



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería

Desarrollo del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de primaria a
través de equivalencias

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestro en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias

Presenta

Gabriela Silva Olvera

Dirigido por:

Dr. Lilia Patricia Aké Tec

Querétaro, Querétaro, 2021



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias

Desarrollo del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de primaria a través de equivalencias

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Maestro en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias

Presenta

Gabriela Silva Olvera

Dirigido por:

Dra. Lilia Patricia Aké Tec

Dra. Lilia Patricia Aké Tec
Presidente

Mtra. Luisa Ramírez Granados
Secretario

Dr. Víctor Antonio Aguilar Arteaga
Vocal

MDM Ramón Torres Alonso
Suplente

MMA Iván González García
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Fecha de aprobación por el Consejo Universitario
Abril 2021
México

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Dedicatoria

A mis padres Arturo y Gloria

A mi esposo Iván

A mi hijo Leonardo

RESUMEN

En varias investigaciones dentro de la Matemática Educativa se ha hecho evidente la dificultad que presentan los estudiantes de nivel secundaria en el inicio del estudio del álgebra, dificultades que se prolongan hasta el nivel medio superior y superior. Esto ha motivado al surgimiento de diferentes enfoques de enseñanza entre los que destaca el álgebra temprana mismo que pretende la introducción de formas de pensamiento algebraico en la educación primaria. Es así como se da inicio a esta investigación en la cual se pretende evidenciar el pensamiento algebraico de los estudiantes de educación primaria al responder a ciertas tareas con un enfoque de álgebra temprana.

Esta tesis se centra principalmente en el estudio de equivalencias. Estas equivalencias se diseñaron a partir de diferentes representaciones (aritmética, pictórica y simbólica) que de manera a priori favorecían distintos niveles de algebrización. A través de un método cualitativo y exploratorio se indaga sobre las formas de pensamiento algebraico que manifiestan los niños al abordar las tareas sobre equivalencias. Los resultados evidencian que los niños presentan dificultades para interpretar el signo igual como equivalencia debido a su familiaridad de interpretarlo como resultado de una operación. Sin embargo, también tienen una capacidad nata para identificar propiedades de las operaciones sobre todo en las representaciones pictóricas y simbólicas en donde su actividad matemática tuvo mayor nivel de algebrización en comparación con la representación aritmética. Los hallazgos sugieren que es necesario que este tipo de actividades sean desarrolladas de forma constante en las aulas para que los alumnos sean capaces de familiarizarse con el uso de relaciones y propiedades para así potenciar su pensamiento algebraico. El desarrollo de éste pensamiento en los niños es un reto porque en su desarrollo influye no solo el currículo y los libros de texto sino también la formación del docente, es por esta razón que estudios como este aportan evidencia que conduce a una mejor comprensión sobre cómo desarrollar este pensamiento en los niños.

Palabras clave: Álgebra temprana, equivalencias, niveles de algebrización

ABSTRACT

In several investigations within Educational Mathematics, the secondary difficulty presented by level students at the beginning of the study of algebra has become evident, difficulties that extend to the upper and upper secondary level. This has motivated the emergence of different teaching approaches, notably early algebra itself, which aims to introduce forms of algebraic thought in primary education. This is how this research begins, in which it is intended to demonstrate the algebraic thinking of elementary school students when responding to certain tasks with an early algebra approach.

This thesis is mainly focused on the study of equivalences. These equivalences were designed from different representations (arithmetic, pictorial and symbolic) that a priori favored different levels of algebrization. Through a qualitative and exploratory method, it investigates the forms of algebraic thought that children manifest when approaching the tasks on equivalences. The results show that children have difficulties in interpreting the equal sign as equivalence due to their familiarity with interpreting it as a result of an operation. However, they also have a natural ability to identify properties of operations, especially in pictorial and symbolic representations where their mathematical activity had a higher level of algebrization compared to arithmetic representation. The results suggest that it is necessary for these types of activities to be developed constantly in classrooms so that students are able to become familiar with the use of relationships and properties in order to enhance their algebraic thinking. The development of this thinking in children is a challenge because their development isn't influenced only by the curriculum and textbooks but also by teacher training, it is for this reason that studies like this provide evidence that leads to a better understanding of how to develop this thought in children.

Keywords: Early algebra, equivalences, levels of algebrization.

AGRADECIMIENTOS

Principalmente doy gracias a mi familia por apoyarme y alentarme a realizar mi maestría. A mis padres, por seguir a mi lado y facilitarme su apoyo incondicional. A mi esposo Iván y a mi hijo Leonardo, por brindarme su comprensión y ayuda en los momentos necesarios a lo largo de este camino que he decidido tomar. A todos mis familiares alrededor mío por mostrarme su apoyo, cariño y comprensión.

A la Dra. Lilia Patricia Aké, directora de esta tesis, por el apoyo brindado, por su orientación, por compartir su experiencia conmigo para llevar a cabo este trabajo. A la Mtra. Luisa Ramírez por aceptar la codirección de esta tesis, además de siempre estar disponible para cualquier duda y guiarme con sus comentarios.

Al igual que a mis profesores de maestría, que hicieron posible poder concluir mi formación de una manera integral y efectiva.

A la Lic. Claudia Yaneth Ledezma Vega, directora de la Escuela Primaria “Justo Sierra” por permitirme llevar a cabo la actividad de investigación en un grupo de su escuela; así como también al profesor Lic. José Antonio Mata Maqueda responsable del grupo y estudiantes del quinto grado grupo “B” de esta misma institución educativa.

Finalmente quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haberme brindado la oportunidad de ser becario y gracias a ello poder concluir mis estudios de maestría.

INTRODUCCIÓN GENERAL

El presente estudio hace referencia a la propuesta de enseñanza denominado Álgebra Temprana. Esta propuesta es una tendencia internacional que pretende la introducción de formas de pensamiento algebraico en las edades tempranas. Se ha utilizado esta perspectiva para diseñar una serie de tareas que involucran la noción de equivalencia, utilizan diferentes tipos de representación y favorecen la emergencia de diferentes niveles de algebrización. Este trabajo se justifica debido al interés que se tiene en que los estudiantes que se introducen al estudio del álgebra no encuentren dificultades y sean capaces de comprender el álgebra de una forma adecuada. De esta manera el enfoque de álgebra temprana, utilizado en este estudio, pretende favorecer un álgebra con entendimiento en los aprendices.

Esta tesis de maestría se encuentra organizada en seis capítulos tal como se describe a continuación:

En el primer capítulo se hace referencia al Planteamiento de la Problemática que se está abordando, la cual emerge desde el estudio del álgebra y las dificultades que representa para los alumnos al momento de abordarla. En este capítulo también se expone que esto ha motivado el surgimiento de enfoque de álgebra temprana como una forma de enseñanza que presenta una alternativa de soslayar estas dificultades desde las edades tempranas y durante la educación primaria. Asimismo, se alude a las preguntas, objetivos e hipótesis del estudio.

En el capítulo dos se desarrollan los Antecedentes. Se realiza una breve reseña del surgimiento del álgebra temprana, así como las diferentes investigaciones que se han realizado con este enfoque de enseñanza tanto a nivel internacional como nivel nacional, y con estudiantes de diferentes edades en el sistema de educación básica.

En el capítulo tres se delimita el Marco Teórico. Se describen los aspectos que ayudaron a realizar esta investigación y que hicieron posible el diseño de nuestras actividades. Los ejes principales que se detallan en este capítulo son: álgebra temprana como forma de enseñanza, niveles de algebrización para el diseño de las tareas y el concepto matemático de equivalencia.

Dentro del capítulo cuatro se aborda la Metodología de la investigación, se especifica los detalles de la muestra con la que se llevó a cabo el estudio, el diseño de las actividades, así como la forma en la que se aplicaron las hojas de trabajo en el aula.

En el capítulo cinco se hace alusión a los Resultados. En este capítulo se detallan los análisis detallados de la recogida de datos; estos análisis se estructuran con base en las sesiones trabajadas. También se analizan los errores encontrados al igual que las

justificaciones proporcionadas de parte de los estudiantes para posteriormente concluir con el nivel de algebrización alcanzado en cada respuesta dada a las tareas.

Como último capítulo se encuentran las Conclusiones en las cuales se aborda todos los alcances de la investigación, así como las posibles aplicaciones y usos que se pueden obtener y por último la forma en la que se puede ampliar y seguir trabajando en este tema.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

TABLA DE CONTENIDO

Resumen	iii
Abstract	iv
Agradecimientos	v
Introducción general	vi
Índice de tablas	x
Índice de Gráficas	x
Índice de figuras	x
Capítulo 1. Planteamiento del problema	- 1 -
1.1. Definición del problema.....	- 1 -
1.2. Hipótesis y objetivos	- 2 -
1.3. Justificación.....	- 3 -
Capítulo 2. Antecedentes	- 5 -
2.1. Surgimiento del álgebra temprana.....	- 5 -
2.2. Investigaciones con enfoque de álgebra temprana	- 6 -
Capítulo 3. Marco Teórico	- 9 -
3.1. Álgebra temprana	- 9 -
3.2. Pensamiento algebraico y niveles de algebrización	- 11 -
3.3. Conceptos Matemáticos	- 12 -
Equivalencia.....	- 12 -
Capítulo 4. Metodología	- 15 -
4.1. Muestra y contexto	- 15 -
4.2. Descripción de las tareas	- 15 -
4.3. Procedimiento de aplicación de las tareas en el aula.....	- 20 -
Fase de preparación del experimento.....	- 20 -
Fase de implementación del experimento.....	- 21 -
Fase de visión retrospectiva del experimento	- 22 -
Capítulo 5. Análisis de los resultados	- 23 -
5.1 Análisis general.....	- 23 -
5.2. Análisis de la sesión 1: Representación aritmética	- 30 -

5.2.1. Análisis de errores y justificaciones. Representación aritmética	- 31 -
5.2.2. Niveles de algebrización. Representación Aritmética	- 44 -
5.3. Análisis de la sesión 2: Representación simbólica.....	- 51 -
5.3.1. Análisis de errores y justificaciones. Representación simbólica	- 52 -
5.3.2. Niveles de algebrización. Representación Simbólica	- 66 -
5.4. Análisis de la sesión 3: Representación Pictórica	- 73 -
5.4.1. Análisis de errores y justificaciones. Representación Pictórica.....	- 74 -
5.3.2. Niveles de algebrización. Representación Simbólica	- 90 -
Capítulo 6. Conclusiones	100
6.1 Conclusiones sobre el estudio	100
6.2. Conclusiones sobre el planteamiento del problema	102
Referencias bibliográficas	104
Anexos	108

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Diseño de equivalencias en diferentes representaciones, Nivel 0.....	16 -
Tabla 2. Diseño de equivalencias en diferentes representaciones, Nivel 1.....	17 -
Tabla 3. Diseño de equivalencias en diferentes representaciones, Nivel 2.....	18 -
Tabla 4. Diseño de equivalencias en diferentes representaciones, Nivel 3.....	19 -
Tabla 5. Tareas con un Nivel 0 de algebrización utilizando diferentes representaciones-	24 -
Tabla 6. Tareas con un Nivel 1 de algebrización utilizando diferentes representaciones-	26 -
Tabla 7. Tareas con un Nivel 2 de algebrización utilizando diferentes representaciones-	27 -
Tabla 8. Tareas con un Nivel 3 de algebrización utilizando diferentes representaciones-	28 -
Tabla 9. Lógica de errores. Representación Aritmética.....	32 -
Tabla 10. Justificaciones. Representación Aritmética.....	32 -
Tabla 11. Asignación de Niveles de Algebrización, Representación Aritmética.....	45 -
Tabla 12. Lógica de Errores. Representación Simbólica.....	52 -
Tabla 13. Justificaciones. Representación Simbólica.....	53 -
Tabla 14. Asignación de Niveles de Algebrización, Representación Simbólica.....	67 -
Tabla 15. Lógica de Errores. Representación Pictórica.....	74 -
Tabla 16. Justificaciones. Representación Pictórica.....	75 -
Tabla 17. Asignación de Niveles de Algebrización. Representación Pictórica.....	91 -

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1. Comparativa de aciertos en las distintas representaciones.....	24 -
Gráfica 2. Comparativa de errores en las distintas representaciones.....	29 -
Gráfica 3. Comparativa de reactivos no contestados en las distintas representaciones ...	30 -
Gráfica 4. Análisis cuantitativo de la representación aritmética.....	31 -
Gráfica 5. Análisis Cuantitativo de la Representación Simbólica.....	51 -
Gráfica 6. Análisis de Asertividad en la Representación Pictórica.....	73 -

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Lógica De La Implementación De Las Tareas.....	21 -
Figura 2. Error en Nivel 0 de algebrización. Representación Aritmética.....	33 -
Figura 3. Ejemplo de Justificaciones. Nivel 0, Representación Aritmética.....	33 -
Figura 4. Lógica de Error 4, Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética.....	34 -
Figura 5. Lógica de Error 1, Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética.....	34 -
Figura 6. Lógica de Error 6, Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética.....	35 -
Figura 7. Lógica de Error 9, Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética.....	35 -
Figura 8. Lógica de Error 2, Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética.....	35 -

Figura 9. Justificaciones (J1), Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética	36 -
Figura 10. Justificación (J3), Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética.....	36 -
Figura 11. Justificación (J2), Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética.....	37 -
Figura 12. Lógica de Error 1, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética	37 -
Figura 13. Lógica de Error 2, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética	38 -
Figura 14. Lógica de Error 3, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética	38 -
Figura 15. Lógica de Error 5, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética	38 -
Figura 16. Lógica de Error 6, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética	39 -
Figura 17. Lógica de Error 7, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética	39 -
Figura 18. Lógica de Error 7, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética	40 -
Figura 19. Justificación J1, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética.....	41 -
Figura 20. Lógica de Error 4, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética	41 -
Figura 21. Lógica de Error 1, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética	42 -
Figura 22. Lógica de Error 5, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética	42 -
Figura 23. Lógica de Error 8, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética	42 -
Figura 24. Lógica de Error 2, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética	43 -
Figura 25. Lógica de Error 3, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética	43 -
Figura 26. Justificaciones, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética.....	44 -
Figura 27. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 0, Obteniendo Nivel 0.....	46 -
Figura 28. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 1, Obteniendo Nivel 1	47 -
Figura 29. Observación Propiedad Conmutativa en Nivel De Algebrización 1	47 -
Figura 30. Ejemplos donde no emerge el concepto equivalencia	48 -
Figura 31. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 2.....	49 -
Figura 32. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 1	49 -
Figura 33. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 0.....	50 -
Figura 34. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 0.....	51 -
Figura 35. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 0. Representación Simbólica.....	53 -
Figura 36. Lógica de Error 5, Nivel De Algebrización 0. Representación Simbólica.....	54 -
Figura 37. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 0. Representación Simbólica.....	54 -
Figura 38. Justificación Aritmética, Nivel 0. Representación Simbólica	55 -
Figura 39. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 1. Representación Simbólica.....	55 -
Figura 40. Lógica de Error 8, Nivel De Algebrización 1. Representación Simbólica.....	55 -
Figura 41. Lógica de Error 9, Nivel De Algebrización 1. Representación Simbólica.....	56 -
Figura 42. Lógica de Error 1, Nivel De Algebrización 1. Representación Simbólica.....	56 -
Figura 43. Lógica de Error 5, Nivel De Algebrización 1. Representación Simbólica.....	57 -
Figura 44. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 1. Representación Simbólica.....	57 -
Figura 45. Justificaciones a respuestas del Nivel de Algebrización 1	58 -
Figura 46. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 2. Representación Simbólica.....	58 -
Figura 47. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 2. Representación Simbólica.....	59 -

Figura 48. Lógica de Error 1, Nivel De Algebrización 2. Representación Simbólica.....	59 -
Figura 49. Lógica de Error 7, Nivel De Algebrización 2. Representación Simbólica.....	59 -
Figura 50. Lógica de Error 9, Nivel De Algebrización 2. Representación Simbólica.....	60 -
Figura 51. Justificaciones a respuestas usando Nivel de Algebrización 2.....	61 -
Figura 52. Lógica de Error 1, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica.....	62 -
Figura 53. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica.....	62 -
Figura 54. Lógica de Error 3, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica.....	63 -
Figura 55. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica.....	63 -
Figura 56. Lógica de Error 5, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica.....	64 -
Figura 57. Lógica de Error 6, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica.....	64 -
Figura 58. Lógica de Error 8, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica.....	64 -
Figura 59. Lógica de Error 8, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica.....	65 -
Figura 60. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 0, Obteniendo Nivel 0.....	68 -
Figura 61. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 1, Obteniendo Nivel 1.....	69 -
Figura 62. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 1, Obteniendo Nivel 0.....	69 -
Figura 63. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 2.....	70 -
Figura 64. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 0.....	71 -
Figura 65. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 1.....	71 -
Figura 66. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 0.....	72 -
Figura 67. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 1.....	72 -
Figura 68. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 2.....	73 -
Figura 69. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 0. Representación Pictórica.....	75 -
Figura 70. Lógica de Error 5, Nivel De Algebrización 0. Representación Pictórica.....	76 -
Figura 71. Lógica de Error 5, Nivel De Algebrización 0. Representación Pictórica.....	76 -
Figura 72. Justificaciones Aritméticas, Nivel 0. Representación Pictórica.....	77 -
Figura 73. Justificaciones concepto equivalencia, Nivel 0. Representación Pictórica.....	78 -
Figura 74. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 1. Representación Pictórica.....	78 -
Figura 75. Lógica de Error 8, Nivel De Algebrización 1. Representación Pictórica.....	79 -
Figura 76. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 1. Representación Pictórica.....	79 -
Figura 77. Justificaciones Aritméticas, Nivel 1. Representación Pictórica.....	80 -
Figura 78. Justificaciones concepto equivalencia, Nivel 1. Representación Pictórica.....	81 -
Figura 79. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 2. Representación Pictórica.....	81 -
Figura 80. Lógica de Error 1, Nivel De Algebrización 2. Representación Pictórica.....	82 -
Figura 81. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 2. Representación Pictórica.....	83 -
Figura 82. Lógica de Error 5, Nivel De Algebrización 2. Representación Pictórica.....	83 -
Figura 83. Lógica de Error 6, Nivel De Algebrización 2. Representación Pictórica.....	84 -
Figura 84. Lógica de Error 8, Nivel De Algebrización 2. Representación Pictórica.....	84 -
Figura 85. Justificaciones Aritméticas, Nivel 2. Representación Pictórica.....	85 -
Figura 86. Justificaciones concepto equivalencia, Nivel 2. Representación Pictórica.....	86 -

Figura 87. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 3. Representación Pictórica.....	- 86 -
Figura 88. Lógica de Error 3, Nivel De Algebrización 3. Representación Pictórica.....	- 87 -
Figura 89. Lógica de Error 6, Nivel De Algebrización 3. Representación Pictórica.....	- 88 -
Figura 90. Lógica de Error 7, Nivel De Algebrización 3. Representación Pictórica.....	- 88 -
Figura 91. Justificaciones Aritméticas, Nivel 3. Representación Pictórica	- 89 -
Figura 92. Justificación Concepto Equivalencia, Nivel 3. Representación Pictórica.....	- 89 -
Figura 93. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 0, Obteniendo Nivel 0.....	92
Figura 94. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 1, Obteniendo Nivel 0.....	93
Figura 95. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 1, Obteniendo Nivel 1.....	94
Figura 96. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 1, uso de Propiedades	95
Figura 97. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 0.....	95
Figura 98. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 1.....	96
Figura 99. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 2.....	97
Figura 100. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 0.....	98
Figura 101. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 1.....	98
Figura 102. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 3.....	99

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El aprendizaje y enseñanza del álgebra durante años ha sido un tema de preocupación para la Educación Matemática. En distintas investigaciones se pone de manifiesto que la enseñanza tradicional del álgebra no es adecuada, se evidencia la falta de comprensión que tienen los estudiantes que resalta el escaso aprendizaje del álgebra, y como parte de la enseñanza no se refleja la relación que existe entre el álgebra y la del resto de las ramas de la matemática (Kindt, 1980; Booth, 1999; Kaput, 1998, 2000). Martin Kindt (1980) resalta los tres principales problemas en la enseñanza del álgebra: falta de atención puesta en la generalización y el razonamiento, un salto demasiado rápido desde la aritmética al álgebra formal, y falta de respuestas a las preguntas para qué y para quién es de utilidad el álgebra.

Como respuesta a los problemas señalados dentro de la didáctica del álgebra han surgido, durante las últimas décadas, propuestas que giran en torno a la enseñanza de esta rama de las matemáticas. Dichas propuestas se han desarrollado basándose en el énfasis que se da a las distintas tareas realizadas durante el proceso de enseñanza llevado a cabo. Algunas propuestas están basadas en la resolución de problemas, el uso de la tecnología como herramienta de enseñanza y el fortalecimiento de las habilidades aritméticas (Freiman y Lee, 2004).

Investigadores como Kaput (1998) proponen la algebrización del currículo entendida como la enseñanza del álgebra con entendimiento desde edades tempranas hasta la educación media superior o bachillerato. Esta propuesta considera que los profesores de todos los niveles deben promover el pensamiento algebraico, ayudando a los alumnos a prestar atención a las propiedades, relaciones y patrones involucrados en todo tipo de actividades matemáticas, aunque no parezcan algebraicas a simple vista. El objetivo es fomentar el modo de pensar algebraico más que el desarrollo de las habilidades necesarias para lidiar con los procedimientos y algoritmos de esta rama de las matemáticas. El desarrollo de este pensamiento algebraico incide desde la educación básica hasta el bachillerato y en algunas investigaciones se ha comenzado a promover desde la educación preescolar (e.g. Castro, Cañadas, y Molina, 2017).

Particularmente, la introducción del álgebra en la educación primaria representa un cambio curricular que pretende la incorporación previa del álgebra desde los primeros años escolares. Esto no significa incorporar al álgebra como una materia, sino como una orientación al desarrollo del pensamiento algebraico en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas que puede ser promovido a partir de los contenidos curriculares. El objetivo principal de dicha propuesta es que el álgebra sea una guía para la enseñanza de las

matemáticas con comprensión en los primeros niveles escolares (Kaput, 1995, 1998, 2000; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Bastable y Schifter, 2001). La introducción temprana del álgebra en el currículo dentro de los primeros años de educación es conocida como Álgebra Temprana (Early Algebra en la literatura internacional).

Teniendo evidencia de la realidad sobre el aprendizaje del álgebra y la importancia del desarrollo de un pensamiento algebraico, se plantea la siguiente pregunta de investigación como guía del estudio:

¿Qué pensamiento algebraico desarrollan los estudiantes de primaria al resolver ecuaciones lineales en un enfoque de álgebra temprana?

El desarrollo de este estudio se suma a una línea de investigación internacional cuyo uno de sus objetivos es la delimitación de rutas didácticas para el desarrollo del pensamiento algebraico en niños bajo el enfoque del álgebra temprana.

1.2. HIPÓTESIS Y OBJETIVOS

A continuación se describe la hipótesis y objetivos de este trabajo. Es importante mencionar que las hipótesis en los estudios cualitativos se caracterizan por ser una expectativa de respuesta a la pregunta de investigación. De esta manera, a partir de la pregunta planteada en este estudio se estructura la siguiente hipótesis:

Hipótesis: Los estudiantes logran desarrollar un pensamiento algebraico a partir de ciertas actividades de equivalencias relacionadas a un álgebra temprana; al incorporar diferentes símbolos y/o letras se encontrarán inconsistencias, esto nos llevará a delimitar los alcances de los estudiantes de primaria en relación con la resolución de una ecuación lineal.

El objetivo general OG del presente trabajo es:

OG: Caracterizar el pensamiento algebraico temprano desarrollado en relación con la forma en que los estudiantes de primaria resuelven equivalencias en diferentes estados de dificultad.

Para poder alcanzar este objetivo, se plantearon objetivos secundarios:

- OE1. Diseñar actividades que ayuden a fomentar en los estudiantes el desarrollo de un pensamiento algebraico.

- OE2. Desarrollar un experimento de enseñanza en el aula de primaria para promover y desarrollar el pensamiento algebraico a través de tareas que involucren ecuaciones lineales.
- OE3. Detectar y describir en los alumnos, el surgimiento y evolución del pensamiento algebraico a partir de actividades diseñadas para ello.

1.3. JUSTIFICACIÓN

En los currículos de diversos países se comienza a manifestar la propuesta de desarrollar el pensamiento algebraico en edades tempranas como alternativa a la problemática del álgebra escolar de secundaria. Por mencionar un ejemplo, en los Estados Unidos, siguiendo propuestas de investigadores en Educación Matemática, el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (National Council of Teacher of Mathematics, NCTM, 1997,2000) ha apoyado la intervención temprana al álgebra y ha recomendado que las actividades algebraicas comiencen en los primeros años de la escuela y que la notación algebraica sea introducida entre los grados tercero y quinto de la escuela primaria (Schlieman, 2011).

Particularmente en México, esta nueva tendencia de iniciar en niveles de educación básica el desarrollo de un pensamiento algebraico, se ve reflejado en los cambios de planes educativos dentro de las reformas educativas. En estas reformas los contenidos matemáticos se organizan en tres ejes temáticos, tanto para nivel primaria como secundaria. Los ejes son: sentido numérico y pensamiento algebraico (SN-PA), forma espacio y medida (FE y M) y por último manejo de la información. Lo previo justifica potenciar el desarrollo de un pensamiento algebraico en niveles básicos de educación en el país (Cabañas, Salazar, Nolasco, 2017).

A pesar de ello, en México, pocos estudios (si los hay) son dedicados a analizar aquellos contenidos que potencian el desarrollo de un pensamiento algebraico (Cabañas, et al., 2017). Además, la mayoría de las investigaciones son orientadas al estudio de un pensamiento funcional con un enfoque de álgebra temprana (Medrano, 2017; Huerta, 2018). Lo cual motiva a continuar con estudios que indaguen sobre el pensamiento estructural de los niños, en especial cuando resuelven tareas que involucran la noción de equivalencia.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES

2.1. SURGIMIENTO DEL ÁLGEBRA TEMPRANA

El álgebra temprana emerge por varias razones, la falta de logros con la presente y clásica enseñanza del álgebra, el reconocimiento de la importancia de los hábitos mentales propios de esta sub-área de las matemáticas sumado a que el estudio del álgebra parece inalcanzable a la mayoría de los estudiantes. Además de que recientemente se ha distinguido que los niños desde muy pequeños son capaces de hacer mucho más de lo que se les suponía, llevando así a plantear para las aulas de educación primaria, una actividad matemática que implique modos de pensamiento más elevados. Encima se ha constatado que para que los niños logren desarrollar los diferentes modos de pensamiento algebraicos conlleva un tiempo prolongado (Molina, 2007).

Las investigaciones en álgebra en los años 80's principalmente estaban dirigidas a sistemas de etapas de desarrollo o categorizar errores cometidos por los alumnos. Aún a principios de los años 90's, la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra estaba centrada en lo que los alumnos no podían hacer, más que en explorar lo que eran capaces de hacer y su potencial de desarrollo. Fue así, que se concluía que era mejor posponer el estudio del álgebra para los últimos cursos escolares (Lins y Kaput, 2004).

Tal como lo señala Lins y Kaput (2004), al inicio de la década de los noventa diferentes estudios empezaron a exponer una perspectiva significativamente diferente: reportando cambios en la concepción de la educación algebraica y del pensamiento algebraico; sugiriendo que aún los estudiantes pequeños pueden hacer más matemáticas de las que se pensaba anteriormente e incorporando nuevas tecnologías a la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Según Mason (1996), es durante esta época cuando se pone de manifiesto la reflexión de que los estudiantes ingresan a la escuela con capacidades naturales de generalización y habilidades para expresar generalidad, y que el desarrollo del razonamiento algebraico surge principalmente a raíz de explotar estas capacidades naturales de los estudiantes.

Aunque es a principios de los años noventa que empiezan a surgir con mayor impacto estas ideas, en décadas anteriores Davydov (1962), Freudenthal (1974) en sus investigaciones comenzaron a abordar la enseñanza del álgebra en los primeros cursos de la educación primaria siguiendo la teoría de la Escuela Soviética de que el aprendizaje precede al desarrollo. En los ochenta, Davis (1985) y Vergnaud (1988) ponen de manifiesto la necesidad de iniciar en la educación primaria una enseñanza del álgebra que prepare a los alumnos para abordar los aspectos epistemológicos involucrados en la transición de la

aritmética al álgebra. Dicha propuesta no se refería al álgebra formal propia de los últimos cursos de educación secundaria sino a “una pensada exploración de ideas algebraicas”.

De acuerdo a Davis (1985), investigaciones anteriores durante los 70 y 80 fueron un precedente al observar que el álgebra podía proveer a los estudiantes con oportunidades para la resolución de problemas y para el desarrollo de creatividad, originalidad y una comprensión profunda de las matemáticas.

Actualmente ha crecido el número de profesores, matemáticos e investigadores que consideran que el álgebra debería ser parte del currículo propio de la educación primaria (Carragher, 2006), dejando a un lado la asunción de que el álgebra está fuera del alcance de las capacidades cognitivas de los estudiantes pequeños.

2.2. INVESTIGACIONES CON ENFOQUE DE ÁLGEBRA TEMPRANA

En la presente investigación, se analizaron diversos estudios relacionados, los cuales fueron agrupados en dos diferentes tipos de investigación: desarrollo del pensamiento algebraico en educación primaria y, álgebra temprana a través de equivalencias. Se reconoce que a partir de la revisión de la literatura las investigaciones de mayor alcance se han realizado a nivel internacional y que algunos currículos extranjeros ya contemplan el desarrollo del pensamiento algebraico en Primaria con niños de 6 a 12 años e incluso a nivel preescolar.

Los estudios relacionados con el pensamiento algebraico son sustanciosos y como se ha mencionado previamente, giran en torno al desarrollo del pensamiento funcional. Algunos de estos trabajos son, por ejemplo, el realizado por Burgos y Godino (2019) quienes investigaron sobre el razonamiento proporcional y analizaron las respuestas de un grupo de estudiantes españoles de quinto curso de primaria, que se enfrentan por primera vez a tareas de proporcionalidad. El diseño de las tareas se realizó a partir de modelo didáctico mixto de tipo instructivo-investigativo. Los autores concluyen que el uso de tareas sobre proporcionalidad utilizando tablas numéricas orientadas a la identificación de propiedades de la función de proporcionalidad favorece razonamiento algebraico.

Por otro lado, Zapatera (2018) analiza la comprensión de los niños de primaria de tercero, cuarto, quinto y sexto grado (de la educación española) al resolver una tarea de generalización de patrones y, analizando todas las estrategias que los niños manifestaban. El análisis de las estrategias permitió establecer descriptores que evidencian que los estudiantes que resuelven correctamente la tarea transitan de las estrategias aditivas y luego pasan a las estrategias funcionales. Concluye que los descriptores favorecen la definición de una trayectoria de aprendizaje a través de la cual es posible el desarrollo del pensamiento funcional.

Castro, Cañadas y Molina (2018) presentan un estudio centrado en el pensamiento funcional de niños de entre 5 y 6 años que cursaban la educación infantil. Utilizaron una metodología basada en el diseño. Realizaron observaciones durante 3 sesiones de clase en las cuales se plantearon actividades con diferentes representaciones que involucraban a las funciones $y=x$, $y=2x$, $y=x+1$. Los resultados sugieren que los niños evidencian su pensamiento funcional principalmente a través de relaciones de correspondencia y covariación. Las autoras señalan que algunos de los niños identificaron el patrón y alcanzaron la generalización.

El estudio de López-Mojica, Cárdenas, Sánchez y Aceves (2017) por su parte, indagó sobre los procesos cognitivos que se articulan al pensamiento funcional, en una población con síndrome de Down en México. Los participantes en el estudio tenían de entre 11 a 15 años de edad. Las tareas que se diseñaron contemplaban la noción de seriación, proporción y patrón geométrico; en dichas actividades se distinguía el objeto del signo. Los autores concluyen que la tarea sobre patrón geométrico favoreció la emergencia del pensamiento funcional.

Otro estudio fue el realizado por Stephens et al. (2012) con estudiantes de tercero a quinto grado a través de un experimento de enseñanza en el aula. Los autores analizaron la progresión de los aprendizajes manifestados por los niños respecto a su pensamiento funcional. Los investigadores concluyeron que los niños manifestaron un avance en el desarrollo de su pensamiento funcional pasando de uno recursivo a uno covariacional.

La investigación realizada por Blanton y Kaput (2004) reporta el desarrollo del pensamiento funcional y la notación que utilizan los niños de preescolar hasta quinto de primaria para expresar las funciones. Las tareas propuestas involucraban una o más cantidades variables a través de las cuales se analizaban el avance de los niños respecto al lenguaje y las operaciones utilizadas. Concluyen que los niños son capaces de expresar el pensamiento funcional a través de palabras y símbolos; también sugieren incluir en los currículos de educación primaria el desarrollo del pensamiento funcional.

Dentro de las investigaciones realizadas con un enfoque en álgebra temprana se abordan como tema principal aquellas que giran en torno al tema de interés de esta presente investigación, el cual es la equivalencia.

Ramírez, Brizuela y Blanton (2020) realizaron un estudio para explorar la comprensión y representación de las propiedades aritméticas como el inverso aditivo y la conmutatividad. Los investigadores trabajaron con estudiantes de jardín de niños y primer grado de primaria. Para el diseño de las tareas se utilizó el marco teórico de Vergnaud y para la exploración se utilizó un experimento de enseñanza en el aula diseñado para indagar la comprensión algebraica de los niños, así como las representaciones simbólicas que utilizan.

Los resultados evidencian que los niños progresan en el desarrollo de su pensamiento algebraico con el tiempo. También que, resulta más complejo la comprensión de la propiedad conmutativa para los niños de preescolar.

En el estudio de Schlieman, Carraher, Brizuela y Jones, (2011) se indaga a través de entrevistas cómo un grupo de alumnos del tercer grado de primaria resuelve problemas verbales cuando los números eran explícitos en el problema. Posteriormente, a partir de otros problemas se les pidió determinar los valores de las cantidades incógnitas presentadas en estos nuevos problemas. Observaron que los niños apreciaban la lógica de las operaciones equivalentes sobre cantidades equivalentes y que son capaces de desarrollar notaciones consistentes para representar las relaciones en problemas que involucran tanto cantidades conocidas como no conocidas

En un estudio presentado por Castro y Molina (2007), se aborda de manera enfática la importancia de desarrollar un pensamiento relacional en estudiantes de educación primaria, donde el concepto matemático de interés es el signo igual, mismo que es analizado desde las igualdades numéricas. Se destaca de esta investigación la importancia del pensamiento relacional mismo que centra su objetivo en poder tener la atención del estudiante en las propiedades de las operaciones, transformación de expresiones, más que en la realización de cálculos aritméticos.

Carpenter, Levi, Loef y Koehler (2005) presentan entrevistas realizadas a estudiantes de tercer año de primaria a los cuales dentro de su enseñanza se les fomentó el pensamiento relacional, específicamente la propiedad distributiva en las equivalencias y como eso ha permitido poder desarrollar en ellos un pensamiento relacional. Concluyendo finalmente, como el desarrollar en los estudiantes habilidades que les permitan aprender a pensar en relaciones que involucran la propiedad distributiva puede apoyar el aprendizaje de conceptos y habilidades aritméticas básicas. Además de que al desarrollar un pensamiento relacional se esta a su vez desarrollando una forma de aprender con entendimiento.

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

Para el desarrollo de esta investigación se plantean tres referentes conceptuales que sirven como sustento de la misma; además estos mismos serán útiles para el análisis de resultados obtenidos a partir de las acciones realizadas por los estudiantes al realizar las actividades propuestas. Los ejes referentes son: la propuesta de álgebra temprana, los niveles de algebrización y el concepto matemático (equivalencias).

3.1. ÁLGEBRA TEMPRANA

La observación, en el aprendizaje del álgebra, de dificultades como la limitada interpretación del signo igual, las concepciones erróneas de los alumnos sobre el significado de las letras utilizadas como variables, el rechazo de expresiones no numéricas como respuestas a un problema y la no aceptación de la falta de clausura, han sido atribuidas previamente a la inherente abstracción del álgebra y a limitaciones en el desarrollo cognitivo de los alumnos. (Schliemann, 2003). En cambio, otros investigadores (Blanton y Kaput, 2005; Booth, 1999; Brizuela y Schliemann, 2003; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Carraher, 2006; Fujii, 2003; Kaput, 2000) sugieren que las dificultades de los alumnos con el álgebra pueden ser debidas al tipo de enseñanza recibida.

Estudios empíricos recientes, en línea con el álgebra temprana, apoyan esta última afirmación, al menos en relación con ciertos contenidos y modos de pensamiento algebraicos, dando muestras de la capacidad de los alumnos de educación primaria de aprender y comprender nociones algebraicas elementales y utilizar modos de pensamiento algebraicos (Molina, 2007).

Se han aportado evidencias de que estos estudiantes pueden elaborar y simbolizar algebraicamente conjeturas sobre relaciones aritméticas básicas (Carpenter et al., 2003), pensar sobre operaciones aritméticas como funciones, en vez de como cálculos con números particulares (Schliemann et al, 2003), trabajar con relaciones funcionales y usar notación algebraica para representarlas (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000). También, usar representaciones algebraicas, como gráficos, tablas y ecuaciones para resolver problemas, y representar y analizar problemas en los que hay involucradas cantidades desconocidas en ambos miembros de una igualdad, utilizando, en ocasiones, letras para representar dichas cantidades (Brizuela y Schliemann, 2003).

Estos estudios han analizado la factibilidad y potencialidad de la introducción temprana de algunas ideas algebraicas, mostrando, en particular, que “cuando la enseñanza está fundamentada en las ideas matemáticas de los alumnos y en promover su curiosidad matemática, los niños tienden a exhibir maneras de pensar algebraicas en el contexto de lecciones de aritmética, geometría o medida” (Bastable y Schifter, 2001, p. 2).

Dentro de los Estándares del NCTM, se recomienda que el desarrollo de pensamiento algebraico sea abordado desde la educación infantil en adelante, para ayudar a los alumnos a “construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior” (NCTM, 2000, p. 37).

