



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

Facultad de Ingeniería

Maestría en Ciencias (Ing. Matemática)

TESIS

**“Evidencias del comportamiento fractal  
en el PIB, IPC y tipo de cambio en  
México para el análisis de crisis  
financieras”**

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de  
Maestría en Ciencias (Ing. Matemática)

**Presenta:**

Lic. Samuel Joseph Lizarazu Cerón

**Dirigido por:**

Dr. Víctor Antonio Aguilar Arteaga

Centro Universitario Querétaro, Qro.

Marzo 2021 México



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

Facultad de Ingeniería

Maestría en Ciencias (Ing. Matemática)

“Evidencias del comportamiento fractal en el PIB, IPC y tipo de cambio en México para el análisis de crisis financieras”

Opción de titulación

**Tesis**

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de  
Maestría en Ciencias (Ing. Matemática)

**Presenta:**

Lic. Samuel Joseph Lizarazu Cerón

Dirigido por:

Dr. Víctor Antonio Aguilar Arteaga

Dr. Víctor Antonio Arteaga Aguilar  
Presidente

Mtro. Iván González García  
Secretario

Dra. Esperanza Trenado Sánchez  
Vocal

Dr. Samuel Estelas Arias  
Suplente

Mtro. Juan Pablo Ramírez Vázquez  
Suplente

Centro Universitario Querétaro, Qro.  
Marzo 2021 México

## Dedicatorias

A mi dios Jehová, por permitirme vivir hasta el día de hoy con todas las bendiciones que me ha regalado a lo largo de mi vida, estando siempre agradecido a él, Salmos 116:17 “te ofreceré el sacrificio de agradecimiento; invocaré el nombre de Jehová”.

A mi esposa Mayra por apoyarme durante esta etapa y siendo mi motivación constante.

A mis hijos Natalie y Jeremy que han sido el motor de mi vida y me permiten seguir creciendo para ellos.

A mis padres Eddy y Beatriz que durante toda la vida me han guiado y apoyado incondicionalmente en todas mis decisiones y en mi desarrollo académico, personal y espiritual.

## Agradecimiento

Quiero agradecer a mi Dios Jehová por darme la vida y permitirme cumplir una de mis metas académicas.

En agradecimiento especial para CONACyT debido a su financiamiento y la beca otorgada con CVU: 95730 así como su apoyo de manera incondicional a mis estudios y el desarrollo académico durante la maestría los cuales permitieron que culminara en la elaboración de esta investigación y en un crecimiento personal.

También quiero agradecer a la UAQ, la casa máxima de estudios de Querétaro por aceptarme en el programa y permitir mi desarrollo académico desde la licenciatura hasta la maestría, en donde me brindaron el apoyo necesario para poder terminar con éxito esta etapa de mi vida.

A mis maestros, asesor de tesis y amigo Víctor que con sus conocimientos lograron transmitirme una educación de calidad, así mismo a mis sinodales que lograron retroalimentarme de manera positiva para mejorar de forma continua el trabajo de investigación, además del coordinador de la carrera Roberto que siempre estuvo dispuesto apoyarme y ayudarme en cualquier aspecto académico.

Además, quiero agradecer a mi familia por estar conmigo apoyándome en el desarrollo constante de mis aptitudes académicas y laborales.

## Índice

Dedicatorias	i
Agradecimiento	ii
Índice de tablas	vi
Índice de figuras	vii
RESUMEN	1
ABSTRACT	2
<b>Capítulo 1 PRELIMINARES</b>	<b>3</b>
Descripción del problema	4
Justificación	5
Antecedentes	6
Hipótesis	10
Objetivos generales	10
Objetivos específicos	11
<b>Capítulo 2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA</b>	<b>12</b>
Teoría del caos	12
Atractores extraños	14
Atractor de Lorenz	15
Atractor de Hénon	15
Atractor de Rössler	16
La geometría fractal	19
Propiedades de objetos fractales	20
Dimensión fractal	21
Tipos de fractal: lineales y no lineales	22
Construcción de fractales	23

Fractales clásicos	24
<b>Series de tiempo</b>	26
Movimiento Browniano	27
Movimiento browniano fraccionario	27
<b>Series de tiempo financieras</b>	29
PIB	29
IPC	30
Tipo de cambio	31
<b>Capítulo 3 ANÁLISIS ESTADÍSTICO</b>	32
Datos analizados	32
Categorización	32
Prueba de normalidad	33
Sesgo	33
Curtosis	34
Pruebas de normalidad para el PIB	34
Prueba de normalidad para IPC	36
Prueba de normalidad para el tipo de cambio peso - dólar	37
<b>Capítulo 4 Resultado del análisis fractal</b>	39
Exponente de Hurst	39
Técnicas de estimación Rango Reescalado para el coeficiente de Hurst	40
Metodología Rango Reescalado (R/S)	40
<b>Resultados del rango reescalado</b>	41
Resultados para el período I	42
Resultados para el periodo II	43
Resultados para el periodo III	44
Resultados para el periodo IV	45

Resultados para el periodo V	47
Resultados para el periodo VI	48
Resultados generales	49
<b>CONCLUSIONES</b>	51
<b>Referencias</b>	54

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

## Índice de tablas

Tabla 1 Periodos de estudio .....	32
Tabla 2 Gráficas de pruebas de normalidad hecha en Minitab .....	34
Tabla 3 Resultados prueba de normalidad para el PIB.....	35
Tabla 4 Gráficas de prueba de normalidad hecha en Minitab.....	36
Tabla 5 Resultados prueba de normalidad del IPC.....	37
Tabla 6 Gráficas de prueba de normalidad hecha en Minitab.....	37
Tabla 7: Resultados prueba de normalidad para el tipo de cambio peso – dólar.....	38
Tabla 12: Gráficas del cálculo del coeficiente de Hurst para el periodo V .....	47
Tabla 14: Resultado metodología rengo reescalado para el tipo de cambio .....	49



## Índice de figuras

Ilustración 1: Teoría de las ondas .....	10
Ilustración 2: Atractor de Lorenz .....	15
Ilustración 3: Atractor de Hénon.....	16
Ilustración 4: Atractor de Rössler .....	16
Ilustración 5: Ecuación logística.....	19
Ilustración: 6 Curva de Koch.....	23
Ilustración 7 Construcción de fractales .....	23
Ilustración: 8 Polvo de Cantor .....	24
Ilustración 9: Conjunto de Julia .....	25
Ilustración 10: Conjunto de Mandelbrot .....	26
Ilustración 11 Serie de tiempo del PIB 1994 - 2020.....	30
Ilustración 12 Serie de tiempo IPC de 1994 - 2020 (Datos públicos de Banxico).....	31
Ilustración 13 Serie de tiempo de cambio Peso - Dólar de 1994 - 2020 Fuente: Datos públicos de Banxico - Elaboración propia con Software Benoit 1.3.....	31
Ilustración 14 Ciclo de comportamiento de series de tiempo .....	52

## RESUMEN

La geometría fractal se utiliza desde hace algunos años para estudiar patrones y comportamientos caóticos en terremotos, huracanes, formaciones de costas, etc. Por tanto, esta investigación estudia la justificación teórica desde el punto de vista matemático de un fractal, aplicado a las series financieras: PIB, IPC y tipo cambio, utilizando teoría del caos y series de tiempo, con el objetivo del análisis de crisis financieras.

Esta investigación encontró que las series de tiempo pueden presentar un comportamiento caótico demostrado a lo largo de los años por las crisis financieras. Sin embargo, los modelos básicos de la teoría económica y financiera como la hipótesis de mercados eficientes sostienen que las series financieras siguen un movimiento browniano aleatorio, la cual se sigue usando hasta el día de hoy para estimaciones y predicciones del mercado.

Para evidenciar el comportamiento fractal se hace una categorización mediante sexenios presidenciales del año 1996 al 2020, durante los cuales se encuentra evidencia en favor de un movimiento browniano fraccional, lo cual permite usar la geometría fractal para el análisis de las series de datos como lo son el PIB, IPC y tipo de cambio en México.

Para evidenciar el comportamiento fractal esta investigación utiliza el coeficiente de Hurst y pruebas de normalidad que permiten observar los ciclos y patrones en el comportamiento económico de dichas series financieras.

**Palabras clave:** Comportamiento fractal, series de tiempo, coeficiente de Hurst, movimiento browniano fraccional.

## ABSTRACT

For some years, fractal geometry has been used to study chaotic patterns and behaviors in earthquakes, hurricanes, coastal formations, etc. Therefore, this research studies the theoretical justification from the mathematical point of view of a fractal, applied to the financial series: GDP, CPI, and exchange rate, using chaos theory and time series, with the objective of analyzing financial crises.

This research found that time series can present a chaotic behavior demonstrated over the years by financial crises. However, basic models of economic and financial theory such as the efficient markets hypothesis hold that financial series follows a random Brownian movement, which is still used to this day for market estimates and predictions.

To demonstrate fractal behavior, a categorization is made through presidential six-year terms from 1996 to 2020, during which there is evidence in favor of a fractional Brownian movement, which allows the use of fractal geometry for the analysis of data series such as GDP, CPI, and exchange rate in Mexico.

To demonstrate the fractal behavior, this research uses the Hurst coefficient and normality tests that allow observing the cycles and patterns in these financial series' economic behavior.

**Keywords:** Fractal behavior, time series, Hurst coefficient, fractional Brownian motion.

## Capítulo 1 PRELIMINARES

### Introducción

El comportamiento económico es objeto de estudio desde diversos ángulos científicos. En el ámbito financiero, las decisiones que toman las bolsas de valores, entidades financieras y el propio estado en su política monetaria requieren modelos económico-matemáticos que estén ajustados al comportamiento real de los mercados financieros, por tal motivo es de vital importancia tener un modelo capaz de imitar la volatilidad y caos que existe en los mercados.

Los modelos económicos encargados de estudiar los activos financieros y series de tiempo financieras proponen seguir la hipótesis de mercados eficientes, la cual afirma que la evolución de los precios sigue un movimiento browniano aleatorio, matemáticamente esto se explica porque las series de tiempo financieras están constituidas por tener independencia estadística, estacionariedad y síntomas de una distribución normal, además de algunas presunciones, como la racionalidad de los individuos.

Dicha hipótesis aún se usa en la actualidad para el estudio de mercados financieros, sin embargo, al no tomar en cuenta la volatilidad y caos que existen en los mercados financieros no se han previsto innumerables crisis financieras desde la Gran Depresión en 1929 hasta la Gran Recesión en el 2008, por tanto, varios autores reconocidos, entre ellos Mandelbrot, Simón, Kahneman, Stiglitz y Grossman, reconocen desde su perspectiva científica varias fallas en los supuestos propuestos por dicha hipótesis. (Zatarain, 2017)

Al estudiar las series de tiempo financieras desde el punto de vista matemático podemos encontrar el problema central de esta investigación, la que resulta de proponer un estudio alternativo a las series de tiempo financieras,

utilizando la geometría fractal propuesta por Mandelbrot, la cual toma en cuenta el caos y así poder analizar las crisis financieras que han surgido a lo largo de los años.

Esta investigación permite dar un enfoque alternativo al estudio de series de tiempo financieras que pueda ser tomado en cuenta en la creación de políticas monetarias que puedan ayudar a estabilizar las crisis financieras y por ende minimizar las consecuencias de estas en la sociedad como es el desempleo, pobreza, inflación, recesiones económicas, estancamiento económico, etc.

### Descripción del problema

Las crisis financieras que han surgido a lo largo de la historia muestran con empeño que estamos lejos de tener una comprensión extensa del funcionamiento de los mercados, al contrario, nuestra comprensión es limitada, por lo que es difícil estudiar el comportamiento de los precios y la evolución de los riesgos al momento de invertir. En la crisis del 2008 se observó la delicada línea al momento de ser un inversionista y de usar una estrategia o herramienta que asegure un buen rendimiento o tan siquiera un amplio panorama del comportamiento de la inversión.

Los mercados financieros suelen estudiarse por medio de la hipótesis de mercados eficientes, sin embargo, a pesar de que la hipótesis de mercados eficientes ha tenido grandes ganancias, también ha sido la causante de grandes pérdidas de dinero a nivel mundial, dando lugar a innumerables crisis financieras y pérdidas de inversión. Por lo cual es importante tener una alternativa para estudiar a los mercados financieros, tomando en cuenta las necesidades actuales, donde la volatilidad de los precios de acciones y divisas es alta.

En nuestro caso el PIB, IPC y tipo de cambio son indicadores económico-financieros que aportan información puntual sobre el comportamiento económico

de un país, por lo que esta investigación aborda la utilidad de analizar dichos indicadores para la prevención de crisis financieras.

### Justificación

La complejidad de los mercados financieros debe estudiarse desde todas las perspectivas posibles, a lo largo de la historia los mercados financieros se estudiaron por medio de la hipótesis de mercados eficientes, por lo que tener una alternativa puede favorecer a un mayor entendimiento y una acertada toma de decisiones.

El PIB, IPC y tipo de cambio han servido para evaluar las políticas monetarias, económicas y sociales, las cuales reflejan las condiciones de inversión y ahorro en nuestro país. Además, estas variables económicas repercuten directamente en la inflación económica de un país y en gran medida en las crisis financieras.

Sin embargo, para que los mercados financieros puedan predecirse debe cumplirse que: “exista una relación entre las variables” y “que exista un patrón de comportamiento”, la hipótesis de mercados eficientes respalda que los datos siguen una distribución normal e independencia de los datos entre sí, descartando la posibilidad de memoria estadística y procesos no estacionarios, por tanto, sería imposible predecir el comportamiento de un activo financiero, si seguimos dicha hipótesis.

Sin embargo, como explica (Batlle, 2008), la hipótesis del mercado fractal sostiene que los modelos fractales pueden enfrentar las dificultades del comportamiento económico por medio de una dependencia estadística entre los datos y un patrón fractal en sus trayectorias, haciendo posible predecir cambios y analizar comportamientos en una serie de tiempo con comportamiento fractal.

## Antecedentes

El comportamiento económico de un país se deriva de las técnicas económicas que los agentes principales de este ejecutan sobre sus activos financieros, en un caso particular las bolsas de valores son el pilar de las actividades económicas dentro de un mercado financiero, donde el mismo mercado proporciona un mecanismo para que el inversionista venda o compre un activo financiero reduciendo el costo de las transacciones y dando liquidez al mercado

(Fabozzi, F., Modigliani, F., & Ferri, M.G., 1996)

El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) es el principal indicador bursátil de la Bolsa Mexicana de Valores, el cual expresa el rendimiento del mercado accionario, en función de las variaciones de una muestra balanceada, ponderada y representativa del conjunto de acciones cotizadas de la Bolsa.

Por su parte el tipo de cambio es un indicador económico que tiene especial importancia en la formulación de políticas macroeconómicas. Además de ser de gran interés en el mercado cambiario (Caputo, R., Nuñez, M. & Valdés, R, 2017).

Por tanto, es de interés conocer la evidencia y la teoría que estudia a los mercados financieros, para facilitar la toma de decisiones de inversionistas, instituciones y gobiernos. De esta manera se puede realizar un pronóstico acertado mediante el análisis de datos (estadística descriptiva) y pruebas tradicionales (econometría financiera) que permitan recolectar información relevante.

