UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

Facultad de Ingeniería

Maestría en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias

ANÁLISIS DEL SIGNIFICADO DE RAZÓN DE CAMBIO DE LA DERIVADA A PARTIR DEL ESTUDIO SEMIÓTICO DE FUNCIONES

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Maestra en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias

Presenta

Sandra Guadalupe Hernández Leyva

Dirigido por:

M. en C. Luisa Ramírez Granados

Santiago de Querétaro, Querétaro, 2021.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias

ANÁLISIS DEL SIGNIFICADO DE RAZÓN DE CAMBIO DE LA DERIVADA A PARTIR DEL ESTUDIO SEMIÓTICO DE FUNCIONES

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Maestra en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias

Presenta:
Sandra Guadalupe Hernández Leyva

Dirigido por:
M. en C. Luisa Ramírez Granados

SINODALES

M. en C. Luisa Ramírez Granados
Presidente
_________________ Firma

M.D.M. Cecilia Hernández Garciadiego
Secretario
_________________ Firma

M.M.A Iván González García
Vocal
_________________ Firma

Dr. Víctor Larios Osorio
Suplente
_________________ Firma

Dr. Víctor Aguilar Arteaga
Suplente
_________________ Firma

Dr. Manuel Toledano Ayala
Director de la Facultad

Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña
Directora de Investigación y Posgrado

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Junio 2021
México

DEDICATORIAS

A mi esposo por su amor y apoyo incondicional

A mis hijos por su comprensión y cariño

A mis padres por creer en mí

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios, por haberme dado la oportunidad de cumplir una meta más en mi vida profesional.

A mi familia por su amor y aliento, que fueron fundamentales en este camino.

A la Maestra Luisa Ramírez Granados, mi directora de tesis, por su tiempo dedicado, su apoyo, paciencia, disposición y por todas sus enseñanzas.

A mis profesores de la Maestría en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias, por su entrega, por compartir su experiencia y conocimientos, y por la formación tan sólida que me brindaron.

Al Dr. Víctor Aguilar Arteaga y a la M. en C. Luisa Ramírez Granados por su colaboración y apoyo en la elaboración del artículo “Análisis de las praxeologías de razón de cambio de la derivada en libros de texto de Cálculo” aceptado y publicado en la revista Perspectivas de la Ciencia y la Ingeniería.

A mis compañeros Alba Estrella Vázquez y Daniel García, por compartir su experiencia y amistad en este camino que recorrimos juntos.

A todos, gracias.

ÍNDICE

RESUMEN

Esta investigación, aborda uno de los problemas trascendentales en la educación respecto a la enseñanza-aprendizaje de la derivada, que frecuentemente está enfocada a la mecanización de las reglas de derivación generando que los estudiantes no construyan un significado adecuado del concepto de derivada, particularmente de la razón de cambio, afectando así su desempeño en los cursos de Cálculo.

El estudio pretende identificar cómo los estudiantes construyen el significado de razón de cambio de la derivada, cuando interactúan con tareas o actividades específicas en torno a la idea de variación y cambio que implican el tratamiento y articulación de diferentes registros de representación semiótica usando la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) y la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS).

Para lograr lo anterior, se llevó a cabo un diseño experimental que consiste en un conjunto de actividades cuya finalidad es que el estudiante evidencie la interpretación que tiene de la derivada al realizar actividades en torno a la variación y cambio que implican el tratamiento y conversión de distintos registros de representación semiótica, y que justifique sus procedimientos.

ABSTRACT

This research, addresses one of the transcendental problems in education regarding the teaching-learning of the derivative, which is frequently focused on the mechanization of the derivation rules, causing students not to construct an adequate meaning of the derivative concept, particularly of derivative. the rate of change, thus affecting their performance in Calculus courses.

The study aims to identify how students construct the meaning of the rate of change of the derivative, when they interact with specific tasks or activities around the idea of variation and change that imply the treatment and articulation of different records of semiotic representation using Anthropological Theory of Didactics (TAD) and the Theory of Records of Semiotic Representation (TRRS).

To achieve the above, an experimental design was carried out that consists of a set of activities whose purpose is for the student to show his interpretation of the derivative when carrying out activities around the variation and change that imply the treatment and conversion of different records of semiotic representation, and justifying their procedures.

INTRODUCCIÓN

Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada han permitido comprobar la dificultad que presentan los estudiantes en la comprensión de la noción de razón de cambio y cómo la enseñanza del cálculo diferencial tiende a centrarse en la parte algorítmica y algebraica, sin que esto signifique que los estudiantes han alcanzado una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento matemáticos. (Cardona, 2012; Vrancken y Engler, 2014; Sandoval, 2014; Oviedo et al., 2011; Pineda, 2013; Sánchez-Matamoros et al., 2008; Hitt, 2003).

De igual manera, Artigue (1995) menciona que la enseñanza de la derivada enfocada a la mecanización genera que los estudiantes no construyan un significado adecuado del concepto de derivada, la cual genera dificultades en su desempeño en los cursos de cálculo.

En razón de lo anterior, y toda vez que actualmente estos métodos y procedimientos están presentes en los programas de estudio a nivel medio superior, en donde se ha observado que los estudiantes presentan dificultades en la apropiación y manipulación del concepto de la derivada, particularmente de índole cognitivo surge la presente investigación bajo el interés analizar el significado de la noción de razón de cambio de la derivada que tienen los estudiantes al interactuar con distintos tipos de tareas o actividades en torno a la idea de variación y cambio, a través de diferentes técnicas, tecnologías y teorías que favorezcan el tratamiento y articulación de diversos registros de representación semiótica.

De esta manera, se plantea un diseño experimental que consiste en un conjunto de cuatro problemas que implican el tratamiento, articulación y conversión de diferentes registros de representación semiótica, con tareas o actividades específicas, en donde el estudiante usa ciertas técnicas o procedimientos para resolverlas, y evidencia a través su proceso algorítmico o de manera escrita la justificación de cada uno de sus procedimientos obteniendo así el conocimiento matemático, que de acuerdo a Raymond Duval creador de la Teoría de Representaciones Semióticas, “no se puede aprender un concepto matemático sin pasar por el necesario tratamiento y conversión de diferentes registros de representación semiótica”. (Citado en Camargo, 2013).

Hitt (2003), sugiere utilizar diferentes representaciones que permitan abordar los problemas en forma más eficiente y no restringir la enseñanza del cálculo a aspectos algebraicos, y señala que es importante promover la visualización matemática y que el desarrollo de habilidades ligadas a ésta impulsará a los estudiantes a un nivel más profundo de los conceptos propios del cálculo.

A continuación se describen los capítulos que constituyen este trabajo, con la finalidad de ofrecer un panorama de su contenido:

En el primer capítulo de la tesis, se muestra una revisión exhaustiva de los antecedentes en: investigaciones sobre las dificultades en la comprensión del concepto de derivada como razón de cambio; investigaciones sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor, así como investigaciones sobre el significado holístico de la derivada.

En el segundo capítulo se presenta la descripción del problema, los objetivos, la hipótesis y la justificación sobre la que se fundamenta el trabajo.

En el tercer capítulo se hace una descripción detallada de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard, teorías sobre las que se sustenta la presente investigación.

En el cuarto capítulo se presenta la metodología de la investigación, que comprende el ámbito de estudio, enfoque metodológico, la población y muestra así como el diseño de la actividad que contiene cuatro ejercicios en torno a la variación y cambio que implican el tratamiento y articulación de distintos registros de representación semiótica, la cual se aplicó a 24 estudiantes de la asignatura de Álgebra Lineal de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro del semestre 2020-2.

En el quinto capítulo se describen los resultados obtenidos de acuerdo al análisis realizado a las respuestas de los estudiantes de cada uno de los problemas propuestos en la actividad, dicho análisis se fundamentó en la Teoría de Registros de Representación Semiótica y la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

En el sexto capítulo se presentan las conclusiones de la investigación, en primer lugar se plantean las que provienen del análisis de los resultados de cada problema planteado en la actividad, y en segundo lugar las que surgieron durante el desarrollo del estudio además se plantean recomendaciones para los docentes de matemáticas y para estudios posteriores.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

1.1 INVESTIGACIONES SOBRE LAS DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

La historia y epistemología del concepto de derivada como objeto del cálculo diferencial dan cuenta de su complejidad y de los aportes que han hecho durante siglos científicos y matemáticos dedicados al estudio del cálculo, interesados en resolver los problemas que dieron origen a las ideas y métodos del cálculo, como son: a) hallar la ecuación de la tangente a una curva dada en un punto, b)problemas para encontrar máximos y mínimos, c) la velocidad de cuerpos en movimiento, entre otros. (Ávila & Parra, 2013)

Los primeros matemáticos que abordaron estos problemas fueron Pierre de Fermat (1601-1665), Descartes (1596-1650) e Isaac Barrow (1630-1677) quienes desarrollaron métodos para hallar rectas tangentes, y que tuvieron que ver con la formulación final del cálculo a la que llegaron Isaac Newton (1642-1727) y el matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716) que desarrollaron procedimientos para abordar los problemas enunciados.

Actualmente, estos métodos y procedimientos están presentes en los programas de estudio a nivel medio superior, en donde se ha observado que los estudiantes presentan dificultades en la apropiación y manipulación del concepto de la derivada, particularmente de índole cognitivo.

La relevancia de este trabajo tiene evidencia en las investigaciones realizadas en didáctica de la matemática, que aportan las diferentes formas de mirar el desarrollo de la comprensión de la razón de cambio de la derivada por parte de los estudiantes; por ejemplo, Cardona (2012) plantea una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio en estudiantes de universidad, desde el punto de vista histórico, epistemológico, disciplinar y didáctico, y realiza cinco actividades utilizando el método de laboratorio de aprendizaje activo, que en este caso es el aula de clase, en donde el estudiante realiza mediciones, procesos y algoritmos, para luego verificar si sus predicciones fueron ciertas o falsas, dando lugar a la corrección y apropiación de los conceptos, y concluye que el estudio de la derivada como razón de cambio desde un análisis histórico epistemológico permite una mejor comprensión de los conceptos de cómo se venían desarrollando anteriormente.

Vrancken & Engler (2014) consideran un primer acercamiento visual e intuitivo de la derivada, atendiendo tres aspectos básicos: cambio, razón media de cambio y razón instantánea de cambio, utilizando como base teórica la del Pensamiento y Lenguaje Variacional. En el contexto de Ingeniería Didáctica diseñan una secuencia de actividades en las que los alumnos analizan diversos escenarios de variación, caracterizan las variaciones entre magnitudes a través del cálculo de razones de cambio, y exploran cómo la pendiente de una curva se relaciona con la razón de cambio, concluyendo de esta manera que la incorporación de elementos variacionales favorece la construcción de la derivada, el tratamiento y articulación con los distintos sistemas de representación.

Sandoval (2014) presenta una propuesta didáctica sobre el aprendizaje de la derivada a fin de atender las dificultades que presentan los estudiantes como son: la comprensión del concepto de derivada, la relación entre razón de cambio promedio y razón de cambio instantáneo, la concepción de la derivada como función y el análisis y obtención de información importante de situaciones gráficas; tomando como marco teórico la Teoría de Registros Semióticos de Duval (1998, 2004) y la metodología de Design Experiment Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer, Schauble y Hodge (2003). Los instrumentos que utilizaron para el registro de los datos del experimento fueron fichas de observación, fichas de actividades relacionadas con la comprensión de la derivada donde analizan el uso de diversos registros de representación, grabaciones de audio y video en donde los estudiantes exponen sus ideas y pensamientos en forma voluntaria, se comentan los aciertos y errores y el docente interviene para cerrar el laboratorio formalizando el concepto de estudio. Los resultados mostraron que los estudiantes lograron una mejor comprensión del concepto de derivada.

Oviedo et al. (2011), presentan un análisis sobre el rol que juegan los distintos registros semióticos de representación en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, la importancia del dominio de los mismos, y exhorta al docente a hacer hincapié en los diferentes registros y sus representaciones, en el tratamiento de los mismos y en la conversión de un registro a otro de tal manera que el estudiante pueda comprender mejor los temas matemáticos de estudio.

Salazar et al. (2009) presentan un estudio de caso que describe los niveles de comprensión del concepto de derivada de seis estudiantes, el marco teórico utilizado es la Teoría APOE de Dubinsky, se concentran en el desarrollo del esquema de la derivada a través de tres niveles: Intra, Inter y Trans (Piaget & García 1983, 1989), y deducen el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes a partir del análisis de las respuestas que dieron a diferentes problemas planteados en tres cuestionarios, encontrando una tendencia en algunos estudiantes a interpretar la derivada en términos algorítmicos evidenciando de esta manera la dificultad para transitar de la gráfica de la función hacia la gráfica de la función derivada.

Sánchez-Matamoros et al. (2008) realizan un análisis de las dificultades que los estudiantes de bachillerato y primeros años de la universidad presentan en la comprensión de la noción de derivada a través de la revisión de las investigaciones hechas en Matemática Educativa. Derivado del análisis detectaron tres ámbitos en que se desarrolla la comprensión de la noción de derivada: El primero ocurre en la relación entre los conceptos básicos de razón de cambio y cociente incremental que dan forma a la derivada de una función en un punto; el segundo en los sistemas de representación, cuya integración origina una dimensión necesaria para el desarrollo de la comprensión; el tercero en la relación entre la derivada de una función en un punto y la función derivada y el operador derivada. Sugieren que la investigación realizada se pueda completar y ampliar con los estudios que aborden nuevas líneas de investigación sobre cómo los estudiantes adoptan un significado y usan el concepto de derivada.

Si bien es cierto, uno de los grandes logros intelectuales de la civilización ha sido el desarrollo del Cálculo, como una herramienta muy importante para la investigación de problemas científicos; también lo es, que su enseñanza-aprendizaje se identifica por ser una fuente de serios problemas, principalmente en lo referente a la comprensión de sus ideas fundamentales, Hitt (2003), sugiere utilizar diferentes representaciones que permitan abordar los problemas en forma más eficiente y no restringir la enseñanza del cálculo a aspectos algebraicos, y señala que es importante promover la visualización matemática y que el desarrollo de habilidades ligadas a ésta impulsará a los estudiantes a un nivel más profundo de los conceptos propios del cálculo.

1.2 INVESTIGACIONES SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR

El desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus profesores, determinar los conocimientos que un profesor debe tener para desarrollar eficazmente su práctica y facilitar el aprendizaje de los estudiantes constituye un campo de investigación en Matemática Educativa.

En este sentido, Godino (2009), Pino-Fan (2010), Pino-Fan et al. (2010), Pino-Fan et al. (2011), Pino-Fan (2011) proponen en sus diversos trabajos un modelo de “conocimiento didáctico-matemático” que permite categorizar y analizar los conocimientos del profesor, mediante la aplicación del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática tomando en cuenta seis facetas o dimensiones del conocimiento didáctico-matemático:

- Epistémica
- Ecológica
- Cognitiva
- Afectiva
- Interaccional
- Mediacional.

Además de estas facetas proponen una serie de niveles y pautas para la formulación de consignas que permita evaluar dicho conocimiento didáctico-matemático en los profesores.