Durante las últimas dos décadas han surgido diferentes investigaciones a nivel mundial que analizan y promueven la integración del álgebra en el currículo de la Educación Primaria. Gracias a dichas investigaciones ha surgido una propuesta conocida como álgebra temprana (EA, por sus siglas en inglés Early-Algebra) (Molina, 2007); dicha propuesta será un eje referente para nuestra investigación.

El objetivo principal del álgebra temprana es fomentar una forma distinta de pensar la matemática de los primeros ciclos escolares, esto es promover un pensamiento algebraico en la educación básica (Carragher y Schliemann, 2007).

Esta propuesta tal como lo mencionan Blanton y Kaput (2005) busca fomentar en los estudiantes la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, logrando así desarrollar un pensamiento que obedezca a la estructura implícita en las matemáticas. Para lograr dicho desarrollo es necesario que los estudiantes exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo.

El álgebra temprana propone que al aprender matemáticas en educación básica se logre una verdadera comprensión de las mismas, siendo su finalidad principal el facilitar el aprendizaje del álgebra. Teniendo en cuenta que las matemáticas de educación primaria tienen potencial para que puedan emerger naturalmente diferentes modos de pensamiento algebraicos, especialmente el aprendizaje de la aritmética (Molina, 2007). Al desarrollar estos modos de pensamiento algebraicos facilita en los estudiantes el desarrollo de matemáticas más profundas y complejas desde los primeros años (Blanton y Kaput, 2005).

De esta manera se busca que las matemáticas básicas que sean “algebrizadas” facilitarán a los alumnos a promover la generalización en su pensamiento y aumentando su capacidad de expresar generalidad (Molina, 2009).

Del mismo modo que el álgebra, el álgebra temprana comprende el estudio de relaciones funcionales, la generalización numérica y de patrones, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Kaput, 1998, 2000).

3.2. PENSAMIENTO ALGEBRAICO Y NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN

Aunque existen muchas investigaciones acerca del desarrollo del pensamiento algebraico no se tiene una definición clara del mismo para los niveles elementales. Una definición del álgebra y el desarrollo de un pensamiento algebraico es que el álgebra va más allá de “dar significado a los símbolos”; es desarrollar un pensamiento en el que sea posible manejar lo que aún no se conoce, poder invertir y deshacer operaciones, es poder ir de lo general a lo particular (Kieran y Filloy, 1989). Por su parte, Kaput (1998) enlista cinco formas de pensamiento algebraico: generalización y formalización, manipulación, el álgebra como el estudio de las estructuras algebraicas, el álgebra como el estudio de las funciones, relaciones y variaciones y, el álgebra como modelización.

Para poder clasificar el desarrollo de un razonamiento algebraico en estudiantes de educación primaria, se utilizará la propuesta de niveles de algebrización que supone que el desarrollo del pensamiento algebraico depende de una “evolución” en los procesos de generalización, simbolización y transformación en tareas estructurales y de tipo funcional (Aké y Godino, 2018). Esta propuesta de niveles de algebrización, enmarcada en el enfoque de Álgebra Temprana, permitirá el diseño de las actividades a desarrollar con los estudiantes. A continuación, se describen estos niveles para el estudio de las tareas de tipo estructural, particularmente para las equivalencias.

Nivel 0: Indica ausencia de razonamiento algebraico. No se distinguen propiedades, el signo igual es concebido como una señal de hacer una serie de operaciones para llegar a un resultado. No existe una generalización.

Nivel 1: Se manifiesta un acercamiento inicial al pensamiento algebraico. Se comienzan a reconocer propiedades de las operaciones, también se reconoce el significado relacional del signo igual por lo que el concepto de equivalencia emerge. Pueden existir incógnitas, pero no simbolizadas con letras. El lenguaje o representación puede ser de índole numérico, icónico, verbal, y los procedimientos utilizados no indican que se operan con la incógnita en ambos lados de la ecuación.

Nivel 2: Se manifiesta un primer acercamiento intermedio al pensamiento algebraico. En el aspecto estructural se comienzan a utilizar propiedades de las operaciones, se utiliza el significado relacional del signo igual por lo que la noción de equivalencia emerge. Lo que hace distintivo al nivel 2 es el lenguaje, que, aunque puede ser de índole numérico, icónico, verbal, necesariamente comienza a familiarizarse a los niños de la escuela elemental con el uso de símbolos (no precisamente registros alfanuméricos), es decir se empiezan a utilizar variables; sin embargo, los procedimientos utilizados no indican que se operan con la incógnita. Las ecuaciones tienen la siguiente forma estructural:

$$Ax \pm B = C$$

Nivel 3: Indica formas consolidadas de razonamiento algebraico. Lo que caracteriza a este nivel es la introducción de elementos simbólicos o alfanuméricos, pero sobre todo el cálculo analítico para obtener formas equivalentes en las expresiones, en el sentido que Puig y Rojano (2004) manifiestan, es decir, se opera en ambos lados de la expresión. Las ecuaciones tienen la siguiente forma estructural:

$$Ax \pm B = Cx \pm D$$

3.3. CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Un aspecto importante relacionado con el concepto de igualdad es la relación de equivalencia, ya que es de suma importancia que a partir de una ecuación se puedan generar una cadena de ecuaciones equivalentes a una dada, dicha definición nos guiará el aspecto matemático de la presente investigación.

EQUIVALENCIA

Dentro del enfoque del álgebra temprana las tareas que promueven el estudio de equivalencias se realizan a través de sentencias numéricas, pictóricas y simbólicas.

Kieran y Filloy (1989) definen equivalencia como la representación de una relación numérica en la que el lado izquierdo tiene el mismo valor que el lado derecho, misma que se encuentra relacionada con un símbolo de equivalencia, dicho símbolo de equivalencia es el signo igual. Es decir, el signo igual se define como una representación de un concepto matemático y determina una igualdad entre dos expresiones matemáticas. Definimos así, el concepto de igualdad en una ecuación como la relación de equivalencia existente entre los miembros derecho e izquierdo de la ecuación (Galeano y Váquiro, 2015).

Para poder definir una relación de equivalencia de manera formal, es necesario definir relación, sus propiedades y las características de una relación de equivalencia. El concepto de igualdad en una ecuación hace referencia a la equivalencia que existe entre los miembros derecho e izquierdo de una ecuación y es necesario mencionar como se da esa relación de equivalencia entre las partes. Desde la teoría de conjuntos se puede evidenciar mediante el axioma de extensión como se da esa relación a partir de conjuntos.

Comenzando por definir una relación:

Dados dos conjuntos A y B una relación entre elementos de A y elementos de B es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$. Es decir, $R \subset A \times B$.

Si $(a, b) \in R$ entonces decimos que el elemento a está relacionado con el elemento b . A veces se escribe aRb .

Las propiedades de una relación son las siguientes:

La relación R se llama reflexiva, si a está relacionada con a , aRa .

La relación R se llama simétrica, si $aRb \Rightarrow bRa$

La relación R se llama transitiva, si $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

La relación R se llama antisimétrica, si $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

Relación de equivalencia

Una relación R en un conjunto A , es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

De esta manera, el abordaje de las equivalencias en edades tempranas tiene la intención de construir una forma de pensamiento en los niños para una comprensión de esta noción en contextos formales como el previamente descrito.

De esta manera, como ejes principales de fundamentación de esta investigación tenemos: Álgebra temprana, pensamiento algebraico y sus niveles de algebrización y, equivalencias.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

La metodología en la que se enmarca esta investigación tiene un enfoque cualitativo de tipo descriptivo y exploratorio (Cohen, Manion y Morrison, 2011). A través del diseño de una serie de tareas que promueven un determinado nivel de algebrización se indagó el pensamiento algebraico que los niños de primaria manifiestan al resolverlas. A continuación, se describen a los sujetos del estudio, se caracterizan las tareas diseñadas y finalmente, se detalla la aplicación de dichas tareas en el aula.

4.1. MUESTRA Y CONTEXTO

La muestra del estudio estuvo conformada 38 niños del quinto año de primaria, 18 niños y 20 niñas. Los niños tienen edades entre los 10 y 11 años, de la Escuela Primaria Rural Matutina “Justo Sierra”, es una escuela ubicada en el municipio de San Juan del Río, Querétaro; escuela primaria de educación pública. La selección de esta muestra fue intencional (Cohen, Manion y Morrison, 2011) dado que el acceso a los alumnos dependió de la disposición de la institución de educación primaria para desarrollar el proyecto de tesis.

4.2. DESCRIPCIÓN DE LAS TAREAS

Las actividades fueron diseñadas a partir de lo expuesto en el Marco Teórico, es decir, a partir del enfoque del Álgebra Temprana. Se considera que bajo este enfoque las equivalencias se realizan a través de sentencias aritméticas, pictóricas, simbólicas y algebraicas. Además, las tareas se estructuraron para promover diferentes niveles de algebrización. A continuación, se describe las tareas (ver anexo) que fueron desarrolladas en el aula.

Las tareas implementadas en el aula se estructuraron para que el alumno sea capaz de revelar cierto nivel de algebrización de acuerdo a la equivalencia propuesta; por lo que se propusieron 16 reactivos, los cuales fueron estructurados de la siguiente manera:

- 4 reactivos con un nivel 0 de algebrización
- 4 reactivos con un nivel 1 de algebrización
- 4 reactivos con un nivel 2 de algebrización
- 4 reactivos con un nivel 3 de algebrización

Dichas equivalencias fueron usadas en sus distintas representaciones aritmética, simbólica y pictórica.

- Representación aritmética. Es aquella con la que el estudiante se encuentra más familiarizado, sólo se trabaja con números y la incógnita se representa como “un

espacio en blanco” en la cual es necesario que el estudiante resuelva la equivalencia al escribir un número que haga la sentencia verdadera.

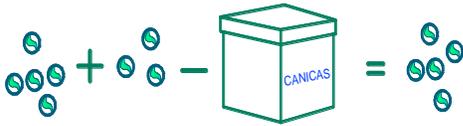
- Representación simbólica. Se trabaja mediante símbolos (en este caso canicas y cajas de canicas elaboradas para los fines instruccionales) para que el alumno logre dar un significado con lo que se está trabajando.
- Representación pictórica. Se trabaja con imágenes (en este caso modelo de balanza), con la cual el alumno sea capaz de interactuar para llevar a cabo una actividad. Este tipo de representación requiere una mayor autonomía del pensamiento.
- Representación algebraica. Se trabaja con letras, números y símbolos, en donde las letras tienen valor numérico.

Tal como se muestra en las siguientes tablas, las 16 ecuaciones con sus distintos niveles de algebrización fueron diseñadas en sus distintas representaciones:

Nivel 0

El alumno sólo realiza operaciones conocidas, no tiene un concepto de equivalencia definido. Al diseñar estas equivalencias, se plantea si el alumno logra resolver la equivalencia a través de operaciones aritméticas conocidas por él, al ser sólo un término de un lado del signo igual, no pone en evidencia su manejo del concepto equivalencia. El significado del signo igual que emerge es el de resultado.

Tabla 1. Diseño de equivalencias en diferentes representaciones, Nivel 0

Representación aritmética	Representación simbólica	Representación pictórica
$5 + 3 - \blacksquare = 5$		
$\blacksquare + 9 = 13$		

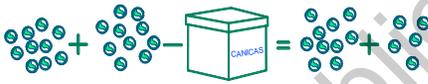
$4 = 7 - \blacksquare$		<p>IZQUIERDO DERECHO</p> 
$9 = 3 + 3 + \blacksquare$		

Nivel 1

El concepto de equivalencia está presente en las operaciones realizadas, aún no se opera con la incógnita. Para el diseño de estas ecuaciones de equivalencia, se tiene dos o más términos de cada lado del signo igual, esto con la finalidad de que el alumno al resolver la ecuación logre reflejar su manejo de equivalencia, a diferencia del nivel 0 donde el alumno resuelve con operaciones aritméticas, el alumno podría resolver la equivalencia utilizando las propiedades de los números.

Tabla 2. Diseño de equivalencias en diferentes representaciones, Nivel 1

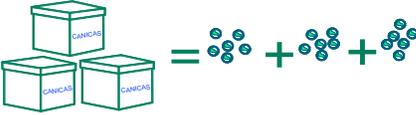
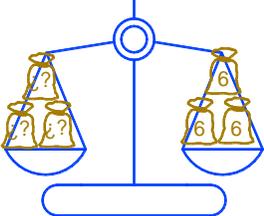
Representación aritmética	Representación simbólica	Representación pictórica
$\blacksquare + 5 = 5 + 2$		

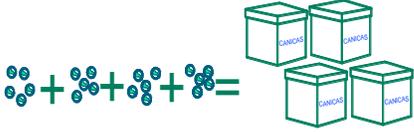
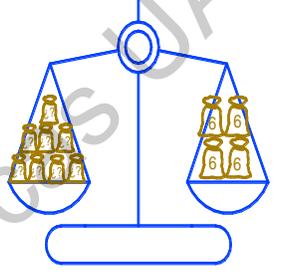
$8 + 7 = \blacksquare + 8 + 2$		
$10 - \blacksquare = 8 - 3$		<p>Restricción en el modelo de balanza. No es posible representar esta equivalencia</p>
$10 + 10 - \blacksquare = 10 + 5$		

Nivel 2

Al diseñar estas ecuaciones se tomó en cuenta que para que el alumno alcance este nivel debe poder operar con la incógnita de un solo lado de la ecuación, además de tener un concepto de equivalencia definido; esto mismo se ve reflejado en las ecuaciones propuestas, se espera que el alumno logre resolver las ecuaciones de una mejor manera al utilizar propiedades de los números.

Tabla 3. Diseño de equivalencias en diferentes representaciones, Nivel 2

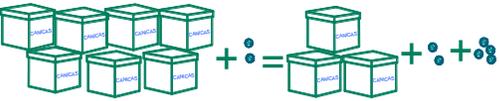
Representación aritmética	Representación simbólica	Representación pictórica
$3 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6$		

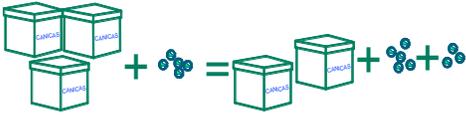
$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times \blacksquare$		
$3 \times \blacksquare + 5 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6 + 6$		
$7 + 7 + 7 + 7 = 3 \times \blacksquare + 4 \times \blacksquare$		

Nivel 3

Para diseñar estas ecuaciones de equivalencia el alumno con un nivel de algebrización 3, debe de ser capaz de operar con la incógnita, además de que la incógnita se encuentre en ambos lados de la equivalencia. Las ecuaciones en sus distintas representaciones son las siguientes:

Tabla 4. Diseño de equivalencias en diferentes representaciones, Nivel 3

Representación aritmética	Representación simbólica	Representación pictórica
$7 \times \blacksquare + 2 = 3 \times \blacksquare + 2 + 4$		

$3 \times \blacksquare + 5 = 2 \times \blacksquare + 5 + 3$		
$5 \times \blacksquare - 3 = 4 \times \blacksquare + 5$		<p>Restricción en el modelo de balanza. No es posible representar esta equivalencia</p>
$9 \times \blacksquare - 6 = 8 \times \blacksquare + 7$		<p>Restricción en el modelo de balanza. No es posible representar esta equivalencia</p>

4.3. PROCEDIMIENTO DE APLICACIÓN DE LAS TAREAS EN EL AULA

La aplicación de las tareas en el aula estuvo guiada por el experimento de enseñanza (Cobb y Gravemeijer, 2008). El experimento de enseñanza consta de tres fases: preparación del experimento, implementación y visión retrospectiva. El instrumento de recolección de los datos fueron la secuencia de tareas que se diseñaron (sección 3.2), las técnicas utilizadas fueron el registro en papel y grabaciones de audio.

FASE DE PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO

En esta fase se determinó trabajar con niños del quinto año de primaria ya que, dentro del esquema de programas de estudio para el quinto grado de primaria, la organización de aprendizajes en su eje Sentido numérico y pensamiento algebraico enmarca que el alumno debe explorar las propiedades aritméticas que en la secundaria serán generalizadas con el álgebra (Guía del maestro, Matemáticas quinto grado), propiedades que se espera el alumno sea capaz de identificar en las ecuaciones propuestas.

A partir de lo previo y considerando la escasa literatura reportada en México para el trabajo de equivalencias en comparación con tareas de tipo funcional se diseñaron 16 sentencias que ya fueron descritas en el apartado previo 3.2

Se estructuró implementar las tareas por tipo de representación, es decir, desarrollar las primeras 16 sentencias con representación aritmética, pero con diferentes niveles de algebrización (ver figura 1)

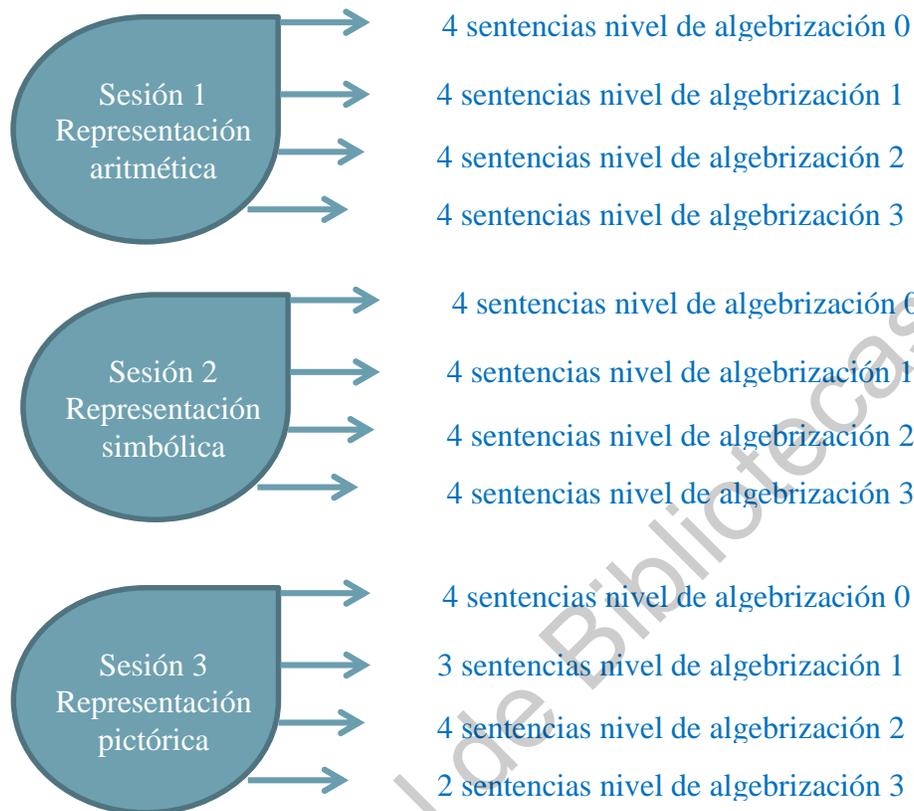


Figura 1. Lógica De La Implementación De Las Tareas

FASE DE IMPLEMENTACIÓN DEL EXPERIMENTO

La implementación de las tareas en el aula se desarrolló en 3 sesiones con duración de 50 minutos. El profesor habitual del grupo estuvo presente durante el desarrollo de estas sesiones. La participación del investigador fue de observador participante (Kelly y Lesh, 2000) ya que interactuó con los alumnos de la clase.

En la primera sesión de trabajo se divide el grupo de 38 alumnos en equipos de 3, quedando así un total de 12 equipos con 3 alumnos y un equipo de 2 alumnos; la distribución de los equipos fue definida y guiada por el profesor del grupo. La formación de estos equipos se siguió en todas las sesiones.

La representación aritmética fue la trabajada en la primera sesión, al inicio se dan las instrucciones de cómo resolver los ejercicios, al no tener dudas de parte del alumnado, se les hace entrega física de un juego impreso por equipo de los 16 reactivos de la representación a trabajar (ver anexo), se pide que contesten como equipo cada uno de ellos,

al igual que justifiquen sus respuestas. El investigador cuestiona sus respuestas y justificaciones de cada uno de los reactivos mismas que graba en audio.

La forma de trabajo que se siguió durante las siguientes sesiones fue en el mismo lineamiento; la sesión 2 se trabajó la representación simbólica, donde se les ejemplificó con el material elaborado.

La sesión 3 se implementó la representación pictórica, al inicio de la sesión el investigador hizo una pequeña reseña de la forma en que trabaja la balanza y se despejaron dudas en cuanto a su manejo.

FASE DE VISIÓN RETROSPECTIVA DEL EXPERIMENTO

El análisis de los datos de la presente investigación es de carácter cualitativo. Los niveles de algebrización (Aké y Godino 2018), permitieron analizar el nivel de pensamiento algebraico desarrollado por estudiantes de quinto grado de primaria, al resolver tareas que demandan el uso de un pensamiento algebraico para la resolución de equivalencias, diseñadas en distintos niveles de algebrización.

Los datos empíricos, provienen de las distintas hojas de trabajo escritas de los estudiantes en el proceso de la solución de distintas tareas. Para organizar la información, a cada grupo de estudiantes se les codificó como G1, G2, G3,..., G13.

La presentación de resultados, en primera instancia se hace una presentación de resultados cuantitativos de acuerdo a la representación analizada, posteriormente se hace un análisis detallado en cada sesión que se llevó a cabo.

El análisis de cada sesión (por representación), se estructura de forma global en análisis cualitativos de aciertos y errores; se agrupan y evalúan los errores encontrados en las respuestas al igual que las justificaciones empleadas por parte de los estudiantes, por último, con base en este análisis se presentan los niveles de algebrización alcanzados en cada una de las respuestas.

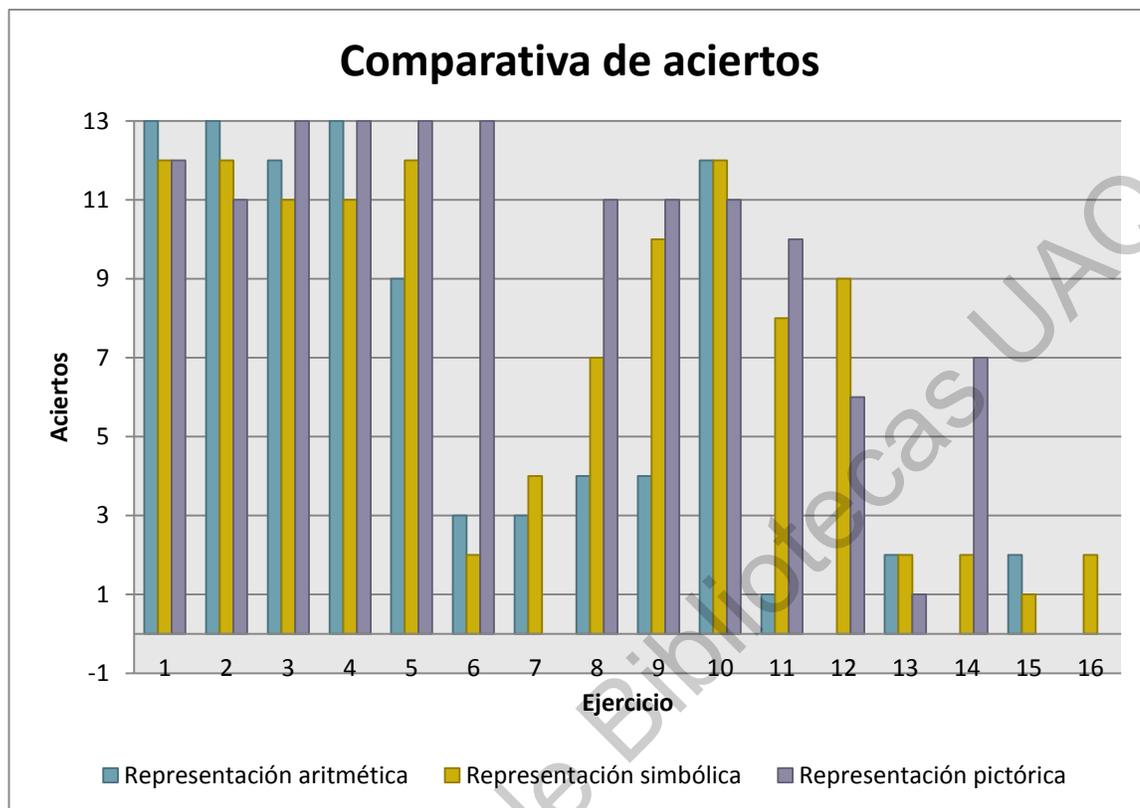
CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En el presente estudio se investigó el pensamiento algebraico en estudiantes de quinto grado de primaria, al resolver tareas que involucran equivalencias y demandan el uso de propiedades de los números en un enfoque de álgebra temprana. Conforme el marco teórico, se consideraron el enfoque de álgebra temprana y los niveles de algebrización para para el diseño de las tareas y el análisis de los resultados. Los datos fueron analizados bajo tres lineamientos en cada representación (aritmética, pictórica, simbólica): (1) Los errores encontrados, (2) la forma en la que logran articular su razonamiento y su forma de justificarlo y (3) el nivel de algebrización alcanzado en cada reactivo.

Los análisis aquí presentados, se obtuvieron a partir de las distintas hojas de trabajo resueltas de forma escrita por los estudiantes. El proceso de la solución de las diferentes tareas, como se mencionó en el capítulo de metodología, se llevó a cabo en 3 sesiones de clase de 50 minutos. Para organizar la información, a cada grupo de estudiantes se le codificó como EQ1, EQ2, EQ3, ..., EQ13.

5.1 ANÁLISIS GENERAL

De acuerdo con un panorama general y a carácter de comparación se presentan los resultados obtenidos por cada grupo de estudiantes, en cada representación; de acuerdo con la cantidad de respuestas correctas a cada equivalencia (Gráfica 1). Cabe señalar que las expresiones 7, 15 y 16 no fue posible representarlos de forma pictórica.

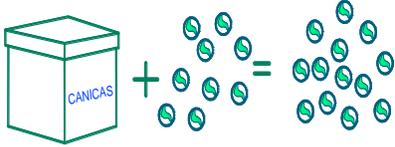
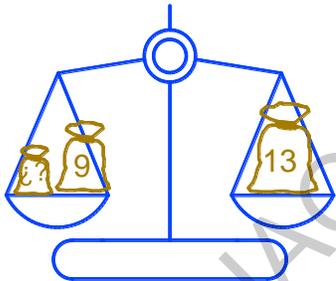
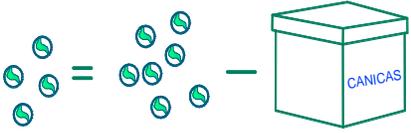
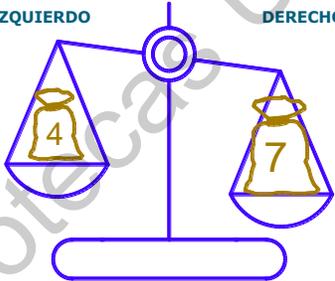


Gráfica 1. Comparativa de aciertos en las distintas representaciones

De esta gráfica se puede observar, de acuerdo con los niveles de algebrización planteados en cada expresión propuesta, los cuatro primeros que promueven un nivel 0 de algebrización (Tabla 5) son contestados correctamente por los niños en las tres representaciones planteadas teniendo como máximo dos errores. La representación aritmética tiene el mayor porcentaje de reactivos correctos (98.1%), seguida por la pictórica (94.2%) y finalizando con la simbólica (88.5%).

Tabla 5. Tareas con un Nivel 0 de algebrización utilizando diferentes representaciones

Representación aritmética	Representación simbólica	Representación pictórica
$5 + 3 - \blacksquare = 5$		

$\blacksquare + 9 = 13$		
$4 = 7 - \blacksquare$		<p>IZQUIERDO DERECHO</p> 
$9 = 3 + 3 + \blacksquare$		

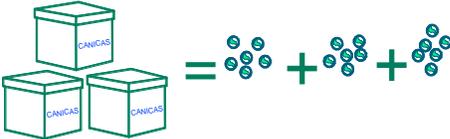
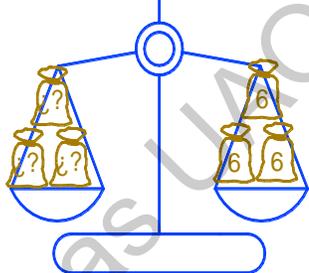
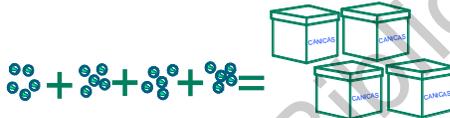
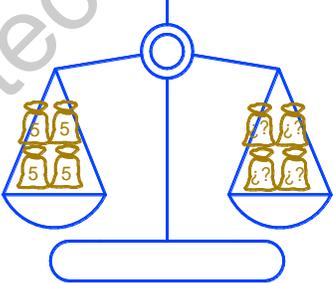
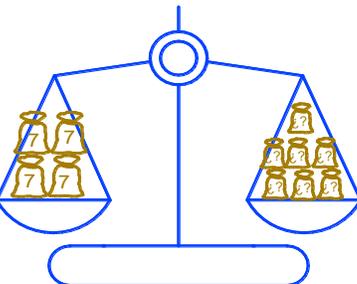
De las expresiones propuestas del cinco al ocho que promueven un nivel 1 de algebraización (Tabla 6), comienza a prevalecer un descenso en el número de ejercicios contestados de forma correcta, prevaleciendo un mayor grado de aciertos en la representación pictórica (94.9%), seguido de la representación simbólica (48.1%) y por último la aritmética (36.5%).

Tabla 6. Tareas con un Nivel 1 de algebrización utilizando diferentes representaciones

Representación aritmética	Representación simbólica	Representación pictórica
$\blacksquare + 5 = 5 + 2$		
$8 + 7 = \blacksquare + 8 + 2$		
$10 - \blacksquare = 8 - 3$		Restricción en el modelo de balanza. No es posible representar esta equivalencia
$10 + 10 - \blacksquare = 10 + 5$		

Dentro de las equivalencias que promueven un nivel 2 de algebrización ejercicios del 9 al 12, (Tabla 7) la representación simbólica obtiene un mayor porcentaje de respuestas correctas (75%), continúa la representación pictórica con un 73.1% y por último la representación aritmética con un 32.7%.

Tabla 7. Tareas con un Nivel 2 de algebrización utilizando diferentes representaciones

Representación aritmética	Representación simbólica	Representación pictórica
$3 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6$		
$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times \blacksquare$		
$3 \times \blacksquare + 5 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6 + 6$		
$7 + 7 + 7 + 7 = 3 \times \blacksquare + 4 \times \blacksquare$		

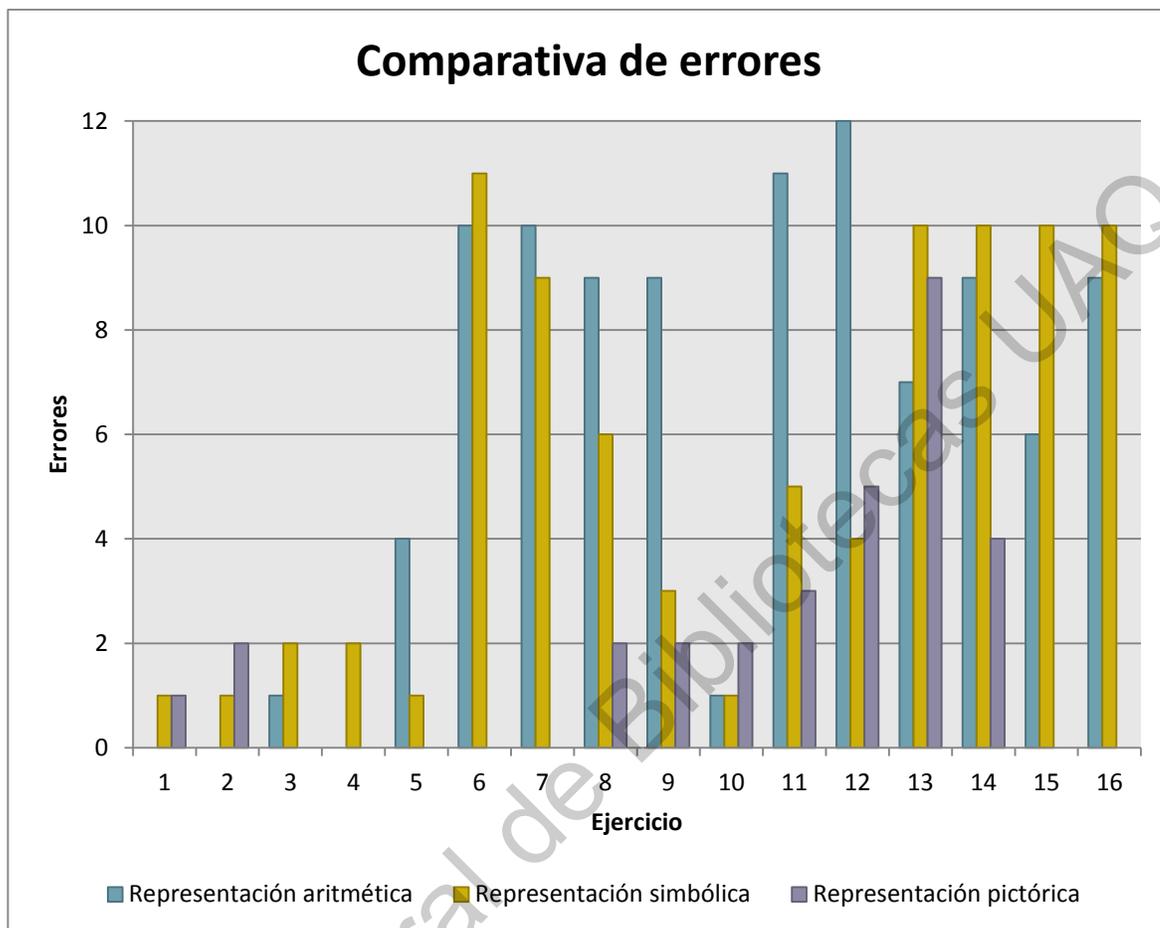
En el nivel 3 de algebrización, de las equivalencias propuestas del 13 al 16 (ver Tabla 8), el porcentaje de respuestas correctas se ve disminuido visiblemente con el mayor porcentaje de aciertos se encuentra la representación pictórica (30.8%), en segundo lugar, se encuentra la representación simbólica (13.5%) y en tercer lugar la representación aritmética (7.69%).

Tabla 8. Tareas con un Nivel 3 de algebrización utilizando diferentes representaciones

Representación aritmética	Representación simbólica	Representación pictórica
$7 \times \blacksquare + 2 = 3 \times \blacksquare + 2 + 4$		
$3 \times \blacksquare + 5 = 2 \times \blacksquare + 5 + 3$		
$5 \times \blacksquare - 3 = 4 \times \blacksquare + 5$		Restricción en el modelo de balanza. No es posible representar esta equivalencia
$9 \times \blacksquare - 6 = 8 \times \blacksquare + 7$		Restricción en el modelo de balanza. No es posible representar esta equivalencia

De forma general del total de las expresiones contestadas por los estudiantes, la representación pictórica tiene un mayor porcentaje de aciertos con un 73.2%, seguido por la representación simbólica con un 56.3% y para finalizar la representación aritmética con un 43.8%.

Adicional a la información previa, algunos de los ejercicios fueron contestados ya sea incorrectamente o no fueron contestados (Gráfica 2, 3). El comportamiento de los porcentajes de acuerdo con los errores cometidos dentro del nivel 0 de algebrización (equivalencias 1- 4) y con un menor porcentaje de error se encuentra la representación aritmética (1.92%), seguida de la representación pictórica (5.77%) y por último se encuentra la representación simbólica con un porcentaje de error del 11.5%.



Gráfica 2. Comparativa de errores en las distintas representaciones

Para el nivel de algebrización 1 (equivalencias 5-8) la representación con el menor porcentaje de error es la pictórica (5.13%), en segundo lugar, la simbólica (51.9%), finalizando con la aritmética (63.5%).

Dentro del nivel de algebrización 2 (equivalencias 9-12) la representación aritmética tiene un mayor porcentaje de error con un 63.5%, con menor porcentaje se encuentra la representación simbólica con un 25%, aunque la representación pictórica dentro de este nivel de algebrización tiene el menor porcentaje de error con un 23.1%.

Finalmente, dentro del nivel de algebrización 3 (ejercicios 13-16), el menor porcentaje de error se encuentra en la representación pictórica con un 50%, seguida de la representación aritmética con un 59.6%, finalizando con la representación simbólica con un 76.9%.

De esta manera, los ejercicios que presentaban mayor nivel de algebrización presentaron mayor dificultad por los niños dado que no fueron contestados (Gráfica 5.3), el nivel 2 de algebrización junto con el nivel 3 se vieron afectados por esta situación.



Gráfica 3. Comparativa de reactivos no contestados en las distintas representaciones

Dentro del nivel 2 la representación aritmética y pictórica tuvieron un porcentaje de equivalencias sin contestar del 3.85% por igual, mientras que la representación simbólica no se vio afectada por esta situación.

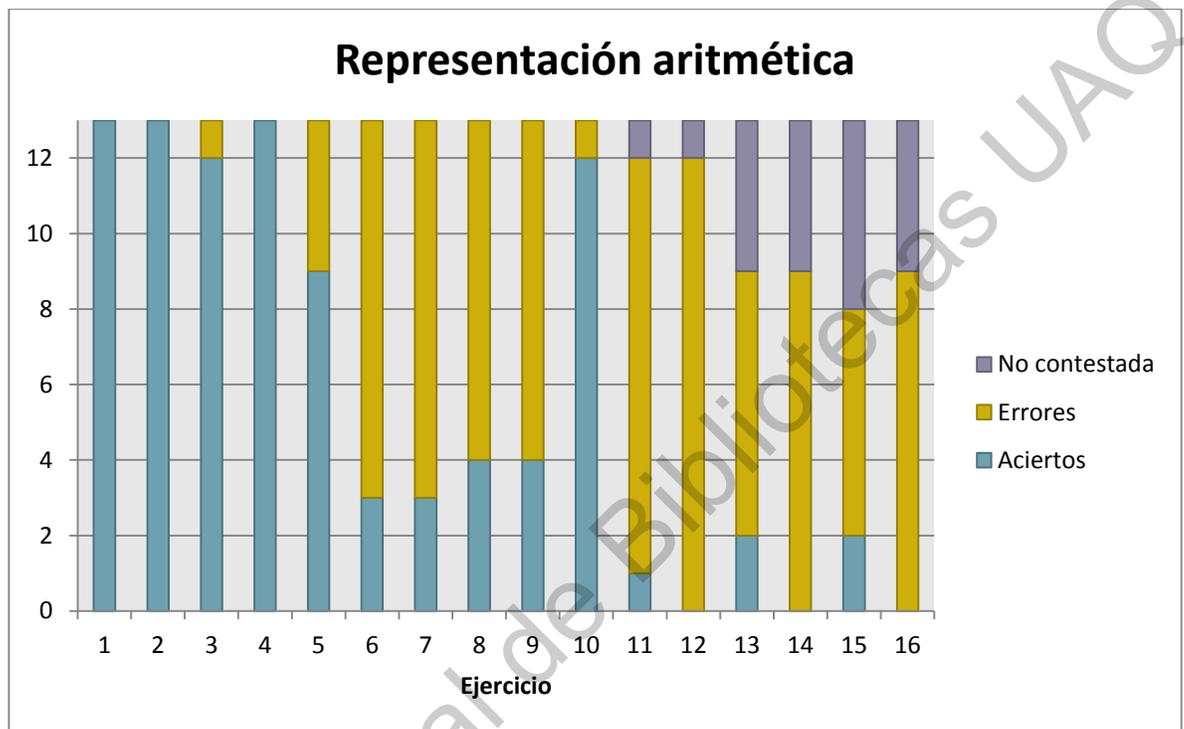
Dentro del nivel 3 de algebrización el porcentaje de equivalencias sin contestar dentro de la representación aritmética fue del 32.7%, mientras que por la representación pictórica fue del 19.2% y de la representación simbólica del 9.62%.

