



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA  
MAESTRÍA EN DIDÁCTICA DE LAS  
MATEMÁTICAS Y DE LAS CIENCIAS  
(MATEMÁTICAS)**

“Desarrollo del sentido estructural en el manejo de productos notables y factorización”

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**Maestra en Didáctica de las Matemáticas y de las  
Ciencias (Matemáticas)**

**PRESENTA**

Ing. Alba Estrella Vázquez Montaña

DIRIGIDO POR

M. en D. M. Cecilia Hernández Garciadiego

Querétaro, Qro. a 29 de noviembre del 2021



Universidad Autónoma de Querétaro  
Facultad de Ingeniería  
Maestría en Didáctica de las Matemáticas y las  
Ciencias (Matemáticas)

Desarrollo del sentido estructural en el manejo de productos notables y factorización.

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Maestro en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias (Matemáticas)

Presenta

Alba Estrella Vázquez Montaña

Dirigido por:

M. en D. M. Cecilia Hernández Garciadiego

M. en D. M. Cecilia Hernández Garciadiego  
Presidente

M. en C. Luisa Ramírez Granados  
Secretario

M. en C. Iván González García  
Vocal

D. en C. M. Víctor Antonio Aguilar Arteaga  
Suplente

M. en D. M. Arturo Corona Pegueros  
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.

Fecha de aprobación por el Consejo Universitario (noviembre 2021)

México

## **Dedicatorias**

*Esta tesis está dedicada a:*

*A mis padres Blanca y Miguel quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más, gracias por inculcar en mí el ejemplo de esfuerzo y valentía, de no temer las adversidades porque Dios está siempre conmigo.*

*A toda mi familia y amigos por su apoyo, consejos y oraciones.*

Dirección General de Bibliotecas UJAO

## Agradecimientos

En primera instancia quiero agradecer especialmente a mi asesora de tesis, la M. en D. M. Cecilia Hernández Garciadiego por todos los conocimientos compartidos, su paciencia y palabras de aliento, gracias por haberme permitido trabajar bajo su tutela.

A la M. en C. Luisa Ramírez Granados mi sincero agradecimiento por sus valiosos aportes y sugerencias brindadas, por su guía invaluable durante mis estudios y todo este proceso, que hizo posible la culminación de este trabajo.

Gracias al M. en C. Iván Gonzales García, por los conocimientos compartidos e inspiración; al M. en D. M. Arturo Corona Pegueros, por sus enseñanzas, que me ayudaron bastante en el cambio a modalidad virtual tanto como estudiante como profesora y al Dr. Víctor Antonio Aguilar Arteaga, por su disposición a brindarme consejos y orientación de gran valor.

Quiero agradecer también al Dr. Víctor Larios Osorio, quién fue un punto de referencia y guía durante la investigación.

A todos mis profesores del posgrado, gracias por concederme el privilegio de recibir sus enseñanzas.

A mis compañeros de clase, que se convirtieron en grandes amigos, Sandra y Daniel, que siempre estuvieron para apoyarme en las dificultades presentadas.

A mis padres, abuelitas y hermano, por su amor y apoyo incondicional.

A Carlos y Nancy mi eterna gratitud por brindarme ayuda y estímulo para seguir adelante.

También quiero agradecer al CONACyT por el apoyo económico brindado durante mis estudios.

A todas las personas que en una u otra forma han colaborado en este trabajo, mi más sincero agradecimiento.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

# Índice

Resumen .....	1
Abstract.....	2
Introducción.....	3
Capítulo 1. Problema, objetivos y diseño de la investigación .....	5
1.1 Descripción del problema.....	5
1.2 Justificación del tema de estudio .....	8
1.2.1 Motivación del problema a investigar.....	10
1.3 Preguntas y objetivos de Investigación .....	10
1.3.1 Objetivo General.....	11
1.3.2 Objetivos específicos.....	11
Capítulo 2. Antecedentes .....	12
2.1 Investigaciones relacionadas con el sentido estructural .....	12
2.1.1 Aportaciones centradas en el sentido estructural .....	13
2.1.2 Aportaciones centradas en el desarrollo del sentido estructural .....	15
2.2 Investigaciones relacionadas con la enseñanza de productos notables y factorización .....	17
Capítulo 3. Marco Teórico.....	22
3.1 Teoría de Situaciones Didácticas.....	22
3.1.1 Situación a-didáctica.....	25
3.1.2 Los distintos tipos de situaciones.....	26
3.1.3 Efectos que acontecen en la situación didáctica .....	27
3.1.4 La ingeniería didáctica .....	29
3.1.5 El contrato didáctico .....	30
3.2 Sentido Estructural Algebraico .....	31
3.2.1 Noción de Sentido.....	31
3.2.2 Estructura Algebraica.....	32
3.2.3 Sentido Estructural.....	32

3.2.4	Descriptores del Sentido estructural y su ponderación .....	33
Capítulo 4.	Metodología de la Investigación y Metodología en el aula .....	37
4.1	Características de este estudio .....	37
4.1.1	Tipo de investigación .....	37
4.1.2	Sujetos participantes en el estudio y contexto de la investigación.....	37
4.2	Preparación de la investigación .....	38
4.2.1	Organización de la intervención.....	39
4.2.2	Metodología de trabajo en el aula.....	40
4.2.3	Instrumentos .....	42
Capítulo 5.	Desarrollo de las sesiones .....	43
5.1	Preparación de la secuencia de actividades .....	43
5.2	Análisis preliminares .....	43
5.2.1	Análisis epistemológico.....	43
5.2.2	Análisis Cognitivo.....	44
5.2.2.1	Neurociencia aplicada al sentido estructural algebraico. ....	44
5.2.3	Análisis didáctico .....	48
5.3	Análisis a priori.....	50
5.3.1	División general de las sesiones.....	51
5.3.2	Trabajo preliminar con los alumnos .....	51
5.3.3	Características y temas de las actividades .....	52
5.4	Experimentación .....	53
5.4.1	Sesión 1 .....	53
5.4.2	Ponderación de la actividad 1 .....	54
5.4.3	Toma de decisiones después de la sesión 1 .....	54
5.4.4	Sesión 2.....	55
5.4.5	Sesión 3.....	57
5.4.6	Sesión 4.....	58
5.4.7	Ponderación de la actividad 4.....	59
5.5	Análisis a posteriori.....	59
Capítulo 6.	Análisis de las sesiones y resultados .....	61
6.1	Resultados y discusión .....	61

6.1.1 Análisis de sesiones .....	61
6.1.2 Resultados finales.....	64
6.2 Errores comunes observados .....	68
Capítulo 7. Conclusiones y aportes de investigación. ....	69
7.1 Conclusión .....	69
7.2 Limitaciones de la investigación.....	70
7.3 Problemas presentados durante la investigación.....	70
7.4 Líneas abiertas de investigación con posibilidades de continuación.....	71
Referencias .....	73
Anexos.....	76
Anexo A: Ejercicios de la prueba inicial y final .....	76
Anexo B: Actividades en GeoGebra.....	78

Dirección General de Bibliotecas UAQ

## Índice de Figuras

Figura 3.1 Triángulo Didáctico.....	23
Figura 5.1 Competencias Disciplinarias Básicas.....	49
Figura 5.2 Programa de la DGB bloque 5 de Matemáticas 1 .....	50
Figura 6.1 Respuesta a la actividad 1, alumno E1 .....	61
Figura 6.2 Respuesta a la actividad 1, alumno E11 .....	63
Figura 6.3 Gráfica de Puntajes actividad 1 y 4 .....	65
Figura 6.5 Gráfica de porcentajes de puntuación total alcanzada por alumno en la actividad 1 y 4 .....	68

## Índice de Tablas

Tabla 5.1 División general de las sesiones .....	51
Tabla 5.2 Nivel de sentido estructural por reactivo de las sesión 1 .....	54
Tabla 5.3 Actividades de la sesión 2 .....	55
Tabla 5.4 Actividades de la sesión 3 .....	57
Tabla 5.5 Actividades de la sesión 4 .....	58
Tabla 5.6 Nivel de sentido estructural por reactivo de las sesión 4 .....	59
Tabla 6.1 Porcentajes de la puntuación grupal por reactivo en la actividad 1 y 4 .....	64
Tabla 6.2 Cambio de porcentaje entre la actividad 1 y 4 por alumno .....	66

## Resumen

En este trabajo de investigación se presenta una propuesta para el análisis del sentido estructural algebraico, referido como sentido estructural para abreviar, en estudiantes de preparatoria, específicamente en el manejo de factorización y productos notables. El sentido estructural hace alusión al reconocimiento de una estructura algebraica, se presenta al realizar operaciones algebraicas de formas más eficientes y con menos tendencia a cometer errores. Se decidió continuar con la línea de investigación del sentido estructural algébrico ya que fortalecer y promover este sentido de estructura es una cuestión relevante en la didáctica del álgebra. El objetivo de esta investigación fue “propiciar y analizar el desarrollo del sentido estructural de los productos notables y la factorización en estudiantes de preparatoria”, para lo cual se empleó como metodología de investigación la ingeniería didáctica, tomando como referente teórico la Teoría de Situaciones Didácticas y el sentido estructural algebraico. Con los resultados obtenidos, se evidencia que es posible y necesaria la creación de una secuencia que pueda ser aplicada en un aula de clases para generar el desarrollo de sentido estructural en alumnos de forma grupal, siendo esta una cuestión que debería tomar mayor importancia a nivel práctico escolar.

Palabras clave: Sentido Estructural, Teoría de Situaciones Didácticas, Productos Notables, Factorización.

## **Abstract**

In this research work, a purpose for the analyze of the algebraic structural sense, referred as structural sense for short, is presented, specifically with high school students in the solving of factorization and notable products. The structural sense means the recognition of an algebraic structure, and it is present in the most efficient ways of algebraic operations solving, and with fewer errors. We decided to continue with the algebraic structural sense investigation line because strengthening and promoting the development of structural sense is a relevant issue in the didactics of algebra. The main objective of this investigation was “propitiate and analyze the structural sense develop of notable products and factorization in high school students” for that we use the theory of didactical situations and algebraic structural sense as methodology. With the results obtained, is evident that is possible and necessary the creation of a sequence that can be apply in the classroom in order to generate the structural sense in the students in a group, this must be a main question in the scholar practice.

Key words: Structural Sense, theory of the didactical situations, notable products, factorization.

## Introducción

El término *sentido estructural* fue usado por primera vez por Linchevski y Livneh (1999), haciendo alusión a las formas más eficientes de abordar una tarea, tiempo después Hoch y Dreyfus (2007) reestructuraron el término, definiéndolo como un conjunto de habilidades que involucran reconocer una estructura familiar en su forma más simple; tratar con un término compuesto como una entidad única para, a través de una sustitución adecuada, reconocer una estructura familiar dentro de una forma más compleja; y por último elegir manipulaciones apropiadas para hacer un mejor uso de la estructura.

Dada su importancia, en los últimos años, el sentido estructural algebraico ha tomado mayor interés de estudio, sin embargo aún queda mucho camino por recorrer en lo que respecta a la búsqueda de estrategias para el desarrollo de este, es por eso que nosotros decidimos continuar con la línea de investigación del análisis del sentido estructural algebraico en los estudiantes y su desarrollo.

Los temas seleccionados para la realización de este trabajo fueron productos notables y factorización por su gran aplicación en diversos temas matemáticos. Los productos notables es el nombre que reciben multiplicaciones con expresiones algebraicas que cumplen ciertas reglas fijas, cuyo resultado se puede escribir mediante simple inspección, mientras que la factorización es una de las herramientas más empleadas en el trabajo matemático para convertir una expresión algebraica en producto de factores. Por lo tanto a cada producto notable corresponde a una fórmula de factorización.

La tesis está organizada como sigue. El primer capítulo presenta el problema y objetivos de la investigación. Seguido se presenta el estado del arte en el capítulo Antecedentes, tanto de la investigación alrededor del sentido de la estructura en álgebra como en la enseñanza de productos notables y factorización. En el capítulo Marco Teórico se hace una descripción de los elementos teóricos y los métodos utilizados para el diseño, desarrollo y pruebas. En el capítulo cuatro se

habla sobre la metodología de investigación y metodología del aula. El capítulo cinco describe el desarrollo de las sesiones. En el capítulo seis se hace el análisis de los resultados obtenidos en las sesiones y se finaliza con el capítulo de conclusiones y aportes de la investigación.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

# Capítulo 1. Problema, objetivos y diseño de la investigación

El presente trabajo de investigación, correspondiente a una tesis de maestría, la cual se centra en el análisis y desarrollo de una manera concreta de trabajar el álgebra, fomentando el entendimiento de las expresiones algebraicas, particularmente de los productos notables y su contraparte, correspondiente a una forma de factorización.

En este capítulo describimos el problema y justificamos el interés de este estudio, también se presenta la pregunta de investigación y los objetivos propuestos.

## 1.1 Descripción del problema

Para empezar a entender el problema, es importante comprender los aspectos que caracterizan el inicio de la enseñanza del álgebra escolar marcado por la introducción de los símbolos literales para representar números. Cuando los alumnos empiezan su educación secundaria, están acostumbrados a las representaciones numéricas, es por eso que los estudiantes tienen dificultades para comprender el uso adecuado de las letras en álgebra (Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2005). Esto queda manifestado en un comentario realizado por una alumna de secundaria donde expresaba que “en matemáticas todo estaba bien hasta que juntaron números con letras”, en la práctica educativa podemos encontrar muchas afirmaciones similares por parte de los estudiantes, lo cual puede ser un indicativo de los problemas epistemológicos que presentan los alumnos al llegar al estudio del álgebra.

Sin embargo, después de la iniciación en el álgebra, durante la educación secundaria, a los alumnos aún les queda un largo camino por recorrer en su aprendizaje matemático. Una vez salvadas las dificultades clásicas y epistemológicas correspondientes del paso de la aritmética al álgebra, los alumnos se enfrentan a nuevas dificultades, esta vez relacionadas con el reconocimiento de

las estructuras típicas de las expresiones algebraicas en la resolución de problemas.

Dentro de los conceptos que no llegan a ser dominados por los alumnos en el área del álgebra, se encuentran la factorización y el desarrollo de productos notables, encontrando que muchos alumnos no llevan a cabo procedimientos correctos al enfrentarse a situaciones donde este concepto es parte de la solución. Esto genera un problema ya que según Martos (2008) los productos notables son una técnica para la resolución de distintas actividades matemáticas, como lo son:

- calcular productos de expresiones algebraicas
- simplificar expresiones algebraicas
- factorizar una expresión algebraica
- desarrollar una expresión algebraica
- hallar el valor de una variable
- encontrar las raíces de una ecuación determinada
- hallar intersecciones de una gráfica con los ejes
- determinar la forma general de la ecuación de una cónica
- determinar la posición de la curva de cónicas, si van sobre el eje  $x$  o sobre el eje  $y$
- encontrar asíntotas verticales de una función
- integrar con el método de fracciones parciales. (p.64-65)

Durante mi experiencia laboral, pude observar que efectivamente, algunas de las dificultades que presentan los alumnos en el área de álgebra llegan a tener su origen en la falta de comprensión en el manejo de una variable como número general, uso que toma la variable en los temas de productos notables y factorización. Como consecuencia de estas dificultades se encuentra la decepción y pérdida de interés por parte de los estudiantes en su aprendizaje de matemáticas. Según Ursini et. al. (2005), que un estudiante utilice las variables como número general implica:

- reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas
- interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor
- deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas
- manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica
- simbolizar enunciados, reglas o métodos generales. (p. 36-37)

Por otro lado, en la investigación realizada por García, Segovia y Lupiáñez (2011), con estudiantes de primer curso universitario, se pone de manifiesto la problemática que presenta el bajo rendimiento de los alumnos en la resolución de tareas algebraicas. Estos autores encontraron que los alumnos universitarios presentaron errores que no corresponden al nivel de estudio en el que se realizó la investigación. Se concluyó que los errores eran ocasionados por deficiencias en la formación matemática de los alumnos en los niveles de bachillerato y secundaria, incluyendo errores del desarrollo de reglas de productos notables. Esta problemática hace notar que es necesario un cambio en los procesos de enseñanza del álgebra desde secundaria y preparatoria, lo cual evitaría que los alumnos presenten deficiencias en su formación matemática al llegar a la universidad.

La investigadora Serna (2017) hace mención que cuando los alumnos se enfrentan a un pensamiento variacional, no llegan a manejar de forma adecuada un lenguaje apropiado, incógnitas, variables, parámetros y ecuaciones, entre otras herramientas, lo cual se traduce en que el estudiante aprenda mecánicamente para obtener una calificación aprobatoria, sin que esto represente un aprendizaje significativo. La autora también señala que la desmotivación que presentan los alumnos frente a los productos notables no favorece la capacidad de los estudiantes de pensar y asociar conceptos, afectando la confianza en ellos mismos.

