



Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Identificación de propiedades y representaciones de la distribución normal por
estudiantes universitarios

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestro en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias

Presenta

Heriberto Díaz Peña

Dirigido por:

Mtra. Luisa Ramírez Granados

Querétaro, Qro. a Fecha



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

Identificación de propiedades y representaciones de la distribución normal por
estudiantes universitarios

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestro en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias

Presenta

Heriberto Díaz Peña

Dirigido por:

Mtra. Luisa Ramírez Granados

Mtra. Luisa Ramírez Granados
Presidenta

Dra. Lilia Patricia Aké Tec
Secretaria

Dr. Víctor Antonio Aguilar Arteaga
Vocal

Mtro. Iván González García
Suplente

Dr. Samuel Estala Arias
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Querétaro

Fecha de aprobación por el Consejo Universitario (Mes y año)

México

A Michelle

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Michelle, quien me apoyó desde el principio hasta el final de este trabajo, viviendo de primera mano todo lo que implica la realización de un proyecto como este. En este mismo sentido debo agradecer a Gina, cuyo ronroneo fue crucial para mantener la templanza y la calma en los momentos en que era necesario hacerlo.

A mis papás, Lucia e Ismael, y a mis hermanos, Yumy y Lima, agradezco que sean como son, pues crecer con ellos ha sido, y será, mi más grande experiencia de aprendizaje. No olvido dar gracias también a Martha y Beki, por todo lo que han hecho por mí desde que tengo memoria.

Debo agradecer a mis amigos de siempre: Ossiell, Manuel, Alejandro, Jorge y David, por su invaluable amistad y presencia, a pesar de haber pasado muchos años ya desde la prepa. Cabe aquí agradecer también a mi amiga Tania, que siempre sabe qué decir y cuándo escuchar.

Un agradecimiento también va a la Universidad Autónoma de Querétaro por acercarme a excelentes docentes, entre ellos, Iván, Víctor, Jesús y Arturo. Y de manera especial debo agradecer a la Dra. Lilia Aké por su inagotable paciencia y capacidad de enseñanza, ya que siempre supo dar sentido en los momentos de incertidumbre. Así también, agradezco enormemente a la MC. Luisa Ramírez Granados, por tener siempre las palabras precisas para guiar esta investigación.

Agradezco por mucho a mis compañeras, Gabriela, Sughey, Ana, Montserrat y Alba. Cursar esta maestría no hubiera sido lo mismo sin ellas.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por financiar este proyecto a través de una beca.

Índice general

Dedicatoria	3
Agradecimientos	4
Índice general	5
Índice de tablas	7
Índice de imágenes	10
Resumen	15
Abstract	16
Introducción	17
Capítulo 1. Planteamiento del problema	21
1.1 Situación de la educación estadística	22
1.2 Alfabetización estadística y razonamiento estadístico como componentes del sentido estadístico	23
1.3 Problema de investigación	30
1.3.1 Hipótesis y objetivos	32
1.3.2 Justificación	33
Capítulo 2. Antecedentes de la investigación	35
2.1 La distribución normal en los libros de texto	37
2.2 Aportes para la enseñanza de la distribución normal desde la investigación	39
2.3 Dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la distribución normal	45
Capítulo 3. Marco teórico	53
3.1 Teoría de registros de representaciones semióticas (TRRS)	54
3.1.1 Semiosis y noesis	56
3.2 Significado y comprensión de objetos matemáticos	65
3.2.1 Significado institucional de la distribución normal	71
3.2.2 TRRS y significado institucional de la distribución normal en el	87

diseño del instrumento de recogida de datos

Capítulo 4. Metodología de la investigación	93
4.1 Descripción del instrumento	95
4.1.1 Descripción de actividad 1	96
4.1.2 Descripción de actividad 2	97
4.1.3 Descripción de actividad 3	98
4.1.4 Descripción de actividad 4	100
4.1.5 Descripción de actividad 5	101
4.1.6 Descripción de actividad 6	102
4.1.7 Descripción de actividad 7	103
Capítulo 5. Análisis de resultados	107
5.1 Análisis de la actividad 1	108
5.1.1 Trayectorias cognitivas en la actividad 1	118
5.2 Análisis de la actividad 2	123
5.2.1 Trayectorias cognitivas en la actividad 2	135
5.3 Análisis de la actividad 3	141
5.3.1 Trayectorias cognitivas en la actividad 3	154
5.4 Análisis de la actividad 4	159
5.4.1 Trayectorias cognitivas en la actividad 4	178
5.5 Análisis de la actividad 5	186
5.5.1 Trayectorias cognitivas en la actividad 5	199
5.6 Análisis de la actividad 6	203
5.6.1 Trayectorias cognitivas en la actividad 6	221
5.7 Análisis del inciso a de la actividad 7	225
5.7.1 Trayectorias cognitivas en el inciso a de la actividad 7	233
5.8 Análisis del inciso b de la actividad 7	238
5.8.1 Trayectorias cognitivas en el inciso b de la actividad 7	246
5.9 Análisis del inciso c de la actividad 7	250
5.9.1 Trayectorias cognitivas en el inciso c de la actividad 7	256
5.10 Comentarios globales sobre el análisis de resultados	259

Capítulo 6. Conclusiones	277
6.1 Conclusiones desde la TRRS	280
6.2 Conclusiones desde el significado y comprensión de objetos matemáticos	281
6.3 Conclusiones respecto al planteamiento del problema	284
6.4 Reflexiones desde esta investigación	288
Bibliografía	290
Anexos	297
Anexo I. Instrumento de recogida de datos	298

Índice de Tablas

Tabla 1. Elementos del significado institucional de la distribución normal de Tauber (2001), creación propia.	86
Tabla 2. Elementos del significado institucional de la distribución normal de Tauber (2001), con énfasis en los registros de representación semiótica, creación propia.	90
Tabla 3. Distribución y estructura de las actividades que conforman el instrumento, de acuerdo a los registros de representación en que se plantean, y el actuar que debe realizar el alumno, creación propia.	105
Tabla 4. Elementos de significado potenciados en cada actividad, creación propia.	106
Tabla 5. Elementos extensivos en la actividad 1, creación propia.	109
Tabla 6. Elementos ostensivos en la actividad 1, creación propia.	111
Tabla 7. Elementos actuativos en la actividad 1, creación propia.	113
Tabla 8. Elementos intensivos en la actividad 1, creación propia.	115
Tabla 9. Elementos validativos en actividad 1, creación propia.	117
Tabla 10. Elementos extensivos en la actividad 2, creación propia.	124
Tabla 11. Elementos ostensivos en la actividad 2, creación propia.	127

Tabla 12. Elementos actuativos de la actividad 2, creación propia.	129
Tabla 13. Elementos intensivos en la actividad 2, creación propia.	132
Tabla 14. Elementos validativos en la actividad 2, creación propia.	134
Tabla 15. Elementos extensivos en la actividad 3, creación propia.	143
Tabla 16. Elementos ostensivos en la actividad 3, creación propia.	146
Tabla 17. Elementos actuativos en actividad 3, creación propia.	148
Tabla 18. Elementos intensivos en actividad 3, creación propia.	150
Tabla 19. Elementos validativos en actividad 3, creación propia.	153
Tabla 20. Elementos extensivos en actividad 4, creación propia.	161
Tabla 21. Elementos ostensivos en actividad 4, creación propia.	164
Tabla 22. Elementos actuativos en la actividad 4, creación propia.	169
Tabla 23. Elementos intensivos en la actividad 4, creación propia.	174
Tabla 24. Elementos validativos en la actividad 4, creación propia.	177
Tabla 25. Elementos extensivos en la actividad 5, creación propia.	187
Tabla 26. Elementos extensivos en actividad 5, creación propia.	189
Tabla 27. Elementos actuativos en actividad 5, creación propia.	193
Tabla 28. Elementos intensivos en la actividad 5, creación propia.	196
Tabla 29. Elementos validativos en la actividad 5, creación propia.	198
Tabla 30. Errores encontrados en los análisis, creación propia.	205
Tabla 31. Elementos extensivos en la actividad 6, creación propia.	206
Tabla 32. Elementos ostensivos en actividad 6, creación propia.	208
Tabla 33. Elementos actuativos en actividad 6, creación propia.	213
Tabla 34. Elementos intensivos en la actividad 6, creación propia.	217
Tabla 35. Elementos validativos en la actividad 6, creación propia.	220
Tabla 36. Elementos extensivos en el inciso a de la actividad 7, creación propia.	226
Tabla 37. Elementos ostensivos en el inciso a de la actividad 7, creación propia.	228
Tabla 38. Elementos actuativos en el inciso a de la actividad 7, creación propia.	230

Tabla 39. Elementos intensivos en el inciso a de la actividad 7, creación propia.	231
Tabla 40. Elementos validativos en el inciso a de la actividad 7, creación propia.	233
Tabla 41. Elementos extensivos en el inciso b de la actividad 7, creación propia.	239
Tabla 42. Elementos ostensivos en el inciso b de la actividad 7, creación propia.	240
Tabla 43. Elementos actuativos en el inciso b de la actividad 7, creación propia.	242
Tabla 44. Elementos intensivos en el inciso b de la actividad 7, creación propia.	244
Tabla 45. Elementos validativos en el inciso b de la actividad 7, creación propia.	245
Tabla 46. Elementos extensivos en el inciso c de la actividad 7, creación propia.	250
Tabla 47. Elementos ostensivos en el inciso c de la actividad 7, creación propia.	252
Tabla 48. Elementos actuativos en el inciso c de la actividad 7, creación propia.	253
Tabla 49. Elementos intensivos en el inciso c de la actividad 7, creación propia.	254
Tabla 50. Elementos validativos en el inciso c de la actividad 7, creación propia.	256
Tabla 51. Tabla general de respuestas correctas e incorrectas del instrumento, creación propia.	259
Tabla 52. Frecuencias en las actividades planteadas en registro gráfico, creación propia.	262
Tabla 53. Frecuencias en las actividades planteadas en registro alfanumérico, creación propia.	263

Tabla 54. Frecuencias en las actividades planteadas en lenguaje natural, 263
creación propia.

Tabla 55. Trayectorias cognitivas encontradas en el análisis del 285
instrumento

Índice de Figuras

Figura 1. Estructura de la representación en función de la conceptualización traducido de Duval, (1993).	62
Figura 2. Actividad 1, tomada y modificada de Arce (2009).	96
Figura 3. Actividad 2, tomada y modificada de Arce (2009).	97
Figura 4. Actividad 3, tomada y modificada de Arce (2009).	99
Figura 5. Actividad 4, tomada y modificada de Arce (2009).	100
Figura 6. Actividad 5, creación propia.	101
Figura 7. Actividad 6, creación propia.	103
Figura 8. Actividad 7, tomada y modificada de Batanero (2001).	104
Figura 9. Respuesta del estudiante 1 a la parte B de la actividad 1, tomada del instrumento de recogida de datos.	118
Figura 10. Respuesta del estudiante 8 a la parte B de la actividad 1, tomada del instrumento de recogida de datos.	119
Figura 11. Respuesta del estudiante 2 a la parte B de la actividad 1, tomada del instrumento de recogida de datos.	121
Figura 12. Respuesta del estudiante 4 a la parte B de la actividad 1, tomada del instrumento de recogida de datos.	122
Figura 13. Respuesta del estudiante 5 a la parte B de la actividad 2, tomada del instrumento de recogida de datos.	136
Figura 14. Respuesta del estudiante 2 a la parte B de la actividad 2, tomada del instrumento de recogida de datos.	137
Figura 15. Respuesta del estudiante 1 a la parte B de la actividad 2,	138

tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 16. Respuesta del estudiante 9 a la parte B de la actividad 2,	140
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 17. Respuesta del estudiante 6 a la parte B de la actividad 2,	141
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 18. Respuesta del estudiante 3 a la parte A de la actividad 3,	142
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 19. Respuesta del estudiante 4 a la parte A de la actividad 3,	144
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 20. Respuesta del estudiante 3 a la parte B de la pregunta 3,	154
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 21. Respuesta del estudiante 5 a la parte B de la actividad 3,	156
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 22. Respuesta del estudiante 7 a la parte B de la actividad 3,	157
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 23. Respuesta del estudiante 9 a la parte B de la actividad 3,	158
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 24. Respuesta del estudiante 4 a la parte B de la actividad 3,	159
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 25. Ejemplo de realización tipo 1 de A1/A5, tomada del	166
instrumento de recogida de datos.	
Figura 26. Ejemplo de realización tipo 2 de A1/A5, tomada del	167
instrumento de recogida de datos.	
Figura 27. Ejemplo de realización tipo 3 de A1/A5, tomada del	168
instrumento de recogida de datos.	
Figura 28. Respuesta del estudiante 5 a la parte A de la actividad 4,	172
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 29. Respuesta del estudiante 3 a la parte B de la actividad 4,	179
tomado del instrumento de recogida de datos.	
Figura 30. Respuesta del estudiante 8 a la parte B de la actividad 5,	180

tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 31. Respuesta del estudiante 9 a la parte B de la actividad 5,	181
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 32. Respuesta del estudiante 7 a la parte B de la actividad 4,	182
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 33. Respuesta del estudiante 5 a la parte B de la actividad 4,	183
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 34. Respuesta del estudiante 2 a la parte B de la actividad 4,	184
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 35. Respuesta del estudiante 4 a la parte B de la actividad 4,	185
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 36. Ejemplo de realización tipo 1 en la actividad 5 (procedente del	191
estudiante 5), tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 37. Ejemplo de realización tipo 2 en la actividad 5 (procedente del	192
estudiante 8), tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 38. Ejemplo de realización tipo 3 en la actividad 5 (procedente del	193
estudiante 4), tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 39. Respuesta del estudiante 1 a la parte B de la actividad 5,	200
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 40. Respuesta del estudiante 8 a la parte B de la actividad 5,	201
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 41. Respuesta del estudiante 4 a la parte B de la actividad 5,	203
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 42. Datos presentados en el planteamiento de la actividad 6,	204
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 43. Respuesta esperada para la parte A de la actividad 6, tomada	209
de geogebra.org	
Figura 44. Respuesta tipo 1 de realización de A1 en la actividad 6,	210
tomada del instrumento de recogida de datos del estudiante 8.	
Figura 45. Respuesta tipo 1 de realización de A1 en la actividad 6,	211

tomada del instrumento de recogida de datos del estudiante 1.	
Figura 46. Respuesta tipo 1 de realización de A1 en la actividad 6,	212
tomada del instrumento de recogida de datos del estudiante 5.	
Figura 47. Respuesta tipo 1 de realización de A1 en la actividad 6,	213
tomada del instrumento de recogida de datos del estudiante 4.	
Figura 48. Respuesta del estudiante 3 en la parte A de la actividad 6,	215
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 49. Respuesta del estudiante 9 a la parte A de la actividad 6,	219
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 50. Respuesta de la estudiante 8 a la parte B de la actividad 6,	221
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 51. Respuesta de la estudiante 7 a la parte B de la actividad 6,	223
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 52. Respuesta del estudiante 4 a la parte B de la actividad 6,	224
tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 53. Respuesta del estudiante 1 a la explicación del inciso a de la	234
actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 54. Respuesta del estudiante 2 a la explicación del inciso a de la	235
actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 55. Respuesta del estudiante 6 a la explicación del inciso a de la	236
actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 56. Respuesta del estudiante 7 a la explicación del inciso a de la	237
actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 57. Respuesta del estudiante 3 a la explicación del inciso b de la	246
actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 58. Respuesta del estudiante 9 a la explicación del inciso b de la	247
actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 59. Respuesta del estudiante 4 a la explicación del inciso b de la	248
actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.	
Figura 60. Respuesta del estudiante 2 a la parte explicativa del inciso c	257

de la actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.

Figura 61. Respuesta del estudiante 3 a la parte explicativa del inciso c 258
de la actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.

Figura 62. Panorama global de la comprensión de las propiedades en el 272
instrumento, creación propia.

Figura 63. Panorama global de los errores y dificultades en el 274
instrumento, creación propia.

Figura 64. Distribución normal y los conceptos desde la cual se 288
construye, tomada de geogebra.org.

Dirección General de Bibliotecas de la UJAQ

Resumen

Este trabajo sobre la distribución normal se conforma de seis capítulos. A continuación se da una perspectiva general de cada uno de ellos. En el primer capítulo se plantea la problemática respecto a la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal. El carácter determinista que parece predominar en su enseñanza, y la poca capacidad de los estudiantes de intuir esta distribución, se convierten, pues, en los motivos de esta investigación. El capítulo dos aborda los antecedentes de la investigación desde tres perspectivas: revisiones bibliográficas, aportes desde la investigación hacia la enseñanza, y dificultades y errores que ya han sido categorizados. En el capítulo tres se abordan los elementos teóricos: la teoría de registros de representaciones semióticas (TRRS), de Raymond Duval; y el significado y comprensión de objetos matemáticos y estadísticos, de Godino y Batanero. De este último elemento se desprende el significado institucional de la distribución normal, de Tauber, que fue el utilizado como enfoque de análisis en este trabajo. El capítulo cuatro es el de metodología, donde se describe el instrumento utilizado para recoger datos, así como el procedimiento que se siguió para ello. El capítulo cinco comprende el análisis de los resultados. Se analiza desde dos perspectivas: los elementos teóricos y desde las trayectorias cognitivas que surgieron en cada actividad. También se dan comentarios globales sobre los análisis. El capítulo seis aborda las conclusiones sobre este trabajo. Estas se dan desde tres perspectivas: una general, y desde cada uno de los elementos teóricos. Por último, se dan reflexiones del autor sobre este trabajo, así como disertaciones sobre el futuro del mismo.

Abstract

This work about normal distribution it is conformed by six chapters. Then, there is a general perspective about of each one. In chapter one, there is a presentation of the problematic about the teaching and learning process of normal distribution. A deterministic character seems to predominate the teaching of this concept, and the shallow capacity of students to intuit the proprieties, are the reasons to do this investigation. Chapter two it is about the background of this work, and it is present from three perspectives: bibliographic reviews, contribution from investigation to the teaching, and mistakes and difficulties already categorized. Chapter three it is approaches to theoretical elements: the register of semiotic representations theory, by Raymond Duval; and the meaning and understanding of mathematical objetos, by Godino and Batanero. From this last, it comes out the institutional meaning of normal distribution, by Tauber, a theoretical element that was used to analyze the answers of the students. The chapter four it is of methodology, and it describes the instrument utilized to collect the answer of the students, also the process that was used to apply it. Chapter five it conforms by the analysis of results. The analysis comes from two perspectives: the theoretical elements, and the cognitive trajectories that arise in each activity of the instrument. Global comments are also given at the final of the chapter. Chapter six is about the conclusions of this work. These are given from three perspectives: a global, and from each of the two theoretical elements. By last, it brings thoughts by the author about this work, and dissertations of the future of it.

Introducción

El interés por la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y estadística surge en el último cuarto del siglo XX. Este interés viene directamente de las necesidades sociales que este conocimiento conlleva por sí mismo. Diversos investigadores notaron que las capacidades de interpretar, comunicar y explicar, cualidades que son de suma importancia en esta área, estaban siendo dejadas de lado para dar prioridad a las cuestiones cuantitativas de los procesos estadísticos. A dicho enfoque pasó a llamársele *determinista*, y el caso de la distribución de probabilidad normal no fue la excepción de pertenencia a este enfoque. Así pues, resultó notorio que las capacidades intuitivas de los estudiantes respecto a esta distribución de probabilidad, estaban ligadas a las propiedades y representaciones, y es justo de aquí donde surge la pregunta de investigación de este trabajo: *¿Qué propiedades de la distribución normal interpretan los alumnos universitarios ante actividades con diferentes registros de representación?*

Antes de dar pie a los mecanismos que nos llevarían a responder dicha pregunta, se realizó una recopilación de investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal. El resultado fue el hallazgo de múltiples revisiones bibliográficas y secuencias didácticas, de las cuales también podían observarse diversos errores y dificultades que los estudiantes presentaban durante su aprendizaje. Una de las revisiones bibliográficas, la realizada por Tauber (2001), dio como resultado un significado de referencia de la distribución normal, el cual resultó idóneo para los propósitos del presente trabajo, por lo cual se retomó como elemento teórico.

Respecto a lo anterior, el marco teórico de esta investigación constó de dos elementos teóricos que se interrelacionaban: la teoría de registros de representaciones semióticas (TRRS), de Raymond Duval; y el significado y comprensión de objetos matemáticos, del cual se deriva el significado de

referencia de la distribución normal hecho por Tauber (2001). Estos elementos teóricos sirvieron para observar con cuáles propiedades y representaciones de la distribución normal estaban relacionados los estudiantes. Por un lado, la TRRS dio pie a mirar la coordinación entre los distintos registros de representación que se les presentaron a los estudiantes en el instrumento de recogida de datos, así como los tratamientos dentro de los mismos registros. Mediante el significado de referencia de la distribución normal, a través de los distintos elementos de significado que lo conforman, fue posible observar cuáles tipos de problemas identificaban los estudiantes (elementos extensivos), en qué registro de representación (elementos ostensivos), el actuar qué realizaban en cada actividad (elementos actuativos), las propiedades que entraban en juego (elementos intensivos), y la forma a la que recurrían para validar (elementos validativos).

En este punto cabe hablar sobre el instrumento de recogida de datos. Este se elaboró a manera de examen, constanding de siete actividades, una de ellas conformada por tres incisos. Se aplicó en una sola sesión en un grupo de *Estadística para el diseño*, en la Licenciatura de Diseño Industrial, y se hizo una vez que en el curso ya se hubiera visto el tema de la distribución normal. Fueron nueve los estudiantes que respondieron el instrumento. Una vez recabados los datos por el instrumento, estos pasaron a analizarse.

El análisis de resultados se hizo desde dos perspectivas. La primera fue desde los cinco elementos del significado de referencia: extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos, y esto para cada actividad. La segunda perspectiva fue desde las trayectorias cognitivas que se generaron a partir de las respuestas de los estudiantes, donde se reflejaron los distintos matices entre las respuestas, la variación entre ellas, el contraste con las otras actividades, y las sinergias entre los elementos de significado, así como entre los registros de representación. De manera global, se alcanzó a observar la manera en que los estudiantes razonaban

las distintas propiedades que se les presentaron, así como los errores y dificultades que obstaculizaron la identificación de otras propiedades.

Posteriormente se sacaron las conclusiones de lo observado durante los análisis. Estas hubo que darlas primero de forma general, y después desde cada uno de los elementos teóricos. Una vez que se tuvieron todas estas conclusiones, organizadas desde las diferentes perspectivas, fue posible dar una respuesta a nuestra pregunta de investigación, así como para contrastar el objetivo general, el cual era: *determinar las propiedades y representaciones de la distribución normal que los estudiantes universitarios identifican en las situaciones que se les plantean a través de los diferentes registros de representación.*

Finalmente, el autor pasó a reflexionar sobre su trabajo. En sus disertaciones pudo vislumbrar en el futuro la aplicación de este instrumento en otras distribuciones de probabilidad y la creación de materiales didácticos en base a este. También proporcionó una perspectiva de enseñanza de la distribución normal en base al criterio forjado a través de esta investigación.

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Capítulo 1. Planteamiento del problema

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

1.1 Situación de la Educación Estadística

El interés por la Educación Estadística surge aproximadamente en el último cuarto del siglo XX, con autores como Fischbein (1975) y Holmes (1980), y continúa desarrollándose con los trabajos de Batanero (2000, 2002), Pfannkuch y Wild (2000, 2005), entre otros. En la actualidad, resulta por demás evidente que existe toda un área específica dentro de la Didáctica de la Matemática dirigida a la Educación Estadística (Contreras, Portillo, 2019).

Aún la evolución del término, no deja de ser importante mencionar las razones iniciales por las que se focalizó la atención sobre la enseñanza de la Estadística. En Batanero (2000) se recogen, por un lado, las razones de Holmes (1980), quien alude a las necesidades sociales, profesionales, personales y culturales de una formación estadística; y por otro, la señalización de Fischbein (1975) sobre el carácter determinista que tiene la enseñanza de la Estadística, el cual, según el autor, delimita la interpretación de los sucesos, exigiendo por ello, con el fin de erradicar tal delimitación, una forma más eficiente de enseñar la probabilidad y estadística.

Batanero (2000) enfatiza estas razones al hablar del desarrollo de un país, ya que el conocimiento estadístico no es útil únicamente en las personas encargadas de recopilar los datos y generar las estadísticas, sino también de aquellos individuos que las interpretan y toman decisiones partiendo de ellas. Se suma a esto la situación cada vez más informatizada de la sociedad, y el carácter interdisciplinar de la estadística (Batanero, 2000).

De ahí que Batanero y Godino (2005) mencionen que la enseñanza y comprensión de la estadística no sea exclusiva de la comunidad encargada de la educación matemática, sino de las diversas disciplinas que puedan aportar a ella, tales como la psicología. Es por ello que, a medida que crecía el interés por la Educación Estadística, surgieron entidades cuya prioridad era profundizar en ella, como es el

caso del International Association for Statistical Education (IASE), creado en 1991 por el International Statistic Institute (ISI), y cuya labor es sintetizada por Batanero y Godino (2005).

Un ejemplo de la investigación realizada en Educación Estadística puede verse en Ortiz de Haro (2019), quien analiza los trabajos de esta área publicados por la revista *Números*, enfocada en Didáctica de las Matemáticas, en el período de 1987 a 2018. Los resultados arrojaron que, de los 46 artículos ubicados en el área de Educación Estadística, 33 se relacionaron con Estadística y 13 con Probabilidad, cuyos temas más abordados fueron propuestas de enseñanza, alfabetización estadística y experiencias de enseñanza, y minoritariamente otros como la formación de profesores de secundaria y primaria (Ortiz de Haro, 2019).

Es evidente, por tanto, que aunque se ha puesto de manifiesto un interés por la Educación Estadística, este sigue siendo menor comparada con otros tópicos. El presente trabajo es un aporte a nivel universitario sobre la distribución de probabilidad normal, del que pueden desprenderse supuestos teóricos que puedan contribuir a los niveles predecesores a este, es decir, desde la educación primaria hasta el bachillerato.

1.2 Alfabetización Estadística y Razonamiento Estadístico como componentes del Sentido Estadístico

Cardona (2011) menciona que se han generado dos constructos a partir de la investigación en Educación Estadística: *Alfabetización Estadística* y *Razonamiento Estadístico*. Posteriormente, Batanero (2013) nos habla del *Sentido Estadístico* como la unificación de estos dos constructos, siendo este último concepto el objetivo a conseguir de la Educación Estadística.

