



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CONSTRUCCIÓN DE UN VÉRTICE NO PERTURBATIVO  
MEDIANTE LAS IDENTIDADES TRANSVERSAS DE  
TAKAHASHI USANDO LAS ECUACIONES DE  
SCHWINGER-DYSON D-DIMENSIONAL

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**Licenciatura en Ingeniería Física**

PRESENTA:

**María Guadalupe Morales Trejo**

DIRECTOR:

Dr. Adolfo Huet Soto

Querétaro, Querétaro, Enero 2021



Dirección General de Bibliotecas UAQ

*A mi mamá por su fuerza. A mi papá por su apoyo.  
Y mis abuelitos por su presencia.  
En verdad, gracias.  
Yo.*

Dirección General de Bibliotecas UJAQ

Dirección General de Bibliotecas UAQ

# Reconocimientos

---

*Antes que nada quiero agradecer al Dr. Huet por permitirme realizar mi proyecto de grado con él y brindarme parte de su tiempo cada viernes para aclarar la inmensa cantidad de dudas que surgían al adentrarme en el tema.*

*De igual manera quiero agradecer al doctor Bashir por su apoyo constante a lo largo de este viaje y por su confianza al permitirme trabajar con él a pesar de que mis conocimientos eran los básicos. Muchas gracias por todas las oportunidades que me brindó.*

*Así mismo, me gustaría agradecer al doctor Luis Albino por compartirme un poco de su conocimiento y siempre estar abierto a cualquier duda que se me presentara, muchas gracias por su ayuda constante.*

*Especialmente quiero agradecer a mi familia por su gran apoyo a lo largo de la carrera y finalmente en el desarrollo de este proyecto. Muchas gracias por su paciencia en cada momento de frustración y su presencia y cariño para sobreponerme.*

*A mis tías y primos, quienes constantemente se interesaban en mis avances y me impulsaban a continuar.*

*A mi Universidad y maestros, quienes me dieron mi formación académica y abrieron mi mente hacia nuevos horizontes.*

*A Freya y Bagheera por traerme paz en momentos complicados.*

*Finalmente, quiero agradecer a Elisa, Diana, Ambar, Cris, Maggie y a todos mis amigos de los cuales siempre recibí palabras de ánimo en los momentos precisos.*

*Un agradecimiento especial a Odín, quien compartió conmigo su vasta colección de libros sin los cuales no lo hubiera logrado.*

*A todas aquellas personas que estuvieron conmigo a lo largo de este trayecto, sinceramente, muchas gracias.*

Dirección General de Bibliotecas UAQ

# Resumen

---

En este trabajo de tesis se presenta la construcción de un *Ansatz* para el vértice fermión-fotón no perturbativo en  $d$ -dimensiones en el espacio Euclidiano. Este *Ansatz* debe cumplir los fundamentos básicos de la electrodinámica cuántica y ser covariante de norma. Para poder realizar este trabajo se necesita hacer uso de las ecuaciones de Schwinger-Dyson que son las ecuaciones de movimiento de una teoría cuántica de campos. Gracias al trabajo de Ball-Chiu se sabe que el vértice fermión-fotón puede ser dividido en su parte longitudinal y transversa. Ball y Chiu presentan un vértice longitudinal libre de singularidades cinemáticas y con sus factores de forma bien definidos mediante las Identidades de Ward-Fradkin-Green-Takahashi, sin embargo, dejan la parte transversa completamente indeterminada. En este trabajo se aplican las Identidades Transversas de Takahashi, las cuales incorporan las llamadas funciones  $Y_i(k, p)$ , para lograr construir la parte transversa del vértice en  $d$ -dimensiones, ya que estudios recientes han mostrado que estas identidades proporcionan información relevante sobre sus factores de forma. Finalmente, se estudia la ecuación del gap en el límite no masivo con la aproximación  $qQED$  para obtener información de las funciones  $Y_i(k, p)$  y garantizar la renormalizabilidad multiplicativa.

# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Electrodinámica Cuántica</b>	<b>4</b>
2.1. Preliminares	4
2.1.1. Tensores Covariantes y Contravariantes	4
2.1.1.1. La Métrica	6
2.1.2. Covariancia e Invariancia de Lorentz	8
2.2. Teoría Cuántica de Campos	8
2.2.1. Escalares: Campos de espín 0	11
2.2.1.1. Densidad de Probabilidad	12
2.2.1.2. Problemas con la ecuación de Klein-Gordon	14
2.2.2. Espinores: Campos de espín $\frac{1}{2}$	14
2.2.2.1. Densidad de Probabilidad	17
2.2.2.2. Mar de Dirac	19
2.2.2.3. En Teoría Cuántica de Campos	19
2.2.2.4. El propagador de fermión	20
2.2.3. Vectores: Campos de espín 1	21
2.2.3.1. Notación 4-vector	24
2.2.3.2. En Mecánica Cuántica Relativista	26
2.2.3.3. En Teoría Cuántica de Campos	26
2.2.3.4. Propagador de Fotón	26
2.3. Cuatro fuerzas interactuantes	27
2.3.1. Electrodinámica Cuántica	28
2.3.1.1. En RQM	30
2.3.1.2. En QFT	31
2.3.1.3. Propagadores a n-lazos	32
<b>3. Ecuaciones de Schwinger Dyson</b>	<b>33</b>
3.1. Régimen perturbativo vs no perturbativo	33
3.1.1. Ecuaciones de Schwinger Dyson del propagador fermiónico	34
3.2. Identidades y Transformaciones	37
3.2.1. Identidad de Ward-Fradkin-Green-Takahashi	37
3.2.2. Identidades Transversas de Takahashi	38

3.3. Renormalización Multiplicativa . . . . .	42
3.4. Regularización Dimensional . . . . .	44
<b>4. Vértice fermión-fotón no perturbativo</b>	<b>45</b>
4.1. Vértice Longitudinal . . . . .	47
4.2. Vértice Transverso . . . . .	48
4.2.1. Obtención de las funciones $\tau_i(k, p)$ aplicando las TTI . . . . .	49
4.2.1.1. $Tr\{I_D T T I_1\}$ . . . . .	50
4.2.1.2. $Tr\{I_D T T I_2\}$ . . . . .	52
4.2.1.3. $Tr\{\gamma \cdot k T T I_1\}$ . . . . .	56
4.2.1.4. Desacople de las 8 ecuaciones . . . . .	59
4.2.1.5. Aplicando criterios de simetría . . . . .	61
<b>5. Ecuación del Gap</b>	<b>64</b>
5.1. Ecuación del gap multiplicada por 1 . . . . .	65
5.1.1. Segundo término del RHS de (5.4) . . . . .	66
5.1.1.1. Término $A(k, p)$ . . . . .	67
5.1.1.2. Término $B(k, p)$ . . . . .	67
5.1.1.3. Segundo término del RHS de (5.4) completo . . . . .	67
5.1.2. Ecuación del gap multiplicada por 1 completa . . . . .	69
5.2. Ecuación del gap multiplicada por $\gamma \cdot k$ . . . . .	69
5.2.1. Segundo término del RHS de (5.23) . . . . .	70
5.2.1.1. Término $C(k, p)$ . . . . .	71
5.2.1.2. Término $D(k, p)$ . . . . .	72
5.2.1.3. Segundo término del RHS de (5.23) completo . . . . .	75
5.2.2. Ecuación del gap multiplicada por $\gamma \cdot k$ completa . . . . .	76
<b>6. Renormalización Multiplicativa</b>	<b>77</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>80</b>
<b>A. Álgebra de Dirac en d Dimensiones</b>	<b>81</b>
<b>B. Estudio de la simetría</b>	<b>83</b>
B.1. Primer método . . . . .	84
B.2. Segundo método . . . . .	86
B.3. Funciones $Y_6^S, Y_7^A$ y $Y_8^S$ . . . . .	90
<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>

# Lista de Abreviaciones

---

CM	Mecánica Clásica
DCSB	Rompimiento Dinámico de la Simetría Quiral
LHS	Lado izquierdo
MR	Renormalización Multiplicativa
NRQFT	Teoría Cuántica de Campos no Relativista
QCD	Cromodinámica cuántica
QED	Electrodinámica Cuántica
QFD	Dinámica cuántica de sabores
QFT	Teoría Cuántica de Campos
QM	Mecánica Cuántica
qQED	Quenched QED
R-GE	Ecuaciones de Grupos de Renormalización
RHS	Lado derecho
RQM	Mecánica Cuántica Relativista
SDE	Ecuaciones de Schwinger Dyson
SM	Modelo Estándar
TTI	Identidades Transversas de Takahashi
WFGTI	Identidad de Ward Fradkin Green Takahashi

---

## Capítulo 1

# Introducción

---

“Miré a la avenida de Álvaro Obregón y me dije: Voy a guardar intacto el recuerdo de este instante porque todo lo que existe ahora mismo nunca volverá a ser igual.”

**-Las batallas en el desierto, José Emilio Pacheco-**

Durante años el ser humano ha explorado la naturaleza para saber de donde viene y hacia donde va, utilizando como herramienta principal la física.

Uno de los interrogantes fundamentales que se hicieron físicos y filósofos fue: ¿Por qué si la naturaleza está en continuo cambio sigue existiendo y no acaba?. El pionero de esta pregunta fue el filósofo Demócrito de Alba (ca. 460 a.C. - ca. 370 a.C.), quien propone un modelo atómico para responder esta pregunta: La materia está hecha de átomos indivisibles e indestructibles cuyas combinaciones explican sus cambios y a la vez su permanencia. Esta era la primera vez que se hablaba del átomo, una unidad mínima en una sustancia, que es la misma definición del átomo de nuestros días.

Durante muchos años prevaleció esta respuesta filosófica, sin embargo, en el siglo XIX con el avance de resultados empíricos que arrojaba la química, John Dalton propuso un modelo atómico con el principio de que los átomos no pueden crearse, dividirse ni destruirse.

A finales del siglo XIX se identificó el electrón, gracias al electromagnetismo, rompiendo la idea de Dalton de que los átomos son indivisibles, y en el siglo XX se descubrió la radiactividad que vuelve a ser un punto en contra del modelo de Dalton, ya que comprobó que los átomos se pueden desintegrar de manera espontánea emitiendo radiaciones.

Con esta idea de la radiación, la comunidad científica comenzó a experimentar, especialmente con la radiación electromagnética ( $\gamma$ ), abriendo las puertas para estudiar los áto-

## 1. INTRODUCCIÓN

---

mos en escalas antes inimaginables, surgiendo con esto la mecánica cuántica y finalmente la comprensión de la estructura fundamental del átomo.

En este punto se introduce un nuevo número cuántico llamado espín, que divide a las partículas en dos grandes bloques: bosones (espín  $n$ , donde  $n$  es un entero), y fermiones (espín semientero  $n + \frac{1}{2}$ , donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Los fermiones son los constituyentes de la materia y obedecen el principio de exclusión de Pauli, el cual prohíbe que dos partículas coexistan en el mismo estado cuántico de energía. Por otro lado, los bosones no tienen esta limitante, perfectamente pueden coexistir en el mismo estado de energía, son las partículas asociadas con las interacciones.

Uno de los grandes logros que surgió con la mecánica cuántica fue la famosa *ecuación de Schrödinger*, la cual parte de la naturaleza ondulatoria de las partículas para describir su movimiento mediante una ecuación de onda. Esta *ecuación de Schrödinger* va incorporando nuevos componentes conforme la teoría va avanzando, por ejemplo, se agrega el espín cuando se tiene a la partícula en presencia de un campo magnético; pero llega un punto en que esta ecuación deja de ser viable: a altas velocidades, cuando la velocidad de la partícula tiende a la velocidad de la luz. Es en este punto donde vale la pena recalcar la importancia que tienen los rangos de velocidad y escala para definir cada teoría, ya que cada una tiene sus límites y no por esto implica que la teoría está mal, simplemente que al movernos en estos parámetros, de velocidad y escala, cada teoría llega a su límite. El siguiente recuadro muestra perfectamente la ubicación de cada teoría dependiendo de la velocidad y el tamaño del objeto de estudio. Es importante mencionar que la mecánica cuántica <sup>1</sup> está diseñada para una partícula, a diferencia de una **Teoría Cuántica de Campos** (QFT por sus siglas en inglés), la cual está diseñada para manejar procesos en los que el número de partículas no es constante. En esta tesis se trabajan partículas fundamentales de velocidades altas, por lo tanto, se trabajará en el rango de la QFT.

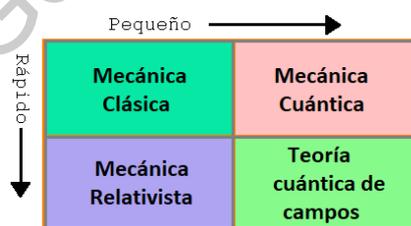


Figura 1.1: Rangos de velocidad y escala donde se desarrolla cada teoría

Una de las QFT más precisas experimentalmente es la **Electrodinámica Cuántica** (QED), que es justamente la QFT con la que se trabajará esta tesis debido a que es la teoría que solventa la interacción fermión-fotón, es decir, **el vértice fermión-fotón**. El estudio de este vértice sigue siendo un problema importante en QED [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

---

<sup>1</sup>Al agregar la relatividad a esta teoría permite la conversión de masa en energía

---

La *identidad de Ward Fradkin Green Takahashi* (WFGTI) [8, 9] es una herramienta muy útil que permite dividir el vértice en dos partes, la parte longitudinal y la parte transversa. La parte longitudinal está completamente determinada por la WFGTI, obteniendo una expresión de tres funciones escalares [5]. Sin embargo, no existe un camino claro para desarrollar una expresión equivalente de la parte transversa y se requiere un trabajo más arduo.

Gracias a técnicas no perturbativas se ha logrado proponer *Ansatz* de los factores de forma<sup>1</sup> del vértice transversa para 2 y 3 dimensiones espaciales, pero resulta imprescindible preguntarse qué pasaría en  $d$ -dimensiones<sup>2</sup> no perturbativa que a su vez incluya todos los casos anteriores como situaciones particulares. En principio, para la construcción del vértice no perturbativo pueden emplearse las Identidades Transversas de Takahashi, pero durante muchos años no han recibido atención debido a su complejidad, sin embargo, estudios recientes [1] han encontrado nuevos métodos que hacen su aplicación más asequible.

Al estudiar el vértice completo en  $d$ -dimensiones obtenemos expresiones gracias a las cuales se pueden analizar de manera más clara los principios de renormalización del vértice; así mismo, se pueden estudiar con mayor claridad las propiedades con dependencia de norma que resultan del truncamiento de las ecuaciones de Schwinger Dyson. La idea de realizar la construcción del vértice en  $d$ -dimensiones es para tener una teoría más completa y examinar sus aplicaciones en bajas dimensiones, tanto en QED común, a altas temperaturas, en presencia de campos magnéticos y en física de materiales. Actualmente el vértice no perturbativo  $d$ -dimensional es un tema de estudio con líneas abiertas en el área de física de altas energías y en materia condensada.

La tesis está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se presenta a grandes rasgos un acercamiento a la teoría de la QED, la primer QFT, la cual se desarrolla con aproximaciones perturbativas, sin embargo, en el régimen no perturbativo ocurren fenómenos que la teoría de perturbaciones no logra explicar. Para estudiar la teoría en regímenes no perturbativos es necesario utilizar otro mecanismo, en este caso se utilizan las Ecuaciones de Schwinger Dyson; en el capítulo 3 se detallan estas ecuaciones. En el capítulo 4 se muestran los cálculos para construir un *Ansatz* para el vértice fermión-fotón no perturbativo. Posteriormente, en el capítulo 5, se estudia la ecuación de Schwinger-Dyson para el fermión y finalmente en su límite no masivo para garantizar la renormalización multiplicativa, lo cual se detalla en el capítulo 6.

---

<sup>1</sup>Son funciones que encapsulan las propiedades de una determinada interacción de partículas mediante la dependencia del momento de los elementos de matriz.

<sup>2</sup>La QED como tal no es renormalizable para  $d > 4$ .

---

## Capítulo 2

# Electrodinámica Cuántica

---

“...y él siempre estaba allí, contemplando el frío brillo de las estrellas, admirando el increíble enjambre nebuloso de un racimo de estrellas, como una conglomeración gigante de luciérnagas sorprendidas en pleno vuelo y detenidas para siempre.”

-Fundación, Isaac Asimov-

La QED, además de ser un pilar fundamental para la física de altas energías, tiene aplicaciones tecnológicas novedosas, en particular cuando se trata de sistemas de dos dimensiones espaciales. Tiene aplicaciones en el área de materia condensada para el desarrollo de materiales superconductores de altas temperaturas, materiales antiferromagnéticos y en el grafeno. Pero, antes de adentrarnos en el intrigante y novedoso mundo de QED, es necesario comprender las bases que lo fundamentan.

## 2.1. Preliminares

### 2.1.1. Tensores Covariantes y Contravariantes

Los tensores covariantes y contravariantes son conceptos que permiten representar los vectores y tensores de manera que se pueda seguir cierto proceso matemático, tales como encontrar la magnitud de un vector en un espacio curvo o el tiempo propio de una partícula en relatividad especial [10]. Es necesario recalcar que este procedimiento se realiza en el espacio de Minkowski, un espacio plano con tres dimensiones espaciales y una temporal.

Para familiarizarse con la terminología empecemos por definir la longitud de un vector en un sistema cartesiano de 3 dimensiones

$$(l)^2 = (X_1)^2 + (X_2)^2 + (X_3)^2 = X_i X_i \quad (2.1)$$

donde los índices  $i$  indican una suma, contracción hecha gracias a la notación de Einstein, que hace implícita la suma sobre los índices que se repiten. La ecuación (2.1) puede expresarse como una multiplicación matricial, de tal manera que

$$(l)^2 = [X_1 \ X_2 \ X_3] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = [X_1 \ X_2 \ X_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

la matriz identidad que se agregó no afecta el resultado, no obstante representa un papel importante, siendo la *delta de Kronecker*, definida como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.3)$$

con esto se concluye que la ecuación (2.1) puede expresarse como

$$(l)^2 = X_i \delta_{ij} X_j \quad (2.4)$$

Ahora pasemos esta idea al espacio-tiempo de la teoría de la relatividad especial. En este caso en lugar de tener una "longitud" se va a tener el *tiempo propio*  $\tau$ , el cual es el tiempo medio en que un objeto pasa por nosotros, es decir, desde el marco de referencia del observador [11]. La coordenada cero va a ser una coordenada temporal.

$$(c\tau)^2 = (ct)^2 - (X_1)^2 - (X_2)^2 - (X_3)^2 \quad (2.5)$$

Notemos que ahora la métrica es diferente a la expresada en la ecuación (2.1) que solo tomaba en cuenta un sistema cartesiano de 3 dimensiones. La ecuación (2.5) también se puede expresar de manera matricial

$$(c\tau)^2 = [ct \ X_1 \ X_2 \ X_3] \begin{bmatrix} ct \\ -X_1 \\ -X_2 \\ -X_3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

el problema aquí es que no podemos usar la notación de Einstein porque no se tiene una suma, en lugar de eso se van a renombrar los términos, de manera que

$$x^\mu = \begin{bmatrix} ct \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_\mu = \begin{bmatrix} ct \\ -X_1 \\ -X_2 \\ -X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

y de esta manera la ecuación (2.5), el tiempo propio, se puede reducir a

$$(c\tau)^2 = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 = x^\mu x_\mu \quad (2.8)$$

a la componente  $x^\mu$  se le conoce como el *componente contravariante* mientras que a  $x_\mu$  *componente covariante* del mismo vector, teniendo en cuenta que la parte covariante lleva un signo negativo en sus coordenadas espaciales y por el contrario la parte contravariante tiene positiva su parte espacial.

La gran importancia de estos componentes covariantes y contravariantes radica en que nos ayuda a encontrar la longitud de las cantidades físicas que se componen de cuatro componentes espacio-temporales, normalmente llamadas *4-vectores*, algunos ejemplos son la *4-velocidad*  $u^\mu$ , *4-momento*  $p^\mu$ , *4-fuerza*  $f^\mu$ , etc.

Las derivadas parciales con esta notación, es decir, con respecto a la componente contravariante  $x^\mu$  o a la componente covariante  $x_\mu$  se expresan como

$$\begin{aligned} \partial^\mu \phi &= \phi^{,\mu} \\ \partial_\mu \phi &= \phi_{,\mu} \end{aligned}$$

las cuales se calculan

$$\begin{aligned} \partial^\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^T = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial X_i} \right)^T = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)^T \\ \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^T = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial X_i} \right)^T = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)^T \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 2.1.1.1. La Métrica

Notemos que si agregamos una matriz a la definición de la componente covariante es posible subir el índice, es decir

$$x_\mu = \begin{bmatrix} ct \\ -X_1 \\ -X_2 \\ -X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (2.10)$$

a esta matriz se le conoce como la métrica  $g_{\mu\nu}$ , o *métrica covariante*. La inversa de esta matriz tiene la misma forma y normalmente se le llama *métrica contravariante*  $g^{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

La métrica contravariante es usada para cambiar el índice del componente contravariante

$$x^\mu = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (2.12)$$

Teniendo esto en cuenta, es posible reescribir la ecuación (2.8) a la forma

$$(c\tau)^2 = x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu \quad (2.13)$$

que es una expresión análoga a la que se muestra en la ecuación (2.4), con la diferencia de que en la ecuación (2.4) se observa claramente que en un espacio Cartesiano la métrica es la matriz identidad [10]. Por lo tanto, se puede concluir que la métrica aporta bastante información sobre el espacio de coordenadas en que se este trabajando.

Con esta información en mente, el producto escalar se puede definir como

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu \quad (2.14)$$

Debemos tener en cuenta que al trabajar en espacio Euclidiano la métrica toma la forma de la matriz identidad

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

y con esto, el producto punto

$$x \cdot y = x_\mu y_\mu \quad (2.16)$$

en el espacio Euclidiano no se distingue entre componente covariante o contravariante; es necesario tomar este punto en cuenta ya que este trabajo esta basado en el espacio Euclidiano.

### 2.1.2. Covariancia e Invariancia de Lorentz

La *invariancia de Lorentz* se refiere a que un escalar mantiene su magnitud al cambiar a un sistema de referencia primado. Por otro lado, la *covariancia de Lorentz* ocurre cuando la longitud de un vector en el espacio-tiempo permanece igual al cambiar de sistema coordenado.

En el caso de una QFT, las ecuaciones de onda relativista se escriben usando notación covariante y contravariante. Al cambiar a un nuevo sistema de referencia la ecuación de onda tiene la misma forma<sup>1</sup>, con lo que se dice que es *invariante de Lorentz*. Esta característica nos asegura que las mismas leyes de la naturaleza gobiernan sobre este nuevo sistema de referencia; por lo cual, para que una QFT sea válida debe obedecer la *invariancia de Lorentz*.

Como lo menciona el autor Robert D. Klauber, [10], en la literatura normalmente la terminología covariancia e invariancia de Lorentz son intercambiables, ya que la forma de la ecuación es invariante y los vectores en la ecuación son covariantes.

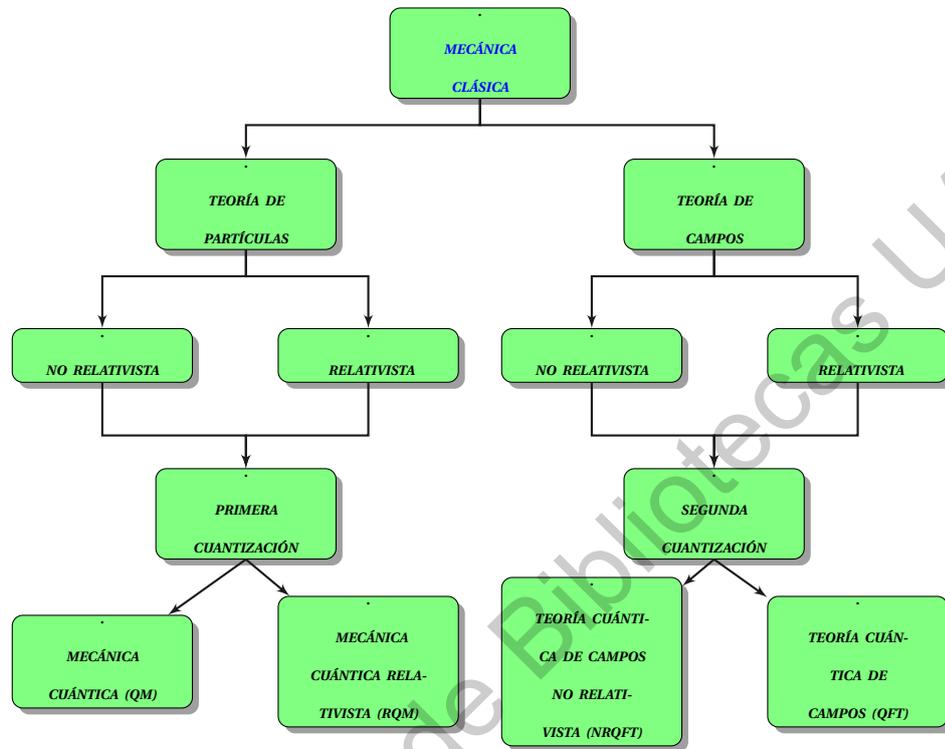
## 2.2. Teoría Cuántica de Campos

Antes de la QFT está la Mecánica Cuántica (QM), que basa su estudio en el tratamiento de partículas individuales inmersas en un potencial o en el vacío, tal es el caso del oscilador armónico y la partícula en la caja, por mencionar algunos. Una característica de esta teoría es que las partículas no sufren transmutaciones a lo largo de la interacción, es decir, un electrón seguirá siendo un electrón todo el tiempo. Sin embargo, experimentalmente se ha probado que las transmutaciones de partículas son posibles, además de que pueden decaer en partículas elementales. La QM no puede resolver estos problemas; es en este punto cuando llega la QFT que muestra el camino para resolver los problemas de aniquilación, transmutación y decaimiento de partículas, teniendo la ventaja de ser una teoría relativista.

Es necesario aclarar que la QFT no es la Mecánica Cuántica Relativista (RQM). Para llegar a este punto partamos de la Mecánica Clásica (CM). En la CM se utilizan los paréntesis de Poisson para describir la evolución de un sistema cuyo estado cambia en el tiempo, esto a partir de dos variables dinámicas: la posición ( $x_i$ ) y el momento ( $p_{x_i}$ ), simbólicamente representados como  $\{x_i, p_{x_i}\}$ . La manera de llegar a la QM es convertir estas variables dinámicas en operadores, sin embargo, posteriormente se dieron cuenta que existía otra manera de cuantizar, partiendo de los paréntesis de Poisson y convirtiéndolos en conmutadores, de esta manera las variables dinámicas se convierten en operadores.

---

<sup>1</sup>Al cambiar a otro sistema de referencia se van a tener diferentes valores numéricos en las componentes del vector, sin embargo, las relaciones entre los componentes del vector serán iguales, a esto se le dice que tiene la *misma forma* [10].



**Figura 2.1:** Diagrama que representa las características de cada teoría.

En la CM es posible trabajar tanto con partículas como con campos, y para cada caso se tiene una teoría relativista y no relativista. Al hablar de partículas me refiero a objetos puntuales localizables en el espacio, mientras que al hablar de campos se entienden como entidades distribuidas en el tiempo. Traspasando esta idea a la QM también es posible trabajar con partículas y campos, cada teoría de manera relativista y no relativista, es aquí donde surge la QFT, una teoría cuántica relativista aplicada en campos. El término primera cuantización surge cuando una teoría de partículas se pasa del régimen clásico al cuántico, mientras que la segunda cuantización se refiere a pasar una teoría de campos del régimen clásico al cuántico. En el diagrama de la figura 2.1 se puede seguir gráficamente esta idea.

Esta cuantización se le conoce como cuantización canónica, ya que se parte de variables canónicas, pero se debe tener en cuenta que existe otra manera de llegar a la QFT, mediante aproximaciones por integrales de camino, a esto se le llama cuantización funcional.

Al estar en una teoría de campos todas sus variables dinámicas dejan de ser valores totales y pasan a ser densidades que varían de un punto al otro, la masa pasa a ser una densidad de masa, el momento a una densidad de momento, el Lagrangiano a una densidad Lagrangiana, etc. El tiempo  $t$ , por otro lado, deja de ser una variable independiente a tener la forma

## 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

---

$$x^\mu = x^0, x^1, x^2, x^3 = t, x^i$$

con esto, la posición de la partícula pasaría de ser  $x^i(t)$  a  $\phi(x^\mu)$ , donde  $\phi$  es un campo. Al sintetizar esta información se llega a la tabla 2.1.

Teoría de Partículas	Teoría de Campos
Lagrangiano	Densidad Lagrangiana
Hamiltoniano	Densidad Hamiltoniana
$t$	$x^\mu$
$x^i(t)$	$\phi(x^\mu)$

**Tabla 2.1:** Cambio de notación de teoría de partículas a teoría de campos

Una de las características por la cual se utiliza la teoría cuántica de campos relativista y no la no relativista es que el comportamiento de las partículas es relativista, no obstante, la NRQFT tiene algunas áreas de trabajo donde no se requiere tomar en cuenta la relatividad, tal es el caso de la física de la materia condensada.

Las teorías de RQM y QFT son muy similares entre sí ya que ambas incluyen la relatividad especial en sus fundamentos, la gran diferencia, como ya se vió, es que en una se trabajan con partículas mientras que en la otra con campos, además que la interpretación de sus soluciones es muy diferente. Las soluciones de la función de onda en RQM son estados (partículas o *kets*) y por el otro lado, las soluciones en la QFT se interpretan como operadores que crean y destruyen estados. Esta interpretación es muy importante pues permite la transmutación de partículas de un tipo a otro. Otra gran diferencia entre las dos teorías es que en RQM se trabajan con estados de una sola partícula, a diferencia de QFT, donde trabaja con estados de múltiples partículas; esta observación es de suma importancia porque gracias a esto se concluye que la QFT envuelve a la teoría RQM.

La QFT y RQM necesitan una ecuación de Schrödinger relativista, esta ecuación varía de acuerdo a cada espín pero es la misma en ambas teorías al igual que la forma de sus soluciones. Las partículas con espín cero, como el bosón de Higgs, son conocidas como *escalares* y la ecuación de Schrödinger relativista que obedecen es la **ecuación de Klein-Gordon**, descubierta por los científicos Oscar Klein y Walter Gordon. En el caso de las partículas que tienen espín 1/2 se les conoce como *espinores*, el ejemplo más conocido es el electrón, y se rigen por una ecuación de Schrödinger diferente, la **ecuación de Dirac** descubierta por Paul Dirac. Finalmente, las partículas con espín 1 son conocidas como *vectores*, la ecuación de Schrödinger relativista para estas partículas fue descubierta por Alexandru Proca, por lo cual se nombró como la **ecuación de Proca**, sin embargo, esta ecuación es solo para partículas

masivas con espín 1, para partículas no masivas, como el caso de los fotones, se utilizan las **Ecuaciones de Maxwell**. A continuación, se estudiarán cada uno de estos casos.

### 2.2.1. Escalares: Campos de espín 0

El primer intento que la comunidad científica hizo para obtener una ecuación de Schrödinger relativista resultó en la ecuación de Klein-Gordon. Para esto realizaron el mismo proceso que se usa para obtener la ecuación de Schrödinger no relativista

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = 0 \quad (2.17)$$

pero en lugar de tomar la relación de energía y momento clásica, tomaron la relación energía-momento relativista que se obtiene del vector 4 – *momento*, el cual, al ser covariante de Lorentz, garantiza que su longitud en el espacio de 4 dimensiones sea invariante

$$p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu p^\mu = m^2 c^2$$

$$\begin{bmatrix} E/c & p^1 & p^2 & p^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E/c \\ -p^1 \\ -p^2 \\ -p^3 \end{bmatrix} = m^2 c^2 \quad (2.18)$$

$$\frac{E^2}{c^2} - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = m^2 c^2$$

con lo que la relación energía momento queda

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.19)$$

para cuantizar esta expresión es necesario hacer un cambio de las variables dinámicas a operadores, que consiste en

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad ; \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (2.20)$$

a partir de este momento se va a trabajar con unidades naturales, es decir  $\hbar = c = 1$ , con lo que (2.19) y (2.20) se reducen a

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (2.21)$$

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad ; \quad \mathbf{p} \rightarrow -i \nabla \quad (2.22)$$

sustituyendo los operadores de energía y momento (2.22) en la ecuación (2.21) vamos a obtener

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\nabla^2 \phi + m^2 \phi \quad (2.23)$$

a grandes rasgos la ecuación (2.23) es la ecuación de *Klein-Gordon*, sin embargo, es necesario representarla con la notación 4-vector, para esto se construye el vector 4-Gradiente  $\partial_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$  a partir del cual se expande su producto punto

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu &= g^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \nabla \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \nabla \end{pmatrix} \\ \partial_\mu \partial^\mu &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \nabla \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\nabla \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \\ \partial_\mu \partial^\mu &= \square^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde a  $\square$  se le conoce como el operador *d'Alembertiano*. Con este cambio de notación la ecuación (2.23) se transforma a

$$\square^2 \phi + m^2 \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad (\square^2 + m^2) \phi = 0 \quad (2.25)$$

es importante esta notación porque al tener *4-vector* se puede saber que la ecuación (2.25), la ecuación de *Klein-Gordon*, es *covariante de Lorentz*.

