Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias

“Diseño y análisis de una propuesta didáctica para graficar funciones con apoyo del Software GeoGebra para estudiantes de Ingeniería”

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Maestro en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias (Matemáticas)

Presenta

Sandra Luz Rodríguez Hernández

Dirigida por:

M. en C. Luisa Ramírez Granados

Querétaro, Qro. Agosto 2022

Agosto 2022

Diseño y análisis de una propuesta didáctica para graficar funciones con apoyo del software GeoGebra para estudiantes de Ingeniería

Sandra Luz Rodríguez Hernández

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias (Matemáticas)

"Diseño y análisis de una propuesta didáctica para graficar funciones con apoyo del software GeoGebra para estudiantes de ingeniería"

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado deMaestro en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias (Matemáticas)

Presenta
Sandra Luz Rodríguez Hernández

Dirigida por:
M. en C. Luisa Ramírez Granados

Presidente: M en C. Luisa Ramírez Granados

Secretario: Dr. Victor Larios Osorio

Vocal: M. en D. M. Carmen Sosa Garza

Suplente: M. en D. M. Ramón Torres Alonso

Suplente: Dr. Víctor Antonio Aguilar Arteaga

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Fecha de aprobación por el Consejo Universitario
Agosto 2022, México

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han colaborado en la realización de este trabajo.

A las instituciones que han hecho posible la realización de este trabajo; al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), a la Universiad Autónoma de Querétaro (UAQ) y al Instituto Tecnológico de Quetétaro (ITQ).

Mi agradecimiento a mi directora de tesis M. en C. Luisa Ramírez Ganados por el apoyo, orientación, consejos y aportaciones brindadas.

De igual manera, mi agradecimiento al Dr. Victor Larios Osorio por el apoyo brindado durante el desarrollo de este trabajo.

A mis sinodales por sus aportaciones y recomendaciones en este proyecto.

A mis maestros, por compartir sus conocimientos y experiencias.

A mis compañeras de la maestría por su amistad, el apoyo mutuo, siempre optimistas y los grandes momentos compartidos.

A mis hijas Sandra, Arantza y Martha, por estar ahí siempre apoyándome.

A mi esposo Javier, por la motivación para realizar estudios de posgrado, por el apoyo y confianza que me brindó, por estar a mi lado compartiendo mis angustias y alegrías en el trayecto de este proyecto.

Muchas gracias a todos

Índice

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

En esta investigación se presentan los resultados obtenidos de un estudio que se realizó con estudiantes de primer semestre de las carreras de ingeniería en el Tecnológico Nacional de México campus Querétaro, cuyo propósito fue analizar el desempeño de los estudiantes en la asignatura de cálculo diferencial, al utilizar tecnologías digitales, específicamente el software GeoGebra como apoyo para graficar funciones reales y determinar algunas propiedades básicas de estas. Este análisis se realizó con base a las etapas de la metodología de la Ingeniería Didáctica, y el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), mediante una serie de configuraciones características de este enfoque en donde entran en juego lenguajes, conceptos, procedimientos, argumentos entre otros aspectos, y donde el conocimiento se modela en términos de funciones semióticas que permite unificar dentro de un mismo sistema los enfoques cognitivos y sociocultural. El estudio se realizó en tres etapas: análisis preliminar, diseño y aplicación de dos prácticas y un análisis de los resultados, donde finalmente se muestra un aumento en cuanto al número de preguntas acertadas al implementar el software GeoGebra para la solución de las actividades diseñadas.

Palabras clave: GeoGebra, Enfoque Ontosemiótico, Ingeniería Didáctica, Prácticas matemáticas.

Abstract

This research presents the results obtained from a study that was carried out with first-semester students of engineering careers at the National Technological Institute of Mexico, Querétaro campus, whose purpose was to analyze Differential Calculus students´performance using digital technologies, specifically GeoGebra software as support to graph real functions and determine some basic properties of these. This analysis was carried out based on the stages of the Didactic Engineering methodology, and the theoretical framework of the Ontosemiotic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction (EOS), through a series of characteristic configurations of this approach where languages, concepts, procedures, arguments, among other aspects, and where knowledge is modeled in terms of semiotic functions that allow the cognitive and sociocultural approaches to be unified within the same system. The study was carried out in three stages: preliminary analysis, design, and application of two practice and an analysis of the results, which finally shows an increase in the number of correct questions when implementing the GeoGebra software for the solution of the designed activities.

Keywords: GeoGebra, Ontosemiotic Approach, Didactic Engieering, Mathematical Practices

Introducción

El presente trabajo de investigación pretende comprobar mediante un análisis cualitativo, cómo el uso de tecnologías digitales específicamente el software Geogebra como herramienta para graficar funciones reales, ayuda en gran medida a los estudiantes a identificar con mayor facilidad algunas propiedades básicas de este tipo de funciones.
Este análisis se realizó con base al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) y, como metodología la Ingeniería Didáctica que permite hacer una comparación de los resultados obtenidos antes y después de aplicar la propuesta didáctica apoyada en la base teórica del EOS.
Cabe mencionar que el software GeoGebra es un software libre de matemática dinámica, creado por Markus Hohenwarter, para la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, en el que posibilitan al estudiante a que observen, comparen e interaccionen con diferentes objetos matemáticos, enfocados principalmente en nivel medio y superior. Así, GeoGebra al ser un entorno dinámico práctico y versátil para la construcción de una diversidad de prácticas matemáticas, auxilia al estudiante en la construcción del conocimiento provocando un cambio significativo en el proceso enseñanza-aprendizaje.

El trabajo de investigación consta de cinco capítulos.

El capítulo 1 muestra los antecedentes para este estudio, la justificación de la investigación, así como una descripción de los problemas más comunes a los que los estudiantes se enfrentan, observados en base a la experiencia que he tenido en la impartición de la asignatura de Cálculo Diferencial. Se presenta la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos planteados.

En el capítulo 2 se describen las bases de del EOS, como son las teorías, herramientas, configuraciones, sistemas de prácticas, idoneidad didáctica, dimensión normativa; todas ellas para el desarrollo de la propuesta didácica y análisis de los resultados.

En el capítulo 3 se describe la ejecución de la metodología Ingeniería didáctica y la implementación y desarrollo de las prácticas. Para cada actividad se menciona lo que se espera que realicen los estudiantes de acuerdo a la base teórica de esta investigación.

En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos y un análisis de los mismos para cada actividad. Se realiza una comparación de los resultados a priori y posteriori con base en la metodología.

Finalmente el capítulo 5 presenta las conclusiones del investigador, ofreciendo la perspectiva desde su experiencia en la aplicación de esta metodología, qué tan cerca se estuvo de lograr los objetivos propuestos y algunas recomendaciones con respecto al uso del software utilizado en el trabajo de investigación.

Capítulo 1: Antecedentes de la investigación

1.1 Antecedentes

La inminente presencia de las tecnologías digitales en las aulas de clase de matemáticas, y que se han vuelto imprescindibles en las clases virtuales, imponen desafíos a los profesores que se ven obligados a reestructurar sus prácticas de enseñanza con estos nuevos recursos; se han desarrollado investigaciones en donde se analiza de alguna forma el impacto de estas, en el proceso de enseñanza aprendizaje (Pérez Medina, 2014).

Algunas investigaciones relacionadas y que es de interés para el tema que se aborda en el presente trabajo, están las siguientes:
Tamayo (2013) presenta los resultados de su investigación que consistió en indagar las percepciones de estudiantes y docentes en las implicaciones didácticas al hacer uso del GeoGebra como recurso educativo, así como las debilidades y fortalezas. Concluye que la intervención de las tecnologías en el aula facilitan considerablemente los procesos de modelación matemática partiendo desde el constructivismo, motivando procesos de investigación matemática, interacción con los problemas y, con ello lograr un aprendizaje significativo.

En la educación superior, Toledo (2005) presenta algunas implicaciones didácticas de las tecnologías de la información y comunicación (TIC), especialmente orientadas a elevar la motivación en el aula; además menciona que una potencialidad ineludible del software GeoGebra es que los y las estudiantes pueden explorar funciones complejas de manera interactiva, con eficiencia y precisión. Concluye en su trabajo que GeoGebra presenta posibilidades para generar conflicto cognitivo por parte del docente y del estudiante mismo.

Maita (2005) presenta una investigación sobre el aprendizaje de funciones reales utilizando un software educativo, que diseñó y elaboró con un enfoque constructivista bajo la modalidad tutorial, llamado FunReal 1.0, que al implementarlo permitió que los estudiantes fueran más activos, creativos, participativos y autónomos en la adquisición de conocimientos; como resultado hubo un incremento significativo en las calificaciones obtenidas, lo cual evidencia la producción de un impacto positivo sobre el proceso de aprendizaje.

Las principales dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática según Hernández Hechavarría (2013) son: no penetración en sus fundamentos, escasa atención a la creatividad de los escolares y el inadecuado uso de software. Para contribuír a solucionar estas dificultades, es necesario integrar contenidos que a menudo se tratan de manera fragmentada. Los ejercicios y consideraciones expuestos ilustran las ventajas que ofrece el uso del GeoGebra para profundizar en fundamentos de la matemática y el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje en general, como el trazado de gráficos y construcciones auxiliares para facilitar el análisis de propiedades y la generación de nuevas vías de solución; la transformación de ejercicios atendiendo a la diferenciación de la enseñanza acorde a los conocimientos previos de los escolares, los objetivos, los medios y las condiciones objetivas en determinados momentos que provocan también, la estimulación de la creatividad en los docentes.

Utilizando el software Geogebra, Gutiérrez y Prieto (2015) describen una secuencia para caracterizar algunas transformaciones en familias de parábolas definidas por $g(x) = ax^2$, con la finalidad de que esta propuesta favorezca el desarrollo de destrezas y coordinar las representaciones gráfica y simbólica de funciones reales, además de potenciar la práctica de los profesores de Matemática y sienten interés en el uso de entornos tecnológicos.

Los trabajos mencionados son solo algunos en donde los autores le atribuyen al GeoGebra el poder conectar dos de las principales representaciones de las funciones, como las fórmulas algebraicas y las gráficas, favoreciendo con ello la caracterización de diferentes transformaciones como ejemplo en el caso de funciones reales; la comprensión de un objeto matemático se da por la actividad de coordinar sus múltiples representaciones, como el visual y algebraico de manera simultánea en distintas familias de funciones cuadráticas (Borba y Villareal 2011).

Estos estudios realizados muestran una forma de abordar contenidos matemáticos con tecnologías digitales a la vez que para el profesor representa una herramienta importante en su práctica de docente, integrando de manera eficiente las tecnologías en el aula, y logrando así que los estudiantes se apropien de los conocimientos con mayor facilidad.

1.2 Justificación

El desarrollo tecnológico y científico mundial, y la difusión de las TIC´s ha obligado a realizar una transformación en los procesos de enseñanza – aprendizaje y, para hacer estos cambios es necesario obtener el apoyo de los docentes, quienes con sus conocimientos psicológicos y pedagógicos lograr alcanzar los objetivos planeados (Tamayo, 2013). La enseñanza hoy por hoy exige incorporar las TIC y en consecuencia la transformación de los ambientes de aprendizaje. Al incluir las TIC en el proceso enseñanza aprendizaje, se hace necesario el acompañamiento del docente, el cual con su saber pedagógico y psicológico debe guiar a los estudiantes para alcanzar los objetivos.

Con base en la experiencia de mi labor como docente, he identificado que uno de los conceptos más complejos en matemáticas, específicamente en la asignatura de Cálculo Diferencial, es el de función y todo lo que conlleva a su estudio; tales como la construcción de sus gráficas o determinar sus propiedades, lo que considero una oportunidad interesante para la investigación didáctica en este tema. Cabe mencionar también que en muchas ocasiones el tiempo destinado al estudio de este tema es poco, por lo el uso de la tecnología ayudaría a que se aprovechara mas tiempo en el estudio de este tema.

Es importante lograr que los estudiantes hagan uso de sus habilidades y conocimientos adquiridos en cursos previos, pero también el uso de herramientas tecnológicas es valioso, ya que además de facilitar el trabajo y reducir tiempo, permite a los estudiantes desarrollar la integración en el procesos de aprendizaje.

La incorporación de las tecnologías en el aula desde el constructivismo, facilitan mucho el trabajo haciendolo a la vez más dinámico Tamayo (2013). Investigadores destacan analizar el impacto de los resultados al hacer uso de entornos dinámicos en la enseñanza y las interrelaciones que existen entre el uso de estos ambientes y el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Así mismo Artigue (1995) menciona cómo el uso de ambientes tecnológicos de forma estratégica, puede ser un recurso de gran utilidad ya que logra en los estudiantes reforzar conceptos, hacer conjeturas e inferencias.

Es así como este trabajo surge con la finalidad de integrar las tecnologías de la información, en este caso el software dinámico GeoGebra, que consiste en diseñar y analizar una propuesta didáctica para graficar funciones reales, integrando las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje de manera sistemática, y que además conduzca a los cambios y avances tecnológicos que implican una innovación técnica para crear entornos de aprendizaje basados en la tecnología.

1.3 Descripción del problema

La propuesta didáctica que se diseñará y analizará está enfocada a estudiantes de primer semestre de las carreras de ingeniería, en la materia de Cálculo Diferencial y específicamente en el tema de funciones. Una de las principales dificultades con lo que se enfrentan los estudiantes, son las gráficas de las funciones y sus características, ya que estas representaciones son fundamentales en la comprensión, resolución, interpretación, análisis, demostración, de diversos problemas, no sólo en la asignatura de Cálculo Diferencial sino que también en materias posteriores en las que se trabajan con funciones, como lo son el Cálculo Integral, Cálculo Vectorial, Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, por mencionar algunas.

A los estudiantes se les dificulta identificar el tipo de funciones y esto a su vez se ve reflejado en el momento de realizar las gráficas, por estas razones, en este trabajo se diseñará una propuesta didáctica que ayude a los estudiantes a identificar las características principales de una función para construir las gráficas con ayuda del software dinámico GeoGebra**,** donde además de obtener esta representación de la función de manera inmediata, la herramienta permite visualizar de manera dinámica, características de cada una de ellas, como son los conceptos de creciente, decreciente, intersecciones, así como la modelación de las mismas, con el acompañamiento del profesor.

Cabe mencionar que a pesar de contar hoy en día con gran cantidad de herramientas como apoyo al trabajo docente, aún se siguen utilizando métodos tradicionales de enseñanza y que de acuerdo a estudios realizados, estas herramientas tecnológicas al complementarlas con las prácticas diarias pueden lograr mejores resultados.

En esta propuesta se pretende que el software interactivo GeoGebra favorezca el aprendizaje de los estudiantes promoviendo técnicas en las construcciones geométricas de funciones que permitan integrar, comprender, profundizar e integrar conceptos para así lograr un aprendizaje significativo, relacionando la nueva información con la aprendida en las sesiones anteriores; crear un ambiente de mayor participación y discusión, motivación en la nueva herramienta de aprendizaje utilizada, visualización de imágenes dinámicas y comprender ciertos conceptos que desconocían; todo lo anterior se conjunta para crear un ambiente propicio para el aprendizaje individual y colectivo.

1.4 Pregunta de investigación

Presentado lo anterior, la pregunta de investigación que compete a este trabajo es: ¿Cómo ayuda a los estudiantes el uso del software interactivo GeoGebra a desarrollar las habilidades para graficar funciones y con ellas, obtener una mejor comprensión de la información que se puede obtener de éstas?

Objetivo general

Diseñar y analizar una propuesta didáctica para graficar funciones con apoyo del software dinámico GeoGebra como herramienta, para que ayude a los estudiantes de ingeniería lograr una mejor comprensión e integración de conceptos y lograr así apropiarse de los conocimientos matemáticos en el tema específico de funciones.

Objetivos específicos

1. Identificar y analizar propiedades básicas de los distintos tipos de funciones reales.
2. Diseñar actividades que permitan a los estudiantes relacionar las gráficas de distintas funciones con las propiedades básicas de cada una de ellas.
3. Diseñar actividades utilizando la herramienta GeoGebra para graficar funciones, identificando sus propiedades y, dadas ciertas propiedades encontrar la función que cumpla con ellas.
4. Analizar e interpretar los resultados obtenidos en las actividades realizadas.

Capítulo 2: Marco Teórico

2.1 Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS)

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), de Juan Díaz Godino y Carmen Batanero**,** están involucradas diversas teorías utilizadas en investigación matemática a partir de supuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza, y acoge principios didácticos de tipo socio-constructivista e interaccionista con el objetivo de explicar e investigar de forma holística los procesos de enseñanza-aprendizaje en las matemáticas. El propósito de este enfoque es que los estudiantes se apropien de los conocimientos matemáticos para que tengan las herramientas necesarias para desenvolverse en la sociedad de manera integral y sean capaces de contribuír en el desarrollo de nuevos conocimientos (Godino y Batanero 2007).

La doble faceta del EOS epistémica (institucional) y cognitiva (personal), es una aproximación antropológica y ontosemiótica; esto es, una relación que abriga la actividad humana y la noción de objeto y su significado.

En el EOS contribuyen herramientas teóricas para indagar simultáneamente el pensamiento matemático, los ostensivos presentes, las situaciones y las causas que condicionan su desarrollo. Del mismo modo, se consideran facetas del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje y progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

Este enfoque utilizado en la didáctica de la matemática, comienza con la parte de la resolución de problemas matemáticos a la vez que contempla un conjunto de nociones teóricas que se clasifican en cinco grupos (que serán descritos de forma general): sistema de prácticas, configuración de objetos y procesos matemáticos, configuración didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica; cada uno de los cuales permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas; esta teoría ha sido usada en diversos trabajos realizados en el marco del enfoque ontosemiótico (D'Amore, Font y Godino, 2007; Font y Contreras, 2008; Font y Godino, 2006; Font, Godino y Contreras, 2008; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Font y Wilhemi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009; Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak, 2009).

Es importante integrar ambientes tecnológicos en el contexto educativo y específicamente en la educación matemática, como los menciona Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) con el propósito de analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en donde se utilizan dispositivos, y la intervención del profesor, como representante de una comunidad cultural de referencia, entre los significados personales de los estudiantes que surgen de su actividad usando el dispositivo y los significados matemáticos correspondientes al contenido de los programas de estudio. De esta forma, la intervención del profesor se cataloga como semiótica que se fundamenta en teorías psicológicas del aprendizaje, como la zona de desarrollo próximo de Vygotsky. Esta mediación que realiza el profesor parte de un modelo llamado ciclo didáctico, en el cual se desarrollan diversas actividades semióticas y se favorece la discusión matemática colectiva, importante en este proceso activo y lograr pasar de los significados personales a los significados matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2009).

2.2 Niveles de análisis didáctico de los procesos de estudio matemático

En el EOS se tienen cinco niveles que permiten realizar un análisis del proceso enseñanza-aprendizaje. Brevemente se menciona en qué consiste cada uno.

Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos).
Este nivel se enfoca a estudiar las prácticas matemáticas realizadas. Una práctica matemática es complaja ya que intervienen diversos elementos, como son; un agente (institución o persona) que es el que realiza la práctica, un medio en el que dicha práctica se realiza y puede involucrar otros agentes u objetos. El agente quien realiza una serie de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones problemas, debe considerar otros aspectos, fines, intenciones, valores, objetos y procesos matemáticos para que el desempeño de la práctica sea idóneo.

Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
Este nivel está centrado en la relación entre los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y los que puedan emerger de ellas, con el fin de especificar la complejidad ontosemiótica de las prácticas y explicar los conflictos semióticos que se producen al realizarlas.

Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
En este nivel se genera un patrón de interacción para que los estudiantes aprendan, llamada trayectoria cognitiva que, con el acompañamiento del profesor, se lleve a cabo desde el planteamiento del problema, las prácticas matemáticas necesarias, así como la realización de las configuraciones de objetos epistémicas y cognitivas, y los procesos matemáticos mediante configuraciones didácticas para articularlas con trayectorias didácticas y que posibiliten describir secuencias de interacción para el logro del objetivo.

Dimensión normativa.
Este cuarto nivel trata la complejidad de las normas y metanormas necesarias en los procesos de estudio. Aquí se consideran los cambios sociales presentes en el proceso enseñanza-aprendizaje; articulándose las configuraciones y las trayectorias didácticas (D'Amore, Font y Godino, 2007; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009). Además de regular la dimensión epistémica en los procesos, también lo hacen en la dimensión cognitiva y afectiva

Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio
Este quinto nivel está apoyado en los cuatro niveles anteriores, el cual consttituye el resultado final, donde es posible detectar posibles mejoras al proceso mediante la incorporación de nuevas estrategias.

2.3 Herramientas teóricas que componen el enfoque ontosemiótico

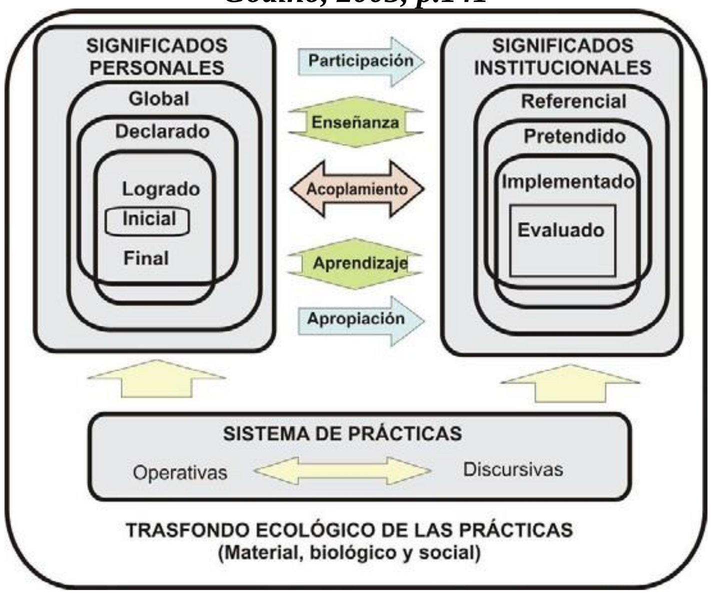
La base del EOS es la construcción ontológica de objetos matemáticos en el que se considera las tres características de las matemáticas: resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado.

2.3.1. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas

Una práctica matemática es cualquier actuación o expresión manifestada, verbal, gráfica, o de otra forma, que una persona o una comunidad que compartan situaciones problemáticas similares realizan para

resolver un problema matemático que, además da a conocer el resultado obtenido y validarlo, puede generalizarse a otros contextos o problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334).
La relación socioepistémica y cognitiva en las prácticas matemáticas se introduce tipología básica de significados que se resume en la figura 1.

Figura 1. Tipos de significados institucionales y personales
Godino, 2003, p.141



Los significados institucionales son el resultado de una serie de acciones que son implementadas y aplicados en un proceso de estudio por el docente, en donde está presente la evaluación de los aprendizajes, la planeación de las prácticas en donde esté presente el significado holístico del objeto matemático y que a la vez involucra un estudio histórico-epistemológico del objeto teniendo en cuenta también la diversidad de contextos.

Los significados personales representan todas las prácticas que la persona es capaz de manifestar de un objeto matemático, no importando que sean correctas o no desde el punto de vista institucional. Si estas prácticas quedan conforme con la pauta institucional establecida, se debe hacer un análisis de los significados previos de los estudiantes, y los que al final alcanzaron.

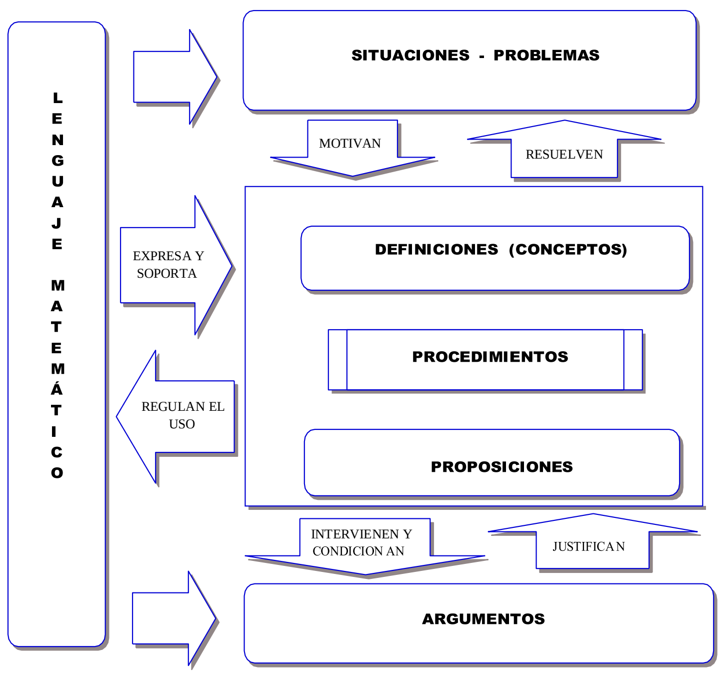
2.3.2 Emergencia de los objetos matemáticos

De las prácticas matemáticas es de donde emergen los objetos matemáticos, derivado de un complejo fenómeno que implica la consideración de un primer nivel de la actividad matemática donde se tienen entidades que pueden observarse en un texto, ya sea como problemas, definiciones, conceptos y; un segundo nivel donde se tiene un tipo de objetos que surgen de las distintas formas de ver, hablar, operar, de objetos del nivel anterior que, son prácticamente los objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos.

2.3.2.1 Primer nivel: Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

La práctica matemática es la base del EOS y para realizarla y evaluarla, se activa un conjunto de circunstancias como son: situaciones, problemas, lenguajes, concetos, proposiciones, procedimientos y argumentos; indispensables para la interpretación de los resultados y para saber si son satisfactorios estos resultados, es necesario poner en función ciertos conocimientos. Por ejemplo, al plantear resolver una situación-problema, como el resolver una ecuación, se observa el uso de lenguajes tanto verbal como simbólico. Estos lenguajes representan la parte ostensiva de una serie de componentes del objeto matemático.
En la figura 2 se muestra esta configuración.

Figura 2. Componentes y relaciones en una configuración epistémica
Font y Godino, 2006, p.69



2.3.2.2 Segundo nivel: Atributos contextuales

Los significados de los objetos matemáticos que emergen de las prácticas matemáticas deben atribuirles una naturaleza funcional, por lo que la noción de juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) es importante en combinación con la noción de institución. Según el juego de lenguaje en que participan estos objetos, pueder ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002).

• Personal – institucional. Referente a como los sistemas de prácticas están involucrados; si son compartidos en una organización, sus objetos emergentes son institucionales, mientras que si los sistemas son exclusivos de una persona, los objetos serán personales (Godino y Batanero, 1994, p. 338). Esta dualidad debe ser considerada en la cognición matemática ya que es ahí donde se establecen las relaciones dialécticas complejas escenciales en la educación matemática puesto que la cognición personal resulta del pensamiento y acción de la persona y la cognición institucional del diálogo, el convenio y reglamentación de la organización.

• Ostensivo – no ostensivo. Un objeto Ostensivos, como gráficos o símbolos, es aquél que es público y que puede mostrarse. Un objeto no ostensivos es una entidad que se evoca y se representan en forma textual, oral, gráfica o gestual. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva ya que no son perceptibles por sí mismo, pero son utilizados públicamente por medio de sus ostensivos asociados como notaciones, símbolos, gráficos.

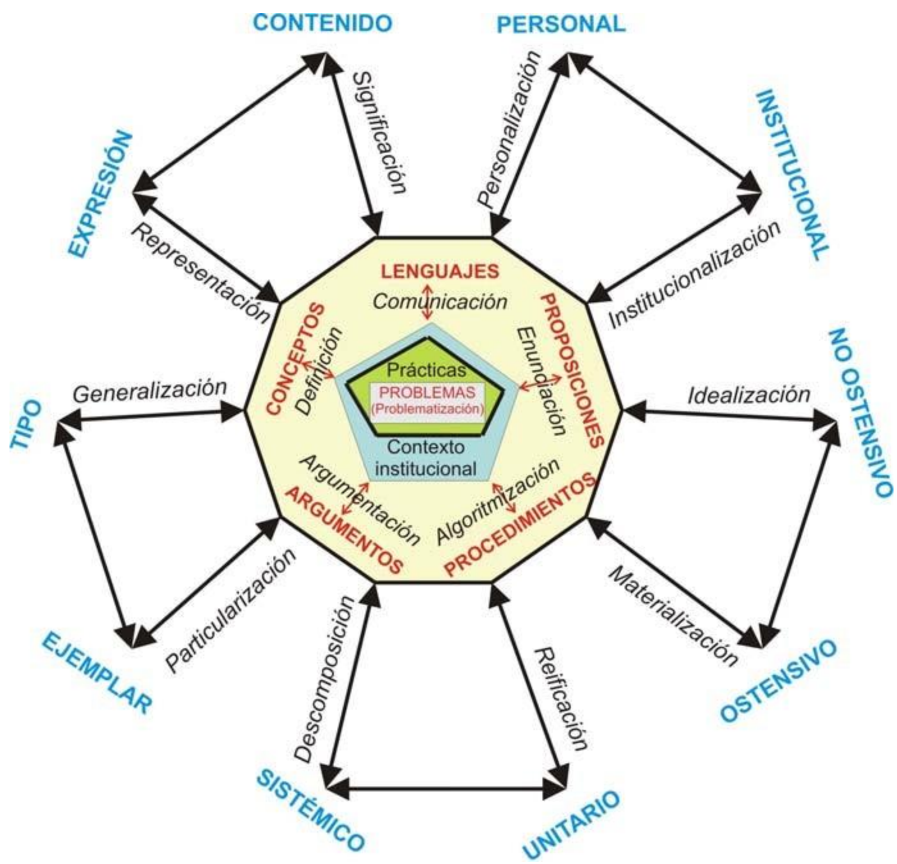
• Expresión – contenido. Toda actividad matemática en conjunto con los objetos y procesos tiene relación y, estas relaciones se establecen por medio de las funciones semióticas que involucra un antecedente (por ejemplo una expresión), y un consecuente (significado de la expresión), realizado por un agente (persona o institución) de acuerdo a ciertas criterio de correspondencia.

• Extensivo – intensivo. Esta dualidad importante para la construcción y aplicación del conocimiento matemático centrando la atención entre lo general y lo particular y se refiere a la relación que presenta un objeto matemático expresado en un lenguaje que es considerado como un caso particular (por ejemplo, una función lineal: $y = 5x+2$) y una clase de objeto más general o abstracta (por ejemplo, la familia de las funciones de la foma $y = mx + n$).

• Unitario – sistémico. Referente a objetos matemáticos que en las prácticas intervienen como aspectos unitarios y que generalmente son conocidos previamente, y en otras ocasiones como sistemas que deben subdividirse para ser estudiados .

En la figura 3 se representan las diferentes nociones teóricas que se han descrito y se aplican a los distintos objetos primarios que presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica.

Figura 3. Configuración de objetos y procesos
JD Godino, C. Batanero, V Font (2007)

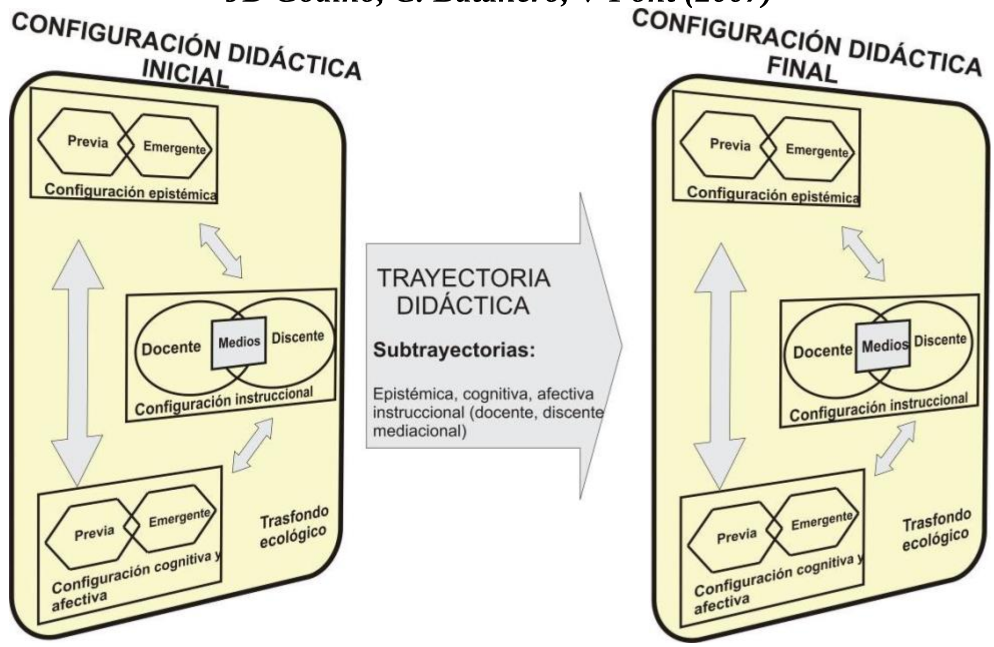


2.4 Proceso-producto para didáctica de las matemáticas

Toda práctica matemática puede analizarse con una perspectiva proceso-producto. La emergencia de los objetos matemáticos a partir de las prácticas matemáticas en los que se obtienen las configuraciones, son el resultado de procesos matemáticos tales como la comunicación, problematización, definición, procedimientos. Por otra parte, las dualidades son el resultado de procesos cognitivos/epistémicos. Estas facetas duales permite identificar procesos específicos y generalizados a diferencia de los de idealización y materialización (Font y Contreras, 2008), importantes para delimitar el objeto y permitir hacer un análisis más detallado de los procesos y obteniendo mas claridad en la naturaleza del objeto matemático que es considerado como una entidad abstracta.

Para el desarrollo de una práctica matemática se requiere de un proceso de instrucción mediante una serie de configuraciones didácticas (mostradas en la figura 4). Este proceso estocástico multidimensional característico de la Teoría de las Configuraciones Didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006), está compuesto de seis subprocesos; epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional; con sus respectivas trayectorias y estados potenciales.
La configuración didáctica referente a un objeto matemático está constituida por las interacciones entre el profesor y el alumno utilizando recursos materiales específicos.

Figura 4. Interacciones didácticas
JD Godino, C. Batanero, V Font (2007)



La configuración epistémica asociada a la configuración didáctica se refiere a la tarea de realizar los procedimientos necesarios para dar solución al problema, de los cuales podemos mencionar lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones; en donde pueden participar los estudiantes, el profesor o ambos. Se menciona además, una configuración instruccional que está constituída por el conjuto de objetos, docentes, discentes y mediacionales que se ponen en juego para realizar la tarea. En la configuración cognitiva se describen los aprendizajes que se van construyendo a partir de los objetos que intervienen y los emergentes de los sistemas de prácticas personales.

La configuración didáctica en donde se articulan diversos roles entre los estudiantes y el profesor a partir de un objeto matemático con sus configuraciones y procesos y, que tienen como objetivo la resolución de una situación problema, debe complementarse con una instrucción matemática que distingue seis dimensiones que pueden ser moldeables en función de el problema con sus propios espacios de estados y trayectorias: epistémica, relativa al conocimiento institucional; docente, las funciones del profesor; discente, las funciones del estudiante; mediacional, relativa al uso de recursos instruccionales; cognitiva, referente a la génesis de significados personales y; afectiva, de las actitudes, emociones, de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas.

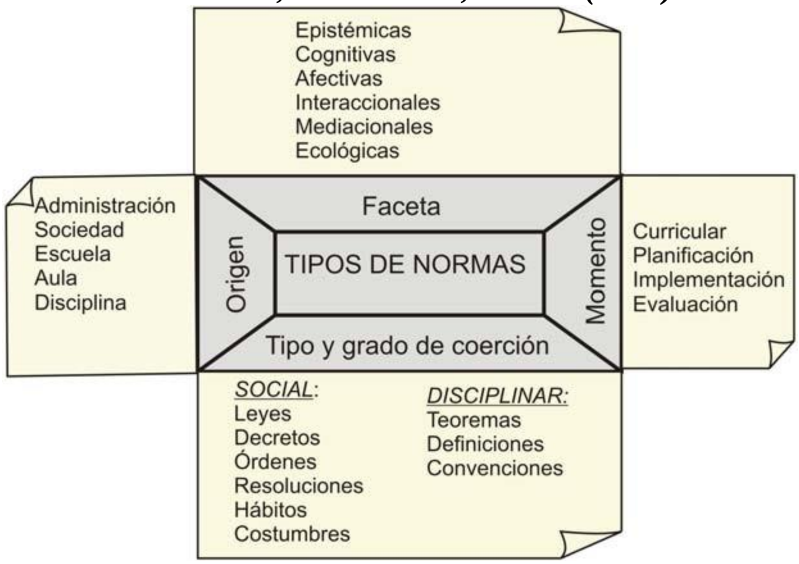
2.5 Dimensión normativa

En investigaciones realizadas en Didáctica de las Matemáticas, se aborda el tema de normas, principalmente por los autores que basan sus trabajos en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969), introduciendo nociones como patrones de interacción, normas sociales y sociomatemáticas (Cobb y Bauersfeld, 1995; Yackel y Cobb, 1996).
La dimensión normativa se basa en lo que se llama un contrato didáctico, desarrollada por Brousseau en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998), que consiste en una serie de reglas, hábitos, normas en las que las prácticas matemáticas para regular el funcionamiento de las clases de matemáticas, como si fuera una microsociedad en donde los conocimientos que van construyendo los estudiantes son los que van condicionando el proceso. Las interacciones entre el profesor y los estudiantes es la parte contral de este proceso.

Al identificar las diferentes facetas de la dimensión normativa, ya sea epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica, permitirá evaluar qué tan pertinente es la intervención de profesores o estudiantes, además de considerar las normas y tipología que restringen la enseñaanza y el aprendizaje. También posibilita proponer cambios que ayuden a perfeccionar el funcionamiento y seguimiento de los sistemas didácticos con el objetivo de que los significados personales evolucionen hacia los institucionales deseados.

La figura 5 resume los diferentes tipos de normas

Figura 5. Dimensión normativa. Tipos de normas
JD Godino, C. Batanero, V Font (2007)



2.6 Idoneidad didáctica

La idoneidad didáctica dispone de seis componentes que se organizan para que el proceso de enseñanza aprendizaje sea considerado óptimo, cumpliendo ciertas características para que los significados personales que han logrado los estudiantes se adapten a los significados institucionales que se pretenden, tomando en cuenta el entorno y los recursos disponibles (Breda, Font, & Pino-Fan, 2018, p. 268).

