UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

MAESTRÍA EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LAS CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

"Identificación y clasificación de los errores emergidos durante el algoritmo de la división de polinomios"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

Maestro en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias (Matemáticas)

PRESENTA

Ing. Daniel Antonio García Pacheco

DIRIGIDO POR

M. en C. Luisa Ramírez Granados

Querétaro, Qro. 29 de noviembre del 2021

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias (Matemáticas)

Identificación y clasificación de los errores emergidos durante el algoritmo de la división de polinomios

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Maestro en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias (Matemáticas)

Presenta
Daniel Antonio García Pacheco

Dirigido por:
M. en C. Luisa Ramírez Granados

M. en C. Luisa Ramírez Granados
Presidente

D. en C. M. Víctor Antonio Aguilar Arteaga
Secretario

M. en D. M. Carmen Sosa Garza
Vocal

M. en D. M. Arturo Corona Pegueros
Suplente

M. en D. M. Ramón Torres Alonso
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Fecha de aprobación por el Consejo Universitario (26 de noviembre 2021)
México

1 Dedicatorias

Quiero dedicar este trabajo a mi padre José Antonio García Martínez cuyo consejo y sabiduría me han permitido cultivar buenos hábitos, perseguir mis objetivos y seguir hacia adelante sin importar la situación, y a mi madre Rosa Pacheco Aguillón por su eterno e incondicional apoyo a lo largo de mi educación y desempeño profesional. Nada de esto hubiera sido posible sin ustedes.

2 Agradecimientos

Agradezco a los docentes de la maestría en didáctica de las matemáticas por la formación que me fue impartida durante esta carrera, también a los docentes que ejercieron como sinodales de este trabajo, ofreciendo revisiones, observaciones y dando su aprobación una vez concluido.

Un agradecimiento especial a la maestra y coordinadora de la carrera Luisa Ramírez Granados por su papel como directora de tesis.

Por último quiero agradecer a la maestra Verónica García Sánchez y a sus alumnos de primer semestre del Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro cuyos aportes permitieron continuar con la investigación.

Índice de contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

3 Resumen

Palabras clave: Matemática educativa; División de Polinomios; Enfoque Lógico Semiótico; ACODESA; Errores; Álgebra.

El propósito de esta investigación yace en la identificación de los errores cometidos por alumnos de educación media superior al emplear el algoritmo de la división de polinomios a lo largo de las etapas de la metodología ACODESA para analizarlos con el marco teórico del enfoque lógico semiótico de Socas, observar la corrección o aparición de nuevos errores y poder clasificarlos en varias categorías de acuerdo a su posible origen. De forma general la mayoría de estos ocurren durante el aprendizaje del contenido matemático, sobre todo en los temas de leyes de los signos y de los exponentes, y al ejecutar el algoritmo de forma incompleta o forzada. ACODESA ofrece una corrección satisfactoria de algunos errores al tiempo que permite el surgimiento de otros.

4 Abstract

Keywords: Educational Mathematics; Polynomial Division; Semiotic Logical Approach; ACODESA; Errors, Algebra.

The purpose of this research lies in the identification of the errors made by students of upper secondary education when using the polynomial division algorithm throughout the stages of the ACODESA methodology to analyze them with the theoretical framework of the semiotic logical approach of Socas, appreciate the correction or appearance of new errors and be able to classify them into various categories according to their possible origin. In general, most of these occur during the learning of mathematical content, especially in the areas of laws of signs and exponents, and while executing the algorithm incompletely or forcibly. ACODESA offers a satisfactory correction of some errors while allowing the emergence of others.

5 Introducción

El presente trabajo de investigación busca hacer una identificación y recopilación de los errores cometidos por alumnos de preparatoria en el algoritmo de la división de polinomios para posteriormente clasificarlos de acuerdo al marco teórico del Enfoque Lógico Semiótico según su origen, lo que permite ofrecer una solución tentativa para corregir la base del error y que pueda derivar en una posterior línea de investigación o propuesta didáctica con ese propósito.

Es interesante usar el apoyo de la metodología ACODESA durante la recolección de datos para ver si algún error previo pudo ser corregido y dar crédito a la metodología por esa posibilidad, aunque puede también el caso de un error que perdure a lo largo del procedimiento o se genere durante la aplicación de la actividad.

El capítulo I muestra los antecedentes pertinentes que van desde el manejo del algoritmo de la división aritmética hasta el traslado de sus generalidades al álgebra, trasladando también varios errores que se arraigan en los alumnos. Se habla además de la importancia del error en el proceso de aprendizaje y como su identificación puede aportar valiosa información para trabajar en la comprensión de este tema.

El capítulo II habla de los polinomios como un tema recurrente tanto en los niveles de educación básico como en los posteriores y cómo es que la presencia constante de varios tipos de errores apreciados desde la perspectiva e intervención de algunos autores permite la justificación y el surgimiento de este trabajo de investigación.

En el capítulo III se describen las bases de las herramientas con las que se recabarán y analizarán los datos pertinentes para este trabajo de investigación, el

Enfoque Lógico Semiótico para clasificar y analizar los errores vistos en las evidencias y la metodología ACODESA de Hitt para hacer las intervenciones en el grupo de estudio.

El capítulo IV explica la ejecución de la metodología ACODESA y sus modificaciones para ser implementada junto con la actividad propuesta y algunos errores que se espera encontrar de acuerdo a la naturaleza de esta investigación y del estado del arte.

En el capítulo V se exponen los errores identificados tras analizar la evidencia recolectada durante la intervención al grupo de estudio en cada etapa de la metodología ACODESA pertinente a la investigación.

Finalmente el capítulo VI presenta las conclusiones del investigador, ofreciendo la perspectiva desde su experiencia en la aplicación de esta metodología, qué tan cerca se estuvo de lograr los objetivos propuestos y algunas recomendaciones con respecto al origen de los errores encontrados.

6 Capítulo I: Antecedentes

6.1 Dificultades

Las dificultades y los errores en el aprendizaje de las matemáticas han sido y son hoy un foco de estudio e investigación en educación matemática, en el que a pesar de su antigüedad, de los resultados obtenidos y de los esquemas teóricos utilizados para interpretar esos resultados, hay cuestiones importantes aún no resueltas (Socas 2011).

El aprendizaje de las matemáticas genera dificultades a los alumnos y éstas son de naturalezas distintas, su procedencia, por lo general, se concreta en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. De acuerdo a la investigación de Socas (1997) las dificultades se conectan entre sí para terminar manifestándose como errores en los alumnos y, pese a las distintas procedencias que puedan tener dichos errores, son considerados como un esquema cognitivo inadecuado en los alumnos y no solamente un descuido o falta de conocimiento. Las dificultades, por tanto, pueden abordarse desde varias perspectivas: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza.

En el trabajo de Castro (2012) se clasifican las dificultades del aprendizaje del álgebra en tres tipos:

- Aquellas que son intrínsecas al objeto: son debidas en gran parte a la naturaleza misma del álgebra, su lenguaje, los elementos que lo componen, las reglas que lo rigen.
- Aquellas que son inherentes al propio sujeto: están relacionadas con la complejidad que supone la abstracción y la generalización, acciones que desempeñan un papel destacado en el álgebra, haciendo hincapié en la componente abstracta.

- Aquellas que son consecuencia involuntaria, quizá de las técnicas de enseñanza: la enseñanza tradicional ha sido tal que las personas que estudiaron algún curso de álgebra durante su etapa escolar, cuando piensan en algebra recuerdan algo relacionado con solución de ecuaciones, factorización de polinomios, funciones y gráficas. Esta enseñanza marca el punto en el que las matemáticas dejaron de tener relación con el mundo real y está ligada a la concepción que tengan los diseñadores del currículo y los profesores que lo ponen en práctica.

Según Balacheff, citado por Castro (2012), los estudiantes no logran establecer una conexión después de llevar aritmética en primaria y álgebra en secundaria, esta transición termina provocando obstáculos.

Hay varias nociones que dificultan la adquisición de un contenido algebraico deseado de acuerdo al nivel de estudios del alumno, por ejemplo la necesidad de clausura, la concatenación, la sobregeneralización de propiedades que eran correctas en aritmética pero que son erróneas en álgebra, el lenguaje algebraico que el alumno no puede utilizar correctamente para hacer una traducción simbólico-verbal, el manejo del signo igual, el uso de paréntesis y jerarquía de operaciones, la confusión al manejar variables como abreviaturas en aritmética y que terminan ampliando sus usos en álgebra, etc., se pueden atribuir muchas más dificultades al manejo de símbolos y estructura de las expresiones algebraicas.

Según Kieran y Filloy (1989) considerar el álgebra como una aritmética generalizada no es algo tan simple, pues se requiere una transición en el pensamiento de los estudiantes, de escenarios numéricos claros y concretos a unos más generales de números y operaciones en donde seguir usando los métodos que antes funcionaban termina por dificultar el estudio del álgebra.

6.2 Errores

En el álgebra hay errores generados en el proceso de resolución de tareas cuyas fuentes son consideradas de carácter procedimental, errores de manipulación de distintas expresiones matemáticas, errores ocasionados por la transcripción de la información, secuencias incoherentes en los procedimientos, errores de cálculo simple o errores fortuitos, errores originados en la adquisición del conocimiento matemático, por inferencias erróneas, por la interferencia de conocimientos previos, por la estructura semántica del lenguaje, por las malas representaciones de la información, sobrecarga cognitiva, etc. (García Suárez, Segovia y Lupiáñez 2012).

Con respecto al estudio y clasificación del error, el trabajo de Socas (1997) hace una reflexión sobre las dificultades, obstáculos y errores que presentan los alumnos de secundaria al construir el conocimiento matemático, analizando el origen de las dificultades, la noción de obstáculo y los diferentes errores que cometen los alumnos al trabajar con las matemáticas, ofreciendo estrategias de prevención y remedio.

Más adelante, Socas (2007) habla de los resultados de investigaciones sobre las dificultades y errores de los alumnos en la construcción del lenguaje algebraico, utilizando el Enfoque Lógico Semiótico para el análisis, de acuerdo a la misma investigación se dedujo que, aunque un alumno sea bueno en matemáticas, puede ocultar serios errores operacionales, estructurales y procesuales de los objetos matemáticos que dificultarán el aprendizaje matemático. Por lo anterior, es importante no centrarse solo en las respuestas de las actividades realizadas en clase y tareas, sino también en los errores, así es posible hacer un diagnóstico que permitirá al profesorado arbitrar procedimientos y remedios efectivos para ayudar en su corrección.

En el mismo contexto, Delgado (2011) en su tesis sobre las dificultades de los alumnos en relación a los polinomios, donde muestra una clasificación de los errores en el tratamiento de polinomios, afirma que "conocer la naturaleza de los errores de los alumnos permite diseñar estrategias que provean las herramientas a los alumnos para superar situaciones de conflicto y acceder al nuevo conocimiento matemático" (p. 1), por lo que se reafirma la idea de centrarse en los errores.

De igual forma Rico (1995) señala que los errores pueden contribuir positivamente en la enseñanza y estos no aparecen por azar, de modo que se debe modificar la tendencia de condenar los errores culpabilizando a los estudiantes, pues todo proceso de instrucción es también potencialmente generador de errores, y considera como características generales las siguientes:

- Los errores surgen en la clase por lo general de manera espontánea.
- Son persistentes y particulares de cada individuo.
- Hay un predominio de los errores sistemáticos con respecto a los errores por azar u ocasionales.
- Los alumnos no toman conciencia del error, pues no cuestionan lo que les parece obvio y no consideran el significado de los conceptos, reglas o símbolos.
- Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el alumno de la información que da el profesor.

En su investigación sobre el análisis de los errores, Del Puerto et al. (2004) afirman que el error es una parte del proceso de aprendizaje. Los investigadores en educación matemática sugieren diagnosticar y tratar seriamente los errores en los alumnos, discutir con ellos sus concepciones erróneas y presentarles luego situaciones matemáticas que les permitan reajustar sus ideas.

Mencionan además que “el análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje provee una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático, y es una excelente herramienta para relevar el estado de conocimiento de los alumnos” (p. 4).

En la superación de los errores cometidos es necesario que el estudiante asuma un papel activo viéndose involucrado en un conflicto a través del cual sustituya sus concepciones erróneas por otras adecuadas, enfrentándose a la contradicción que existe entre ambas (Gavilán Bouzas 2011).

Concretamente sobre la presencia del error en tareas de álgebra, la investigación realizada con alumnos universitarios de García Suárez (2015) afirma que la preparación matemática que reciben los estudiantes previa al ingreso del nivel universitario debería permitirles resolver actividades algebraicas sin dificultad, lo cual no sucede, y hace también énfasis en ir más allá de la consideración predominante y errónea de que memorizar y efectuar un procedimiento es lo único requerido para lograr la comprensión de un concepto algebraico.

6.3 Algoritmo de la división

Sobre el algoritmo de la división, Itzcovich H. y Broitman C. (2001), citados por Aguiriano (2015), aseguran que la riqueza de este algoritmo permite, entre otras cosas, un acceso temprano de la aritmética al álgebra, ya que se puede enseñar nuevos conocimientos relacionados con la división desde una perspectiva algebraica cuando el alumno maneja muy bien los conceptos aritméticos.

Villota (2014) investigó sobre los errores que cometen los alumnos de cuarto año de primaria en el desarrollo de divisiones con números naturales, concluyendo que la mayoría de la muestra no tiene claro el proceso para dividir y, su enseñanza de forma mecánica no permite la creación de modelos de división, también es necesario dar una mejor formación a los docentes para que estos construyan con éxito las bases de la suma, resta y multiplicación en los estudiantes.

Reafirmando lo anterior con una investigación realizada a estudiantes del mismo grado, Cirternas (2014) concluye que la mayor complicación con respecto al manejo de la multiplicación y la división yace en la incomprensión de éstas operaciones, es decir, los estudiantes no comprenden porque deben ser utilizadas al resolver una tarea de matemáticas, resaltando la prioridad de este problema sobre la mala memoria de los alumnos o tal vez su falta de atención en clase.

Un grado más adelante, la investigación de González (2013) indaga sobre los errores en el algoritmo de la división, con la premisa de que los estudiantes en educación básica tienen dificultades en los algoritmos de todas las operaciones básicas: no colocar el cero en el cociente, mal uso de las tablas de multiplicar, bajar o utilizar incorrectamente los números del dividendo y dividir por separado las centenas, decenas y unidades del dividendo son los errores más frecuentes.

Por su parte Ramos (2013) argumenta que los alumnos tienen grandes carencias para utilizar la división, resultado de la rapidez del curso, la enseñanza tradicional y la amplitud del contenido curricular, resaltando además, la importancia de las operaciones básicas como necesarias para entender el algoritmo de la división.