La solución de la ecuación de *Klein-Gordon* en coordenadas naturales es

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2VE_n}} \left( A_n e^{-i(E_n t - p_n \cdot x)} + B_n^\dagger e^{-i(E_n t - p_n \cdot x)} \right) \quad (2.26)$$

donde los coeficientes  $A_n$  y  $B_n^\dagger$  son constantes.

### 2.2.1.1. Densidad de Probabilidad

En la QM la densidad de probabilidad  $\rho$  de la ecuación de Shrödinger expresa la probabilidad de encontrar la partícula

$$\rho = \phi^\dagger \phi \quad (2.27)$$

y su corriente de probabilidad en 3 dimensiones es

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} \left( \phi^\dagger \nabla \phi - \phi \nabla \phi^\dagger \right) \quad (2.28)$$

donde  $\phi^\dagger$  es la transpuesta del conjugado complejo, pero, como en este caso no se tiene una matriz a la cual sacarle la transpuesta, solo se aplica el conjugado complejo. Con estas definiciones, la densidad y corriente de probabilidad, se cumple la ecuación de continuidad para la ecuación de Shrödinger

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.29)$$

Ahora, partiendo de la ecuación de *Klein-Gordon* y del conjugado complejo <sup>1</sup> de la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - (\nabla^2 - m^2) \phi = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^\dagger - (\nabla^2 - m^2) \phi^\dagger = 0 \quad (2.31)$$

se multiplica (2.30) por  $i\phi^\dagger$  y (2.31) por  $i\phi$  y se restan

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - (\nabla^2 - m^2) \phi \right) i\phi^\dagger - \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^\dagger - (\nabla^2 - m^2) \phi^\dagger \right) i\phi &= i \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi \phi^\dagger - i (\nabla^2 \phi) \phi^\dagger + i m^2 \phi^\dagger \phi \\ &\quad - i \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^\dagger \phi + i (\nabla^2 \phi^\dagger) \phi - i m^2 \phi^\dagger \phi \\ &= i \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi^\dagger - \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \phi \right) - i \nabla \cdot \left( (\nabla \phi) \phi^\dagger - (\nabla \phi^\dagger) \phi \right) \end{aligned}$$

en esta última ecuación se identifican la densidad y corriente de probabilidad

$$\rho = i \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi^\dagger - \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \phi \right) \Rightarrow j^0 = i \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^0} \phi^\dagger - \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x^0} \phi \right) \quad (2.32)$$

$$j = -i \left( (\nabla \phi) \phi^\dagger - (\nabla \phi^\dagger) \phi \right) \Rightarrow j^i = -i \left( \phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \phi \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x^i} \right) \quad (2.33)$$

y con esto se obtiene la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0 \quad (2.34)$$

La corriente de probabilidad se puede construir utilizando la notación espacio-temporal de 4 dimensiones y con esto surge el escalar 4-corriente de probabilidad

$$j^\mu = (j^0, j^i) = (\rho, j) = i \left( \phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} - \phi \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x^\mu} \right) \quad (2.35)$$

con esto la ecuación de continuidad (2.34) se transforma a

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.36)$$

esta ecuación nos dice que la 4-divergencia de la 4-corriente de toda cantidad conservada es cero [10].

<sup>1</sup>La transversa del conjugado complejo  $\phi^\dagger$  también es llamada el conjugado Hermitiano. Para la ecuación de *Klein-Gordon* se aplica solo el conjugado complejo ya que se tiene un escalar [10].

### 2.2.1.2. Problemas con la ecuación de Klein-Gordon

Al estudiar la ecuación de *Klein-Gordon* surgen dos problemas importantes: la probabilidad y la energía. Al analizar la densidad de probabilidad  $\rho$ , ecuación (2.32), notamos que no está definida positivamente como en el caso de la ecuación de Schrödinger (2.27),  $\rho$  puede tomar valores negativos porque en la ecuación de *Klein-Gordon* se tienen derivadas de segundo orden, esto conlleva a concluir que  $\rho$  no se puede interpretar como una densidad de probabilidad [12].

Para el caso de la energía, notamos que al despejarla de la relación energía-momento relativista en unidades naturales se tiene

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$$

esto quiere decir que se van a tener términos con energía negativa al resolver la ecuación de *Klein-Gordon* y esto era un gran problema para aquella época, ya que no existía una interpretación física para energías negativas.

### 2.2.2. Espinores: Campos de espín $\frac{1}{2}$

Debido a que la ecuación de *Klein-Gordon* involucraba soluciones con energías negativas, Dirac no estaba satisfecho con esta ecuación como la ecuación relativista de la ecuación de *Schrödinger*, así que decidió seguir intentando encontrar una teoría relativista para el electrón, posteriormente descubrió que esta teoría respondía a partículas con espín 1/2. Lo primero que notó fue que en la ecuación de *Klein-Gordon* se obtenían soluciones con energías negativas debido a que es una ecuación de segundo orden en el tiempo, por lo cual él intentó crear una ecuación lineal de primer orden a partir de la relación relativista de energía-momento de Einstein con unidades naturales

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} = \alpha p + \beta m \quad (2.37)$$

El problema era encontrar que valores debían tomar  $\alpha$  y  $\beta$  para que se cumpliera esa relación, de tal manera que al elevar al cuadrado la expresión (2.37) se obtenga lo mismo

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{p^2 + m^2}\right)^2 &= (\alpha p + \beta m)^2 \\ p^2 + m^2 &= \alpha^2 p^2 + \beta^2 m^2 + 2\alpha\beta mp \end{aligned}$$

la única manera de que esto sea posible es si

$$\alpha^2 = 1; \quad \beta^2 = 1; \quad 2\alpha\beta = 0 \quad (2.38)$$

pero es imposible que se cumplan las tres condiciones al mismo tiempo, pues  $\alpha$  y  $\beta$  no pueden valer 1 y al multiplicarse valer cero. Es aquí donde a Dirac se le ocurrió una brillante idea, imponer otra condición

$$\alpha\beta \neq \beta\alpha \quad (2.39)$$

es decir, que  $\alpha$  y  $\beta$  no conmuten, al decir eso se impone que el orden de los factores si importe. Al volver a elevar al cuadrado la expresión (2.37) con esto en mente se llega a

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{p^2 + m^2}\right)^2 &= (\alpha p + \beta m)^2 \\ p^2 + m^2 &= (\alpha p + \beta m)(\alpha p + \beta m) \\ p^2 + m^2 &= \alpha^2 p^2 + \beta^2 m^2 + \alpha\beta pm + \beta\alpha mp \\ p^2 + m^2 &= \alpha^2 p^2 + \beta^2 m^2 + (\alpha\beta + \beta\alpha) mp \end{aligned}$$

ahora, las condiciones para que se cumpla deben ser

$$\alpha^2 = 1; \quad \beta^2 = 1; \quad (\alpha\beta + \beta\alpha) = 0 \quad (2.40)$$

ahora la pregunta es ¿existen valores posibles para  $\alpha$  y  $\beta$  que cumplan estas condiciones?. Ciertamente no existen tales números que las cumplan, pero Dirac, al ser aparte matemático, sabía que lo único que podría cumplir con las condiciones dadas eran matrices ¡así que  $\alpha$  y  $\beta$  debían ser matrices! pero no cualquier matriz, debían ser matrices de 4 dimensiones a las que se les denominó *Matrices de Dirac*

Dirac encontró que las matrices  $\alpha$  y  $\beta$  debían tener la forma

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \alpha = \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.41)$$

donde  $\sigma_i$  son las *Matrices de Pauli* y  $\mathbb{1}$  es una matriz identidad de  $2 \times 2$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Con esta idea se construye la *ecuación de Dirac* introduciendo un biespinor  $\Psi$  de 4 entradas y pegándoselo a la energía definida en la ecuación (2.37)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}; \quad E\Psi = (\alpha_i p + \beta m) \Psi \quad (2.43)$$

y haciendo el cambio de las variables dinámicas a operadores definidos en (2.22) se obtiene

## 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

---

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (\beta m - i \alpha_i \nabla) \Psi \quad (2.44)$$

esta notación puede simplificarse si introducimos nuevas matrices  $\gamma^i$  que relacionen  $\alpha$  y  $\beta$ , estas matrices son muy conocidas, son las *Matrices de Dirac*

$$\gamma^i = \beta \alpha_i; \quad \gamma^0 = \beta \quad (2.45)$$

teniendo ya las definiciones de  $\alpha$  y  $\beta$  se pueden calcular las *Matrices de Dirac*

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.46)$$

existen en total 5 *Matrices de Dirac*, las 4 que se muestran arriba y una extra que representa el producto de las cuatro matrices gamma:  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ . Para tomar en cuenta la relación dada en (2.45), lo primero que se hace es multiplicar la ecuación (2.44) por  $\beta$ , prestando atención a las condiciones dadas en (2.40) que dicen que  $\beta^2 = \alpha^2 = 1$

$$\begin{aligned} i\beta \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= (\beta^2 m - i\alpha\beta\nabla) \Psi \\ i\beta \frac{\partial}{\partial t} \Psi - m\Psi + i\beta \frac{\gamma^i}{\beta} \nabla \Psi &= 0 \\ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} \Psi + i\gamma^i \nabla \Psi - m\Psi &= 0 \\ i\left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^i \nabla\right) \Psi - m\Psi &= 0 \end{aligned}$$

ahora se redefinen los términos para obtener una expresión dada en 4-vectores y así se vea explícitamente su covariancia de Lorentz

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= (\gamma^0, \gamma^i) = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \\ \partial_\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) \\ \gamma^\mu \partial_\mu &= \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^i \nabla \end{aligned}$$

con lo que la ecuación se reduce a

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi = 0$$

pero aun se puede reducir un poco mas utilizando la notación de slash inventada por Richard Feynman, la cual indica que si se tiene un vector covariante  $a$  multiplicado por una matriz gamma se puede expresar con un slash sobre el vector  $a$

$$\gamma^\mu a_\mu \stackrel{def}{=} \not{a}$$

con esto se tiene la *ecuación de Dirac* con la notación mas conocida

$$(i\not{\partial} - m)\Psi = 0 \quad (2.47)$$

La *ecuación de Dirac* tiene soluciones de la forma

$$|\Psi^{(n)}\rangle = |u_\alpha e^{\pm kx}\rangle \quad (2.48)$$

donde  $u_\alpha$  es un vector de 4 componentes y  $n$  corre de 1 a 4, esto debido a que se van a tener 4 soluciones a la *ecuación de Dirac*.

### 2.2.2.1. Densidad de Probabilidad

La ecuación de Dirac es una ecuación matricial, por lo tanto, contrario a los casos anteriores, se necesita considerar la transpuesta del conjugado complejo, pero ahora vamos a incluir la *adjunta de Dirac*  $\bar{\Psi}$  para obtener una expresión que relacione la corriente de probabilidad con las matrices  $\gamma^\mu$ . La adjunta de Dirac esta definida como

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 \quad (2.49)$$

y para obtener la ecuación de Dirac adjunta vamos tomar la transpuesta del complejo conjugado de la ecuación (2.47)

$$\Psi^\dagger (-i(\gamma^\mu)^\dagger \partial_\mu - m) = 0 \quad (2.50)$$

pero tenemos que el conjugado Hermitiano de las matrices  $\gamma^\mu$  es igual a

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (2.51)$$

al sustituir (2.51) en (2.50) nos queda

$$\Psi^\dagger (-i\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \partial_\mu - m) = 0 \quad (2.52)$$

multiplicamos esta última ecuación por  $\gamma^0$  por la derecha y usamos que  $(\gamma^0)^2 = I$ , que es la matriz identidad

$$\begin{aligned} -i\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \partial_\mu \gamma^0 - \Psi^\dagger \gamma^0 m &= 0 \\ -i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu - \bar{\Psi} m &= 0 \\ i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu + \bar{\Psi} m &= 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

## 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

---

Ya tenemos la ecuación de Dirac (2.47) y la ecuación adjunta de Dirac (2.53), ahora multiplicamos (2.47) por  $\bar{\Psi}$  y (2.53) por  $\Psi$

$$i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi = 0 \quad (2.54)$$

$$i(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi + m\bar{\Psi}\Psi = 0 \quad (2.55)$$

y sumamos estas dos expresiones

$$\begin{aligned} [i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi] + [i(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi + m\bar{\Psi}\Psi] &= 0 \\ i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + i(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi &= 0 \\ i\bar{\Psi}\gamma^\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} + i\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x^\mu}\gamma^\mu\Psi &= 0 \\ i\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

renombramos  $j^\mu$  como el *4-corriente* de probabilidad <sup>1</sup>

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (2.57)$$

con esto llegamos a la ecuación de continuidad en su forma covariante

$$i\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.58)$$

Como ya se mencionó, la razón de aplicar la adjunta de Dirac es para obtener la corriente de probabilidad y su relación con las matrices  $\gamma^\mu$ , pues esta definición se ocupará mas adelante, pero claro que también es posible obtener la densidad de probabilidad de la *ecuación de Dirac* con el conjugado Hermitiano  $\Psi^\dagger$  siguiendo el mismo proceso que en la *ecuación de Klein-Gordon*, con lo que se llega a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^\dagger\Psi) + \nabla\cdot(\Psi^\dagger\alpha\Psi) = 0 \quad (2.59)$$

y aqui surge la densidad y corriente de probabilidad

$$\rho = \Psi^\dagger\Psi; \quad j = \Psi^\dagger\alpha\Psi \quad (2.60)$$

con lo que (2.59) se reduce a tener la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot j = 0 \quad (2.61)$$

Un punto importante a observar es que en este caso  $\rho$  es una variable definida positiva y representa una densidad de probabilidad.

---

<sup>1</sup>Debemos tener cuidado en no confundir el *4-corriente*  $j^\mu$  planteado aquí con el *escalar 4-corriente* de la ecuación (2.35), pues su nombre lo dice, en la ecuación (2.35) se tiene un escalar.

### 2.2.2.2. Mar de Dirac

Dirac había resuelto uno de los problemas que aparecían en la ecuación de *Klein-Gordon* al probar que la variable  $\rho$  representaba una densidad de probabilidad, sin embargo, el problema de tener soluciones con energías negativas seguía perdurando. Como ya se vio, la ecuación de Dirac arroja 4 soluciones, dos de ellas con energía positiva y dos con energía negativa, fue en ese momento que Dirac presentó una interpretación brillante para este fenómeno. Para empezar, notó que las dos componentes con energía positiva representaban el espín up y el espín down, es decir, las partículas que describía eran fermiones y por lo tanto debían obedecer el *principio de exclusión de Pauli*, el cual pronuncia que dos partículas no pueden tener el mismo estado simultáneamente. Con esto en mente Dirac interpretó la energía negativa como niveles de energía ya ocupados, así que los fermiones con energía positiva no podrían caer en estos estados ocupados, en otras palabras, el vacío está lleno. A este conjunto de estados ocupados, interpretados como energías negativas, se les llamó el *mar de Dirac*.

En este punto Dirac ya había solucionado el problema de las energías negativas, pero quedaba otra cuestión pendiente ¿que representaban las dos soluciones extras de su ecuación?. El análisis que hizo Dirac fue el siguiente, pensó que si el vacío estaba lleno un fermión no puede entrar a ocupar un estado en el mar de Dirac, pero un fermión que ya está dentro si puede salir si se le aumenta su energía; al dejar el mar de Dirac deja un hueco en el sitio donde estaba y este hueco tiene las mismas propiedades que el fermión que saltó a un nivel de energía más alto, pero con carga opuesta ¡este hueco es precisamente una partícula de antimateria! así que las dos soluciones extras que salían en la ecuación de Dirac eran las componentes del spin up y spin down que describen a la antimateria.

Estas ideas presentadas por Dirac fueron muy revolucionarias para la física ya que su ecuación contiene de manera explícita una propiedad intrínseca de la partícula, el espín, además de que arroja toda una nueva gama de partículas que constituyen la antimateria. Ésta teoría de la antimateria fue corroborada experimentalmente en 1932 por Carl David Anderson quien descubrió el positrón, la antipartícula del electrón, al investigar la radiación cósmica.

### 2.2.2.3. En Teoría Cuántica de Campos

Sabemos que si una partícula tiene un espín  $(n + \frac{1}{2})$  obedece el principio de exclusión de Pauli que impide que los fermiones ocupen el mismo estado, es decir, no se puede crear un campo de fermiones macroscópico. Es importante hacer mención de este hecho para explicar que no es posible realizar la segunda cuantización a partir de una teoría de campos clásica para fermiones porque no se puede tener un campo clásico de fermiones, en lugar de eso se toma la ecuación de Dirac en RQM, ecuación (2.47), como la ecuación de campos cuánticos en QFT, con la diferencia que ahora  $\Psi$  es un campo y no un estado.

$$(i\partial - m)\Psi = 0 \quad (2.62)$$

y de esta expresión se puede deducir la densidad lagrangiana para *campos de espinores libres*

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \quad (2.63)$$

### 2.2.2.4. El propagador de fermión

Los propagadores de Feynman representan a partículas virtuales que llevan energía y momento de una partícula real a otra, es el medidor de las fuerzas fundamentales. El diagrama de Feynman que se usa para representar el propagador de fermión es

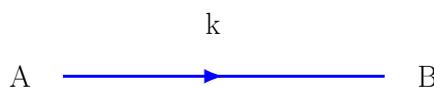


Figura 2.2: Propagador de fermión

El tiempo juega un papel muy importante en el entendimiento de los propagadores de Feynman, veamos la siguiente imagen

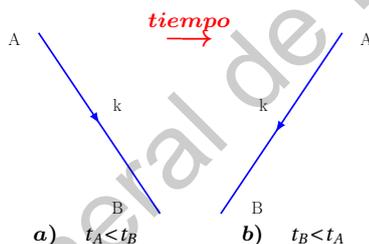


Figura 2.3: Dos posibilidades del propagador de fermión

en *a)* vemos que se crea una *partícula* en el punto *A* y se destruye en el punto *B*, por lo tanto, el tiempo  $t_A$  es menor que  $t_B$ ; como caso contrario, en *b)* tenemos que se crea una *antipartícula* en el punto *B* y se destruye en el punto *A*, teniendo  $t_B < t_A$ . La importancia de este análisis es que el propagador tiene que mostrar estas dos posibilidades, para esto se introduce el operador de ordenamiento temporal  $T$ . Este operador  $T$  representa tanto la creación de una partícula como una antipartícula virtual y su destrucción [10]. Renombrando  $A = x_1$  y  $B = x_2$ , el operador de ordenamiento temporal se expresa en el caso de fermiones:

$$T \{ \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \} = \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \quad \text{para } t_{x_2} < t_{x_1} \quad (2.64)$$

$$T \{ \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \} = -\bar{\Psi}(x_2) \Psi(x_1) \quad \text{para } t_{x_1} < t_{x_2} \quad (2.65)$$

Con esta idea en mente, matemáticamente el propagador de fermión se expresa como una amplitud de transición, la cual es el valor de expectación en el vacío<sup>1</sup> de  $T$ , esto nos ayuda a encontrar la partícula virtual en el vacío

<sup>1</sup>  $|0\rangle$  es el estado de vacío.

$$iS(x_1 - x_2) = \langle 0 | T \{ \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \} | 0 \rangle \quad (2.66)$$

donde  $\Phi$  es el campo de fermiones y  $S(k)$  es la notación que usualmente se utiliza para describir el propagador de fermión. El cuadrado de este valor es la densidad de probabilidad de que se observe la partícula o antipartícula.

A partir de la ecuación (2.66) se puede llegar al propagador de fermión en el espacio de momentos

$$S_0(k) = \frac{1}{\mathbf{k} - m} \quad (2.67)$$

La ecuación (2.66) es una de las *funciones de Green* por su forma matemática, en general, los propagadores son matemáticamente *funciones de Green*. Estas funciones se pueden escribir como

$$\langle 0 | T \{ \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \} | 0 \rangle \quad (2.68)$$

$$\langle 0 | T \{ A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \} | 0 \rangle \quad (2.69)$$

$$\langle 0 | T \{ \Psi(x_1) A^\mu(x_2) \bar{\Psi}(x_3) \} | 0 \rangle \quad (2.70)$$

$$\vdots$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \} | 0 \rangle \quad (2.71)$$

Estas son las *funciones de Green de n-puntos*, donde en  $n$  campos  $\phi_i$  (ec. 2.71) pueden ser tanto campos fermiónicos como fotónicos [1]. Las funciones de Green de *2-puntos* (2.69, 2.70), representan al propagador de fermión y fotón, respectivamente; mientras que la ecuación (2.70) es el vértice fermión-fotón y una función de Green de *3-puntos*.

A los propagadores también se les conoce como funciones de correlación por su característica de correlación implícita entre los eventos  $x_1$  y  $x_2$ , [10].

### 2.2.3. Vectores: Campos de espín 1

Sabemos que las ecuaciones que gobiernan a las partículas masivas y no masivas con espín 1 son las ecuaciones de Proca y las ecuaciones de Maxwell, respectivamente. En este trabajo solo nos centraremos en el estudio del fotón, una partícula no masiva con espín 1, por lo cual desarrollaremos solamente las ecuaciones de Maxwell.

La forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell es muy conocida, lo que vamos a hacer ahora es mostrar su forma covariante de Lorentz expresada en 4-vectores, para esto empezaremos con el electromagnetismo clásico. Las ecuaciones de Maxwell sin corrientes

ni cargas eléctricas en el vacío y con unidades naturales se expresan

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\
 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

estas ecuaciones podemos reescribirlas si introducimos el potencial eléctrico  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  y el magnético  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ . Los campos eléctrico ( $\mathbf{E}$ ) y magnético ( $\mathbf{B}$ ) en términos de los potenciales se definen como

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} ; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2.73}$$

de esta manera, al sustituir estos valores de los campos ( $\mathbf{E}$ ) y ( $\mathbf{B}$ ) en las ecuaciones (2.72) vamos a obtener solo 2 ecuaciones

$$\nabla \cdot \left( -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow -\nabla^2\Phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0 \tag{2.74}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \tag{2.75}$$

esto nos reduce la complejidad al resolverlas, pues pasamos de querer resolver 4 ecuaciones en (2.72) a solo dos ecuaciones para el campo eléctrico y magnético en (2.74, 2.75), es decir, bastará con conocer  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  y  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  para calcular  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  por medio de (2.73).

En general, los campos no solo están determinados por los potenciales (2.73), existen diferentes potenciales que llegan a las mismas cantidades observables de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , a esto se le llama una *teoría de norma*, a la capacidad de transformar los potenciales, normas, y obtener los mismos observables, en otras palabras, se tiene una transformación de norma invariante [10].

La pregunta es ¿qué condiciones extras se les debe imponer a los potenciales para mantener la invariancia?. Supongamos dos conjuntos de potenciales,  $(\Phi, \mathbf{A})$  y  $(\Phi', \mathbf{A}')$ , que deben producir los mismos campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  y tienen la siguiente relación

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\sigma} \tag{2.76}$$

$$\Phi' = \Phi + \beta \tag{2.77}$$

dado que el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}'$  deben producir el mismo campo magnético,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ , su rotacional debe ser igual

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \boldsymbol{\sigma}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B} + \nabla \times \boldsymbol{\sigma} \tag{2.78}$$

$$\therefore \nabla \times \sigma = 0 \quad (2.79)$$

para que esto sea cierto,  $\sigma$  se puede escribir como el gradiente de un escalar

$$\sigma = \nabla f \quad (2.80)$$

con esto ya conocemos el valor de  $\sigma$ . Por otra parte, al igual que en el caso del campo magnético, los potenciales deben arrojar el mismo campo eléctrico  $E = E'$ , entonces

$$\begin{aligned} E' &= -\nabla\Phi' - \frac{\partial A'}{\partial t} = -\nabla(\Phi + \beta) - \partial_t(A + \sigma) \\ &= -\nabla\Phi - \nabla\beta - \partial_t A - \partial_t \sigma = -\nabla\Phi - \partial_t A - (\nabla\beta + \partial_t \sigma) \\ &= E - (\nabla\beta + \partial_t \sigma) \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\therefore \nabla\beta + \partial_t \sigma = 0 \quad (2.82)$$

pero ya conocemos el valor de  $\sigma$  en (2.80), por lo que

$$\begin{aligned} \nabla\beta + \partial_t(\nabla f) &= 0 \Rightarrow \nabla(\beta + \partial_t f) = 0 \\ \therefore \beta &= -\frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.83)$$

con las definiciones de  $\sigma$  y  $\beta$  que obtuvimos en (2.80) y (2.83) podemos reescribir (2.76) y (2.77)

$$A' = A + \nabla f \Rightarrow A = A' - \nabla f \quad (2.84)$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow \Phi = \Phi' + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.85)$$

esto nos dice que podemos adherir cualquier función  $f$  a los potenciales siempre y cuando  $E$  y  $B$  no se modifiquen, cambiar la función  $f$  es cambiar la norma. A pesar de que la función  $f$  puede tener una variedad de formas se va a tomar aquella que facilite resolver las ecuaciones (2.74) y (2.75), es decir, queremos un potencial (norma) adecuado, por lo cual tomamos la **norma de Coulomb**

$$\nabla \cdot A = 0 \quad (2.86)$$

que al aplicarla en las ecuaciones (2.74) y (2.75) se reducen a

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A = -\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.88)$$

de la ecuación (2.87) se puede ver que una solución es  $\Phi = 0$ , y con esto la ecuación (2.88) se hace cero en el lado derecho

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i} \right) A = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x_\mu} A = \partial_\mu \partial^\mu A = \square^2 A = 0 \quad (2.89)$$

esta última expresión es la ecuación de onda. Podemos concluir que con la *norma de Coulomb* se fija el potencial escalar a ser cero y con esto obtenemos la ecuación de onda en términos de  $\mathbf{A}$ . Esta ecuación de onda es la versión simplificada de las ecuaciones de Maxwell

$$\partial_\mu \partial^\mu \mathbf{A} = 0 \quad (2.90)$$

a partir de aquí se pueden calcular  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  con (2.73).

### 2.2.3.1. Notación 4-vector

Anteriormente vimos que es posible combinar el espacio y el tiempo en un solo objeto  $x^\alpha = (ct, x^i)$ , ahora combinemos el potencial escalar ( $\Phi$ ) y vectorial ( $\mathbf{A}$ ) en un solo potencial 4-vector  $A^\mu$ . Se define en unidades naturales

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = (\Phi(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^T \quad \text{ó} \quad A^\mu(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{x}, t) \\ A^1(\mathbf{x}, t) \\ A^2(\mathbf{x}, t) \\ A^3(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

Si ya lo hicimos para los potenciales podemos hacerlo para los campos, pero ¿cómo combinamos los 6 componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ ? Sabemos que tiene que ser un tensor antisimétrico para que tenga 6 componentes independientes y ceros en la diagonal

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (2.92)$$

este tensor  $F^{\mu\nu}$  se puede definir en términos del potencial 4-vector

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu A^\mu(x) - \partial^\mu A^\nu(x) \quad (2.93)$$

cada uno de los componentes de esta matriz se pueden calcular corriendo los índices  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ , por ejemplo para calcular el componente cuando  $\mu = 0$  y  $\nu = 1$

$$\begin{aligned} F^{01}(x) &= \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi - \frac{\partial}{\partial x_0} A^1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial t} = \left( -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^1 \\ &= E^1 = E_x \end{aligned} \quad (2.94)$$

al correr cada índice se tiene el tensor  $F^{\mu\nu}$  en unidades naturales

$$F^{\mu\nu}(x) = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

es posible reescribir las ecuaciones de Maxwell en términos de este tensor  $F^{\mu\nu}$ , sin embargo, vamos a expresarlas en términos del potencial 4-vector  $A^\mu$  ya que, como vimos anteriormente, se obtiene una versión simplificada de las ecuaciones de Maxwell con la que es

mas sencillo trabajar.

Tomando como referencia las ecuaciones (2.74, 2.75) es posible escribir las ecuaciones de Maxwell [10] para  $A^\mu$

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu(x, t) - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu(x, t)) = 0 \quad (2.96)$$

para comprobar que esto es cierto vamos a tomar  $\mu = 0$  y ver que sale

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \partial_\alpha A^0(x, t) - \partial^0 (\partial_\nu A^\nu(x, t)) &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i} \right) A^0 - \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x^0} + \frac{\partial A^2}{\partial x^0} + \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) &= 0 \\ - \frac{\partial^2 A^0}{\partial x^i \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial A^i}{\partial x^i} &= 0 \\ - \nabla^2 \Phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

nos damos cuenta que al hacer esto obtenemos la ecuación (2.74), ahora tomamos  $\mu = i$

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \partial_\alpha A^i(x, t) - \partial^i (\partial_\nu A^\nu(x, t)) &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x_j} \right) A^i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x^0} + \frac{\partial A^2}{\partial x^0} + \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 A^i}{\partial t^2} - \nabla^2 A^i - \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.98)$$

que es exactamente igual a la ecuación (2.75), por lo tanto, comprobamos que la expresión (2.96) son las ecuaciones de Maxwell en el espacio de 4 dimensiones.

Al igual que en el caso de los potenciales  $\Phi$  y  $\mathbf{A}$ ,  $A^\mu$  también puede tomar diferentes formas que resuelven las ecuaciones de Maxwell

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f \quad (2.99)$$

donde al variar  $f$  se cambia de norma pero se siguen dejando invariantes los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ . Anteriormente utilizamos la *norma de Coulomb*, en este caso usaremos la **norma de Lorenz**

$$\partial_\nu A^\nu(x, t) = 0 \quad (2.100)$$

y al aplicarla a la ecuación (2.96) esta se reduce a

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu(x, t) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i} \right) A^\mu(x, t) = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i} \right) A^\mu(x, t) = 0 \quad (2.101)$$

llegamos a la ecuación de onda en términos del potencial 4-vector  $A^\mu$ , es decir, con la *norma de Lorenz* las ecuaciones de Maxwell toman la forma de la ecuación de onda.

Concluimos que la forma simplificada de las ecuaciones de Maxwell en 4 dimensiones es

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu(x, t) = 0 \quad (2.102)$$

y con esto se pueden calcular los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  mediante el tensor  $F^{\mu\nu}$  de (2.93) y sus componentes (2.95). La solución de la ecuación (2.102) es una onda plana  $A^\mu(x, t)$ .

### 2.2.3.2. En Mecánica Cuántica Relativista

Los fotones son partículas no masivas que obedecen la relatividad especial y tienen su momento y energía bien definidos. Al ser partículas con espín entero no cumplen el principio de exclusión de Pauli, por lo cual varios fotones pueden colapsarse en el mismo nivel de energía y así crear un campo clásico macroscópico, un campo electromagnético. Esto quiere decir que si las ecuaciones de Maxwell describen un campo electromagnético también lo hacen con cada fotón que compone el campo macroscópico.

Debido a que los fotones son relativistas no puede existir una teoría clásica o cuántica no relativista. Para obtener una teoría cuántica del electromagnetismo clásico basta con tomar  $A^\mu$  como un estado cuántico único e involucrar conmutadores. Por lo tanto, en RQM y en el electromagnetismo clásico se tendrá la misma ecuación de onda.