5.2. ANÁLISIS DE LA SESIÓN 1: REPRESENTACIÓN ARITMÉTICA

Durante la primera sesión en la cual se trabajó con los 38 alumnos agrupados en 13 equipos de los cuales 12 equipos fueron integrados por 3 alumnos y un equipo integrado por 2 alumnos. Se respondieron las 16 equivalencias propuestas y diseñadas en la representación aritmética; es decir, se analizaron un total de 208 respuestas.

De acuerdo con los datos recogidos, en un análisis cuantitativo tiene un porcentaje de aciertos del 43.8%, de errores del 47.1% y de equivalencias no contestados del 9.1%. La

cantidad de aciertos, errores y expresiones no contestados para los trece equipos se muestra en la siguiente gráfica (Gráfica 4).



Gráfica 4. Análisis cuantitativo de la representación aritmética

De un total de 208 respuestas, 91 fueron contestados correctamente, 19 no fueron contestadas, y 98 fueron contestados incorrectamente. A continuación, se analizarán los errores cometidos en estas 98 respuestas, además se presentan los ejercicios que no fueron contestados.

5.2.1. ANÁLISIS DE ERRORES Y JUSTIFICACIONES. REPRESENTACIÓN ARITMÉTICA

Dentro de los errores cometidos, se logran evidenciar ciertas lógicas que fueron adquiridas al cometer dichos errores, además de que algunas equivalencias contestadas correctamente, no se logran justificar de la misma forma; en la Tabla 9 se detallan las lógicas y frecuencias:

Tabla 9. Lógica de errores. Representación Aritmética

	Lógica del Error	Frecuencia
LE1.	El resultado de las operaciones realizadas del lado izquierdo sólo es el primer número u operación que aparece del lado derecho de la equivalencia.	37
LE2.	No existe una lógica a seguir de parte de los estudiantes	32
LE3.	No considera la incógnita con un mismo valor, no toma relevancia en el orden de las operaciones. No relaciona la equivalencia	10
LE4.	Aunque contesta de forma correcta, la respuesta no logra justificarla o la justifica de forma incorrecta	5
LE5.	Realiza operaciones aritméticas conocidas y las iguala, aunque no existe dicha igualdad	3
LE6.	Realiza las operaciones indicadas del lado derecho y el resultado obtenido es la respuesta por considerar, la incógnita se encuentra del lado izquierdo.	3
LE7.	No considera la incógnita con un mismo valor, no toma relevancia en el orden de las operaciones. Conserva/intenta conservar el concepto equivalencia.	2
LE8.	Realiza operaciones entre los números continuos al signo igual, y ese resultado es el que coloca en las incógnitas.	2
LE9.	Otros	9
	Total de errores (de 208 respuestas)	103

Las justificaciones presentadas por los estudiantes tanto para respuestas correctas o incorrectas se pueden definir en tres grupos (Tabla 10):

Tabla 10. Justificaciones. Representación Aritmética

	Justificación	Frecuencia
J1	Se justifica por una operación aritmética	150
J2	No existe una justificación	49
J3	Haciendo uso del concepto equivalencia	9
	Total	208

De acuerdo con estas lógicas y justificaciones seguidas por los estudiantes, se presentan algunos ejemplos tipo de acuerdo con el nivel de algebrización requerido para contestar la equivalencia propuesta en cada ejercicio.

Nivel de algebrización 0

Tal como fue planteada la secuencia de tareas, las primeras 4 pertenecen a un nivel de algebrización 0. Dentro de esta representación aritmética, en estas 4 primeras equivalencias para los 13 equipos, sólo se registró un error (manifestado por EQ7), en el cual, los alumnos logran justificar la equivalencia. Sin embargo, no logran contestar correctamente (LE9). (Figura 2).

Ejercicio 3
 $4 = 7 - \blacksquare$
por que siete menos 4 nos da tres

Figura 2. Error en Nivel 0 de algebrización. Representación Aritmética.

Además, las justificaciones empleadas en estas respuestas fueron únicamente aritméticas (J1), tal como se puede observar a continuación (Figura 3)

Ejercicio 2
 $\blacksquare + 9 = 13$
Porque si sumamos 9+4 nos da 13
a) Equipo 2

Ejercicio 1
 $5 + 3 - \blacksquare = 5$
Sumando 3+3=8 ahora 8-3=5
b) Equipo 3

Ejercicio 4
 $9 = 3 + 3 + \blacksquare$
Porque 3x3=9 3+3+3=9
c) Equipo 10

Ejercicio 3
 $4 = 7 - \blacksquare$
Restamos 7 menos 3 nos da 4
d) Equipo 12

Figura 3. Ejemplo de Justificaciones. Nivel 0, Representación Aritmética

Nivel de algebrización 1

Dentro de este nivel de algebrización (que se corresponde a los ejercicios 5 al 8), se analizaron 52 respuestas. De dichas respuestas, 33 de ellas tienen un error evidente, mientras que existen dos respuestas (manifestadas por EQ4, EQ11) que a pesar de no tener un error en la equivalencia si se encuentra en la lógica de su justificación (LE4). A continuación, se evidencia estas respuestas (Figura 4):

Ejercicio 7
 $10 - \blacksquare = 8 - 3$
Por que some 8-3 y me dio 5
a) Equipo 4

Ejercicio 5
 $\blacksquare + 5 = 5 + 2$
Por que 2+5=7+2
b) Equipo 11

Figura 4. Lógica de Error 4, Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética

Dentro de las 33 respuestas con un error evidente, 29 de ellos (expuestos por EQ3, EQ4, EQ5, EQ6, EQ7, EQ8, EQ9, EQ10, EQ11, EQ12, EQ13) se encuentran con una lógica de error 1 (LE1), es decir, para saber el valor de la incógnita solo se toma en cuenta el valor inmediato que existe después del signo igual (Figura 5).

Ejercicio 5
 $\blacksquare + 5 = 5 + 2$
Porque si sumas otro numero no da el mismo resultado
a) Equipo 6

Ejercicio 6
 $8 + 7 = \blacksquare + 8 + 2 = 25$
por que sumamos ocho por siete nos da quince
b) Equipo 7

Ejercicio 7
 $10 - \blacksquare = 8 - 3 = 5$
Por que 10-2=8-3=5
c) Equipo 11

Ejercicio 8
 $10 + 10 - \blacksquare = 10 + 5$
diez más diez nos da veinte del veinte lo restamos menos diez y es igual a diez.
d) Equipo 13

Figura 5. Lógica de Error 1, Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética

Existe una respuesta (manifestada por EQ4) cuyo error tiene una lógica LE6, es decir, realiza la operación aritmética solicitada del lado derecho y ese valor lo considera el valor de la incógnita, misma que se encuentra del lado opuesto de la equivalencia. (Figura 6).

Ejercicio 5

$$\blacksquare + 5 = 5 + 2$$

Por que sume 5+2 y medio 7

Figura 6. Lógica de Error 6, Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética

Una respuesta manifestada por el EQ4 presenta un error etiquetado con una lógica de error 9 (LE9); aunque particularmente en este error, se realizan las operaciones aritméticas del lado donde se encuentra la incógnita y el resultado obtenido es el valor de la incógnita (Figura 7).

Ejercicio 8

$$10 + 10 - \blacksquare = 10 + 5$$

Porque sume 10 mas 10 y medio 20

Figura 7. Lógica de Error 9, Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética

Dentro de la lógica de error 2 (LE2), dentro de este nivel de algebrización existen 2 respuestas (evidenciadas por EQ7, EQ13) que hace evidente esta lógica (Figura 8).

<p>Ejercicio 7</p> $10 - \blacksquare = 8 - 3$ <p>por que restamos diez menos tres</p> <p>a) Equipo 7</p>	<p>Ejercicio 6</p> $8 + 7 = \blacksquare + 8 + 2$ <p>verificamos con cual quedaria</p> <p>b) Equipo 13</p>
--	---

Figura 8. Lógica de Error 2, Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética

Para este nivel 1 de algebrización, las justificaciones presentadas en las tareas en su mayoría (44) tienen una justificación aritmética (J1), tal como se evidencia en la figura 9.

Ejercicio 5
 $\square + 5 = 5 + 2$
 por que 2+5 da 7 y 5+2 da 7
 a) Equipo 8

Ejercicio 6
 $8 + 7 = \square + 8 + 2$
 Tenemos que buscar una suma que nos de 15
 b) Equipo 12

Ejercicio 7
 $10 - \square = 8 - 3$
 por $10 - 2 = 8$
 c) Equipo 3

Ejercicio 8
 $10 + 10 - \square = 10 + 5$
 por $10 + 5 = 15$
 d) Equipo 1

Figura 9. Justificaciones (J1), Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética

Dentro de las justificaciones donde emerge el concepto equivalencia (J3), se encuentran 6 respuestas con esta justificación (expuestas por EQ1, EQ2, EQ5, EQ9). Una evidencia de esto se aprecia en la siguiente figura (Figura 10).

Ejercicio 5
 $\square + 5 = 5 + 2$ Porque vimos en la suma de el lado y vimos que era 2.

Figura 10. Justificación (J3), Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética

Mientras que existen dos equipos, EQ3 y EQ13, que no logran justificar su respuesta (J2), tal como lo muestra la Figura 11.

Ejercicio 5

$$\blacksquare + 5 = 5 + 2$$

Figura 11. Justificación (J2), Nivel 1 Algebrización, Representación Aritmética

Nivel de algebrización 2

En este nivel de algebrización se toman en cuenta las equivalencias de la 9 a la 12, dando un total de 52 respuestas para analizar, de estas 52 sólo 17 no tuvieron error al ser contestados, 2 no fueron contestados y de los 33 restantes se analizó la lógica de los errores presentados.

Dentro de la lógica de error 1 (LE1), se encuentra 7 equipos (EQ2, EQ3, EQ6, EQ9, EQ10, EQ11, EQ13) que presentan dicho error, es decir, el valor de la incógnita lo hacen depender del primer valor después del signo igual (Figura 12).

Ejercicio 9

$$3 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6 = 18$$

Porque 3×2 nos da $= 6 + 6 + 6$ nos da 18

Figura 12. Lógica de Error 1, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética

Dentro de las equivalencias que presentan error, pero no existe una lógica en su justificación (LE2) se encuentran 7 respuestas (manifestadas por EQ7, EQ9, EQ10, EQ13), evidencia de esto se aprecia en la Figura 13.

Ejercicio 11

$$3 \times \blacksquare + 5 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6 + 6$$

Porque vimos en las tablas del 5,3

a) Equipo 7

Ejercicio 11

$$3 \times \blacksquare + 5 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6 + 6$$

verificamos la tabla del tres y del cinco.

b) Equipo 13

Figura 13. Lógica de Error 2, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética

Por otro lado, siete respuestas (manifestadas por EQ2, EQ6, EQ9, EQ11, EQ12) presentan una lógica de error 3 (LE3), en la que se puede apreciar que el valor de la incógnita no lo considera como un mismo valor, no tiene veracidad en las operaciones aritméticas que realiza y no conserva la equivalencia (Figura 14).

Ejercicio 11
 $3 \times \blacksquare + 5 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6 + 6 = 24$
Por que 3×2 es 6 y 5×6 nos da 11 y $6 + 6 + 6 + 6 = 24$
a) Equipo 2

Ejercicio 12
 $7 + 7 + 7 + 7 = 3 \times \blacksquare + 4 \times \blacksquare$
Por que $7 + 7 + 7 + 7 = 28$ y $3 \times 15 + 4 \times 5$
b) Equipo 11

Figura 14. Lógica de Error 3, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética

Para una lógica de error 5 (LE5), dentro de este nivel se encuentran 1 respuesta (de EQ10), el cual consiste en realizar operaciones aritméticas con los valores presentes en la equivalencia y los resultados encontrados lo presenta en una igualdad, misma que no existe (Figura 15).

Ejercicio 11
 $3 \times \blacksquare + 5 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6 + 6$
Porque $3 \times 2 = 5 \times 2 = 6$

Figura 15. Lógica de Error 5, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética

Dos respuestas (proporcionadas por EQ4) presenta una lógica de error 6 (LE6) en la cual realiza todas las operaciones aritméticas indicadas del lado derecho, y el resultado será el valor de la incógnita, misma que se encuentra del lado izquierdo (Figura 16).

$3 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6$ <p>Porque son 6+6+6 y medio 18</p>
<p>Ejercicio 11</p> $3 \times \blacksquare + 5 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6 + 6$ <p>Porque sume $3 \times 2 + 5 \times 1$ y medio 24</p>

Figura 16. Lógica de Error 6, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética

Existen dos respuestas de EQ1 que, aunque a la incógnita no la consideran con un mismo valor, se hace evidente que intentan conservar la equivalencia (LE7), evidencia de esto se observa en la Figura 17.

<p>Ejercicio 12</p> $7 + 7 + 7 + 7 = 3 \times \blacksquare + 4 \times \blacksquare$ <p>$7+7+7+7=28$ y $3 \times 1 + 4 \times 7 = 28$</p>

Figura 17. Lógica de Error 7, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética

Dentro de la clasificación LE9 (Figura 18), se encuentran diversas lógicas, que dentro del nivel de algebrización 2 se hicieron presentes varios casos:

- *Caso 1.* El número que aparece del otro lado de la equivalencia es el valor de la incógnita, dos reactivos presentan esta lógica (EQ5)
- *Caso 2.* Donde sólo toma en cuenta la operación continua al signo igual del lado izquierdo y resuelve todas las operaciones del lado derecho; además de que agrega números para hacer verdadera su equivalencia, un reactivo presenta esta lógica (EQ8).

- *Caso 3.* Realiza las operaciones del lado izquierdo, y sólo toma en cuenta la operación inmediata del lado derecho, aunque su respuesta sólo la aproxima al resultado, un reactivo presenta esta lógica. (EQ8).
- *Caso 4.* No consideran que los términos se multiplican, solo considera que se suman entre sí; sin embargo, al realizar sus operaciones conserva la equivalencia, un reactivo (EQ8).
- *Caso 5.* Consideran todos los números implicados en la equivalencia, realiza operaciones aritméticas conocidas y el resultado obtenido lo considera como el valor de la incógnita, un reactivo (EQ4).
- *Caso 6.* Realizan la operación del lado izquierdo y el resultado es el que coloca en las incógnitas, un reactivo (EQ4).

Ejercicio 11
 $3 \times 6 + 5 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6$
 sumando y multiplicando
 Caso 1

Ejercicio 12
 $7 + 7 + 7 + 7 = 3 \times 9 + 4 \times 9$
 sumando el 7 y multiplicando 3y4x9
 Caso 3

Ejercicio 10
 $5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times 9$
 Porque sume 5+5+5+5 y medio 21
 Caso 5

Ejercicio 11
 $3 \times 8 + 5 \times 8 = 6 + 6 + 6 + 6$
 Por que 3x8+5x8=6+6+6+6
 Caso 2

Ejercicio 12
 $7 + 7 + 7 + 7 = 3 \times 8 + 4 \times 8$
 Porque sume 7+7+7+7 y medio 23
 Caso 4

Ejercicio 11
 $3 \times 8 + 5 \times 8 = 6 + 6 + 6 + 6$
 Por que 3x8+5x8=6+6+6+6
 Caso 6

Figura 18. Lógica de Error 7, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética

Para las justificaciones empleadas en las 52 equivalencias del nivel de algebrización 2, 41 fueron justificadas mediante operaciones aritméticas (J1) independientemente si estas operaciones fueran correctas o no, 11 expresiones no fueron justificadas (J2). Se presenta un ejemplo en la Figura 19.

Ejercicio 10

$$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times \boxed{5}$$

$$5+5+5+5=20 \times 4 \times 5=20$$

Figura 19. Justificación J1, Nivel 2 De Algebrización, Representación Aritmética

Nivel de algebrización 3

Al analizar las equivalencias de la 13 a la 16, es decir, un total de 52 respuestas, 17 de estas no fueron contestados, 31 tuvieron un error evidente y de 4 respuestas que fueron correctas. Por otro lado, 3 de ellas (expuestas por EQ2, EQ11, EQ12) no fueron justificadas o no se justificaron correctamente por lo que se encuentran clasificados con una lógica de error 4 (LE4). Evidencia de esto se refleja en la Figura 20.

Ejercicio 13

$$7 \times \boxed{1} + 2 = 3 \times \boxed{1} + 2 + 4 = 7$$

Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

Por que 7×1 es 2 y nos da 3 y multiplicamos 3×1 y luego sumamos $1+2+4=7$

a) Equipo 2

Ejercicio 15

$$3 \times \boxed{3} + 5 = 2 \times \boxed{3} + 5 + 3$$

Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

b) Equipo 12

Figura 20. Lógica de Error 4, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética

De las 31 respuestas que tuvieron un error evidente, 1 de ellas manifestada por EQ2 tiene una lógica de error 1 (LE1), donde se puede observar que el resultado de las operaciones realizadas del lado izquierdo sólo es el primer número u operación que aparece del lado derecho de la equivalencia (Figura 21).

$5 \times \boxed{3} - 3 = 4 \times \boxed{3} + 5 = 7$

Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

Porque 5×3 le quitamos 3 = $4 \times 3 + 5 = 7$

Figura 21. Lógica de Error 1, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética

Dentro de la lógica de error 5 (LE5), se encuentran dos respuestas de EQ2, en las que se realizan operaciones aritméticas y se igualan, aunque esta igualdad no exista (Figura 22).

Ejercicio 16

$9 \times \boxed{1} - 6 = 8 \times \boxed{1} + 7 = 8$

Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

Porque 9×1 le quitamos 6 nos da 8. $\times 1 + 7 = 8$

Figura 22. Lógica de Error 5, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética

El equipo EQ4, manifestó 2 respuesta que presentan una lógica de error 8 (LE8), es decir, realizan operaciones entre los números continuos al signo igual, y ese resultado es el que coloca en las incógnitas (Figura 23).

Ejercicio 13

$7 \times \boxed{5} + 2 = 3 \times \boxed{5} + 2 + 4$

Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

Porque some y medio 5

Figura 23. Lógica de Error 8, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética

En este nivel de algebrización, se tuvieron 23 respuestas en las cuales no se encontraron lógica a las respuestas presentadas (LE2), ejemplo de ello se observa en la Figura 24.

Ejercicio 13
 $7 \times \square + 2 = 3 \times \square + 2 + 4$ Por que 7×7 es 49
 Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

a) Equipo 5

Ejercicio 14
 $5 \times \square - 3 = 4 \times \square + 5$
 Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.
 Porque multiplicamos el 5 y de hay sacamos el otro

b) Equipo 7

Ejercicio 15
 $3 \times \square + 5 = 2 \times \square + 5 + 3$
 Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

c) Equipo 6

Ejercicio 16
 $9 \times \square - 6 = 8 \times \square + 7$
 Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

d) Equipo 10

Figura 24. Lógica de Error 2, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética

Tres respuestas (expuestas por EQ9, EQ11) tuvieron una lógica de error 3 (LE3), donde no se considera la incógnita con un mismo valor, no toma relevancia en el orden de las operaciones y además no relaciona la equivalencia (Figura 25)

Ejercicio 14
 $5 \times \square - 3 = 4 \times \square + 5$
 Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.
 Por que estan dificil de responder

Figura 25. Lógica de Error 3, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética

Las justificaciones que fueron empleadas en las 52 respuestas analizadas en este nivel, 16 presentaron una justificación aritmética (J1), no se considera si la operación es correcta o no; mientras que 36 respuestas no fueron justificadas (J2). Ejemplos de ellos se observan en la Figura 26.

<p>Ejercicio 16</p> $9 \times \square - 6 = 8 \times \square + 7$ <p>Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.</p> <p>porque some y me dio 1</p> <p>a) Equipo 4 (J1)</p>	<p>Ejercicio 15</p> $3 \times \square + 5 = 2 \times \square + 5 + 3$ <p>Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.</p> <p>c) Equipo 8 (J2)</p>
---	---

Figura 26. Justificaciones, Nivel 3 De Algebrización, Representación Aritmética

De acuerdo con el análisis tanto de los errores como de las justificaciones para cada reactivo de la representación aritmética, se pudo dar una clasificación al nivel de algebrización alcanzado en cada equivalencia propuesta, tal como se presenta en el siguiente apartado.

5.2.2. NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN. REPRESENTACIÓN ARITMÉTICA

Tomando en cuenta la forma en que fue resuelto cada tarea propuesta, y la forma de justificarlo, se pudo detectar el nivel de algebrización alcanzado en cada una de ellas (Tabla 11).

Las consideraciones que se tomaron en cuenta en cada nivel de algebrización fueron las siguientes:

- Nivel de algebrización 0, los alumnos sólo son capaces de detectar operaciones aritméticas y realizarlas.
- Nivel de algebrización 1, los alumnos evidenciaban el concepto de equivalencia, no era necesario operar con la incógnita.
- Nivel de algebrización 2, los alumnos evidenciaban el concepto de equivalencia, además de que operaban con la incógnita de un solo lado de la equivalencia.
- Nivel de algebrización 3, los alumnos evidenciaban el concepto de equivalencia, y eran capaces de operar con la incógnita de ambos lados de la equivalencia.
- Indeterminado (INDET), No se asigna un nivel ya que no se contestó el ejercicio.

En la tabla 11 se observa el nivel de algebrización asignado a cada respuesta de cada grupo de estudiantes:

Tabla 11. Asignación de Niveles de Algebrización, Representación Aritmética

EJERCICIO	NIVEL ESPERADO	NIVEL ALCANZADO												
		EQUIPO 1	EQUIPO 2	EQUIPO 3	EQUIPO 4	EQUIPO 5	EQUIPO 6	EQUIPO 7	EQUIPO 8	EQUIPO 9	EQUIPO 10	EQUIPO 11	EQUIPO 12	EQUIPO 13
1	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0
2	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0
3	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0
4	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0
5	NIVEL 1	NIVEL 1	NIVEL 1	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 1	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 1
6	NIVEL 1	NIVEL 1	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 0				
7	NIVEL 1	NIVEL 1	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 0								
8	NIVEL 1	NIVEL 1	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 0
9	NIVEL 2	NIVEL 2	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 2	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 2	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 2	NIVEL 0
10	NIVEL 2	NIVEL 2	NIVEL 1	NIVEL 1	NIVEL 0	NIVEL 2	NIVEL 2	NIVEL 2	NIVEL 2					
11	NIVEL 2	NIVEL 1	NIVEL 0	INDET	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 0						
12	NIVEL 2	NIVEL 1	NIVEL 0	INDET	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0						
13	NIVEL 3	INDET	NIVEL 0	INDET	NIVEL 0	NIVEL 0	INDET	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	INDET
14	NIVEL 3	INDET	NIVEL 0	INDET	NIVEL 0	NIVEL 0	INDET	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	NIVEL 0	INDET
15	NIVEL 3	INDET	NIVEL 0	INDET	NIVEL 0	INDET	INDET	INDET						
16	NIVEL 3	INDET	NIVEL 0	INDET	NIVEL 0	INDET	INDET	INDET						

De acuerdo con la Tabla 11, se puede concluir que, del total de las 208 respuestas analizadas, 172 de ellas fueron clasificadas con un nivel 0 de algebrización, 21 con un nivel 1, y 15 con un nivel 2; mientras que en ninguna respuesta se alcanzó un nivel 3 de algebrización.

Enseguida se muestran ejemplos de las diferentes situaciones presentadas, dichas situaciones se presentarán de acuerdo a los ejercicios para el nivel esperado.

Nivel de algebrización esperado: 0

A continuación, se muestran ejercicios resueltos por los estudiantes, en los cuales los ejercicios estaban diseñados para evidenciar un nivel de algebrización 0, en la figura 27, se logra observar el uso de operaciones aritméticas al contestar ejercicios del 1 al 4, mismos que fueron contestados correctamente.

Ejercicio 1
 $5 + 3 - 3 = 5$
 Por que 8-3 son 5
 a) Equipo 9

Ejercicio 2
 $4 + 9 = 13$ Porque 4+9 es igual a 13
 b) Equipo 5

Ejercicio 3
 $4 = 7 - 3$
 Restamos 7 menos 3 nos da 4
 c) Equipo 12

Ejercicio 4
 $9 = 3 + 3 + 3$
 Por que tres más tres más tres nos da nueve
 d) Equipo 13

Figura 27. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 0, Obteniendo Nivel 0

En los ejemplos anteriores los niños no presentan dificultad con el significado operacional del signo igual, es decir, son capaces de sumar para obtener un solo valor.

Nivel de algebrización esperado: 1

De acuerdo al diseño de las actividades, las equivalencias de la 5 a la 8 se esperaban que se evidenciara por parte de los estudiantes el uso del concepto de equivalencia, mismo que fue observado sólo en 16 respuestas de un total de 52 respuestas evaluadas. En la Figura 28 se presentan respuestas en las que se alcanza el nivel de algebrización 1; es decir, los estudiantes son capaces de conservar la equivalencia en el ejercicio presentado.

The image shows four handwritten student solutions for algebraic exercises:

- Ejercicio 5:** $\square + 5 = 5 + 2$. Handwritten note: "por que 2+5 da 7 y 5+2 da 7".
- Ejercicio 6:** $8 + 7 = \square + 8 + 2$. Handwritten note: "Porque 8+7=15 y tenemos 8+2+5 da igual a 15".
- Ejercicio 7:** $10 - \square = 8 - 3$. Handwritten note: "Tenemos que restar 10-5".
- Ejercicio 8:** $10 + 10 - \square = 10 + 5$. Handwritten note: "Por 10 + 5 = 15".

Labels for each exercise are: a) Equipo 8, b) Equipo 5, c) Equipo 12, d) Equipo 1.

Figura 28. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 1, Obteniendo Nivel 1

Específicamente en la respuesta de la equivalencia 5, por el equipo 5, se pone en evidencia que los estudiantes son capaces de observar la propiedad de conmutatividad en la suma y no fue necesario para ellos llevar a cabo una operación aritmética para resolver la equivalencia. (Figura 29)

The image shows a handwritten student solution for Ejercicio 5: $\square + 5 = 5 + 2$. The student's explanation is: "Porque vimos en la suma de a lado y vimos que era así".

Figura 29. Observación Propiedad Conmutativa en Nivel De Algebrización 1

De las 36 respuestas restantes se puede observar que los estudiantes realizan operaciones aritméticas conocidas, sin embargo, no son capaces de conservar la equivalencia presentada, en la Figura 30 se presentan ejemplos de ello.

Ejercicio 5

$$\blacksquare + 5 = 5 + 2$$

Porque se suma.

a) Equipo 10

Ejercicio 6

$$8 + 7 = \blacksquare + 8 + 2 = 25$$

Porque $8+7$ nos da $15+8+2$ y $15+8$ nos da 23 y $23+2=25$

b) Equipo 2

Ejercicio 7

$$10 - \blacksquare = 8 - 3$$

restando 10 menos 2 nos da 8

c) Equipo 6

Ejercicio 8

$$10 + 10 - \blacksquare = 10 + 5 = 10$$

Porque $10+10=20-10=10+5=10$

d) Equipo 11

Figura 30. Ejemplos donde no emerge el concepto equivalencia

También, en los ejemplos anteriores se observa el significado operacional del signo igual, es decir, los niños conciben únicamente al primer valor del lado derecho del signo igual como el resultado, descartando los demás valores. Resuelven la expresión de la misma manera que lo han realizado en la figura 27.

Nivel de algebrización esperado: 2

Las expresiones de la 9 a la 12, se esperaba que los estudiantes lograran conservar la equivalencia además de que pudieran operar con la incógnita presentada; esto se pudo observar en solamente 15 respuestas de un total de 52 respuestas evaluadas. En estos casos, los estudiantes no realizan las operaciones indicadas, sino que recurren a otras estrategias para encontrar el valor que hace falta considerando ambos lados de la expresión.

A continuación, se presentan algunas respuestas obtenidas de parte de los estudiantes en las cuales se obtuvo el nivel de algebrización 2 (Figura 31).

Ejercicio 9

$$3 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6$$

Multiplicando $3 \times 6 = 18$

a) Equipo 8

Ejercicio 10

$$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times \blacksquare$$

verificamos la tabla del cuatro que nos da veinte que es cuatro por cinco

c) Equipo 13

Ejercicio 9

$$3 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6$$

Por que multiplicamos $3 \times 6 = 18$

b) Equipo 5

Ejercicio 10

$$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times \blacksquare$$

$5 + 5 + 5 + 5 = 20$ $4 \times 5 = 20$

d) Equipo 1

Figura 31. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 2

Aunque las 37 respuestas restantes no lograron alcanzar un nivel de algebrización 2, cinco de ellas se catalogaron con un nivel de algebrización 1 ya que los estudiantes conservaron la equivalencia en sus respuestas, en la figura 32 se observa como los estudiantes cambian la operación aritmética (suman no multiplican la incógnita), para que las expresiones en ambos lados del signo igual sean equivalentes. Lo previo se observa en la condición de equivalencia que justifican, en donde se observa que es correcta.

Ejercicio 11

$$3 \times \blacksquare + 5 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6 + 6$$

Por que $3 \times 8 + 5 \times 8 = 6 + 6 + 6 + 6$

Figura 32. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 1

De las 52 respuestas evaluadas en el nivel de algebrización 2, 30 obtuvieron un nivel de algebrización 0, es decir, los estudiantes sólo operaron aritméticamente con los números dados, 2 respuestas no se pudo determinar un nivel de algebrización dado que no fueron

contestados. En la figura 33 se presentan ejemplos de respuestas con un nivel de algebrización 0.

<p>Ejercicio 9</p> $3 \times \square = 6 + 6 + 6$ <p>multiplicando $3 \times 2 = 6$</p> <p>a) Equipo 3</p>	<p>Ejercicio 10</p> $5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times \square$ <p>Porque son 4 de 5 + 5 + 5 + 5 = medio 24</p> <p>b) Equipo 4</p>
<p>Ejercicio 11</p> $3 \times \square + 5 \times \square = 6 + 6 + 6 + 6$ <p>porque multiplicamos y sumamos</p> <p>c) Equipo 5</p>	<p>Ejercicio 12</p> $7 + 7 + 7 + 7 = 3 \times \square + 4 \times \square$ <p>por que usamos la tabla del tres y cuatro</p> <p>d) Equipo 7</p>

Figura 33. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 0

Nivel de algebrización esperado: 3

Dentro de las expresiones propuestas, las últimas cuatro (13-16) fueron diseñadas para que se pudiera observar si los alumnos eran capaces de operar con la incógnita en ambos lados de la equivalencia, lo cual nos detonaría un nivel de algebrización 3, las respuestas evaluadas en los trece equipos nos revelan que los alumnos no logran alcanzar dicho nivel; además de que 17 respuestas no pueden ser evaluadas ya que no fueron contestadas.

En la figura 34 se logra observar con base en las respuestas obtenidas de parte de los alumnos un nivel de algebrización 0 (35 respuestas), lo cual significa que logran realizar operaciones aritméticas conocidas por ellos sin llegar a tener un concepto claro de equivalencia y sin lograr operar con la incógnita en ambos lados de la equivalencia.

<p>Ejercicio 13</p> $7 \times \square + 2 = 3 \times \square + 2 + 4 = 7$ <p>Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.</p> <p>Porque 7×1 es 7 y más 2 y más 4 = 7 3×1 y luego sumamos $7 + 2 + 4 = 7$</p> <p>a) Equipo 2</p>	<p>Ejercicio 14</p> $5 \times \square - 3 = 4 \times \square + 5$ <p>Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.</p> <p>Porque multiplicamos el 5 y de ahí sacamos el otro</p> <p>b) Equipo 9</p>
---	--

Ejercicio 15

$$3 \times \square + 5 = 2 \times \square + 5 + 3$$

Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

Porque 3×3 da 9 y 2×3 da 6

Ejercicio 16

$$9 \times \square - 6 = 8 \times \square + 7$$

Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

1a multiplicamos número anterior

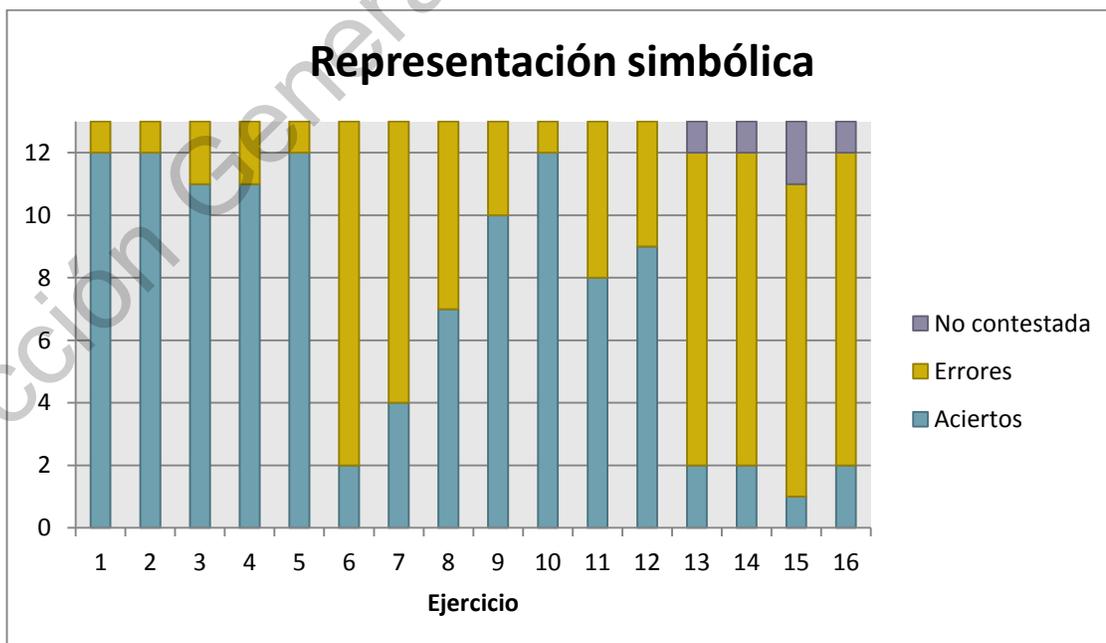
c) Equipo 5
d) Equipo 7

Figura 34. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 0

5.3. ANÁLISIS DE LA SESIÓN 2: REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA

En la segunda sesión de intervención en el aula, se siguió trabajando con los mismos 38 alumnos, integrados en los mismos equipos de trabajo; durante dicha sesión se procedió a contestar las hojas de trabajo en la representación simbólica, es decir, se trabajó con los mismos 16 ejercicios propuestos sólo que ahora en su representación simbólica.

Conforme a las hojas de trabajo contestadas y enmarcado en un análisis cuantitativo de las 208 respuestas evaluadas se obtuvo un 56.25% de aciertos, 41.35% de errores y 2.40% de ejercicios sin contestar. En la siguiente gráfica 5, se puede observar la cantidad de aciertos, errores y equivalencias sin contestar de acuerdo al número de ejercicio.



Gráfica 5. Análisis Cuantitativo de la Representación Simbólica

De acuerdo a las 208 respuestas analizadas, 117 fueron contestados correctamente, 86 respuestas son incorrectas y 5 ejercicios no fueron resueltos. En la siguiente sección se hace una clasificación a los errores cometidos al igual que la lógica estructurada común en las respuestas dadas.

5.3.1. ANÁLISIS DE ERRORES Y JUSTIFICACIONES. REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA

Con base en los errores encontrados en las respuestas analizadas, se logran encontrar similitudes en la lógica presentada al cometer dichos errores, también se toman en cuenta en esta categorización aquellas respuestas que, aunque fueron contestadas de forma correcta no se logra justificar de forma adecuada. En la Tabla 12 se resumen las lógicas de error presentadas y sus frecuencias:

Tabla 12. Lógica de Errores. Representación Simbólica

	Lógica del Error	Frecuencia
LE1.	El resultado de las operaciones realizadas del lado izquierdo sólo es el primer número u operación que aparece del lado derecho de la equivalencia.	21
LE2.	No existe una lógica a seguir de parte de los estudiantes	25
LE3.	No considera la incógnita con un mismo valor, no toma relevancia en el orden de las operaciones. No relaciona la equivalencia	18
LE4.	Aunque contesta de forma correcta, la respuesta no logra justificarla o la justifica de forma incorrecta	9
LE5.	Realiza operaciones aritméticas conocidas y las iguala, aunque no existe dicha igualdad	4
LE6.	No considera la incógnita con un mismo valor, no toma relevancia en el orden de las operaciones. Conserva/intenta conservar el concepto equivalencia.	3
LE7.	Realiza las operaciones correctas para obtener el resultado, sin embargo, no logra dar una respuesta correcta	4
LE8.	Considera los números implicados en la equivalencia, realiza operaciones aritméticas conocidas y el resultado obtenido lo considera como el valor de la incógnita	6
LE9.	Otros	5
	Total de errores (de las 208 respuestas)	95

Las respuestas emitidas de parte de los estudiantes en cada una de las expresiones propuestas, tuvieron justificaciones que pueden ser clasificadas como se puede observar en la siguiente Tabla 13.

