text{Parte espacial}} \quad (2.54)$$

### 2.3.2. Análisis espacial

El análisis espacial de la ecuación de onda bidimensional será usando la parte espacial de la ecuación 2.54. Se observa que la ecuación depende de dos índices que son  $n$  y  $m$ , dentro de los cosenos. Cada uno de estos valores son las funciones propias del sistema, lo cual, si se varía cada elemento se observa los modos normales de la placa.

Para el primer caso, que es  $n = 0$  y  $m = 0$ , es la placa en reposo o en el estado de equilibrio, esto lo se observa en la figura 2.4

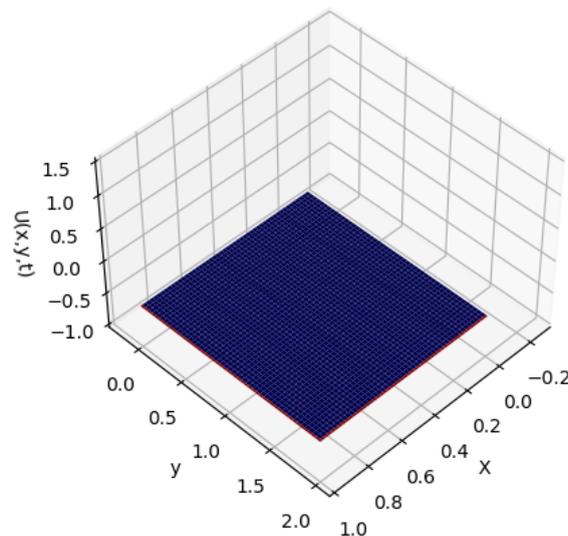


Figura 2.4: Membrana rectangular sin vibrar

En el caso en el que  $m = 1$  se entiende que el coseno debe comenzar a oscilar y que la placa también lo hará, la grafica que muestra esto es la figura 2.5, donde se ve una proyección en el plano  $(z, x)$  en este plano se ve que la membrana se comporta como si de una cuerda se tratase en su primer modo normal, esto se debe a que solo uno de los cosenos de la solución está en funcionamiento y que el otro se encuentra con un valor fijo que es 1.

De la gráfica 2.5 se ve que la parte roja es de máxima amplitud, mientras que la azul es de mínima amplitud, la parte blanca se le conoce como **línea nodal**. En el plano bidimensional, no son puntos nodales los que se encuentren en el sistema, sino, un conjunto de ellos que formaran una línea. Esto indica que el sistema no se mueve en esas zonas.

Para calcular esta línea nodal, se utiliza la fórmula 2.36, nada más cambiando las longitudes de los lados, quedando como:

$$x_n = \frac{L_x}{n_m} (n - 1/2) \quad (2.55)$$

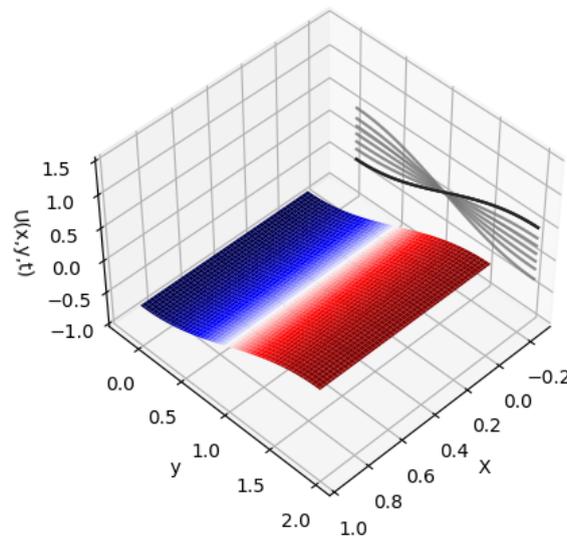


Figura 2.5: Membrana rectangular modo  $n=0$ ,  $m=1$

$$y_n = \frac{L_y}{m_m} (n - 1/2) \quad (2.56)$$

Por ejemplo, para cuando se tiene  $m = 1$  y  $n = 0$  como es el caso de la figura 2.5, se obtiene que  $X_n = 0$  ya que  $n$  solo existe en los números naturales, es decir,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  y obteniendo que para  $Y_n = 1/2$  que es valor esperado como en el ejemplo del primer modo normal de la cuerda.

Cuando  $n = 1$  y  $m = 1$  se puede ver una figura como la gráfica 2.6, que es cuando se tiene un nodo por mitad en el eje  $x$  y uno por mitad en el eje  $y$ , aquí se ve que la parte del centro no se mueve y como las orillas son las que oscilan mientras que en medio se forma una especie de estrella.

Las mismas proyecciones en los ejes  $(z, x)$  y  $(z, y)$  se observa que las cuerdas cumplirán los mismos modos de vibración, por lo que para la membrana es solo la combinación de dos cuerdas en diferentes planos.

Las líneas nodales son:

$$\begin{aligned} Y_n &= 1/2 \\ X_n &= 1/2 \end{aligned}$$

En la tesis de maestría de [Torres \(2006\)](#) muestra una serie de imágenes 2.7 que presentan los modos de vibración de una tabla de madera como investigación de los materiales para la construcción de una tapa de guitarra. En esa sección, identifica los modos  $n = 1$  y  $m = 1$  en una simulación de ansys y por el método de Chaldni esta técnica consiste en agregar una arena fina y exitar el objeto con un vibrador, en este caso una bocina, hasta lograr su frecuencia de resonancia para que la arena se vaya a las líneas nodales ([Hutchins, 1977](#)). Se puede apreciar que ambas imágenes

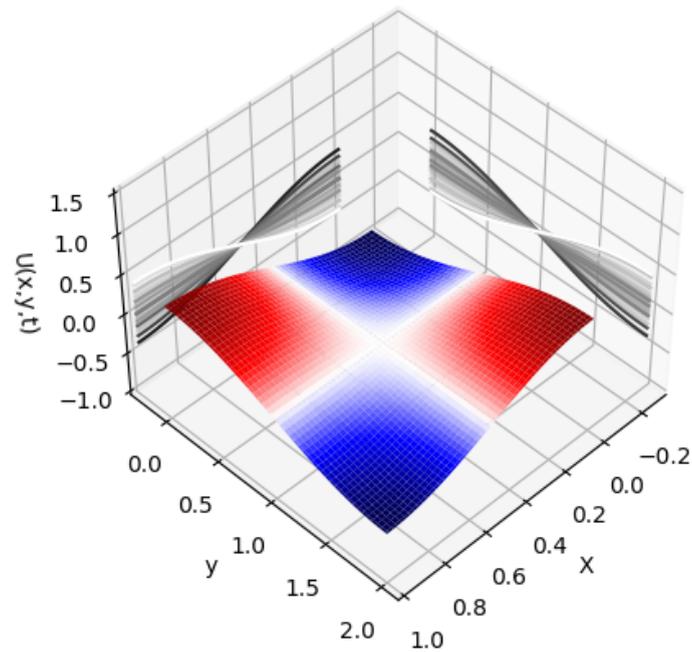


Figura 2.6: Membrana rectangular modo  $n=1$ ,  $m=1$

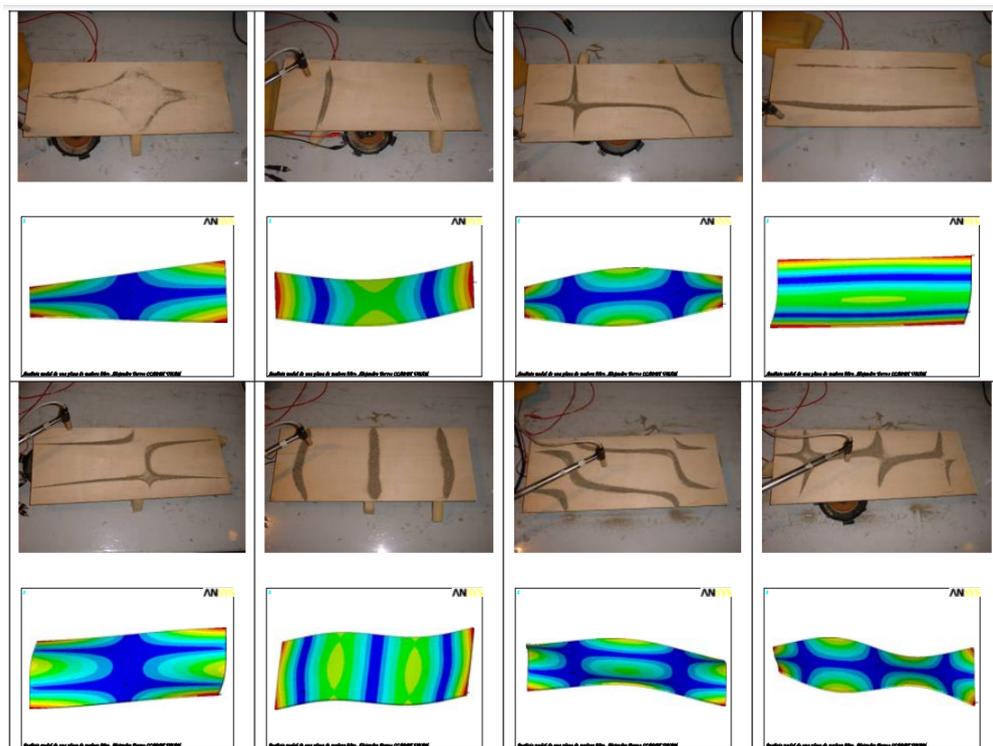


Figura 2.7: [Torres \(2006\)](#) Comparación de los modos de vibración visualizados mediante el método de Chladni y un análisis modal en ANSYS. Recuperado 03-01-2022

son coherentes y que la figura calculada 2.6 es la misma, en las 3 figuras se pueden ver las líneas nodales del sistema y la forma representativa del modo de vibración.

La figura 2.8 muestra una serie de gráficas de los modos de vibración de la membrana, se observa que dependiendo de donde se varié los índices de  $n, m$  son las líneas nodales que aparecen, en el caso de la figura *c*) se ve que  $n=0$ , pero  $m=2$ , indicándose que solo habrá dos líneas nodales que atraviesan el eje  $x$ .

La comparación de las figuras 2.7 y 2.8 es de suma importancia, ya que una muestra un modelo graficado de la ecuación de onda en la parte espacial y se nota que coinciden con los datos reportados del trabajo [Torres \(2006\)](#), por ejemplo, de la figura 2.7 las figuras representadas son:

$$\begin{array}{l} n = 1 \ m = 1; \quad n = 2 \ m = 0; \quad n = 2 \ m = 1; \quad n = 0 \ m = 2; \\ n = 1 \ m = 2; \quad n = 3 \ m = 0; \quad n = 2 \ m = 2; \quad n = 3 \ m = 1; \end{array}$$