Sobre las operaciones con polinomios, Villarroel (2014) propone la herramienta didáctica “caja de polinomios” como una forma de enseñar las cuatro operaciones básicas y la factorización de polinomios, basando sus actividades en el aprendizaje significativo planteado por Ausubel (1978). Herramientas pedagógicas como la anterior buscan generar un estado de ánimo satisfactorio por parte de los participantes, creando conciencia sobre la importancia de manipular el material correcto en el desarrollo de distintos temas (Castillo y López Mairena 2018).

Fonseca, Bosch, y Gascón (2010) describen la división sintética o “regla de Ruffini” como “un ingrediente esencial de las técnicas de resolución de ecuaciones polinómicas” (p.15), siendo un algoritmo distinto al tradicional, utilizado principalmente para hallar las raíces enteras de un polinomio y, según los autores, se acompaña siempre de problemas diseñados para que este algoritmo pueda ser aplicado, dejando a un lado el estudio y concientización de sus limitantes, siendo más significativo en la división sintética, ya que sólo permite la división de un polinomio entre otro de la forma $ax + b$, es decir, un polinomio de grado 1. Pese a la limitante, la investigación de García Salmerón, Jiménez Marín y Rodríguez Vásquez (2017) considera a la división de polinomios como la forma más fácil, rápida y compacta para dividir dos polinomios.

Bajo este mismo enfoque, la investigación de Graus (2013) explica la “regla de Gamboa” para la división entera de polinomios, la cual combina elementos del algoritmo convencional, división sintética y división por coeficientes indefinidos, resultando en un algoritmo similar a la “regla de Ruffini” que permite la división entre un polinomio de cualquier grado.

7 Capítulo II: El problema a estudiar

7.1 Planteamiento del problema

En este trabajo de investigación se parte, gracias a la aportación de varios autores, de la problemática en el aula referente al manejo de la división de polinomios cuyo algoritmo sigue mostrándose difícil de ejecutar para los alumnos incluso en niveles educativos pre-universitarios y universitarios. Dado que dicho algoritmo requiere sólidas bases de álgebra, y ésta a su vez depende de un buen manejo de conocimientos aritméticos, es sencillo apreciar una secuencia en la que los errores cometidos en etapas tempranas continúan siendo arrastrados e impiden una compresión adecuada del tema en cuestión; se vuelve relevante entonces identificar los errores que se cometen y hacer un análisis para determinar el punto en que surgen con el fin de poder aspirar a una corrección.

Para comenzar, los polinomios son parte de un contenido convencional en instituciones de nivel medio-superior y superior, las operaciones con ellos se encuentran dentro de una rama que se desarrolla en una amplia y rica sección del álgebra; éstas han sido consideradas por los estudiantes como uno de los tópicos poco aplicables a otros campos diferentes del conocimiento, poco útil para ellos y demasiado abstracto. Es por estas razones que se dificulta apropiarse de ese conocimiento a pesar de que se les plantea cuáles fueron las ideas y problemas que le dieron origen y significado (Gamboa y Santiesteban 2015).

Aunado a esto se observan, según Jiménez Marín y García Salmerón (2017) dificultades en cuestiones algebraicas como el manejo de fracciones, cálculos aritméticos y, por supuesto, manejo de los signos, problemas que persisten en los estudiantes pese a que el tema de polinomios se considera tradicional en la educación básica y terminan por afectar de forma negativa el acercamiento a la división entre dos polinomios.

Aguiriano (2015) concluye que en lo que respecta al algoritmo de la división en los enteros, con su grupo de estudio, conformado por estudiantes de nuevo ingreso a ingeniería agronómica, tuvieron un desempeño no satisfactorio, encontrando lo que él llama errores de nivel secundaria, como: no agregar ceros al cociente, no identificar residuos mayores que el divisor, leve empleo analítico de la igualdad $a=bq+r$ (el dividendo es igual al producto del divisor y el cociente, más el residuo) para comprobar el resultado, olvidar el planteamiento de restas como paso intermedio y no cambiar el signo de algunos términos.

Según Socas (2007) es posible que un estudiante muestre errores operacionales, estructurales y procesuales aunque no tenga dificultad aparente con las matemáticas, estos errores de los objetos matemáticos dificultarán el aprendizaje de un contenido posterior, por lo que hacer un diagnóstico y tratamiento de estos errores puede permitir a los profesores idear dinámicas y procedimientos que ayuden en su corrección. Lo anterior queda reafirmado en la investigación de García Suárez, Segovia y Lupiáñez (2011) donde se encontraron errores con un origen en la formación matemática previa al nivel educativo actual de los estudiantes universitarios, y plantean la obtención de logros en el aprendizaje si los errores pueden ser reconocidos y superados.

En resumen, las investigaciones de Gamboa y Santiesteban (2015) y Aguiriano (2015) dejan en claro que los alumnos siguen mostrando problemas en el algoritmo de la división de polinomios, mientras que las investigaciones de Socas (2007), Rico (1995) y Del Puerto et al. (2004) muestran que tratar adecuadamente las propiedades algebraicas permite acceder a un nuevo contenido matemático, de ahí la importancia de identificar los errores y trabajar en una corrección posterior.

Por lo anterior el presente trabajo de investigación pretende dar respuesta a la pregunta: ¿Qué errores emergen durante el algoritmo de la división de polinomios?

7.2 Justificación

Profundizando en el estado del arte sobre la importancia de la identificación y tratamiento del error, se observó una deficiencia de los estudiantes en el manejo de operaciones básicas con polinomios, deficiencia que puede partir desde el mal uso de estas operaciones fuera del contexto algebraico.

El algoritmo de la división necesita de las tres operaciones suma, resta y multiplicación para ser ejecutado, además de ser un tema presente en todos los cursos de álgebra, de modo que sería útil, en un contexto específico, observar que tipos de errores son cometidos por estudiantes de preparatoria al desarrollarlo para entonces tener la posibilidad de analizarlos, y así sugerir tareas para atender las causas de estos errores y corregirlos.

Los polinomios son ampliamente utilizados en matemáticas y las ciencias conforme se avanza en el currículo de la institución. Las ecuaciones y funciones polinómicas tienen aplicaciones en una gran variedad de problemas, desde la matemática elemental hasta la física, astronomía, geología, química, medicina, biología, farmacología, economía, ingenierías de varios tipos, ciencias sociales, entre otras áreas (Gamboa y Santiesteban 2015).

7.3 Hipótesis

Mediante el diseño y aplicación de tareas específicas con la metodología ACODESA se espera ver en los alumnos de preparatoria los tipos de errores que surgen durante el algoritmo de la división de polinomios para clasificarlos de acuerdo a su origen.

7.4 Objetivos

7.4.1 Objetivo general

Identificar y clasificar los errores que los alumnos de preparatoria cometen en el algoritmo de la división de polinomios.

7.4.2 Objetivos específicos

- Diseñar problemas con polinomios de una sola variable de máximo grado 3 para la aplicación de las tareas.
- Observar, a lo largo de la metodología ACODESA, si los errores emergidos en una etapa aparecen o no en la siguiente (comparación y autoevaluación).
- Proponer recomendaciones basadas en el análisis de los resultados para la generación de una secuencia didáctica o estudios posteriores.

8 Capítulo III: Marco Teórico

En este capítulo se abordará la fundamentación que da sustento al presente trabajo de investigación, comenzando con las bases del Enfoque Lógico Semiótico de Socas, marco teórico que permitirá realizar la clasificación y posterior análisis de los errores identificados en las tareas aplicadas a los alumnos del grupo de estudio durante la intervención, esta última siendo ejecutada siguiendo una adaptación de la metodología ACODESA de Hitt para recabar más datos relevantes sobre la permanencia o mitigación del error en alguna de sus etapas.

8.1 Enfoque Lógico Semiótico

El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) es un marco teórico en construcción que está siendo desarrollado por el Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de la Laguna en España, centra su atención en las investigaciones relacionadas con el aprendizaje del lenguaje algebraico. Este marco teórico "pretende aportar instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias" (Socas 2012) y esta investigación permite la elaboración de dos modelos de competencias usados para el estudio del error: el formal y el cognitivo.

El microsistema educativo puede ser descrito como el lugar o ambiente donde se enseña el conocimiento matemático, está compuesto de tres elementos básicos: estudiante, docentes y la disciplina en cuestión (en este caso matemáticas), y de tres componentes: la Social, la Cultural y la Institución Escolar, que determinan el contexto. Básicamente se toman los elementos del triángulo didáctico y se establecen relaciones entre ellos como se muestra en la figura 1.

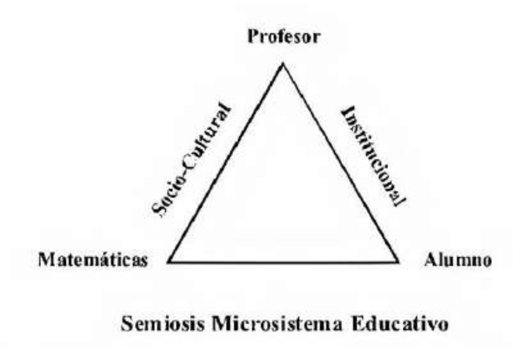

Figura 1. Relaciones del triángulo didáctico en el ELOS (Socas, M. 2012. El Análisis Del Contenido Matemático En El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a La Investigación Y Al Desarrollo Curricular En Didáctica de la Matemática. 1–22)

El modelo de competencia formal parte de la organización funcional, fenomenológica y conceptual de los objetos algebraicos, en palabras de Delgado (2011), explica la relación que hay entre los objetos matemáticos y el lenguaje algebraico.

El modelo de competencia cognitivo se organiza en torno a las siguientes componentes:

- las representaciones semióticas,
- los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación en álgebra,
- dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra.

Es importante profundizar en cada una de ellas para dar paso a la clasificación y estudio del error.

La representación semiótica en este enfoque parte de entender la semiosis como el triple proceso de generar signos, de acciones del signo y de inferencia siendo el proceso de ésta última la designación de un objeto matemático mediante un signo, esta representación genera una interpretación mental en la persona o colectivo que la recibe, de modo que el significado de un objeto matemático puede ser observado a través del signo y está de cierta forma ligado a un interpretante.

La segunda componente se refiere a los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación en álgebra, para hablar de ellos primero es necesario hablar de los sistemas de representación semiótica, estos consisten en un sistema de signos a través de los cuales pueden comunicarse los objetos matemáticos.

Socas (2007) menciona que los sistemas de representación semiótica más formales permiten que los alumnos no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones, contrario a los sistemas más visuales o más intuitivos, y es en el dominio de estos sistemas formales donde aparecen una sucesión de estadios de desarrollo cognitivos que permiten generar una competencia, se tiene entonces tres estadios de desarrollo: el semiótico, el estructural y el autónomo.

En el estadio semiótico el objeto y los signos nuevos emergen y son caracterizados por objetos y signos antiguos ya conocidos, es decir, el individuo aprende y emplea signos nuevos con los significados de los signos pertenecientes al sistema antiguo que ya sabe manipular. En el estadio estructural se recurre a comportamientos y patrones del sistema antiguo para dotar de significado a los símbolos y objetos que aparecen en el nuevo sistema, es decir, mediante estructuras ya conocidas se puede asignar un significado a la aparición de símbolos que no se habían visto antes. Finalmente en el estadio autónomo se tiene a los signos y objetos cuyo significado no puede ser obtenido con el manejo de un sistema antiguo ya sea de signos, procedimientos o estructuras, sino que es propio del nuevo sistema.

La tercera y última componente del modelo de competencia cognitivo es las dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra, las dificultades, de acuerdo a Socas (1997), tienen su origen en el ya mencionado microsistema educativo, conectadas en complejas redes que terminan por concretarse en forma de obstáculos que a su vez generan errores en los estudiantes y están asociadas a la disciplina de las matemáticas y complejidad de los objetos, a los procesos de enseñanza, a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes y a las actitudes afectivas y emocionales que los estudiantes tienen hacia las matemáticas. En resumen, las dificultades pueden abordarse desde tres elementos: el desarrollo cognitivo de los estudiantes, el currículo de matemáticas y los procesos de enseñanza.

8.2 Clasificación y estudio del error

Para Socas (2007) los errores aparecen cuando los estudiantes abordan un conocimiento nuevo que los lleva a reestructurar el visto anteriormente, y es esta adaptación del conocimiento lo que dará al error distintas procedencias. Con este enfoque se sitúan los errores cometidos por los alumnos en tres ejes que se organizan en semiosis distintas, el error puede tener origen en un obstáculo epistemológico, didáctico o cognitivo; otro origen posible es la ausencia de sentido semiótico, estructural o autónomo, y también puede tener origen en la afectividad, emociones, actitudes y creencias que tienen los alumnos hacia el contenido matemático. Los errores con origen en un obstáculo y en las actitudes hacia las matemáticas proceden directamente de las dificultades en el aprendizaje del álgebra, mientras que los errores con origen en una ausencia de sentido parten de los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación vistos anteriormente.

Cuando hablamos de un obstáculo epistemológico nos referimos a un contenido matemático que generó de forma natural una gran resistencia para ser adquirido a lo largo de la historia de la humanidad, por lo que no debería sorprender que los estudiantes tengan dificultades para abordarlo. El obstáculo didáctico es, junto con el cognitivo, referente al currículo de matemáticas, el primero genera errores debido a la forma en que las clases y el material son presentados por el docente a sus alumnos, mientras que los errores generados por el segundo están relacionados con la manera en que el alumno construye él mismo el conocimiento.

Los errores con origen en actitudes afectivas y emocionales parten de los sentimientos, generalmente negativos, hacia el contenido matemático como la incertidumbre, ansiedad o estrés por mencionar algunos. Kieran y Filloy (1989) mencionan que la sociedad considera el álgebra como una parte compleja de las matemáticas a tal grado de que simplemente escuchar la palabra “álgebra” es suficiente para provocar miedo e indisposición en los estudiantes.

Y los errores con origen en una ausencia de sentido pueden diferenciarse en tres etapas: errores con origen en la aritmética, errores de procedimiento y errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Los errores con origen en la aritmética parten de una ausencia de sentido semiótico, refiriéndose a objetos y símbolos que fueron presentados en el lenguaje aritmético y cuya comprensión y asimilación permite emplearlos en álgebra con un significado diferente o dotar de significado a nuevos símbolos y objetos.

Los errores de procedimiento yacen en una ausencia de sentido estructural, manifestándose cuando los alumnos usan inadecuadamente fórmulas o reglas de procedimiento.

Por último los errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico surgen en el manejo de signos cuyo significado no puede atribuirse al de un signo del lenguaje antiguo, en otras palabras, son autónomos.