La primera propuesta es que la faceta epistémica incluya y refine el conocimiento del contenido; es decir, el conocimiento común, especializado, y ampliado a través de los siguientes ítems de evaluación:

- Resuelve la tarea como parte de la faceta epistémica conocimiento común
- Elabora la configuración de objetos y procesos en las soluciones aceptables de la tarea:
    - ❖ Tipos de problemas: Identifica las variables de la tarea; generaliza o particulariza el enunciado.
    - ❖ Lenguajes: Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
    - ❖ Procedimientos: Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos ya sean intuitivos o formales.
    - ❖ Conceptos/propiedades: Identifica los conceptos y propiedades en las soluciones.
    - ❖ Argumentos: Explica y justifica las soluciones.
- Identifica posibles generalizaciones y conexiones de la tarea con otros temas más avanzados como parte de la faceta epistémica conocimiento ampliado.

La segunda propuesta es la unión de la faceta cognitiva y afectiva que refina el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes a través de los siguientes ítems de evaluación.

- Describe las estrategias, representaciones, enunciados y argumentaciones que los estudiantes han desarrollado al resolver la tarea propuesta como parte de la faceta cognitiva.
- Describe los principales tipos de errores y dificultades en la resolución de la tarea por los alumnos.
- Formula cuestiones que permitan explicitar los significados personales de los alumnos al resolver ese tipo de tareas como parte de la faceta de evaluación de los aprendizajes.
- Describe estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de las tareas planteadas como parte de la faceta afectiva a través de actitudes, emociones, creencias, valores.

La tercera propuesta es la unión de la faceta interaccional y mediacional que refina el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza a través de los siguientes ítems de evaluación.

- Describe la configuración didáctica que implementará usando la tarea matemática dada; es decir, el rol del profesor y del alumno en relación con la tarea, el modo de interacción entre el profesor y el alumno, los recursos materiales y el tiempo asignado.
- Describe otra tarea relacionada con la tarea dada y el modo de gestionar la secuencia de configuraciones didácticas.

Finalmente, la faceta ecológica refina y se vincula con el conocimiento del currículo y las conexiones intra e interdisciplinares.

- Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea propuesta como parte de las orientaciones curriculares en la faceta ecológica.

- Explica las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de ésta como parte de las conexiones intradisciplinares en la faceta ecológica.
- Explica las conexiones que se pueden establecer con otra materia del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de ésta como parte de las conexiones interdisciplinares en la faceta ecológica.
- Identifica factores de índole social o material que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo implementado como parte de otros factores condicionantes en la faceta ecológica.

Poco a poco este modelo de conocimiento matemático fue avanzando en la caracterización de los conocimientos de los profesores de matemáticas atendiendo a la necesidad de concretar los conocimientos en temas matemáticos específicos, considerando para ello aspectos teóricos y empíricos que les permitieron replantear el conocimiento especializado de la derivada en dos niveles los cuales están vinculados con otras facetas del conocimiento de los profesores. El primer nivel, de aplicación, relacionado con la faceta interaccional y mediacional en donde los profesores deben hacer uso de diversas representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, así como usar diversos significados parciales de un objeto matemático, para resolver tareas sobre derivadas para un desempeño idóneo de su práctica de enseñanza. El segundo nivel, de identificación, relacionado con las facetas cognitiva y afectiva, se refiere a la competencia de los profesores para identificar de manera previa, durante y posterior a la implementación de una actividad de enseñanza, conocimientos y significados de los objetos matemáticos, así como los conflictos y errores que pueden presentar sus alumnos.

Lo anterior, evidencia que las prácticas matemáticas, objetos y procesos de significación son una herramienta potente para la identificación y caracterización de los conocimientos especializado y ampliado ya que proporciona pautas y criterios para analizar los conocimientos de los profesores.

1.3 INVESTIGACIONES SOBRE EL SIGNIFICADO HOLÍSTICO DE LA DERIVADA

El significado global de la derivada también denominado significado holístico, puede tener varias configuraciones epistémicas compuestas de los objetos que intervienen y surgen de los sistemas de prácticas matemáticas en diferentes contextos de uso, las cuales a su vez llevan asociadas un significado parcial distinto para dicho objeto matemático (Font & Godino, 2006).

Estas prácticas matemáticas se componen de acciones y comunicaciones tanto personales, que hacen referencia a los significados construidos por el estudiante, como institucionales que hacen referencia a los significados desarrollados y compartidos en una institución las cuales permiten abordar situaciones matemáticas en las que interviene el objeto matemático, que de acuerdo al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático (ESO) los objetos matemáticos son situaciones problema como tareas, aplicaciones, ejemplos que se trabajan haciendo uso de lenguaje ya sea verbal-escrito, simbólico, gráfico, tabular, numérico que involucra conceptos, definiciones, proposiciones, propiedades, teoremas y argumentos que permiten justificar las propiedades. Al articularse estos objetos matemáticos en las configuraciones ontosemióticas, éstos pueden ser configuraciones epistémicas al hacer referencia a los significados y prácticas de la matemática o bien a configuraciones cognitivas cuando hacen referencia a los significados de los estudiantes (Font & Godino, 2006).

De esta forma, el objeto derivada, a lo largo de su evolución histórica ha adoptado nueve significados distintos, Pino-Fan et al. (2011), plantean la reconstrucción del significado global de la derivada a partir de estos significados parciales identificados y sus respectivas configuraciones epistémicas organizados de acuerdo a tres problemáticas generales: problemas sobre las tangentes, problemas sobre máximos y mínimos y problemas sobre velocidades.

Estas nueve configuraciones asociadas al sistema de prácticas son:

1) La tangente en la matemática griega (CE_1).

2) Variación en la edad media (CE_2).

3) Métodos algebraicos para hallar las tangentes (CE_3).

4) Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes (CE_4).

5) Ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos (CE_5).

6) Métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes (CE_6).

7) Cálculo de fluxiones (CE_7).

8) Cálculo de diferencias (CE_8).

9) La derivada como límite (CE_9).

Las cuales debido a similitudes que tienen algunas de ellas, se agrupan en tres tipos de configuraciones epistémicas:

- "tangentes": CE_1, CE_3, $CE_{6,}$ $CE_{8.}$
- "variación, velocidades": CE_2, CE_4, CE_7 y,
- "máximos y mínimos":$CE_{5\,,}$ $CE_{9.}$

La consideración conjunta de ellas y sus relaciones es lo que conforma, primordialmente, el significado epistémico global de la derivada.

CAPÍTULO 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Históricamente el concepto de derivada ha estado ligado al estudio de problemas de variación, lo cual implica cuantificarla en un intervalo y en un instante, establecer diferencias en intervalos y conjeturar sobre las variaciones.

Caballero & Cantoral (2013), consideran importante entender qué es, en qué consiste y cómo se desarrolla el pensamiento variacional, ya que éste se caracteriza por estudiar situaciones o fenómenos propios de la matemática, de las ciencias naturales, sociales y humanas que involucren un cambio, en donde sea necesario cuantificar y analizar ese cambio para predecir estados futuros, privilegiando los conocimientos matemáticos propios del cálculo más allá de la sola manipulación algebraica.

Según, Artigue (1995) la enseñanza de la derivada enfocada a la mecanización genera que los estudiantes de bachillerato no construyan un significado adecuado del concepto de derivada; ésta construcción parcial del concepto puede generarles dificultades en su desempeño en los cursos de cálculo, siendo éste uno de los problemas más trascendentales en la educación. Con base en esto surge la presente investigación con la finalidad de indagar las nociones relacionadas con la razón de cambio de la derivada, que construyen los estudiantes cuando interactúan con distintos tipos de tareas o actividades específicas en torno a la idea de variación y cambio, a través de diferentes técnicas, tecnologías y teorías que favorezcan el tratamiento y articulación de diversos registros de representación semiótica. Entonces, para desarrollar la presente investigación nos preguntamos.

¿Cómo construyen los estudiantes el significado de razón de cambio de la derivada, cuando interactúan con tareas o actividades específicas en torno a la idea de variación y cambio que implican el tratamiento y articulación de diferentes registros de representación semiótica?

Los elementos teóricos nos permitirán dar respuesta a la pregunta de investigación.

2.2 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

2.2.1 OBJETIVO GENERAL

Identificar cómo los estudiantes construyen el significado de razón de cambio de la derivada, cuando interactúan con tareas o actividades específicas en torno a la idea de variación y cambio que implican el tratamiento y articulación de diferentes registros de representación semiótica.

2.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Diseñar e implementar actividades que les permitan a los estudiantes construir el significado de razón de cambio de la derivada a través de la representación semiótica de funciones.
- Analizar las interpretaciones que tienen los estudiantes al realizar las actividades de razón de cambio a través de la representación semiótica de funciones.
- Clasificar las interpretaciones de los estudiantes utilizando para ello la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) y la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS).

2.3 HIPÓTESIS

El tratamiento de tareas y actividades en torno a la variación y cambio, y la articulación de sus diferentes registros de representación semiótica, favorecen la construcción del significado de la razón de cambio de la derivada.

2.4 JUSTIFICACIÓN

Investigaciones en didáctica de la matemática sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, evidencian las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de la noción de razón de cambio y cómo la enseñanza del cálculo tiende a centrarse en la parte algorítmica y algebraica, sin que esto signifique que los estudiantes han alcanzado una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento matemáticos (Cardona, 2012; Vrancken & Engler, 2014; Sandoval, 2014; Oviedo et al., 2011; Pineda, 2013; Sánchez-Matamoros et al., 2008; Hitt, 2003).

La investigación de Sánchez-Matamoros et al. (2008) sobre la enseñanza y el aprendizaje del lenguaje variacional y el cálculo permite comprobar la dificultad de aprender tales conceptos; esta dificultad se debe principalmente a que los estudiantes no han construido un significado adecuado del concepto de derivada; es decir, a pesar de que los estudiantes sean capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación; tienen dificultades cuando necesitan manejar el significado de noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite de cociente incremental o en su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente, por lo que la construcción de un significado parcial del concepto de derivada puede generarles dificultades en su desempeño en los cursos de cálculo.
Por tal motivo, es necesario comprender los procesos a través de los cuales los estudiantes construyen la noción de razón de cambio de la derivada a través de representaciones semióticas de funciones.

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

3.1 TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA (TRRS)

El estudio de signos-síntomas, conocido como semiótica, reconocida como disciplina científica hasta el siglo XIX, nace a raíz de la dificultad sobre la comprensión y la necesidad de recurrir a otro tipo de representaciones que conforman el lenguaje de las matemáticas.

Sierpinska (1990, citada en Godino), considera que existe una fuerte relación entre "significado" y "comprensión", "Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado". Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión. La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos"

Como hemos visto, el término 'significado' está fuertemente ligado con el término "comprensión". Se considera esencial que los estudiantes conozcan el significado de los términos, expresiones, representaciones, o sea, a qué hace referencia el lenguaje matemático en sus diferentes registros.

La complejidad del problema semántico del lenguaje matemático se incrementa por la variedad de registros semióticos utilizados en la actividad matemática (uso del lenguaje ordinario, oral y escrito, símbolos específicos, representaciones gráficas, objetos materiales, etc.). Además, no sólo nos interesa analizar el "significado" de los objetos lingüísticos matemáticos, sino también los diversos "objetos matemáticos" (situaciones problemas, técnicas, conceptos, proposiciones, argumentaciones, teorías, etc.).

En términos generales hay dos escuelas de pensamiento en la lingüística que abordan la cuestión del significado desde puntos de vista diferentes: la tendencia "analítica" o "referencial", que intenta apresar la esencia del significado resolviéndolo en sus componentes principales, y la tendencia "operacional", que estudia las palabras en acción y se interesa menos por qué es el significado por cómo opera.

El análisis del significado de los objetos matemáticos está estrechamente relacionado con el problema de las representaciones externas e internas de dichos objetos.

La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión ontológica y epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia.

Raymond Duval creador de la Teoría de Representaciones Semióticas plantea que para tener acceso al conocimiento matemático es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas; tales como, registro verbal, registro tabular, registro gráfico, registro algebraico, registro simbólico y registro formal y considera que "no se puede aprender un concepto matemático sin pasar por el necesario tratamiento y conversión de diferentes registros de representación semiótica" (Citado en Camargo, 2013).

Duval (1998) define las representaciones semióticas como producciones humanas constituidas por el empleo de signos y que pertenecen a un sistema de representación, y la utilización de varios sistemas de representación como un enunciado en lengua natural, una figura geométrica, una expresión algebraica son esenciales para el ejercicio y el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales.

Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

1) La formación de una representación identificable dentro de un registro semiótico dado, por ejemplo, el enunciado de una frase, la elaboración de un dibujo o esquema, de una gráfica, la escritura de una expresión algebraica, etc.

2) El tratamiento de una representación, que es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada.

3) La conversión de una representación; es decir, la transformación de esta representación en una representación dentro de otro registro, por ejemplo, la transformación de una expresión algebraica en una gráfica, o viceversa. Estas dos últimas están relacionadas con las transformaciones posibles entre las representaciones

Asimismo, Duval (1998) considera que el problema central del aprendizaje en matemáticas está asociado a la transformación de conversión, ya que implica el reconocimiento de representaciones totalmente diferentes, producidas desde registros diferentes, como representaciones de un mismo objeto; razón por la cual es importante que los estudiantes se apropien de una variedad de sistemas semióticos de representación; en especial, de la posibilidad de transformar una representación semiótica en otra.

Si bien es cierto, esta coordinación de registros de representación no es una actividad simple, si es esencial para la actividad matemática. Rojas (2013) considera fundamental reconocer la importancia de las representaciones semióticas, de su diversidad y de las múltiples posibilidades de dichas representaciones, no solo contar con diversos registros de representación, sino también escoger cuál de ellos permite representar mejor el rasgo que se quiere destacar, teniendo en cuenta a quién se quiere comunicar; por lo tanto, la elección depende de la comunidad en la cual se desarrolla la comunicación y de la intencionalidad.

Según Rojas (2013), para Duval (1998) los objetos de conocimiento en matemáticas y sus aprendizajes se basan en la toma de conciencia de tales objetos, la cual surge cuando se ha tomado conciencia de que dos presentaciones diferentes (imágenes, ideas, etc.) son presentaciones de un mismo objeto, y que el paso de una a la otra da acceso indirecto a un invariante que no debe ser confundido con ninguna de sus presentaciones.

Duval llama semiosis a cualquier actividad, conducta o proceso que involucre signos, que se desarrolla en la mente del individuo, se inicia con la percepción del signo y finaliza con la presencia en su mente del objeto del signo y noesis a los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto. Afirma que no hay noesis sin semiosis; es decir, no hay acceso al objeto matemático sino a través de sus representaciones semióticas.

Según Oviedo et al. (2011), la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, considera que el aprendizaje de las matemáticas constituye un campo de estudio para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Bajo el mismo orden de ideas, Reséndiz et al. (2013), diseñaron y desarrollaron un objeto de aprendizaje para facilitar el dominio de los contenidos de aprendizaje de Geometría, específicamente sobre el cálculo de perímetros y áreas de las principales figuras y cuerpos geométricos y a través de un diseño pretest y postest midieron el impacto de la utilización del objeto de aprendizaje en el aprendizaje de Geometría. Finalmente, concluyeron que el poder gráfico de las herramientas tecnológicas posibilita el acceso a modelos visuales que contribuyen al desarrollo de los procesos de visualización y razonamiento necesarios en la solución de problemas geométricos. Estas actividades cognitivas, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, requieren además del lenguaje natural o de las imágenes, la utilización de registros de representación y de expresión. Debido a que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción como los objetos “reales” o “físicos”, ya que éstos son abstractos, es necesario utilizar las diversas representaciones semióticas de un objeto como el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. La distinción entre un objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) y su representación (escritura decimal o fraccionaria, gráficas, trazado de figuras, etc.) es indispensable para la comprensión de las matemáticas.