Los cuales se observa que coinciden con los graficados de la figura 2.8

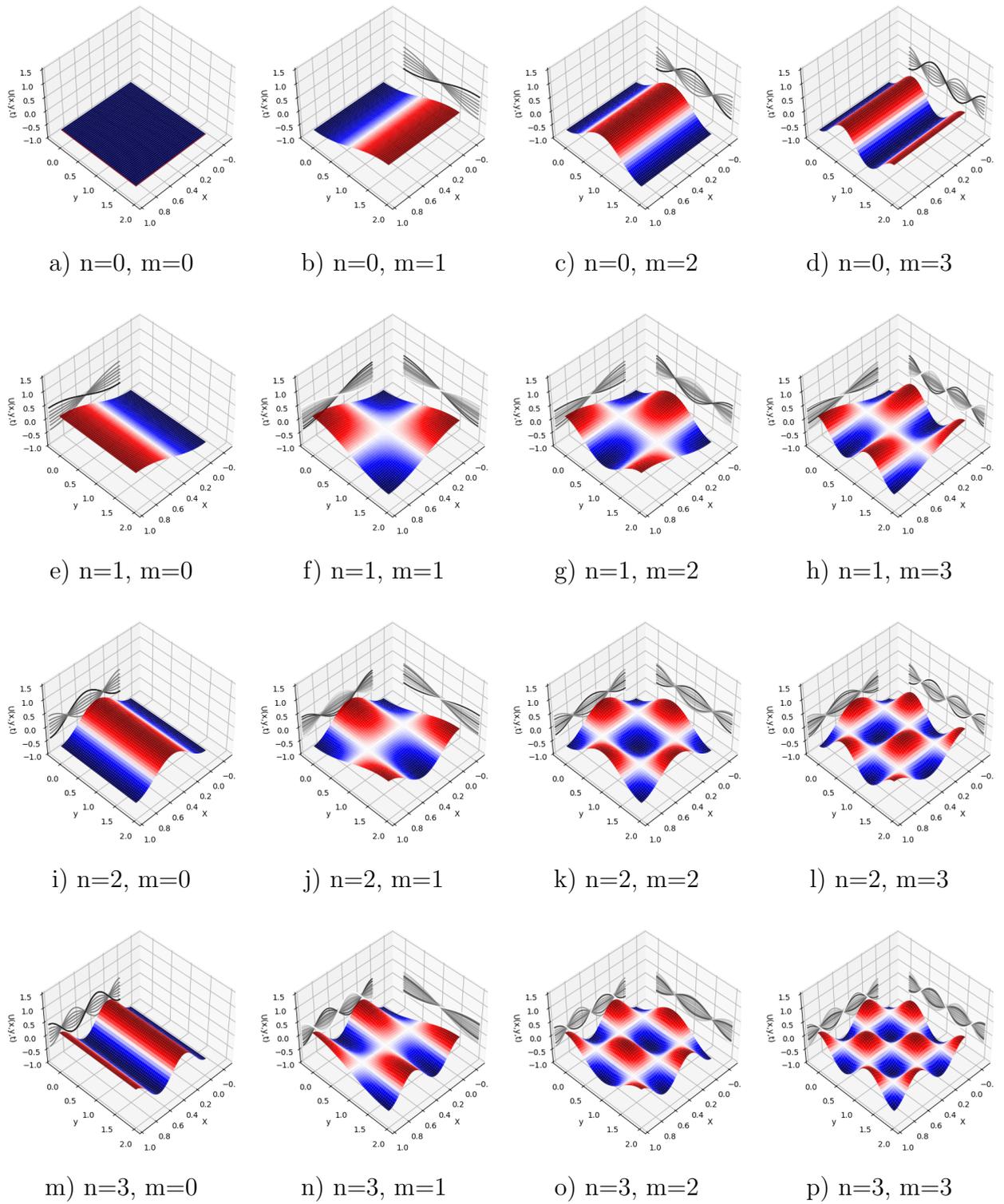


Figura 2.8: Comparación de los modos de vibración variando  $n=0,1,2,3$  con  $m=0,1,2,3$ , con las proyecciones en los planos  $(z,x)$  y  $(z,y)$

## 2.4. Interferencia

Las secciones anteriores mostraron la solución de la ecuación de onda por medio del método de variables separadas, se hizo de esa manera para poder estudiar el sistema espacial que fue de intereses especial en el análisis para los modos de vibración que no es otra cosa que ondas estacionarias.

Existen más soluciones para la ecuación de onda, resaltando que la solución de la ecuación debe ser de la forma:

$$u(x, t) = f(kx \pm vt) \quad (2.57)$$

Es decir, como una suma en las componentes espaciales y temporales (French, 1974). Poniendo un ejemplo para una onda que viaja a lo largo de una cuerda, nuestra solución sería:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= A \sin(kx - \omega t) \\ u_2(x, t) &= B \sin(kx + \omega t) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Donde  $v$  es la velocidad,  $k$  es el numero de onda,  $t$  es la variable temporal y  $x$  es la variable espacial.

derivando cada expresión una vez respecto a  $x$  y otra respecto  $t$  se obtiene:

$$\begin{aligned} u_{1t} &= -A\omega \cos(\omega t - kx) \\ u_{1x} &= Ak \cos(\omega t - kx) \end{aligned}$$

Las ecuaciones 2.4 muestran la primera derivada, es importante notar que el argumento cambió, esto porque el coseno se trata de una función par por lo que se igualan los términos de centro sin importar el signo que tenga por fuera.

$$\begin{aligned} u_{1tt} &= A\omega^2 \sin(\omega t - kx) \\ u_{1xx} &= Ak^2 \sin(\omega t - kx) \end{aligned}$$

Igualando, para cumplir la ecuación de onda

$$A\omega^2 \sin(\omega t - kx) = Ak^2 \sin(\omega t - kx) \quad (2.59)$$

Donde las amplitudes se eliminan, y pasando la frecuencia angular obteniendo:

$$\sin(\omega t - kx) = \frac{k^2}{\omega^2} \sin(\omega t - kx) \quad (2.60)$$

Donde la velocidad queda definida como:

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (2.61)$$

Con esto, se observa que la respuesta que se propuso como solución cumple con ecuación de onda y es de suponer que la que tiene el signo positivo en el argumento también será solución.

Recordando una característica de las soluciones de ecuaciones de derivadas parciales es que puede existir una familia de funciones que pueden ser solución, por lo tanto, la suma de esta familia de funciones también será solución (Zill and Cullen, 2013).

Se puede entender que existe más de una onda en el mismo espacio, al mismo tiempo, conociendo el principio de superposición.

Matemáticamente, esto lo se escribe como:

$$u_R = A \sin(kx - \omega t + \delta_1) + B \sin(kx - \omega t + \delta_2) \quad (2.62)$$

Se trata de dos ondas con la misma frecuencia pero con diferente amplitud y una desfasada de la otra

Tomando la identidad trigonométrica de la suma de ángulos internos del seno y del coseno:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \quad (2.63)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \quad (2.64)$$

Aplicando a la ecuación 2.62 se obtiene:

$$u_R = A \sin(kx - \omega t) \cos(\delta_1) + A \cos(kx - \omega t) \sin(\delta_1) + B \sin(kx - \omega t) \cos(\delta_2) + B \cos(kx - \omega t) \sin(\delta_2)$$

Reordenando:

$$u_R = \sin(kx - \omega t) (A \cos(\delta_1) + B \cos(\delta_2)) + \cos(kx - \omega t) (A \sin(\delta_1) + B \sin(\delta_2))$$

definiendo:

$$\begin{aligned} A_t \cos(\phi) &= A \cos(\delta_1) + B \cos(\delta_2) \\ A_t \sin(\phi) &= A \sin(\delta_1) + B \sin(\delta_2) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Sustituyendo:

$$u_R = \sin(kx - \omega t) A_t \cos(\phi) + \cos(kx - \omega t) A_t \sin(\phi)$$

Aplicando la identidad del seno de la ecuación 2.63 en la ecuación anterior:

$$\boxed{u_R = A_t \sin(kx - \omega t + \phi)} \quad (2.66)$$

Donde se observa que la suma de dos ondas con la misma frecuencia dará como resultado una onda pero con un desfase, este desfase es el termino  $\phi$ . Para calcular  $A_t$  se obtiene a partir de las ecuaciones 2.4, donde se elevan al cuadrado y luego se suman:

$$\begin{aligned}A_t^2 \cos(\phi)^2 &= A^2 \cos^2(\delta_1) + B^2 \cos^2(\delta_2) + 2AB \cos(\delta_1) \cos(\delta_2) \\A_t^2 \sin(\phi)^2 &= A^2 \sin^2(\delta_1) + B^2 \sin^2(\delta_2) + 2AB \sin(\delta_1) \sin(\delta_2)\end{aligned}$$

Sumando:

$$\begin{aligned}A_t^2 \cos(\phi)^2 + A_t^2 \sin(\phi)^2 &= A^2 \cos^2(\delta_1) + B^2 \cos^2(\delta_2) + 2AB \cos(\delta_1) \cos(\delta_2) \\&\quad + A^2 \sin^2(\delta_1) + B^2 \sin^2(\delta_2) + 2AB \sin(\delta_1) \sin(\delta_2)\end{aligned}$$

Simplificando

$$A_t^2 = A^2 + B^2 + 2AB (\cos(\delta_1) \cos(\delta_2) + \sin(\delta_1) \sin(\delta_2))$$

se observa que la ecuación cumple con la igualdad de diferencia de ángulos del coseno ecuación 2.64, por lo que aplicando:

$$\boxed{A_t^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\delta_1 - \delta_2)} \quad (2.67)$$

Con esto se ve que la amplitud resultante  $A_t$  tiene un término de Coseno, esto dice que la amplitud ira variando que si llega un punto máximo o mínimo dependiendo de la diferencia de fases.

- Caso 1: Cuando el Coseno es igual a 1, es decir, cuando la diferencia de fases es igual a  $2n\pi$ , entonces:

$$\begin{aligned}A_t^2 &= A^2 + B^2 + 2AB \\&= (A + B)^2 \\A_t &= A + B\end{aligned}$$

Esto dice que cuando se está en fase, la amplitud total será igual a la suma de las amplitudes de las ondas, dando como resultado una **interferencia constructiva** (Gutierrez Hernandez, 2006)

El grafico 2.9 muestra dos ondas armónicas de amplitud 1 y 2, estas dos ondas se suman formando una onda armónica nueva. Se nota que la amplitud es la suma de cada una de las ondas, ya que se encuentra en fase la amplitud resultante es de 3 unidades.

- Caso 2: Cuando el Coseno es igual a -1, es decir, cuando la diferencia de fases es igual a  $(2n + 1)\pi$ , entonces:

$$\begin{aligned}A_t^2 &= A^2 + B^2 - 2AB \\&= (A - B)^2 \\A_t &= A - B\end{aligned}$$

Es decir que cuando se está en oposición de fase, la amplitud total será igual a la diferencia de las amplitudes de las ondas, dando como resultado una **interferencia destructiva**.

El grafico 2.10 muestra dos ondas en desfase, cada onda tiene una amplitud de 1 y 1.1 unidades, por lo que la onda resultante tendrá una amplitud pequeña siendo esta la diferencia de las amplitudes, por lo que su amplitud total es de 0.1 unidades (Gutierrez Hernandez, 2006).

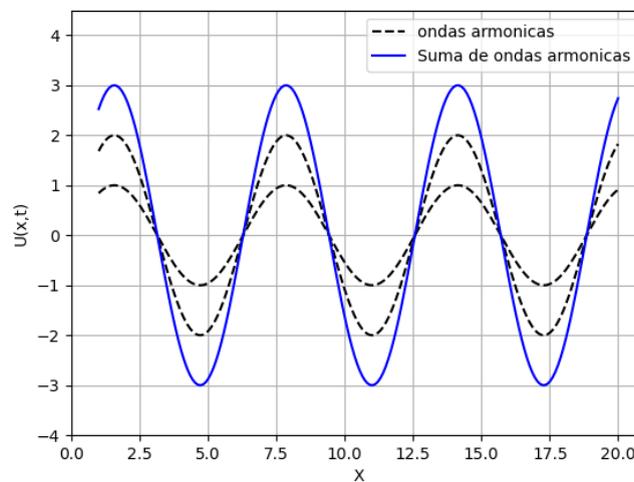


Figura 2.9: Superposición de dos ondas con la misma frecuencia y que se encuentran en fase **interferencia constructiva**

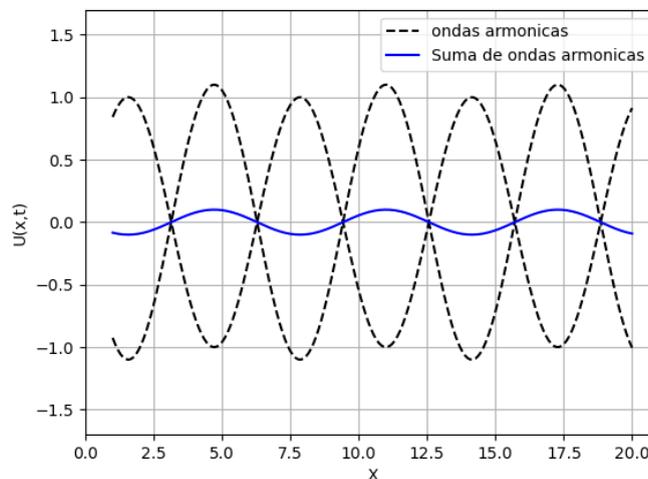


Figura 2.10: Superposición de dos ondas con la misma frecuencia y que se encuentran en desfase **interferencia destructiva**

### 2.4.1. Interferencia en ondas de luz

El experimento de Young o de la doble rendija es un experimento típico de interferencias en luz. Consiste en hacer incidir un frente de onda sobre dos rejillas pequeñas separadas en una aproximación a la longitud de onda de la luz fuente (Gutierrez Hernandez, 2006).

En la figura 2.11 se puede apreciar una aproximación del experimento de la doble rendija, se observa que ambas rejillas son expuestas a una fuente de onda original, y cada rendija genera una onda secundaria, esto del principio de **Fresnel-Hyugens**, las ondas secundarias tendrán la misma frecuencia, velocidad y longitud de onda que la original y entre ellas tendrán una diferencia de fase constante, así formando un patrón de interferencia donde la interferencia constructiva son mostrados con puntos rojos (French, 1974).