Figura 2. Componentes del modelo de competencia cognitivo (Socas, M. 2007. Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. In Investigación en Educación Matemática XI (pp. 19–52). Universidad de la Laguna. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178)

La investigación de Socas (2007) entrega un listado y descripción de los errores encontrados durante el análisis de las actividades aplicadas a sus estudiantes participantes, a continuación se describen dichos errores.

Errores relativos al uso del paréntesis, se refieren al mal uso del paréntesis, o al hecho de no utilizarlo aunque se identifique en el contexto. Por la forma en que este contenido matemático es enseñado puede tener origen en un obstáculo didáctico, o bien puede deberse a una ausencia de sentido semiótico, para este último en particular nos remontamos a orígenes aritméticos.

Errores debidos a la concatenación, ya los mencionan Kieran y Filloy (1989) como una fuente de confusión para el alumno puesto que en aritmética la yuxtaposición de dos símbolos indica una adición, y en algebra indica una multiplicación. Por ejemplo, en aritmética los símbolos 3 y 7 colocados juntos forman el número 37, es decir $30 + 7$, mientras que en álgebra los símbolos 4 y b colocados juntos forman $4b$, que significa 4 por b.

Necesidad de particularización, es un error con origen en una ausencia de sentido, pues dependiendo el contexto el alumno no puede darle sentido al uso del lenguaje algebraico y retrocede entonces al lenguaje numérico que sí sabe utilizar.

Necesidad de clausura, se refiere a la necesidad que puede presentar el alumno de “concluir” una operación que se presenta como incompleta, por ejemplo, $5x + 3$ resulta en $8x$ cuando se manifiesta este error con origen en un obstáculo cognitivo o en una ausencia de sentido estructural.

Tabla 1. Listado de errores en la investigación de Socas

Error identificado	**Origen del error**
Mal uso del paréntesis	Obstáculo didáctico Ausencia de sentido semiótico (origen en la aritmética)
Concatenación	Obstáculo cognitivo
Necesidad de clausura	Obstáculo didáctico Ausencia de sentido estructural (errores de procedimiento)
Necesidad de particularización	Ausencia de sentido

Nota: Esta tabla ha sido adaptada de “Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico”, por Socas, M. 2007, en Investigación en Educación Matemática XI (pp. 19–52). Universidad de la Laguna. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178

Se presenta también la clasificación de errores usada por Delgado (2011) la cual muestra los tipos de errores que tienen su origen en un obstáculo y los que tienen su origen en una ausencia de sentido.

Tabla 2. Listado de errores en la investigación de Delgado

Eje	Tipos de errores
Errores que tienen su origen en un obstáculo	Errores de concatenación Errores de necesidad de clausura
Errores que tiene su origen en una ausencia de sentido	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética Errores de procedimiento Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico

Nota: Esta tabla ha sido adaptada de "Un estudio, desde el enfoque lógico semiótico, de las dificultades de alumnos de tercer año de secundaria en relación a los polinomios" por Delgado, A. 2011, de la Pontificia Universidad Católica del Perú. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/4732

Es posible estudiar el error con el análisis anterior desde distintos puntos de vista, y es necesario diseñar actividades para detectar la naturaleza del mismo (Socas 2007). El estudio del error se puede hacer desde tres niveles diferentes: producto, proceso y origen.

- a nivel producto se realiza considerando la estructura superficial del objeto algebraico en los ámbitos de actuación del objeto: operacional, estructural y procesual,
- a nivel proceso se realiza considerando tanto la estructura superficial como profunda del objeto algebraico en sus diferentes estadios de desarrollo,
- a nivel origen se realiza considerando tanto la estructura superficial como profunda del objeto algebraico, en los estadios semiótico, estructural o autónomo, como en los ámbitos de actuación del objeto; operacional, estructural y procesual.

8.3 Metodología ACODESA

Para esta investigación se utilizará la metodología de aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión, ACODESA (Hitt y González-Martín 2015) por su acrónimo en francés, la cual surge de un sistema semiótico expandido al considerar representaciones funcionales e institucionales y su evolución en un escenario cultural, al que se refiere como "Sistema Cultural Semiótico", la microsociedad de un salón de clases puede favorecer la evolución de este sistema partiendo de las dos representaciones mencionadas: la institucional es generada por la enseñanza convencional, usualmente el docente y los medios de los que dispone para impartir la clase, y la funcional es una representación que emerge espontáneamente del alumno para entender y resolver tareas matemáticas no rutinarias previo a la representación institucional.

Durante la resolución de las tareas el profesor no debe proveer una solución o pistas que permitan llegar a una, su papel es más bien el de observar el trabajo individual de los estudiantes, dar apoyo para un buen intercambio de ideas dentro del proceso sociocultural de comunicación y animar la auto-reflexión antes de la institucionalización, integrando los entornos individual y sociocultural. La metodología permite introducir un conocimiento matemático a lo largo de cinco etapas:

- Trabajo individual: cada estudiante resuelve la tarea por cuenta propia, desarrollando representaciones funcionales.
- Trabajo en equipo: se trabaja la misma tarea en equipo, y gracias a la argumentación y validación de los integrantes se puede mejorar lo desarrollado en la fase anterior. El profesor no interviene más que para mantener el orden en el aula.
- Debate: se mejora nuevamente lo obtenido en la fase anterior con todos los miembros de la clase participando y ofreciendo su forma de resolver la

tarea. El profesor tiene el rol de favorecer el intercambio de opiniones y resultados, pero no interviene en la resolución de la tarea.

- Auto-reflexión: el estudiante trabaja la tarea por su cuenta en casa, reconstruyendo el conocimiento.
- Proceso de institucionalización: las representaciones institucionales son presentadas por el profesor, basándose en los resultados de las fases anteriores.

La metodología ACODESA permitirá aplicar una serie de tareas en cada una de sus etapas y al recolectar los resultados se procederá a un análisis para identificar los errores cometidos por los estudiantes del grupo de estudio y cuáles de ellos persisten, estos errores podrán ser clasificados según su origen con el Enfoque Lógico Semiótico.

9 Capítulo IV: Metodología de intervención

9.1 Implementación original de la metodología

En esta investigación de carácter cualitativo se diseñó y aplicó una tarea compuesta de un ejercicio de división de polinomios con una sola variable y de grado 3, se utilizó una modificación de la metodología ACODESA (Hitt y González-Martín 2015) para observar si, al resolver la tarea aplicada, en alguna de sus etapas los estudiantes de la muestra pueden reconocer los errores que cometieron. Fue pertinente para esta investigación identificar los errores en cada etapa y observar cómo cambian a lo largo de la intervención. Las etapas de la metodología ACODESA quedaron de la siguiente manera:

- Trabajo individual: cada estudiante resuelve la tarea por cuenta propia, sin recibir ningún tipo de guía por parte del docente o del investigador más allá de las instrucciones previas a la aplicación y mantener el orden.
- Trabajo en equipo: se trabaja la misma tarea de la etapa anterior, esta vez en equipos de 3 personas, permitiendo un intercambio de argumentos y validaciones que podría cambiar o reafirmar los resultados obtenidos en el trabajo individual.
- Debate: toda la clase participa en esta etapa, cada alumno tiene la posibilidad de mostrar el procedimiento que utilizó para resolver la tarea y se llega a una conclusión grupal sobre cuáles son los resultados correctos, nuevamente sin la ayuda del profesor o del investigador más que para favorecer la comunicación entre los alumnos.
- Auto-reflexión: cada estudiante realiza de forma individual una versión ligeramente distinta de la primera tarea. Se puede esperar que los resultados de esta etapa muestren menos errores que los de la primera etapa.

- Proceso de institucionalización: el tema de división de polinomios es institucionalizado por el profesor, apoyándose en las observaciones realizadas durante las etapas previas.

Los resultados de las cuatro primeras etapas que involucran la resolución de una tarea son analizados con el marco teórico ELOS para identificar los errores que fueron cometidos por los sujetos de estudio en cada etapa, definir su origen y hacer una clasificación. Se hizo la grabación de voz de las etapas dos y tres que involucran un trabajo grupal a fin de presentar los argumentos y validaciones que los estudiantes ofrecen a sus compañeros y cómo esto afecta los nuevos resultados obtenidos.

9.2 Sesión de prueba con plataformas digitales

Debido a la situación provocada por la pandemia del COVID-19 el panorama escolar cambió drásticamente a un modelo de educación a distancia el cual impidió la obtención de evidencias de la forma que estaba prevista y una modificación a la metodología fue requerida. Dado que la metodología original pretendía aplicarse a un grupo de manera presencial fue necesario trabajar primero una sesión de prueba para adaptar la metodología al modelo de educación a distancia antes de aplicar la actividad completa.

La sesión de prueba consistió en un primer acercamiento del investigador con el grupo de estudio a través de la plataforma Zoom para explicar la forma de trabajar la actividad propuesta, dar una introducción al algoritmo de la división de polinomios y concluir dividiendo al grupo en seis equipos de cuatro a seis personas para resolver un ejercicio que fue presentado en la plataforma Classroom de Google. La formación de equipos fue posible gracias a la división del grupo en sub salas dentro de la misma plataforma, tres de estas fueron monitoreadas cada una por un supervisor a lo largo de la sesión para observar la interacción de los alumnos y determinar las complicaciones que surgieran y aspectos a considerar con el fin de adaptar la metodología ACODESA para la verdadera intervención, la sesión de prueba tuvo una duración de 60 minutos en total.

9.3 Implementación adaptada de la metodología

Sobre la intervención, los alumnos tendrían ahora que acceder a una clase preparada por el investigador en Google Classroom para ver el ejercicio a resolver y las instrucciones pertinentes, para que cada alumno subiera sus evidencias en el espacio correspondiente las cuales serían analizadas más adelante para identificar los errores cometidos.

Al final de la sesión de prueba se determinó que las etapas dos y tres de la metodología ACODESA originalmente planeada necesitaban una modificación para ser aplicadas con plataformas digitales quedando de la siguiente manera:

- Trabajo individual: con excepción de su aplicación a través de la plataforma Zoom esta etapa permanecería en esencia sin cambios con respecto a la original. Los alumnos acceden a Google Classroom para ver la actividad, la resuelven de manera individual y se toma una fotografía como evidencia.
- Trabajo en equipo: la segunda etapa ahora permitiría que cada equipo contara con un docente supervisor que grabaría la sesión en Zoom y, a diferencia de la metodología planeada previamente, tomaría un rol más activo en la resolución del problema, cuestionando a los alumnos, preguntando en qué paso van, que resultado llevan hasta el momento, comparar resultados, favorecer el intercambio de opiniones y guiarlos a la conclusión del ejercicio sin revelar en ningún momento el resultado correcto o indicarles el camino a este. El resultado obtenido dependería únicamente del trabajo de los alumnos.
- Debate: la tercera etapa originalmente era idéntica a la segunda con la diferencia de que el grupo completo trabajaría como un solo equipo para

resolver la actividad entre todos. Ahora el ejercicio sería resuelto en la pizarra de Zoom por el investigador siguiendo los pasos indicados por los estudiantes y favoreciendo el intercambio de opiniones entre ellos hasta llegar a un resultado correcto o incorrecto.

- Auto-reflexión: se deja como tarea un ejercicio similar al de las etapas anteriores para realizar de manera individual y subir una fotografía como evidencia a Google Classroom.
- Proceso de institucionalización: queda como responsabilidad del docente presentar el tema de la división de polinomios y el algoritmo tomando en cuenta las observaciones vistas a lo largo de la metodología. Esta última etapa no es de interés para analizar.

Toda la intervención tuvo una duración de 120 minutos y se contó con el apoyo del docente del grupo y dos docentes adicionales para supervisar a las sub salas durante la etapa de trabajo en equipo.

9.4 Actividad propuesta

La actividad diseñada consistió en un detallado ejemplo explicando el algoritmo de la división de polinomios con todos sus pasos durante la sesión de prueba para concluir en una representación de la forma $a = bq + r$ (el dividendo es igual al producto del divisor y el cociente, más el residuo) (Aguiriano 2015), y finalmente proponer un ejercicio en Google Classroom de división de polinomios con una sola variable a resolver durante la intervención siguiendo la adaptación de la metodología ACODESA.

Ejemplo del algoritmo de la división larga de polinomios.

Si queremos dividir el polinomio $6x^3 + 7x^2 + 2x$ entre el polinomio $2x^2 + x$.

1) Se identifica el dividendo y el divisor.

En una casilla de división el dividendo se coloca dentro de la casilla y el divisor fuera de ella a la izquierda.

Divisor $\longrightarrow$ $2x^2 + x \overline{\big)\, 6x^3 + 7x^2 + 2x}$ $\longleftarrow$ Dividendo

2) Se divide el primer término del dividendo ($6x^3$) entre el primer término del divisor ($2x^2$). En este ejemplo, $6x^3 \div 2x^2 = (6 \div 2) \cdot (x^{3-2}) = 3\boldsymbol{x}$

3) Colocar el resultado sobre la casilla.

$$\begin{array}{r|l} & \mathbf{3x^2} \\ \cline{2-2} 2x^2 + x & 6x^3 + 7x^2 + 2x \end{array}$$

División de monomios

4) Se multiplica el resultado anterior por el divisor.

En este ejemplo, $(3x) \cdot (2x^2 + x) = \mathbf{6x^3} + \mathbf{3x^2}$

5) El producto obtenido se ubica bajo el dividendo.

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \cline{2-2} 2x^2 + x & 6x^3 + 7x^2 + 2x \\ & \mathbf{6x^3} + \mathbf{3x^2} \end{array}$$

Producto obtenido

6) Al dividendo se le resta el producto obtenido en el paso anterior.

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \cline{2-2} 2x^2 + x & 6x^3 + 7x^2 + 2x \\ - & \mathbf{6x^3} + \mathbf{3x^2} \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Resta de polinomios

$$(6x^3 + 7x^2 + 2x) - (6x^3 + 3x^2) = 6x^3 + 7x^2 + 2x - 6x^3 - 3x^2 = \mathbf{4x^2} + \mathbf{2x}$$

Resta de polinomios en forma lineal

7) El resultado de la resta de polinomios anterior se coloca en el siguiente renglón.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 3x \\
\cline{2-2}
2x^2 + x & 6x^3 + 7x^2 + 2x \\
 & {}^{-}\,6x^3 + 3x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad \mathbf{4x^2 + 2x}
\end{array}
\longleftarrow \text{Resultado de la resta}
$$

8) Se tiene ahora el nuevo "dividendo" $4x^2 + 2x$, y si el último renglón es un polinomio de grado mayor o igual al grado del divisor, entonces se repiten los pasos 2 al 7.