No obstante, antes de hablar a cabalidad del Sentido Estadístico, es necesario definir los constructos que lo componen. Se considera que la primera definición de

statistic literacy se encuentra en Gal (2002), quien la explica en dos componentes interrelacionados:

a) la habilidad para interpretar y evaluar críticamente información estadística, argumentar la necesidad de los datos o los fenómenos estocásticos, los cuales se encuentran en diversos contextos; y

b) la habilidad para discutir o comunicar las reacciones a dicha información estadística, así como el significado que le otorguen a esa información, sus opiniones y si esta les es útil para tomar decisiones.

Estas habilidades surgen además de la interrelación que se da entre cinco bases de conocimientos del sujeto (Gal, 2002):

1. Habilidades de alfabetización.
2. Conocimiento estadístico.
3. Conocimiento matemático.
4. Conocimiento del contexto/mundo
5. Habilidades críticas.

En Bayés (2013) se encuentran los supuestos abordados al momento de traducir *statistic literacy*, ya que, por un lado, Batanero (2002) lo tradujo como *cultura estadística*, mientras otros autores lo hicieron como *alfabetización estadística*. En esta investigación se abordará como *alfabetización estadística*, ya que, como lo mencionan Contreras y Portillo (2019), no hay un acuerdo claro aún sobre el término.

De hecho, Contreras y Portillo (2019) hablan de una adaptación y focalización del término alfabetización estadística. Esto se debe a que, desde 2002 hasta 2017, han aparecido diversas definiciones del término que “son variaciones o simples

puntos de vista de definiciones anteriores, lo que provoca cierta dificultad para llegar a un acuerdo sobre una definición, que sea aceptada de forma general” (Contreras, Portillo, 2019, p. 3). De estas definiciones habría que resaltar la de Garfield, del Mas y Chance (2003), quienes diferencian entre alfabetización y razonamiento estadístico.

No obstante la variación de definiciones existentes respecto al término alfabetización estadística, Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013) mencionan que estas coinciden al incluir “la parte de conocimientos teóricos formales relacionados con la estadística, así como la capacidad de afrontar un problema o situación en el que se pongan en juego estos conocimientos” (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013, p. 3). Es decir, se ajustan a la definición de Gal (2002) en cuanto a “asumir una actitud crítica frente a la información estadística, coinciden en la necesidad de un conocimiento del lenguaje estadístico y las ideas estadísticas fundamentales” (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013, p. 3).

Burril y Biehler (2011), basándose en diferentes perspectivas de la enseñanza de la estadística, enlistan estas ideas estadísticas fundamentales. Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013), tomando como referencia el trabajo de Burril y Biehler (2011), las explican de la siguiente forma:

1. *Datos*. Considerados el fundamento de la estadística, el razonamiento a partir de los datos empíricos es el objeto de ésta, subrayando la importancia del contexto.
2. *Variación*. La estadística busca explicar las causas de la variabilidad con el fin de generar modelos que ayuden a predecirla y controlarla.
3. *Distribución*. Esta idea implica razonar sobre cómo se conectan los datos (distribución de datos), la población de donde se extrajeron (distribución de

probabilidad) y las muestras que puedan obtener de la misma (distribución muestral).

4. *Gráficos*. Su papel en la organización, descripción y análisis de datos, son instrumentos esenciales en la transnumeración, uno de los elementos del razonamiento estadístico, del cual se hablará más adelante.

5. *Asociación y correlación*. La estadística busca que la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre no se base en estrategias intuitivas, sino en reglas fundamentadas matemáticamente. Es el caso de la dependencia entre variables, donde a cada valor X le corresponde una distribución de valores de Y, difiriendo del enfoque matemático en el que a cada valor X corresponde un solo valor de Y.

6. *Probabilidad*. El uso de modelos aleatorios en vez de modelos deterministas es la principal característica de la Estadística. A nivel escolar, la probabilidad se define de tres formas: concepción clásica, enfoque frecuencial o enfoque subjetivo (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013, p. 4).

7. *Muestreo e inferencia*. En esta idea se refleja la finalidad de la estadística, ya que, partiendo de la relación entre muestras y población, se pueden tomar decisiones sobre los datos que es necesario recoger para obtener conclusiones en las que se toma en cuenta la probabilidad.

Estas ideas estadísticas fundamentales, aludidas como necesarias para una alfabetización estadística, hacen que esta se convierta en un “proceso continuo que tiene como meta el desarrollo del pensamiento estadístico” (Del Pino, Estrella, 2012, p. 4).

Batanero y Díaz (2011) mencionan que “la enseñanza de la estadística debe tener como principal objetivo ayudar a los estudiantes a aprender los elementos básicos

del pensamiento estadístico” (Batanero, Díaz, 2011, p. 11), y entre los elementos que lo conforman están:

1. *La necesidad e importancia de los datos.* Reconocer la necesidad de las decisiones basadas en la evidencia proporcionada por los datos.
2. *La omnipresencia de la variabilidad.* Reconocer la presencia de la variabilidad en todo tipo de fenómenos, y que esta debe ser experimentada más que estudiada o solamente leída.
3. *La cuantificación y explicación de la variabilidad.* Reconocer que los conceptos provenientes de la estadística como: aleatoriedad y distribuciones de variables aleatorias, parámetros de tendencia central y de dispersión, modelos matemáticos paramétricos, o modelos de análisis exploratorio de datos, sirven para explicar y medir la variabilidad.

Sin embargo, en este punto es útil mencionar la diferenciación hecha por Herrera y Rodríguez (2011) respecto a *pensamiento estadístico* y *razonamiento estadístico*. Estas autoras señalan que al hablar de un pensamiento estadístico, este se refiere a la forma de comprender de los sujetos “de por qué y cómo se realizan las investigaciones estadísticas y las grandes ideas implícitas en ellas. Por otro lado, el razonamiento estadístico involucra la capacidad de explicar procesos estadísticos y de interpretar, de manera global, los resultados estadísticos” (Herrera, Rodríguez, 2011, p. 2).

A este respecto, Cardona (2011) dice que “el fundamento del razonamiento estadístico es producir una mejor comprensión dentro de un contexto particular” (Cardona, 2011, p. 5). Por su parte, Batanero y Díaz (2011) apuntan que “el razonamiento estadístico es una componente esencial del aprendizaje” (Batanero, Díaz, 2011, p. 12), y Wild y Pfannkuch lo describen en un modelo en el que se

suman cuatro dimensiones, y que es presentado por Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013):

a) *El ciclo de investigación*, consistente en la serie de pasos a seguir desde el planteamiento de un problema hasta su resolución o modificación;

b) *Los modos fundamentales de razonamiento estadístico*;

c) *El ciclo de interrogación*, común en la solución de problemas estadísticos, consta de comprobaciones, explicaciones, hipótesis o preguntas desde los datos analizados o los resultados; y

d) *Una serie de actitudes*, todas ellas con un dejo de espíritu crítico, como escepticismo, mentalidad abierta, perseverancia y curiosidad.

Es del trabajo de trabajo de Wild y Pfannkuch (2000), de donde Batanero y Díaz (2011) retoman los modos fundamentales del razonamiento estadístico, los cuales son:

1. *Reconocer la necesidad de los datos*. Es decir, abandonar la experiencia personal o la evidencia anecdótica como fundamento para la toma de decisiones, y tener en cuenta el hecho de que ciertas situaciones solo pueden ser comprendidas por medio del análisis de datos.

2. *Transnumeración*. Término utilizado para referirse a la comprensión que surge al cambiar la representación de los datos. Los tipos de transnumeración que se han observado son: 1) a partir de la medida que captura las cualidades o características del mundo real; 2) al pasar de los datos brutos a una representación tabular o gráfica que permita extraer sentido de los mismos, 3) al

comunicar este significado que surge de los datos, en forma que sea comprensible a otros (Batanero, Díaz, 2011, p. 12).

3. *Percepción de la variación.* Esta debe percibirse a través de los datos. El sujeto debe reconocer la incertidumbre que en ellos impera de manera natural. La estadística puede predecir e intentar explicar las causas de la variación a través del contexto.

4. *Razonamiento con modelos estadísticos.* Todo tipo de estadístico, desde un gráfico simple hasta una línea de regresión, es llamado modelo estadístico por su pretensión de reflejar la realidad. Una cualidad importante es “diferenciar el modelo de los datos y al mismo tiempo relacionar el modelo con los datos” (Batanero, Díaz, 2011, p. 13).

5. *Integración de la estadística y el contexto.* El contexto adquiere importancia al momento de integrarlo con los modelos. Las fases en las que esto ocurre son: la inicial (al plantear el modelo) y la final (al interpretar el modelo en la realidad) (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013, p. 12).

Una vez definidos los constructos de Alfabetización Estadística y Razonamiento Estadístico, así como sus componentes, cabe la posibilidad de hablar de Sentido Estadístico como la unión entre estos (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013, p. 12), y que este “debe construirse en forma progresiva desde la educación primaria, secundaria, bachillerato y hasta la universidad” (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013, p. 12).

La presente investigación sobre la Distribución de Probabilidad Normal se encuentra dentro del marco del Sentido Estadístico, ya que este tema es uno de los más importantes en estadística, tanto por su aplicación directa como por sus

propiedades, ya que ha permitido el desarrollo de la inferencia estadística (Calandra, Costa, 2018, p. 1).

1.3 Problema de investigación

Dada la antesala previa, la problemática que esta investigación estudia se dirige hacia el tema de la Distribución de Probabilidad Normal. No obstante, es útil mencionar las dificultades que Batanero *et al.* (2014) recogieron en su trabajo, partiendo de estudios anteriores, sobre dificultades generales en la enseñanza de la estadística:

*Algunos conceptos estocásticos, tales como el de probabilidad o correlación, necesitan del razonamiento proporcional, que ha demostrado ser un tópico difícil.

*Falsas intuiciones de los alumnos al empezar la enseñanza. Poco estudiadas en los conceptos estadísticos.

*Falta de interés de los alumnos hacia la estadística por considerarla demasiado abstracta desde edades tempranas.

Es interesante descubrir que estos comportamientos se ponen de manifiesto al abordar el tema de la Distribución Normal, como antecedentes en los estudiantes apenas comenzar la enseñanza y aprendizaje de este tema. Posteriormente, es inevitable que la presencia de estas dificultades sirva como plataforma para el surgimiento de nuevos obstáculos, esta vez provenientes directamente de la enseñanza y aprendizaje de la Distribución Normal, lo que demuestra que “las dificultades epistemológicas, que han debido ser superadas en el desarrollo histórico del conocimiento, se repiten con frecuencia en el aprendizaje del mismo” (Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, 2014, p. 15).

En el caso específico de la Distribución Normal, tal como lo menciona Tauber (2001), esta problemática tiene su origen en la forma en que es presentada la distribución normal a los estudiantes, ya que esta puede devenir desde un enfoque probabilístico o uno estadístico. En este sentido, concuerda con Polya (1965) al mencionar que la matemática puede presentarse al estudiante de dos formas: sistemática, o deductiva, y experimental, o intuitiva. En el caso de la distribución normal, según Tauber (2001), el enfoque probabilístico se transmuta en el enfoque sistemático, ya que en este enfoque la distribución normal se aborda junto con otras distribuciones y las relaciones entre ellas, mientras que el enfoque estadístico deriva en un enfoque intuitivo, que es el que concierne a este estudio.

La razón de que sea el enfoque intuitivo el que busque detectar este estudio, se debe a la espontaneidad de la que habla Duval (1993) al momento de realizar la conversión de registros de representación, de lo cual se hablará a profundidad en el siguiente capítulo.

Por otra parte, es importante mencionar que los conceptos estadísticos han sido originados fuera del campo de las Matemáticas, lo que le otorga a la Estadística un carácter interdisciplinario en el que “las grandes etapas de su progreso han estado marcadas por aportaciones originadas a partir de la necesidad de resolver problemas en campos diversos. En la enseñanza los conceptos se presentan aislados de las aplicaciones originales” (Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, 2014, p. 15).

Este aislamiento de la Estadística respecto a otras disciplinas, que surge durante su enseñanza y aprendizaje, es en parte uno de los factores causantes de que los estudiantes preuniversitarios y universitarios presenten dificultades en la comprensión de la Distribución de Probabilidad Normal, lo cual deriva en errores tanto de aplicación como de interpretación de los problemas que se plantean en la clase.

Esto remite a Batanero (2001), quien menciona que es necesario proporcionar nociones básicas sobre las distribuciones de probabilidad, ya que las dificultades de comprensión de las mismas influyen en los errores de aplicación de los procedimientos inferenciales. Estas cuestiones son las que llevan a plantear la siguiente pregunta, que es la que rige esta investigación:

¿Qué propiedades de la distribución normal interpretan los alumnos universitarios ante actividades con diferentes registros de representación?

1.3.1 Hipótesis y objetivos

En este trabajo de investigación se pretende alcanzar el siguiente objetivo general y objetivos específicos, así como confirmar la siguiente hipótesis:

Hipótesis:

Los alumnos interpretan determinadas propiedades de la distribución normal dependiendo el registro en que se les presenten, lo cual indica que existen registros de representación en los que encuentran más dificultades que en otros.

Objetivo general

Determinar las propiedades y representaciones de la distribución normal que los estudiantes universitarios identifican en las situaciones que se les plantean a través de los diferentes registros de representación.

Objetivos específicos

OE1: Diseñar un instrumento que estimule la intuición de los estudiantes sobre las propiedades de la Distribución Normal.

OE2: Detectar diferentes errores y dificultades a los mencionados en los antecedentes, que surjan de la enseñanza y aprendizaje de la Distribución Normal.

OE3: Comprobar algunos de los errores mencionados en los antecedentes, con la finalidad de caracterizarlos.

OE4: Encontrar los registros de representación en que los estudiantes desarrollan más ampliamente el tema de la Distribución Normal y sus propiedades, y aquellos en los que tienen dificultades.

1.3.2 Justificación.

En la actualidad, las exigencias tanto del entorno laboral como científico requieren de un amplio conocimiento estadístico. Esto se debe a que, al estar sus condiciones en constante cambio, es necesario contar con las herramientas metodológicas de la estadística para mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre (Batanero, 2002).

La Distribución de Probabilidad Normal forma parte del contenido teórico y técnico de la estadística. Esta es considerada como la distribución de probabilidad continua más importante en todo el campo por su manera de aproximarse a gran cantidad de fenómenos presentes en la naturaleza, industria e investigación (Walpole, 2012).

A este respecto, Batanero, Tauber y Sánchez (2001) añaden que “La distribución normal es también una buena aproximación de otras distribuciones, como la binomial, Poisson o T de Student, para ciertos valores de sus parámetros” (Batanero, Tauber y Sánchez, 2001, p. 3). Asimismo, Tauber (2001), basándose en el trabajo de otros autores, enlista las razones que justifican su investigación:

*Fenómenos de diferentes tipos (físicos, biológicos, psicológicos, etc.) se pueden modelar mediante la distribución normal.

*La distribución normal funciona para aquellos datos que se distribuyen de forma simétrica, además de su reproductividad, es decir, su capacidad de sumar variables y mantenerse normalmente distribuida.

En el mismo sentido, Carpio *et al.* (2009) mencionan a la distribución normal como piedra angular para la inferencia estadística, debido a su papel dentro del teorema del límite central debido a su complejidad matemática. Es debido a esto que cobra importancia la enseñanza de la distribución de probabilidad normal en los diferentes niveles de escolaridad.

En el contexto actual de la enseñanza de la distribución normal a nivel licenciatura, las nociones que se abordan en el aula son la ecuación matemática de la distribución normal, su simetría y su apuntamiento como referencia para comparar otras distribuciones (Pérez, 1986), el cálculo de medidas de tendencia central y de dispersión (García, 2005), y el cálculo de la variable aleatoria normal estándar, su significado y la búsqueda de probabilidades de área bajo la curva normal (Mendenhall, 2010).

Al tratarse la distribución normal de un tema con un amplio contenido teórico y práctico, es común que los estudiantes encuentren dificultades en su aprendizaje, algunas ya analizadas en los antecedentes (Tauber, 2001). En consecuencia, se vuelve necesario profundizar el conocimiento en las nociones que los estudiantes perciben más complejas durante su aprendizaje de la distribución normal, para con ello tener una plataforma con la cual generar elementos que ayuden a mejorar el proceso de enseñanza. De estos escenarios se justifica el interés por continuar profundizando en esta línea de investigaciones centradas en la distribución de probabilidad normal.

Capítulo 2. Antecedentes de la investigación

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Para hablar en concreto de la investigación en Didáctica de las Matemáticas respecto al tema de la Distribución de Probabilidad Normal, es necesario mencionar investigaciones cuyo tema de estudio son aquellos que pueden considerarse como previos o de requerimiento para abordar el tema de la distribución normal.

De estos trabajos se puede mencionar el de Batanero (1991), en el que, partiendo de un conjunto de datos que representa el peso de un grupo de alumnos en el que hay hombres y mujeres, describe y utiliza dos técnicas para el análisis exploratorio de datos: gráfico de tronco y gráfico de caja. Batanero (1991) argumenta sobre las posibilidades de estas técnicas en la enseñanza a nivel secundaria, al mismo tiempo que señala las cualidades que asoman a través de su utilización y que son referentes para temas posteriores, como lo son el desarrollo de la intuición para el estudio en el contraste de hipótesis, la correspondencia con ciertos estadísticos, y la existencia o no de simetría en la distribución de los datos, es decir, la posibilidad de que la distribución de los datos sea normal.

Específicamente sobre la dispersión de los datos, Castro y Ruiz (2013) realizaron una investigación sobre la amplitud que tiene el tema de dispersión y variabilidad en el currículum. Este trabajo evoluciona hacia las diferentes distribuciones que pueden tener las medidas dependiendo la naturaleza de los datos, lo que especifican también como distribución de los errores de medidas. En el marco de las diferentes distribuciones que mencionan, Castro y Ruiz (2013) hacen un planteamiento sobre los errores en la estimación de cierta variable, y culminan puntualizando que la distribución de Gauss “satisface a todos”, en el sentido de que esta disipa la incertidumbre más que las otras.

Por otra parte, Díaz y Cezón (2014) realizaron una revisión bibliográfica en libros de texto con el fin de analizar los gráficos estadísticos que en ellos se presentan. De este trabajo se pueden observar los tipos de actividades utilizados en el texto

para marcar una pauta entre la estadística descriptiva y el inicio de la probabilidad. Puede notarse también que las acciones predominantes son “comparar y justificar”, “calcular”, “leer dentro de los datos” y “leer los datos” (Díaz, Cezón, 2014), actividades que, una vez entrelazadas por la práctica y la experiencia, resultan fundamentales para abordar la distribución normal.

Los trabajos que a continuación se mencionan, siendo antecedentes de la presente investigación, se desglosan en tres tópicos. Se comienza con revisiones bibliográficas respecto a la distribución normal. Posteriormente se habla de propuestas didácticas, algunas basadas en las revisiones bibliográficas mencionadas, y la última sección se centra en las dificultades y errores encontrados durante la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal, resultando estos, en ciertos casos, de la aplicación de las propuestas didácticas de las que se habla en el punto anterior.

2.1 La distribución normal en los libros de texto

Menciona Marín (2017) la importancia de que el profesor tenga consciencia sobre la información proporcionada por los libros, con el fin de evitar errores conceptuales o presentaciones sesgadas de los significados.

El aporte del trabajo de Marín (2017) resulta considerable ya que, tal como se menciona en su investigación, existe una escasez de trabajos referentes a la revisión bibliográfica de temas estadísticos, y son aún menos las revisiones en cuanto al tema de la distribución normal.

El análisis de Marín (2017) de dos libros de texto de bachillerato pretende evidenciar las diferencias asociadas a un objeto matemático, en este caso, la distribución normal. Cabe mencionar que uno de los antecedentes de este trabajo es la investigación de Tauber (2001) sobre el *significado institucional de la distribución normal*, el cual sirve de referencia sobre dicho objeto matemático.

Marín (2017) retoma este significado, utilizándolo para analizar los libros de texto de bachillerato, y concluye que, basándose en el significado de referencia realizado por Tauber (2001), los textos de bachillerato presentan una alta idoneidad epistémica y representan al significado institucional desde el que se analizan.

Los resultados de Marín (2017) sirven además para validar el significado institucional determinado por Tauber (2001) a nivel bachillerato, puesto que este se había realizado exclusivamente en textos dirigidos a nivel universitario. Finalmente, Marín (2017) señala que el análisis bibliográfico realizado “es el primer paso para realizar investigaciones sobre la comprensión de los estudiantes o para montar experiencias específicas de enseñanza del tema” (Marín, 2017, p. 69).

En esta parte es necesario mencionar la revisión bibliográfica realizada por Tauber (2001), que analizó el significado institucional de la distribución normal en libros de texto de estadística aplicada dirigidos a estudiantes con conocimientos bases poco sólidos de matemáticas y estadística.

El objetivo de Tauber (2001) fue identificar los elementos prototípicos de significado, de acuerdo a la teoría de significado y comprensión de objetos matemáticos de Godino y Batanero (1994), es decir, los elementos extensivos, actuativos, ostensivos, intensivos y validativos presentes en los libros de texto. La intención de Tauber (2001) al encontrar este significado institucional de referencia era utilizarlo como base para construir una secuencia de enseñanza sobre la distribución normal.

Así pues, Tauber (2001) analizó los capítulos referentes al tema de la distribución de probabilidad normal y los temas posteriores a este en los que era necesaria dicha distribución. La secuencia de pasos para este análisis consistió en la lectura

del contenido, y la posterior clasificación, síntesis y organización de la información de acuerdo al marco teórico de Godino y Batanero (1994). Cabe mencionar que durante el análisis se observó la puesta en relación de los diferentes elementos de significado.

Los criterios de Tauber (2001) para la selección de los libros de texto fueron: la experiencia docente y el prestigio del autor, el número de ediciones y traducciones del libro, y por último, el tipo de enfoque de estos. Los títulos y páginas de los libros analizados pueden encontrarse en Tauber (2001).

En el capítulo 2 de esta investigación se hablará a profundidad del significado institucional de referencia de la distribución normal, ya que se trata de uno de los elementos teóricos utilizados para el diseño y análisis del instrumento de recolección de datos para este estudio.

2.2 Aportes para la enseñanza de la distribución normal desde la investigación

En este punto se citan todas las aportaciones que surgen directamente de la investigación en Didáctica de Matemáticas en cuanto a la Distribución de Probabilidad Normal se refiere. Se abordarán cronológicamente y no tanto por su naturaleza, es decir, si se trata de una propuesta o una estrategia didáctica no afectará el orden en que aparezca.

Es importante destacar que, en la mayoría de estos aportes, se ha hecho uso de alguna herramienta digital, lo cual va acorde a lo dicho por Godino (1995) al hablar sobre las posibilidades didácticas a las que se da apertura por parte de los ordenadores al explorar las ideas estocásticas. Sin embargo, es importante señalar que la sola presencia de estos no resuelve el problema de la enseñanza de la estadística, sino que es necesario proporcionar al alumno un entorno en el que él mismo pueda observar, reflexionar e interactuar sobre los fenómenos

estocásticos, siendo el profesor el encargado de institucionalizar estos conocimientos (Godino, 1995, p. 10).

Algunos de los trabajos que a continuación se mencionan tienen una doble aportación: por una parte, proporcionan recursos diferentes a los usados tradicionalmente en la enseñanza de la estadística y, por otra, identifican dificultades y errores que los alumnos experimentan y que dificultan su comprensión de la distribución normal. En este punto se hablará específicamente de los recursos, mientras que el punto 2.3 trata de estos errores y dificultades.

El primer aporte del que se hará mención es la secuencia didáctica diseñada por Tauber (2001), la cual se basa en el significado institucional de referencia de la distribución normal (Tauber, 2001). Para ello toma algunos tópicos de los elementos de dicho significado, generando con ello un significado de referencia local con el cual diseñar su secuencia didáctica. Esta se lleva a cabo una parte en aula tradicional, en la que los alumnos se sirven de lápiz y papel para desarrollar actividades que los relacionan con diversas propiedades de la distribución normal; y otra parte se lleva a cabo en aula informática, donde la mayoría de las actividades se realizan por medio del programa STATGRAPHICS, por su facilidad para brindar diversas representaciones.

Cabe mencionar que la secuencia didáctica diseñada por Tauber (2001) forma parte de un curso oficial, por lo cual se apegó a la reglamentación que este establecía de antemano. Durante el desarrollo del curso se esperaba observar diversas interacciones entre profesor y alumnos. Por último, se realizó un análisis del significado institucional local y la secuencia que con este fue diseñada, para evaluar la efectividad que había tenido el curso, lo que se denominó como significado personal de la distribución normal (Tauber, 2001).

En la secuencia didáctica diseñada por Tauber, Sánchez y Batanero (2004), la cual sigue una misma metodología que la de Tauber (2001), se menciona que uno de los puntos importantes en el diseño de esta fue “delimitar los elementos de significado que es necesario conocer previamente y a lo largo del desarrollo del tema, para tratar de lograr un aprendizaje significativo de él” (Tauber, Sánchez, Batanero, 2004, p. 20).

En una secuencia didáctica similar, por las mismas autoras, los instrumentos para evaluar el conocimiento adquirido por los estudiantes fueron: un cuestionario escrito; y tres tareas que debían resolverse por medio de ordenador (Tauber, Sánchez, Batanero, 2001). Se resalta que algunas de las actividades del cuestionario escrito fueron modificadas y puestas en el instrumento de evaluación de la presente investigación.

Del mismo modo que las secuencias didácticas anteriores, la propuesta de Hugues (2005) retoma tópicos del significado institucional establecido por Tauber (2001). Específicamente los tipos de problemas y ciertas propiedades que caracterizan a la distribución de probabilidad normal como “objeto matemático a ser enseñado y aprendido” (Hugues, 2005, p. 3).