Como lo explica (Mandelbrot B. , 1997), el primer antecedente teórico es la “hipótesis del mercado eficiente”, la cual se genera a partir del estudio de Louis Bachelier en el año 1900, dónde estudió el comportamiento de los precios en las acciones de la bolsa de Paris y propone considerar un patrón aleatorio en la

evolución de los precios explicado por el movimiento browniano, en el cual observo que los precios tienen independencia estadística, estacionariedad estadística y siguen una distribución normal. Además, Bachelier determinó la probabilidad de los cambios de los precios, escribiendo la actual conocida ecuación de Chapman-Kolmogorov. Como principal hipótesis el mercado eficiente afirma que la gente es racional y su único objetivo es enriquecerse, en otras palabras “cada que tomen una decisión sobre una cartera, harán una elección racional donde le permita obtener la máxima riqueza con el menor riesgo”.

El interés en la modelación de los precios del mercado bursátil fue creciendo entre matemáticos reconocidos, en 1970, Eugene Fama afirmó que los mercados varían en función a la información que se tiene, por lo que encontrar nueva información significaría mejores rendimientos. Siguiendo la visión neoclásica la hipótesis se basa en una serie de suposiciones que han de cumplirse: los agentes poseen expectativas racionales, la media de la población tiene un comportamiento acertado, a excepción de algunos individuos independientes, además, los agentes van a actuar ante la aparición de nueva información relevante, actualizando apropiadamente sus expectativas, lo que provoca que ante nueva información algunos inversores puedan sobre reaccionar y otros no. Además, Fama generó el modelo CAPM el cual determina el rendimiento esperado de un activo a través de la relación entre el riesgo y el rendimiento. (Fama E. , 1970)

Sin embargo aunque los supuestos de la visión neoclásica han facilitado al entendimiento y simplificación a los problemas de la ciencia económica, también debemos reconocer que no siempre los agentes tendrán toda la información ni la capacidad de un óptimo cálculo matemático, por lo que estos supuestos han sido evidenciados desde la propia corriente ortodoxa, de modo que se cuestiona a la macroeconomía por su falta de flexibilidad y poco acercamiento al comportamiento económico de la vida real.



Atendiendo a esto, varios matemáticos y economistas, como Robert J. Shiller, estudiaron el comportamiento del mercado bursátil norteamericano, incorporando variables sociológicas y culturales para explicar el comportamiento del precio de los valores resumiendo, que los seres humanos no son tan racionales como lo señala la teoría convencional, ni son máquinas que constantemente hacen cálculos para tomar decisiones, concluyendo que las burbujas financieras tienen su origen en el hecho de que los "humanos son animales sociales, e influyen unos en otros", lo que da lugar al "contagio social" (Shiller R. J., 2000)

Además, los mercados financieros deben regirse en base a modelos que intenten reflejar el comportamiento de los mercados reales, donde los precios fluctúen, donde se alternen periodos en los que se produzcan alzas en las cotizaciones, con periodos con bajadas de esta y con cambios repentinos de unos a otros (Grau-Carles, 1996). El comportamiento caótico se adecua a este tipo de mercado, dando lugar a dos tipos de agentes que participan en el mercado: los inversores fundamentales, que toman decisiones basándose en el valor intrínseco de una acción y los inversores técnicos que tomas decisiones en base a la evolución pasada de los precios de las acciones, donde una pequeña variación en el momento inicial de la inversión tiene como consecuencia cambios erráticos.

Por su parte (Mandelbrot B. , 2006), propone el estudio financiero a través de un comportamiento fractal, basándose en que los cambios de los precios siguen una distribución estable de Lévy, los cuales son procesos estocásticos y obedecen al teorema generalizado del límite central, teniendo así la forma de la distribución de Lévy estable, donde si se suman dos variables aleatorias, estas son explicadas cada una con una distribución estable de Lévy por separado.

Por tanto, la hipótesis fractal recalca que la liquidez y el horizonte temporal tienen un impacto principal en los mercados fractales, explicando el comportamiento de dos etapas del mercado: mercado estable y mercado desestabilizado (Sierra, 2007). El mercado estable ocurre si participan varios inversores con diferentes horizontes temporales. Para demostrar esto pensemos en un desajuste en el corto plazo de los precios, los participantes con un horizonte temporal largo pueden entrar y aprovechar la oportunidad de compra de los de corto plazo, dando liquidez al mercado y ajustándolo, en el caso contrario si no existirán diferentes horizontes temporales, el mercado se quedaría sin liquidez y en crisis. Así los inversores deben compartir el mismo nivel de riesgo, ajustando el riesgo para la escala de los horizontes, además el riesgo compartido explica porque la distribución de frecuencia de rentabilidades es similar a diferentes horizontes temporales de inversión. Si esto no sucede se rompe la estructura fractal (Batlle, 2008).

Todas estas teorías financieras surgen de la necesidad de entender a los mercados financieros tomando en cuenta las necesidades actuales y la volatilidad de los precios, donde el comportamiento caótico y fractal están presentes, sin embargo, a finales de los años 30, Ralph Nelson Elliot ya incorporaba estos términos en la teoría de las ondas donde deduce que los mercados se comportan de manera caótica y que se mueven en ciclos repetitivos, además de reflejar las acciones y emociones de los inversionistas, para esto baso su investigación en la teoría de Down sin notar que estaba descubriendo la naturaleza fractal del mercado. (Zatarain, 2017)

Es útil recordar que un fractal se repite a escalas y teóricamente se extiende hasta el infinito, así los patrones descubiertos por Elliot también tienen las mismas características donde encontramos un patrón repetitivo que luego se divide a su vez en patrones denominados como “ondas”, explicando que los valores se movían en cinco ondas de la tendencia principal y tres ondas en contra de la tendencia principal, donde en cada onda principal estaba acompañada por

cinco ondas en menor escala y estas a su vez por otras cinco. Más adelante (Mandelbrot B. , 2006) usaría como antecedente a Elliot y denominaría a este patrón de ondas como comportamiento fractal (García, 2015).

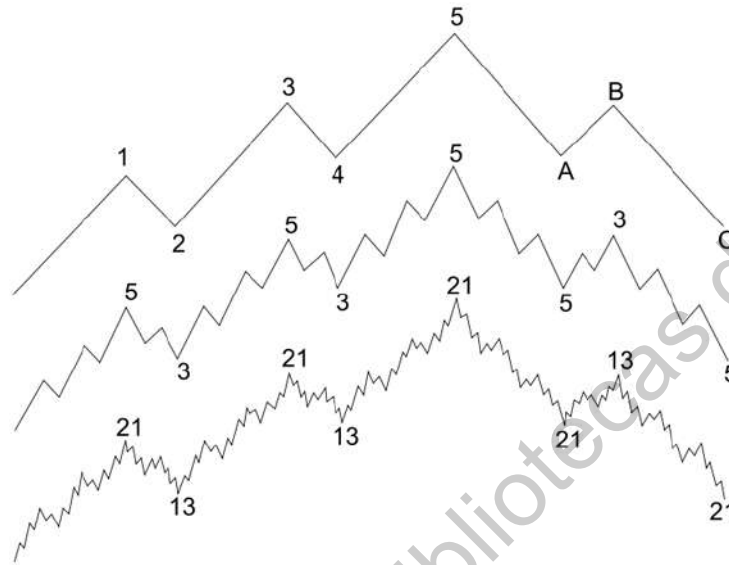


Ilustración 1: Teoría de las ondas  
Fuente: (Ramírez, 2010)

### Hipótesis

El comportamiento de las series temporales del PIB, IPC y tipo de cambio en México es del tipo fractal.

### Objetivos generales

Evidenciar que el PIB, IPC y tipo de cambio en México tienen un comportamiento fractal y por tanto el comportamiento previo a las crisis financieras puede analizarse utilizando herramientas de la geometría fractal.

## Objetivos específicos

Analizar las hipótesis usualmente utilizadas para el estudio de los mercados financieros.

Analizar la geometría fractal y sus propiedades desde la perspectiva de la teoría del caos.

Identificar los diferentes procesos estocásticos que explican el comportamiento de una serie de tiempo por medio del movimiento browniano aleatorio y movimiento browniano fraccional.

Análisis de la metodología rango reescalado para el cálculo del coeficiente de Hurst mediante el software Benoit 1.3.

Identificar el uso de la geometría fractal en mercados financieros.

Clasificación de datos del PIB, IPC y tipo de cambio por sexenios presidenciales en México.

Evidenciar el comportamiento fractal del PIB, IPC y tipo de cambio mediante el coeficiente de Hurst y pruebas de normalidad.

Analizar los periodos de crisis financieras y su relación con el comportamiento fractal de las series temporales del PIB, IPC y tipo de cambio en México.

Describir los resultados y posibles alcances.

## Capítulo 2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

### Teoría del caos

Edward Lorenz es el padre de la teoría del caos, en 1960 utilizó un modelo matemático para predecir el clima, con base en 12 ecuaciones no lineales. Al momento de hacer la simulación encontró una posible respuesta para su predicción, sin embargo, al volver hacer la misma simulación, pero con 3 números decimales en vez de 6 se percató que el resultado era totalmente diferente. De este análisis surgió la teoría del caos, la cual sirve para estudiar sistemas complejos y sistemas dinámicos con alta sensibilidad a las variaciones en las condiciones iniciales, en esta investigación se podrá observar que las series de tiempo financieras tienen un comportamiento caótico (Pérez A. , 2009).

Se dice que un sistema dinámico discreto es un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y una aplicación continua  $f: \Omega \rightarrow \Omega$ . Así para cada  $x_0 \in \Omega$ , se construye la sucesión:

$$\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$$

En esta se presentan iteraciones del punto  $x_0$  por  $f$ , donde es evidente un comportamiento asintótico y con dependencia del dato inicial  $x_0$ , siendo  $x_n = f^n(x_0)$ .

Por su parte un sistema dinámico continuo describe las condiciones de un flujo, igual que en un río donde el dominio puede verse como  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y el flujo como una función, donde dando un punto  $x_0 \in \Omega$  nos dice a donde se mueve este punto  $x_0$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ , así el flujo es una aplicación

$$\varphi: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$$

Al suponer que son diferenciables, se puede determinar que dado  $x_0 \in \Omega$ , la función  $\varphi_{x_0} = \varphi(x_0, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  es una curva que tiene velocidad  $\varphi'_{x_0}(t)$ .

Así, este sistema dinámico no es mas que la prescripción de la velocidad del flujo  $\varphi_{x_0}$  para cada  $x_0 \in \Omega$ , teniendo en cuenta que si damos una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  se debe exigir que el flujo satisfaga

$$\varphi'_{x_0}(t) = X\varphi_{x_0}(t)$$

O equivalentemente, dado  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , el objetivo es encontrar, para cada  $x_0 \in \Omega$ , una función  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  tal que

$$\begin{cases} \alpha'(t) = X(\alpha(t)) \\ \alpha(0) = x_0 \end{cases}$$

Un sistema dinámico es caótico cuando ligeras perturbaciones en las condiciones iniciales ( $x_0$ ) alteran el resultado de manera significativa, Devaney afirma que dado un sistema discreto sobre un espacio  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f: \Omega \rightarrow \Omega$  entonces  $f$  es caótica si se cumple las siguientes tres condiciones (Devaney, 1989):

- El conjunto de puntos periódicos es denso en  $X$ , osea i.e. el conjunto de  $x \in X$  tal que  $f^n(x) = x$  para cierto  $n > 0$ ,
- $f$  es topológicamente transitivo,
- $f$  tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Todos estos sistemas caóticos cuentan con un atractor, el cual es un conjunto de valores numéricos hacia los cuales un sistema tiende a evolucionar, por medio de un cambio de condiciones a los datos iniciales. Para que un conjunto sea un atractor las trayectorias que le sean suficientemente próximas han de permanecer próximas aun si son ligeramente alteradas. Geométricamente, un atractor puede ser un punto, una curva, una variedad o incluso una estructura fractal (Milnor J. , 1985).

Antes de la teoría del caos, los atractores de sistemas dinámico se dividían en:

- Punto fijo, el cual describía un sistema estable y rigurosamente periódico como un péndulo oscilando en un vacío.
- Ciclo limitado, el cual se mueve cíclicamente en una trayectoria formada por dos puntos, como el sistema depredador/presa que se encuentra en poblaciones silvestres.
- Torus, resulta de dos ciclos limitados de iteraciones el uno con el otro y un ejemplo suelen ser las orbitas gravitacionales (Zenovi, 2008).

A partir de la teoría del caos, se define a un atractor como una aplicación por  $f: \Omega \rightarrow \Omega$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y  $A \subset \Omega$  si cumple. (Devaney, 2003)

- (Compacidad)  $A$  es compacto (i.e. cerrado y acotado).
- (Invarianza)  $f(A) \subset A$ .
- (Atracción) Existe un entorno  $U$  de  $A$  tal que, para todo  $x \in U$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) \in A$ .

### Atractores extraños

Con la aparición de la teoría del caos también aparecieron los atractores extraños, los cuales tienen estructura a todas las escalas, además, se dice que un atractor es extraño si tiene dimensión de Hausdorff y es considerado un objeto fractal, algunos ejemplos de atractores extraños son:

## Atractor de Lorenz

El atractor de Lorenz, este en particular fue el primer atractor extraño de un sistema dinámico determinista, consecuencia de las ecuaciones simplificadas de rolo de convección que se producen en las ecuaciones dinámicas de la atmósfera terrestre (Lorenz E. , 1963).

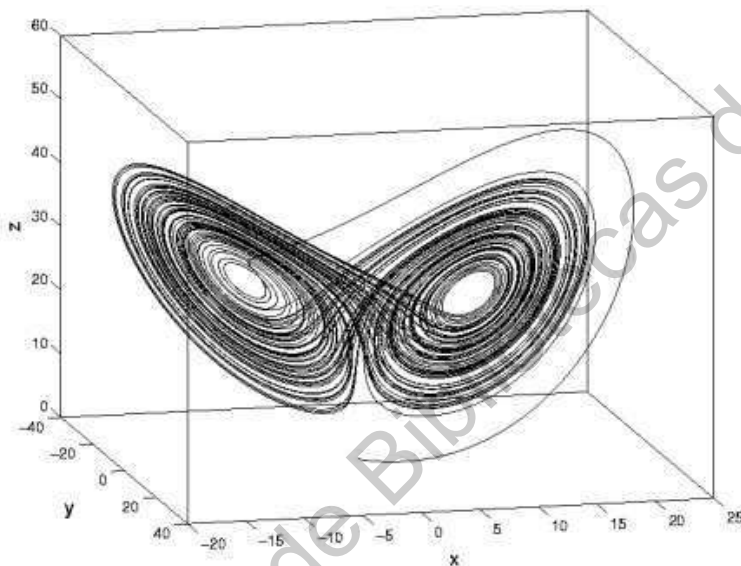


Ilustración 2: Atractor de Lorenz

Fuente: (Madrid, 2008)

## Atractor de Hénon

Atractor de Hénon, este sistema dinámico convierte en ecuaciones matemáticas los elementos conceptuales de la herradura de Smale que es doblar y estirar. Dado un punto del plano  $(x_0, y_0)$ , las ecuaciones de Hénon proporcionan las coordenadas de otro punto  $(x_1, y_1)$ , y así sucesivamente, si iteramos estos hasta  $n$  veces todos los puntos tienden a un atractor que no es ni un punto ni una curva si no un atractor extraño con dimensión 1.26 (Pérez A. , 2009).