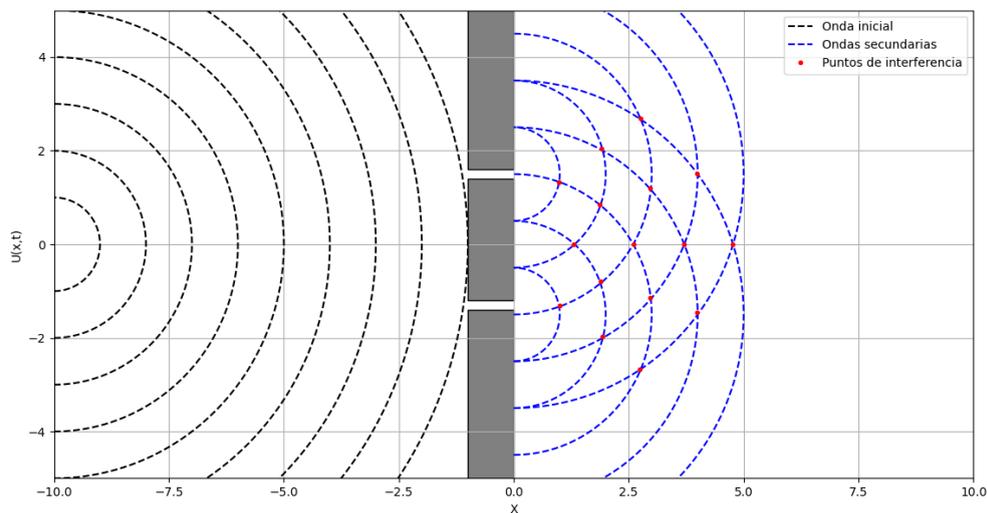


Figura 2.11: Diagrama del experimento de young, con la onda inicial, y las secundarias mostrando así los puntos de interferencia constructiva

Con esto, es posible la visualización de varias franjas de interferencia

Si se busca una expresión matemática para determinar en qué punto se observar una franja en la interferencia constructiva, se hace uso de la trigonometría y algunas aproximaciones.

Para calcular la interferencia en el punto A de la figura 2.12 de las ondas  $S_1$  y  $S_2$  que están separadas por una distancia  $a$ , se debe calcular  $\Delta r$  (En la imagen  $D_r$ ). Sabemos que uno de los caminos es un poco más largo por la diferencia del  $\Delta r$  por lo que nuestra expresión es:

$$S_2A - S_1A = \Delta r = a \sin(\theta) \quad (2.68)$$

Como se ve, rápidamente se relaciona con un  $\sin(\theta)$  ya que aplicando la trigonometría se cumple esta condición de triángulos rectángulos.

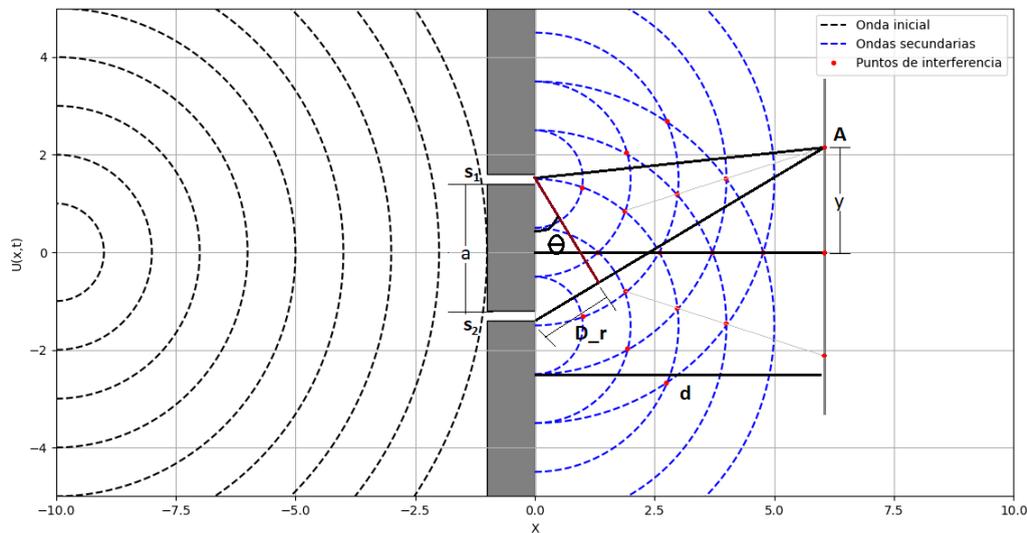


Figura 2.12: Diagrama del experimento de young, con la onda inicial, y las secundarias mostrando así los puntos de interferencia constructiva, se muestran los elementos necesarios para conocer interferencia constructiva

Si se hace una aproximación, en la que  $d \gg a$  esto dice que  $\sin(\theta) = \text{tg}(\theta) = \frac{y}{d}$ , esto solo será válido para  $\theta < 0.1$  radianes, por lo tanto:

$$\Delta r = a \sin(\theta) = a \frac{y}{d} \quad (2.69)$$

Teniendo la relación

$$\Delta r = n\lambda \quad (2.70)$$

Se relaciona y obtiene:

$$\boxed{\lambda = \frac{ya}{nd}} \quad (2.71)$$

Donde  $\lambda$  es la longitud de onda,  $a$  es la separación de las rejillas,  $n$  se le conocerá como numero de orden y va desde el  $n = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$  donde el 0 lo tomaremos como nuestro primer máximo en el punto central o la franja más brillante y  $d$  será la distancia de los puntos de origen de las ondas hasta el plano de observación (French, 1974).

### 2.4.2. Interferencia de patrones de moteado

Si una superficie rugosa es iluminada con una luz que tenga un alto grado de coherencia, es decir, que la diferencia de sus fases sea constante, como la de un láser, la luz dispersada tendrá una distribución de intensidades aleatoria, se verá un efecto granular sobre la superficie iluminada como la de la imagen 2.13.

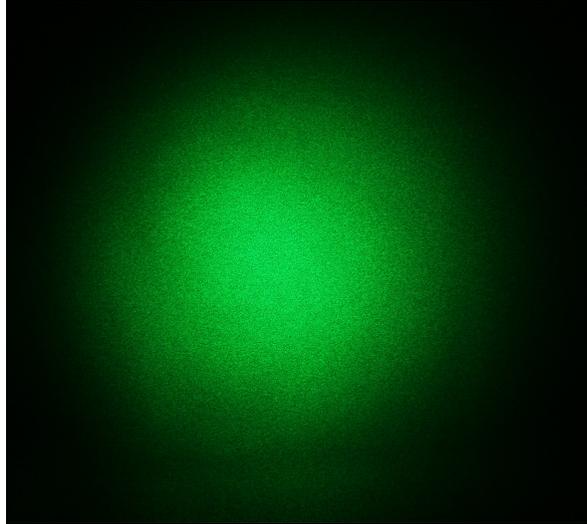


Figura 2.13: Interferencia de moteado (Speckle)

A este efecto se le conoce como moteado laser. Esta estructura que consiste en puntos negros y claros distribuidas de forma aleatoria, parece no tener ninguna relación con las propiedades macroscópicas de la superficie ([Gutierrez Hernandez, 2006](#)).

Este fenomeno es sensible a los movimientos de la superficie; teniendo información de relativa de los cambios de la superficie, es decir deformaciones.

El moteado es producido por la interferencia de varias ondas secundarias, estas ondas son producidas por el haz cuando ilumina la superficie y esta al ser un plano rugoso, cada rugosidad actuara como una fuente nueva por el principio de Hyugens-Fresnel, produciendo así un patrón granular aleatorio ([Gutierrez Hernandez, 2006](#)).

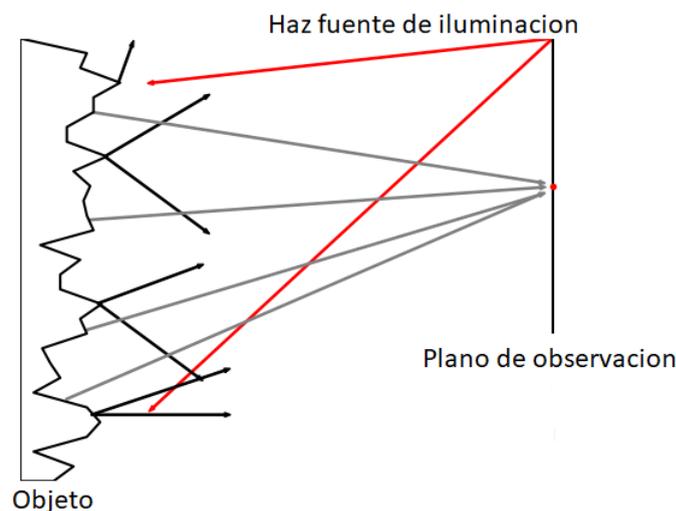


Figura 2.14: Formación de un patrón Speckle

Es importante mencionar que las crestas del material rugoso deben ser menores

a la longitud de onda usado y dependiendo de la distancia del observador los puntos pueden variar de una posición a otra, es decir, el moteado depende mucho del plano de observación y de la rugosidad del material (Gutierrez Hernandez, 2006). Todo esto se ilustra en la figura 2.14.

Con la llegada de la interferencia de moteado llegaron varios puntos de estudio sobre las deformaciones de los materiales, entre ellas se encuentra **La interferometría de patrones de moteado electrónico (ESPI)** que consiste en grabar por medio digital una imagen del objeto iluminado en reposo y después con una deformación para después restar ambas imágenes, dando así información de cuándo fue la deformación. Es posible estudiar deformación a lo largo del objeto así como también las flexiones del mismo (Gutierrez Hernandez, 2006).

También abrió paso a otro estudio **Laser Streak Pattern** en el que se ve el gradiente de deformación de materiales que estén oscilando (Torres and Boulosa, 2009).

### 2.4.3. Laser Streak Pattern

Como se mencionó, el LSP nace como parte del estudio de la interferometría Speckle. Aquí el objeto de estudio son las deformaciones de materiales cuando estos se encuentran vibrando en algún modo normal de vibración.

El efecto muestra varias líneas sobre la deformación de la placa. Los puntos donde mas se flexiona la placa se correrá una distancia  $x$ . Los puntos donde la placa no se flexiona permanecerán inmóviles (Fernelius and Tome, 1971).

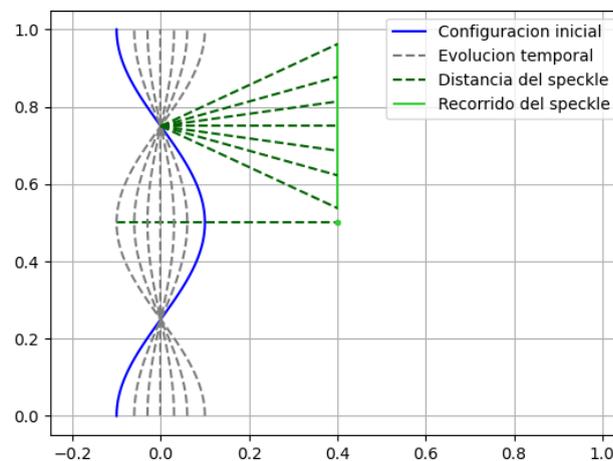


Figura 2.15: Seguimiento de un punto en una cuerda vibrante en su segundo modo de vibración

La imagen 2.15 muestra lo anterior, si se escoge un punto que es uno de los nodos de la cuerda, se ve que la proyección del moteado sobre el objeto plano solo estará oscilando de arriba a abajo a la misma frecuencia que toda la placa, esto formara una estela del camino que se puede captar por una cámara fotográfica.

En cambio, si se escoge uno de los antinodos, puntos donde no hay flexión, se puede observar cómo es que el speckle solo hace una línea recta mostrándo un solo punto en el plano de observación.

Con esto, y la variedad de puntos se obtiene el **LSP**.

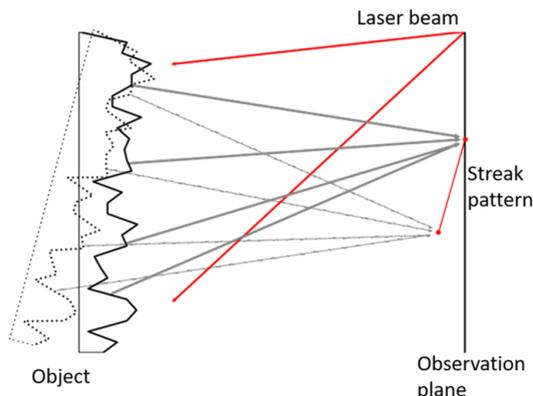


Figura 2.16: Seguimiento de un punto sobre una superficie rugosa

La imagen 2.16 muestra el seguimiento de un punto speckle sobre un plano de observación, aquí se puede ver que cuando el objeto se mueve el punto también se mueve haciendo ese “camino”, el cual es el conocido “Laser streak pattern”.