Gracias al estudio de la literatura del tema, sabemos que las dificultades que presentan los alumnos con el sentido estructural matemático en el álgebra han sido estudiadas desde antes que existiera el término y entre las dificultades percibidas en la aplicación de técnicas algebraicas en distintos contextos, se destacan los problemas que presentan los estudiantes al reconocer y generar expresiones algebraicas equivalentes y comprender su significado (Kieran, 2007).

Parte del interés por estudiar el desarrollo del sentido estructural y la relación que este constructo conlleva con la resolución de tareas con expresiones algebraicas que involucren productos notables y factorización, radica en la búsqueda de situaciones de aprendizaje que puedan ayudar a los estudiantes a superar la diversidad de dificultades que confrontan cuando trabajan con estructuras algebraicas que involucran estas temáticas.

## **1.2 Justificación del tema de estudio**

A pesar de que no se puede negar el papel primordial de las matemáticas en el desarrollo del conocimiento y la gran utilidad que han representado para el ser humano, como fuente de soluciones a necesidades de la sociedad, existen numerosos problemas del proceso de enseñanza-aprendizaje dentro del aula que se siguen presentando en la actualidad.

En el área de álgebra, la enseñanza de los productos notables suele limitarse a abordar tareas de estrategias de predominio operativo, enseñando métodos para resolver problemas sin concientizar al alumno sobre el por qué se resuelve de esta forma, siendo esta una muy ineficiente manera de enseñanza (Vega-Castro, 2013).

En otra instancia, se dice que un estudiante presenta sentido estructural si aborda tareas algebraicas de las formas más eficientes gracias a un manejo conceptual profundo, lo que permite una disminución de errores, es así como Vega-Castro enfatiza que es posible que existan ciertas estrategias de enseñanza que

promuevan el desarrollo del sentido estructural más que otras (2010). Por otro lado encontramos a la doctora Lüken (2012), quien señala que es necesario el diseño de instrumentos para desarrollar el sentido estructural en los alumnos, ya que los estudiantes con menor habilidad para reconocer estructuras también muestran un menor desempeño en las actividades matemáticas.

Aunque ya se han realizado investigaciones que muestran la necesidad de desarrollar el sentido estructural en los alumnos a lo largo de todas las etapas académicas, la problemática de abordar los temas matemáticos de forma operacional persiste, así las profesoras Ascencio y Eccius-Wellmann (2019) puntualizan que es importante continuar con líneas de investigación del desarrollo del sentido estructural, para buscar resolver dicha problemática.

El presente trabajo busca aportar a la línea de investigación del desarrollo del sentido estructural, específicamente en el manejo de productos notables y factorización, porque gracias al aporte de las investigaciones ya mencionadas y las que se muestran en el capítulo de antecedentes, queda clara la importancia que tiene para los alumnos el manejo apropiado de estos tópicos y de no solo ser capaz de resolver tareas cuando estos temas se vean involucrados, sino de reconocer su estructura para poder llevar a cabo las operaciones algebraicas idóneas para resolverlo. En cuanto a la selección del tema de productos notables y factorización como objeto de estudio, se puede señalar el trabajo del investigador Martos (2008), en donde se llega a la conclusión de que la búsqueda de estrategias para mejorar las competencias en los productos notables es muy importante, porque si el estudiante domina este tema, podrá realizar diferentes tipos de tareas matemáticas que favorecerán su aprendizaje.

En conclusión, esta investigación busca generar situaciones que favorezcan y fortalezcan el aprendizaje de los productos notables y factorización, analizando el desarrollo del sentido estructural para favorecer el manejo, operación y la

construcción de su significado. Se espera que la investigación aporte técnicas de enseñanza que puedan ser aplicadas por los docentes en el contexto de la enseñanza actual.

A partir de las premisas mencionadas, referentes a la problemática, queda claro que es importante la búsqueda de alternativas que puedan contribuir a la enseñanza de los productos notables y factorización, antes de que el alumno llegue a grados superiores con deficiencias en el dominio de factorización y productos notables, afectando su desempeño en diversas temáticas matemáticas. Es así como se busca dar continuidad a las aportaciones en la línea de investigación del desarrollo del sentido estructural en estudiantes de nivel medio superior, propiciando un aprendizaje significativo utilizando como fundamento teórico la teoría de situaciones didácticas.

### **1.2.1 Motivación del problema a investigar**

La motivación personal para empezar con este trabajo de investigación fue buscar una alternativa para alentar el interés de los alumnos en las materias de matemáticas y disminuir la deserción y pérdida de interés en continuar estudiando materias, o inclusive carreras en esta área. Todo con el objetivo de buscar opciones para que los alumnos puedan encontrar motivación en el estudio de las matemáticas.

## **1.3 Preguntas y objetivos de Investigación**

Gracias al interés de buscar nuevas alternativas de enseñanza-aprendizaje de productos notables y factorización, se plantea la pregunta de investigación para el presente trabajo, la cual es: ¿Cómo desarrollan los estudiantes el concepto y el manejo de los productos notables y la factorización a partir de una perspectiva centrada en el sentido estructural?

### **1.3.1 Objetivo General**

Propiciar y analizar el desarrollo del sentido estructural de los productos notables y la factorización en estudiantes de preparatoria.

### **1.3.2 Objetivos específicos**

- Diagnosticar errores prácticos y epistemológicos que presentan los estudiantes para reconocer la estructura de una expresión algebraica de productos notables.
- Diseñar y aplicar material didáctico que permita el desarrollo del sentido estructural algebraico de los productos notables y factorización.
- Evaluar la efectividad de la propuesta para el desarrollo del sentido estructural de los productos notables y factorización.

## Capítulo 2. Antecedentes

En este capítulo se presenta una perspectiva general sobre las investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica de las Matemáticas referentes al sentido estructural y al proceso de enseñanza-aprendizaje del trabajo algebraico en los productos notables y factorización.

Es importante tener claro que los productos notables es el nombre que reciben multiplicaciones con expresiones algebraicas que cumplen ciertas reglas fijas, cuyo resultado se puede escribir mediante simple inspección. Por su parte, la factorización es una de las herramientas más empleadas en el trabajo matemático para convertir una expresión algebraica en producto de factores. Por lo tanto, cada producto notable corresponde a una fórmula de factorización.

### 2.1 Investigaciones relacionadas con el sentido estructural

Antes de que existiera el término de sentido estructural algebraico ya se había ya se habían estudiado las dificultades que expresan los alumnos con el sentido estructural matemático en el álgebra. Este término fue concebido por primera vez por Linchevski & Livneh (1999) y aunque inicialmente era usado para describir las dificultades de los alumnos con el uso de las estructuras aritméticas en el contexto del álgebra inicial, en la actualidad se ha redefinido.

Se puede decir que el sentido estructural es una forma de enfatizar la posesión del conocimiento, la presente investigación toma la definición de sentido estructural algebraico como “una competencia cognitiva o un conjunto de capacidades necesarias para el trabajo flexible con las expresiones algebraicas, más allá de la aplicación mecánica de procedimientos de transformación de las mismas”(Vega-Castro, 2013, p. 83), en el capítulo de marco teórico se profundizará más sobre su significado.

### **2.1.1 Aportaciones centradas en el sentido estructural**

Entre los investigadores que han contribuido en mayor medida al estudio del sentido estructural y su caracterización se encuentran Hoch, Dreyfus y Vega-Castro, que en los últimos años han difundido más información de este constructo.

En el 2003, Hoch publica un trabajo donde se presenta una primera aproximación de los constructos de estructura algebraica y sentido estructural, con el significado tomado para este trabajo, la autora señala que muchos estudiantes tienen dificultades en la transformación de expresiones y la solución de ecuaciones racionales, es decir, con técnicas algebraicas básicas.

En otra publicación Hoch y Dreyfus (2005) señalan como estudiantes que previamente han mostrado dominio en el uso de técnicas algebraicas, comúnmente, llegan a tener dificultades en la aplicación de estas técnicas cuando son requeridas en contextos que no le son familiares. Las mismas autoras, en otra investigación, establecieron tres niveles de sentido estructural: alto, medio y bajo, gracias a los resultados obtenidos al aplicar un cuestionario a 165 estudiantes de secundaria para medir su sentido estructural. En esa investigación encontraron una premisa muy interesante, que las habilidades de manipulación de estructuras algebraicas corresponden con los diferentes niveles de sentido estructural (Hoch y Dreyfus, 2006).

Otra de las grandes contribuyentes a este constructo ha sido la doctora Danellys Vega Castro, analizado el sentido estructural mostrado por estudiantes de secundaria al trabajar con expresiones que involucran igualdades notables (Vega-Castro, 2010). Más adelante la misma autora genera siete perfiles de estudiantes con base en el manejo que presentan del sentido estructural en expresiones aritméticas y algebraicas (Vega-Castro, 2013). En esa investigación, el experimento de enseñanza consistió en asignar a los estudiantes tareas conformadas por actividades con expresiones numéricas y algebraicas de forma individual seguidas de puestas en común, donde los participantes manifestaron

sus reacciones ante la experiencia, como objetivo se buscaba promover el reconocimiento de relaciones en la estructura de las expresiones y el uso de igualdades notables.

También encontramos el estudio de Jupri & Sispiyati (2017), el cual está enfocado en profesores en formación, se observó la forma de operar expresiones en siete profesores de matemáticas, a los que los autores llamaban expertos, encontrando una tendencia a operar expresiones algebraicas sin analizar su estructura, ya que se les pedía que resolvieran tres actividades de ecuaciones cuadráticas basadas en las características del sentido estructural para álgebra en un nivel de preparatoria. Sin embargo al pedirles que dieran más de una solución a la tarea mostraron un mayor razonamiento estructural en la forma de proceder. En su trabajo también concluyeron que el sentido estructural algebraico es considerado por los expertos como una prueba de la competencia y el entendimiento de los alumnos.

Por otro lado, en el trabajo de Bolaños-Barquero y Segovia (2021) se realizó un análisis desde el sentido estructural en estudiantes de primer ingreso universitario de la Universidad Nacional de Costa Rica, a preguntas en donde se solicitara directamente factorización. Se concluyó que la falta de sentido estructural es lo que genera errores en la factorización, apuntando a que la formación de los estudiantes es insuficiente. Ellos también señalan que la falta de sentido estructural genera alerta por ser un conocimiento previo fundamental para el avance exitoso en contenidos posteriores.

En conclusión, podemos encontrar investigaciones dedicadas a la formación del constructo “sentido estructural”, aludiendo a que el estudiante pueda reaccionar de una manera lógica y organizada a la presentación de problemas matemáticos, gracias a un razonamiento lógico. También se señala la importancia el sentido estructural en la didáctica del álgebra y la tendencia de su carencia en los estudiantes, los cuales tienden a un sentido mecánico de resolución de problemas

donde el alumno está limitado solo a la fórmula y los pasos para la resolución del problema.

### **2.1.2 Aportaciones centradas en el desarrollo del sentido estructural**

Es importante señalar que a pesar de que el término de sentido estructural ha sido utilizado desde finales del siglo pasado, existen pocas investigaciones enfocadas en la línea de investigación del desarrollo del sentido estructural.

Una de las primeras investigaciones que buscó abordar este tema fue el trabajo “Desarrollo del sentido estructural de Katy”, de Hoch y Dreyfus (2010), donde se realiza el seguimiento de una estudiante por una secuencia de tareas, describiendo las observaciones en el desarrollo que presenta del sentido estructural algebraico. Las tareas fueron diseñadas con el objetivo de facilitar el entendimiento del sentido estructural algebraico. Las actividades propuestas solo contemplaban el contexto algebraico estructural y técnico. Se analizaron las transcripciones del trabajo de la estudiante y se pudo observar un error común; confusión entre expresiones y ecuaciones, tendencia a cambiar la formulación de expresiones cuadráticas y dificultad con la verbalización. Los autores concluyeron que se notó una mejora en el sentido estructural entre cada una de las cinco sesiones, después de cada sesión se realizaba una entrevista para entender el razonamiento que había seguido en las operaciones realizadas, y se discutía sobre las formas de realizar la actividad, como parte de una institucionalización. Una de las limitaciones que encontraron en su estudio fue que no se puede realizar entrevistas particulares a todos los alumnos en un salón de clases, por lo cual señalan la importancia de continuar con la búsqueda de un método que puede ser aplicado fácilmente en el ámbito escolar.

En el trabajo de Muñoz (2015) se continúan con la investigación de Hoch y Dreyfus sobre sentido de estructura incorporando actividades orientadas al desarrollo de un sentido estructural con ayuda de un entorno virtual. Los usuarios

objetivos fueron alumnos de preparatoria con conocimiento de álgebra, y se diseñó una herramienta llamada Máquina de Expresiones, que por medio de una técnica de sustitución les enseñaba de forma implícita el sentido estructural de expresiones algebraicas. A pesar de que se mostraron mejoras a nivel grupal en el sentido estructural presentado por los alumnos, la autora señala que es necesario estudiar a profundidad el nivel de aprendizaje que obtuvieron los estudiantes.

En otro estudio las profesoras Ascencio y Eccius-Wellmann (2019) realizaron una investigación cuyo objetivo fue desarrollar el sentido estructural en estudiantes universitarios buscando promover el desarrollo en habilidades para simplificar y operar expresiones algebraicas racionales. Las profesoras diseñaron las actividades de enseñanza-aprendizaje con base en la teoría de la variación, la cual se enfoca en las condiciones necesarias para aprender de forma que estén relacionadas con su contenido, su elección y secuenciación. Se realizó un cuasi-experimento con siete grupos de nuevo ingreso, que cursaban la materia de Álgebra. Los alumnos de cuatro grupos, trabajaron con las actividades diseñadas para fomentar el sentido estructural con base en la Teoría de la Variación (grupos experimentales). Mientras que los alumnos de los otros tres grupos, trabajaron de la forma habitual, que no contempla actividades basadas en dicha teoría (grupos de control). Se utilizaron hojas de trabajo como instrumentos donde se valoró el sentido estructural en los estudiantes. Se comenzó por administrar una evaluación diagnóstica en los siete grupos, el primer día de clases. Posteriormente se trabajó con las actividades en nueve clases no consecutivas. Los resultados obtenidos en el examen diagnóstico permiten concluir que los alumnos llegan a la universidad con un sentido estructural poco desarrollado. Como resultado fomentaron el desarrollo del sentido estructural en los estudiantes de los grupos experimentales, los cuales mostraron un incremento en el nivel del sentido estructural en comparación con los grupos de control testeados.

## **2.2 Investigaciones relacionadas con la enseñanza de productos notables y factorización**

Debido a la importancia de la factorización y productos notables y la prevalencia de los problemas de enseñanza-aprendizaje que presentan, la literatura dedicada a la búsqueda de solución de estos problemas es extensa. A continuación, se muestran investigaciones que se han realizado relacionadas con la enseñanza de estos temas.

En la investigación de Martos (2008) titulada “Valores prácticos y epistémicos de los productos notables en profesores de matemáticas” se habla sobre la importancia del conocimiento adecuado de los productos notables para utilizarlos como técnica para la resolución de distintos tipos de tareas matemáticas, él detecta dos valores epistémicos de los productos notables:

1. Ayudan a los estudiantes a entender la factorización.
2. Tienen un valor motivacional, ya que al dominar los productos notables el alumno podrá realizar distintos tipos de tareas que le darán confianza favoreciendo su aprendizaje.

Los autores Méndez y Cruz (2008) realizan una investigación sobre las dificultades en la práctica de productos notables y factorización. Ellos encontraron que la enseñanza tradicional y los textos de estudio favorecen el registro de las nociones estudiadas como reglas, pero los estudiantes no podían establecer el cambio de registro de lo verbal a lo algebraico omitiendo en las tareas del desarrollo correcto de la expresión.

Referente al mismo tema, los docentes Wagner, Vásquez, Hoyos y Gutiérrez (2014) realizaron una investigación donde se utiliza el álgebra geométrica como mediadora para la enseñanza de los productos notables y la factorización. Ellos implementaron en un grupo experimental la estrategia didáctica “geometrización del álgebra”, en la cual se buscaba que el estudiante visualizara el concepto de

factorización mediante la manipulación de material didáctico con el fin de que realizara analogías y así construir los conceptos. El estudio contrastó los resultados obtenidos con un grupo de control donde se siguió el método tradicional, concluyendo que los estudiantes muestran mayor interés por el aprendizaje cuando el maestro utiliza estrategias de enseñanza que le permitan hacer análisis a priori y posteriori de los avances y dificultades de los estudiantes antes, durante y después del concepto matemático.

La autora Avalos (2014), realiza una adaptación de juegos para enseñar factorización y productos notables en educación media superior. En su investigación señala que aunque los principios normativos han propuesto cambios en los métodos de enseñanza, estos no han evolucionado conforme a las necesidades del estudiante actual. La investigadora utilizó un juego de memorama adaptado como estrategia para abordar el tema de productos notables y factorización con los estudiantes. Como conclusiones propone que se incluya en las secuencias didácticas trabajos de carácter lúdico ya que estos favorecen en el estudiante actitudes de cooperación y trabajo en equipo, mejorando su disposición al aprendizaje.