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu_{estado}(x, t) = \partial^\alpha \partial_\alpha |A^\mu\rangle = 0 \quad (2.103)$$

### 2.2.3.3. En Teoría Cuántica de Campos

Para la segunda cuantización se va a tomar directamente la densidad lagrangiana de la teoría electromagnética de campos clásica, donde  $A^\mu(x, t)$  es un campo real clásico

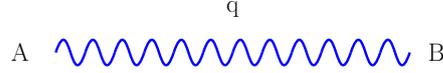
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu(x, t)) (\partial^\nu A^\mu(x, t)) \quad (2.104)$$

y se calculan las ecuaciones de movimiento aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange. Con esto obtenemos la ecuación de campo para QFT, que tiene la forma que ya conocemos, con la diferencia de que ahora  $A^\mu$  es un campo cuántico, no un estado cuántico como en (2.103) ni un campo clásico como en (2.102).

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu(x, t) = 0 \quad (2.105)$$

### 2.2.3.4. Propagador de Fotón

A continuación, en la figura 2.4 se muestra el diagrama que representa al propagador de fotón



**Figura 2.4:** Propagador de fotón

Ya vimos que el propagador transmite energía y momento de un punto  $A$  a un punto  $B$ . Al igual que en el caso del fermión, es necesario introducir el operador de ordenamiento temporal  $T$  que nos indica las dos posibilidades que tiene un propagador, ya sea el de crear una partícula y luego destruirla o crear una antipartícula y posteriormente destruirla. La diferencia en este caso es que el fotón es su propia antipartícula ya que no tiene masa ni carga eléctrica. En la ecuación (2.70) ya vimos que la función de Green que describe al propagador del fotón es

$$\Delta^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \langle 0 | T \{ A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \} | 0 \rangle \quad (2.106)$$

esta ecuación nos permite llegar al propagador de fotón expresado en el espacio de momentos

$$\Delta^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2} \quad (2.107)$$

donde  $q = k - p$ . Sin embargo, si tomamos en cuenta que a partir de una transformación de norma en los potenciales las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes [13], el propagador de fermión se puede escribir como

$$\Delta^{\mu\nu}(q) = -\frac{g^{\mu\nu}}{q^2} + (1 - \xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^4} \quad (2.108)$$

Esta última aportación se aclarará mas adelante.

### 2.3. Cuatro fuerzas interactuantes

Con la llegada de la QFT fue posible describir los diferentes tipos de interacciones en el Modelo Estándar (SM), los cuales son la fuerza electromagnética, la fuerza débil y la fuerza fuerte. Hasta la física que conocemos hoy en día solo existen 4 fuerzas fundamentales, las tres ya mencionadas mas la fuerza gravitacional. En el libro *Introduction to elementary particle*, D. Griffiths explica claramente estas 4 fuerzas mediante una tabla, la cual muestro a continuación

## 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

---

Fuerza	Teoría	Mediador
Fuerte	Cromodinámica cuántica (QCD)	Gluón
Electromagnética	Electrodinámica cuántica (QED)	Fotón
Debil	Dinámica cuántica de sabores (QFD)	W, Z
Gravitacional	Geometrodinámica	Gravitón

**Tabla 2.2:** Cuatro fuerzas fundamentales [14]

Como se observa en la tabla 2.2, la teoría que describe las interacciones fuertes es conocida como la Cromodinámica Cuántica (QCD), y la partícula por la cual se dan estas interacciones es el gluón. Esta teoría fue desarrollada a mediados de los 70 por David Politzer, Frank Wilczek y David Gross, es responsable, entre otras cosas, de la unión de tres quarks para formar protones y neutrones [12].

La interacción entre el electrón y el fotón la describe la teoría de la QED, teoría en la que se basa todo este trabajo. La Dinámica Cuántica de Sabores (QFD) es la encargada del estudio de la interacción debil cuyos mediadores son los bosones  $Z$  y  $W^\pm$ . El nombre de esta teoría no es muy común debido que en 1968 Sheldon Glashow, Abdus Salam y Steven Weinberg formularon una teoría que trata las interacciones electromagnética y debil como dos manifestaciones de una sola fuerza, *la fuerza electrodébil* [14], en este sentido las cuatro fuerzas fundamentales se reducen a tres, a esta teoría le llamaron la *Teoría Electrodébil*.

La teoría cuántica de la gravedad es aun una interrogante en la física del SM, se especula que su partícula mediadora es el gravitón, sin embargo, su interacción es tan debil que hasta la fecha no ha sido posible observar dicha partícula (si es que existe) con los niveles de energía que se han logrado alcanzar en los aceleradores de partículas.

### 2.3.1. Electrodinámica Cuántica

La QED es la primera QFT, desarrollada entre 1930 y 1950 por Tomonaga, Feynman y Schwinger quienes recibieron el premio Nobel en 1965 por su trabajo. Esta teoría estudia la interacción entre la radiación con el campo electromagnético, es decir, la interacción entre fotones y electrones. Experimentalmente QED es la teoría mas exitosa, entre sus logros esta el predecir el momento magnético anómalo del electrón con una exactitud de 6 decimales [12].

Para construir esta teoría se necesitan dos cosas

- El campo cuántico del electrón mediante la ecuación de Dirac
- El campo cuántico del fotón mediante las ecuaciones de Maxwell

Anteriormente ya desarrollamos estos dos requerimientos pero para campos no interactuantes, cuando sabemos que en el mundo real interactúan entre sí. Es por esta razón que necesitamos obtener tanto la ecuación de Dirac como las ecuaciones de Maxwell teniendo en cuenta cargas interactuantes.

En el electromagnetismo clásico las ecuaciones de Maxwell teniendo en cuenta una densidad de carga  $\rho_{carga}$  y una densidad de corriente  $\mathbf{j}_{carga}$  se expresan

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_{carga} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j}_{carga} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{2.109}$$

al igual que en caso no interactuante, vamos a escribir estas ecuaciones en términos de los potenciales ya vistos en (2.73), con lo que (2.109) se reduce a

$$-\nabla^2 \Phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \rho_{carga}\tag{2.110}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{j}_{carga}\tag{2.111}$$

y al reescribir (2.110) y (2.111) usando el potencial 4-vector  $A^\mu$  se tiene

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu(\mathbf{x}, t) - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu(\mathbf{x}, t)) = s^\mu(\mathbf{x}, t)\tag{2.112}$$

donde  $s^\mu$  es la carga eléctrica 4-corriente [10] definida como

$$s^\mu = -e j^\mu = (\rho_{carga}, \mathbf{j}_{carga})\tag{2.113}$$

Para comprobar que (2.112) engloba las ecuaciones (2.110) y (2.111) vamos a hacer  $\mu = 0$

$$\begin{aligned}\partial^\alpha \partial_\alpha A^0(\mathbf{x}, t) - \partial^0 (\partial_\nu A^\nu(\mathbf{x}, t)) &= s^0(\mathbf{x}, t) \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i} \right) A^0 - \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x^0} + \frac{\partial A^2}{\partial x^0} + \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) &= \rho_{carga} \\ -\nabla^2 \Phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= \rho_{carga}\end{aligned}\tag{2.114}$$

nos damos cuenta que se cumple que cuando  $\mu = 0$  se llega a la ecuación (2.110). Ahora, haciendo  $\mu = i$  tenemos

$$\begin{aligned}\partial^\alpha \partial_\alpha A^i(\mathbf{x}, t) - \partial^i (\partial_\nu A^\nu(\mathbf{x}, t)) &= s^i(\mathbf{x}, t) \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i} \right) A^i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x^0} + \frac{\partial A^2}{\partial x^0} + \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) &= \mathbf{j}_{carga} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= \mathbf{j}_{carga}\end{aligned}\tag{2.115}$$

que es exactamente la ecuación (2.111).

Al igual que en el caso de fotones no interactuantes, aplicamos la **norma de Lorenz**

$$\partial_\nu A^\nu(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.116)$$

y con esto (2.112) se reduce a

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu(\mathbf{x}, t) = s^\mu(\mathbf{x}, t) \quad (2.117)$$

con esto ya tenemos las ecuaciones de Maxwell interactuantes en términos del potencial 4-vector  $A^\mu$ .

Por otra parte, vale la pena escribir el lagrangiano clásico para el campo electromagnético

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu(\mathbf{x}, t)) (\partial^\nu A^\mu(\mathbf{x}, t)) - s^\mu A_\mu(\mathbf{x}, t) \quad (2.118)$$

si se sustituye  $\mathcal{L}$  en las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos se llega a la ecuación (2.117). El primer término corresponde a la parte libre mientras que el segundo considera las interacciones.

### 2.3.1.1. En RQM

Cuando pasamos a RQM recordemos que  $A^\mu$  ahora representa el estado cuántico del fotón, además, se va a considerar que el Lagrangiano es igual al que tenemos en la teoría clásica expresado en (2.118) y por lo tanto las ecuaciones de Maxwell también tienen la misma forma que en (2.117), sin embargo, podemos hacer un análisis a la estructura de la carga eléctrica 4-corriente.

En el capítulo donde tratamos la ecuación de Dirac sin interacciones llegamos a ver que el 4-corriente de probabilidad lo podemos expresar como

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (2.119)$$

es posible afirmar que la densidad de probabilidad varía directamente con la densidad de carga, entonces, es posible asumir que

$$s^\mu = -e j^\mu = -e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (2.120)$$

con lo que al sustituir  $s^\mu$  en (2.117) vamos a llegar a la ecuación de onda para fotones tomando en cuenta las interacciones

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu = -e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (2.121)$$

las funciones  $\bar{\Psi}$  y  $\Psi$  también representan estados en RQM. Por otro lado, sustituyendo (2.120) en (2.118) vamos a tener

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) + e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu \quad (2.122)$$

este lagrangiano toma en consideración la parte del fotón libre en el primer término, y en el segundo muestra la interacción entre el electrón ( $\Psi$ ) y el fotón ( $A^\mu$ ), sin embargo falta agregar la parte del electrón libre. En la ecuación (2.63) vimos que el lagrangiano del electrón libre es

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi \quad (2.123)$$

así que si se lo sumamos a (2.122) tendremos el lagrangiano completo para esta teoría en RQM, esto nos da

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi + e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu \quad (2.124)$$

Para obtener la ecuación de Dirac que considere las interacciones basta con usar las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos, al hacerlo obtenemos

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = -e\gamma^\mu\Psi A_\mu \quad (2.125)$$

### 2.3.1.2. En QFT

Para llegar a la teoría cuántica de campos QED tenemos dos caminos, uno es partiendo de la teoría electromagnética de campos interactuantes clásica y el otro partiendo de RQM. En esta ocasión nos vamos a ir por el segundo camino ya que es el más sencillo, esto debido a que el lagrangiano completo en RQM es el mismo en QFT, solo se deben agregar las relaciones de conmutación y anticonmutación para campos a la teoría.

Por lo tanto, las ecuaciones electromagnéticas de campos interactuantes en QFT son (2.121, 2.125)

$$\partial^\alpha\partial_\alpha A^\mu = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (2.126)$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = -e\gamma^\mu A_\mu\Psi \quad (2.127)$$

en este caso  $A^\mu$ ,  $\Psi$  y  $\bar{\Psi}$  son campos. La densidad lagrangiana electromagnética interactuante en QFT es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi + e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu \quad (2.128)$$

que, como ya vimos, engloba el lagrangiano del fotón libre, el del electrón libre y el que indica la interacción entre ambos.

De acuerdo a la *teoría de norma*, que nos dice que el Lagrangiano no cambia bajo transformaciones locales <sup>1</sup>, es necesario introducir un término extra a nuestra densidad lagrangiana de la ecuación (2.128) que deje el sistema invariante de norma, sin cambios; este término tiene la forma

<sup>1</sup>Transformaciones globales: Se cambia la fase en el espacio y los sistemas son equivalentes.

Transformaciones locales: Dependen de cada punto del espacio, para recuperar la simetría de norma (también conocida como gauge) se introducen campos adicionales.

$$-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.129)$$

donde  $\xi$  es una constante llamada el *parámetro de norma*. Los valores de esta constante  $\xi$  nos dicen la norma en la que estamos, normalmente se denomina, de acuerdo a [15], como:

$$\begin{cases} \xi = 0, & \text{Norma de Landau} \\ \xi = 1, & \text{Norma de Feynman} \end{cases} \quad (2.130)$$

este parámetro resulta muy importante al analizar la dependencia que tiene  $\xi$  sobre nuestros resultados. Al agregar el término (2.129) a (2.128) obtenemos la densidad lagrangiana completa de QED

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi + e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.131)$$

al agregar este término que contiene el *parámetro de norma*  $\xi$  tenemos una densidad lagrangiana con *fijación de norma*. La simetría de norma nos da las interacciones fundamentales, es decir, los bosones de norma<sup>1</sup>.

### 2.3.1.3. Propagadores a n-lazos

Los propagadores vistos anteriormente son propagadores a *nivel de árbol*<sup>2</sup>. En teoría de perturbaciones se modifican estos propagadores con *correcciones a n-lazos* [1]. Ahora, con estas modificaciones, los propagadores toman la forma

$$S(k) = \frac{F(k^2)}{k - M(k^2)} \quad (2.132)$$

$$\Delta^{\mu\nu}(q) = -\Delta(q^2) \left[ g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] - \xi \frac{q^\mu q^\nu}{q^4} \quad (2.133)$$

donde  $F(p^2)$  es la renormalización de la función de onda del fermión y  $M(p^2)$  es una función de masa. Las expresiones (2.132, 2.133) son la suma de todas las autointeracciones posibles [16], por lo tanto, son los propagadores completos. Si se toman

$$\Delta_0(q^2) = \frac{1}{q^2}, \quad F_0(p^2) = 1, \quad M_0(p^2) = m \quad (2.134)$$

se llega a los propagadores a nivel de árbol de las ecuaciones (2.67) y (2.108).

---

<sup>1</sup>Existen cuatro tipos de bosones de norma en el SM: fotones, gluones, bosones W y Z

<sup>2</sup>Propagadores a nivel de árbol: Propagadores descritos en la teoría libre, sin tomar en cuenta las interacciones.

---

## Capítulo 3

# Ecuaciones de Schwinger Dyson

---

“... te mostraría que el rebaño puede dejar de serlo, que las doctrinas nada pueden contra la iniciativa del ser individual, la desobediencia del ser individual, el coraje del ser individual; que cada uno es alguien porque quiere serlo, que la salvación está en el individuo que promueve su propia revolución interior.”

*-Un Hombre, Orina Fallaci-*

### 3.1. Régimen perturbativo vs no perturbativo

Una QFT normalmente está desarrollada con aproximaciones perturbativas, en este contexto, las interacciones son tratadas como pequeñas perturbaciones de campos libres y los observables se calculan usando series de potencias. Los datos experimentales nos han mostrado que esta teoría funciona muy bien en un amplio rango de energías obteniendo resultados sorprendentemente acertados con los experimentos [17], sin embargo, existen varias situaciones donde un análisis perturbativo ya no es suficiente, lo que nos lleva a concluir que QFT perturbativa no es la teoría final.

El estudio de una teoría no perturbativa comenzó tan pronto como la comunidad científica notó que más allá del nivel árbol cada término de la expansión diverge [18], por lo cual se deben quitar esas divergencias renormalizando la teoría. Usualmente para renormalizarla se utiliza un parámetro de regularización para separar las partes finitas de las divergencias. Posteriormente, se emplea algún esquema de renormalización para quitar las divergencias. Después del proceso de renormalización, la expansión perturbativa tenía un gran éxito en QED.

Algunos de los problemas que QFT perturbativa no puede responder son el confinamiento en la teoría de la QCD y el rompimiento dinámico de la simetría<sup>1</sup> quirial (DCSB). En el caso del confinamiento, se ha visto que el parámetro de acoplamiento  $\alpha_s$  disminuye cuando los quarks se encuentran a altas energías dejando que interactúen con poca intensidad, es decir, tienen una *libertad asintótica* que les permite moverse casi como si estuviesen libres sin olvidar que siguen dentro de una sopa de quarks y gluones. Pero si nos movemos a bajas energías, donde viven los hadrones, sucede algo curioso, el parámetro de acoplamiento  $\alpha_s$  se hace mas intenso de tal manera que si intento separarlos aumenta su *confinamiento*. Este fenómeno es invisible en una QFT perturbativa pero es posible estudiarlo en el régimen no perturbativo [20].

Por otro lado, también a bajas energías, vemos que el quark adquiere masa entre 300 y 400 MeV más de lo que se presenta fundamentalmente. Ésto nos dice que existen dos mecanismos que dotan de masa a las partículas: el Higgs y las interacciones fuertes, de hecho, el 98% de la masa total del protón proviene de las interacciones fuertes, por lo cual se dice que se puede generar masa dinámicamente a través de las interacciones que van vistiendo a las partículas. Este fenómeno es conocido como el DCSB y solo se puede estudiar no perturbativamente.

Para estudiar una QFT en regímenes no perturbativos se han desarrollado varias aproximaciones, entre ellas se encuentra *Lattice QCD* y las *Ecuaciones de Schwinger Dyson (SDE)*. En este trabajo abordaremos QED no perturbativa mediante las SDE.

#### 3.1.1. Ecuaciones de Schwinger Dyson del propagador fermiónico

Las SDE pueden ser consideradas como las ecuaciones de Euler-Lagrange de una QFT. Son una torre infinita de ecuaciones integrales acopladas que estan compuestas por funciones de Green [21]. Resolver estas ecuaciones equivale a resolver la teoría, por lo cual, se puede asegurar que una QFT esta resuelta cuando se conocen todas las funciones de Green. Sin embargo, es imposible resolver estas SDE con las herramientas matemáticas que tenemos hasta ahora, ésto debido a que son infinitas en número y están acopladas entre sí. La única manera en que se pueden resolver es truncándolas.

La figura 3.1 muestra la expansión perturbativa [16] del propagador de fermión completo en su forma diagramática

---

<sup>1</sup>La energía era enorme al principio del universo, pero, al irse enfriando, se fueron perdiendo varias simetrías en un proceso que se le llama *ruptura espontanea de la simetría*. Por esta razón se cree que al principio del universo existía una sola fuerza fundamental, y al romperse esta simetría surgieron las 4 fuerzas fundamentales que hoy conocemos [19].

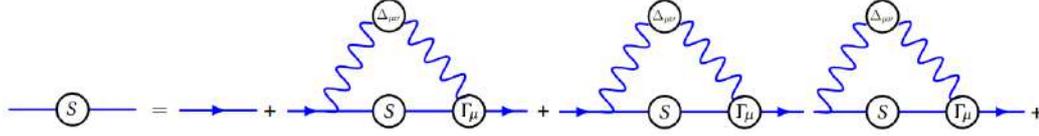


Figura 3.1: Expansión perturbativa del propagador de fermión

si esto lo traducimos a notación matemática tendremos

$$S_F(k) = S_F^0(k) + [S_F^0(k)] [\Sigma(k)] [S_F^0(k)] + [S_F^0(k)] [\Sigma(k)] [S_F^0(k)] [\Sigma(k)] [S_F^0(k)] + \dots \quad (3.1)$$

donde la expresión  $\Sigma(k)$  es la autoenergía del fermión, la cual engloba todas las correcciones radiativas que aparecen en el propagador de fermión<sup>1</sup>. Factorizamos  $S_F^0(k) \Sigma(k)$  de la ecuación anterior

$$S_F(k) = S_F^0(k) + S_F^0(k) \Sigma(k) (S_F^0(k) + S_F^0(k) \Sigma(k) S_F^0(k) + \dots) \quad (3.2)$$

Notamos que la expresión que está entre el paréntesis es la definición de  $S_F(k)$  que se da en (3.1), por lo cual

$$S_F(k) = S_F^0(k) + S_F^0(k) \Sigma(k) S_F(k) \quad (3.3)$$

Para llegar a una expresión más amigable multiplicamos (3.3) por  $S_F^{-1}(k)$

$$1 = S_F^0(k) S_F^{-1}(k) + S_F^0(k) \Sigma(k) \quad (3.4)$$

ahora, esta expresión la multiplicamos por  $S_F^{0-1}(k)$

$$S_F^{0-1}(k) = S_F^{-1}(k) + \Sigma(k) \quad (3.5)$$

y despejando  $S_F^{-1}(k)$  tenemos

$$S_F^{-1}(k) = S_F^{0-1}(k) - \Sigma(k) \quad (3.6)$$

En 4 dimensiones [1]  $\Sigma(k)$  esta definida como

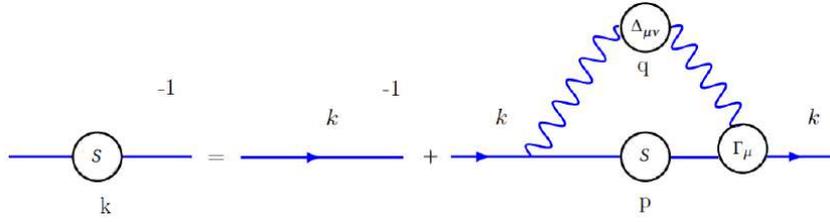
$$\Sigma(k) = ie^2 \int_M \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma^\nu S_F(p) \Gamma^\mu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(q) \quad (3.7)$$

donde  $q = k - p$  y  $M$  indica que esta descrita en el espacio de Minkowski. Por lo tanto, la ecuación de Schwinger Dyson para el fermión en 4 dimensiones es

$$S_F^{-1}(k) = S_F^{0-1}(k) - ie^2 \int_M \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma^\nu S_F(p) \Gamma^\mu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(q) \quad (3.8)$$

y su expresión diagramática

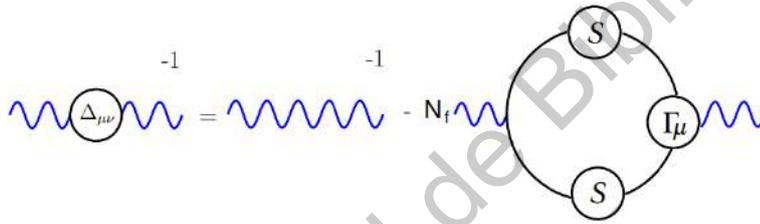
<sup>1</sup>Existen tres tipos de correcciones radiativas: 1. Del propagador de fermión, 2. del propagador de fotón, 3. del vértice fermión-fotón [16]



**Figura 3.2:** Ecuación de Schwinger Dyson para el fermión ó ecuación del gap

A la ecuación (3.8) también se le conoce como la *ecuación del gap* por su característica de contener tanto una solución perturbativa como una no perturbativa.

Bajo la misma idea es posible obtener la SDE para el propagador del fotón, para el vértice fermión-fotón y toda la pila infinita de SDE. Para el caso del fotón se tiene la siguiente ecuación de Schwinger Dyson en 4 dimensiones y su respectivo diagrama



**Figura 3.3:** Ecuación de Schwinger Dyson para el fotón

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(q) = \Delta_{\mu\nu}^0{}^{-1} - ie^2 N_f \int_M \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\nu S_F(p) \Gamma_\mu(k, p) S_F(k) \quad (3.9)$$

donde  $N_f$  es el número de sabores para los fermiones. Los términos  $S_F^0(k)$  y  $\Delta_{\mu\nu}^0(q)$  son los que ya habíamos visto en (2.67, 2.108), simplemente les añadimos el superíndice cero para diferenciarlos de los propagadores completos

$$S_F^0(k) = \frac{1}{k - m_0} \quad (3.10)$$

$$\Delta_{\mu\nu}^0(q) = \frac{1}{q^2} \left( g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \quad (3.11)$$

Anteriormente ya habíamos mencionado que para poder dar solución a estas ecuaciones es necesario truncarlas. En el régimen no perturbativo, este truncamiento, por las razones de simplificación y conveniencia, se da en las primeras dos SDE, es decir, se desacoplan los propagadores de fermión y fotón (3.8, 3.9). Sin embargo, como podemos notar, estas ecuaciones también tienen dependencia del vértice fermión-fotón  $\Gamma_\mu$ ; por lo cual, es necesario construir un *Ansatz* para el vértice fermión-fotón. Este *Ansatz* no puede ser cualquier *Ansatz*, debe cumplir con la invariancia de norma y en general con las características fundamentales de la teoría [1].

Para el caso de un espacio-tiempo en  $d$ -dimensiones los trabajos [2, 16] nos proporcionan la ecuación del gap en  $d$  dimensiones

$$S_F^{-1}(p) = S_F^{0^{-1}}(p) + ie^2 \int_M \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu S_F(k) \Gamma^\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(q) \quad (3.12)$$

Debemos notar que las ecuaciones en esta sección están descritas en el espacio de Minkowski, para pasarlo al espacio Euclidiano necesitamos implementar rotaciones de Wick. En [1, 21] nos proporcionan una transcripción directa de elementos en el espacio de Minkowski y su equivalente al espacio Euclidiano.

Minkowski	Euclidiano	
$\int_M d^4 q$	$\rightarrow$	$i \int_E d^4 q$
$a^\mu$	$\rightarrow$	$-i a_\mu$
$\gamma^\mu$	$\rightarrow$	$\gamma_\mu$
$a \cdot b$	$\rightarrow$	$-a \cdot b$
$\not{a}$	$\rightarrow$	$-i \not{a}$

(3.13)

donde  $E$  indica que se encuentran en el espacio Euclidiano.

## 3.2. Identidades y Transformaciones

### 3.2.1. Identidad de Ward-Fradkin-Green-Takahashi

La WFGTI se puede expresar en el espacio de momentos como

$$(k_\mu - p_\mu) \Gamma^\mu(k, p) = S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(p) \quad (3.14)$$

la cual relaciona el propagador de fermión  $S_F$  con el vértice  $\Gamma^\mu$ . Para comprobar esta identidad vamos a tomar el primer orden de  $S_F$  y  $\Gamma^\mu$

$$(k_\mu - p_\mu) \Gamma_0^\mu(k, p) = S_F^{0^{-1}}(k) - S_F^{0^{-1}}(p) \quad (3.15)$$

donde tenemos que el propagador y el vértice desnudos están definidos

$$S_F^0(k) = \frac{1}{\gamma^\mu k_\mu - m} \quad ; \quad \Gamma_0^\mu(k, p) = \gamma^\mu \quad (3.16)$$

y al sustituir estas definiciones en (3.15)

$$\begin{aligned} (k_\mu - p_\mu) \Gamma_0^\mu(k, p) &= \gamma^\mu k_\mu - m - \gamma^\mu p_\mu + m \\ (k_\mu - p_\mu) \gamma^\mu &= \gamma^\mu k_\mu - \gamma^\mu p_\mu \\ (k_\mu - p_\mu) \gamma^\mu &= (k_\mu - p_\mu) \gamma^\mu \end{aligned} \quad (3.17)$$

con esto nos damos cuenta que la identidad se cumple y la ecuación (3.14) es simplemente una generalización de las versiones completas del vértice y el propagador de fermión. Si tomamos el límite cuando  $k \rightarrow p$  la WFGTI se reduce a la *Identidad de Ward* [13]

$$\Gamma^\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F^{-1}(p) \quad (3.18)$$

La importancia de la WFGTI es que impone restricciones no perturbativas sobre el vértice fermión-fotón [1], por lo tanto, se debe asegurar que el *ansatz* para el vértice satisfaga las WFGTI para que sea físicamente aceptable.

### 3.2.2. Identidades Transversas de Takahashi

Las WFGTI proporcionan información de la parte longitudinal del vértice fermión-fotón, pero dejan indeterminada la parte transversa. Para encontrar restricciones que ayuden a determinar esta parte indeterminada Takahashi derivó las llamadas relaciones transversales que complementan a las WFGTI normales, con estas nuevas identidades se podría determinar el vértice fermión-fotón completo en términos de las funciones del propagador de fermión.

Durante mucho tiempo no se les dio utilidad a estas *Identidades Transversas de Takahashi* (TTI por sus siglas en inglés) debido a su complejidad, pero estudios recientes han demostrado que con el tratamiento correcto pueden ser de utilidad para obtener información de la parte transversa del vértice fermión-fotón no perturbativo [3, 22]. Para que esto sea posible las TTI se deben contraer con ciertos tensores en específico que ayudarán a la manipulación de las identidades.

La **TTI vectorial** para el vértice  $\Gamma_\mu(k, p)$  en el espacio Euclidiano con dependencia explícita sobre la masa del fermión tiene la forma:

$$q_\mu \Gamma_\nu(k, p) - q_\nu \Gamma_\mu(k, p) = S^{-1}(p) \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} S^{-1}(k) + 2im \Gamma_{\mu\nu}(k, p) + t_\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \Gamma_\beta^A(k, p) + A_{\mu\nu}^V(k, p) \quad (3.19)$$

donde los momentos son  $q = k - p$ ,  $t = k + p$  y  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ . La ecuación (3.19) contiene un vértice axial  $\Gamma_\beta^A(k, p)$  y un vértice tensorial inhomogéneo  $\Gamma_{\mu\nu}(k, p)$ , además de un tensor no local  $A_{\mu\nu}^V(k, p)$  definidos como

$$(2\pi)^4 i S(k) \Gamma_{\mu\nu}(k, p) i S(p) \delta^{(4)}(q - k + p) = \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 y e^{ik \cdot x_1 - ip \cdot x_2 - iq \cdot y} \times \langle 0 | T [\bar{\psi}(y) \sigma_{\mu\nu} \psi(y) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | 0 \rangle \quad (3.20)$$

$$A_{\mu\nu}^V(k, p) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2q_\lambda \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \Gamma_\rho^A(k, p; q) \quad (3.21)$$

el término  $\Gamma_\rho^A(k, p; q)$  se expresa

$$(2\pi)^4 iS(k)\Gamma_\rho^A(k, p; q)iS(p)\delta^{(4)}(q-k+p) = \int d^4x_1 d^4x_2 d^4z e^{ik \cdot x_1 - ip \cdot x_2 + i(q-k) \cdot y - (q-p) \cdot z} \quad (3.22)$$

$$\times \langle 0|T[\bar{\psi}(z)\gamma_\rho\gamma_5 U_p(z, y)\psi(y)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]|0\rangle$$

en el cual la función  $U_p(z, y)$  se introduce para conservar la invariancia de norma

$$U_p(z, y) = P e^{ie \int_y^z d\omega^\alpha A_\alpha(y)} \quad (3.23)$$

Los propagadores de fermión y fotón que aparecen en la ecuación (3.19) se definen en el espacio Euclidiano

$$S(p) = \frac{F(p^2)}{i\gamma \cdot p + M(p^2)} \quad (3.24)$$

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = \Delta(q^2) \left[ \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \quad (3.25)$$

Por otro lado, la **TTI axial** para el vértice axial  $\Gamma_\mu^A(k, p)$  en el espacio Euclidiano se expresa

$$q_\mu \Gamma_\nu^A(k, p) - q_\nu \Gamma_\mu^A(k, p) = S^{-1}(p)\sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k) + t_\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \Gamma_\beta(k, p) + V_{\mu\nu}^A(k, p) \quad (3.26)$$

donde  $\sigma_{\mu\nu}^5 = \gamma_5 \sigma_{\mu\nu}$ ,  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$  y el tensor no local  $V_{\mu\nu}^A(k, p)$  se expresa igual que  $A_{\mu\nu}^V(k, p)$  con la única diferencia de que no contiene  $\gamma_5$ .