Según Hernández et al. (2017), las ventajas de trabajar con representaciones semióticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos, son:

- La conversión y coordinación de diferentes tipos de registros semióticos producen una comprensión efectiva que permite la transferencia de los conocimientos aprendidos.
- La transformación de una representación a otra, permite obtener nueva información y propiedades generando nuevo conocimiento
- La obtención de un concepto global, ya que cada registro resalta características y propiedades específicas del objeto matemático.
- La presentación de objetos matemáticos a través de diversas representaciones, permite atender las singularidades de cada alumno, en función de sus estilos cognitivos.

Por lo tanto, la coordinación de varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, escritura simbólica, lengua natural, etc.) es fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos; estas conversiones entre registros de representación semiótica es una condición necesaria para que no se confunda a los objetos matemáticos con sus representaciones y para que también se les pueda reconocer en cada una de ellas.

En este mismo contexto se sitúa el estudio realizado por Guzmán (1998), que considera como referente teórico el enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica para evidenciar el rol que juega el registro gráfico, algebraico y lenguaje natural en el aprendizaje de nociones relativas a funciones reales y el sentido que éstas cobran para los estudiantes, al analizar las respuestas de los estudiantes concluye que éstas se quedaban en el registro en el que estaba planteada la pregunta, o recurrían con frecuencia al registro algebraico, privilegiado en las clases; evidenciando deficiencias conceptuales y falta de coordinación entre los registros algebraico, gráfico y lenguaje natural; así como dificultades en la conversión del registro en lenguaje natural a otro registro, y del registro gráfico al algebraico. Finalmente, menciona que para favorecer los aprendizajes y favorecer el desarrollo del pensamiento conceptual es fundamental que los estudiantes puedan articular diferentes representaciones semióticas por lo que es importante enfrentarlos a problemas de traslado entre las distintas representaciones semióticas del objeto matemático en estudio.

Por su parte Ospina (2012) muestra una investigación sobre el aprendizaje del concepto de función lineal, bajo el marco teórico de la teoría de registros de representación semiótica a fin de comprender cómo se da la conceptualización de los objetos matemáticos y de qué manera intervienen las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión entre representaciones semióticas de la noción de función lineal, como son: el registro verbal, tabular, gráfico, algebraico, simbólico de los conjuntos y figural, para lo cual utilizó dos cuestionarios como instrumentos para recoger la información, el primero con la finalidad de caracterizar las conversiones que realizaban los estudiantes antes de tener contacto formal con el concepto, y el segundo con situaciones contextualizadas para ser modeladas con una función lineal, proporcionada en registro verbal para motivar al estudiante a realizar conversiones en distintos registros. Después de realizar el análisis de las respuestas de los estudiantes concluye que los estudiantes muestran dificultades en la conversión al registro algebraico desde otro registro que no sea el gráfico; evidenciando la falta de congruencia entre las representaciones semióticas del concepto, y confirma la teoría de Duval, que plantea que entre más representaciones semióticas se involucren en el aprendizaje de un concepto matemático y se faciliten condiciones de congruencia se alcanzará una mejor comprensión, logrando que el estudiante establezca la diferencia entre representación semiótica del concepto matemático y el objeto matemático representado lo que permite la aprehensión del concepto matemático.

3.2 TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO (TAD)

De acuerdo con Rojas (2013), desde el punto de vista del enfoque antropológico, históricamente los objetos matemáticos son generados en el curso de la actividad matemática de los individuos y son considerados como “patrones fijos” integrados en un ambiente cambiante de la actividad reflexiva, en donde el concepto de pensamiento exige prestar atención a los medios semióticos de objetivación utilizados por los estudiantes; es decir, la objetivación hace que las formas de pensamiento de los estudiantes se modifiquen, que sea objetiva no solo en el objeto matemático, sino también en la forma de pensarlo tanto para la elaboración de significados como para la toma de conciencia de los objetos conceptuales.

Según Morales (2013), la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD), sitúa a la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales, y admite que “toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se denomina con la palabra de praxeología” (praxis+logos). Esta noción constituye una herramienta fundamental para la enseñanza-aprendizaje de la actividad matemática en las instituciones, en la cual se distinguen dos niveles (Bosch et al. 2006):

El nivel de la praxis o del “saber hacer”, que abarca los tipos de problemas o tareas que se estudian, y las técnicas que se construyen para resolverlos.
La noción de tarea, o del tipo de tareas (t), supone un objeto relativamente preciso; por ejemplo calcular el valor de una función en un punto fijo, es un tipo de tareas; pero calcular, simplemente, es lo que se llama género de tareas (T), el cual existirá únicamente bajo la forma de diferentes tipos de tareas cuyo contenido está especificado, por lo tanto podemos decir que $t \in T$.

Dado entonces un tipo de tarea, se requiere de una manera de realizarlas, a esta determinada manera de hacerlas, ô, se le conoce como técnica (del griego tekhné, saber hacer); por lo tanto, una praxeología relativa al tipo de tareas T contiene una técnica ô, es decir, contiene un bloque denominado práctico-técnico designado por [T/ô]. Es importante considerar que las técnicas no necesariamente son algorítmicas y que la elección de éstas depende en ocasiones de la o las técnicas institucionalmente reconocidas Chevallard (1999).

El segundo nivel, del logos o del “saber”, incluye las descripciones y explicaciones que permiten entender las técnicas, esto es, el discurso tecnológico y la teoría que da sentido a los problemas planteados.

La tecnología θ permite justificar la técnica; es decir, asegurar que la técnica da lo pretendido, explicar la técnica; es decir, exponer por qué es correcto y producir nuevas técnicas en función de tecnologías potenciales.

La Teoría Φ, en el origen, significaba la idea de contemplación de un espectáculo –el theôros era el espectador que miraba la acción sin participar-, por eso los enunciados teóricos aparecen frecuentemente como “abstractos”. Esta abstracción está relacionada con la generatividad de los enunciados teóricos, su capacidad para justificar, para explicar y para producir.

Por lo tanto, alrededor de un tipo de tareas T, se encuentra una tripleta formada por una técnica (al menos), ô, por una tecnología θ y por una teoría Φ; dicho conjunto [T,ô, θ, Φ] constituyen una praxeología formada por un bloque práctico-técnico y por un bloque tecnológico-teórico. Se llamará praxeología puntual, cuando se trate de un único tipo de tareas Chevallard (1999).

Según Parra & Otero (2009), la TAD asume que el saber matemático se construye como respuesta a situaciones problemáticas y surge como el producto de un proceso de estudio, el cual se sitúa en un espacio determinado por seis momentos didácticos, los cuales no son lineales, pueden repetirse tantas veces como sea necesario a lo largo del proceso de estudio e incluso pueden aparecer simultáneamente:

1) El momento del primer encuentro con un determinado tipo de tareas

Lo que se encuentra en un primer encuentro con una organización matemática es la cuestión de la identidad del objeto que nace ante los ojos el estudiante, como aquello que permite fabricar una respuesta a una serie de cuestiones determinadas, proponiendo una "definición" del objeto encontrado que, en muchos casos, aparece a priori mostrando la compatibilidad con las definiciones conocidas, en la medida en que, al menos, esta "definición en situación" no esté ya integrada en los planos epistemológico y cognitivo.

Si bien es cierto, el primer encuentro no determina enteramente la relación al objeto -el cual se construye y se modifica a lo largo del proceso de estudio-, sí juega un papel importante en el aprendizaje.

2) El momento exploratorio del tipo de tareas T

Este momento relaciona un determinado tipo de tareas T con la construcción de una técnica ô adecuada para abordarlos. El estudio y la resolución de una tarea o problema de un tipo determinado va siempre a la par con la constitución de al menos una técnica cada vez más desarrollada que podrá eventualmente emerger, en donde el problema de estudio aparecerá no como un fin en sí mismo, sino como un medio que permite crear y poner en marcha una técnica relativa a los problemas o tareas del mismo tipo, para la constitución de una técnica de resolución que será el medio para resolver de manera casi rutinaria los problemas de este tipo.

3) El momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico $[\theta, \Phi]$, que explique y justifique las técnicas ô y que permita la construcción de nuevas

Este momento está relacionado con cada uno de los otros momentos, ya que desde el primer encuentro con un tipo de tareas existe una relación con un entorno tecnológico-teórico $[\theta, \Phi]$ anteriormente elaborado, o con un entorno por crear, que se precisará con el surgimiento de una nueva técnica. El estudio de estos tipos de tareas o problemas se presenta entonces, como una serie de aplicaciones tecnológico-teóricos puestos en marcha.

4) El momento de trabajo de la técnica, que provoca la evolución de las técnicas existentes y la construcción de nuevas técnica.

El cuarto momento es el del trabajo de la técnica, que debe a la vez mejorar la técnica volviéndola más eficaz y más fiable, lo que exige retocar la tecnología elaborada hasta ese momento. Este momento de puesta a prueba de la técnica se refiere entonces al dominio, puesta a punto y nueva creación de técnicas matemáticas.

5) El momento de la institucionalización, que delimita y precisa aquellos elementos constituyentes de la organización matemática construida.

Tiene por objeto precisar la organización matemática elaborada, distinguiendo los elementos que no le hayan sido integrados y los elementos que entrarán de manera definitiva en la organización matemática considerada.

El momento de la institucionalización es pues, un movimiento que compromete el porvenir, lo "matemáticamente necesario", que será conservado, y lo "matemáticamente contingente" que, pronto, será olvidado; sin embargo es necesario determinar completamente el devenir institucional de la praxeología matemática oficializada.

6) El momento de la evaluación de la praxeología construida.

El sexto momento es el de la evaluación, que se articula con el momento de la institucionalización, este momento de verificación permite hacer una reflexión y un balance sobre lo que el estudiante ha aprendido, independientemente del criterio y juez que lo haga. Esta evaluación se considera formadora, no de una persona, sino de una praxeología ya que participa de la institucionalización.

Por lo tanto, el modelo de los momentos del estudio constituye una rejilla para el análisis de los procesos didácticos y permite plantear claramente el problema de la realización de los diferentes momentos del estudio creando las situaciones didácticas adecuadas.

“Todo proceso de estudio, puede ser modelado mediante una praxeología, que será denominada praxeología didáctica y estará compuesta por un conjunto de tareas didácticas problemáticas, técnicas didácticas para abordarlas y tecnologías y teorías” Bosh et al. (2006).

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

4.1 ÁMBITO DE ESTUDIO

En la presente investigación participaron estudiantes de la asignatura de Álgebra Lineal de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro del semestre 2020-2.

4.2 ENFOQUE METODOLÓGICO

Creswell (2016) considera que la investigación cualitativa es un proceso interpretativo de indagación basado en distintas tradiciones metodológicas como son la biografía, la fenomenología, la teoría fundamentada en los datos, la etnografía y el estudio de casos que examina un problema humano o social.

En este trabajo, se utilizó como herramienta de investigación el método cualitativo en particular el estudio de casos, ya que a través de este se puede medir y registrar la manera en la que los estudiantes comprenden e interpretan el tema de estudio, por lo que se tomó como base la propuesta de “el protocolo de estudio de caso” planteado por Yin (1989, citado en Martínez 2006) para asegurar la objetividad del mismo tanto en función de su fiabilidad como de su validez. Por lo tanto, se protocolizaron las tareas, instrumentos y procedimientos utilizados, de tal manera que el protocolo de estudio de caso se convierta en el documento que garantice la calidad de la investigación.

4.3 POBLACIÓN, MUESTRA

Según Cegarra (2004), “La población es el conjunto de individuos que comparten por lo menos una característica, sea una ciudadanía común, la calidad de ser miembros de una comunidad, asociación voluntaria o de una raza”.

La población estuvo compuesta por alumnos que ingresaron a la carrera de Ingeniería Civil, Ingeniería en Automatización e Ingeniería Industrial y de Manufactura de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro en el semestre 2020-2.

La muestra se define como parte de la población en la que se mide las cualidades, características de un individuo, elemento u objeto de estudio; el número de objeto de estudio es el tamaño de la muestra (Bernal, 2006).

En el presente trabajo la muestra estuvo conformada por 24 estudiantes que cursaban la materia de Álgebra lineal de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro en el semestre 2020-2, de los cuales únicamente 15 entregaron las respuestas de la actividad.

4.4 INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Las circunstancias actuales a nivel mundial por la pandemia debido al virus COVID-19, ocasionaron que la actividad propuesta se llevara a cabo a través de la plataforma zoom, en donde por medio del chat de la plataforma se les proporcionó a los estudiantes el enlace al documento que contenía la actividad a resolver, se les informó que a partir de ese momento la duración de la prueba era de 1 hora 30 minutos, en todo momento los estudiantes mantuvieron encendida su cámara; al finalizar la prueba únicamente 15 de los 24 estudiantes enviaron las respuestas de la actividad por correo electrónico, siendo ésta la muestra sobre la que se realizó el análisis de la investigación.

El instrumento de recolección de datos aplicado se diseñó bajo la perspectiva de la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) con diferentes registros de representación semiótica; con el objetivo de identificar y describir cómo los estudiantes interpretan la razón de cambio de la derivada al realizar una secuencia de actividades diseñadas en torno a la variación y cambio que implican el tratamiento y articulación de diferentes registros de representación semiótica. Posteriormente, se analizaron bajo la TAD los procedimientos realizados por los estudiantes al resolver las actividades para finalmente presentar las conclusiones correspondientes.

Cabe hacer mención que antes de empezar la actividad, se envió a los estudiantes carta de consentimiento informado en la cual se expone la importancia del presente estudio en los procesos de enseñanza- aprendizaje del Cálculo Diferencial, misma que enviaron debidamente firmada a través de correo electrónico.

4.5 DISEÑO DE LA ACTIVIDAD

La actividad consistió en cuatro ejercicios en donde se pide al estudiante:
a) Determinar la derivada de una función y seleccionar la gráfica que la representa.
b) Realizar el bosquejo de la gráfica de una función dada y determinar la pendiente y ecuación de la recta tangente en el punto dado.
c) Interpretar un problema de la vida cotidiana y determinar las razones de cambio promedio y finalmente,
d) Interpretar un problema de la vida cotidiana y obtener la hora en la que circulan los vehículos con mayor velocidad de acuerdo a una función dada.

De esta manera se relacionó un tipo de tarea con la constitución de al menos una técnica de resolución y con una tecnología cuando el estudiante da una explicación de los procedimientos realizados de acuerdo a la instrucción dada en cada ejercicio.

A continuación se detalla cada ejercicio que conforma la actividad con sus respectivos incisos, así como los resultados esperados por los estudiantes.