Los componentes a los que hace referencia la idoneidad didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Ramos y Font, 2008) son:

• Idoneidad epistémica. Se refiere al grado en que los significados institucionales están representados en relación con un significado de referencia o previo
.
• Idoneidad cognitiva. Representa el grado en que los significados que se pretendan desarrolle el estudiante, estén en la zona de desarrollo potencial (Vygotski, 1934), y a la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos.

• Idoneidad interaccional. Medida en que los métodos interactivos ayuden identificar y resolver conflictos de significado para promover independencia en el aprendizaje. Las configuraciones y trayectorias didácticas pueden dar la pauta para detectar conflictos semióticos a priori ademas de resolverlos durante el proceso.

• Idoneidad mediacional. Los recursos materiales de que se disponen y adecúan para el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje.

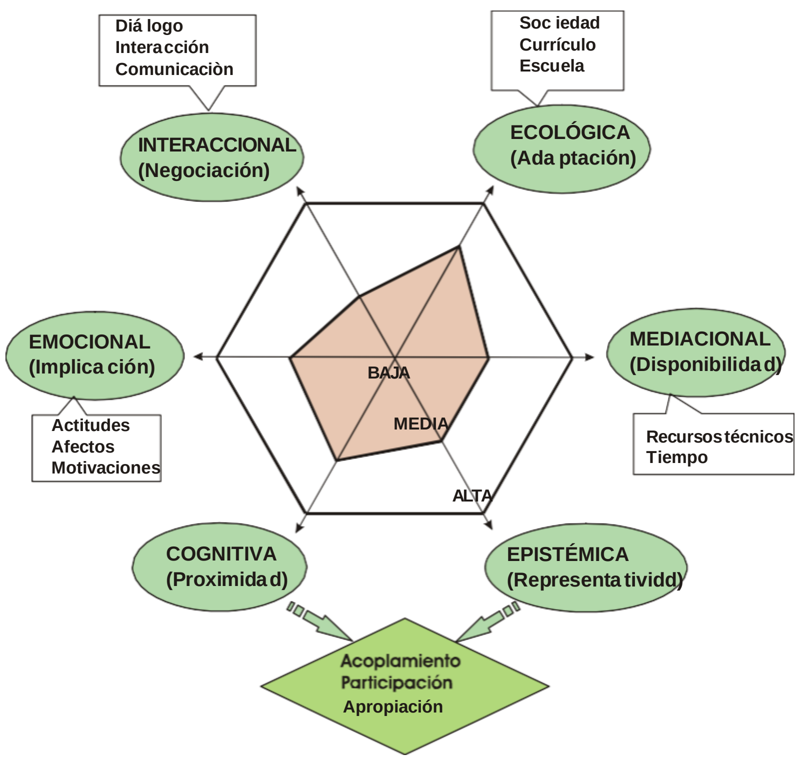
• Idoneidad afectiva. La participación de los estudiantes en el proceso de estudio depende tanto de factores de la propia intitución así como de ellos mismos y puede ir también en función de su historial académico.

• Idoneidad ecológica. Grado de adecuación del proceso de estudio al proyecto educativo de la institución, la sociedad y los condiciones del entorno en que se desarrolla.

La idoneidad didáctica requiere que exista una interacción entre ellas que se adecúa al proyecto educativo glogal (J. D. Godino, M. R. Wilhelmi y D.Bencomo, 2005). Cabe señalar que debe adaptarse a los cambios en función de las circunstancias temporales y contextuales que se presenten y, para ello se requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás participantes del proyecto educativo.

En la figura 6 se resumen los criterios que conforman la idoneidad didáctica; el hexágono regular corresponde a un proceso de estudio pretendido con un grado máximo de las idoneidades, mientras el hexágono irregular inscrito corresponde a las idoneidades reales de un proceso de estudio implementado.

Figura 6. Componentes de la idoneidad didáctica
JD Godino, C. Batanero, V Font (2007)



2.7 Herramientas del EOS utilizadas para este estudio.

2.7.1 Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos).

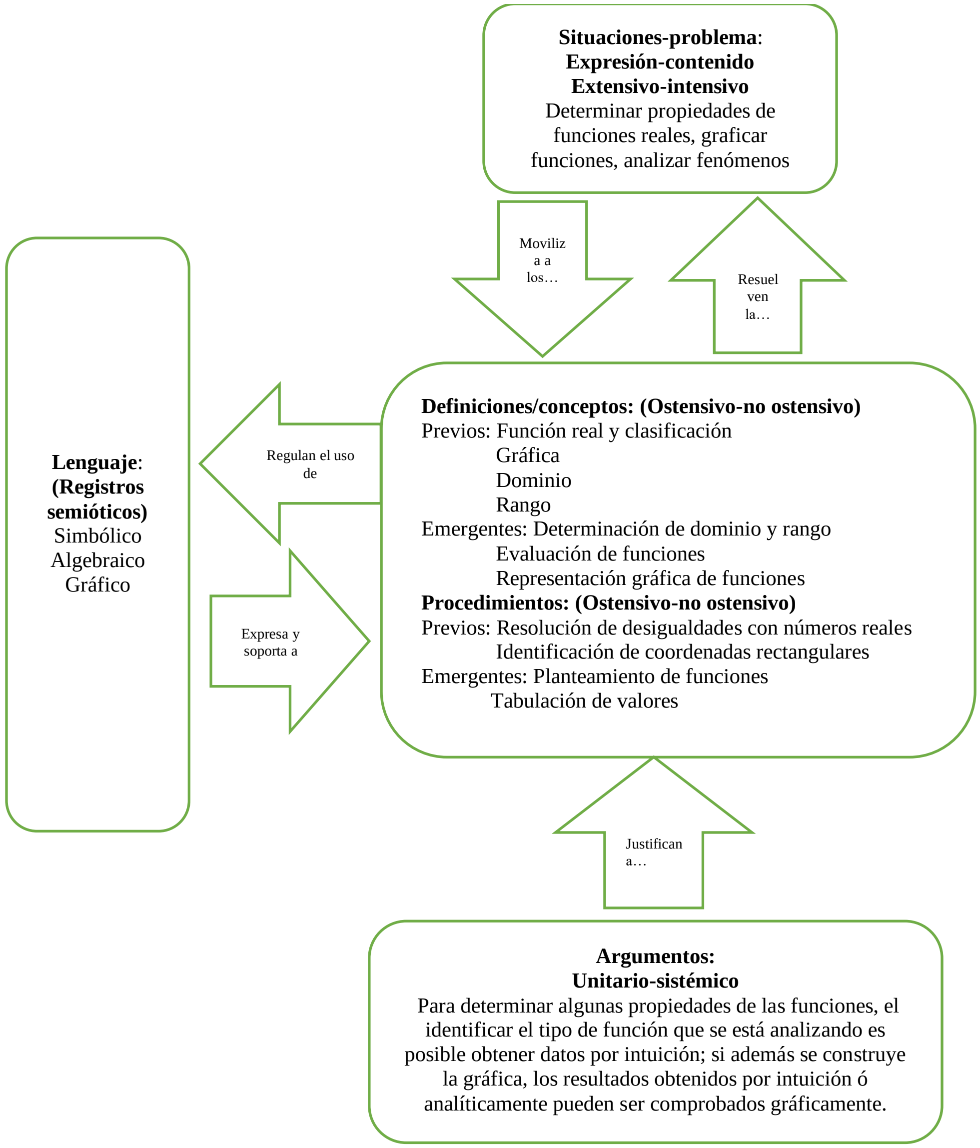
Los estudiantes al realizar prácticas matemáticas, desarrollan una secuencia de actividades enfocadas a las funciones reales como objeto matemático del cual se derivarán objetos emergentes. Las actividades permiten introducir significados tanto institucionales como personales, es decir una relación socioepistémica y cognitiva.

Para realizar las actividades propuestas, además de las herramientas básicas, como es lápiz, papel, calculadora, se requiere el uso de un dispositivo móvil para utilizar herramientas tecnológicas, específicamente el software GeoGebra para realizar las gráficas de las funciones a estudiar. La intención de involucrar las herramientas tecnológicas, es crear en los estudiantes un interés en el uso de la tecnología, que motive en el estudio de las matemáticas y haga de sus tareas una buena experiencia, ya que facilita de forma importante el estudio de las propiedades de las funciones con base en las gráficas que se obtienen con la herramienta antes mencionada.

2.7.2 Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos

Los objetos matemáticos emergen de los sistemas de prácticas matemáticas y, para su estudio es necesario realizar una configuración de los objetos y procesos matemáticos que de manera general estarán presentes en las prácticas, la que se muestra en la figura 7. Más adelante, para cada actividad se desarrollará una configuración específica de acuerdo a la actividad desarrollada.

Figura 7. Configuración epistémica
Fuente: Elaboración propia



2.7.3 Idoneidad didáctica en el EOS

Para evaluar el proceso de instrucción el EOS propone la noción de idoneidad didáctica, que permite guiar el proceso mediante la pertinencia o adecuación y la posible mejora ya que estas dimensiones pueden considerarse en dos momentos: a priori ¿Cómo se deben hacer las cosas? y a posteriori ¿Cómo se hicieron efectivamente?

Para el diseño de la propuesta didáctica se utilizará el EOS y los criterios de idoneidad propuestos en él para valorar un proceso de instrucción diseñado para que los estudiantes hagan uso de la tecnología como apoyo para obtener las gráficas de funciones reales. La valoración de este proceso de instrucción se efectúa a través de los criterios de idoneidad didáctica. Como punto de partida se consideran los criterios de idoneidad epistémica y cognitiva.

En relación al criterio de idoneidad epistémica se involucran las actividades como prácticas matemáticas donde emergen los objetos matemáticos; los procedimientos fundamentales para el aprendizaje, conceptos, proposiciones con lenguajes matemáticos para el uso y comprensión de los objetos matemáticos, y las argumentaciones para la justificación de las actividades realizadas.

El criterio de idoneidad cognitiva se refiere al grado en que el contenido implementado es oportuno para el estudiante en relación con su zona de desarrollo, por lo que deben considerarse los conocimientos previos que faciliten el andamiaje. El contenido debe considerar el programa curricular de la institución mediante tareas de ampliación y de refuerzo, además de fomentar la comprensión conceptual de los objetos matemáticos de modo que adquieran sentido y propósito para el estudiante.

El uso de la tecnología y por consiguiente de dispositivos electrónicos para la enseñanza de las matemáticas tiene relación con los criterios de idoneidad afectiva, interaccional, mediacional y ecológica.

El criterio de idoneidad interaccional permite identificar y resolver desacuerdos en significados mediante el diálogo, la comunicación, la interacción y así favorecer la autonomía en el aprendizaje.

En el criterio de idoneidad mediacional se considera el grado en que se pueden adecuar recursos materiales, en este caso dispositivos móviles que promueven el uso de las tecnologías, autoregulando su uso en diversas tareas de acuerdo a las instrucciones establecidas.

En relación con el criterio de idoneidad afectiva, el uso de dispositivos móviles en el ámbito educativo permite a los estudiantes promover roles activos e impactar de manera positiva en la actitud ante el aprendizaje de conceptos matemáticos, fomentando la perseverancia, motivación y actitud positiva mediante el diseño de contenido didáctico gestionado con una aplicación móvil.

En el caso del criterio de idoneidad ecológica, el uso de dispositivos móviles en el aula se considera una herramienta de apoyo básica para el estudio de las matemáticas, por lo que el adoptarla en el proceso de enseñanza aprendizaje resulta pertinente en relación a las directrices curriculares de la institución.

Al ser una propuesta didáctica tiene la intención de que cumpla la idoneidad didáctica, por lo que prácticamente cada una de las actividades de alguna forma relaciona cada una de las idoneidades, algunas con mayor énfasis que otras; además la idoneidad mediacional es básica para esta propuesta ya que el uso de los dispositivos es fundamental para la implementación de la tecnología, específicamente el software GeoGebra.

Capítulo 3: Metodología

3.1 Enfoque

El presente trabajo aborda una investigación de tipo cualitativo descriptivo, ya que no se pretende evaluar modelos o validar hipótesis por medio de métodos matemáticos.

La muestra es representada por un grupo de estudiantes que cursaba la materia de Cálculo Diferencial, de tal manera que consistió de un muestreo no probabilístico, específicamente por conveniencia a mis actividades docentes y se adecuó a los fines de la investigación. Dicha materia aparece en el mapa curricular de las diferentes ingenierías en el primer semestre.

Los estudiantes que conformaron la muestra fueron quince, cuatro mujeres y once hombres, pertenecientes a diferentes ingenierías con sede en el Tecnológico Nacional de México campus Querétaro, con edades entre 19 y 25 años, donde todos ellos tenían conocimientos básicos en el uso del software GeoGebra.

Uno de los temas del curso de cálculo diferencial que concierne a esta investigación es el de funciones, y en el programa de estudio se aborda en la segunda unidad. De esta manera, la aplicación de las prácticas propias del trabajo de investigación fueron aplicadas una vez que se terminó de ver el tema.

Los instrumentos utilizados para recabar la información fueron diseñados de tal manera que se pudiera hacer el análisis completo del problema que se pretende investigar; consistirá básicamente en entrevistas, cuestionarios y tests.

Debido a la situación provocada por la pandemia del COVID-19 el panorama escolar cambió drásticamente a un modelo de educación a distancia el cual impidió la obtención de evidencias de la forma que estaba prevista y una modificación a la metodología fue requerida. Las actividades implementadas se realizaron de forma virtual mediante videoconferencias en la plataforma Meet y para recoger la información se utilizó la plataforma Classroom. Estas actividades debían hacerlas de forma individual y solicitándoles que contestaran de forma consciente cada reactivo y evitaran dejar preguntas sin respuesta en la medida de lo posible y en caso de alguna duda en cuanto a la redacción de las preguntas, el docente respondería. Los estudiantes aceptaron participar y colaborar en la investigación.

Una primera evaluación diagnóstica se aplicó en una sesión con una duración de una hora. Posteriormente la siguiente semana se aplicó la primera práctica en una sesión de dos horas y, finalmente la segunda práctica se aplicó en la semana posterior de haber aplicado la primera práctica.

3.2 Ingeniería Didáctica

La ingeniería didáctica es un modelo experimental que se basa en la ejecución de prácticas matemáticas en clase analizando la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Calderón y León, 2005). La Ingeniería Didáctica se ubica en el registro de los estudios de casos, ya que la validación es interna y basada en las confrontaciones entre los análisis a priori sobre los diseños de actividades de aula y los análisis a posteriori sobre los cimientos que se producen en la implementación de las tareas, como la forma básica de validación de las hipótesis formuladas en la investigación (Campeón et.al. 2017).

La ingeniería didáctica tiene una doble función: como metodología de investigación y como resultados de situaciones de enseñanza y aprendizaje. En la ingeniería didáctica se desarrolla una serie de acciones pensadas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma congruente por un profesor-ingeniero para llevar a cabo un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo determinados de estudiantes. En el trayecto el proyecto evoluciona por la interacción entre el profesor y los alumnos en función de las decisiones y elecciones que el profesor determine. La ingeniería didáctica es un producto resultante de un análisis a priori y al mismo tiempo un proceso resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase (Douady,1996).

En la ingeniería didáctica se distinguen cuatro etapas para desarrollar la investigación: (1) Fase de análisis preeliminar donde se realizará un análisis epistemológico del tema específico de "funciones" para este estudio. (2) Fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas con la intención de identificar las variables didácticas relacionadas con el estudio y el tipo de actividad propuesta a los estudiantes. (3) Fase de experimentación en donde se ejecutan las actividades y se recogen datos para analizar e informar los fenómenos identificados en el análisis a priori. (4) Fase de análisis a posteriori y evaluación se realiza un análisis de contenido sobre el conjunto de datos recogidos en la experimentación, para la posteriormente comparalos con el análisis a priori.

Las primeras dos fases se describen en este capítulo y el análisis y evaluación se presentan en el siguiente capítulo.

3.2.1 Contexto histórico

Los objetos matemáticos fundamentales con los que trata el cálculo son las funciones, que modelan matemáticamente fenómenos del mundo real. En las matemáticas actuales el concepto de función se define como: " Sean A y B conjuntos; se llama función entre A y B a cualquier relación establecida entre los elementos de A y B de tal modo que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B".

Tuvieron que pasar años en el desarrollo y lograr una definición de manera precisa. El concepto de función comienza con las relaciones observadas entre babilonios y egipcios, conforme pasó el tiempo, la palabra comenzó a difundirse y mejorarse. Conocían y manejaban funciones específicas, pero no el concepto abstracto y moderno de función. La mayor parte de los historiadores de las matemáticas le atribuyen a Nicole Oresme (1323- 1382) la primera aproximación al concepto de función, cuando describió las leyes de la naturaleza como relaciones de dependencia entre dos magnitudes.

Con los trabajos de Galileo Galilei (1564-1642) se inicia una relación matemática explícita, que acercó mucho al concepto de función. René Descartes (1596- 1650) desarrolló y llevó a sus fundamentales consecuencias las ideas que siglos atrás se habían usado para representar en el plano relaciones entre magnitudes.

Surgieron varias científicos que definieron "función", tales como Leibniz en 1673 como"cualquier cantidad que varía a lo largo de una curva"; a finales del siglo XVII Johann Bernoulli como "una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes"; en 1748 Leonhard Euler, uno de los grandes genios de las matemáticas de todos los tiempos, publicó un libro, "Introducción al análisis infinito", en el definió función como: "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes".
Todavía no había claridad en las definiciones, se preguntaban: ¿cómo es esa dependencia?, ¿cómo expresarla, calcularla o representarla?, ¿cómo deben cambiar los valores de las variables?, ¿cuántas variables pueden intervenir? Pasaron casi dos siglos, puliendo poco a poco el concepto, hasta que, ya en el siglo XX, Edouard Goursat dio en 1923 la definición que aparece en la mayoría de los libros de textos hoy en día: Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un único valor de y. Esta

correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$. El conjunto de elementos x se llama dominio de la función y al conjunto de elementos correspondientes y se denomina rango de la función. Si consideramos a los conjuntos x y y formados por números reales, entonces la función f se denomina función real.

Así el cálculo trata en escencia con las funciones. En los cursos de ingenierías el Cálculo Diferencial es una de las materias que cursan los estudiantes en los primeros semestres, y un tema fundamental es el de las funciones, que para la mayoría de los estudiantes es un tema que les causa muchos problemas ya que para una buena comprensión del tema es necesario hacer uso de conocimientos previos adquiridos en cursos anteriores y muchas veces estos ya han sido olvidados, ocasionando en los estudiantes mucha dificultad en el aprendizaje de este tema originando trabajar de forma mecánica, sin poder dar un significado real al tema.

El trabajar con funciones implica conocer su definición, clasificación, propiedades y gráfica, entre otras. De la gráfica es posible obtener propiedades importantes, pero muchas veces el obtenerla trae dificultades, ya que son necesarias ciertos conocimientos y habilidades para la construcción de la misma. Si esta tarea de obtener la gráfica resulta difícil de realizar para los estudiantes, las actividades o problemas que se encomienden después, simplemente no podrán ser realizados o serán erróneos.

Si se da la oportunidad a los estudiantes de utilizar una herramienta que les ayude a obtener la gráfica, se podría tener la certeza de que esto sea una motivación a continuar con el aprendizaje.