2) Se divide el primer término del "dividendo" $(4x^2)$ entre el primer término del divisor $(2x^2)$. En este ejemplo, $4x^2 \div 2x^2 = (4 \div 2) \cdot (x^{2-2}) = \mathbf{2}$

3) Colocar el resultado sobre la casilla.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 3x + \mathbf{2} \\
\cline{2-2}
\mathbf{2x^2} + x & 6x^3 + 7x^2 + 2x \\
 & {}^{-}\,6x^3 + 3x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad \mathbf{4x^2} + 2x
\end{array}
$$

División de monomios $4x^2 \div 2x^2 = 2$

4) Se multiplica el resultado anterior por el divisor.

En este ejemplo, $(2) \cdot (2x^2 + x) = \mathbf{4x^2 + 2x}$

5) El producto obtenido se ubica bajo el "dividendo".

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 3x + \mathbf{2} \\
\cline{2-2}
\mathbf{2x^2 + x} & 6x^3 + 7x^2 + 2x \\
 & {}^{-}\,6x^3 + 3x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4x^2 + 2x \\
 & \qquad \mathbf{4x^2 + 2x}
\end{array}
$$

Producto obtenido de multiplicar
$(2) \cdot (2x^2 + x) = 4x^2 + 2x$

6) Al dividendo se le resta el producto obtenido en el paso anterior.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x+2 \\ \hline
2x^2+x & 6x^3+7x^2+2x \\
 & -\ 6x^3+3x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad \mathbf{4x^2+2x} \\
 & \quad\quad -\ \mathbf{4x^2+2x} \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

Resta de polinomios

$$(4x^2+2x)-(4x^2+2x)=4x^2+2x-4x^2-2x=\mathbf{0}$$

Resta de polinomios en forma lineal

7) El resultado de la resta de polinomios anterior se coloca en el siguiente renglón.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x+2 \\ \hline
2x^2+x & 6x^3+7x^2+2x \\
 & -\ 6x^3+3x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad 4x^2+2x \\
 & \quad\quad -\ 4x^2+2x \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad\quad\quad \mathbf{0}
\end{array}
$$

Resultado de la resta

El algoritmo termina cuando el último renglón es 0 o es un polinomio de grado menor al grado del divisor.

Ese último renglón es el "residuo", y el renglón sobre la casilla es el "cociente".

$$
\begin{array}{r|l}
 & \boxed{\mathbf{3x+2}} \\ \hline
2x^2+x & 6x^3+7x^2+2x \\
 & -\ 6x^3+3x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad 4x^2+2x \\
 & \quad\quad -\ 4x^2+2x \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad\quad\quad \boxed{\mathbf{0}}
\end{array}
$$

Cociente

Residuo

El resultado de la división puede representarse como:

Dividendo Cociente

$$(6x^3+7x^2+2x)=(2x^2+x)\cdot(3x+2)+0$$

Divisor Residuo

La actividad a resolver fue la siguiente: Usar el algoritmo de la división larga para dividir el polinomio $6x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ entre el polinomio $2x - 3$.

Ya que el algoritmo de la división de polinomios involucra todas las operaciones básicas (suma, resta y multiplicación) es en estas operaciones donde se espera identificar errores cuyo origen pueda ser determinado con el ELOS. Previo a la recolección de evidencias el diseño de la actividad permitió predecir ciertos tipos de errores que podrían aparecer, el listado de ellos se presenta a continuación.

Error con origen en la ausencia de sentido semiótico: Llega a presentarse durante la división de monomios que permite determinar los elementos del cociente, pues se requiere usar leyes de los exponentes, tema visto en aritmética. También puede presentarse en la resta de polinomios cuando sólo un término del sustraendo cambia de signo, pues esto indica que el paréntesis fue omitido debido a una mala aplicación de las propiedades aritméticas.

Error con origen en la ausencia de sentido estructural: Se manifiesta un error de procedimiento cuando el manejo de una estructura conocida es inapropiado, por ejemplo, si bien la omisión deliberada del paréntesis tiene origen en la ausencia de sentido semiótico, este mismo error puede manifestarse con un origen distinto cuando se considera la suma de monomios dentro de un paréntesis como un solo término, y al multiplicarlo por un término fuera del paréntesis la estructura es confundida.

Por ejemplo $2x \cdot (4x + 3) = 8x^2 + 6x$ la estructura puede ser trasladada a $2x \cdot (4x \cdot 3) = 8x^2 \cdot 6x$ generando un error.

Lo mismo podría aparecer en esta investigación de manera inversa, es decir $2x \cdot (4x \cdot 3) = 2x \cdot 4x \cdot 3$ la estructura puede ser trasladada a $2x \cdot (4x + 3) = 2x \cdot 4x + 3$

Error con origen en un obstáculo didáctico: Puede presentarse en la "simplificación" de dos términos, siendo uno de ellos un número y el otro una letra, mostrando que la expresión se percibe como una operación incompleta que debe ser concluida antes de proceder (necesidad de clausura).

Pueden también presentarse errores que no son analizados con el ELOS para determinar su origen, pero que sí han sido identificados en otros estudios enfocados al algoritmo de la división, en la investigación de Aguiriano (2015) se mencionan los siguientes:

- Una mala elección de los elementos del cociente.
- No comprobar el resultado.
- Olvidar plantear una resta.
- No ubicar residuos mayores que el divisor.

10 Capítulo V: Resultados y discusión

10.1 Problemáticas de la sesión de prueba

Los alumnos entraron al primer semestre tras el impacto del COVID-19, iniciando directamente en el modelo de educación a distancia de modo que no se conocían entre ellos y tampoco había una fuerte interacción en otras materias. La etapa de trabajo en equipo de la metodología ACODESA indica que los alumnos deben conversar entre ellos, guiarse y compartir tanto opiniones como resultados para resolver la actividad sin intervención ni guía del docente o investigador, sin embargo; en esta sesión de prueba quedó claro que los alumnos no tenían la confianza, deseo ni intención de ayudarse. Mostraron además miedo a estar equivocados y hacer que otros alumnos se equivoquen o defender su resultado.

En general los alumnos permanecieron en silencio total mientras resolvían el ejercicio de forma individual por su cuenta a pesar de que el investigador dio instrucciones al inicio de trabajar en equipo y apoyarse en caso de haber dudas o corroborar avance en cualquier parte del algoritmo.

A lo anterior es necesario añadir las dificultades inherentes de las plataformas digitales al trabajo en equipo, como la incapacidad de mostrar el avance individual a los otros miembros del equipo, la dificultad de expresar el paso de la resolución del problema en que se encuentran o seguir el hilo de lo que están haciendo los alumnos del equipo y como lo están haciendo.

Se concluyó entonces que esta etapa necesitaba de un supervisor que interactuara con los alumnos constantemente y los incentivara a compartir sus avances al resto del equipo para que pudiera aplicarse.

10.2 Problemáticas de la intervención con la metodología ACODESA adaptada al modelo de educación a distancia

Gracias a la sesión de prueba descrita en el capítulo IV se logró una mejor intervención en el grupo de estudio en lo que a las etapas de la metodología ACODESA se refiere, aunque su aplicación no quedó exenta de algunas dificultades inherentes al emplear plataformas digitales, sobre todo en un grupo que cambió abruptamente de un modelo educativo a otro. Algunas dificultades con las que se tuvo que lidiar durante las tres primeras etapas fueron las siguientes:

- Al igual que en el modelo presencial es normal que algunos alumnos se presenten tarde a la clase. Fue necesario dar algunos minutos para que la mayoría de ellos pudieran acceder y estuvieran listos para comenzar.
- Para aplicar las etapas de trabajo individual, trabajo en equipo y debate fue necesario cerrar la sesión de Zoom al final de cada una de ellas para poder comenzar la siguiente y evitar que se cerrara abruptamente pasados los 40 minutos de límite.
- Con las cámaras y micrófonos desactivados persisten largos ratos de silencio en los cuales es imposible saber qué es lo que están haciendo los alumnos. La supervisión de un docente en cada uno de los equipos es indispensable para guiar y sacar provecho de una dinámica como esta. Se concluye que un solo docente de un grupo compuesto por 30 alumnos o más cambiando constantemente de sub sala a sub sala en Zoom es incapaz de aplicar eficazmente actividades de trabajo en equipo.
- Algunos alumnos manifestaron haber tenido problemas de conexión, por lo que abandonaron abruptamente la intervención.
- Otros alumnos tenían dañado el micrófono en su dispositivo y recurrieron al chat en Zoom para continuar con la comunicación cuando el docente se dirigía a ellos.

- El chat no posee un teclado para insertar fórmulas y ecuaciones matemáticas por lo que es difícil comunicar una duda en concreto o resultados obtenidos.
- La pizarra de Zoom usada en la etapa de debate muestra su utilidad para explicar un tema, pero tiene sus claras limitantes. En un principio se pretendía que cada alumno que participara tomara el control y escribiera su parte del procedimiento, pero esto hubiera tomado demasiado tiempo pues se requiere cierta familiaridad y práctica para escribir con velocidad o corregir un error. Se decidió entonces que el investigador se encargara de controlar la pizarra y siguiera las instrucciones de cada alumno para escribir lo que ellos indicaran.
- Es difícil para los alumnos expresar alguna duda en particular o explicar su procedimiento para que sus compañeros de equipo lo entiendan, algo que en un modelo presencial se corrige fácilmente pasando al pizarrón o mostrando su cuaderno con el procedimiento.
- La participación de los alumnos decrece conforme avanza la intervención, se concluye que es difícil captar su atención por largos periodos de tiempo.
- Algunos alumnos abandonan la intervención en alguna de las etapas, otros no siguen la instrucción de tomar las fotografías solicitadas de sus evidencias y subirlas al espacio correspondiente de Google Classroom.
- Al igual que ocurrió en la sesión de prueba los alumnos encuentran incómodo comunicarse con otros alumnos que no conocen.

Sobre la etapa de auto-reflexión, esta actividad se dejó de tarea tal como estipula la metodología, aunque la razón práctica es que las tres etapas previas habían abarcado ya mucho tiempo y era imposible continuar, por lo que se dio instrucciones de atenderla como tarea, sin embargo no fue posible recabar evidencias.

La etapa de institucionalización quedaría a cargo de la profesora del grupo y no aportaría evidencias adicionales para la investigación. Es importante comentar que el tema de división de polinomios no se tenía contemplado llegar a verlo en este ciclo escolar por falta de tiempo, quedándose solo en el tema de división de un polinomio entre un monomio.

10.3 Errores identificados y análisis

A lo largo de las evidencias entregadas por 11 alumnos analizadas en esta etapa se lograron detectar errores que pueden o no ser analizados con el marco teórico del ELOS. Algunos pueden corresponder a "errores de nivel secundaria" como son llamados por Aguiriano (2015) y otros solo pueden ser atribuidos a una causa más emocional como el estrés de la intervención, un descuido o falta de interés.

Se continúa el análisis de cada alumno refiriéndose a cada uno por un número determinado en su momento por el investigador.

10.3.1 Errores identificados en la etapa de trabajo individual

El alumno 1 comete tres errores en total y dos de estos se encuentran en el dividendo colocado en la casilla de división, pues no copió bien el polinomio. Faltó el signo "$+$" entre los términos $6x^3$ y $3x^2$, y el último término del dividendo debería ser"$+1$". Ambos errores no parecen afectar el desarrollo del ejercicio, más bien pareciera que el alumno puso el dividendo y el divisor en la casilla de división simplemente porque le fue solicitado que lo hiciera. Después de obtener el primer término del cociente el alumno "baja" el resto de términos del dividendo para continuar el proceso y es aquí donde el alumno ahora sí le pone el signo correcto al último término del dividendo. Estos errores son irrelevantes para el análisis con el ELOS, pues parecen ser descuidos o falta de interés por parte del alumno.

El último error, que tiene origen en la aritmética, se presenta al multiplicar $(3x^2)(-3) = 9x^2$ pero el mismo alumno se da cuenta, lo encierra en un círculo como le fue indicado al inicio de la intervención y lo corrige. El ejercicio no fue concluido en el tiempo asignado (20 minutos).

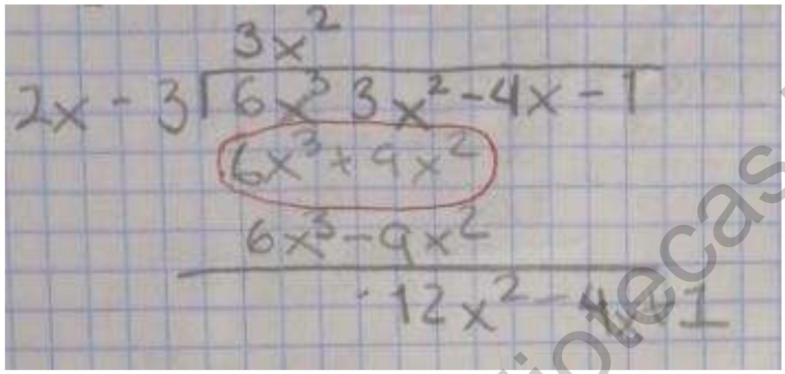

Figura 3. Alumno 1

La evidencia entregada por el alumno 2 resultó imposible de analizar en su totalidad debido a la calidad de la imagen, pero se detectó un error crítico en el paso previo a determinar el último término del cociente. La operación $-(12x^2 - 18x)$ está bien hecha y obtiene $-12x^2 + 18x$, pero más adelante se ignora este resultado y el alumno usa el binomio $-12x^2 - 18x$ para el resto del procedimiento obteniendo por supuesto un término del cociente incorrecto. Las operaciones siguientes son matemáticamente correctas y eventualmente se obtendría un residuo de -32, pero el ejercicio no es concluido, presumiblemente por falta de tiempo.

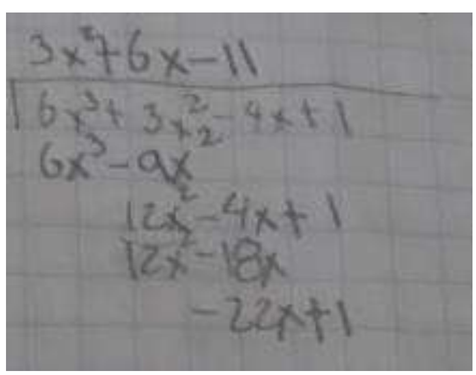

Figura 4. Alumno 2

El alumno 3 entrega un ejercicio sin errores.