Diferenciando de la secuencia didáctica de Tauber (2001), la propuesta de Hugues (2005) se sesga hacia el uso de hojas electrónicas de Microsoft Excel. Esta consta de tres actividades que utilizan diferentes recursos proporcionadas por dichas hojas de electrónicas. La actividad 1 parte del comportamiento de una distribución binomial y, posteriormente, el acercamiento que tiene esta hacia una distribución normal. La actividad 2 aborda a la distribución normal desde su gráfica, experimentando con diferentes valores de los parámetros, y notando como estos modifican la gráfica. La actividad 3 hace uso de tablas para presentar valores de una distribución normal, tanto generales como tipificados, y el cálculo de probabilidades (Hugues, 2005).

La propuesta de Hugues (2005) se implementó en grupo y se menciona que, aunque surgieron inconvenientes externos como la falta de equipos de cómputo, los resultados de la propuesta fueron favorables.

En un sentido similar al de analizar la articulación entre significados personales e institucionales, la secuencia de enseñanza realizada por Carpio, Gaita, Wilhelmi y Sáenz de Cabezón (2009) cuyo objetivo fue “la identificación de los factores que condicionan la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal en el nivel superior” (Carpio, Gaita, Wilhelmi, Sáenz de Cabezón, 2009, p. 3).

La secuencia de Carpio *et al.* (2009) se basa en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) sobre el conocimiento y la instrucción matemáticos, la que establece que la comprensión de las matemáticas “es considerada como una competencia: un sujeto comprende un objeto matemático cuando lo usa de manera competente en las prácticas que no suelen ser las habituales a las típicas” (Carpio, Gaita, Wilhelmi, Sáenz de Cabezón, 2009, p. 5). La utilización de los elementos de significado como fundamento para el diseño de un instrumento de evaluación, y su posterior análisis, son los que definen la secuencia de enseñanza.

El instrumento, que consta de cuatro tareas, pone en juego diversos contextos y características de la distribución normal, con los cuales se ajustan a los comportamientos esperados de los estudiantes de acuerdo al EOS (Carpio, Gaita, Wilhelmi, Sáenz de Cabezón, 2009). Los resultados pusieron en evidencia que “los procedimientos algebraicos y la estandarización fueron, en general, los mejores utilizados en la solución de los problemas por parte de los estudiantes” (Carpio, Gaita, Wilhelmi, Sáenz de Cabezón, 2009, p. 13). Los elementos del instrumento donde encontraron más dificultad los estudiantes serán analizados en el siguiente punto.

Por su parte, Arce (2009) diseñó una secuencia didáctica basada en el desarrollo de los niveles de razonamiento de la distribución normal, en la que se hace uso del software Fathom, ya que este permite modificaciones tales como: modificación de parámetros y datos, simular extracción de muestras, cambio de ejes y movimiento de escalas (Arce, 2009).

La secuencia didáctica de Arce (2009) involucraba, dentro de sus 14 sesiones, un cuestionario diagnóstico, sesiones de conocimiento del software y de investigación sobre medidas de tendencia central y variabilidad, actividades-problema para la investigación sobre distribución de muestras, y un cuestionario posterior para evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes de Maestría en Matemática Educativa, a quienes iba dirigido el curso (Arce, 2009). Cabe destacar que algunas de las actividades, aparecidas tanto en el cuestionario diagnóstico como en el posterior, fueron modificadas y puestas en el instrumento de evaluación utilizado en el presente estudio.

El objetivo de la secuencia didáctica diseñada por Arce (2009) era conocer las formas de razonamiento de los alumnos respecto a la distribución normal, enmarcado esto con los niveles de razonamiento mencionados anteriormente. Los resultados del cuestionario posterior mostraron que estos niveles de razonamiento eran muy superiores a los obtenidos en el cuestionario diagnóstico, llegando incluso a los niveles más altos (Arce, 2009). Además, el software Fathom demostró ser un instrumento importante al momento de disipar o modificar conceptualizaciones erróneas (Arce, 2009).

Una de las conclusiones de Arce (2009) a esta secuencia es la del uso de datos reales durante el aprendizaje y aprendizaje de la distribución normal, lo que concuerda con el trabajo de Batanero y Díaz (2011), ya que estos le permitirán al alumno “manipular los datos en un contexto que tenga significado para él” (Arce, 2009, p. 9). A este respecto, Calandra y Costa (2018) diseñan una secuencia

didáctica, basada en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), dirigida a alumnos de ingeniería.

La propuesta se crea en el contexto de la fabricación de piezas de automóviles en serie y, partiendo de una pregunta-situación relacionada a este contexto, los alumnos se encaminan hacia tres actividades seriadas (Calandra, Costa, 2018). La primera actividad es la relación de los alumnos con determinada variable tomada de elementos del contexto, donde se espera que los estudiantes aborden conceptos correspondientes a la distribución normal. En la actividad 2 se les propondrá a los alumnos evaluar el comportamiento de la variable y, para la tercera y última actividad, se analizará un atributo del producto (Calandra, Costa, 2018).

La finalidad de la propuesta es que los alumnos construyan una carta de control para la media y logren evaluar la variabilidad natural de un proceso, así como hacer uso de gráficos de control de un conjunto normalmente distribuido (Calandra, Costa, 2018). Los instrumentos que se pondrán en juego para esta propuesta serán las computadoras personales con acceso a internet, libros y software estadísticos como InfoStat y R (Calandra, Costa, 2018).

La propuesta de Calandra y Costa (2018) resulta ser una alternativa a las experiencias de enseñanza tradicionales de la distribución normal, y señalan que esta permitiría el estudio de “las organizaciones matemáticas relativas a la distribución normal, distribución del promedio de variables con distribución normal y al Control Estadístico de Procesos” (Calandra, Costa, 2018, p. 8).

Los trabajos mencionados en esta sección fueron aportes para la enseñanza de la distribución normal. Algunos, como el de Calandra y Costa (2018), fueron propuestas que se espera aplicar en lo sucesivo, mientras que otras fueron puestas en práctica obteniendo resultados en ocasiones favorables. Sin embargo,

el desarrollo de ciertas secuencias didácticas generó puntos interesantes para el análisis en referencia a las dificultades y errores cometidos. En la siguiente sección se profundiza al respecto.

2.3 Dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la distribución normal

La importancia de esta sección se debe a que, al caracterizar las concepciones y obstáculos, se “permite delimitar los distintos componentes implicados en la comprensión de un concepto” (Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, 2014, p. 4).

Es por ello que, al mencionar los errores y dificultades que puedan presentarse durante la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, y más aún en el tema de la Distribución Normal, se abren brechas de interés en el área de investigación de la Educación Estadística. No obstante, es importante mencionar algunos puntos señalados por Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos (2014) sobre esta cuestión:

*Los errores y dificultades no son imprevisibles o aleatorios, sino que pueden encontrarse regularidades y asociaciones propias de las tareas que se proponen.

*Los conceptos que permitirían resolver un conjunto de tareas se muestran limitados o inapropiados cuando se aplican en casos generales, demostrando el sujeto una resistencia para sustituirlos.

*Las dificultades de los estudiantes parecen deberse a una falta de conocimiento básico necesaria para la comprensión correcta de un concepto o procedimiento, por lo que conocer los obstáculos, y superarlos, parece ser la condición necesaria para lograrlo.

En los trabajos que se mencionan a continuación existen ya atisbos de caracterización de obstáculos encontrados respecto a la enseñanza y aprendizaje de la Distribución Normal.

En el caso de Tauber (2001), cuya investigación se ha venido mencionando desde la sección 1.2.1, donde se habló del significado institucional de referencia de la distribución normal encontrado tras un análisis bibliográfico, es importante señalar que su secuencia didáctica tuvo dos partes: actividades en aula, y prácticas en ordenador. Ya que a esta investigación se ajusta únicamente la parte del aula, se mencionarán únicamente las dificultades encontradas durante el desarrollo de dicha parte.

Es necesario recordar que el significado institucional de la distribución normal, con el cual se diseñó la secuencia didáctica de Tauber (2001), consta de cinco elementos: extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos, bajo los cuales también se etiquetaron las dificultades encontradas.

En el caso de los elementos extensivos, referentes a los campos de problemas donde se presenta la distribución normal, no se encontraron dificultades, ya que estos elementos son introducidos por el docente (Tauber, 2001).

Para los elementos ostensivos, concernientes a las representaciones de la distribución normal, las dificultades encontradas surgieron en los alumnos cuando estos “debían encontrar extremos de intervalos aproximados a los correspondientes a los intervalos centrales o cuando debían calcular valores críticos o áreas de cola” (Tauber, 2001, p. 172).

Las dificultades que surgieron referentes a los elementos actuativos, es decir, a los métodos para abordar y resolver los campos de problemas (Tauber, 2001), fueron:

*Un incorrecto estudio descriptivo que estuvo basado en la forma de la función de densidad, desdeñando el análisis de los otros elementos, y sin tener en cuenta los datos provenientes de la distribución (Tauber, 2001).

*Cálculos incorrectos de valores críticos (Tauber, 2001).

*Incorrectas representaciones de las gráficas de funciones de densidad o de distribución (Tauber, 2001).

*Dificultad para determinar porcentajes que correspondieran a la propiedad de los intervalos centrales (Tauber, 2001).

Para el caso de los elementos intensivos, referentes a las propiedades de la distribución normal, se encontró:

*Dificultad para interpretar los coeficientes de asimetría y curtosis (Tauber, 2001).

*Dificultad para interpretar cuartiles y percentiles, así como incomprensión sobre la información proporcionada por estos valores (Tauber, 2001).

*Dificultad para interpretar propiedades de los intervalos centrales (Tauber, 2001).

*Dificultad para interpretar las probabilidades (áreas bajo la curva), siendo necesario, para comprender la situación, “el apoyo gráfico que no se puede obtener por medio del ordenador sino con lápiz y papel” (Tauber, 2001, p. 173).

*En algunos alumnos, incomprensión sobre el contexto, por lo que no se interpreta correctamente lo buscado (Tauber, 2001).

*Dificultad para identificar y comprender la distribución normal como “un modelo que aproxima a determinados tipos de variables” (Tauber, 2001, p. 173).

Por último, las observaciones que se hicieron sobre los elementos validativos fueron:

*La predominación de la representación gráfica para validar, “utilizando aspectos obvios de dichas representaciones y también la aplicación o comprobación de propiedades. Generalmente estos elementos se presentan de manera aislada, sin llegar a una síntesis en la que se pudieran integrar los elementos aplicados en cada problema” (Tauber, 2001, p. 174).

*Afirmaciones de los alumnos que no llegan a generalizar propiedades de la distribución normal (Tauber, 2001).

*Dificultad para realizar síntesis sobre los diferentes elementos del problema, limitándose a validaciones parciales y no formalizadas (Tauber, 2001).

Bajo este mismo marco teórico, en el trabajo de Batanero, Tauber y Sánchez (2001) se señala que, debido a su complejidad, el significado y comprensión de la distribución normal (Tauber, 2001) “no pueden reducirse a su definición, sino que incluye un sistema interconectado de elementos que los estudiantes deben reconocer y ser capaces de relacionar para la resolución de problemas relativos a esta distribución” (Batanero, Tauber, Sánchez, 2001, p. 22).

Los elementos de significado que causaron más dificultades a los alumnos, al aplicar el cuestionario que sirvió de instrumento a Batanero, Tauber y Sánchez (2001), fueron:

*Dificultad al interpretar las áreas en histogramas de frecuencia, además de problemas en el cálculo de áreas dentro de un intervalo al efectuarse el cambio de los extremos de los intervalos (Batanero, Tauber, Sánchez, 2001).

*Dificultades al discriminar los tipos de variables discretas que pueden aproximarse a una distribución continua (Batanero, Tauber, Sánchez, 2001).

*Dificultades al interpretar los coeficientes de curtosis y asimetría (Batanero, Tauber, Sánchez, 2001).

*Dificultades al leer los elementos de los gráficos estadísticos (Batanero, Tauber, Sánchez, 2001).

*Dificultad al discriminar parámetros y estadísticos (Batanero, Tauber, Sánchez, 2001).

*Escasa habilidad para analizar y sintetizar, es decir, capacidad de argumentación (Batanero, Tauber, Sánchez, 2001).

Por su parte, el cuestionario aplicado por Carpio *et al.* (2009), del que se habló en el punto anterior, mostró diferencias entre el significado institucional de la distribución normal pretendido y sobre el cual se esperaban determinados comportamientos (Carpio, Gaita, Wilhelmi, Sáenz de Cabezón, 2009).

Entre los errores cuyo posible origen son los errores cometidos por el docente al formular ejemplos, está la propiedad reproductiva de la distribución normal, con conflictos entre varianza y desviación estándar, que deviene en errores al aplicar el teorema del límite central (Carpio, Gaita, Wilhelmi, Sáenz de Cabezón, 2009).

Entre las dificultades encontradas, y cuyo origen fueron las discrepancias entre los significados personales e institucionales para los cuales se tenían comportamientos esperados, se tienen:

*Dificultades para relacionar la función de densidad y su representación gráfica, lo cual puede deberse a que “la representación gráfica ha sido utilizada únicamente para la introducción de la definición de la distribución normal y no ha cumplido ningún otro papel” (Carpio, Gaita, Wilhelmi, Sáenz de Cabezón, 2009, p. 13).

*Dificultades en la definición de variables a través de la sumatoria, particularmente en el nuevo significado, relacionado con la teoría de distribución de muestras, que involucra el promedio muestral de n (Carpio, Gaita, Wilhelmi, Sáenz de Cabezón, 2009).

*El uso de la representación gráfica, delimitado únicamente a la introducción de la distribución normal, se desprende de su carácter operativo, discursivo y regulativo, lo cual “no permite generar condiciones para la construcción y comunicación de conocimientos relativos a las distribuciones de probabilidad” (Carpio, Gaita, Wilhelmi, Sáenz de Cabezón, 2009, p. 14).

Las secuencias didácticas de Hugues (2005) y Arce (2009), más que mostrar errores y dificultades de los estudiantes durante el aprendizaje de la distribución normal, pusieron en evidencia que la presencia de un software, Excel en el caso de Hugues (2005) y Fathom en el de Arce (2009), potencia el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que corrige las concepciones erróneas, además de permitir que “el estudiante fije su atención en el proceso de creación y caracterización de la distribución más que en el simple cálculo de una probabilidad donde se apliquen de manera mecánica una serie de fórmulas” (Arce, 2009, p. 9).

Por último, resulta necesario tener en mente que “la investigación didáctica trata de caracterizar estas regularidades y de construir modelos explicativos, en términos de relaciones entre las variables intervinientes” ” (Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, 2014, p. 3).

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

3.1 Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS)

Según D'Amore y Godino (2007), los objetos matemáticos son dependientes de la práctica humana. Esta apropiación indica, por tanto, que los símbolos emergentes del uso de estos objetos van directamente ligados a un pragmatismo humano que los modifica continuamente según las necesidades. De manera que “los objetos matemáticos y su significado dependen no solo de los problemas que se afrontan en la matemática, sino también de los procesos de su resolución” (D'Amore, Godino, 2007, p.7). Del mismo modo, D'Amore y Godino (2007) reconocen la existencia de tres tipos de relaciones de dependencia entre una expresión y su contenido:

*Representacional (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito)

*Instrumental (un objeto usa a otro u otros como instrumento)

*Estructural (dos o más objetos componen un sistema del cual emergen nuevos objetos)

En estas relaciones se distingue la función “entre un antecedente (expresión, significante o representante) y un consecuente (contenido, significado o representado) que establece un sujeto (persona o institución), de acuerdo con cierto criterio o código de correspondencia” (D'Amore, Godino, 2007, p. 20).

En relación a esto, Oviedo *et al.* (2012) mencionan que en la Matemática se pueden encontrar distintos sistemas referentes a la escritura de números, los cuales se tornan en un lenguaje paralelo al lenguaje natural para la expresión de relaciones y operaciones, que al mismo tiempo constituyen “una forma semiótica diferente, entendiéndose por tal a la actividad de formación de representaciones realizadas por medio de signos” (Oviedo *et al.*, 2012, p.2).

A esto se añade que “los objetos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio” (Oviedo *et al.*, 2012, p.2), por lo que su comprensión obedece también al hecho de poder diferenciar al objeto matemático de su representación.

Esta diferenciación entre el objeto y su representación es explicada por D'Amore (2015), basado en el trabajo de Duval (1993), al mencionar que el estudiante entra en contacto con un objeto matemático por medio de sus representaciones semióticas, lo identifica a estas representaciones, y las manipula de manera lógica, construyendo su significado no obstante la paradoja de Duval (D'Amore, 2015). De manera que “el objeto de conocimiento emerge del reconocimiento de que dos o más representaciones semióticas son representaciones de un mismo objeto” (D'Amore, 2015, p.6).

De acuerdo a Duval (1993), los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción en una experiencia intuitiva inmediata, sino que se debe tener la capacidad de representarlos. Asimismo, para poder efectuar tratamientos sobre ellos, interviene directamente el sistema de representación semiótica utilizado.

Según Duval (1993), las representaciones semióticas son producciones constituidas para el empleo de signos pertenecientes a un sistema de representación que tiene restricciones propias de significado y de funcionamiento, y son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento debido a que:

1. Desarrollan las representaciones mentales debido a la interiorización de las mismas representaciones semióticas.

2. Logran diferentes funciones cognitivas como la función de objetivación (expresión privada), que es independiente de la de comunicación (expresión para otros), así como la función de tratamiento.

3. Producen conocimientos al permitir desde representaciones radicalmente diferentes de un mismo objeto, en la medida en que estos puedan ser relevantes en sistemas semióticos totalmente diferentes. Esto a su vez indica que el desarrollo de las ciencias obliga a un desarrollo de sistemas semióticos cada vez más específicos e independientes del lenguaje natural.

Es importante aclarar que no deben confundirse representaciones semióticas con representaciones mentales. Las representaciones mentales son “el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener acerca de un objeto, una situación y sobre todo lo asociado al mismo” (Oviedo, 2012, p.2). Por tanto, no puede decirse que las representaciones semióticas están subordinadas a las representaciones mentales, porque el desarrollo de las segundas depende de una interiorización de las primeras, ya que las representaciones semióticas permiten realizar ciertas funciones cognitivas esenciales, así como su tratamiento (Duval, 1993).

El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela inseparable de una diversidad de registros semióticos de representación (Duval, 1993). Y es también por esto que “se hace necesaria una interacción entre las diferentes representaciones del objeto matemático que se pretende adquirir” (Sánchez, 2014, p.9).

3.1.1 Semiosis y noesis

Duval (1993) le llama *semiosis* a la aprensión y producción de una representación semiótica, y *noesis* a la aprensión conceptual de un objeto. Afirma, por tanto, que la semiosis es inseparable de la noesis ya que “en Matemáticas, la

adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas” (D’amore, 2009, p.10).

De acuerdo a Oviedo (2012), el interés primordial de la investigación en Didáctica de las Matemáticas es la noesis, es decir, la adquisición del concepto matemático por parte del alumno. No obstante, es la semiótica la que establece las condiciones que hacen posible la noesis. En otras palabras “no habrá aprendizaje sin el recurso de varios sistemas semióticos de representación” (Oviedo, 2012, p.3), lo que implicaría forzosamente la coordinación entre estos sistemas.

Duval (1993) menciona que, para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales relacionadas con la semiosis:

1. La **formación de una representación identificable** como una representación de un registro dado: enunciación de una frase (comprensible en un lenguaje natural dado), composición de un texto, diseño de una figura geométrica, elaboración de un esquema, escritura de una fórmula, entre otras.

Esta formación implica una selección de características y de datos en el contenido a representar. Asimismo, esta selección se hace en función de las unidades y de las reglas de formación que son propias al registro semiótico en el cual la representación es producida. La formación de la representación debe respetar reglas específicas de su registro (gramática para los lenguajes naturales, reglas de formación en un sistema formal, restricciones de construcción para las figuras). La función de estas reglas es la de asegurar, en primer lugar, las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación y, en segundo lugar, la posibilidad de su utilización para los tratamientos.

2. El **tratamiento**, refiriéndose este a la transformación de una representación dentro del registro mismo donde fue formada. Es decir, el tratamiento es una transformación interna en el registro. En otras palabras, “un tratamiento se logra al decodificar la información de un registro y recodificarla en el mismo registro” (Amaya de Armas, 2016, p.7).

Naturalmente hay reglas de tratamiento propias a cada registro, por ejemplo, la escritura de un número representa a dicho número y tiene un significado de operación que establece cuáles tratamientos pueden hacerse sobre él. De modo que los tratamientos no serán los mismos para la escritura de un número decimal que para la escritura de ese mismo número en forma fraccionaria (Duval, 1995). La naturaleza y el nombre de tales reglas varía considerablemente de un registro a otro: reglas de derivación, reglas de coherencia temática, reglas asociativas de contigüidad y de similitud, entre otras.

Menciona D'amore (2009) que, desde el punto de vista matemático, el tratamiento es la función decisiva en el aprendizaje de las Matemáticas. Ante esto, se vuelve necesario considerar que “el tratamiento dentro de un registro se puede fijar o controlar por lo que se pregunta en el otro registro” (Duval, 2006, p. 6). Y es en este sentido donde entra en juego otra actividad cognitiva fundamental de la semiótica:

3. La **conversión**, la cual se explica como la transformación de una representación de un registro dado en una representación dentro de otro registro, manteniendo la totalidad o una parte del contenido de la representación inicial.

De acuerdo a Duval (1993), la conversión es una transformación externa al registro de salida (el registro de la representación a convertir). La ilustración, por ejemplo, es la conversión de una representación lingüística en una representación figural. La traducción es la conversión de una representación lingüística de un

lenguaje dado, en una representación lingüística de otra lengua o de otro tipo de lenguaje. La descripción es la conversión de una representación no verbal (esquema, figura, gráfico) en una representación lingüística.

D'Amore (2009) menciona las tres razones por las que se considera a la conversión como el elemento decisivo y central de la TRRS de Raymond Duval:

1. La conversión choca contra los fenómenos de no congruencia que no son para nada conceptuales (en la medida en la que ellos se hallan ligados al sentido de la conversión). Estos fenómenos de no congruencia constituyen el obstáculo más estable que se puede observar en el aprendizaje de las matemáticas, en todos los niveles y en todos los dominios.

2. La conversión permite definir variables cognitivas independientes, lo que hace posible construir observaciones y experimentaciones relativamente precisas y finas. Ciertamente, una vez validadas por medio de una investigación bastante metódica, después pueden utilizarse como variables didácticas.

3. La conversión, en casos de no congruencia, presupone una coordinación de los dos registros de representación puestos en marcha, coordinación que no se da automáticamente y que no se construye espontáneamente basándose sólo en el hecho de que se promuevan actividades matemáticas didácticamente interesantes. Lo que se llama la *conceptualización* comienza realmente solo cuando se pone en acción, incluso bosquejándola, la coordinación de dos diferentes registros de representación.

Esto último es confirmado por Duval (1993) al hablar del carácter fundamental de la conversión en referencia a la noesis y, por tanto, siéndolo también para la comprensión al jugar un rol esencial para la conceptualización.

Retomando lo dicho anteriormente, se entiende por noesis la aprensión conceptual de un objeto matemático (Duval, 1993). D'amore (2009), basándose en los trabajos de Godino y Batanero (1994), menciona que en la construcción de un concepto participan tanto la parte institucional (el saber) como la parte personal (de cualquiera que tenga acceso a tal saber), pero esto es algo que se abordará en la sección 2.2.

De la misma forma, D'amore (2009) menciona tres situaciones que contraponen la idea de concepto con la de objeto, en referencia a las matemáticas:

1. Todo concepto matemático remite a “no-objetos”; por lo que la conceptualización no es y no se puede basar sobre significados que se apoyen en la realidad concreta; en otras palabras, en matemáticas no son posibles reenvíos ostensivos.
2. Todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de “objetos” para exhibir en su lugar; por lo que la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos.
3. En matemáticas se habla más frecuentemente de “objetos matemáticos” que no de conceptos matemáticos en cuanto que en matemáticas se estudian preferentemente objetos más que conceptos.

Estos puntos surgen directamente de las respuestas de Duval (1993) al cuestionarse sobre la necesidad de contar con una diversidad de registros de representación en el funcionamiento del pensamiento humano. Estas respuestas son:

1. la economía del tratamiento; refiriéndose a la necesidad de cambiar de registros con el fin de poder realizar tratamientos de manera más simple y efectiva.

2. la complementariedad de registros; es decir, la selección de elementos significativos o informaciones del contenido que representamos, haciéndose esta selección en función de las posibilidades y restricciones semióticas del registro seleccionado.

3. la conceptualización implica una coordinación de registros de representación; y sobre esta respuesta genera dos hipótesis:

Hipótesis 1: si el registro de representación está bien seleccionado, las representaciones de este registro son suficientes para permitir la comprensión del contenido conceptual representado.

Esta hipótesis parece suficiente si se refiere a los sujetos que tienen un buen dominio de la actividad matemática. Pero no lo sería al referirse a los sujetos en vías de aprendizaje. Esto daría pie a imaginar que la conversión de representaciones de un registro a otro puede ser una fuente importante de dificultades, las cuales se señalan como provenientes de la noesis y no de la semiosis.

Hipótesis 2: la comprensión de un contenido conceptual descansa sobre la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión.

Para el análisis de la hipótesis conviene revisar la Figura 1, que se muestra a continuación:

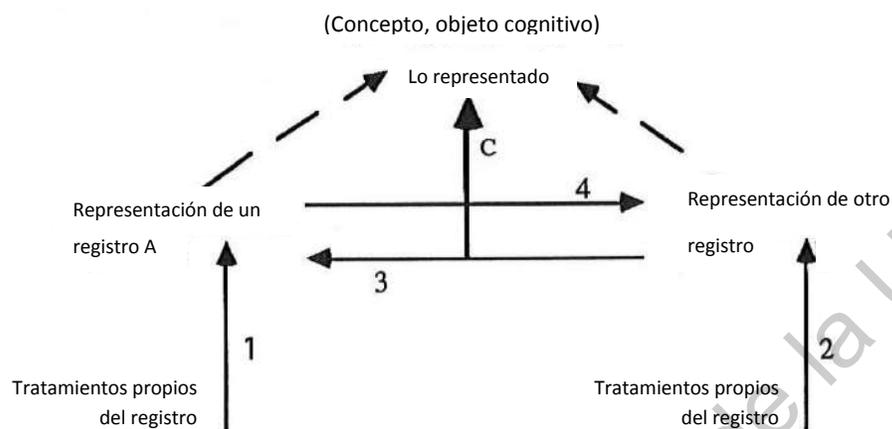


Figura 1. Estructura de la representación en función de la conceptualización traducido de Duval, (1993).