3.2.2 El análisis a priori

Para el estudio de las funciones se requiere conocer lo más posible de ellas y una forma importante es su gráfica. Si esta gráfica la trazamos de forma correcta, toda la información que de ella se pueda obtener estaremos seguros que será correcta teniendo en cuenta también el saber analizarla e interpretarla.

Nuestro estudio está enfocado al uso de una herramienta que ayude a graficar las funcioens reales y partiendo de ella poder realizar actividades no solamente de temas de la materia de cálculo diferencial, sino que se adopte para posteriores asignaturas de ingeniería que tenga que ver con funciones. Es por esto que para poder realizar un análisis a priori de la ayuda que pueda generer el uso de esta herramienta para obtener la gráfica de funciones, se aplicó un cuestionario para inspeccionar sus conocimientos generales del tema y obtener información que servirá para analizar los resultados y presentar una hipótesis que se pueda validar al final.

3.3 Descripción del instrumento: Evaluación diagnóstica

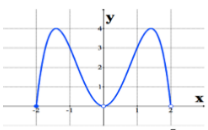
En una primera fase del proyecto, se aplicó a los estudiantes un cuestionario diagnóstico que consistió de 15 preguntas de opción múltiple en donde en cada una de ellas se pretende que el estudiante realice configuraciones epistémicas y cognitivas para dar respuesta a cada una. Cabe mencionar que la finalidad de este cuestionario fue indagar los conocimientos previos que tienen los estudiantes con el tema de funciones y tener la posibilidad de reafirmar aquellos en los que haga falta, para posteriormente aplicar la primera práctica matemática que será de referencia para el análisis de la propuesta didáctica propósito de este trabajo.

A continuación se analiza cada una de las preguntas del cuestionario diagnóstico mencionando de forma general y lo que se pretende esperar como respuesta.

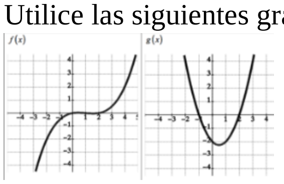
Pregunta 1

El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-1}$, está determinado por: $a)\ [1,\infty)\quad b)\ (-\infty,1)\cup(1,\infty)\quad c)\ [1,\infty]\quad d)\ \mathbb{R}$	En esta actividad se espera que el estudiante tenga claro la definición de dominio para que plantee una ecuación para determinarlo, o bien realizar una análisis de la función. Una vez que identifique el dominio, deberá hacer uso de las diferentes representaciones semióticas para identificar la respuesta correcta. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso a)

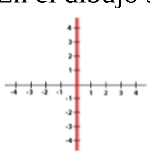
Pregunta 2

El dominio de la función cuya gráfica aparece a continuación es:  $a)\ (-2,0)\cup[0,2)\quad b)[-2,2)\quad c)\ (-2,2]\quad d)\ [-2,0)\cup(0,2)$	En esta actividad se espera que el estudiante tenga claro la definición de dominio, haga un análisis de la gráfica y lo determine haciendo uso de las diferentes representaciones. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso d)

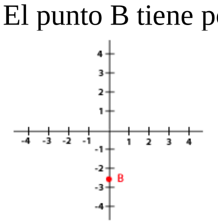
Pregunta 3

Utilice las siguientes gráficas para calcular $g\big(f(-2)\big)$  $a)\ 2\qquad b)\ 4\qquad c) -2\qquad d)\ 0$	En esta actividad se espera que el estudiante esté familiarizado con la simbología, recuerde como evaluar funciones, y realizar un análisis de las gráficas para presentar la respuesta correcta. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso b)

Pregunta 4

En el dibujo siguiente se señala el…..  $a)$ *Eje de las ordenadas* $b)$ *Eje de las abcisas* $c)$ *Eje de coordenadas* $d)$ *Eje cartesiano*	En esta actividad se espera que el estudiante identifique correctamente los ejes y recuerde con qué otro nombre se les puede nombrar; indispensable para el trazo de las gráficas. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso a)

Pregunta 5

El punto B tiene por coordenadas..  a) $(0,2.5)$ $b)(2.5,0)$ $c)(0,-2.5)$ $d)\ (-2.5,0)$	En esta actividad se espera que el estudiante identifique puntos dados las coordenadas igualmente indispensables para el trazo de gráficas. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso c)

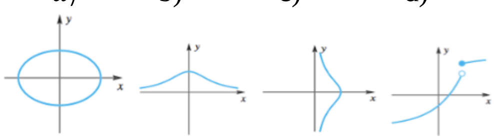
Pregunta 6

Si $(-4{,}2)$ está en una gráfica que es simétrica respecto al origen, entonces __________ también está en la gráfica. $a)\ (-2{,}4)\quad b)(4,-2)\quad c)(-4{,}2)\quad d)(-4,-2)$	En esta actividad se espera que el estudiante identifique simetría de las funciones, identifique puntos correctamente y ubique correctamente en los ejes coordenados. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso b)

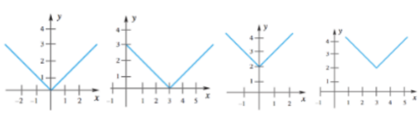
Pregunta 7

Para la función $f(x) = x^2 - 2x$, al evaluar $f(4)$ se obtiene: $a)\ 4\qquad b)\ 16\qquad c)\ 8\qquad d)\ 0$	En esta actividad se espera que el estudiante lea correctamente la simbología matemática evalúe funciones. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso c)

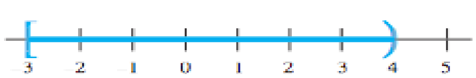
Pregunta 8

¿Cuáles de las gráficas siguientes, son gráficas de funciones? $a)$ b) c) d)  $a)\ a,c\qquad b)\ b,c\qquad c)\ b,d\qquad d)\ a,b$	En esta actividad se espera que el estudiante tenga claramente la definición de función y relacione la gráfica; puede que recuerde la prueba de la recta vertical que ayuda a identificar una función. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso c)

Pregunta 9

1.) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $f(x) = \|x - 3\|$ $a)$ $b)$ c $d)$  $a)\ a\qquad b)\ c\qquad c)\ b\qquad d)\ d$	En esta actividad se espera que el estudiante identifique la función expresada de forma algebraica y tenga presente las diferentes transformaciones que puede sufrir una gráfica a partir de la original, en este caso la función "valor absoluto". Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso $a)$

Pregunto 10

La siguiente gráfica  Corresponde al intervalo: $a)\ (3{,}4)\quad b)[-3{,}4]\quad c)\ [-3,4)\quad d)\ [3,4)$	En esta actividad se espera que el estudiante identifique las diferentes representaciones de un conjunto. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso $c)$

Pregunta 11

2. La ecuación de un recta con pendiente $\frac{3}{2}$ e intersección con el eje y igual a 2 es: $a)\ y = 2x + \frac{3}{2}\qquad b)\ y = \frac{3}{2}x + 2$	En esta actividad se espera que el estudiante identifique la ecuación general de la línea recta, la exprese de manera correcta de manera algebraica. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso $b)$

$c)\ y = 2x - \frac{3}{2} \quad d)\ y = \frac{3}{2}x - 2$	

Pregunta 12

El rango de la función $\sqrt{x}$ es: $a)\ \mathbb{R} \qquad b)\ (0,\infty) \qquad c)\ [0,\infty) \qquad d)\ [1,\infty)$	En esta actividad se espera que el estudiante identifique la función “raíz cuadrada”, y a partir de ella visualizar ya sea mediante una gráfica o con un análisi analítico, determinar el rango de la función. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso c)

Pregunta 13

La gráfica de la función $f(x) = sen\ x$, es simétrica con respecto a: $a)\ Eje\ y \qquad b)\ Eje\ x \qquad c)\ origen \qquad d)\ ninguno$	En esta actividad se espera que el estudiante identifique la función dada y sus propiedades básicas para determinar la simetría que tiene. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso c)

Pregunta 14

La función $f(x) = \cos x$ tiene como rango: $a)\ \mathbb{R} \qquad b)\ (-1,1) \qquad c)[-1,1] \qquad d)(0,1)$	En esta actividad se espera que el estudiante identifique la función dada y sus propiedades para intuír el valor del rango. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso c)

Pregunta 15

Una representación general de un función exponencial es: $a)\ f(x) = a^x \quad b)\ f(x) = x^a \quad c)\ f(x) = x^x \quad d)\ f(x) = x^e$	En esta actividad se espera que el estudiante identifique la función exponencial y relacionarla con una expresión que la represente de forma general. Para esta pregunta, la respuesta correcta es el inciso a)

Una vez aplicada esta actividad, se analizaron resultados y con base en ellos se realizó un taller en donde se reafirmaron aquellos temas en donde se detectaron la mayor cantidad de errores, con la finalidad de que todos los estudiantes tengan las mismas bases para presentar las prácticas 1 y 2 motivo de este trabajo.

3.4 Descripción del instrumento: Práctica 1

Siguiendo la trayectoria didáctica, se procede a aplicar una primera práctica matemática (anexo 1), que consiste en un cuestionario con 5 actividades en donde algunas de ellas tienen varios incisos y para resolverlas la única restricción es el uso de lápiz y papel.
En las siguiente tabla se resumen las actividades con una breve descripción de la misma así como la configuración basado en el EOS.

- **Actividad 1**. Dadas tres funciones reales, se pide obtener la gráfica y determinar dominio, rango, y evaluar tres puntos en la función. Es una actividad donde el significado esperado se relacione con el significado relacionado con el nivel escolar, es decir el planteamiento del problema debe de estar dentro de las posibilidades de la estructura cognoscitiva del alumno, logrando con ello que el nuevo conocimiento se relacione con los conocimientos previos en forma significativa, con lo que se produce de inicio un mayor afianzamiento de las nuevas ideas. También es fundamental el uso de lenguajes matemáticos diversos para la comprensión y uso de los objetos matemáticos (utilizar diferentes representaciones semiótica).

LENGUAJE Algebraico: expresión de la función Gráfico: gráfica de a función en el plano cartesiano Simbólico: D_f, R_f	SITUACIÓN Trazar la gráfica de la función. Hallar propiedades y comprobar analíticamente los resultados.	CONCEPTOS <u>Previos</u> Función, dominio, rango
PROCEDIMIENTOS <u>Previos</u> -Construcción de la gráfica de la función -Plantear ecuaciones para determinar dominio <u>Emergentes</u> Resolver desigualdades y expresar solución en distintas representaciones.	PROPOSICIONES -El dominio es conjunto de valores para los cuáles la función está definida. -El rango es el conjunto que depende de la sustitución de los valores que puede tomar el dominio	ARGUMENTOS -Justificación visual de las propiedades. - Demostración mediante procedimientos algebraicos de las propiedades.

- **Actividad 2**. A partir de la función trigonométrica $f(x) = cos\ x$, se presentan nueve ecuaciones de funciones que sufrieron transformaciones y nueve gráficas. Se les pide a los estudiantes relacionar cada gráfica con la función correcta además de hacer una breve explicación de la transformación que sufrrió la gráfica. En función de los significados personales e institucionales, se espera una respuesta adecuada a su nivel escolar, el uso de diversos lenguajes matemáticos. El aspecto cognitivo es fundamental en la realización de esta actividad. Para poder visualizar un concepto matemático es necesario reconocerlo en los diversos registros de representación semiótico que le sean propios.

LENGUAJE Algebraico: expresión de la función Gráfico: gráfica de a función en el plano cartesiano	SITUACIÓN Relaciona la expresión algebraica con la gráfica de la función. Describe de manera verbal las transformaciones que sufrió la función original.	CONCEPTOS <u>Previos</u> Función, transformación <u>Emergentes</u> Operaciones y evaluación de funciones.
PROCEDIMIENTOS <u>Previos</u>	PROPOSICIONES -Una función al aplicarle alguna	ARGUMENTOS A partir de las expresiones

-Conocimiento del software Emergentes -Graficar funciones	operación puede sufrir alguna transformaciones en su gráfica, que puede consistir en desplazamientos, estiramientos o reflexiones.	algebraicas que se muestran, relaciona las transformaciones que sufre la función original y se demuestran a partir de la gráfica.

- **Actividad 3.** Se da la gráfica de una función real y se pide trazar en el mismo plano la función inversa. Una vez obtenidas las gráficas se solcita que expliquen las propiedades que guardan estas dos funciones. Igual que las actividades anteriores, se pretende obtengan un significado de acuerdo a su nivel escolar, uso de lenguajes matemáticos; el contenido implementado es pertinente para el estudiante en relación con su zona de desarrollo, deben poner en juego los conocimientos previos para que faciliten el andamiaje.

LENGUAJE Algebraico: expresión de la función Gráfico: gráfica de a función en el plano cartesiano Simbólico: $f^{-1}(x)$	SITUACIÓN Determina la inversa de una función, graficar y analizar las propiedades que mantienen ambas funciones.	CONCEPTOS Previos Función, función inyectiva, función inversa.
PROCEDIMIENTOS Previos -Conocimiento del software Emergentes -Graficar funciones - Determinar funciones inversas	PROPOSICIONES Una función tiene inversa si y solo si es inyectiva.	ARGUMENTOS Las funciones inyectivas tienen inversa y ambas guardan ciertas propiedades que pueden visualizarse en sus gráficas.

- **Actividad 4**. Se dan diez funciones reales y se solicita que determinen el dominio y escoger el inciso que represente la solución. Se presentan diversos lenguajes matemáticos; se espera que los estudiantes sean capaces de articular o trasladarse de un registro de representación semiótica a otro.

LENGUAJE Algebraico: expresión de la función Gráfico: gráfica de la función en el plano cartesiano Simbólico: diversas representaciones semióticas	SITUACIÓN Identifica el tipo de función. Determina su dominio ya sea por inducción o analíticamente y lo representa en distintos lenguajes.	CONCEPTOS Previos Función, dominio, conjunto solución Emergentes Representaciones semióticas
PROCEDIMIENTOS Previos -Conocimiento del software Emergentes -Graficar funciones con el software - Determinar analíticamente el dominio de una función y representar el conjunto solución en distintas representaciones.	PROPOSICIONES El dominio de una función puede expresarse utilizando diferentes representaciones.	ARGUMENTOS Determinar correctamente el dominio de una función y presentar el conjunto solución en varias representaciones se puede comprobar visualmente mediante la gráfica de la función.

❖ **Actividad 5**. Se describe de forma verbal una situación. Se solicita que relacione la situación descrita con una de las cuatro gráficas que mejor describa el fenómeno.

LENGUAJE Verbal: función lineal Algebraico: expresión de la función Gráfico: gráfica de la función en el plano cartesiano Simbólico: m (pendiente)	SITUACIÓN Transforma una situación expresada de forma verbal a una expresión matemática (algebraica). Obtiene la gráfica. Determina el valor a una situación específica basada en la situación de manera nalítica y gráfica.	CONCEPTOS <u>Previos</u> Función, función lineal, pendiente <u>Emergentes</u>
PROCEDIMIENTOS <u>Previos</u> -Interpretación de gráficas <u>Emergentes</u> -Graficar funciones - Determinar la pendiente de una recta - Determinar una ecuación lineal.	PROPOSICIONES La pendiente de una recta se puede determinar a partir los dos puntos dados, y representa la relación entre la variable dependiente y y la variable independiete x.	ARGUMENTOS A partir de la información dada determina la ecuación lineal y la información solicitada. Justifica visualmente la respuesta a partir de la gráfica.

Una vez aplicado y haciendo un análisis basado en un conjunto de hipótesis, se aplicará una segunda y última práctica en donde se espera la validación de estas hipótesis cuando se lleve a cabo la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.
En el análisis a priori se considera una parte descriptiva y una predictiva, ya que en un principio se trabaja con una situación a-didáctica, en el cual se diseñaron las actividades que se llevarán a los los estudiantes para su ejecución. De las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden se podrá hacer un analisis de los desafíos para un estudiante en función de la capacidad de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento en gran medida aislado del profesor. Se predicen los posibles comportamiento y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si ocurren, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje. Preguntas como las siguientes, pueden ser planteadas una vez hecho el análisis correspondiente: ¿Cuál es el problema que cada uno de los estudiantes tiene a cargo para resolver? ¿Es posible explicitar este problema en términos de la teoría de juegos? ¿Qué conocimientos debe poseer el alumno o qué debe poder hacer comprender el enunciado? ¿Qué conocimientos debe poseer el alumno o qué debe poder hacer para tener éxito en la solución? ¿Qué control tiene el alumno sobre su acción?

3.5 Descripción del instrumento: Práctica 2

La trayectoria didáctica contempla una tercera tarea, que consiste en un cuestionario con 5 actividades (anexo 2) muy relacionadas a las aplicadas en la práctica 1 con la diferencia que las actividades se realizan haciendo uso del software GeoGebra para la realización de las gráficas. El procedimiento en la realización cambia un poco precisamente porque ahora los estudiantes tendrán que realizar las gráficas y con base en ellas responder cada una de las actividades.
Ahora se menciona cada actividad y la configuración que se relaciona a cada una en base al EOS.

- **Actividad 1**. Dada una función real se solicita obtener la representación gráfica, determinar dominio, rango, y evaluar tres puntos en la función. Es una actividad donde el significado esperado se relacione con el significado relacionado con el nivel escolar, es decir el planteamiento del problema debe de estar dentro de las posibilidades de la estructura cognitiva del estudiante, para que logre relacionar el nuevo conocimiento, con los conocimientos previos de forma significativa, produciendo de inicio un mayor afianzamiento de las nuevas ideas.También es fundamental el uso de lenguajes matemáticos diversos para la comprensión y uso de los objetos matemáticos (utilizar diferentes representaciones). La finalidad es que por intuición identifiquen la función real y consecuentemente sus propiedades de acuerdo a las generalidades que presentan dichas funciones.

LENGUAJE Algebraico: expresión de la función Gráfico: gráfica de a función en el plano cartesiano Simbólico: D_f, R_f	SITUACIÓN Trazar la gráfica de la función. Hallar propiedades y comprobar analíticamente los resultados.	CONCEPTOS <u>Previos</u> Función, dominio, rango
PROCEDIMIENTOS <u>Previos</u> -Construcción de la gráfica de la función -Plantear ecuaciones para determinar dominio <u>Emergentes</u> Resolver desigualdades y expresar solución en distintas representaciones.	PROPOSICIONES -El dominio es conjunto de valores para los cuáles la función está definida. -El rango es el conjunto que depende de la sustitución de los valores que puede tomar el dominio	ARGUMENTOS -Justificación visual de las propiedades. - Demostración mediante procedimientos algebraicos de las propiedades.

- **Actividad 1´.** Cosiderando la misma función de la primera actividad, se pide graficar haciendo uso del software GeoGebra, y determinar dominio, rango y evaluar tres puntos, además se les solicita una explicación del porqué el resultado del dominio y rango. En esta actividad se espera un significado relacionado con su nivel escolar, uso de lenguajes matemáticos. El implementar el uso de la tecnología podrá reflejar un interés a la adecuación de recursos materiales que pudieran facilitar en gran medida sus prácticas matemáticas.

LENGUAJE Algebraico: expresión de la función Gráfico: gráfica de a función en el plano cartesiano Simbólico: D_f, R_f	SITUACIÓN Con apoyo del software obtener la fráfica de la función y determinar las propiedades.	CONCEPTOS <u>Previos</u> Función, dominio, rango
PROCEDIMIENTOS <u>Previos</u> -Conocimiento del software <u>Emergentes</u> -Graficar funciones con el software -Resolver desigualdades y expresar solución en distintas representaciones.	PROPOSICIONES -El dominio es conjunto de valores para los cuáles la función está definida. -El rango es el conjunto que depende de la sustitución de los valores que puede tomar el dominio	ARGUMENTOS -Utiliza software como apoya para determinar la gráfica de la función y visualizar las propiedades.