Las TTI están acopladas por los términos no locales  $A^V$  y  $V^A$ , los cuales son muy complicados incluso a primer lazo en la teoría perturbativa, además de que mezclan los vértices axiales y vectoriales. Para desacoplar los vértices axial y vectorial se introducen los tensores:

$$T_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} t_\alpha q_\beta \quad (3.27)$$

$$T_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \gamma_\alpha q_\beta \quad (3.28)$$

estos tensores solo se le van a aplicar a TTI axial. Para  $d$ -dimensiones se debe tener en cuenta la contracción de los tensores de Levi-Civita  $\epsilon_{\rho\mu\nu\sigma} \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}$  en el espacio Euclidiano. La contracción de dos tensores Levi-Civita se expresa como el determinante de deltas de Kronecker

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \delta_{i_1 j_2} & \dots & \delta_{i_1 j_n} \\ \delta_{i_2 j_1} & \delta_{i_2 j_2} & \dots & \delta_{i_2 j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_n j_1} & \delta_{i_n j_2} & \dots & \delta_{i_n j_n} \end{vmatrix} \quad (3.29)$$

con lo que para contraer  $\epsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}$  se tiene el determinante:

$$\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}\epsilon_{\rho\mu\nu\sigma} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\mu\rho} & \delta_{\mu\mu} & \delta_{\mu\nu} & \delta_{\mu\sigma} \\ \delta_{\nu\rho} & \delta_{\nu\mu} & \delta_{\nu\nu} & \delta_{\nu\sigma} \\ \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} \quad (3.30)$$

y usando FeynCalc [23, 24] y Mathematica [25] se reduce a la forma

$$\begin{aligned} \epsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} &= D^2 g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} - D^2 g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} - 5D g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} \\ &\quad + 5D g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} + 6g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} - 6g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} \\ &= g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} (-D^2 + 5D - 6) + g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} (D^2 - 5D + 6) \\ &= (D - 3)(D - 2) [g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} - g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho}] \end{aligned}$$

### Aplicando el primer tensor a la TTI axial

Se aplica el tensor  $T_{\mu\nu}^1$  (3.27) a la TTI axial (3.26)

$$\begin{aligned} \underbrace{T_{\mu\nu}^1[q_\mu\Gamma_\nu^A(k, p) - q_\nu\Gamma_\mu^A(k, p)]}_1 &= \underbrace{T_{\mu\nu}^1[S^{-1}(p)\sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k)]}_2 \\ &\quad + \underbrace{T_{\mu\nu}^1[t_\alpha\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}\Gamma_\beta(k, p)]}_3 + \underbrace{T_{\mu\nu}^1[V_{\mu\nu}^A(k, p)]}_4 \end{aligned}$$

los términos 2 y 4 se quedan expresados tal cual, pero los términos 1 y 3 deben recibir un tratamiento apropiado.

- **Término 1**

Por simetría este término se hace cero

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^1[q_\mu\Gamma_\nu^A(k, p) - q_\nu\Gamma_\mu^A(k, p)] &= \frac{1}{2}[\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}t_\alpha q_\beta q_\mu\Gamma_\nu^A(k, p) - \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}t_\alpha q_\beta q_\nu\Gamma_\mu^A(k, p)] \\ T_{\mu\nu}^1[q_\mu\Gamma_\nu^A(k, p) - q_\nu\Gamma_\mu^A(k, p)] &= 0 \end{aligned}$$

- **Término 3**

$$T_{\mu\nu}^1[t_\alpha\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}\Gamma_\beta(k, p)] = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}t_\alpha q_\beta[t_\alpha\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}\Gamma_\beta(k, p)]$$

se cambian los indices repetidos

$$T_{\mu\nu}^1[t_\alpha\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}\Gamma_\beta(k, p)] = \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\mu\nu\sigma}t_\rho q_\sigma[t_\alpha\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}\Gamma_\beta(k, p)]$$

con lo que se tiene

$$T_{\mu\nu}^1[t_\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \Gamma_\beta(k, p)] = \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\mu\nu\sigma} \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} t_\rho q_\sigma t_\alpha \Gamma_\beta(k, p)$$

previamente se vió que la contracción de Levi-Civita se expresa como

$$\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \epsilon_{\rho\mu\nu\sigma} = (D-3)(D-2) [g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} - g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho}]$$

y se hace la contracción de términos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^1[t_\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \Gamma_\beta(k, p)] &= \frac{1}{2} \left( (D-3)(D-2) [g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} - g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho}] \right) t_\rho q_\sigma t_\alpha \Gamma_\beta(k, p) \\ &= \frac{1}{2} (D-3)(D-2) [\delta_{\sigma\beta} \delta_{\rho\alpha} t_\rho q_\sigma t_\alpha \Gamma_\beta(k, p) - \delta_{\sigma\alpha} \delta_{\rho\beta} t_\rho q_\sigma t_\alpha \Gamma_\beta(k, p)] \\ &= \frac{1}{2} (D-3)(D-2) [t^2 q \cdot \Gamma(k, p) - q \cdot t t \cdot \Gamma(k, p)] \end{aligned}$$

La contracción completa queda:

$$\frac{1}{2} (D-3)(D-2) q \cdot t t \cdot \Gamma(k, p) = \underbrace{T_{\mu\nu}^1[S^{-1}(p)\sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(p)]}_{\text{término 2}} + \frac{1}{2} (D-3)(D-2) t^2 q \cdot \Gamma(k, p) + \underbrace{T_{\mu\nu}^1 V_{\mu\nu}^A(k, p)}_{\text{término 4}} \quad (3.31)$$

### Aplicando el segundo tensor a la TTI axial

Ahora se aplica el tensor  $T_{\mu\nu}^2$  (3.28) a TTI axial (3.26)

$$\begin{aligned} \underbrace{T_{\mu\nu}^2[q_\mu \Gamma_\nu^A(k, p) - q_\nu \Gamma_\mu^A(k, p)]}_1 &= \underbrace{T_{\mu\nu}^2[S^{-1}(p)\sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k)]}_2 \\ &+ \underbrace{T_{\mu\nu}^2[t_\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \Gamma_\beta(k, p)]}_3 + \underbrace{T_{\mu\nu}^2[V_{\mu\nu}^A(k, p)]}_4 \end{aligned}$$

Nuevamente el término 1 se hace cero por simetría y los términos 2 y 4 quedan expresados igual.

#### ■ **Término 3**

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^2[t_\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \Gamma_\beta(k, p)] &= \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\mu\nu\sigma} \gamma_\rho q_\sigma [t_\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \Gamma_\beta(k, p)] \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\mu\nu\sigma} \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \gamma_\rho q_\sigma t_\alpha \Gamma_\beta(k, p) \end{aligned}$$

se hace la contracción de tensores

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu}^2 [t_\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \Gamma_\beta(k, p)] &= \frac{1}{2} (D-3) (D-2) (\delta_{\sigma\beta} \delta_{\rho\alpha} - \delta_{\sigma\alpha} \delta_{\rho\beta}) \gamma_\rho q_\sigma t_\alpha \Gamma_\beta(k, p) \\
 &= \frac{1}{2} (D-3) (D-2) [\delta_{\sigma\beta} \delta_{\rho\alpha} \gamma_\rho q_\sigma t_\alpha \Gamma_\beta(k, p) - \delta_{\sigma\alpha} \delta_{\rho\beta} \gamma_\rho q_\sigma t_\alpha \Gamma_\beta(k, p)] \\
 &= \frac{1}{2} (D-3) (D-2) [\gamma \cdot tq \cdot \Gamma(k, p) - q \cdot t\gamma \cdot \Gamma(k, p)]
 \end{aligned}$$

y finalmente, se une el término completo

$$\frac{1}{2} (D-3) (D-2) q \cdot t\gamma \cdot \Gamma(k, p) = \frac{T_{\mu\nu}^2 [S^{-1}(p) \sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k)]}{\frac{1}{2} (D-3) (D-2) \gamma \cdot tq \cdot \Gamma(k, p) + T_{\mu\nu}^2 V_{\mu\nu}^A(k, p)} \quad (3.32)$$

Los términos  $T_{\mu\nu}^1 V_{\mu\nu}^A$  y  $T_{\mu\nu}^2 V_{\mu\nu}^A$  son desconocidos [26, 27], pero son escalares de Lorentz. Para la configuración cinemática del vértice se tienen 3 vectores de Lorentz linealmente independientes y 4 escalares de Lorentz asociados:

$$\begin{aligned}
 \text{VECTORES:} & \quad \gamma_\mu, k_\mu, p_\mu \\
 \text{ESCALARES:} & \quad I_D, \gamma \cdot k, \gamma \cdot p, \gamma \cdot k \gamma \cdot p
 \end{aligned}$$

Con lo que en el espacio Euclidiano los términos desconocidos se pueden expresar

$$iT_{\mu\nu}^1 V_{\mu\nu}^A = I_D Y_1(k, p) + i(\gamma \cdot q) Y_2(k, p) + i(\gamma \cdot t) Y_3(k, p) + [\gamma \cdot q, \gamma \cdot t] Y_4(k, p) \quad (3.33)$$

$$iT_{\mu\nu}^2 V_{\mu\nu}^A = iI_D Y_5(k, p) + (\gamma \cdot q) Y_6(k, p) + (\gamma \cdot t) Y_7(k, p) + i[\gamma \cdot q, \gamma \cdot t] Y_8(k, p) \quad (3.34)$$

donde  $Y_i(k, p)$  son funciones escalares desconocidas que más adelante van a permitir introducir las contribuciones no locales al vértice fermión-fotón completamente vestido.

### 3.3. Renormalización Multiplicativa

Se sabe que las SDE contienen divergencias en términos con lazos, es decir, arrojan infinitos. Para poder deshacernos de este problema y obtener predicciones físicas necesitamos remover todas las divergencias; a este proceso se le conoce como *Renormalización de la teoría*. Existen varios métodos para llevar a cabo esta Renormalización; un método usualmente utilizado en QED es la *Renormalización Multiplicativa* (MR). Éste tipo de renormalización se basa en suponer que las cantidades finitas y renormalizadas, tales como campos, las masas y el parámetro de acoplamiento, están relacionadas con sus contrapartes divergentes

con factores multiplicativos e infinitos que se llaman constantes de renormalización [28].

En QED no masiva, [1] nos muestra que el propagador fermiónico, fotónico y la constante de acoplamiento renormalizados (es decir finitos);  $\phi_R$ ,  $A_\mu^R$  y  $e_R$ , respectivamente, toman la forma

$$\psi_R = Z_2^{-1/2} \psi \quad (3.35)$$

$$A_\mu^R = Z_3^{-1/2} A_\mu \quad (3.36)$$

$$e_R = \frac{Z_2 Z_3^{1/2} e}{Z_1} \quad (3.37)$$

donde el subíndice  $R$  indica que la cantidad correspondiente es renormalizada, siendo los factores multiplicativos, o constantes de renormalización  $Z_i$ , los que absorben las divergencias;  $\mu$  es la escala de renormalización y  $\alpha = e^2/(4\pi)$ .

Con la misma analogía, la función de onda del fermión  $F_R$  también se puede expresar en MR, esta expresión requiere que  $F$  no renormalizada y  $F_R$  estén relacionadas mediante el factor multiplicativo de renormalización  $Z_2$ . En [4] indican que esta expresión puede ser escrita de la siguiente manera

$$F(p^2, \Lambda^2) = Z_2(\mu^2/\Lambda^2) F_R(p^2, \mu^2) \quad (3.38)$$

donde su solución esta expresada como

$$\frac{F_R(k^2, \mu^2)}{F_R(p^2, \mu^2)} = \frac{F(k^2, \Lambda^2)}{F(p^2, \Lambda^2)} = \left(\frac{k^2}{p^2}\right)^\gamma \quad (3.39)$$

La ventaja de este método de renormalización, [29], es que desde un inicio y de manera no perturbativa se asegura la renormalización de los campos al multiplicarlos con funciones de normalización que absorben las divergencias a todos los ordenes. Este proceso nos ayuda a reescribir las funciones de Green como funciones de Green renormalizadas. Otra ventaja es que la MR lleva a las *ecuaciones de Grupos de Renormalización* (R-GE), las cuales proporcionan fenómenos observables experimentalmente.

En el trabajo de Bashir y Delbourgo [2] se indica que la solución para  $F$  en dimensiones arbitrarias puede ser obtenida de la ecuación

$$\frac{1}{F(p^2)} = 1 + (4\pi)^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma_d(k^2, p^2, q^2) \frac{F(k^2)}{F(p^2)} \frac{k \cdot q}{k^2 q^4} \quad (3.40)$$

la cual lleva a las correctas propiedades de covariancia en dimensiones arbitrarias. La función  $\gamma_d(k^2, p^2, q^2)$  está definida como

$$\gamma_d(k^2, p^2, q^2) = \frac{\alpha \xi}{4\pi} + \lambda_d(k^2, p^2, q^2) \quad (3.41)$$

La ecuación (3.40) puede ser usada como un requerimiento no perturbativo para trucar la ecuación del gap en el límite no masivo, esto con el fin de garantizar la MR de la función de onda del fermión  $F$ . Por lo tanto, se debe cumplir (3.40) en la ecuación del gap y con esto ya se asegura la MR.

### 3.4. Regularización Dimensional

Al trabajar en dimensiones arbitrarias es natural tomar en cuenta la *regularización dimensional* cuando se requiere. Primero que todo es necesario marcar la diferencia entre renormalización y regularización. La regularización es simplemente la separación de la parte divergente de la parte que converge. Se usan trucos matemáticos que para poder manejar las integrales divergentes en una teoría. Aparte de la regularización dimensional, también se puede emplear la regularización de corte ultravioleta y la regularización Pauli–Villars [30]. En contraste con esta definición, la renormalización puede remover la divergencia pero además puede tener una interpretación física.

La regularización dimensional tiene que manejar tres principales problemas [31]:

1. **Unicidad:** Esta característica debe ser asegurada en regularización dimensional para así evitar tener dos definiciones que conlleven a tener dos resultados diferentes.
2. **Existencia:** Garantizar la existencia va a evitar que aparezcan inconsistencias.
3. **Propiedades:** Es necesario tener en cuenta que las propiedades pueden modificarse al cambiar de dimensión.

En  $d$  dimensiones las integrales se toman con respecto al elemento de volumen en  $d$  dimensiones [30], de tal manera que

$$\int d^d k = \int dk^0 dk^1 dk^2, \dots, dk^{d-1} \quad (3.42)$$

de acuerdo a M. D. Schwartz, [32], esta integral se puede manipular para obtener una expresión que sea solamente función de la magnitud  $k$

$$\int d^d k = \int d\Omega_d \int k^{d-1} dk \quad (3.43)$$

donde  $\Omega_d$  es un ángulo sólido de una esfera unitaria de  $d$  dimensiones. El diferencial  $d\Omega_d$  se expresa

$$d\Omega_d = \sin\theta_1 d\theta_1 \sin^2\theta_2 d\theta_2 \cdots \sin^{d-3}\theta_{d-3} d\theta_{d-3} d\phi \quad (3.44)$$

donde

$$0 < \theta_i < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi$$

Por otro lado, el álgebra de Dirac también se ve modificado en  $d$  dimensiones. En el **Apéndice A** se presentan estas modificaciones.

---

## Capítulo 4

# Vértice fermión-fotón no perturbativo

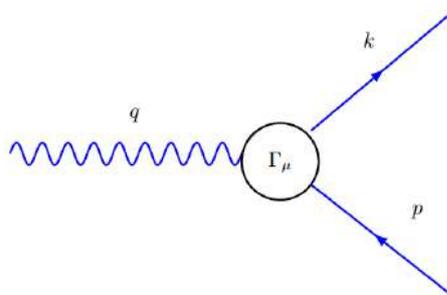
---

“En un arrebato de entusiasmo creyó abrazar la belleza misma con esa mirada, la forma como pensamiento divino, la perfección pura y única que vive en el espíritu y de la cual, para ser adorada, se había erigido allí una copia, un símbolo lleno de gracia y ligereza.”

**-La muerte en Venecia, Thomas Mann-**

En el régimen no perturbativo la pila infinita de SDE se trunca al introducir las funciones de Green de 3-puntos, las cuales describen la interacción de fermiones con fotones, es decir, el vértice fermión-fotón  $\Gamma_\mu(k, p)$ . Para que esto sea posible es necesario encontrar un *ansatz* no perturbativo para el vértice fermión-fotón que satisfaga las constricciones de la teoría fundamental, entre lo que se encuentra preservar la invariancia de norma. Como ya se vio en secciones anteriores, las WGFTI y las TTI imponen restricciones a los factores de forma del vértice para garantizar la invariancia de norma. El *ansatz* no perturbativo va a cumplir la función de desacoplar las SDE para el propagador fermiónico y fotónico de las demás SDE.

El vértice fermión-fotón se puede representar con el siguiente diagrama



**Figura 4.1:** Diagrama de Feynman: Vértice Fermión Fotón

#### 4. VÉRTICE FERMIÓN-FOTÓN NO PERTURBATIVO

la configuración cinemática de la figura 4.1 se puede escribir en términos de los 3 vectores de Lorentz linealmente independientes  $\{\gamma_\mu, k_\mu, p_\mu\}$  y los 4 escalares de Lorentz asociados  $\{I_D, \gamma \cdot k, \gamma \cdot p, \gamma \cdot k\gamma \cdot p\}$ , de tal manera que el vértice fermión-fotón puede escribirse como una combinación lineal de 12 vectores base  $V_\mu^i(k, p)$

$$\begin{aligned}
 V_\mu^1(k, p) &= \gamma_\mu & V_\mu^2(k, p) &= k_\mu & V_\mu^3(k, p) &= p_\mu \\
 V_\mu^4(k, p) &= \not{k}\gamma_\mu & V_\mu^5(k, p) &= \not{k}k_\mu & V_\mu^6(k, p) &= \not{k}p_\mu \\
 V_\mu^7(k, p) &= \not{p}\gamma_\mu & V_\mu^8(k, p) &= \not{p}k_\mu & V_\mu^9(k, p) &= \not{p}p_\mu \\
 V_\mu^{10}(k, p) &= \not{k}\not{p}\gamma_\mu & V_\mu^{11}(k, p) &= \not{k}\not{p}k_\mu & V_\mu^{12}(k, p) &= \not{k}\not{p}p_\mu
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

de tal manera que el vértice puede expresarse

$$\Gamma_\mu(k, p) = \sum_{i=1}^{12} v_i(k, p) V_\mu^i(k, p) \tag{4.2}$$

donde las funciones escalares  $v_i(k, p)$  son factores de forma y dependen solamente de las variables  $k^2, p^2$  y  $k \cdot p$ .

El vértice completo es finito en el límite  $k^2 \rightarrow p^2$ . Sin embargo, expresado en la base  $V_\mu^i$ , los factores de forma  $v_i$  separadamente divergen en este mismo límite  $k^2 \rightarrow p^2$ , es decir, contienen singularidades cinemáticas. Es posible y conveniente removerlas de los factores de forma individual, definiendo una base adecuada. En 1980 J.S. Ball y T.W. Chiu [5, 6] lograron definir dicha base y proponer un vértice que asegura que cada factor de forma es libre de singularidades de manera individual. Para lograr esto partieron de la WFGTI, que en el espacio Euclidiano es

$$iq_\mu \Gamma_\mu(k, p) = S^{-1}(k) - S^{-1}(p) \tag{4.3}$$

donde  $q = k - p$ . En el límite cuando  $k \rightarrow p$  esta reduce a la identidad de Ward:

$$\Gamma^\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} S^{-1}(p) \tag{4.4}$$

Por lo tanto, podemos dividir el vértice en dos componentes, una longitudinal y una transversa

$$\Gamma_\mu(k, p) = \Gamma_\mu^L(k, p) + \Gamma_\mu^T(k, p) \tag{4.5}$$

con la condición

$$q_\mu \Gamma_\mu^L(k, p) \neq 0 \quad ; \quad q_\mu \Gamma_\mu^T(k, p) = 0 \tag{4.6}$$

con esto nos damos cuenta que es posible encontrar los factores de forma del vértice longitudinal, llamado vértice de Ball-Chiu, libres de singularidades cinemáticas, pero por otra parte, deja la componente transversa totalmente indeterminada. A continuación se presenta la obtención de cada una de las componentes del vértice  $\Gamma_\mu(k, p)$ , tanto la parte longitudinal que satisface la WFGTI, como la parte transversa haciendo uso de las TTI.

## 4.1. Vértice Longitudinal

La componente longitudinal del vértice fermión-fotón satisface la WFGTI de la ecuación (4.3). Partiendo de la identidad (4.4), podemos obtener la expresión para el vértice longitudinal de manera sistemática. Lo logramos utilizando la siguiente expresión para el propagador de fermión en el espacio Euclidiano:

$$S^{-1}(p) = \frac{i\gamma \cdot p + M(p^2)}{F(p^2)} \quad (4.7)$$

Sustituimos esta expresión en la identidad (4.4) y simplificándola, obtenemos el vértice longitudinal  $\Gamma_\mu^L(p, p)$

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^L(p, p) &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left( \frac{i\gamma \cdot p + M(p^2)}{F(p^2)} \right) \\ &= \frac{\gamma_\mu}{F(p^2)} + 2p_\mu \gamma \cdot p \frac{\partial}{\partial p^2} \left[ \frac{1}{F(p^2)} \right] - 2ip_\mu \frac{\partial}{\partial p^2} \left[ \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para obtener el vértice longitudinal  $\Gamma_\mu^L(k, p)$  para  $k \neq p$ , simetrizamos la expresión anterior bajo el intercambio de  $k$  con  $p$ . Siguiendo estos pasos, Ball y Chiu [5, 6] propusieron

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(p^2)} &\rightarrow \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)} \right], \\ p_\mu &\rightarrow \frac{1}{2} (p_\mu + k_\mu) = \frac{1}{2} t_\mu, \\ \gamma \cdot p &\rightarrow \frac{1}{2} \gamma \cdot (p + k) = \frac{1}{2} \gamma \cdot t, \\ \frac{\partial}{\partial p^2} \left[ \frac{1}{F(p^2)} \right] &\rightarrow \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right], \\ \frac{\partial}{\partial p^2} \left[ \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] &\rightarrow \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $t = k + p$ . Haciendo estas sustituciones se obtiene el vértice longitudinal

$$\Gamma_\mu^L(k, p) = a(k^2, p^2) \gamma_\mu + \frac{1}{2} b(k^2, p^2) t_\mu \gamma \cdot t - ic(k^2, p^2) t_\mu \quad (4.10)$$

donde se definieron los factores de forma  $a(k^2, p^2)$ ,  $b(k^2, p^2)$  y  $c(k^2, p^2)$

$$\begin{aligned} a(k^2, p^2) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)} \right], \\ b(k^2, p^2) &= \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right], \\ c(k^2, p^2) &= \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

dado que las funciones  $F$  y  $M$  son continuas y que cuando  $k^2 \rightarrow p^2$ ,  $b$  y  $c$  se convierten en derivadas, el vértice longitudinal se encuentra libre de singularidades cinemáticas .

## 4.2. Vértice Transverso

Para que el vértice completo reproduzca los resultados que se obtienen en teoría de perturbaciones orden por orden es necesario obtener la componente transversa, y hasta este punto la única información que tenemos de esta componente es que satisface

$$i q_\mu \Gamma_\mu^T(k, p) = 0 \quad (4.12)$$

esta condición nos proporciona dos implicaciones para el vértice transverso

1. En el límite cuando  $k \rightarrow p$  la componente transversa esta perfectamente definida

$$\Gamma_\mu^T(p, p) = 0 \quad (4.13)$$

2. Se van a tener 8 estructuras que van a conformar el vértice transverso

$$\Gamma_\mu^T(k, p) = \sum_{i=1}^8 \tau_i(k, p) T_\mu^i(k, p) \quad (4.14)$$

Escogemos las 8 estructuras que satisfagan  $q_\mu T_\mu^i = 0$  individualmente. Ball y Chiu [5, 6] propusieron una base que asegura que en norma de Feynman ( $\xi = 1$ ) el vértice transverso se encuentra libre de singularidades cinemáticas. Sin embargo, A. Kizilerzü, M. Reenders y M. Pennington [7, 33] descubrieron que para el vértice a un lazo en norma arbitraria la base propuesta por Ball y Chiu si presentaba singularidades cinemáticas, así que ellos proponen una nueva base con ligeras modificaciones a la ya existente, esta nueva base se escribe

$$\begin{aligned} T_\mu^1(k, p) &= i[p_\mu(k \cdot q) - k_\mu(p \cdot q)] \\ T_\mu^2(k, p) &= [p_\mu(k \cdot q) - k_\mu(p \cdot q)]\gamma \cdot t \\ T_\mu^3(k, p) &= q^2\gamma_\mu - q_\mu\gamma \cdot q \\ T_\mu^4(k, p) &= i q^2[\gamma_\mu\gamma \cdot t - t_\mu] + 2q_\mu p_\nu k_\rho \sigma_{\nu\rho} \\ T_\mu^5(k, p) &= \sigma_{\mu\nu} q_\nu \\ T_\mu^6(k, p) &= -\gamma_\mu(k^2 - p^2) + t_\mu\gamma \cdot q \\ T_\mu^7(k, p) &= \frac{i}{2}(k^2 - p^2)[\gamma_\mu\gamma \cdot t - t_\mu] + t_\mu p_\nu k_\rho \sigma_{\nu\rho} \\ T_\mu^8(k, p) &= -i\gamma_\mu p_\nu k_\rho \sigma_{\nu\rho} - p_\mu\gamma \cdot k + k_\mu\gamma \cdot p \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ . El problema es que los factores de forma  $\tau_i(k, p)$  son desconocidos y la WFGTI no nos proporciona información sobre ellos. Es aquí donde entran

las TTI, pero antes de llegar a ello se pueden derivar algunas propiedades que debe cumplir el vértice transversal partiendo de requerimientos básicos.

El vértice desnudo se expresa como

$$\Gamma_0^\mu(k, p) = \gamma^\mu \quad (4.16)$$

que bajo una operación de conjugación de carga  $C$  se transforma a

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T \quad (4.17)$$

y debido a que el vértice desnudo y el vértice completamente vestido deben tener las mismas propiedades de simetría, el vértice completamente vestido también debe satisfacer la operación de conjugación de carga  $C$ , de tal manera que

$$C\Gamma_\mu(k, p)C^{-1} = -\Gamma_\mu^T(-p, -k) \quad (4.18)$$

y al tener en cuenta esta simetría en la base (4.15) se va a tener

$$\begin{aligned} CT_\mu^i(k, p)C^{-1} &= -T_\mu^{iT}(-p, -k), & i = 1, 2, 3, 5, 7, 8 \\ CT_\mu^i(k, p)C^{-1} &= T_\mu^{iT}(-p, -k), & i = 4, 6 \end{aligned} \quad (4.19)$$

lo cual implica que la simetría que deben cumplir los factores de forma  $\tau_i(k, p)$  es

$$\begin{aligned} \tau_i(p, k) &= \tau_i(k, p), & i = 1, 2, 3, 5, 7, 8 \\ \tau_i(p, k) &= -\tau_i(k, p), & i = 4, 6 \end{aligned} \quad (4.20)$$

#### 4.2.1. Obtención de las funciones $\tau_i(k, p)$ aplicando las TTI

Como ya se vio, los factores de forma del vértice transversal quedan completamente indeterminados por las WFGTI, pero es posible obtener información de estas funciones  $\tau_i(k, p)$  al introducir las TTI obtenidas en (3.31) y (3.32), que dependen explícitamente de la contracción de los tensores  $T_{\mu\nu}^i$  con el término no local  $V_{\mu\nu}^A$  definidas en (3.33) y (3.34). Las ecuaciones (3.31) y (3.32) representan un sistema de 8 ecuaciones linealmente independientes las cuales pueden proyectarse tomando las trazas de cada una y multiplicándola por cada escalar de Lorentz.

ESCALARES:  $I_D, \gamma \cdot k, \gamma \cdot p, \gamma \cdot k \gamma \cdot p$

por lo que se van a tener que sacar las siguientes trazas:

$$Tr\{I_D TTI_{1,2}\} \quad Tr\{\gamma \cdot k TTI_{1,2}\} \quad Tr\{\gamma \cdot p TTI_{1,2}\} \quad Tr\{\gamma \cdot k \gamma \cdot p TTI_{1,2}\}$$

#### 4. VÉRTICE FERMIÓN-FOTÓN NO PERTURBATIVO

donde  $TTI_1$  representa la ecuación (3.31) y  $TTI_2$  la ecuación (3.32). En el **Apéndice A** se muestran las propiedades de las matrices  $\gamma$ . A continuación se presenta el cálculo explícito solo para las primeras 3 trazas para ejemplificar el procedimiento, el cual es el mismo para el resto de las trazas. Las expresiones que se utilizan en este cálculo están dadas en las ecuaciones (3.31, 3.32, 3.33, 3.34, 4.5, 4.7, 4.10, 4.14, 4.15), además, debemos recordar que

$$\sigma_{\mu\nu}^5 = \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \quad , \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (4.21)$$

##### 4.2.1.1. $Tr\{I_D TTI_1\}$

La primera traza es la resultante de la multiplicación de la  $TTI_1$  y la matriz identidad:

$$\begin{aligned} Tr\{I_D TTI_1\} = & \underbrace{Tr\{T_{\mu\nu}^1 [S^{-1}(p)\sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k)]\}}_1 + \underbrace{Tr\{\frac{1}{2} (D^2 - 5D + 6) t^2 q \cdot \Gamma(k, p)\}}_2 \\ & + \underbrace{Tr\{T_{\mu\nu}^1 V_{\mu\nu}^A(k, p)\}}_3 - \underbrace{Tr\{\frac{1}{2} (D^2 - 5D + 6) q \cdot tt \cdot \Gamma(k, p)\}}_4 \end{aligned}$$

##### **Término 1**

$$\begin{aligned} Tr\{T_{\mu\nu}^1 [S^{-1}(p)\sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k)]\} &= T_{\mu\nu}^1 [Tr\{S^{-1}(p)\sigma_{\mu\nu}^5\} - Tr\{\sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k)\}] \\ &= T_{\mu\nu}^1 \left[ Tr \left\{ \frac{i\gamma \cdot p + M(p^2)}{F(p^2)} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \right\} - Tr \left\{ \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \frac{i\gamma \cdot k + M(k^2)}{F(k^2)} \right\} \right] \\ &= T_{\mu\nu}^1 [Tr \left\{ \frac{i\gamma \cdot p}{F(p^2)} \gamma_5 \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \right\} + Tr \left\{ \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \gamma_5 \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \right\} \\ &\quad - Tr \left\{ \gamma_5 \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \frac{i\gamma \cdot k}{F(k^2)} \right\} - Tr \left\{ \gamma_5 \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \frac{M(k^2)}{F(k^2)} \right\}] \\ &= \frac{T_{\mu\nu}^1}{2F(p^2)} [-p_\rho (Tr \{\gamma_\rho \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu\} - Tr \{\gamma_\rho \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu\}) + iM(p^2) (Tr \{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu\} \\ &\quad - Tr \{\gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu\})] + \frac{T_{\mu\nu}^1}{2F(k^2)} [k_\rho (Tr \{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho\} - Tr \{\gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\rho\}) \\ &\quad - iM(k^2) (Tr \{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu\} - Tr \{\gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu\})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

##### **Término 2**

$$Tr\{\frac{1}{2} (D^2 - 5D + 6) t^2 q \cdot \Gamma(k, p)\} = \frac{1}{2} (D^2 - 5D + 6) t^2 q_\mu Tr \{\Gamma_\mu^L(k, p) + \Gamma_\mu^T(k, p)\}$$

Parte longitudinal

$$\begin{aligned} Tr \left\{ \Gamma_{\mu}^L(k, p) \right\} &= a(k^2, p^2) Tr \{ \gamma_{\mu} \} + \frac{b(k^2, p^2)}{2} t_{\mu} t_{\nu} Tr \{ \gamma_{\nu} \} - ic(k^2, p^2) t_{\mu} Tr \{ I_D \} \\ &= 0 + 0 - 4ic(k^2, p^2) t_{\mu} = -4ic(k^2, p^2) t_{\mu} \end{aligned}$$