En la figura anterior se presenta la coordinación entre dos registros de representación semiótica. Las flechas 1 y 2 corresponden a transformaciones internas del registro (tratamientos), las flechas 3 y 4 corresponden a transformaciones externas (conversiones), y la flecha C corresponde a la comprensión resultado de la coordinación entre los dos registros. Las flechas intermitentes corresponden a la distinción entre la representación y lo representado. Por último, se debe notar que no hay flechas entre los tratamientos propios a cada registro, lo que da por hecho que cada registro tiene tratamientos propios.

De ahí que se pueda afirmar que “la construcción de los objetos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de estos conceptos” (D’amore, 2009, p.13).

Menciona Duval (2006) que el cambio de representación de un sistema semiótico a otro es un salto cognitivo que, a diferencia del tratamiento, no conlleva reglas básicas, y por tanto no puede reducirse a una codificación o una interpretación (Duval, 1993). Para que ocurra la conversión, se necesita que las unidades de

significación propias a cada registro estén bien definidas. Es decir, identificar en el registro inicial las variables pertinentes con las oposiciones paradigmáticas en el registro al que se quiere transformar, y que darían significado al objeto matemático (Duval, 1993).

Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras y Giacomone (2016) señalan que pueden intervenir distintas representaciones semióticas pertenecientes a diferentes registros de representación semiótica, y que estas pueden sufrir distintos tratamientos o conversiones. De ahí que, basándose en Duval (1995), se escriban los tres criterios de congruencia entre dos representaciones:

1. Correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen.
2. Mismo orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones.
3. Para convertir una unidad significativa de la representación de partida se tiene una única unidad significativa de la representación de llegada.

Estos tres criterios permiten determinar el carácter congruente o no congruente de la conversión a efectuar entre dos representaciones que son semióticamente diferentes y que representan al menos parcialmente el mismo contenido. También permiten determinar un grado de no congruencia (Duval, 1993).

Apunta Duval (1993) que al no haber congruencia no solamente la conversión se vuelve costosa al momento de realizar los tratamientos, sino que puede crear un problema en el cual el sujeto se sienta desarmado y la posibilidad de una conversión ya ni siquiera viene a la mente. Asimismo, no hay regla que pueda determinar a priori todos los casos de no congruencia entre las representaciones

de dos registros determinados, y es importante mencionar que los obstáculos relacionados al fenómeno de no congruencia no son dificultades conceptuales.

La coordinación de varios registros es entonces una condición absolutamente necesaria para el funcionamiento cognitivo efectivo en un sujeto y, en numerosas observaciones, a diferentes niveles de escolaridad (Duval, 1993), se muestra que no se efectúa espontáneamente en la mayoría de los sujetos y que no se puede esperar favorecer el establecimiento para una enseñanza que niega la fuerte relación existente entre noesis y semiosis (Duval, 1993).

De ahí que Duval (2006) apunte que la comprensión matemática requiera de una coordinación entre los diferentes sistemas de representación de un contenido matemático y, por tanto, la enseñanza de las matemáticas no debe ser tanto la elección de un sistema de representación único, sino que debe enfocarse a intentar que los estudiantes logren la capacidad de relacionar las múltiples representaciones de contenidos matemáticos.

Es decir que, si la conceptualización implica una coordinación de registros de representación, la principal apuesta del aprendizaje de las matemáticas no puede ser solamente la automatización de ciertos tratamientos, sino que también debe remitirse a la coordinación de los diferentes registros de representación que movilizan estos tratamientos (Duval, 1993).

Como ejemplos de registros de representación semiótica, Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras y Giacomone (2016) mencionan la lengua natural (oral y escrita), las representaciones numéricas (entera, fraccionaria, decimal), las representaciones figurales o gráficas (lineales, planas o espaciales), y representaciones alfanuméricas (algebraicas).

Para el caso de la distribución de probabilidad normal, de acuerdo con la revisión bibliográfica realizada por Tauber (2001) con el fin de encontrar el significado institucional de la distribución normal, y tomando en cuenta a la transnumeración como elemento del razonamiento estadístico, del cual se habló en el capítulo 1, se pueden establecer tres registros básicos para este objeto matemático: representación gráfica, representación alfanumérica y lenguaje natural.

En las secciones 3.2.1 y 3.2.2 se habla más profundamente sobre los registros de representación semiótica de la distribución normal.

3.2 Significado y comprensión de objetos matemáticos

La comprensión de un objeto matemático por parte de un sujeto está estrechamente relacionada a cómo la naturaleza del conocimiento matemático es concebido (Godino, 1996). En otras palabras, “la preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia” (Godino, Batanero, 1994, p. 3).

De acuerdo a Vergnaud (1990), un concepto no puede estar reducido a una definición, y es a través de situaciones y de la resolución de problemas como un concepto adquiere sentido. D’amore (2009), basándose en los trabajos de Vergnaud, señala que el paso de los *conceptos-como-instrumento* a los *conceptos-como-objeto* es el punto decisivo de la conceptualización. Lo dicho se complementa con la afirmación de que “en matemáticas, los distintos tipos de definiciones que se utilizan (abstracción, inducción completa, etc.) describen con precisión las notas características de sus objetos: un concepto matemático viene dado por sus atributos y por las relaciones existentes entre los mismos” (Godino, Batanero, 1994, p. 3).

Basándose en el trabajo de Wittgenstein (1953) sobre la dependencia existente entre el significado de las expresiones lingüísticas y su contexto de utilización, en referencia a los objetos abstractos, Godino y Batanero (1994) mencionan que, en las Matemáticas, son ciertas prácticas, realizadas dentro de las instituciones, las que determinan el surgimiento de los objetos matemáticos, enlazando el significado de estos objetos tanto a los problemas como a las acciones hechas para la resolución. Concluyendo entonces, y concordando con Vergnaud, que no se puede reducir el significado del objeto a su definición matemática.

En este mismo sentido, D'amore (2009) menciona que un sujeto que ha logrado aprender es también constructor de su mismo conocimiento ya que ha participado en su proceso de enseñanza, pues "se trata de una transformación: un objeto de conocimiento, entrando en contacto con un sujeto que aprende, se transforma, reconstruye, gracias a los instrumentos cognitivos que tiene" (D'amore, 2009, p. 7).

Godino (1996) enlista los siguientes supuestos cognitivos y epistemológicos como punto de partida para la teoría de significado y comprensión de objetos matemáticos:

a) Las matemáticas son una actividad humana que se involucra en la solución de situaciones problemáticas. Al encontrar las respuestas o soluciones a estos problemas externos e internos, surgen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos. De acuerdo a las teorías constructivistas Piagetianas, los actos de las personas deben considerarse la fuente genética de la conceptualización matemática.

b) Los problemas matemáticos y sus soluciones son compartidos en instituciones específicas o colectivas involucradas al estudio de tales problemas. Así, los objetos matemáticos son entidades culturales socialmente compartidas.

c) Las matemáticas son un lenguaje simbólico en el cual las situaciones-problema y sus soluciones encontradas son expresadas. El sistema de símbolos matemáticos tiene una función comunicativa y un papel instrumental.

d) Las matemáticas son un sistema lógico conceptualmente organizado. Una vez que un concepto matemático ha sido aceptado como parte de este sistema, puede considerarse también como una realidad textual y un componente de la estructura global. Puede ser manejado como un todo para crear nuevos objetos matemáticos, ampliando el rango de herramientas matemáticas y, al mismo tiempo, introduciendo nuevas restricciones en el trabajo matemático y el lenguaje.

Godino y Batanero (1994), partiendo de la noción de situación-problemática, definen tres conceptos que resaltan el carácter operativo de la matemática como actividad para la resolución de problemas: práctica, objeto (personal e institucional) y significado, de cuya interacción se genera, al mismo tiempo, el carácter personal e institucional del conocimiento matemático, así como la interdependencia entre estas dos dimensiones. A continuación se detallan estos conceptos:

*Haciendo referencia al primer supuesto planteado por Godino (1996), puede llamarsele **práctica** a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas, siendo de interés el señalar que, en la mayoría de los casos, se puede asociar un sistema de prácticas características para cada campo de problemas. De ahí que una práctica únicamente tenga sentido (sea significativa) si para el sujeto “esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la

solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino, Batanero, 1994, p. 9).

De ahí que D’amore (2009) mencione que es de la elaboración de la experiencia del sujeto de donde se produce el saber, y ésta “consiste en la interacción entre el individuo y su ambiente y en el modo en el cual el individuo interioriza el mundo externo” (D’amore, 2009, p. 8).

Justamente esta idea es aludida en el segundo supuesto de Godino (1996) al hablar de instituciones, como se explica a continuación.

*Una **institución** está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen. Específicamente se indica como *institución matemática* a aquellas relacionadas con el saber matemático, y son de sus campos de problemas de donde emergen sistemas de prácticas institucionales, que son aquellas prácticas significativas para resolver los campos de problemas que se comparten en el seno de la institución.

A este respecto, D’amore (2009) establece que la construcción del aprendizaje refleja al mismo tiempo dos dimensiones, una social y una personal, y que es en las escuelas donde se institucionaliza esta dualidad, ya que el proceso de enseñanza-aprendizaje se encuentra condicionado por situaciones específicas de la institución, por lo tanto, “los problemas del aprendizaje matemático en la escuela, aún antes de ser de orden epistemológico, pertenecen a ese ambiente sociocultural tan específico” (D’amore, 2009, p. 9).

Es de la dimensión social, mencionada anteriormente, de donde se parte para hablar de un *objeto institucional*, refiriéndose con esto al resultado de los sistemas

de prácticas socialmente asociados a cierto campo de problemas (Godino, Batanero, 1994), tomando en cuenta el hecho de que “las prácticas pueden variar en las distintas instituciones” (Godino, Batanero, 1994, p. 11).

En cuanto a la dimensión personal, es el *objeto personal* aquel que emerge del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, es decir, a aquellas prácticas realizadas por un sujeto en el intento de resolver un campo de problemas (Godino, Batanero, 1994). Es importante señalar que “la emergencia del objeto es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y el aprendizaje” (Godino, Batanero, 1994, p. 12).

*El último concepto que plantean Godino y Batanero (1994) es el de **significado**. Este se define en base a la disyunción planteada en el concepto anterior sobre objeto institucional y objeto personal, teniendo cada uno de ellos un significado específico. En el caso del *significado de objeto institucional*, este se refiere al sistema de prácticas institucionales que se asocian al campo de problemas de las que emerge (Godino, Batanero, 1994), lo cual permite al mismo tiempo estudiar la estructura de este sistema de prácticas sociales que hacen emerger los objetos matemáticos, su evolución con el tiempo y la dependencia institucional.

Mientras que el *significado de objeto personal* se define como aquel sistema de prácticas personales de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge un objeto (Godino, Batanero, 1994), haciendo hincapié en el hecho de que el conocimiento depende del conjunto y del tipo de significaciones recibidos del entorno social (D’amore, 2009).

Al tener en cuenta los significados tanto de objeto institucional como de objeto personal, ambos se concentran en la definición de esta teoría al hablar de *significado de un objeto para un sujeto desde el punto de vista de la institución*,

refiriéndose al subsistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas que son consideradas en la institución como adecuadas y características para resolver dichos problemas (Godino, Batanero, 1994).

Se puede decir entonces que un sujeto ha comprendido el significado de un concepto, cuya objetividad fue establecida por una institución y mediante las prácticas que dan solución a los campos de problemas surgidos de esta institución (Godino, Batanero, 1994), cuando este es “capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas dentro de la institución correspondiente” (Godino, Batanero, 1994, p. 14). Entendiendo por *prácticas prototípicas* a aquellos tipos de prácticas que ponen de manifiesto los invariantes operatorios de las personas en su actuación ante situaciones problemáticas (Godino, Batanero, 1994).

Es importante señalar que la utilidad de esta teoría radica en su potencialidad para integrar diferentes teorías (Godino, Batanero, 1994). Es por ello que, en el caso de esta investigación, esta teoría complementa a la TRRS como elemento teórico para analizar las propiedades y representaciones de la distribución normal.

Desde el punto de vista de la TRRS se pueden observar las actividades de conversión y tratamiento entre registros, actividades cognitivas fundamentales de la semiosis, mientras que la teoría de significado y comprensión da sustento cognitivo a la aprehensión del aparato conceptual, llamado noesis en la TRRS. Se puede considerar de este modo porque los campos de problemas referentes a la distribución normal “están formados por la configuración de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas, junto con los procesos de interpretación que se establecen entre los mismos” (Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras & Giacomone, 2016, p. 7).

3.2.1 Significado institucional de la distribución normal

Del trabajo de Tauber (2001) se puede retomar el significado institucional de la distribución normal, obtenido este de una revisión de libros de texto universitarios que son utilizados en cursos introductorios de estadística. Esta revisión bibliográfica fue específicamente de la distribución normal, así como temas posteriores en los que es útil esta distribución. Los criterios de selección de los textos revisados fueron el prestigio del autor, el número de ediciones del libro, la actualidad del enfoque, entre otros.

Los elementos de significado de la distribución normal que se evaluaron hacen referencia a significados prototípicos. Así pues, de este análisis de contenido surgen los cinco tipos de elementos que conforman el significado institucional de la distribución normal, siendo estos: intensivos, extensivos, ostensivos, actuativos y validativos. A continuación se especifica cada uno de ellos.

Elementos extensivos: problemas y contextos de los que surge la distribución normal

El campo de problemas relativo a la distribución normal se conforma de los siguientes tipos diferentes de problemas. De este elemento puede concluirse que “la distribución normal (elemento intensivo) surge al tratar de resolver (elemento actuativo) un cierto tipo de problemas (elemento extensivo) y en dicha resolución se ponen también en juego una serie de elementos intensivos que dependen del problema dado” (Tauber, 2001, p. 70). Se muestran a continuación los tipos de problemas de los que aparece el significado institucional de la distribución normal:

P1. Ajuste de un modelo a la distribución de datos reales en campos tales como la psicología, biometría, o teoría de errores.

Se trata de una generalización de los conceptos de *polígono, diagrama de frecuencia y variable estadística*, de la *muestra de una variable aleatoria*

cuantitativa y continua. Suele conducir al surgimiento de la idea de función de densidad y función de distribución.

P2. La distribución normal como modelo aproximado de las distribuciones de variables discretas.

Son aquellos problemas en los que puede observarse como, conforme aumentan las repeticiones de experimentos de una variable discreta, la distribución de sus diagramas de barras o frecuencias va acercándose cada vez más a la curva de densidad de la distribución normal.

P3. Obtención de la distribución en el muestreo de la media de una distribución normal (distribución exacta).

Estos problemas abordan el hecho de cómo entre más amplia sea el número de muestras, esta se asemeja cada vez más a una distribución normal, enmarcando así el teorema del límite central.

P4. Obtención de distribuciones en el muestro de la media y otros parámetros de poblaciones no necesariamente normales para muestras grandes (distribuciones asintóticas).

Plantean una generalización del Teorema del límite central en variables discretas, como la binomial.

P5. Estimación por intervalos de confianza.

Retomando lo visto en los dos tipos de problemas anteriores, se propone la aplicación de los conceptos aprendidos para la predicción de valores paramétricos, utilizando intervalos de confianza.

P6. Contraste de hipótesis.

Mediante la utilización de estadísticos, se ponen en juego nuevamente los conceptos utilizados en los problemas P3 y P4 con el objetivo de hacer contraste de hipótesis para la toma de decisiones.

Tauber (2001) menciona que los contextos en los que estos tipos de problemas se presentan son: físicos, industriales, antropométricos, errores de medidas, biológicos y psicológicos. Asimismo señala que “la no utilización de contextos podría conducir al alumno a pensar que la distribución normal es sólo un concepto abstracto” (Tauber, 2001, p. 72).

Elementos ostensivos: representaciones usadas en la distribución normal

Las representaciones de la distribución normal que fueron encontradas en los libros de texto fueron las siguientes:

Representaciones gráficas

Específicas de la distribución normal: curvas de densidad, representación de áreas bajo la curva, representación de intervalos centrales y representación de curvas normales superpuestas.

Relacionadas con la distribución normal: histogramas, polígonos de frecuencia y gráficos de caja.

Representaciones numéricas

Específicas de la distribución normal: tablas de probabilidades normales y tablas de valores críticos.

Relacionadas con la distribución normal: tablas de datos, tablas de frecuencias y gráficos del tronco.

Representaciones simbólicas específicas de la distribución normal

Ecuación o fórmula de la distribución normal: en este caso la ecuación es la misma en todos los libros de texto, y se trata de la ecuación 1:

Ecuación 1. Función de la distribución de probabilidad normal, tomada de Tauber (2001).

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Ecuación o fórmula de la distribución normal típica o estándar: esta ecuación puede variar, aunque el significado de z se refiera a la misma distribución normal con media cero y desviación estándar igual a uno. En la ecuación 2 se muestra su estructura.

Ecuación 2. Función de la distribución de probabilidad normal estándar, tomada de Tauber (2001).

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Expresiones que refieren a la distribución normal: se trata de la simbología para referirse a la distribución normal:

$$n(x; \mu, \sigma), N(\mu, \sigma^2), N(\mu, \sigma), f(x; \mu, \sigma^2), N(\mu_x, \sigma_x)$$

De manera general, μ representa la media de la distribución normal (simbolizada por N o n), y σ representa a la desviación estándar de la distribución. Así también, σ^2 representa a la varianza de la distribución.

Fórmula de tipificación: la fórmula para tipificar es la siguiente en todos los libros:

Ecuación 3. Función de tipificación, tomada de Tauber (2001).

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Donde z es el valor correspondiente al valor de la variable real x en la distribución tipificada, x es también el valor para el cual se desea encontrar una probabilidad, μ es la media de la distribución, y σ es la desviación estándar. Una variación de esta fórmula es utilizada cuando se conoce el valor de z y se desea conocer el valor correspondiente a la variable X .

Ecuación 4. Variante de la función de tipificación, tomada de Tauber (2001).

$$x = \mu + z\sigma$$

Expresiones que refieren a la distribución normal típica: se expresa $N(0,1)$ para la distribución normal tipificada, indicando de este modo que la media es cero y la desviación estándar es igual a uno.

Formas de expresar la probabilidad en un intervalo: se tienen las siguientes formas para expresar probabilidades de intervalo:

Probabilidad para valores menores que un valor dado: $P(z < b)$

Probabilidad para valores mayores que un valor dado: $P(z > b)$

Probabilidad de un intervalo (a, b) comprendido entre dos valores: $P(a < z < b)$, con $a < b$, en una distribución normal tipificada.

Ecuación 5. Función para la probabilidad entre dos valores (a, b), tomada de Tauber (2001).

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x; \mu, \sigma) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Probabilidad de un intervalo (x_1, x_2) comprendido entre dos valores: $P(x_1 < Z < x_2)$, con $x_1 < x_2$, en una distribución normal.

Ecuación 6. Función para la probabilidad entre dos valores (x_1, x_2) tomada de Tauber (2001).

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{z_1}^{z_2} n(z; 0,1) dz = P(z_1 < z < z_2)$$

Expresiones para realizar el cálculo de probabilidades: se presentan a continuación los símbolos utilizados para el cálculo de probabilidades:

$$P(a < z < b) = P(z < b) - P(z < a)$$

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a)$$

Representaciones simbólicas de conceptos relacionados con la distribución normal

Representaciones de un intervalo.

$X = \bar{x} \pm k. s$, representa a \bar{x} como la media y s como la desviación estándar.

$X = \mu \pm \sigma$, $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$ representa a μ como la media y σ como la desviación estándar.

$I (95\%) = \mu \pm 2 \sigma$ refiriéndose a un intervalo central específico del 95%.

$(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ refiriéndose a un intervalo central para una distribución cualquiera.

Representaciones de los parámetros específicos

Media poblacional: μ

Media muestral: \bar{x}

Media de una distribución que es una combinación lineal de otra variable: $a\mu_x + b$

Desviación estándar poblacional: σ

Desviación estándar muestral: s

Nivel de confianza: α

Coefficiente de sesgo: α_3

Coefficiente de curtosis: α_4

Representación simbólica de los axiomas de probabilidad

Se refiere a las expresiones simbólicas de las condiciones de una distribución de probabilidad, expresadas de la siguiente forma en algunos libros:

Ecuación 7. Condiciones de una distribución de probabilidad, tomada de Tauber (2001).

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$p(x_i) \geq 0 \text{ para todo } x_i \text{ o } f(x) \geq 0$$

Elementos actuativos: prácticas específicas en la resolución de los diversos tipos de problemas.

De acuerdo a Tauber (2001), las técnicas para resolución de problemas, en la enseñanza de la distribución normal, van directamente relacionadas con los elementos intensivos y ostensivos que vienen de manifiesto en los diferentes tipos de problemas (elementos extensivos). Estas técnicas son las que se muestran a continuación:

A1. Estudio descriptivo de datos para ajustar a una curva

Se basa en un estudio descriptivo que involucra la representación gráfica de los datos, comprobación de simetría y valores típicos, cálculo de media y desviación estándar.

A2. Tipificación

El trabajo con la fórmula para encontrar la distribución normal tipificada es importante para encontrar probabilidades y el conocimiento sobre cómo operar con la misma. Así también, la interpretación de los resultados conlleva a un regreso a la variable normal.

A3. Cálculo de probabilidades y valores críticos a partir de las tablas de la distribución normal tipificada.

La curva de la distribución normal permite resolver específicamente dos tipos de problemas para el cálculo de probabilidades:

1. Dados uno o dos valores de la variable, calcular la probabilidad de que la variable tome valores en intervalos determinados por ese o esos puntos (cálculo de probabilidades).

2. Dada una probabilidad, encontrar ciertos intervalos tales que la variable tome sus valores con dicha probabilidad (cálculo de valores críticos).

A4. Cálculo de los límites del intervalo central que contiene una proporción dada de observaciones.

En este caso se buscan los valores que delimitan el intervalo de una proporción determinada de curva.

A5. Comparación de puntuaciones diversas o comparación con una puntuación promedio. Se trata de comparar distribuciones de una misma variable pero con media y desviación estándar diferentes. Esto se hace con la búsqueda de un modelo de tipificación que permita solucionar este tipo de problemas.

Elementos intensivos: definición y propiedades de la distribución normal

Tauber (2001) señala que las propiedades de la distribución normal, usualmente institucionalizadas en los textos y justificadas en prácticas argumentativas, surgen de los problemas (elementos extensivos) y las prácticas (elementos actuativos), y que a su vez estos “contribuyen progresivamente a caracterizarla, así como a identificar las relaciones con otros conceptos que se introducen previamente, es decir a poner en correspondencia la idea de distribución normal con otros elementos intensivos” (Tauber, 2001, p. 78). La clasificación de las diversas definiciones de la distribución normal se muestra a continuación:

D1. Definición de la distribución normal a partir de la fórmula de la función de densidad y sus propiedades.

Se define la variable aleatoria normal dada por la fórmula, representando esta una familia de funciones que se caracteriza por los parámetros media y desviación estándar. Las variantes que se encontraron fueron tres:

a) Definición de la variable aleatoria normal, la fórmula de función de densidad y de cómo la gráfica de esta función varía según los valores de la media y desviación estándar.

b) Definición de la variable aleatoria normal, la fórmula de función de densidad y sus parámetros, y de cómo una cantidad alta de muestras también daría como resultado una distribución normal.

c) Reseña histórica de la distribución normal, la imposibilidad de integrar su función de densidad y de cómo esta cuestión resulta en la tipificación de esta distribución para encontrar probabilidades.

Tauber (2001) concluye sobre estas variantes la importancia de que el alumno comprenda el significado de la media y la desviación estándar, ya que estos son los parámetros que afectan directamente la curva, y por tanto resultan esenciales para trabajar con la distribución normal.

D2. Definición de la distribución normal a partir de su ecuación sin explicar el significado de sus parámetros.

En esta definición no se explica al alumno el significado de los parámetros ni de cómo estos afectan a la curva, anulando con esto toda idea intuitiva sobre la distribución normal.

D3. Definición de la distribución normal como función de la media y de la desviación estándar sin especificar su fórmula.

No se proporciona la fórmula de densidad, pero se explica que esta depende de los parámetros media y desviación estándar, y explica el significado de estos.

D4. Definición implícita de la distribución normal como variable que surge de la confluencia independiente de muchos factores.

Explica cómo debe ser una variable para considerarse normal, brinda algunos ejemplos, y explica los factores que intervienen y confluyen para que esta surja. Tauber (2001) considera ambigua esta definición, pues no define lo que es la distribución normal ni cómo puede estudiarse.

D5. Definición de la distribución normal enunciada en forma intuitiva como límite de un histograma.

Se introduce la idea intuitiva de la distribución normal partiendo de un histograma. Para ello, toma un ejemplo con valores reales, construye el histograma y analiza su distribución. Generaliza el ejemplo para dar la idea de la construcción de la curva de la distribución normal y concluye definiendo, a partir de esta generalización, los parámetros media y desviación estándar.

D6. Definición y síntesis de las características principales de la distribución normal dando énfasis a la tipificación.

Explica la fórmula de densidad, la transformación de esta a la fórmula tipificada y de cómo se distribuye la probabilidad en la curva de acuerdo a los valores críticos z . Por último, resume algunos de los parámetros y medidas más comunes de la distribución y su simbología.

Propiedades de la distribución normal

Las propiedades de la distribución normal encontradas en la revisión bibliográfica fueron clasificadas por Tauber (2001) de la siguiente manera:

Propiedades geométricas

Refiriéndose a aquellas que surgen del análisis de la función de densidad, y se enlistan de la siguiente forma:

**Simetría*: de acuerdo a Tauber (2001), la importancia de la simetría en la distribución normal viene de que hace más sencillo el cálculo de áreas. Es por ello que de la simetría por si misma surgen otras propiedades. Aquí se muestran junto a su generalización derivada de los libros:

**La distribución normal es simétrica respecto de su eje vertical donde tiene la media*: la generalización de esta propiedad radica en conocer que existe la misma proporción de casos por encima y por debajo de la media.

**La moda, que es el punto sobre el eje horizontal donde la curva tiene su máximo, ocurre en $x = \mu$ (media)*: el punto de máxima ordenada será el valor de la media.