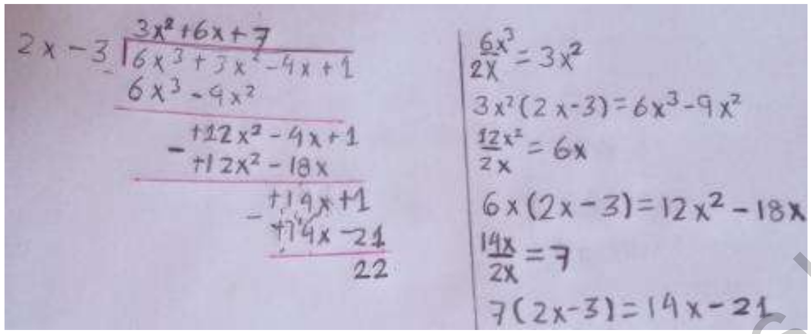

Figura 5. Alumno 3

El alumno 4 por alguna razón decidió no usar la casilla de división para desarrollar el ejercicio a pesar de que sí la usó para plantear la división de polinomios, por supuesto se espera que esto culmine en un resultado incorrecto pues la casilla ayuda a seguir el algoritmo paso por paso. El proceso continuó más adelante.

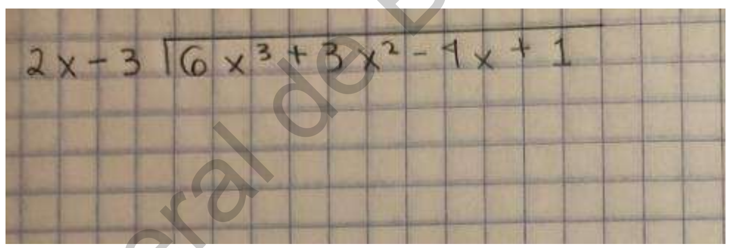

Figura 6. Alumno 4 Planteamiento del ejercicio

El alumno comienza dividiendo x^3 entre x y obtiene x^2, el problema es que solo trabajó con la parte literal de los términos $6x^3$ y $2x$, los cuales estaban claramente especificados al inicio de la intervención, tanto así que el alumno los coloca en la casilla de división. Pareciera entonces que no comprende bien el algoritmo, x^2 es su primer término del cociente y este error se repetirá más adelante al obtener el segundo término del cociente.

En el siguiente paso, el cual consiste en obtener un primer residuo para después obtener el segundo término del cociente, ocurre algo muy interesante. Debido al error anterior el alumno obtiene la siguiente resta de polinomios $(6x^3+3x^2-4x+$

$1) - (2x^3 - 3x^2)$ el alumno sabe que el primer término del dividendo ($6x^3$) debe ser eliminado en esta parte del procedimiento y es indispensable que esto suceda sin embargo lo que el alumno elige hacer es eliminar arbitrariamente el término $6x^3$ con el término $-2x^3$. Lo anterior demuestra que el alumno sabe lo que debe ocurrir en este paso y esto lo lleva a ignorar el resultado correcto de una sencilla resta de monomios con el fin de eliminar el primer término del dividendo.

Otro error se comete al hacer la resta de $3x^2 - 3x^2$ y obtiene solo x^2 lo cuál se trata de un error con origen en un obstáculo cognitivo pues esto concluye con un 0 como coeficiente en el término resultante y por ende la eliminación de ambos términos, pero el alumno aprendió este procedimiento de tal forma que al quedar en cero el coeficiente la parte literal permanece. Además la operación $-(2x^3 - 3x^2)$ arroja el resultado $-2x^3 - 3x^2$ que es incorrecto y probablemente es debido a un obstáculo cognitivo por el cual el alumno multiplica el signo " – " solo por el primer término dentro del paréntesis.

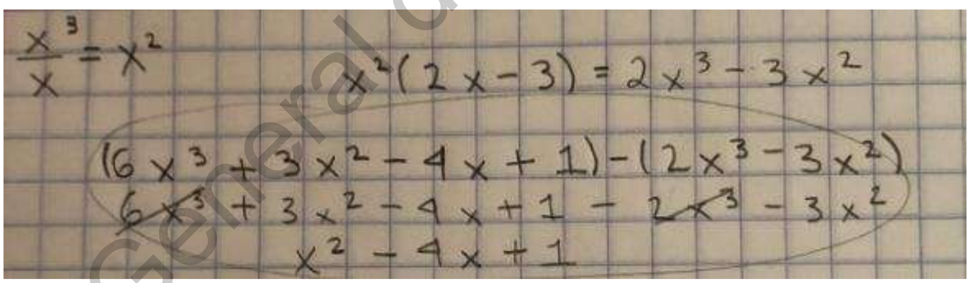

Figura 7. Alumno 4 Procedimiento

Para obtener el segundo término del cociente en vez de dividir x^2 entre $2x$ deja fuera los coeficientes de los términos y divide x^2 entre x, dejando claro que el alumno no comprende el algoritmo o al menos la parte específica de obtener los términos del cociente.

Se identificó también un error en la operación $x(2x - 3) = 2x^3 - 3x^2$ y, si bien esto podría tratarse de un error con origen en la aritmética (ausencia de sentido semiótico), más bien parece haber ocurrido por un descuido pues en pasos anteriores una operación similar es hecha correctamente tanto al multiplicar el término exterior por los dos términos dentro del paréntesis como al usar las leyes de los exponentes.

A continuación se describe un error interesante. La resta de polinomios $(6x^3 + 3x^2 - 4x + 1) - (2x^3 - 3x^2)$ quedó planteada exactamente igual a la primera de un paso previo, debido a que no siguió el procedimiento en la casilla de división parece que el alumno está siguiendo el algoritmo de la división de forma errática, pues algunos términos de esta resta quedaron eliminados en el paso anterior. Ya que la resta es la misma el resultado debería también ser el mismo, lo cual no ocurre. En esta ocasión obtiene el resultado correcto de la resta $(6x^3 + 3x^2 - 4x + 1) - (2x^3 - 3x^2)$ y queda confirmado que el alumno sí sabe restar monomios adecuadamente y el error $(6x^3 + 3x^2 - 4x + 1) - (2x^3 - 3x^2) = x^2 - 4x + 1$ ocurrió por un seguimiento forzado del algoritmo.

Por último el alumno muestra nuevamente que no obtiene el resultado correcto al multiplicar el binomio dentro de un paréntesis por un signo " $-$ ", y comete un error al sumar $3x^2 - 3x^2 = 6x^2$. Es difícil determinar un origen para el error anterior, pues previamente el alumno planteó la misma resta y obtuvo x^2 como resultado, pareciera entonces que en este caso ignoró el signo " $-$ " y sumó los dos términos con signo " $+$ ".

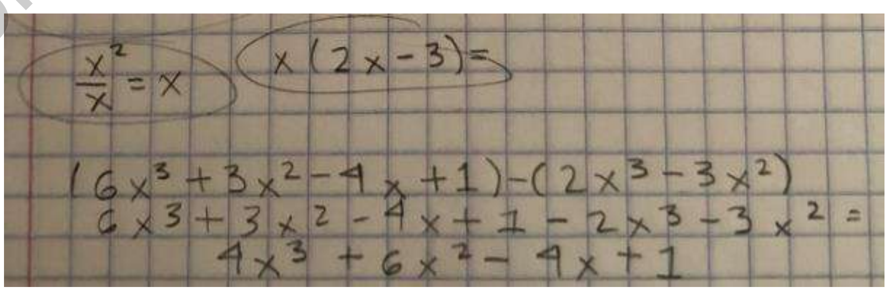

Figura 8. Alumno 4 Procedimiento

El alumno muestra errores algebraicos, descuidos y además forzó resultados convenientes para seguir el algoritmo como consideró correcto, excepto cuando busca obtener los términos del cociente pues aquí no sabe cómo hacerlo correctamente (deja fuera la parte numérica de los términos). Se incluirá como error el no usar la casilla de división para desarrollar el ejercicio.

El alumno 5 no muestra operaciones con polinomios en la hoja de trabajo, pero el resultado del ejercicio es correcto y expresa el residuo como una expresión racional sumado al cociente.

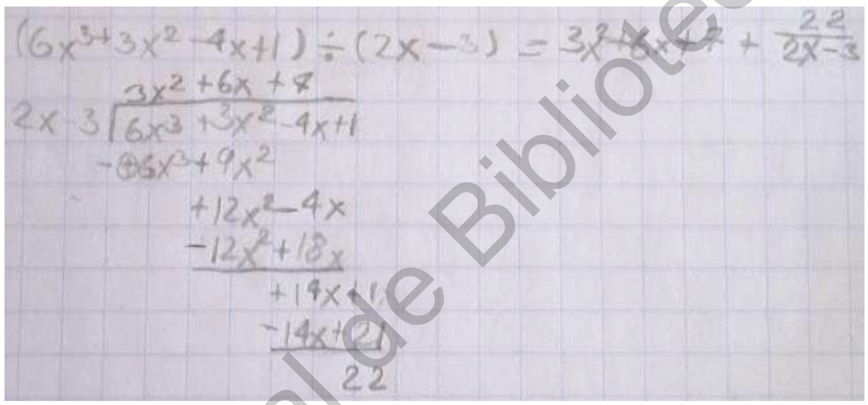

Figura 9. Alumno 5

El alumno 6 cometió un primer error difícil de clasificar. Lo que hace es la operación $+3x^2{-}9x^2 = 6x^2$ y en primera instancia se podría considerar como un error con origen en la aritmética de no ser porque más adelante se aprecia la operación $-4x - 9x = 5x$ la cual demuestra que el alumno entiende el algoritmo y, a pesar de no escribirlo, cambia el signo del $-9x$ y hace correctamente la suma de monomios. Por supuesto que este error en una etapa tan temprana del algoritmo terminaría por llevar a un resultado bastante extraño.

Continuado con el procedimiento, el alumno interrumpe el algoritmo cuando obtiene el residuo $5x + 1$ y 2.5 como término final del cociente. Un residuo cuyo grado no es inferior al grado del divisor es considerado por Aguiriano (2015) como un error de nivel secundaria, pero la interrupción del algoritmo podría deberse también a que no hubo tiempo suficiente o tal vez un término decimal le indicó que el resultado es incorrecto. Ya que no hubo intentos de corrección por parte del alumno y que la gran mayoría de alumnos dieron por terminado el ejercicio en el tiempo disponible, es más probable que el alumno creyera que concluyó el algoritmo. El alumno sin embargo trabaja bien las leyes de los exponentes y la división de monomios.

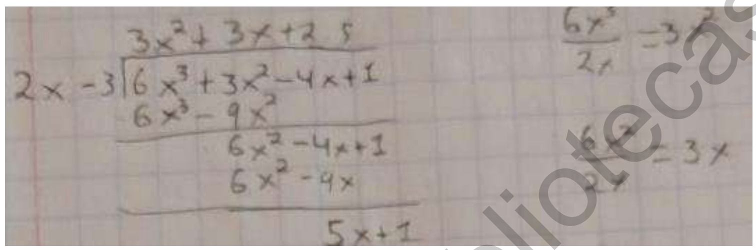

Figura 10. Alumno 6

El alumno 7, al igual que el alumno 4 utiliza la casilla de división solamente para plantear el ejercicio pero no para resolverlo, con excepción de dos términos del cociente.

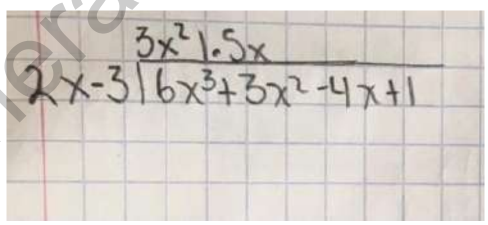

Figura 11. Alumno 7 Planteamiento del ejercicio

Continúa cometiendo un error al realizar una división de monomios, pero dicho error es corregido y después se detecta un error cuyo origen al inicio podría parecer difícil de determinar. Primero el alumno subraya los términos que son semejantes para facilitar su reducción, pero el error está en la operación $3x^2(2x-3) = 6x^3 - 6$ y este error lo comete de nuevo un paso más adelante ahora en la operación $1.5x(2x-3) = 3x^3 - 4.5$. Ya que en la división y multiplicación de monomios en donde ambos términos tienen literal sí aplica correctamente las leyes de los exponentes se puede concluir que este error tiene su origen en un obstáculo cognitivo por la forma en que el alumno aprendió a multiplicar un término con literal por uno sin literal, y el contraste de los dos errores anteriores deja en claro no puede tratarse de un descuido. Debido al error anterior el alumno comienza a trabajar con números decimales, puede que sea esto lo que lo detiene antes de terminar el algoritmo, o también que no haya tenido tiempo suficiente.

Se manifiesta nuevamente un error con origen en un obstáculo cognitivo al multiplicar un binomio dentro de un paréntesis por un " – " y solo alterar el primer término del binomio $-(6x^3 - 6) = -6x^3 - 6$. Además en dos ocasiones el alumno omite escribir el signo " – " necesario para indicar la resta de dos polinomios, debido a esto el error podría considerarse una mala comprensión del algoritmo por cambiar de signo solo uno de los términos del binomio y no ambos.

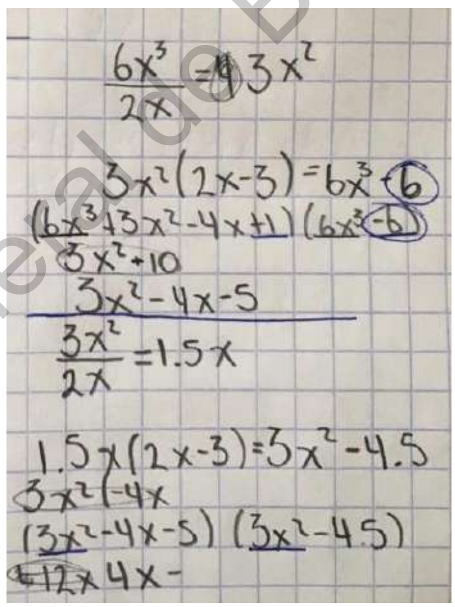

Figura 12. Alumno 7 Procedimiento

El alumno 8 no ofrece un procedimiento para analizar, solo indica el cociente y el residuo. Ambos son correctos.

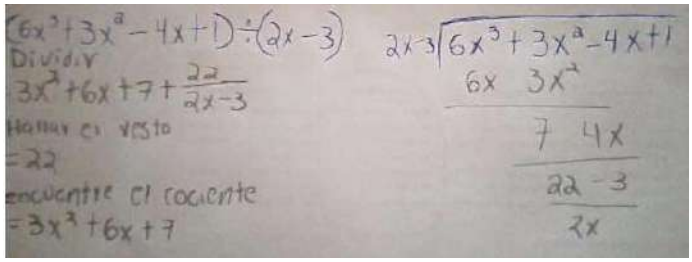

Figura 13. Alumno 8

El primer error del alumno 9 es que no cambia el signo de los dos términos que va a restar, solamente cambia el signo del primer término. Este error se muestra en varios alumnos, algunos de ellos muestran el procedimiento en el que hacen mal la multiplicación del signo " – " y otros (como este) o se descuidan con el cambio del signo o creen que solo cambia el signo del primer término. Se consideraría como un error aritmético recurrente con el ELOS, aunque el procedimiento posterior deja ver que el alumno sí sabe que se debe cambiar el signo a ambos términos. Fue un descuido entonces, clasificado por Aguiriano (2015) como un error de nivel secundaria.