Parte transversal

$$Tr \left\{ \Gamma_{\mu}^T(k, p) \right\} = Tr \left\{ \tau_1 T_{\mu}^1 + \tau_2 T_{\mu}^2 + \tau_3 T_{\mu}^3 + \tau_4 T_{\mu}^4 + \tau_5 T_{\mu}^5 + \tau_6 T_{\mu}^6 + \tau_7 T_{\mu}^7 + \tau_8 T_{\mu}^8 \right\}$$

$$\Rightarrow Tr \{ \tau_1 T_1 \}$$

$$\begin{aligned} Tr \{ \tau_1 T_1 \} &= \tau_1 Tr \{ T_1 \} = \tau_1 Tr \{ i [ p_{\mu} (k \cdot q) - k_{\mu} (p \cdot q) ] \} \\ &= \tau_1 [ i p_{\mu} (k \cdot q) Tr \{ I_D \} - i k_{\mu} (p \cdot q) Tr \{ I_D \} ] \\ &= 4\tau_1 [ i p_{\mu} (k \cdot q) - i k_{\mu} (p \cdot q) ] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Tr \{ \tau_4 T_4 \}$$

$$\begin{aligned} Tr \{ \tau_4 T_4 \} &= \tau_4 Tr \{ T_4 \} = \tau_4 Tr \{ i q^2 [ \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \cdot t - t_{\mu} ] + 2q_{\mu} p_{\nu} k_{\rho} \sigma_{\nu \rho} \} \\ &= \tau_4 \left[ i q^2 t_{\nu} Tr \{ \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \} - i q^2 t_{\mu} Tr \{ I_D \} + 2q_{\mu} p_{\nu} k_{\rho} Tr \{ \sigma_{\nu \rho} \} \right] \\ &= 4\tau_4 [ i q^2 t_{\nu} g_{\mu \nu} - i q^2 t_{\mu} ] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Tr \{ \tau_7 T_7 \}$$

$$\begin{aligned} Tr \{ \tau_7 T_7 \} &= \tau_7 Tr \{ T_7 \} = \tau_7 Tr \left\{ \frac{i}{2} (k^2 - p^2) [ \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \cdot t - t_{\mu} ] + t_{\mu} p_{\nu} k_{\rho} \sigma_{\nu \rho} \right\} \\ &= \tau_7 \left[ \frac{i}{2} (k^2 - p^2) t_{\nu} Tr \{ \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \} - \frac{i}{2} (k^2 - p^2) t_{\mu} Tr \{ I_D \} + t_{\mu} p_{\nu} k_{\rho} Tr \{ \sigma_{\nu \rho} \} \right] \\ &= 4\tau_7 \left[ \frac{i}{2} (k^2 - p^2) (t_{\nu} g_{\mu \nu} - t_{\mu}) \right] = 0 \end{aligned}$$

El vértice completo

$$Tr \{ \Gamma_{\mu}(k, p) \} = -4ic(k^2, p^2) t_{\mu} + 4\tau_1 [ i p_{\mu} (k \cdot q) - i k_{\mu} (p \cdot q) ]$$

El término queda

$$\begin{aligned} Tr \left\{ \frac{1}{2} (D^2 - 5D + 6) t^2 q \cdot \Gamma(k, p) \right\} &= \frac{1}{2} (D^2 - 5D + 6) t^2 q_{\mu} [ -4ic(k^2, p^2) t_{\mu} \\ &\quad + 4\tau_1 [ i p_{\mu} (k \cdot q) - i k_{\mu} (p \cdot q) ] ] \\ &= -2(D^2 - 5D + 6) i t^2 [ (q \cdot t) c(k^2, p^2) + \tau_1 [ -(p \cdot q)(k \cdot q) + (p \cdot q)(k \cdot q) ] ] \\ &= -2i(D^2 - 5D + 6) t^2 (q \cdot t) c(k^2, p^2) \end{aligned}$$

**Término 3**

$$\begin{aligned} Tr\{T_{\mu\nu}^1 V_{\mu\nu}^A(k, p)\} &= -i [Y_1 Tr\{I_D\} + i q_\mu Y_2 Tr\{\gamma_\mu\} + i t_\mu Y_3 Tr\{\gamma_\mu\} + Y_4 Tr\{\{\gamma \cdot q, \gamma \cdot t\}\}] \\ &= -i [4Y_1 + Y_4 Tr\{(\gamma \cdot q)(\gamma \cdot t) - (\gamma \cdot t)(\gamma \cdot q)\}] \\ &= -i [4Y_1 + Y_4 [Tr\{(\gamma \cdot q)(\gamma \cdot t)\} - Tr\{(\gamma \cdot t)(\gamma \cdot q)\}]] = -4i Y_1(k, p) \end{aligned}$$

**Término 4**

$$\begin{aligned} Tr\{\frac{1}{2}(D^2 - 5D + 6)q \cdot t t \cdot \Gamma(k, p)\} &= \frac{1}{2}(D^2 - 5D + 6)q \cdot t t_\mu Tr\{\Gamma_\mu(k, p)\} \\ &= \frac{1}{2}(D^2 - 5D + 6)q \cdot t t_\mu [-4ic(k^2, p^2)t_\mu + 4\tau_1[ip_\mu(k \cdot q) - ik_\mu(p \cdot q)]] \\ &= -2i(D^2 - 5D + 6)(q \cdot t) [t^2 c(k^2, p^2) + \tau_1[-(p \cdot t)(k \cdot q) + (p \cdot q)(k \cdot t)]] \end{aligned}$$

**La traza completa queda**

$$\begin{aligned} Tr\{I_D T T I_1\} &= -2i(D^2 - 5D + 6)t^2(q \cdot t)c(k^2, p^2) - 4i Y_1(k, p) \\ &\quad - 2i(D^2 - 5D + 6)(q \cdot t) [t^2 c(k^2, p^2) + \tau_1[-(p \cdot t)(k \cdot q) + (p \cdot q)(k \cdot t)]] \end{aligned}$$

$$\boxed{Tr\{I_D T T I_1\} = 2i(D-3)(D-2)\tau_1(q \cdot t)[(p \cdot q)(k \cdot t) - (p \cdot t)(k \cdot q)] - 4i Y_1} \quad (4.22)$$

**4.2.1.2.  $Tr\{I_D T T I_2\}$**

La segunda traza es la resultante de la multiplicación de la  $T T I_2$  y la matriz identidad:

$$\begin{aligned} Tr\{I_D T T I_2\} &= \underbrace{Tr\{T_{\mu\nu}^2[S^{-1}(p)\sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k)]\}}_1 + \underbrace{Tr\{\frac{1}{2}(D-3)(D-2)\gamma \cdot t q \cdot \Gamma(k, p)\}}_2 \\ &\quad + \underbrace{Tr\{T_{\mu\nu}^2 V_{\mu\nu}^A(k, p)\}}_3 - \underbrace{Tr\{\frac{1}{2}(D-3)(D-2)q \cdot t \gamma \cdot \Gamma(k, p)\}}_4 \end{aligned}$$

**Término 1**

$$\begin{aligned}
Tr\{T_{\mu\nu}^2[S^{-1}(p)\sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k)]\} &= Tr\left\{\frac{1}{2}\epsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\gamma_\rho q_\sigma \left[\frac{i\gamma\cdot p + M(p^2)}{F(p^2)}\gamma_5\sigma_{\mu\nu} - \gamma_5\sigma_{\mu\nu}\frac{i\gamma\cdot k + M(k^2)}{F(k^2)}\right]\right\} \\
&= \frac{i}{4}\epsilon_{\rho\mu\nu\sigma}q_\sigma \left[\frac{1}{F(p^2)}(Tr\{\gamma_\rho i\gamma\cdot p\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\} - Tr\{\gamma_\rho i\gamma\cdot p\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\mu\}) + M(p^2)Tr\{\gamma_\rho\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\} \right. \\
&\quad - M(p^2)Tr\{\gamma_\rho\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\mu\} - \frac{1}{F(k^2)}(Tr\{\gamma_\rho\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu i\gamma\cdot k\} - Tr\{\gamma_\rho\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\mu i\gamma\cdot k\}) \\
&\quad \left. + M(k^2)Tr\{\gamma_\rho\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\} - M(k^2)Tr\{\gamma_\rho\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\mu\}\right] \\
&= \frac{i}{4}\epsilon_{\rho\mu\nu\sigma}q_\sigma \left[\frac{ip_\alpha}{F(p^2)}(-4\epsilon_{\mu\nu\rho\alpha} + 4\epsilon_{\nu\mu\rho\alpha}) - \frac{ik_\alpha}{F(k^2)}(-4\epsilon_{\mu\nu\rho\alpha} + 4\epsilon_{\nu\mu\rho\alpha})\right] \\
&= \frac{i}{4}\epsilon_{\rho\mu\nu\sigma}q_\sigma \left[\frac{ip_\alpha}{F(p^2)}(-8\epsilon_{\mu\nu\rho\alpha}) - \frac{ik_\alpha}{F(k^2)}(8\epsilon_{\mu\nu\rho\alpha})\right] \\
&= \frac{i}{4}q_\sigma \left[-\frac{ip_\alpha}{F(p^2)} - \frac{ik_\alpha}{F(k^2)}\right] 8\epsilon_{\mu\nu\rho\alpha}\epsilon_{\rho\mu\nu\sigma} \\
&= 2q_\sigma \left[\frac{p_\alpha}{F(p^2)} + \frac{k_\alpha}{F(k^2)}\right] \epsilon_{\mu\nu\rho\alpha}\epsilon_{\rho\mu\nu\sigma} \\
&= 2(D-3)(D-2)(D-1) \left[\frac{p\cdot q}{F(p^2)} + \frac{k\cdot q}{F(k^2)}\right]
\end{aligned}$$

**Término 2**

$$\begin{aligned}
Tr\left\{\frac{1}{2}(D-3)(D-2)\gamma\cdot t q\cdot \Gamma(k, p)\right\} &= \frac{1}{2}(D-3)(D-2)t_\beta q_\mu Tr\{\gamma_\beta\Gamma_\mu(k, p)\} \\
&= t_\beta q_\mu Tr\{\gamma_\beta\Gamma_\mu^L(k, p) + \gamma_\beta\Gamma_\mu^T(k, p)\}
\end{aligned}$$

**Parte longitudinal**

$$\begin{aligned}
t_\beta q_\mu Tr\{\gamma_\beta\Gamma_\mu^L(k, p)\} &= t_\beta q_\mu \left[a(k^2, p^2)Tr\{\gamma_\beta\gamma_\mu\} + \frac{b(k^2, p^2)}{2}t_\mu t_\nu Tr\{\gamma_\beta\gamma_\nu\} - ic(k^2, p^2)t_\mu Tr\{\gamma_\beta\}\right] \\
&= t_\beta q_\mu \left[a(k^2, p^2)4g_{\beta\mu} + \frac{b(k^2, p^2)}{2}t_\mu t_\nu 4g_{\beta\nu} - 0\right] \\
&= 4a(k^2, p^2)(t\cdot q) + 2b(k^2, p^2)(t\cdot q)t^2 \\
&= 2(t\cdot q)[t^2 b(k^2, p^2) + 2a(k^2, p^2)]
\end{aligned}$$

**Parte transversal**

$$t_\beta q_\mu Tr\{\gamma_\beta\Gamma_\mu^T(k, p)\} = t_\beta q_\mu \left[Tr\left\{\gamma_\beta \left(\tau_1 T_1 + \tau_2 T_2 + \tau_3 T_3 + \tau_4 T_4 + \tau_5 T_5 + \tau_6 T_6 + \tau_7 T_7 + \tau_8 T_8\right)\right\}\right]$$

$$\Rightarrow Tr\{\gamma_\beta\tau_2 T_2\}$$

$$\begin{aligned}
t_\beta q_\mu Tr\{\gamma_\beta\tau_2 T_2\} &= t_\beta q_\mu \tau_2 [p_\mu(k\cdot q) - k_\mu(p\cdot q)] t_\nu Tr\{\gamma_\beta\gamma_\nu\} = t_\beta q_\mu \tau_2 [p_\mu(k\cdot q) - k_\mu(p\cdot q)] t_\nu 4g_{\beta\nu} \\
&= 4t^2 \tau_2 [(p\cdot q)(k\cdot q) - (k\cdot q)(p\cdot q)] = 0
\end{aligned}$$

#### 4. VÉRTICE FERMIÓN-FOTÓN NO PERTURBATIVO

$$\Rightarrow \text{Tr}\{\gamma_\beta \tau_3 T_3\}$$

$$\begin{aligned} t_\beta q_\mu \text{Tr}\{\gamma_\beta \tau_3 T_3\} &= t_\beta q_\mu \tau_3 [q^2 \text{Tr}\{\gamma_\beta \gamma_\mu\} - q_\mu q_\nu \text{Tr}\{\gamma_\beta \gamma_\nu\}] = 4t_\beta q_\mu \tau_3 [q^2 g_{\beta\mu} - q_\mu q_\nu g_{\beta\nu}] \\ &= 4\tau_3 [q^2 (t \cdot q) - (t \cdot q) q^2] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Tr}\{\gamma_\beta \tau_6 T_6\}$$

$$\begin{aligned} t_\beta q_\mu \text{Tr}\{\gamma_\beta \tau_6 T_6\} &= t_\beta q_\mu \tau_6 [-(k^2 - p^2) \text{Tr}\{\gamma_\beta \gamma_\mu\} + t_\mu q_\nu \text{Tr}\{\gamma_\beta \gamma_\nu\}] \\ &= t_\beta q_\mu \tau_6 [-(k^2 - p^2) 4g_{\beta\mu} + t_\mu q_\nu 4g_{\beta\nu}] = 4\tau_6 [-(k^2 - p^2)(t \cdot q) + c(t \cdot q)] \\ &= -4\tau_6 (t \cdot q) [k^2 - p^2 - (t \cdot q)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Tr}\{\gamma_\beta \tau_8 T_8\}$$

$$\begin{aligned} t_\beta q_\mu \text{Tr}\{\gamma_\beta \tau_8 T_8\} &= t_\beta q_\mu \tau_8 [-i p_\nu k_\rho \text{Tr}\{\gamma_\beta \gamma_\mu \sigma_{\nu\rho}\} - p_\mu k_\nu \text{Tr}\{\gamma_\beta \gamma_\nu\} + k_\mu p_\nu \text{Tr}\{\gamma_\beta \gamma_\nu\}] \\ &= t_\beta q_\mu \tau_8 [-i p_\nu k_\rho \frac{i}{2} (\text{Tr}\{\gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho\} - \text{Tr}\{\gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu\}) + 4g_{\beta\nu} (k_\mu p_\nu - p_\mu k_\nu)] \\ &= t_\beta q_\mu \tau_8 [\frac{1}{2} p_\nu k_\rho 4(g_{\beta\nu} g_{\rho\mu} - g_{\beta\rho} g_{\mu\nu} + g_{\beta\mu} g_{\rho\nu} - g_{\beta\rho} g_{\mu\nu} - g_{\beta\nu} g_{\mu\rho}) \\ &\quad - 4p_\mu k_\beta + 4k_\mu p_\beta] \\ &= t_\beta q_\mu \tau_8 [2p_\nu k_\rho (-2 - g_{\beta\nu} g_{\mu\rho} + 2g_{\beta\rho} g_{\mu\nu}) - 4p_\mu k_\beta + 4k_\mu p_\beta] \\ &= 4t_\beta q_\mu \tau_8 [-p_\beta k_\mu + k_\beta p_\mu - 4p_\mu k_\beta + 4k_\mu p_\beta] = 0 \end{aligned}$$

El vértice completo

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma_\beta \Gamma_\mu(k, p)\} &= 2[2a(k^2, p^2) g_{\beta\mu} + b(k^2, p^2) t_\mu t_\beta] + 4\tau_2 [p_\mu (k \cdot q) - k_\mu (p \cdot q)] t_\beta \\ &\quad + 4\tau_3 [q^2 g_{\beta\mu} - q_\mu q_\beta] + 4\tau_6 [-(k^2 - p^2) g_{\beta\mu} + t_\mu q_\beta] \end{aligned}$$

El término queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (D-3) (D-2) t_\beta q_\mu \text{Tr}\{\gamma_\beta \Gamma_\mu(k, p)\} &= (D-3) (D-2) (t \cdot q) [t^2 b(k^2, p^2) \\ &\quad + 2a(k^2, p^2) - 2\tau_6 (k^2 - p^2 - (t \cdot q))] \end{aligned}$$

Término 3

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{T_{\mu\nu}^2 V_{\mu\nu}^A(k, p)\} &= -i \left[ i Y_5 \text{Tr}\{I_D\} + \cancel{Y_6 q_\mu \text{Tr}\{\gamma_\mu\}} + \cancel{Y_7 t_\mu \text{Tr}\{\gamma_\mu\}} + i Y_8 \text{Tr}\{\gamma \cdot q, \gamma \cdot t\} \right] \\ &= 4Y_5(k, p) \end{aligned}$$

Término 4

$$\text{Tr}\{\frac{1}{2} (D-3) (D-2) q \cdot t \gamma \cdot \Gamma(k, p)\} = \frac{1}{2} (D-3) (D-2) (q \cdot t) \text{Tr}\{\gamma_\mu (\Gamma_\mu^L(k, p) + \Gamma_\mu^T(k, p))\}$$

Parte longitudinal

$$\begin{aligned}
Tr\{\gamma_\mu \Gamma_\mu^L(k, p)\} &= Tr\{\gamma_\mu [a(k^2, p^2) \gamma_\mu + \frac{b(k^2, p^2)}{2} t_\mu \gamma \cdot t - ic(k^2, p^2) t_\mu]\} \\
&= a(k^2, p^2) Tr\{\gamma_\mu \gamma_\mu\} + \frac{b(k^2, p^2)}{2} t_\mu t_\nu Tr\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} \\
&= a(k^2, p^2) (4D) + \frac{b(k^2, p^2)}{2} t_\mu t_\nu (4g_{\mu\nu}) \\
&= 4Da(k^2, p^2) + 2b(k^2, p^2) t^2
\end{aligned}$$

Parte transversal

$$Tr\{\gamma_\mu \Gamma_\mu^T(k, p)\} = Tr\left\{\gamma_\mu \left(\tau_1 T_1 + \tau_2 T_2 + \tau_3 T_3 + \tau_4 T_4 + \tau_5 T_5 + \tau_6 T_6 + \tau_7 T_7 + \tau_8 T_8\right)\right\}$$

$$\Rightarrow Tr\{\gamma_\mu \tau_2 T_2\}$$

$$Tr\{\gamma_\mu \tau_2 T_2\} = \tau_2 [p_\mu (k \cdot q) - k_\mu (p \cdot q)] t_\nu Tr\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 4\tau_2 [(p \cdot t)(k \cdot q) - (k \cdot t)(p \cdot q)]$$

$$\Rightarrow Tr\{\gamma_\mu \tau_3 T_3\}$$

$$Tr\{\gamma_\mu \tau_3 T_3\} = \tau_3 [q^2 Tr\{\gamma_\mu \gamma_\mu\} - q_\mu q_\nu Tr\{\gamma_\mu \gamma_\nu\}] = \tau_3 [4Dq^2 - 4q^2] = 4\tau_3 q^2 (D - 1)$$

$$\Rightarrow Tr\{\gamma_\mu \tau_6 T_6\}$$

$$Tr\{\gamma_\mu \tau_6 T_6\} = \tau_6 [-(k^2 - p^2) Tr\{\gamma_\mu \gamma_\mu\} + t_\mu q_\nu Tr\{\gamma_\mu \gamma_\nu\}] = 4\tau_6 [-D(k^2 - p^2) - (q \cdot t)]$$

$$\Rightarrow Tr\{\gamma_\mu \tau_8 T_8\}$$

$$\begin{aligned}
Tr\{\gamma_\mu \tau_8 T_8\} &= \tau_8 [-i p_\nu k_\rho Tr\{\gamma_\mu \gamma_\mu \sigma_{\nu\rho}\} - p_\mu k_\nu Tr\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} + k_\mu p_\nu Tr\{\gamma_\mu \gamma_\nu\}] \\
&= \tau_8 [-i p_\nu k_\rho \frac{i}{2} (Tr\{\gamma_\mu \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho\} - Tr\{\gamma_\mu \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu\}) + 4g_{\mu\nu} (k_\mu p_\nu - p_\mu k_\nu)] \\
&= \tau_8 [\frac{1}{2} p_\nu k_\rho (4Dg_{\nu\rho} - 4Dg_{\rho\nu}) - 4(p \cdot k) + 4(k \cdot p)] = 0
\end{aligned}$$

El vértice completo

$$Tr\{\gamma_\mu \Gamma_\mu^T(k, p)\} = 4\tau_2 [(p \cdot t)(k \cdot q) - (k \cdot t)(p \cdot q)] + 4\tau_3 q^2 (D - 1) + 4\tau_6 [-D(k^2 - p^2) + (q \cdot t)]$$

El término queda

$$\begin{aligned}
Tr\left\{\frac{1}{2} (D-3)(D-2) q \cdot t \gamma \cdot \Gamma(k, p)\right\} &= (D-3)(D-2) (q \cdot t) [2Da(k^2, p^2) + b(k^2, p^2) t^2 \\
&\quad + 2\tau_2 [(p \cdot t)(k \cdot q) - (k \cdot t)(p \cdot q)] + 2\tau_6 (-D(k^2 - p^2) + (q \cdot t)) + 2\tau_3 q^2 (D - 1)]
\end{aligned}$$

**La traza completa queda**

$$\begin{aligned}
 Tr\{I_D T T I_2\} = & -12i \left[ \frac{k \cdot q}{F(k^2)} - \frac{q \cdot p}{F(p^2)} \right] + 2(t \cdot q) [t^2 b(k^2, p^2) + 2a(k^2, p^2) - 2\tau_6(k^2 \\
 & - p^2 - (t \cdot q))] + 4Y_5(k, p) - 2(q \cdot t) [8a(k^2, p^2) + b(k^2, p^2) t^2 + 2\tau_2[(p \cdot t)(k \cdot q) \\
 & - (k \cdot t)(p \cdot q)] + 6\tau_3 q^2 - 2\tau_6 [4k^2 - 4p^2 - (q \cdot t)]]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Tr\{I_D T T I_2\} = & 2(D-3)(D-2)(D-1) \left[ \frac{q \cdot p}{F(p^2)} - \frac{k \cdot q}{F(k^2)} \right] + 2(D-3)(D-2)(t \cdot q) \\
 & \times [-(D-1)a(k^2, p^2) - (D-1)(\tau_6(p^2 - k^2) + \tau_3 q^2) + \tau_2[(k \cdot t)(p \cdot q) \\
 & - (p \cdot t)(k \cdot q)]] + 4Y_5
 \end{aligned} \quad (4.23)$$

**4.2.1.3.  $Tr\{\gamma \cdot k T T I_1\}$**

La tercera traza es la resultante de la multiplicación de la  $T T I_1$  y  $(\gamma \cdot k)$ :

$$\begin{aligned}
 Tr\{\gamma \cdot k T T I_1\} = & \underbrace{Tr\{\gamma \cdot k T_{\mu\nu}^1 [S^{-1}(p)\sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k)]\}}_1 + \underbrace{Tr\{\gamma \cdot k \frac{1}{2} (D-3)(D-2) t^2 q \cdot \Gamma(k, p)\}}_2 \\
 & + \underbrace{Tr\{\gamma \cdot k T_{\mu\nu}^1 V_{\mu\nu}^A(k, p)\}}_3 - \underbrace{Tr\{\gamma \cdot k \frac{1}{2} (D-3)(D-2) q \cdot t t \cdot \Gamma(k, p)\}}_4
 \end{aligned}$$

**Término 1**

$$\begin{aligned}
Tr\{\gamma \cdot k T_{\mu\nu}^1 [S^{-1}(p)\sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k)]\} &= k_\beta T_{\mu\nu}^1 [Tr\{\gamma_\beta S^{-1}(p)\sigma_{\mu\nu}\} - Tr\{\gamma_\beta \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k)\}] \\
&= k_\beta T_{\mu\nu}^1 [Tr\left\{\gamma_\beta \frac{i\gamma \cdot p + M(p^2)}{F(p^2)} \frac{i}{2} \gamma_5 [\gamma_\mu, \gamma_\nu]\right\} - Tr\left\{\gamma_\beta \frac{i}{2} \gamma_5 [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \frac{i\gamma \cdot k + M(k^2)}{F(k^2)}\right\}] \\
&= \frac{i}{2} k_\beta T_{\mu\nu}^1 \left[ \frac{ip_\alpha}{F(p^2)} (Tr\{\gamma_\beta \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu\} - Tr\{\gamma_\beta \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu\}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{ik_\alpha}{F(k^2)} (Tr\{\gamma_\beta \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha\} - Tr\{\gamma_\beta \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha\}) \right] \\
&= \frac{-1}{2} k_\beta T_{\mu\nu}^1 \left[ \frac{p_\alpha}{F(p^2)} (-4\epsilon_{\mu\nu\beta\alpha} + 4\epsilon_{\nu\mu\beta\alpha}) - \frac{k_\alpha}{F(k^2)} (-4\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + 4\epsilon_{\nu\mu\alpha\beta}) \right] \\
&= -2k_\beta T_{\mu\nu}^1 \left[ \frac{p_\alpha}{F(p^2)} (-\epsilon_{\mu\nu\beta\alpha} - \epsilon_{\nu\mu\beta\alpha}) - \frac{k_\alpha}{F(k^2)} (-\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} - \epsilon_{\nu\mu\alpha\beta}) \right] \\
&= -2k_\beta T_{\mu\nu}^1 \left[ \frac{-2p_\alpha}{F(p^2)} \epsilon_{\mu\nu\beta\alpha} + \frac{2k_\alpha}{F(k^2)} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \right] \\
&= -4k_\beta \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\mu\nu\sigma} t_\rho q_\sigma \left[ \frac{-p_\alpha}{F(p^2)} \epsilon_{\mu\nu\beta\alpha} - \frac{k_\alpha}{F(k^2)} \epsilon_{\mu\nu\beta\alpha} \right] \\
&= 2k_\beta t_\rho q_\sigma \left[ \frac{p_\alpha}{F(p^2)} + \frac{k_\alpha}{F(k^2)} \right] \epsilon_{\rho\mu\nu\sigma} \epsilon_{\mu\nu\beta\alpha} \\
&= 2k_\beta t_\rho q_\sigma \left[ \frac{p_\alpha}{F(p^2)} + \frac{k_\alpha}{F(k^2)} \right] (D-3)(D-2) (g_{\alpha\sigma} g_{\beta\rho} - g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma}) \\
&= \frac{2}{F(p^2)} (D-3)(D-2) [(k \cdot t)(p \cdot q) - (k \cdot q)(t \cdot p)]
\end{aligned}$$

**Término 2**

$$\begin{aligned}
Tr\left\{\frac{1}{2} (D^2 - 5D + 6) \gamma \cdot k t^2 q \cdot \Gamma(k, p)\right\} &= \frac{1}{2} (D^2 - 5D + 6) k_\beta t^2 q_\mu Tr\{\gamma_\beta \Gamma_\mu(k, p)\} \\
&= k_\beta t^2 q_\mu \left[ Tr\{\gamma_\beta \Gamma_\mu^L(k, p)\} + Tr\{\gamma_\beta \Gamma_\mu^T(k, p)\} \right]
\end{aligned}$$

**Parte longitudinal**

$$\begin{aligned}
k_\beta t^2 q_\mu Tr\{\gamma_\beta \Gamma_\mu^L(k, p)\} &= k_\beta t^2 q_\mu \left[ a(k^2, p^2) Tr\{\gamma_\beta \gamma_\mu\} + \frac{b(k^2, p^2)}{2} t_\mu t_\alpha Tr\{\gamma_\beta \gamma_\alpha\} \right. \\
&\quad \left. - ic(k^2, p^2) t_\mu Tr\{\gamma_\beta\} \right] \\
&= k_\beta t^2 q_\mu \left[ a(k^2, p^2) 4g_{\beta\mu} + \frac{b(k^2, p^2)}{2} t_\mu t_\alpha 4g_{\beta\alpha} \right] \\
&= 4t^2 \left[ a(k^2, p^2) (k \cdot q) + \frac{b(k^2, p^2)}{2} (t \cdot q)(t \cdot k) \right]
\end{aligned}$$

#### 4. VÉRTICE FERMIÓN-FOTÓN NO PERTURBATIVO

---

##### Parte transversal

$$Tr\{\gamma_\beta \Gamma_\mu^T(k, p)\} = Tr\left\{\gamma_\beta \left[\cancel{\tau_1 T_1} + \tau_2 T_2 + \tau_3 T_3 + \cancel{\tau_4 T_4} + \cancel{\tau_5 T_5} + \tau_6 T_6 + \cancel{\tau_7 T_7} + \tau_8 T_8\right]\right\}$$

$$\Rightarrow Tr\{\gamma_\beta \tau_2 T_2\}$$

$$\begin{aligned} k_\beta t^2 q_\mu Tr\{\gamma_\beta \tau_2 T_2\} &= k_\beta t^2 q_\mu \tau_2 [p_\mu(k \cdot q) - k_\mu(p \cdot q)] t_\nu Tr\{\gamma_\beta \gamma_\nu\} \\ &= k_\beta t^2 q_\mu \tau_2 [p_\mu(k \cdot q) - k_\mu(p \cdot q)] t_\nu 4g_{\beta\nu} \\ &= 4\tau_2 t^2 [(k \cdot q)(p \cdot q)(t \cdot k) - (p \cdot q)(k \cdot q)(t \cdot k)] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Tr\{\gamma_\beta \tau_3 T_3\}$$

$$\begin{aligned} k_\beta t^2 q_\mu Tr\{\gamma_\beta \tau_3 T_3\} &= k_\beta t^2 q_\mu \tau_3 [q^2 Tr\{\gamma_\beta \gamma_\mu\} - q_\mu q_\nu Tr\{\gamma_\beta \gamma_\nu\}] \\ &= k_\beta t^2 q_\mu \tau_3 [q^2 4g_{\beta\mu} - q_\mu q_\nu 4g_{\beta\nu}] = 4\tau_3 [q^2(q \cdot k) - q^2(q \cdot k)] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Tr\{\gamma_\beta \tau_6 T_6\}$$

$$\begin{aligned} k_\beta t^2 q_\mu Tr\{\gamma_\beta \tau_6 T_6\} &= k_\beta t^2 q_\mu \tau_6 [-(k^2 - p^2) Tr\{k_\beta \gamma_\mu\} + t_\mu q_\nu Tr\{\gamma_\beta \gamma_\nu\}] \\ &= k_\beta t^2 q_\mu \tau_6 [-(k^2 - p^2) 4g_{\beta\mu} + t_\mu q_\nu 4g_{\beta\nu}] \\ &= 4\tau_6 t^2 [-(k^2 - p^2)(k \cdot q) + (t \cdot q)(k \cdot q)] \\ &= 4\tau_6 t^2 (k \cdot q) [(t \cdot q) - k^2 + p^2] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Tr\{\gamma_\beta \tau_8 T_8\}$$

$$\begin{aligned} k_\beta t^2 q_\mu Tr\{\gamma_\beta \tau_8 T_8\} &= k_\beta t^2 q_\mu \tau_8 [-i p_\nu k_\rho Tr\{\gamma_\beta \gamma_\mu \sigma_{\nu\rho}\} - p_\mu k_\nu Tr\{\gamma_\beta \gamma_\nu\} + k_\mu p_\nu Tr\{\gamma_\beta \gamma_\nu\}] \\ &= k_\beta t^2 q_\mu \tau_8 [-i p_\nu k_\rho \frac{i}{2} (Tr\{\gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho\} - Tr\{\gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu\}) + 4g_{\beta\nu} (-p_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu)] \\ &= k_\beta t^2 q_\mu \tau_8 [\frac{4}{2} p_\nu k_\rho (-2g_{\beta\nu} g_{\mu\rho} + 2g_{\beta\rho} g_{\mu\nu}) - 4p_\mu k_\beta + 4k_\mu p_\beta] \\ &= 4k_\beta t^2 q_\mu \tau_8 [-k_\mu p_\beta + p_\mu k_\beta - p_\mu k_\beta + k_\mu p_\beta] = 0 \end{aligned}$$

##### El vértice completo

$$\begin{aligned} Tr\{\gamma_\beta \Gamma_\mu^T(k, p)\} &= 2[2a(k^2, p^2) g_{\beta\mu} + b(k^2, p^2) t_\mu t_\beta] + 4\tau_2 [p_\mu(k \cdot q) - k_\mu(p \cdot q)] t_\beta \\ &\quad + 4\tau_3 [q^2 g_{\beta\mu} - q_\mu q_\beta] + 4\tau_6 [-(k^2 - p^2) g_{\beta\mu} + t_\mu q_\beta] \end{aligned}$$

##### El término queda

$$\begin{aligned} Tr\{\gamma \cdot k t^2 q \cdot \Gamma(k, p)\} &= \frac{1}{2} (D-3)(D-2) [2t^2 [2a(k^2, p^2)(k \cdot q) + b(k^2, p^2)(t \cdot q)(t \cdot k)] \\ &\quad + 4\tau_6 t^2 (k \cdot q) [(t \cdot q) - k^2 + p^2]] \\ &= (D-3)(D-2) t^2 [2(k \cdot q) (a(k^2, p^2) + 2\tau_6 [(t \cdot q) - k^2 + p^2]) \\ &\quad + b(k^2, p^2)(t \cdot q)(t \cdot k)] \end{aligned}$$