**La media, mediana y moda en las distribuciones simétricas coinciden en un mismo punto, por tanto son iguales en las distribuciones normales*: la media sería el punto de balance de la distribución normal (Tauber, 2001), y en el caso de la distribución normal tipificada, el valor sería cero.

**Concavidad y convexidad*: en una distribución normal tipificada puede distinguirse, de forma más intuitiva, la manera en que están dispersos los datos, es decir, indicaría que una mayor desviación estándar significa también una mayor concentración de datos alrededor de la media.

**El eje de abscisas es una asíntota de la función de densidad*: de aquí se concluye que, aunque en teoría es posible que la variable tome valores en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, en lo práctico se puede notar que después de tres desviaciones estándar, los

valores tiendan a cero, lo que indica que son poco probables los valores demasiado alejados de la media.

Propiedades estadísticas

Refiriéndose a las propiedades que se manifiestan al tratar a la distribución normal como elemento para la predicción de valores y cálculo de probabilidades.

**Probabilidades dadas por áreas parciales bajo la curva normal:* en la mayoría de los textos haciéndolo directamente con la distribución normal tipificada, y solo en algunos pocos con los parámetros media y desviación estándar.

**Probabilidades dadas por el área total:* el significado de esta propiedad puede generalizarse en el hecho de que el área total es igual a la unidad. De acuerdo a Tauber (2001), esto conduce a decir que la función siempre será positiva. De la misma forma, la suma de todas las áreas debajo de la curva será igual a la unidad.

**Distribución de casos en relación con la desviación estándar:* esta propiedad resulta útil para el cálculo de límites de un intervalo central, así como identificar la posición de un valor determinado con respecto a la media, o ver si es representativo de la distribución (Tauber, 2001).

Propiedades algebraicas

Estas propiedades van directamente ligadas con la función de densidad considerada como función algebraica, indicando que sus transformaciones lineales también siguen una distribución normal (Tauber, 2001). De aquí que pueda afirmarse que, partiendo de la tipificación de las variables, sea posible “calcular probabilidades basadas en las tablas de la distribución normal típica $N(0, 1)$. Además asegura que, incluso en muestras pequeñas la media de la muestra tendrá distribución normal si la variable de partida es normal” (Tauber, 2001, p. 86).

Elementos validativos

Tauber (2001) clasifica los tipos de demostración que se ponen de manifiesto en los libros de texto, y en los cuales existe una correspondencia entre elementos intensivos, actuativos y ostensivos.

Validación a través de representación gráfica: se trata de evidenciar visualmente la verdad o falsedad de una determinada propiedad, y se considera “que esta es la manera más intuitiva de proporcionar una justificación” (Tauber, 2001, p. 86).

Validación por medio de comprobación de casos: es la utilización de un problema específico para validar una determinada propiedad (Tauber, 2001).

Demostraciones informales: con la finalidad de demostrar más intuitivamente una propiedad, se utilizan representaciones gráficas además de comprobación de casos particulares (Tauber, 2001).

Demostraciones deductivas: consiste en la enunciación de propiedades a través de demostraciones matemáticas que involucren axiomas, fórmulas u otras propiedades, dándole un carácter lógico-deductivo (tauber, 2001).

Análisis: cuando para llegar a generalizaciones o síntesis, se estudian particularidades o características iniciales de la situación (Tauber, 2001).

Generalización: partiendo de una demostración formal o informal, se hacen inferencias que involucran a los casos similares del que se haya partido (Tauber, 2001).

Síntesis: esta validación consiste en concluir de manera que “se incluyan todas las propiedades o conclusiones extraídas del análisis de un concepto” (Tauber, 2001, p. 87).

En la Tabla 1 se muestran una recopilación de los componentes de los elementos de significado institucional de la distribución normal:

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Tabla 1. Elementos del significado institucional de la distribución normal de Tauber (2001), creación propia.

<p>Elementos extensivos: problemas y contextos en los que surge la distribución normal</p>	<p>P1. Ajuste de un modelo a la distribución de datos reales en campos tales como la psicología, biometría o teoría de errores. P2. La distribución normal como modelo aproximado de las distribuciones de variables discretas. P3. Obtención de la distribución en el muestreo de la media de una distribución normal P4. Obtención de distribuciones en el muestreo de la media y otros parámetros de poblaciones no necesariamente normales para muestras grandes P5. Estimación por intervalos de confianza P6. Contraste de hipótesis</p>
<p>Elementos ostensivos: representaciones usadas</p>	<p>Representaciones gráficas Representaciones numéricas Representaciones simbólicas específicas de la distribución normal Representaciones simbólicas de conceptos relacionados con la distribución normal</p>
<p>Elementos actuativos: prácticas específicas en la resolución de los diversos tipos de problemas</p>	<p>A1. Estudio descriptivo de datos para ajustar a una curva. A2. Tipificación A3. Cálculos de probabilidades y valores críticos a partir de las tablas de la distribución normal tipificada A4. Cálculo de límites del intervalo central que contiene una proporción dada de observaciones A5. Comparación de puntuaciones diversas o comparación con una puntuación promedio</p>
<p>Elementos intensivos: definición y propiedades de la distribución normal</p>	<p>D1. Definición de la distribución normal a partir de la fórmula de la función de densidad y sus propiedades D2. Definición de la distribución normal a partir de su ecuación sin explicar el significado de sus parámetros D3. Definición de la distribución normal como función de la</p>

	<p>media y de la desviación estándar sin especificar su fórmula</p> <p>D4. Definición implícita de la distribución normal como variable que surge de la confluencia independiente de muchos factores</p> <p>D5. Definición de la distribución normal enunciada en forma intuitiva como límite de un histograma</p> <p>D6. Definición y síntesis de las características principales de la distribución normal dando énfasis a la tipificación.</p> <p>Propiedades geométricas.</p> <p>Propiedades estadísticas</p> <p>Propiedades algebraicas</p>
Elementos validativos	<p>Validación a través de la representación gráfica</p> <p>Validación por medio de comprobación de casos</p> <p>Demostraciones informales</p> <p>Demostraciones deductivas</p> <p>Análisis</p> <p>Generalización</p> <p>Síntesis</p>

3.2.2 TRRS y significado institucional de la distribución normal en el diseño del instrumento de recogida de datos

En el diseño del instrumento para la recolección de datos que servirán para dar respuesta a la pregunta de esta investigación, se utilizaron los siguientes componentes del significado institucional de la distribución normal:

Elementos extensivos

Debido a que esta investigación interesa específicamente la manera en como los estudiantes intuyen la distribución normal, más allá de su utilización como fundamento para temas más complejos como el teorema del límite central, las actividades que servirán como instrumento de recolección de datos se posicionan en los tipos de problemas P1 y P2.

Por tanto, los registros de representación semiótica que se ponen de manifiesto en las actividades son el registro gráfico (RG), el registro alfanumérico (RAN) y el registro de lenguaje natural (RLN), de los cuáles se habla a continuación.

Elementos ostensivos

Estos elementos se relacionan directamente con la TRRS, ya que estos tratan de las representaciones usadas en la distribución normal. En el caso del RG, este se conforma de elementos pertenecientes a la sección de representaciones gráficas, siendo estas: *específicas de la distribución normal, y relacionadas con la distribución normal.*

Para el RAN, con el fin de hacer más práctico el análisis, este se conforma por: *representaciones numéricas, representaciones simbólicas específicas de la distribución normal y representaciones simbólicas de conceptos relacionados con la distribución normal.*

En cuanto al RLN, que es utilizado generalmente en las demostraciones, este involucra toda aquella escritura que tenga como fin acceder a la comprensión de la distribución normal, pudiendo ser *análisis, generalización, síntesis* o cualquiera de las validaciones citadas en los elementos validativos.

Elementos actuativos

Las actividades en el instrumento de recolección de datos para esta investigación tienen una perspectiva desde las técnicas A1, ya que se centran en la capacidad descriptiva del estudiante respecto a la distribución normal, tanto de su gráfica como de sus parámetros (Tauber, 2001).

Elementos intensivos

El grupo al que se aplicará el instrumento de recogida de datos para esta investigación ha tomado como referencia una definición de la distribución normal

basándose en el libro *Estadística Elemental (11va. Edición)*, de Johnson y Kuby (2012). La definición de la distribución normal que se aborda en este texto es una que encaja en el tipo de definiciones D6, pues da énfasis en la tipificación de la distribución normal y su utilidad para calcular probabilidades.

Las propiedades de la distribución normal que surgen al responder las actividades del instrumento, y que servirán para responder la pregunta de investigación, pertenecen a las *propiedades geométricas*, ya que

“De estas definiciones se deduce que lo esencial para trabajar con la distribución de probabilidad de una variable aleatoria normal, es conocer la media y la desviación típica. Esto requiere que los alumnos comprendan el significado de la media y desviación típica, por qué los valores de μ y σ son los parámetros de la distribución y qué implica que la curva cambie de forma al variar estos parámetros” (Tauber, 2001, p. 79).

Elementos validativos

La naturaleza de las actividades en el instrumento obliga a dejar abierta esta categoría, pues la manera de validar sus respuestas dependerá del significado personal que el estudiante haya construido de la distribución normal. Ante esto, resulta útil clasificar en su respectivo registro las diferentes formas de validación revisadas anteriormente. A continuación se muestra la forma de validar y el registro de representación semiótica al que pertenece. En la Tabla 2 se muestran los elementos utilizados para el diseño del instrumento:

*Validación a través de la representación gráfica (Registro Gráfico)

*Validación por medio de comprobación de casos (Registro Alfanumérico)

*Demostraciones informales (Registro Gráfico, Registro Alfanumérico)

**Demostraciones deductivas* (Registro Alfanumérico, Registro Lenguaje Natural)

**Análisis* (Registro Lenguaje Natural)

**Generalización* (Registro Alfanumérico, Registro Lenguaje Natural)

**Síntesis* (Registro Lenguaje Natural)

Tabla 2. Elementos del significado institucional de la distribución normal de Tauber (2001), con énfasis en los registros de representación semiótica, creación propia.

Elementos extensivos: problemas y contextos en los que surge la distribución normal	P1. Ajuste de un modelo a la distribución de datos reales en campos tales como la psicología, biometría o teoría de errores.
Elementos ostensivos: representaciones usadas	Representaciones gráficas (RG) Representaciones numéricas (RAN) Representaciones simbólicas específicas de la distribución normal (RAN) Representaciones simbólicas de conceptos relacionados con la distribución normal (RAN)
Elementos actuativos: prácticas específicas en la resolución de los diversos tipos de problemas	A1. Estudio descriptivo de datos para ajustar a una curva. A5. Comparación de distribuciones con parámetros diversos.
Elementos	D6. Definición y síntesis de las características principales de la

intensivos: definición y propiedades de la distribución normal	distribución normal dando énfasis a la tipificación. Propiedades geométricas. Propiedades estadísticas. Propiedades algebraicas
Elementos validativos	Validación a través de la representación gráfica (RG) Validación por medio de comprobación de casos (RAN) Demostraciones informales (RG, RAN) Demostraciones deductivas (RAN, RLN) Análisis (RLN) Generalización (RAN, RLN) Síntesis (RLN)

Los elementos del significado institucional de referencia mostrados en la tabla anterior serán los que se analizarán en las respuestas de los estudiantes en el instrumento de recogida de datos.

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Capítulo 4. Metodología de investigación

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

El presente trabajo aborda una investigación de tipo cualitativo descriptivo. El método de investigación cualitativa utilizado es el estudio de casos, ya que interesa la descripción profunda de un caso que será el prototipo ilustrativo de una situación (León, Montero, 2002). De esta manera, esta investigación se caracteriza por “el examen detallado, comprensivo, sistemático y en profundidad del caso objeto de estudio” (Sandín, 2003, p. 174).

La muestra fue elegida intencionalmente a través de un muestreo no probabilístico, específicamente el muestreo por conveniencia, ya que la selección de la muestra se adecuó a los fines de la investigación y de la experiencia de quienes recaban los datos (León & Montero, 2002).

Los estudiantes que conformaron la muestra fueron nueve, seis mujeres y tres hombres, pertenecientes a la Licenciatura en Diseño Industrial, con sede en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, con edades entre 22 y 27 años, que cursaban la materia de Estadística para el diseño. Dicha materia aparece en el mapa curricular de dicha licenciatura en el VIII semestre.

El curso de Estadística para el diseño tuvo una duración de 18 semanas, con dos sesiones de dos horas por semana, es decir, cuatro horas a la semana, con un total de 72 horas por todo el curso. El grupo se conformaba por 12 alumnos.

Uno de los temas finales del curso es el objeto matemático que concierne a esta investigación: la distribución de probabilidad normal. De manera que, para no afectar el desempeño del docente, hubo un acuerdo para aplicar el instrumento una vez que se hubiera visto en clase el tema de la distribución normal.

El docente tampoco observó el instrumento antes o durante las sesiones dedicadas a la distribución normal. Esto con el fin de no sesgar el rumbo de las

sesiones. Finalmente, una vez que se terminó de impartir el tema de distribución normal, se acudió al aula de clases para la aplicación del instrumento.

Los alumnos no fueron previstos sobre la aplicación del instrumento, por lo que acudieron mentalmente preparados para una clase común. El docente les explicó sobre el instrumento y este fue tomado como tipo ejercicio de clase, aunque sin la presión que este tipo de situaciones genera, debido a la ausencia de una calificación. Del mismo modo, tanto los estudiantes como el profesor aceptaron participar y colaborar en la investigación (Anexos 2 y 3). Se les pidió a los estudiantes que contestaran a consciencia y evitaran dejar preguntas sin respuesta. Debían hacerlo de forma individual, sin la ayuda del docente, quien solo respondería a las dudas sobre redacción de las preguntas.

El instrumento diseñado para recabar información se aplicó en una sola sesión y se pretendía que los doce estudiantes pertenecientes al grupo contestaran el instrumento. No obstante, el día de la aplicación hubo tres ausencias, por lo que solo se tuvieron nueve instrumentos contestados. En la siguiente sección se detalla a profundidad el instrumento de recogida de datos.

4.1 Descripción del instrumento

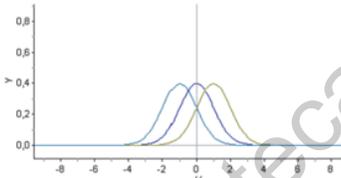
El instrumento empleado para recoger la información (ver anexo 1) que sustentó esta investigación consta de siete actividades planteadas en diferentes registros de representación semiótica, en las que se ponen de manifiesto diversas propiedades de la distribución normal. Todo esto acorde al marco teórico descrito en el capítulo 2 de este trabajo.

De manera general, las siete actividades constan de dos partes: una en la que deben efectuar determinado tratamiento (A), y otra en la que deben explicar sus razones de haber realizado este tratamiento (B). La estructura específica de las actividades a continuación.

4.1.1 Descripción de actividad 1

En la Figura 2 se muestra la actividad 1, que fue extraída y modificada de Arce (2009), y está planteada en el *registro de representación gráfica*, en el tipo de gráficas *específicas de la distribución normal*, ya que se trata de tres *curvas superpuestas*.

Actividad 1. En la siguiente representación, se muestra la gráfica de tres distribuciones normales con media μ y desviación estándar σ .



A. Marque con una X la relación se cumple:

- Las tres distribuciones tienen la misma media μ y lo que varía es su desviación estándar σ
- En las tres distribuciones varían la media μ y la desviación estándar σ
- En las tres distribuciones varían la media μ y se mantiene constante su desviación estándar σ
- No se puede decir nada de las distribuciones

B. Explique su respuesta

Figura 2. *Actividad 1, tomada y modificada de Arce (2009).*

Para los incisos se utilizan también representaciones del *registro alfanumérico* (*representaciones simbólicas de conceptos relacionados con la distribución normal - representación de los parámetros específicos*). En la parte A, la coordinación que se espera para esta actividad es entre el registro gráfico y el registro alfanumérico. La respuesta correcta en esta actividad es el tercer inciso: **en las tres distribuciones varían la media μ y se mantiene constante su desviación estándar σ .**

En la parte B, es decir, la explicación validación, se esperaría una coordinación entre el registro alfanumérico y el registro escogido por el alumno. La propiedad

que debe reflejarse en la explicación es la de *concauidad y convexidad*, perteneciente a las *propiedades geométricas* de la distribución normal. Una explicación esperada sería: de manera visual puede verse que el eje de simetría varía en cada una de las tres curvas con respecto a la otra. No obstante, la curtosis es la misma para todas. De esta forma puede concluirse que las tres distribuciones poseen la misma variación entre sus datos, pero las tres medias son diferentes.

4.1.2 Descripción de actividad 2

En la Figura 3 se muestra la actividad 2, que extraída y modificada de Arce (2009), y está planteada en el *registro de representación gráfica*, en el tipo de gráficas *específicas de la distribución normal*, ya que se trata de tres *curvas superpuestas*.

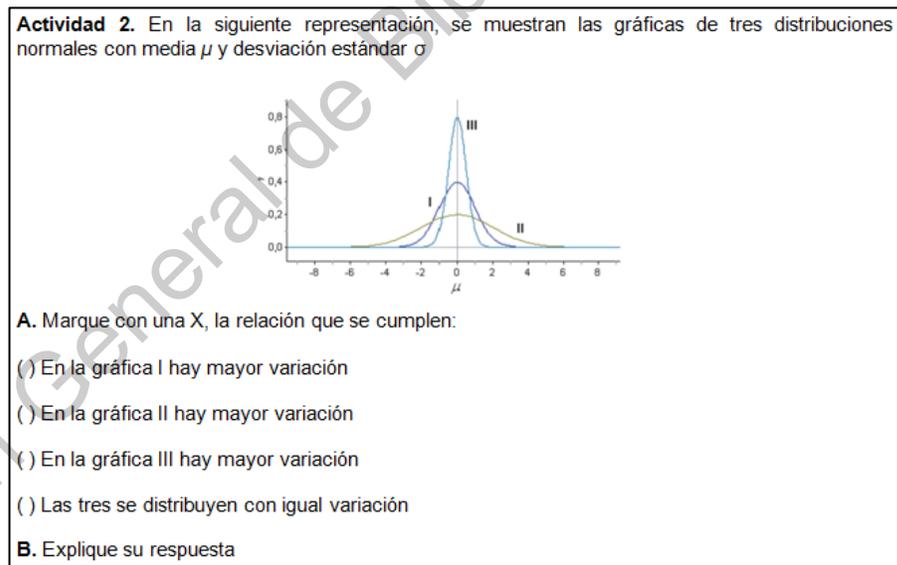


Figura 3. Actividad 2, tomada y modificada de Arce (2009).

En los incisos se utilizan representaciones del *registro alfanumérico* (*representaciones simbólicas de conceptos relacionados con la distribución normal* - *representación de los parámetros específicos*). En la parte A, la coordinación que

se espera es entre el registro gráfico y el registro alfanumérico. La respuesta correcta en esta actividad es el segundo inciso: **en la gráfica II hay mayor variación.**

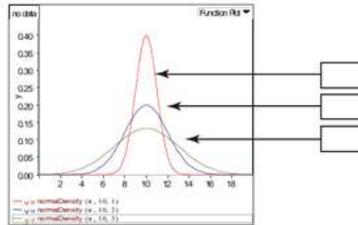
Para la parte B, se esperaría una coordinación entre el registro alfanumérico y el registro escogido por el alumno en esta parte. La propiedad que debe reflejarse en la explicación es la de *concavidad y convexidad*, perteneciente a las *propiedades geométricas* de la distribución normal. Una explicación esperada sería: el eje de simetría coincide en las tres curvas superpuestas, lo que indica que su media tiene el mismo valor. Gracias a esto podemos observar más fácilmente cómo varía la curtosis en las tres curvas. Por propiedad, o incluso de manera intuitiva, se puede considerar que entre mayor curtosis, es mayor la variación existente entre los datos, ya que no existe un valor entre ellos que se repita con mucha mayor frecuencia que los demás, de ahí que la forma acampanada no sea tan notoria. De este modo se establece la relación: menor curtosis-mayor variación, y es en la gráfica II donde se hace más evidente esta situación.

4.1.3 Descripción de actividad 3

En la Figura 4 se muestra la actividad 3, extraída y modificada de Arce (2009), la cual está planteada en el *registro de representación gráfica*, en el tipo de gráficas *específicas de la distribución normal*, ya que se trata de tres *curvas superpuestas*.

Actividad 3. En las siguientes gráficas aparecen tres distribuciones poblacionales cuya media es $\mu = 10$ y sus desviaciones estándar son $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ y $\sigma = 3$.

A. Coloca sobre cada una de ellas la desviación estándar que le corresponde.



B. Explique las razones de tu asignación.

Figura 4. Actividad 3, tomada y modificada de Arce (2009).

En este caso, se utilizan de manera más directa las representaciones del *registro alfanumérico* (*representaciones simbólicas de conceptos relacionados con la distribución normal - representación de los parámetros específicos*). En el caso de la media μ , esta queda preestablecida con valor de 10, haciendo coincidir los ejes de simetría de las tres curvas en ese punto del eje x. En cambio, la desviación estándar σ interviene directamente en la respuesta. Se proporcionan al estudiante tres valores de σ : 1, 2 y 3, y se pide que los relacionen con las tres curvas superpuestas que aparecen.

En la parte A, la coordinación que se espera es entre el registro gráfico y el registro alfanumérico. Siendo la respuesta correcta el **colocar el menor valor de σ en la curva más puntiaguda, y el mayor valor de σ en la curva más achatada.**

En la parte B, se esperara una coordinación entre el registro alfanumérico y el registro escogido por el alumno en esta parte. La propiedad que debe reflejarse en la explicación es la de *concavidad y convexidad*, perteneciente a las *propiedades geométricas* de la distribución normal. Una explicación esperada sería: las diferencias entre las curtosis de las curvas son notorias, gracias a que todas

tienen el mismo valor de $\mu=10$, es decir, las tres curvas tienen el mismo eje de simetría. Al tener diferentes curtosis, se asume que la variación entre las curvas también es diferente. De este modo se puede identificar que la curva más puntiaguda es aquella cuya concentración de datos cerca de la media es mayor, es decir, tiene menos variación y, por tanto, un valor de σ menor que las demás curvas. Tomando en cuenta los valores de σ que la actividad proporciona, se concluye que a la curva más puntiaguda le corresponde el valor de $\sigma=1$, y así sucesivamente hasta tener que, a la curva menos puntiaguda, la que cuenta con mayor variación entre sus datos, le corresponde el valor de $\sigma=3$.

4.1.4 Descripción de actividad 4

En la Figura 5 se muestra la actividad 4, la cual está planteada en el registro de representación alfanumérica, en el tipo de representaciones numéricas relacionadas con la distribución normal, ya que se trata de tablas de datos. Además utiliza representaciones simbólicas de conceptos relacionados con la distribución normal, ya que hace uso de representaciones de los parámetros específicos μ y σ .

Actividad 4. Considere que los siguientes bloques, A y B, contemplan una serie de mediciones de un mismo objeto, y que estos datos se comportan de acuerdo a la distribución normal:

Bloque A			Bloque B		
10	20	30	10	10	10
40	50	60	60	60	60

$\bar{x} = 35$
 $\sigma = 18.71$

$\bar{x} = 35$
 $\sigma = 27.39$

A. Bosqueje la gráfica de cada uno de los bloques
 B. Explique qué diferencia existe entre ellas

Figura 5. Actividad 4, tomada y modificada de Arce (2009).

En la parte A, la coordinación esperada es entre el registro alfanumérico y el registro gráfico. Una respuesta correcta sería: **graficar una curva de densidad para el bloque A, cuyo eje de simetría coincida con el valor de 35 en el eje x, con curtosis medianamente acentuada. Graficar una curva de densidad para**

el bloque B, cuyo eje de simetría coincide con el valor de 35 en el eje x, con una curtosis no tan acentuada como la gráfica del bloque A, denotando así que existe más variación en el bloque B.

En la parte B, la coordinación esperada es entre el registro gráfico y el registro escogido por el alumno en esta parte. Las propiedades que deben reflejarse son las de: *concauidad y convexidad y simetría respecto a la media*, ambas pertenecientes a las *propiedades geométricas* de la distribución normal. Una explicación esperada sería: la diferencia que existe entre las gráficas bosquejadas es que una de ellas, la del bloque A, debe ser más puntiaguda que la del bloque B. Esto es así porque, a pesar de que ambos bloques tienen una media de valor 35, coincidiendo sus ejes de simetría, su valor de σ es diferente. Mientras el bloque A tiene $\sigma=18.71$, el bloque B tiene $\sigma=27.39$, indicando que su gráfica debe tener una curtosis menos acentuada.

4.1.5 Descripción de actividad 5

En la Figura 6 se muestra la actividad 5, la cual es creación propia, y está planteada en el *registro de representación alfanumérica*, en el tipo de *representaciones numéricas relacionadas con la distribución normal*, ya que se trata de *tablas de datos*. Además utiliza *representaciones simbólicas de conceptos relacionados con la distribución normal*, ya que hace uso de *representaciones de los parámetros específicos μ y σ* .

Actividad 5. Considere que el siguiente conjunto de datos fue extraído de una población que se comporta de acuerdo a la distribución normal:									
10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5
$\mu = 10.5$					$\sigma = 0$				
A. Bosqueje la gráfica de este conjunto de datos									
B. Responda: ¿cómo afecta el valor de σ a la gráfica?									

Figura 6. Actividad 5, creación propia.

En la parte A, la coordinación esperada es entre el registro alfanumérico y el registro gráfico, siendo la respuesta correcta: **no dibujar gráfica, ya que no existe.**

Para la parte B, la coordinación esperada es entre el registro gráfico y el registro escogido por el alumno. Las propiedades que deben reflejarse en la explicación son las de: *concauidad y convexidad y simetría respecto a la media*, pertenecientes a las *propiedades geométricas* de la distribución normal, y las *propiedades dadas por el área total*, pertenecientes a las *propiedades estadísticas*. Así también, debe existir una relación entre la función de densidad de la distribución y su gráfica. Una explicación esperada sería: a pesar de que la actividad menciona que los datos pertenecen a una población que se comporta de acuerdo a la distribución normal, los parámetros de $\mu=10.5$ y $\sigma=0$ resultan incluso contradictorios. Ya que el valor de σ es cero, no solo no es posible visualizar curtosis para la gráfica, sino que esta no puede existir. La razón de esto es que la curva normal se define por su función de densidad, y un valor de $\sigma=0$ crearía una indeterminación en esta. Es posible sospechar que la población de la que se extrajeron estos datos no se comporta de acuerdo a una distribución normal, a pesar de que la actividad así lo establezca, aunque sería necesario realizar otras pruebas estadísticas para confirmar esta afirmación.