Tabla 13. Justificaciones. Representación Simbólica

Justificación		Frecuencia
J1	Se justifica por una operación aritmética	150
J2	No existe una justificación	48
J3	Haciendo uso del concepto equivalencia	7
J4	Agrupación y/o cálculo al tanteo	3
Total		208

A fin de llevar a cabo un análisis más detallado en cada una de las categorizaciones presentadas en las tablas anteriores (lógicas y justificaciones), se presentarán ejemplos de cada categorización de acuerdo al nivel de algebrización esperado en cada uno de los ejercicios propuestos.

Nivel de algebrización 0

Dentro de este nivel de algebrización se encuentran las primeras 4 equivalencias propuestas en la secuencia de hojas de trabajo, para este grupo de expresiones, de las respuestas obtenidas de los trece equipos evaluados se tiene un total de 6 errores mismos que presentan diferentes lógicas de error.

Dos errores presentan una LE4 (EQ1, EQ9), es decir, realizan operaciones correctas sin embargo la respuesta que dan es incorrecta tal como se observa en la Figura 35.

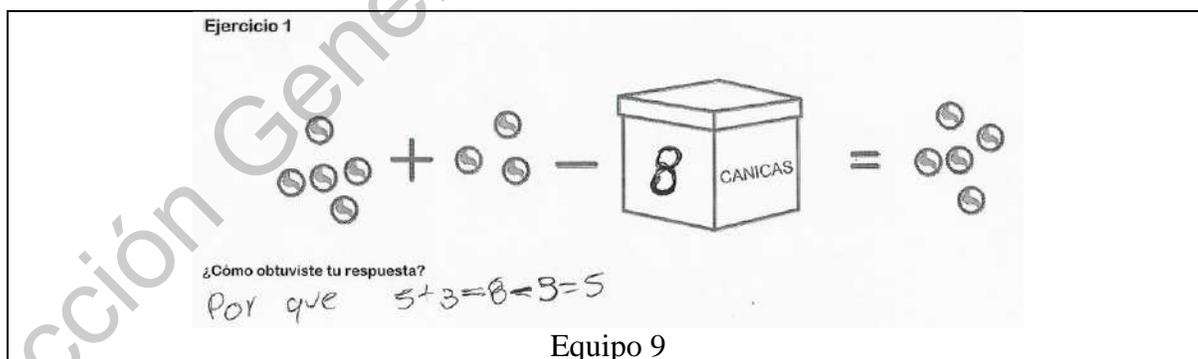


Figura 35. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 0. Representación Simbólica

En un error expuesto en este nivel de algebrización se puede observar una LE5 (EQ4), dado que sólo realiza operaciones entre los componentes de la igualdad y ese es su respuesta (Figura 36). En este sentido, los niños tienen claro que después de la igualdad va un único valor numérico como resultado (significado operacional del signo igual) y en su justificación intentan que los números les proporcione esa respuesta.

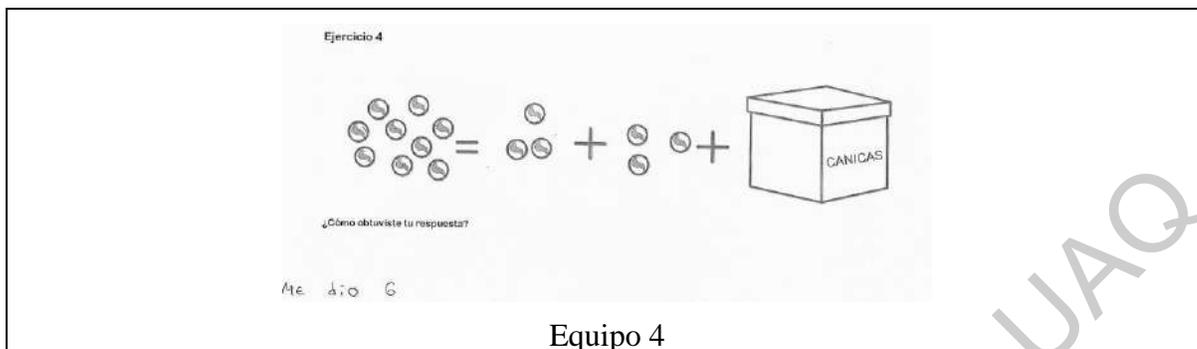


Figura 36. Lógica de Error 5, Nivel De Algebrización 0. Representación Simbólica

Tres de los errores encontrados en este primer grupo de expresiones (nivel de algebrización 0), no tienen una lógica definida por parte de los estudiantes LE2 (EQ4, EQ12) tal como se puede apreciar en la Figura 37.

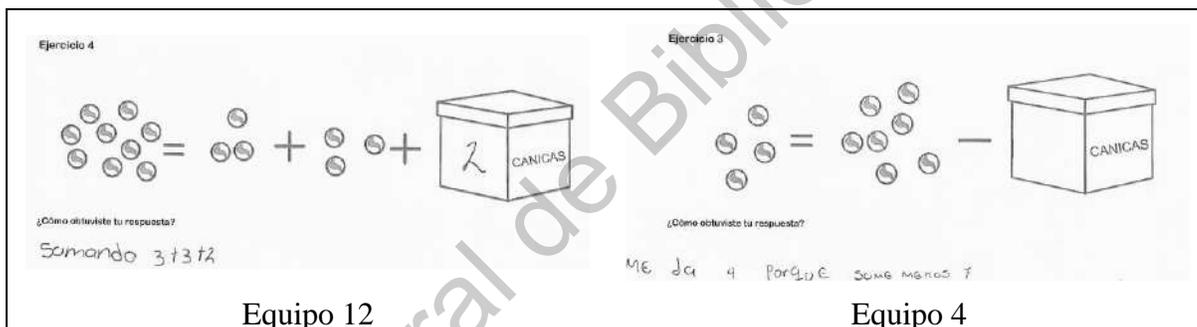
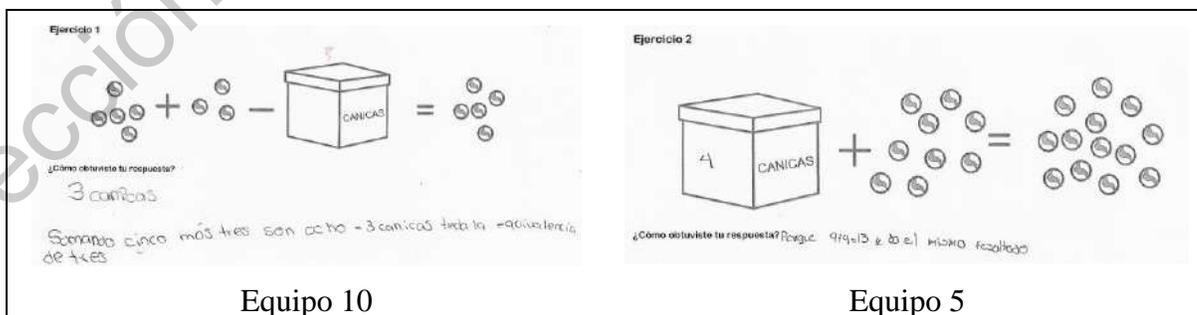


Figura 37. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 0. Representación Simbólica

Por otra parte, las justificaciones empleadas en las respuestas a las equivalencias en este nivel de algebrización en su mayor parte son aritméticas (J1) y sólo un ejercicio no tiene una justificación. En la Figura 38 se ejemplifican las justificaciones obtenidas por parte de los estudiantes.



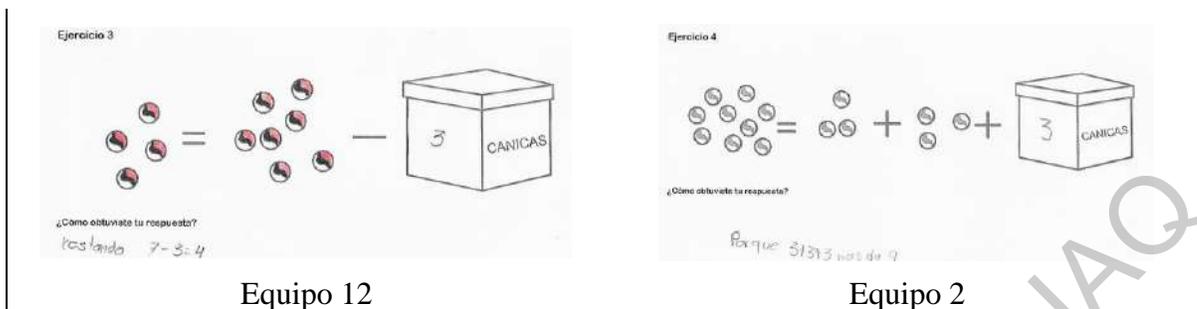


Figura 38. Justificación Aritmética, Nivel 0. Representación Simbólica

Nivel de algebrización 1

Para llevar a cabo el análisis de este nivel de algebrización se tomaron en cuenta las respuestas obtenidas por parte de los estudiantes en el grupo de ejercicios del 5 al 8, de las cuales 30 respuestas las cuales fueron contestadas de manera incorrecta o no se lograron justificar de forma correcta, tal como se señala a continuación:

Se tienen 3 respuestas (EQ1, EQ4, EQ10) que fueron contestadas correctamente, sin embargo, no se tiene una justificación o no se tiene una justificación correcta, es decir, siguen una lógica de error 4 (Figura 39)

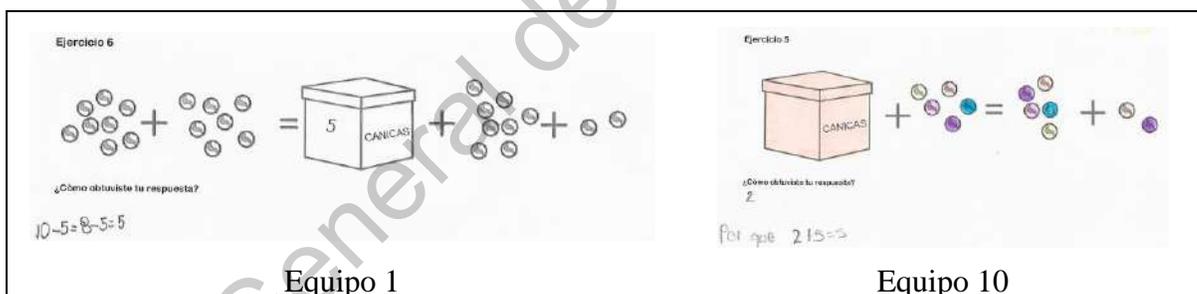


Figura 39. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 1. Representación Simbólica

Siguiendo una lógica de error 8 (LE8) se tienen tres respuestas (EQ2, EQ7, EQ12), esto es los estudiantes operan aritméticamente con los números involucrados en la equivalencia y el resultado de dichas operaciones es su respuesta (Figura 40).

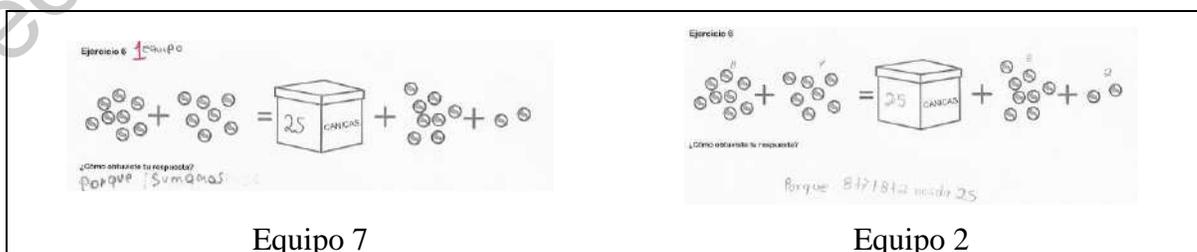


Figura 40. Lógica de Error 8, Nivel De Algebrización 1. Representación Simbólica

Dos respuestas se encuentran clasificadas con una lógica de error LE9, específicamente aquí se evidencia como los estudiantes sólo realizan operaciones con un solo lado de la equivalencia y sin importar la posición del signo igual (Figura 41)

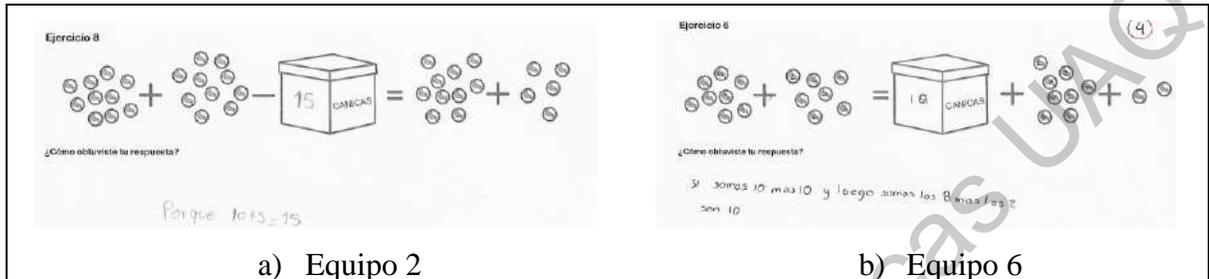


Figura 41. Lógica de Error 9, Nivel De Algebrización 1. Representación Simbólica

En su mayoría los errores encontrados en este nivel de algebrización siguen una lógica de error LE1, es decir, el resultado de las operaciones realizadas del lado izquierdo sólo es el primer número u operación que aparece del lado derecho de la equivalencia, tal como se hace presente en la siguiente Figura 42.

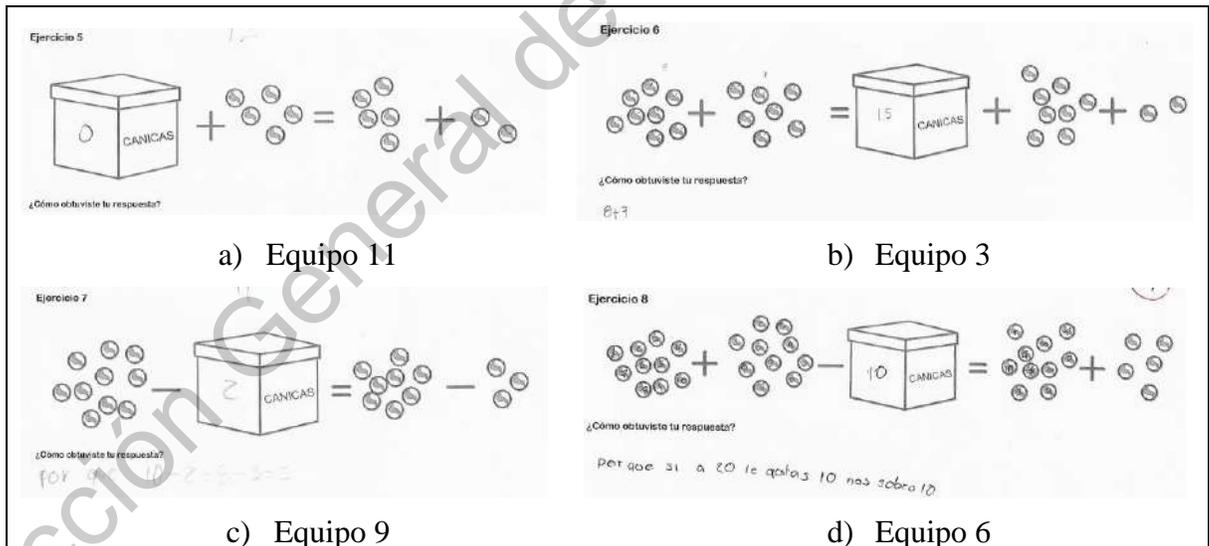


Figura 42. Lógica de Error 1, Nivel De Algebrización 1. Representación Simbólica

Una respuesta fue catalogada con una lógica de error 5 (LE5), es decir, los estudiantes realizaron operaciones aritméticas conocidas y las igualan, aunque no existe dicha igualdad (Figura 43)

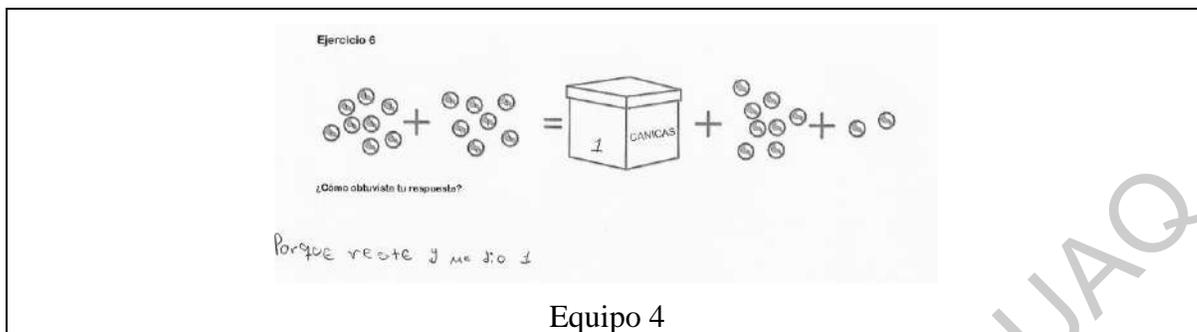


Figura 43. Lógica de Error 5, Nivel De Algebrización 1. Representación Simbólica

Tres respuestas no se encuentra un criterio mediante el cual los estudiantes basaron su afirmación por lo que fueron clasificados con una lógica de error 2 (LE2), tal como se muestra en la Figura 44.

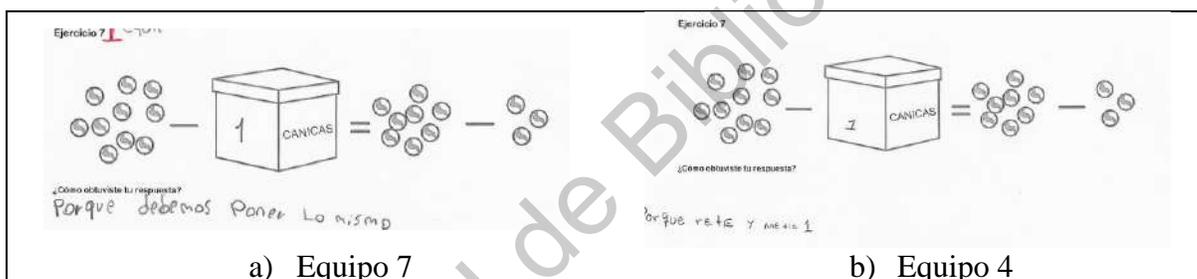
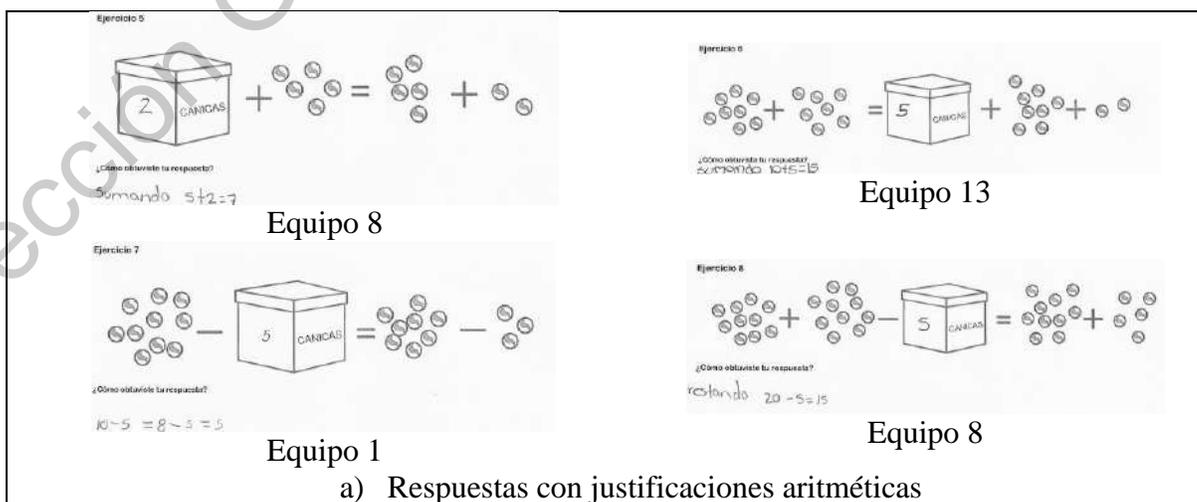


Figura 44. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 1. Representación Simbólica

En cuanto a las justificaciones empleadas en las 52 respuestas de este nivel de algebrización, 41 refieren a justificaciones aritméticas; 9 respuestas no se justificaron y solamente dos respuestas usaron la equivalencia para confirmar su respuesta (Figura 45)



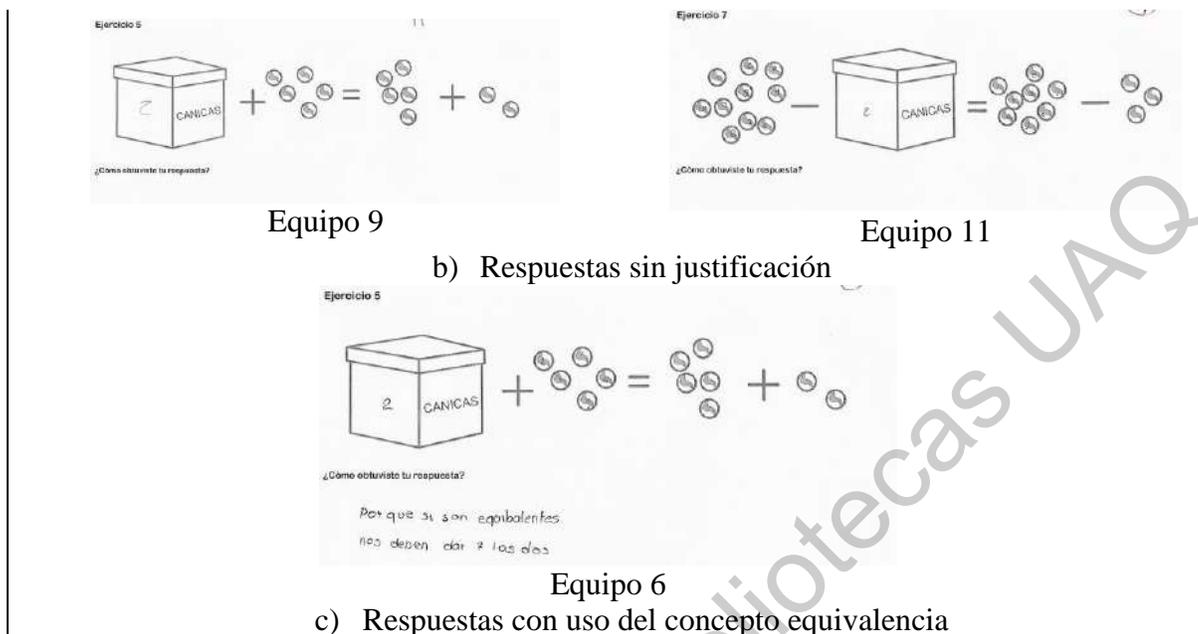


Figura 45. Justificaciones a respuestas del Nivel de Algebrización 1

Nivel de algebrización 2

Las equivalencias a evaluar como un nivel de algebrización 2, son los ejercicios del 9 al 12, de los cuales 13 respuestas fueron incorrectas y 5 respuestas, aunque fueron contestadas de manera correcta, no lograron ser justificadas. A continuación, se presenta en la figura 46 las respuestas con una lógica de error LE4, es decir, contestadas correctamente sin lograrse justificar.

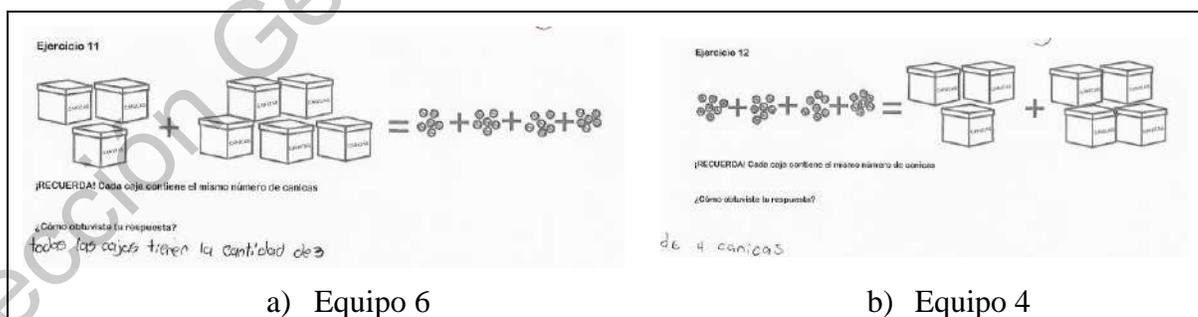


Figura 46. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 2. Representación Simbólica

La mayoría de los errores cometidos en este nivel de algebrización (siete errores) no cuentan con una lógica en su justificación por lo que fueron clasificados con una LE2 (Figura 47)

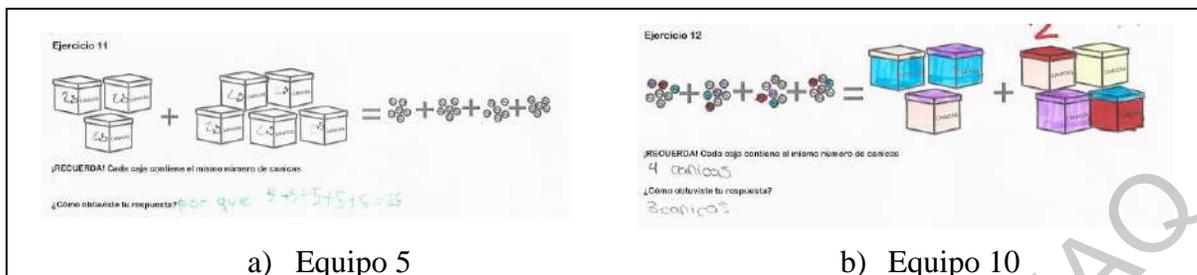


Figura 47. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 2. Representación Simbólica

Dentro del margen de una lógica de error 1 (LE1), se encuentran dos respuestas, dentro de estas respuestas se evidencia que para los estudiantes el resultado de las operaciones realizadas del lado izquierdo sólo es el primer número u operación que aparece del lado derecho de la equivalencia (Figura 48)

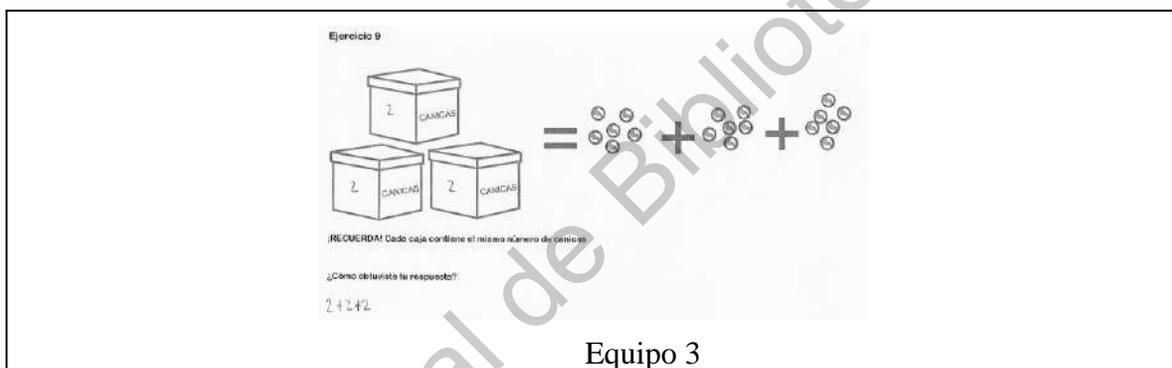


Figura 48. Lógica de Error 1, Nivel De Algebrización 2. Representación Simbólica

En dos respuestas se logra observar que los estudiantes llevaron a cabo las operaciones correctas para obtener el resultado, sin embargo, no lograron dar una respuesta correcta. Estas mismas respuestas están catalogadas con una lógica de error LE7, tal como se aprecia en la Figura 49.

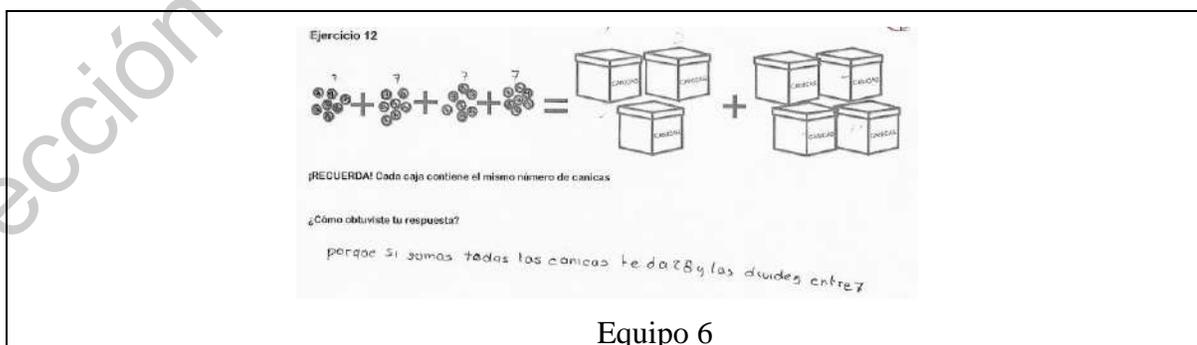


Figura 49. Lógica de Error 7, Nivel De Algebrización 2. Representación Simbólica

Los dos últimos errores encontrados se encuentran en la clasificación de una lógica de error LE9, específicamente en estas dos respuestas, los estudiantes no logran determinar de forma adecuada la operación a realizar para obtener el resultado correcto, aunque involucren cantidades correctas (Figura 50)

Ejercicio 9

¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de camisas.

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Porque dividimos 18:6

Equipo 2

Figura 50. Lógica de Error 9, Nivel De Algebrización 2. Representación Simbólica

Dentro de las respuestas analizadas en este nivel de algebrización, la mayor parte de las justificaciones fueron aritméticas (36 respuestas), 2 respuestas utilizan la agrupación como justificación, 8 respuestas no tienen una justificación y 6 respuestas muestran un uso del concepto de equivalencia (Figura 51).

Ejercicio 9

¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de camisas.

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

son 3 cajas y son las camisas de las 3 cajas.

Equipo 13

Ejercicio 10

¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de camisas.

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Por que dividimos las camisas que son

Equipo 11

Ejercicio 11

¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de camisas.

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

por que 5+5+5+5+5=25

Equipo 5

Ejercicio 12

¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de camisas.

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

sumando todas las camisas y dividiendolas entre las 5 cajas

Equipo 13

a) Respuestas con justificaciones aritméticas

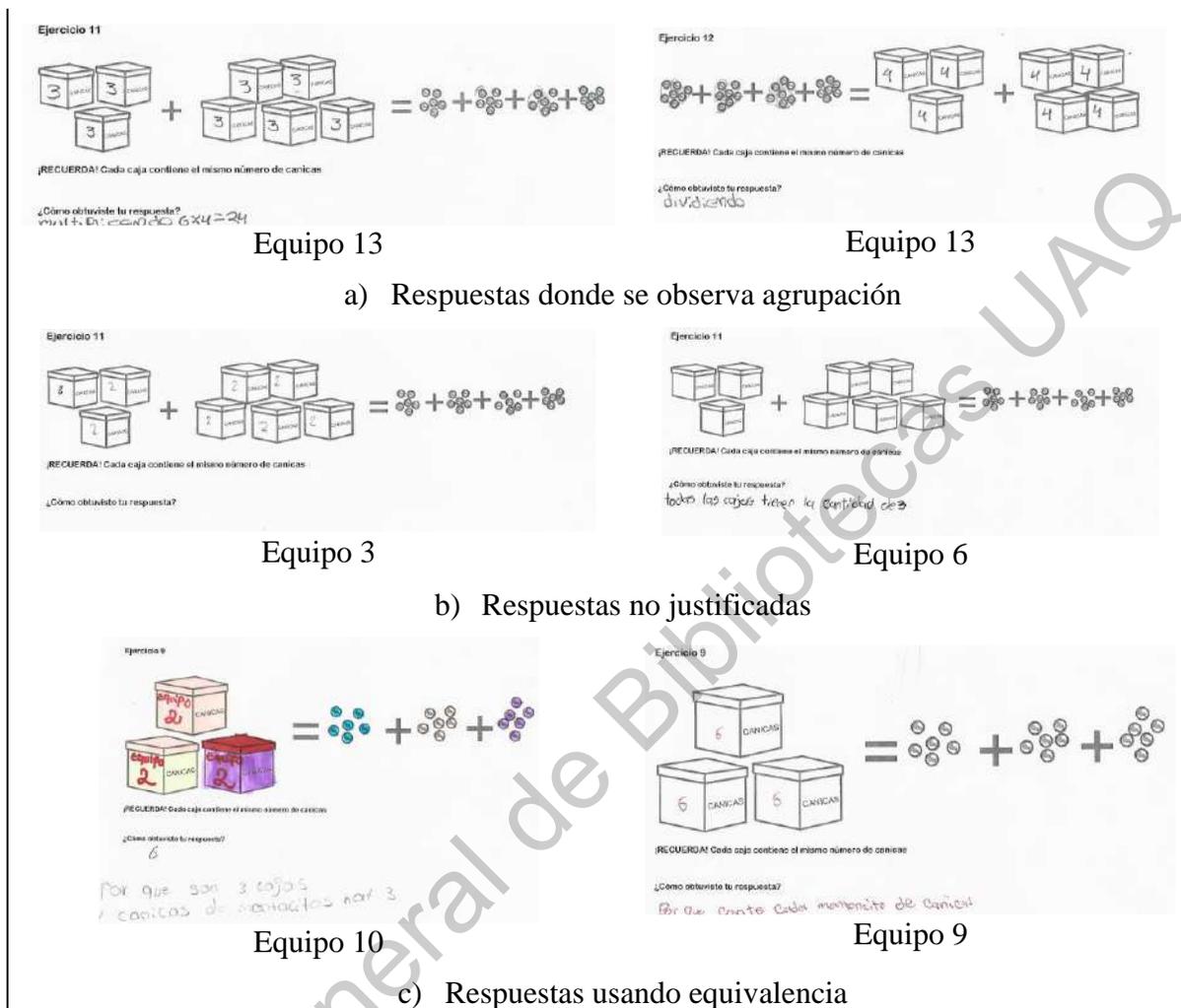


Figura 51. Justificaciones a respuestas usando Nivel de Algebraización 2.

Nivel de algebraización 3

Dentro de este nivel de algebraización se consideran las equivalencias de la 13 a la 16, de las 52 respuestas analizadas se tienen 6 respuestas correctas, 40 respuestas erróneas, 5 no fueron contestadas, 1 contestada correctamente sin justificar. Los ejercicios que no tuvieron respuesta fueron los siguientes: ejercicios 13, 14, 15 y 16 (Equipo 13) y ejercicio 15 (Equipo 9).

A partir de estos resultados procederemos a profundizar en los errores y respuestas no justificadas. De acuerdo a la clasificación en la lógica a seguir por parte de los estudiantes para cometer el error, se hace evidente una respuesta con una LE1 (EQ6), en la cual se considera que el resultado de las operaciones realizadas del lado izquierdo sólo es el primer número u operación que aparece del lado derecho de la equivalencia (Figura 52)

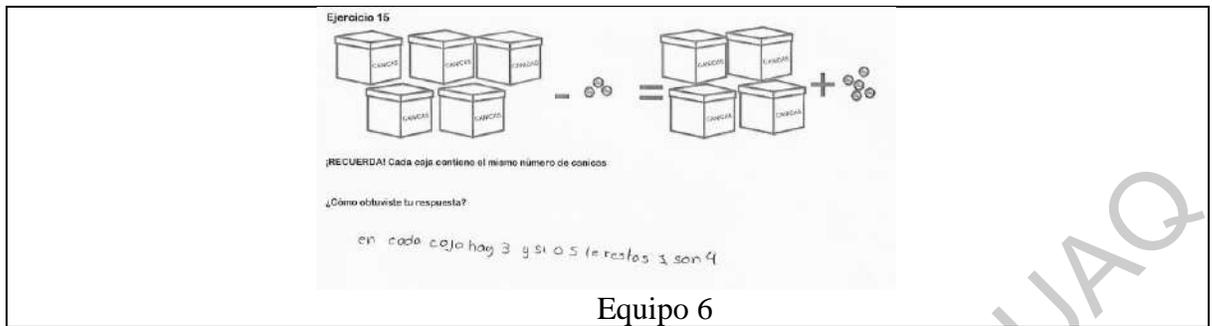


Figura 52. Lógica de Error 1, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica

Dentro de las respuestas erróneas se clasifican 13 respuestas con una lógica de error 2 las cuales se hacen evidentes en respuestas de los equipos EQ3, EQ4, EQ6, EQ7, EQ8, EQ9, EQ10, EQ11; mismo que se caracteriza por no tener una lógica visible. Ejemplos de algunos errores se puede visualizar en la figura 53.

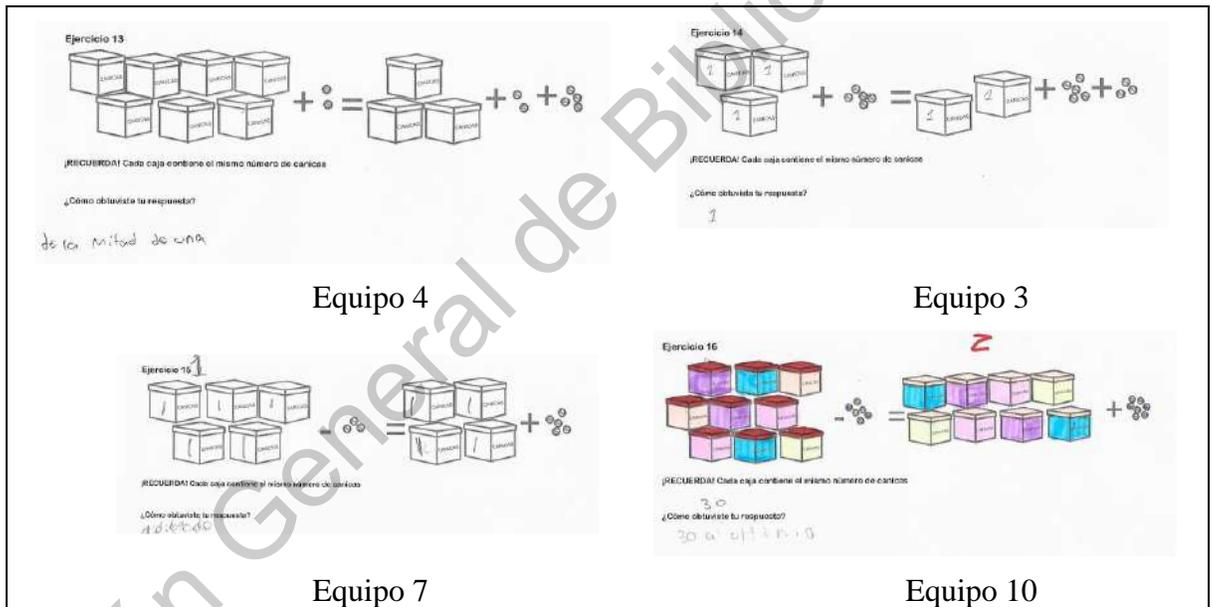


Figura 53. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica

En la clasificación LE3, es decir, errores en los cuales los estudiantes no consideran la incógnita con un mismo valor, no toman relevancia en el orden de las operaciones. Además de que no intentan conservar la equivalencia, se encontraron 14 respuestas (EQ2, EQ5, EQ7, EQ8, EQ9, EQ10, EQ11), que se ejemplifican en la Figura 54.