## 2.5. Gradiente y visualización

El gradiente es una operación vectorial, que actúa únicamente sobre funciones escalares. El gradiente produce un vector cuya magnitud es la razón de cambio de la función y que apunta en la dirección de los puntos máximos. El gradiente  $\nabla f$  de un campo escalar  $f$  es un campo vectorial. El vector gradiente de  $f$  evaluado en un punto arbitrario  $x$  del dominio de la función  $f$ ,  $\nabla f(x)$ , indicia la dirección en la cual el campo varía más rápidamente y su módulo representa la velocidad de variación de  $f$  en dirección de dicho vector.

el gradiente de una función  $f$  en coordenadas rectangulares se define como:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (2.72)$$

Donde la función  $f$  se deriva en cada variable espacial, resultando una función vectorial, con los vectores unitarios  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ .

Al ser una herramienta de cálculo de derivadas de varias variables, la forma de la visualización del gradiente es difícil de interpretar si no se tienen gráficos.

El lenguaje de programación Python es una herramienta que puede ser utilizada para la visualización de gráficos de funciones y planos vectoriales. La figura 2.17 muestra el gráfico de una función de dos variables que es comúnmente conocida como silla de montar, en la que la función es:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad (2.73)$$

Y aplicando el gradiente es:

$$\nabla f(x, y) = 2x\hat{x} - 2y\hat{y} \quad (2.74)$$

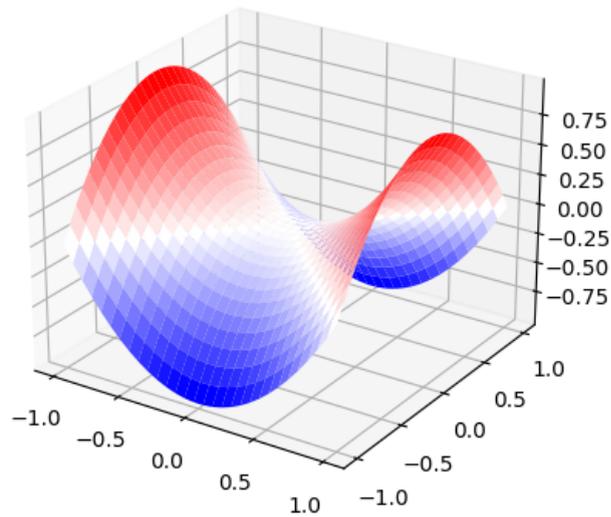


Figura 2.17: Gráfica de la función  $\nabla f(x,y)=2x\hat{x}-2y\hat{y}$ , comúnmente conocida como gradiente de la silla de montar.

Haciendo notar que las zonas en rojo, son las de mayor amplitud, las zonas en azul son las de menor amplitud, se puede estimar que el gradiente de la función  $f$  debe ser vectores que se dirigen a las zonas de mayor amplitud, a mitad del uno de los ejes ya sea el  $x$  o  $y$  y terminan en su contra parte. Se puede intuir que donde comienza es la parte de menor amplitud y que terminan en la zona de mayor amplitud, como lo muestra la figura 2.18.

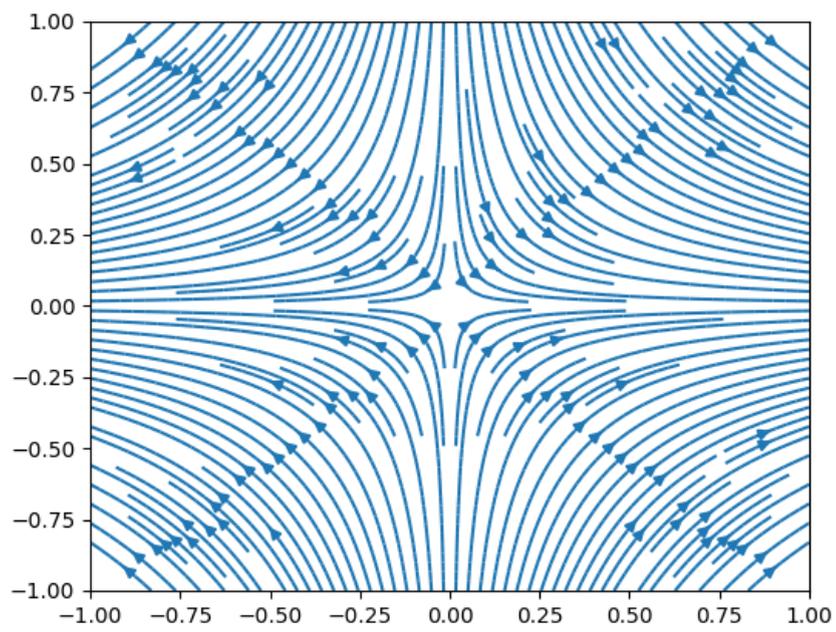


Figura 2.18: Gráfica del gradiente de la función  $f(x,y)=x^2-y^2$ , comúnmente conocida como silla de montar.

# Capítulo 3

## Metodología

En este capítulo se describirán los pasos de cómo se obtiene la frecuencia de los modos normales de vibración de una probeta de madera, también se hace el experimento de Chladni para identificar a que frecuencia corresponde cada modo, también se crea un sistema computacional resolviendo por método finito para tener una imagen de que es lo que sucede con la probeta y sus modos normales y se construye un sistema experimental interferométrico para la visualización del sistema en tiempo real del gradiente de los modos normales de vibración.

La probeta de madera que fue utilizada, se trata de un prisma rectangular de medidas  $20.2 \times 4.1 \times 0.7$  cm, y tiene un peso de 21g por lo que su densidad es de  $393 \text{ kg/m}^3$ .

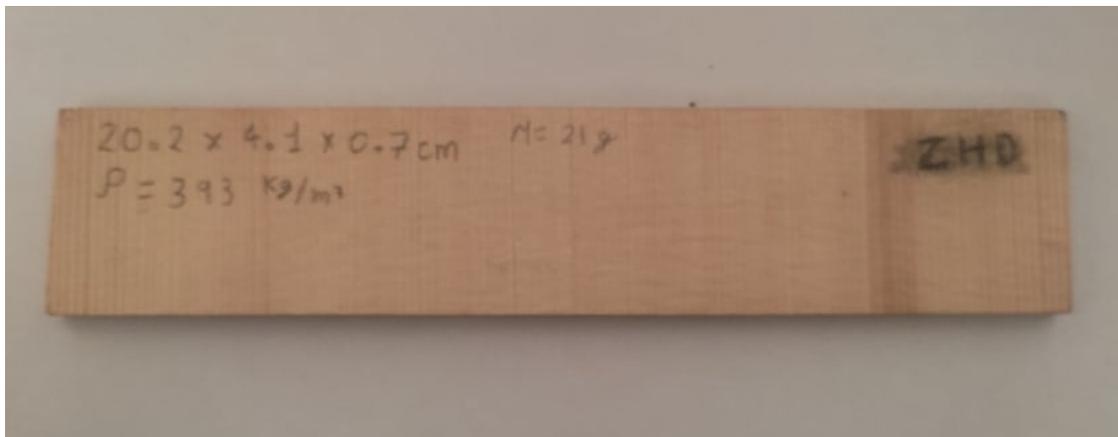


Figura 3.1: Probeta de madera con anotaciones de sus dimensiones, peso y densidad.

### 3.1. Visual Analyser

Para calcular la frecuencia de resonancia de la probeta se utilizó un programa libre llamado "*Visual Analyzer*", este programa tiene la característica de detectar sonidos por medio de un micrófono y regresar una gráfica del análisis espectral de frecuencias captadas.

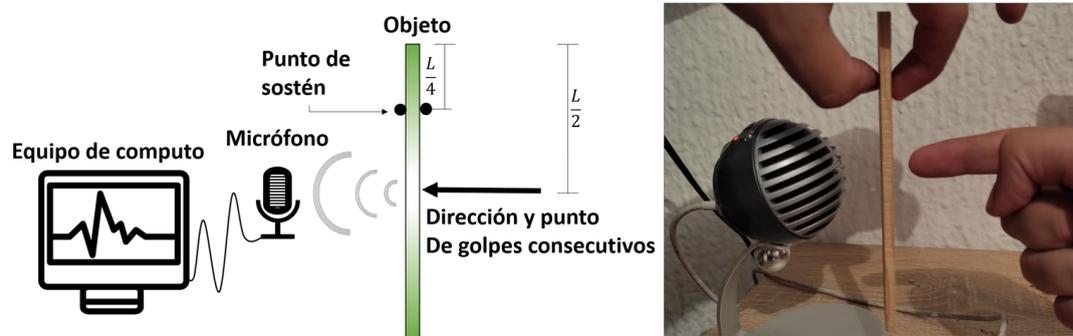


Figura 3.2: Diagrama esquemático(izquierda) y montaje real (derecha) para la obtención de la frecuencia de resonancia de la probeta de madera.

La probeta de madera fue sostenida a una aproximación de su cuarta parte de su longitud de manera muy suave, 5.05 cm, con la finalidad de que la probeta pueda ser tratada como un sistema libre, fue excitada golpeándola con los nudillos de la mano en la parte central para producir un ruido. El sonido producido contiene la mayoría de los modos normales de vibración de la probeta. El proceso mencionado se puede apreciar mejor en la figura 3.2 en donde el objeto verde representa la probeta de madera.

El sonido fue enviado por medio de un micrófono al programa de ‘Visual Analyser’, donde muestra dos ventanas 3.3, la primera ventana es un osciloscopio la cual no se le toma importancia ya que en ese momento no está recibiendo sonido alguno.

La segunda ventana muestra un análisis espectral de frecuencias, que está configurado para promediar 30 muestras y recibe un total de 32768 muestras para la transformada de Fourier haciendo que la gráfica tenga una resolución de  $2.5Hz$ .

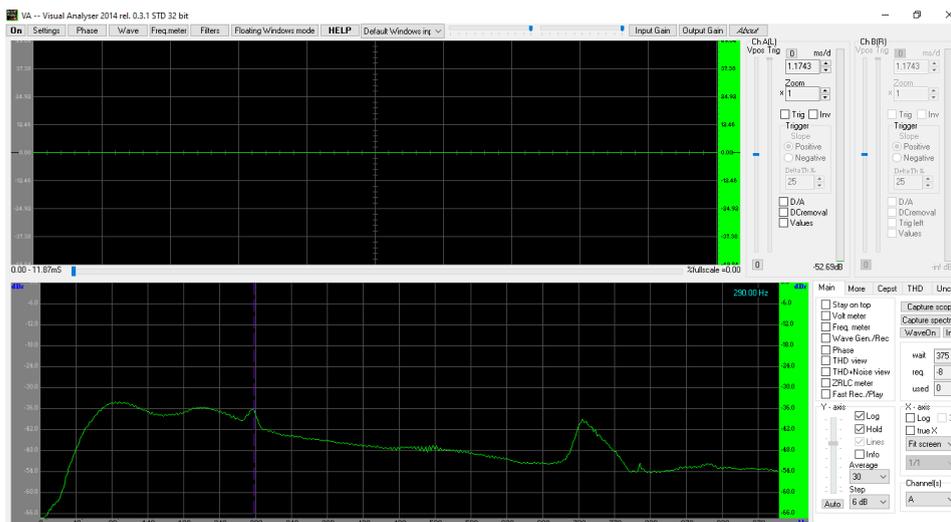


Figura 3.3: Entorno de Visual Analyser

En la segunda pantalla muestra una serie de picos y curvas, para la probeta arroja 3 picos significantes, cada uno de estos corresponde a las frecuencias de los modos normales de vibración.

Los datos arrojados de "visual analyser" fueron guardados en modo texto y las frecuencias de los picos fueron anotados en la probeta de madera con lápiz.

### 3.2. Figuras de Chladni

Para identificar a qué modo normal corresponde cada frecuencia obtenida con el análisis se utilizó el método de Chladni que consiste en hacer vibrar un objeto que tenga por encima una sustancia granulada en cada frecuencia de resonancia, formando así patrones con la sustancia granular que se le conocen como figuras de Chladni.

La probeta fue sostenida por un par de soportes de cartón con una esponja, estos fueron colocados por de debajo de la probeta estando aproximadamente en las líneas nodales del primer modo, la bocina con un alambre pegado fue localizada en una orilla de la probeta y posterior fue prendida, esta explicación se puede observar en la figura 3.4.