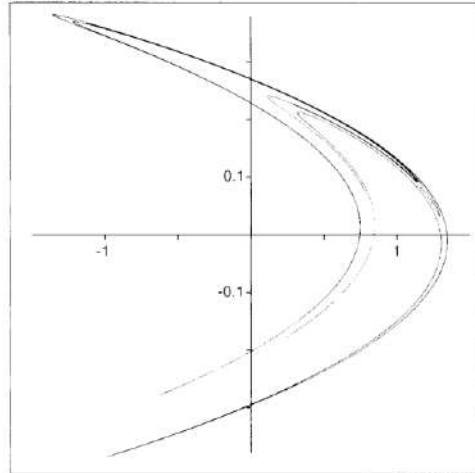


Ilustración 3: Atractor de Hénon

Fuente: (Sahab A. R., Ziabari M. T. & Modabbernia, M. R., 2010)

#### Atractor de Rössler

Atractor de Rössler, se presenta en un sistema dinámico continuo, descrito por ecuaciones diferenciales en el contexto de ciertas reacciones químicas que cuentan con estiramiento, y a medida que el tiempo varía el atractor tiende a comportarse de esta manera:

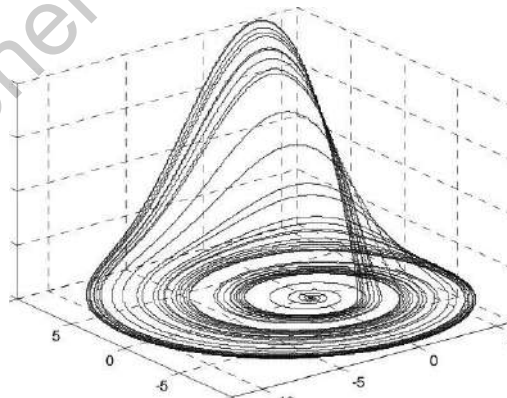


Ilustración 4: Atractor de Rössler

Fuente: (Sahab A. R., Ziabari M. T. & Modabbernia, M. R., 2010)

Resulta complejo el estudio de atractores extraños, para estudiarlos se utiliza la geometría fractal, ahora bien, al retomar a los mercados financieros como sistemas dinámicos caóticos los cuales presentan orden y caos a la vez, resulta interesante conocer si existe algún atractor en los mercados financieros que permita determinar el estado final al que son atraídas las variables de estos mercados, como es el PIB, IPC y el tipo de cambio. Algunos atractores ya estudiados se definen como:

- El atractor puntual, este se determina como el punto de equilibrio entre las fuerzas de la oferta y la demanda.
- El atractor cíclico, el cual responde a mercados financieros con naturaleza cíclica un ejemplo de esto son las ondas de Eliot que se analizan más adelante.
- El atractor teórico, el cual es un paso más en la abstracción del sistema y toma su nombre de la figura geométrica de la oferta y demanda
- El atractor extraño, es donde pequeñas alteraciones en variables da como resultado el cambio de precios de acciones, un ejemplo es un objeto fractal.

Un atractor extraño en la mayoría de los casos es un objeto fractal, para introducir mejor el concepto de fractal se usa el modelo logístico discreto, el cual dice que para cada  $\lambda > 0$ , definido por

$$f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\lambda \mapsto \lambda x(1 - \lambda)$$

En este modelo se observa que el sistema depende fuertemente de los valores de  $\lambda$ . Si  $f_\lambda$  alcanza su máximo en  $x = \left(\frac{1}{2}\right)$ , con valor máximo  $M = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{4}$ . De este modo, si  $\lambda \leq 4$ ,  $f_\lambda$  mapea de forma sobreyectiva  $[0,1]$  en si mismo. Pero para  $\lambda > 4$ , la mayor parte de los puntos  $[0,1]$  escapan por la dinámica de

$f_\lambda$ , así se puede centrar la atención en solo un subconjunto especial. De este modo todo apunta a que un punto de inflexión del mapeo logístico es  $\lambda = 4$ .

Aun así, al estudiar que pasa en los alrededores de valor de  $\lambda$ , para cuando  $0 < \lambda < 4$ , resulta que el mapeo logístico presenta una fuerte bifurcación dependiente del parámetro  $\lambda$ , cuando  $0 < \lambda \leq 1$ ,  $f_\lambda$  tiende a 0 como único punto fijo atractor y por tanto  $f_\lambda^n(x) \rightarrow 0$  para todo  $x \in [0,1]$ , pero si  $\lambda$  esta en  $1 < \lambda < 3$ , 0 se torna en un punto fijo inestable y ahora el nuevo punto fijo es  $1 - \frac{1}{\lambda}$  para todo  $x \in (0,1)$ , a partir de este momento la bifurcación se vuelve mucho más complicada para diferentes valores de  $\lambda$ , de este modelo se deduce la ecuación logística la cual tiene varias aplicaciones, dentro de las cuales encontramos la ecuación logística aplicada a poblaciones, donde,  $X_0$  representa la población del año inicial para encontrar el año siguiente ( $X_{sig}$ ), siendo  $K$  un parámetro ( $0 < k \leq 4$ ) que depende de condiciones del aumento de la población:

$$X_{sig} = KX_0(1 - X_0)$$

Al realizar la iteración de esta ecuación se observa cada bifurcación que se va presentando, aunque no es posible visualizar a simple vista también se encuentra el conjunto de Mandelbrot, uno de los ejemplos más significativos de los fractales que servirá de introducción para su estudio en esta investigación.

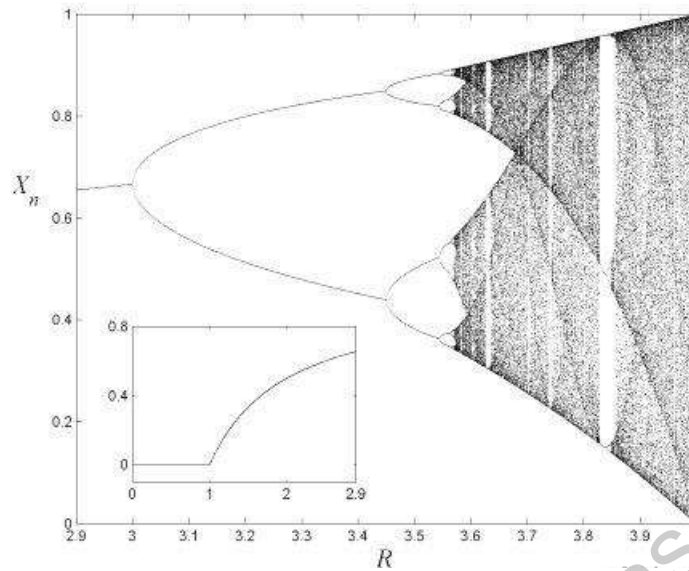


Ilustración 5: Ecuación logística

Fuente: (Luna, G. & Méndez J., 2020)

### La geometría fractal

De acuerdo con (Rodríguez, 1995), la cronología de este estudio fractal, va desde Jean Baptiste Perrin, Norbert Wiener, Lewis Fry Richardson, hasta llegar a Benoit B. Mandelbrot, considerado el padre de la geometría fractal. Así se puede observar los principios en el siglo XIX, donde Henri Poincaré estudió formalmente los sistemas dinámicos vistos en la teoría del caos, por su cuenta Jean Baptiste Perrin, estudió a través de un microscopio el movimiento browniano que agita cualquier partícula en suspensión en un fluido, más adelante Norbert Wiener construyó un modelo probabilístico del movimiento browniano fraccional donde denominaba “caos” a la forma extrema del desorden natural, siendo esta la fuente de inspiración para la creación de los objetos fractales, Lewis Richardson por su cuenta estudió la variación de la longitud aproximada de las fronteras de dos países. Fue hasta 1982 donde Benoit Mandelbrot publicó su más aclamada obra “The Fractal Geometry of Nature” donde acuñó el término geometría fractal, es importante recalcar que Mandelbrot se basa en toda la matemática clásica y se inspiró en muchos autores como G.

Cantor (1872), G. Peano (1890), D. Hilbert (1981), H. von Koch (1904), W. Sierpinski (1976), G. Julia (1918), F. Hausdorff (1919), etc.

Así el término fractal se aplica al conjunto de objetos o formas generadas por un proceso de iteración, que se caracteriza por poseer similitud a toda escala, por no ser diferenciables y por tener dimensión fraccional, en pocas palabras un fractal contiene copias de sí mismo dentro de él (Mandelbrot B. , 1997). Al seguir la notación de teoría del caos se aprecia al fractal como un subconjunto  $f \subset \mathbb{R}^n$  con dimensión fraccionaria o con dimensión de Hausdorff estrictamente menor que su dimensión topológica.

### Propiedades de objetos fractales

Un objeto fractal tiene dos propiedades que lo caracterizan:

- La auto-similitud, explica el comportamiento de una estructura al momento de cambiar la escala en la que se encuentra, conservando todas las propiedades que se tenían en la figura original, sin importar que cambien en todas las direcciones, también se le puede llamar estructura isotrópica,
- La auto-afinidad conserva la propiedad anisotrópica, aplicada a diferentes escalas en todas las direcciones y explica el factor de escalamiento al momento de aplicarlo. Podemos verlo como un factor  $k$ , donde  $x \rightarrow kx$ , generalizando si el factor es  $k^{ai}$ , entonces  $x_i \rightarrow k^{ai}x_i$ .

Por lo que todo fractal tiene auto-similitud y auto-afinidad conservando sus propiedades a diferentes escalas y diferentes medidas (Mandelbrot B. , 2006).

## Dimensión fractal

La medida de Hausdorff es un parteaguas en el estudio de los fractales debido a que puede expresar una dimensión fraccionaria, útil para el estudio de objetos con comportamiento fractal, así que para definir la dimensión de Hausdorff, es útil la medida Hausdorff, donde para  $U \subset \mathbb{R}^n$  y denotando el diámetro  $U$ ,  $|U|$ , por  $|U| = \sup_{x,y \in U} |x - y|$ .

Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  acotado, un  $\delta$ -recubrimiento de  $F$  es un recubrimiento de  $F$  por una cantidad numerable de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  de diámetro menor que  $\delta$ . Entonces se define a:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento} \right\}$$

Así cuando  $\delta$  decrece, el conjunto de  $\delta$ -recubrimiento es menor y el ínfimo aumenta, por lo que  $H_{\delta}^s(F)$  es una función creciente de  $\delta$  que tiene un límite, por tanto, se define la medida de Hausdorff como:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(F)$$

Para la dimensión de Hausdorff, se toma a  $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $F$ , entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

De esta forma al tomar ínfimos se obtiene que  $\mathcal{H}^s(F) \leq \delta^{t-s} H_{\delta}^s(F)$  y como  $H_{\delta}^s$  está acotado en  $\delta$ , entonces:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^t(F) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{t-s} H_\delta^s(F) = 0$$

Así, se aprecia que  $\mathcal{H}^s(F)$  es una función que comienza divergiendo y que al llegar a un valor  $\alpha$  cae a 0, es decir, existe un  $\alpha \in [0, \infty]$ , tal que:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } \beta < \alpha \\ 0 & \text{si } \beta > \alpha \end{cases}$$

Siendo  $\alpha$  la dimensión de Hausdorff ( $dim_H F$ ), cumpliendo que:

$$\alpha = \sup\{\beta : \mathcal{H}^s(F) = \infty\} = \inf\{\beta : \mathcal{H}^s(F) = 0\}$$

A partir de estos conceptos, Mandelbrot define al fractal como un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es mayor que su dimensión topológica, sin embargo, este concepto era poco práctico al hora de ser utilizado, por ello se dedujo la dimensión fractal basada en la propiedad de autosimilitud, tomando un conjunto de dimensión  $D$  que al descomponerlo en  $N$  réplicas de sí mismo reducidas en un factor de escala  $r$ , entonces, tendríamos que  $Nr^D = C$  donde  $C$  es constante. Resolviendo con logaritmos tenemos (Montesdeoca, 2005):

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} = \lim_{r \rightarrow 0} -\frac{\log N}{\log r}$$

#### Tipos de fractal: lineales y no lineales

Los fractales lineales son exactamente idénticos en todas sus escalas hasta el infinito con un factor de escalamiento, a partir de figuras geométricas. Los fractales no lineales se generan a partir de distorsiones complejas (Mandelbrot B. , 2006). Un ejemplo de fractal lineal es la curva de Koch.

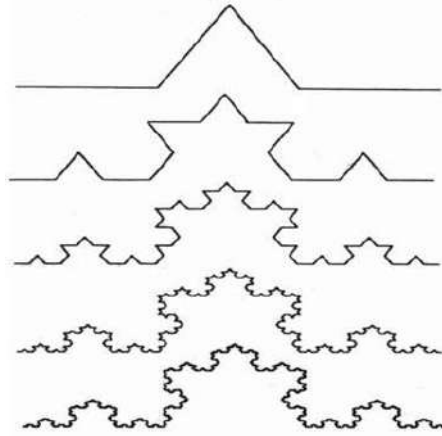


Ilustración: 6 Curva de Koch  
Fuente: (Dehouve, 2017)

### Construcción de fractales

La construcción de un fractal parte de un objeto geométrico clásico que sigue las leyes euclidianas clásicas, a este se le llama iniciador, a continuación, se necesita un generador, el cual puede ser el factor de escalamiento vista como una curva rizada, una secuencia de precios etc. La construcción a partir de eso se le llama regla de recursión. Estos procesos matemáticos crean estructuras fractales por medio de iteración a las reglas ya mencionadas de autosimilitud y autoafinidad (Mandelbrot B. , 2006)

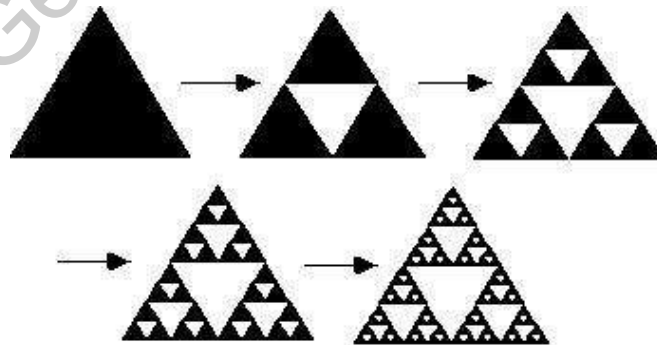


Ilustración 7 Construcción de fractales  
Fuente: (Alvarado G. , 2018)



## Fractales clásicos

El Polvo de cantor está formado por una recta de intervalo  $[0,1]$  equivalente a  $C$  (recta original), al dividir la recta en tres segmentos iguales de  $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, 1\right]$  y eliminar el intervalo abierto intermedio, se define a  $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , consecuentemente al repetir esta iteración  $n$  veces obtenemos el objeto fractal. (Valdés, 2016).