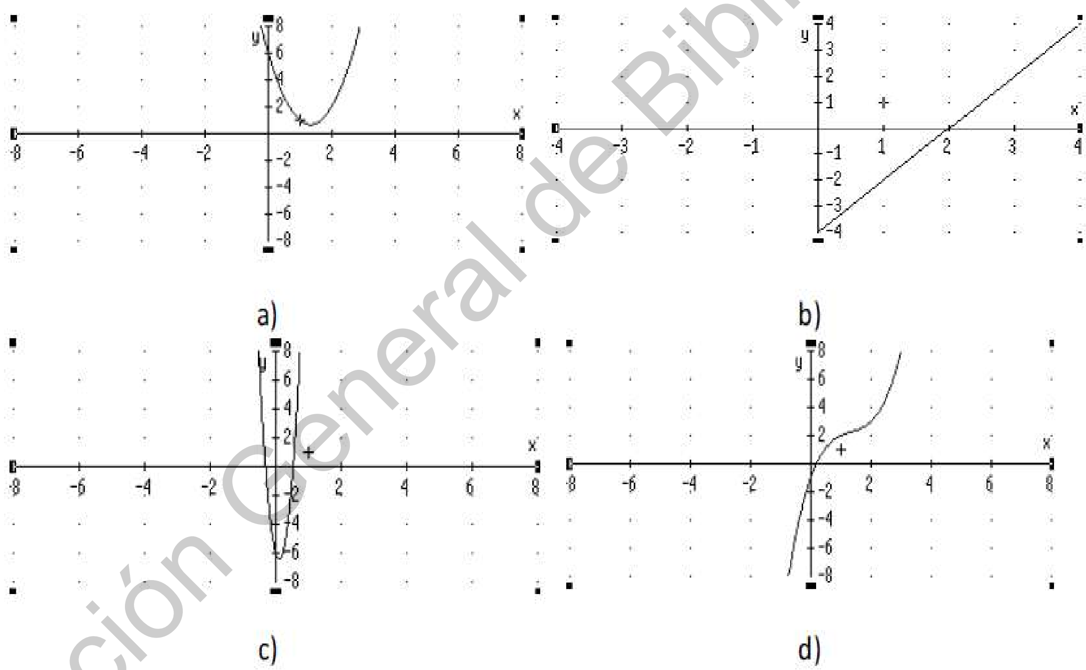
EJERCICIO 1

Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1$

a) Selecciona de las gráficas proporcionadas la que represente la derivada de la función dada:

b) ¿Qué elementos consideraste para elegir la gráfica de la derivada?

c) ¿Qué significan los cruces de la gráfica con el eje x?

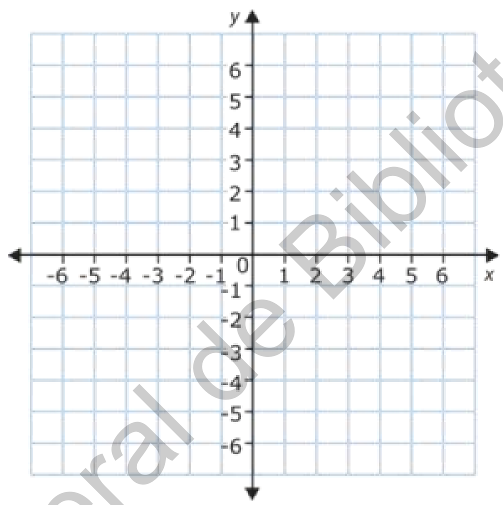


La finalidad del ejercicio 1 es que el estudiante logre la conversión de un registro algebraico a un registro gráfico, por lo que se espera que el estudiante obtenga en el inciso a) la derivada de la función y que haga uso de sus conocimientos previos para identificar ya sea puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola o en su caso que pueda utilizar un registro tabular para ubicar ciertas coordenadas de la gráfica que le permitan seleccionar aquella que representa la derivada de la función y, que explique y justifique los elementos considerados para tal elección en el inciso b).

Respecto al inciso c), éste hace referencia al caso genérico de la derivada, ya que tiene como finalidad que el estudiante interprete y argumente el significado que tiene la gráfica cuando $f'(x) = 0$.

EJERCICIO 2

a) Realiza un bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = -3x^2 + 16x + 12$.



b) Encuentra la pendiente de la recta tangente en $x = 2$.

c) Determina la ecuación de la recta tangente en $x = 2$.

d) En la misma gráfica realiza también el bosquejo de la recta tangente y explica brevemente qué significado tiene.

La finalidad del ejercicio 2 es que el estudiante logre la conversión del registro algebraico al registro gráfico, se espera que el estudiante haga uso de sus conocimientos previos para identificar ya sea puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola o en su caso que pueda utilizar un registro tabular para ubicar ciertas coordenadas de la gráfica que le permitan realizar un bosquejo de la gráfica del inciso a) y de la recta tangente del inciso d), y que evidencie en el inciso b) la comprensión del significado de la derivada como la pendiente de la recta tangente.

Finalmente, en el inciso c) se espera que el estudiante haga uso de sus conocimientos previos para determinar la ecuación de la recta tangente y que explique en el inciso d) brevemente el significado de la misma.

EJERCICIO 3

Se realizó una investigación para observar que cantidad de desperdicios en toneladas se tira al mar en las playas de Acapulco, para un periodo vacacional de una semana se anotaron los siguientes datos:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
(x) Días	1	2	3	4	5	6	7
(y) Desperdicio (Toneladas)	0.3	1.2	2.7	4.8	7.5	10.8	14.7

a) Elabora el bosquejo de la gráfica de los puntos.
b) Determina la razón de cambio promedio de desperdicio que se arroja entre martes y jueves, y explica cómo llegaste a ese resultado.
c) Determina la razón de cambio promedio de desperdicio que se arroja entre viernes y domingo, y explica cómo llegaste a ese resultado.
d) Explica brevemente el significado de las razones de cambio promedio obtenidas de acuerdo al contexto del problema.

La finalidad del ejercicio 3 es que el estudiante logre la conversión del registro del lenguaje natural y tabular al registro gráfico y numérico, se espera que el estudiante bosqueje la gráfica en el inciso a), a partir de la información proporcionada en la tabla y que evidencie la comprensión del significado de la razón de cambio promedio en el inciso b) y c) al obtener y explicar de manera numérica y verbal la manera en la que llego al resultado.

Finalmente, se espera en el inciso d) que el estudiante interprete el significado de las razones de cambio obtenidas de acuerdo al contexto del problema.

EJERCICIO 4

Se ha observado que, en la autopista México-Querétaro, la velocidad de los vehículos entre las 2:00 y 6:00 pm está dada por la expresión:

$$v(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 8$$

a) ¿A qué hora circulan los vehículos con mayor velocidad?

b) Describe el proceso por el cual llegas al resultado.

La finalidad del ejercicio 4 es que el estudiante logre la conversión del registro de lenguaje natural al registro numérico, se espera que el estudiante interprete el problema y construya una técnica para abordarlo, ya sea a través de la sustitución de los valores proporcionados en la función o haciendo uso del registro tabular para evaluar posible valores entre las 2:00 y 6:00 p.m. que le permitan determinar la hora en que circulan los vehículos con mayor velocidad, atendiendo así el inciso a), y que justifique el proceso realizado en el inciso b).

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis de las técnicas y los registros de representación semiótica utilizados por los estudiantes al resolver cada una de las tareas planteadas, así como las tecnologías sobre las que se sustenta cada técnica utilizada.

Para llevar a cabo dicho análisis se establecieron cuatro criterios, los cuales denotaremos como φ_1,φ_2, φ_3, φ_4:

φ_1 : Si la respuesta es correcta, parcialmente correcta, incorrecta o no se emitió respuesta alguna.

φ_2: La técnica utilizada al resolver la tarea

φ_3: Los registros de representación semiótica: a) formación de una representación identificable dentro de un registro dado, b) tratamiento y c) conversión de una representación

φ_4: La tecnología sobre la que sustenta la técnica utilizada.

De acuerdo con la clasificación de las respuestas, se considera parcialmente correcta aquella que si bien el estudiante logra la conversión de un registro a otro no muestra evidencia que justifique el procedimiento realizado; por ejemplo, en los casos en donde el estudiante debe bosquejar la gráfica de una función dada o la recta tangente, al hacer uso de sus conocimientos previos e identificar ya sea puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola o en su caso utilizar un registro tabular para ubicar ciertas coordenadas de la gráfica está evidenciando la tecnología, en cuanto a la praxeología matemática se refiere; es decir, está justificando la manera en la que realizó el bosquejo de la gráfica y de la recta tangente.

5.1 ANÁLISIS DEL PROBLEMA 1: CONVERSIÓN DE REGISTRO ALGEBRAICO A REGISTRO GRÁFICO

La finalidad del ejercicio 1 es evidenciar la manera en la que el estudiante logra la conversión del registro algebraico al registro gráfico haciendo uso de sus conocimientos previos al obtener la derivada de la función y hacer uso de sus conocimientos previos para identificar ya sea puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola o en su caso que pueda utilizar un registro tabular para ubicar ciertas coordenadas de la gráfica que le permitan seleccionar aquella que representa la derivada de la función. La tarea incluye tanto la conversión de un registro a otro (inciso a), como su justificación (inciso b).

En la Tabla 5.1ab se muestra que 7 de 15 estudiantes resolvieron correctamente el inciso a); es decir, seleccionaron la gráfica adecuada que representa la derivada de la función y 8 contestaron de manera incorrecta.

Análisis del problema 1

Tarea 1.1: ***a) Selecciona de las gráficas proporcionadas la que represente la derivada de la función*** $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ ***b) ¿Qué elementos consideraste para elegir la gráfica de la derivada?***				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Sin respuesta
Frecuencia	7		8	
Técnica	Algebraica		Argumentativa	
Registro	Conversión			

Tabla 5.1 ab Criterios del análisis

La técnica utilizada por 6 de los 7 estudiantes que contestaron correctamente fue la siguiente (figura 5.1.1): como primer paso obtuvieron la derivada de la función y posteriormente hicieron uso de sus conocimientos previos al evaluar la derivada en $x = 0$, obteniendo así el valor de y; es decir, el punto de corte con el eje de las ordenadas logrando transitar del registro algebraico al registro gráfico.

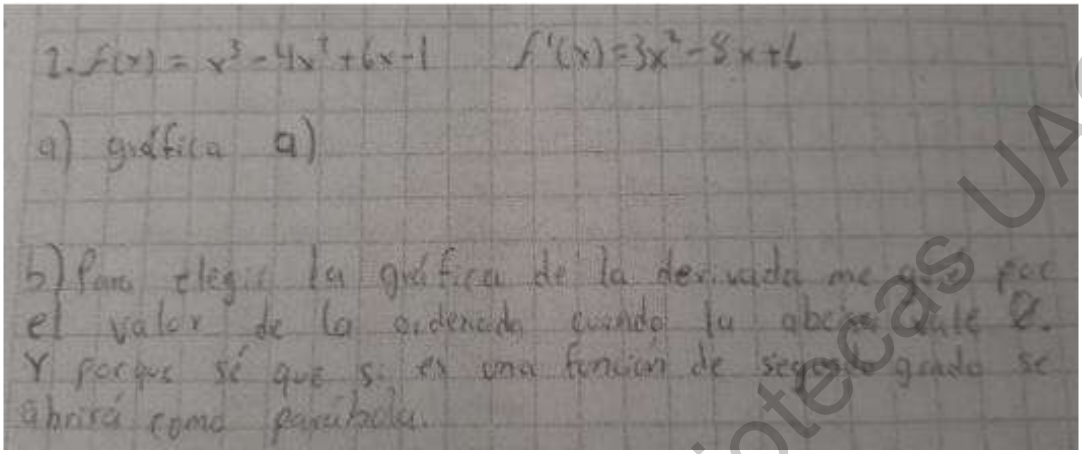


Figura 5.1.1 Resolución del estudiante E6

En la figura 5.1.2 se muestra la resolución del estudiante E3, en la cual se observa que obtiene la derivada de la función como primer paso y utiliza un registro tabular asignando diversos valores a la variable x que le permite elegir la gráfica que representaba la derivada de la función.

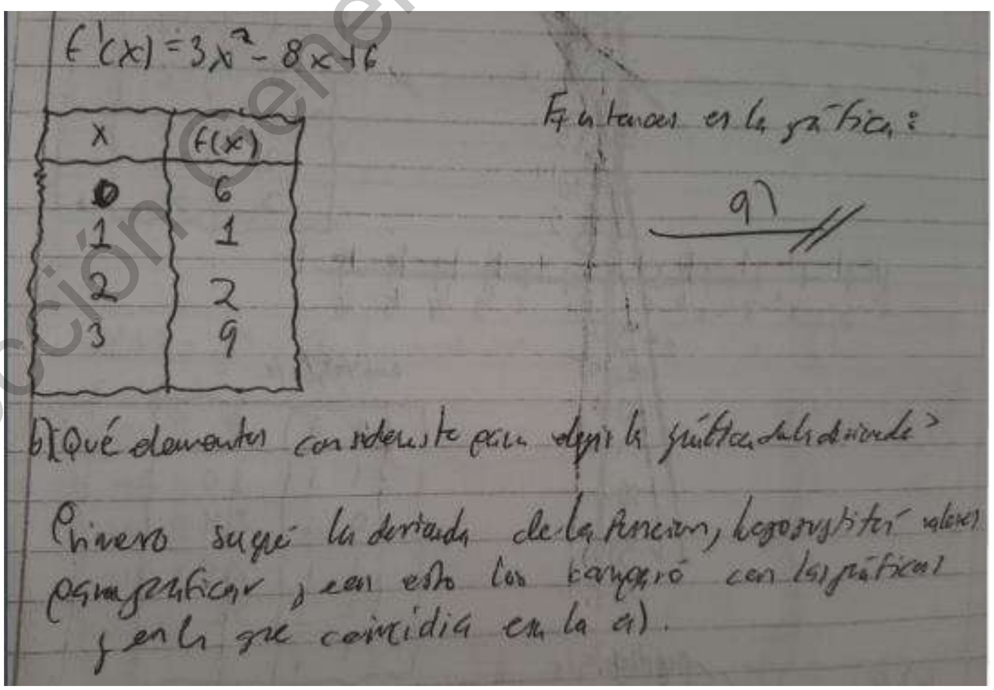
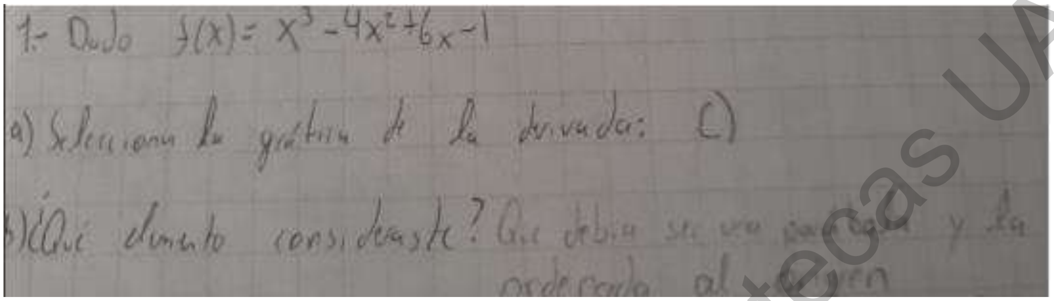


Figura 5.1.2 Resolución del estudiante E3

Los estudiantes que contestaron de manera incorrecta, no evidenciaron procedimiento alguno para obtener la derivada de la función (figura 5.1.3); la técnica utilizada para elegir su respuesta estuvo basada principalmente en que se trataba de una función cuadrática y su gráfica es una parábola.