**Término 3**

$$\begin{aligned}
Tr\{\gamma \cdot k T_{\mu\nu}^1 V_{\mu\nu}^A(k, p)\} &= k_\beta Tr\{-i^2 \gamma_\beta T_{\mu\nu}^1 V_{\mu\nu}^A(k, p)\} = -i k_\beta Tr\{\gamma_\beta i T_{\mu\nu}^1 V_{\mu\nu}^A(k, p)\} \\
&= -i k_\beta [I_D Y_1 Tr\{\gamma_\beta\} + i q_\nu Y_2 Tr\{\gamma_\beta \gamma_\nu\} + i t_\nu Y_3 Tr\{\gamma_\beta \gamma_\nu\} + Y_4 Tr\{\gamma_\beta [\gamma \cdot q, \gamma \cdot t]\}] \\
&= -i k_\beta [i q_\nu Y_2 4 g_{\beta\nu} + i t_\nu Y_3 4 g_{\beta\nu} + Y_4 (Tr\{\gamma_\beta (\gamma \cdot q) (\gamma \cdot t)\} - Tr\{\gamma_\beta (\gamma \cdot t) (\gamma \cdot q)\})] \\
&= 4 [Y_2 (q \cdot k) + Y_3 (t \cdot k)]
\end{aligned}$$

**Término 4**

$$\begin{aligned}
Tr\{\gamma \cdot k q \cdot t t \cdot \Gamma(k, p)\} &= \frac{1}{2} (D-3) (D-2) k_\beta (q \cdot t) t_\mu Tr\{\gamma_\beta \Gamma_\mu(k, p)\} \\
&= \frac{1}{2} (D-3) (D-2) k_\beta (q \cdot t) t_\mu [2 [2a(k^2, p^2) g_{\beta\mu} + b(k^2, p^2) t_\mu t_\beta] + 4\tau_2 [p_\mu (k \cdot q) \\
&\quad - k_\mu (p \cdot q)] t_\beta + 4\tau_3 [q^2 g_{\beta\mu} - q_\mu q_\beta] + 4\tau_6 [-(k^2 - p^2) g_{\beta\mu} + t_\mu q_\beta]] \\
&= \frac{1}{2} (D-3) (D-2) (q \cdot t) [2 [2a(k^2, p^2) (k \cdot t) + b(k^2, p^2) t^2 (t \cdot k)] \\
&\quad + 4\tau_2 [(t \cdot p) (k \cdot q) (t \cdot k) - (k \cdot t) (t \cdot k) (p \cdot q)] + 4\tau_3 [q^2 (t \cdot k) - (q \cdot t) (q \cdot k)] \\
&\quad + 4\tau_6 [-(k^2 - p^2) (k \cdot t) + t^2 (q \cdot k)]]
\end{aligned}$$

**La traza completa queda**

$$\begin{aligned}
Tr\{\gamma \cdot k T T I_1\} &= \frac{2}{F(p^2)} (D-3) (D-2) [(p \cdot q) (k \cdot t) - (p \cdot t) (k \cdot q)] + (D-3) (D-2) t^2 [2(k \cdot q) \\
&\quad \times (a(k^2, p^2) + 2\tau_6 [(t \cdot q) - k^2 + p^2]) + b(k^2, p^2) (t \cdot q) (t \cdot k)] + 4[Y_2 (q \cdot k) \\
&\quad + Y_3 (t \cdot k)] + \frac{1}{2} (D-3) (D-2) (q \cdot t) [2 [2a(k^2, p^2) (k \cdot t) + b(k^2, p^2) t^2 (t \cdot k)] \\
&\quad + 4\tau_2 [(t \cdot p) (k \cdot q) (t \cdot k) - (k \cdot t) (t \cdot k) (p \cdot q)] + 4\tau_3 [q^2 (t \cdot k) - (q \cdot t) (q \cdot k)] \\
&\quad + 4\tau_6 [-(k^2 - p^2) (k \cdot t) + t^2 (q \cdot k)]]
\end{aligned} \tag{4.24}$$

**4.2.1.4. Desacople de las 8 ecuaciones**

Al calcular las 8 trazas se van a tener 8 ecuaciones acopladas en términos de las funciones  $\tau_i(k, p)$ , las cuales es necesario desacoplarlas

↪ **Factor de forma**  $\tau_1(k, p)$

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{4i Y_1}{2i (D-3) (D-2) (q \cdot t) [(k \cdot t) (p \cdot q) - (k \cdot q) (p \cdot t)]} \\
&= \frac{2 Y_1}{(D-3) (D-2) [(k-p) \cdot (k+p)] [(k \cdot (k+p)) (p \cdot (k-p)) - (k \cdot (k-p)) (p \cdot (k+p))]} \\
&= \frac{Y_1}{(D-3) (D-2) (k^2 - p^2) [(k \cdot p)^2 - k^2 p^2]} = -\frac{Y_1}{(D-3) (D-2) (k^2 - p^2) \nabla(k, p)} \tag{4.25}
\end{aligned}$$

↪ **Factor de forma**  $\tau_2(k, p)$

$$\tau_2 = -\frac{Y_3 - DY_3 + Y_5}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \quad (4.26)$$

↪ **Factor de forma**  $\tau_3(k, p)$

$$\begin{aligned} \tau_3 &= \frac{(k^2 + p^2 + 2k \cdot p)(Y_5 - Y_3) + (D-2)Y_2(k^2 - p^2)}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} + \frac{1}{2(k^2 - p^2)} \left[ \frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \\ &= \frac{1}{2}b(k^2, p^2) + \frac{(D-2)Y_2(k^2 - p^2) - (Y_3 - Y_5)t^2}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

↪ **Factor de forma**  $\tau_4(k, p)$

$$\begin{aligned} \tau_4 &= \frac{Y_1 + 2(D-1)Y_4(p^2 - k^2) + Y_6(p^2 - k^2) - Y_7(k^2 + p^2 + 2k \cdot p)}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \\ &= -\frac{(k^2 - p^2)[2(D-1)Y_4 + Y_6] + Y_7t^2 - Y_1}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

↪ **Factor de forma**  $\tau_5(k, p)$

$$\begin{aligned} \tau_5 &= \frac{1}{(D-3)(D-2)^2} \left[ -\frac{Y_1}{2\nabla(k, p)} - \frac{4Y_4 + 2Y_6}{k^2 - p^2} \right] - \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] \\ &= -c(k^2, p^2) - \frac{2(2Y_4 + Y_6)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)} - \frac{Y_1}{2(D-3)(D-2)^2\nabla(k, p)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

↪ **Factor de forma**  $\tau_6(k, p)$

$$\begin{aligned} \tau_6 &= \frac{a(k^2, p^2)}{k^2 - p^2} + \frac{(D-2)Y_2q^2 + (p^2 - k^2)(Y_3 - Y_5)}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} - \frac{1}{2(k^2 - p^2)} \left[ \frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \\ &= \frac{(D-2)Y_2q^2 - (k^2 - p^2)(Y_3 - Y_5)}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

↪ **Factor de forma**  $\tau_7(k, p)$

$$\begin{aligned} \tau_7 &= \frac{2(D-1)Y_4(k^2 + p^2 - 2k \cdot p) + Y_6(k^2 + p^2 - 2k \cdot p) + Y_7(k^2 - p^2)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \\ &= \frac{q^2[2(D-1)Y_4 + Y_6] + Y_7(k^2 - p^2)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \end{aligned} \quad (4.31)$$

↳ **Factor de forma**  $\tau_8(k, p)$

$$\begin{aligned}\tau_8 &= \frac{-8Y_8 \left[ k^2 p^2 - (k \cdot p)^2 \right] - Y_2 q^2 + Y_3 (p^2 - k^2)}{(D-3)(D-2)^2 (k^2 - p^2) \nabla(k, p)} - \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{2}{(D-2)F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \\ &= \frac{-8Y_8 \nabla(k, p) - Y_2 q^2 - Y_3 (k^2 - p^2)}{(D-3)(D-2)^2 (k^2 - p^2) \nabla(k, p)} - \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{2}{(D-2)F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right]\end{aligned}\quad (4.32)$$

#### 4.2.1.5. Aplicando criterios de simetría

Toda QFT local que presente covariancia de Lorentz y venga definido por un Hamiltoniano hermítico, es invariante bajo una transformación *CPT*. La simetría *CPT* es un principio fundamental de invariancia o simetría de las leyes físicas que establece que bajo transformaciones simultaneas que involucren la inversión de los números cuánticos como la carga eléctrica, la paridad y el sentido del tiempo, es decir

- Conjugación de Carga (**C**)
- Conjugación de paridad (**P**)
- Inversión temporal (**T**)

las ecuaciones de evolución temporal de un proceso físico son invariantes y arrojan los mismos resultados.

Para que se respete la simetría *CPT* es necesario hacer la separación simétrica y anti-simétrica tanto para los factores de forma  $\tau_i(k, p)$  como para las funciones  $Y_i(k, p)$ . En el caso de las funciones  $\tau_i(k, p)$  ya se mostró anteriormente en (4.20) que bajo intercambio  $k \leftrightarrow p$  todas las funciones son simétricas a excepción de  $\tau_4$  y  $\tau_6$ . Por otro lado, las funciones  $Y_i(k, p)$  se pueden descomponer en su componente simétrica y antisimétrica

$$Y_i(k, p) = Y_i^A(k, p) + Y_i^S(k, p) \quad (4.33)$$

donde *S* y *A* indican simetría y antisimetría respectivamente. Las propiedades de transformación del vértice bajo conjugación de carga determinan las propiedades de simetría de estas funciones

$$\begin{aligned}Y_i(p, k) &= Y_i(k, p), & i &= 2, 6^S, 7^S, 8^S \\ Y_i(p, k) &= -Y_i(k, p), & i &= 1, 3, 4, 5, 6^A, 7^A, 8^A\end{aligned}\quad (4.34)$$

los cálculos referentes a la simetría se encuentran en el **Apéndice B**. Una vez hecho este análisis de la simetría a las ecuaciones (4.25)-(4.32) se llega a los factores de forma  $\tau_i(k, p)$

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= -\frac{Y_1}{(D-3)(D-2)(k^2-p^2)\nabla(k,p)} \\
 \tau_2 &= -\frac{Y_5 - DY_3 + Y_3}{(D-3)(D-2)^2(k^2-p^2)\nabla(k,p)} \\
 \tau_3 &= \frac{1}{2}b(k^2, p^2) + \frac{(D-2)Y_2(k^2-p^2) - (Y_3 - Y_5)t^2}{2(D-3)(D-2)^2(k^2-p^2)\nabla(k,p)} \\
 \tau_4 &= -\frac{(k^2-p^2)[2(D-1)Y_4 + Y_6^A] + Y_7^S t^2}{2(D-3)(D-2)^2(k^2-p^2)\nabla(k,p)} \\
 \tau_5 &= -c(k^2, p^2) - \frac{2(2Y_4 + Y_6^A)}{(D-3)(D-2)^2(k^2-p^2)} \\
 \tau_6 &= \frac{(D-2)q^2 Y_2 - (k^2-p^2)(Y_3 - Y_5)}{2(D-3)(D-2)^2(k^2-p^2)\nabla(k,p)} \\
 \tau_7 &= \frac{q^2[2(D-1)Y_4 + Y_6^A] + Y_7^S(k^2-p^2)}{(D-3)(D-2)^2(k^2-p^2)\nabla(k,p)} \\
 \tau_8 &= -\frac{8Y_8^A}{(D-3)(D-2)^2(k^2-p^2)} - \frac{D}{2(D-2)}b(k^2, p^2)
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

donde se define el determinante de Gram

$$\nabla(k, p) = k^2 p^2 - (k \cdot p)^2 \tag{4.36}$$

Se observa de las ecuaciones (4.35) que las funciones  $Y_6^S$ ,  $Y_7^A$  y  $Y_8^S$  no contribuyen a los factores de forma. Gracias a los criterios de simetría ya vistos que cumplen las funciones  $Y_i(k, p)$ , se requiere que

$$\begin{aligned}
 Y_6^S(k, p) &= -\frac{(k^2-p^2)Y_1(k, p)}{4\nabla(k, p)} \\
 Y_7^A(k, p) &= \frac{q^2 Y_1(k, p)}{4\nabla(k, p)} \\
 Y_8^S(k, p) &= -\frac{q^2 Y_2(k, p) + (k^2-p^2)Y_3(k, p)}{8\nabla(k, p)} \\
 &\quad + \frac{1}{16}(D-4)(D-3)(D-2) \left[ \frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)} \right]
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Invirtiendo las ecuaciones (4.35) para tener las funciones  $Y_i(k, p)$  en términos de  $\tau_i(k, p)$

$$\begin{aligned}
Y_1'(k, p) &= -(D-3)(D-2)\nabla(k, p)\tau_1(k, p) \\
Y_2'(k, p) &= \frac{1}{4}(D-3)(D-2)(k^2-p^2)[b(k^2, p^2)-2\tau_3(k, p)] \\
&\quad + \frac{1}{2}(D-3)(D-2)t^2\tau_6(k, p) \\
Y_3'(k, p) &= -\frac{1}{4}(D-3)(D-2)\{q^2[b(k^2, p^2)-2\tau_3(k, p)] \\
&\quad -4\nabla(k, p)\tau_2(k, p)+2(k^2-p^2)\tau_6(k, p)\} \\
Y_4'(k, p) &= \frac{1}{8}(D-3)(D-2)\{2[c(k^2, p^2)+(k^2-p^2)\tau_4(k, p) \\
&\quad +\tau_5(k, p)]+t^2\tau_7(k, p)\} \\
Y_5'(k, p) &= \frac{1}{2}(D-3)(D-2)\{-\frac{1}{2}(D-1)q^2[b(k^2, p^2)-2\tau_3(k, p)] \\
&\quad +2\nabla(k, p)\tau_2(k, p)+(D-1)(k^2-p^2)\tau_6(k, p)\} \\
Y_6'^A(k, p) &= -\frac{1}{2}(D-3)(D-2)(D-1)[c(k^2, p^2)+\tau_5(k, p)] \\
&\quad -\frac{1}{4}(D-3)(D-2)[2(k^2-p^2)\tau_4(k, p)+t^2\tau_7(k, p)] \\
Y_7'^S(k, p) &= -\frac{1}{4}(D-3)(D-2)^2[2q^2\tau_4(k, p)+(k^2-p^2)\tau_7(k, p)] \\
Y_8'^A(k, p) &= -\frac{1}{16}(D-3)(D-2)[Db(k^2, p^2)+2(D-2)\tau_8(k, p)]
\end{aligned} \tag{4.38}$$

donde se define

$$Y_i(k, p) = (k^2 - p^2) Y_i'(k, p) \tag{4.39}$$

por lo tanto, conocer las funciones  $Y_i(k, p)$  equivale a conocer las funciones  $\tau_i(k, p)$  y con esto el vértice transverso.

En conclusión, las TTI fijan la componente transversa del vértice y lo relacionan con las funciones que definen al propagador fermiónico,  $F$  y  $M$ . Sin embargo, aún no se garantiza el cumplimiento de la renormalización multiplicativa. Procedemos con la regularización dimensional que implica restricciones a las funciones  $Y_i(k, p)$ , lo cual se estudiará mas adelante.

## Ecuación del Gap

“Entonces vióse desde la otra orilla al verdugo levantar lentamente sus dos brazos; un rayo de luna se reflejó sobre la hoja de su espada, y los dos brazos cayeron; oyóse el silbido del acero y el grito de la víctima; luego una masa sin vida se hundió bajo el golpe.”

-Los Tres Mosqueteros, Alejandro Dumas-

La SDE para el fermión, o ecuación del gap, se representa diagramáticamente como

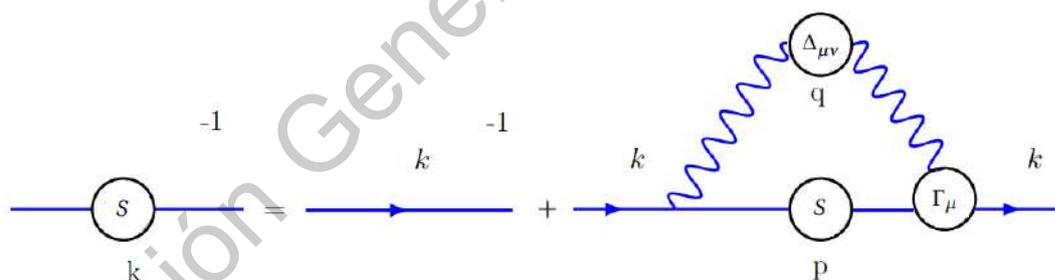


Figura 5.1: Ecuación del gap

y de acuerdo al trabajo de Bashir y Delbourgo [2] se puede obtener una expresión matemática en el espacio Euclidiano que describa la figura 5.1

$$S^{-1}(k) = S_0^{-1}(k) + e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma_\mu S(p) \Gamma_\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(q) \quad (5.1)$$

la cual es una ecuación matricial de dos ecuaciones independientes donde  $e^2 = 4\pi\alpha$ . Para desacoplarlas se multiplica (5.1) por 1 y  $\gamma \cdot k$  y posteriormente se saca la traza de esas

dos ecuaciones, es decir, de la ecuación (5.1) y de

$$\gamma \cdot k S^{-1}(k) = \gamma \cdot k S_0^{-1}(k) + e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma \cdot k \gamma_\mu S(p) \Gamma_\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(q) \quad (5.2)$$

donde  $\Gamma_\nu(k, p)$  es el vértice completamente vestido que calculamos en el capítulo anterior en las ecuaciones (4.5, 4.10, 4.11, 4.14, 4.15, 4.35, 4.36), y los propagadores están definidos en el espacio Euclidiano como

$$\begin{aligned} S^{-1}(k) &= \frac{i\gamma \cdot k + M(k^2)}{F(k^2)} & ; & & S_0^{-1}(k) &= i\gamma \cdot k + m \\ S(p) &= \frac{F(p^2)(M(p^2) - i\gamma \cdot p)}{p^2 + M^2(p^2)} & ; & & \Delta_{\mu\nu}(q^2) &= \Delta(q^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] + \frac{\xi q_\mu q_\nu}{q^4} \end{aligned} \quad (5.3)$$

A continuación se presentan los cálculos de cada una de las trazas, los cuales están divididos en dos secciones referentes a los cálculos de la ecuación (5.1) y (5.2)

## 5.1. Ecuación del gap multiplicada por 1

El primer paso para calcular la traza de la ecuación (5.1) es sustituir el valor del propagador de fotón  $\Delta_{\mu\nu}$  dada en (5.3)

$$\begin{aligned} S^{-1}(k) &= S_0^{-1}(k) + e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \Delta(q^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \\ &+ \xi e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Al calcular la traza del término del lado izquierdo (LHS por sus siglas en ingles left-hand-side) de esta última ecuación se tiene

$$Tr\{S^{-1}(k)\} = Tr\left\{ \frac{i\gamma \cdot k + M(k^2)}{F(k^2)} \right\} = i k_\mu Tr\{\gamma_\mu\} + \frac{0 M(k^2)}{F(k^2)} Tr\{I_D\} = 4 \frac{M(k^2)}{F(k^2)} \quad (5.5)$$

con esto se puede llegar a la siguiente relación, la cual nos indica que para despejar  $\frac{M(k^2)}{F(k^2)}$  necesitamos dividir las siguientes trazas entre 4

$$\frac{M(k^2)}{F(k^2)} = \frac{1}{4} Tr\{S^{-1}(k)\} \quad (5.6)$$

por otro lado, calculando el primer término del lado derecho (RHS por sus siglas en ingles right-hand-side)

$$\frac{1}{4} Tr\{S_0^{-1}(k)\} = \frac{1}{4} Tr\{i\gamma \cdot k + m\} = \frac{1}{4} (i k_\mu Tr\{\gamma_\mu\} + m Tr\{I_D\}) = m \quad (5.7)$$

Para el tercer término del RHS de la ecuación (5.4) se utiliza la WFGTI en el espacio Euclidiano

$$i q_\mu \Gamma_\mu(k, p) = i(k_\mu - p_\mu) \Gamma_\mu(k, p) = S^{-1}(k) - S^{-1}(p) \quad (5.8)$$

con lo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} Tr \left\{ \xi e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right\} &= \frac{e^2 \xi}{4i} \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} Tr \left\{ \gamma_\nu S(p) [S^{-1}(k) - S^{-1}(p)] \frac{q_\nu}{q^4} \right\} \\ &= \frac{e^2 \xi}{4i} \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{q_\nu}{q^4} Tr \left\{ \gamma_\nu [S(p) S^{-1}(k) - 1] \right\} \\ &= e^2 \xi \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} \frac{1}{q^4} \frac{1}{F(k^2)} [M(p^2) k \cdot q - M(k^2) q \cdot p] \quad (5.9) \end{aligned}$$

con esto ya se tiene el resultado que involucra al parámetro de norma  $\xi$ , solo falta calcular la traza del segundo término del RHS de la ecuación (5.4).

### 5.1.1. Segundo término del RHS de (5.4)

Calcular el resultado de este término requiere un proceso mas laborioso ya que involucra las funciones  $Y_i(k, p)$  a través de los factores de forma  $\tau_i(k, p)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} Tr \left\{ e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \Delta(q^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \right\} &= \frac{1}{2} e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{F(p^2) \Delta(q^2)}{q^2 (M(p^2)^2 + p^2)} \\ &\times (-M(p^2) b(k^2, p^2) (q \cdot t)^2 + 2(D-1) q^2 M(p^2) a(k^2, p^2) + q^2 t^2 M(p^2) b(k^2, p^2) \\ &+ c(k^2, p^2) (2(p \cdot q)(q \cdot t) - 2q^2(p \cdot t)) + \tau_7(q^2((-D-2)k^2 + (D-2)p^2 - 2(k \cdot p) \\ &\times (p \cdot t)) - 2Dk^2 q^2 \tau_6 M(p^2) + 2p^2(k \cdot t)) + (q \cdot t)((2(k \cdot p) - k^2 + p^2)(p \cdot q) - k \cdot q \\ &\times 2p^2)) + 2Dq^4 \tau_3 M(p^2) + 2Dp^2 q^2 \tau_6 M(p^2) - 2Dq^4 \tau_4(p \cdot t) - 2Dq^2 \tau_5(p \cdot q) - 2q^2 \tau_2 \\ &\times M(p^2) (k \cdot t)(p \cdot q) + 2q^2 \tau_2 M(p^2) (k \cdot q)(p \cdot t) + 2k^2 q^2 \tau_6 M(p^2) + 2p^2 q^2 \tau_1(k \cdot q) \\ &- 2q^2 \tau_1(k \cdot p)(p \cdot q) - 2q^4 \tau_3 M(p^2) - 2p^2 q^2 \tau_6 M(p^2) + 4q^4 \tau_4(p \cdot t) - q^2 \tau_4 2(p \cdot q) q \cdot t \\ &+ 2q^2 \tau_5(p \cdot q) \end{aligned} \quad (5.10)$$

a partir de aquí se sustituye el valor de las funciones  $\tau_i(k, p)$  definidas en (4.35) y el resultado se factoriza en dos términos para empezar a simplificar la traza

$$\frac{1}{4} Tr \left\{ e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \Delta(q^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \right\} = A(k, p) + B(k, p) \quad (5.11)$$

donde  $A(k, p)$  es el término que contiene todas las funciones  $Y_i(k, p)$  y  $B(k, p)$  es el término libre de funciones  $Y_i(k, p)$ .

**5.1.1.1. Término  $A(k, p)$** 

Al simplificar los términos que llevan funciones  $Y_i(k, p)$  se llega a

$$A(k, p) = \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} E(k, p) \left\{ -\frac{1}{(D-3)(D-2)} Y_1(k, p) + \frac{2}{(D-3)(D-2)} M(p^2) Y_5(k, p) \right. \\ \left. - \frac{2}{(D-3)(D-2)} q \cdot p Y_6^A(k, p) + \frac{2}{(D-3)(D-2)} t \cdot p Y_7^S(k, p) \right\} \quad (5.12)$$

donde se definió

$$E(k, p) = e^2 \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} \frac{\Delta(q^2)}{k^2 - p^2} \quad (5.13)$$

**5.1.1.2. Término  $B(k, p)$** 

Los términos que están libres de funciones  $Y_i(k, p)$  contienen los factores de forma  $a(k^2, p^2)$ ,  $b(k^2, p^2)$  y  $c(k^2, p^2)$  definidos en (4.11), por lo cual es necesario sustituir estos valores y posteriormente factorizar  $M(p^2)$  y  $M(k^2)$ , con lo que se obtiene

$$B(k, p) = \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} E(k, p) \frac{1}{F(k^2)} \frac{1}{q^2} \{ M(p^2) [(D-1)k^4 + (D+1)k^2 p^2 \\ - (D-1)(3k^2 + p^2)k \cdot p + 2(D-2)(k \cdot p)^2] + M(k^2) [-(D-1)k^2 p^2 \\ + (D-1)(k^2 + 3p^2)k \cdot p - 2(D-2)(k \cdot p)^2 - (D-1)p^4] \} \\ = \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} E(k, p) \frac{1}{F(k^2)} \{ M(p^2) [(D-1)k^2 - (D-1)k \cdot p \\ + 2 \frac{\nabla(k, p)}{q^2}] + M(k^2) [-(D-1)p^2 + (D-1)k \cdot p - 2 \frac{\nabla(k, p)}{q^2}] \} \quad (5.14)$$

donde ya se había visto que

$$\nabla(k, p) = k^2 p^2 - (k \cdot p)^2 \quad (5.15)$$

**5.1.1.3. Segundo término del RHS de (5.4) completo**

Una vez que se calculó por separado  $A(k, p)$  y  $B(k, p)$  es posible sumarlas para obtener el segundo término del RHS de la ecuación (5.4), de tal manera que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} Tr \{ e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \Delta(q^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \} &= A(k, p) + B(k, p) \\
 &= \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} E(k, p) \left\{ -\frac{1}{(D-3)(D-2)} Y_1 + \frac{2}{(D-3)(D-2)} M(p^2) Y_5 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{(D-3)(D-2)} q \cdot p Y_6^A + \frac{2}{(D-3)(D-2)} t \cdot p Y_7^S + \frac{1}{F(k^2)} [M(p^2) \right. \\
 &\quad \times [(D-1)k^2 - (D-1)k \cdot p + 2 \frac{\nabla(k, p)}{q^2}] + M(k^2) [-(D-1)p^2 \\
 &\quad \left. + (D-1)k \cdot p - 2 \frac{\nabla(k, p)}{q^2}] \right\} \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

de esta última ecuación renombramos las funciones

$$\Lambda_M(p, k) = \frac{1}{(D-3)(D-2)} [-Y_1(k, p) - 2(q \cdot p) Y_6^A(k, p) + 2(t \cdot p) Y_7^S(k, p)] \quad (5.17)$$

$$u(k, p) = (D-1)(k \cdot p) - 2 \frac{\nabla(k, p)}{q^2} \quad (5.18)$$

con lo que la ecuación (5.16) se reduce a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} Tr \{ e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \Delta(q^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \} &= e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} M(p^2) \\
 &\times \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} \frac{\Delta(q^2)}{k^2 - p^2} \left\{ \frac{2}{(D-3)(D-2)} Y_5(k, p) + \frac{1}{M(p^2)} \Lambda_M(p, k) \right. \\
 &\left. + \left[ (D-1)k^2 - u(k, p) + \frac{M(k^2)}{M(p^2)} (-(D-1)p^2 + u(k, p)) \right] \frac{1}{F(k^2)} \right\} \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

pero esta ecuación se puede reducir un poco mas si definimos la función

$$\begin{aligned}
 \frac{(k^2 - p^2)}{\Delta(q^2)} G_M(k, p) &= \frac{2}{(D-3)(D-2)} Y_5(k, p) + \frac{\Lambda_M(p, k)}{M(p^2)} \\
 &+ \left[ (D-1)k^2 - u(k, p) + \left[ u(k, p) - (D-1)p^2 \right] \frac{M(k^2)}{M(p^2)} \right] \frac{1}{F(k^2)} \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

y con esta simplificación simplemente se tendrá que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} Tr \{ e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \Delta(q^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \} \\
 = e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} M(p^2) G_M(k, p) \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

### 5.1.2. Ecuación del gap multiplicada por 1 completa

Finalmente podemos escribir la función de masa a partir de los resultados obtenidos en las ecuaciones (5.6, 5.7, 5.9, 5.21)

$$\begin{aligned} \frac{M(k^2)}{F(k^2)} = m_0 + e^2 \xi \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} \frac{1}{q^4} \frac{1}{F(k^2)} [M(p^2) k \cdot q - M(k^2) q \cdot p] \\ + e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} M(p^2) G_M(k, p) \end{aligned} \quad (5.22)$$

### 5.2. Ecuación del gap multiplicada por $\gamma \cdot k$

De la misma manera que lo hicimos anteriormente, lo primero que tenemos que hacer es sustituir el propagador del fotón  $\Delta_{\mu\nu}$  en la ecuación (5.2)

$$\begin{aligned} \gamma \cdot k S^{-1}(k) = \gamma \cdot k S_0^{-1}(k) + e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma \cdot k \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \Delta(q^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \\ + \xi e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma \cdot k \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \end{aligned} \quad (5.23)$$

vamos a empezar calculando la traza del LHS de esta ecuación

$$\begin{aligned} Tr\{\gamma \cdot k S^{-1}(k)\} = Tr\left\{ \gamma \cdot k \frac{i\gamma \cdot k + M(k^2)}{F(k^2)} \right\} \\ = \frac{k_\nu}{F(k^2)} [i k_\beta Tr\{\gamma_\nu \gamma_\beta\} + M(k^2) Tr\{\gamma_\nu\}] = \frac{4i k^2}{F(k^2)} \end{aligned} \quad (5.24)$$

con esta última definición se puede despejar  $\frac{1}{F(k^2)}$ , la inversa de la renormalización de la función de onda del fermión, y obtener la siguiente relación

$$\frac{1}{F(k^2)} = \frac{-i}{4k^2} Tr\{\gamma \cdot k S^{-1}(k)\} \quad (5.25)$$

esta relación implica que todas las trazas deben ser multiplicadas por un factor  $\frac{-i}{4k^2}$ .

Pasando al RHS de la ecuación, al sacar la traza del primer término que involucra el propagador del fermión desnudo vamos a tener

$$\frac{-i}{4k^2} Tr\{\gamma \cdot k S_0^{-1}(k)\} = \frac{-i k_\nu}{4k^2} [i k_\beta Tr\{\gamma_\nu \gamma_\beta\} + m Tr\{\gamma_\nu\}] = 1 \quad (5.26)$$

Calculando el tercer término de la ecuación (5.23) nos damos cuenta que nuevamente vamos a utilizar la WFGTI (5.8) para facilitar el cálculo de la traza

$$\begin{aligned}
 & \frac{-i}{4k^2} Tr\{\xi e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma \cdot k \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \frac{q_\mu q_\nu}{q^4}\} \\
 &= \frac{-e^2 \xi}{4k^2} \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} Tr\{\gamma \cdot k \gamma_\nu S(p) [S^{-1}(k) - S^{-1}(p)] \frac{q_\nu}{q^4}\} \\
 &= \frac{-e^2 \xi}{4k^2} \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{q_\nu}{q^4} Tr\{\gamma \cdot k \gamma_\nu [S(p) S^{-1}(k) - 1]\} \\
 &= -e^2 \xi \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^4} \left[ \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} \frac{1}{F(k^2)} \left\{ p \cdot q + M(k^2) M(p^2) \frac{k \cdot q}{k^2} \right\} - \frac{k \cdot q}{k^2} \right] \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

pero el término resaltado en rojo no va a contribuir pues ante el intercambio  $q \rightarrow -q$  queda una integral completamente antisimétrica y por lo tanto daría cero, así que la traza del término tres del RHS se reduce a

$$\begin{aligned}
 & \frac{-i}{4k^2} Tr\{\xi e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma \cdot k \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \frac{q_\mu q_\nu}{q^4}\} \\
 &= -e^2 \xi \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^4} \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} \frac{1}{F(k^2)} \left\{ p \cdot q + M(k^2) M(p^2) \frac{k \cdot q}{k^2} \right\} \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

Para el segundo término del RHS se va a necesitar nuevamente un tratamiento profundo el cual se presenta a continuación.