En el trabajo de investigación titulado “Génesis instrumental en alumnos del grado noveno con conceptos relativos a la factorización” de Saldarriaga, Villegas y Franco (2016) se utilizó tecnología para caracterizar el proceso de génesis durante el aprendizaje de conceptos relativos a la factorización, ya que ellas observaron que los alumnos presentaban errores y dificultades en temas matemáticos donde se requería el conocimiento y manejo de factorización. La investigación se desarrolló bajo un enfoque cualitativo, proponiendo realizar el análisis mediante categorías y subcategorías apriorísticas. El proyecto se dividió en tres momentos: 1) antes de la intervención, en el cual se diseñó una unidad didáctica que abarca ocho clases e instrumentos para recoger información; 2) durante la intervención, etapa en la que se implementa la unidad didáctica y se recoge la información; 3) después de la intervención, en donde se efectúa el análisis de información. Se

concluyó la importancia de la tecnología y de los diversos espacios a los que se recurrió en el proceso, ya que los estudiantes obtuvieron otra perspectiva de la factorización, aumentando su interés y motivación, y el aprendizaje no fue mecánico ni repetitivo, sino significativo.

En el artículo “Enseñanza y aprendizaje en resolución de problemas: productos notables” se busca caracterizar algunos de los aspectos de las prácticas de enseñanza-aprendizaje en este tema, el artículo aborda un análisis de los textos escolares, los tipos de representaciones utilizadas y cuestionarios aplicados a los estudiantes (Jiménez, Parra, & Camacho, 2017). En las conclusiones se señalan la importancia de que el estudiante construya su conocimiento y que el docente debe brindar el conocimiento al estudiante de tal forma que reconozca la globalidad de este y la articulación de distintas representaciones.

Por su parte los investigadores Flores, Pastrana y Flores (2017), en el artículo “Estrategias de evaluación en la enseñanza de los algoritmos de factorización en noveno grado de Educación Secundaria” señalan que la comprensión de los aprendizajes deber ser un proceso sistemático y permanente que comprenda la búsqueda y obtención de información pertinente con los objetivos de formación que se espera alcanzar, es por eso que realizaron un estudio cualitativo sustentado en un diseño fenomenológico donde se suministró una entrevista a siete profesores de matemáticas de Educación Secundaria con el propósito de detallar las experiencias individuales subjetivas de los participantes sobre la evaluación. En esa investigación se lograron identificar las estrategias de evaluación de los aprendizajes en la enseñanza de los algoritmos de factorización. El análisis permite decir que las metodologías de enseñanza de la factorización en noveno grado se caracterizan por metodología de aprendo, practico y aplico sustentado en la resolución de problemas prácticos, enseñanza por métodos geométricos y memorización de estructuras algebraica.

Siguiendo en la misma línea de investigación, Cisternas (2017) utiliza la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) como base para proponer un plan de clase relacionado con productos notables. La investigadora analiza el estudio de clase asociado solo al cuadrado del binomio buscando posibilitar el estudio de los productos notables. Como problemática describe que los estudiantes presentan dificultades en álgebra por lo que se debe buscar métodos que los que se sitúen desde distintos registros, el planteamiento del problema. La secuencia propuesta se compone de 3 clases, las cuales surgen del análisis de una sesión implementada en el marco del estudio de clase asociado al cuadrado de binomio, lo que posibilitaría el aprendizaje de los Productos notables y se trabaja con alumnos con estrategias de construcción de tarea (por medios de recortes de cartulinas). Del análisis de la clase implementada, se identifica la necesidad de abordar el significado de expresiones algébricas.

Por otro lado Serna (2017) realiza un estudio sobre la implementación de una estrategia didáctica medida por las TIC para el fortalecimiento del concepto de productos notables, utiliza como referente teórico el Constructivismo Social mediante la metodología de investigación acción. La autora emplea el uso de videojuegos educativos y talleres para la intervención con los estudiantes al tratar los temas de suma y diferencia de cuadrado y el cubo de dos cantidades. Señala que, según los resultados obtenidos en su investigación, es necesario un cambio en los procesos de enseñanza-aprendizaje que generen un aprendizaje significativo.

En el trabajo de Velásquez (2018) se buscó lograr un aprendizaje significativo del tema de factorización mediante una didáctica activa con procedimientos que relacionaran la propiedad distributiva de la multiplicación y el factor común, incluyendo asimismo la relación entre productos notables y factorización de binomios y trinomios, relacionando procedimientos geométricos, aritméticos y algebraicos en las actividades prácticas.

En las investigaciones mencionadas se puede observar una concordancia en que aún existe una tendencia de enseñanza tradicional donde los temas de factorización y productos notables se trabajan de forma operacional. Es por eso que distintos autores han trabajado en la búsqueda de nuevas estrategias didácticas para la enseñanza de la factorización y productos notables. Entre las estrategias didácticas más utilizadas en los últimos se encuentra el uso de tecnología, adaptación de juegos y el empleo de la geometría como referencia visual.

La presente investigación tomará como punto de partida las investigaciones citadas para contribuir a los problemas en la enseñanza de productos notables y factorización buscando el desarrollo del sentido estructural para facilitar la comprensión de conceptos y su operación.

## Capítulo 3. Marco Teórico

En este capítulo se hace una descripción de la fundamentación teórica que enmarca y sustenta la investigación, la cual tiene dos fundamentos teóricos: el Sentido Estructural Algebraico (referido en la investigación como sentido estructural para abreviar) y la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau.

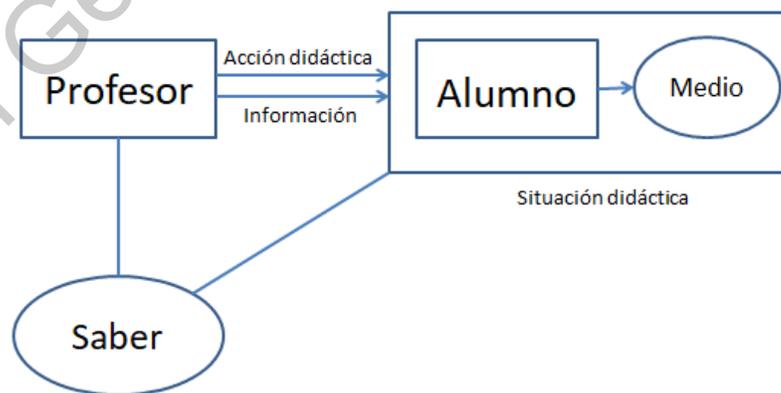
### 3.1 Teoría de Situaciones Didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas tuvo sus orígenes en Francia y fue establecida por Guy Brousseau aproximadamente a fines de los sesentas del siglo XX. Esta teoría propone un modelo para abordar la enseñanza de la matemática centrándose en los procesos de producción de los conocimientos matemáticos. En la actualidad la Teoría de Situaciones Didácticas se considera como un instrumento científico que integra los aportes de distintas disciplinas lo cual propicia una mejor comprensión de las posibilidades de mejoramiento en la enseñanza de las matemáticas. (Brousseau, 2007).

La Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau se basa en la idea donde el estudiante este en una situación que evolucione hacia la construcción del saber dependiendo de la interacción con el medio (Brousseau 1998, citado en Cisternas, 2017), para que se logre esta evolución, deben intervenir tres elementos fundamentales; estudiante, profesor y medio didáctico, los cuales se llaman terna o triángulo didáctico de la Teoría de Situaciones Didácticas, siendo el profesor el encargado de facilitar el medio para que el estudiante sea capaz de construir su conocimiento.

Estos tres elementos, planteados en el enfoque de Brousseau, componen todo el sistema didáctico y deja de lado modelos de enseñanza donde el profesor se encuentra en una posición privilegiada de enseñanza con respecto al alumno. Se

prescinde de la forma de enseñanza donde el alumno es solamente un receptor del proceso de aprendizaje y el profesor es quien determina, brinda y delimita la información que se le presenta al alumno. Este modelo tradicional de enseñanza, que en la actualidad se sigue empleado frecuentemente en las aulas, no propicia un debate entre el alumno y el maestro el cual sería necesario para el correcto análisis de los temas estudiados, todo esto sin mencionar otros factores cognitivos que pueden interferir en el proceso de enseñanza, como estados psicológicos y sociales tanto del profesor como del alumno. Por ejemplo, si el maestro había tenido un mal día, podía optar por dar una clase rápida y deficiente sin la información requerida por el estudiante para la comprensión del tema de estudio, al ser el profesor la única fuente de información, esta quedaría incompleta, repercutiendo directamente en el aprendizaje de los estudiantes. El proceso propuesto en la teoría de situaciones didácticas, promueve que el estudiante sea una parte activa del aprendizaje, generando que al término del proceso, pueda mantener una relación adecuada con el saber prescindiendo del profesor. La Figura 3.1 muestra el triángulo Didáctico, donde podemos observar que el profesor es el encargado de mostrar la información al alumno y propiciar la acción didáctica para que el alumno pueda desenvolverse en el medio al encontrarse en la situación didáctica.



**Figura 3.1 Triángulo Didáctico.**

Brousseau (2007), llama “situación a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, como el recurso de que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable”(p.16). Así podemos decir que una situación didáctica es aquella que se desarrolla habitualmente dentro del contexto escolar, donde se produce la interacción entre el profesor y uno o varios estudiantes, en torno a un saber que se pretende que el alumno adquiera. Se trata de situaciones que se diseñan y desarrollan con la clara intención de que el estudiante construya y adquiera un determinado conocimiento de manera significativa a través de la aparición de tal concepto como solución óptima del problema al que se enfrenta. Es por eso que se puede decir que *“El profesor es quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento. Así, Situación Didáctica se refiere al conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor-estudiante-medio didáctico.”* (Chavarria 2006).

Para propiciar estas situaciones se utilizan medios como lo pueden ser materiales, recursos didácticos, actividades, dinámicas, etc., y es aquí donde entra la ingeniería didáctica, ya que es la que se encarga de estudiar y producir dichos medios. Es así como se puede decir que la situación es un entorno que el docente diseña y manipula para que el alumno alcance los objetivos de aprendizaje.

La utilidad de la TSD para la práctica en la enseñanza de las matemáticas incluye técnicas para los profesores, mejoras en la formación de maestros, un pensamiento crítico en los padres de familia y para el público, una mejora en la producción de conocimientos científicos y beneficios para el conjunto de la sociedad, porque gracias a las matemáticas los alumnos pueden aprender a establecer y gestionar la verdad científica en una sociedad (Brousseau, 2007).

### 3.1.1 Situación a-didáctica

Según Brousseau (2007), el término de situación a-didáctica designa a una situación que no puede ser denominada de forma conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos y por otra parte sanciona las decisiones de los alumnos sin intervención del maestro.

Es indudable que para poder generar un conocimiento en primera instancia es necesario que el estudiante se interese en la resolución de un problema que forme parte de la situación didáctica, sin embargo, al buscar que el alumno genere su propio conocimiento se presentan varios momentos que son centrales en dicha teoría donde el alumno se encuentra solo con el problema sin la intervención del maestro.

En el momento en el que el profesor se aleja de la situación y el alumno asume el problema como propio genera un proceso de búsqueda para resolverlo de forma autónoma, se denomina situación a-didáctica. En este escenario es importante que el profesor supervise el proceso de resolución del problema pudiendo intervenir dando respuesta a preguntas que orienten al alumno sin llegar a dar respuesta al problema.

Durante esta situación el alumno esta interactuando con el medio preparado por el profesor, interactuando con el problema propuesto o discutiendo con sus compañeros acerca de éste.

Las características de una buena situación didáctica no son difíciles de enunciar, por el contrario corresponden a los procesos naturales de comunicación entre partes con el agregado del contexto del aprendizaje, la situación ideal para el aprendizaje debe darse por medio del cuestionamiento, reto o pregunta, donde el alumno es capaz de analizar y cuestionar la realidad el problema desde el conocimiento previo que posee y mediante la hipótesis llega a la respuesta, en este proceso debe tener una catarsis sobre lo que se está aprendiendo, donde el alumno se plante como problema la resolución de la pregunta, este proceso es lo

que marca un verdadero conocimiento, dónde el alumno cuestiona sus conocimientos y se ve desolado ante la pregunta, pero con la correcta guía del profesor es capaz de sortear este trance y al final, su recompensa es el conocimiento verdadero y significativo.

### **3.1.2 Los distintos tipos de situaciones**

Para Brousseau (1998, 2007, citado en Macías, 2016), no todas las situaciones didácticas son iguales y por ello establece la siguiente clasificación:

- Situación de acción: El alumno actúa sobre el medio, por lo cual se producen intercambios de información entre él y la situación, lo que le permite construir una representación de la situación, tomar decisiones y emplear una estrategia base asociada a una serie de conocimientos específicos. La eficacia de cada estrategia puede funcionar en algunos casos, pero en otros puede ser ineficaz, su éxito dependerá de las condiciones y características concretas y delimitadas de la situación.
- Situaciones de formulación: Ocurre cuando el alumno se comunica con uno o varios interlocutores intercambiando información sobre lo que ha descubierto o encontrado. En esta situación las restricciones impuestas obligan al estudiante a utilizar sus conocimientos para producir formulaciones en forma de mensaje, los cuales pueden tratarse solamente de un intercambio de juicios o ideas.
- Situaciones de validación: En esta situación el alumno debe someter a juicio con su interlocutor la estrategia seguida y que ha funcionado en el momento de la acción o la pertinente formulación y los resultados obtenidos. El profesor solo debe ser el responsable y gestor del buen funcionamiento del medio ya que su papel debe centrarse únicamente en organizar la situación pedagógica.

- Situación de institucionalización: Cuando el estudiante aplica una estrategia óptima, permitiéndole encontrar la solución al problema al que se ha enfrentado, desconoce que los conocimientos implícitos en dicha estrategia pueden ser utilizados con éxito en otras situaciones, ya que constituyen un saber matemático, impersonal y descontextualizado. Por lo tanto, una vez finalizada la situación a-didáctica, el profesor debe continuar con el proceso de institucionalización, explicando las relaciones entre el conocimiento construido por el propio estudiante gracias a la situación y el saber que desea enseñar.

### **3.1.3 Efectos que acontecen en la situación didáctica**

Dentro de su teoría, Brousseau identifica algunos de los efectos que podían llegar a interrumpir la construcción del conocimiento del estudiante, los cuales se describen como actitudes con efectos negativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, estos efectos son muy importantes para tener en cuenta, ya que se debe buscar evitar caer en ellos. Jesennia Chavarría (2006), los resume de la siguiente forma:

#### **Efecto *Topaze***

Hace alusión a una actuación desmedida del profesor en el aula donde pierde su característica de guía y comienza a entorpecer el avance del alumno al conocimiento entregándoselo sin esfuerzo porque ha asumido el rol de la resolución del problema en cuestión, en ese contexto es probable que el alumno no tenga la capacidad de lograr el conocimiento por sus propios medios sin embargo puede acceder a ellos con la estimulación adecuada, por lo tanto para evitar que este suceso se desarrolle el profesor debe tener una estrategia bien definida donde prevea estas situaciones y logre que el alumno salga adelante por

sí mismo.

### **Efecto Jourdain**

El alumno debe ser retroalimentado de forma positiva buscando no herir su susceptibilidad y sobretodo buscando no desalentar su búsqueda del conocimiento sin embargo existe un límite muy claro entre lo anterior y el hacerle creer al alumno que esta correcto cuando en realidad no lo está. En ese sentido el efecto Jourdain se presenta cuando el maestro, permite que el alumno se establezca en el error y busca no decepcionarlo.

### **Deslizamiento Meta-cognitivo.**

Cuando se traslada el objetivo de aprendizaje del conocimiento que se plantea instalar en el alumno a segundo término y el proceso de adquisición de este aprendizaje comienza a ser más protagónico. Dicho de otra forma el alumno y el maestro centran su objeto de análisis en el proceso y no en objetivo de aprendizaje. Un ejemplo en el ámbito matemático se manifiesta cuando el profesor centra el proceso de aprendizaje en tan solo el entrenamiento del alumno para la resolución de problemas, enfocándose solamente, en el procedimiento y su resolución casi mecánica, sin comprender los procesos matemáticos detrás de la operación realizada.

### **La analogía**

El paradigma que presentar cuando es la analogía usada de forma incorrecta radica en el hecho de que entre más paralelos pongamos de los problemas estudiados nos alejamos más de los objetivos centrales de aprendizaje, una analogía puede ayudar a comprender ciertas partes del conocimiento de un problema real, pero no será el proceso por el cual llegamos a la comprensión total del problema en cuestión, el profesor no debe caer en esa actitud donde suplante

las explicaciones sencillas, concisas y practicas por parábolas rebuscadas que incluso llegan a la confusión del alumno.

### **3.1.4 La ingeniería didáctica**

La ingeniería didáctica fue introducida en la didáctica de la matemática francesa a comienzos de los 80 para poder describir formas de abordar un trabajo matemático realizando una analogía con el trabajo de un ingeniero (Artigue, 1988).