La bocina se ajustó a la primera frecuencia encontrada haciendo que los granos comenzaran a moverse de manera tal que pasado un determinado tiempo formaron un patrón de vibración correspondiente al modo (2,0), una vez formado el patrón se silenció la bocina y se tomó una foto del fenómeno.

Se ajustó la frecuencia para el segundo pico del espectro de frecuencias y se prendió la bocina, posterior a que se formara el segundo patrón de vibración se tomó una foto. Este mismo proceso se hizo con la tercera frecuencia.

Se obtuvieron 3 fotos de los modos normales de vibración, una por cada frecuencia captada.



Figura 3.4: Diagrama esquemático(Izquierda) y montaje real (derecha) para sostener la probeta para el experimento de Chladni

### 3.3. Ansys

Con las medidas de la probeta y su peso se ejecutó una solución de elemento finito, es decir, una simulación de la barra para poder conocer sus propiedades mecánicas como módulo de Young y su coeficiente de torsión.

Se creó un catch en un editor de texto. En este archivo de texto se encuentran los comandos internos para que un software externo sea capaz de leerlo y correr dichas instrucciones siendo el software externo ANSYS.

El batch comienza con una limpieza y marca el inicio /CLEAR, START y luego por el nombre del proyecto /TITLE, nombre, seguido de las unidades que fueron utilizadas que es el sistema internacional /UNITS, SI, donde estas líneas sirven como preparación del archivo.

El archivo continua con la referencia /PREP7, donde se definen las variables, geometrías, propiedades de los materiales y el tipo de mallado.

Para las variables se crearon 3 que valen 0 cada una, es decir  $X0 = Y0 = Z0 = 0$ , y luego se crearon 3 variables más con las coordenadas finales de cada eje, donde  $Xf = 0.0415$ ,  $Yf = 0.202$  y  $Zf = 0.007$  que corresponden a las medidas de la probeta en metros, se agrega otra variable en la que se agrega el peso de la barra en kilogramos y por último se crea otra variable para definir el tamaño de la malla.

```
!Variables
X0=0
Xf=0.041
Y0=0
Yf=0.202
Z0=0
Zf=0.007
Peso=0.021
Tamano_malla=0.01
```

En la parte de operaciones se calcula el volumen de la barra en una nueva variable llamada "Volumen" que es la multiplicación de las longitudes de la barra, y se crea otra definición para la densidad.

```
Volumen=Xf*Yf*Zf
Densidad=Peso/Volumen
```

Ansys tiene un comando interno para la creación de bloques con las longitudes personalizadas, este comando es "Block" y como argumentos recibe las coordenadas iniciales de cada eje y regresa un bloque con las dimensiones especificadas. El comando completo es:

```
BLOCK,X,X1,Y,Y1,Z,Z1
```

Para la definición de las propiedades del material, se usa el comando "MP" que pide como argumento a que propiedad se refiere y posterior sus valores. Las propiedades usadas son *DENS*, *EX*, *GXY*, donde el primero sirven para indicar la densidad del material que previamente fue calculado, *EX* se refiere al módulo de Young y es el responsable de formar el modo de vibración (2,0) y *GXY* corresponde al modo (1,1), por lo que estos valores se irán ajustando hasta que las frecuencias de salida de ANSYS correspondan con los picos de Visual Analyser y correspondan con las formas de las figuras de Chladni, estos valores serán anotados en la probeta de madera con lápiz. Los valores encontrados son  $EX = 0.989 \times 10^9 Pa$  y  $GXY = 0.385 \times 10^9 Pa$ .



Figura 3.5: Creación de la probeta con el comando "Block"- Cortesía de ANSYS

```
!Propiedades del material
```

```
MP,DENS,1, Densidad
```

```
MP, EX, 1, 0.989e9
```

```
MP, GXY, 1, 0.385E9
```

El código sigue con la parte del mallado de la barra, donde comienza definiendo material 1 y continua con la forma de la malla que es el "SOLID92" que este mallado corresponde a rayar el bloque creado de forma triangular. El tamaño de los triángulos está definido por el comando *ESIZE* que utiliza el tamaño de la malla definido en las variables, por último el comando *VMESH* malla la única figura existente. En este punto se agrega el comando *FINISH* dando a entender que se termina la parte de pre-procesos.

```
!Mallado de la Barra
```

```
MAT,1
```

```
ET,1,SOLID92
```

```
ESIZE,Tamano_malla
```

```
VMESH,1
```

```
FINISH
```

El código continua con la parte de la solución */SOLU*, primero se define el tipo de análisis que se hará, en este caso será del tipo Modal por lo que el comando usado es *ANTYPE, MODAL* y luego se especifican cuantos modos normales se esperan, que para estudiar la barra serán 20, siendo el código *MODOPT, SUBS,20*, se continua con el comando *SOLVE* donde ya el programa soluciona la probeta simulada dando las frecuencias y los modos de vibración de la probeta, estos coincidieron con el método experimental de Chladni.

```
/SOLU
```

```
ANTYPE,MODAL
```

```
MODOPT,SUBSP,20
```

```
SOLVE
```

```
FINISH
```

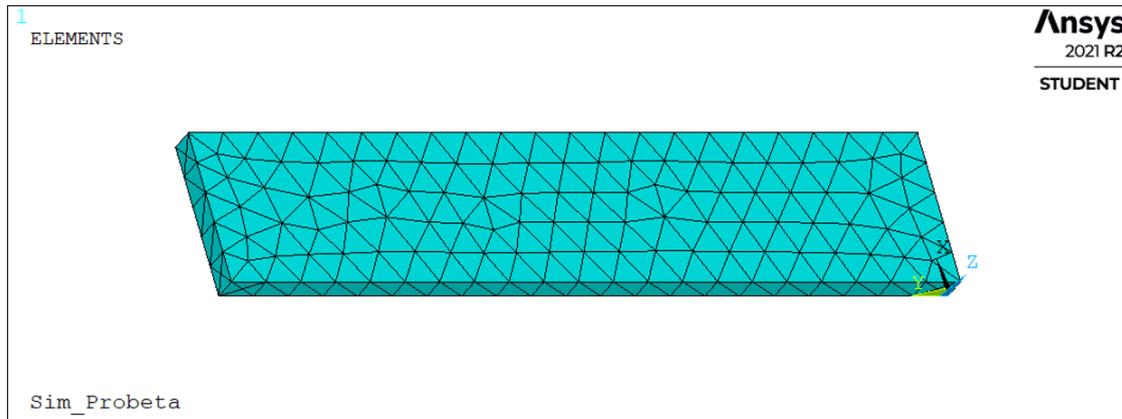


Figura 3.6: Creación de la probeta con el comando "Block" y mallado- Cortesía de ANSYS

El archivo de texto es guardado en una localización del equipo y posterior se abre el programa Mechanics APDL de Ansys, en la barra de menús se da clic en el menú "FILE" donde desplegara un submenú y se da clic en "Read input from" y se navega hasta encontrar el archivo el cual será ejecutado de forma automática, dando los resultados.

### 3.4. Interferometria

Para crear el sistema de interferencia, la probeta se sostuvo por una cuerda por la parte de abajo y una liga por la parte de atrás para que el sistema este semi-libre. Para el montaje se sigue el diagrama esquemático de la figura 3.7 en la que se observa que el objeto (verde) se trata de la probeta y que está sujeta por un par de ligas que estarán sujetas por un par de perfiles de aluminio debido a la practicidad de esta para ser unidas.

Los perfiles de aluminio utilizados son especiales para construcción debido a la facilidad del manejo, siendo de metal darán una base sólida sobre la cual se podrá poner la probeta, estos perfiles tienen una longitud de 30 cm y 20 cm de alto, siendo el ancho y el grosor un cuadrado de 2.5 cm

Para el sistema interferométrico, el haz laser que se utilizo fue uno laser comercial con longitud de onda de 532 nm (verde) con una potencia de 500mW el cual fue expandido con una lente de aumento x20 para iluminar la muestra.

La base con la muestra fue iluminada por el láser y por la parte de atrás se colocó una bocina la cual actuara como excitador a una distancia aproximada de 6 cm.

La cámara utilizada es de la marca Canon modelo Rebel EOS T3I 600D, con una resolución de 20 Mp y con una lente EF de 50mm. La cámara se colocó por un lado del láser y su configuración fue de una distancia focal de f13, un tiempo de fotografía de 1/10s, y el enfoque manual fue configurado hasta observar el patrón Speckle de la probeta iluminada. El esquema de montaje y el montaje final se aprecia mejor en la figura 3.8.

Se tomaron 4 fotografías diferentes en aspectos diferentes. La primera fotografía

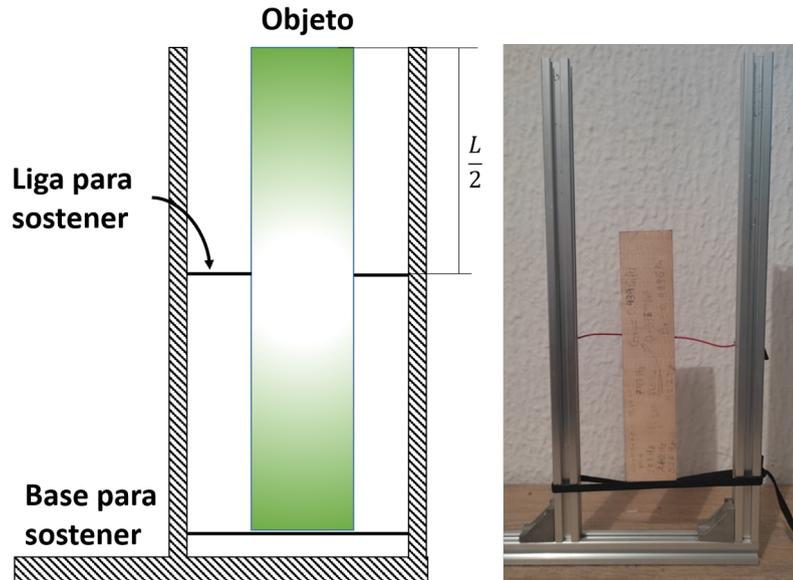


Figura 3.7: Diagrama esquemático (izquierda) y montaje real (derecha) para sostener la probeta de madera

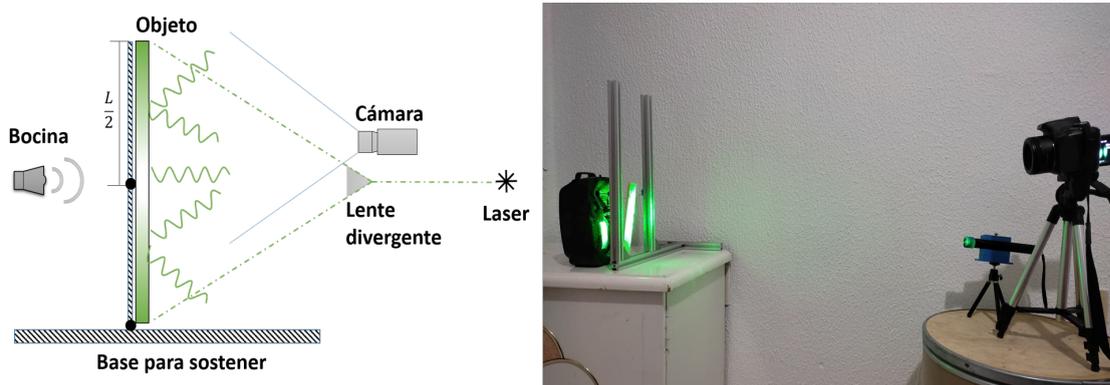


Figura 3.8: Diagrama esquemático (izquierda) y montaje real (derecha) para la obtención de imágenes del sistema interferométrico

fue tomada con la bocina apagada, es decir, solo con el patrón speckle de la probeta sin movimiento.

Las 3 fotos siguientes fueron tomadas usando la bocina con cada frecuencia encontrada previamente en el análisis de frecuencias. Se hacen comparaciones, sabiendo que modo normal de vibración se muestra a tal frecuencia por el método de chladni se compara cuáles son los dos resultados obtenidos agregando los resultados de la simulación en ANSYS.

### 3.5. Imágenes de gradiente

Para hacer una simulación del gradiente de la probeta de madera, se optó por el lenguaje de programación Python. Python tiene librerías numéricas y es un lenguaje

de fácil manejo.