### 5.2.1. Segundo término del RHS de (5.23)

Al calcular la traza de este término se va a tener el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
 & \frac{-i}{4k^2} \text{Tr} \left\{ e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma \cdot k \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \Delta(q^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \right\} = \frac{e^2}{2} \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^{4D}} \frac{q^{-2} k^{-2} F(p^2) \Delta(q^2)}{p^2 + M^2(p^2) F(k^2)} \\
 & \times (32^{3D+1} \pi^{3D} q^2 \tau_8 (k \cdot p)^2 - 2^{3D+1} D \pi^{3D} q^2 \tau_8 (k \cdot p)^2 + 2^{3D+1} \pi^{3D} M(p^2) k \cdot q q^2 k \cdot p \\
 & \times \tau_1 - 32^{3D+1} \pi^{3D} q^4 \tau_3 k \cdot p + 2^{3D+1} D \pi^{3D} q^4 \tau_3 k \cdot p + 32^{3D+1} \pi^{3D} k^2 q^2 \tau_6 k \cdot p - D \pi^{3D} \\
 & \times 2^{3D+1} k^2 q^2 \tau_6 k \cdot p - 32^{3D+1} \pi^{3D} p^2 q^2 \tau_6 k \cdot p + 2^{3D+1} D \pi^{3D} p^2 q^2 \tau_6 k \cdot p - \pi^{3D} 2^{3D+1} q^2 \\
 & \times M(p^2) k \cdot t \tau_7 k \cdot p + 2^{3D+1} \pi^{3D} M(p^2) k \cdot q q \cdot t \tau_7 k \cdot p - \pi^{3D} k \cdot q p \cdot q 2^{3D+2} \tau_8 k \cdot p q^2 \\
 & - 2^{3D+1} \pi^{3D} b(k^2, p^2) k \cdot t p \cdot t + 2^{3D+1} \pi^{3D} a(k^2, p^2) (2k \cdot q p \cdot q + (D-3)k \cdot p q^2) - \pi^3 \\
 & \times 2^{3D+1} \pi^D c(k^2, p^2) M(p^2) (k \cdot t q^2 - k \cdot q q \cdot t) - 2^{3D+1} \pi^{3D} M(p^2) k^2 (p \cdot q) q^2 \tau_1 - \tau_2 \\
 & \times 2^{3D+1} \pi^{3D} k \cdot q k \cdot t p^2 q^2 + 2^{3D+1} \pi^{3D} k^2 p \cdot q p \cdot t q^2 \tau_2 + 2^{3D+2} \pi^{3D} k \cdot q p \cdot q q^2 \tau_3 - \pi^{3D} \\
 & \times \tau_4 k \cdot t 2^{3D+2} M(p^2) q^4 + 2^{3D+1} D \pi^{3D} M(p^2) k \cdot t q^4 \tau_4 + 2^{3D+1} \pi^{3D} M(p^2) k \cdot q q^2 q \cdot t \\
 & \times \tau_4 - 2^{3D+1} \pi^{3D} M(p^2) (k \cdot q) q^2 \tau_5 + 2^{3D+1} D \pi^{3D} M(p^2) k \cdot q q^2 \tau_5 - 2^{3D+2} \pi^{3D} k^2 k \cdot q \\
 & \times p \cdot q \tau_6 + 2^{3D+2} \pi^{3D} k \cdot q p^2 (p \cdot q) \tau_6 - 2^{3D+1} \pi^{3D} k \cdot t p \cdot q q^2 \tau_6 - 2^{3D+1} \pi^{3D} k \cdot q p \cdot t q^2 \tau_6 \\
 & + 2^{3D+2} \pi^{3D} k \cdot q p \cdot q q \cdot t \tau_6 - 2^{3D+1} \pi^{3D} M(p^2) k^2 k \cdot t q^2 \tau_7 + 2^{3D+1} \pi^{3D} M(p^2) \times k \cdot t p^2 \\
 & \times q^2 \tau_7 + 2^{3D+1} \pi^{3D} M(p^2) k^2 p \cdot t q^2 \tau_7 - 2^{3D+1} \pi^{3D} M(p^2) k^2 p \cdot q q \cdot t \tau_7 + 2^{3D+1} D k^2 p^2 \\
 & \times q^2 \tau_8 \pi^{3D} + (2\pi)^{3D} b(k^2, p^2) ((q \cdot t) (k \cdot t p \cdot q + k \cdot q p \cdot t - k \cdot p q \cdot t) + k \cdot p q^2 t^2) + \tau_7 \\
 & \times M(p^2) (k^2 - p^2) (D k \cdot t q^2 + k \cdot q q \cdot t) + 2^{3D+1} \pi^{3D} k^2 (p \cdot q)^2 \tau_8 + 2^{3D+1} \pi^{3D} (k \cdot q)^2 \\
 & \times p^2 \tau_8 - 32^{3D+1} \pi^{3D} k^2 p^2 q^2 \tau_8) \tag{5.29}
 \end{aligned}$$

Sin embargo, esta no es la versión más simplificada que podemos obtener. El siguiente paso es sustituir el valor de los factores de forma  $\tau_i(k, p)$  en términos de las funciones  $Y_i(k, p)$  definidas anteriormente en (4.35) y a este resultado lo vamos a volver a factorizar en dos términos como en el caso anterior

$$\frac{-i}{4k^2} \text{Tr} \left\{ e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma \cdot k \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \Delta(q^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \right\} = C(k, p) + D(k, p) \tag{5.30}$$

donde  $C(k, p)$  contiene las funciones  $Y_i(k, p)$  y  $D(k, p)$  contiene todos los términos libres de funciones  $Y_i(k, p)$  en esta ecuación.

### 5.2.1.1. Término $C(k, p)$

Al simplificar los términos que llevan funciones  $Y_i(k, p)$  se llega a

$$\begin{aligned}
 C(k, p) = & \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} E(k, p) \frac{1}{k^2} \left\{ -M(p^2) \left[ \frac{Y_1(k, p) + 2k \cdot q Y_6^A(k, p) + 2k \cdot t Y_7^S(k, p)}{(D-3)(D-2)} \right] \right. \\
 & \left. - \left[ \frac{(k^2 - p^2) Y_2(k, p) + t^2 Y_3(k, p) - 2k \cdot p Y_5(k, p) + 8\nabla(k, p) Y_8^A(k, p)}{(D-3)(D-2)} \right] \right\} \tag{5.31}
 \end{aligned}$$

ya habíamos visto el valor de la función  $E(k, p)$

$$E(k, p) = e^2 \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} \frac{\Delta(q^2)}{k^2 - p^2} \quad (5.32)$$

### 5.2.1.2. Término $D(k, p)$

Como ya vimos anteriormente, los términos que están libres de funciones  $Y_i(k, p)$  contienen los factores de forma  $a(k^2, p^2)$ ,  $b(k^2, p^2)$  y  $c(k^2, p^2)$  definidos en (4.11), pero en este caso solo se va a sustituir el valor de  $a(k^2, p^2)$ , así que al simplificar nos queda

$$\begin{aligned} D(k, p) = & \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} E(k, p) \frac{(k^2 - p^2)}{k^2} \left\{ M(p^2) c(k^2, p^2) \left[ -(D-1)k^2 + (D-1)k \cdot p - 2 \frac{\nabla(k, p)}{q^2} \right] \right. \\ & - (D-1)k^2 p^2 b(k^2, p^2) + \frac{1}{2} \frac{1}{q^2} \frac{1}{F(p^2)} \frac{1}{k^2 - p^2} \left\{ \frac{F(p^2)}{F(k^2)} \left\{ (D-8)k^4 p^2 + (D-4)k^2 p^4 \right. \right. \\ & \left. \left. + k \cdot p [2(D-1)k^4 + k \cdot p [(12-5D)k^2 + 2(D-4)k \cdot p - (D-4)p^2] + 6k^2 p^2] \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ -(D-4)k^4 p^2 - (D-8)k^2 p^4 - k \cdot p [k \cdot p [-(D-4)k^2 + 2(D-4)k \cdot p \right. \right. \\ & \left. \left. + (12-5D)p^2] + 2(D-1)p^4 + 6k^2 p^2] \right\} \right\} \left. \right\} \quad (5.33) \end{aligned}$$

en esta ecuación es posible reemplazar el valor de la función  $u(k, p)$  que definimos en (5.18) de tal manera que

$$\begin{aligned} D(k, p) = & \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} E(k, p) \frac{(k^2 - p^2)}{k^2} \left\{ M(p^2) [u(k, p) - (D-1)k^2] c(k^2, p^2) \right. \\ & \left. - (D-1)k^2 p^2 b(k^2, p^2) + H(k, p) \right\} \quad (5.34) \end{aligned}$$

donde  $H(k, p)$  engloba los términos resaltados en verde de la ecuación (5.33), que al multiplicarlos por  $1 = \frac{F(p^2)}{F(p^2)}$  se obtiene

$$\begin{aligned} H(k, p) = & \frac{1}{2} \frac{1}{q^2} \frac{1}{k^2 - p^2} \left\{ \frac{1}{F(k^2)} \left\{ (D-8)k^4 p^2 + (D-4)k^2 p^4 + k \cdot p [2(D-1)k^4 + 6k^2 p^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + k \cdot p [(12-5D)k^2 + 2(D-4)k \cdot p - (D-4)p^2] \right\} + \frac{1}{F(p^2)} \left\{ -(D-4)k^4 p^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - (D-8)k^2 p^4 - k \cdot p [k \cdot p [-(D-4)k^2 + 2(D-4)k \cdot p + (12-5D)p^2] \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(D-1)p^4 + 6k^2 p^2] \right\} \right\} \quad (5.35) \end{aligned}$$

para simplificar esta última expresión se va a reescribir de la siguiente manera

$$H(k, p) = \frac{1}{2} \frac{1}{k^2 - p^2} \left\{ \frac{1}{F(k^2)} Q(k, p) + \frac{1}{F(p^2)} R(k, p) \right\} \quad (5.36)$$

donde he renombrado

$$\begin{aligned}
 Q(k, p) &= \frac{1}{q^2} \left\{ (D-8)k^4 p^2 + (D-4)k^2 p^4 + k \cdot p [2(D-1)k^4 + 6k^2 p^2 \right. \\
 &\quad \left. + k \cdot p [(12-5D)k^2 + 2(D-4)k \cdot p - (D-4)p^2]] \right\} \\
 R(k, p) &= \frac{1}{q^2} \left\{ -(D-8)k^2 p^4 - (D-4)k^4 p^2 - k \cdot p [2(D-1)p^4 + 6k^2 p^2 \right. \\
 &\quad \left. + k \cdot p [(12-5D)p^2 + 2(D-4)k \cdot p - (D-4)k^2]] \right\}
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

■ Tratamiento a  $R(k, p)$

Por un lado, al simplificar el término  $R(k, p)$  vamos a tener

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{q^2} \left\{ -(D-8)k^2 p^4 - (D-4)k^4 p^2 - k \cdot p [2(D-1)p^4 + 6k^2 p^2 \right. \\
 &\quad \left. + k \cdot p [(12-5D)p^2 + 2(D-4)k \cdot p - (D-4)k^2]] \right\} \\
 &= \frac{1}{q^2} \{ p^2 [-(D-8)k^2 p^2 - 2(D-1)(k \cdot p)p^2 - (12-5D)(k \cdot p)^2 - 6(k \cdot p)k^2 \\
 &\quad + 2(D-1)(k \cdot p)k^2 - 2(D-1)(k \cdot p)k^2 + 4(D-1)(k \cdot p)^2 - 4(D-1)(k \cdot p)^2] \\
 &\quad - (D-4)k^4 p^2 - 2(D-4)(k \cdot p)^3 + (D-4)k^2(k \cdot p)^2 \} \\
 &= \frac{1}{q^2} \{ p^2 [-2(D-1)(k \cdot p)q^2 - (D-8)k^2 p^2 - (8-2D)k^2(k \cdot p) - (8-D)(k \cdot p)^2 \\
 &\quad + 4k^2 p^2 - 4k^2 p^2 + 4(k \cdot p)^2 - 4(k \cdot p)^2] - (D-4)[k^4 p^2 + 2(k \cdot p)^3 - k^2(k \cdot p)^2] \} \\
 &= \frac{1}{q^2} \{ -2p^2 [(D-1)(k \cdot p)q^2 - 2\nabla(k, p)] - (D-4)[k^2 p^2(p^2 + k^2 - 2k \cdot p) \\
 &\quad - (k \cdot p)^2(p^2 + k^2 - 2k \cdot p)] \} \\
 &= \frac{1}{q^2} \{ -2p^2 [(D-1)(k \cdot p)q^2 - 2\nabla(k, p)] - (D-4)q^2(k^2 p^2 - (k \cdot p)^2) \} \\
 &= -2p^2 [(D-1)(k \cdot p) - 2\frac{\nabla(k, p)}{q^2}] - (D-4)\nabla(k, p) \\
 &= -2p^2 u(k, p) - (D-4)\nabla(k, p)
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

■ Tratamiento a  $Q(k, p)$

Por otro lado, del término  $Q(k, p)$  se obtiene

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{q^2} \left\{ (D-8)k^4 p^2 + (D-4)k^2 p^4 + k \cdot p [2(D-1)k^4 + 6k^2 p^2 \right. \\
 &\quad \left. + k \cdot p [(12-5D)k^2 + 2(D-4)k \cdot p - (D-4)p^2]] \right\} \\
 &= \frac{1}{q^2} \{ k^2 [(D-8)k^2 p^2 + 2(D-1)(k \cdot p)k^2 + (12-5D)(k \cdot p)^2 + 6(k \cdot p)p^2 \\
 &\quad + 2(D-1)(k \cdot p)p^2 - 2(D-1)(k \cdot p)p^2 + 4(D-1)(k \cdot p)^2 - 4(D-1)(k \cdot p)^2] \\
 &\quad + (D-4)k^2 p^4 + 2(D-4)(k \cdot p)^3 - (D-4)p^2(k \cdot p)^2 \} \\
 &= \frac{1}{q^2} \{ k^2 [2(D-1)(k \cdot p)q^2 + (D-8)k^2 p^2 + (8-2D)p^2(k \cdot p) + (8-D)(k \cdot p)^2 \\
 &\quad + 4k^2 p^2 - 4k^2 p^2 + 4(k \cdot p)^2 - 4(k \cdot p)^2] + (D-4)[k^2 p^4 + 2(k \cdot p)^3 - p^2(k \cdot p)^2] \} \\
 &= \frac{1}{q^2} \{ 2k^2 [(D-1)(k \cdot p)q^2 - 2\nabla(k, p)] + (D-4)[k^2 p^2(p^2 + k^2 - 2k \cdot p) \\
 &\quad - (k \cdot p)^2(p^2 + k^2 - 2k \cdot p)] \} \\
 &= \frac{1}{q^2} \{ 2k^2 [(D-1)(k \cdot p)q^2 - 2\nabla(k, p)] + (D-4)q^2(k^2 p^2 - (k \cdot p)^2) \} \\
 &= 2k^2 [(D-1)(k \cdot p) - 2\frac{\nabla(k, p)}{q^2}] + (D-4)\nabla(k, p) \\
 &= 2k^2 u(k, p) + (D-4)\nabla(k, p) \tag{5.39}
 \end{aligned}$$

Ahora que ya tenemos  $R(k, p)$  y  $Q(k, p)$  simplificadas podemos sustituir sus valores en  $H(k, p)$ , es decir, sustituir las ecuaciones (5.38, 5.39) en la expresión (5.37)

$$\begin{aligned}
 H(k, p) &= \frac{1}{2} \frac{1}{k^2 - p^2} \left\{ \frac{1}{F(k^2)} \left[ 2k^2 u(k, p) + (D-4)\nabla(k, p) \right] - \frac{1}{F(p^2)} \left[ 2p^2 u(k, p) + (D-4)\nabla(k, p) \right] \right\} \\
 &= u(k, p) \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{k^2}{F(k^2)} - \frac{p^2}{F(p^2)} \right] + \frac{(D-4)}{2} \nabla(k, p) \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \\
 &= u(k, p) \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{k^2}{F(k^2)} - \frac{p^2}{F(p^2)} \right] + \frac{(D-4)}{2} \nabla(k, p) b(k^2, p^2) \tag{5.40}
 \end{aligned}$$

con esto ya podemos sustituir  $H(k, p)$  en la función  $D(k, p)$  libre de funciones  $Y_i(k, p)$  que describimos en la ecuación (5.34)

$$\begin{aligned}
 D(k, p) &= \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} E(k, p) \frac{(k^2 - p^2)}{k^2} \left\{ M(p^2) [u(k, p) - (D-1)k^2] c(k^2, p^2) \right. \\
 &\quad \left. - (D-1)k^2 p^2 b(k^2, p^2) + u(k, p) \tilde{b}(k^2, p^2) + \frac{(D-4)}{2} \nabla(k, p) b(k^2, p^2) \right\} \tag{5.41}
 \end{aligned}$$

donde hemos definido el término  $\tilde{b}(k^2, p^2)$  como

$$\tilde{b}(k^2, p^2) = \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{k^2}{F(k^2)} - \frac{p^2}{F(p^2)} \right] \tag{5.42}$$

**5.2.1.3. Segundo término del RHS de (5.23) completo**

Ahora que contamos con una versión simplificada de la función  $C(k, p)$  y  $D(k, p)$  (5.31, 5.41) podemos sumarlas tal como se muestra en la ecuación (5.30) para obtener el segundo término del RHS de la ecuación (5.23)

$$\begin{aligned}
 & \frac{-i}{4k^2} Tr \left\{ e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma \cdot k \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \Delta(q^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \right\} = C(k, p) + D(k, p) \\
 & = \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} E(k, p) \frac{1}{k^2} \left\{ -M(p^2) \left[ \frac{Y_1(k, p) + 2k \cdot q Y_6^A(k, p) + 2k \cdot t Y_7^S(k, p)}{(D-3)(D-2)} \right] \right. \\
 & \quad - \left[ \frac{(k^2 - p^2) Y_2(k, p) + t^2 Y_3(k, p) - 2k \cdot p Y_5(k, p) + 8\nabla(k, p) Y_8^A(k, p)}{(D-3)(D-2)} \right] \\
 & \quad + (k^2 - p^2) \left\{ M(p^2) [u(k, p) - (D-1)k^2] c(k^2, p^2) - (D-1)k^2 p^2 b(k^2, p^2) \right. \\
 & \quad \left. \left. + u(k, p) \tilde{b}(k^2, p^2) + \frac{(D-4)}{2} \nabla(k, p) b(k^2, p^2) \right\} \right\} \quad (5.43)
 \end{aligned}$$

para tener la expresión mas compacta es posible agrupar todas las funciones  $Y_i(k, p)$  en dos funciones  $\Lambda_M(k, p)$  y  $\Lambda_{NM}(k, p)$

$$\Lambda_M(k, p) = \frac{1}{(D-3)(D-2)} \left[ Y_1(k, p) + 2(k \cdot q) Y_6^A(k, p) + 2(k \cdot t) Y_7^S(k, p) \right] \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{NM}(k, p) = & \frac{1}{(D-3)(D-2)} \left[ (k^2 - p^2) Y_2(k, p) + t^2 Y_3(k, p) - 2(k \cdot p) Y_5(k, p) \right. \\
 & \left. + 8\nabla(k, p) Y_8^A(k, p) \right] \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

esta distinción es importante porque nos permite ver claramente que  $\Lambda_M(k, p)$  es una función masiva mientras que  $\Lambda_{NM}(k, p)$  es no masiva y con esto conjeturar que las funciones  $Y_1, Y_6^A$  y  $Y_7^S$  son funciones masivas mientras que  $Y_2, Y_3, Y_5$  y  $Y_8^A$  son funciones no masivas. Podemos observar que bajo el intercambio de  $k \leftrightarrow p$  la función  $\Lambda_M(k, p)$  se va a transformar en  $\Lambda_M(p, k)$ , que es la misma expresión que obtuvimos en (5.17) para la función  $G_M(k, p)$ .

Ahora con este renombramiento de las funciones  $Y_i(k, p)$ , la ecuación (5.43) se reduce a

$$\begin{aligned}
 & \frac{-i}{4k^2} Tr \left\{ e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} k \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \Delta(q^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \right\} = e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \\
 & \quad \times \frac{1}{k^2} \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} \frac{\Delta(q^2)}{k^2 - p^2} \left\{ -M(p^2) \Lambda_M(k, p) - \Lambda_{NM}(k, p) \right. \\
 & \quad + (k^2 - p^2) \left\{ M(p^2) [u(k, p) - (D-1)k^2] c(k^2, p^2) - (D-1)k^2 p^2 b(k^2, p^2) \right. \\
 & \quad \left. \left. + u(k, p) \tilde{b}(k^2, p^2) + \frac{(D-4)}{2} \nabla(k, p) b(k^2, p^2) \right\} \right\} \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

para tener una expresión mas compacta definimos la función  $G_F(k, p)$  como

$$\begin{aligned} \frac{(k^2 - p^2)}{\Delta(q^2)} G_F(k, p) = & -\Lambda_{NM}(k, p) - M(p^2)\Lambda_M(k, p) + (k^2 - p^2) \left\{ -(D-1)k^2 p^2 b(k^2, p^2) \right. \\ & \left. + u(k, p)\tilde{b}(k^2, p^2) + M(p^2) [u(k, p) - (D-1)k^2] c(k^2, p^2) + \frac{(D-4)}{2} \nabla(k, p) b(k^2, p^2) \right\} \end{aligned} \quad (5.47)$$

y con esto el segundo término del RHS de la ecuación (5.23) nos va a quedar simplemente

$$\begin{aligned} \frac{-i}{4k^2} Tr \left\{ e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma \cdot k \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) \Delta(q^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \right\} \\ = e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} G_F(k, p) \end{aligned} \quad (5.48)$$

### 5.2.2. Ecuación del gap multiplicada por $\gamma \cdot k$ completa

Finalmente podemos escribir la ecuación inversa de la renormalización de la función de onda del fermión a partir de los resultados obtenidos en las ecuaciones (5.25, 5.26, 5.28, 5.48)

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(k^2)} = & 1 - e^2 \xi \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^4} \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} \frac{1}{F(k^2)} \left\{ p \cdot q + M(k^2)M(p^2) \frac{k \cdot q}{k^2} \right\} \\ & + e^2 \int_E \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} G_F(k, p) \end{aligned} \quad (5.49)$$

Con esto ya tenemos las dos ecuaciones (5.22, 5.49) desacopladas de la ecuación del gap (5.1), sin embargo, aún es necesario derivar restricciones no perturbativas a las funciones  $Y_i(k, p)$  mediante la regularización dimensional, lo cual se presenta en el siguiente capítulo.

---

## Capítulo 6

# Renormalización Multiplicativa

---

“¡Hermoso era el mundo! Diversiforme era el mundo, extraño, misterioso, insondable, aquí azul y amarillo, verde más allá. Las nubes se deslizaban en el cielo y sobre la tierra corría el río. Todo era bello, enigmático y encantador como el bosque y como las montañas cuyas siluetas se recortaban en el horizonte. Y en medio de ese mundo, él, Sidharta, despierto, alerta, en camino ya, hacia sí mismo.”

-*Sidharta, Hermann Hesse*-

En el capítulo anterior llegamos a dos expresiones que desacoplan la ecuación del gap (5.22, 5.49), para obtener constricciones no perturbativas hacia las funciones  $Y_i(k, p)$  es necesario estudiar diferentes modelos que describan el propagador del fotón; en este trabajo se va a tomar la definición más sencilla posible, reemplazar el propagador del fotón completo por el nivel de árbol, con lo que

$$\Delta(q^2) \rightarrow \Delta_0(q^2) = \frac{1}{q^2} \quad (6.1)$$

a esta aproximación se le conoce como **Quenched QED** (qQED).

Las ecuaciones (5.22, 5.49) se van a estudiar en el límite quiral cuando  $m_0 = 0$  debido a que este es un escenario importante para explicar como QED experimenta una transición de la fase perturbativa a la no perturbativa. El estudio de este escenario es de suma relevancia en la teoría ya que cuando se incrementa el valor del acoplamiento electromagnético ( $\alpha$ ) hasta su valor crítico se desencadena el DCSB. Teniendo esto en consideración se obtiene una ecuación para la función de onda de  $F$  a través de (5.49)

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(k^2)} = & 1 - e^2 \xi \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^4} \frac{F(p^2)}{F(k^2)} \frac{q \cdot p}{p^2} - \frac{e^2}{k^2} \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2} \frac{F(p^2) \Delta(q^2)}{k^2 - p^2} \left\{ \Lambda_{NM}(k, p) \right. \\ & \left. + (k^2 - p^2) \left[ (D-1) k^2 p^2 b(k^2, p^2) - u(k, p) \tilde{b}(k^2, p^2) - \frac{(D-4)}{2} \nabla(k, p) b(k^2, p^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Del trabajo de Bashir y Delbourgo [2] se puede llegar a una expresión no perturbativa que garantice la covariancia correcta en dimensiones arbitrarias y que sirva cómo un requerimiento de renormalización

$$\frac{1}{F(k^2)} = 1 - (4\pi)^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma_d(k^2, p^2, q^2) \frac{F(p^2)}{F(k^2)} \frac{p \cdot q}{p^2 q^4} \quad (6.3)$$

donde  $\gamma_d(k^2, p^2, q^2)$  viene definida

$$\gamma_d(k^2, p^2, q^2) = \frac{\alpha \xi}{4\pi} + \lambda_d(k^2, p^2, q^2) \quad (6.4)$$

para garantizar (6.3) le sumamos un cero a (6.2) como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(k^2)} &= 1 - e^2 \xi \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{F(p^2)}{F(k^2)} \frac{q \cdot p}{p^2 q^4} - \frac{e^2}{k^2} \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2} \frac{F(p^2) \Delta(q^2)}{k^2 - p^2} \left\{ \Lambda_{NM}(k, p) \right. \\ &\quad \left. + (k^2 - p^2) \left[ (D-1) k^2 p^2 b(k^2, p^2) - u(k, p) \tilde{b}(k^2, p^2) - \frac{(D-4)}{2} \nabla(k, p) b(k^2, p^2) \right] \right\} \\ &\quad + (4\pi)^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \gamma_d \frac{F(p^2)}{F(k^2)} \frac{p \cdot q}{p^2 q^4} - (4\pi)^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \gamma_d \frac{F(p^2)}{F(k^2)} \frac{p \cdot q}{p^2 q^4} \end{aligned} \quad (6.5)$$

a partir de esta última expresión acomodamos los términos para conseguir la forma que se presenta en (6.3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(k^2)} &= 1 - (4\pi)^2 \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \gamma_d \frac{F(p^2)}{F(k^2)} \frac{p \cdot q}{p^2 q^4} - \frac{e^2}{k^2} \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2} \frac{F(p^2) \Delta(q^2)}{k^2 - p^2} \left\{ \Lambda_{NM}(k, p) \right. \\ &\quad \left. + (k^2 - p^2) \left[ (D-1) k^2 p^2 b(k^2, p^2) - u(k, p) \tilde{b}(k^2, p^2) - \frac{(D-4)}{2} \nabla(k, p) b(k^2, p^2) \right] \right\} \\ &\quad + \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{F(p^2)}{F(k^2)} \frac{q \cdot p}{p^2 q^4} (-e^2 \xi + (4\pi)^2 \gamma_d) \\ &= 1 - (4\pi)^2 \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \gamma_d \frac{F(p^2)}{F(k^2)} \frac{p \cdot q}{p^2 q^4} - \frac{e^2}{k^2} \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2} \frac{F(p^2) \Delta(q^2)}{k^2 - p^2} \left\{ \Lambda_{NM}(k, p) \right. \\ &\quad \left. + (k^2 - p^2) \left[ (D-1) k^2 p^2 b(k^2, p^2) - u(k, p) \tilde{b}(k^2, p^2) - \frac{(D-4)}{2} \nabla(k, p) b(k^2, p^2) \right] \right\} \\ &\quad + \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{F(p^2)}{F(k^2)} \frac{q \cdot p}{p^2 q^4} (-e^2 \xi + 4\pi \alpha \xi + (4\pi)^2 \lambda_d) \end{aligned} \quad (6.6)$$

simplificando vamos a llegar a

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(k^2)} &= 1 - (4\pi)^2 \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \gamma_d \frac{F(p^2)}{F(k^2)} \frac{p \cdot q}{p^2 q^4} - \frac{e^2}{k^2} \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2} \frac{F(p^2) \Delta(q^2)}{k^2 - p^2} \left\{ \Lambda_{NM}(k, p) \right. \\ &\quad \left. + (k^2 - p^2) \left[ (D-1) k^2 p^2 b(k^2, p^2) - u(k, p) \tilde{b}(k^2, p^2) - \frac{(D-4)}{2} \nabla(k, p) b(k^2, p^2) \right] \right\} \\ &\quad + (4\pi)^2 \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \lambda_d \frac{F(p^2)}{F(k^2)} \frac{q \cdot p}{p^2 q^4} \end{aligned} \quad (6.7)$$

---

Si queremos garantizar (6.3) esto requiere que el resto de los términos sean cero, es decir:

$$(4\pi)^2 \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \lambda_d \frac{F(p^2)}{F(k^2)} \frac{q \cdot p}{p^2 q^4} - \frac{e^2}{k^2} \int_E \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2} \frac{F(p^2)}{q^2} \left\{ \frac{\Lambda_{NM}(k, p)}{k^2 - p^2} + (D-1)k^2 p^2 b(k^2, p^2) - u(k, p) \tilde{b}(k^2, p^2) - \frac{(D-4)}{2} \nabla(k, p) b(k^2, p^2) \right\} = 0 \quad (6.8)$$

esta última expresión ya dada en qQED. La solución trivial requiere que la función  $\Lambda_{NM}(k, p)$  tenga la forma

$$\Lambda_{NM}(k, p) = (p^2 - k^2) \left[ (D-1)k^2 p^2 b(k^2, p^2) - u(k, p) \tilde{b}(k^2, p^2) - \frac{(D-4)}{2} \nabla(k, p) b(k^2, p^2) \right] \quad (6.9)$$

y aquí finalmente se puede observar que esta expresión define un *ansatz* no perturbativo para las funciones  $Y_i(k, p)$  no masivas, es decir, para las funciones  $Y_2, Y_3, Y_5$  y  $Y_8^A$  en su conjunto (5.45), sin embargo, no lo hace individualmente con cada función.

## Conclusiones

---

“Tarda en llegar, y al final, al final hay recompensa...”

-Zona de Promesas, Gustavo Cerati-

En el capítulo 4 se comprueba que es posible obtener un *Ansatz* no perturbativo para el vértice fermión-fotón  $\Gamma_\mu(k, p)$  a partir de las **WFGTI** y las **TTI**. Este vértice se dividió en su parte longitudinal y su parte transversa. El vértice longitudinal es el ya proporcionado por Ball y Chiu [5, 6] el cual está libre de singularidades cinemáticas y garantiza la invariancia de norma a través de las **WFGTI**. Para el vértice transverso se introdujeron las **TTI** para describir los factores de forma  $\tau_i(k, p)$  en términos de las llamadas funciones  $Y_i(k, p)$ , estas identidades aseguran la invariancia de norma para el vértice transverso  $\Gamma_\mu^T(k, p)$ . Gracias a este *Ansatz* refinado es posible desacoplar la torre infinita de SDE a nivel de los propagadores. Un punto importante a resaltar es que al fijar  $D = 4$  se obtienen los resultados reportados en [34].

En el capítulo 5 trabajamos con la SDE para el fermión, también conocida como ecuación del gap. Esta ecuación del gap es una ecuación matricial de dos ecuaciones independientes: la función de masa y la renormalización de la función de onda del fermión. En estas dos ecuaciones logramos clasificar las funciones  $Y_i(k, p)$  en funciones masivas y no masivas. Al estudiarlas en el límite no masivo, con la aproximación *qQED*, se logra asegurar la MR de la SDE del fermión y se obtiene información de las funciones  $Y_2, Y_3, Y_5$  y  $Y_8^A$  en conjunto.