1.- Dado $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1$

a) Selecciona la gráfica de la derivada: C)

b) ¿Qué elemento consideraste? Que debía ser una parábola y la ordenada al origen

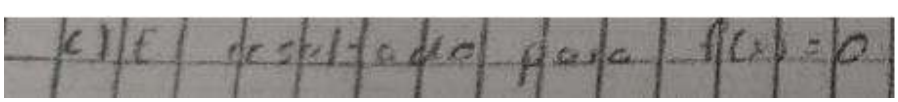
Figura 5.1.3 Resolución del estudiante E1

Análisis del problema 1

Tarea 1.2: c) ***¿Qué significan los cruces de la gráfica con el eje x?***				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Sin respuesta
Frecuencia			12	3
Técnica			Algebraica	
Registro			Gráfico	

Tabla 5.1 c Criterios del análisis

La tarea del inciso c) hace referencia al caso genérico de la derivada, el objetivo es que el estudiante interprete y argumente el significado que tiene la gráfica cuando $f'(x) = 0$, sin embargo las respuestas de 12 de los estudiantes mostraron que en su interpretación consideraron a la función original y no a la derivada (figura 5.1.4), al argumentar que en los puntos donde intersecta la gráfica al eje x, la ordenada es cero; y finalmente 3 estudiantes no contestaron la pregunta.



c) El desplazado para $f(x) = 0$

Figura 5.1.4 Resolución del estudiante E13

5.2 ANÁLISIS DEL PROBLEMA 2: CONVERSIÓN DE REGISTRO ALGEBRAICO A REGISTRO GRÁFICO

La finalidad del ejercicio 2 es evidenciar como el estudiante logra la conversión del registro algebraico al registro gráfico haciendo uso de sus conocimientos previos para identificar ya sea puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola o en su caso que pueda utilizar un registro tabular para ubicar ciertas coordenadas de la gráfica que le permitan realizar un bosquejo de la gráfica del inciso a) y de la recta tangente del inciso d), y que haga uso del registro algebraico para obtener la ecuación de la recta tangente en el inciso c).

Respecto al inciso b), el objetivo es evidenciar la comprensión que el estudiante tiene del significado de la derivada como pendiente de la recta tangente.

Análisis del problema 2

Tarea 2.1: **a) _Realiza un bosquejo de la gráfica de la función_** $\boldsymbol{f(x) = -3x^2 + 16x + 12}$				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Sin respuesta
Frecuencia	5	9	1	
Técnica	Algebraica	Algebraica		
Registro	Conversión	Tratamiento		

Tabla 5.2.a Criterios del análisis

En la Tabla 5.2.a se muestra que 5 de los 15 estudiantes realizaron un bosquejo adecuado de la gráfica, ajustaron la escala del plano cartesiano y utilizaron como técnica la representación tabular que les permitió ubicar adecuadamente las coordenadas para trazar la gráfica de manera más exacta (figura 5.2.1).

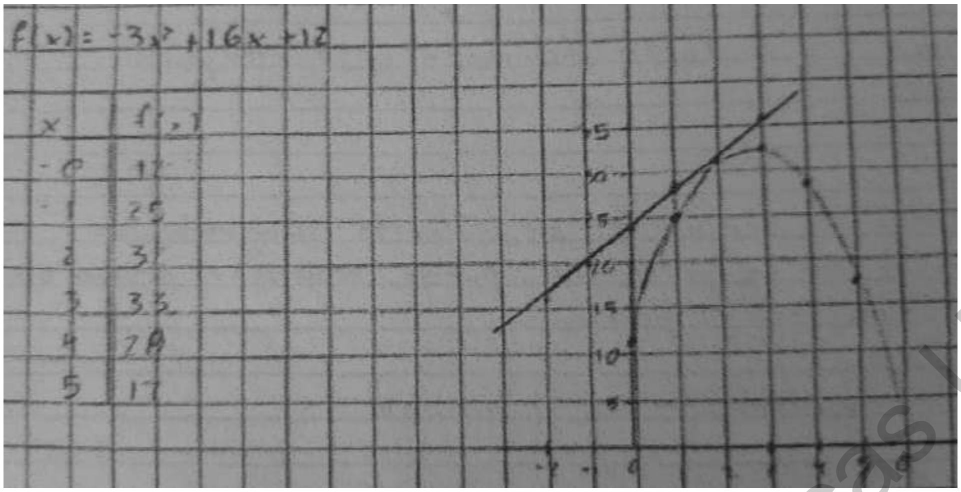


Figura 5.2.1 Resolución del estudiante E13

Por otro lado, 9 estudiantes mostraron un bosquejo de la gráfica parcialmente correcto al dibujar una parábola hacia abajo sin mostrar evidencia de algún procedimiento (figura 5.2.2); es decir, un registro tabular que le permitiera obtener un mejor bosquejo; la técnica utilizada está basada en sus conocimientos previos al considerar el signo negativo que tiene el término cuadrático.

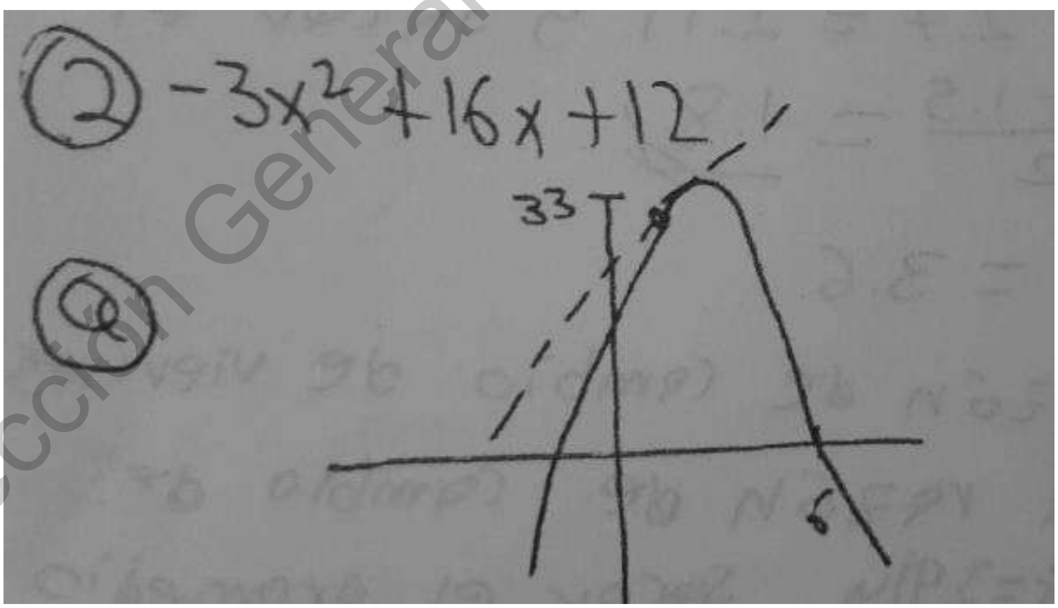


Figura 5.2.2 Resolución del estudiante E4

En la figura 5.2.3, se muestra la resolución del estudiante E2, que resolvió de manera incorrecta la tarea asignada, debido a que no ubicó adecuadamente los ejes del plano cartesiano al confundir el eje x y el eje y; a pesar de haber utilizado un tabulador, su bosquejo fue incorrecto.

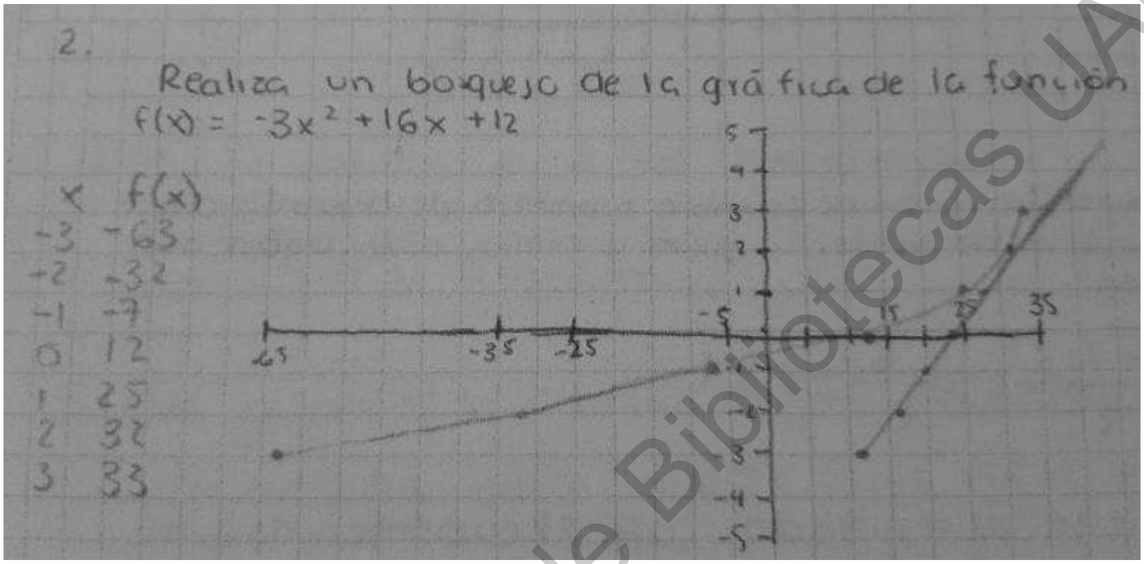


Figura 5.2.3 Resolución del estudiante E2

Análisis del problema 2

Tarea 2.2: **b) *Encuentra la pendiente de la recta tangente en*** $x = 2$				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Sin respuesta
Frecuencia	15			
Técnica	Algebraica			
Registro	Tratamiento			

Tabla 5.2.b Criterios del análisis

En la Tabla 5.2.b se muestra que 15 estudiantes evidenciaron una comprensión adecuada del significado de la derivada como la pendiente de la recta tangente al realizar correctamente la actividad, utilizando como técnica la derivada de la función y evaluarla en el punto dado (figura 5.2.4)

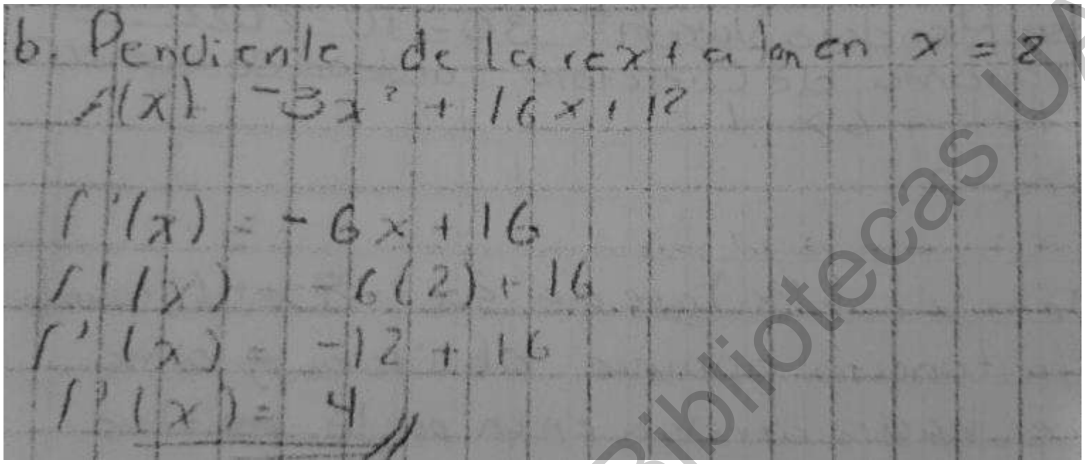


Figura 5.2.4 Resolución del estudiante E8

Análisis del problema 2

Tarea 2.3: c) ***Determina la ecuación de la recta tangente en*** $x = 2$				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Sin respuesta
Frecuencia	13	2		
Técnica	Algebraica	Algebraica		
Registro	Tratamiento	Error en tratamiento		

Tabla 5.2.c Criterios del análisis

En la Tabla 5.2.c, se muestra que 13 de los 15 estudiantes contestaron correctamente al obtener la ecuación de la recta tangente en el punto dado (figura 5.2.5), para ello hicieron uso de sus conocimientos previos al evaluar el punto dado en la función para obtener las coordenadas del punto y utilizar como técnica la fórmula de ecuación punto-pendiente, por lo que sustituyeron la pendiente de la recta tangente y las coordenadas del punto en $x = 2$, para obtener así la ecuación de la recta tangente en el punto dado.

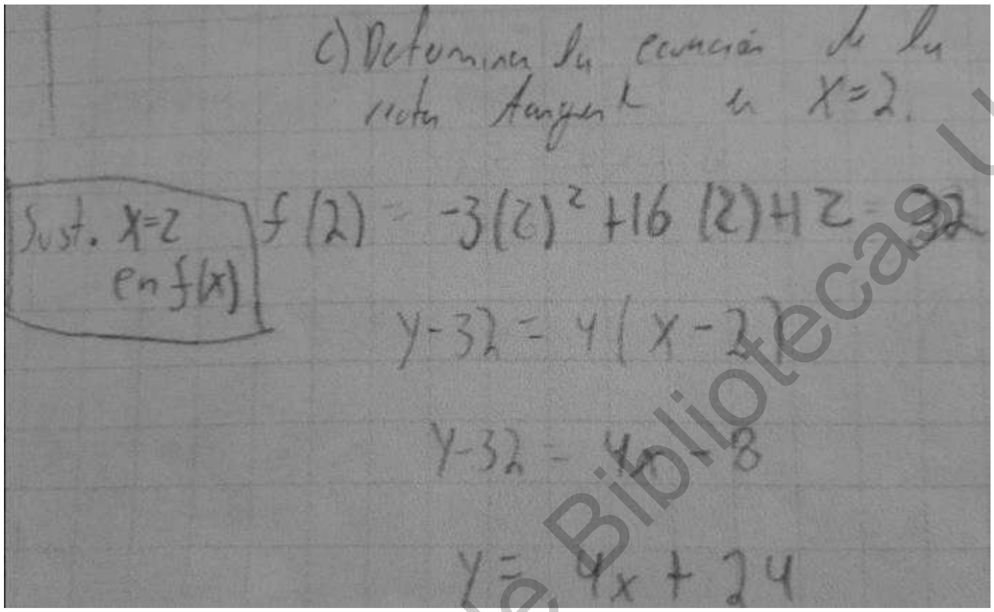


Figura 5.2.5 Resolución del estudiante E1

Finalmente, la respuesta de 2 de los 15 estudiantes fue parcialmente correcta (figura 5.2.6), debido a que hubo un error aritmético al evaluar el punto dado en la función obteniendo entonces la coordenada incorrecta, sin embargo; hicieron uso de sus conocimientos previos de manera correcta al utilizar la fórmula de punto-pendiente para obtener la ecuación pero el resultado fue incorrecto debido al error inicial al obtener la coordenada en el punto dado.