- **Actividad 2**. A partir de la función trigonométrica $f(x) = sen\ x$, se presentan 8 ecuaciones de funciones que sufrieron transformaciones. Se les solicita a los estudiantes realizar la gráfica haciendo uso del software GeoGebra. Con base a la gráfica deben explicar qué transformación sufrió la gráfica. En función de los significados personales e institucionales, se espera una respuesta adecuada a su nivel escolar, el uso de diversos lenguajes matemáticos y el incluír la tecnología a las prácticas como herramienta para facilitar la realización. El aspecto cognitivo es fundamental en la realización de esta actividad.

LENGUAJE Algebraico: expresión de la función Gráfico: gráfica de a función en el plano cartesiano	SITUACIÓN Relaciona la expresión algebraica con la gráfica de la función. Describe de manera verbal las transformaciones que sufrió la función original.	CONCEPTOS <u>Previos</u> Función, transformación <u>Emergentes</u> Operaciones y evaluación de funciones.
PROCEDIMIENTOS <u>Previos</u> -Conocimiento del software <u>Emergentes</u> -Graficar funciones con el software	PROPOSICIONES -Una función al aplicarle alguna operación puede sufrir alguna transformaciones en su gráfica, que puede consistir en desplazamientos, estiramientos o reflexiones.	ARGUMENTOS A partir de las expresiones algebraicas que se muestran, relaciona las transformaciones que sufre la función original y se demuestran a partir de la gráfica.

- **Actividad 3**. Se da una función real y se solicita encontrar la función inversa y graficar ambas funciones en el mismo plano con apoyo del software GeoGebra. Una vez obtenidas las gráficas se solcita que expliquen las propiedades que guardan estas dos funciones. Igual que las actividades anteriores, se pretende obtengan un significado de acuerdo a su nivel escolar, uso de lenguajes matemáticos, uso de la tecnología; el contenido implementado es pertinente para el estudiante en relación con su zona de desarrollo, deben poner en juego los conocimientos previos para que faciliten el andamiaje.

LENGUAJE Algebraico: expresión de la función Gráfico: gráfica de a función en el plano cartesiano Simbólico: $f^{-1}(x)$	SITUACIÓN Determina la inversa de una función, graficar y analizar las propiedades que mantienen ambas funciones.	CONCEPTOS <u>Previos</u> Función, función inyectiva, función inversa.
PROCEDIMIENTOS <u>Previos</u> -Conocimiento del software <u>Emergentes</u> -Graficar funciones con el software - Determinar funciones inversas	PROPOSICIONES Una función tiene inversa si y solo si es inyectiva.	ARGUMENTOS Las funciones inyectivas tienen inversa y ambas guardan ciertas propiedades que pueden visualizarse en sus gráficas.

- **Actividad 4**. Se dan 10 funciones reales y con el uso del software GeoGebra se solicita graficarlas. Una vez obtenida la gráfica, determinan el dominio, que se representa en diversos lenguajes matemáticos y poder articular o trasladarse de un registro de representación semiótica a otro. El uso de la tecnología será un apoyo que facilitará la obtención de las gráficas; se espera que el estudiante identifique la función y en base a sus conocimientos previos y teniendo la gráfica, relacione ambos para determinar el dominio identificando cada uno de los lenguajes utilizados.

LENGUAJE Algebraico: expresión de la función Gráfico: gráfica de la función en el plano cartesiano Simbólico: diversas representaciones semióticas	SITUACIÓN Identifica el tipo de función. Determina su dominio ya sea por inducción o analíticamente y lo representa en distintos lenguajes.	CONCEPTOS <u>Previos</u> Función, dominio, conjunto solución <u>Emergentes</u> Representaciones semióticas
PROCEDIMIENTOS <u>Previos</u> -Conocimiento del software <u>Emergentes</u> -Graficar funciones con el software - Determinar analíticamente el dominio de una función y representar el conjunto solución en distintas representaciones.	PROPOSICIONES El dominio de una función puede expresarse utilizando diferentes representaciones.	ARGUMENTOS Determinar correctamente el dominio de una función y presentar el conjunto solución en varias representaciones se puede comprobar visualmente mediante la gráfica de la función.

- **Actividad 5**. Se describe de forma verbal un fenómeno explicado claramente lo que se desea determinar. Esta actividad involucra prácticamente todas las idoneidades didáticas, ya que se espera aplique significados institucionales (aspecto epistémico) y personales (aspecto cognitivo); además uso de lenguajes; interpretación, planteamientos, resultados. Uso de la tecnología.

LENGUAJE Verbal: función lineal Algebraico: expresión de la función Gráfico: gráfica de la función en el plano cartesiano Simbólico: m	SITUACIÓN Transforma una situación expresada de forma verbal a una expresión matemática (algebraica). Obtiene la gráfica. Determina el valor a una situación específica basada en la situación de manera nalítica y gráfica.	CONCEPTOS <u>Previos</u> Función, función lineal, pendiente <u>Emergentes</u>
PROCEDIMIENTOS <u>Previos</u> -Conocimiento del software <u>Emergentes</u> -Graficar funciones con el software - Determinar la pendiente de una recta - Determinar una ecuación lineal.	PROPOSICIONES La pendiente de una recta se puede determinar a partir los dos puntos dados, y representa la relación entre la variable dependiente y y la variable independiete x.	ARGUMENTOS A partir de la información dada determina la ecuación lineal y la información solicitada. Justifica visualmente la respuesta a partir de la gráfica.

Capítulo 4: Recogida de datos y análisis de resultados

En este capítulo se presentan los datos obtenidos por los quince estudiantes que participaron en el estudio, identificados como estudiante1, hasta el estudiante 15. También se realiza una análisis retrospectivo ente lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación, así como las normas que condicionaron el proceso instruccional y sobre la idoneidad didáctica, esto para las prácticas 1 y 2.
Cabe mencionar que para la evaluación diagnóstica, solo se presentan los resultados numéricos obtenidos y un análisis de los mismos para conocer de forma general las características académicas de los estudiantes en el tema de funciones.

4.1 Evaluación diagnóstica

De acuerdo a la trayectoria didáctica establecida, una primera acción fue la aplicación de la evaluación diagnóstica, cuya finalidad fue indagar los conocimientos previos de los estudiantes en el tema de funciones, además de identificar aquellos en los cuáles tienen mayor deficiencias y tratar de disminuir esas fallas mediante la participación en un taller de nivelación, con la participación de todos y estén en condiciones similares para el estudio de investigación.

En la tabla 1 se presentan los resultados obtenidos en la evaluación diagnóstica aplicada a los 15 estudiantes donde se muestra la frecuencia de las respuestas.

Tabla 1. Resultados de la Evaluación diagnóstica

Pregunta no.	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas	Preguntas no contestadas	% Preguntas correctas
1	9	4	2	60
2	10	5	0	67
3	3	10	2	20
4	10	5	0	67
5	13	2	0	87
6	11	4	0	73
7	10	5	0	67
8	3	11	1	20
9	2	13	0	13
10	15	0	0	100
11	5	9	1	33
12	8	7	0	53
13	6	9	0	40
14	5	8	2	33
15	6	8	1	40

Con base a los resultados obtenidos en la evaluación diagnóstica se tiene la siguiente información:

- Cada estudiante contestó correctamente un promedio de 7.7 preguntas

- En la pregunta número 9 solamente dos acertaron. En ella se pedía relacionar la función expresada de forma algebraica con una de las cuatro gráficas. Los estudiantes no identificaron la función base y por consiguiente la transformación que presentaba en la expresión.
- En las preguntas número 3 y 8 solamente tres personas acertaron. En la pregunta número 3 dadas dos funciones gráficas, se pedía determinar el valor numérico de la composición de éstas en un punto determinado. A los estudiantes les faltó interpretar el lenguaje simbólico expresado para poder determinar el valor gráficamente de la función en el punto dado. En la pregunta número 8 se pedía que identificaran cuáles de las gráficas presentadas representaban funciones. Los estudiantes no identificaron las funciones porque la definición o el concepto de función no lo tienen claro ni realizaron la prueba de la recta vertical importante para identificar una función de forma gráfica.
- En las preguntas número 11 y 14 acertaron cinco personas. La pregunta 11 presentaba como dato la pendiente de una recta y la ordenada al origen; con éstos datos se presentan cuatro ecuaciones y se pedía identificar cuál representaba la ecuaciónde la recta. Se observa que los estudiantes no identifican la ecuación general de la recta. La pregunta 14 pedía seleccinar entre cuatro respuestas, el rango de la función coseno. Se observa que los estudiantes desconocen la gráfica de la función coseno y por consiguiente, no identificaron el rango de la función.
- En las preguntasnúmero 13 y 15 solo seis personas acertaron. En la pregunta 13 pedía identificar la simetría que presenta la función seno. Se observa que no identifican la gráfica de la función y por lo tanto desconocen su simetría. En la pregunta 15 se presentan cuatro funciones similares en cuanto a variables y se pedía identificar la función que representara a la función exponencial. Los estudiantes tuvieron confusión en cuanto a esta función.
- Las preguntas restantes 1, 2, 4, 5, 6, 7, 10 y 12 fueron las que fueron acertadas por más de ocho personas, por lo que se puede induce que en los temas como el dominio de una función, identificación de ejes coordenados, ubicación de un punto en el plano cartesiano, simetría y evaluación de funciones, los estudiantes no presentan un problema mayor.
- La pregunta número 10 es en la que todos los estudiantes la tuvieron correcta, lo que se puede concluir que tienen claro la representación de intervalos de forma gráfica y su transformación simbólica mediante intervalos. Los estudiantes saben interpretar las diferentes formas semióticas de intervalos.

En relación a las preguntas que no fueron contestadas, los estudiantes comentaron que realmente no sabían la respuesta, por lo que en general las respuestas fueron contestadas con honestidad y de acuerdo a sus conocimientos adquiridos hasta este momento.

Se observó una buena actitud por parte de los estudiantes y para la realización del cuestionario acataron todas las reglas para contestarlo como los instrumentos de apoyo permitidos, tiempo de resolución, envío, considerando que fue realizado en línea con apoyo de la plataforma Zoom y Classroom.

Con los resultados se realizó un taller con una duración de 2 horas, donde se trabajó con los temas donde se observó mayor incidencia de errores para tratar de que todos los estudiantes estén en iguales condiciones en cuanto a conocimientos del tema y participen en las actividades siguientes.

Una vez que se concluyó el taller, se procedió a aplicar la primera práctica con una duración de 2 horas conformada por 5 actividades.

4.2 Practica No. 1

Cabe recordar que para realizar esta práctica solo se les permitió a los estudiantes usar lápiz, papel y calculadora si era necesario.

- Análisis de la Actividad 1

En la tabla 2 se muestran la frecuencia (F) de respuestas obtenidas en cada una de las tres funciones.

Tabla 2. Resultados de la actividad 1

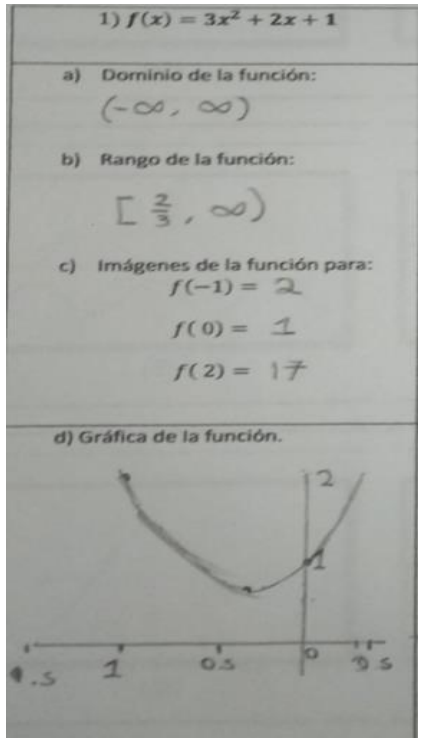
Tipo de ecuación	Respuesta	Dominio		Rango		Imagen		Gráfica	
		Freq.	%	Freq.	%	Freq.	%	Freq.	%
Cuadrática	correcto	13	87	6	40	8	53	5	33
	incorrecto	1		7		2		6	
	no contestó	1				5		4	
Racional	correcto	10	67	6	40	6	40	9	60
	incorrecto	5		7		5		1	
	no contestó	0		2		4		5	
Por secciones	correcto	2	13	3	20	0	0	3	20
	incorrecto	3		1		3		1	
	no contestó	10		11		12		11	

Mediante la expresión de la función en un lenguaje simbólico, identifican el tipo de función (elemento ostensivo), utilizan el concepto adecuado para determinar las propiedades solicitadas y expresar los resultados.

Se observa que la mayoría de los estudiantes, identifican una función cuadrática y la relaciona con su representación gráfica, a partir de sus conocimientos previos y realizando una práctica cognitiva fue capaz de obtener las propiedades requeridas. También se observa que aunque relacionan una función cuadrática, con su gráfica (una parábola), la obtención de ésta tuvo errores en la mayoría de los estudiantes. Solamente 5 estudiantes realizaron correctamente la gráfica de la función.

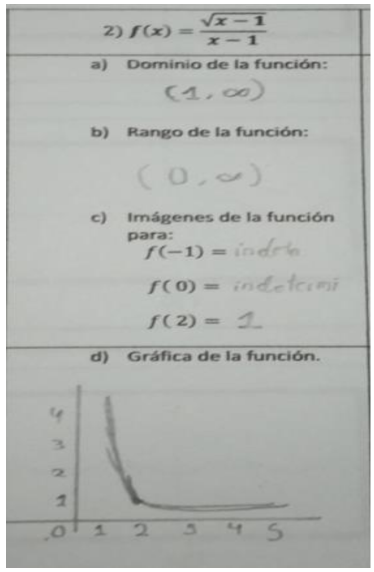
En la figura 8 se muestra la respuesta del estudiante 1, se observa que identifica la función en dos representaciones: simbólica y gráfica; tiene conocimiento y relaciona los conceptos de dominio y rango y los determina de forma correcta. Utiliza sus conocimientos previos para poder dar solución a sus planteamientos.

Figura 8.Respuesta del estudiante 1de la actividad 1 a)



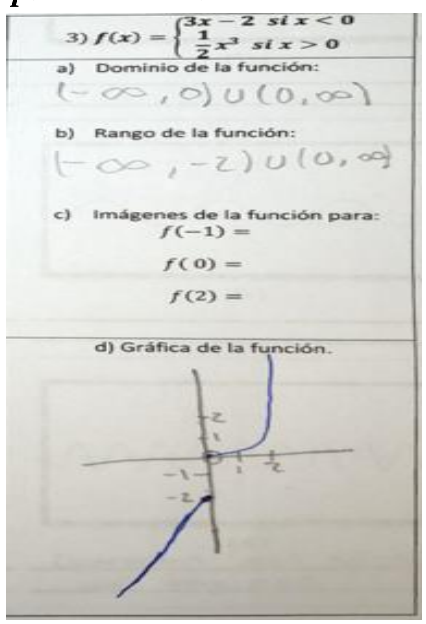
La mayoría de los estudiantes identifican una ecuación racional, obtuvieron el dominio de forma correcta aplicando correctamente los conceptos, aunque establecer rango y evaluar la función se presenta dificultad. La mayoría de los estudiantes obtienen la gráfica correcta. En la figura 9 se muestra la respuesta del estudiante 1 a esta actividad.

Figura 9. Respuesta del estudiante 1 de la actividad 1 b)



La ecuación por secciones es en donde hubo mayor dificultad tanto para determinar sus propiedades como para realizar la gráfica. De los estudiantes que realizaron esta actividad, el estudiante 10 fue el que contestó la mayor parte de la actividad, solo le faltó obtener las imágenes; respuesta que se muestra en la figura 10.

Figura 10.Respuesta del estudiante 10 de la actividad 1 c)



De manera general los resultados obtenidos en esta actividad refleja que los estudiantes identifican una función cuadrática con su respectiva gráfica, aunque al trazar esta, presentan dificultades; identifican el dominio y saben determinar imagen; en cuanto al rango, la mayoría de los estudiantes no supieron determinarlo correctamente. Para las funciones racional y por secciones, se observa mayor cantidad de errores en las propiedades solicitadas, lo que se concluye que desconocen este tipo de funciones y por consiguiente no propiedades básicas de estas.

❖ Análisis de la Actividad 2

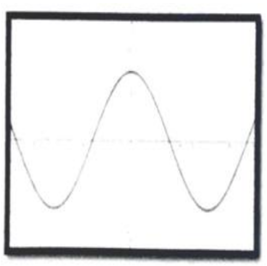
La actividad requiere que los estudiantes relacionen la función expresada en forma simbólica con su respectiva gráfica. De acuerdo con los resultados obtenidos, solamente un estudiante respondió correctamente 1 de los 9 ejercicios de la actividad. En la tabla 3 se muestran los resultados de la actividad, de cada uno de los incisos.

Tabla 3. Resultados de la actividad 2

Act.2 Incisos	**correcto**		**Incorrecto**	**no contestó**
	Freq.	**%**	**Freq.**	**F**
a	0		13	2
b	0		13	2
c	0		13	2
d	0		13	2
e	0		12	3
f	0		12	3
g	1	7	11	3
h	0		12	3
i	0		13	2

En la figura 11 se muestra única respuesta correcta realizada por el estudiante 9.

Figura 11. Respuesta del estudiante 9 de la actividad 2 g)



(H

A. $y = \cos x + 1$	B. $y = -\cos x$	C. $y = -.5\cos x$
D. $y = 3\cos(0.5x)$	E. $y = \cos x - 2$	F. $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$
G. $y = \cos(2x)$	H. $y = 3\cos x$	I. $y = \cos x$

En esta actividad se puede concluir que los estudiantes no identifican la gráfica de una función base y por lo tanto las transformaciones que pudiera surgir a partir de un cambio en la forma simbólica de la misma, lo que hace imposible identificar después la gráfica que corresponde a la expresión presentada. Es necesario que los estudiantes identifiquen la transformación que pueda presentar una función a partir de las operaciones algebraicas que pudiera sufrir una función para a partir de ella identificar su gráfica.

❖ Análisis de la Actividad 3

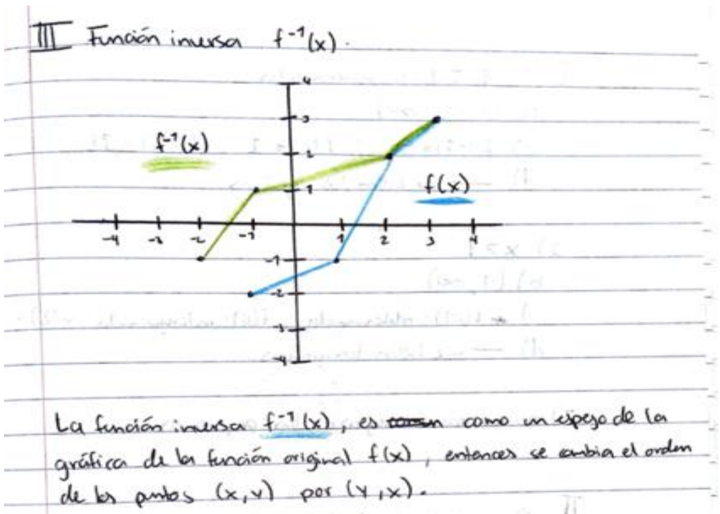
Los resultados presentados en la tabla 4, reflejan un desconocimiento total de la relación que guarda una función con su respectiva inversa, lo anterior se concluye por la cantidad de estudiantes que no contestaron.