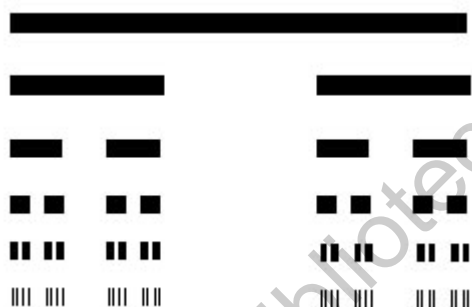


Ilustración: 8 Polvo de Cantor  
Fuente: (Mandelbrot B. , 1997)

Por su parte el conjunto de Julia es una lista de conjuntos fractales que se obtienen al iterar los puntos de una función holomorfa  $f$  que presenta un comportamiento caótico. Para construir el conjunto de Julia en  $\mathbb{C}$ , se supone una función  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por  $\varphi(z) = z^2 + c$ . Esta función  $\varphi$  tiene como inversa  $f$  definida por como (Atencia, 2014):

$$z = z^2 + c \Rightarrow z - c = z^2 \Rightarrow \pm\sqrt{z - c} = f(z)$$

La cual tiene dos raíces inversas:

$$f_0 = \sqrt{z - c} \quad y \quad f_1 = -\sqrt{z - c}$$

Siendo un conjunto cerrado y acotado tal que el conjunto de julia  $J \subseteq \mathbb{C}$  que cumple con que:

$$J = f_0[J] \cup f_1[J]$$

Que cumple para cualquier número complejo  $z$ , tal que

$$J = f_0[J_n] \cup f_1[J_n]$$

Siendo  $J$  el límite de  $J_n$ .

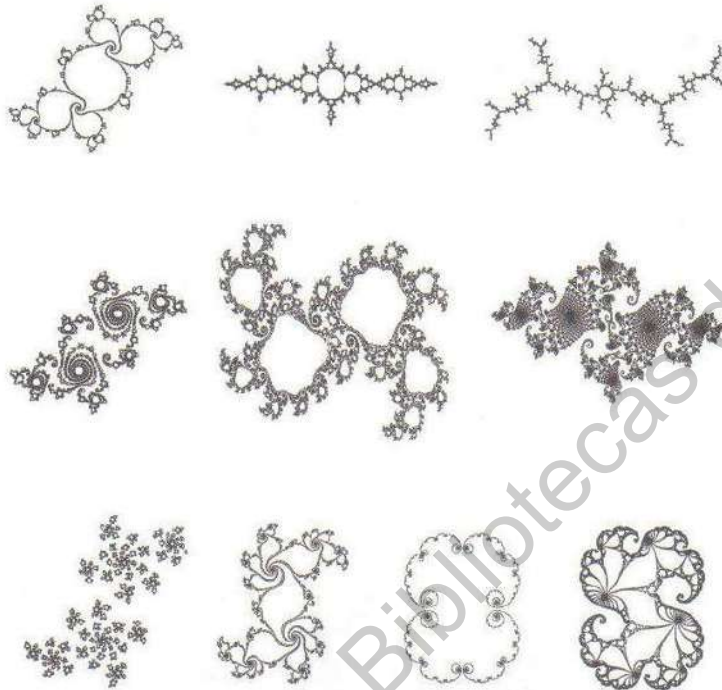


Ilustración 9: Conjunto de Julia  
Fuente: (Diamond, 2011)

Muy relacionado al conjunto de Julia está el conjunto de Mandelbrot que se define como:

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} / J \text{ es conexo}\}$$

Por lo que el conjunto de Mandelbrot estudia el caso particular para cuando conjunto de Julia es conexo con  $f = z^2 + c$ , siendo  $\mathcal{M}$  el conjunto de los puntos  $c \in \mathbb{C}$  tales que:

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} / f^n(0) \nrightarrow \infty\}$$

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} / |f^n(0)| \leq 2 \forall n\}$$

Siendo  $\mathcal{M}$  compacto, conexo, con dimensión topológica 1, pero con dimensión Hausdorff exactamente 2 que contiene los casos especiales del conjunto de Julia cuando es conexo (Estrada, 2018).

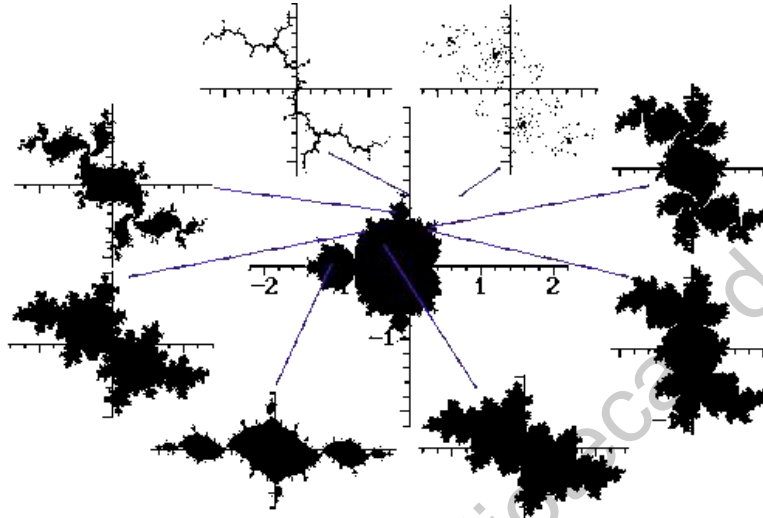


Ilustración 10: Conjunto de Mandelbrot  
Fuente: (Madrid U. P., 2015)

### **Series de tiempo**

Una serie temporal es una realización parcial de un proceso estocástico de parámetro tiempo discreto, este estudio aborda la serie de tiempo del PIB, IPC y tipo de cambio en México por lo que es útil recordar la fundamentación teórica con lo que se estudian las series temporales.

Para esto recordemos que un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$  es llamado proceso gaussiano si y sólo si todas las distribuciones finito-dimensionales son distribuciones normales, es decir si y sólo si el vector aleatorio  $\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}$  es gaussiano para toda  $t_1, \dots, t_n \in T$  con  $n \in \mathbb{N}$ .

Además, un proceso gaussiano  $\{X_t\}_{t \in T}$  es estacionario si y sólo si su función esperanza  $m_X$  es constante y su operador de covarianza  $K$  cumple la igualdad  $K(s, t) = K(s + h, t + h)$ , para cada  $t, s \in T$  y toda  $h > 0$ .

### Movimiento Browniano

El movimiento browniano definido por  $W = \{W_t\}_{t \in T}$  es un buen ejemplo de un proceso gaussiano cuyo operador de covarianza está definido por:

$$K_w(s, t) = \min\{s, t\}$$

El movimiento browniano estándar se forma cuando la función de esperanza  $m_w \equiv 0$ , guardando las siguientes propiedades:

$$W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$$

$$W_0 = 0$$

Para  $s \leq t$ , se cumple que  $W_t - W_s \triangleq W_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t - s)$

$W$  tiene incrementos estacionarios e independientes

$W$  tiene trayectoria  $\gamma$ -Hölderianas continuas, para todo  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$

$W$  no es un proceso estacionario

### Movimiento browniano fraccionario

El movimiento browniano fraccionario estándar está denotado por  $B^H$ , el cual también es un proceso gaussiano centrado cuyo operador de covarianza está dado por:

$$K_H(t, s) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s - t|^{2H}), \quad t, s \in T = \mathbb{R}_+$$

donde  $H \in (0, 1)$  y  $H$  es llamado coeficiente de Hurst.

Este estudio usa el coeficiente de Hurst para probar la dependencia estadística entre los datos por lo cual es útil recordar que:

A. Para  $H = \frac{1}{2}$ , el movimiento browniano fraccionario  $B^H$  es el movimiento browniano estándar  $W$ , esto a partir de la función de covarianza  $K_H$  del movimiento browniano fraccionario estándar de modo que  $K_{\frac{1}{2}}(t, s) = \frac{1}{2}(s + t - |t - s|) = \text{mín}\{s, t\}$ .

B. Para  $s, t \in T$ , y  $h > 0$ , entonces:

$$K_H(s + h, t + h) = \frac{1}{2}\{(t + h)^{2H} + (s + h)^{2H} - |t - s|^{2H}\}$$

$$K_H(s + h, t + h) \neq \frac{1}{2}\{(t + h)^{2H} + (s + h)^{2H} - |t - s|^{2H}\}$$

$$K_H(s + h, t + h) = K_H(t, s)$$

Por lo que observamos que el movimiento browniano fraccionario no es un proceso estacionario.

Además, podemos demostrar que los incrementos del proceso  $B^H$  son estacionarios, así  $B_{t+h}^H - B_h^H$  no depende de  $h > 0$ , y recordando que este proceso tiene una distribución normal con media cero, por lo cual su varianza es:

$$\text{Var}(B_{t+h}^H - B_h^H) = |t + h|^{2H} + h^{2H} - 2K_H(t + h, h)$$

$$\text{Var}(B_{t+h}^H - B_h^H) = |t + h|^{2H} + h^{2H} - \{|t + h|^{2H} + h^{2H} - t^{2H}\}$$

$$\text{Var}(B_{t+h}^H - B_h^H) = t^{2H}$$

Así como la covarianza no depende de  $h$ , entonces podemos decir que el movimiento browniano fraccionario tiene incrementos estacionarios.

También podemos decir que los incrementos en el proceso  $B^H$  son independientes solo cuando  $H = \frac{1}{2}$ , osea solo cuando es un movimiento

browniano, para demostrarlo veamos que si existen  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in T$ , tales que  $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ , entonces  $B_{s_2}^H - B_{s_1}^H$  y  $B_{t_2}^H - B_{t_1}^H$  son independientes, por tanto el vector formado por  $(B_{s_2}^H - B_{s_1}^H, B_{t_2}^H - B_{t_1}^H)$  es un vector gaussiano, calculando la covarianza entre las variables tenemos que:

$$\begin{aligned} & Cov(B_{s_2}^H - B_{s_1}^H, B_{t_2}^H - B_{t_1}^H) = \\ & Cov(B_{s_2}^H - B_{t_2}^H) - Cov(B_{s_2}^H - B_{t_1}^H) - Cov(B_{s_1}^H - B_{t_2}^H) + Cov(B_{s_1}^H - B_{t_1}^H) = \\ & \frac{1}{2} \{ (t_2 + s_1)^{2H} + (t_1 + s_2)^{2H} - (t_2 + s_2)^{2H} + (t_1 + s_1)^{2H} \}, \end{aligned}$$

Es decir que es cero si y sólo si  $H = \frac{1}{2}$ , en otras palabras, los incrementos son independiente si y sólo si  $H = \frac{1}{2}$ .

## Series de tiempo financieras

### PIB

El Producto Interno Bruto (PIB) entendido como el valor de todos los bienes y servicios finales que se producen dentro de un país sirve para medir el desempeño de la economía de un país, en México las primeras estimaciones del PIB fueron hechas a finales del año 1930 y principios de 1940 por medio del Departamento de Estudios Económicos del Banco de México y la Comisión Económica para América Latina. A través del tiempo el cálculo del PIB se hace mediante los índices mensuales o trimestrales de volumen físico de la producción de los sectores seleccionados con base fija en el año 2013, con estos índices se realiza la extrapolación de la producción del año base. El cálculo se alinea a cifras anuales de las Cuentas de Bienes y Servicios SCNM utilizando la técnica Denton (INEGI, 2017).

La versión básica de la técnica proporcional Denton para el cálculo del PIB trimestral es:

$$\min_{(x_1, \dots, x_{4\beta}, \dots, x_T)} \sum_{t=2}^T \left[ \frac{X_t}{I_t} - \frac{X_{t-1}}{I_{t-1}} \right]^2 \text{ donde } t \in \{1, \dots, (4\beta), \dots, T\}.$$

Bajo la restricción de que la serie de flujos satisfaga:

$$\sum_{t=4(y-3)+1}^{4y} X_t = A_y, \quad y \in \{1, \dots, \beta\}.$$

donde  $t$  es el tiempo,  $X_t$  la estimación derivada de las CNT para el trimestre  $t$ ,  $I_t$  el nivel del indicador correspondiente al trimestre  $t$ ,  $A_y$  el dato anual correspondiente al año  $y$ ,  $\beta$  el último año para el que se dispone de un dato de referencia anual y  $T$  el último trimestre para el que se dispone de datos fuentes.

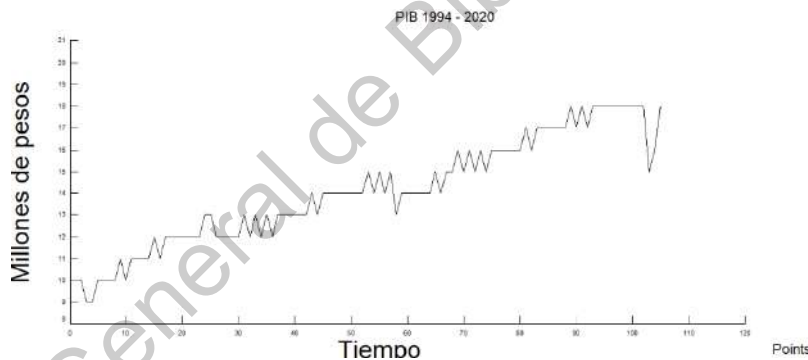


Ilustración 11 Serie de tiempo del PIB 1994 - 2020  
Fuente: Elaboración propia

## IPC

El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) es el principal indicador bursátil de la Bolsa Mexicana de Valores, el cual expresa el rendimiento del mercado accionario, en función de las variaciones de una muestra balanceada, ponderada y representativa del conjunto de acciones cotizadas de la Bolsa. El IPC es calculado diariamente por Standard and Poor's (S&P) con base a los resultados

de la sesión cotidiana de remates y toma como referencia a las 35 emisoras de distintos sectores de la economía (BMV, 2019).

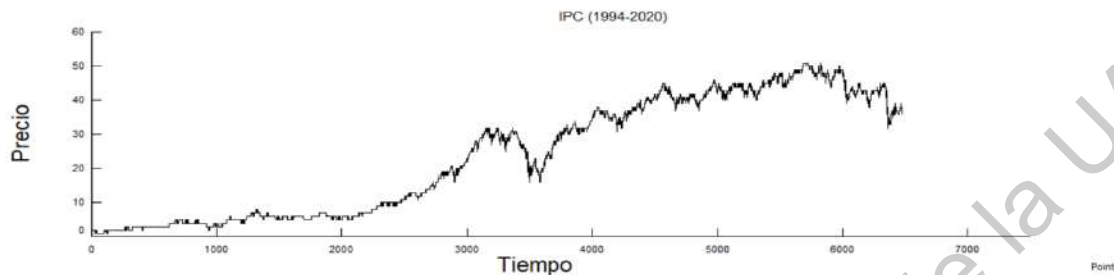


Ilustración 12 Serie de tiempo IPC de 1994 - 2020 (Datos públicos de Banxico)  
Fuente: Elaboración propia

### Tipo de cambio

Por su parte el tipo de cambio es un indicador económico que tiene especial importancia en la formulación de políticas macroeconómicas. Además de ser de gran interés en el mercado cambiario para inversionistas y transacciones (Caputo, R., Nuñez, M. & Valdés, R, 2017).