Ejercicio 13
 ¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.
 ¿Cómo obtuviste tu respuesta?
 Por que solo

Ejercicio 14
 ¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.
 ¿Cómo obtuviste tu respuesta?
 Sumando

Ejercicio 15
 ¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.
 ¿Cómo obtuviste tu respuesta?
 Porque 6 menos 3 nos da 3 + 5 nos da 8

Ejercicio 16
 ¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.
 ¿Cómo obtuviste tu respuesta? Por que solo

Equipo 5 **Equipo 8**

Equipo 2 **Equipo 11**

Figura 54. Lógica de Error 3, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica

Para una LE4, es decir, respuestas que, aunque se contestan de forma correcta, la respuesta no logra justificarla o la justifica de forma incorrecta, se tiene una respuesta en esta clasificación (Figura 55).

Ejercicio 14
 ¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.
 ¿Cómo obtuviste tu respuesta?
 En cada caja hay 3

Equipo 6

Figura 55. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica

Se encontraron dos respuestas (EQ1, EQ2) con una LE5 en las cuales los estudiantes realizan operaciones aritméticas conocidas y las igualan, aunque no existe dicha igualdad (Figura 56).

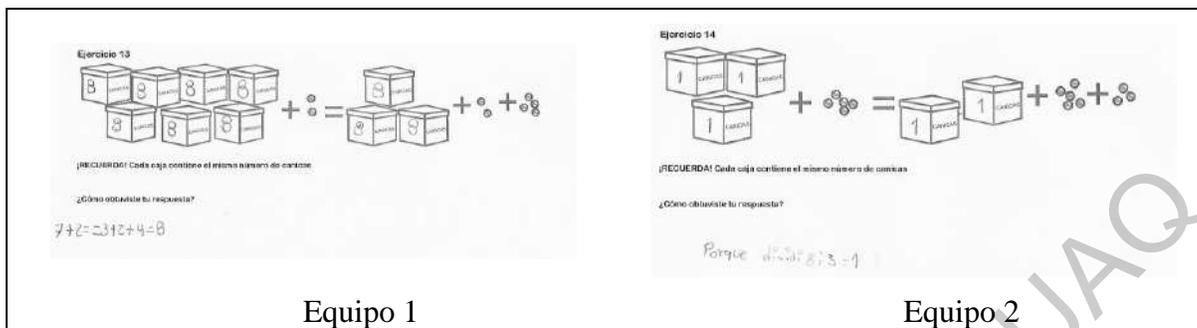


Figura 56. Lógica de Error 5, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica

Tres respuestas siguieron una LE6, es decir, no consideraron la incógnita con un mismo valor, no tomaron relevancia en el orden de las operaciones. Sin embargo, se hizo evidente que se conservó o intentó conservar la equivalencia, se tienen tres respuestas (EQ1, EQ7, EQ11). Algunos ejemplos se aprecian en la Figura 57.

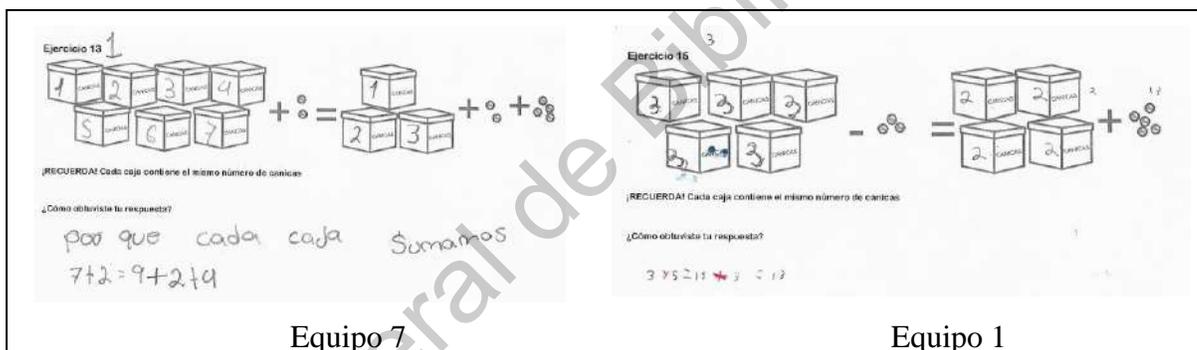


Figura 57. Lógica de Error 6, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica

Por último, dentro de los errores en las respuestas de nivel de algebrización 3, se tienen tres respuestas categorizadas con una LE8, en los cuales se consideran los números implicados en la equivalencia, realiza operaciones aritméticas conocidas y el resultado obtenido lo considera como el valor de la incógnita (Figura 58).

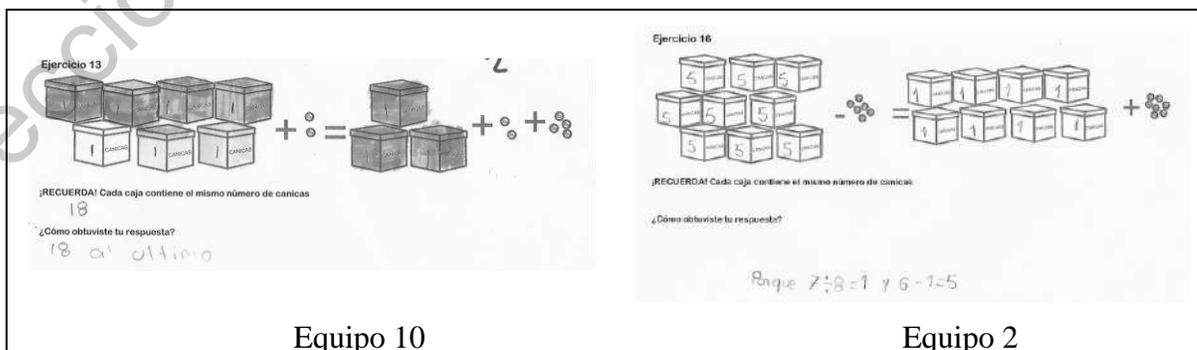


Figura 58. Lógica de Error 8, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica

Dentro de este nivel de algebrización las justificaciones que fueron utilizadas por los estudiantes en su mayoría no existieron, es decir, 30 respuestas no fueron justificadas, 21 fueron justificadas aritméticamente y 1 respuesta fue obtenida por tanteo. Esto se evidencia en la Figura 59.

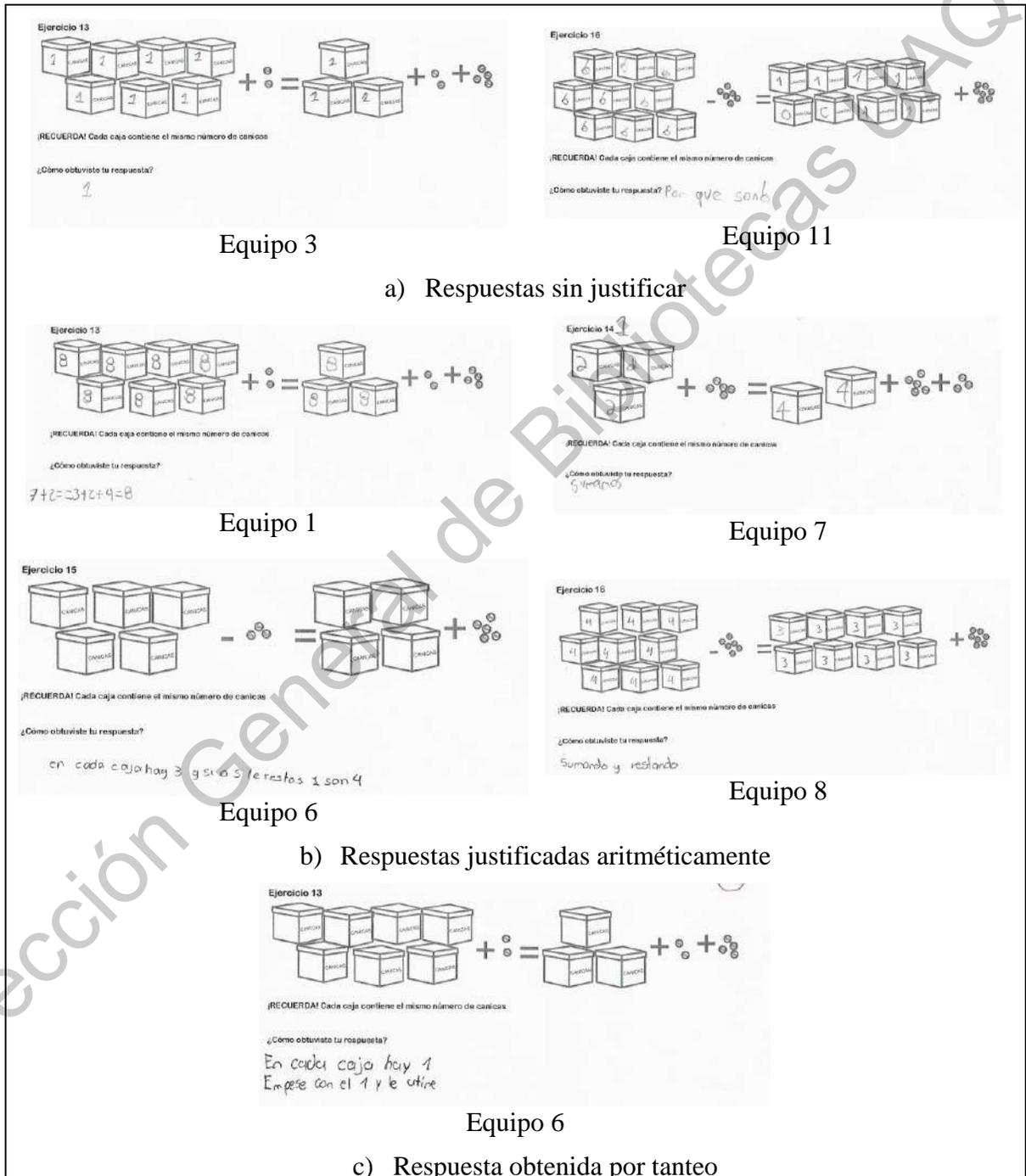


Figura 59. Lógica de Error 8, Nivel De Algebrización 3. Representación Simbólica

Con base en el análisis de estas respuestas, al igual que la forma en la que fueron obtenidas por parte de los estudiantes, se logró obtener una categorización para cada una de estas respuestas. Esta categorización será analizada en el siguiente apartado.

5.3.2. NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN. REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA

De acuerdo a las estrategias observadas en cada respuesta analizada, se llevó a cabo una asignación de nivel de algebrización a cada respuesta obtenida por parte de los estudiantes, tal como se hizo en la sesión 1 se enlistan las consideraciones para asignar cada nivel de algebrización:

- Nivel de algebrización 0, los alumnos sólo son capaces de detectar operaciones aritméticas y realizarlas.
- Nivel de algebrización 1, los alumnos evidenciaban el concepto de equivalencia, no era necesario operar con la incógnita.
- Nivel de algebrización 2, los alumnos evidenciaban el concepto de equivalencia, además de que operaban con la incógnita de un solo lado de la equivalencia.
- Nivel de algebrización 3, los alumnos evidenciaban el concepto de equivalencia, y eran capaces de operar con la incógnita de ambos lados de la equivalencia.
- Indeterminado (INDET), No se asigna un nivel ya que no se contestó el ejercicio.

De acuerdo a la tabla anterior se observa que, de las 208 respuestas analizadas, 135 respuestas se les asignó un nivel 0, 26 respuestas obtuvieron un nivel 1, 42 respuestas alcanzaron un nivel 2, 5 respuestas no se les asignó un nivel debido a que no fueron contestadas. Por otro lado, en ninguna respuesta se obtuvo un nivel 3 de algebrización.

A continuación, se dan algunos ejemplos de acuerdo a los niveles de algebrización esperados.

Nivel de algebrización esperado: 0

De acuerdo al diseño de las actividades los ejercicios propuestos del 1 al 4 se esperaba evidenciar un nivel de algebrización 0, en las respuestas solo se presenta que los estudiantes sean capaces de desarrollar operaciones aritméticas, en las 52 respuestas que tenían que alcanzar un nivel 0 en su totalidad se cumplió el objetivo, se evidencian ejemplos en la figura 60.

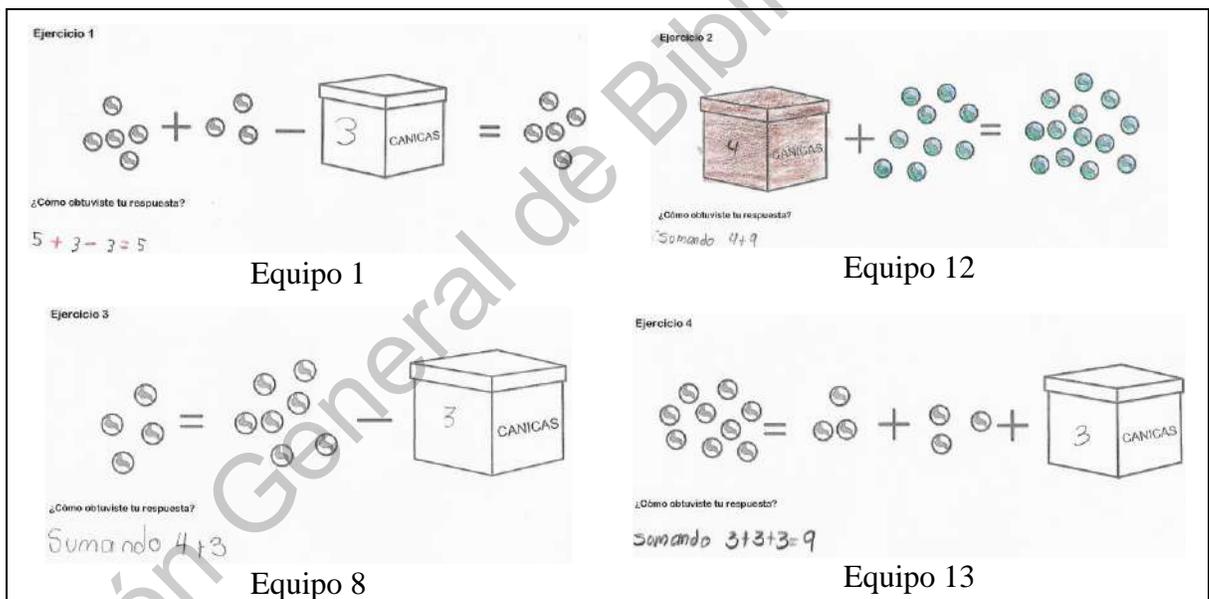


Figura 60. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 0, Obteniendo Nivel 0

Nivel de algebrización esperado: 1

El nivel de algebrización 1 se caracteriza por que el estudiante evidencia su manejo del concepto equivalencia, dentro de estos ejercicios diseñados para que el alumno logre demostrar el manejo de la equivalencia y considerando las 52 respuestas analizadas en este nivel de algebrización, se tienen que, 22 respuestas lograron un nivel de algebrización 1(Figura 61), mientras que 30 respuestas fueron categorizadas con un nivel de algebrización 0 (Figura 62).

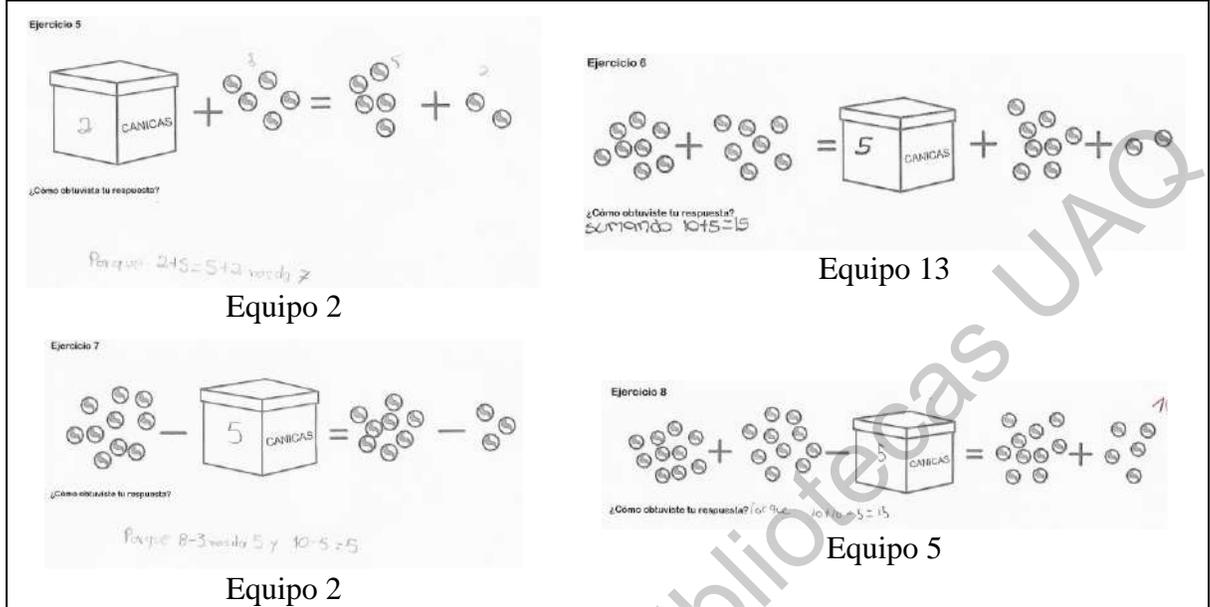


Figura 61. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 1, Obteniendo Nivel 1

La diferencia entre la actividad matemática de los niños que alcanzaron el nivel 1 y los que tuvieron un nivel cero, es la conservación de los valores de las expresiones en ambos lados de la igualdad. El desempeño de los niños que obtuvieron un nivel cero interpreta al signo igual como un símbolo que proporciona un único resultado.

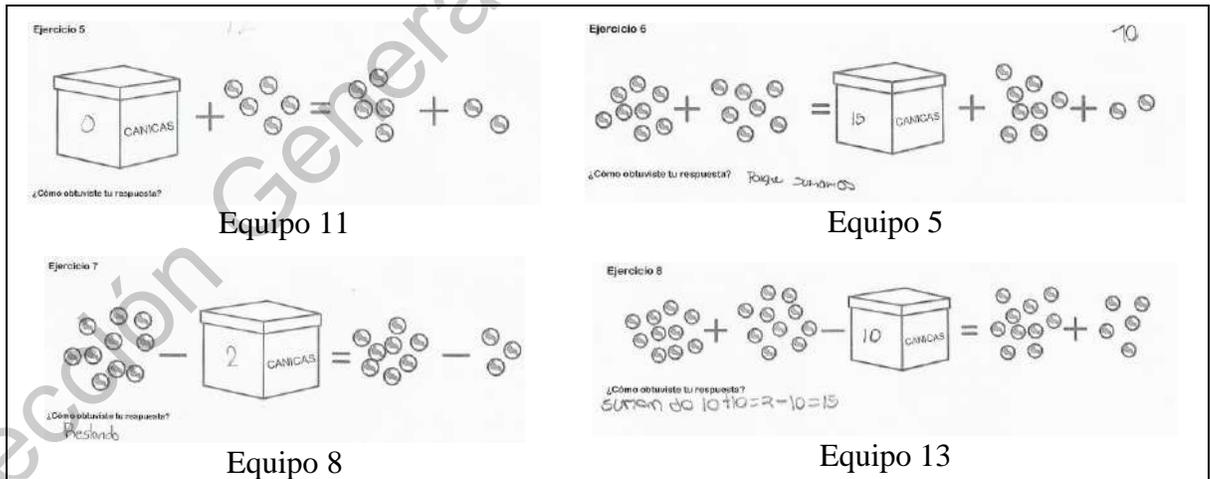


Figura 62. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 1, Obteniendo Nivel 0

Nivel de algebrización esperado: 2

En los ejercicios propuestos del 9 al 12 se diseñaron para que el alumno sea capaz de evidenciar un nivel de algebrización 2. En dicho nivel el estudiante debe ser capaz de

conocer la equivalencia además de que debe operar con la incógnita de un solo lado de la equivalencia. En la representación simbólica de las 52 respuestas obtenidas de parte de los estudiantes 35 respuestas fueron clasificadas con un nivel de algebrización 2 (Figura 63); 16 con un nivel de algebrización 0, es decir, solo operan aritméticamente, sin embargo, no respetan el concepto de equivalencia ni operan con la incógnita (Figura 64). Solo una respuesta fue categorizada con un nivel de algebrización 1, en esta respuesta los estudiantes evidencian el manejo del concepto equivalencia, sin embargo, no terminan por operar con la incógnita (Figura 65).

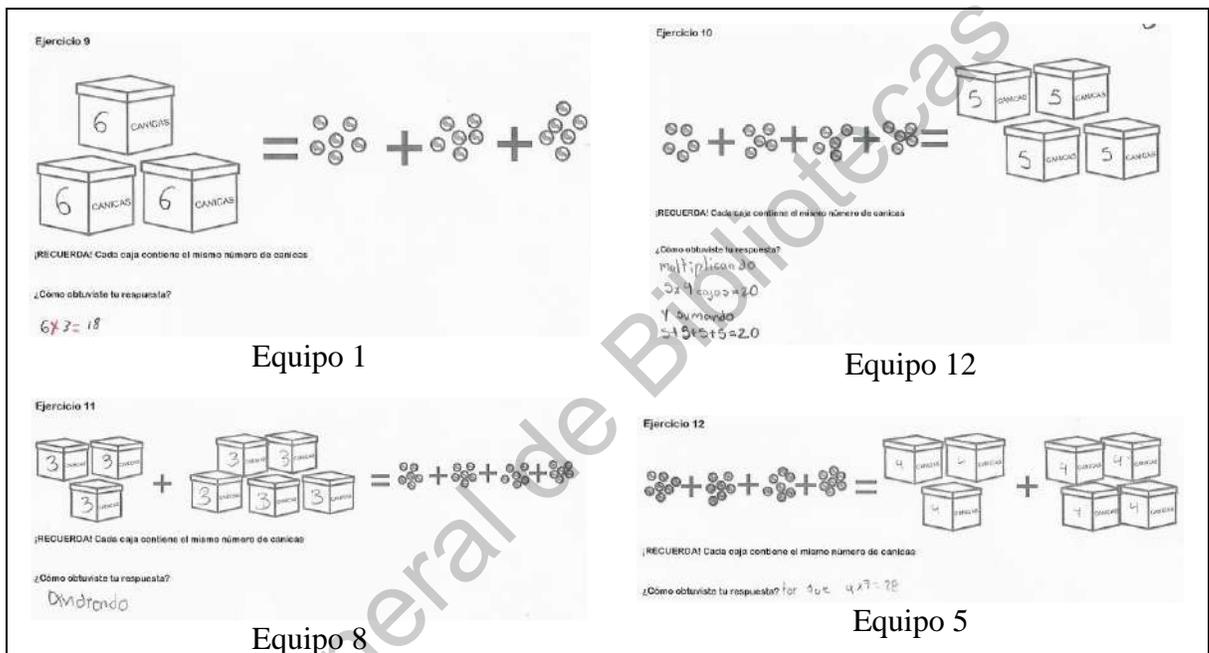
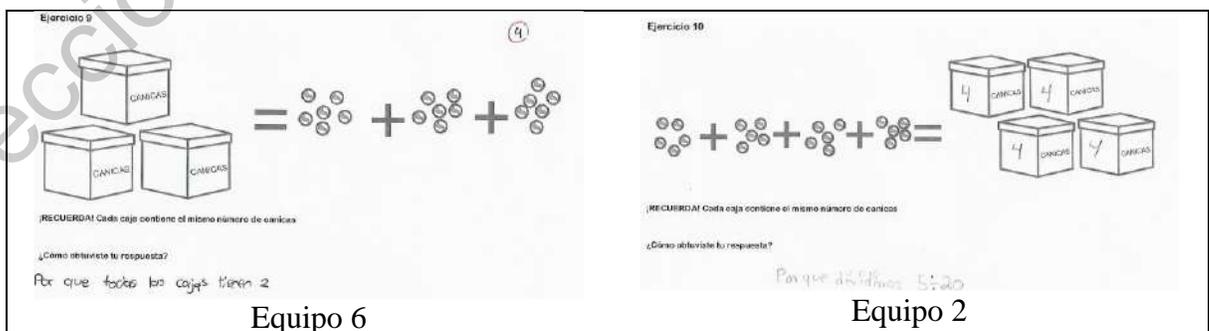


Figura 63. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 2

En la figura previa se advierte que los niños utilizan las relaciones entre las operaciones. A diferencia de la figura 64 en la que los niños si bien intentan establecer estas relaciones, no tienen claro la relación entre operaciones inversas, por ejemplo.



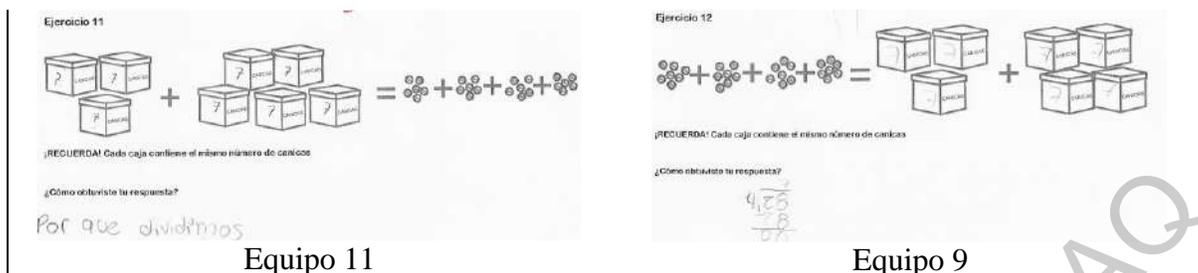


Figura 64. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 0

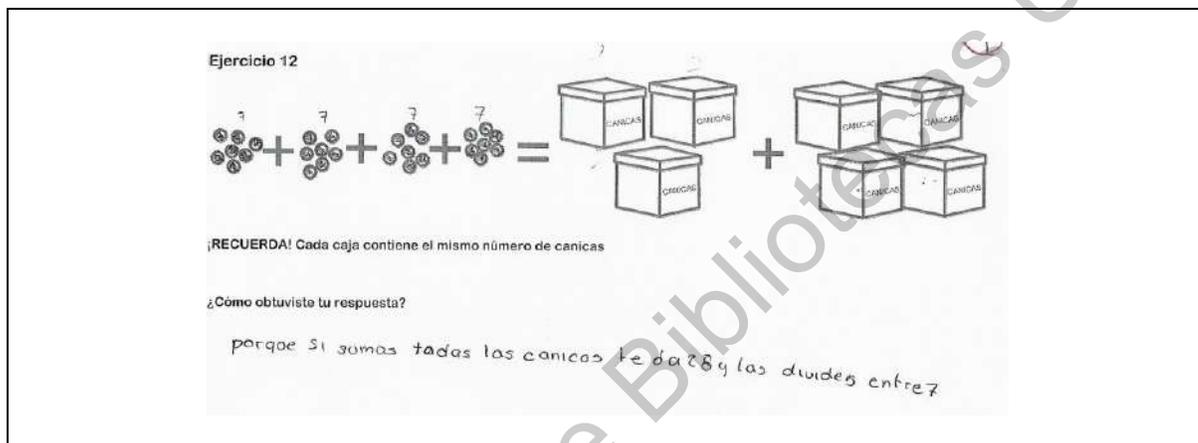
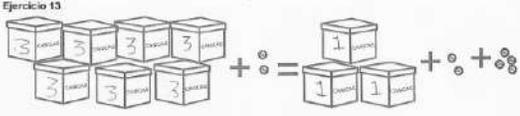


Figura 65. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 1

Nivel de algebrización esperado: 3

Dentro de estos ejercicios propuestos, el diseño de los mismos fue para que los estudiantes reflejaran su dominio del concepto equivalencia y además pudieran operar con la incógnita de ambos lados de la equivalencia, de las 52 respuestas analizadas, 37 de estas tuvieron un nivel de algebrización 0, las cuales no reflejan el concepto equivalencia sólo saben reconocer las operaciones aritméticas (Figura 66); 3 respuestas alcanzaron un nivel de algebrización 1, mismas que los estudiantes reflejan que intentar conservar o conservan la equivalencia (Figura 67); 7 respuestas se catalogaron un nivel de algebrización 2, respuestas que se observa que los estudiantes son capaces de operar con la incógnita y el uso del concepto equivalencia (Figura 68) y 5 respuestas no se les asignó nivel de algebrización debido a que el ejercicio no fue contestado.

Ejercicio 13

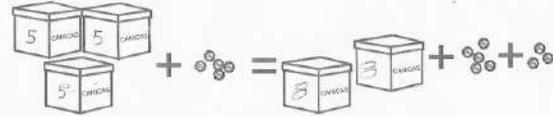


¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.

¿Cómo obtuviste la respuesta? Porque $4 \times 3 = 12$; $3 = 1 + 2 = 2$

Equipo 2

Ejercicio 14

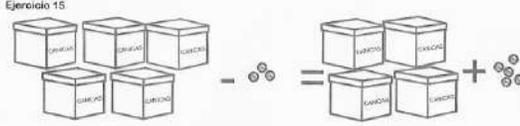


¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Equipo 12

Ejercicio 15



¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.

¿Cómo obtuviste la respuesta?

de la mitad de una canica

Equipo 4

Ejercicio 16



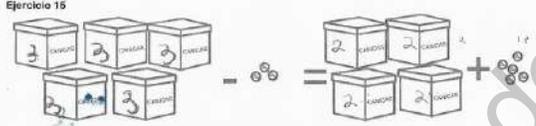
¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Equipo 9

Figura 66. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 0

Ejercicio 15



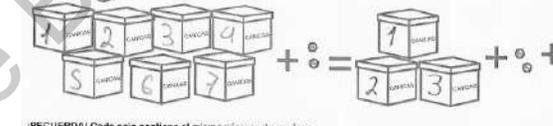
¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.

¿Cómo obtuviste la respuesta?

$3 \times 3 = 9$; $9 - 2 = 7$

Equipo 1

Ejercicio 13



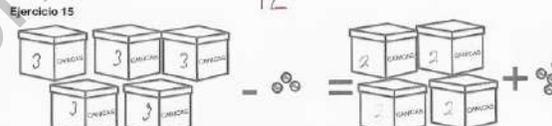
¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

por que cada caja sumamos $7 + 2 = 9 + 2 + 9$

Equipo 7

Ejercicio 15



¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.

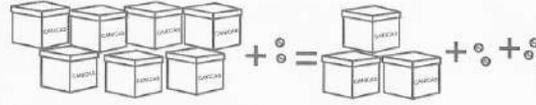
¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Por que multiplicas

Equipo 11

Figura 67. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 1

Ejercicio 13



¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

En cada caja hay 1 En ese con el 1 y le utire

Ejercicio 14



¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas.

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

$3 \times 3 = 14$ y $3 \times 2 + 5 + 8 = 14$

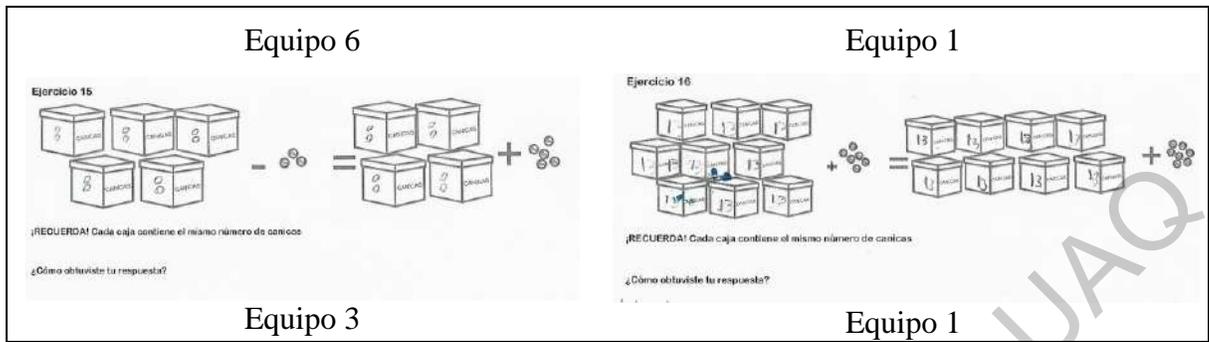


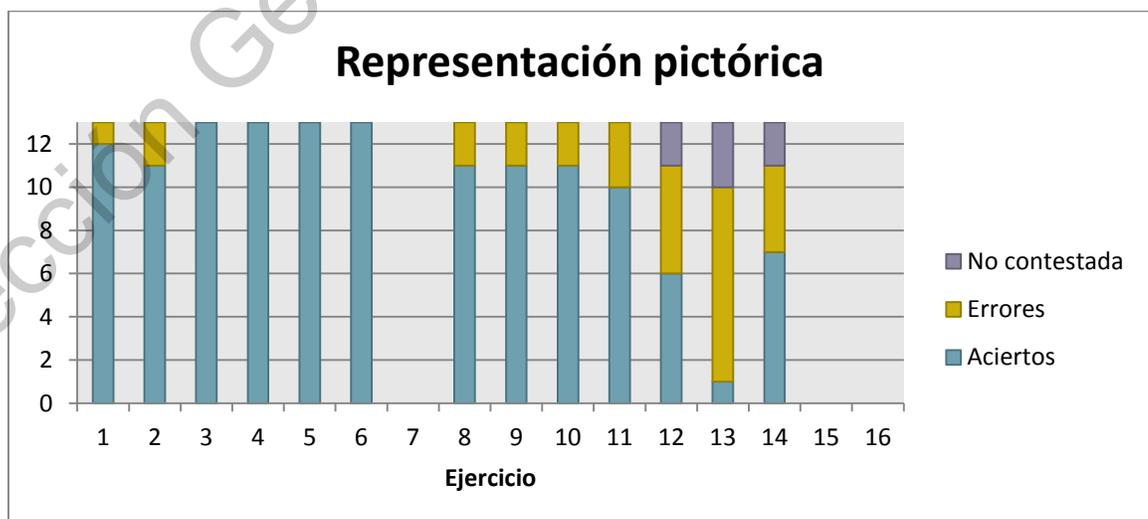
Figura 68. Tareas con Nivel Esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 2

En esta sesión se observa un incremento en los niveles de algebrización alcanzados por los estudiantes, comparados con la sesión 1 (Representación aritmética). Esto implica que la representación ha influenciado en la manera en la que los niños establecen las relaciones en ambos lados del signo igual.

5.4. ANÁLISIS DE LA SESIÓN 3: REPRESENTACIÓN PICTÓRICA

En la última intervención dentro del aula, los equipos de trabajo fueron los mismos que se trabajó con las sesiones anteriores, es decir se trabajó con 38 alumnos, integrando 13 equipos; en esta sesión se llevó a cabo la recolección de datos de 13 ejercicios representados de forma pictórica a través del uso de balanza.

Dentro de un análisis cuantitativo a las 169 respuestas obtenidas se obtuvo un porcentaje de aciertos del 78.1%, 17.8% de errores y 4.14% de ejercicios no resueltos, en la gráfica 6 se evidencia el comportamiento de la asertividad en las respuestas analizadas.



Gráfica 6. Análisis de Asertividad en la Representación Pictórica.

Del total de las 169 respuestas obtenidas, 132 fueron contestados correctamente, 7 no fueron contestadas, y 30 fueron contestados incorrectamente. En el siguiente apartado se analizarán con detenimiento los errores encontrados en las respuestas.

5.4.1. ANÁLISIS DE ERRORES Y JUSTIFICACIONES. REPRESENTACIÓN PICTÓRICA

Para el análisis de los errores de esta sesión se clasifican de acuerdo a la lógica del error que siguieron los estudiantes que los llevo a cometer el error, en la Tabla 15 se muestra las lógicas de error cometidas en esta sesión al igual que la frecuencia con la que aparecieron dentro del grupo de estudiantes.

Tabla 15. Lógica de Errores. Representación Pictórica

	Lógica del Error	Frecuencia
LE1.	El resultado de las operaciones realizadas del lado izquierdo sólo es el primer número u operación que aparece del lado derecho de la equivalencia.	1
LE2.	No existe una lógica a seguir de parte de los estudiantes	12
LE3.	No considera la incógnita con un mismo valor, no toma relevancia en el orden de las operaciones. No relaciona la equivalencia	1
LE4.	Aunque contesta de forma correcta, la respuesta no logra justificarla o la justifica de forma incorrecta	3
LE5.	Realiza operaciones aritméticas conocidas y las iguala, aunque no existe dicha igualdad	2
LE6.	Considera todos los números implicados en la equivalencia, realiza operaciones aritméticas conocidas y el resultado obtenido lo considera como el valor de la incógnita	3
LE7.	No considera la incógnita con un mismo valor, no toma relevancia en el orden de las operaciones. Conserva/intenta conservar el concepto equivalencia.	4
LE8.	Existe una confusión entre los números empleados en la equivalencia	5
	Total de errores (de las 169 respuestas)	31

Además de la lógica del error, las respuestas obtenidas se analizarán bajo la justificación que los estudiantes elaboran para obtener sus resultados; en la Tabla 16 se muestran las justificaciones y la cantidad que fueron presentadas en las 169 respuestas estudiadas:

Tabla 16. Justificaciones. Representación Pictórica

	Justificación	Frecuencia
J1	Se justifica por una operación aritmética	119
J2	No existe una justificación	36
J3	Haciendo uso del concepto equivalencia	14
	Total	169

El análisis de errores se organiza con base en los niveles de algebrización de las actividades diseñadas, tal como se mencionó en el apartado de metodología, en esta sesión no se aplicaron 16 ejercicios por equipo de estudiantes sino 13 ejercicios.