Al analizar los resultados obtenidos concluimos que el vértice fermión-fotón que se construye garantiza la invariancia de norma por medio de las **WFGTI** y las **TTI**, además, asegura la renormalizabilidad multiplicativa de las SDE en que aparece, en este caso, la del fermión. Sin embargo, estos resultados son válidos para todo  $D$  menos  $D=2$  ó  $D=3$ , ya que en estos casos la contracción de los tensores Levi-Civita da cero y no aporta información nueva, para futuros trabajos se podría analizar este punto. La importancia de este estudio en el régimen no perturbativo es el analizar fenómenos que son invisibles en cálculos perturbativos, por ejemplo el DCSB y Confinamiento de Color; en este trabajo son aspectos que ya no se llegan a tratar, pero dan pie a futuros análisis.

---

## Apéndice A

# Álgebra de Dirac en $d$ Dimensiones

---

Para el cálculo de las trazas es necesario conocer las siguientes operaciones permitidas dentro del cálculo [14], siendo  $A$  y  $B$  matrices y  $\alpha$  cualquier número

$$\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$$

$$\text{Tr}(\alpha A) = \alpha \text{Tr}(A)$$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

esta última nos dice que las trazas son permutables cíclicamente. Por otra parte, se tiene un álgebra de Dirac que nos proporciona información de las matrices  $\gamma$ , la cual, para  $d$  dimensiones se define a través de las habituales relaciones de conmutación  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ . Se tiene

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = D \quad ; \quad \gamma_\mu\gamma^\mu = D \quad (\text{A.1})$$

con lo que surgen las identidades [31]

$$\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu = (2-D)\gamma_\alpha \quad , \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu = (D-4)\gamma_\alpha\gamma_\beta + 4g_{\alpha\beta} \quad , \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\mu = -2\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma_\alpha(D-4)\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\nu \quad , \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma^\mu\sigma_{\alpha\beta}\gamma_\mu = (D-4)\sigma_{\alpha\beta} \quad , \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma^\mu\sigma_{\mu\alpha} = i(D-1)\gamma_\alpha \quad , \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma_{\mu\alpha}\gamma^\mu = i(1-D)\gamma_\alpha \quad . \quad (\text{A.7})$$

donde  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ .

Con esto en mente se tiene un conjunto de teoremas para calcular las trazas [31, 35, 36]

$$Tr(I) = 4 \quad ,^1 \quad (A.8)$$

$$Tr(\gamma^\mu) = 0 \quad , \quad (A.9)$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\mu) = 4D \quad , \quad (A.10)$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g_{\mu\nu} \quad , \quad (A.11)$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \quad . \quad (A.12)$$

además, la traza de cualquier producto de un número impar de  $\gamma^\mu$  es cero. Para el caso de la  $\gamma^5$  existen varios métodos para manejar esta matriz en regularización dimensional, ya que las relaciones

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (A.13)$$

$$Tr\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\} \neq 0 \quad (A.14)$$

no se pueden cumplir simultáneamente [37, 38, 39]. Para tratar con  $\gamma^5$  se pueden seguir los esquemas

1. Prescripción de Kreimer
2. Prescripción de Larin-Gorishny-Akyeampong-Delburgo [40]
3. Esquema Breitenlohner-Maison- t'Hooft Veltman (BMHV) [41, 42]

El esquema BMHV trabaja las matrices  $\gamma^5$  como objetos 4 dimensionales que no anti-conmutan con las matrices de Dirac. En este trabajo se tomó la definición de  $\gamma^5$  en 4 dimensiones

$$\gamma_5 = \gamma_4 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \quad (A.15)$$

con lo que las trazas se calculan de la misma manera que en 4 dimensiones, es decir, la traza de  $\gamma^5$  por el producto de un número impar de  $\gamma^\mu$  es cero y

$$Tr\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta\} = -4\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (A.16)$$

pero el tensor  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  se toma como si fuera d dimensional, con lo que al tener una contracción en el espacio Euclidiano de dos tensores Levi-Civita se tiene

$$\epsilon_{\rho\nu\sigma} \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} = (D-3)(D-2) [g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma} g_{\beta\rho}] \quad (A.17)$$

---

<sup>1</sup>Ya que se requiere que la traza de la matriz identidad sea el valor habitual en la dimensión física del espacio-tiempo, es decir, 4.

---

## Apéndice B

# Estudio de la simetría

---

Para comprobar el cumplimiento de la simetría *CPT* en las ecuaciones (4.25-4.32) se pueden seguir dos caminos

1. Haciendo un análisis de la parte simétrica y antisimétrica
2. Haciendo el intercambio de  $k$  por  $p$ :  $\tau(k, p) \xrightarrow{k \leftrightarrow p} \tau(p, k)$

En este trabajo utilizamos ambos caminos para ejemplificar su uso, las primeras 5 funciones  $\tau_i(k, p)$  por el primero y las últimas 3 por el segundo<sup>1</sup>.

En el primer camino se siguen las siguientes reglas:

$$S \times S = S$$

$$A \times A = S$$

$$S \times A = A$$

donde  $S$  y  $A$  quiere decir simétrica y antisimétrica, respectivamente.

En el segundo método se separa la función  $\tau_i(k, p)$  en su parte simétrica y antisimétrica

$$\tau_i(k, p) = \tau_i^S(k, p) + \tau_i^A(k, p) \quad (\text{B.1})$$

donde

$$\tau_i^S(k, p) = \frac{1}{2} [\tau_i(k, p) + \tau_i(p, k)] \quad (\text{B.2})$$

$$\tau_i^A(k, p) = \frac{1}{2} [\tau_i(k, p) - \tau_i(p, k)] \quad (\text{B.3})$$

---

<sup>1</sup>Cabe resaltar que el segundo camino es el método más confiable para garantizar el cumplimiento de la simetría, sin embargo, es más laborioso. El primer método es recomendable cuando se tiene la certeza de la simetría de cada función en su forma individual, además de que su análisis es más corto.

Para ambos métodos es muy importante conocer la simetría de las funciones  $\tau_i(k, p)$

$$\begin{array}{ll} \text{SIMÉTRICA} & \tau_i(p, k) = \tau_i(k, p), \quad i = 1, 2, 3, 5, 7, 8 \\ \text{ANTISIMÉTRICA} & \tau_i(p, k) = -\tau_i(k, p), \quad i = 4, 6 \end{array} \quad (\text{B.4})$$

al igual que las simetrías de las funciones  $Y_i(k, p)$

$$\begin{array}{ll} \text{SIMÉTRICA} & Y_i(p, k) = Y_i(k, p), \quad i = 2, 6^A, 7^S, 8^S \\ \text{ANTISIMÉTRICA} & Y_i(p, k) = -Y_i(k, p), \quad i = 1, 3, 4, 5, 6^A, 7^A, 8^A \end{array} \quad (\text{B.5})$$

### B.1. Primer método

A continuación se presenta el análisis de los primeros cinco factores de forma  $\tau_i(k, p)$  tomando en cuenta sus simetrías. Para este análisis también debemos recordar que el determinante de Gramm,  $\nabla(k, p)$  (4.36), es simétrico y  $(k^2 - p^2)$  es antisimétrica.

↳ **Factor de forma  $\tau_1(k, p)$**

Parto de la ecuación obtenida en (4.25)

$$\tau_1 = -\frac{Y_1}{(D-3)(D-2)(k^2-p^2)\nabla(k, p)} = \frac{A}{A \times S} = \frac{A}{A} = S \quad (\text{B.6})$$

de acuerdo a (B.1) podemos dividir  $\tau_1$  en su parte simétrica y antisimétrica

$$\bullet \tau_1^S(k, p) = -\frac{Y_1}{(D-3)(D-2)(k^2-p^2)\nabla(k, p)} \quad (\text{B.7})$$

$$\bullet \tau_1^A(k, p) = 0 \quad (\text{B.8})$$

además, de acuerdo a las simetrías dadas en (B.4),  $\tau_1(k, p)$  es totalmente simétrica, por lo que la función  $\tau_1(k, p)$  que cumple los criterios de simetría es

$$\tau_1 = -\frac{Y_1}{(D-3)(D-2)(k^2-p^2)\nabla(k, p)} \quad (\text{B.9})$$

↳ **Factor de forma  $\tau_2(k, p)$**

En este caso tomamos la ecuación que obtuvimos en (4.26)

$$\tau_2 = -\frac{Y_3 - DY_3 + Y_5}{(D-3)(D-2)^2(k^2-p^2)\nabla(k, p)} = \frac{A \times A \times A}{A \times S} = \frac{A}{A} = S \quad (\text{B.10})$$

nuevamente lo divido en la parte simétrica y antisimétrica

$$\bullet \tau_2^S(k, p) = -\frac{Y_3 - DY_3 + Y_5}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \quad (\text{B.11})$$

$$\bullet \tau_2^A(k, p) = 0 \quad (\text{B.12})$$

y sabemos que el factor de forma  $\tau_2$  es completamente simétrico, por lo cual

$$\tau_2 = -\frac{Y_3 - DY_3 + Y_5}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \quad (\text{B.13})$$

↳ **Factor de forma  $\tau_3(k, p)$**

En la ecuación (4.27) teníamos que

$$\begin{aligned} \tau_3 &= \frac{1}{2}b(k^2, p^2) + \frac{(D-2)Y_2(k^2 - p^2) - (Y_3 - Y_5)t^2}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \\ &= S + \frac{S \times A - (A - A)S}{A \times S} = S + \frac{A - A}{A} = S + S \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

al hacer la separación de la parte simétrica y antisimétrica

$$\bullet \tau_3^S(k, p) = \frac{1}{2}b(k^2, p^2) + \frac{(D-2)Y_2(k^2 - p^2) - (Y_3 - Y_5)t^2}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \quad (\text{B.15})$$

$$\bullet \tau_3^A(k, p) = 0 \quad (\text{B.16})$$

así que la función  $\tau_3$  que cumple la simetría es

$$\tau_3 = \frac{1}{2}b(k^2, p^2) + \frac{(D-2)Y_2(k^2 - p^2) - (Y_3 - Y_5)t^2}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \quad (\text{B.17})$$

↳ **Factor de forma  $\tau_4(k, p)$**

A partir de (4.28)

$$\tau_4 = -\frac{(k^2 - p^2)[2(D-1)Y_4 + Y_6] + Y_7 t^2 - Y_1}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \quad (\text{B.18})$$

pero la función  $Y_6$  y  $Y_7$  se pueden descomponer en la suma de su parte simétrica y antisimétrica

$$\begin{aligned} \tau_4 &= -\frac{(k^2 - p^2)[2(D-1)Y_4 + (Y_6^S + Y_6^A)] + (Y_7^S + Y_7^A)t^2 - Y_1}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \\ &= -\frac{A[A + (S + A)] + (S + A)S - A}{A \times S} = -\frac{S + A + S + S + A - A}{A} \\ &= -(A + S + A + A + S - S) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

en esta ocasión ya se tiene tanto parte simétrica como parte antisimétrica, al dividirlo tenemos

$$\bullet \tau_4^S(k, p) = -\frac{(k^2 - p^2) Y_6^S + Y_7^A t^2 - Y_1}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2) \nabla(k, p)} \quad (\text{B.20})$$

$$\bullet \tau_4^A(k, p) = -\frac{(k^2 - p^2) [2(D-1)Y_4 + Y_6^A] + Y_7^S t^2}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2) \nabla(k, p)} \quad (\text{B.21})$$

pero la simetría de las funciones  $\tau_i$ , (B.4), nos muestran que  $\tau_4$  es completamente anti-simétrica, por lo tanto  $\tau_4^S = 0$  y

$$\tau_4 = -\frac{(k^2 - p^2) [2(D-1)Y_4 + Y_6^A] + Y_7^S t^2}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2) \nabla(k, p)} \quad (\text{B.22})$$

↳ **Factor de forma**  $\tau_5(k, p)$

En la ecuación (4.29) tenemos

$$\begin{aligned} \tau_5 &= -c(k^2, p^2) - \frac{2(2Y_4 + (Y_6^A + Y_6^S))}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)} - \frac{Y_1}{2(D-3)(D-2)^2 \nabla(k, p)} \\ &= S - \frac{A + A + S}{A} - \frac{A}{S} = S - (S + S + A) - A \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

al separar lo simétrico de lo antisimétrico vamos a tener

$$\bullet \tau_5^S(k, p) = -c(k^2, p^2) - \frac{2(2Y_4 + Y_6^A)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)} \quad (\text{B.24})$$

$$\bullet \tau_5^A(k, p) = -\frac{2Y_6^S}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)} - \frac{Y_1}{2(D-3)(D-2)^2 \nabla(k, p)} \quad (\text{B.25})$$

pero el factor de forma  $\tau_5$  es completamente simétrico, por lo que  $\tau_5^A = 0$

$$\tau_5 = -c(k^2, p^2) - \frac{2(2Y_4 + Y_6^A)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)} \quad (\text{B.26})$$

## B.2. Segundo método

↳ **Factor de forma**  $\tau_6(k, p)$

Partimos de la ecuación (4.30)

$$\tau_6 = \frac{(D-2) Y_2(k, p) q^2 - (k^2 - p^2) (Y_3(k, p) - Y_5(k, p))}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2) \nabla(k, p)} \quad (\text{B.27})$$

Ahora calculo su parte simétrica ( $\tau_6^S$ ) y su parte antisimétrica ( $\tau_6^A$ )

■ **SIMÉTRICA**

$$\begin{aligned}
\tau_6^S(k, p) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(D-2)Y_2(k, p)(k^2 + p^2 - 2k \cdot p) - (k^2 - p^2)[Y_3(k, p) - Y_5(k, p)]}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(D-2)Y_2(p, k)(p^2 + k^2 - 2p \cdot k) - (p^2 - k^2)[Y_3(p, k) - Y_5(p, k)]}{2(D-3)(D-2)^2(p^2 - k^2)\nabla(p, k)} \right\} \\
&= \frac{1}{4(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \left\{ (D-2)Y_2(k, p)q^2 - (k^2 - p^2) \right. \\
&\quad \times [Y_3(k, p) - Y_5(k, p)] - (D-2)Y_2(k, p)q^2 - (k^2 - p^2) \\
&\quad \times [-Y_3(k, p) + Y_5(k, p)] \left. \right\} \\
&= \frac{1}{4(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \left\{ -(k^2 - p^2)[Y_3(k, p) - Y_5(k, p)] \right. \\
&\quad \left. + (k^2 - p^2)[Y_3(k, p) - Y_5(k, p)] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{B.28}$$

■ **ANTISIMÉTRICA**

$$\begin{aligned}
\tau_6^S(k, p) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(D-2)Y_2(k, p)(k^2 + p^2 - 2k \cdot p) - (k^2 - p^2)[Y_3(k, p) - Y_5(k, p)]}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(D-2)Y_2(p, k)(p^2 + k^2 - 2p \cdot k) - (p^2 - k^2)[Y_3(p, k) - Y_5(p, k)]}{2(D-3)(D-2)^2(p^2 - k^2)\nabla(p, k)} \right\} \\
&= \frac{1}{4(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \left\{ (D-2)Y_2(k, p)q^2 - (k^2 - p^2) \right. \\
&\quad \times [Y_3(k, p) - Y_5(k, p)] + (D-2)Y_2(k, p)q^2 + (k^2 - p^2) \\
&\quad \times [-Y_3(k, p) + Y_5(k, p)] \left. \right\} \\
&= \frac{2(D-2)Y_2(k, p)q^2 - 2(k^2 - p^2)[Y_3(k, p) - Y_5(k, p)]}{4(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)}
\end{aligned} \tag{B.29}$$

nos damos cuenta que al hacer el análisis de simetría toda la función  $\tau_6$  es antisimétrica, lo cual concuerda con lo estipulado en (B.4), por lo tanto,  $\tau_6$  es el término completo que ya teníamos

$$\tau_6 = \frac{(D-2)Y_2q^2 - (k^2 - p^2)(Y_3 - Y_5)}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \tag{B.30}$$

↳ **Factor de forma  $\tau_7(k, p)$**

Para el caso de  $\tau_7$  retomamos la ecuación obtenida en (4.31)

$$\tau_7 = \frac{q^2 [2(D-1)Y_4(k, p) + (Y_6^S(k, p) + Y_6^A(k, p))] + (Y_7^S(k, p) + Y_7^A(k, p))(k^2 - p^2)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \tag{B.31}$$

separando lo simétrico de lo antisimétrico obtenemos

■ **SIMÉTRICA**

$$\begin{aligned}
 \tau_7^S(k, p) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{q^2 [2(D-1)Y_4(k, p) + Y_6^A(k, p) + Y_6^S(k, p)] + (k^2 - p^2) [Y_7^S(k, p) + Y_7^A(k, p)]}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q^2 [2(D-1)Y_4(p, k) + Y_6^S(p, k) + Y_6^A(p, k)] + (p^2 - k^2) [Y_7^S(p, k) + Y_7^A(p, k)]}{(D-3)(D-2)^2(p^2 - k^2)\nabla(p, k)} \right\} \\
 &= \frac{1}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \left\{ q^2 [2(D-1)Y_4(k, p) + Y_6^A(k, p) + \cancel{Y_6^S(k, p)}] \right. \\
 &\quad \left. + (k^2 - p^2) [Y_7^S(k, p) + \cancel{Y_7^A(k, p)}] - q^2 [-2(D-1)Y_4(k, p) - \cancel{Y_6^A(k, p)} + \cancel{Y_6^S(k, p)}] \right. \\
 &\quad \left. + (k^2 - p^2) [\cancel{Y_7^S(k, p)} - \cancel{Y_7^A(k, p)}] \right\} \\
 &= \frac{q^2 [2(D-1)Y_4(k, p) + Y_6^A(k, p)] + Y_7^S(k, p)(k^2 - p^2)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \tag{B.32}
 \end{aligned}$$

■ **ANTISIMÉTRICA**

$$\begin{aligned}
 \tau_7^A(k, p) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{q^2 [2(D-1)Y_4(k, p) + Y_6^A(k, p) + Y_6^S(k, p)] + (k^2 - p^2) [Y_7^S(k, p) + Y_7^A(k, p)]}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{q^2 [2(D-1)Y_4(p, k) + Y_6^S(p, k) + Y_6^A(p, k)] + (p^2 - k^2) [Y_7^S(p, k) + Y_7^A(p, k)]}{(D-3)(D-2)^2(p^2 - k^2)\nabla(p, k)} \right\} \\
 &= \frac{1}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \left\{ q^2 [\cancel{2(D-1)Y_4(k, p)} + \cancel{Y_6^A(k, p)} + Y_6^S(k, p)] \right. \\
 &\quad \left. + (k^2 - p^2) [\cancel{Y_7^S(k, p)} + Y_7^A(k, p)] + q^2 [-\cancel{2(D-1)Y_4(k, p)} - \cancel{Y_6^A(k, p)} + Y_6^S(k, p)] \right. \\
 &\quad \left. - (k^2 - p^2) [\cancel{Y_7^S(k, p)} - \cancel{Y_7^A(k, p)}] \right\} \\
 &= \frac{q^2 Y_6^S(k, p) + (k^2 - p^2) Y_7^A(k, p)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \tag{B.33}
 \end{aligned}$$

el factor de forma  $\tau_7$  es totalmente simétrico, por lo tanto,  $\tau_7^A = 0$ , con lo que

$$\tau_7 = \frac{q^2 [2(D-1)Y_4 + Y_6^A] + Y_7^S(k^2 - p^2)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \tag{B.34}$$

→ **Factor de forma  $\tau_8(k, p)$**

Finalmente, para el último factor de forma tomamos la ecuación (4.32)

$$\tau_8 = \frac{-8(Y_8^S + Y_8^A)\nabla(k, p) - Y_2 q^2 - Y_3(k^2 - p^2)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} - \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{2}{(D-2)F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \tag{B.35}$$

separando el término por simetrías obtenemos

■ **SIMÉTRICA**

$$\begin{aligned}
\tau_8^S &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{8Y_8^S(k, p) + 8Y_8^A(k, p)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)} + \frac{8Y_8^S(p, k) + 8Y_8^A(p, k)}{(D-3)(D-2)^2(p^2 - k^2)} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{Y_2(k, p)q^2 + Y_3(k, p)(k^2 - p^2)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} + \frac{Y_2(p, k)q^2 + Y_3(p, k)(p^2 - k^2)}{(D-3)(D-2)^2(p^2 - k^2)\nabla(k, p)} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{2}{(D-2)F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] + \frac{1}{p^2 - k^2} \left[ \frac{2}{(D-2)F(p^2)} - \frac{1}{F(k^2)} \right] \right\} \\
&= \frac{-4}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)} \left\{ Y_8^S(k, p) + Y_8^A(k, p) - Y_8^S(k, p) + Y_8^A(k, p) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \left\{ Y_2(k, p)q^2 + Y_3(k, p)(k^2 - p^2) \right. \\
&\quad \left. - Y_2(k, p)q^2 - Y_3(k, p)(k^2 - p^2) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2(k^2 - p^2)} \left\{ \frac{2}{(D-2)F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} - \frac{2}{(D-2)F(p^2)} + \frac{1}{F(k^2)} \right\} \\
&= -\frac{8Y_8^A(k, p)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{D-2} \right) \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \\
&= -\frac{8Y_8^A(k, p)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)} - \frac{D}{2(D-2)} b(k^2, p^2) \tag{B.36}
\end{aligned}$$

■ **ANTISIMÉTRICA**

$$\begin{aligned}
\tau_8^A &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{8Y_8^S(k, p) + 8Y_8^A(k, p)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)} - \frac{8Y_8^S(p, k) + 8Y_8^A(p, k)}{(D-3)(D-2)^2(p^2 - k^2)} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{Y_2(k, p)q^2 + Y_3(k, p)(k^2 - p^2)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} - \frac{Y_2(p, k)q^2 + Y_3(p, k)(p^2 - k^2)}{(D-3)(D-2)^2(p^2 - k^2)\nabla(k, p)} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{2}{(D-2)F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] - \frac{1}{p^2 - k^2} \left[ \frac{2}{(D-2)F(p^2)} - \frac{1}{F(k^2)} \right] \right\} \\
&= \frac{-4}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)} \left\{ Y_8^S(k, p) + Y_8^A(k, p) + Y_8^S(k, p) - Y_8^A(k, p) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \left\{ Y_2(k, p)q^2 + Y_3(k, p)(k^2 - p^2) \right. \\
&\quad \left. + Y_2(k, p)q^2 + Y_3(k, p)(k^2 - p^2) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2(k^2 - p^2)} \left\{ \frac{2}{(D-2)F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} + \frac{2}{(D-2)F(p^2)} - \frac{1}{F(k^2)} \right\} \\
&= -\frac{8Y_8^S(k, p)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)} - \frac{Y_2(k, p)q^2 + Y_3(k, p)(k^2 - p^2)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{2}{D-2} - 1 \right) \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)} \right] \\
&= \frac{-8Y_8^S\nabla(k, p) - Y_2q^2 - Y_3(k^2 - p^2)}{(D-3)(D-2)^2(k^2 - p^2)\nabla(k, p)} + \frac{D-4}{2(D-2)} \frac{1}{k^2 - p^2} \left[ \frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)} \right] \tag{B.37}
\end{aligned}$$

pero de acuerdo a (B.4)  $\tau_8$  es completamente simétrica, por lo cual  $\tau_8^A = 0$ , quedando simplemente

$$\tau_8 = -\frac{8Y_8^A}{(D-3)(D-2)^2(k^2-p^2)} - \frac{D}{2(D-2)}b(k^2-p^2) \quad (\text{B.38})$$

Con esto se concluye el análisis de simetrías de las ecuaciones (4.25-4.32), obteniendo las expresiones referentes a los factores de forma mostrados en (4.35).

### B.3. Funciones $Y_6^S$ , $Y_7^A$ y $Y_8^S$

Es importante señalar que las expresiones mostradas en (4.37) para los factores de forma  $Y_6^S$ ,  $Y_7^A$  y  $Y_8^S$  se obtienen a partir de resolver el sistema de ecuaciones

$$-\frac{(k^2-p^2)Y_6^S + Y_7^A t^2 - Y_1}{2(D-3)(D-2)^2(k^2-p^2)\nabla(k,p)} = 0 \quad (\text{B.39})$$

$$-\frac{2Y_6^S}{(D-3)(D-2)^2(k^2-p^2)} - \frac{Y_1}{2(D-3)(D-2)^2\nabla(k,p)} = 0 \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{q^2 Y_6^S + Y_7^A (k^2 - p^2)}{(D-3)(D-2)^2(k^2-p^2)\nabla(k,p)} = 0 \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{-8Y_8^S\nabla(k,p) - Y_2q^2 - Y_3(k^2-p^2)}{(D-3)(D-2)^2(k^2-p^2)\nabla(k,p)} + \frac{D-4}{2(D-2)}\frac{1}{k^2-p^2}\left[\frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)}\right] = 0 \quad (\text{B.42})$$

que son las ecuaciones (B.20, B.23, B.33, B.37), ya que de acuerdo a la simetría de las funciones  $\tau_i(k, p)$  estas expresiones son cero como ya vimos anteriormente.

## Bibliografía

---

- [1] L. A. Fernández, *Restricciones De Norma Sobre El Vértice Fermión-Fotón*. PhD thesis, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Agosto 2018. [2](#), [3](#), [21](#), [32](#), [35](#), [36](#), [37](#), [38](#), [43](#)
- [2] A. Bashir and R. Delbourgo, “The nonperturbative propagator and vertex in massless quenched qed,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 37, p. 6587–6597, Jun 2004. [2](#), [37](#), [43](#), [64](#), [78](#)
- [3] S.-X. Qin, C. D. Roberts, and S. M. Schmidt, “Ward–green–takahashi identities and the axial-vector vertex,” *Physics Letters B*, vol. 733, p. 202–208, Jun 2014. [2](#), [38](#)
- [4] A. Bashir, A. Kizilersü, and M. R. Pennington, “Nonperturbative three-point vertex in massless quenched qed and perturbation theory constraints,” *Physical Review D*, vol. 57, p. 1242–1249, Jan 1998. [2](#), [43](#)
- [5] J. S. Ball and T.-W. Chiu, “Analytic Properties of the Vertex Function in Gauge Theories. 1.,” *Phys. Rev. D*, vol. 22, p. 2542, 1980. [2](#), [3](#), [46](#), [47](#), [48](#), [80](#)
- [6] J. Ball and T.-W. Chiu, “Analytic properties of the vertex function in gauge theories. ii,” *Physical Review D - PHYS REV D*, vol. 22, pp. 2542–2549, 11 1980. [2](#), [46](#), [47](#), [48](#), [80](#)
- [7] A. Kizilersü, M. Reenders, and M. Pennington, “One-loop qed vertex in any covariant gauge: Its complete analytic form,” *Physical Review D*, vol. 52, p. 1242–1259, Jul 1995. [2](#), [48](#)
- [8] J. C. Ward, “An identity in quantum electrodynamics,” *Phys. Rev.*, vol. 78, pp. 182–182, Apr 1950. [3](#)
- [9] Y. Takahashi, “On the generalized Ward identity,” *Nuovo Cim.*, vol. 6, p. 371, 1957. [3](#)
- [10] R. D. Klauber, *Student Friendly Quantum Field Theory, Basic Principles and Quantum Electrodynamics*. Fairfield Iowa: Sandtrove Press, 2013. [4](#), [7](#), [8](#), [13](#), [20](#), [21](#), [22](#), [25](#), [29](#)
- [11] S. R. Sánchez, *Relatividad para futuros físicos*. Ciudad de México: Publishing Open Access, 2018. [5](#)

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [12] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. New York: Cambridge University Press, 1985. 14, 28
- [13] A. Huet, “Generación de masas para fermiones en QED3,” Master’s thesis, Uninversidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Diciembre 2001. 27, 38
- [14] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. New York: John Wiley y Sons, Inc., 1987. 28, 81
- [15] A. Huet, “Análisis Numérico de las Ecuaciones de Schwinger-Dyson,” Master’s thesis, Uninversidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Julio 2003. 32
- [16] K. R. Montaña, “Soluciones Múltiples a las Ecuaciones de Schwinger-Dyson para el Propagador del Fermión en QED3,” Master’s thesis, Uninversidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Marzo 2011. 32, 34, 35, 37
- [17] V. P. Nair, *Quantum Field Theory: A Modern Perspective*. New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2005. 33
- [18] F. J. Dyson, “Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics,” *Phys. Rev.*, vol. 85, pp. 631–632, Feb 1952. 33
- [19] F. Perez, *Simetría y Supersimetría: Orden y equilibrio en las leyes que describen el universo*. Un paseo por el cosmos, RBA, España, 2015. 34
- [20] F. Strocchi, *An Introduction to Non-Perturbative Foundations of Quantum Field Theory*. International Series of Monographs on Physics, United Kingdom: Oxford University Press, 2013. 34
- [21] C. D. Roberts and A. G. Williams, “Dyson-schwinger equations and their application to hadronic physics,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 33, pp. 477 – 575, 1994. 34, 37
- [22] S.-x. Qin, L. Chang, Y.-x. Liu, C. D. Roberts, and S. M. Schmidt, “Practical corollaries of transverse ward–green–takahashi identities,” *Physics Letters B*, vol. 722, p. 384–388, May 2013. 38
- [23] V. Shtabovenko, R. Mertig, and F. Orellana, “New developments in feynccalc 9.0,” *Computer Physics Communications*, vol. 207, pp. 432 – 444, 2016. 40
- [24] R. Mertig, M. Böhm, and A. Denner, “Feyn calc - computer-algebraic calculation of feynman amplitudes,” *Computer Physics Communications*, vol. 64, no. 3, pp. 345 – 359, 1991. 40
- [25] I. Wolfram Research, *Mathematica*. Versión 11.3, Champaign, Illinois, Wolfram Research, Inc., 2018. 40

- [26] M. R. Pennington and R. Williams, “Checking the transverse ward–takahashi relation at one-loop order in four dimensions,” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 32, p. 2219–2233, Oct 2006. [42](#)
- [27] H.-X. HE and F. C. KHANNA, “Transverse ward–takahashi relation for the fermion–boson vertex to one-loop order,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 21, no. 12, pp. 2541–2551, 2006. [42](#)
- [28] A. Bashir, *Constructing vertices in QED*. PhD thesis, Durham University, Verano 1995. [43](#)
- [29] D. C. Curtis, *A non-perturbative study of fermion propagators and their interactions in gauge theories*. PhD thesis, Durham University, Diciembre 1991. [43](#)
- [30] W. D. McComb, *Renormalization Methods a guide for beginners*. New York: Oxford University Press, 2004. [44](#)
- [31] J. C. Collins, *Renormalization: An introduction to renormalization, the renormalization group, and the operator-product expansion*. New York: Cambridge University Press, 1984. [44](#), [81](#)
- [32] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2014. [44](#)
- [33] J. Schwinger, “On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron,” *Phys. Rev.*, vol. 73, pp. 416–417, Feb 1948. [48](#)
- [34] L. Albino, A. Bashir, L. X. G. Guerrero, B. E. Bennich, and E. Rojas, “Transverse takahashi identities and their implications for gauge independent dynamical chiral symmetry breaking,” *Phys. Rev. D*, vol. 100, p. 054028, Sep 2019. [80](#)
- [35] W. W. Anthony W. Thomas, *The Structure of the Nucleon*. Federal Republic of Germany.: WILEY-VCH, 2001. [81](#)
- [36] E. S. W. Greiner, S. Schramm, *QUANTUM CHROMODYNAMICS*. New York: Springer, 2002. [81](#)
- [37] V. Shtabovenko, “Feyncalc 9.” Technische Universität München, 2016. Physik-Department T30f (TUM). [82](#)
- [38] F. Jegerlehner, “Facts of life with gamma(5),” *Eur. Phys. J. C*, vol. 18, pp. 673–679, 2001. [82](#)
- [39] M. Chanowitz, M. Furman, and I. Hinchliffe, “The axial current in dimensional regularization,” *Nuclear Physics B*, vol. 159, no. 1, pp. 225 – 243, 1979. [82](#)
- [40] S. Larin, “The renormalization of the axial anomaly in dimensional regularization,” *Physics Letters B*, vol. 303, p. 113–118, Apr 1993. [82](#)

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [41] M. D. Breitenlohner P., “Dimensional renormalization and the action principle,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 52, 1997. [82](#)
- [42] G. Hooft and M. Veltman, “Regularization and Renormalization of Gauge Fields,” *Nucl. Phys. B*, vol. 44, pp. 189–213, 1972. [82](#)

Dirección General de Bibliotecas UAQ