El código comienza con dos librerías. “Numpy” que es una librería para las operaciones numéricas, funciones trigonométricas o crear listas de números. “Matplotlib” es la librería que se encargará de crear los gráficos correspondientes, agregarles nombres, colores, escalas. Cada uno será identificado como “np” y “plt” respectivamente.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

El código declara una función “u” en la que entrarán las variables espaciales “x,y”. También los valores para saber su modo normal “n,m”. La constante de  $\pi$ . Las longitudes a lo largo y ancho “Lx, Ly”.

La función contendrá la solución espacial de la ecuación de onda, es decir, la ecuación 2.54. Así, el código escrito en python queda como:

```
def u(x,y,n,m,pi,Lx,Ly):
    return np.cos(n*pi*x/Lx)*np.cos(m*pi*y/Ly)
```

Continúa con la declaración de constantes, el valor de  $\pi$ , las longitudes la probeta, y los números para los modos normales. En esta parte del código se modifica los parámetros de “n,m” para sacar los diferentes modos normales.

```
#Creacion de constantes
pi=np.arccos(-1) # Valor de pi
Lx=4.1           # Valor de la barra en el eje x
Ly=20.2          # Valor de la barra en el eje y
n=0              # Valor de n para modo normal
m=3              # Valor de m para modo normal
```

Siguiendo con la declaración de una cadena de puntos, que van de 0 hasta la longitud “Lx, Ly” en 100 pasos, esto se logra con el comando `np.linspace`. Después se crea una malla de puntos con el comando “meshgrid” que en la que se tienen que agregar dos listas del mismo tamaño.

```
#Creacion de la malla y longitud del rectangulo
x=np.linspace(0,Lx,100)
y=np.linspace(0,Ly,100)
[x,y]=np.meshgrid(x,y)
```

Se hace el cálculo numérico del gradiente de la función con la librería de “Numpy”. Para calcular el gradiente hay que meter una matriz, que en nuestro caso será la función previamente con todas las constantes ya declaradas. Regresará dos matrices, una en “y” y otra en “x”.

```
#Calculo del gradiente
dy1,dx1=np.gradient(u(x,y,n,m,pi,Lx,Ly))
```

Se crea una subfigura con el nombre de “ax” para posterior modificar sus parámetros.

```
#Creacion de la figura  
fig, ax = plt.subplots(figsize=(9,9))
```

Para graficar el gradiente, se utiliza la opción “quiver”, que es una función especial para la gráfica de velocidades, derivadas, ideal para gráficos de gradientes. Tiene varias opciones, el color se escoge en verde haciendo alusión al color del láser. Width es el ancho de las flechas, scale es el la longitud de las flechas y headwidth ancho de la cabeza como múltiplo. Se agregan dos valores, haciendo alusión de que la membrana vibra.

```
#Grafica del gradiente  
ax.quiver(x,y,dx1,dy1, color='green',width=0.0005,scale=0.1,headwidth=10)  
ax.quiver(x,y,-dx1,-dy1, color='green',width=0.0005,scale=0.1,headwidth=10)
```

Para los parámetros de visualización, se eliminan la numeración de los ejes, y se escala la gráfica a un 85% en escala de los ejes, para que el modelo se vea lo más parecido al sistema real. Por último se muestra la figura resultante.

```
#Pametros de visualizacion  
ax.xaxis.set_ticks([])  
ax.yaxis.set_ticks([])  
ax.set_aspect(aspect=0.85)  
plt.show()
```

# Capítulo 4

## Resultados

Para estudiar la probeta, fue sometida a varios procesos que se describen en la sección de metodología. Cada proceso mostró datos de los cuales se obtuvieron resultados que serán analizados a continuación.

El primer estudio muestra un análisis de frecuencias para la probeta, en la que se puede apreciar 3 picos de amplitud, cada pico corresponde con un modo de vibración de la probeta. El primer pico hace referencia a una frecuencia de 293 Hz, el segundo a 742 Hz y el tercero a 826 Hz.

Ya que el análisis solo muestra a que frecuencia entra la probeta en resonancia pero no a qué modo corresponde se realizó otro método de análisis, que son las figuras de Chladni (Hutchins, 1977).

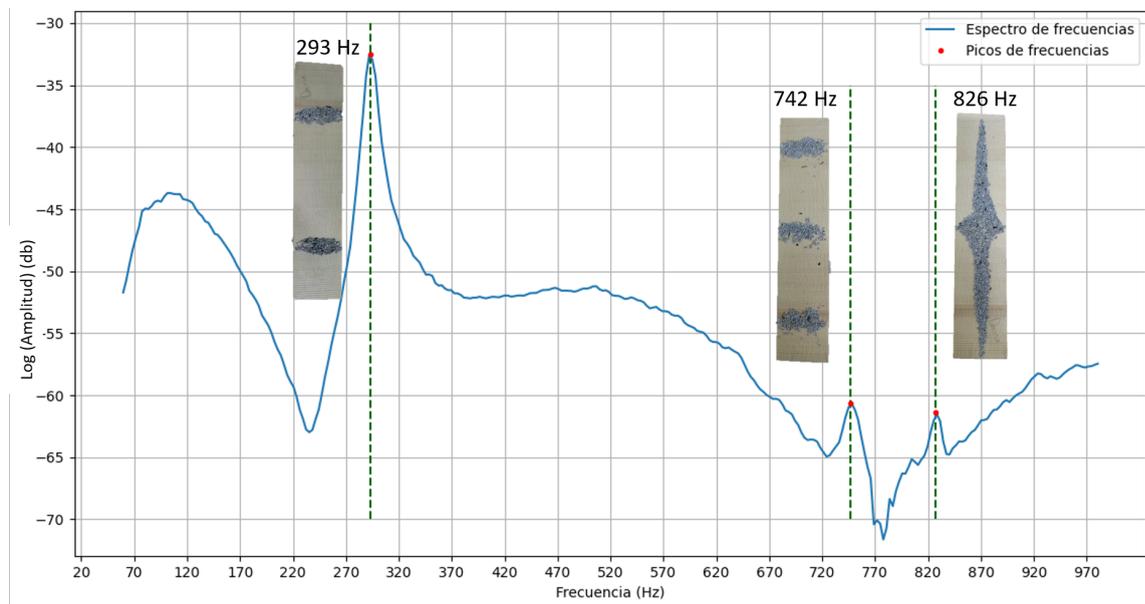


Figura 4.1: Grafica del análisis espectral de frecuencias (azul) resaltando los picos (rojo) acompañado de los resultados del método de Chladni para la visualización de los modos normales de la probeta y con notación de la frecuencia.

La grafica del análisis espectral del sonido de la probeta se observa en la figura 4.1, donde en cada pico se agregó una imagen del experimento de Chladni y por la

parte de arriba de cada imagen se muestra la frecuencia de resonancia marcada en la gráfica.

El experimento interferométrico, consiste en capturar la interferencia de motas sobre un objeto y este hacerlo vibrar como se explica en [Massey \(1968\)](#), y distinguir del fenómeno observado un gradiente de deformación como lo hizo [Hopkins and Tidbury \(1977\)](#).

La placa con la interferencia de moteado se puede ver en la figura 4.2 se observa que la interferencia muestra varias zonas con puntos muy claros y puntos oscuros, esta interferencia es con la probeta en reposo.

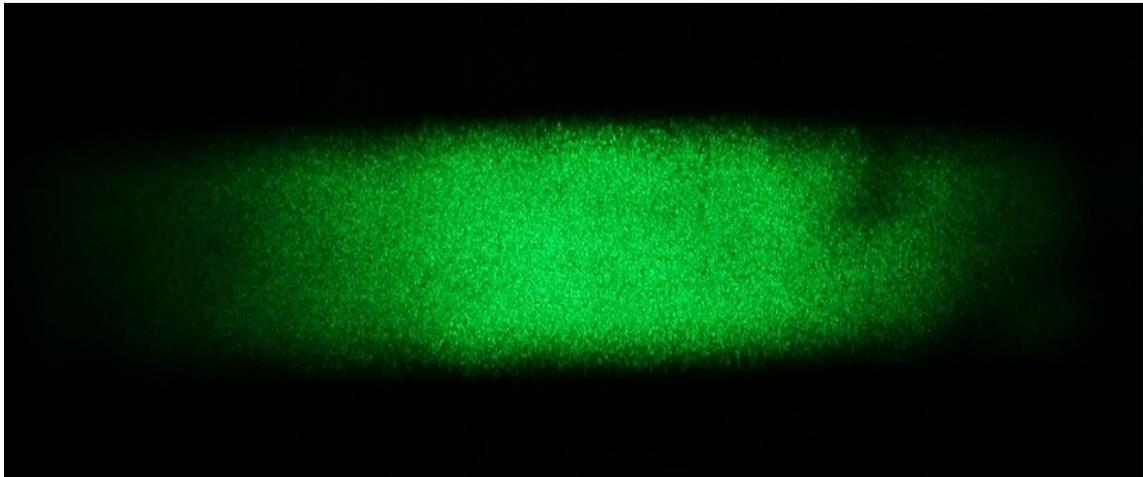


Figura 4.2: Patrón de interferencia de Moteado sobre la probeta de madera

La primera frecuencia de resonancia que se encuentra a 293 Hz hizo que la probeta entrara en el modo (2,0) este modo es característico de la propiedad mecánica del módulo de Young transversal, como lo explica ([Caldersmith, 1984](#)). EL modo muestra dos líneas nodales que son los lugares donde se juntó la arena y que indican que en ese lugar no se mueve la probeta aun que esta se encuentre en resonancia según ([Hutchins, 1977](#)), las líneas nodales se encuentran a una distancia aproximada de 5cm de las orillas de la probeta, esto se puede apreciar más en la figura 4.3 (A) .

La figura 4.3 (B), muestra la simulación numérica en la que las líneas azules son los nodos del sistema, y la parte central de color verde claro representa la zona donde hay una mayor amplitud de oscilación. Para la realización de este modelo se ajustaron los parámetros del módulo de Young (Ex) hasta obtener una frecuencia cercana como se hizo en [Torres and Torres-Torres \(2015\)](#), se obtuvo como resultado que el módulo de Young transversal, es decir en el eje x es de 0.989 GPa.

El láser streak pattern es un experimento que muestra el gradiente de deformación de la probeta ([Hopkins and Tidbury, 1977](#)), es decir, el método de Chladni muestra las líneas nodales, zonas donde la placa no se mueve, el método de LSP visualiza las zonas donde la amplitud es mayor y donde el gradiente es 0.

La figura 4.3 (C) muestra la interferencia de las motas con el modo (2,0) que corresponde a una visualización del gradiente de deformación, es decir, la figura 4.3 (D) es la que representa el gradiente de deformación del modo (2,0), se hace notar que hay varias similitudes, una de ellas es que en la parte central de la probeta el

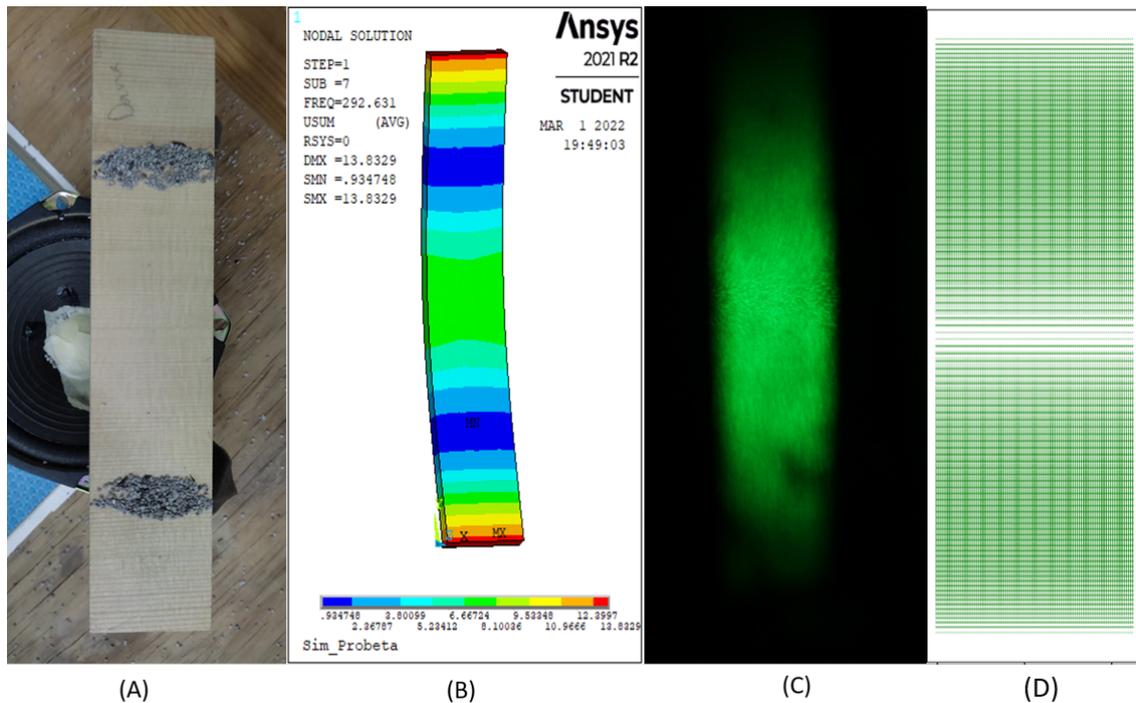


Figura 4.3: Método de Chladni (A). Simulación en elemento finito-Cortesía de ANSYS (B). Método de interferencia (C). Simulación del gradiente (D). Probeta a una frecuencia de 293Hz, modo (2,0).

gradiente vale 0 por lo que en la interferencia se ven que las motas de interferencia no se mueven mientras que en la simulación es representada con el color blanco. Por otro lado, en los extremos de la probeta las motas oscilan, por lo que comienzan a moverse formando una especie de “camino” que es la que se visualiza, en la parte de la simulación del gradiente se nota que esa zona está llena de movimiento y que se dirigen al centro que es la zona con mayor amplitud.