4.1.6 Descripción de actividad 6

En la Figura 7 se muestra la actividad 6, la cual es creación propia, y está planteada en el registro en el *registro de representación alfanumérica*, en el tipo de *representaciones numéricas relacionadas con la distribución normal*, ya que se trata de dos *tablas de datos*. Además utiliza *representaciones simbólicas de conceptos relacionados con la distribución normal*, ya que hace uso de *representaciones de los parámetros específicos μ y σ* .

Actividad 6. Considere que el siguiente conjunto de datos fue extraído de una población que se comporta de acuerdo a la distribución normal:

2	98	94	96	6	5	99	1	97	2
---	----	----	----	---	---	----	---	----	---

$\mu = 50$ $\sigma = 46.83$

A. Bosqueje la gráfica de este conjunto de datos
 B. Responda: ¿cómo afecta a la gráfica la dispersión de los datos?

Figura 7. Actividad 6, creación propia.

En la parte A, la coordinación esperada es entre el registro alfanumérico y el registro gráfico. Una respuesta correcta es: **graficar el eje x y una línea asintótica a este. Adicionalmente puede señalarse el punto 50 en el eje x, indicando la media de la distribución de estos datos.**

En la parte B, la coordinación esperada es entre el registro gráfico y el registro escogido por el alumno. Las propiedades que deben reflejarse en la explicación son las de: *concavidad y convexidad, simetría respecto a la media y eje de abscisas como asíntota de la función de densidad*, pertenecientes a las *propiedades geométricas* de la distribución normal; así también, las *propiedades dadas por el área total*, pertenecientes a las *propiedades estadísticas*. Una explicación esperada sería: el valor de $\sigma=46.83$ indica que la curtosis en esta gráfica es imperceptible. De ahí que la gráfica no tenga una forma acampanada, sino que sea una línea casi recta, muy cercana al eje x, y asíntota de este. La razón de esto es fácilmente observable en los valores de los datos: mientras que el menor es 1, el mayor es 99, de donde se asume que, aunque el valor que represente este conjunto sea de $\mu=50$, los valores de los datos están demasiado alejados como para brindar a la gráfica la forma acampanada. Una vez más, puede sospecharse que la población de donde se extrajo esta muestra de datos no se comporta de acuerdo a la distribución normal.

4.1.7 Descripción de actividad 7

En la Figura 8 se muestra la actividad 7, la cual fue tomada y modificada de Batanero (2001), y está planteada en el *registro de lenguaje natural*, ya que se

trata de *generalizaciones, análisis y síntesis* que deben ser valorados por el estudiante como verdaderos o falsos.

<p>Actividad 7. Responda Verdadero o Falso en los siguientes incisos y explique su elección:</p> <p>a) En una distribución normal, el 50% de los datos caen por encima de la media. V () F () Explique su respuesta.</p> <p>b) En la curva normal, la media es igual a la moda. V () F () Explique su respuesta</p> <p>c) La curva normal representa una distribución que se distribuye en forma simétrica con respecto a la media. V () F () Explique su respuesta.</p>

Figura 8. Actividad 7, tomada y modificada de Batanero (2001).

La actividad consta de tres incisos, que se describen a continuación:

a) En una distribución normal, el 50% de los datos caen por encima de la media.

Esto es verdadero. La explicación debe hacer referencia a las *propiedades estadísticas* de la distribución normal, específicamente a las *probabilidades dadas por el área total*, de donde se infiere que esta es igual a la unidad.

b) En la curva normal, la media es igual a la moda.

Esto es verdadero. La explicación debe hacer referencia a las *propiedades geométricas* de la distribución normal, específicamente a las propiedades de la *simetría*, de donde se tiene que la media es igual a la moda, siendo este el punto donde la curva tiene su máximo.

c) La curva normal representa una distribución que se distribuye en forma simétrica con respecto a la media.

Esto es verdadero. La explicación debe hacer referencia a las *propiedades geométricas* de la distribución normal, específicamente a las propiedades de la *simetría*, de donde se evoca la *simetría respecto al eje vertical*.

En Tabla 3 se muestra un concentrado del contenido de las actividades del instrumento de recogida de datos. En ella se especifican los registros en que se plantean las actividades, en relación con el actuar que exige dicha actividad. Para el caso de los incisos de la actividad 7, se trata a cada uno de estos como una actividad independiente, nombradas 7a, 7b y 7c, y así serán consideradas también para los análisis.

Tabla 3. Distribución y estructura de las actividades que conforman el instrumento, de acuerdo a los registros de representación en que se plantean, y el actuar que debe realizar el alumno, creación propia.

Registro en que se plantea la actividad	Seleccionar inciso y explicar	Graficar y responder pregunta abierta	Determinar veracidad de sentencia y explicar	Total
Gráfico	Actividades 1, 2 y 3			3
Alfanumérico		Actividades 4, 5 y 6		3
Lenguaje Natural			Actividades 7a, 7b y 7c	3
Total	3	3	3	9

En la Tabla 4 se muestra la distribución de los elementos de significado respecto a las actividades. También, en la sección de los elementos ostensivos, se da un enfoque desde la TRRS, al hablar sobre la actividad cognitiva esperada por los estudiantes. En el caso de la actividad 1, por ejemplo, se espera que exista, primero, una conversión del registro gráfico (RG) al registro alfanumérico (RAL), y en la parte B, se espera una conversión del RAL al lenguaje natural (LN).

En la sección de elementos validativos se indica que esta es a criterio de los estudiantes. Por la naturaleza del planteamiento, los elementos dentro de esta categoría pueden esperarse de la siguiente manera:

Actividades de la 1 a la 6: análisis, síntesis o generalización.

Actividades 7a, 7b y 7c: análisis, síntesis, generalización o demostración informal.

Tal como puede verse, una vez más los incisos de la actividad 7 se consideran de manera independiente. En la Tabla 4 se observa la síntesis de los elementos potenciados en cada actividad y se utiliza el símbolo punto y coma para diferenciar la parte A de la B.

Tabla 4. Elementos de significado potenciados en cada actividad, creación propia.

Elemento de significado	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad 5	Actividad 6	Actividad 7 (a)	Actividad 7 (b)	Actividad 7 (c)
Extensivo	P1	P1	P1	P1	P1	P1	P1	P1	P1
Ostensivo	RG al RAL; RAL al LN	RG al RAL; RAL al LN	RG al RAL; RAL al LN	RAL al RG; RG al LN	RAL al RG; RG al LN	RAL al RG; RG al LN	LN; LN a otros registros	LN; LN a otros registros	LN; LN a otros registros
Actuativo	A5	A5	A5	A1 y A5	A1	A1	A1	A1	A1
Intensivo	E11 y E12	E11 y E12	E11 y E12	E11 y E12	E11 y E12	E11, E12 y E13	E11 y E14	E11 y E15	E11
Validativo	A criterio	A criterio	A criterio	A criterio	A criterio	A criterio	A criterio	A criterio	A criterio

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados encontrados en el instrumento de recogida de datos contestado por los estudiantes. Se hace de manera exhaustiva, como así lo refiere la metodología del estudio de casos (ver capítulo 4), y se presenta por actividad. En cada actividad se analiza desde cada uno de los cinco elementos de significado: extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos, para ello, cada elemento cuenta con tablas de contingencia que muestran las características de las respuestas en cuestión, así como la frecuencia, representada en la columna *F*.

Asimismo, en cada actividad se presenta, posterior al análisis descriptivo de los elementos de significado, otra perspectiva de análisis, hecha a través de las trayectorias cognitivas que surgieron de los diferentes tipos de respuesta. En estas trayectorias cognitivas se muestran ejemplos prototípicos de respuesta, así como sus respectivas características. Así pues, en ambas perspectivas, desde los elementos y desde las trayectorias, se hace énfasis en los registros de representación semiótica abordados, así como las conversiones o tratamientos que se llevaron a cabo.

Al final del análisis descriptivo de las seis actividades y de los tres incisos de la actividad siete, se presentan los comentarios finales al respecto, donde se canalizan detalles importantes para una comprensión global de los análisis.

5.1 Análisis de la actividad 1

Elementos extensivos

En esta actividad se presentaba un problema tipo P1: ajuste de un modelo a la distribución de datos reales. En la parte A se presentaban cuatro incisos, siendo el tercero de ellos el que tenía la sentencia correcta. Los estudiantes debían marcar el inciso correcto. De ocurrir así, los estudiantes manifestaban un conocimiento de las propiedades geométricas, es decir, de la media μ como eje de

simetría de la curva (EI1: elemento intensivo 1); y de la concavidad y convexidad (EI2: elemento intensivo 2), identificando la manera en que la desviación estándar σ influye en la curtosis de la curva, esto es: un valor de desviación estándar bajo genera una curtosis alta (curva puntiaguda); y un valor de desviación estándar alto genera una curtosis baja (curva aplanada).

En la parte B, los estudiantes debían explicar su respuesta a la parte A. En esta explicación los estudiantes tenían libertad para responder utilizando los registros de representación a su criterio. En una respuesta correcta, el estudiante dejaría entrever que identifica las propiedades geométricas puestas en juego en esta actividad, en la que exclusivamente se involucran las propiedades geométricas EI1 y EI2. En la Tabla 5 se muestran estos elementos para la actividad 1.

Tabla 5. Elementos extensivos en la actividad 1, creación propia.

Identifica P1 en la parte A	Inciso marcado	F	Identifica P1 en la parte B	Comprensión de P1	F
Correcto	(3er inciso) <i>En las tres distribuciones varían la media μ y se mantiene constante su desviación estándar σ.</i>	8	Correcto	Total (mediante REL1 y REL2)	4
Incorrecto	(2do inciso) <i>En las tres distribuciones varían la media μ y la desviación estándar σ.</i>	1	Incorrecto	Alto	2
				Medio	2
				Bajo	1
Total		9			9

De la muestra de nueve estudiantes, en la parte A, ocho de ellos identificaron el tipo de problema y respondieron adecuadamente (todos excepto el estudiante 4).

Asimismo, todas las respuestas correctas fueron exactamente iguales, en el sentido de que todos marcaron el mismo inciso: *en las tres distribuciones varían la media μ y se mantiene constante su desviación estándar σ* . Esto indicaba un conocimiento, por parte de los estudiantes, de las propiedades geométricas explicadas en el párrafo anterior a este. La única respuesta incorrecta (estudiante 4) marcaba el inciso: *en las tres distribuciones varían la media μ y la desviación estándar σ* , y deja en claro que el estudiante no identifica las relaciones de las propiedades geométricas con los parámetros μ y σ .

De los nueve estudiantes, en la parte B, cuatro respondieron correctamente (estudiantes 1, 3, 5 y 7). Estas respuestas eran similares en sustancia, ya que todas hacían referencia a dos relaciones en las que se unían las propiedades geométricas y los parámetros. La relación 1 (REL1), referente a que la media μ proporciona el valor en el eje x en que debe situarse el eje de simetría, y la relación 2 (REL2), referente a que la altura y ancho de la curva son inversamente proporcionales al valor de la desviación estándar σ . Estas relaciones, aunque mecanizadas, les funcionaron a los estudiantes para realizar comparaciones entre distribuciones, a la vez que las escribieron de manera textual para validar en esta parte.

Fueron cinco estudiantes los que respondieron incorrectamente a esta parte, y hubo matices en sus respuestas, ya que algunos mostraron un mayor conocimiento del problema que otros. Para ello se establecieron tres niveles de comprensión del tipo de problema P1:

Alto: el estudiante identifica la REL1 pero no la REL2, y por ello no hace mención de las características geométricas que esta atribuye a las curvas.

Medio: el estudiante tiene una idea de cómo resolver el problema, pero no logra expresarla de manera adecuada, habiendo confusión en las relaciones que él mismo establece.

Bajo: el estudiante no manifiesta conocer las relaciones de los parámetros con las curvas.

Elementos ostensivos

En la actividad ya estaban presentes tres curvas de densidad superpuestas (Registro Gráfico: RG). Los estudiantes debían identificar en estas curvas las características geométricas de los parámetros μ y σ , y seleccionar el inciso que describía su comportamiento en el lenguaje simbólico correspondiente (Registro Alfanumérico: RAL). Esta conversión del RG al RAL ocurría en la parte A de esta actividad. En la parte B, el alumno debía explicar su forma de razonar esta conversión, propiciando así una conversión del RAL al LN. Lo ocurrido se ve en la Tabla 6.

Tabla 6. Elementos ostensivos en la actividad 1, creación propia.

Respuesta (parte A)	Actividad cognitiva realizada (parte A)	F	Respuesta (parte B)	Actividad cognitiva realizada (parte B)	F
Correcta	Conversión del RG al RAL	8	Correcta	Conversión del RAL al LN	4
Incorrecta		1	Incorrecta		5
Total		9			9

De los nueve estudiantes, en la parte A, fueron ocho estudiantes los que lograron correctamente la conversión del RG al RAL (todos excepto el estudiante 4). Esto se deduce del hecho de que los estudiantes observan las características gráficas, eje de simetría y curtosis de la curva, de las tres curvas dada (RG), las comparan, y convierten esta información al lenguaje simbólico presente en los incisos, involucrándose con la media μ y la desviación estándar σ (RAL).

De la única respuesta incorrecta (estudiante 4), se puede inferir que el estudiante presenta dificultades para identificar los elementos del RG que deben convertirse al RAL, de ahí que su respuesta no sea la adecuada.

En la parte B, fueron cuatro alumnos los que respondieron correcto (estudiantes 1, 3 5 y 7), dando explicaciones a esta conversión, haciéndolo en un lenguaje natural (LN), en las que mencionaban la relación del eje vertical con la media μ (aludiendo al “eje de simetría” de la “campana” o “curva”), y la curtosis de la curva con la desviación estándar σ (aludiendo al “ancho”, “tamaño” o “forma” de la curva).

Los cinco alumnos que no respondieron correctamente también utilizaron el LN, pero en su escrito no se manifestaban de ninguna forma las relaciones entre los parámetros y las curvas, es decir, no refieren al eje de simetría ni a la curtosis para realizar una comparación (estudiantes 2, 4, 6, 8 y 9). De ellos, solo uno (estudiante 6) dio una respuesta que además incluía valores numéricos para los parámetros, pero estos eran incorrectos.

Elementos actuativos

Para responder ambas partes de la actividad, los alumnos debían realizar un actuar tipo A5: comparación entre distribuciones con parámetros distintos. La Tabla 7 muestra los resultados.

Tabla 7. Elementos actuativos en la actividad 1, creación propia.

Realización de A5 (parte A)	Cognición de A5 (parte A)	F	Realización de A5 (parte B)	Cognición de A5 (parte B)	F
Correcto	Identifica, en las tres curvas, la diferencia	8	Correcto	Explica su comparación usando las REL1 y REL2	4
Incorrecto	entre los ejes de simetría (REL1) y la igualdad entre las curtosis (REL2)	1	Incorrecto	Explica su comparación solo usando la REL1	2
				Explica su comparación con ambigüedad	2
				Explica sin referir a la comparación	1
Total		9			9

De la muestra de nueve estudiantes, en la parte A, ocho alumnos fueron los que realizaron correctamente esta comparación de distribuciones, al marcar el inciso con la sentencia correcta (todos excepto el estudiante 4). En esta respuesta se podía observar que los estudiantes realizaban las dos comparaciones necesarias para responder de manera adecuada: por un lado, el eje de simetría, que era distinto en las tres curvas; y por otro, la curtosis de las curvas, que era similar en las tres. Estas diferencias y similitudes entre curvas, resultado de la comparación, estaba preestablecida en la sentencia de los incisos.

La única respuesta incorrecta (estudiante 4) aludía a que había diferencias tanto en el eje de simetría como en la curtosis. Hay dos posibles causas para esto: una, que el estudiante haya notado ligeras diferencias entre la curtosis de las curvas, las cuales haya decidido hacer visibles en su respuesta al inciso; o dos, que su respuesta haya sido al azar. La tendencia de sus respuestas al instrumento podría indicar a que fue la segunda.

Mientras que en la parte B, fueron cuatro estudiantes los que actuaron de manera correcta (estudiantes 1, 3, 5 y 7), explicando adecuadamente cuáles fueron los elementos que utilizaron para realizar esta comparación de distribuciones. En esta parte cabe hacer mención de las relaciones REL1 y REL2, tomadas por los estudiantes como referencia para responder en esta parte.

Las respuestas de los cinco estudiantes que no respondieron correctamente muestran que estos tienen diferentes dificultades para realizar la comparación de distribuciones, ya que identifican que hay diferencias entre las curvas, pero no alcanzan a establecer con claridad cuáles. Las dificultades observadas fueron: confundir a la media con la desviación estándar (estudiante 2); decir que hay diferencia entre las medias, pero no indicar cómo lo identificó, y dar valores numéricos que resultan confusos (estudiante 6); solo aludir al eje de simetría, sin hacer mención de la curtosis (estudiante 8); y tratar de explicar únicamente reescribiendo lo que está en la sentencia del inciso (estudiante 9).

Solo una respuesta (estudiante 4) parece haber sido escrita al azar, ya que no solo no muestra capacidad de comparación entre las curvas dadas, sino que resulta incongruente.

Elementos intensivos

En esta actividad debían identificarse las siguientes propiedades de la distribución normal: EI1: simetría respecto al eje vertical (media); y EI2: concavidad y convexidad. La Tabla 8 muestra las propiedades aparecidas en esta actividad.

Tabla 8. Elementos intensivos en la actividad 1, creación propia.

Respuesta (parte A)	Elementos intensivos aparecidos (parte A)	F	Respuesta (parte B)	Elementos intensivos aparecidos (parte B)	F
Correcta	EI1 y EI2	8	Correcta	EI1 y EI2	4
Incorrecta	Ninguno	1	Incorrecta	Sólo EI1	2
				Ambigüedad entre los EI	2
				Ninguno	1
Total		9			9

En la parte A, fueron ocho estudiantes (todos excepto el estudiante 4) los que identificaron ambas propiedades seleccionando la respuesta correcta. Para determinar esta respuesta los estudiantes tuvieron que observar a consciencia las tres curvas que se les presentaban y, posteriormente, encontrar las particularidades entre estas. A partir de esto, dos características salían a relucir de este conjunto de tres curvas. Primero, que no compartían el mismo eje de simetría, referenciando esto al EI1; y segundo, que sus curtosis eran iguales, referenciando esto al EI2. Ambas características se encontraban, escritas de manera textual, utilizando el lenguaje simbólico para la media μ y la desviación estándar σ , en la sentencia del tercer inciso, el cual fue marcado por estos ocho alumnos.

Los demás incisos simplemente no concordaban con lo anterior. En el caso de la única respuesta incorrecta (estudiante 4), esta marcaba el segundo inciso, indicando que tanto la media μ como la desviación estándar σ variaban en las tres curvas.

En la parte B, fueron solo cuatro estudiantes los que mostraron un conocimiento de ambas propiedades (estudiantes 1, 3, 5 y 7) evidenciándose esto en sus explicaciones, ya que estas hacían referencia específicamente a las relaciones REL1 y REL2, es decir, la relación *eje de simetría – media*, y *curtosis – desviación*

estándar. Todas estas explicaciones fueron hechas de manera textual, en LN, a excepción de una (estudiante 5), que utilizó lenguaje simbólico para hablar a los parámetros (media μ y desviación estándar σ).

De los cinco estudiantes que respondieron incorrecto a la parte B, hay diferencias entre su conocimiento de las propiedades. Se mencionan las siguientes particularidades: confusión entre EI1 y EI2, ya que explica la relación de los parámetros con la gráfica pero de manera inversa, es decir, señala que el eje de simetría refiere a la desviación estándar, cuando este refiere a la media (estudiante 2); intenta explicar mediante valores numéricos pero no hace referencia a la parte geométrica, por lo que no manifiesta un conocimiento de ninguno de los elementos intensivos esperados (estudiante 6); identificación coherente de EI1, pero en la explicación prescindió de mencionar a EI2 (estudiante 8); reescritura de la sentencia dada en el inciso, por lo que no es posible observar si el estudiante identifica los elementos intensivos esperados (estudiante 9). Una sola de las respuestas (estudiante 4) resulta incongruente en todos los aspectos, ya que en ella no hay ningún atisbo de alguna de las propiedades de la distribución normal.

Elementos validativos

Los elementos validativos quedaban a criterio del estudiante en esta actividad. Esto para observar a cuáles registros recurrían ellos en sus respuestas, y observar si había alguna tendencia hacia alguno de estos. Los elementos validativos de esta actividad se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9. Elementos validativos en actividad 1, creación propia.

Validación (parte A)	Validación (parte B)	Elemento validativo utilizado	Contenido de la validación	F
No aplica	Correcto	Análisis	Identifica las propiedades involucradas en la actividad	4
	Incorrecto	Análisis	Identifica de manera parcial las propiedades	2
		Análisis	Presenta ambigüedad al hablar de las propiedades	2
		Síntesis	No habla de las propiedades	1
Total				9

Dada su naturaleza, la parte A de la actividad no motiva a la movilización de elementos validativos por parte de los estudiantes. En la parte B, en cambio, se encontraron ocho análisis y una síntesis.

De los análisis, solo cuatro eran correctos, pues manifestaban un conocimiento de las propiedades de la distribución normal presentes en esta actividad (estudiantes 1, 3, 5 y 7), a través de argumentos que, en este caso, hacían referencia a las relaciones REL1 y REL2. Mediante estas relaciones los estudiantes reflejaban un conocimiento de las propiedades involucradas en la actividad: simetría respecto al eje vertical (media), y concavidad y convexidad. Así pues, los estudiantes comprendían que la comparación entre las curvas debía realizarse respecto al eje de simetría, dado por la media μ , y la curtosis, dada por la desviación estándar σ , y para dejar sustento de esto en sus explicaciones, hacían referencia a las generalizaciones brindadas por estas relaciones, las cuales seguramente fueron

mencionadas numerosas ocasiones durante su curso hasta el grado de ser mecanizadas, de ahí que los estudiantes les atribuyan la formalidad necesaria para ser utilizadas como validación.

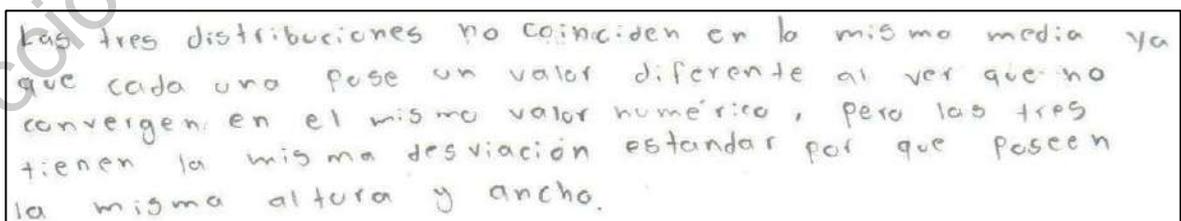
De las cinco respuestas incorrectas, los cuatro análisis incorrectos no tenían similitudes entre sí. Dos de ellos resultaban ambiguos al hablar de las propiedades geométricas de los parámetros μ y σ (estudiantes 2 y 6), y los dos restantes son poco sustanciosos (estudiantes 8 y 9). Por último, la única síntesis (estudiante 4) resulta incongruente en todos los sentidos. Todas estas particularidades quedan detalladas en los elementos de significado anteriores.

5.1.1 Trayectorias cognitivas en la actividad 1

A continuación se describen las cuatro trayectorias cognitivas que surgieron en esta actividad. Se estructuran con base en el nivel cognitivo alcanzado en las respuestas. Se tienen, por tanto, respuesta correcta: comprensión global de la actividad, incorrecta con comprensión elevada, incorrecta con comprensión regular, e incorrecta con comprensión mínima.

Respuesta correcta: comprensión directa de propiedades EI1 y EI2

En esta categoría se registraron cuatro estudiantes (1, 3, 5 y 7). Como ejemplo de respuesta se muestra al estudiante 1, cuya respuesta puede verse en la Figura 9.



Las tres distribuciones no coinciden en la misma media ya que cada una posee un valor diferente al ver que no convergen en el mismo valor numérico, pero las tres tienen la misma desviación estándar por que poseen la misma altura y ancho.

Figura 9. Respuesta del estudiante 1 a la parte B de la actividad 1, tomada del instrumento de recogida de datos.

Esta explicación complementa al inciso marcado por el estudiante, siendo este el tercero, y el cual era la respuesta correcta. En esta respuesta es posible ver que el estudiante identifica que las medias no coinciden, puesto que el eje de simetría es distinto en cada curva (REL1). Además de que refiere a que la curtosis es similar en las tres, lo cual se hace evidente cuando escribe: *pero las tres tienen la misma desviación estándar por que poseen la misma altura y ancho*, sentencia donde sale a la vista la REL2.

Es por ello que puede decirse que el estudiante identifica el tipo de problema P1: ajuste de un modelo a la distribución de datos reales, de los elementos extensivos. En cuanto a los elementos ostensivos, estos han sido identificados y se ha realizado de manera adecuada la actividad cognitiva en ambas partes de la actividad, es decir, conversión del RG al RAL en la parte A, y conversión del RAL al LN en la parte B. Esto no hubiera sido posible de no haberse efectuado de manera correcta el elemento actuativo A5: comparación entre distribuciones con parámetros distintos. Los elementos intensivos puestos en juego pueden apreciarse también en esta respuesta. Se trata del EI1: simetría respecto al eje vertical (media), y el EI2: concavidad y convexidad. Es posible identificarlos en esta respuesta mediante las relaciones REL1 y REL2, respectivamente. Por último, y tal como puede verse en la Figura 9, hubo una descripción de las particularidades en dicha actividad, lo que se establece como un análisis, perteneciente este a los elementos validativos del significado de referencia.

Respuesta incorrecta: poca sustancia de respuesta

En esta categoría se registraron dos estudiantes (8 y 9). La respuesta del estudiante 8 puede verse en la Figura 10.



(x) En las tres distribuciones varían la media μ y se mantiene constante su desviación estándar s , ya que cambia el eje de simetría de cada una.

Figura 10. Respuesta del estudiante 8 a la parte B de la actividad 1, tomada del instrumento de recogida de datos.