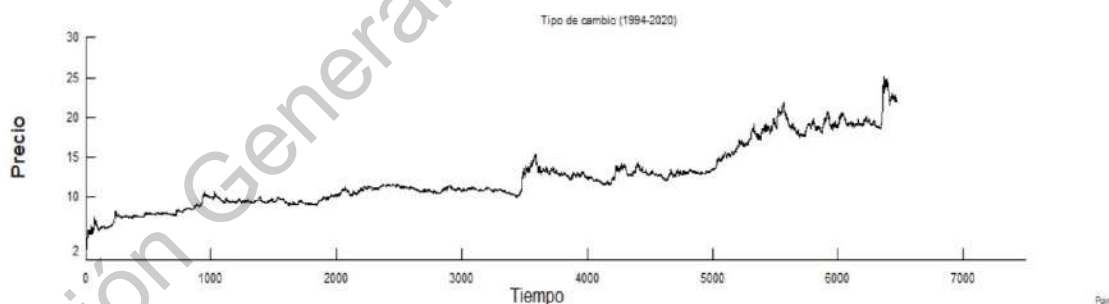


Ilustración 13 Serie de tiempo de cambio Peso - Dólar de 1994 - 2020  
Fuente: Datos públicos de Banxico - Elaboración propia con Software Benoit



## Capítulo 3 ANÁLISIS ESTADÍSTICO

### Datos analizados

Mediante Banxico se realizó la recolección de datos públicos del PIB, IPC y tipo de cambio del año 1994 – 2020, para el PIB se utiliza la serie “producto interno bruto” a precios de mercado en base a millones de pesos a precios del 2013 trimestral obteniendo un total de 105 datos, para el IPC se estudió el cierre diario con un total de 4841 datos y para el tipo de cambio peso – dólar al cierre diario se utilizaron 4967 datos.

### Categorización

Es el proceso por el cual se especifica las categorías de la variable que estamos estudiando mediante las posibles variaciones cuantitativas o cualitativas de los datos (Freund, 2000). Para esta investigación realizamos el análisis de los datos mediante una categorización por sexenio presidencial desde el año 1994 – 2020, con virtud de los cambios significativos en la política monetaria de México como es la entrada a la flotación libre del tipo de cambio.

Tabla 1 Periodos de estudio

Fuente: Elaboración propia

#### Sexenios presidenciales

Periodo	Sexenio Presidencial	Años
I	Ernesto Zedillo Ponce de León	1994 – 2000
II	Vicente Fox Quesada	2000 – 2006
III	Felipe Calderón Hinojosa	2006 – 2012
IV	Enrique Peña Nieto	2012 – 2018
V	Andrés Manuel López Obrador	2018 – 2020
VI	Acumulado	1994 – 2020

## Prueba de normalidad

La estadística hace posible demostrar que al considerar una muestra de tamaño  $N$  pertenece a un conjunto que se distribuye normalmente, con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ . Donde la curva normal esta centrada alrededor de la media, la cual se asocia al rendimiento promedio. Además, la variación o dispersión alrededor de la media se expresa mediante la desviación estándar, la cual se asocia a la volatilidad.

Existen diferentes pruebas de normalidad como lo son: Prueba Shapiro-Wilk, Prueba Anderson-Darling, Prueba Kolmogorov-Smirnov, Prueba Cramer-Von Mises, Prueba Lilliefors, Prueba Pearson chi-square, Prueba Shapiro-Francia, etc.

La prueba de normalidad hecha en este estudio para el PIB fue mediante la prueba Ryan-Joiner debido a la cantidad de datos trimestrales, sin embargo, para el IPC y tipo de cambio se utilizó la prueba Kolmogorov-Smirnov hecha en el software Minitab.

La hipótesis propuesta para la prueba de normalidad es:

$H_0$  : Los datos provienen de una distribución normal.

$H_1$  : Los datos no provienen de una distribución normal.

## Sesgo

Por su parte el “sesgo” es un indicador que mide la simetría de la curva, en tal caso si los datos siguen una distribución normal el sesgo será cero, si esta sesgada a la izquierda indicara que es negativa y en caso de estar sesgada a la derecha indicara que es positiva.

$$Sesgo = \frac{\sum(x_i - \mu)^3}{(n - 1)\sigma^2}$$

Donde  $x_i$  es el nivel del índice en cada periodo expresado en días,  $\mu$  la media y  $\sigma$  la desviación estándar.

## Curtosis

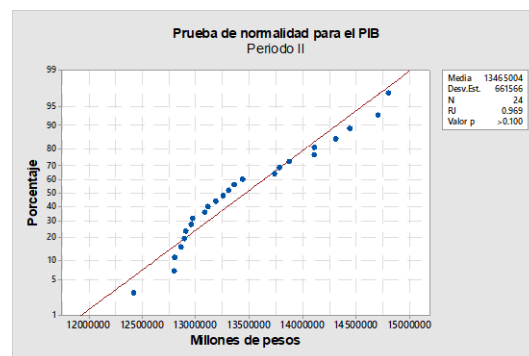
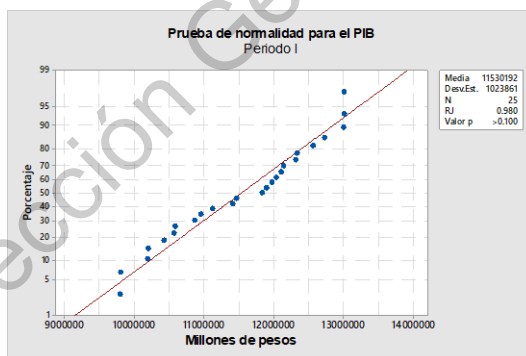
La “curtosis” mide el nivel del levantamiento de la curva con respecto a la horizontal, notando que la curtosis de una distribución normal es igual a 3.

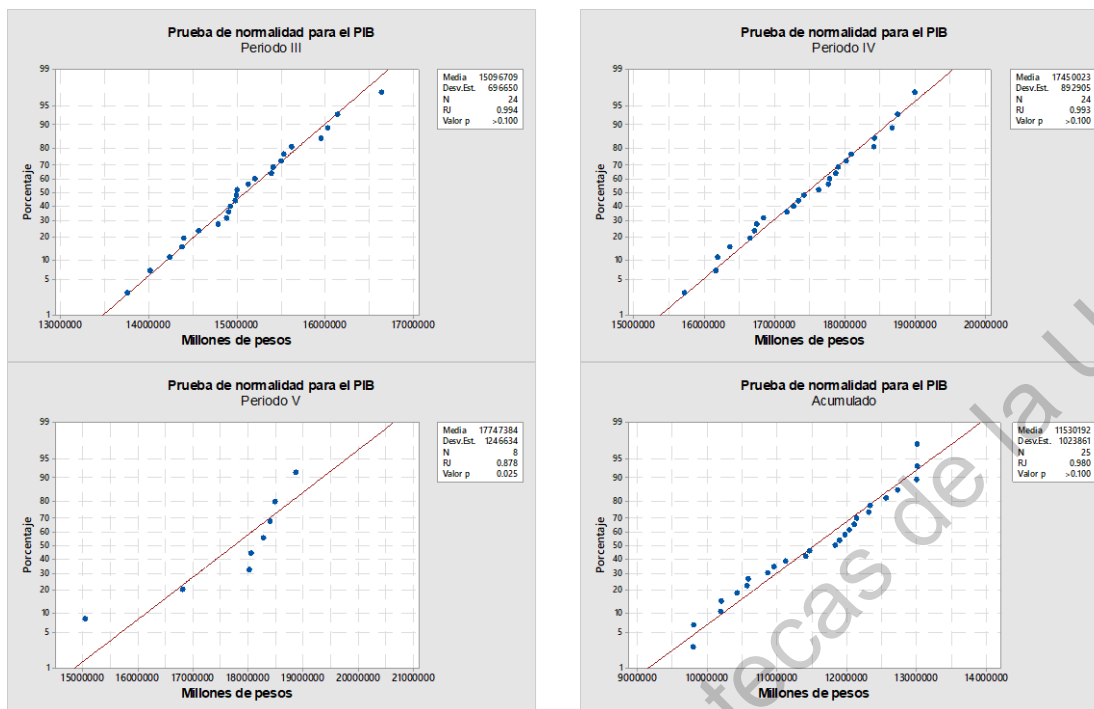
$$Kurtosis = \frac{\sum(x_i - \mu)^4}{(n - 1)\sigma^4}$$

Si el P-valor es  $> \alpha$  se acepta la hipótesis nula y si P-valor es  $< \alpha$  se acepta la hipótesis alterna.

## Pruebas de normalidad para el PIB

Tabla 2 Gráficas de pruebas de normalidad hecha en Minitab  
Fuente: Elaboración propia usando software Minitab





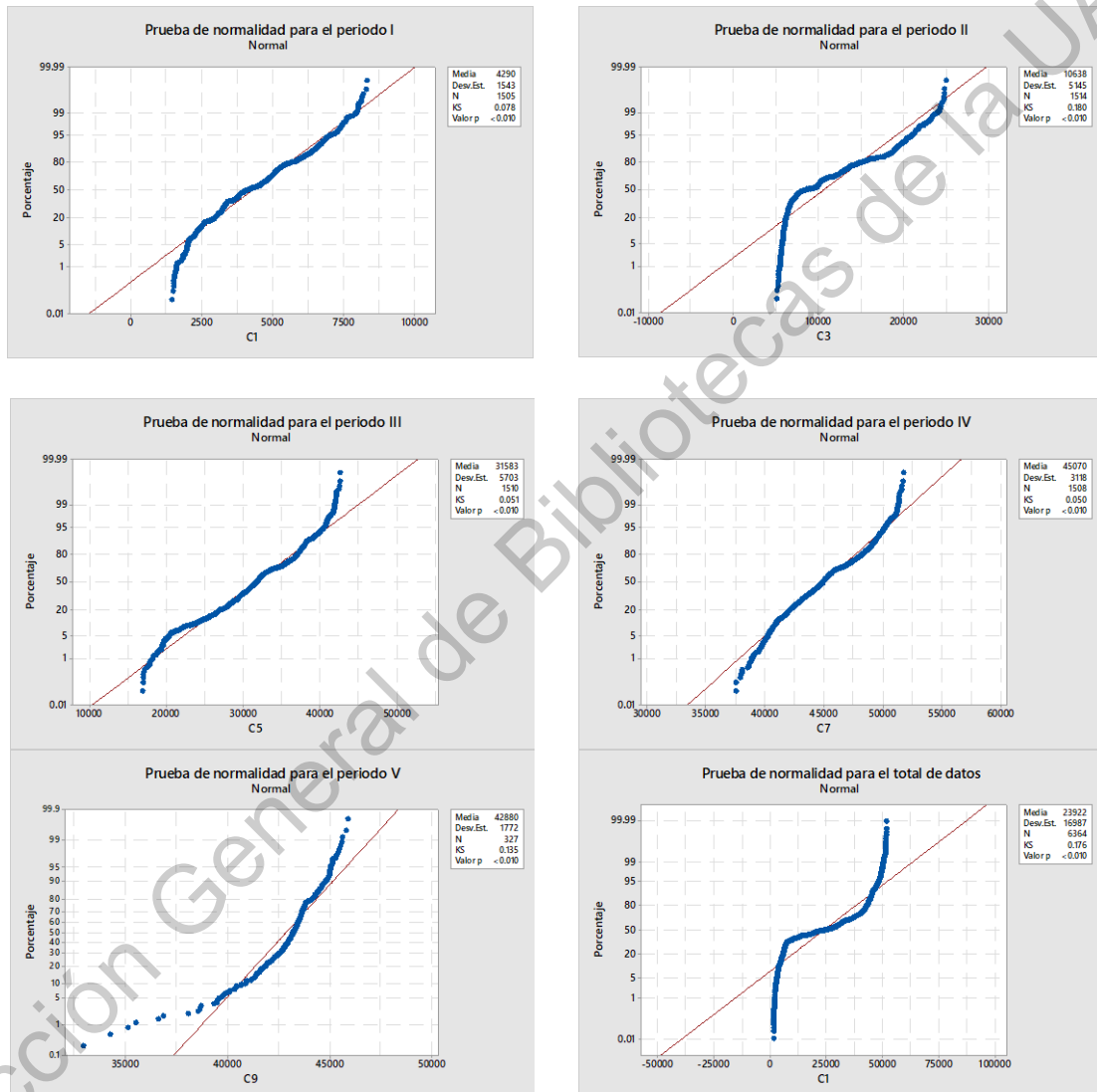
La prueba de normalidad realizada para el PIB muestra que en los periodos I, II, III, IV y el acumulado se comportan de forma normal, aunque el periodo V rechaza esta hipótesis no podemos valernos de esto debido a que son muy pocos datos para poder hacer una conclusión adecuada, aun así, tomando el acumulado podemos decir que el PIB tiene un comportamiento normal y puede ser estudiado mediante la hipótesis de mercados eficientes.

Tabla 3 Resultados prueba de normalidad para el PIB  
Fuente: Elaboración propia

Datos analizados con hipótesis de normalidad	
Periodo	Hipótesis nula
I	Acepta
II	Acepta
III	Acepta
IV	Acepta
V	Rechaza
VI	Acepta

## Prueba de normalidad para IPC

Tabla 4 Gráficas de prueba de normalidad hecha en Minitab  
Fuente: Elaboración propia



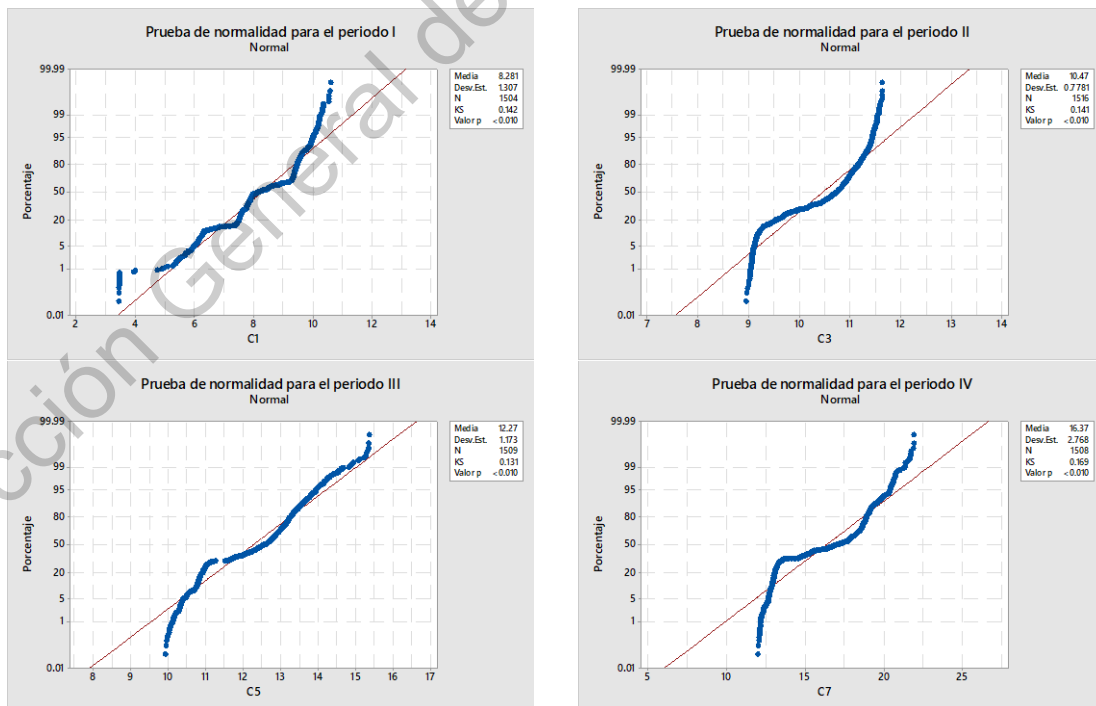
La prueba de normalidad hecha para el IPC da evidencia de que la serie de tiempo financiera puede ser estudiada desde el punto de vista fractal, utilizando el movimiento browniano fraccional por lo que se utilizará cada periodo para mostrar la dependencia estadística y su dimensión fractal.