Nivel de algebrización 0

Para el análisis de este nivel se contemplan 52 respuestas, es decir, las respuestas dadas por los 13 equipos para los cuatro primeros ejercicios; en los cuales se evidencian dos errores, pero existe una respuesta correcta la cual no fue justificada, siguiendo así una LE4 (Figura 69).

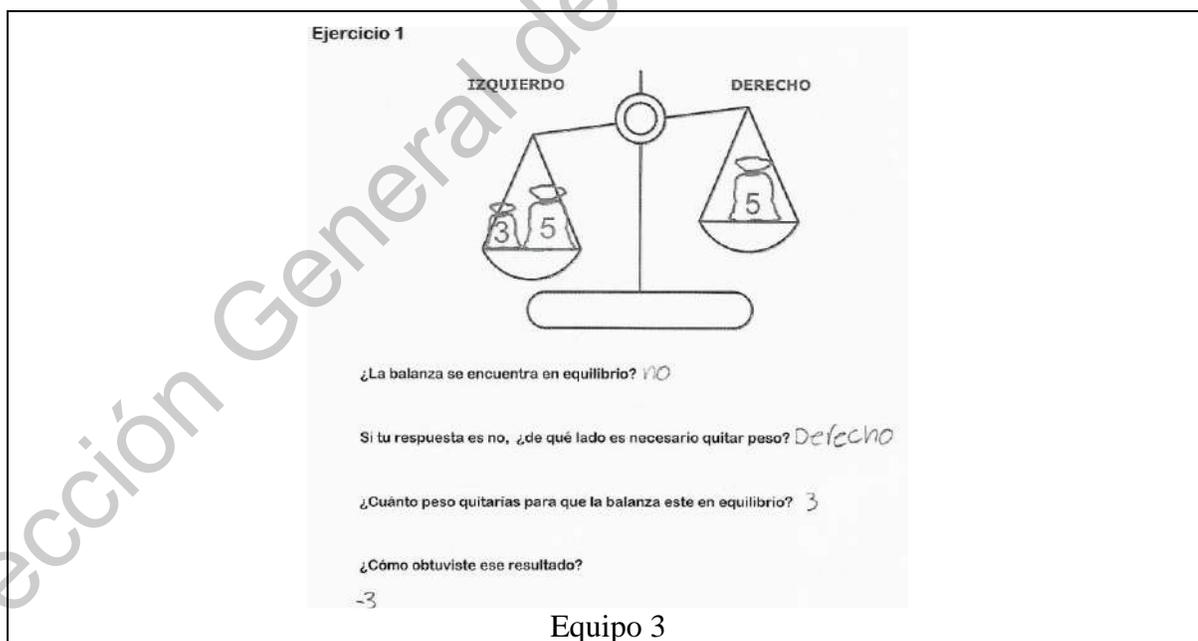


Figura 69. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 0. Representación Pictórica

De los errores evidentes se presenta un error (EQ6) con una LE5, en donde los estudiantes realizan operaciones aritméticas conocidas y las igualan, aunque no existe dicha igualdad (Figura 70).

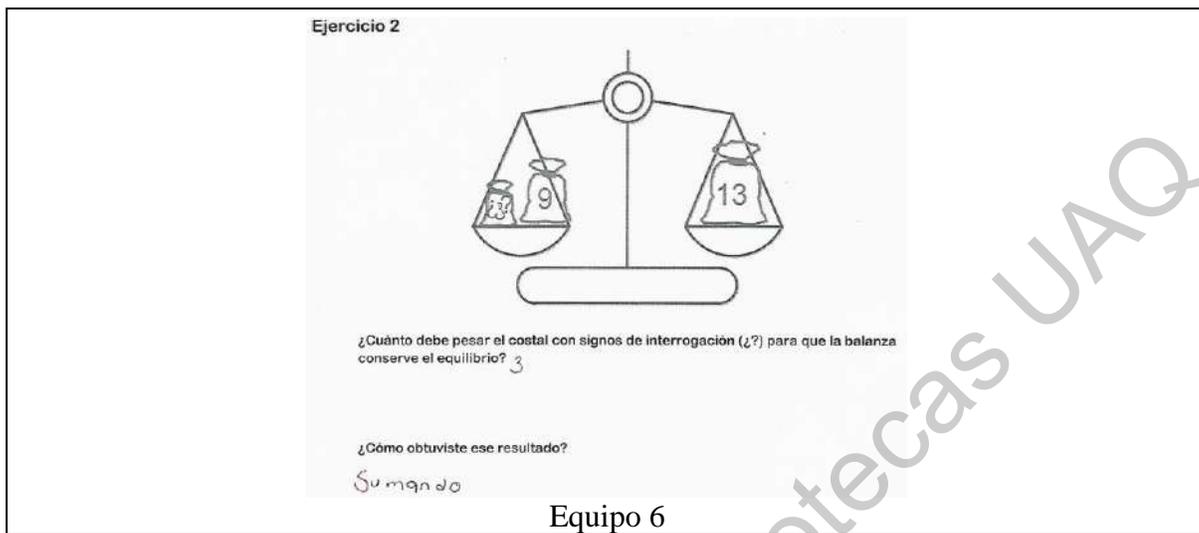


Figura 70. Lógica de Error 5, Nivel De Algebrización 0. Representación Pictórica

El segundo error presentado en este nivel de algebrización, sigue una lógica de error 8, en el cual existe una confusión entre los números empleados en la equivalencia (Figura 71).

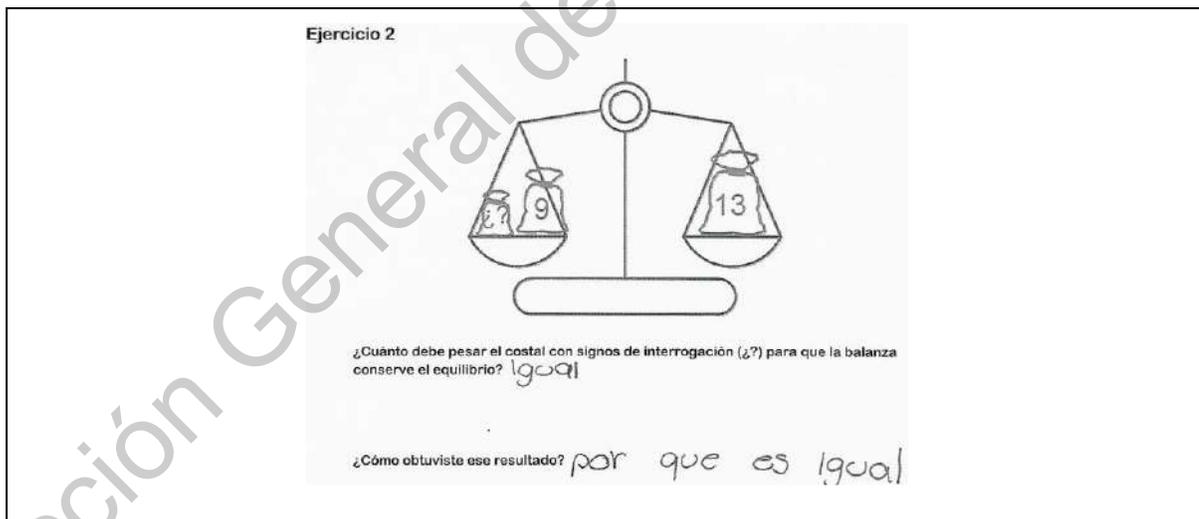
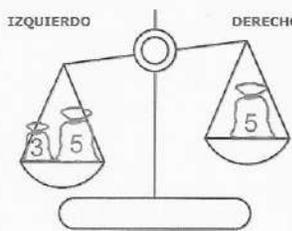


Figura 71. Lógica de Error 5, Nivel De Algebrización 0. Representación Pictórica

Las justificaciones empleadas en las respuestas dadas para los ejercicios con un nivel de algebrización 0, la mayoría fueron justificaciones por operaciones aritméticas (J1) siendo 43 respuestas justificadas de esta manera, tal como se muestra en la figura 72. En algunas de las respuestas de los niños se puede apreciar la complejidad de interpretar que un costal pese cero.

Ejercicio 1



¿La balanza se encuentra en equilibrio? *No*

Si tu respuesta es no, ¿de qué lado es necesario quitar peso? *Izquierdo*

¿Cuánto peso quitarías para que la balanza este en equilibrio? *3 kg*

¿Cómo obtuviste ese resultado? *Porque $5-3=2$*

Equipo 1

Ejercicio 2

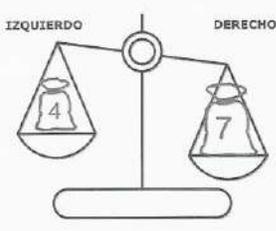


¿Cuánto debe pesar el costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? *4*

¿Cómo obtuviste ese resultado?
 $9+4=13$

Equipo 12

Ejercicio 3



¿La balanza se encuentra en equilibrio?
No

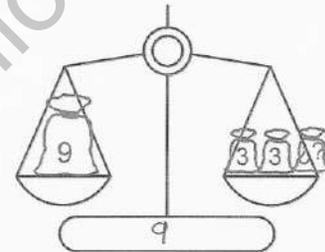
Si tu respuesta es no, ¿de qué lado es necesario quitar peso?
del lado Derecho

¿Cuánto peso quitarías para que la balanza este en equilibrio?
3

¿Cómo obtuviste ese resultado? *Porque 7 menos 3 es igual a 4*

Equipo 4

Ejercicio 4



¿Cuánto debe pesar el costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? *9*

¿Cómo obtuviste ese resultado? *Por que $3+3+3$ nos da 9*

Equipo 2

Figura 72. Justificaciones Aritméticas, Nivel 0. Representación Pictórica

Existen 8 respuestas que fueron justificadas mediante el concepto equivalencia (J3), en la figura 73 se pueden observar ejemplos de ello.

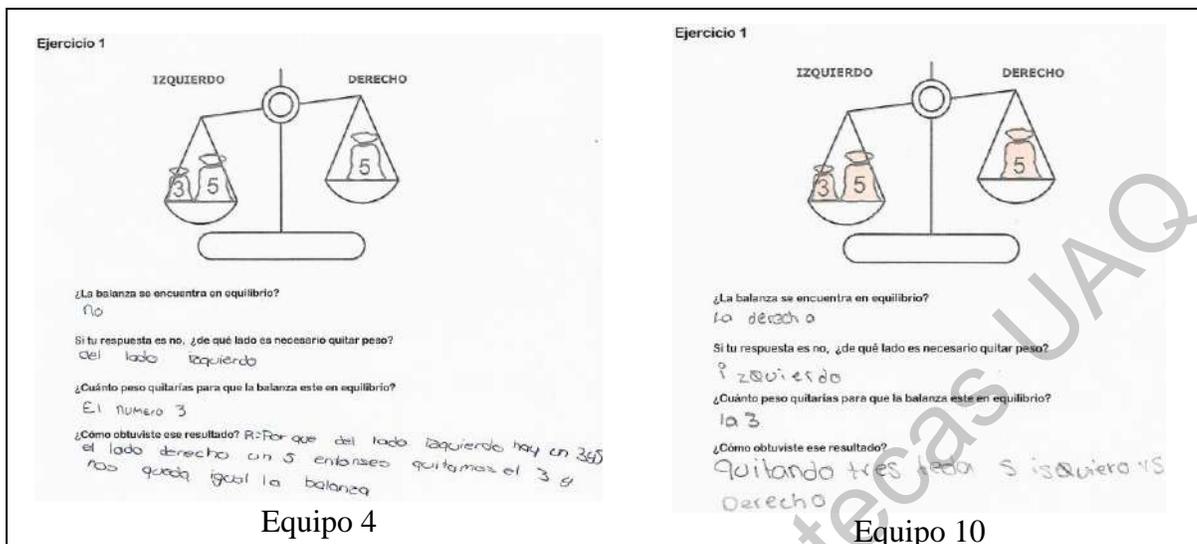


Figura 73. Justificaciones concepto equivalencia, Nivel 0. Representación Pictórica

Tal como se planteó en la lógica de errores existe una respuesta que no fue justificada (Figura 69).

Nivel de algebrización 1

Dentro de este nivel de algebrización se analizan 39 respuestas, ya que se diseñaron 3 ejercicios para evidenciar el uso del concepto equivalencia en la representación pictórica; se presentaron dos errores a las respuestas obtenidas.

Una respuesta no se encuentra una lógica a seguir por parte de los estudiantes (LE2), tal como se aprecia en la figura 74.

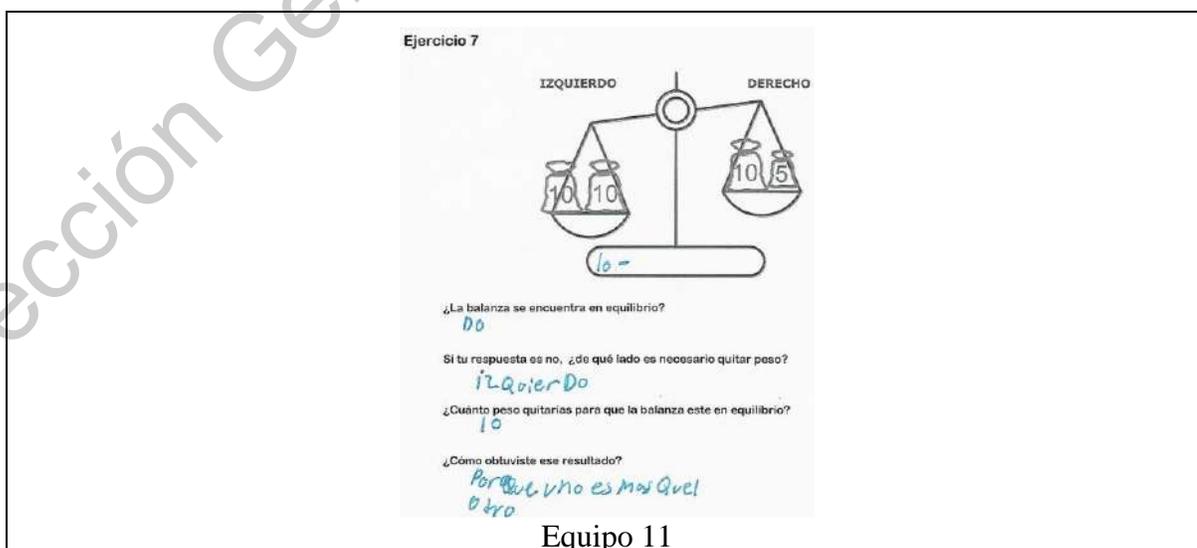


Figura 74. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 1. Representación Pictórica

Mientras que el segundo error encontrado en las respuestas que integran este nivel de algebrización, siguen una lógica de error 8, lo que significa que los estudiantes tuvieron una confusión en este caso con los extremos de la balanza (Figura 75).

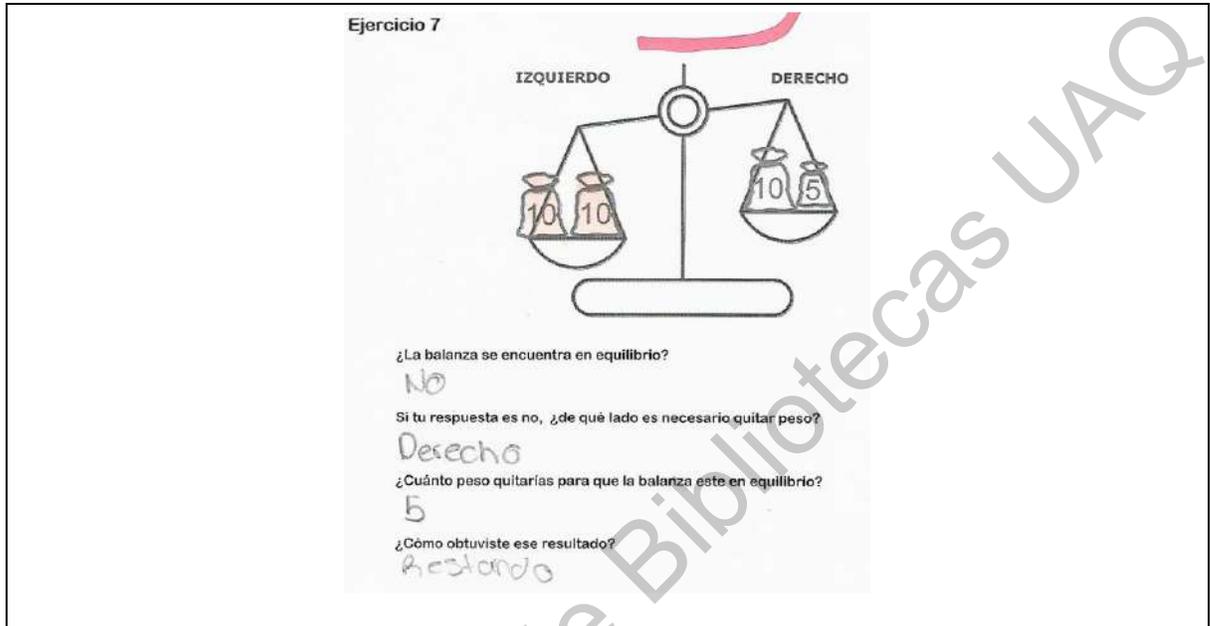


Figura 75. Lógica de Error 8, Nivel De Algebrización 1. Representación Pictórica

Aunque en una respuesta no se encuentra un error, los estudiantes no logran justificarla por lo que se cataloga como una LE4 (Figura 76).

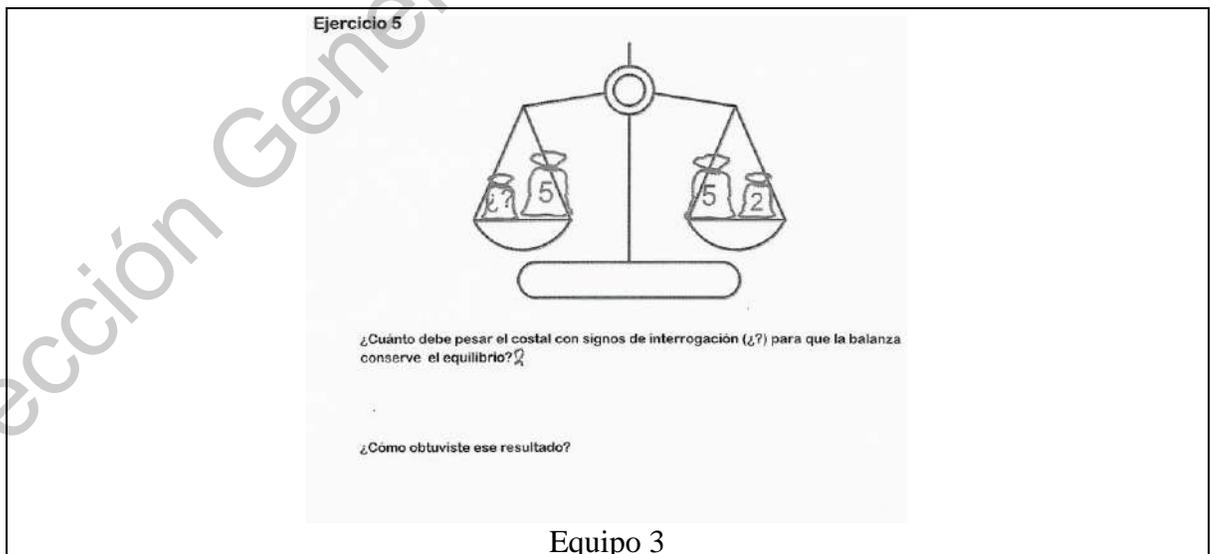


Figura 76. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 1. Representación Pictórica

En lo que respecta a las justificaciones empleadas a las 39 respuestas analizadas, en su mayoría fueron justificaciones con operaciones aritméticas (29) prueba de ello se muestra en la figura 77.

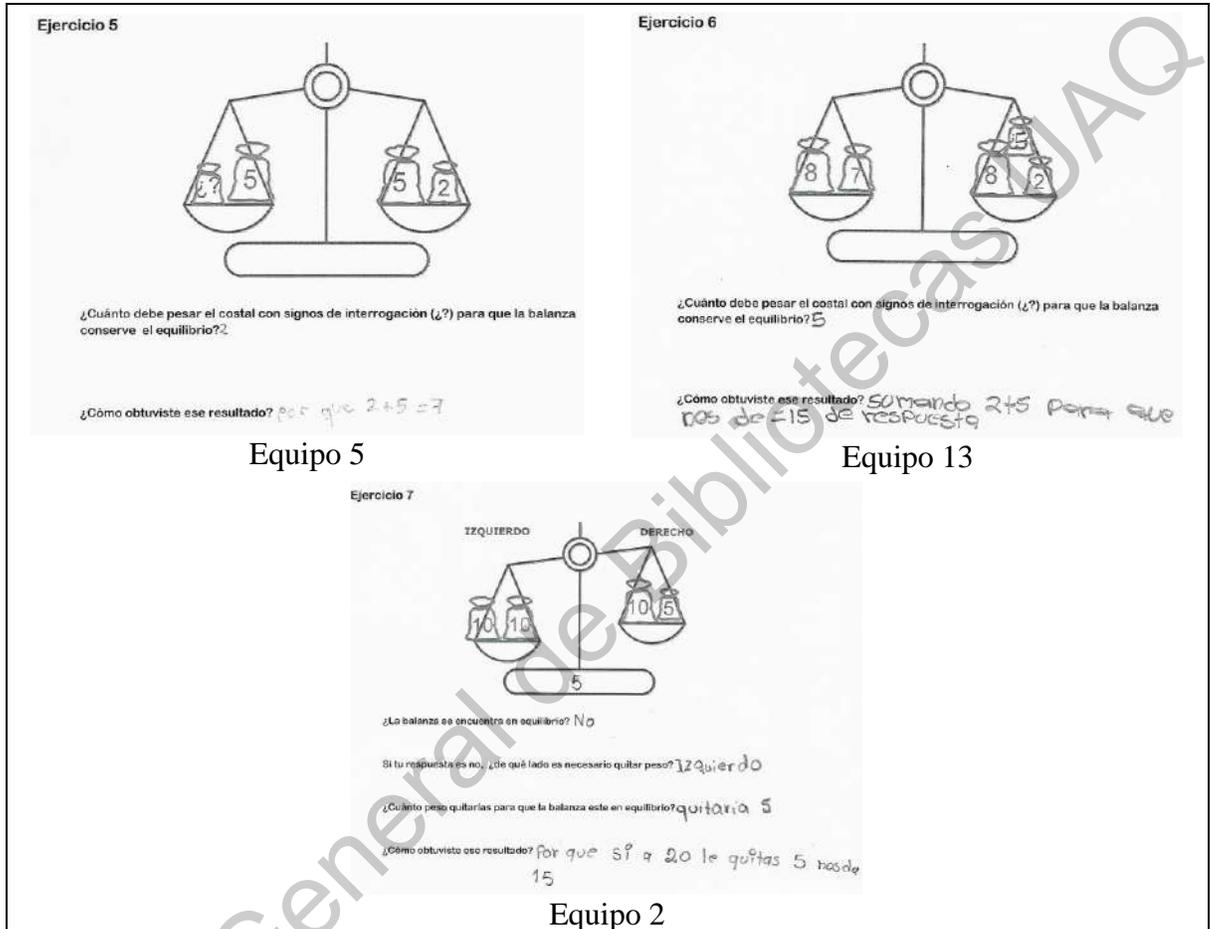


Figura 77. Justificaciones Aritméticas, Nivel 1. Representación Pictórica

En nueve respuestas analizadas los alumnos logran justificar su resultado mediante la observación de la balanza y el uso del concepto equivalencia para validar su respuesta (Figura 78).

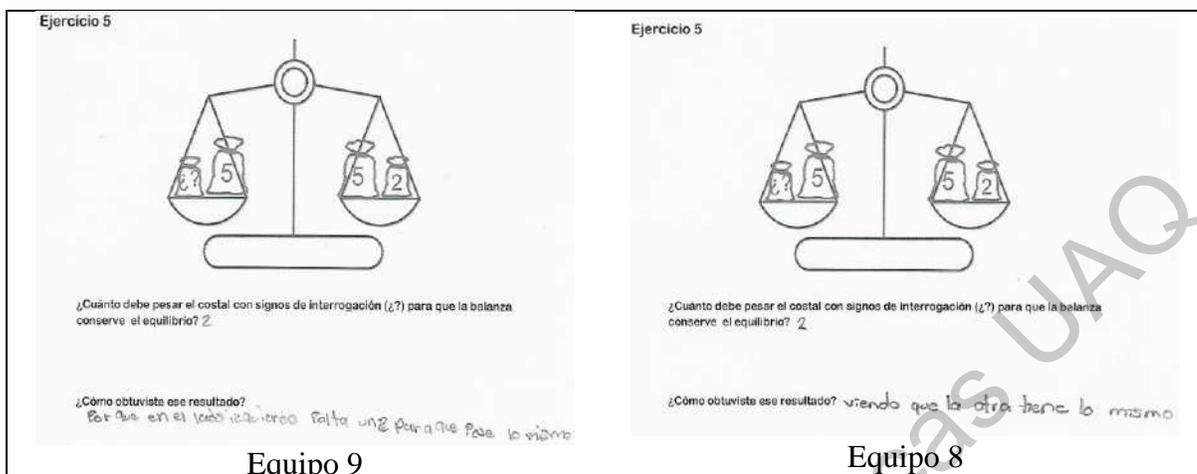


Figura 78. Justificaciones concepto equivalencia, Nivel 1. Representación Pictórica

Mientras que una respuesta no fue justificada misma que se planteó en la Figura 76.

Nivel de algebrización 2

Para analizar este nivel de algebrización se toman en cuenta 52 respuestas, es decir, los ejercicios 8 al 11, en los cuales se encontraron 14 errores evidentes los cuales se detallarán más adelante, dos ejercicios no fueron contestados; mientras que existe una respuesta la cual, aunque fue contestada de forma correcta, no fue justificada de la misma forma siguiendo así una lógica de error 4 (Figura 79).

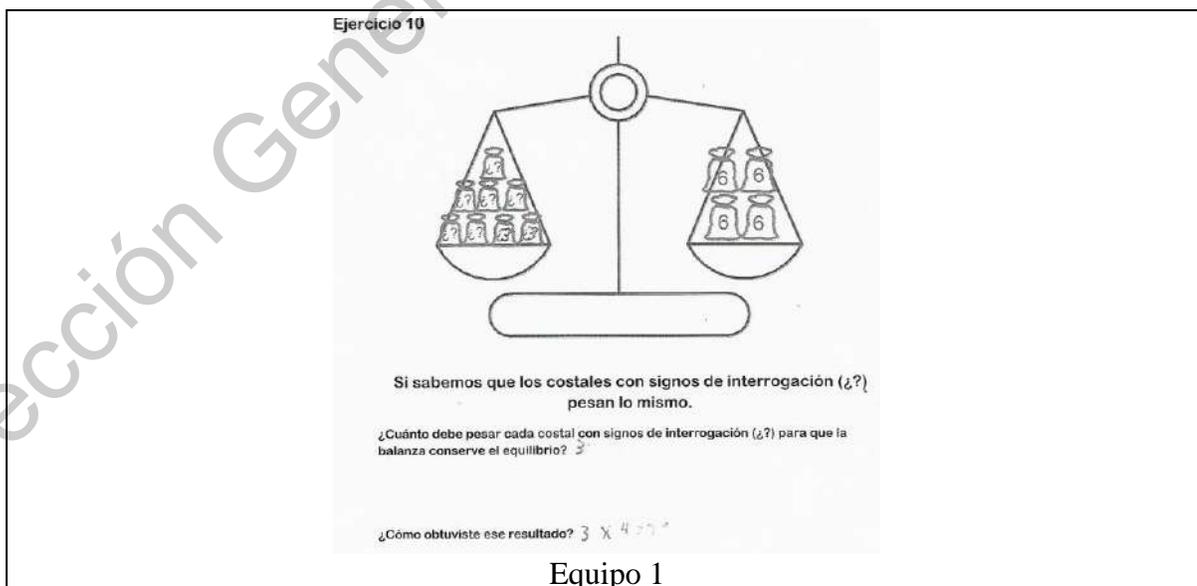
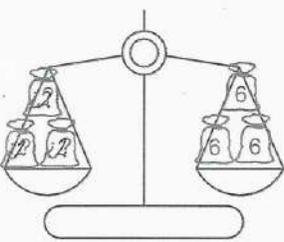


Figura 79. Lógica de Error 4, Nivel De Algebrización 2. Representación Pictórica

En cuanto a los errores cometidos, un error se encuentra clasificado con una lógica de error 1, en donde se puede observar que los estudiantes realizan las operaciones que se encuentran del lado izquierdo y el resultado es el primer número u operación que aparece del lado derecho de la equivalencia (Figura 80).

Ejercicio 8



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 2

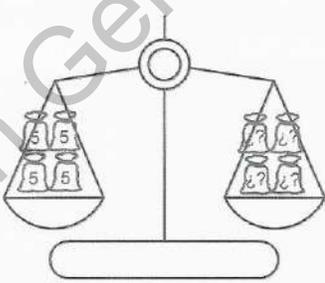
¿Cómo obtuviste ese resultado?
verificando que tengan el mismo equilibrio.

Equipo 13

Figura 80. Lógica de Error 1, Nivel De Algebrización 2. Representación Pictórica

Un total de seis respuestas erróneas fueron clasificadas con una lógica de error 2, en el cual no se hace evidente a seguir una lógica definida, en la figura 81 se observan algunas respuestas.

Ejercicio 9



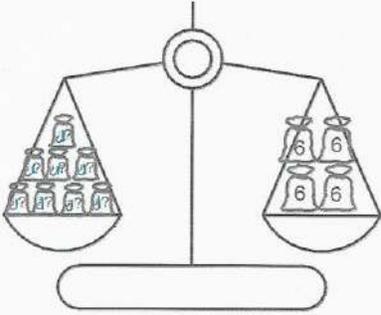
Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 2

¿Cómo obtuviste ese resultado?
haciendo equivalencia

Equipo 8

Ejercicio 10



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?

Equipo 11

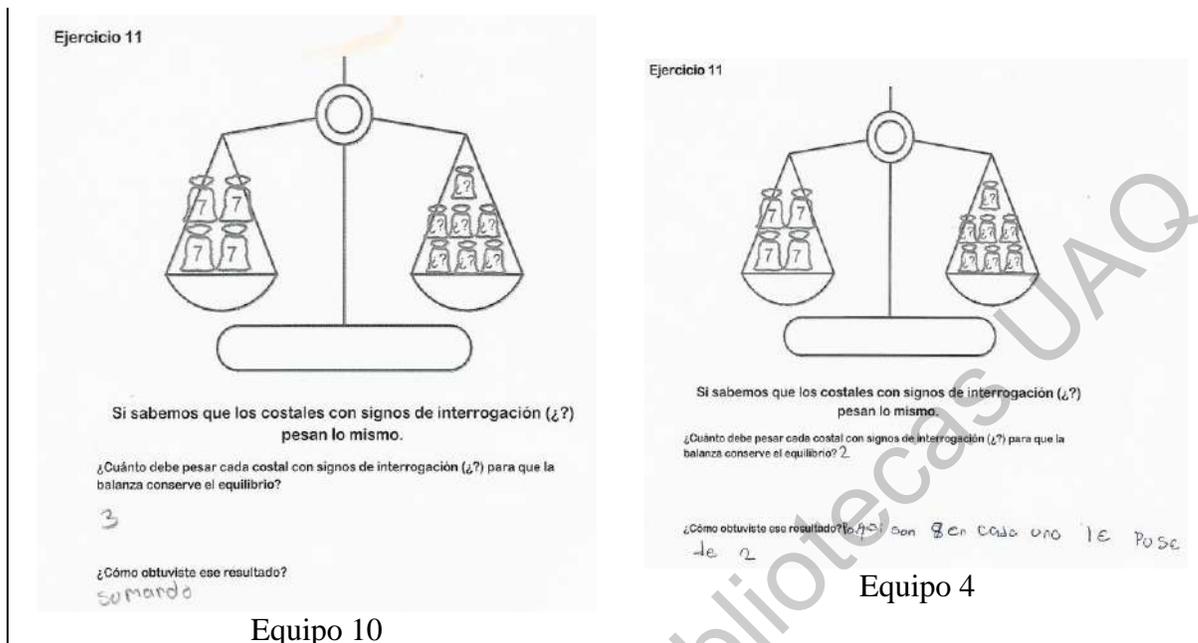


Figura 81. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 2. Representación Pictórica

Una respuesta se clasifica con una lógica de error 5, en este caso los estudiantes realizan operaciones aritméticas conocidas y realizan una igualdad la cual no es verdadera (Figura 82).

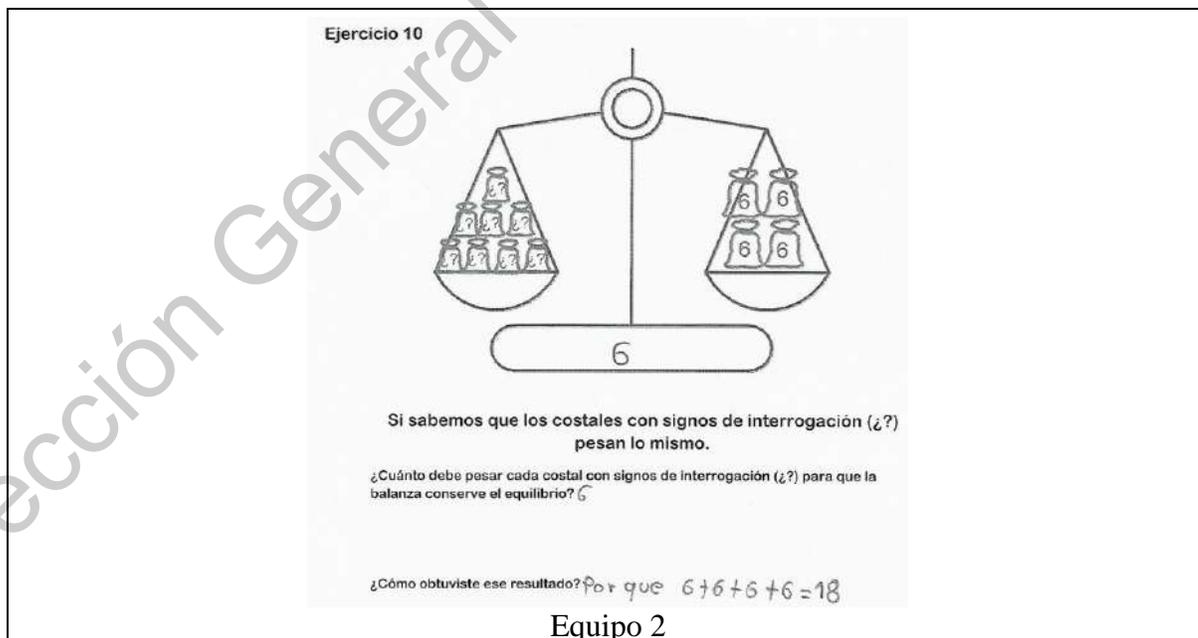
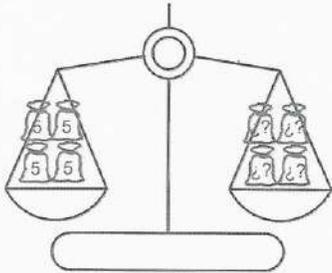


Figura 82. Lógica de Error 5, Nivel De Algebrización 2. Representación Pictórica

De igual manera se encontró una respuesta con una LE6 en la que los estudiantes consideran todos los números implicados en la equivalencia, realizan operaciones

aritméticas conocidas y el resultado obtenido lo considera como el valor de la incógnita (Figura 83).

Ejercicio 9



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 5

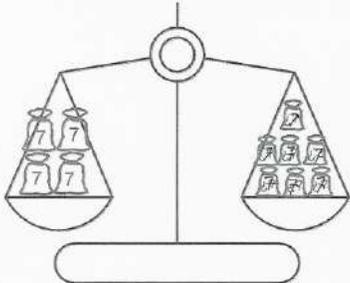
¿Cómo obtuviste ese resultado? Sumando

Equipo 3

Figura 83. Lógica de Error 6, Nivel De Algebrización 2. Representación Pictórica

Finalmente, tres errores se presentan debido a que existe una confusión entre los números empleados en la equivalencia, siguiendo así una lógica de error 8 (Figura 84).

Ejercicio 11



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 7

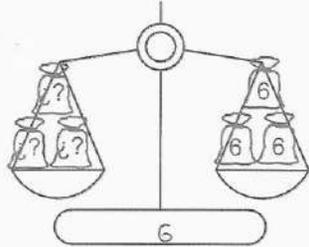
¿Cómo obtuviste ese resultado? Multiplicando

Equipo 7

Figura 84. Lógica de Error 8, Nivel De Algebrización 2. Representación Pictórica

Por otra parte, las justificaciones empleadas para estas 52 respuestas en su mayoría tienen una justificación aritmética (32) figura 85, 14 respuestas se basan en el uso del concepto equivalencia (Figura 86) y 6 respuestas no logran tener una justificación.

Ejercicio 8



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado? Porque $6 \times 6 = 18$

Equipo 2

Ejercicio 9



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado? $4 \times 5 = 20$

Equipo 1

Ejercicio 10



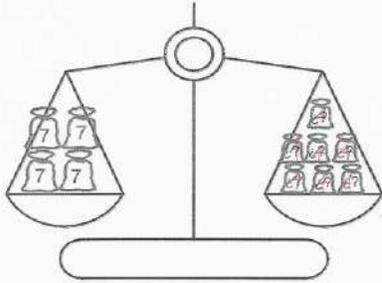
Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado? Por que $8 \times 6 + 6 + 6 = 24$ entonces si multiplicamos todo es igual. En la cantidad de baba el resu

Equipo 4

Ejercicio 11



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

4

¿Cómo obtuviste ese resultado?
multiplicando 4 por 7

Equipo 6

Figura 85. Justificaciones Aritméticas, Nivel 2. Representación Pictórica

Ejercicio 8

Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 6

¿Cómo obtuviste ese resultado? Por que son 2 balanzas y 6 es el resultado

Equipo 4

Ejercicio 9

Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 5,5,5,5

¿Cómo obtuviste ese resultado? diviendo el otro lado

Equipo 7

Figura 86. Justificaciones concepto equivalencia, Nivel 2. Representación Pictórica

Nivel de algebrización 3

Para el análisis de este nivel de algebrización se tomaron en cuenta 26 respuestas (ejercicios 12 y 13) los cuales tienen 18 errores y 5 respuestas que no fueron contestadas, a continuación, se categorizan los errores cometidos de acuerdo a la tabla 15.