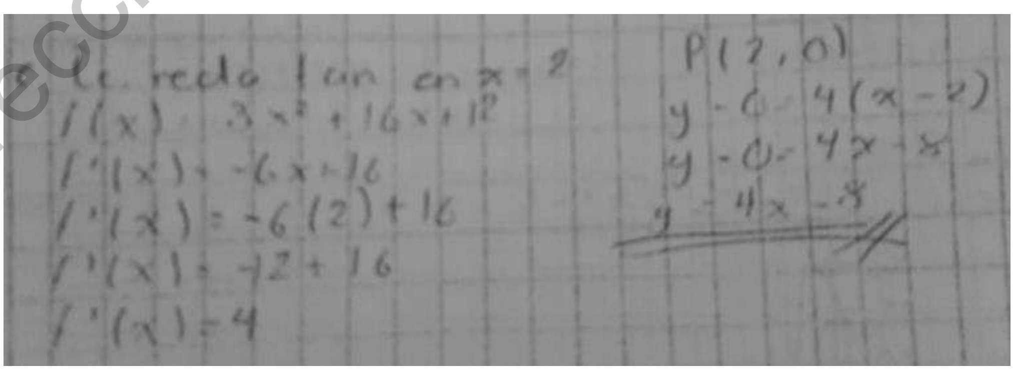


Figura 5.2.6 Resolución del estudiante E8

Análisis del problema 2

Tarea 2.4: **d)** **_En la misma gráfica realiza también el bosquejo de la recta tangente y explica brevemente qué significado tiene._**				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Sin respuesta
Frecuencia	2	7	6	
Técnica	Algebraica	Algebraica		
Registro	Conversión	Tratamiento		

Tabla 5.2.d Criterios del análisis

En la Tabla 5.2.d, se muestra que 2 de los 15 estudiantes realizaron un bosquejo adecuado de la recta tangente (figura 5.2.7), utilizaron como técnica la representación tabular que les permitió ubicar adecuadamente las coordenadas para trazar la recta tangente correctamente.

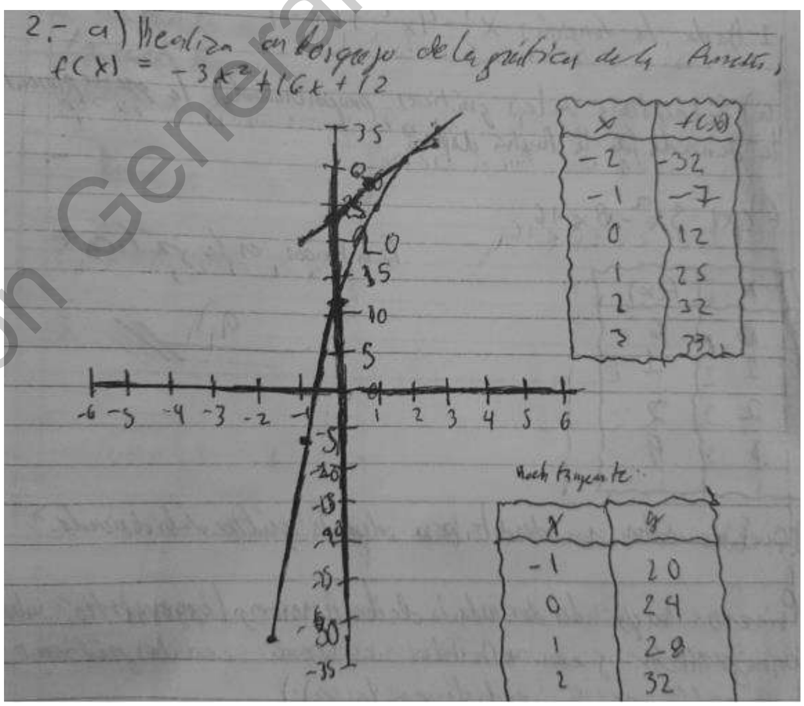


Figura 5.2.7 Resolución del estudiante E3

Por otra parte, 7 estudiantes mostraron un bosquejo parcialmente correcto al esbozar la recta tangente correctamente pero sin mostrar evidencia de algún procedimiento (figura 5.2.8); es decir, sin hacer uso de registro tabular que le permitiera obtener un mejor bosquejo; la técnica utilizada está basada en sus conocimientos previos al considerar el signo de la pendiente de la recta.

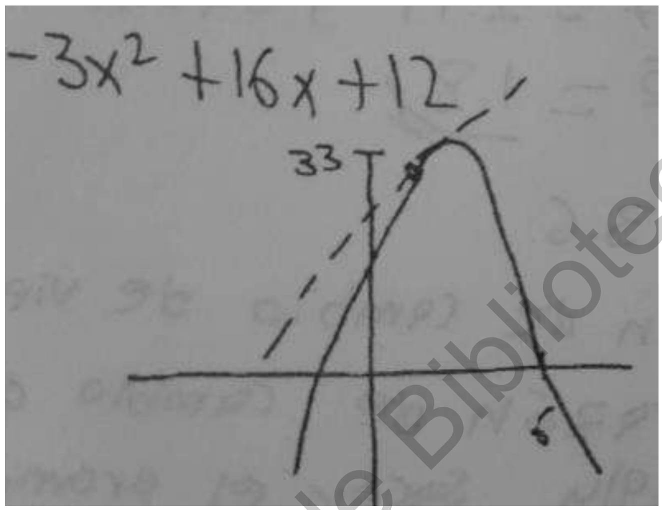


Figura 5.2.8 Resolución del estudiante E4

Finalmente, 6 estudiantes resolvieron de manera incorrecta la tarea asignada, debido a que no ubicaron correctamente la recta como recta tangente y 2 de ellos bosquejaron la recta como si la pendiente de la recta fuera negativa (figura 5.2.9).

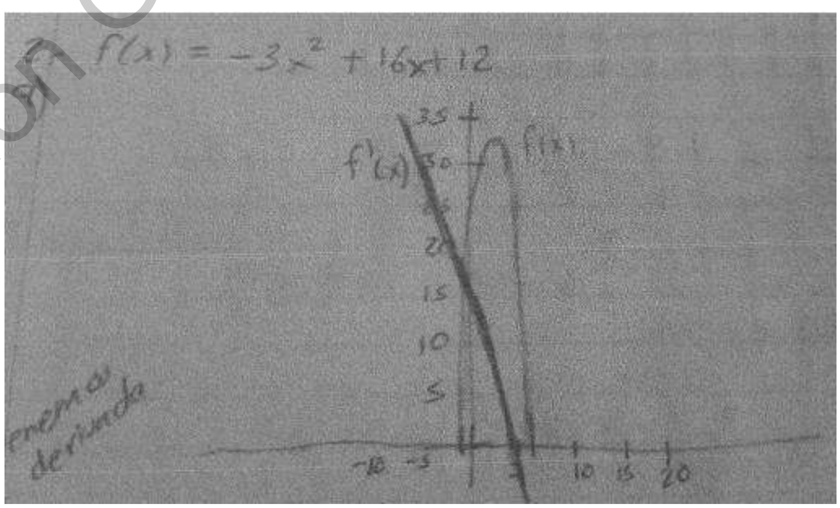


Figura 5.2.9 Resolución del estudiante E14

5.3 ANÁLISIS DEL PROBLEMA 3: CONVERSIÓN DEL REGISTRO DE LENGUAJE NATURAL Y TABULAR AL REGISTRO GRÁFICO Y NUMÉRICO

La finalidad del ejercicio 3 es que el estudiante pueda lograr la conversión del registro de lenguaje natural y tabular al registro gráfico y numérico, se espera que el estudiante bosqueje la gráfica en el inciso a), a partir de la información proporcionada en la tabla y que evidencie la comprensión del significado de la razón de cambio promedio en el inciso b) y c) al obtener y explicar de manera numérica y verbal la manera en la que llego al resultado.

Finalmente, se espera en el inciso d) que el estudiante interprete el significado de las razones de cambio obtenidas de acuerdo al contexto del problema.

Análisis del problema 3

Tarea 3.1: Se realizó una investigación para observar que cantidad de desperdicios en toneladas se tira al mar en las playas de Acapulco, para un periodo vacacional de una semana se anotaron los siguientes datos:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
(x) Días	1	2	3	4	5	6	7
(y) Desperdicio (Toneladas)	0.3	1.2	2.7	4.8	7.5	10.8	14.7

a) ***Elabora el bosquejo de la gráfica de los puntos.***

	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Sin respuesta
Frecuencia	13	2		
Técnica	Gráfico	Gráfico		
Registro	Conversión	Conversión		

Tabla 5.3.a Criterios del análisis

En la Tabla 5.3.a se muestra que 13 de los 15 estudiantes realizaron un bosquejo adecuado de la gráfica haciendo uso de sus conocimientos previos, trazaron el plano cartesiano, ubicaron los puntos de la información proporcionada en la tabla y finalmente unieron los puntos para esbozar la gráfica (figura 5.3.1)

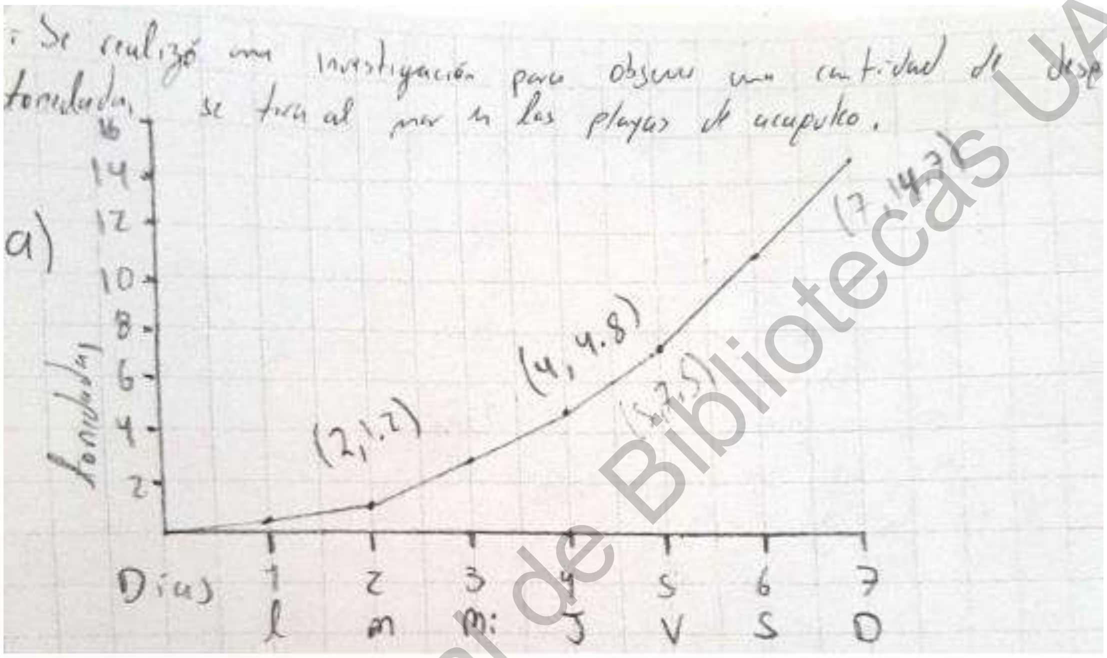


Figura 5.3.1 Resolución del estudiante E1

Por otro lado, 2 estudiantes mostraron un bosquejo de la gráfica parcialmente correcto ya que si bien ubicaron adecuadamente los puntos en el plano cartesiano no los unieron para dibujar la gráfica (figura 5.3.2).

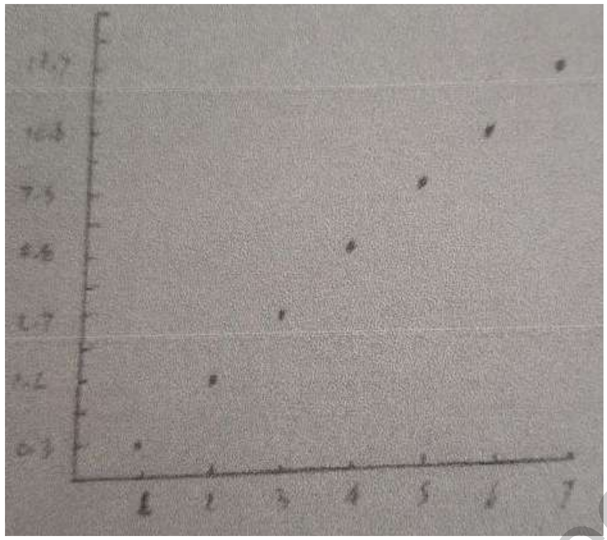


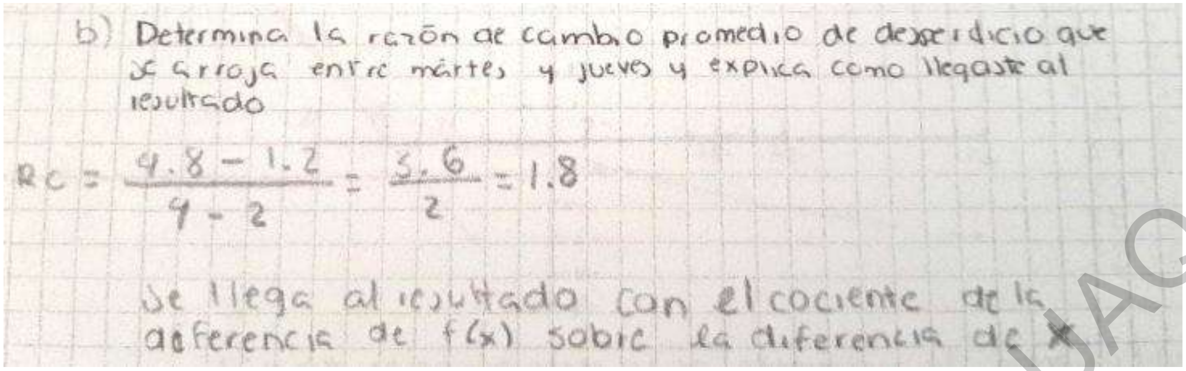
Figura 5.3.2 Resolución del estudiante E5

Análisis del problema 3

Tarea 3.2: ***b) Determina la razón de cambio promedio de desperdicio que se arroja entre martes y jueves, y explica cómo llegaste a ese resultado.***				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Sin respuesta
Frecuencia	12		3	
Técnica	Numérica		Verbal y numérica	
Registro	Tratamiento		Error en el tratamiento	

Tabla 5.3.b Criterios del análisis

El objetivo de la tarea 3.2 es evidenciar la comprensión que tienen los estudiantes del significado de la razón de cambio promedio al obtener la pendiente de la recta y explicar de manera numérica y verbal la manera en la que llego al resultado. En la tabla 5.3.b se muestra que 12 de los 15 estudiantes realizaron correctamente la actividad al obtener la pendiente de la recta (figura 5.3.3).


b) Determina la razón de cambio promedio de desperdicio que se arroja entre martes y jueves y explica como llegaste al resultado

$Rc = \frac{4.8 - 1.2}{4 - 2} = \frac{3.6}{2} = 1.8$

Se llega al resultado con el cociente de la diferencia de f(x) sobre la diferencia de x

Figura 5.3.3 Resolución del estudiante E2

Por otra parte, 3 estudiantes contestaron de manera incorrecta la actividad ya que no obtuvieron la razón de cambio promedio, únicamente se enfocaron en explicar que la cantidad de desperdicio incrementaba conforme avanzaba la semana sin determinar el cambio generado en los días indicados.

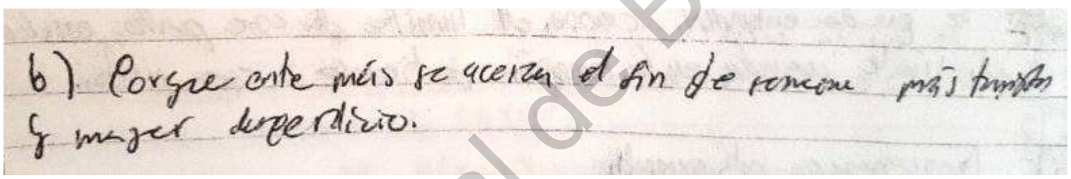

b) Porque entre más se acerca el fin de semana más [illegible] y mayor desperdicio.