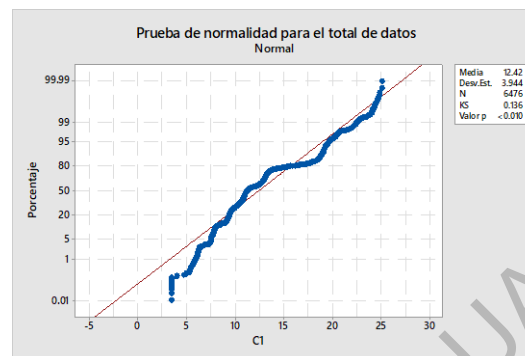
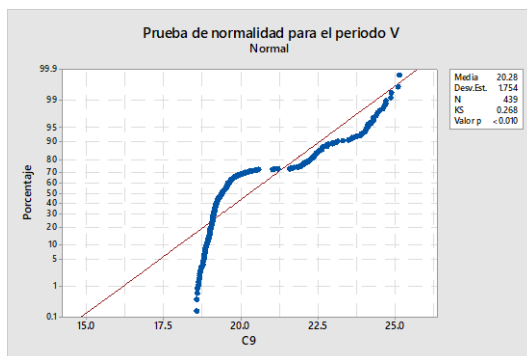
Tabla 5 Resultados prueba de normalidad del IPC  
Fuente: Elaboración propia

Resultados prueba de normalidad para el IPC	
Periodo	Hipótesis nula
I	Rechaza
II	Rechaza
III	Rechaza
IV	Rechaza
V	Rechaza
VI	Rechaza

Prueba de normalidad para el tipo de cambio peso - dólar

Tabla 6 Gráficas de prueba de normalidad hecha en Minitab  
Fuente: Elaboración propia





La prueba de normalidad para el tipo de cambio peso – dólar muestra que ningún periodo viene de una distribución normal por lo que no tiene independencia estadística y puede estudiarse desde el punto de vista de fractales.

Tabla 7: Resultados prueba de normalidad para el tipo de cambio peso – dólar  
Fuente: Elaboración propia

Prueba de normalidad para el Tipo de cambio	
Periodo	Hipótesis nula
I	Rechaza
II	Rechaza
III	Rechaza
IV	Rechaza
V	Rechaza
VI	Rechaza

## Capítulo 4 Resultado del análisis fractal

### Exponente de Hurst

Harold Edwin Hurst fue uno de los primero en estudiar las series fractales mediante el parámetro llamado coeficiente o exponente de Hurst, el cual utilizó como un indicador de independencia se series de tiempo y una manera de distinguir series fractales (Rodríguez, 2014).

Hurst era constructor de presas en los inicios del siglo XX, durante su labor encontró un problema al determinar la capacidad de almacenamiento dependiente del flujo que entre al río proveniente de diferentes elementos como lluvias, riachuelos y un flujo controlado de salida del río, durante esa época los hidrólogos habían supuesto que el comportamiento del influjo era un proceso aleatorio, sin embargo en su investigación encontró que los egipcios tenían registro sobre los flujos donde afirmaban que ante la aparición d un flujo grande le secundaba otro flujo grande, así mismo ante la aparición de un flujo pequeño también le secundaba un flujo pequeño, por lo que desarrollo su propia metodología para medir la memoria estadística (Sierra, 2007) y (Plazas, L., Dávila, M.A. & Moncada, G., 2014).

Para aplicar este concepto Hurst estaba enterado del trabajo de Einstein sobre el movimiento browniano, usado para encontrar la distancia de una partícula errática suspendida en un fluido el cual se incrementa con la raíz cuadrada del tiempo mediante la fórmula conocida como “la regla de un medio”:

$$R = \sqrt{T}$$

donde R era la distancia y T el tiempo.



Al aplicar este concepto a series de tiempo encontró la siguiente ecuación que generaliza la idea de memoria estadística y que es aplicable a movimiento brownianos.

$$(R/S)_n = cn^H$$

### Técnicas de estimación Rango Reescalado para el coeficiente de Hurst Metodología Rango Reescalado (R/S)

Una de las metodologías para encontrar el coeficiente de Hurst es el Análisis de Rango Reescalado ( $R/S$ ) el cual es un análisis no paramétrico que no requiere una distribución específica, además, tiene media cero y se expresa en términos de la desviación estándar, por lo que los valores de ( $R/S$ ) se incrementan con  $T$ . Así el exponente de Hurst ( $H$ ) se determina por medio de una regresión lineal de los puntos de  $\log(R/S)$  contra  $\log(T)$  tal como indica la ecuación (Juarez, 2018):

$$\log(R/S)_n = H\log(T) + \log(c)$$

Se puede ver al ( $R/S$ ) como la distancia que el sistema recorre en una unidad de tiempo, siguiendo estos pasos;

Se considera una serie de tiempo:

$$x, t = 1, 2, \dots, T.$$

La serie se divide en submuestras de similar tamaño:

$$n = \frac{x}{i}.$$

Se calcula la media de la serie para cada submuestra:

$$\langle X \rangle_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t.$$

Se encuentra la diferencia acumulada respecto a la media del índice o serie original:

$$X = (t, T) = \sum_{u=1}^t [x(u) - \langle x \rangle_T].$$

Se calcula el rango por medio del máximo y mínimo de cada partición:

$$R(T) = \max X(t, T) - \min X(t, T) \text{ con } 1 \leq t \leq T.$$

Se obtiene la desviación estándar:

$$S = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [x(u) - \langle x \rangle_T]^2}.$$

Se calcula el estadístico dividiendo el rango por la desviación estándar:

$$\frac{R}{S} = (cT)^H.$$

Para cada partición se calcula el promedio del  $(R/S)$ , así la potencia de dicha ecuación es el coeficiente de Hurst, y aplicando regresión lineal obtenemos la pendiente como el coeficiente de Hurst.

$$\log(R/S)_n = H \log(T) + \log(c).$$

### Resultados del rango reescalado

Para encontrar el exponente de Hurst, se utiliza el software Benoit 1.3, el cual se especializa en el estudio de objetos fractales usando la categorización propuesta por sexenios y utilizando la hipótesis para este caso:

$H_0$ : La serie de tiempo es aleatoria e independiente la cual tiene un ruido blanco si  $H = \frac{1}{2}$ .

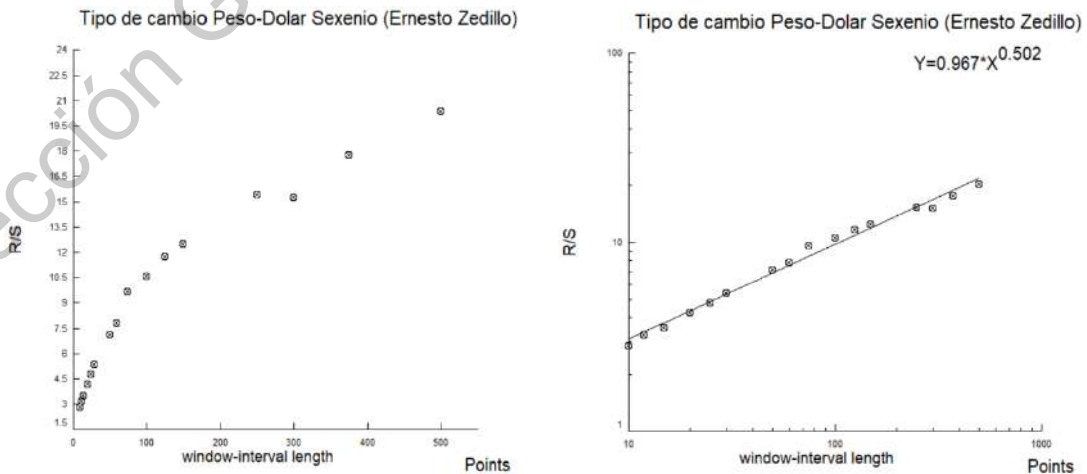
$H_1$ : La serie de tiempo guarda memoria estadística y esta correlacionada de forma positiva o negativa cuando presenta un ruido rosa o negro, si  $H \neq \frac{1}{2}$ .

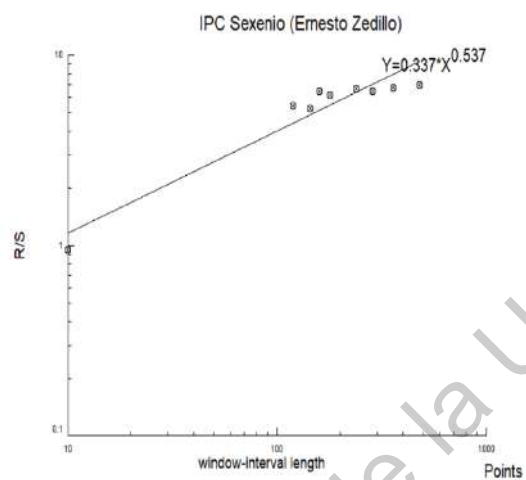
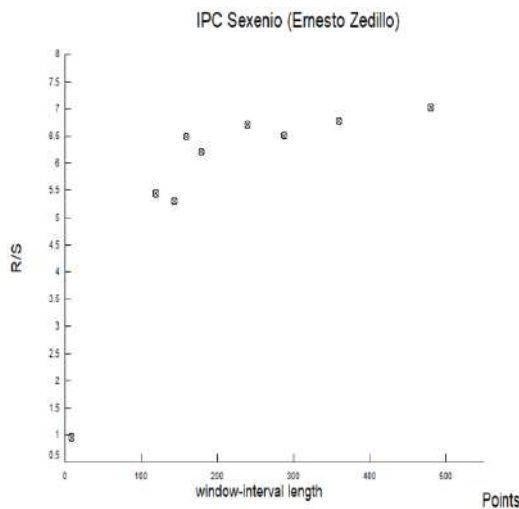
### Resultados para el período I

Este periodo fue significativo para el tipo de cambio en México, ya que a raíz de los asesinatos de Luis Donald Colosio y José Francisco Ruíz Massieu, así como el levantamiento del EZLN se originó una desestabilidad económica en el país la cual impacto al tipo de cambio, dejando flotar libremente el valor del dólar por primera vez en la historia de México. En este periodo el coeficiente de Hurst fue de 0.502 mostrando un comportamiento fractal, evidenciado por la volatilidad en el valor del dólar.

El IPC bajo drásticamente durante la crisis de 1994 en México, antes del "error de diciembre" y "la crisis de 2000" derivada de la burbuja "punto.com", en este análisis el coeficiente de Hurst fue de 0.537, lo cual muestra una memoria estadística característica de un ruido negro al ser una serie de tiempo persistente con comportamiento fractal.

Tabla 8: Gráficas del cálculo del coeficiente de Hurst para el periodo I  
Fuente: Elaboración propia usando software Benoit 1.3



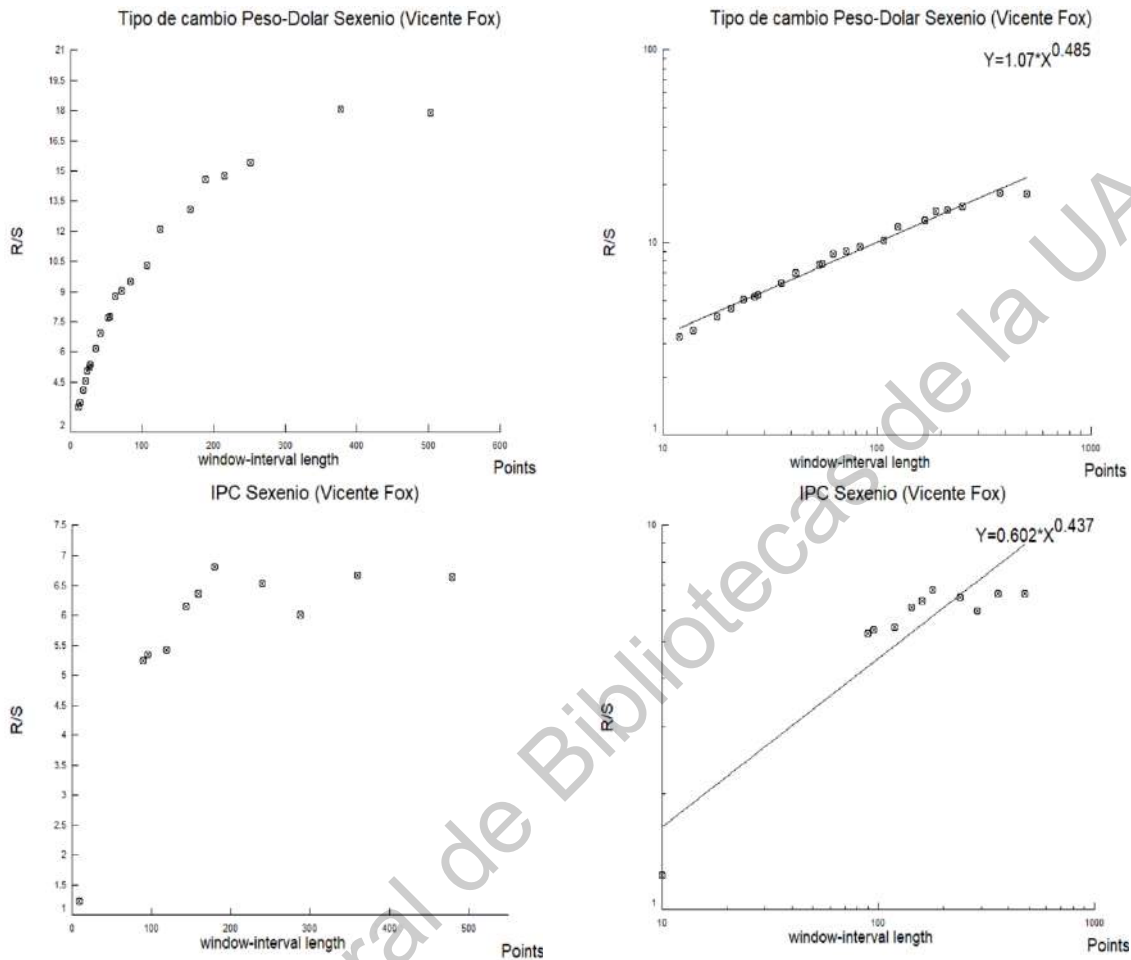


## Resultados para el periodo II

Durante este periodo, el tipo de cambio tuvo una breve y suave recesión en el año 2001 al 2003, causada por contagios de los problemas en E.U.A. y el atentado del 11 de septiembre, rompiendo el soporte en el año 2004 con un histórico de 11.5 pesos por dólar, sin embargo, el estudio muestra que la serie es antipersistente y tiene un ruido rosa, lo cual muestra un periodo de relajación que se vio en la economía del país al tener un coeficiente de Hurst de 0.485.