Lo primero que sale a relucir en esta respuesta es que el estudiante ha prescindido del espacio que la hoja del instrumento dedicaba a ella, para escribir su explicación en conjunto con el inciso que ha marcado, el cual es correcto. Esta explicación es precisa al decir que en las tres distribuciones varían la media *ya que cambia el eje de simetría en cada una*, donde se evidencia la REL1. Esto es correcto, no obstante, el estudiante no alude a la desviación estándar, ni siquiera partiendo de la REL2, por lo que no es posible saber si el identifica esta propiedad de la distribución normal, de ahí que esta respuesta se considere incorrecta pero con una comprensión alta.

Este nivel de comprensión permite deducir que el estudiante identifica el tipo de problema P1 de los elementos extensivos. En cuanto a los elementos ostensivos, el estudiante realiza la actividad cognitiva solo en una de las partes de la actividad, mientras que en la otra no logra establecer dicha cognición. Es decir, el estudiante convierte del RG al RAL en la parte A, pero no convierte, al menos no de manera total, del RAL al LN en la parte B. De los elementos actitudinales, el estudiante realiza la A5 de manera adecuada en la parte A de la actividad, y de manera parcial en la parte B, ya que, al observar la Figura 10, es posible decir que A5 se realiza únicamente para la media μ , y no para la desviación estándar σ . La explicación de los elementos de significado anteriores permiten dimensionar que el estudiante solo identifica el EI1, mientras que se muestra difuso su conocimiento del EI2, de los elementos intensivos. Finalmente, el análisis del estudiante es correcto en cuanto a la REL1 se refiere, involucrando en esta las propiedades geométricas de la media μ , pero al no aludir ni a la REL2 ni a las propiedades de la desviación estándar σ , resulta falto de sustancia en este aspecto, por lo que no se considera del todo correcto.

Respuesta incorrecta: ambigüedad en la identificación de las propiedades

En esta categoría entraron dos estudiantes (2 y 6). La respuesta del estudiante 2 se puede ver en la Figura 11.

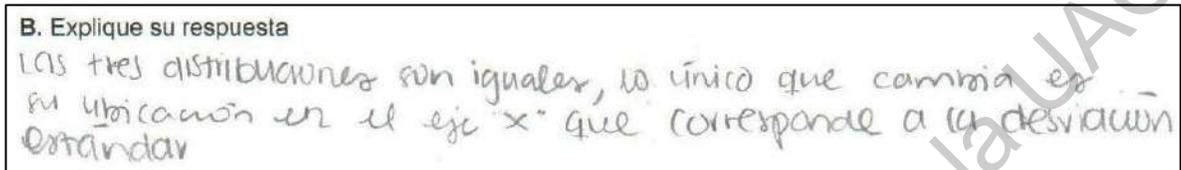


Figura 11. Respuesta del estudiante 2 a la parte B de la actividad 1, tomada del instrumento de recogida de datos.

En esta explicación el estudiante menciona la diferencia entre los ejes de simetría de las curvas presentes en el gráfico, atribuyéndole esta cuestión a *la desviación estándar*. Al mismo tiempo esto contrasta con su afirmación, al principio de la respuesta, de que *las tres distribuciones son iguales*. Esto nos dice que el estudiante tiene la idea de que las propiedades de las curvas están relacionadas con los parámetros, pero no tiene certeza de qué parámetro afecta a tal característica geométrica de la curva, por lo que no es capaz de alcanzar las relaciones REL1 y REL2. De aquí que su respuesta se incorrecta, pero con una comprensión media.

Al responder adecuadamente la parte A de la actividad, es posible deducir que el estudiante identifica el tipo de problema P1 de los elementos extensivos. Esto refiere directamente a los elementos ostensivos, ya que el estudiante logra una conversión del RG al RAL en la parte A, pero no logra la conversión de registros esperada para la parte B. En cuanto a los elementos actuativos, el estudiante realiza el A5 de manera correcta en la parte A, pero esta comparación no se refleja en la explicación, ya que el estudiante distingue que sí existen diferencias entre las curvas, pero no es capaz de atribuir estas diferencias a los parámetros, ni relacionar a estos con las propiedades geométricas. Esto mismo hace que su

explicación tenga un grado alto de ambigüedad, haciendo que los elementos intensivos EI1 y EI2, los esperados en esta actividad, no puedan ser identificados en ella. En cuanto a los elementos validativos, la respuesta del estudiante cabría ser catalogada como un análisis, ya que pretende observar las particularidades de la actividad, pero esta observación tiene dificultades, resultando esto en afirmaciones erróneas sobre la situación.

Respuesta incorrecta: incongruencia al responder

En esta categoría entra solo un estudiante (4), cuya respuesta se observa en la Figura 12.

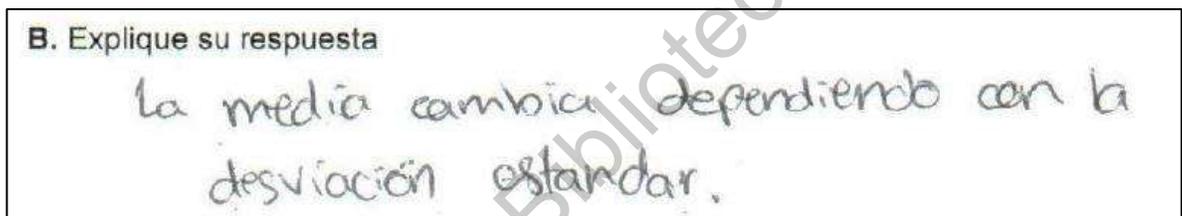


Figura 12. Respuesta del estudiante 4 a la parte B de la actividad 1, tomada del instrumento de recogida de datos.

La explicación en esta categoría resulta poco sustanciosa y de mucha carga de ambigüedad. En ella podemos observar una sentencia que, a todas luces, es equivocada. Esto viene directamente relacionado de que este estudiante tampoco ha respondido correctamente a la parte A.

Al no haber respondido correctamente a ninguna de las partes de la actividad, es posible inferir que el estudiante no identifica el tipo de problema P1, de los elementos extensivos. Del mismo modo, no logra ninguna de las conversiones esperadas en esta actividad, por lo que no es posible decir que el estudiante esté relacionado con alguno de los registros de representación de la distribución normal. De los elementos actuativos, es notorio que el estudiante no realiza el A5 en ninguna de las partes, ya que ni siquiera alude a las particularidades entre las

curvas, mucho menos a una comparación entre ellas. Todo ello nos da pie a decir que no se identifican ninguno de los elementos intensivos esperados para esta actividad. Por último, su explicación podría caber como una síntesis, ya que hace una afirmación general sobre la situación, pero esta resulta del todo incongruente.

5.2 Análisis de la actividad 2

Elementos extensivos

En esta actividad se presentaba un problema tipo P1: ajuste de un modelo a la distribución de datos reales. De los cuatro incisos presentados en la parte A, el segundo de ellos era el que tenía la sentencia correcta. Si los estudiantes marcaban dicho inciso, manifestaban un conocimiento de las propiedades geométricas involucradas en la actividad. Cabe mencionar que estas eran exactamente las mismas que en la actividad 1, por lo que se utilizará la misma nomenclatura para referirse a ellas: EI1 y EI2, como la simetría respecto al eje vertical (media), y la concavidad y convexidad, respectivamente.

En la parte B, los estudiantes debían explicar su respuesta a la parte A. Tal como en la actividad pasada, tenían libertad de criterio, y una respuesta correcta del estudiante reflejaría una identificación de las propiedades geométricas involucradas, EI1 y EI2. Es necesario decir que, aunque se esperaba una mención general de las propiedades antes mencionadas en la explicación, esta podía considerarse correcta aun si los estudiantes solo hacían mención de EI2, ya que era ésta la que conducía directamente a la esencia de la actividad. Una mención de EI1 indicaría que el estudiante no solo identifica ambas propiedades, sino que entiende la necesidad de reconocer la influencia de los parámetros, acentuando así su conocimiento de la distribución normal.

Lo anterior da como resultado que, aun considerada como correcta, una explicación pueda contener vaguedades al explicar las propiedades, las cuales se detallarán en su momento. La Tabla 10 muestra estos elementos.

Tabla 10. Elementos extensivos en la actividad 2, creación propia.

Identifica P1 en la parte A	Inciso marcado	F	Identifica P1 en la parte B	Comprensión de P1	F
Correcto	(2do inciso) <i>En la gráfica II hay mayor variación</i>	7	Correcto	(RE) Explicación basada en los parámetros y las relaciones REL1 y REL2	2
				Explicación basada en una idea de la REL2	3
Incorrecto	(3er inciso) <i>En la gráfica III hay mayor variación</i>	2	Incorrecto	Explicación basada en una relación área/variación incorrecta (Error 1)	2
				Explicación basada en la concentración de datos alrededor de la media μ , pero con ambigüedad	1
				Respuesta incompleta	1
Total		9			9

De los nueve estudiantes pertenecientes a la muestra, en la parte A, siete de ellos identificaron el tipo de problema y respondieron adecuadamente (todos excepto los estudiantes 1 y 4). Asimismo, todas las respuestas correctas fueron exactamente iguales, ya que marcaban el segundo inciso: *en la gráfica II hay*

mayor variación. Esto indicaba un conocimiento, por parte de los estudiantes, de las propiedades geométricas involucradas en la actividad. Las dos respuestas incorrectas (estudiantes 1 y 4) marcaban el tercer inciso: *en la gráfica III hay mayor variación*. Lo anterior indica que estos estudiantes entienden el concepto de *variación* de diferente manera, o incluso que tienen dificultades para referirse a él, ya que su selección de respuesta refiere a la gráfica, de las tres presentes, que presenta justo lo contrario a una respuesta correcta. Para conocer más la comprensión de estos estudiantes, se vuelve necesario considerar también la siguiente parte de la actividad.

En la parte B, fueron cinco las respuestas correctas, aunque con diferencias entre ellas. Solo dos se consideran como respuestas esperadas (RE), ya que contienen alusiones a las relaciones REL1 y REL2, además de mencionar nexos con los parámetros (estudiantes 3 y 5). Otras tres respuestas (estudiantes 2, 7 y 8) contienen una idea vaga de EI2, reflejado esto en una explicación basada en la REL2, en la que establecen una conexión entre el área de la curva y la variación. Sin embargo no profundizan en esta conexión, generando ambigüedad sobre si identifican o no la manera en que la variación influye en los cambios de curtosis de la curva. Dentro de esta categoría, una respuesta (estudiante 8) alude a la igualdad entre las medias de las curvas, REL1, y señala que la gráfica II (referencia de su respuesta en la parte A) “tiene mayor σ ”, aunque no profundiza como se esperaba, tampoco se puede considerar incorrecto.

Hubo cuatro estudiantes que respondieron de manera incorrecta. En dos de ellos se detectó un error similar (estudiantes 1 y 4). Este se basaba en relacionar la variación con el área de la curva, pero de manera errónea, ya que mencionaban que el área de la curva “variaba” más en la gráfica III (tal como lo señalan en su inciso ambos estudiantes) porque esta “abarcaba más” que las otras dos gráficas. Se trata pues de una interpretación incorrecta del concepto de variación, el cual deriva directamente en la dificultad para encontrar la REL2, relación entre la

curtosis y el valor de la desviación estándar, lo cual indica que los estudiantes no relacionan a la desviación estándar con la variación. A esta dificultad para relacionar los conceptos desviación estándar y variación, lo cual genera una dificultad en los estudiantes para comparar curvas de densidad, ya que lo hacen por mera percepción visual, se ha decidido nombrar Error 1.

Por otra parte, una respuesta (estudiante 9) aludía a que en la media μ de la gráfica II se concentraba una “mayor” cantidad de datos. Esta respuesta es incorrecta. De hecho, se trata justo de lo contrario, lo cual da a pensar que la causa de este error sea distracción, ya que si se intercambia la palabra “mayor” por la palabra “menor”, la respuesta sería correcta, haciendo una referencia directa a la variación de los datos en dicha curva. Una última respuesta (estudiante 6) estaba incompleta, por lo que no alcanza a identificarse qué tanto se relaciona el estudiante con el tipo de problema P1.

Elementos ostensivos

En esta actividad, justo como en la anterior, ya aparecían tres curvas de densidad (RG). La diferencia es que, contrario a la actividad 1, estas curvas compartían el mismo eje de simetría, y tenían diferentes curtosis entre sí. Los estudiantes debían interpretar este comportamiento desde una perspectiva en la que involucraran el concepto de variación (RAL), el cual estaba presente en los incisos. Esta conversión del RG al RAL ocurría en la parte A. Mientras que en la parte B debía explicarse dicha conversión, generándose así una conversión del RAL al LN. En la Tabla 11 se observan los elementos ostensivos para esta actividad.

Tabla 11. Elementos ostensivos en la actividad 2, creación propia.

Respuesta (parte A)	Actividad cognitiva realizada (parte A)	F	Respuesta (parte B)	Actividad cognitiva realizada (parte B)	F
Correcta	Conversión del RG al RAL	7	Correcta	Conversión del RAL al LN	5
Incorrecta		2	Incorrecta		4
Total		9			9

De la muestra de nueve estudiantes, en la parte A, siete (todos excepto los estudiantes 1 y 4) de ellos hicieron de manera adecuada la conversión del RG al RAL. De esta respuesta se deduce que los estudiantes identifican no solo la manera en que los parámetros media μ y desviación estándar σ influyen en la curva, sino que son capaces de interpretarlos desde el punto de vista de la variación, ya que este concepto estaba presente en el registro de representación semiótica al que se realizó la conversión (RAL).

Las dos respuestas incorrectas (estudiantes 1 y 4) eran iguales. Ambas marcaban el tercer inciso. Lo cual da a pensar que los estudiantes presentan dificultades para realizar esta conversión, pudiendo ser la causa una dificultad para interpretar la forma en que los parámetros influyen en la curva, o una dificultad para relacionar las propiedades geométricas E11 y E12, presentes en esta actividad, con el concepto de variación.

En la parte B, hubo cinco respuesta correctas. Todas ellas realizaban una correcta conversión del RAL al LN. Tres de ellas (estudiantes 3, 5 y 7) utilizaron también el lenguaje simbólico para referirse a los parámetros, mientras que dos (estudiantes 2 y 8) explicaron su respuesta exclusivamente en el LN.

En las cuatro respuestas incorrectas se alcanzan a notar dificultades para realizar de manera adecuada la conversión del RAL al LN. Los elementos presentes en el registro inicial, RAL, no logran convertirse de manera correcta al registro final, LN,

registro al cual todas las respuestas intentaron llegar. En dos de ellas (estudiantes 1 y 4) estos elementos son similares, ya que generan el mismo error (Error 1), y se relacionan directamente con el concepto de variación. Por otra parte, una de las respuestas (estudiante 9) parece tener su causa dentro del mismo LN, ya que, como se mencionó en los elementos extensivos, el intercambio de una palabra dentro de su escrito cambiaría por completo el sentido de la respuesta. Finalmente, una (estudiante 6) respuesta estaba en LN pero incompleta, ya que se trataba solo de cuatro palabras: “la cantidad de datos”.

Elementos actuativos

Al igual que en la actividad 1, en esta actividad se debía realizar, para ambas partes, un accionar tipo A5: comparación entre distribuciones con parámetros distintos. En la Tabla 12 pueden verse estos elementos.

Tabla 12. Elementos actuativos de la actividad 2, creación propia.

Realización de A5 (parte A)	Cognición de A5 (parte A)	F	Realización de A5 (parte B)	Cognición de A5 (parte B)	F
Correcto	Identifica, en las tres curvas, la similitud entre los ejes de simetría (REL1) y la diferencia entre las curtosis (REL2), desde la perspectiva del concepto de variación.	7	Correcto	(RE) Comparación basada en los parámetros y las relaciones REL1 y REL2	2
				Comparación basada en una idea de la REL2	3
Incorrecto	(REL2), desde la perspectiva del concepto de variación.	2	Incorrecto	Comparación incorrecta basada en la relación área/variación (Error 1)	2
				Comparación basada en las propiedades de la media μ , pero ambigua	1
				Respuesta incompleta	1
Total		9			9

De los nueve estudiantes, en la parte A, siete de ellos (todos excepto los estudiantes 1 y 4) respondieron correctamente. Esto indicaba que los estudiantes realizaban la comparación entre las tres curvas de densidad que se les presentaban. Encontraban en ellas una similitud entre la media μ , ya que las tres compartían el mismo eje de simetría (REL1), y una diferencia entre las curtosis de las mismas (REL2), lo que indicaba que una de ellas tenía más variación entre sus datos que las demás. Esto último se puntualiza ya que los incisos de la parte A estaban dados bajo la perspectiva de la variación. Los alumnos entonces debían llevar su interpretación del EI2, mediante la REL2, a los términos de la variación. De ese modo, la relación REL2 debía pasar, para realizar correctamente A5, a los

términos variación y curtosis: entre mayor variación, mayor era el valor de la desviación estándar σ , y menor la curtosis. Análogamente, entre menor variación, menor valor de la desviación estándar σ , y mayor la curtosis. De las sentencias expuestas en los incisos, la del tercer inciso, referente a la gráfica II, era la que cumplía con estas características.

Por el contrario, las dos respuestas incorrectas (estudiantes 1 y 4) marcan el mismo inciso, el tercero, que hacía referencia a la gráfica III. Al ser iguales sus respuestas, se puede deducir que estos estudiantes utilizan el mismo criterio de comparación. El análisis de este criterio viene en la siguiente parte de la actividad.

En la parte B, hubo cinco respuestas correctas. En esencia, todas explican correctamente el elemento actuativo A5, pero existen matices, ya que no todas comparan de la misma manera. La respuesta esperada (RE) era una comparación que utilizara referencias a las propiedades EI1 y EI2. Esto ocurrió mediante las relaciones REL1 y REL2, respectivamente, además de contener alusiones a los valores de los parámetros media y desviación estándar. Este tipo de comparación RE fue presentada en dos ocasiones en esta actividad (estudiantes 3 y 5).

En tres de las explicaciones consideradas como correctas (estudiantes 2 y 7), la comparación se manifiesta como influenciada fuertemente por una percepción visual y una idea vaga de la REL2. Esto también relacionado con la variación, aunque nunca aludiendo a la dispersión de datos ni a los parámetros, de ahí que no se consideren estas como RE. Una de ellas (estudiante 8) muestra que el estudiante realiza la comparación de curvas utilizando como referencia el eje de simetría, dado por la media μ , por lo que alude a la propiedad EI1. En cuanto a la curtosis, el estudiante solo menciona que la gráfica II tiene “mayor σ ”, aunque nunca detalla este razonamiento desde la geometría de las curvas, por lo que la comparación entre desviaciones estándar queda bastante vaga.

Por el lado de las respuestas incorrectas, se tuvieron cuatro, también con disparidad entre ellas. En dos de ellas (estudiantes 1 y 4) queda claro que el criterio para realizar A5 fue exclusivamente por percepción visual. Esto se entiende porque, en sus explicaciones, los estudiantes apuntan a que el área de la gráfica III (señalada por ellos en el inciso de la parte A) “varía” más que las otras, es decir, las gráficas I y II se “parecen” más entre sí, mientras que la gráfica III no se asemeja a ellas, por lo que, de acuerdo al criterio de los estudiantes, esta última gráfica “varía” más por no parecerse, desde una percepción visual, a las otras gráficas. Esto, como fue mencionado ya en los elementos extensivos, es lo que se considera en esta investigación como Error 1.

En otra de las respuestas (estudiante 9), A5 pretendía realizarse directamente desde la perspectiva de la variación, apuntando a la acumulación de datos alrededor de la media. Empero, el estudiante confunde, quizás por distracción, que entre mayor sea el número de datos que se acumulen en la media, menor será la variación. Se menciona que la causa fue distracción porque el estudiante menciona justo la idea contraria a esta, al escribir la palabra “mayor” en vez de la palabra “menor”. Una última respuesta resulta incompleta, no pudiéndose identificar por ello el criterio usado por el estudiante para comparar, o incluso saber si realizó dicha acción cognitiva.

Elementos intensivos

Rememorando a la actividad 1, en esta actividad se involucraban también los elementos intensivos EI1: simetría respecto al eje vertical (media), y EI2: concavidad y convexidad, mencionados ya al principio del análisis de esta actividad. Se pueden observar estos elementos en la Tabla 13.

Tabla 13. Elementos intensivos en la actividad 2, creación propia.

Respuesta (parte A)	Elementos intensivos aparecidos (parte A)	F	Respuesta (parte B)	Elementos intensivos aparecidos (parte B)	F
Correcta	EI1 y EI2	7	Correcta	EI1 y EI2	2
				EI2, e indirectamente EI1.	3
Incorrecta	Ninguno	2	Incorrecta	Identifica EI1	2
				Ambigüedad entre los EI	1
				Respuesta incompleta	1
Total		9			9

De los nueve estudiantes, en la parte A, siete de ellos (todos excepto los estudiantes 1 y 4) respondieron adecuadamente al marcar el inciso en el cual manifestaban un conocimiento de los elementos intensivos EI1 y EI2. Este inciso hacía referencia a la gráfica II, la cual contenía las características, en términos del concepto de variación, que se acoplaban a los requerimientos a las propiedades geométricas involucradas.

Las dos incorrecciones (estudiantes 1 y 4) eran similares, ya que marcaban el mismo inciso (tercero), en el cual no encajaba epistemológicamente ninguno de los elementos intensivos. Esta respuesta no reflejaba ninguna de las propiedades geométricas, por lo que puede decirse que no identificaron ninguna de ellas. Para reafirmar o refutar lo anterior, es necesario ver su explicación.

En la parte B, Cinco estudiantes respondieron de manera adecuada. Tal como se menciona en los elementos extensivos, la explicación de los estudiantes podía contener solo a uno de los elementos intensivos, el EI2, el cual tenía la esencia necesaria para este propósito. Obviamente la mención de ambos elementos intensivos creaba un contexto bajo el cual se podía pensar aún más sólida la

comprensión del estudiante. De ahí que haya distinciones entre las respuestas correctas, ya que algunas enfatizaban más un elemento intensivo que otro, o no hacían mención de él.

Únicamente dos de ellas (estudiantes 3 y 5) se consideraron como respuestas esperadas (RE), ya que referían a ambos, EI1 y EI2, además de puntualizar a los parámetros a las que estas propiedades referían. Dos respuestas prescindieron del EI1 (estudiantes 2 y 7), y se basaron únicamente en acercamientos vagos al EI2. Se puntualiza la vaguedad en ellas porque se alcanza a notar cierta influencia de la percepción visual de los estudiantes al elaborar esta respuesta.

Por el contrario, una última respuesta correcta prescindía de desarrollar el EI2 y se centraba en el EI1. Por consiguiente, esta es la explicación correcta que menor comprensión muestra sobre las propiedades. Menciona únicamente que el gráfico II tiene “mayor σ ”, pero deja un vacío epistémico al no explayar una explicación que refiera a la cuestión geométrica respecto al EI2.

Las respuestas incorrectas en esta parte de la actividad fueron cuatro. En dos de ellas (estudiantes 1 y 9) se observa un reconocimiento de la simetría respecto a la media, EI1, ya que se alude de manera textual a ella. Sin embargo, estas explicaciones carecen del contenido cognitivo respecto al EI2: mientras el estudiante 1 comete el Error 1, el estudiante 9 muestra dificultades para comprender la variación en términos de la dispersión de los datos. Una respuesta más (estudiante 4) muestra ambigüedad en ambos elementos intensivos involucrados en la actividad, no pudiéndose establecer con claridad si identifica alguno de ellos. Por último, una respuesta (estudiante 6) estaba incompleta.

Elementos validativos

Lo mismo que en la actividad 1, en esta actividad era el criterio de los estudiantes el que definía el sentido de los elementos validativos. Asimismo, la

parte A de la actividad, por su naturaleza de incisos, no daba pie a los estudiantes para que validaran. Por tanto, las validaciones se esperaban exclusivamente en la parte B. La Tabla 14 muestra cómo fueron las validaciones en esta actividad.

Tabla 14. Elementos validativos en la actividad 2, creación propia.

Validación (parte A)	Validación (parte B)	Elemento validativo utilizado	Contenido de la validación	F
No aplica	Correcto	Análisis	(RE) Identifica las propiedades EI1 y EI2	2
		Análisis	Identifica directamente EI2, e indirectamente EI1	3
	Incorrecto	Análisis	La explicación presenta el Error 1	2
		Análisis	Presenta ambigüedad al hablar de los parámetros	1
		No aplica	Respuesta incompleta	1
Total				9

Como se mencionó, fue en la parte B de la actividad donde se pudieron encontrar siete análisis, una síntesis y una respuesta incompleta. De estas validaciones, solo cinco fueron correctas, cuatro análisis y una síntesis, con diferencias cognitivas entre ellas. Dos de los análisis (estudiantes 3 y 5) se consideraron respuestas esperadas (RE) ya que contenían los razonamientos adecuados. Por una parte, el estudiante 3 estudió directamente las particularidades vistas en las curvas, y por otra, el estudiante 5 hizo una generalización respecto a las relaciones REL1 y

REL2, y posteriormente concluyó hablando de las particularidades de las curvas presentadas. Todo esto referenciando al lenguaje simbólico de los parámetros.

Otros dos análisis (estudiantes 2 y 7) utilizaron un lenguaje menos formal, y prescindieron de mencionar al EI1: el estudiante 2 utiliza términos para las curvas como “más abierta” y “más cerrada” para referirse a la REL2, es decir, la concavidad y convexidad (EI2); y el estudiante 7 utiliza el término “más chica en altura” para el mismo fin.

Una última validación correcta (estudiante 8) utiliza una síntesis para resaltar la igualdad en los ejes de simetría de las tres curvas, es decir, hizo referencia a la REL1 (EI1), y mencionar que la gráfica II “tiene mayor σ ”. La poca sustancia de la respuesta no permite saber si el estudiante identifica que su respuesta refiere a la variación, ya que no une estos conceptos en cuestión de la geometría de las curvas.