Figura 5.3.4 Resolución del estudiante E3

Análisis del problema 3

Tarea 3.3: ***c) Determina la razón de cambio promedio de desperdicio que se arroja entre viernes y domingo, y explica cómo llegaste a ese resultado.***				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Sin respuesta
Frecuencia	10	2	3	
Técnica	Numérica	Numérica	Verbal y numérica	
Registro	Tratamiento	Error en tratamiento	Error en tratamiento	

Tabla 5.3.c Criterios del análisis

El objetivo de la tarea 3.3 es evidenciar la comprensión que tienen los estudiantes del significado de la razón de cambio promedio al obtener la pendiente de la recta y explicar de manera numérica y verbal la manera en la que llego al resultado. En la tabla 5.3.c se muestra que 10 de los 15 estudiantes realizaron correctamente la actividad al obtener la pendiente de la recta (figura 5.3.5).

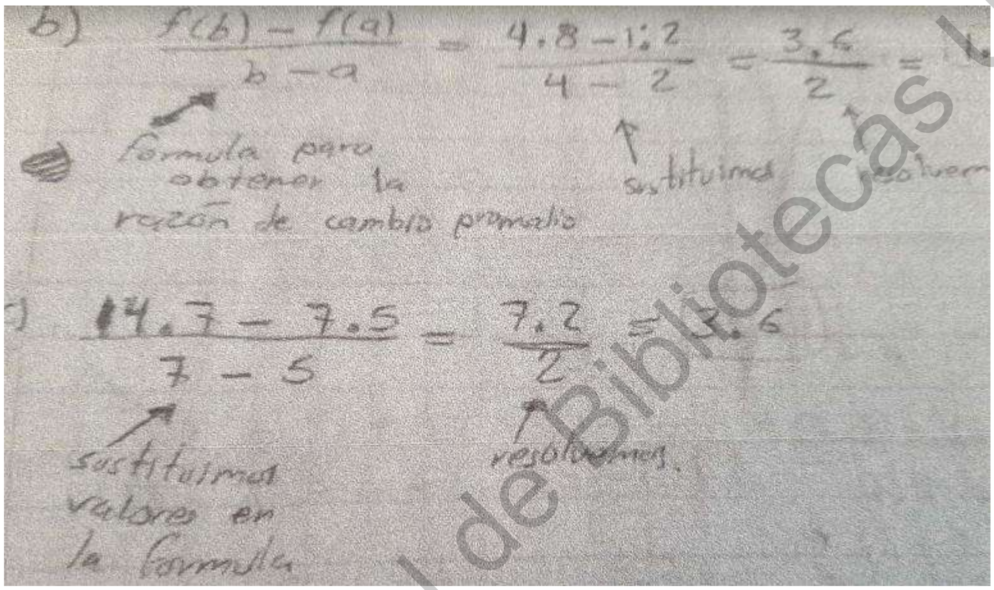


Figura 5.3.5 Resolución del estudiante E14

Por otra parte, 2 estudiantes a pesar de haber mostrado evidencia de la comprensión en el significado de la razón de cambio promedio al obtener la pendiente de la recta no lograron obtener el resultado correcto debido a un error aritmético (figura 5.3.6).

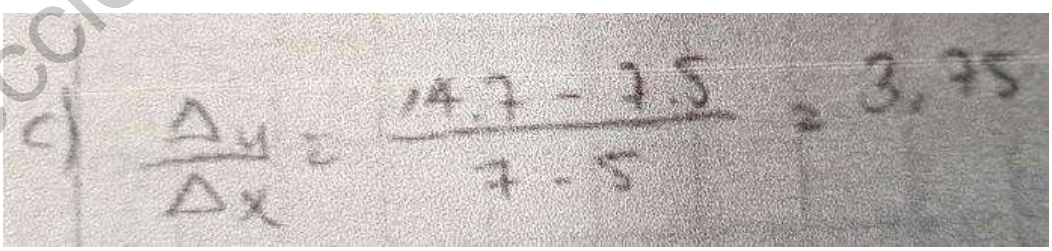


Figura 5.3.6 Resolución del estudiante E12

Finalmente, 3 estudiantes contestaron de manera incorrecta la actividad ya que no obtuvieron la razón de cambio promedio, únicamente se enfocaron en explicar que la cantidad de desperdicio incrementaba conforme avanzaba la semana sin determinar el cambio generado en los días indicados (figura 5.3.7).

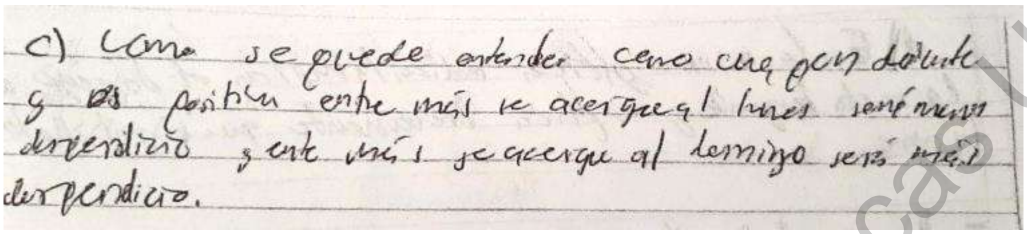


Figura 5.3.7 Resolución del estudiante E3

Análisis del problema 3

Tarea 3.4: **_d) Explica brevemente el significado de las razones de cambio promedio obtenidas de acuerdo al contexto del problema._**				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Sin respuesta
Frecuencia	13			2
Técnica	Argumentativa			
Registro	Conversión			

Tabla 5.3.d Criterios del análisis

El objetivo de la actividad 3.4 es que el estudiante interprete el significado de las razones de cambio obtenidas previamente de acuerdo al contexto del problema. En la tabla 5.3.d se muestra que 13 de los 15 estudiantes contestaron correctamente al explicar que las razones de cambio obtenidas en la tarea 3.2 y 3.3 representan la variación que se va dando en los días indicados y conforme van pasando los días la cantidad de desperdicios crece de manera exponencial (figura 5.3.8); y 2 estudiantes no contestaron la actividad.

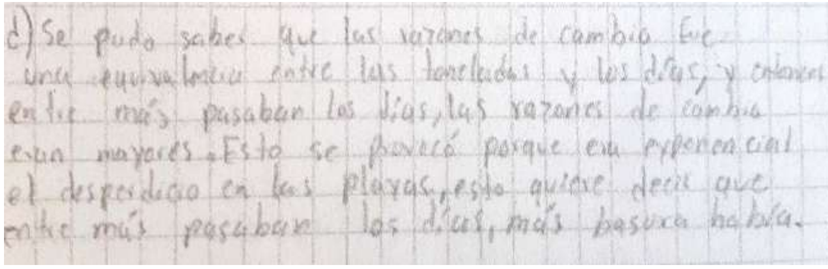

d) Se pudo saber que las razones de cambio fue una equivalencia entre las toneladas y los días, y conforme entre más pasaban los días, las razones de cambio eran mayores. Esto se parecó porque en exponencial el desperdicio en las playas, esto quiere decir que entre más pasaban los días, más basura había.

Figura 5.3.8 Resolución del estudiante E6

5.4 ANÁLISIS DEL PROBLEMA 4: CONVERSIÓN DEL REGISTRO DE LENGUAJE NATURAL AL REGISTRO NUMÉRICO.

El objetivo es evidenciar que el estudiante logra la conversión del registro de lenguaje natural al registro numérico, se espera que interprete el problema y construya una técnica para abordarlo, ya sea a través de la sustitución de los valores proporcionados en la función o haciendo uso del registro tabular para evaluar posible valores entre las 2:00 y 6:00 p.m. que le permita determinar la hora en que circulan los vehículos con mayor velocidad, atendiendo así la actividad 4.1 y 4.2.

Análisis del problema 4

Tarea 4.1 y 4.2:

Se ha observado que, en la autopista México-Querétaro, la velocidad de los vehículos entre las 2:00 y 6:00 pm está dada por la expresión:

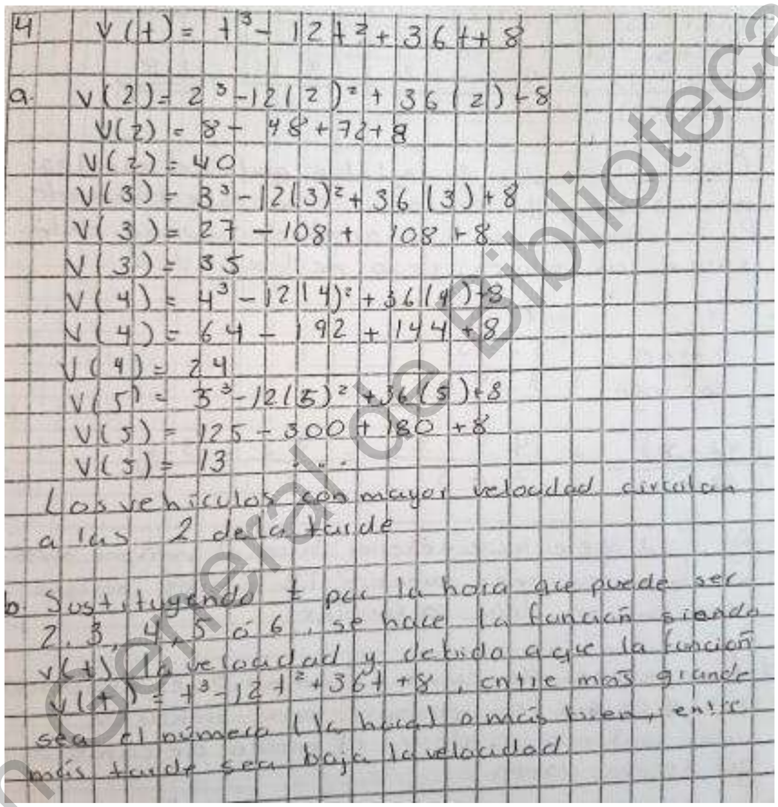
$$v(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 8$$

- ***a) ¿A qué hora circulan los vehículos con mayor velocidad?***
- ***b) Describe el proceso por el cual llegas al resultado***

	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Sin respuesta
Frecuencia	15			
Técnica	Algebraica			
Registro	Conversión			

Tabla 5.4.ab Criterios del análisis

En la Tabla 5.4.ab se muestra que 15 estudiantes realizaron correctamente las actividades 4.1 y 4.2, lograron realizar la conversión del registro del lenguaje natural al registro numérico, la técnica utilizada por 7 estudiantes fue a través de la sustitución de los valores proporcionados (figura 5.4.1), y 8 estudiantes utilizaron como técnica el registro tabular evaluando los posibles valores entre las 2:00 y 6:00 p.m. a fin de determinar la hora en que circulan los vehículos con mayor velocidad (figura 5.4.2).



4 $v(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 8$

a. $v(2) = 2^3 - 12(2)^2 + 36(2) + 8$

$v(2) = 8 - 48 + 72 + 8$

$v(2) = 40$

$v(3) = 3^3 - 12(3)^2 + 36(3) + 8$

$v(3) = 27 - 108 + 108 + 8$

$v(3) = 35$

$v(4) = 4^3 - 12(4)^2 + 36(4) + 8$

$v(4) = 64 - 192 + 144 + 8$

$v(4) = 24$

$v(5) = 5^3 - 12(5)^2 + 36(5) + 8$

$v(5) = 125 - 300 + 180 + 8$

$v(5) = 13$

Los vehiculos con mayor velocidad circulan a las 2 de la tarde

b. Sustituyendo t por la hora que puede ser 2, 3, 4, 5 ó 6, se hace la función siendo v(t) la velocidad y debido a que la función $v(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 8$, entre más grande sea el número (la hora) o más bien, entre más tarde sea baja la velocidad

Figura 5.4.1 Resolución del estudiante E8

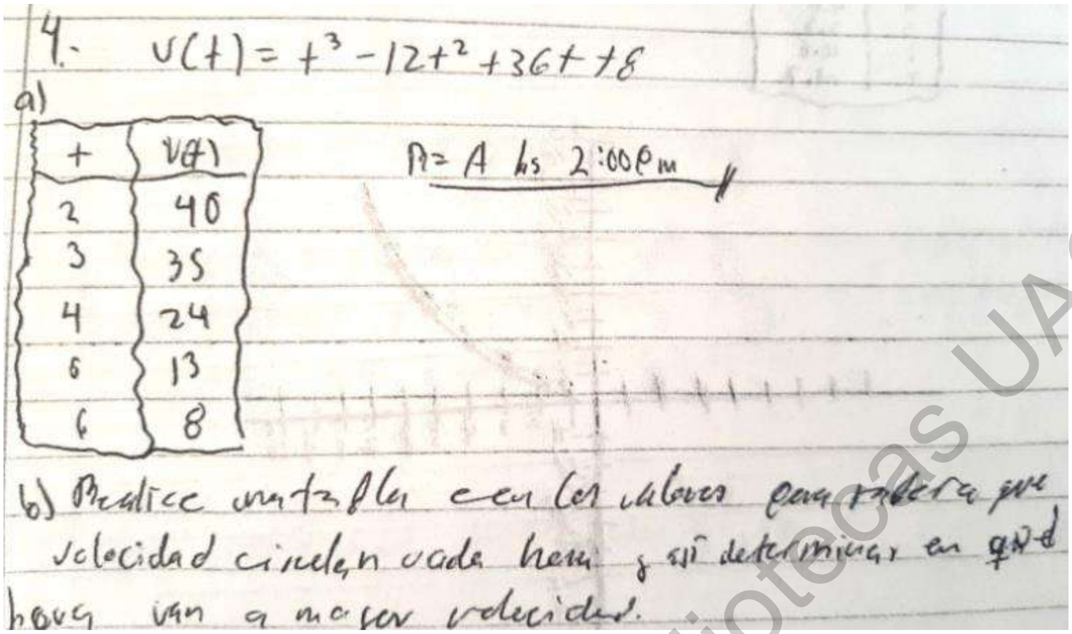


Figura 5.4.2 Resolución del estudiante E3

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se plantea un diseño experimental que consiste en un conjunto de cuatro tareas en torno a la variación y cambio que implican el tratamiento y articulación de diferentes registros de representación semiótica.

De acuerdo con Duval (1998), para tener acceso al conocimiento matemático es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas; tales como, registro verbal, registro tabular, registro gráfico, registro algebraico, registro numérico, registro simbólico y registro formal, y menciona que para aprender un concepto matemático es necesario pasar por el tratamiento y conversión de diferentes registros de representación semiótica, los cuales define como producciones humanas constituidas por el empleo de signos y que pertenecen a un sistema de representación; la utilización de varios sistemas de representación como un enunciado en lengua natural, una figura geométrica, una expresión algebraica son esenciales para el ejercicio y el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales.

En razón de lo anterior, y derivado del análisis realizado a las respuestas de los estudiantes de acuerdo a los criterios establecidos φ_1,φ_2, φ_3, φ_4 respecto a las técnicas y los registros de representación semiótica utilizados al resolver cada una de las tareas planteadas, y de las tecnologías sobre las que se sustenta cada técnica se obtuvieron las siguientes conclusiones:

Tarea 1:

Respecto a los criterios:

- φ_1 : Si la respuesta es correcta, parcialmente correcta, incorrecta o no se emitió respuesta alguna.
- φ_3: Los registros de representación semiótica: a) formación de una representación identificable dentro de un registro dado, b) tratamiento y c) conversión de una representación.