En la Teoría de Situaciones Didácticas el diseño de las situaciones que permitan enseñar conceptos a alumnos recibe el nombre de ingeniería didáctica. El término ingeniería didáctica es usado en la didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Brousseau (1986, citado en Macías, 2016), establece unas pautas para diseñar situaciones fundamentales:

1. Plantear un problema cuya solución requiera al alumno ese único conocimiento.
2. Propiciar la aparición de variables de esta situación cuyo cambio provoque modificaciones cualitativas de las estrategias empleadas por los alumnos para resolver el problema.
3. Asegurarse que la situación diseñada abarca todos los problemas conocidos en los que interviene el conocimiento que se desea generar en el alumno.

Es muy importante que el profesor cuente con un buen conocimiento sobre los temas a impartir para poder encontrar las estrategias necesarias para elaborar los problemas a presentar a los alumnos, ya que un problema que no este bien diseñado puede generar más dudas en el alumno desencadenando una falta de interés.

En el capítulo 4 se abordan los puntos clave para la aplicación de la ingeniería didáctica como metodología en el aula.

### **3.1.5 El contrato didáctico**

Según Brousseau (2007), la ilusión de un contrato es indispensable para que la relación en el sistema didáctico tenga éxito. Sin embargo menciona que el profesor no puede comprometerse a “hacer entender” un conocimiento a los alumnos, es por eso que la relación didáctica no se puede dar lugar a un contrato formal, pero si un conjunto de reglas que rijan determinada situación didáctica.

En otras palabras, el contrato didáctico hace referencia al conjunto de comportamiento propios del profesor que esperan los alumnos y al conjunto de comportamientos del estudiante que son esperados por el profesor. Para esto el profesor debe hacer saber al alumno lo que desea que se haga ya se explícitamente o muchas veces implícitamente a través de actitudes, gestos, silencios u otros aspectos vinculados al funcionamiento del saber matemático tratado.

Para alcanzar un buen contrato didáctico, el profesor debe tener conciencia para elegir el momento adecuado de sus intervenciones, lo que significa que el maestro debe guiar la situación didáctica y permitir que el alumno avance en el proceso de aprendizaje, sin llegar a tomar una postura que facilite al alumno alcanzar los objetivos planteados, ya que es necesario su esfuerzo para que el aprendizaje se lleve a cabo. Si el alumno llegara a alejarse del objetivo principal al intentar resolver el problema planteado, el maestro debe ser capaz de encaminar al alumno al camino correcto de resolución del problema para que pueda llegar a la solución de problema.

Otra de las situaciones a las que se puede enfrentar el profesor es que el alumno no posea los conocimientos necesarios para la resolución del problema planteado, lo cual es muy común en la enseñanza de las matemáticas donde los temas a estudiar depende de otras habilidades pre desarrolladas, y de no contar el alumno

con estos conocimientos se ver entorpecida la labor de su aprendizaje, en tal caso el profesor puede hacer repasos para que el alumno recuerde los temas que necesita en ese momento, generalmente el alumno tuvo contacto con esos temas pero no los recuerda o no los vio de una manera extensa, y por lo tanto no desarrolló los conocimientos esperados. Un buen repaso que sea puntual y objetivo permite que el alumno retome su sendero y logre el aprendizaje de los nuevos temas, sin embargo el profesor debe estar siempre atento para no caer en el error de desviarse de su tema principal.

## **3.2 Sentido Estructural Algebraico**

### **3.2.1 Noción de Sentido**

Se puede plantear una reflexión sobre la idea del sentido desde diferentes enfoques como lo son el filosófico, psicológico y didáctico. En esta investigación se hará referencia a este último enfoque.

Peltier (2003) concluye que sólo se puede estar seguro de que un estudiante dispone de un concepto matemático con sentido cuando es capaz de operarlo, sin ayuda, en situaciones complejas en las que entra en juego el concepto y los diferentes teoremas en acción asociados. Esto hace alusión a que el alumno puede actuar por sí mismo, en un tipo concreto de actividades relacionadas con un concepto, para esto debió de plantearse preguntas fundamentales en relación con el significado del concepto. Por lo que podemos asumir que si se propician las preguntas del significado de un concepto matemático el alumno podrá ir construyendo su formulación del concepto.

Por ejemplo, en el caso de la factorización, si el estudiante realmente presenta esa noción del sentido del concepto, va a entender el proceso que está realizando y será capaz de anticiparse a la resolución del problema encontrando las formas de solución más sencillas. Es así que podemos decir que un ejemplo de la noción de

sentido se presenta cuando el alumno reconoce a simple vista el patrón del problema que está analizando logrando deducir la forma de resolverlo.

### **3.2.2 Estructura Algebraica**

El álgebra es la rama de las matemáticas que estudia la combinación de elementos de estructuras abstractas que cumplen ciertas reglas, originalmente era una extensión y generalización de la aritmética.

Hoch y Dreyfus (2004), consideran que expresiones o frases algebraicas como la relación de igualdad o desigualdad entre dos expresiones algebraicas representan estructuras algebraicas.

Diferentes autores han reflexionado sobre la estructura en el álgebra, y esto llevo a que se planteara la necesidad de determinar la estructura de dos expresiones algebraicas equivalentes (Vega-Castro, 2013), siendo un ejemplo los productos notables.

Cuando el alumno desarrolla el sentido estructural le es posible determinar las distintas estructuras algebraicas que persisten en un problema, “dividiendo” el problema en partes las cuales facilitan su análisis, un ejemplo de esto es el caso de un problema sencillo de factorización por factor común, este tiene una manera sencilla de resolverse extrayendo el termino común y multiplicando por los elementos restantes de la operación, sin embargo en algunos problemas donde existe una notación rica en exponentes o términos el alumno generalmente se abruma al ver toda esta colección de números y letras, sin embargo si el alumno logra identificar el termino común que está multiplicando a los demás podrá realizar la factorización sin importar la extensión de los términos o su complejidad en cuanto a notación o exponenciación.

### **3.2.3 Sentido Estructural**

El término sentido estructural fue introducido por Linchevski y Livneh (1999) a finales del siglo pasado, haciendo alusión al conocimiento estructural de las

expresiones y la capacidad de elegir entre las formas pertinentes de realizar una tarea. Más adelante Hoch y Dreyfus (2004) puntualizan, que las formas más eficientes de abordar una tarea implican un manejo conceptual más profundo y significativo, lo que se traduce en procedimientos más cortos y menos propensos al error.

Según Vega-Castro (2013) el constructo del sentido estructural no es un concepto nuevo, es una forma de enfatizar la posesión del conocimiento, que se manifiesta a través de signos como lo son reconocer expresiones que son equivalentes sin necesidad de operar, reconocer qué expresión es la más simple de todas y cuándo es conveniente sustituir una por otra.

Como señalan Harel y Soto (2016), el razonamiento estructural puede tener diferentes manifestaciones en la práctica matemática, es por eso que la presente investigación toma la definición de sentido estructural algebraico como “una competencia cognitiva o un conjunto de capacidades necesarias para el trabajo flexible con las expresiones algebraicas, más allá de la aplicación mecánica de procedimientos de transformación de las mismas” (Vega-Castro, 2013, p. 83).

En conclusión, el sentido estructural permite que los alumnos hagan un mejor uso de las técnicas algebraicas.

#### **3.2.4 Descriptores del Sentido estructural y su ponderación**

En los últimos años, diversos autores han contribuido al estudio del sentido estructural y su caracterización, formulando sus propios descriptores para el sentido de estructura.

Hoch y Dreyfus (2007) fueron las primeras en realizar una caracterización operacional de sentido estructural para identificar el sentido de estructura

presentado por los estudiantes en el contexto de una tarea algebraica, caracterización que estaba determinada por los siguientes aspectos:

1. Reconocer una estructura familiar en su forma más simple.
2. Tratar con un término compuesto como una sola entidad y reconocer una estructura familiar en una forma más compleja.
3. Elegir las manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de estructura.

Otra caracterización del manejo operacional del sentido estructural son los perfiles propuestos por la doctora Vega-Castro (2013) de los patrones que se suelen encontrar en los estudiantes al trabajar con el sentido estructural en expresiones algebraicas, los cuales se presentan a continuación:

- Perfil 1: Se logra un reconocimiento de la estructura interna, completa todas las expresiones, reproduce la estructura interna e identifica todas las subestructuras presentes en la tarea.
- Perfil 2: Reconoce relaciones entre las expresiones algebraicas, reconoce la estructura interna en parte de la mitad de las expresiones, completa la mitad de las expresiones de forma incorrecta, reproduce la estructura interna, utiliza e identifica todas las subestructuras presentes en la tarea.
- Perfil 3: Reconoce relaciones entre las expresiones, no reconoce la estructura interna, completa las expresiones de forma incorrecta e identifica todas las subestructuras presentes en la tarea.
- Perfil 4: Reconoce una estructura interna en menos de la mitad de las expresiones. Identifica subestructuras (suma, producto, potencia)
- Perfil 5: Reconoce estructura interna de algunas expresiones e identifica las subestructuras del producto y potencia.
- Perfil 6: Reconoce estructura interna en la mitad de los casos, completa las expresiones algebraicas. Identifica todas las subestructuras presentes en la tarea.

- Perfil 7: No reconoce la estructura interna de expresiones, no reconoce relaciones, no completa expresiones correctamente y solo identifica la subestructura de potencia.

Recientemente, en la misma línea de investigación, las profesoras Ascencio y Eccius-Wellmann se plantearon la pregunta de ¿cómo se puede ponderar el nivel de sentido estructural manifestado en los procedimientos algebraicos desarrollados por los alumnos? (2019), y así fue como propusieron una ponderación de los descriptores de sentido estructural partiendo de lo propuesto por Hoch y Dreyfus (2007) y Vega-Castro (2013), la cual se muestra a continuación:

- SE1 Identifica una estructura familiar.
  - SE1a en su forma más simple (1 punto).
- SE2 Trata con un término compuesto como una entidad única y reconoce una estructura familiar en una forma más compleja.
  - SE2a donde el término compuesto contiene un producto pero no una suma o resta (2 puntos).
  - SE2b donde el término compuesto contiene una suma o resta y posiblemente también un producto (3 puntos).
- SE3 Elige manipulaciones adecuadas para hacer mejor uso de una estructura.
  - SE3a en su forma más simple (4 puntos).
  - SE3b donde el término compuesto contiene un producto pero no una suma o resta (5 puntos).
  - SE3c donde el término compuesto contiene una suma o resta y posiblemente también un producto (6 puntos).

- SE4 Distingue subestructuras dentro de una entidad y reconoce relaciones entre ellas (evita errores de interpretación y uso de las relaciones dentro de la estructura)

SE4a Las subestructuras forman parte de la misma expresión polinómica o similar (expresión en un solo nivel). Opera sin error pero no contesta la pregunta (7 puntos)

SE4b Las subestructuras forman parte de diferentes expresiones polinómicas o similares (expresión en dos niveles). Opera sin error pero no contesta la pregunta (8 puntos)

SE4 c Las subestructuras forman parte de la misma expresión polinómica o similar (expresión en un solo nivel). Opera sin error y contesta la pregunta (9 puntos)

SE4 d Las subestructuras forman parte de diferentes expresiones polinómicas o similares (expresión en dos niveles). Opera sin error y contesta la pregunta (10 puntos)

Estos últimos descriptores y ponderación, fueron en los que nos basamos para la calificación otorgada a las actividades propuestas en esta investigación, adaptándolos a los reactivos propios de este estudio.

## **Capítulo 4. Metodología de la Investigación y Metodología en el aula**

En este capítulo se realiza una descripción de las características del estudio y de la metodología utilizada en la investigación y en el aula, con el fin de proporcionar coherencia al trabajo. En el primer punto se muestran los elementos que caracterizan nuestra investigación. Justificando también las razones que nos han llevado a ellos. En la segunda parte del capítulo se aborda la preparación de la investigación así como la metodología de trabajo en el aula utilizada.

### **4.1 Características de este estudio**

#### **4.1.1 Tipo de investigación**

En esta investigación, se realiza un estudio con referente empírico de tipo cualitativo y descriptivo, (Hernández, 2006) ya que la recolección de datos está basada en la observación de comportamientos y respuestas abiertas para la posterior interpretación de significados.

Este tipo de estudio es un método que se puede utilizar para la descripción rigurosa de fenómenos, siendo de gran utilidad para los investigadores que busquen saber el quién, qué y donde de los fenómenos o eventos estudiados lo cual cuadra con el objetivo de esta investigación.

#### **4.1.2 Sujetos participantes en el estudio y contexto de la investigación**

Los estudiantes participantes en este trabajo de investigación cursaban tercer semestre de preparatoria en el Colegio de Bachilleres de Querétaro, COBAQ, Plantel 13 “Epigmenio González”, perteneciente a la ciudad de Santiago de Querétaro. Su edad al momento del estudio oscilaba entre los quince y diecisiete años.

La clase estaba compuesta por cuarenta estudiantes, veintiséis mujeres y catorce hombres, sin embargo una de las dificultades a las cuales nos enfrentamos durante el estudio fue la baja asistencia de los estudiantes, esto debido a las clases virtuales obligatorias durante el periodo, por lo que solo se contó con la participación de 17 alumnos en la prueba, de los cuales solo 12 alumnos completaron la secuencia de actividades.

Al ser estudiantes de tercer semestre de preparatoria ya contaban con conocimiento básicos de álgebra, materia estudiada en secundaria y en primer semestre de preparatoria.

Es importante mencionar que debido a que en la investigación se trabajó directamente con alumnos de tercer semestre de preparatoria, siguiendo el marco normativo ético, fue necesario comunicar a la institución, al docente a cargo de la materia, a los estudiantes participantes y a sus padres o tutores sobre todo lo concerniente a las actividades de la investigación y el buen uso de la información a través de cartas informativas de consentimiento y confidencialidad.

## **4.2 Preparación de la investigación**

Antes de elaborar la secuencia de actividades desde la metodología de investigación, se contemplaron las acciones a realizar durante el proceso de intervención, las cuales sirvieron de base para la creación de la secuencia a seguir con los estudiantes. Las acciones que se buscaron realizar se muestran a continuación:

- Diagnóstico.
- Diseño de secuencia de actividades y materia didáctico
- Aplicación de las actividades
- Análisis de resultados
- Presentación de conclusiones

En el apartado 4.2.2 se explica la metodología seguida para llevar a cabo estas acciones.

#### **4.2.1 Organización de la intervención**

A partir de septiembre del 2020 la investigadora inició la concertación de reuniones virtuales con el profesor encargado de impartir la clase de Física I, donde se acordaron los por menores de la secuencia a aplicar a los alumnos.

Durante las reuniones de la preparación de la intervención se llegaron a diversos acuerdos, entre lo que se encuentran:

- a) Serían 4 las sesiones de clase que se dedicarían a la experimentación.
- b) Las fechas en las que se realizarían las sesiones.
- c) Aspectos del marco normativo ético.
- d) Las sesiones tendrían duración de una hora y no interferirían con el horario establecido en la planeación escolar.

No se debe olvidar que para diseñar y analizar una clase en la cual el objeto matemático sea el protagonista de la problemática, podemos respaldarnos en una herramienta teórica que oriente a la construcción de la problemática desde el enfoque planteado por Brousseau, cuya idea consiste en poner al estudiante en una situación que evoluciona hacia la construcción del saber dependiendo de la interacción con el medio, donde intervienen los tres elementos fundamentales ya explicados en el capítulo de marco teórico; estudiante, profesor y medio didáctico.

La intervención realizada se formuló a partir del estudio a priori de los aspectos epistemológicos de los temas de productos notables y factorización, además se indagó sobre la información dada y técnicas utilizadas en el salón de clases en los temas de factorización y productos notables de forma general en una preparatoria.

A partir de estos aspectos se desarrolló el diagnóstico y actividades posibles a aplicar a los alumnos.

Es así como se llegó a plantear la investigación en cuatro sesiones, la primera para indagar a profundidad sobre los conocimientos del tema de los alumnos participantes, la segunda y tercera para aplicar las actividades propuestas centradas en el desarrollo del sentido estructural, y la cuarta para analizar y evaluar el desempeño final de los alumnos.

#### **4.2.2 Metodología de trabajo en el aula**

Para el diseño y selección de la estructura de las actividades de enseñanza-aprendizaje que se propuso utilizar la ingeniería didáctica como metodología en el aula.

Este término designa un conjunto de secuencias de clase para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático que evoluciona con las interacciones entre el profesor y los alumnos. Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas”, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza y por el registro de los estudios de caso y la validación, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. (Artigue, 1988).

Es por eso que la ingeniería didáctica es el producto resultante de un análisis a priori y un proceso resultante de la aplicación de un producto o secuencia didáctica acorde a las condiciones de una clase.

Se siguieron las cuatro fases de la ingeniería didáctica para la estructuración de actividades, descritas por Artigue (1988), y De Faria (2006) que se muestran a continuación:

##### **1. Análisis preliminares.**

Para la concepción de la ingeniería didáctica es necesario un análisis del cuadro didáctico general, teniendo siempre en cuenta los objetivos de la investigación.

Lo más usual es realizar un análisis de los aspectos epistemológicos del contenido contemplado en la enseñanza, el análisis de la enseñanza tradicional y las concepciones de los estudiantes.