En su mayoría de estos errores no se encuentra una lógica definida por parte de los estudiantes, en este nivel se encuentra cinco respuestas con esta categoría (Figura 87).

Ejercicio 12

Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 2 y 3

¿Cómo obtuviste ese resultado? sumando

Equipo 8

Ejercicio 13

Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 30

¿Cómo obtuviste ese resultado? por que quite 3

Equipo 1

Figura 87. Lógica de Error 2, Nivel De Algebrización 3. Representación Pictórica

Existe una respuesta errónea que sigue una LE3, en la cual los estudiantes no consideran la incógnita con un mismo valor, no toman relevancia en el orden de las operaciones y además no relacionan la equivalencia (Figura 88).

Ejercicio 12



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? $4 \frac{1}{3}$

¿Cómo obtuviste ese resultado? $5 \times 1 = 5$

Equipo 7

Figura 88. Lógica de Error 3, Nivel De Algebrización 3. Representación Pictórica

Dentro del análisis de los errores, dos de las respuestas fueron encontrados con una LE6, donde los estudiantes consideran todos los números implicados en la equivalencia, realizan operaciones aritméticas conocidas y el resultado obtenido lo consideran como el valor de la incógnita (Figura 89).

Ejercicio 12

Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 3

¿Cómo obtuviste ese resultado? por que $4 \cdot 2 = 6$

Figura 89. Lógica de Error 6, Nivel De Algebrización 3. Representación Pictórica

En cinco errores los estudiantes no consideran la incógnita con un mismo valor, no toman relevancia en el orden de las operaciones, y conservan/intentan conservar el concepto equivalencia (Figura 90).

Ejercicio 12

Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 2

¿Cómo obtuviste ese resultado? por que $4 \cdot 4 = 16$, $2 \cdot 8 = 16$ y da lo mismo

Equipo 9

Ejercicio 12

Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

lado derecho 2 cada costal lado izquierdo 3,2 y 4

¿Cómo obtuviste ese resultado? sumando

Equipo 12

Figura 90. Lógica de Error 7, Nivel De Algebrización 3. Representación Pictórica

Dentro de las justificaciones empleadas 16 respuestas fueron justificadas aritméticamente (Figura 91), 8 respuestas no fueron justificadas y sólo en dos respuestas se apoyaron de la equivalencia (Figura 92).

Ejercicio 12

Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 3

¿Cómo obtuviste ese resultado? $3 \cdot 2 = 6 + 4 + 4 + 4 = 16 + 2 = 18$

Equipo 4

Ejercicio 13

Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 3

¿Cómo obtuviste ese resultado? Porque $5 + 3 + 3 + 3 + 3 = 14$

Equipo 2

Figura 91. Justificaciones Aritméticas, Nivel 3. Representación Pictórica

Ejercicio 13

Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 3

¿Cómo obtuviste ese resultado? verificando los costales

Equipo 13

Figura 92. Justificación Concepto Equivalencia, Nivel 3. Representación Pictórica

De acuerdo al análisis de cada una de las respuestas para esta sesión en la que se trabajó la representación pictórica, se les asignó un nivel de algebrización mismo que será detallado en el siguiente apartado.

5.3.2. NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN. REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA

A partir de las formas en la que se resolvieron los ejercicios y a partir del diseño de cada ejercicio, se asignó un nivel de algebrización de acuerdo a lo analizado; al igual que en las sesiones anteriores las consideraciones para categorizar cada respuesta de acuerdo a su nivel de algebrización son las siguientes:

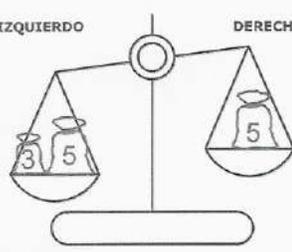
- Nivel de algebrización 0, los alumnos sólo son capaces de detectar operaciones aritméticas y realizarlas.
- Nivel de algebrización 1, los alumnos evidenciaban el concepto de equivalencia, no era necesario operar con la incógnita.
- Nivel de algebrización 2, los alumnos evidenciaban el concepto de equivalencia, además de que operaban con la incógnita de un solo lado de la equivalencia.
- Nivel de algebrización 3, los alumnos evidenciaban el concepto de equivalencia, y eran capaces de operar con la incógnita de ambos lados de la equivalencia.
- Indeterminado (INDET), No se asigna un nivel ya que no se contestó el ejercicio

A continuación, se detalla los niveles de algebrización alcanzados en cada una de las respuestas; este análisis es mediante en nivel de algebrización esperado en cada uno de los ejercicios.

Nivel de algebrización esperado: 0

En este nivel de algebrización se espera que el alumno sea capaz de detectar operaciones aritméticas y realizarlas; aunque en este nivel de algebrización se tiene dos respuestas incorrectas resultó evidente que los alumnos son capaces de realizar operaciones aritméticas por eso es que en este caso todas las respuestas se les asignó un nivel de algebrización 0, ejemplo de ello se observa en la figura 93.

Ejercicio 1



¿La balanza se encuentra en equilibrio?
Izquierda

Si tu respuesta es no, ¿de qué lado es necesario quitar peso?
Izquierda

¿Cuánto peso quitarías para que la balanza este en equilibrio?
3

¿Cómo obtuviste ese resultado?
Porque $3+5=8-3=5$

Equipo 11

Ejercicio 2

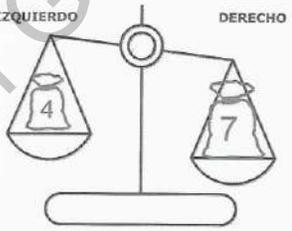


¿Cuánto debe pesar el costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?⁴

¿Cómo obtuviste ese resultado? *Por que $4+9=13$*

Equipo 5

Ejercicio 3



¿La balanza se encuentra en equilibrio?
No

Si tu respuesta es no, ¿de qué lado es necesario quitar peso?
Derecho

¿Cuánto peso quitarías para que la balanza este en equilibrio?
3kg

¿Cómo obtuviste ese resultado?
por que $3+4=7$

Equipo 9

Ejercicio 4



¿Cuánto debe pesar el costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? *3*

¿Cómo obtuviste ese resultado? *$3+3+3=9$*

Equipo 12

Figura 93. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 0, Obteniendo Nivel 0

Nivel de algebrización esperado: 1

En este grupo de 52 respuestas donde se esperaba que los estudiantes además de realizar operaciones aritméticas fueran capaces de seguir conservando la equivalencia, dos de estas respuestas fueron asignadas con un nivel de algebrización 0, ya que los estudiantes evidencian el uso de operaciones aritméticas (Figura 94).

The figure shows two examples of student work on a balance scale problem, labeled 'Ejercicio 7'. Each example includes a diagram of a balance scale and a set of questions with handwritten answers.

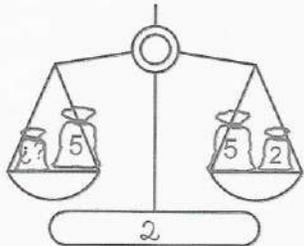
Equipo 10: The scale has two pans labeled 'IZQUIERDO' and 'DERECHO'. The left pan contains two weights of 10 units each. The right pan contains one weight of 10 units and one weight of 5 units. A red line is drawn above the scale. The questions and answers are: '¿La balanza se encuentra en equilibrio?' (No), 'Si tu respuesta es no, ¿de qué lado es necesario quitar peso?' (Derecho), '¿Cuánto peso quitarías para que la balanza este en equilibrio?' (5), and '¿Cómo obtuviste ese resultado?' (Restando).

Equipo 11: The scale has two pans labeled 'IZQUIERDO' and 'DERECHO'. The left pan contains two weights of 10 units each. The right pan contains one weight of 10 units and one weight of 5 units. A blue line is drawn below the scale. The questions and answers are: '¿La balanza se encuentra en equilibrio?' (No), 'Si tu respuesta es no, ¿de qué lado es necesario quitar peso?' (Izquierdo), '¿Cuánto peso quitarías para que la balanza este en equilibrio?' (10), and '¿Cómo obtuviste ese resultado?' (Porque uno es mas que el otro).

Figura 94. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 1, Obteniendo Nivel 0.

Fue un total de 50 respuestas las cuales lograron conservar la equivalencia, por lo que se les asignó un nivel de algebrización 1, algunos ejemplos de ello en la figura 95.

Ejercicio 5



¿Cuánto debe pesar el costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 2

¿Cómo obtuviste ese resultado? Porque $5+2$ nos da 7

Equipo 2

Ejercicio 6

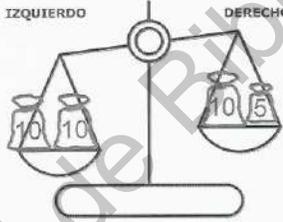


¿Cuánto debe pesar el costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?
5

¿Cómo obtuviste ese resultado?
Porque $8+7=15$
 $8+2=10$ cada lado tiene que pesar lo mismo

Equipo 12

Ejercicio 7



¿La balanza se encuentra en equilibrio? No

Si tu respuesta es no, ¿de qué lado es necesario quitar peso?
¿Izquierdo

¿Cuánto peso quitarías para que la balanza este en equilibrio?
5

¿Cómo obtuviste ese resultado? R: por que $10+10=20$ $20-5=15$

Equipo 4

Figura 95. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 1, Obteniendo Nivel 1.

Además, dos respuestas dentro de este nivel de algebrización, presentan una evidencia clara de que los estudiantes logran observar propiedades de los números en la figura 96 se muestran las respuestas ya que realizan agrupaciones (o descomposiciones de números $5+2$) para encontrar el equilibrio de la balanza.

<p>Ejercicio 6</p>  <p>¿Cuánto debe pesar el costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 5</p> <p>¿Cómo obtuviste ese resultado? Por que $2+3=5$ Porque queda el equilibrio total</p> <p>Equipo 9</p>	<p>Ejercicio 6</p>  <p>¿Cuánto debe pesar el costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 5</p> <p>¿Cómo obtuviste ese resultado? Sumando $2+3$ para que nos de $=15$ de respuesta</p> <p>Equipo 13</p>
--	--

Figura 96. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 1, uso de Propiedades

Nivel de algebrización esperado: 2

Dentro de este nivel de algebrización existen dos ejercicios sin respuesta por lo cual no se puede determinar un nivel de algebrización en los estudiantes; 12 respuestas tuvieron un nivel de algebrización 0, en los cuales los estudiantes solo fueron capaces de realizar operaciones aritméticas sin que se observará en sus respuestas una evidencia clara del concepto equivalencia (Figura 97).

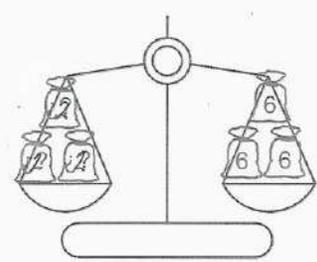
<p>Ejercicio 10</p>  <p>Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.</p> <p>¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 6</p> <p>¿Cómo obtuviste ese resultado? Por que $6+6+6+6=18$</p> <p>Equipo 2</p>	<p>Ejercicio 8</p>  <p>Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.</p> <p>¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 2</p> <p>¿Cómo obtuviste ese resultado? verificando que tengan el mismo equilibrio.</p> <p>Equipo 13</p>
--	--

Figura 97. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 0.

Una respuesta se le asignó un nivel de algebrización 1, debido a que los estudiantes logran conservar la equivalencia, sin embargo, no logran justificar su respuesta de una forma correcta debido al no operar correctamente con la incógnita, se evidencia en la figura 98.

Ejercicio 10



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 3

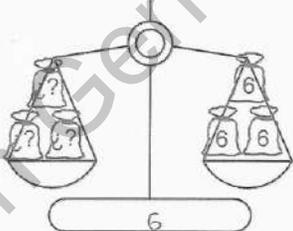
¿Cómo obtuviste ese resultado? $3 \times 4 = 12$

Equipo 1

Figura 98. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 1

Las 37 respuestas restantes se categorizaron con un nivel de algebrización 2, debido a que los estudiantes evidencian un uso del concepto equivalencia, y además operan correctamente con la incógnita (Figura 99).

Ejercicio 8



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 6

¿Cómo obtuviste ese resultado? Porque $6 \cdot 6 = 36$ nos da 18

Equipo 2

Ejercicio 9



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 5

¿Cómo obtuviste ese resultado? $4 \times 5 = 20$

Equipo 1

Ejercicio 10

Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 4

¿Cómo obtuviste ese resultado? sumando 8 veces el tres

Equipo 13

Ejercicio 11

Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 4

¿Cómo obtuviste ese resultado? multiplicando 4 por 7

Equipo 6

Figura 99. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 2, Obteniendo Nivel 2.

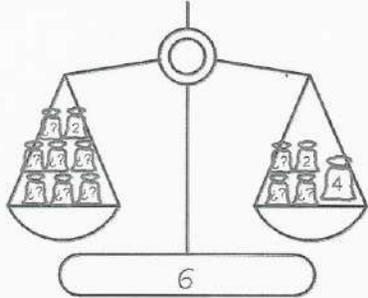
La actividad matemática de los niños evidencia el uso de las relaciones entre las operaciones y, también el uso bidireccional del signo igual.

Nivel de algebrización esperado: 3

Los últimos dos ejercicios de esta sesión están basados en un nivel de algebrización 3 donde los estudiantes además de conservar la equivalencia, realizar operaciones aritméticas sean capaces de operar con la incógnita de los dos lados de la igualdad. En este sentido, cinco respuestas no se asignaron nivel debido a la falta de respuesta de parte de los alumnos.

Las respuestas que alcanzaron un nivel de algebrización 0 fueron nueve, en ellas se observa la capacidad del estudiante por realizar operaciones aritméticas (Figura 100).

Ejercicio 12



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado? *por que $4 \cdot 2 = 6$*

Equipo 2

Ejercicio 12



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado? *$x \cdot 2 = 4 + 4 + 4 + 4 = 16 \quad 16 : 4 = 4$*

Equipo 4

Figura 100. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 0

En cuatro respuestas se observa la capacidad de los estudiantes por conservar la equivalencia, aunque no se logre operar con la incógnita de forma correcta por lo que se les asigna un nivel de algebrización 1, en la figura 101 se observan ejemplos de ello.

Ejercicio 12



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

2

¿Cómo obtuviste ese resultado?

Sumando

Equipo 6

Ejercicio 12



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

2

¿Cómo obtuviste ese resultado?

por que $4 \cdot 2 = 8$ y $2 \cdot 8 = 16$ y da lo mismo

Equipo 9

Figura 101. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 1.

Por último, ocho respuestas logran un nivel de algebrización 3, en donde los estudiantes logran además de realizar operaciones aritméticas, se conserva la equivalencia y se opera correctamente con la incógnita de ambos lados de la igualdad (Figura 102).

Ejercicio 13



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 3

¿Cómo obtuviste ese resultado?

Por que $5+3+3+3$ son 14 y $5+3+3+3$ son 14

Equipo 12

Ejercicio 13



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio? 3

¿Cómo obtuviste ese resultado?

Por que $5+3+3+3=14$ y $3+3+3+5=14$ y peso lo mismo.

Equipo 9

Figura 102. Tareas con Nivel esperado de Algebrización 3, Obteniendo Nivel 3.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

En esta investigación se analizó el pensamiento algebraico en estudiantes de quinto grado de primaria. Dentro del análisis se consideraron tres enfoques principales, los errores presentados en las equivalencias, la justificación que logran elaborar los estudiantes para validar su respuesta y tomando como base estos dos enfoques se finalizó categorizando el nivel de algebrización alcanzado en cada una de las respuestas. El análisis se organizó con base en las sesiones llevadas a cabo en la recogida de datos. A continuación, se presentan las conclusiones derivadas del análisis llevado a cabo.

6.1 CONCLUSIONES SOBRE EL ESTUDIO

En las siguientes líneas se describen las conclusiones que se desprenden directamente de la aplicación de la secuencia de reactivos diseñadas. Asimismo, se mencionan algunas contribuciones de la secuencia a la docencia en matemáticas, así como algunos factores que influenciaron la implementación de dicha secuencia.

Representación aritmética

Dentro de esta representación se tiene que los estudiantes tienen un alto porcentaje de ejercicios contestados erróneamente (47.11%), el error más común presentado es el sentido operacional que le dan al signo igual; sus justificaciones mayormente son mediante una operación aritmética. Los estudiantes en su mayoría no lograron contestar correctamente los ejercicios planteados en nivel de algebrización 2 y 3; mientras que los ejercicios planteados con un nivel de algebrización 0 fueron resultados correctamente. Lo previo es debido a la forma en la que el signo igual se utiliza en la educación primaria.

Representación simbólica

Para la resolución de los ejercicios usando esta representación los estudiantes bajaron en cierta medida el porcentaje de errores cometidos (41.35%), mientras que de los errores encontrados en su mayoría no tienen una lógica razonable por parte de los estudiantes. En esta representación los estudiantes contestaron los ejercicios, sus justificaciones siguieron siendo en su mayoría por operaciones aritméticas. Sin embargo, se observaron algunas justificaciones mediante la observación de alguna propiedad de equivalencia e inclusive empiezan a mostrar indicios de agrupación. Aunque se tuvo un mayor porcentaje de aciertos en los ejercicios planteados con un nivel de algebrización 0 y 1, también se logra observar una mejoría en el nivel de algebrización 2 y 3 con respecto al presentado en la representación aritmética.

Representación pictórica

El porcentaje de errores disminuye de forma considerable a 17.8%, los errores presentados en su mayoría no se definió una lógica a seguir por parte de los estudiantes. Nuevamente los estudiantes, en su mayoría, justificaron con operaciones aritméticas, también en algunas respuestas lo justifican mediante la observación de la equivalencia. Además, presentan mayor asertividad en cada uno de los ejercicios planteados en diferentes niveles de algebrización.

De forma general, los estudiantes presentan un mayor nivel de algebrización en la representación pictórica; se hace evidente que al estar frente a un problema en el que ellos puedan representar de forma “tangible” en su entorno logran desarrollar una mejor estrategia para abordar el problema; es decir, los estudiantes desarrollan un pensamiento algebraico al cambiar la representación del problema.

En este estudio, tiene dos aportaciones para la docencia principalmente. La primera, refiere a ser un recurso que el profesor puede utilizar en su aula, es decir, se pretende que llegué a los docentes de educación primaria, para al ser ellos el primer contacto que el estudiante tiene con las matemáticas logren explorar las cualidades natas que los niños tienen para observar, entender y comprender las propiedades de los números y sus usos; y lograr así estudiantes con un pensamiento crítico y adaptado para su inicio en el álgebra en sus estudiantes de nivel secundaria. La segunda aportación es sobre los reactivos elaborados, pues se aporta evidencia de que estas tareas sobre la equivalencia pueden incorporarse en las actividades de los niños de primaria, justificado también porque curricularmente el pensamiento algebraico ésta presente en estos niveles escolares. Además, de que también se constata que los niños pueden abordarlas, resultados que son congruentes con aquellos estudios que afirman que los niños pueden pensar algebraicamente.

Es importante mencionar que, durante la recogida de datos de la presente investigación, los estudiantes no tuvieron una preparación previa y, fueron sometidos a este estudio sin haber sido familiarizados con las expresiones. De esta manera, se conjetura que los estudiantes hubieran estado familiarizados con este enfoque, su desenvolvimiento y desempeño hubiera resultado cercano a niveles mayores de algebrización. Por otro lado, aunque el pensamiento algebraico está presente en el currículo de primaria es posible que los niños no estén familiarizados con actividades de tipo estructural (como la de este estudio) o incluso funcional, al menos, no para favorecer grados progresivos en su pensamiento algebraico. Lo previo hace importante formar a los docentes de primaria para que también puedan llevar la enseñanza y orientaciones en el aula de manera adecuada con los niños. Otro punto relevante que se precisa mencionar también, es que se trabajaba contra reloj por los tiempos que el profesor podría brindar para la realización del levantamiento de datos. Esto, de

alguna manera, representó limitaciones para la implementación de la secuencia de tareas diseñadas.

6.2. CONCLUSIONES SOBRE EL PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Respecto al planteamiento del problema, particularmente sobre la pregunta, ¿qué pensamiento algebraico desarrollan los estudiantes de primaria al resolver ecuaciones lineales en un enfoque de álgebra temprana?, se contesta que los estudiantes tienen un pensamiento algebraico de nivel 1, para las actividades que favorecen el registro numérico y que presentan un mayor nivel de algebrización en su pensamiento para actividades simbólicas y pictóricas. De esta manera se logra comprobar la hipótesis en la cual se evidencia que los estudiantes logran desarrollar un pensamiento algebraico con ciertas actividades presentadas con un enfoque de álgebra temprana, aunque no son capaces de solucionar de forma adecuada todas aquellas actividades que involucren un uso más complejo de sus alcances.

Los objetivos de esta investigación se cumplieron de forma eficaz, aunque las actividades dentro del aula no fueron culminadas en su totalidad, ya que se había planteado una sesión en la que los alumnos se les presentarían las mismas equivalencias, pero en una representación algebraica (ver anexos); solo que por motivos de pandemia mundial ya no fue posible seguir con la recogida de datos. Debido a esto sólo se puede concluir con base en los datos recabados.

Sobre los resultados obtenidos en este estudio es posible mencionar que, aunque los datos aquí presentados son confiables, una forma de profundizar en el análisis sería a base de entrevistas semiestructuradas para poder evidenciar las lógicas de algunas respuestas presentadas en la recogida de datos. Por lo que para estudios similares y posteriores es recomendable incluir entrevistas semiestructuradas en el diseño metodológico desde el principio en el planteamiento del problema. Finalmente, se sugiere presentar una investigación en el que los estudiantes tengan que trabajar con números negativos, ya que en esta investigación los estudiantes sólo obtenían como resultado números positivos.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aké, L. P., y Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, 30(2) 171-201. <http://dx.doi.org/10.24844/EM3002.07>
- Bastable, V., y D. Schifter (2001). Classroom Stories: Examples of Elementary Students Engaged in Early-Algebra. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Employing Children's Natural Power to Build Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs: Laurence Erlbaum Associates.
- Blanton, M., y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.) *Proceedings of the 28th international group of the psychology of mathematics education* (Vol.2, pp.135–142). Bergen University College: Bergen, Norway
- Blanton, M.L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-466-
- Booth, L.R. (1999). Children's Difficulties in Beginning Algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking. Grades K-12, Readings from NCTM's school-based journals and others publications* (pp. 299-307). Reston, NCTM.
- Brizuela, B.M. y Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, (Vol. 2, pp. 137-144). Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.
- Burgos, M., y Godino, J. D. (2019). Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática*, 31(3), 117-150.
- Cabañas-Sánchez, G., Salazar, V., y Nolasco-Hesiquio, H. (2017). Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en libros de texto de matemáticas de primaria. En L. Aké y J. Cuevas (Ed). *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques*. México: CENEJUS
- Carpenter, T. P., M. L. Franke y L. Levi (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, Heinemann.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2005). *From children's Mathematics to Thinking Mathematically: Integrating Algebraic Reasoning with the Development of Basic Number Concepts and Skills*. Documento no publicado.
- Carraher, D., A.D. Schliemann y B.M. Brizuela (2000). Early-Algebra, Early Arithmetic: Treating Operations as Functions. *XXII Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ.

- Carraher, D.W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Reston, Virginia: N.C.T.M. e IAP.
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *Revista UNO*, 54, 55-67.
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(2), 1-13.
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, en Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (Eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2011). *Descriptive statistics. Research Methods in Education*. London: Routledge.
- Davis, R. B. (1985). Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour*, 4, 195-208.
- Davydov, V. (1962). An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education*, 8, 27-37.
- Freiman, V., y L. Lee (2004). Tracking Primary Students' Understanding of the Equal Sign. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 415-422). Bergen, Bergen University College.
- Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 5, 391-412.
- Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems is the concept of a variable so difficult for students to understand? En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, (Vol. 1, 49-66). Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.
- Galeano-Torres, O. W. y Váquiro-Vélez L., (2015). *Una propuesta didáctica para la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia utilizando el modelo virtual de la balanza* (Tesis de grado). Universidad del Valle, Valle del Cauca, Colombia.
- Huerta-Moyado, N., y Cabañas-Sánchez, G. (2018). *Pensamiento funcional en niños de quinto grado de primaria*. (Tesis de grado). Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, Guerrero.

- Kaput, J. (1995), A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform? *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus.
- _____ (1998), *Teaching and Learning a New Algebra with Understanding*, National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA.
- _____ (2000), *Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power By "Algebrafying" the K-12 Curriculum*, National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA.
- Kelly, A. E., y Lesh, R. A. (2000). Trends and shifts in research methods. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 35-44). Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C., Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, 7(3), 229-240.
- Kindt, M. (1980), Als een kat om de hete algebrij. *Wiskrant*, 5(21), 155-157.
- Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 47-40). Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.
- López-Mojica, J. M., Cárdenas, C., Sánchez, Y., y Aceves, L. (2017). Pensamiento algebraico de jóvenes con síndrome de Down: la noción de patrón geométrico. En L. P. Aké y J. Cuevas (Eds.) *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques* (pp. 77-96). México: CENEJUS
- National Council of Teacher of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, NCTM.
- Medrano-Moya, A. M., y Tirado-Segura, F. (2017). *Álgebra temprana, Validación cualitativa del pensamiento funcional por representación y transferencia*. En Congreso Nacional de Investigación Educativa, San Luis Potosí.
- Molina, M. (2006), *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada, Universidad de Granada.
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B.M., Ernest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S. et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, (Vol. 4, pp. 127-134). Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

- Schliemann, A.D., Carraher, D. y Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Paidós
- Schlieman, A., Carraher, D., Brizuela, B., y Jones, W. (2011). ¿Pueden los estudiantes más pequeños resolver ecuaciones? En A. Schlieman, D. Carraher y B. Brizuela (Eds.), *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Paidós
- Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., y Gardiner A.M. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(3), 143-166.
- Uclés, R. R., Brizuela, B. M., y Blanton, M. (2020). Kindergarten and First-Grade Students' Understandings and Representations of Arithmetic Properties. *Early Childhood Education Journal*, 1-12.
- Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique*, (pp. 189-199). Paris : La Pensée Sauvage.
- Zapatera, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(1), 87-114.
- SEP (2011). *Programa de estudios 2011*. Guía para el maestro, quinto grado. México.

ANEXOS



ESCUELA PRIMARIA RURAL MATUTINA "JUSTO SIERRA" ACTIVIDAD 1 REPRESENTACIÓN ARITMÉTICA



Nombres: _____

Ejercicio 1

$$5 + 3 - \blacksquare = 5$$

Ejercicio 2

$$\blacksquare + 9 = 13$$

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Ejercicio 3

$$4 = 7 - \blacksquare$$

Ejercicio 4

$$9 = 3 + 3 + \blacksquare$$

Ejercicio 5

$$\blacksquare + 5 = 5 + 2$$

Ejercicio 6

$$8 + 7 = \blacksquare + 8 + 2$$

Ejercicio 7

$$10 - \blacksquare = 8 - 3$$

Ejercicio 8

$$10 + 10 - \blacksquare = 10 + 5$$

Ejercicio 9

$$3 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6$$

Ejercicio 10

$$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times \blacksquare$$

Ejercicio 11

$$3 \times \blacksquare + 5 \times \blacksquare = 6 + 6 + 6 + 6$$

Ejercicio 12

$$7 + 7 + 7 + 7 = 3 \times \blacksquare + 4 \times \blacksquare$$

Ejercicio 13

$$7 \times \blacksquare + 2 = 3 \times \blacksquare + 2 + 4$$

Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

Ejercicio 14

$$5 \times \blacksquare - 3 = 4 \times \blacksquare + 5$$

Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

Ejercicio 15

$$3 \times \blacksquare + 5 = 2 \times \blacksquare + 5 + 3$$

Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

Ejercicio 16

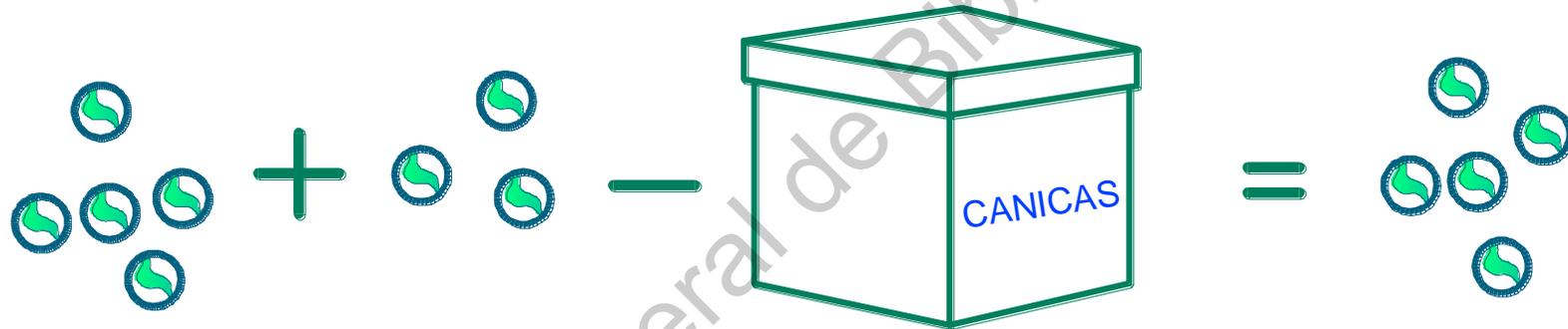
$$9 \times \blacksquare - 6 = 8 \times \blacksquare + 7$$

Recuerda: Tiene que ser el mismo número en los dos recuadros.

ESCUELA PRIMARIA RURAL MATUTINA "JUSTO SIERRA"
ACTIVIDAD 2
REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA

Nombres:

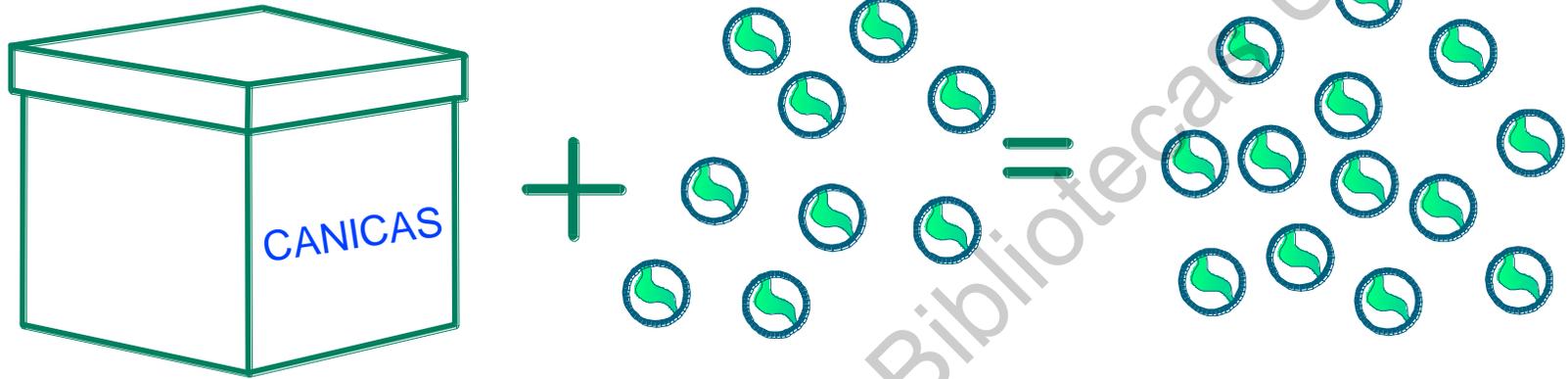
Ejercicio 1



¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Dirección General de Bibliotecas UAQ

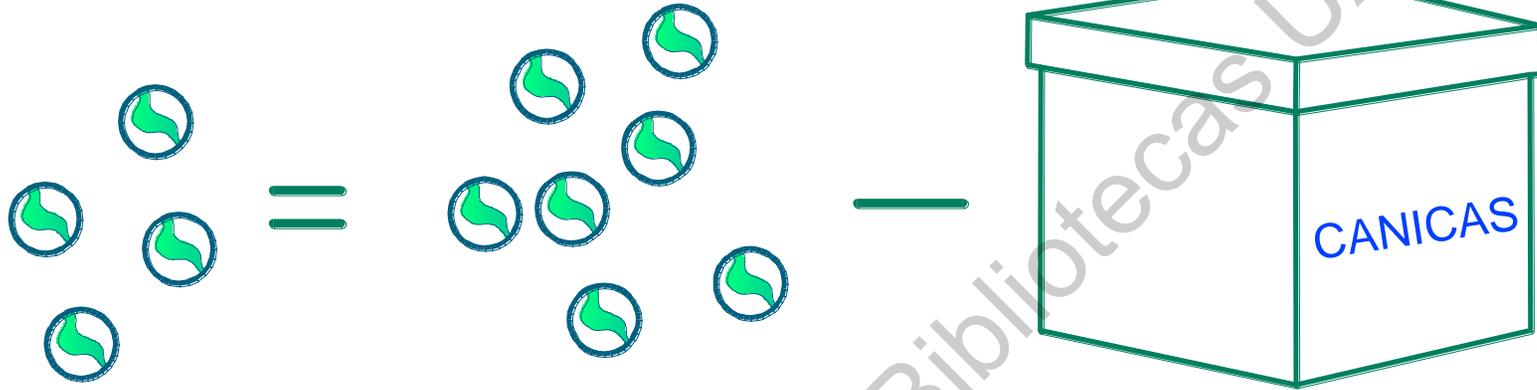
Ejercicio 2



¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Dirección General de Bibliotecas UAQ

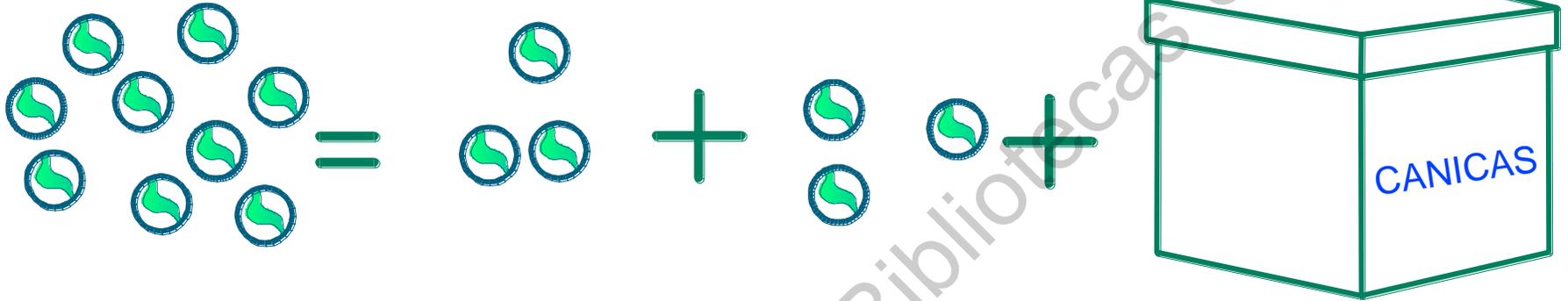
Ejercicio 3



¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Dirección General de Bibliotecas UAQ

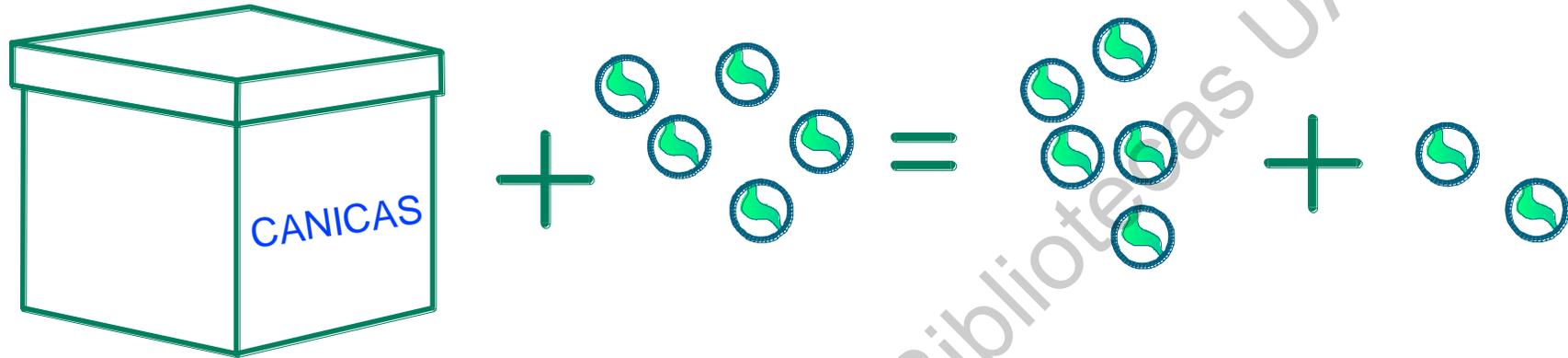
Ejercicio 4



¿Cómo obtuviste tu respuesta?

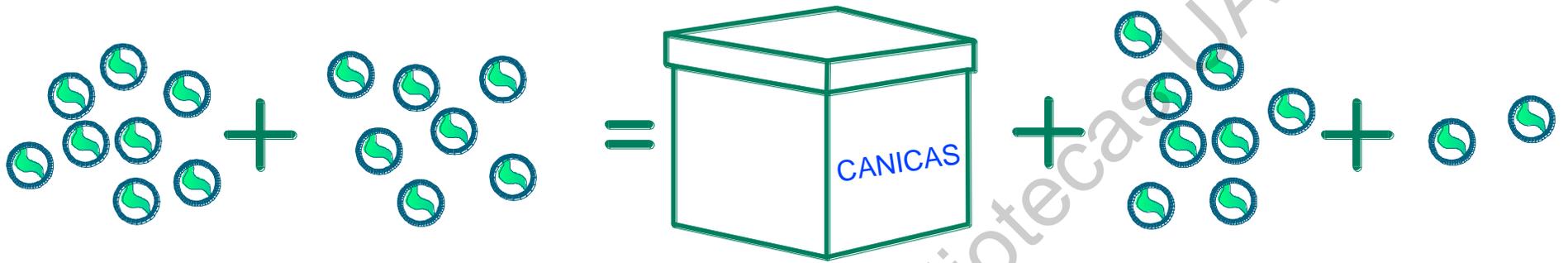
Dirección General de Bibliotecas UAQ

Ejercicio 5



¿Cómo obtuviste tu respuesta?