El segundo modo normal de vibración corresponde al modo (3,0) que se muestra en la figura 4.4(A) donde se ven 3 líneas nodales, las líneas nodales de los extremos se encuentran separadas de las orillas de la probeta a una distancia aproximada de 3.3 cm mientras que la línea nodal del centro se encuentra a la mitad de la longitud de la probeta que son 10.1 cm. El modo de vibración resuena a una frecuencia de 742 Hz.

La figura 4.4(B) muestra la simulación de la probeta, donde se puede observar 3 líneas nodales en azul y las zonas de mayor amplitud con un verde claro, estas zonas de mayor amplitud están separadas de las orillas por una distancia aproximada de 6.6 cm.

Para el modo (3,0), se sabe que el modo de vibración tiene 3 líneas nodales y que la simulación de ansys muestra dos zonas de mayor amplitud. La interferencia para esto modo corresponde a 4.4 (C) que muestra otra visualización del gradiente de deformación, aquí se observa que en la parte central de la probeta se encuentran unas líneas que se dirigen a ambos lados y que por una tercera parte de la probeta de los extremos se encuentran las motas que no han cambiado de posición, por lo

que se estima que en esa zona se encuentran las zonas con amplitud máxima. La figura 4.4 (D) se observa una simulación del gradiente del modo (3,0), donde se ven dos líneas blancas que son las zonas donde el gradiente vale 0 y esta figura corresponde con la de la interferencia.

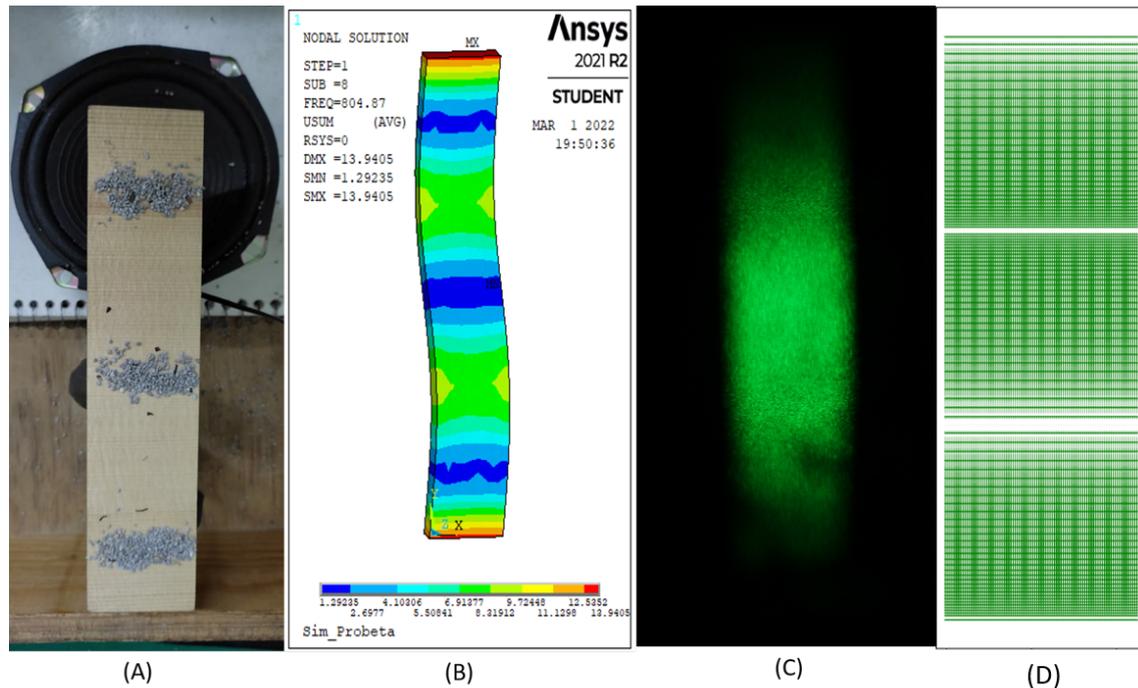


Figura 4.4: Método de Chladni (A). Simulación en elemento finito-Cortesía de ANSYS (B). Método de interferencia (C). Simulación del gradiente (D). Probeta a una frecuencia de 742Hz, modo (3,0).

El tercer modo de vibración es de 826 Hz y corresponde al modo (1,1) que es un modo de torsión y que tiene proporción directa con la propiedad mecánica del módulo de torsión GXY (Torres and Torres-Torres, 2015). Este modo muestra dos líneas nodales que están atravesadas por la mitad transversalmente y longitudinalmente de la probeta, formando una "Estrella" de 4 picos, esto se ve en la figura 4.5 (A).

El modo (1,1) obtenido con la simulación es el de la figura 4.5 (B), Este modo corresponde a una torsión, cada esquina pertenece a un máximo o mínimo y en la parte central una especie de estrella nodal. Para lograr este modo se modificó la propiedad de torsión GXY como se explica en Torres and Torres-Torres (2015) del catch creado hasta que la frecuencia de resultado coincidiera con la experimental dando como resultado  $GXY=0.385$  GPa.

Le modo de vibración (1,1) de la interferencia se puede ver en la figura 4.5(C) que muestra varias curvas que inician de los lados de la probeta se acercan al centro y vuelven al mismo lado del que iniciaron para cerrar. La figura 4.5 (D), muestra mejor este fenómeno, ya que se trata del gradiente del modo (1,1) en la que las partes de mayor amplitud se encuentran en las esquinas, por eso cada curva se dirige a esos puntos.

Las propiedades encontradas fueron anotadas en la probeta, como también fueron

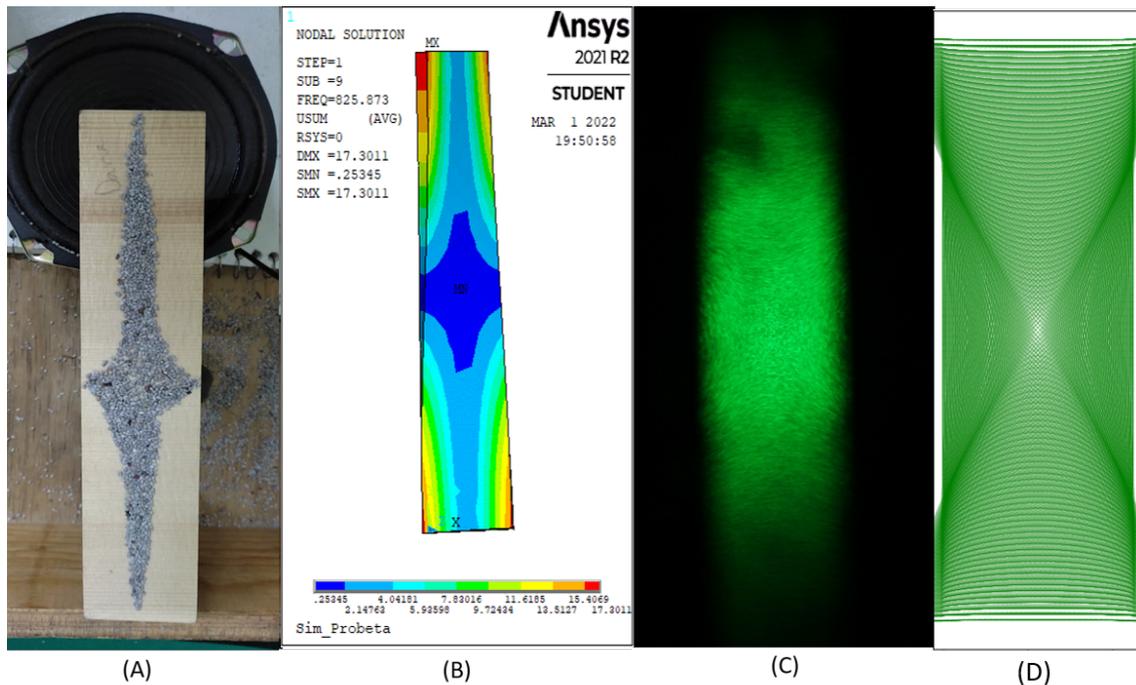


Figura 4.5: Método de Chladni (A). Simulación en elemento finito-Cortesía de ANSYS. (B). Método de interferencia (C). Simulación del gradiente (D). Probeta a una frecuencia de 826Hz, modo (1,1).

anotadas las frecuencias y a qué modo corresponde cada frecuencia, esto con el fin de tener todos los datos en una sola parte y que si se da otro estudio a la probeta se tenga un antecedente marcado en ella, como se ve en la figura 4.6.

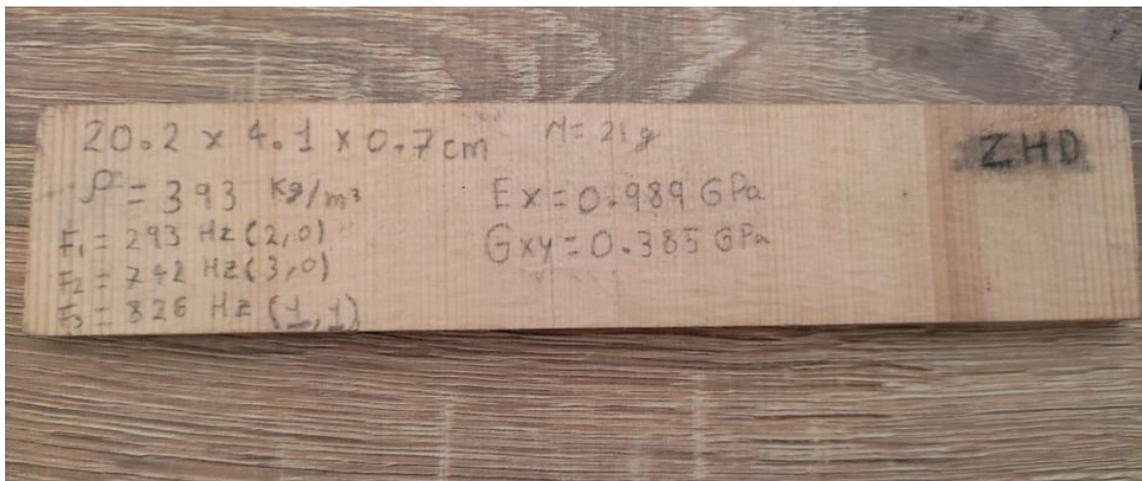


Figura 4.6: Probeta de madera con sus dimensiones, peso, densidad, las 3 frecuencias junto con que modo corresponde y con las propiedades mecánicas  $E_x$  y  $G_{xy}$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

Los experimentos sobre vibraciones son importantes para estudiar las propiedades mecánicas de sistemas sólidos permiten estudiar las características del material y cómo la forma del material influye en los modos normales. En este trabajo se realizaron dos experimentos de vibraciones: el método de Chladni y el LSP. Dichos métodos tienen aplicaciones similares pero cada uno muestra datos diferentes.

De forma complementaria se realizaron simulaciones por elemento finito en ANSYS que ayudaron visualizar los modos de vibración para la probeta en estado de resonancia.

El campo de estudio de la interferometría es vasto pero también es de grandes costos. En esta tesis se desarrolló un arreglo experimental de bajo presupuesto en sustitución de técnicas de interferometría normalmente costosas. Por medio nuestro experimento se logró la visualización en tiempo real del gradiente de deformación por interferometría. Se demostró que con un manejo correcto de las configuraciones de la cámara de un celular es posible tomar fotos del fenómeno reduciendo aún más el costo de inversión.