## **2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.**

En esta fase el investigador toma la decisión de actuar sobre las variables en el proceso de enseñanza-aprendizaje que no estén fijadas por las restricciones presentes en el estudio. Comúnmente esta fase comprende una fase descriptiva y una predictiva.

## **3. Experimentación.**

En esta fase se da el contacto investigador/profesor/observador con la población de estudiantes objeto de la investigación. Se aplica la ingeniería en los estudiantes.

La experimentación supone:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación;
- El establecimiento del contrato didáctico;
- La aplicación de los instrumentos de investigación;
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Es importante respetar las selecciones y deliberaciones elaboradas en los análisis a priori.

## **4. Análisis a posteriori y evaluación**

Esta fase se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza y las producciones de los estudiantes. Se realiza la validación o

refutación de las hipótesis formuladas en la investigación fundamentándose en la confrontación de los análisis a priori y a posteriori.

### **1.2.3 Instrumentos**

Para llevar a cabo la secuencia de actividades se utilizaron diferentes herramientas tecnológicas, buscando que todas fueran de fácil acceso para los alumnos, era necesario que los alumnos contaran con conexión a internet y con algún dispositivo electrónico como computadora, celular o Tablet.

También se empleó un software de presentaciones electrónicas, hojas de trabajo e instrucciones, Zoom como la sala de reunión virtual y GeoGebra Classroom para las clases virtuales de las sesiones dos y tres.

La plataforma virtual seleccionada para trabajar con los alumnos fue GeoGebra Classroom por las actividades que puede realizar el docente con ella:

- Asignar tareas interactivas y atractivas para sus estudiantes.
- Ver el progreso actualizado en vivo de estudiantes que trabajan en una tarea específica.
- Ver qué tareas han comenzado (o no) sus estudiantes.
- Hacer preguntas a toda la clase y ver todas las respuestas al instante.
- Anonimizar los nombres de los/as estudiantes al mostrar sus respuestas a las preguntas.
- Facilitar debates ricos e interactivos entre todos/as sus estudiantes, grupos de estudiantes y estudiantes de forma individual.

Emplear instrumentos con los cuales los alumnos ya estaban familiarizados, como la plataforma de Zoom, contribuyó a una buena recepción de los estudiantes cuando se inició con el desarrollo de las sesiones.

## **Capítulo 5. Desarrollo de las sesiones**

### **5.1 Preparación de la secuencia de actividades**

Lo primero a tener en cuenta en la preparación de las tareas son los entregables que busca dar la investigación, que están directamente relacionados con los objetivos de la investigación, ya que en base a estos se fueron desarrollando las actividades a presentar.

Para el desarrollo de las sesiones se contempló en primera instancia el tiempo disponible con el grupo, el tiempo de las sesiones y el objetivo de las actividades. Es importante señalar que las actividades fueron planeadas para realizarlas por clases virtuales en noviembre del 2020, cuando las escuelas no tenían actividades presenciales, a pesar de que se trataron de prevenir algunos posibles contratiempos por llevar a cabo la secuencia de forma virtual, se llegaron a presentar algunas dificultades las cuales abordaremos a detalle más adelante.

A continuación se describe el desarrollo de las sesiones a partir de las fases de la ingeniería didáctica.

### **5.2 Análisis preliminares**

En análisis preliminar muestra como resultado la evaluación didáctica, cognitiva y epistemológica del conocimiento previo del tema de factorización y productos notables, se debe considerar el marco teórico y el nivel y características de los sujetos de estudio. A continuación se muestra una descripción de los análisis elaborados en esta primera fase:

#### **5.2.1 Análisis epistemológico**

Para el análisis epistemológico se investigaron tanto los antecedentes de sentido estructural como la definición, importancia y dificultades de los productos notables y factorización, los cuales ya han sido descritos en capítulos anteriores. Hay que recordar la definición de sentido estructural como un conjunto de capacidades

necesarias para el trabajo flexible con las expresiones algebraicas, más allá de la aplicación mecánica. Simplificando, el sentido estructural permite que los alumnos hagan un mejor uso de las técnicas algebraicas.

### **5.2.2 Análisis Cognitivo**

Se continuó con el análisis cognitivo, aclarando que las habilidades cognitivas se pueden entender como operaciones y procedimientos que puede usar el estudiante para adquirir diferentes tipos de conocimientos, que suponen capacidades de representación, de selección y de autodirección.

En el artículo “Habilidades cognitivas y metacognitivas para favorecer el desarrollo de competencias en estudiantes mexicanos de educación media superior” de Salinas, Méndez y Cárdenas, (2018) se señala que según observaciones realizadas a estudiantes que ingresan a universidad, se identificó que la mayoría presentaba debilidades en actividades de aprendizaje que va más allá de la memorización, lo cual indica que los estudiantes de preparatoria no suelen tener un buen desarrollo de habilidades cognitivas. En el mismo artículo se hace mención de la complejidad que entraña la aplicación de planes y programas de estudio en estudiantes de educación media superior, ya que se pretende la construcción de aprendizajes para la vida, haciendo necesario un repertorio cognitivo para enfrentar a una sociedad más competitiva, es decir se deben fomentar las habilidades cognitivas en los alumnos, sin embargo los autores concluyen que aún no se ha logrado que se promueva un ambiente de aprendizaje en donde confluya estrategias cognitivas.

#### **5.2.2.1 Neurociencia aplicada al sentido estructural algebraico.**

Dentro del análisis cognitivo, encontramos la aplicación de la neurociencia al sentido estructural algebraico. Siempre se ha reconocido al cerebro Humano como una gran computadora capaz de reconocer patrones en diversas situaciones y a través de diversos mecanismos que han ayudado a la adaptación y supervivencia

de la especie, como mencionan Corbetta y Shulman (2002) “El conocimiento y las expectativas nos ayudan a enfocarnos en elementos, partes o detalles, de una escena visual que de otra forma habríamos ignorado”. Específicamente en el área del álgebra, esta aseveración hace referencia a que el alumno debe ser capaz de reconocer patrones en la estructura que representa al problema matemático, se podría decir que el problema es por sí mismo una súper estructura comprendida por pequeñas sub estructuras, el reconocimiento de tales nos ayuda a poder implementar el conocimiento previo en la búsqueda de una solución al problema.

Al este procedimiento de reconocer patrones y la aplicación de conocimientos previos se le conoce como atención espacial. Los principales aspectos que el ser humano reconoce en el momento en que utiliza la atención espacial son localización, movimiento y color, pero desde una perspectiva matemática, podemos encontrar diversas expresiones algebraicas que pueden ser fácilmente reconocidas si se cuenta con los conocimientos previos necesarios para poder reconocer dichos patrones.

Por lo tanto, existen pilares neurológicos fundamentales que en el ámbito pedagógico debe tener el alumno para poder aplicar el sentido estructural y lograr la atención espacial necesaria para la resolución de los problemas algebraicos de factorización y esos pilares, según los autores citados, son:

- Observación
- Conocimiento previo
- Memoria

A continuación explicamos cada uno de estos pilares, específicamente desde la perspectiva de esta investigación, es decir cuando se busca desarrollar sentido estructural algebraico.

## **Observación**

El alumno debe ser capaz de observar detenidamente el problema presentado, muchas veces nosotros miramos en vez de observar lo que se nos presenta, pero tan solo mirar las cosas no nos permite tener ese enfoque más profundo que antecede al análisis de lo que se está mirando, cuando el alumno mira no analiza ni entiende que se le está presentando. En cambio cuando está observando la estructura que se le presenta, puede analizar su estructura y las posibles estrategias que puede aplicar para su resolución.

La observación analítica, comienza con una breve y rápida observación del todo como un conjunto estructurado, posteriormente se debe de analizar por partes cada conjunto para así poder determinar la manera en la que los componentes se correlacionan, en este caso, los términos, los factores y las diversas formas de ecuaciones que se encuentran los problemas complejos de la factorización, la observación bien estructurada que es uno de los procesos mentales que ocurren en el desarrollo del sentido estructural no solo debe ser impulsada desde el ámbito matemático por el contrario, varios procesos cerebrales nos impulsan a desarrollar estas habilidades mientras buscamos patrones en nuestro día a día que nos ayudan a sobrellevar las actividades de la vida diaria.

## **Conocimiento previo**

El bagaje cultural que tiene un individuo le permite aplicar sus conocimientos aun cuando se encuentren aplicados en las formas más abstractas o en los problemas matemáticos más complejos.

En el caso de los problemas de factorización y productos notables, más que memorizar una fórmula o un proceso resolutivo, el desarrollo del sentido estructural busca que el alumno comprenda el motivo de las fórmulas, y decida qué método son mejores para resolver el problema.

Después de reconocer las características estructurales del problema el alumno debe proceder a analizar que estrategias conoce para resolverlo. Las estrategias no se pueden deducir, sin el conocimiento previo de los procesos algebraicos.

La neurología nos explica que cada vez que el cerebro aprende algo nuevo las neuronas forman sinapsis unas con otras (plasticidad sináptica), donde sus uniones se vuelven más entramadas cuando se profundiza en el tema. Si el alumno no ha pasado por un proceso de aprendizaje anterior esta sinapsis neuronal no existirá y por ende no tendrá los conocimientos necesarios para resolver el problema.

Por lo tanto, si el alumno no desarrolla un conocimiento previo o no práctica de forma adecuada, no logrará comprender de una forma completa los procesos que está realizando. Así mismo si no se prioriza el desarrollo del sentido estructural, el alumno resolverá los problemas de forma mecánica pero no será capaz de comprender el proceso por el cual se está resolviendo ese problema y cuando haya finalizado esos temas de estudio las sinapsis no serán las suficientes como para convertir ese aprendizaje en un proceso de conocimiento a largo plazo.

### **Memoria**

Por último tenemos el pilar de la memoria, el cual permite el almacenamiento de los conocimientos. Para el buen desarrollo del sentido estructural, el cerebro debe poder disponer de manera eficaz y oportuna de la información almacenada, en forma de conocimiento previo, que se traduce en una amplia red de conexiones neuronales, entre más sinapsis o conexiones tenga esta red mejor será el acceso a la información que se encuentra en la memoria.

La actividad continua y la práctica en la resolución de problemas de factorización permite que el cerebro del alumno produzca las suficientes conexiones para el acceso rápido a su información, si el estudiante no practica, no será capaz de reconocer la estructura del problema, mucho menos tendrá la habilidad para

resolverlo. Es por eso que una memoria bien entrenada permite al alumno una mayor rapidez al momento de la resolución del problema y factoriza, por medio del sentido estructural de una manera más consciente, entendiendo el proceso por el cual llega al resultado.

Por tales motivos, en el ámbito de la neurología la formación del sentido estructural se reconoce como un proceso complejo que involucra varias áreas de la mente, y que su desarrollo en el alumno no solo está ligado a la práctica, por el contrario, es necesario un ejercicio paralelo de otras aptitudes que permitan al alumno el reconocimiento de los patrones necesarios para así poder resolver los problemas incluso si su dificultad es mayor.

Todos los procesos que se acaban de describir son parte fundamental del sentido estructural, a la vez que se desarrolla en el alumno también se va reforzando, sin embargo, no se puede olvidar que cada proceso mental y de sinapsis cerebral es diferente dependiendo del individuo, lo cual explica que algunos alumnos parecen desarrollar mejores habilidades de resolución matemática que otros.

### **5.2.3 Análisis didáctico**

En lo referente al análisis didáctico, para la formulación de actividades se tuvo en cuenta la Teoría de Situaciones Didácticas, ya descrita en el capítulo de marco teórico. También se consideró que la población a la que fue dirigida la enseñanza eran alumnos de preparatoria, que al haber concluido sus estudios de secundaria, según la Secretaría de Educación Pública, SEP, los logros que deberían de haber alcanzado en el área de matemáticas son:

- Amplía su conocimiento de técnicas y conceptos matemáticos para plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad, así como para modelar y analizar situaciones. Valora las cualidades del pensamiento matemático.

Asimismo fueron consideradas las competencias disciplinares básicas de la materia de matemáticas, que según el programa de la Dirección General del Bachillerato (DGB) vigente, deben alcanzar los alumnos de preparatoria, las cuales se muestran en la siguiente figura:

COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS	
MATEMÁTICAS	CLAVE
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	CDBM 1
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	CDBM 2
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	CDBM 3
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	CDBM 4
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	CDBM 5
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente, las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	CDBM 6
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.	CDBM 7
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	CDBM 8

**Figura 5.1 Competencias disciplinares básicas.**

De las competencias disciplinares básicas señaladas, son de principal interés para la investigación la 1 y 2, ya que hacen referencia a interpretar modelos matemáticos algebraicos, formular y resolver problemas aplicando diferentes enfoques.

En el programa de la DGB, específicamente en el bloque 5 de operaciones algebraicas, podemos encontrar los conocimientos y aprendizajes esperados del alumno relacionados con la presente investigación.

CLAVE CG	CLAVE CDB	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes esperados
CG 5.1 CG 5.2 CG 8.2	CDBM 1 CDBM 3	Lenguaje algebraico.  Leyes de los exponentes y radicales.  Operaciones con polinomios.  Productos notables.  Factorización.  Fracciones algebraicas.	Utiliza operaciones algebraicas para resolver problemas de la vida cotidiana.  Reconoce el lenguaje algebraico así como las leyes de los exponentes y radicales en la resolución de problemas.  Identifica los procedimientos para resolver problemas algebraicos.  Explica la solución de problemas algebraicos.	Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso.  Expresa libremente sus ideas, mostrando respeto por las demás opiniones.  Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.  Maneja y regula sus emociones reconociendo sus fortalezas y áreas de oportunidad.	Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones.  Propone procesos de solución identificando posibles errores.  Aplica el álgebra en su vida cotidiana favoreciendo su pensamiento crítico.

**Figura 5.2 Programa de la DGB bloque 5 de Matemáticas 1.**

Se observa que como aprendizaje esperado se encuentra que el alumno debe ser capaz de proponer un proceso de solución óptimo e identificar errores posibles a cometer, dicho de otra manera, se espera que el alumno desarrolle sentido estructural algebraico.

No obstante, aunque encontremos estos aprendizajes esperados en el programa de estudios, como ya se ha mencionado, diversas investigaciones apuntan a que el proceso de enseñanza-aprendizaje de operaciones algebraicas sigue una tendencia puramente operacional.

### 5.3 Análisis a priori

En esta fase se realizó el diseño de la secuencia, se proyectó que el alumno se enfrentara a una serie de ejercicios de factorización y productos notables, donde debía reconocer estructuras familiares, el reconocimiento de dichas estructuras le permitiría encontrar patrones que le ayudarían a facilitar el proceso de operación de los problemas, así como su resolución y notación en mínima expresión.

### 5.3.1 División general de las sesiones

En líneas generales la secuencia consistió en cuatro sesiones, donde se buscó que los alumnos reconocieran estructuras familiares, para subsecuentemente ser capaz de reconocer términos como una entidad singular y seleccionar manipulaciones apropiadas para hacer uso de esa estructura. En la tabla 5.1 podemos observar la división general de las sesiones con el tiempo asignado para cada una de ellas.

Sesión	Actividades	Tiempo asignado
1	Prueba inicial	45-60 min.
2	Clase 1 en GeoGebra	60 min.
3	Clase 2 en GeoGebra	60 min.
4	Fase de institucionalización y prueba final	60 min.

Tabla 5.1 División general de las sesiones.

### 5.3.2 Trabajo preliminar con los alumnos

La investigación se realizó con un grupo de alumnos de tercer semestre de preparatoria en el Colegio de Bachilleres de Querétaro. Antes de iniciar la secuencia didáctica, se tuvo la oportunidad de trabajar con los alumnos, en primera instancia se observaron algunas clases de la asignatura de física I, estableciendo contacto con los estudiantes. También se tuvo la oportunidad de trabajar con el grupo brindando asesorías de temas matemáticos utilizados en los temas de estudio de la asignatura de Física. Es así como desde antes de la secuencia de actividades se tuvo contacto con los estudiantes participantes en el estudio facilitando una buena comunicación y aplicación de actividades preliminares en GeoGebra Classroom con el fin de que los sujetos del estudio estuvieran familiarizados con la plataforma y la dinámica de trabajo a utilizar en las sesiones de experimentación.

Antes de las sesiones correspondientes a la secuencia de actividades se les solicitó a los alumnos el material necesario para realizar los ejercicios y se les

explicó cómo debían de ser entregados, sin olvidar que se les solicitó firma de carta de consentimiento.

### 5.3.3 Características y temas de las actividades

A continuación, se muestran las especificaciones de las estructuras algebraicas empleadas en los ejercicios de la secuencia didáctica.

- Factor común/Distributiva

$$k(a + b) = ka + kb$$

- Binomio cuadrado/Trinomio cuadrado perfecto

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Binomios conjugados/Diferencia de cuadrados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

- Producto de dos binomios con término común/Trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

- Binomio al cubo/Cubo perfecto de tetranomios

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Para la primera y cuarta sesión se aplicó una actividad que contenían todas las estructuras algebraicas anteriores, a manera de examen. Durante la segunda y tercera sesión se trabajó con la plataforma GeoGebra, en la segunda sesión se trataron los temas de factor común, binomio al cuadrado y binomios conjugados y en la tercera, productos de dos binomios con término común y binomio al cubo.