Tabla 4. Resultados de la actividad 3

Actividad 3	Inversa	
	Freq.	**%**
Correcto	1	7
Incorrecto	3	20
No contestó	11	73

Se muestra en la figura 12 la única respuesta correcta que obtuvo el estudiante 4, donde aplica las propiedades que guardan ambas funciones para determinar la gráfica, haciendo uso de la definición de una inversa. Comprueba de forma gráfica éstas propiedades, además da una explicación breve de éstas gráficas.

Figura 12. Respuesta del estudiante 4 de la actividad 3



❖ Análisis de la Actividad 4.

Una posible acción para ayudar a dar solución a esta actividad, es la representación gráfica ya que facilita identificar de manera visual (elemento ostentivo) el dominio de una función, pero ninguno de los estudiantes realizó la gráfica, pero resolvieron analíticamente los ejercicios. La tabla 5 muestra los resultados obtenidos.

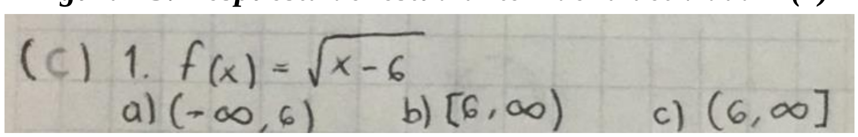
Se observa que en la función racional (ejercicio 7) se presentó la mayor cantidad de errores, y en la función con radical (ejercicio 1) la mayor cantidad de aciertos.

__Tabla 5. Resultados de la actividad 4__

Función	**Correcto**		**Incorrecto**	**No contestó**
	Freq.	**%**	**Freq.**	**Freq.**
$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x-6}}$	12	80	2	1
$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6+5x-x^2}}}$	8	53	5	2
$\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 4}$	8	53	6	1
$\boldsymbol{f(x) = 5e^{-x}}$	9	60	4	2
$\boldsymbol{f(x) = \ln(x+4)}$	7	47	5	3
$\boldsymbol{f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$	6	40	6	3
$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}}$	4	27	8	3
$\boldsymbol{f(x) = \cos x}$	9	60	3	3
$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}}$	8	53	4	3
$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad x < -4 \\ sen\,x & si \quad x > -4 \end{cases}}$	5	33	7	3

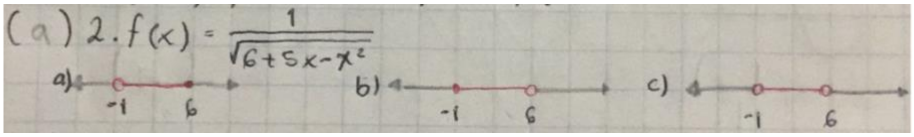
En la figura 13 se muestra la respuesta del estudiante 2 para el primer ejercicio, donde se observa que no identifica correctamente la restricción de la función, lo que resulta un error en su respuesta.

__Figura 13. Respuesta del estudiante 2 de la actividad 4 (1)__



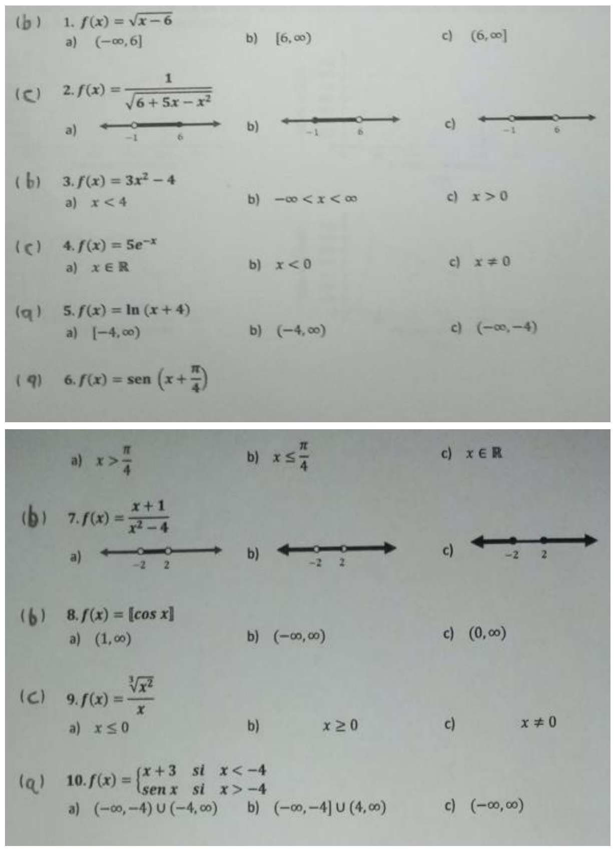
Lo mismo se observa en el ejercicio (2) de esta actividad, que se muestra en la figura 14, donde las restricciones que considera el estudiante 2 son incorrectas.

Figura 14. Respuesta del estudiante 2 de la actividad 4 (2)



En la figura 15 se muestra la respuesta a esta actividad del estudiante 1 quien obtuvo la mayor cantidad de aciertos (7), logrando plantear y resolver correctamente sus ecuaciones, así como restricciones e identificar las diferentes representaciones semióticas para presentar soluciones.

Figura 15. Respuesta del estudiante 1 de la actividad 4



(b) 1. $f(x) = \sqrt{x-6}$
a) $(-\infty, 6]$ b) $[6, \infty)$ c) $(6, \infty]$

(c) 2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6+5x-x^2}}$
a) b) c)

(b) 3. $f(x) = 3x^2 - 4$
a) $x < 4$ b) $-\infty < x < \infty$ c) $x > 0$

(c) 4. $f(x) = 5e^{-x}$
a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x < 0$ c) $x \neq 0$

(a) 5. $f(x) = \ln(x+4)$
a) $[-4, \infty)$ b) $(-4, \infty)$ c) $(-\infty, -4)$

(a) 6. $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
a) $x > \frac{\pi}{4}$ b) $x \leq \frac{\pi}{4}$ c) $x \in \mathbb{R}$

(b) 7. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$
a) b) c)

(b) 8. $f(x) = [\![\cos x]\!]$
a) $(1, \infty)$ b) $(-\infty, \infty)$ c) $(0, \infty)$

(c) 9. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$
a) $x \leq 0$ b) $x \geq 0$ c) $x \neq 0$

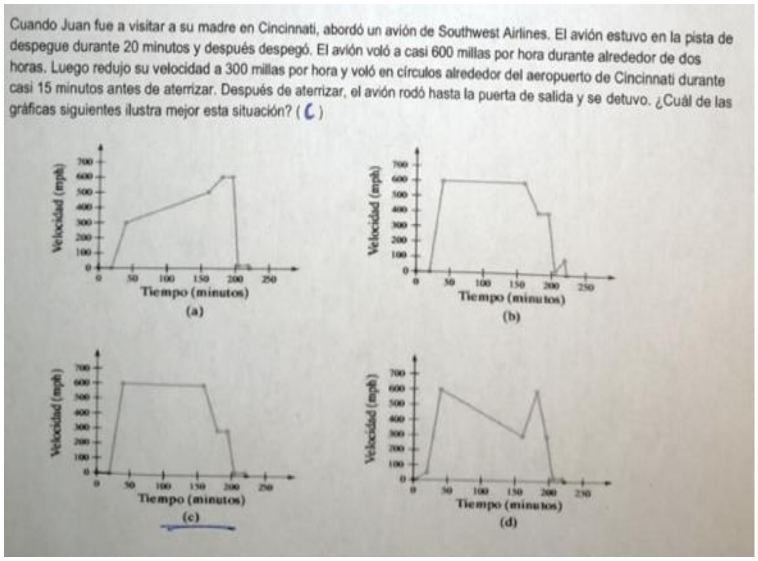
(a) 10. $f(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad x < -4 \\ sen\, x & si \quad x > -4 \end{cases}$
a) $(-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$ b) $(-\infty, -4] \cup (4, \infty)$ c) $(-\infty, \infty)$

En esta actividad se observa que los errores cometidos por los estudiantes se presentan principalmente en omitir las restricciones que la función pueda tener, es decir, no visualizan las propiedades generales de las funciones con las están trabajando. Sería de mucha utilidad que se apoyaran en las gráficas de las funciones para determinar el dominio, pero ninguno de los estudiantes las realizó, lo que originó una gran cantidad de respuestas incorrectas.

- Análisis de la Actividad 5.

  Solamente 5 estudiantes pudieron relacionar una situación expresada verbalmente con la gráfica que describe el fenómeno Se muestra en la figura 16 una de las respuestas correctas a esta actividad del estudiante 10; se puede apreciar la claridad en el enunciado, sin embargo, la mayoría de los estudiantes no logró relacionar la descripción con la gráfica correspondiente.

Figura 16. Respuesta del estudiante 10 de la actividad 5



Se puede concluir que a los estudiantes les falta la parte no ostentiva para que puedan relacionar el gráfico que describa una situación determinada, además de la parte de visualización, importante en este tipo de prácticas.

De esta primera práctica con un total de 33 reactivos, el estudiante número 6 fue el que obtuvo la mayor cantidad de aciertos, específicamente 17, que representa un 51.1 %. El estudiante con la menor cantidad solo obtuvo 5 preguntas correctas. En general, estos resultados reflejan una considerable deficiencia en cuanto a los conceptos evaluados, ya que son temas vistos en clase, además de contar con las condiciones necesarias y suficientes para resolverlo. En algunas actividades tuvieron oportunidad de realizar las gráficas de forma manual para poder dar solución con mayor facilidad, ya que visualizando estas, es posible determinar algunas de las propiedades solicitadas. También se observó que no se apoyaron en procedimientos algebraicos o simplemente los hicieron de manera mental o en aquellos ejercicios de opción múltiple posiblemente contestaron al azar.

4.3 Práctica No. 2

Recordar que para realizar esta práctica se usó el software GeoGebra como herramienta de apoyo para graficar las funciones.

- ❖ Análisis de la Actividad 1

Analizando los resultados de la primera práctica se observó que de las tres funciones presentadas, los estudiantes identificaron mejor la función cuadrática, por lo que en esta primera actividad solamente se consideró una función de este tipo. En únicamente esta primera actividad se pidió a los estudiantes resolver utilizando lápiz y papel para poder comparar sus resultados con la siguiente actividad, y analizaron sus errores si es que los hubo. En la actividad se solicitaban prácticamente las mismas propiedades de la práctica anterior. En la tabla 6 se muestran los resultados obtenidos.

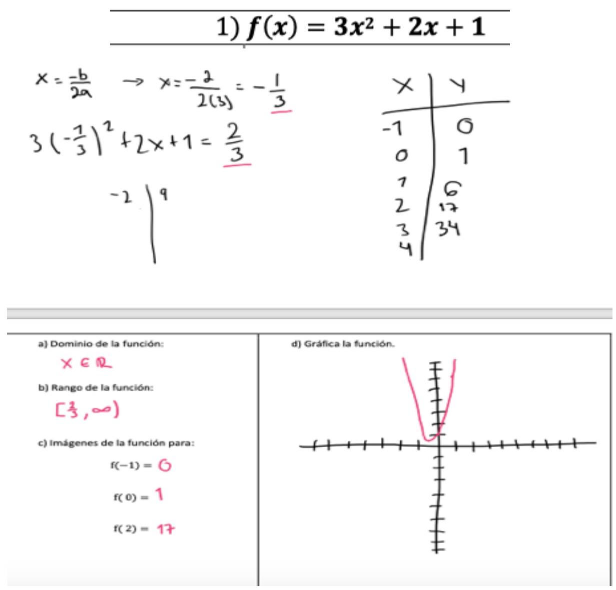
Tabla 6. Resultados de la actividad 1

Actividad	**Correcto**		**Incorrecto**	**no**
	Freq.	%	**Freq.**	**contestó F**
Dominio	11	73	2	2
Rango	7	47	6	2
Imagen	9	60	4	2
Gráfica	12	80	1	2

Se observa que las respuestas tuvieron un porcentaje en aciertos arriba del 50, excepto en la determinación del rango. También se pudo observar en los resultados, que la gráfica que realizaron no fue utilizada para la determinación de las propiedades solicitadas, que se reflejó en las respuestas; la realizaron al final de la actividad de acuerdo al orden de las preguntas.

En la figura 17 se muestra la respuesta del estudiante 4 a esta actividad; se observa la forma en que establece sus ecuaciones para determinar las propiedades y obtener la gráfica de la función.

Figura 17. Respuesta del estudiante 10 de la actividad



❖ Análisis de la Actividad 1´

Esta actividad es igual a la actividad anterior, con la diferencia que en esta se pidió primero realizar la gráfica haciendo uso del software GeoGebra y posteriormente determinar las propiedades. En la tabla 7 se presentan los resultados obtenidos.

Tabla 7. Resultados de la actividad 1´

Actividad	Correcto		Incorrecto	no contestó
	Freq.	%	Freq.	Freq.
Dominio	10	67	1	4
Rango	3	20	8	4
Imagen	7	47	4	4
Gráfica	14	93	0	1

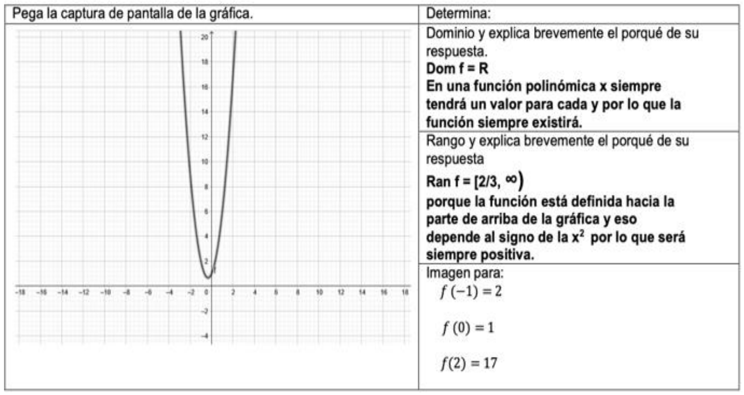
Considerando que las actividades 1 y 1´se trataba de la misma función con las mismas cuestiones, con la diferencia que la segunda actividad se apoyó con el software, se hace una comparación de las respuestas correctas que se obtuvieron en ambas actividades, mostradas en la tabla 8.

Tabla 8. Resultados de la actividad 1 y 1´

	Actividad 1		Actividad 1´	
	Freq.	%	Freq.	%
Dominio	11	73	10	67
Rango	7	47	3	20
Imagen	9	60	7	47
Gráfica	12	80	14	93

A pesar de que en la actividad 1´ se tuvo el apoyo del software, las respuestas correctas disminuyeron con respecto a la primera actividad. Estos resultados podrían atribuírse a que en la primera actividad, los estudiantes realizaron sus cálculos de forma analítica y al final realizaron la gráfica; en cambio, en la actividad 1´, lo primero que hicieron los estudiantes fue realizar la gráfica con el software y a partir de esta determinaron las propiedades, basándose solamente en la gráfica. En la figura 18 se muestra la respuesta del estudiante número 1, donde su explicación está basada en la gráfica obtenida.

Figura 18. Respuesta del estudiante 1 de la actividad 1´



Se puede concluir en esta actividad que sus respuestas fueron en base a la gráfica que obtuvieron los estudiantes con apoyo del software, pero la interpretación o los datos obtenidos de estas no fueron acertados. Sería conveniente dar solución además con métodos algebraicos, ya que en este caso tuvieron la confianza total a la grafica obtenida; es decir, no caer en el uso total de esta herramienta y complementar con actividades analíticas.

❖ Análisis de la Actividad 2

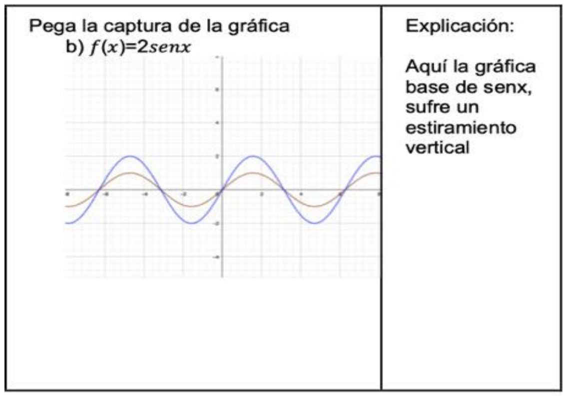
Esta actividad al igual que la de la práctica 1, se presentaba una función expresada en lenguaje simbólico, se pedía graficarla con apoyo del software GeoGebra, dar una explicación breve de lo sucedido a la función base. La tabla 9 muestra los resultados.

Tabla 9. Resultados de la actividad 2

Act. 2	**Correcto**		**Incorrecto**	**No contestó**
	Freq.	%	**Freq.**	**F**
a	7	47	8	0
b	5	33	9	1
c	4	27	10	1
d	3	20	11	1
e	3	20	11	1
f	2	13	11	2
g	7	47	6	2
h	4	27	9	2

Se puede observar un aumento significativo en las respuestas correctas comparada con las respuestas de la práctica 1, considerando que eran actividades similares. Es posible decir con base a los resultados, la ventaja que tiene utilizar el software como apoyo para graficar las funciones, ya que en él se tiene la posibilidad de comparar la función base y aquella que sufrió alguna transformación y poder visualizr estos cambios, como se muestra en la figura 19 de la respuesta que dio el estudiante 4.

Figura 19. Respuesta del estudiante 4 de la actividad 2



❖ Análisis de la Actividad 3

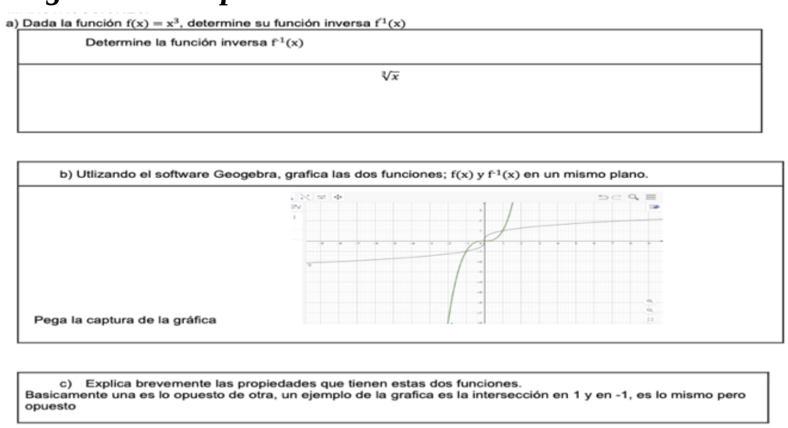
En la tabla 10 se muestran los resultados obtenidos a esta actividad, donde se muestra un bajo número de aciertos para la determinación de la función inversa.

Tabla 10. Resultados de la actividad 3

Act. 3	Correcto		Incorrecto	No
	Freq.	%	Freq.	contestó
Inversa	5	33	1	9
Gráfica	6	40	4	5
Explicación	1	7	5	9

Se puede observar que en la obtención de la gráfica hubo un pequeño incremento, pero a pesar de ello, se observa un deficiente conocimiento para la obtención de la función inversa y esto se ve reflejado a las explicaciones erróneas de las propiedades que guardan ambas funciones. En la figura 20 se muestra la respuesta del estudiante 13 para esta actividad.