Por su parte, el IPC se benefició de la abundancia de crédito barato global y de la formación de la colosal burbuja inmobiliaria que años después afectaría a todo el mundo, como se aprecia en las gráficas existe una relajación en el mercado, además, se observa que la serie de tiempo no puede ser estudiada desde la perspectiva de mercados eficientes al tener un coeficiente de Hurst de 0.437.

Tabla 9: Gráficas del cálculo del coeficiente de Hurst para el periodo II  
 Fuente: Elaboración propia usando software Benoit 1.3



### Resultados para el periodo III

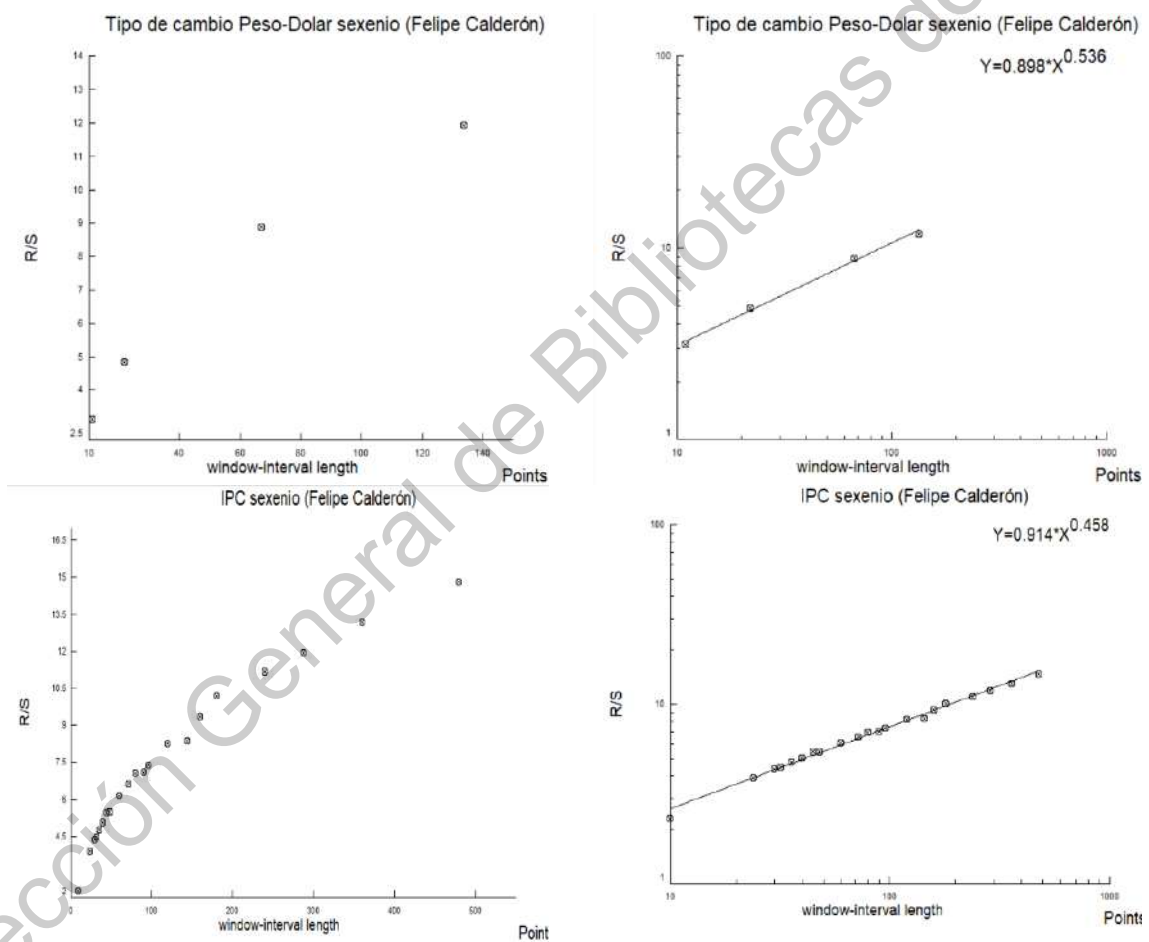
En este lapso, el tipo de cambio rompió la barrera de los 15 pesos originada por la crisis financiera y económica mundial del 2008, después de este año la volatilidad del tipo de cambio aumento gracias a la recesión económica mundial y al proceso de recuperación. Durante este periodo de crisis financiera y mayor volatilidad se observa un aumento en el coeficiente de Hurst, en este caso fue de 0.536.

El IPC fue el más afectado, la BMV se hizo pedazos después de la quiebra de Lehman Brothers teniendo un desenlace poco favorable con un máximo

histórico de 42,592.78 pts. Aunque el coeficiente de Hurst en este caso no muestra una serie antipersistente al ser de 0.458, si se puede observar que desde el sexenio pasado hubo históricos importantes, por lo que en este sexenio se aprecia la acertada decisión del gobierno al usar los fondos de reserva federal para estabilizar la economía, sin embargo, se originó una inflación que afectaría al periodo IV.

Tabla 10: Gráficas del cálculo del coeficiente de Hurst para el periodo III

Fuente: Elaboración propia usando software Benoit 1.3



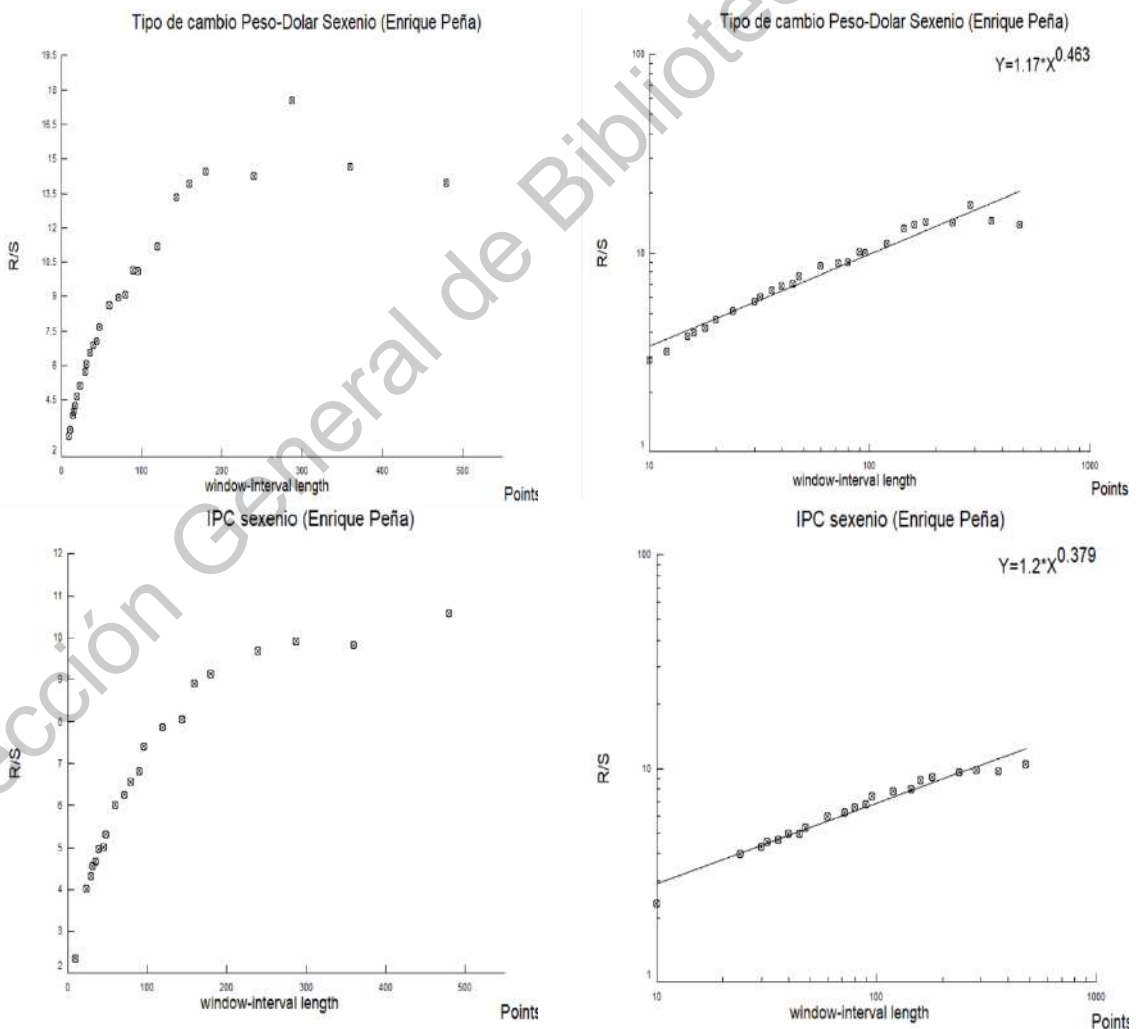
### Resultados para el periodo IV

En este periodo el coeficiente de Hurst es de 0.463 el cual refleja la estabilidad de los primeros dos años, sin embargo, en los siguientes años se

produjo una fuerte depreciación ocasionada por el alza de tasas de interés de la Fed, la baja en el precio del petróleo y el bajo crecimiento del país.

El IPC por su cuenta tuvo un cambio significativo el 5 de junio del 2017 el cual cambio al nombre S&P/BMV IPC, además de actualizar el método para su cálculo al alienarlo a los estándares internacionales. Durante los siguientes años el IPC mostro máximos históricos al alza, dando así un coeficiente de Hurst de 0.379, aunque no estaba exenta de ser un mercado con incertidumbre gracias a la renegociación del TLCAN.

Tabla 11: Gráficas del cálculo del coeficiente de Hurst para el periodo IV  
Fuente: Elaboración propia usando software Benoit 1.3

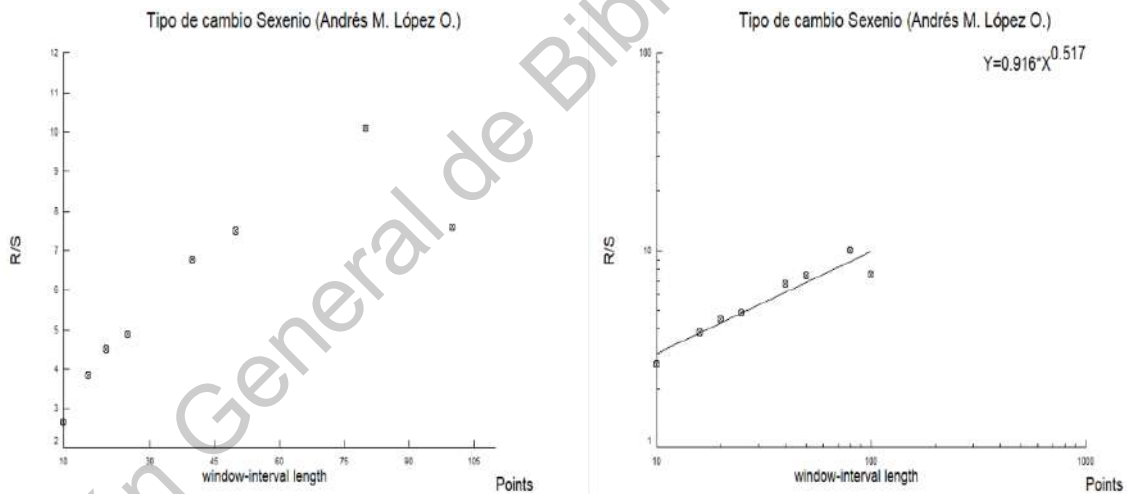


## Resultados para el periodo V

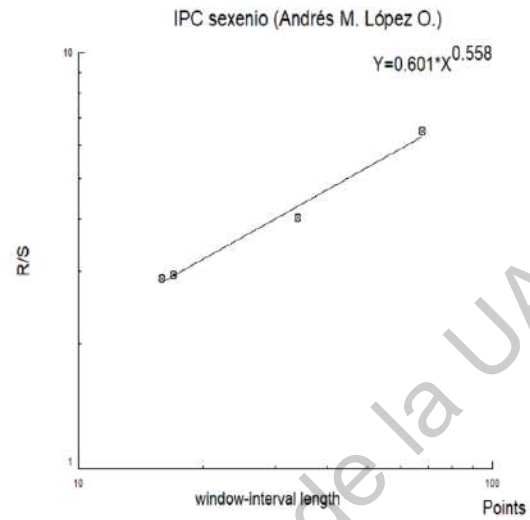
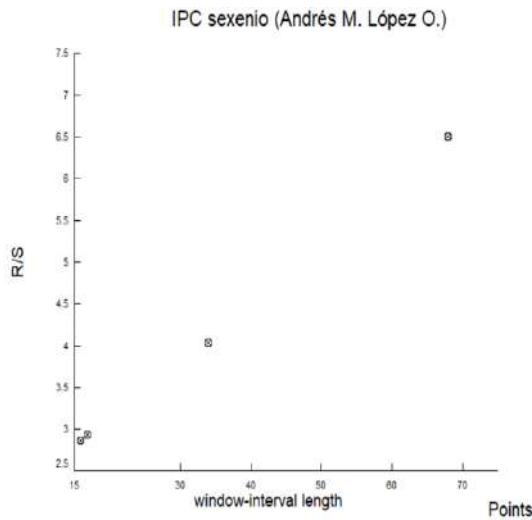
En los primeros años de este periodo aún estaba la renegociación del TLCAN la cual se reflejó directamente en el IPC y tipo de cambio, siendo este último el más afectado al llegar a romper la barrera de los 20 pesos. Además, la pandemia sufrida mundialmente debilitó a la BMV, teniendo pérdidas históricas que impactaron en el S&P/BMV IPC dando lugar a una inflación creciente.

Para este periodo el coeficiente de Hurst fue de 0.517 en el tipo de cambio y de 0.558 en el IPC, donde se observa por segunda vez que la volatilidad de los datos impacta en el cálculo del coeficiente de Hurst.