## 5.4 Experimentación

En esta fase se dio el contacto investigador/profesor/observador con la población de estudiantes objeto de la investigación. Se aplicó la ingeniería en los estudiantes durante las cuatro sesiones con la ayuda de hojas de trabajo y presentaciones electrónicas, en general, los alumnos mostraron una buena disposición de trabajo y cooperación en las actividades.

En este proceso se contaron con sesiones explicativas y participativas, donde los alumnos fueron adiestrados para la identificación de patrones en los diversos problemas de factorización y productos notables presentados, esto con el fin de lograr en ellos mismos el desarrollo de un sentido estructural.

La identificación de estructuras complejas y de posibles soluciones a las mismas en pro del desarrollo del sentido estructural se alentó con la utilización de diversos ejercicios los cuales orientaban al alumno a identificar los patrones y poder resolver los problemas a su mínima expresión.

### 5.4.1 Sesión 1

Para esta sesión se planeó mostrar a los estudiantes la hoja de ejercicios por Zoom para que los realizaran en hojas de máquina, se les explicó la importancia de que anotaran todos los cálculos y operaciones que y al finalizar el tiempo “escanearan” todas las hojas utilizadas con ayuda de una aplicación.

Los reactivos seleccionados se basaron en los utilizados por Muñoz (2015), en el pre-examen de su investigación. Estos ejercicios fueron seleccionados por sus características del desarrollo de sentido estructural y por el tiempo de 4 sesiones con el que se contaba para trabajar con los alumnos. Los reactivos se muestran a continuación:

- |                            |                  |
|----------------------------|------------------|
| 1. Desarrolla la expresión | $(x - 4)(x + 8)$ |
| $(x + 5)(x - 5)$           | 3. Factoriza     |
| 2. Desarrolla la expresión | $x^2 - 4$        |

- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| 4. Factoriza               | $(x + 4)^2 - (x + 8)^2$    |
| $12x^2 - 40xy + 16x$       | 8. Desarrolla la expresión |
| 5. Resuelve la ecuación    | $(x + 3)^3$                |
| $x^2 - 8x + 14 = -2$       | 9. Resuelve la ecuación    |
| 6. Desarrolla la expresión | $x^2 - 6x + 7 = -3$        |
| $(x + 5)^2$                | 10. Factoriza              |
| 7. Factoriza               | $6(5 - x) + 3x(5 - x)$     |

### 5.4.2 Ponderación de la actividad 1

Para ponderar la actividad de la sesión 1, se tomaron como referencia los descriptores propuestos por Ascencio y Eccius-Wellmann descritos en el capítulo 4. En la tabla 5.2 se puede observar la ponderación máxima que se puede alcanzar en cada reactivo. Siendo el máximo total de puntos a alcanzar de 79.

Nivel de sentido estructural por reactivo											
Reactivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
NSE	5	5	5	5	8	5	20	5	8	10	76

Tabla 5.2 Nivel de sentido estructural por reactivo de la sesión 1.

### 5.4.3 Toma de decisiones después de la sesión 1

Al finalizar la primera sesión se les preguntó a los estudiantes qué les había aparecido la actividad y el tiempo destinado para realizarla. También se observaron las respuestas obtenidas.

Los resultados obtenidos en la primera sesión fueron los esperados, se contemplaba como posible resultado que los estudiantes operaran la expresión sin mostrar sentido estructural. Cabe resaltar que aunque algunos de los alumnos mostraran indicios de un sentido estructural en el reconocimiento de expresiones,

ninguno logró una manipulación apropiada. Se concluyó que se utilizaría la clase de GeoGebra diseñada para la segunda sesión.

#### 5.4.4 Sesión 2

La sesión 2 correspondió a la primera clase en GeoGebra, esta sesión se dividió como se muestra en la tabla 5.3.

Actividad	Duración
Clase en GeoGebra Sesión 2	35 min
Reflexión grupal	10 min
Consenso grupal de listas finales	15 min
Tiempo total	60 min

Tabla 5.3 Actividades de la sesión 2

Durante toda la sesión se usó zoom para estar en contacto con los alumnos. Se inició con una clase en GeoGebra (Situación de acción) enfocada en los temas de:

- Factor común/Distributividad.
- Binomio cuadrado/Trinomio cuadrado perfecto.
- Binomios conjugados/Diferencia de cuadrados.

En el anexo B se muestran las actividades realizadas en GeoGebra Classroom. Esta clase se dividió en 4 secciones las cuales se describen a continuación:

- Expresiones equivalentes: Se mostraban preguntas de selección que contaban entre 3 y 4 opciones, se solicitaba a los alumnos que seleccionaran todas las expresiones algebraicas equivalentes de las opciones mostradas.
- Máquinas de operaciones: En esta sección se iniciaba con ejemplos de cómo llevar a cabo la actividad, se mostraba la imagen de la “máquina de operación”, donde se mostraban las variables iniciales y sus

respuestas correctas después de la operación indicada en la máquina, con el fin de que los alumnos pudieran realizar de forma correcta las operaciones que se solicitaban.

- Identificación de expresiones: En esta sección se mostraba una lista con expresiones cuidadosamente seleccionadas y se solicitaba a los alumnos que identificaran aquellas expresiones pertenecientes al mismo tipo, indicando el número de expresiones a seleccionar. En la segunda parte de la sección se pedía que describieran las características observadas para clasificar las expresiones algebraicas en una misma categoría. Se tuvo cuidado con el número de expresiones en distintas estructuras para no confundir a los alumnos.
- Relaciona las expresiones: En esta sección se mostraba dos columnas las cuales debían ser relacionadas por medio de una línea, la primer columna mostraba expresiones desarrolladas y la segunda factorizaciones que podían corresponder a las primeras, teniendo la segunda columna el doble de expresiones que la primera, con alternativas similares, buscando que las respuestas dadas por los alumnos realmente mostraran si los alumnos habían o no comprendido el tema.

Pasando los 35 minutos la clase se puso en pausa. Los alumnos fueron divididos en tres grupos para la reflexión grupal donde se pidió que compartieran su experiencia general de la clase, la selección individual de las expresiones algebraicas de la actividad y sus opiniones de clasificación de la parte 3, para esto se mostró la lista de expresiones en pantalla (Situación de formulación).

Se prosiguió pidiendo una lista final de la parte 3 con las expresiones algebraicas pertenecientes a la misma categoría y una descripción de sus características elaborada en consenso grupal. (Fase de validación).

### 5.4.5 Sesión 3

Para esta sesión se continuó con el trabajo en la GeoGebra Classroom. La actividad en GeoGebra Classroom contenía las mismas secciones y características de la presentada en la sesión 3. La división de esta sesión se muestra en la tabla 5.4.

Actividad	Duración
Clase en GeoGebra Sesión 2	35 min
Reflexión grupal	10 min
Consenso grupal de listas finales	15 min
Tiempo total	60 min

Tabla 5.4 Actividades de la sesión 3

Se buscó tener contacto con los alumnos durante toda la sesión de zoom y se comenzó la situación de acción, en la clase de GeoGebra enfocada en los temas de:

- Producto de dos binomios con término común/Trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$
- Binomio al cubo/Cubo perfecto de tetranomios

Pasando los 35 minutos la clase se puso en pausa. Los alumnos fueron divididos en tres grupos para la reflexión grupal donde se pidió que compartieran su experiencia general de la clase, la selección individual de expresiones algebraicas y sus opiniones de clasificación de la parte 3, mostrando nuevamente la lista de expresiones en pantalla (Situación de formulación).

Se terminó la sesión pidiendo que los grupos que realizaran un consenso seleccionando una lista final de la parte 3 con las expresiones algebraicas pertenecientes a la misma categoría y una descripción de sus características. (Fase de validación).

#### 5.4.6 Sesión 4

La sesión 4 se dividió en dos partes como se muestra en la tabla 5.5.

Actividad	Duración
Institucionalización	15 min.
Prueba final	45 min.
Tiempo total	60 min.

Tabla 5.5 Actividades de la sesión 4

De acuerdo a los resultados observados en las sesiones 3 y 4 y a las conclusiones a las que llegaron los alumnos en las fases de formulación y validación se llevó a cabo la institucionalización con ayuda de una presentación electrónica, mostrando la teoría de los cinco temas que comprendían las actividades.

Para la segunda parte de esta sesión, se buscó emular la sesión 1, aplicando una prueba final la cual fue mostrada a los estudiantes durante la video-llamada para que ellos pudieran anotar y resolver los reactivos, al finalizar el tiempo deberán “escanear” todas las hojas utilizadas con ayuda de una aplicación.

Se seleccionaron reactivos que fueran equivalentes en ponderación a los reactivos de la primera actividad, estos fueron:

1. Desarrolla la expresión  $(x + 9)(x - 9)$
2. Desarrolla la expresión  $(x + 3)(x + 7)$
3. Factoriza  $x^2 - 9$
4. Factoriza  $10x + 20xy + 5x^2$
5. Resuelve la ecuación  $x^2 + 6x + 8 = -1$
6. Desarrolla la expresión  $(x + 6)^2$
7. Factoriza  $(x - 3)^2 - (x + 5)^2$
8. Desarrolla la expresión  $(x + 7)^3$
9. Resuelve la ecuación  $x^2 - 2x - 6 = 9$

### 5.4.7 Ponderación de la actividad 4

Para ponderar la actividad de la sesión 1, se tomaron como referencia los descriptores propuestos por Ascencio y Eccius-Wellmann descritos en el capítulo 4. En la tabla 5.2 se puede observar la ponderación máxima que se puede alcanzar en cada reactivo. Siendo el máximo total de puntos a alcanzar de 76.

Nivel de sentido estructural por reactivo											
Reactivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
NSE	5	5	5	5	8	5	20	5	8	10	76

Tabla 5.6 Nivel de sentido estructural por reactivo de la sesión 4.

## 5.5 Análisis a posteriori

Los análisis a posteriori se basaron en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación.

Se realizó un análisis de carácter cualitativo y cuantitativo de los resultados obtenidos durante toda la secuencia y se evaluó la capacidad de los alumnos de cumplir con los criterios de solución de problemas expuestos anteriormente, en este proceso de análisis se pudo identificar el progreso de cada alumno de forma individual y también se estudió el progreso de todo el grupo de alumnos en cada uno de los problemas, recordando que cada uno de estos fue diseñado para evaluar distintas capacidades del alumno.

Los resultados obtenidos fueron graficados y organizados para su análisis mediante el uso de gráficas y tablas, las cuales fueron organizadas de forma que se pudiera apreciar de la mejor forma posible el desarrollo de los resultados y facilitara su entendimiento y medición.

En el siguiente capítulo se presentan los análisis y las observaciones realizadas de las actividades de enseñanza y las producciones de los estudiantes.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

## Capítulo 6. Análisis de las sesiones y resultados

Como ya se mencionó se llevaron a cabo 4 sesiones, cada una con una duración aproximada de una hora, donde se recolectaron diferentes tipos de datos. En este capítulo se exponen los resultados obtenidos.

### 6.1 Resultados y discusión

#### 6.1.1 Análisis de sesiones

La primera sesión, correspondiente a la prueba inicial, fue tomada con agrado por los alumnos, entre los resultados que podemos observar en sus formas de solución es el desarrollo mecánico de las expresiones e incluso, como se muestra en la figura 6.1 fórmulas de los productos notables, haciendo notorio la resolución puramente procedimental.

The image shows a student's handwritten work on a grid background. It is divided into three numbered sections and a separate box for formulas.

**1- Desarrolla la expresión**  
 $(x+5)(x-5)$   
 $x^2 - 5^2$   
 $x^2 - 25$

**2- Desarrolla la expresión**  
 $(x-4)(x+8) = x \cdot x + 8x - 4x - 4 \cdot 8$   
 $x^2 + 8x - 4x - 4 \cdot 8$   
 $x^2 + 8x - 4x - 32$   
 $x^2 + 4x - 32$

**3- Factorizar**  
 $x^2 - 4$   
 $x^2 - 2^2$   
 $(x-2)(x+2)$

**Formulas**  
 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$   
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$   
 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Figura 6.1 Respuesta a la actividad 1, alumno E1

Durante la segunda y tercera sesión se pudo observar como los estudiantes iban desarrollando un sentido estructural desde la fase individual, por el trabajo de reflexión y búsqueda de características en común, lo cual les permitió mejorar su

reconocimiento de estructuras. Los registros de las expresiones seleccionadas de forma individual indican que los participantes mostraron características distintas de sentido estructural, algunos no tenían problema en identificar un término compuesto como entidad, pero se les dificultaba reconocer diferentes estructuras para una sola expresión, mientras que otros participantes presentaban la situación contraria.

Durante la fase de validación los participantes sugirieron las expresiones algebraicas correctas como alternativas para la selección final, y describieron las características correspondientes al tipo de estructura trabajadas. Aunque en este estudio tampoco se llegó a un consenso totalmente correcto en esta fase.

### **Información obtenida de la fase de validación**

Al cuestionar a los alumnos sobre las características de la primera lista, identificaron las ecuaciones como binomios conjugados, ya que al resolver las ecuaciones y fijarse en los exponentes al multiplicarse por algún término era posible identificar una relación entre ellas; del mismo modo denotaron la importancia de fijarse en los signos y en la presencia de exponentes en las incógnitas.

Algunos de los comentarios compartidos durante esta fase en la sesión 2 al preguntar las características compartidas de las expresiones (correspondientes a binomios al cuadrado) fueron: “expresión de tres términos, se le conoce como trinomio cuadrado perfecto pero su origen está en un binomio al cuadrado”, “son el primer número al cuadrado más el 2 por el primero y el segundo más el doble del segundo”, “me guié por las fórmulas como estaban estructuradas y como estaban algunas resueltas, más que nada por las letras y por los signos” denotando la identificación de la estructura.

Algunos de los comentarios que hacían alusión al reconocimiento de binomios conjugados fueron: “La composición de la ecuación y por las incógnitas que lleve” y “Tardaría en analizarlos pero si los podría distinguir”.

Por otra parte en cuanto a los binomio con término común los alumnos expresaban: “yo me base en los signos en los paréntesis en las letras iguales y en los resultados porque unos si salían con los resultados iguales”, “los multiplicaba estilo nube que me enseñaron en la secundaria y es el más fácil para mí. Es una nubecita y en cada piquito donde se juntan para hacer las formas es como la x más dos dentro del paréntesis y al lado esta otro que viene también x más dos igual x por dos, dos por x y dos por dos”, “es como una expresión algebraica formada por un número más x cuadrada”

Realmente considero que esta forma de trabajar con los alumnos, mostrando ejercicios de forma individual y luego compartir su selección de forma grupal, los ayudo bastante a reflexionar en la estructura de las expresiones mostradas.

En lo que respecta al análisis de la sesión final, se pude mencionar que los alumnos se mostraron participativos y atentos en la fase de institucionalización y terminaron la prueba final en el lapso de tiempo correspondiente, (45 minutos).

3 Factoriza  
 $x^2 - 9$   
 $(x-3)(x+3)$

4 Factoriza  
 $10x + 20xy + 5x^2$   
 $5x(2 + 4y + x)$

5 Resuelve la ecuación  
 $x^2 + 6x + 9 = -1$   
 $x^2 + 6x + 9 + 1 = 0$   
 $x^2 + 6x + 10 = 0$   
 $(x+3)^2 = 0$   
 $x+3 = 0$   
 $x = -3$

6 Desarrolla la expresión  
 $(x+6)^2$   
 $x^2 + 12x + 36$

Figura 6.2 Respuesta a la actividad 4, alumno E11

### 6.1.2 Resultados finales

En esta sesión se describen las ponderaciones de los ejercicios contestados durante las sesiones. En la tabla 6.1 se puede observar el porcentaje de la puntuación grupal alcanzada en cada uno de los reactivos de la actividad 1 y 4.