Figura 20. Respuesta del estudiante 1 de la actividad 3



Puede concluirse en esta actividad, que analizar la gráfica de ambas funciones en el mismo plano, pueden darles mas herramientas para hacer un análisis en la comparación de las funciones, aunque falta que sean más explícitos ya que tal vez para ellos es claro, pero no es suficiente.

- Análisis de la Actividad 4

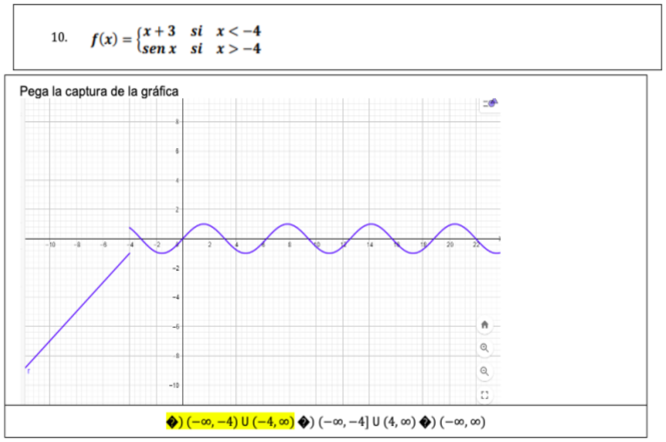
  En los 10 ejercicios que comprende esta actividad, se pedía graficar cada función con apoyo del software GeoGebra y una vez obtenida la gráfica, seleccionar el dominio de entre 4 opciones expresadas en diferentes representaciones semióticas. La tabla 11 muestra los resultados obtenidos.

Tabla 11. Resultados de la actividad 4

Act. 4		**Correcto**		**Incorrecto**	**No**
		Freq.	%	**Freq.**	**contestó**
1.	Gráfica	12		1	2
	Dominio	11	73	1	3
2.	Gráfica	10		3	2
	Dominio	9	60	2	4
3.	Gráfica	13		0	2
	Dominio	11	73	1	3
4.	Gráfica	12		0	3
	Dominio	9	60	2	4
5.	Gráfica	10		0	5
	Dominio	8	53	3	4
6.	Gráfica	12		0	3
	Dominio	9	60	1	5
7.	Gráfica	10		1	4
	Dominio	6	40	6	3
8.	Gráfica	13		0	2
	Dominio	11	73	1	3
9.	Gráfica	8		4	3
	Dominio	9	60	2	4
10.	Gráfica	4		3	8
	Dominio	5	33	4	6

La mayoría de los estudiantes, obtuvo correctamente la gráfica, no así el dominio. No obstante a diferencia de la práctica no. 1 que se trataba de los mismos ejercicios, hubo un aumento considerable en las respuestas correctas. La figura 21 muestra la respuesta del ejercicio 10 que presentó el estudiante 13.

Figura 21. Respuesta del estudiante 13 de la actividad 4.10



Se puede concluir en esta actividad que los estudiantes se apoyaron en la gráfica para determinar el dominio, aunque en algunos casos no analizaron las restricciones presentes en la expresión planteada.

❖ Análisis de la Actividad 5

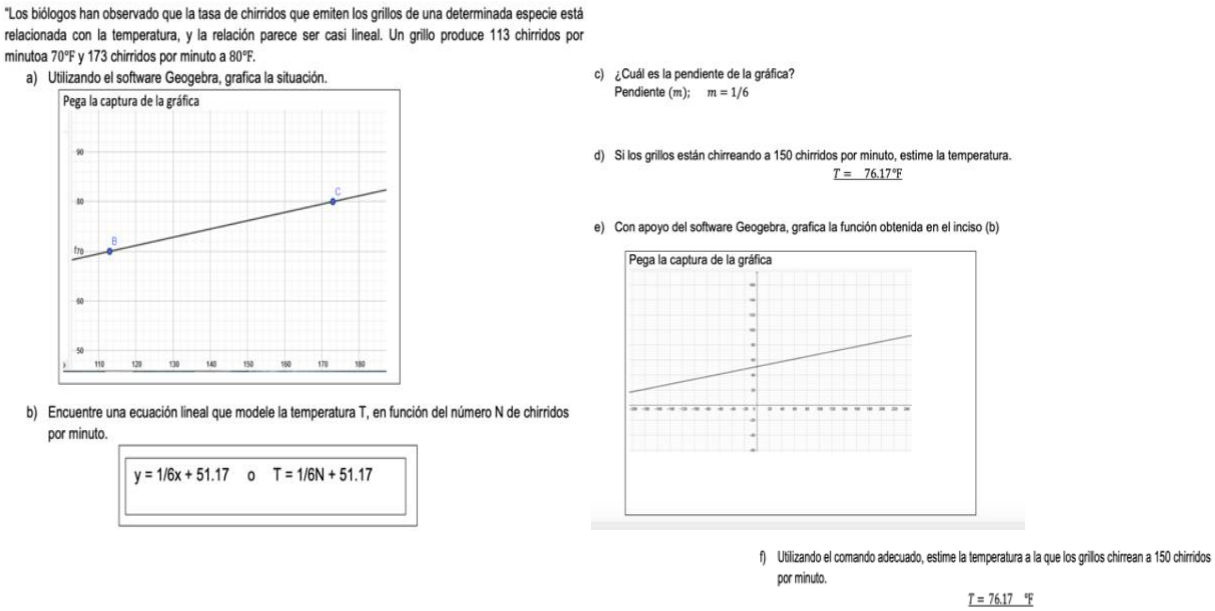
Esta actividad parte de una situación narrada textualmente, donde se tenía que graficar, encontrar la ecuación lineal que represente la situación y estimar un valor planteado en el enunciado. Posteriormente con apoyo del software graficar la ecuación obtenida y comparar sus resultados. Los resultados a esta actividad se muestran en la tabla 12.

Tabla 12. Resultados de la actividad 5

Act. 5	**Correcto**		**Incorrecto**	**No**
	Freq.	%	**Freq.**	**contestó F**
Gráfica 1	2	13	2	11
Ecuación	2	13	2	11
Pendiente	2	13	2	11
Estimación	2	13	2	11
Gráfica 2	1	7	2	12
Estimación	3	20	0	12

En esta actividad hubo muy pocas respuestas correctas, y la mayoría de los estudiantes no contestó. Solamente dos estudiantes analizaron y resolvieron correctamente. Esta actividad requiere que se siga una secuencia en el desarrollo ya el resultado obtenido en un inciso, servirá para contestar el siguiente. Si el estudiante no resolvió el primer inciso, o lo resolvió mal, los siguientes serán incorrectos; es por esta situación que se refleja un bajo desempeño en esta actividad. En la figura 22 se muestra las respuestas del estudiante 1 quien contestó correctamente.

Figura 22.Respuesta del estudiante 1 de la actividad 5



"Los biólogos han observado que la tasa de chirridos que emiten los grillos de una determinada especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 113 chirridos por minutoa 70°F y 173 chirridos por minuto a 80°F.

a) Utilizando el software Geogebra, grafica la situación.

Pega la captura de la gráfica

b) Encuentre una ecuación lineal que modele la temperatura T, en función del número N de chirridos por minuto.

y = 1/6x + 51.17 o T = 1/6N + 51.17

c) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica?
Pendiente (m); $m = 1/6$

d) Si los grillos están chirreando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.
$T =$ 76.17°F

e) Con apoyo del software Geogebra, grafica la función obtenida en el inciso (b)

Pega la captura de la gráfica

f) Utilizando el comando adecuado, estime la temperatura a la que los grillos chirrean a 150 chirridos por minuto.
$T =$ 76.17 °F

4.4 Comparación de resultados de las prácticas 1 y 2

Para realizar un análisis de la forma en que el uso de la herramienta GeoGebra como apoyo a la obtención de la graficas de las funciones, ayuda a los estudiantes en sus actividades escolares en este caso específicamente a graficar funciones reales, se hará una comparación de los resultados obtenidos en ambas prácticas para cada una de las actividades, recordando que cada una de ellas son similares en cuanto a los temas abordados de tal manera que permiten hacer este tipo de comparación.

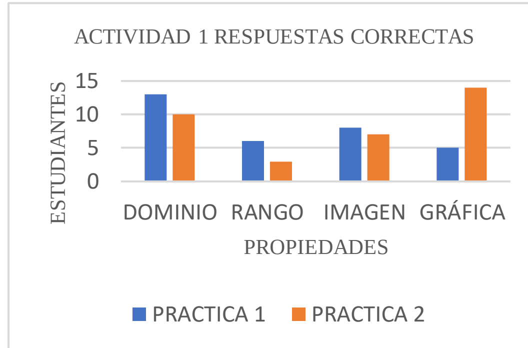
Actividad 1

Tomando los resultados obtenidos en la práctica 1 en relación a las tres funciones consideradas, se estableció que la función al ser la que los estudiantes identifican mejor, fue que se determinó trabajar con este tipo de función en la práctica 2. Por lo anterior, de la práctica 1 solo se consideraron los resultados concernientes a la función cuadrática para el análisis. En la tabla 13 se muestran los resultados, asimismo en la gráfica 1 se puede ver mas claro la comparación de los resultados.

Gráfica 1
Resultados de la actividad 1 prácticas 1 y 2

Tabla 13. Resultados de la actividad 1 prácticas 1 y 2

Práctica	**Propiedades**			
	Dominio	**Rango**	**Imagen**	**Gráfica**
1	13	6	8	5
2	10	3	7	14



La gráfica 1 muestra cómo con el uso del software GeoGebra los estudiantes obtuvieron la gráfica de forma correcta, pero al obtener el dominio, rango y la imagen hubo más errores.

La conclusión en esta actividad refleja que un procedimiento analítico les es más útil para determinar algunas de las propiedades, pero al contar con el gráfico, omitieron el procedimiento y se basaron solamente en éste, teniendo como resultado una mayor cantidad de errores, ya que obtuvieron valores aproximados de acuerdo a lo que pudieron observar de las gráficas.

❖ Actividad 2

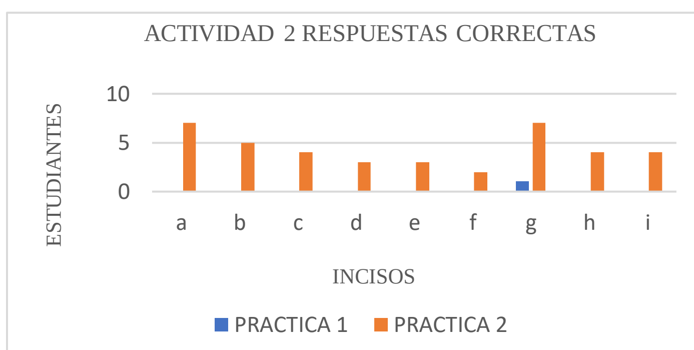
Recordemos que la actividad 2 consistía en relacional la función expresada en forma simbólica con su respectiva gráfica.

Comparando los resultados en ambas actividades, se observa un aumento considerable en las respuestas correctas de la práctica 2. La Tabla 14 y la gráfica 2 muestra estos resultados.

Gráfica 2
Resultados de la actividad 2 prácticas 1 y 2

Tabla 14. Resultados de la actividad 2 prácticas 1 y 2

Práctica	**Inciso**								
	a	b	c	d	e	f	g	h	I
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
2	7	5	4	3	3	2	7	4	4



En esta actividad se observa realmente un aumento significativo en las respuestas correctas. Se puede concluir que el uso del software GeoGebra para obtenr la gráfica fue de mucha ayuda para determinar las transformacines que sufrió la función original.

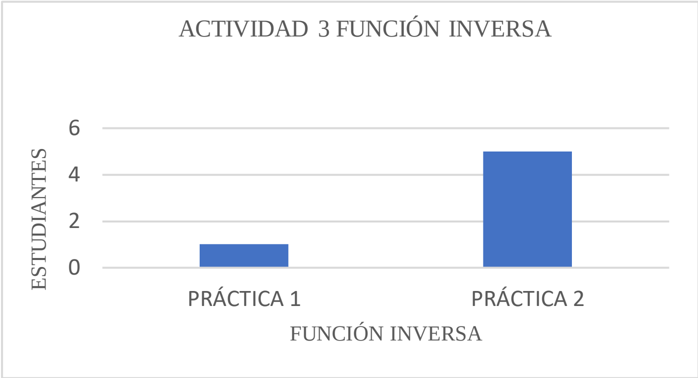
- Actividad 3.

  Los resultados presentados en la tabla 15 y gráfica 3, reflejan un aumento en la respuesta a la actividad.

Gráfica 3
Resultados de la actividad 3 prácticas 1 y 2

Tabla 15. Resultados de la actividad 3 prácticas 1 y 2

Práctica	Inversa
1	1
2	5



Se observa un aumento al utilizar el software para determinar la función inversa, aunque falta que los estudiantes comprendan la relación que existe en estas funciones para dar una explicación clara de la relación que guardan.

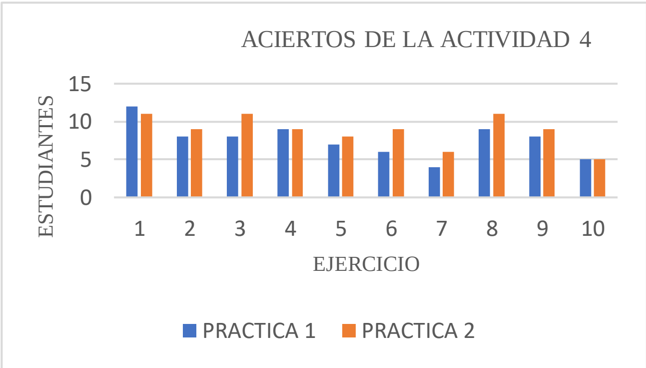
- Actividad 4

  Se observa que al usar la herramienta en la práctica 2, en la mayoría de los ejercicios aumentó el indice de aciertos, datos que se muestran en la tabla 16 y gráfica 4.

Gráfica 4
Resultados de la actividad 4 prácticas 1 y 2

Tabla 16. Resultados de la actividad 4 prácticas 1 y 2

Práctica	Ejercicio									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	12	8	8	9	7	6	4	9	8	5
2	11	9	11	9	8	9	6	11	9	5



Esta actividad refleja también un aumento significativo en las respuestas correctas con el uso del software, ya que a partir de las gráficas obtenidas, pudieron determinar el dominio de la función. Hay errores que cometieron en cuanto a las restricciones que debería establecer y que en el software no es posible determinar, pero en general se puede concluír que si fue de mucha ayuda.

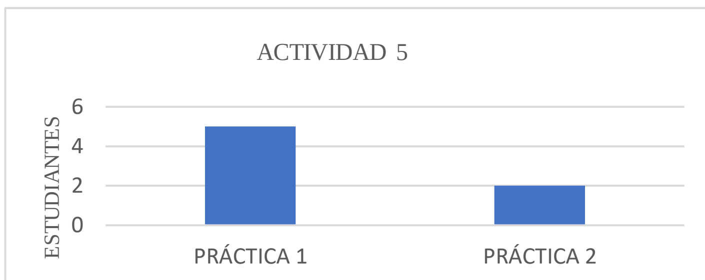
- Actividad 5

En esta actividad la cantidad de respuestas correctas en la práctica 1 fue de 5, en cambio en la práctica 2 disminuyó a 2. Se esperaba que sucediera lo contrario, ya que el uso del software ayudaría a resolver el ejercicio con mayor facilidad. Este bajo desempeño puede asumirse a que se ser solicitaba realizar un análisis más detallado de la situación planteada, además de que, para resolverlo se necesitaba hacer uso de conocimientos relacionados con otras asignaturas vistas en cursos anteriores. Los resultados se presentan el la tabla 17 y en la gráfica 5.

Tabla 17. Resultados de la actividad 5 prácticas 1 y 2

Práctica	Gráfica
1	5
2	2

Gráfica 5
Resultados de la actividad 5 prácticas 1 y 2



Para realizar esta actividad, los estudiantes requieren aplicar conceptos que estudiaron en cursos anteriores, y de acuerdo a los resultados obtenidos se puede concluir que olvidaron temas como el determinar la pendiente de una recta y la ecuación general de la recta.

Capitulo 5: Conclusiones

Hoy en día a pesar de todos los cambios que se han generado en el proceso de enseñanza-aprendizaje, muchos docentes siguen enseñando Cálculo de forma tradicional. Las herramientas tecnológicas permiten potenciar la enseñanza, el entendimiento y la comprensión, además de ser un apoyo muy útil.

El marco teórico utilizado permite detectar el posible origen epistémico, cognitivo, emocional o de atención, aunque estos dos últimos fueron difíciles de detectar en este trabajo por el hecho de trabajar en la modalidad a distancia

La metodología utilizada permitió obtener datos para realizar un análisis completo desde un diagnóstico, que posibilitó detectar aquellos conceptos de mayor dificultad y tener la oportunidad de analizarlos para facilitar su aprendizaje; pasando por la primera práctica donde se obtuvo información importante en cuanto a diseño, instrucción, desarrollo y que fue después comparada con los resultados de una segunda práctica que permitió comprobar cómo el uso de las TIC pueden ser un gran apoyo para los estudiantes que aprenden, que es el objetivo central, ya que los resultados obtenidos en las diferentes actividades muestran que los estudiantes realizaron un análisis basado en las gráficas donde la actividad cognitiva asociada a la visualización, es decir aquellas que dan acceso a la información que percibimos con el sentido de la vista permitió que los estudiantes se apropiaran de ella de forma útil con el objeto de usarla en las actividades presentadas, teniendo la posibilidad de explicar o determinar según el caso, de forma correcta cada una de las situaciones presentadas. Cabe mencionar además el apoyo que presenta para los maestros en la forma en que pueden impartir sus clases y simplificar en gran medida su tarea.

En el transcurso de las actividades realizadas por los estudiantes, se pudo verificar un avance significativo en la adquisición de conocimientos que son reflejados en la cantidad de aciertos que se obtuvieron en la última etapa del proceso. Se puede decir que los estudiantes a partir del proceso de instrucción, construyeron sus objetos personales por medio de varios procesos cognitivos como el interpretar, codificar, relacionar, vincular, analizar, entre otros, los cuales presentan en sus actividades por medio de elementos ostentivos y después, cada uno procesó la información de acuerdo a su estilo cognitivo propio.

Los resultados obtenidos y analizados reflejan que algunos los estudiantes procesan la información mediante una dimensión verbal-imaginativa donde presentan la información mientras piensan; otros la holística-analítica en donde presentan la situación a partir de una análisis más completo. El uso de la herramienta GeoGebra en la segunda práctica fue de gran ayuda, que se refleja en la cantidad de aciertos obtenidos en las actividades; pero también fue de alguna manera una motivación y entusiasmo para dar respuesta a las actividades, lo que se vió reflejado en la cantidad de reactivos contestados.

Los resultados favorables obtenidos en la segunda práctica en donde se utilizó el software, permite verificar que esta herramienta realmente ayuda a los estudiantes a mejorar la adquisición del conocimiento, además a desarrollar competencias específicas y genéricas. En cada una de las actividades diseñadas, se buscó la manera de que los estudiantes hicieran uso del software como apoyo en la realización de las actividades, teniendo presente que son sólo herramientas para facilitar el trabajo, y que no se debe abusar de estas, ya que se perdería el fondo de cada uno de los conceptos o conocimientos; se trataría de algo mecánico y, que en la mayoría de las veces pierde interés. Debemos enseñar a los estudiantes a hacer uso de esta tecnología de forma cautelosa, de tal forma que no se pierda el intetés por indagar el origen de los procesos.