Tabla 82: Gráficas del cálculo del coeficiente de Hurst para el periodo V  
Fuente: Elaboración propia usando software Benoit 1.3



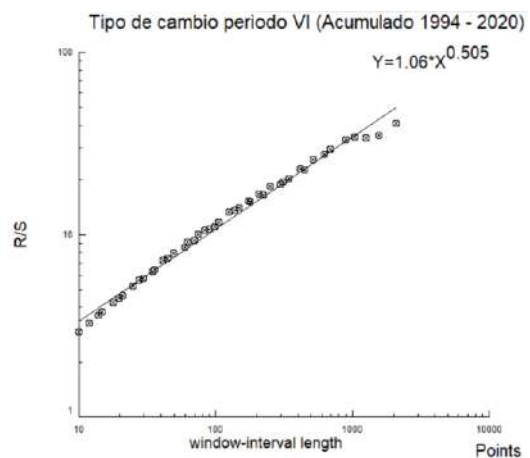
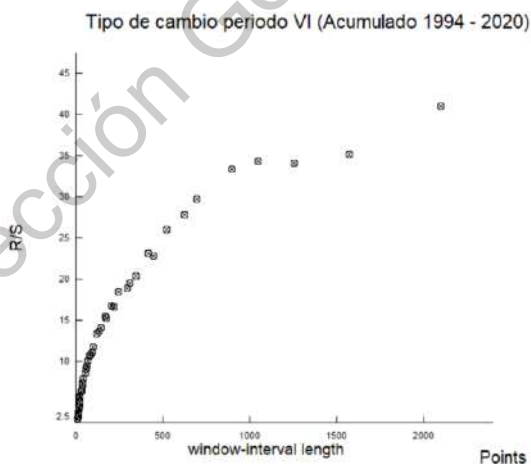


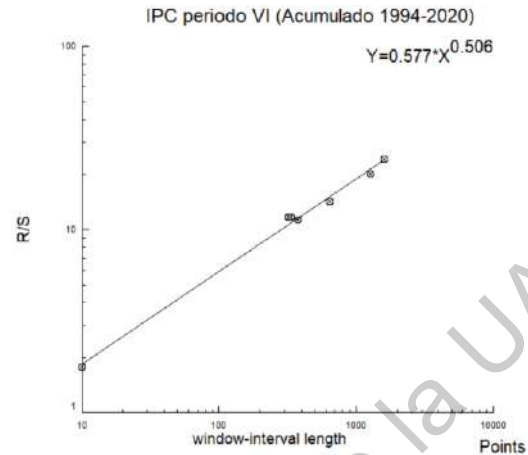
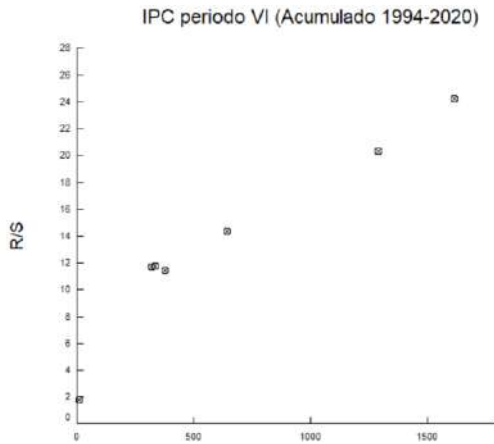


### Resultados para el periodo VI

En el periodo VI se observa el comportamiento del total de datos analizados del año 1994 al 2020, en donde se puede evidenciar que las series de tiempo IPC y tipo de cambio tienen dependencia estadística y son fractales al contar con dimensión fractal, por tanto, existen ciclos de repetición que se observan en periodos alternos como son los sexenios.

Tabla 13: Gráficas del cálculo del coeficiente de Hurst para el periodo VI  
Fuente: Elaboración propia usando software Benoit 1.3





### Resultados generales

En la tabla 14 se puede observar un comportamiento fractal en los periodos I, III, V y VI mostrando memoria estadística en estos lapsos mientras que en los periodos II y IV vemos un comportamiento de ruido rosa donde se puede notar una tendencia de relajamiento del mercado seguida de un impacto negativo como crisis financiera, mientras tanto podemos observar también la dimensión fractal de los periodos teniendo una relación inversa al coeficiente de Hurst.

Tabla 94: Resultado metodología rengu reescalado para el tipo de cambio  
Fuente: Elaboración propia

Periodo	Coefficiente de Hurst	Dimensión fractal	Desviación estándar R/S	Datos	Hipótesis nula
I	0.502	1.498	.0125449	1500 de 1504	Rechaza
II	0.485	1.515	0.0181064	1512 de 1516	Rechaza
III	0.536	1.464	0.0009964	1474 de 1509	Rechaza

IV	0.463	1.537	0.0631376	1440 de 1508	Rechaza
V	0.517	1.483	0.0228060	400 de 439	Rechaza
VI	0.505	1.495	0.0449098	6300 de 6476	Rechaza

En la tabla 15 se puede observar que el IPC tiene un comportamiento atípico a la hipótesis de mercados eficientes, ya que en todos los periodos se rechaza la hipótesis nula, mostrando un comportamiento fractal en los periodos I, V y VI con comportamiento persistente y memoria estadística, cabe mencionar que en este caso el IPC muestra un comportamiento relajado de ruido rosa en los periodos II, III y IV, sin embargo, esto es debido a que la política monetaria del país ha sabido manejar las crisis financieras mediante deuda pública, siendo este un tema de interés en otros trabajos posteriores. Aun así, es evidente que el IPC puede ser estudiada por medio de fractales como herramienta alterna.

*Tabla 15: Resultados metodología rango reescalado para el IPC*  
*Fuente: Elaboración propia*

Periodo	Coefficiente de Hurst	Dimensión fractal	Desviación estándar R/S	Datos	Hipótesis nula
I	0.537	1.463	.0509978	1440 de 1505	Rechaza
II	0.437	1.563	0.0725097	1440 de 1514	Rechaza
III	0.458	1.542	0.0056802	1500 de 1510	Rechaza

IV	0.379	1.621	0.0221696	1440 de 1508	Rechaza
V	0.558	1.442	0.0009681	272 de 327	Rechaza
VI	0.506	1.494	.0039721	6460 de 6476	Rechaza

## CONCLUSIONES

Esta investigación corrobora que algunas series de tiempo económico-financieras pueden ser estudiadas como objetos fractales con ciclos repetitivos al igual que en la teoría de las ondas de Elliot. Por supuesto, existen series de tiempo que se ajustan adecuadamente a las hipótesis y modelos económicos comunes como es el caso del PIB, cuya evidencia muestra que sigue una distribución normal, de modo que esta serie de tiempo conviene ser estudiada aceptando el supuesto de normalidad e independencia estadística.

Por otro lado, el IPC y tipo de cambio parecen ajustarse a la premisa de la teoría del caos. En el caso de la volatilidad en las variaciones de los precios parece más idóneo estudiar esta serie temporal a través de la geometría fractal, más aún al considerar la volatilidad financiera.

En el análisis de crisis financiera se observa un ciclo repetitivo entre un 'ruido rosa' y un 'ruido negro'. La alta volatilidad elimina la existencia de equilibrio de mercado expresado como un 'ruido blanco' o un movimiento browniano estándar, dando lugar solamente a extremos, donde el 'ruido negro' se puede estudiar por medio de fractales, mientras que el 'ruido rosa' es una opción más para el análisis de series de tiempo.

Además, esta investigación detecta la existencia de indicios de una inestabilidad antes de que esta se manifiesta en una crisis financiera. Como se visualiza en la gráfica de abajo, este indicio es la manifestación de una relajación del mercado (ruido rosa) seguida de un comportamiento fractal (ruido negro), lo que da lugar a un patrón repetitivo, donde el precio de mercado tiende a bajar y subir para intentar estabilizar el mercado. Sin embargo, cuando hablamos de mercado hay que tener en cuenta que existen diferentes tipos de oferentes y demandantes por lo que el equilibrio sólo es una referencia nocial.

En el caso del IPC, en particular, una política monetaria adecuada podría coadyuvar a estabilizar el mercado. En tal caso, los modelos económicos comunes son adecuados. Por otro lado, en el caso del tipo de cambio, resulta más difícil modificar a la política monetaria debido a que la conducción de la misma política monetaria depende está en función del tipo de cambio. Por tanto, parece redundante intentar estabilizar el tipo de cambio, aunque esta podría ser indicador más adecuado para medir una crisis financiera de un país.

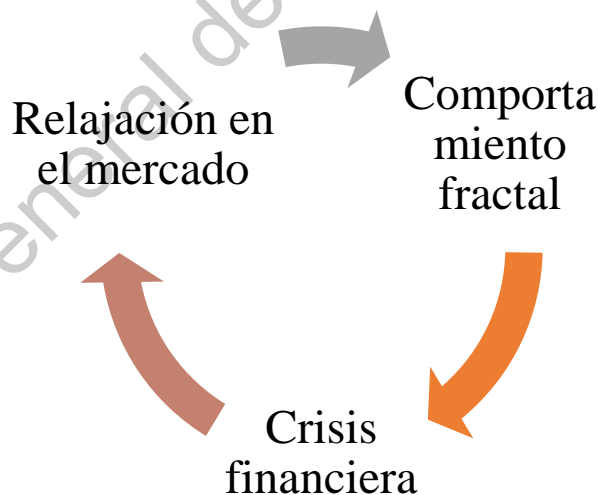


Ilustración 14 Ciclo de comportamiento de series de tiempo  
Fuente: Elaboración propia

En conclusión, es evidente la necesidad de utilizar la geometría fractal en algunas series de tiempo económico-financiera para detectar ciclos y poder hacer inferencias estadísticas. Lo anterior es de gran impacto para los gestores de la política gubernamental, inversionistas e instituciones financieras que promueven el curso de una economía.

Además aún queda abierta la opción de estudiar el relajamiento que se presenta en el mercado mediante el ruido rosa por lo que se puede usar en futuras investigaciones, así mismo también se puede estudiar la creación de políticas monetarias bajo este ciclo fractal dentro del campo de la economía, aunado a esto también podría usarse este ciclo como índice de prevención para el estudio de un portafolio de inversión que tome en cuenta el comportamiento fractal de las series de tiempo financieras de diferentes bienes.

## Referencias

Aguilar, R. (2012). El coeficiente de Hurst y el parámetro  $\alpha$ -estable para el análisis de series financieras. Ciudad de México: Escuela Superior de Economía.

Alvarado, G. (2018). Obtenido de <https://ustamathematica.blogspot.com/2018/05/creacion-de-fractales-con-funciones.html>

Alvarado, G. (22 de Mayo de 2018). UstaMathematica. Obtenido de <https://ustamathematica.blogspot.com/2018/05/creacion-de-fractales-con-funciones.html>

Atencia, V. (2014). Fractales Matemáticos. Barcelona: Tesis. Grado en Matemáticas. Facultad de Matemáticas. Universidad de Barcelona.

Batlle, A. (2008). Fractales en los mercados financieros. Barcelona: Tesina Máster Mercados Financieros. Barcelona School of Management.

BMV. (2019). Obtenido de <https://blog.bmv.com.mx/2019/03/el-indice-de-precios-y-cotizaciones/>

Caputo, R., Nuñez, M. & Valdés, R. (2017). Análisis del tipo de cambio en la práctica. En J. ,. Torres, Estimación y Uso de Variables No Observables en la Región, Vol. 1. Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos, CEMLA.

Davaney, R. (2003). An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Boca Raton, FL: CRC Press Taylor & Francis Group

Dehouve, D. (2017). El fractal: ¿una noción útil para la antropología americanista? SciELO Desacatos.

Diamond. (2011). ¿Qué es el conjunto de Mandelbrot?: Historia y construcción. Obtenido de <https://www.gaussianos.com/%C2%BFque-es-el-conjunto-de-mandelbrot-historia-y-construccion/>

Diego L. D., E. A. (2010). Metodología e interpretación del coeficiente de Hurst. ODEON (Bogotá), 5-6.

Estrada, J. (2018). Una introducción a los conjuntos de Julia y Mandelbrot utilizando variable compleja con estudiantes de grado octavo y noveno en el Centro Educativo Puerto Caldas de la Ciudad de Pereira. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Fabozzi, F., Modigliani, F., & Ferri, M.G. (1996). Mercados e instituciones financieras. México: Prentice Hall.

Fama, E. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. The Journal of Finance, 25(2), 383-417.

Freund, J. E. (2000). Estadística matemática con aplicaciones. México: Pearson Educación.

García, T. (2015). Teoría de Dow y ondas de Elliott: Una aplicación práctica. Madrid: Trabajo de Fin de Grado en ADE. Universidad Rey Juan Carlos.

Grau-Carles, P. (1996). Economía dinámica caótica: Una aplicación al mercado de capitales español. Madrid: Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Departamento de Economía Aplicada III: Política Económica.

INEGI. (2017). Sistema de Cuentas Nacionales de México Fuentes y Metodologías PIB. México: INEGI.

Juárez, G. S. (2007). Procesos Hurst y movimiento browniano fraccional en mercados fractales. Tesis de Doctorado en Finanzas. Ciudad de México: Tecnológico de Monterrey.

Lorenz, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. Journal of the Atmospheric Sciences, 20(2): 130-141.

Luna, G. & Méndez J. (2020). Obtenido de [http://www.comprendamos.org/alephzero/29/orden\\_en\\_el\\_caos.html](http://www.comprendamos.org/alephzero/29/orden_en_el_caos.html)



Madrid, U. C. (2008). Obtenido de <https://www.ucm.es/data/cont/docs/1461-2018-10-08-Caos%20y%20Geometri%CC%81a%20Fractal.pdf>

Madrid, U. P. (2015). Obtenido de [http://www.dma.fi.upm.es/docencia/plan96/sistemas\\_dinamicos/5\\_sd\\_complejos.html](http://www.dma.fi.upm.es/docencia/plan96/sistemas_dinamicos/5_sd_complejos.html)

Mandelbrot, B. (1997). La geometría fractal de la naturaleza. . Barcelona: Tusquets Editores .

Mandelbrot, B. (2006). Fractales y finanzas. Una aproximación matemática a los mercados: arriesgar, perder y ganar. Barcelona: Tusquets Editores.

Milnor, J. (1985). On the concept of attractor. Communications in Mathematical Physics, 99:177-195.

Miranda, R. R. (1995). La teoría de fractales: Aplicación experimental e implicación en la metodología de la ciencia. Nuevo Leon, México: UANL.

Mircea, G. (2002). Stochastic Calculus: Applications in Science and Engineering. Boston: Birkhu-ser.

Montesdeoca, P. (2005). Obtenido de <https://www.personales.ulpgc.es/angelplaza.dma/ficheros/resolver/ficheros/fractales.pdf>

Pérez, A. (2009). La teoría del caos: Las leyes de lo impredecible. Barcelona: Editorial RBA.

Plazas, L., Ávila, M.A. & Moncada, G. (2014). Estimación del exponente de Hurst y dimensión fractal para el análisis de series de tiempo de absorbancia UV-VIS. Revista Ciencia e Ingeniería Neogranadina, 24(2): 133-143

Ramírez, A. (2010). Obtenido de <https://efxto.com/teoria-de-las-ondas-de-elliott>

Rodriguez, R. (1995). La teoría de fractales: Aplicación experimental e implicaciones en la metodología de la ciencia. Monterrey: Tesis en Maestría

en Metodología de la Ciencia, Facultad de Filosofía y Letras, División de Postgrado, Universidad Autónoma de Nuevo León.

Rodriguez, R. (2014). El coeficiente de Hurst y el parámetro  $\alpha$ -estable para el análisis de series financieras. Aplicación al mercado cambiario mexicano. *Contaduría y Administración*, 59(1), 149-173.

Sahab A. R., Ziabari M. T. & Modabbernia, M. R. (2010). Synchronization Rössler chaos via optimal backstepping method. (págs. 919-922). Xi'an, China: IEEE International Conference on Mechatronics and Automation.

Shiller, R. J. (2000). *Irrational Exuberance*. New Jersey: Princeton University Press.

Sierra, G. (2007). *Procesos Hurst y movimiento Browniano fraccional en mercados fractales*. México: Tesis Doctoral. Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México.

Valdés, P. (2016). *Introducción a la geometría fractal*. Concepción, Chile: Tesis. Facultad de Educación y Humanidades, Departamento de Ciencias de la Educación, Escuela de Pedagogía en Matemática, Universidad del Bio-Bio.

Zenovi, B. (2008). Peirce y el orden del azar. Obtenido de <https://www.pagina12.com.ar/diario/suplementos/rosario/14-15671-2008-10-19.html>