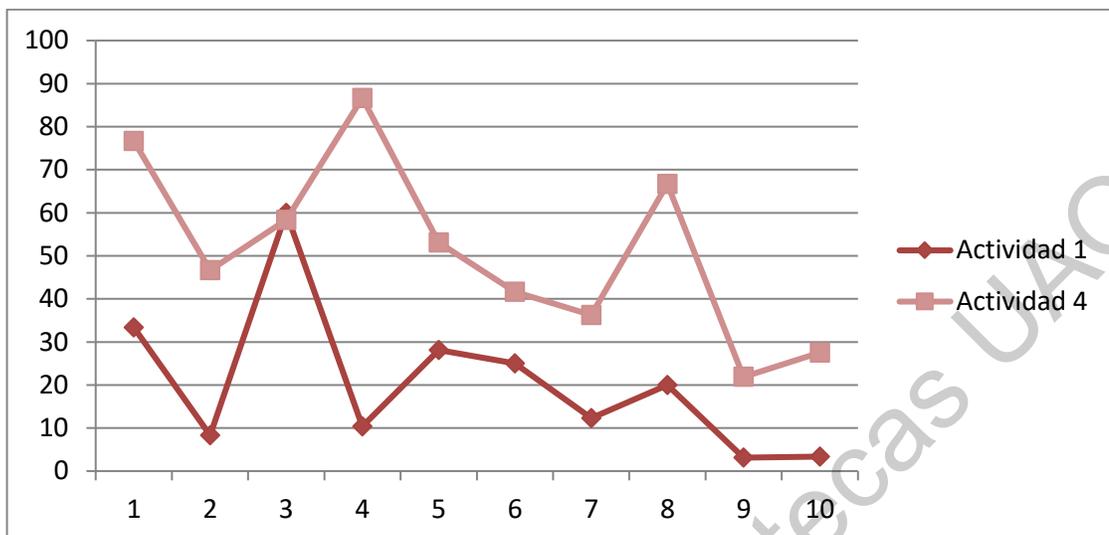
Reactivo	Act. 1	Act. 4
1	33.3	76.6
2	8.3	46.6
3	60	58.3
4	10.4	86.6
5	28.1	53.1
6	25	41.6
7	12.3	36.2
8	20	66.6
9	3.1	21.9
10	3.3	27.5

Tabla 6.1 Porcentajes de la puntuación grupal por reactivo en la actividad 1 y 4

Un punto de interés es el reactivo 3, el único donde se presentó un decremento, siendo este del 1.7%. En este reactivo se debía identificar una diferencia de cuadrados.

Otro de los puntos de interés es el reactivo 4, que corresponde a un ejercicio de factorización, donde se logró el mayor incremento de porcentaje alcanzado entre las actividades, mostrando una mejora del 76.2%.

En la Figura 6.1 se muestra la gráfica correspondiente a los porcentajes de las puntuaciones grupales en la prueba inicial y final que corresponde a la tabla anterior. Se puede observar fácilmente el cambio entre estas dos pruebas.



**Figura 6.3 Gráfica de Puntajes actividad 1 y 4**

Un aspecto notable durante las primeras 3 sesiones fue que varios alumnos poseían diferentes aptitudes que les ayudaban a entender mejor el proceso de resolución de los problemas, también evidenciamos que existían alumnos que, debido a sus escasos conocimientos previos, recurrían a las fórmulas mecánicas como una herramienta para la resolución de los problemas, muchos de ellos no se aventuraban a intentar buscar otras formas de resolución de los ejercicios asignados. Sin embargo al final de la secuencia pudimos reconocer que algunos alumnos dejaban de lado el sentido mecánico de la resolución de ejercicios y se aventuraban a responder los ejercicios de formas diferentes, probablemente alentados por la fase de institucionalización, logrando llegar al resultado por procedimientos distintos.

En la tabla 6.2 podemos observar el cambio de porcentaje alcanzado en los ejercicios entre la actividad 1 y 4 por cada uno de los alumnos.

<b>Alumno</b>	<b>Act. 1</b>	<b>Act. 4</b>	<b>Cambio en porcentaje obtenido</b>
E1	36.8	68.4	31.6
E2	0	26.3	26.3
E3	19.7	3.9	-15.8
E4	1.3	14.5	13.2
E5	22.4	25	2.6
E6	32.9	76.3	43.4
E7	17.1	38.1	21.1
E8	7.9	65.8	57.9
E9	27.6	30.3	2.6
E10	30.3	48.7	18.4
E11	6.6	17.1	10.5
E12	15.8	27.6	11.8

**Tabla 6.2 Cambio de porcentaje entre la actividad 1 y 4 por alumno**

Con los datos mostrados en esta tabla se concluye que el promedio de porcentaje de mejora fue del 18.6%. Un punto de interés es el alumno E3, el cual presentó un decremento del 15.8% en el porcentaje obtenido entre las actividades. Este alumno no se presentó a la sesión 2 ni 3, sin embargo, ya que participó en las sesiones 1 y 4 se tomó en cuenta para los análisis finales siendo esta una de las razones plausibles por la cual tuvo este retroceso, en sus respuestas podemos

observar que responde de forma operacional, haciendo uso de la fórmula general y procedimiento errados.

Sin embargo, los alumnos que lograron reconocer en los ejercicios asignados un patrón estructural que les permitiera realizar el ejercicio de una o varias formas diferentes fueron muy pocos. Lo cual implicaría que el método de resolución de problemas que se imparte en nuestro sistema educativo no pretende enseñar a los alumnos un sentido estructural, más bien se enfoca en desarrollar una serie de pasos, un sentido mecánico por el que siguiendo siempre la misma secuencia se llegue a un resultado más o menos aceptable. De modo que el no tener un enfoque claro en el desarrollo de sentido estructural en el alumno limita a los mismos a los métodos y formulas tradicionales, evitando que desarrollen sus capacidades en una forma más extendida y logren facilitar el proceso de resolución y comprensión de los problemas.

También llama la atención el caso de un alumno que en un primer momento poseían una capacidad limitada para la resolución de problemas, pues contaban con pocos o nulos conocimientos básicos para la realización de los ejercicios, este alumno se mostró restringido en la primera etapa por sus alternativas de resolución de problemas, un procedimiento mecánico de pasos para el desarrollo de las factorizaciones, utilizando de forma constante la fórmula general como principal método resolutivo a problemas, los cuales podían ser resueltos por un proceso de factorización más simple, este alumno en particular mostró un mejoría en la prueba final.

A continuación, se muestra la representación gráfica de los porcentajes de la puntuación total alcanzada por alumno en la actividad 1 y 4.

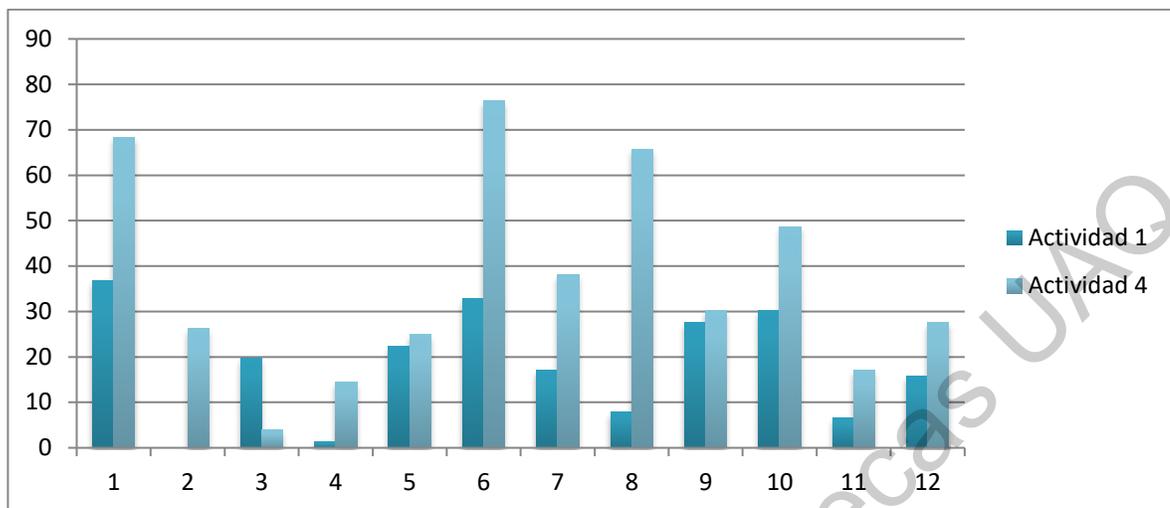


Figura 6.5 Gráfica de porcentajes de puntuación total alcanzada por alumno en la actividad 1 y 4

## 6.2 Errores comunes observados

Durante las sesiones, pudimos observar deficiencias y errores cometidos por la mayoría de los estudiantes, entre los que se encuentran:

- Desarrollando un binomio al cuadrado elevando al cuadrado ambos términos.
- Realizar la multiplicación de binomios sin percatarse de su estructura.
- Errores al factorizar por factor común.
- Indicar multiplicaciones con  $x$  al trabajar con una variable  $x$ .

## **Capítulo 7. Conclusiones y aportes de investigación.**

### **7.1 Conclusión**

En líneas generales, el trabajo de los alumnos apunta a confusión entre expresión y ecuación, dificultades para reconocer una misma expresión en distintas estructuras y reconocer un término compuesto como entidad.

En los resultados obtenidos en la primera prueba, se puede concluir que los participantes procedieron con un manejo operacional de las expresiones algebraicas, ya que el no llegar a una operación adecuada y las dificultades mostradas en dar alternativas de solución ponen de manifiesto la falta de sentido estructural, lo cual concuerda con las investigaciones previas analizadas. En lo que respecta a los alumnos que dieron indicios de un sentido estructural errado en el reconocimiento de expresiones, se puede considerar un indicador de la deficiencia de métodos de enseñanza o programas de estudio vigentes.

Aunque el sentido estructural como tal, se ha estudiado desde fines del siglo pasado, e incluso investigaciones que hacían alusión a él ya se habían realizado con mayor anterioridad, en el contexto actual aún queda mucho camino por recorrer en lo que respecta a su desarrollo en los alumnos. Considero que esta cuestión debería de tomar mayor importancia a nivel práctico escolar.

Con los resultados obtenidos, se evidencia que es posible y necesaria la creación de una secuencia que pueda ser aplicada en un aula de clases para generar el desarrollo de sentido estructural en alumnos de forma grupal, las herramientas utilizadas en esta investigación mostraron ser útiles y de interés por los alumnos, que recordemos se encontraban en una situación forzada de clases virtuales.

## **7.2 Limitaciones de la investigación**

Dentro de las limitaciones más notorias de la investigación se encuentra el hecho de que se realizó en noviembre del 2020, cuando las escuelas no tenían permitido tener clases presenciales, es por eso que se buscó adaptar las actividades a una clase virtual. La ausencia de los alumnos en el aula propició que el ambiente de comunicación entre la investigadora y el alumnado fuera difícil de establecer, las distintas estrategias que se utilizaron para que se diera esta comunicación se fueron solventando durante el proceso del desarrollo del estudio lo que condujo a un proceso de adaptación por parte de la investigadora y los alumnos.

Otra cuestión importante era que para que el estudio realizado ofreciera información óptima, el alumno debía presentar un perfil adecuado, contando con un conocimiento básico del álgebra, esto se considera como una limitante al trabajar con alumnos que no tenían los conocimientos base necesarios.

## **7.3 Problemas presentados durante la investigación**

Al realizar las pruebas de forma virtual se presentaron serias dificultades y contratiempos correspondientes a la virtualidad, muchos de los alumnos del grupo no entraban a clase de forma regular y esto se fue haciendo más notorio conforme pasaban las sesiones de clase. Además, muchos alumnos argumentaban dificultades con sus conexiones de internet, ausencia de datos, problemas familiares, problemas técnicos o simplemente no se presentaban a las clases. Probablemente esto se presentó debido a que para el alumno no representaba una clase evaluable por lo que no se vería reflejado en su acta de calificaciones, propiciando la decerción a las sesiones.

Si bien el contexto virtual permitió que los alumnos continuaran con sus clases, el medio virtual no permitió una correcta comunicación entre investigadora y alumno pues aparte de los problemas cotidianos en el circuito de la comunicación, el contexto virtual presenta nuevos retos que deben ser analizados e ídemamente solventados, dentro de esos retos encontramos los que sí podrían ser resueltos, o

por lo menos mejorados, como por ejemplo los problemas con micrófonos y cámara, sin embargo también se llegaron a presnetar otros problemas como cortes de luz o fallas de internet, situaciones que son ajenas a la investigadora y los estudiantes, en estos casos no había nada que se pudiera hacer al respecto.

También es pertinente reportar que, aunque se les pedía a los alumnos que contaran con el material necesario para las actividades con anticipación, como hojas de maquina blancas, muchos de ellos realizaban las actividades en hojas de cuaderno, o sí se les pedía que escanearan las hojas de trabajo producidas, en muchas ocasiones las mandaban solo por fotografía, dificultando así el proceso del análisis de datos.

Analizando la disponibilidad del alumnado pudimos observar que algunos estudiantes ni siquiera se tomaron enserio el experimento, por ejemplo muchos de los alumnos iscritos a la clase no entregaron las cartas de concentimiento informado, reduciendo el numero de participantes en la intervención, mientras que algunos otros alumnos simplemente no se presentaban a las sesiones desde el principio.

Al realizar la investigación en un espacio destinado a tutorías también afecto el interés de los alumnos en participar en las actividades, ya que no tenían la obligación de presentarse como hubiera pasado si las pruebas se hubieran llevado a cabo de forma presencial, sobre todo porque algunos alumnos consideraron que no necesitaban esas tutorías y prefirieron ocupar su tiempo en otra cosa.

#### **7.4 Líneas abiertas de investigación con posibilidades de continuación**

Es importante señalar que se puede continuar con estudios de profundidad en cuanto al desarrollo del sentido estructural en los alumnos con el paso del tiempo, en esta investigación se tuvo un periodo de tiempo muy corto para trabajar y no

fue posible analizar a profundidad el nivel de aprendizaje que obtuvieron los estudiantes.

Dada la importancia de que los alumnos puedan desarrollar un sentido estructural temprano en su trayecto académico, una de las líneas de investigación que queda abierta es encontrar métodos de desarrollo de sentido estructural algebraico desde los primeros años de formación básica.

Otra cuestión muy interesante que queda por analizar es la relación entre el sentido estructural algebraico que muestran los profesores y el desarrollo del sentido estructural que muestran los alumnos.

Asimismo se sugiere una línea de investigación desde una perspectiva neurológica, podría ser ampliar el conocimiento que se tiene acerca de los procesos neurológicos que intervienen en la formación del sentido estructural en los alumnos, este conocimiento permitirá desarrollar estrategias que permitan la mejora en los procesos de aprendizaje de los alumnos.

## Referencias

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 9, 281–307.
- Ascencio Gonzalez, R., & Eccius-Wellmann, C. (2019). Desarrollo del sentido estructural en alumnos universitarios mediante el uso de la Teoría de la Variación en el manejo de expresiones algebraicas racionales. *Educación Matemática*, 31(2), 161–194. <https://doi.org/10.24844/em3102.07>
- Avalos, L. (2014). *Adaptación de juegos para enseñar factorización y productos notables en educación media superior*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Bolaños-Barquero, M., & Segovia Álex, I. (2021). Sentido estructural de los estudiantes de primer curso universitario. *Uniciencia*, 35(1), 152–168. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.10>
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (1st ed.; D. Fregona, Ed.). Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, Vol. 1. Retrieved from <http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:Teor?a+de+las+situaciones+did?cticas#0>
- Cisternas, V. (2017). *Una propuesta de innovación para el tratamiento de productos notables según la teoría de situaciones didácticas*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Corbetta, M., & Shulman, G. L. (2002). Control of goal-directed and stimulus-driven attention in the brain. *Nature Reviews Neuroscience*, 3(3), 201–215. <https://doi.org/10.1038/nrn755>
- De Faria E. (2006). CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA 2006, Año 1, Número 2. *Cuadernos De Investigación Y Formación En Educación Matemática*, 2, 1–9.
- Flores Medina, N. D. C., Pastrana Jarquín, M. L., & Flores López, W. O. (2017). Estrategias de evaluación en la enseñanza de los algoritmos de factorización en noveno grado de Educación Secundaria. *Ciencia e Interculturalidad*, 20(1), 7–17. <https://doi.org/10.5377/rci.v20i1.4851>
- García, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. (2011). Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. 11(2), 10–14. <https://doi.org/10.16194/j.cnki.31-1059/g4.2011.07.016>
- Harel, G., & Soto, O. (2016). Structural Reasoning. *International Journal of*

- Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(1), 225–242.  
<https://doi.org/10.1007/s40753-016-0041-2>
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2010). Developing Katy ' S Algebraic Structure Sense. *CERME*, 6, 529–538.
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure Sense in High School Algebra: The Effect of Brackets. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 49–56. Retrieved from [https://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR025\\_Hoch.pdf](https://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR025_Hoch.pdf)
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 145–152.
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2007). Recognising an algebraic structure. *CERME*, 5, 436–445. Retrieved from [http://www.academia.edu/download/8539566/cerme5\\_group3\\_presentation\\_final.pdf](http://www.academia.edu/download/8539566/cerme5_group3_presentation_final.pdf)
- Jiménez, A., Parra, L., & Camacho, H. (2017). *Enseñanza y aprendizaje en resolución de problemas: productos notables Teaching and learning in problem solving: algebraic identity*.
- Jupri, A., & Sispiyati, R. (2017). Expert Strategies in Solving Algebraic Structure Sense Problems: The Case of Quadratic Equations. *Journal of Physics: Conference Series*, 812. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/755/1/011001>
- Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707–762). Information Age.
- Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173–196. <https://doi.org/10.1023/A:1003606308064>
- Lüken, M. M. (2012). *SCHOOL STARTERS ' EARLY STRUCTURE SENSE*. 7, 41–50.
- Macías, J. (2016). *Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos*. Universidad Complutense de Madrid.
- Martos Michaca, E. M. (2008). *Valores prácticos y epistemológicos de los productos notables en profesores de matemáticas*. Instituto Politécnico Nacional.
- Méndez, T., & Cruz, L. (2008). Dificultades en la práctica de productos notables y

- factorización. *Revista Del Instituto de Matemática y Física*, 15, 59–69.
- Muñoz, V. (2015). *Herramienta ad hoc para el Sentido de la Estructura en Álgebra*. Instituto Politécnico Nacional.
- Saldarriaga, F., Villegas, L., & Franco, D. (2016). *Génesis instrumental en alumnos del grado noveno con conceptos relativos a la factorización Génesis instrumental en alumnos del grado noveno con conceptos relativos a la factorización*.
- Salinas, A., Méndez, L., & Cárdenas, Ma. (2018). HABILIDADES COGNITIVAS Y MEDIA SUPERIOR COGNITIVE AND METACOGNITIVE ABILITIES TO FACILITATE THE DEVELOPMENT OF COMPETENCES IN. *Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades, SOCIOTAM, XXVII*, 159–175.
- Serna, D. (2017). *Implementación de una estrategia didáctica mediada por las TIC para el fortalecimiento del concepto de productos notables en estudiantes del grado octavo de la institución educativa Gabriela Gómez Carvajal*. Universidad Nacional de Colombia.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Algebra Elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.
- Vega-Castro, D. (2010). Sentido estructural manifestado por alumnos de 1.º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables. *Universidad de Granada*, 126.
- Vega-Castro, D. (2013). *Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas*. Universidad de Granada.
- Wagner Osorio, G., Marina Vásquez Giraldo, A., Hoyos Salcedo, E. A., & Gutiérrez Zuluaga, H. (2014). El Álgebra Geométrica como mediadora en la Enseñanza de la Factorización y los Productos Notables. *Revista de Investigaciones - Universidad Del Quindío*, 26(1), 137–142.