El alumno hace la suma $-4x - 9x = -13x$ que es correcto, pero señala el $-13x$ como un error y continúa el ejercicio aun así. Al obtener el siguiente y último término del cociente este resulta -6.5 pero el alumno elige manejar solo la parte entera del número de modo que el resultado final será incorrecto. El resto del procedimiento continua matemáticamente bien, pero al final no reconoce que el algoritmo no ha terminado, aun así lo concluye en ese punto.

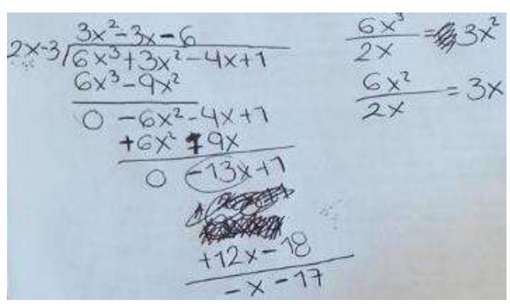

Figura 14. Alumno 9

La evidencia del alumno 10 solo muestra dos errores. Hay mal aplicación de las leyes de los exponentes en una división de monomios que lleva a obtener un resultado con una parte literal de mayor grado que el dividendo, por lo que sumó los exponentes del dividendo y del divisor al dividir $12x^2$ entre $2x$, lo cual es extraño pues en un paso anterior al dividir $6x^3$ entre $2x$ obtuvo el resultado correcto. El error anterior lo lleva a obtener el binomio $12x^4 - 18x$ al multiplicar $6x^3$ por el divisor $2x - 3$. Sobra decir que hay un error algebraico aquí, pero dado que un paso antes hizo bien un procedimiento como este es difícil determinar si se debió a un descuido o si efectivamente el error tiene un origen algebraico.

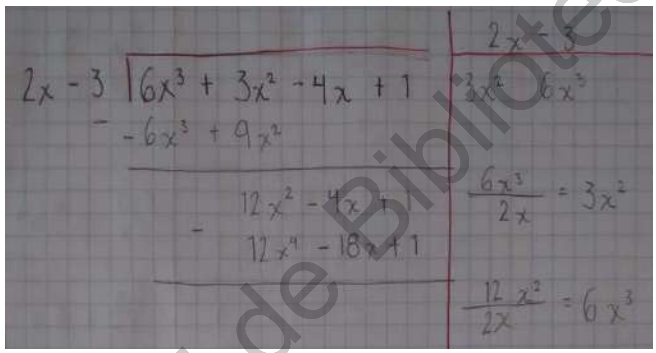

Figura 15. Alumno 10

Finalmente el alumno 12 comete también dos errores. Al sumar $3x^2 - 9x^2$ obtiene -12 lo cual es obviamente incorrecto. Parece que los sumó descuidadamente y al resultado le dejó el signo del número más grande además de que no cambió los signos, también elimino la parte literal de los términos lo cual podría deberse a una mala aplicación de las leyes de los exponentes. Previo a esto y durante este paso se presenta nuevamente el error recurrente de solo cambiar el signo del primer término y no del segundo, el cual puede indicar un mal seguimiento del algoritmo o una ausencia de sentido por mal manejo algebraico (multiplicación del contenido de un paréntesis por un signo alterando solo uno de sus términos).

10.3.2 Análisis, contraste y resultados

Solo 3 de los 11 alumnos entregan un cociente y residuo correctos, el resto comete errores que pueden ser atribuidos a un descuido cuya causa emocional es difícil determinar y se presentan errores adicionales relacionados directamente con el algoritmo de la división de polinomios y errores de nivel secundaria en cuya categoría independientemente de la clasificación de Aguiriano (2015) podría también incluirse la resistencia o bloqueo a trabajar con números decimales.

Tabla 3. Errores identificados en la etapa 1 trabajo individual.

Clasificación del error	Errores identificados
Errores con origen en un obstáculo	$3x^2 - 3x^2 = x^2$ Error con origen en un obstáculo cognitivo (alumno 4).
	$-(2x^3 - 3x^2) = -2x^3 - 3x^2$ Error con origen en un obstáculo cognitivo (alumno 4).
	$3x^2(2x - 3) = 6x^3 - 6$ Error con origen en un obstáculo cognitivo (alumno 7).
	$-(6x^3 - 6) = -6x^3 - 6$ Error con origen en un obstáculo cognitivo (alumno 7 y 12).
	Dividir $12x^2$ entre $2x$ = $6x^3$ Mal manejo de leyes de los exponentes al dividir monomios (alumno 10).
Errores con origen en una ausencia de sentido	$(3x^2)(-3) = 9x^2$ Error de origen aritmético (alumno 1).
	$3x^2 - 9x^2 = -12$ Error con origen aritmético por mal manejo de leyes de los exponentes (alumno 12).
Errores por descuido	Error al usar por accidente un polinomio que ya fue usado en un paso anterior (alumno 2).
	$x(2x - 3) = 2x^3 - 3x^2$ Error presentado en un tipo de operación que el alumno demostró previamente saber realizar (alumno 4).

Tabla 4. Errores adicionales identificados en la etapa 1 trabajo individual

Clasificación del error	Errores identificados
Errores adicionales	Errores al copiar correctamente los polinomios en la casilla de división (alumno 1). No usar la casilla de división para desarrollar el ejercicio (alumno 4 y 7). Mala comprensión del algoritmo al obtener los términos del cociente (alumno 4). Seguimiento del algoritmo forzando resultados correctos a pesar de que el procedimiento desarrollado no conduce a ellos (alumno 4). Seguimiento errático del algoritmo (alumno 4). $3x^2 - 3x^2 = 6x^2$ Dado que se desconoce la forma en que llegó a ese resultado si previamente planteó la misma resta y obtuvo algo distinto (alumno 4). Fallo al identificar un residuo de grado igual o mayor al grado del divisor y resistencia al manejo de decimales (alumno 6 y 9). No escribir el signo " – " necesario para indicar la resta de dos polinomios (alumno 7). Error de nivel secundaria al no cambiar el signo de algunos términos en la resta de polinomios (alumno 9 y 12). Manejar solo la parte entera de un número con decimales (alumno 9).

10.3.3 Errores identificados en la etapa de trabajo en equipo

El grupo se dividió en 4 equipos y se analizó el producto final entregado por 10 alumnos.

El alumno 1 pasa de no concluir el ejercicio en la etapa anterior a avanzarlo más, en esta ocasión obteniendo un término adicional del cociente y un residuo, ambos son correctos pero no es posible obtener el residuo sin el último término del cociente, se puede confirmar que el alumno se guió tanto como pudo de sus compañeros para completar el ejercicio (el cual sigue estando mal planteado en la casilla de división al igual que lo estaba en la etapa 1) pues él mismo comenta que "se le dificultó mucho", aunque fue uno de los que más participó en su equipo.

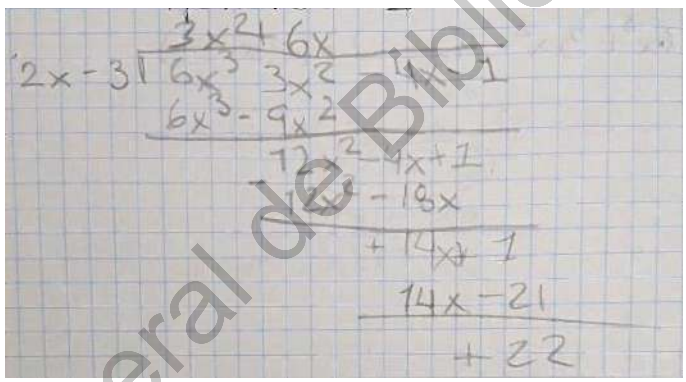

Figura 16. Alumno 1

El alumno 2 pareciera que copió su misma actividad 1 en su totalidad (con los mismos errores que había cometido) pues dijo que ya casi terminaba tan solo unos minutos después de haber comenzado (fue el primero en concluir), y aunque muestra saber cómo ejecutar el algoritmo e incluso detalla su procedimiento para obtener el segundo término del cociente de forma correcta, en esta etapa usa la guía de sus compañeros para cambiar el último término del cociente que él determinó anteriormente (-11) al que es correcto ($+7$) pero sus operaciones previas no lo justifican. Por lo tanto queda claro que obtuvo el cociente correcto gracias al trabajo en equipo, pero no identificó ninguno de sus previos errores y por ende no corrigió nada, solo cambió injustificadamente el último término del cociente, y dejó el mismo residuo a pesar de que sus compañeros concluyeron que el residuo correcto era 22.

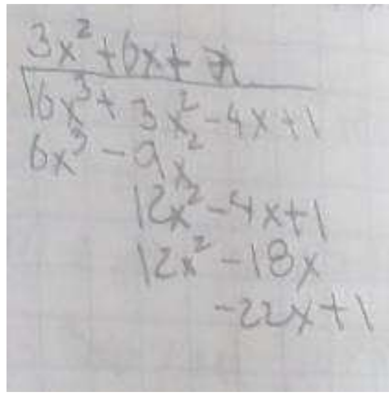

Figura 17. Alumno 2

El alumno 3 desarrolla más clara y extendidamente las operaciones con polinomios necesarias para resolver el ejercicio, concluyéndolo en 6 minutos, llega al mismo resultado que en la etapa individual manteniéndolo sin errores, y aunque no detalla su procedimiento ante los demás alumnos del equipo sí comparte sus resultados cuando se le solicita y todos son correctos.

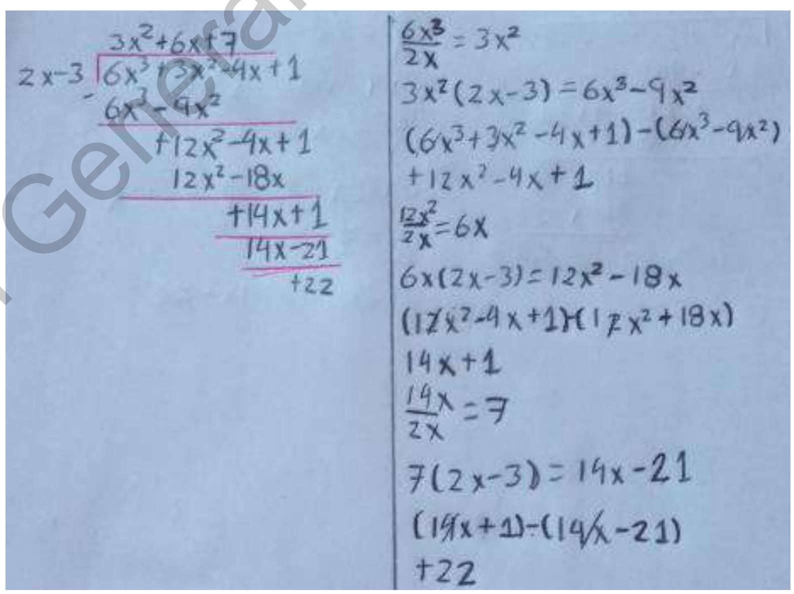

Figura 18. Alumno 3

El alumno 4 abandonó la dinámica al poco tiempo de iniciar esta etapa.

El alumno 5 no muestra operaciones con polinomios en la hoja de trabajo, pero el resultado del ejercicio sigue siendo correcto al igual que en la etapa anterior. Él mismo comenta que se guio del ejercicio que hizo en la etapa anterior y participó a través del chat escribiendo sus resultados para que los vieran sus compañeros.

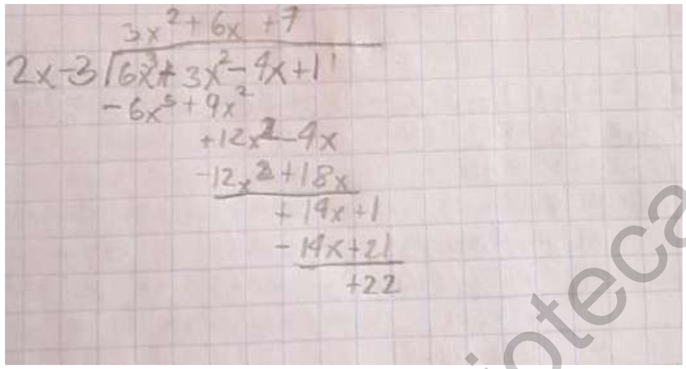

Figura 19. Alumno 5

En cuanto al alumno 6 siguen presentes los mismos errores que en la etapa anterior, la única mejoría apreciable es que al parecer logra darse cuenta de que el último término del cociente es incorrecto y lo elimina. La razón de esto es desconocida pues cuando compartió el cociente $3x^2 + 3x$ como su resultado final a través del chat con los demás alumnos no hubo nadie que difiriera, de modo que lo más probable es que lo haya dejado fuera a propósito sin justificación, con o sin la vaga guía de sus compañeros. El resto del procedimiento es exactamente el mismo al de la etapa individual, excepto por el residuo que ahora le falta el signo "$+$" entre sus términos, dejando ver que el alumno usó su ejercicio de la etapa anterior tanto como pudo y esta parte la copió mal.

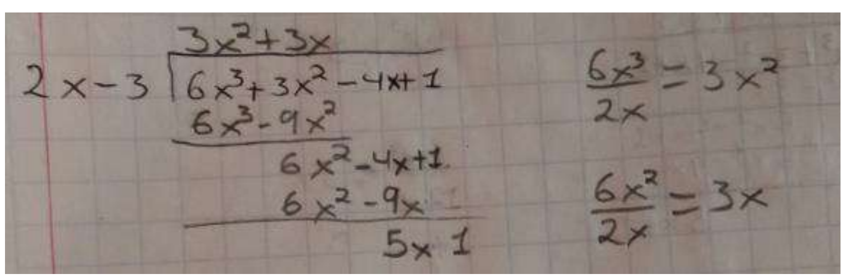

Figura 20. Alumno 6

El alumno 7 en esta etapa utiliza la casilla de división para desarrollar el procedimiento pero plantea mal la división de monomios para obtener el primer término del cociente a pesar de que en la etapa de trabajo individual sí planteó bien ésta división y pese a estar mal planteada obtiene el primer término del cociente, probablemente porque uso el mismo resultado que obtuvo en la etapa de trabajo individual, además en varias partes del procedimiento el alumno no coloca el signo " $=$ " previo al resultado de un producto de polinomios pese a hacerlo anteriormente.

El error $3x^2(2x-3)=6x^3-6$ es corregido y obtiene $3x^2(2x-3)=6x^3-9x^2$ gracias a la ayuda de sus compañeros y también agregó un signo " $-$ " para indicar la resta de dos polinomios, signo que faltó en la etapa anterior aunque en un paso posterior lo deja ausente de nuevo, además se muestran paréntesis incompletos en varias partes.