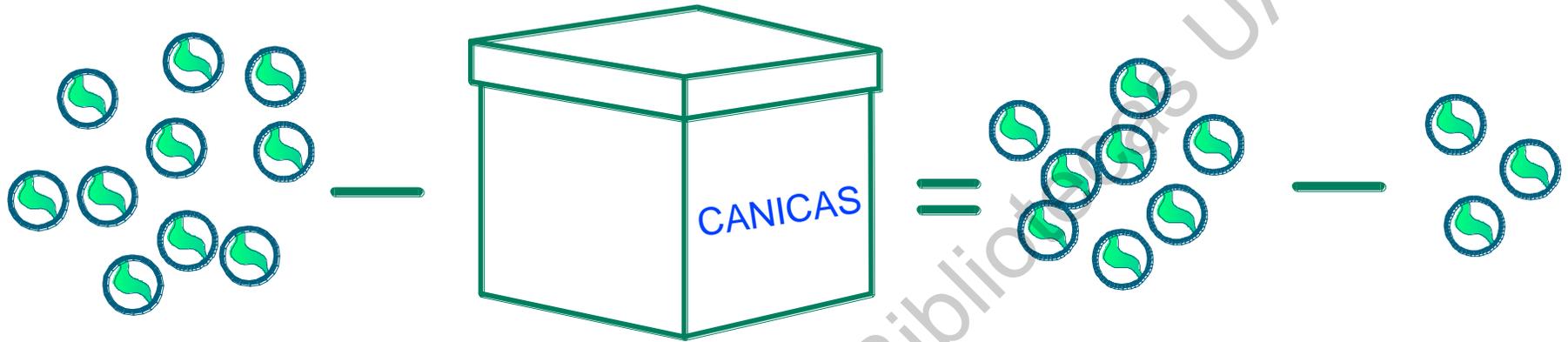
Ejercicio 6



¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Dirección General de Bibliotecas UAQ

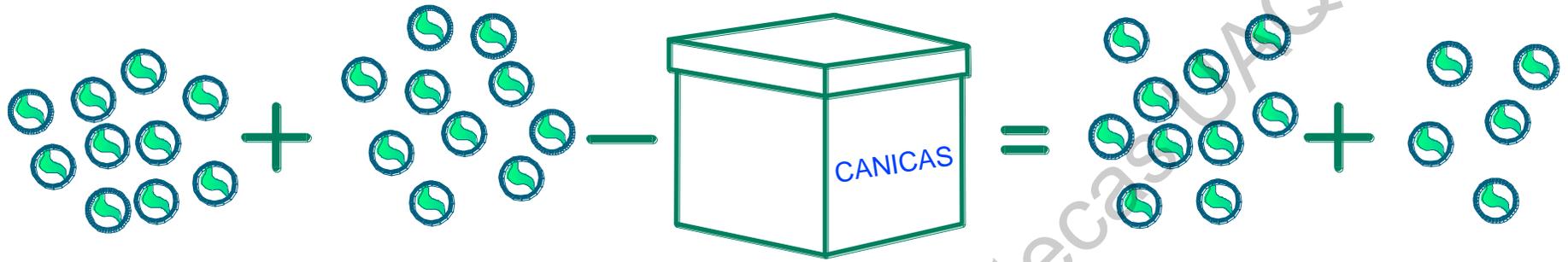
Ejercicio 7



¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Dirección General de Bibliotecas UAQ

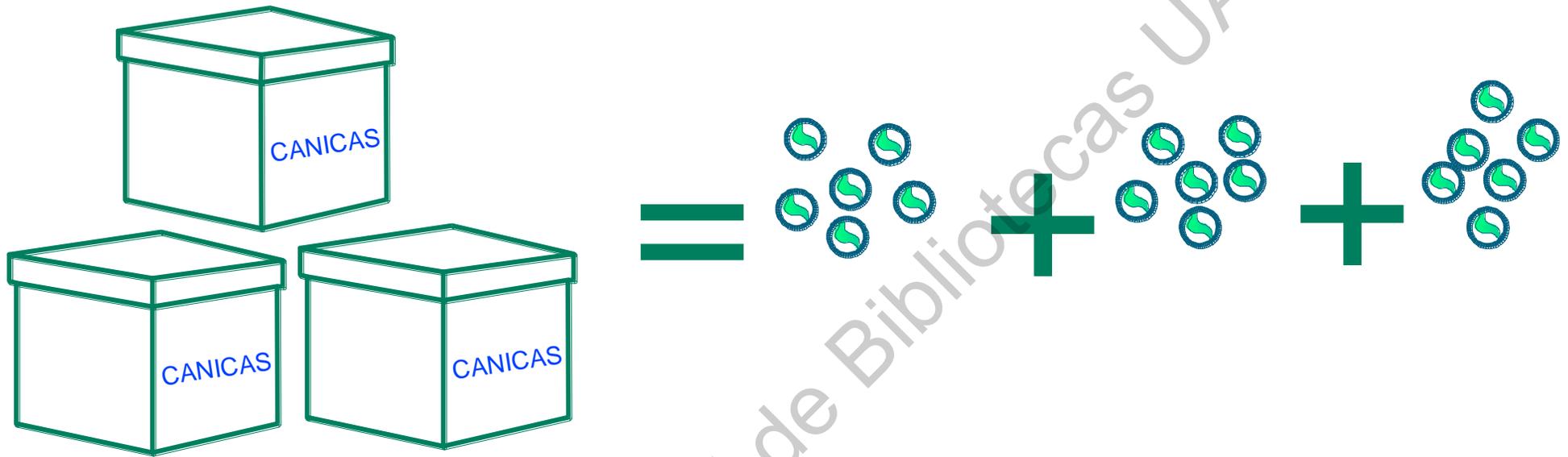
Ejercicio 8



¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Dirección General de Bibliotecas

Ejercicio 9

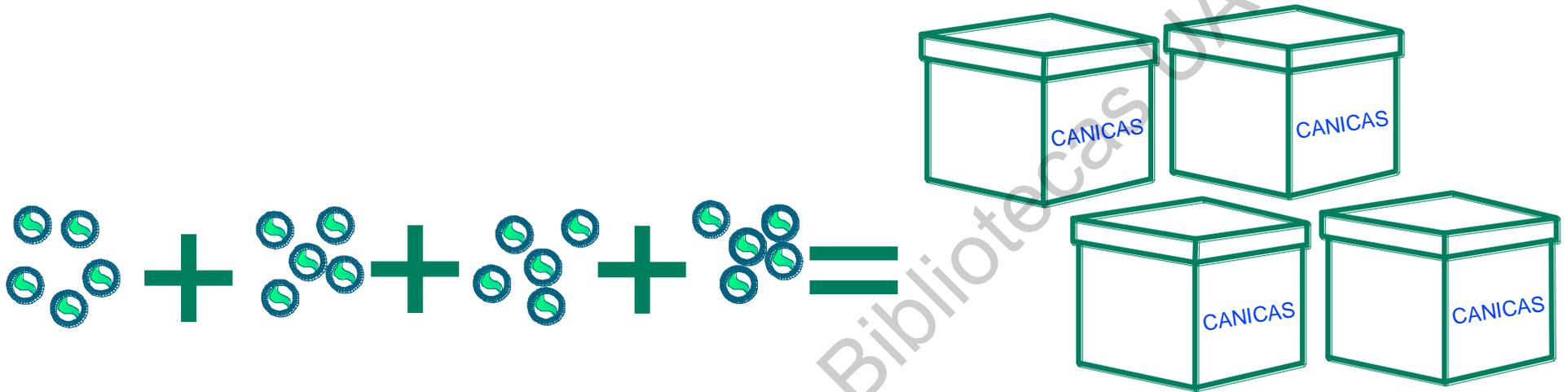


¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Dirección General de Bibliotecas UAQ

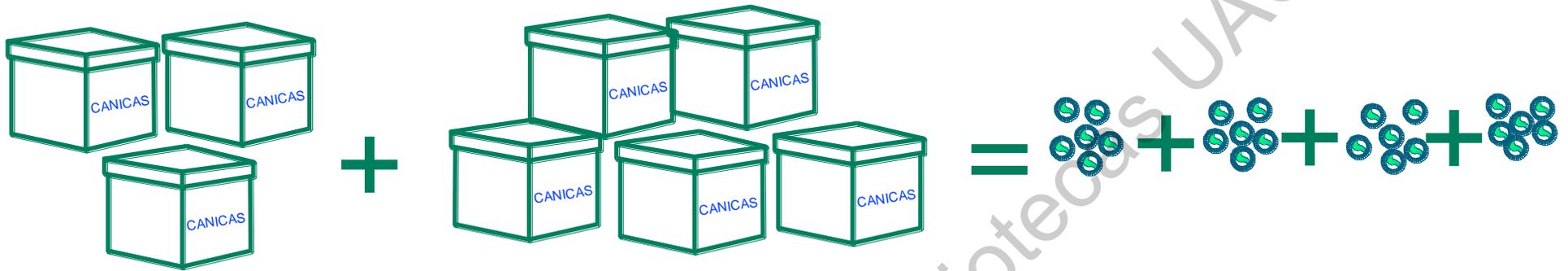
Ejercicio 10



¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

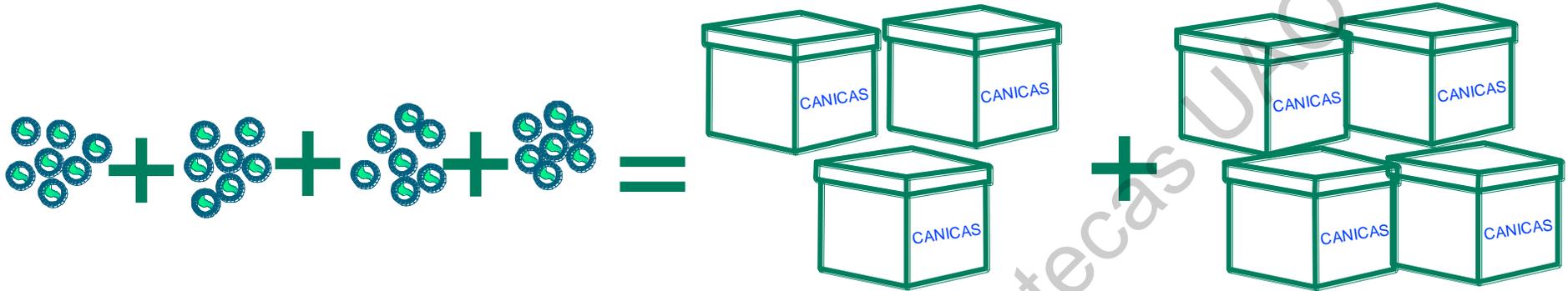
Ejercicio 11



¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Ejercicio 12

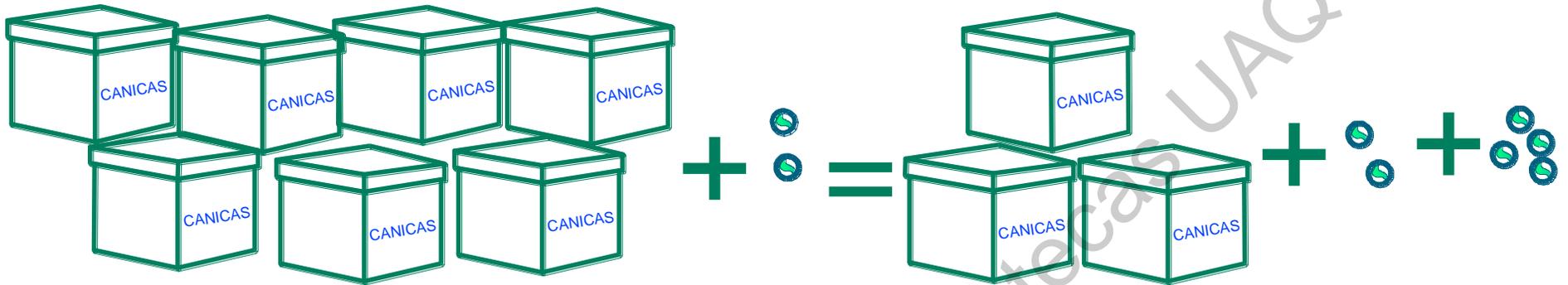


¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Dirección General de Bibliotecas UPR

Ejercicio 13

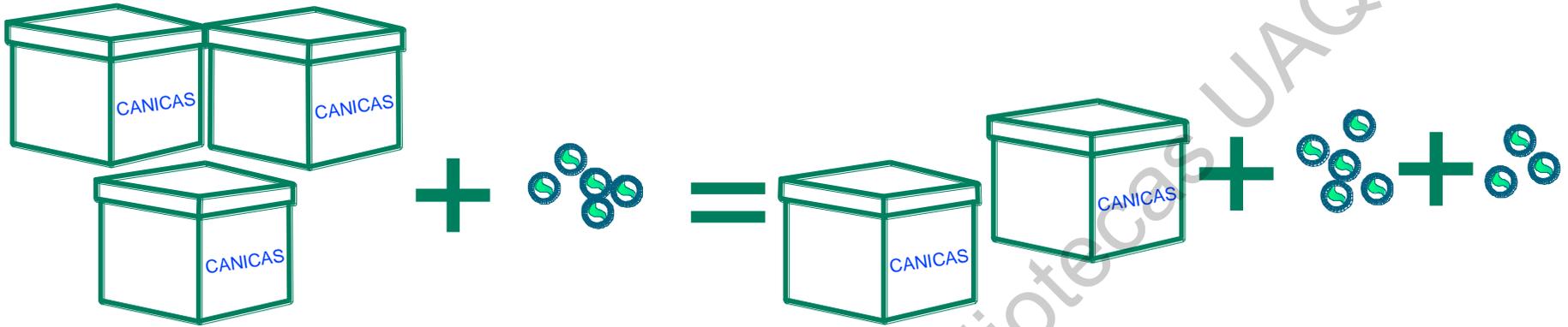


¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Dirección General de Bibliotecas UAQ

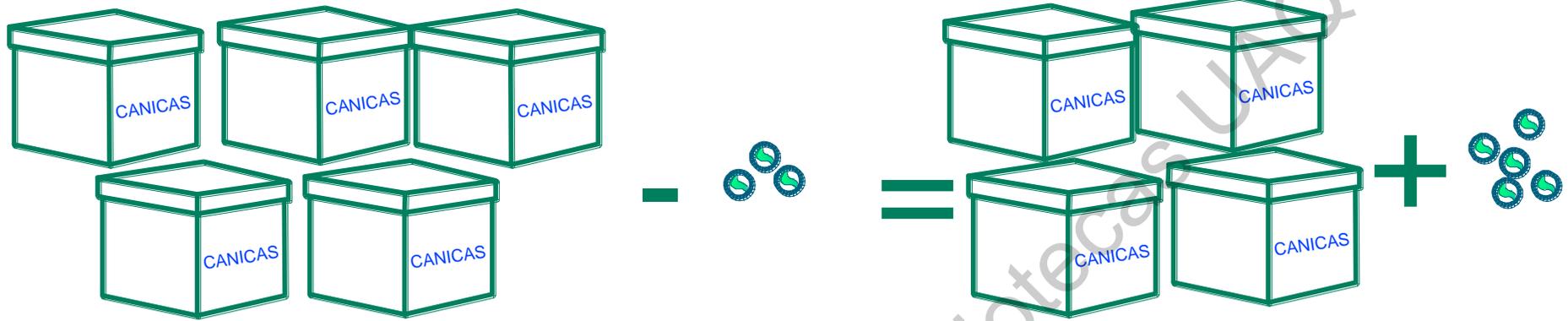
Ejercicio 14



¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Ejercicio 15

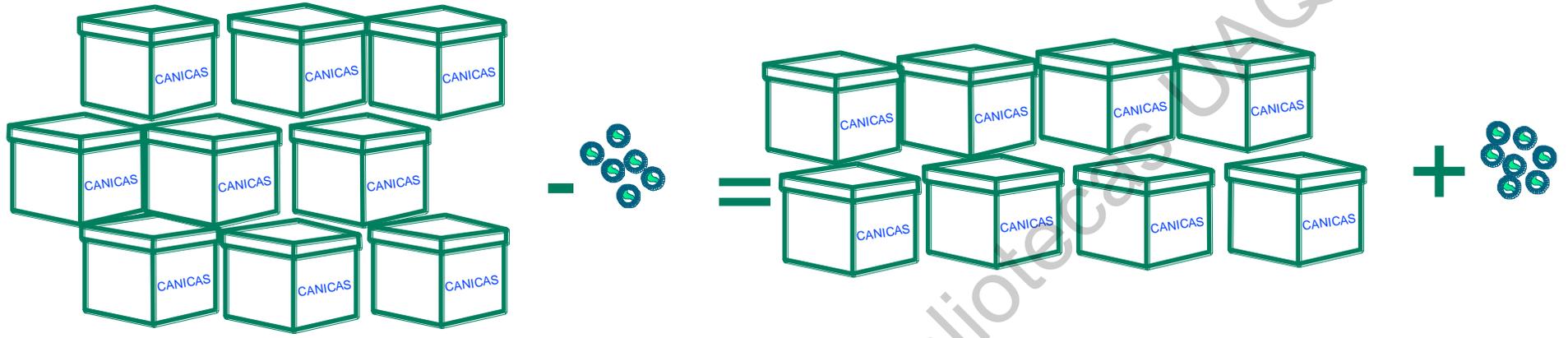


¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Dirección General de Bibliotecas

Ejercicio 16



¡RECUERDA! Cada caja contiene el mismo número de canicas

¿Cómo obtuviste tu respuesta?

Dirección General de Bibliotecas UAQ

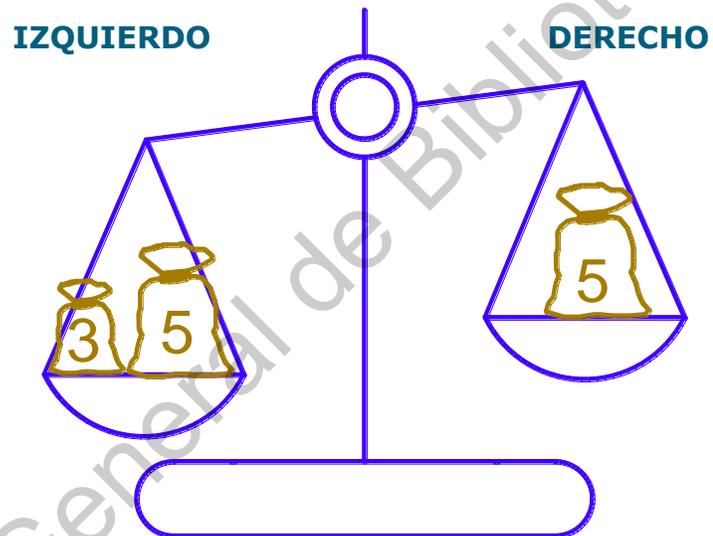


ESCUELA PRIMARIA RURAL MATUTINA "JUSTO SIERRA"
ACTIVIDAD 3
REPRESENTACIÓN PICTÓRICA



Nombres: _____

Ejercicio 1



¿La balanza se encuentra en equilibrio?

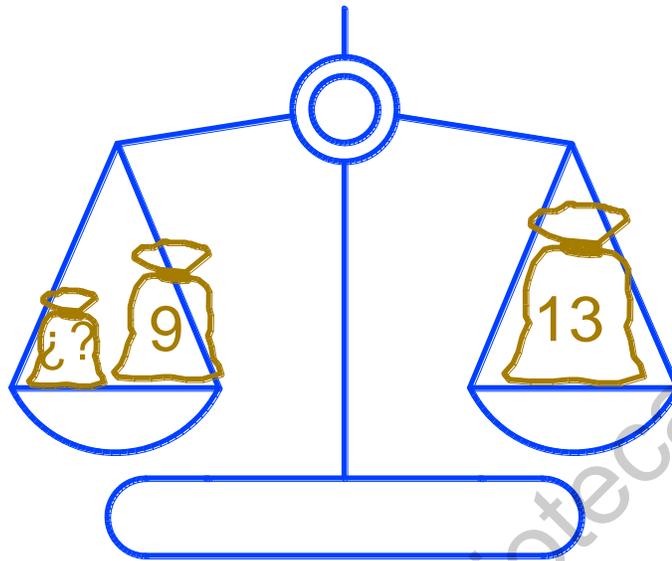
Si tu respuesta es no, ¿de qué lado es necesario quitar peso?

¿Cuánto peso quitarías para que la balanza este en equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?

Dirección General de Bibliotecas UAQ

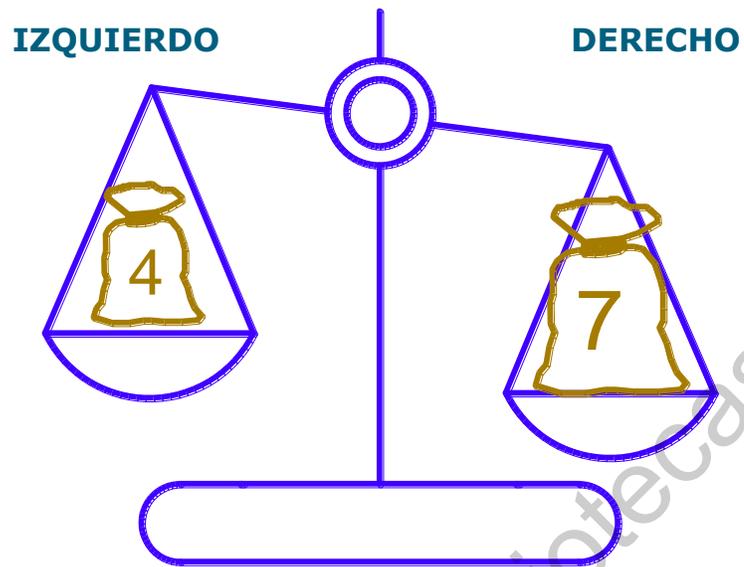
Ejercicio 2



¿Cuánto debe pesar el costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?

Ejercicio 3



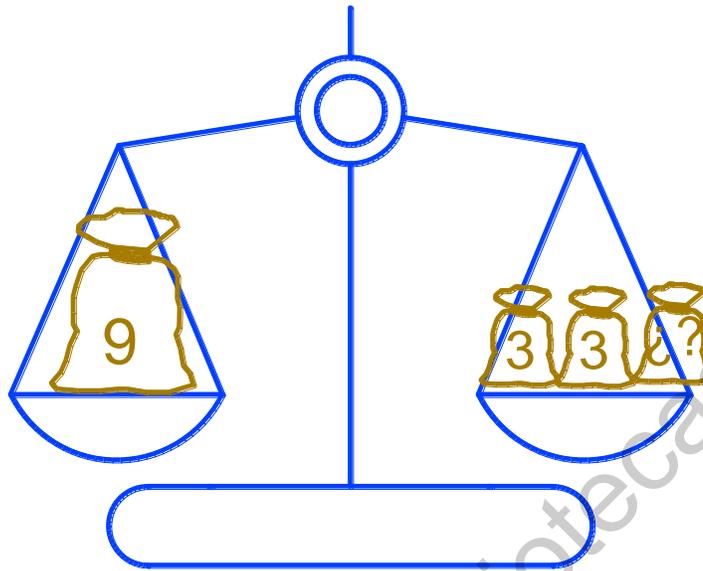
¿La balanza se encuentra en equilibrio?

Si tu respuesta es no, ¿de qué lado es necesario quitar peso?

¿Cuánto peso quitarías para que la balanza este en equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?

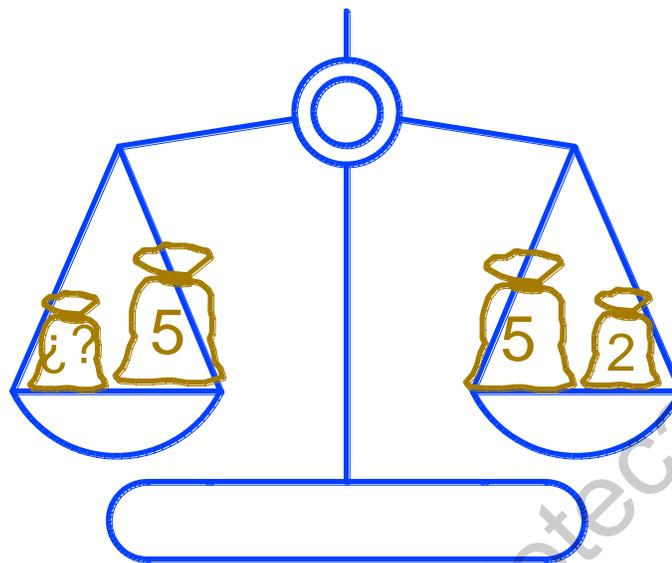
Ejercicio 4



¿Cuánto debe pesar el costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?

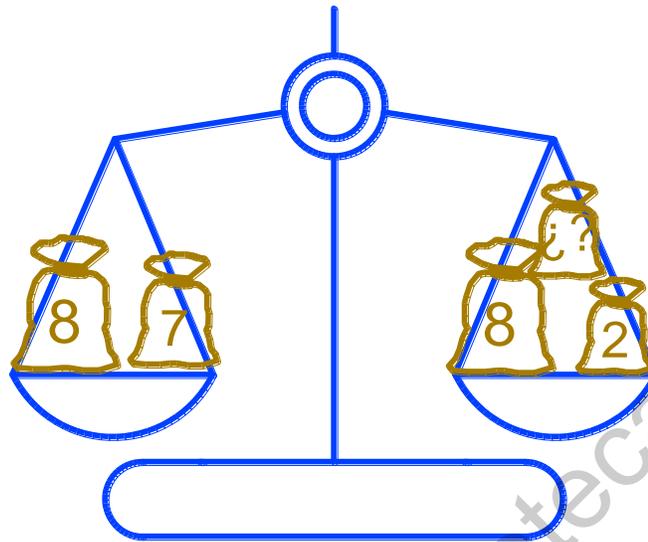
Ejercicio 5



¿Cuánto debe pesar el costal con signos de interrogación (¿?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?

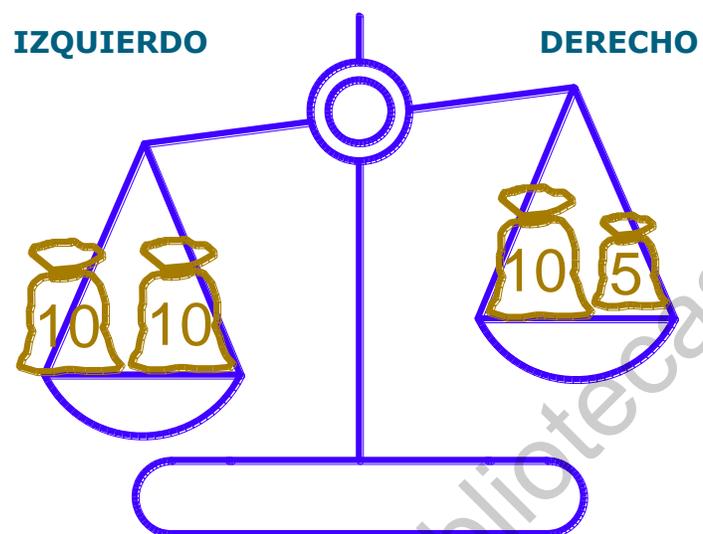
Ejercicio 6



¿Cuánto debe pesar el costal con signos de interrogación (¿?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?

Ejercicio 7



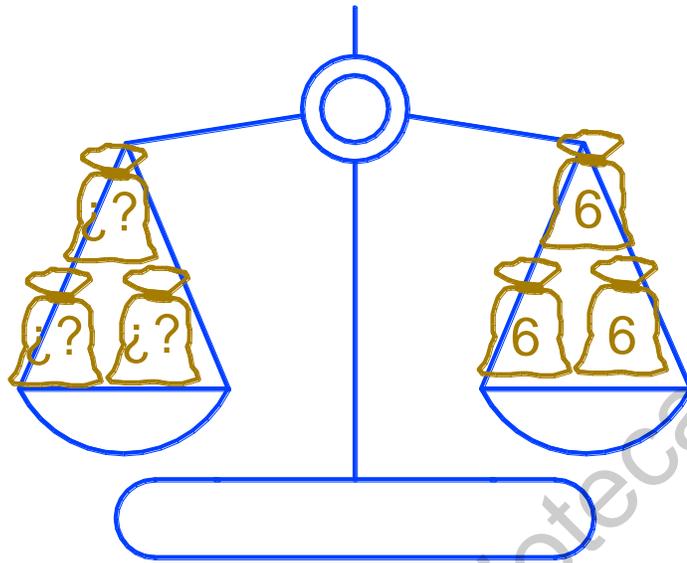
¿La balanza se encuentra en equilibrio?

Si tu respuesta es no, ¿de qué lado es necesario quitar peso?

¿Cuánto peso quitarías para que la balanza este en equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?

Ejercicio 8

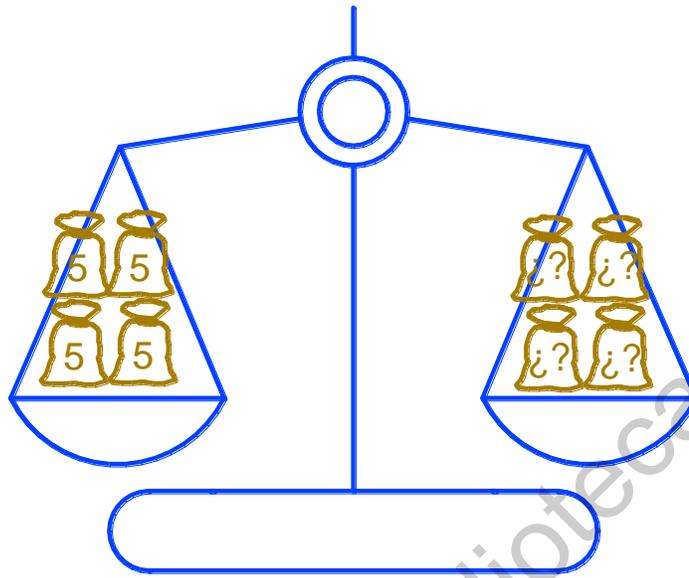


Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?

Ejercicio 9

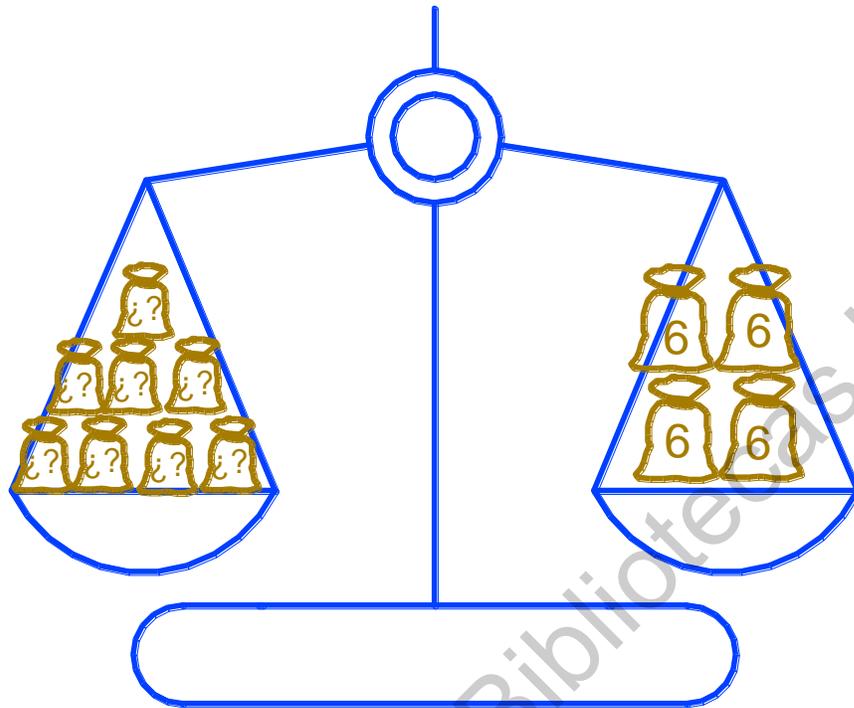


Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?

Ejercicio 10

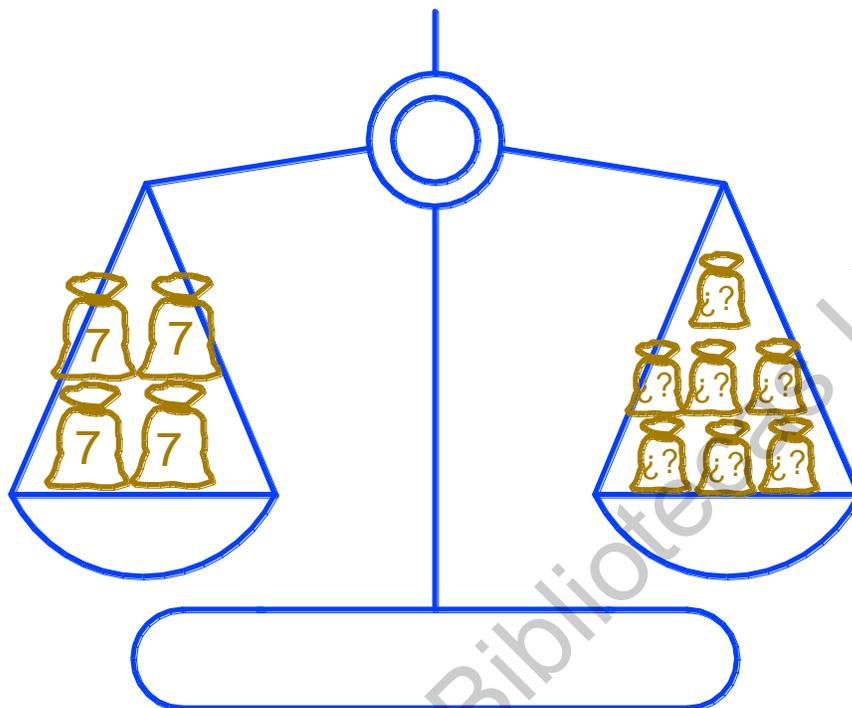


Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?

Ejercicio 11

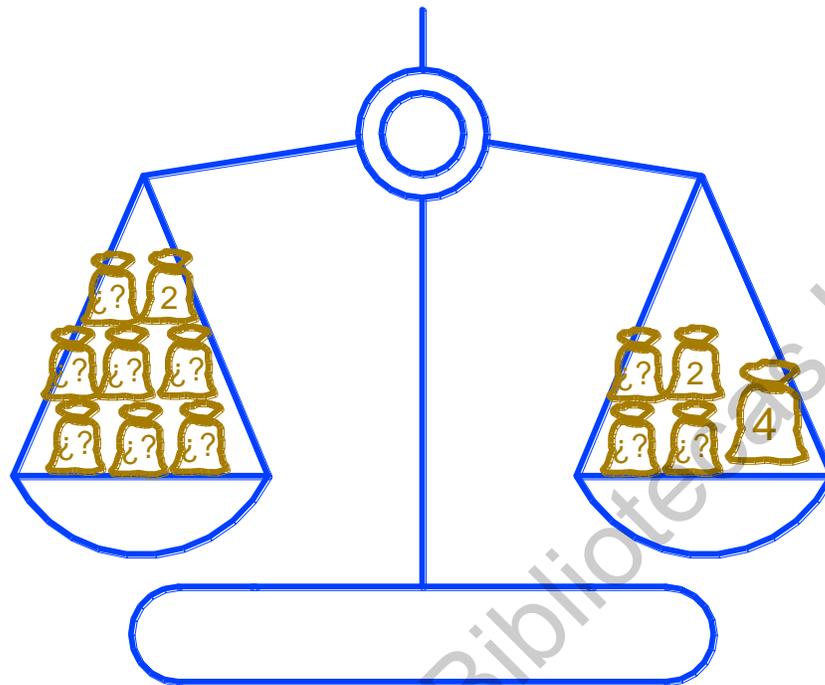


Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?

Ejercicio 12

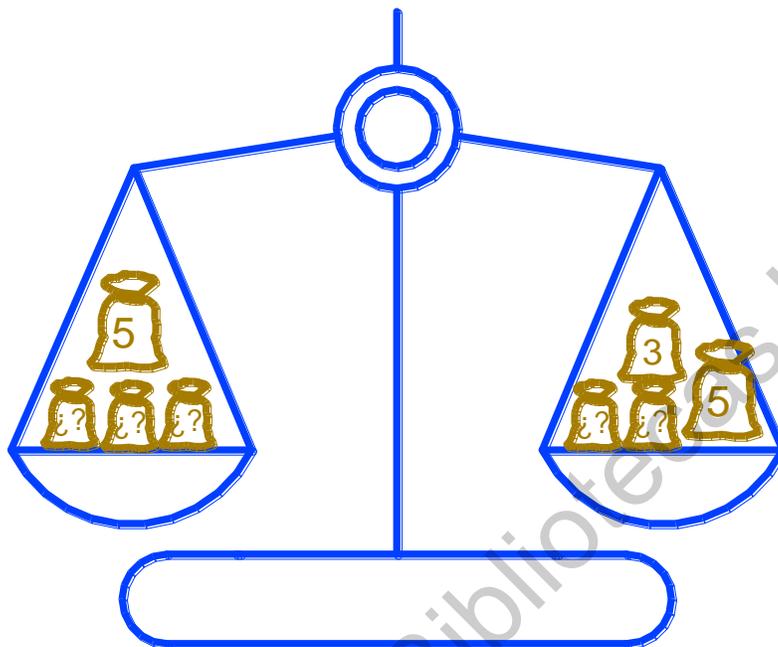


Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?

Ejercicio 13



Si sabemos que los costales con signos de interrogación (?) pesan lo mismo.

¿Cuánto debe pesar cada costal con signos de interrogación (?) para que la balanza conserve el equilibrio?

¿Cómo obtuviste ese resultado?