## Anexos

### Anexo A: Ejercicios de la prueba inicial y final

#### Prueba inicial

Resuelve los ejercicios mostrando todos los cálculos y operaciones que hiciste para llegar al resultado. Al final entrega todas las hojas que usaste anotando tu nombre en cada una.

11. Desarrolla la expresión  
 $(x + 5)(x - 5)$

12. Desarrolla la expresión  
 $(x - 4)(x + 8)$

13. Factoriza  
 $x^2 - 4$

14. Factoriza  
 $12x^2 - 40xy + 16x$

15. Resuelve la ecuación  
 $x^2 - 8x + 14 = -2$

16. Desarrolla la expresión  
 $(x + 5)^2$

17. Factoriza  
 $(x + 4)^2 - (x + 8)^2$

18. Desarrolla la expresión  
 $(x + 3)^3$

19. Resuelve la ecuación  
 $x^2 - 6x + 7 = -3$

20. Factoriza  
 $6(5 - x) + 3x(5 - x)$

## Prueba final

Resuelve los ejercicios mostrando todos los cálculos y operaciones que hiciste para llegar al resultado. Al final entrega todas las hojas que usaste anotando tu nombre en cada una.

11. Desarrolla la expresión

$$(x + 9)(x - 9)$$

12. Desarrolla la expresión

$$(x + 3)(x + 7)$$

13. Factoriza

$$x^2 - 9$$

14. Factoriza

$$10x + 20xy + 5x^2$$

15. Resuelve la ecuación

$$x^2 + 6x + 8 = -1$$

16. Desarrolla la expresión

$$(x + 6)^2$$

17. Factoriza

$$(x - 3)^2 - (x + 5)^2$$

18. Desarrolla la expresión

$$(x + 7)^3$$

19. Resuelve la ecuación

$$x^2 - 2x - 6 = 9$$

20. Factoriza

$$3(4 - x) + 2x(4 - x)$$

## Anexo B: Actividades en GeoGebra

### Sesión 2

Autor: Alba Estrella Vázquez

Primera parte - Expresiones equivalentes

Selecciona todas las expresiones algebraicas equivalentes.

Marca todas las que correspondan

- $(x+4)^2$
- $(x+4)(x-4)$
- $(x+4)(x+4)$
- $x^2+8x+16$

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Selecciona todas las expresiones algebraicas equivalentes

Marca todas las que correspondan

- $10x^2+5xy$
- $10x(x+2y)$
- $5x(2x+y)$

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Selecciona todas las expresiones algebraicas equivalentes.

Marca todas las que correspondan

- $x^2-4$
- $x^2-2x+2x-4$
- $(x-2)^2$
- $(x+2)(x-2)$

✓ REVISAR TU RESPUESTA

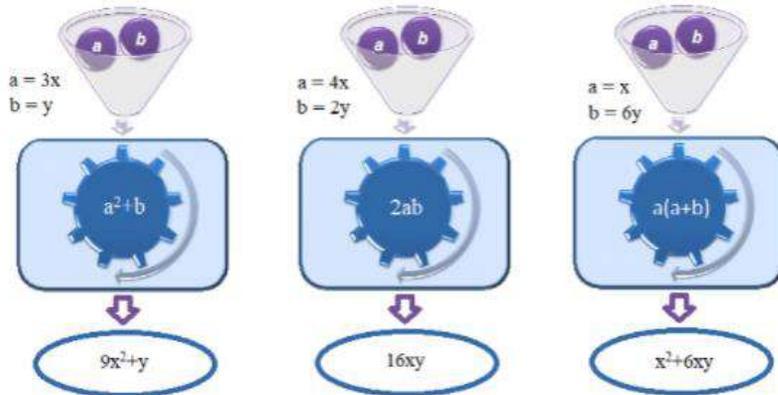
Selecciona todas las expresiones algebraicas equivalentes.

Marca todas las que correspondan

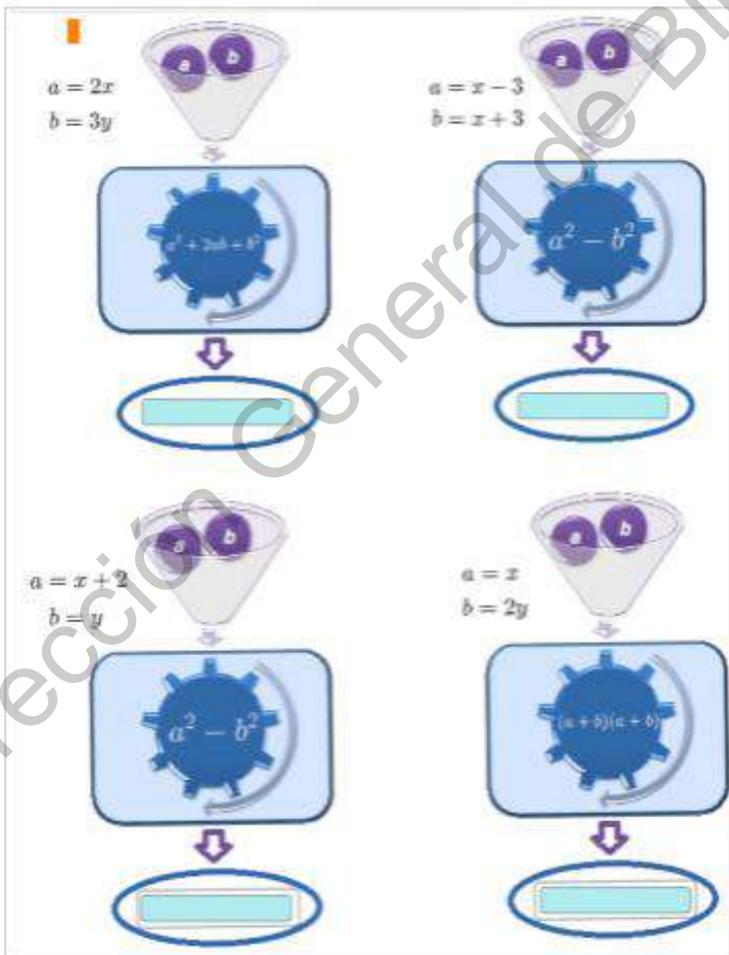
- $n^5+25n^4-10n^3$
- $5n^3(n^2+5n-2)$
- $n^3(25n-10n^2)$
- $n^3(n^2+5n-2)$

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Segunda parte - Máquinas de operación



En esta actividad hay varias máquinas de operación fija, se indica el valor de  $a$  y  $b$  y se realiza la operación indicada con esos valores, al final la máquina debe dar el resultado de la operación como se muestra en los ejemplos de arriba. En las siguientes máquinas anota el resultado de la operación en el recuadro azul. \*Desarrolla las multiplicaciones indicadas\*



Tercera parte - Identificación de expresiones

De la siguiente lista, identifica las diez expresiones algebraicas pertenecientes al mismo tipo.

—Marca todas las que correspondan—

- $x^2 - 16$
- $w^2 - 100$
- $y^2 - 25$
- $x^2 + 16$
- $(x - 4)(x + 4)$
- $a^2 - 9$
- $(y + 3)(y - 1)$
- $(a + 5)(a - 5)$
- $49 - y^2$
- $(x + 2)(x + 2)$
- $(a + 2)^2 - 6^2$
- $z - 9$
- $(x - 3)^2 - (x + 3)^2$
- $x^2 - 17$
- $(n + 4)^2 - (m - 3)^2$

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Describe las características que observaste para seleccionar las expresiones algebraicas en un mismo tipo.

Ingresar aquí tu respuesta...

De la siguiente lista, identifica ocho expresiones algebraicas pertenecientes al mismo tipo.

—Marca todas las que correspondan—

- $(x + 2)^2$
- $(x + 2)(x + 2)$
- $(x + a)(x - 4)$
- $(x - 5)^2$
- $x^2 + 4x + 4$
- $(x - 4)(x - 4)$
- $x^2 - y^2$
- $x^2 - 10x + 25$
- $x^2 - 2x - 30$
- $(x + a)^2$
- $x^2 + 2ax + a^2$

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Describe las características que observaste para la selección de expresiones algebraicas correspondiente al mismo tipo.

Ingresar aquí tu respuesta...

Cuarta parte - Relaciona las expresiones.

Relaciona las expresiones con su factorización.

$5a^2 - 15ab - 10ac$ ●	● $5a(a - 3b - 2c)$
$b^2 - 12b + 36$ ●	● $2x(3x - 15y + 6y)$
$6x^2y - 30xy^2 + 12x^2y^2$ ●	● $(3x + 4y)^2$
$9x^2 - 16y^2$ ●	● $6xy(x - 5y + 2xy)$
	● $(b - 6)^2$
	● $(b - 6)(b + 6)$
	● $(3x + 4y)(3x - 4y)$

### Sesión 3

Autor: Alba Estrella Vázquez

Primera parte - Expresiones equivalentes

Selecciona todas las expresiones algebraicas equivalentes.

Marca todas las que correspondan

- $(n + 2)^3$
- $(n + 2)(n + 2)(n + 2)$
- $n^3 + 12n^2 + 42n + 7$
- $n^3 + 6n^2 + 12n + 8$

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Selecciona todas las expresiones algebraicas equivalentes.

Marca todas las que correspondan

- $2a^2 + 22a + 11$
- $(2a + 5)(2a + 6)$
- $4a^2 + 22a + 30$
- $4a^2 + 12a + 10a + 30$

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Selecciona todas las expresiones algebraicas equivalentes.

Marca todas las que correspondan

- $(2x + 3)(2x - 3)(2x + 3)$
- $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
- $(2x + 3)^3$
- $8x^3 + 36x^2 + 54x + 23$

✓ REVISAR TU RESPUESTA

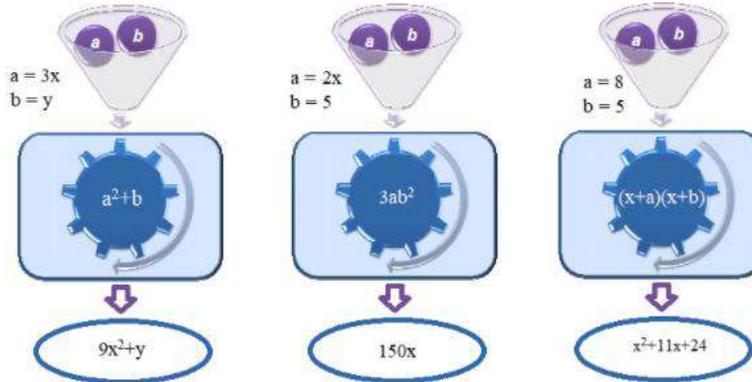
Selecciona todas las expresiones algebraicas equivalentes.

Marca todas las que correspondan

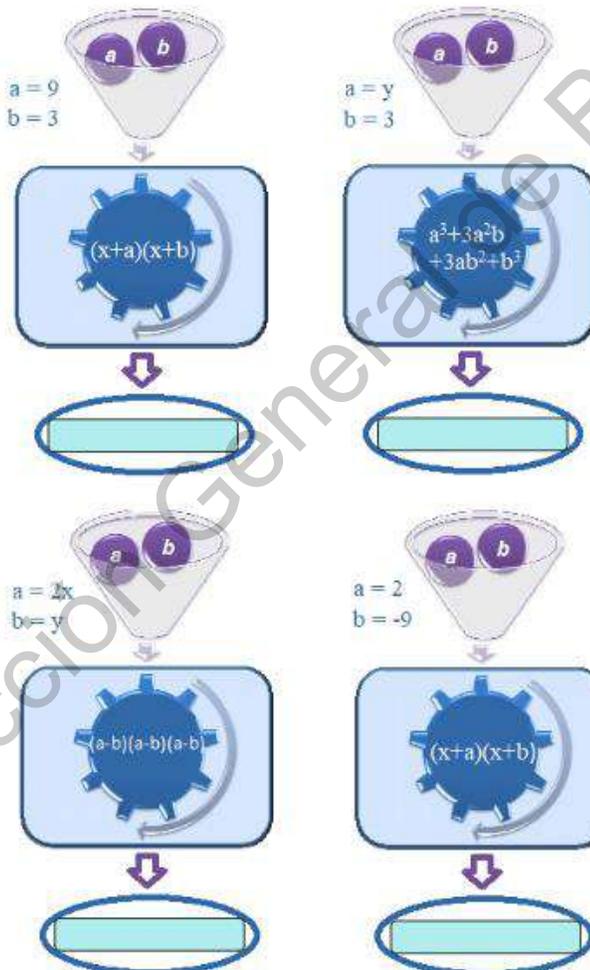
- $(x + 3)(x + 7)$
- $x^2 + 10x + 21$
- $x^2 + 20x + 21$
- $x^2 + 3x + 7x + 21$

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Segunda parte - Máquinas de operación



En esta actividad hay varias máquinas de operación fija, se indica el valor de  $a$  y  $b$  y se realiza la operación indicada con esos valores, al final la máquina debe dar el resultado de la operación como se muestra en los ejemplos de arriba. En las siguientes máquinas anota el resultado de la operación en el recuadro azul. "Desarrolla las multiplicaciones indicadas"



### Tercera parte - Identificación de expresiones

De la siguiente lista, identifica las siete expresiones algebraicas pertenecientes al mismo tipo.

Marca todas las que correspondan

- $(x + 8)(x + 3)$
- $(y + 9)(y - 3)$
- $(x + 2)^2$
- $(b - 1)(b - 7)$
- $(a - 6)(a + 6)$
- $(a - 9)(a + 5)$
- $(x - 3)(x - 5)$
- $(am^2 + 20)(am^2 - 19)$
- $(x + 8)(x + 8)$
- $(w + 2n)(w + 3z)$

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Describe las características que observaste para seleccionar las expresiones algebraicas en un mismo tipo.

Ingresar aquí tu respuesta...

De la siguiente lista, identifica las diez expresiones algebraicas pertenecientes al mismo tipo.

Marca todas las que correspondan

- $(3x - 5)^3$
- $(1 + 2y)(1 + 2y)(1 + 2y)$
- $27x^3 - 135x^2 + 225x - 125$
- $(n + 2)(n + 3)(n + 4)$
- $(y + 3)^3$
- $y^3 + 9y^2 + 27y + 27$
- $(y + 9)(y - 3)$
- $n^3 + 6n^2 + 12n + 8$
- $(1 - a)^2$
- $(n + 4)(n + 4)(n + 4)$
- $(3 - 4y)^3$
- $25a^2 - 20ab + 4b^2$
- $(x + 8)^3$
- $(1 + a)(1 - a)(1 + a)$
- $(x + 2y)^3$

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Describe las características que observaste para seleccionar las expresiones algebraicas en un mismo tipo.

Ingresar aquí tu respuesta...

Cuarta parte - Relaciona las expresiones.

Relaciona las expresiones con su factorización.

$27n^3 + 135n^2 + 225n + 125$  ●

$b^2 - 10b + 24$  ●

$8n^3 - 12n^2 + 6n - 1$  ●

$9a^2 + 27a + 14$  ●

- $(3a + 7)(3a + 2)$
- $(2n - 1)^3$
- $(b - 6)(b - 4)$
- $(2n + 1)^3$
- $(3a + 7)(3a - 2)$
- $(b - 6)^2$
- $(3n + 5)^3$
- $(2n + 5)^3$