Puede concluirse además que de acuerdo a los resultados obtenidos en la investigación, los estudiantes con apoyo de los docentes deben analizar de manera cautelosa, cómo y cuando utilizar una herramienta, en este caso específico, el software GeoGebra para obtener correctamente lo que se desea conocer, ya que muchas veces se piensa que este nos proporcionará toda la información que se requiere; es preciso tener en cuenta las bases del estudio en cuestión.

La encuesta realizada a los estudiantes al finalizar el trabajo sobre la implementarción de la tecnología en sus tareas escolares fue positiva, manifestando que el uso de esta herramienta facilitó su aprendizaje, les permitió obtener la solución a las actividades de una forma mas sencilla, tuvieron más tiempo de realizar un análisis de las gráficas y con el entusiasmo de poder implementar este software en sus diferentes materias.

Anexos

PRÁCTICA NO. 1

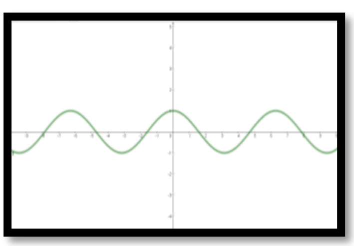
Las siguientes actividades tienen por objetivo indagar los conocimientos sobre tema de funciones. Por lo tanto te pido que para responder solamente utilices una calculadora y hojas en caso necesario

I. INSTRUCCIONES. En el siguiente ejercicio se dan tres funciones. Complete la tabla con lo que se pide.

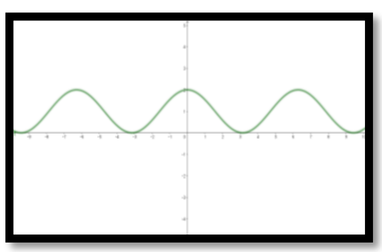
$a)\ \boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 2x + 1}$	$b)\ \boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}}$	$c)\ \boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{2}x^3 & si\ x > 0 \end{cases}}$
a) Dominio de la función: b) Rango de la función: c) Imágenes de la función para: $f(-1) =$ $f(\ 0) =$ $f(\ 2) =$	a) Dominio de la función: b) Rango de la función: c) Imágenes de la función para: $f(-1) =$ $f(\ 0) =$ $f(\ 2) =$	a) Dominio de la función: b) Rango de la función: c) Imágenes de la función para: $f(-1) =$ $f(\ 0) =$ $f(2) =$
d) Gráfica de la función.	d) Gráfica de la función.	d) Gráfica de la función.

II. INSTRUCCIONES. En las siguientes gráficas se han aplicado transformaciones a funciones trigonométricas, relaciona cada gráfica con la regla de correspondencia y coloca la letra que corresponde en cada paréntesis. Debajo de cada inciso explique brevemente la transformación que sufrió la gráfica.

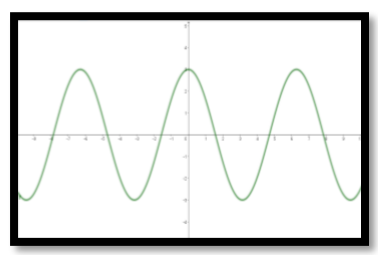
A. $\boldsymbol{y = cos\ x + 1}$	**B.** $\boldsymbol{y = -cos\ x}$	**C.** $\boldsymbol{y = -.5cos\ x}$
D. $\boldsymbol{y = 3cos\ (0.5x)}$	**E.** $\boldsymbol{y = cos\ x - 2}$	**F.** $\boldsymbol{y = cos\ (x + \frac{\pi}{4})}$
G. $\boldsymbol{y = cos\ (2x)}$	**H.** $\boldsymbol{y = 3cos\ x}$	**I.** $\boldsymbol{y = cos\ x}$



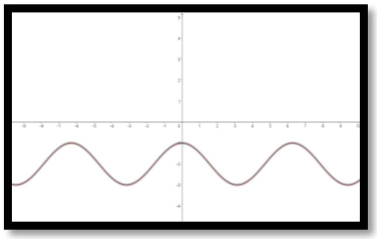
(   )



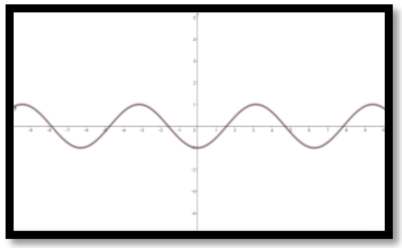
(   )



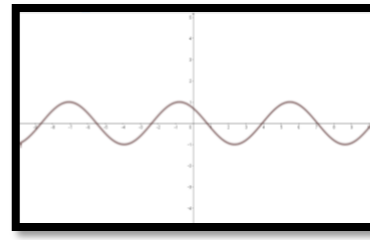
(   )



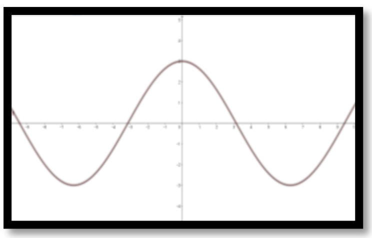
(   )



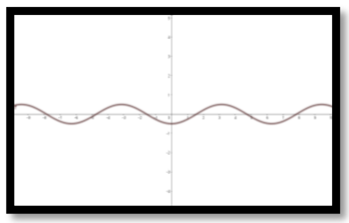
(   )



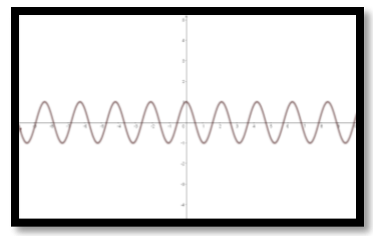
(   )



(   )

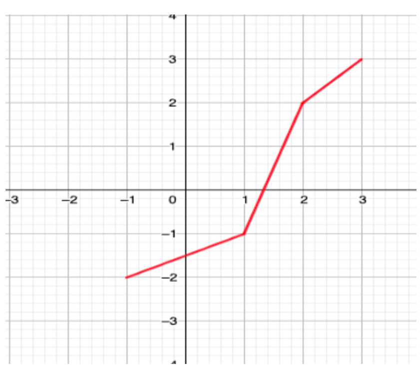


(   )



(   )

III. INSTRUCCIONES. Use la gráfica $f(x)$ dada, para trazar $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$. Grafique sobre el mismo plano. Explica brevemente como es que resolviste el ejercicio.



Explicación:

IV. INSTRUCCIONES. Para cada función, seleccione el dominio que le corresponde, colocando la letra en el paréntesis.

(   ) 1. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x-6}}$

a) $(-\infty, 6]$ b) $[6, \infty)$ c) $(6, \infty]$

(   ) 2. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6+5x-x^2}}}$

a) 

b) 

c) 

(   ) 3. $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 4}$

a) $x < 4$ b) $-\infty < x < \infty$ c) $x > 0$

(   ) 4. $\boldsymbol{f(x) = 5e^{-x}}$

a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x < 0$ c) $x \neq 0$

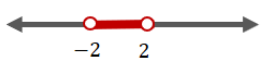
(   ) 5. $\boldsymbol{f(x) = \ln(x+4)}$

a) $[-4, \infty)$ b) $(-4, \infty)$ c) $(-\infty, -4)$

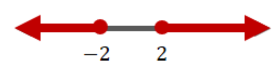
(   ) 6. $\boldsymbol{f(x) = \mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

a) $x > \dfrac{\pi}{4}$ b) $x \leq \dfrac{\pi}{4}$ c) $x \in \mathbb{R}$

(   ) 7. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}}$

a) 

b) 

c) 

(   ) 8. $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$

a) $(1, \infty)$ b) $(-\infty, \infty)$ c) $(0, \infty)$

(   ) 9. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}}$

a) $x \leq 0$ b) $x \geq 0$ c) $x \neq 0$

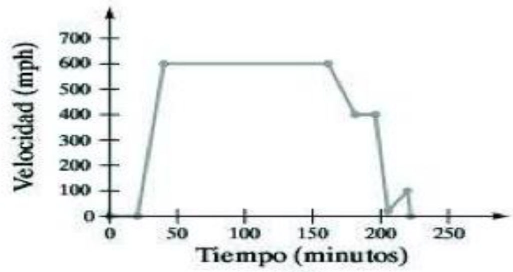
(   ) 10. $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad x < -4 \\ \mathrm{sen}\, x & si \quad x > -4 \end{cases}}$

a) $(-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$ b) $(-\infty, -4] \cup (4, \infty)$ c) $(-\infty, \infty)$

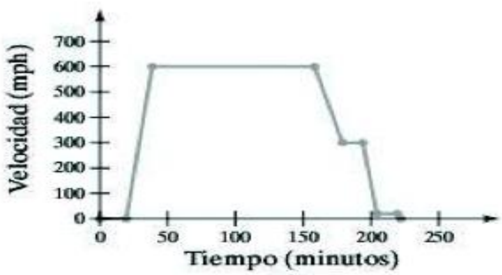
V. INSTRUCCIONES. Lea la siguiente historia y responda lo que se pide, colocando en el paréntesis la letra correspondiente.
Cuando Juan fue a visitar a su madre en Cincinnati, abordó un avión de Southwest Airlines. El avión estuvo en la pista de despegue durante 20 minutos y después despegó. El avión voló a casi 600 millas por hora durante

alrededor de dos horas. Luego redujo su velocidad a 300 millas por hora y voló en círculos alrededor del aeropuerto de Cincinnati durante casi 15 minutos antes de aterrizar. Después de aterrizar, el avión rodó hasta la puerta de salida y se detuvo. ¿Cuál de las gráficas siguientes ilustra mejor esta situación? (   )

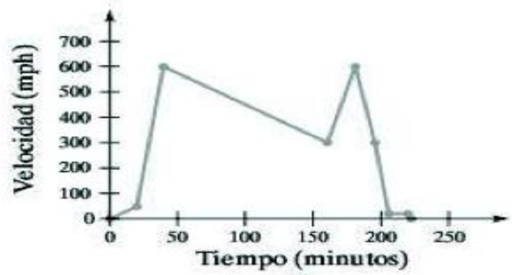
(a)



(b)



(c)



(d)

PRÁCTICA NO. 2

I. INSTRUCCIONES. En el siguiente ejercicio se da una función. Complete la tabla con lo que se pide, utilizando solamente lápiz y calculadora si es necesaria.

<table>
<tr><td colspan="2">1) $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 2x + 1}$</td></tr>
<tr><td>a) Dominio de la función:
b) Rango de la función:
c) Imágenes de la función para:
$f(-1) =$
$f(\ 0) =$
$f(\ 2) =$</td><td>d) Gráfica la función.</td></tr>
</table>

I´. INSTRUCCIONES. Utilizando el software GeoGebra, grafica la misma función del ejercico anterior, haz captura de pantalla y coloca la gráfica en el espacio designado y completa la tabla con base a ésta.

Pega la captura de pantalla de la gráfica.	Determina:

	Dominio y explica brevemente el porqué de su respuesta.
	Rango y explica brevemente el porqué de su respuesta
	Imagen para: $f(-1)$ $=$ $f(0)$ $=$ $f(2)$ $=$

De acuerdo a los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores, realiza un breve análisis de los errores que se cometieron o si no los hubo, qué experiencia te deja.

____

____

____

II. INSTRUCCIONES. Partiendo como base de la función trigonométrica $f(x) = sen\ x$, traza las gráficas que a continuación se expresan utilizando el software GeoGebra. Haz captura de pantalla para pegar las funciones en el espacio designedo.Una vez hechas, explica brevente que transformación sufrió en base a la expresión y gráfica obtenida. Completa la tabla.

Pega la captura de la gráfica a) $f(x) = sen\ x$	Explicación:	Pega la captura de la gráfica b) $f(x) = 2\ sen\ x$	Explicación:
Pega la captura de la gráfica c) $f(x) = sen(2x)$	Explicación:	Pega la captura de la gráfica d) $f(x) = \frac{1}{2} sen\ x$	Explicación:

Pega la captura de la gráfica $e)\ f(x) = 3\ sen\ (0.5\ x)$	Explicación:	Pega la captura de la gráfica $f)\quad f(x) = -sen\ x$	Explicación:
Pega la captura de la gráfica $g)\quad f(x) = 2 + sen\ x$	Explicación:	Pega la captura de la gráfica $h)\quad f(x) = sen\ (x - 2)$	Explicación:

Pega la captura de la gráfica $i)\quad f(x) = sen\ x - 2$	Explicación:

III. INSTRUCCIONES.

a) Dada la función $f(x) = x^3$, determine su función inversa $f^{-1}(x)$

Determine la función inversa $f^{-1}(x)$

b) Utlizando el software GeoGebra, grafica las dos funciones; $f(x)\ y\ f^{-1}(x)$ en un mismo plano.
Pega la captura de la gráfica

c) Explica brevemente las propiedades que tienen estas dos funciones.

IV. INSTRUCCIONES. Utilizando el software GeoGebra, grafica cada una de las funciones y en base e ésta, determina el dominio, colocando la letra correspondiente en el paréntesis.

1.	$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x - 6}}$	**( )**
Pega la captura de la gráfica		
$a)\ (-\infty, 6]$	$b)\ [6, \infty)$	$c)\ (6, \infty]$

2.	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{6+5x-x^2}}$	( )
Pega la captura de la gráfica		
a) 	b) 	c) 

3.	$f(x) = 3x^2 - 4$	( )
Pega la captura de la gráfica		
$a)\ x < 4$	$b) -\infty < x < \infty$	$c)\ x > 0$

4.	$f(x) = 5e^{-x}$	( )
Pega la captura de la gráfica		

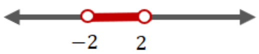
$a)\ x \epsilon \mathbb{R}$ $b)\ x < 0$ $c)\ x \neq 0$

5.	$\boldsymbol{f(x) = \ln\,(x+4)}$	**( )**
Pega la captura de la gráfica		
$a)\ [-4, \infty)$	$b)\ (-4, \infty)$	$c)\ (-\infty, -4)$

6.	$\boldsymbol{f(x) = \mathbf{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$	**( )**
Pega la captura de la gráfica		
$a)\ x > \frac{\pi}{4}$	$b)\ x \leq \frac{\pi}{4}$	$c)\ x \epsilon \mathbb{R}$

7.	$\boldsymbol{f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}}$	**( )**
Pega la captura de la gráfica		

a)



b)

c)

8.	$f(x) = [\![\cos x]\!]$	( )

Pega la captura de la gráfica

$a)\ (1, \infty)$ $\quad b)\ (-\infty, \infty)$ $\quad c)\ (0, \infty)$

9.	$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$	( )

Pega la captura de la gráfica

$a)\ x \leq 0$ $\quad b)\ x \geq 0$ $\quad c)\ x \neq 0$

10.	$f(x) = \begin{cases} x + 3 & si \quad x < -4 \\ sen\, x & si \quad x > -4 \end{cases}$	( )

Pega la captura de la gráfica

$a)\ (-\infty,-4)\cup(-4,\infty)$ $\quad b)\ (-\infty,-4]\cup(4,\infty)$ $\quad c)\ (-\infty,\infty)$

V. A continuación se describe verbalmente un fenómeno; analicelo y conteste lo que se pide.

"Los biólogos han observado que la tasa de chirridos que emiten los grillos de una determinada especie está relacionada con la temperatura,y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 113 chirridos por minuto a $70°\mathrm{F}$ y 173 chirridos por minuto a $80°\mathrm{F}$.

a) Utilizando el software GeoGebra, grafica la situación.

Pega la captura de la gráfica

b) Encuentre una ecuación lineal que modele la temperatura T, en función del número N de chirridos por minuto.

c) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica?

Pendiente (m); $\quad m =$

d) Si los grillos están chirreando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

$T = \underline{\qquad\quad} °\mathrm{F}$

e) Con apoyo del software GeoGebra, grafica la función obtenida en el inciso (b)

Pega la captura de la gráfica

f) Utilizando el comando adecuado, estime la temperatura a la que los grillos chirrean a 150 chirridos por minuto.

$$T = \underline{\qquad\qquad} \text{°F}$$

g) Escribe brevemente las ventajas (si las hubo) el utilizar el software, para contestar las preguntas planteadas.

____

____

____

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*.

Bartolini-Bussi y Mariotti (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vigotskian perpective.

Borba, M. y Villareal Ochoa, J. (2011). Humans-with-Media en la producción de conocimiento matemático. El caso de GeoGebra. Universidad de Medellin. Medellín, Colombia.

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. (2018).Criterios valorativos y normativos en a Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. Bolema: boletín de educación.Brasil

Calderón, D. y León, C.(2005). Lenguaje y educación: perspectivas metodológicasy teóricas para su estudio. Universidad distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

Campeón B. M., Aldana B. E. y Villa O. J. (2017). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediantela modelación de situaciones. Sophia. http://dx.doi.org/10.18634/sophiaj.14v.2i.629

Cobb, P. Y Bauersfeld, H. (1995). The emergence of mathemetical meaning: Interaction in class-room cultures. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

B. D´Amore, V. Font, J. D. Godino (2007). La dimension metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Universidad de Granada. Universidad de Barcelona.

Blumer, H. (1969). El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora 1982

Douady Regine, Artigue M., Moreno L. (1996). Ingeniería didáctica en educación matemática. Bogotá.

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. Educational Studies in Mathematics.

Godino, J. y Batanero, C. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Facultad de ciencias de la educación. Universidad de Granada.

Godino, J. y Batanero, C. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J., V. Font, M. R. Wilhelmi y De Castro Carlos (2009). Aproximación a la dimension normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. Universidad de Granada.

Godino, M. R. Wilhelmi, D. Bencomo (2005). Conflictos Epistémicos en un proceso de studio de la noción de función. Implicaciones para la formación de profesores. Universidad de Granada, Universidad Pública de Navarra y Universidad Nacional Experimental de Guayana España y Venezuela.

Gutiérrez, R. E., Prieto, J. L. (2015). Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión $g(x) = ax^2$. Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática; Universidad de Zulia. Venezuela.

Hernández Hechavarría C. (2013). Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. Números, 82, 115–129.

Maita, M. (2005). El aprendizaje de funciones reales con el uso de un software educativo: una experiencia didáctica con estudiantes de educación de la ULA- Táchira. *Acción Pedagógica*, *14*(1), 38–49.

Pérez Médina, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la Educación Matemática. *Perspectiva Educacional*, *53*(2), 129–150. https://doi.org/10.4151/07189729-vol.53-iss.2-art.200

Ramos, A. y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. Revista latinoamericana de investigación.

Tamayo Martínez, E. (2013). Implicaciones didácticas de Geogebra sobre el aprendizaje significativo de los tipos de funciones en estudiantes del último grado de secundaria. *Apertura: Revista de Innovación Educativa*, *5*(2), 58–69.

Toledo, D. (2005). Las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) y otras opciones en la clase de matemática. Revista ciencias técnicas agropecuarias, vol. 14, num. 4, p

Wittgenstein, L. Investigaciones filosóficas (Philosophishe Untersuchungen) (1953). Antología bilingüe volume 1 Alemán- Portugués 2da Edición.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 27, No. 4 , pp. 458-477