Los resultados obtenidos del análisis de la tarea 1 mostraron que el 46.6% de los estudiantes contestaron correctamente al obtener la derivada de la función y evaluar en $x = 0$ o utilizar un registro tabular logrando así la conversión del registro algebraico al registro gráfico.

En contraste a lo mencionado anteriormente, el 53.4% de los estudiantes contestaron de manera incorrecta debido a que no obtuvieron la derivada, ni evidenciaron procedimiento, únicamente justificaron su respuesta en que se trataba de una función cuadrática.

Respecto a los criterios:

φ_2: La técnica utilizada al resolver la tarea

φ_4: La tecnología sobre la que sustenta la técnica utilizada.

Se observó que la técnica utilizada; es decir, los procedimientos realizados por los estudiantes para resolver la actividad fueron: derivar directamente, evaluar la derivada de la función en $x = 0$ para obtener intersección con el eje y, o utilizar un registro tabular para ubicar puntos importantes en la gráfica.

Respecto a la tecnología sobre la que se sustenta la técnica; es decir, la justificación de los procedimientos utilizados, los estudiantes utilizaron las reglas de derivación y las propiedades y características de una función de segundo grado representada por una parábola.

Tarea 2:

Respecto a los criterios:

φ_1 : Si la respuesta es correcta, parcialmente correcta, incorrecta o no se emitió respuesta alguna.

φ_3: Los registros de representación semiótica: a) formación de una representación identificable dentro de un registro dado, b) tratamiento y c) conversión de una representación

Los resultados obtenidos del análisis del ítem a) de la tarea 2 muestran que los estudiantes lograron la conversión de manera correcta del registro algebraico al registro gráfico al hacer uso del registro tabular para obtener las coordenadas que ayudaron a la construcción de la gráfica; si bien es cierto el 60% de los estudiantes lograron bosquejar la gráfica haciendo uso de sus conocimientos previos como parte de la técnica de resolución; ésta se considera parcialmente correcta debido a que no muestran evidencia que justifique; es decir, que muestre la tecnología respecto a la praxeología matemática, de las consideraciones para su elaboración. Además se observó que los estudiantes contestaron adecuadamente el ítem b) y c) que involucran tratamiento algebraico, haciendo evidente con esto que la enseñanza en las instituciones está fuertemente enfocada a la parte algebraica, sin que esto implique una comprensión de los conceptos, como se observa en la respuesta del ítem d) en la que únicamente el 13.33% de los estudiantes logró bosquejar e interpretar adecuadamente el significado de la recta tangente.

Respecto a los criterios:

φ_2: La técnica utilizada al resolver la tarea

φ_4: La tecnología sobre la que sustenta la técnica utilizada.

Se observó que la técnica utilizada; es decir, los procedimientos realizados por los estudiantes para resolver la actividad fueron: el registro tabular, bosquejar la gráfica considerando el signo negativo del término cuadrático, y derivar directamente, evaluar en $x = 2$, y utilizar la fórmula de la ecuación punto-pendiente para obtener la ecuación de la recta tangente.

Respecto a la tecnología sobre la que se sustenta la técnica; es decir, la justificación de los procedimientos utilizados, los estudiantes utilizaron las reglas de derivación, las propiedades y características de una función de segundo grado representada por una parábola y la ecuación punto-pendiente.

Tarea 3:

Respecto a los criterios:

φ_1 : Si la respuesta es correcta, parcialmente correcta, incorrecta o no se emitió respuesta alguna.

φ_3: Los registros de representación semiótica: a) formación de una representación identificable dentro de un registro dado, b) tratamiento y c) conversión de una representación

Los resultados obtenidos del análisis de la tarea 3, cuyo objetivo es lograr la conversión del registro de lenguaje natural y tabular al registro gráfico y numérico; se observó que el 86.6% de los estudiantes contestaron correctamente al ubicar las coordenadas para trazar la gráfica y el 66.6% logró la conversión del registro tabular al numérico al obtener adecuadamente la razón de cambio promedio.

Respecto a los criterios:

φ_2: La técnica utilizada al resolver la tarea

φ_4: La tecnología sobre la que sustenta la técnica utilizada.

Se observó que la técnica utilizada; es decir, los procedimientos realizados por los estudiantes para resolver la actividad fueron: Ubicar las coordenadas en el plano cartesiano, bosquejar la gráfica y utilizar los puntos para obtener la razón de cambio promedio, en donde los estudiantes utilizaron la fórmula de pendiente, evidenciando de esta manera la comprensión de la noción de razón de cambio.

Respecto a la tecnología sobre la que se sustenta la técnica; es decir, la justificación de los procedimientos utilizados, los estudiantes utilizaron la fórmula de pendiente para obtener la razón de cambio, así como el plano cartesiano.

Tarea 4:

Respecto a los criterios:

φ_1 : Si la respuesta es correcta, parcialmente correcta, incorrecta o no se emitió respuesta alguna.

φ_3: Los registros de representación semiótica: a) formación de una representación identificable dentro de un registro dado, b) tratamiento y c) conversión de una representación

Finalmente los resultados obtenidos del análisis de la tarea 4, evidencian que los estudiantes lograron hacer la conversión correctamente; el 46.6% utilizó la sustitución de valores en la función, y el 53.4% utilizó el registro tabular considerando posibles valores entre las 2 p.m. y 6 p.m.

Respecto a los criterios:

φ_2: La técnica utilizada al resolver la tarea

φ_4: La tecnología sobre la que sustenta la técnica utilizada.

Se observó que la técnica utilizada; es decir, los procedimientos realizados por los estudiantes para resolver la actividad fueron: usar el registro tabular y la sustitución de valores en la función dada.

Respecto a la tecnología sobre la que se sustenta la técnica; es decir, la justificación de los procedimientos utilizados, los estudiantes utilizaron la sustitución de valores.

El análisis realizado a las respuestas proporcionadas por los estudiantes permitió evidenciar que la mayoría de ellos son buenos al aplicar reglas de derivación y al utilizar el registro numérico, ya que obtuvieron la derivada de manera correcta y evaluaron en el punto dado para obtener puntos importantes sobre la gráfica. En este sentido, los alumnos dan cuenta de estar familiarizados con el registro algebraico y numérico, al menos de forma mecanizada. Sin embargo, cuando se les solicitó que reflexionaran sobre los significados de los resultados obtenidos en las gráficas, no fueron tan precisos, como con el cálculo de las mismas. Por lo anterior, se concluye que los estudiantes realizaron la conversión y tratamiento del registro algebraico al registro gráfico de una forma parcialmente correcta o incorrecta, y en el caso en donde los estudiantes tenían que hacer la interpretación de un gráfico el 80% de ellos contestó de manera incorrecta tal como se muestra en la siguiente tabla comparativa.

Tarea	Técnica	Registro		Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Sin respuesta
1.1	Algebraica	Conversión Tratamiento	Gráfico	7		8	
1.2	Gráfico	Conversión	Verbal			12	3
2.1	Algebraica	Conversión Tratamiento	Gráfico	5	9	1	
2.2	Algebraica	Tratamiento	Algebraico	15			
2.3	Algebraica	Tratamiento	Algebraico	13	2		
2.4	Algebraica	Conversión Tratamiento	Gráfico	2	7	6	
3.1	Numérico	Conversión	Gráfico	13	2		
3.2	Numérico	Tratamiento	Numérico	12		3	
3.3	Numérico	Tratamiento	Numérico	10	2	3	
3.4	Numérico	Conversión	Verbal	13			2
4.1 y 4.2	Verbal	Conversión	Numérico	15			

Respecto a las tecnologías de las técnicas de solución, éstas no fueron constantes en el desarrollo de las tareas, debido a que la mayoría de los estudiantes no justificaron sus procedimientos.

Por lo anterior, se considera importante generar escenarios didácticos que permitan la manipulación de diferentes registros de representación para poder adquirir el conocimiento, en donde el profesor sea capaz de diseñar actividades o tareas que involucre no sólo el tratamiento de registros, sino la conversión de en al menos dos registros de representación semiótica (Duval, 1998).

Si bien es cierto, esta coordinación de registros de representación no es una actividad simple, si es esencial para la actividad matemática. Rojas (2013) considera fundamental reconocer la importancia de las representaciones semióticas, de su diversidad y de las múltiples posibilidades de dichas representaciones, escoger cuál de ellos permite representar mejor el rasgo que se quiere destacar considerando la población a la que va dirigido y la intencionalidad.

En este sentido, una de las aportaciones principales de este estudio es presentar al estudiante una serie de tareas respecto a la noción de derivada en torno a la variación y el cambio que permita el tratamiento, articulación y conversión de los registros de representación y la validación de sus procedimientos a través de tecnologías; es decir, a través de las justificaciones de sus procedimientos, de manera que se favorezca la comprensión de la razón de cambio de la derivada.

6.1 CONCLUSIONES RESPECTO A LA HIPÓTESIS

La hipótesis planteada en este trabajo es la siguiente:

El tratamiento de tareas y actividades en torno a la variación y cambio, y la articulación de sus diferentes registros de representación semiótica, favorecen la construcción del significado de la razón de cambio de la derivada.

De acuerdo al análisis realizado se concluye que la hipótesis no se cumple, debido a que los estudiantes mostraron dificultades en la conversión de algunos registros de representación y las tecnologías; es decir, las justificaciones de sus procedimientos no fueron evidenciadas por la mayoría de los estudiantes.

6.2 CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS

A continuación se detallan nuevamente el objetivo general y los objetivos específicos del presente trabajo:

OBJETIVO GENERAL

Identificar cómo los estudiantes construyen el significado de razón de cambio de la derivada, cuando interactúan con tareas o actividades específicas en torno a la idea de variación y cambio que implican el tratamiento y articulación de diferentes registros de representación semiótica

Para el logro de este objetivo general se plantearon los siguientes objetivos específicos:

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Diseñar e implementar actividades que les permitan a los estudiantes construir el significado de razón de cambio de la derivada a través de la representación semiótica de funciones.

Para alcanzar este objetivo se diseñó una serie de tareas en torno a la variación y cambio que implicaban el tratamiento y articulación de distintos registros de representación semiótica. La aplicación de la actividad implicó al siguiente objetivo específico:

- Analizar las interpretaciones que tienen los estudiantes al realizar las actividades de razón de cambio a través de la representación semiótica de funciones.

Para cumplir con este objetivo específico se analizaron las respuestas que dieron los estudiantes a cada una de las tareas tomando en cuenta los diferentes registros de representación utilizados, las técnicas, las tecnologías y sobre todo la coordinación de los registros y la conversión de ellos. El análisis de estos datos conllevó al último objetivo específico:

- Clasificar las interpretaciones de los estudiantes utilizando para ello la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) y la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS).

Para conseguir este objetivo se tomó en cuenta los resultados del análisis de las respuestas proporcionadas por los estudiantes. Se concluyó que la mayoría de los estudiantes no lograron construir un significado global de la derivada, debido a que les resultó complejo lograr la conversión entre algunos registros de representación y además, obviaron justificar sus procedimientos.

De acuerdo a lo anterior, se infiere que el objetivo general de este estudio no se llevó a cabo en toda su totalidad, debido a que el tercer objetivo no se alcanzó totalmente.

6.3 PUBLICACIONES DERIVADAS DEL ESTUDIO

Hernández, Ramírez & Aguilar (aceptado). Análisis de las praxeologías de razón de cambio de la derivada en libros de texto de Cálculo. *PädiUAQ Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería.*

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica

Avila Godoy, J., Avila Godoy, R., & Parra Bermudez, F. (2013). *Desarrollo histórico-epistemológico de la derivada de una función.* Clame. Capítulo 3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar, 1223-1230.

Bernal, T (2006). Metodología de la investigación para administración, economía, humanidades y ciencias sociales. Pearson Educación México.

Bosch, M.; García, F.; Gascón, J.; Ruiz H. L., La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C, Distrito Federa, México*, vol. 18, núm. 2, agosto, 2006, pp. 37-74

Caballero, M.; Cantoral, R. (2013). *Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional*. En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1197-1205). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Camargo, Ángela Patricia (2013). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 1841-1849). Montevideo, Uruguay: SEMUR.

Cardona, R., (2012). *Una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio a estudiantes de grado undécimo* (Tesis de Maestría). Bogotá, D.C. Colombia Universidad Nacional de Colombia.

Cegarra Sánchez, J. (2004). Metodología de la investigación científica y tecnológica (No. 001.434). Díaz de Santos,.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19(2), 221-266.

Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2016). Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches. Sage publications.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 1(1), 5-21.

Hernández, A., Cervantes, J., Ordoñez, J., & García, M. (2017). *Teoría de registros de representaciones semiótica.* Universidad Autónoma de Guerrero. Unidad Académica de Matemáticas.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. Journal for Research in Mathematics Education 39, 372-400.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo.* XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia (México), pp. 81-108.

Martínez Carazo, P. C. (2011). El método de estudio de caso Estrategia metodológica de la investigación científica. Revista científica Pensamiento y Gestión, (20).

Morales, H. (2013). La Teoría Antropológica de la Didáctica de Chevallard como sustento teórico para analizar el saber didáctico y matemático en la formación de profesores en la Universidad Católica de Concepción.

Ospina García, D. (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto funcional lineal.

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M. y Gorrochateguí, M. (2011). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, vol. 1, núm. 13, páginas 29 a 36.

Paredes, H. M. (2013). *La Teoría Antropológica de la Didáctica de Chevallard como sustento teórico para analizar el saber didáctico y matemático en la formación de profesores en la Universidad Católica de Concepción.* Actas del VII CIBEM ISSN, 2301(0797), 4518.

Parra V., & Otero, M. R. (2009). *Praxeologías Didácticas en la Universidad: Un estudio de caso relativo al Límite y Continuidad de funciones*. Zetetiké, 17(1).

Pino-Fan, L. (2010). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. Tesis de Maestría, Universidad de Granada, España.

Pino-Fan, L. (2011). Conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre la derivada: clarificando los significados de la derivada desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje. Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 8(1).

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2010). Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada. Trabajo presentado en la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, Nuevo León, México. 206-213.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. Educação Matemática Pesquisa 13(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Font, V., & Godino, J. D. (2014). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. Matamática educativa: La formación de profesores, 137-151.

Reséndiz, E., Correa, S., Llanos, R., Salazar, M., Sánchez, J. (2013). El diseño de objetos de aprendizaje para geometría. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 961-969). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rojas Garzón, P. J. *Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos.* Bogotá. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2013.

Salazar, A.C., Díaz, R.H. y Bautista, B.M., (2009). *Descripción de niveles de comprensión del concepto de derivada.* Tecné Episteme y Didaxis: TED. vol. 26, núm. 26, página 421.

Sánchez Matamoros, G., García, M., Llinares, S., (2008) La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, vol. 11, núm. 2, páginas 267-296.

Sandoval, J. (2014), Propuestas para la enseñanza de las matemáticas En Lestón, Patricia (Ed). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. *Introducción al concepto de derivada: Un diseño experimental en estudiantes universitarios de humanidades*, páginas 1197-1203, México, D.F. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sierpinska, A. (1990), Some remarks on understanding in mathematics. For the Learning of Mathematics, 10, 3, p. 24-36.

Vrancken, S. y Engler, A. (2004). *Una introducción a la derivada de la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la Universidad.* Boletín de Educación Matemática, vol. 28, núm. 48, páginas 449-468.