Se encontró una configuración adecuada para el programa “Visual analyser” de acuerdo a las necesidades del experimento. En particular el programa se modificó para trabajar con una resolución de 2.5 Hz (el programa viene predeterminada en 10 Hz).

Se concluye que el método de Chladni es una herramienta poderosa para la visualización de los nodos de los modos normales de vibración siempre y cuando la sustancia granulada no interfiera mucho en el peso del sistema en vibración. Si la sustancia es muy densa puede interferir con el experimento y este entraría en resonancia produciendo un análisis erróneo.

Conocer y visualizar los modos normales de vibración es importante ya que da mucha información sobre las propiedades mecánicas de los materiales, esto es debido a que las frecuencias de resonancia dependen de la densidad, la geometría del sistema, módulo de Young y del módulo cortante. El formato APDL para resolver sistemas por métodos numéricos se acerca mucho a la realidad donde caracterizar el material agregando los valores sin tener que destruir la probeta hasta obtener los modos normales de vibración vistos por el método de Chladni. La simulación o el manejo de un programa que sea capaz de resolver sistemas complejos es una parte importante en cuanto a la caracterización de sistemas vibratorios.

Para evitar usar técnicas destructivas se caracterizó la probeta mediante un ajuste de parámetros en ANSYS y se obtuvieron resultados precisos.

La técnica de LSP es no destructiva pero poco implementada en la ingeniería. Este trabajo consiguió aplicar la técnica con eficacia y bajo costo y permitió la obtención de resultados en forma precisos. Se encontró que la técnica es suficientemente simple para permitir diversas aplicaciones como por ejemplo su uso como recurso didáctico en cursos de óptica y de elemento finito.

Se concluye que el LSP es un equivalente para la visualización en tiempo real de un gradiente de deformación en materiales que se encuentran en algún modo normal de vibración.

# Apéndice A

## Visualización del gradiente por medio de interferencia laser

**Objetivo:** Visualización del gradiente de deformación por medio de interferencia “Laser Streak Pattern” de un objeto rectangular que se encuentre en su primer modo normal.

### Materiales

- Puntero laser (15w).
- Bocina con un clip pegado.
- Lente para expandir el haz (Se pueden conseguir en microscopios de juguete).
- El objeto rectangular que se hará vibrar.
- Micrófono.
- Cables de conexión USB.
- Cable auxiliar de audio (en caso que la bocina no tenga bluetooth)
- Equipo de computo.

### Recomendaciones

El objeto debe tratarse de una probeta rectangular de 20x5 cm aproximadamente y un grosor de no más de 5 mm.

El software recomendado es “Visual Analyser”. Se trata de un software de libre uso en el que su función será detectar

sonidos y regresar las frecuencias de tales sonidos. El software debe estar configurado para captar una resolución recomendada de 1.25 Hz. Para cambiar la resolución es en la pestaña de “settings” y se cambia el tamaño de las transformada de Fourier rápida (FFT).

Se recomienda tener una base para sostener los materiales. Una base para la probeta que sea sostenida de manera que se trate de un sistema libre. Una base para la bocina con el clip pegado, y que haga contacto con la probeta. Una base para sostener el puntero láser.

### Procedimiento

Se conecta el micrófono a la computadora. La computadora debe tener el software recomendado ya en ejecución.

Se sostiene la probeta a una cuarta parte de su longitud. Posterior a sostenerla, la probeta es golpeada en la parte central con las yemas de los dedos hasta producir un sonido. El sonido producido debe ser captado por el micrófono que enviara la señal al software. El software re-

gresara la frecuencia de resonancia de la probeta en forma de una gráfica. Se anotan las resonancias de la probeta, como se ve en el diagrama esquemático figura A.1.

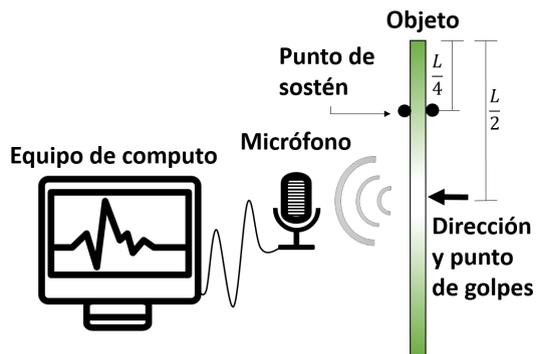


Figura A.1: Esquemático sobre la obtención de frecuencias de resonancia.

Se coloca la probeta de forma vertical en su base que la va a sostener, de manera que la probeta se pueda comportar como un sistema libre. La bocina que tiene un clip pegado deberá colocarse por la parte de atrás de la probeta, de manera que el clip toque la parte inferior o central de la probeta. Se conecta la bocina vía bluetooth o vía cable auxiliar a la computadora. Se le coloca al puntero láser su lente para expandir su haz. El láser se coloca a una distancia tal que al expandir el haz cubra la probeta por completo, como se ve en la figura A.2.

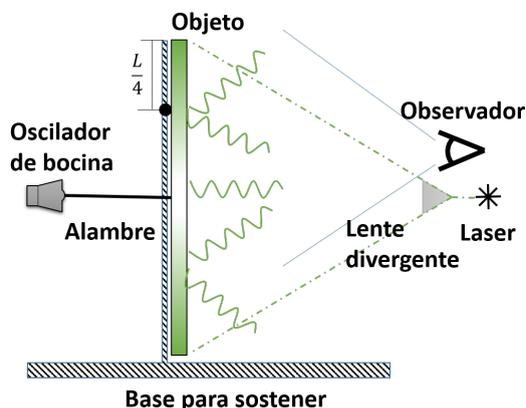


Figura A.2: Esquemático sobre el montaje de materiales

Para ver la interferencia Speckle a simple vista se recomienda lo siguiente.

1. Tener un lugar con poca iluminación.
2. Iluminar el sistema con el haz láser expandido.
3. Colocarse por un lado del puntero láser.
4. Colocar su mano a una distancia aproximada de 40cm de su rostro y que se vea por un lado de la probeta iluminada.
5. Enfocar con la vista su mano.

Esta serie de pasos sirven para ver de manera desenfocada el fenómeno Speckle. Posterior a esto se prende la bocina con la primera frecuencia de resonancia para ver "LSP". Si se cambia la frecuencia, se verán patrones diferentes por lo que se podrá hacer un barrido de frecuencias sobre la probeta viendo cada una de sus fases.

Para capturar el fenómeno speckle con una cámara se recomienda tener un control completo sobre los elementos y configuraciones de la cámara, es decir, su distancia focal, tiempo de exposición, ISO, y el enfoque de manera manual. Se trata de ir variando estos parámetros hasta capturar el fenómeno deseado.

Con una cámara Canon modelo Rebel EOS T3I 600D y una lente EF de 50mm su configuración es: distancia focal de  $f/13$ , tiempo de exposición de  $1/10s$ , ISO a 200 y enfoque manual al mínimo.

# Apéndice B

## Simulación de la probeta de madera en ANSYS APDL

A continuación se muestra el código en APDL para la simulación de la probeta de madera que se vio en los capítulos anteriores. El código se guarda en un editor de texto y se ejecuta en ANSYS MECHANICAL APDL.

El código se ejecuta desde; File, Read input from, se busca el archivo de texto y ok. EL programa tarda aproximadamente 10 segundos en ejecutarse en una computadora Lenovo con i7 de sexta generación a 2.5 GHz, con 8 Gb de memoria RAM y con una unidad de estado sólido de 480 Gb.

```
/CLEAR,START
/TITLE, Sim_Probeta
/FILNAME,5PCC
/UNITS,SI
/CONFIG,nres,5000

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!Variables
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
/PREP7
X0=0
X1=0.041
Y0=0
Y1=0.202
Z0=0
Z1=0.007
Peso=0.021
Tamano_malla=0.01

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!Operaciones
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Volumen=X1*Y1*Z1
```

Densidad=Peso/Volumen

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!Geometria
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
BLOCK,X0,X1,Y0,Y1,Z0,Z1

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!Propiedades del material
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
MP,DENS,1, Densidad
MP, EX, 1, 0.989e9
MP, GXY, 1, 0.385E9

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!Propiedades de la malla y mallado
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
MAT,1
ET,1,SOLID92
ESIZE,Tamano_malla
VMESH,1
FINISH

/!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!Solucion
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
/SOLU
ANTYPE,MODAL
MODOPT,SUBSP,20
SOLVE
FINISH

```

# Apéndice C

## Programa para obtencion de imágenes de gradiente

El siguiente programa fue escrito en el lenguaje de programación de Python versión 3.6. El programa está escrito para que se edite manualmente los modos normales siendo estos n,m. Y este regresara una imagen de gradiente del modo de vibración.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#Definicion de la funcion de la ecuacion de onda con extremos libre
def u(x,y,n,m,pi,Lx,Ly):
    return np.cos(n*pi*x/Lx)*np.cos(m*pi*y/Ly)

#Creación de constantes
pi=np.arccos(-1) # Valor de pi
Lx=4.1           # Valor de la barra en el eje x
Ly=20.2         # Valor de la barra en el eje y
n=0             # Valor de n para modo normal
m=3            # Valor de m para modo normal

#Creación de la malla y y longitud del rectangulo
x=np.linspace(0,Lx,100)
y=np.linspace(0,Ly,100)
[x,y]=np.meshgrid(x,y)

#Calculo del gradiente
dy1,dx1=np.gradient(u(x,y,n,m,pi,Lx,Ly))

#Creación de la figura
fig, ax = plt.subplots(figsize=(9,9))

#Grafica del gradiente
```

```
ax.quiver(x,y,dx1,dy1, color='green',width=0.0005,scale=0.1,headwidth=10)  
ax.quiver(x,y,-dx1,-dy1, color='green',width=0.0005,scale=0.1,headwidth=10)
```

```
#Pametros de visualización
```

```
ax.xaxis.set_ticks([])  
ax.yaxis.set_ticks([])  
ax.set_aspect(aspect=0.85)  
plt.show()
```

# Bibliografía

- Aboites, V. (1991). El laser. la ciencia para todos. *Fondo de cultura economica.*, pages 40–41.
- ANSYS®(2020). Academic research mechanical, release 20.0.
- Caldersmith, G. W. (1984). Vibration theory and wood properties.
- Fernelius, N. and Tome, C. (1971). Vibration-analysis studies using changes of laser speckle. *JOSA*, 61(5):566–572.
- French, A. P. (1974). *Vibraciones y ondas*, volume 2. Reverté.
- Gutierrez Hernandez, D. (2006). *Medicion de la trayectoria dinamica de una placa metalica sometida a su primer modo natural de vibracion*. PhD thesis, Centro de Investigaciones Opticas.
- Hopkins, J. and Tidbury, G. (1977). A note on the interpretation of laser speckle patterns of vibrating panels to yield information concerning mode shapes. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 24(7):773–778.
- Hutchins, C. M. (1977). Acoustics for the violin maker. *CASJ*, (28):19–22.
- Massey, G. A. (1968). Study of vibration measurement by laser methods. Technical report, SYLVANIA ELECTRONIC SYSTEMS-WEST MOUNTAIN VIEW CA.
- Nebot, M. (2019). Modos normales de sistemas continuos. [http://ific.uv.es/nebot/Oscilaciones\\_y\\_Ondas/Tema4.pdf](http://ific.uv.es/nebot/Oscilaciones_y_Ondas/Tema4.pdf). *Recuperado* – 01 – 12 – 2021.
- Soto, C. A. S. et al. (2019). *Simulación de la movilidad en la tapa de un violín por el método de elemento finito utilizando ANSYS*. PhD thesis, Universidad Autónoma de Querétaro.
- Torres, J. (2006). *Modos de vibración simulados por computadora y experimentales de una tapa de guitarra en sus etapas de construcción*. PhD thesis, UNAM.
- Torres, J. and Torres-Torres, D. (2015). Cambios en la propagación de ondas en una tapa de guitarra debidos al abanico y el puente. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 31(4):228–234.
- Torres, J. A. and Boullosa, R. R. (2009). Influence of the bridge on the vibrations of the top plate of a classical guitar. *Applied Acoustics*, 70(11-12):1371–1377.

- Torres, Jesús A, T.-T. C., Vidal, E., Fernández, F., de Icaza-Herrera, M., and Loske, A. M. (2022). Violin vibration state determined from laser streak patterns. *Applied Acoustics*, 185:108384.
- Zill, D. G. and Cullen, M. R. (2013). *Ecuaciones diferenciales*, pages 183–190,403–407,445–450. McGraw-Hill Interamericana.