Pese a que el signo " $-$ " está presente para indicar la resta de polinomios este signo no es multiplicado por ninguno de los términos que están dentro del paréntesis en uno de los pasos del algoritmo, de modo que el signo es obviado por el alumno quedando de la siguiente forma $-(6x^3-9x^2)=+6x^3-9x^2$, el error puede atribuirse a una ausencia de sentido semiótico por el manejo de operaciones con paréntesis debido a que en la etapa anterior el alumno parece haber cambiado el signo de uno de los términos porque creía que era el paso correcto y no porque intentara multiplicar los términos por un signo " $-$ ", además de que ni siquiera puso el signo, ahora sí deja en claro que el signo existe pero no lo multiplica y aunque la suma de polinomios resultante la hace bien, el resultado al que llega es incorrecto.

Nuevamente comete un error similar al de la etapa anterior $6x^2(2x-3)=12x^3-18$ el cual es un error cognitivo por la forma en que aprendió a multiplicar monomios, pues cree que si no hay literal en alguno de los términos que se están multiplicando entonces el término resultante queda sin literal, lo cual es interesante al observar que en la división y multiplicación de monomios donde ambos términos tienen literal sí aplica correctamente las leyes de los exponentes. Ya que en esta misma etapa mostro que pudo hacer correctamente este tipo de multiplicación es adecuado pensar que sus compañeros intervinieron cuando la hizo bien, porque después de eso la hizo mal otra vez y más adelante la hace bien de nuevo.

El alumno encierra parte de su procedimiento anterior para indicar que fue un error y más abajo coloca lo que sería el procedimiento correcto, pero a pesar de corregir correctamente un término $12x^2$ aún arrastra un error crítico, pues el término $12x^3$ sigue existiendo cuando debió ser eliminado.

Es posible que el trabajo en equipo no esté funcionando debido a las limitantes de las plataformas digitales escogidas, pues si bien los alumnos son incentivados a compartir sus resultados y conversar sigue siendo imposible mostrar visualmente sus avances y es difícil que los demás miembros del equipo entiendan en que parte del proceso van solo con descripciones.

Continúan repitiéndose errores como los descritos anteriormente en el resto del algoritmo, y en cuanto a la casilla de división se muestran dos términos del cociente de los cuales solo el primero es correcto y un residuo del mismo grado que el del divisor.

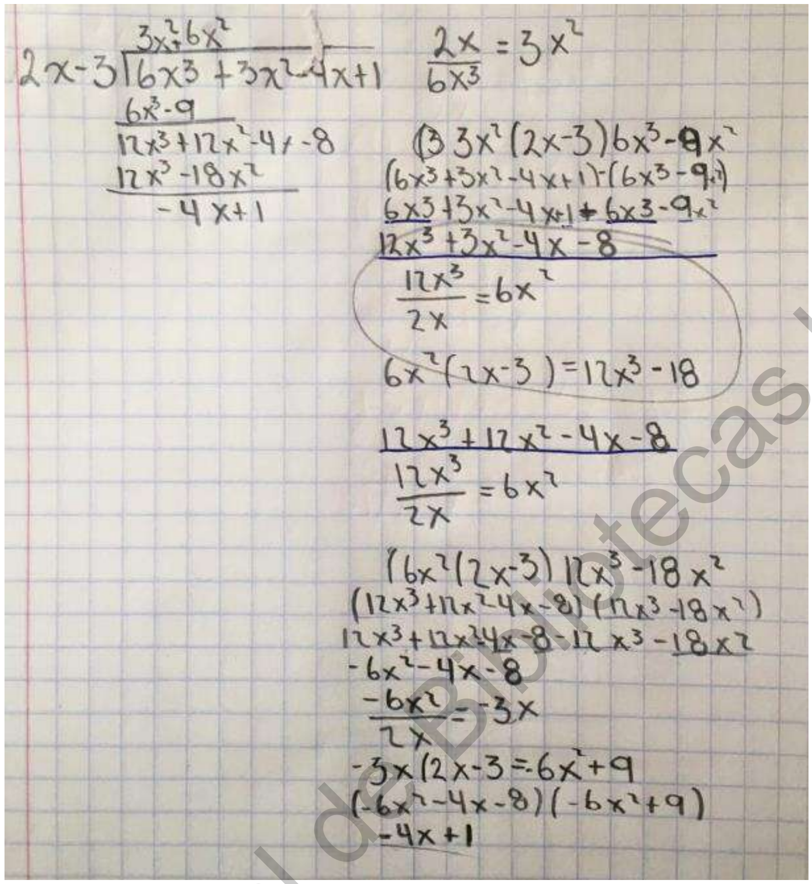

Figura 21. Alumno 7

El alumno 8 nuevamente no muestra nada para analizar, solo indica el cociente y el residuo, los cuales siguen siendo correctos.

El alumno 9 es el mejor ejemplo de que hubo cierto nivel de éxito. Se guía de sus compañeros, obtiene los términos correctos del cociente y concluye el ejercicio correctamente pese a que en la etapa anterior hubo muchos errores. Al comienzo de la etapa obtuvo $-3x$ como segundo término del cociente mientras que sus compañeros obtuvieron $6x$ y gracias a la explicación de uno de estos reconoce que debido a un resultado anterior obtuvo este error y lo corrige. Entiende el algoritmo a tal punto que es capaz de describir su procedimiento correctamente para obtener el residuo de la división.

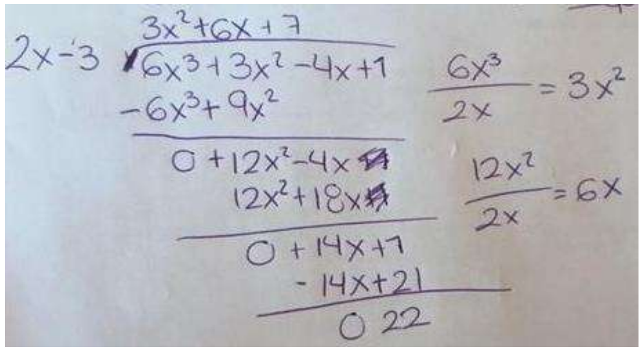

Figura 22. Alumno 9

El alumno 10 es un caso más de gran mejoría. En la primera etapa se limitó a obtener algunos términos del cociente y no los colocó en la casilla de división, lo que lleva a pensar que no tenía muy claro el algoritmo, y en esta etapa comete 2 errores, los cuales identifica con ayuda de sus compañeros, los encierra en un círculo como le fue indicado y continúa el procedimiento con los términos correctos.

El alumno multiplica incorrectamente $6x$ por -3 y obtiene $+18x$, al cambiar el signo y sumar con $-4x$ obtiene $-22x$ pero se da cuenta de que cometió un error y entonces muestra el resultado correcto, que sería $14x$.

El segundo error va ligado al anterior, el alumno siguió el procedimiento después de obtener $-22x$ y con este trató de obtener el último término del cociente, que en este caso fue $-11x^2$, lo cual muestra mal uso de las leyes de los exponentes, aunque comparando con sus compañeros se da cuenta de que está mal y corrige desde el error anterior, llegando finalmente al resultado correcto. El error anterior es similar a uno que cometió en la etapa de trabajo individual, y queda claro ahora que el alumno sí tiene un mal manejo de leyes de los exponentes en casos puntuales, el error se origina entonces en las bases aritméticas y no necesariamente en un descuido.

Es interesante observar un error que fue cometido al inicio del algoritmo pero que más tarde fue convenientemente eliminado. Al sumar $3x^2 + 9x^2$ el resultado fue $-12x^2$ probablemente por un descuido con el signo " – ", en el siguiente paso al multiplicar el segundo término del cociente por el divisor obtuvo $12x^2 + 18x$ y al cambiarle el signo a cada uno de los términos y sumarlo al polinomio $-12x^2 - 4x + 1$ debió obtener $-24x^2 - 22x + 1$, el error $-22x$ fue corregido con ayuda de sus compañeros pero el error $-24x^2$ fue evitado al eliminar los términos semejantes $-12x^2$ con $-12x^2$, es muy posible que esto haya sucedido también debido a la dinámica de trabajo en equipo.

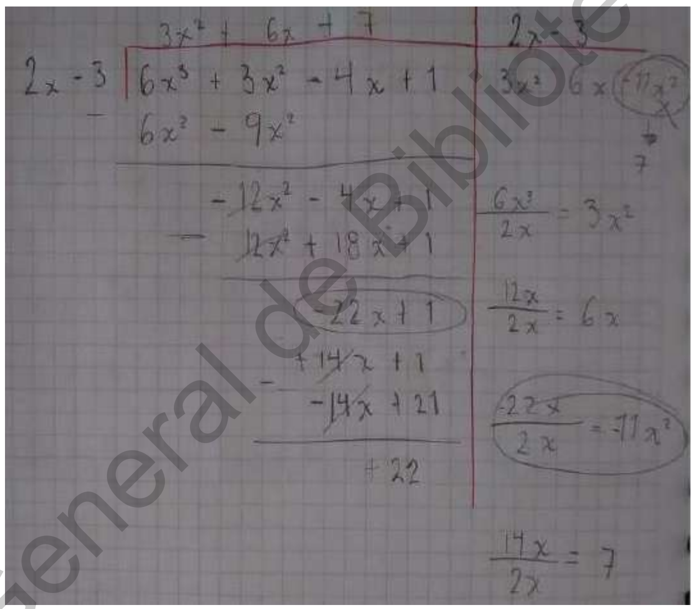

Figura 23. Alumno 10

Por último el alumno 12 solo copió a sus compañeros lo mejor que pudo. Para empezar plantea mal la división en la casilla tanto en el dividendo como en el divisor, errores que no cometió en la primer etapa.

A pesar del error anterior uso la guía de sus compañeros para obtener dos términos del cociente y un residuo. Solo un término del cociente es correcto, al segundo le falta la literal x, y el residuo es correcto sin embargo, queda claro que esos resultados no corresponden al ejercicio que el alumno planteó.

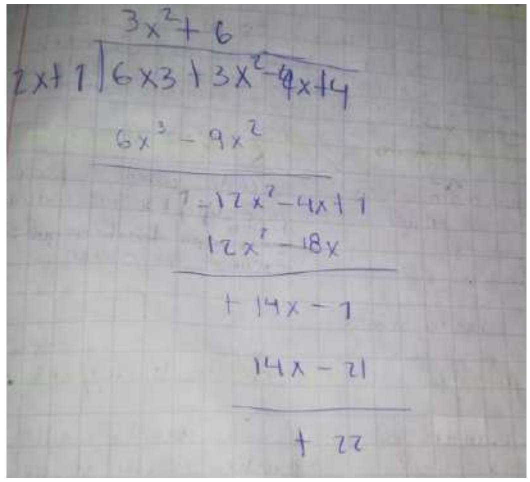

Figura 24. Alumno 12

10.3.4 Análisis, contraste y resultados

Si bien esta etapa termina por ser provechosa para que los alumnos compartan sus avances, contrasten resultados y corrijan errores, también favorece la mala práctica de copiar y seguir instrucciones inadecuadamente para obtener los términos correctos sin que su procedimiento y evidencia individual los justifique.

Los 3 alumnos que concluyeron el ejercicio correctamente en la etapa anterior logran hacerlo de nuevo, uno de ellos incluso muestra un mejor desarrollo en las operaciones con polinomios, y 2 alumnos adicionales corrigen todos sus errores para entregar un resultado correcto en esta ocasión.

Tabla 5. Errores identificados en la etapa 2 trabajo en equipo.

Clasificación del error	Errores identificados
Errores con origen en un obstáculo	$6x^2(2x-3) = 12x^3 - 18$ Error arrastrado de la etapa anterior con origen en un obstáculo cognitivo.
Errores con origen en una ausencia de sentido	$-22x \div 2x = -11x^2$ Error de origen aritmético. $-(6x^3 - 9x^2) = +6x^3 - 9x^2$ Se concluye que el alumno no sabe multiplicar un signo negativo por un polinomio dentro de un paréntesis (alumno 7).
Errores por descuido	Errores al copiar los polinomios en su lugar correspondiente de la casilla de división (alumno 1 y 12). $(6x)(-3) = +18$ Error determinado por distracción debido a que el alumno ha demostrado hacer correctamente operaciones como esta (alumno 10). Ausencia del signo " $-$ " para indicar la resta de polinomios en uno de los pasos (alumno 7).
Errores adicionales	Cambio injustificado de términos debido a la guía de los compañeros de equipo (alumno 1, 2, 6, 10 y 12). Ausencia del signo "=" para indicar el resultado de una operación con polinomios (alumno 7). Paréntesis faltantes (alumno 7). Eliminación forzada del término $-12x^2$ con $-12x^2$ (alumno 10). Error de nivel secundaria al no identificar un residuo del mismo grado que el del divisor y concluir prematuramente el algoritmo (alumno 7).

10.3.5 Etapa de debate

En esta etapa el investigador resuelve el ejercicio en la pizarra de Zoom contando con la participación de los alumnos, siguiendo sus indicaciones y dando oportunidad para el intercambio de opiniones y resultados. A continuación se detalla el desarrollo de la dinámica.

1. Se inicia sesión nuevamente y se pasa a la pizarra de Zoom para resolver el ejercicio con la guía de todos los alumnos del grupo. Lo primero es pedir que se identifique el dividendo y divisor al momento de plantear la división en la casilla. El primero en participar es **el alumno 7,** quien da el dividendo y lo hace correctamente, lo cual no es de sorprender ya que en ambas etapas previas planteó bien la división de polinomios y en general solo los **alumno 1 y 12** mostraron error al copiar mal los polinomios en las etapas 1 y 2, los demás no tuvieron problemas.
2. **Otro alumno** da el divisor del ejercicio, también de manera correcta. El resto de los alumnos coinciden en cómo se planteó la división,
3. **El alumno 2** da $3x^2$ como primer término del cociente tal como mostró en sus evidencias de las etapas anteriores. Nadie sugiere un término distinto y **otro alumno** secunda este resultado. Como nadie difiere se continua con ese resultado.
4. **Un alumno en específico** es invitado a participar, pero parece que se ha retirado de la actividad.
5. **El alumno 10** obtuvo $6x^3 + 9x^2$ como resultado de multiplicar el término $3x^2$ con el divisor $2x - 3$. Y es que se podría pensar que el alumno busca cambiar el signo de los términos que obtuvo debido a cómo funciona el algoritmo, el problema es que en la etapa 1 se indica una resta entre este resultado y el dividendo a pesar de que los términos del primero ya han sido cambiados de signo, y en la segunda etapa está indicada la resta pero los términos no fueron cambiados de signo y el resultado obtenido de dicha

resta fue incorrecto. Pareciera que el alumno se guía por los pasos del algoritmo sin entender completamente lo que se está haciendo y porque.

6. **El alumno 2** opina que el $9x^2$ es negativo y explica que la multiplicación de $3x^2$ por $2x-3$ entrega $6x^3-9x^2$ por las leyes de los signos. **El alumno 10** reconoce el error y la actividad continua.
7. **El alumno 3** entrega $12x^2-4x+1$ como resultado de la resta anterior, lo que era de esperarse pues no cometió errores en etapas previas. Nadie difiere de ese resultado, solo el **alumno 7** reconoce haberse confundido porque no distinguió entre sumar y restar, y esto se respalda con sus evidencias de la etapa 2 en las que es evidente el porqué de la confusión (mal seguimiento del algoritmo), pero acepta el resultado. **El alumno 2** dice que así está bien, manteniendo sus resultados de las etapas anteriores. El polinomio obtenido se queda y la actividad continúa.
8. **El alumno 1** se retiró en algún momento de la actividad
9. **Otro alumno** también se retiro
10. **El alumno 2** participa nuevamente y se divide $12x^2$ entre $2x$ obteniendo $6x$ como segundo término del cociente, el cual se multiplica por $2x-3$ y se obtiene $12x^2-18x$ para restarlo al término de la resta anterior.
11. **El alumno 10** continúa el procedimiento, eliminando el $12x^2$ y obtiene $-22x+1$. **Dos alumnos** afirman que es $14x+1$ en vez de $-22x+1$ justificando lo anterior con las leyes los signos, de modo que el $-18x$ es $+18x$ y al sumarlo con $-4x$ da como resultado $14x$. **El alumno 10** reconoce su error con las leyes de los signos.
12. **El alumno 3** da el 7 como tercer término del cociente y al multiplicarlo por el divisor se obtiene $14x-21$ que al restarlo al $14x+1$ da como residuo final $+22$.
13. **Otro alumno** expresa duda en el residuo y el investigador procede a explicar dado que la dinámica prácticamente ha terminado. Acepta haber entendido y se secunda el resultado correcto tanto como del cociente como del residuo. **El alumno 10** expresa una duda sobre en qué paso termina la

división debido al orden del polinomio residual, se procede a explicar el porqué.

10.3.6 Observaciones y resultados

La dinámica concluyó con los alumnos participantes ofreciendo correcciones durante el algoritmo y llegando al resultado correcto, tanto en el cociente como en el residuo de la división sin embargo es importante mencionar el desinterés en participar una vez que la atención del investigador debe abarcar a todos los alumnos en vez de tener una supervisión más atenta con un equipo reducido.

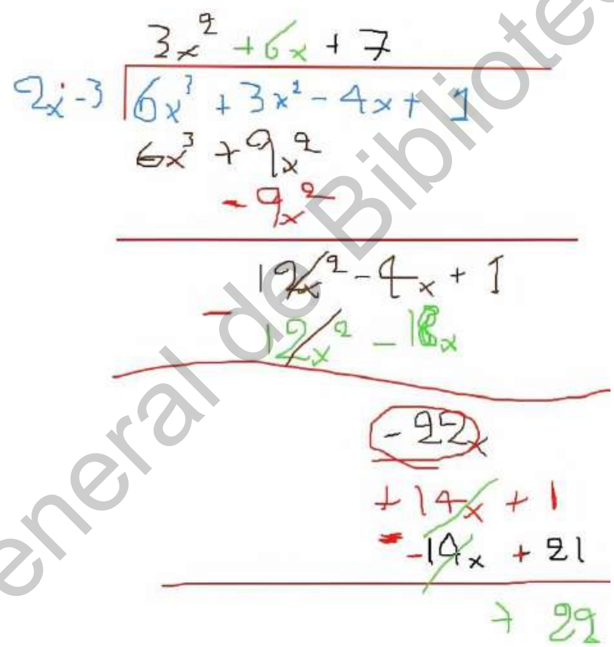

Figura 25. Etapa de debate

11 Capítulo VI: Conclusiones y recomendaciones

El marco teórico del ELOS permanece vigente al permitir una clasificación de los errores detectados de acuerdo a un posible origen en un obstáculo o una ausencia de sentido, y gracias a la actividad con el algoritmo de la división de polinomios junto con la metodología ACODESA fue posible determinar cuándo un error tuvo origen en un aspecto más emocional al contrastarlo con otra parte del algoritmo o de otra etapa en la que el error no existía.

Dada la reputación que el álgebra tiene en los alumnos de todos los niveles educativos por supuesto que se esperaba identificar errores por un mal manejo de esta, aunque predominaron errores más vinculados al propio algoritmo de la división de polinomios.

En la primera etapa se tienen errores como $3x^2 - 3x^2 = x^2$ o $-(2x^3 - 3x^2) = -2x^3 - 3x^2$ fácilmente atribuidos a un obstáculo que el alumno pudo tener por la forma en que se le enseñó algebra (obstáculo didáctico) o por la forma en que la interiorizó (obstáculo cognitivo) dado que surgen por un mal procedimiento del alumno que no está vinculado al manejo aritmético o estructural.

En esta misma etapa se identificaron errores como $(3x^2\,)(-3) = 9x^2$ o $3x^2 - 9x^2 = -12$ los cuales surgen por un mal manejo de las leyes de los signos y de los exponentes, de modo que tienen su origen en una ausencia de sentido. Otros errores como copiar mal los polinomios para plantear la división o equivocarse en una operación que previamente fue hecha de forma correcta solo pueden ser atribuidos a un descuido o momento de estrés durante la intervención.

Los errores cuyo origen no entra en la clasificación del ELOS pueden resumirse en una mala comprensión del algoritmo que lleva a los alumnos a obtener términos incorrectos del cociente, forzar resultados correctos e incluso seguir el algoritmo de forma errática.

La metodología ACODESA funciona al permitir que 2 alumnos que habían cometido errores en la etapa anterior entreguen ahora en la etapa de trabajo en equipo un resultado correcto junto con los 3 alumnos que ya lo habían resuelto correctamente.

Los errores con origen en un obstáculo se redujeron drásticamente siendo solo uno de ellos arrastrado de la etapa anterior $6x^2(2x-3) = 12x^3 - 18$, provocado al creer que un término con literal multiplicado uno sin literal da como resultado un término también sin literal, mientras que se conserva la misma cantidad de errores con origen en una ausencia de sentido, errores generados por el mal manejo de las leyes de los exponentes y mala multiplicación por términos dentro de un paréntesis.

Hay nuevamente errores por distracción y/o estrés durante la intervención. Se conservan también errores por seguimiento forzado o errático del algoritmo y se suman nuevos errores provocados por la guía de los compañeros de equipo, los cuales llevan a la conclusión de que el trabajo en equipo puede ser contraproducente si los alumnos siguen las indicaciones de otros sin comprender lo que están haciendo.

La etapa de debate concluye con los alumnos que obtuvieron un resultado correcto guiando toda la etapa hasta concluir el algoritmo de manera correcta.

Debido que no hubo evidencias de la etapa de auto-reflexión es imposible determinar si el debate permitió que los demás alumnos comprendieran mejor el algoritmo o no.

11.1 Recomendaciones respecto a los errores.

Dado que los errores más frecuentes tuvieron un origen en obstáculos cognitivos y/o didácticos, en el manejo de las leyes de los signos y las leyes de los exponentes se considera necesario repasar estos temas de la parte aritmética junto con la resta de términos algebraicos, la multiplicación de un signo negativo por un binomio dentro de paréntesis y la multiplicación de un término sin literal por un término con literal.

La mayoría de los errores están relacionados específicamente al algoritmo de la división de polinomios, por lo que sería ideal abordar este algoritmo desde la división aritmética incluyendo ejemplos con números decimales para posteriormente pasar a la parte algebraica, en donde la recomendación es seguir el algoritmo de forma más estructurada y avanzando poco a poco durante cada paso.

11.2 Recomendaciones que conciernen a la metodología.

La metodología ACODESA demostró ser útil en la corrección de errores durante la etapa de trabajo en equipo sin embargo también agregó otros errores que no existían en la etapa anterior debido a que muchos alumnos se vieron incapaces de guiarse correctamente por los compañeros que se dirigían hacia el resultado correcto.

Tal como se detalla en la sección V el modelo de educación a distancia limitó de muchas formas la aplicación de la metodología y la etapa de trabajo en equipo fue la más afectada al no permitir que los alumnos pudieran visualizar el avance de los demás, también fue requerida la presencia de un docente para cada equipo con el propósito de intercambiar opiniones y resultados.

Se concluye que los beneficios de esta dinámica mermarían todavía más si un único docente se encarga de supervisar temporalmente cada uno de los equipos.

12 Referencias

Aguiriano, Saulo. 2015. “Estudio Sobre El Uso Del Algoritmo de La División y Su Vínculo En La Transición de La Aritmética Al Álgebra, El Caso de Los Anillos Euclideos Con Alumnos de Primer Ingreso de La Carrera de Ingeniería Agronómica de La UNAG.” 178.

Castillo, Rosa María, y Eugenio Casimiro López Mairena. 2018. “Estrategias Didácticas En El Aprendizaje de Las Operaciones de Polinomio Con El Uso de La Geometría.” *Revista Electrónica de Conocimientos, Saberes y Prácticas* 1(1):28–41.

Castro, Encarnación. 2012. “Dificultades En El Aprendizaje Del Álgebra Escolar.” *Investigación En Educación Matemática XVI* (2012):75–94.

Cirternas, Yazna. 2014. “Errores Conceptuales Que Dificultan La Resolución de Problemas de Multiplicación y División Análisis de La Eficacia Del ‘Programa de Apoyo Compartido’ Chileno Para Corregirlos.” 213.

Delgado, Ana. 2011. “Un Estudio, Desde El Enfoque Lógico Semiótico, de Las Dificultades de Alumnos de Tercer Año de Secundaria En Relación a Los Polinomios.” 166.

Fonseca, Cecilio, Marianna Bosch, y Josep Gascón. 2010. “El Momento Del Trabajo de La Técnica En La Completación de Organizaciones Matemáticas: El Caso de La División Sintética y La Factorización de Polinomios.” *Educación Matemática* 22(2):5–34.

Gamboa Graus, Michel Enrique; Santiesteban Feria, Dixán. 2015. “Alternativa Didáctica Para La División Entera de Polinomios.” 25.

García Salmerón, Viana Nallely, Ángel Jiménez Marín, y Flor Monserrat Rodríguez Vásquez. 2017. “COMPRENSIÓN DE ESTUDIANTES DE NIVEL BACHILLERATO SOBRE LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS A PARTIR DE LA DIVISIÓN SINTÉTICA.” *VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*.

García Suárez, José. 2015. “Errores y Dificultades de Estudiantes de Primer Curso Universitario En La Resolución de Tareas Algebraicas.” Universidad de Granada, Granada.

García Suárez, José, Isidoro Segovia, y José Luis Lupiáñez. 2011. “ERRORES Y DIFICULTADES DE ESTUDIANTES MEXICANOS DE PRIMER CURSO UNIVERSITARIO EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS ALGEBRAICAS.” 145–55.

García Suárez, José, Isidoro Segovia, y José Luis Lupiáñez. 2012. “Antecedentes y Fundamentación de Una Investigación Sobre Errores En La Resolución de Tareas Algebraicas.” 2012:139–48.

Gavilán Bouzas, Paloma. 2011. “Dificultades En El Paso de La Aritmética Al Álgebra Escolar: ¿puede Ayudar El Aprendizaje Cooperativo?” *Investigación En La Escuela* (73):95–106.

González, Alfredo. 2013. “Errores En El Algoritmo de La División y Los Contenidos Curriculares En 5º de Primaria.” 170.

Graus, M. E. G. 2013. “REGLA DE GAMBOA PARA LA DIVISIÓN ENTERA DE POLINOMIOS Y TRIÁNGULOS DE MICHEL PARA LA GEOMETRÍA FRACTAL.” 15.

Hitt, Fernando, y Alejandro S. González-Martín. 2015. “Covariation between Variables in a Modelling Process: The ACODESA (Collaborative Learning, Scientific Debate and Self-Reflection) Method.” *Educational Studies in Mathematics* 88(2):201–19.

Jiménez Marín, Angel, y Viana García Salmerón. 2017. “La División Sintética Vinculada Al Algoritmo de La División de Polinomios Una Propuesta Para Bachillerato.” 297–99.

Kieran, Carolyn, y Eugenio Filloy Yagüe. 1989. “El Aprendizaje Del Álgebra Escolar Desde Una Perspectiva Psicológica.” *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas* 7(December):229–40.

Del Puerto, Silvia M., Claudia L. Minnaard, y Silvia A. Seminara. 2004. “Análisis de Los Errores : Una Valiosa Fuente de Información Acerca Del Aprendizaje.” *Revista Iberoamericana de Educación* (1922):13.

Ramos, Juan Carlos. 2013. “Una Aproximación a La Apropiación Del Algoritmo de La División Utilizando El Diseño de Una Situación Problema.” 99.

Rico, Luis. 1995. “Errores y Dificultades En El Aprendizaje de Las Matemáticas.” *Educación Matemática: Errores y Dificultades de Los Estudiantes, Resolución de Problemas, , Evaluación e Historia.* 69–108.

Socas, Martín. 1997. “Dificultades, Obstáculos y Errores En El Aprendizaje de Las Matemáticas En La Educación Secundaria.” *La Educación Matemática En La Enseñanza Secundaria* 125–54.

Socas, Martín. 2007. “Dificultades y Errores En El Aprendizaje de Las Matemáticas. Análisis Desde El Enfoque Lógico Semiótico.” *Investigación En Educación Matemática XI* 19–52.

Socas, Martín. 2011. “La Enseñanza Del Álgebra En La Educación Obligatoria. Aportaciones de La Investigación.” *Números Revista de Didáctica de Las Matemáticas* 77:5–34.

Socas, Martín. 2012. “El Análisis Del Contenido Matemático En El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a La Investigación Y Al Desarrollo Curricular En Didáctica de La Matemática.” 1–22.

Villarroel, José. 2014. “Propuesta Para La Enseñanza de Las Operaciones Básicas (Adición, Sustracción, Multiplicación y División) y El Proceso de Factorización de Polinomios, Con La Herramienta Didáctica ‘Caja de Polinomios’, En Estudiantes de Grado Octavo de La I.E. María Cano D.” 115.

Villota, José Libardo. 2014. “División, Errores y Soluciones Metodológicas.” (May):82.

13 Anexos

13.1 Ejercicio de división de polinomios aplicado en la intervención.

1.- Actividad individual: En una hoja blanca con su nombre plantear y resolver la siguiente división de polinomios. Subir fotografía con el procedimiento a la plataforma de Classroom.

$$(6x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (2x - 3)$$