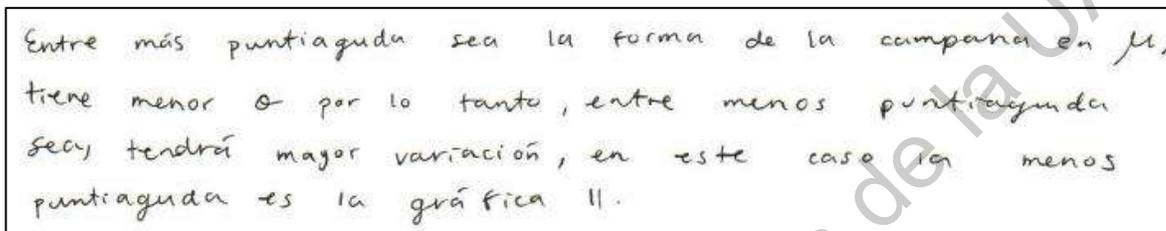
Las cuatro respuestas incorrectas se dividen en tres análisis y una respuesta incompleta. Dos de ellos (estudiantes 1 y 4) contienen un razonamiento en el que se desenvuelve el Error 1, mencionado ya en los elementos de significado anteriores. Una respuesta (estudiante 9) presenta dificultades que, como se dijo anteriormente, podrían provenir más de distracción que de razones epistemológicas. Finalmente, la última respuesta (estudiante 6) estaba incompleta, por lo que no puede etiquetarse como alguno de los elementos validativos.

5.2.1 Trayectorias cognitivas en la actividad 2

A continuación se describen las cinco trayectorias cognitivas que se originaron de esta actividad. Dos de ellas fueron correctas: comprensión directa de las propiedades EI1 y EI2; y comprensión directa de EI2, e indirecta de EI1. Las tres incorrectas fueron: presencia del Error 1, ambigüedad al interpretar propiedades, y respuesta incompleta.

Respuesta correcta: comprensión directa de las propiedades EI1 y EI2

Se registraron dos estudiantes (3 y 5) en esta categoría. El ejemplo de respuesta para esta sección será el del estudiante 5, visto en la Figura 13.



Entre más puntiaguda sea la forma de la campana en II, tiene menor σ por lo tanto, entre menos puntiaguda sea, tendrá mayor variación, en este caso la menos puntiaguda es la gráfica II.

Figura 13. Respuesta del estudiante 5 a la parte B de la actividad 2, tomada del instrumento de recogida de datos.

Tras marcar el inciso tres en la parte A, el cual refiere a la gráfica II, el estudiante dio esta explicación en la parte B. Haciendo una generalización de las relaciones REL1, eje de simetría de la curva, y REL2, curtosis de la curva, el estudiante analiza las particularidades de las gráficas que se le presentaron. Al final concluye que es la gráfica II la que tiene “mayor variación”, parafraseando la sentencia dada en el inciso que marcó.

El conocimiento del tipo de problema P1, ajuste de un modelo a la distribución de datos reales, de los elementos extensivos, es notorio debido no solo a que el estudiante identifica las propiedades involucradas en la actividad a través de las relaciones REL1 y REL2, sino que manipula un lenguaje simbólico apropiado. Bajo este precepto, el estudiante realiza las conversiones pertinentes. Con la del RG al RAL en la parte A, es visible que identifica las curvas de densidad superpuestas y el lenguaje simbólico de los incisos, mientras que en la del RAL al LN, en la parte B, se desenvuelve con este mismo tipo de lenguaje, y con ello deja en claro que identifica los registros de representación en esta actividad. Esto hace dirigir la vista al elemento activo A5, comparación de distribuciones con

parámetros distintos, como factor decisivo para la aparición de estos elementos en ambas partes de la actividad, así como de los elementos intensivos EI1, simetría respecto al eje vertical (media), y EI2, concavidad y convexidad. Por último, aunque en su explicación aparece una generalización, puede observarse que ha sido el análisis lo que ha permitido este razonamiento. No obstante, ambos pertenecen a los elementos validativos del significado de referencia.

Respuesta correcta: comprensión directa de EI2 e indirecta de EI1

Dos estudiantes (2, 7 y 8) pertenecen a esta categoría. En la Figura 14 se muestra la respuesta del estudiante 2.

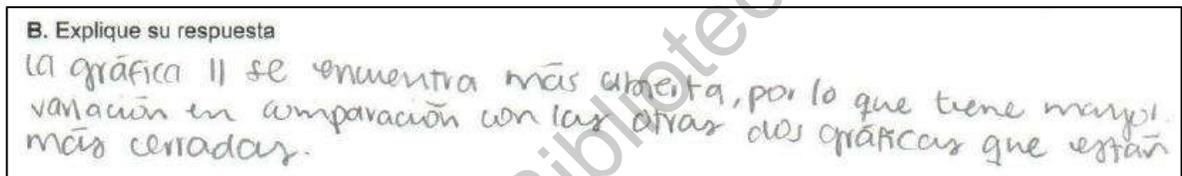


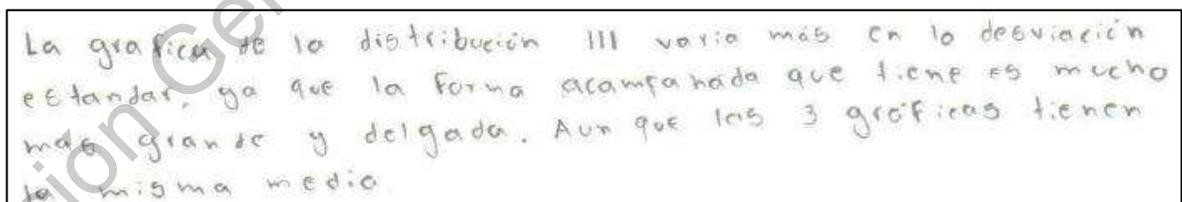
Figura 14. Respuesta del estudiante 2 a la parte B de la actividad 2, tomada del instrumento de recogida de datos.

En esta respuesta puede observarse que la referencia principal que utiliza el estudiante, para acercarse al concepto de variación, es la “apertura” de las gráficas. De REL1 no hay alusiones, ya que no se utiliza el eje vertical (media) para las comparaciones, o al menos no lo menciona el estudiante. Mientras que la REL2 hace presencia por medio de la relación apertura/variación que hace el estudiante: las gráficas “más abiertas” tienen mayor variación, con lo que puede concluirse que el estudiante estima que las “más cerradas” tienen menos variación. Aunque esto se considera correcto, queda un dejo de vaguedad respecto a cuánto comprende realmente el estudiante la propiedad de concavidad y convexidad presente en esta actividad.

El conocimiento de P1 por parte del estudiante es preciso, ya que resuelve lo requerido por el planteamiento, aunque en términos estrictos queda un poco falto de sustancia. Lo anterior para los elementos extensivos, mientras que en los ostensivos la conversión del RG al RAL es correcta, manifestando un conocimiento de las curvas superpuestas, mientras que en la conversión del RAL al LN, aunque se percibe una especie de vacuidad por no mencionarse la media μ , se considera íntegramente correcto. El elemento actuario A5 se realiza adecuadamente en la parte A, mientras que en la parte B se prescinde de comparar la simetría respecto a las medias, algo que podría incluso considerarse como opcional bajo el planteamiento de la actividad. De los elementos intensivos, en la parte A se considera que hacen presencia ambos, EI1 y EI2; contrario a la parte B, en donde solo se identifica EI2 de forma vaga. Finalmente, el análisis del estudiante, aunque escueto para una de las propiedades (EI1), se contabiliza como correcto por mostrar una idea de alta cognición respecto a la concavidad y convexidad.

Respuesta incorrecta: presencia del Error 1

Fueron dos los estudiantes (1 y 4) que presentaron el Error 1. En la Figura 15 queda patente la respuesta del estudiante 1.



La grafica de la distribución III varia más en la desviación estandar, ya que la forma acampanada que tiene es mucho más grande y delgada. Aun que las 3 graficas tienen la misma media.

Figura 15. Respuesta del estudiante 1 a la parte B de la actividad 2, tomada del instrumento de recogida de datos.

En esta respuesta puede observarse el razonamiento del estudiante en cuanto al concepto de variación. Al decir que la gráfica III, marcada en la parte A de la actividad como la gráfica con mayor variación, es la correcta porque “es mucho

más grande y delgada” que las otras dos gráficas, se deduce que el estudiante entiende la variación únicamente como variaciones de “forma” en las gráficas, teniendo como principal criterio la percepción visual que él tiene de ellas. Asimismo, no deja de señalar el hecho de que estas, al compartir eje de simetría, también tienen un valor de media similar, lo cual es correcto. Estas características se han nombrado Error 1, y se detallan en profundidad en los elementos de significado de esta actividad.

El acercamiento a P1, de los elementos extensivos, que tiene este estudiante no se considera el apropiado, pues permea en su respuesta el Error 1, aunque al hablar de la propiedad de simetría respecto a la media deja en sus dificultades provienen directamente del concepto de variación, involucrado en los incisos de esta actividad. Por lo anterior, no ocurre ninguna de las conversiones esperadas en la actividad, salvo la conversión que existe de la simetría en el RG de la parte A a describirlo de manera textual, LN, en la parte B, aunque esta no resulta suficiente de acuerdo a los elementos ostensivos puestos en juego. De igual manera, el elemento activo A5 se realiza incorrectamente en ambas partes, ya que los criterios utilizados para la comparación no eran los idóneos. De los elementos intensivos aparece el E11 de manera adecuada, mientras que el E12 se pierde cognitivamente en la aparición del error antes mencionado. Por último, se considera análisis, elemento validativo, a la respuesta del estudiante porque observa las particularidades de la situación planteada, aunque gracias a ello puede verse íntegramente el surgimiento del Error 1.

Respuesta incorrecta: ambigüedad al interpretar las propiedades

Esta categoría es de respuesta única (estudiante 9), esta puede observarse en la Figura 16.

B. Explique su respuesta
El gráfico representa que la distribución 2 tiene mayor variación, pues se puede apreciar que tiene mayor número de valores en la media.

Figura 16. Respuesta del estudiante 9 a la parte B de la actividad 2, tomada del instrumento de recogida de datos.

El señalamiento del estudiante de que la gráfica II tiene mayor variación es el correcto, reiterado esto de su respuesta al inciso en la parte A, la cual es correcta. La explicación que se observa trata a la variación como la concentración de datos alrededor de la media, lo cual es adecuado, pero equivoca al mencionar que la gráfica dos tiene mayor variación porque “tiene mayor número de valores en la media”, lo cual es contrario al concepto institucional de variación, en el que se habla de que una mayor concentración de datos en, y alrededor, de la media indica una menor variación, ya que esto implicaría que, dicho de manera informal, los datos son más parecidos entre sí, es decir, son menos variados entre ellos como conjunto. No sobra señalar que el cambio de la palabra “mayor” por la palabra “menor”, como se dijo en la parte de los elementos de significado, cambiaría por completo el sentido, volviendo correcta la respuesta. Por tanto, tampoco se desdeña un error por distracción.

Es visible entonces que la identificación de P1, elemento extensivo puesto en juego en la actividad, es alta, debido esto a lo antes mencionado. Ocurre la conversión del RG al RAL, en la parte A, de manera adecuada, pero no pasa así con la parte B, donde se intentó convertir del RAL al LN de manera infructuosa para los elementos ostensivos. El elemento actuario A5 ocurre en ambas partes de la actividad de manera eficiente, aunque en la parte B existió un error, por posible distracción, que no permite calificar como correcta la respuesta. El elemento intensivo E11 es visible en ambas partes de la actividad, mientras que el E12 aparece en la parte A de manera adecuada y, en la parte B, con deficiencias.

Finalmente, el análisis del estudiante muestra que tiene las aptitudes para identificar los conceptos de “variación” y “media”, a pesar de lo antes mencionado respecto a su equivocación.

Respuesta incorrecta: respuesta incompleta

Solo una respuesta (estudiante 6) estuvo incompleta. Esta se ve en la Figura 17.

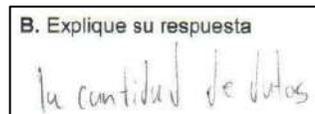


Figura 17. Respuesta del estudiante 6 a la parte B de la actividad 2, tomada del instrumento de recogida de datos.

Esta respuesta se considera incorrecta ya que no concreta idea alguna sobre la actividad. A pesar de que su respuesta al inciso de la parte A fue correcta, la ausencia de explicación indica que, en realidad, el estudiante ha respondido el inciso únicamente por la inercia de hacerlo, pues no tenía una idea clara sobre el conocimiento que esta implicaba, lo cual se comprueba en su respuesta a la parte B. Debido a lo anterior, no es posible identificar alguno de los elementos del significado de referencia en esta respuesta.

5.3 Análisis de la actividad 3

Elementos extensivos

La presente actividad consistía en un tipo de problema P1: ajuste de un modelo a la distribución de datos reales. En la parte A, el planteamiento brindaba a los estudiantes tres valores de desviación estándar σ : 1, 2 y 3. También se presentaban tres curvas de densidad superpuestas, con notorias diferencias de curtosis entre ellas. Los estudiantes debían ubicar los valores de σ en las curvas que ellos consideraban como perteneciente a dicho valor. Por tratarse de tres valores de σ , y tres curvas de densidad presentadas, a cada una de ellas

correspondía un único valor de desviación estándar. Al realizar una ubicación congruente de los valores, los estudiantes manifestaban conocer la propiedad de concavidad y convexidad (E12), tomando como referencia la igualdad de medias entre las tres curvas, es decir, la igualdad en el eje de simetría (E11), para comparar las curtosis.

En la Figura 18 se observa una respuesta esperada (RE) de esta parte, donde se puede ver una ubicación congruente de los valores de σ , además de una comprensión de la igualdad que tenían las tres curvas en cuanto a su eje de simetría (media), reflejado esto en el trazo que el estudiante hace en el gráfico.

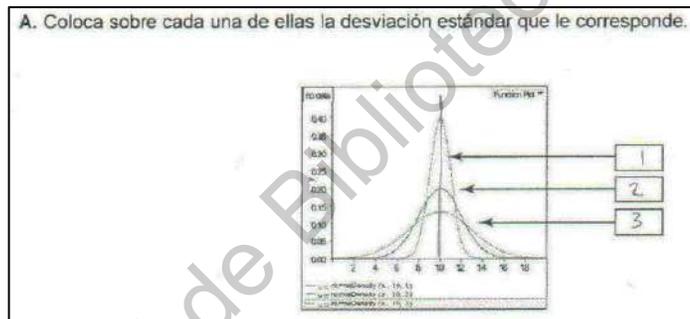


Figura 18. Respuesta del estudiante 3 a la parte A de la actividad 3, tomada del instrumento de recogida de datos.

En la parte B, los estudiantes debían explicar las razones de su asignación de valores de σ en la parte A. Se tenía libertad de criterio para responder en esta parte, y una respuesta podía considerarse correcta aun si esta no aludía al parámetro media μ , misma situación que en la actividad 2, ya que el planteamiento solo alude al parámetro desviación estándar σ . La Tabla 15 muestra estos elementos.

Tabla 15. Elementos extensivos en la actividad 3, creación propia.

Identifica P1 en la parte A	Ubicación de los valores de σ	F	Identifica P1 en la parte B	Comprensión de P1	F
Correcto	Congruente	8	Correcto	(RE) A través de una generalización de la REL2, con énfasis en la igualdad de ejes de simetría	1
				A través de una generalización de la REL2, sin alusiones al eje de simetría	3
Incorrecto	Incongruente	1	Incorrecto	Variación del Error 1	1
				Ambigüedad en general	2
				Poca sustancia	1
				No responde	1
Total		9			9

En la parte A, de la muestra de nueve estudiantes, ocho ubicaron los valores de σ de manera congruente, tal como se muestra en la Figura 18. Solo una de estas respuestas (estudiante 3) se diferenció del resto por trazar el eje de simetría, a lápiz, en el gráfico. De aquí que pueda decirse que dicha estudiante identifique tanto EI1 como EI2. El trazo a lápiz del que se habla puede observarse en la Figura 18. Las otras siete respuestas se limitaron a ubicar los valores de σ . Con ello puede decirse que estos identificaban el EI2 y, de manera implícita, el EI1, aunque no enfatizan en ello.

Una única respuesta fue incorrecta en esta parte. La ubicación de los valores de σ no fue congruente, evidenciando que el estudiante no reconoce EI2. Los valores

de σ se ubicaron incluso de manera totalmente opuesta, lo que permite suponer que el estudiante dio el valor más alto de σ a la curva con más curtosis, es decir, más puntiaguda, debido a un razonamiento que especula el comportamiento de estos dos elementos como directamente proporcionales. En la Figura 19 se observa esta respuesta.

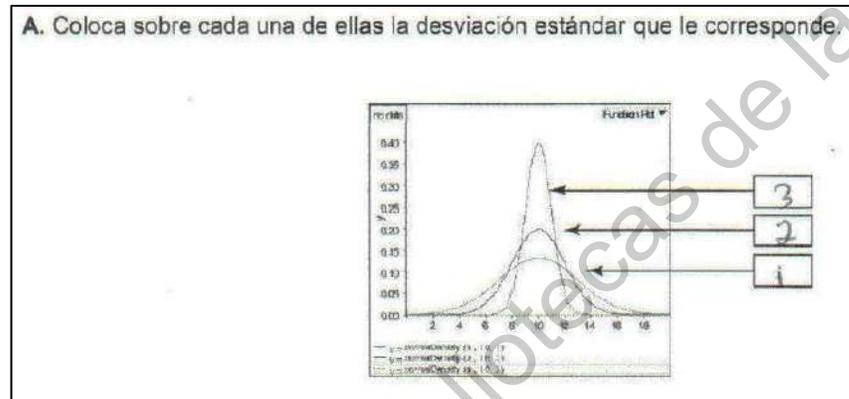


Figura 19. Respuesta del estudiante 4 a la parte A de la actividad 3, tomada del instrumento de recogida de datos.

Para la parte B, se encontraron cuatro respuestas correctas. Tres de ellas (estudiantes 1, 5 y 8) eran generalizaciones de la propiedad EI2, a través de la REL2, idea que relaciona a los valores bajos de desviación estándar σ , como correspondientes a las curvas de mayor curtosis, es decir, más puntiagudas, y viceversa. Debe rescatarse que estas respuestas no aludieron a EI1. Por el contrario, la otra respuesta correcta (estudiante 3), además de hacer esta misma generalización de EI2, tampoco alude a EI1 de manera textual, pero traza a lápiz el eje de simetría en el gráfico del planteamiento, lo que da la idea de que el estudiante entiende que las tres curvas superpuestas comparte el mismo valor de media μ , es decir, el eje de simetría.

Hubo en cambio cinco respuestas incorrectas, y todas ellas fueron diferentes entre sí. Una de ellas (estudiante 2) argumentaba su posicionamiento de los valores de

σ por medio de la tipificación, y partía de que, en esta forma, la desviación estándar σ es igual a 1. La tipificación se sale del marco del planteamiento de esta actividad, por lo que la ambigüedad de esta explicación es bastante elevada, además de incoherente. La explicación del estudiante 7 se consideró como una variación del Error 1, salvo que en esta no interviene el término de *variación*. Esto fue así debido a que el estudiante menciona que las gráficas con mayor altura “tienen menos área”, lo cual es erróneo debido que contradice la propiedad estadística que menciona que el área debajo de la curva es igual a 1. Esta creencia de que las áreas varían de una curva a otra es por lo que se considera parte del Error 1. Una respuesta más (estudiante 9) hacía referencia a un “rango horizontal” como criterio para la ubicación de valores de σ , pero no desarrolla esta idea, por lo que queda altamente ambiguo. La respuesta del estudiante 4 tenía muy poca sustancia, por lo que no es posible ver si identifica alguna de las propiedades involucradas, mientras que el estudiante 6 no respondió a esta parte.

Elementos ostensivos

Implícitas en la actividad estaban tres curvas de densidad superpuestas (RG). Además, complementando el planteamiento, había tres valores de desviación estándar σ : 1, 2 y 3 (RAL). Ubicar de manera congruente los valores de σ significaba que la conversión del RG al RAL era correcta. Esto en la parte A. Para la parte B, la explicación de la asignación podía hacerse en el registro de representación que el estudiante considerara pertinente, por lo que se esperaba una conversión al LN, incluso con referencias del RAL. En la Tabla 16 se observa estos elementos.

Tabla 16. Elementos ostensivos en la actividad 3, creación propia.

Respuesta (Parte A)	Actividad cognitiva realizada (Parte A)	F	Respuesta (Parte A)	Actividad cognitiva realizada (Parte B)	F
Correcta	Conversión del RG al RAL	8	Correcta	Conversión del RAL al LN	4
Incorrecta		1	Incorrecta		5
Total		9			9

Para la parte A, de la muestra de nueve estudiantes, ocho de ellos respondieron correctamente, realizando con ello la conversión del RG al RAL. Siete de estas respuestas fueron como se observa en la Figura 18, en cuanto a la colocación de valores de σ . Solo una respuesta (estudiante 3) consideró realizar un tratamiento dentro del RG, trazando el eje de simetría en las curvas superpuestas ya implícitas en la actividad.

La única respuesta incorrecta, que no realiza la conversión esperada, se observa en la Figura 19. Esto indica que los puntos cognitivos que debían trasladarse de un registro a otro, para que la conversión fuera la esperada, no son claros para el estudiante. Estos puntos son, en primer lugar, la influencia de la desviación estándar σ en la curtosis, y segundo, la media μ como eje de simetría de la curva de densidad, y su coincidir, en este caso, las tres curvas en μ igual a 10.

En la parte B, fueron cuatro las conversiones correctas. Todas fueron generalizaciones de la REL2 para referirse al EI2. Tres de ellas (estudiantes 1, 3 y 8) se realizaron al LN, creando así una conversión del RG al LN. Mientras que una (estudiante 5) se hizo también al LN pero con contenido del RAL para hablar de los parámetros, haciendo así una generalización de REL2 un tanto más formal.

Las cinco respuestas incorrectas no realizan algún tipo de conversión. Solo una de ellas (estudiante 2) resalta del resto porque alude a la tipificación en el hecho de que σ es igual a 1, pero no escribe las fórmulas, quedándose solo en LN. Así

también ocurre en tres de las respuestas (estudiantes 4, 7 y 9), que intentan conducirse al LN, pero no encuentran los puntos cognitivos adecuados para ello, por lo que la conversión no ocurre. El estudiante 6 no respondió a esta parte de la actividad.

Elementos actuativos

El accionar de los estudiantes en esta actividad estaba regido por el elemento actuativo A5: comparación entre distribuciones con parámetros distintos. En la Tabla 17 se observan los resultados para estos elementos.

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Tabla 17. Elementos actuativos en actividad 3, creación propia.

Realización de A5 (Parte A)	Cognición de A5 (Parte A)	F	Realización de A5 (Parte B)	Cognición de A5 (Parte B)	F
Correcto	Identifica, en las tres curvas, la diferencia entre curtosis (REL2) y la similitud del eje de simetría (REL1), a través de la colocación de diferentes valores de desviación estándar σ	8	Correcto	(RE)	1
				Generaliza la REL2 y enfatiza la similitud de ejes de simetría (media) al trazarlo dentro de la gráfica	
Incorrecto		1	Incorrecto	Generaliza la REL2 sin hacer alusiones a la media	3
				Comparación basada en percepciones visuales (Variación de Error 1)	1
				Comparación ambigua	2
				Poca sustancia	1
				No responde	1
Total		9			9

Para la parte A, de la muestra de nueve estudiantes, ocho de ellos (todos excepto el estudiante 4) realizaron correctamente la comparación entre los parámetros de las tres curvas. Con esto se entiende que comparan los parámetros media μ , comparando los ejes de simetría de las tres curvas, y desviación estándar σ , comparando las curtosis. De la comparación de ejes de simetría, los estudiantes notaban su igualdad, por lo que μ tenía el mismo valor para las tres distribuciones dadas, en este caso, un valor de 10. De la comparación de curtosis se debía notar

que las tres eran distintas, por lo que era necesario precisar sobre cuál valor de σ era el apropiado para cada una. Bajo el entendimiento de EI2 a través de la REL2, los estudiantes razonaron como inversamente proporcionales los valores de σ con la curtosis, de modo que el criterio para ubicar estos valores fue ese, quedando la curva con más curtosis, más puntiaguda, con el valor de σ igual a 1, y así sucesivamente. Todas estas cuestiones se observan en la Figura 18.

La única respuesta incorrecta (estudiante 4) indica un razonamiento exactamente opuesto al descrito en el párrafo anterior. Es posible que el criterio de comparación utilizado por este estudiante haya sido que, a mayor altura de la curva, mayor valor de σ . Para confirmar esto, es necesario ver su explicación. La respuesta a la parte A se observa en la Figura 19.

En la parte B, se encontraron cuatro respuestas correctas. Todas ellas utilizan el mismo criterio de comparación, siendo este un tipo de razonamiento en que los valores de σ dados —1, 2 y 3—, son inversamente proporcionales a la altura de las curvas. De manera que, a la curva más alta corresponde el valor más bajo, 1, y así sucesivamente para las demás curvas. Esto se engloba en la REL2, como medio de los estudiantes para acercarse a EI2. Tres de las respuestas (estudiantes 1, 3 y 8) aluden a esta relación de manera textual, mientras que una de ellas (estudiante 5) construye una estructura utilizando simbología para los parámetros, intentando ser más formal pero, en contenido, es exactamente igual.

Las cinco respuestas incorrectas en esta parte fueron distintas. En una respuesta (estudiante 2) se intenta realizar A5 a partir de una idea de tipificación, entendiéndose que el estudiante considera que los valores de σ dados en el planteamiento son valores ya tipificados, lo cual es erróneo y deviene en una explicación ambigua. Otra respuesta (estudiante 7) intenta esbozar una explicación alusiva a la REL2, pero equivoca al mencionar que “las campanas que tienen mayor altura tienen menos área”, y por ello “su desviación estándar es

menor”. Esto es incoherente, ya que indica que el criterio para realizar A5 fue la creencia de que las áreas de las curvas son diferentes, contradiciendo así la propiedad estadística de que el área debajo de la curva es igual a 1.

La respuesta del estudiante 9 refiere, como criterio para hacer A5, a un “rango horizontal”. Al no explicar lo que esto significa, o dar una interpretación de él, no es posible saber a qué se refiere, y resulta ambiguo. Por último, lo escueto de la respuesta del estudiante 4 —“por la forma de la curva dada” —no permite notar el criterio que éste tuvo para hacer su comparación, si es que hizo una. No obstante, esto concuerda con su respuesta a la parte A, la cual puede verse en la Figura 19. El estudiante 6 no respondió a esta parte de la actividad.

Elementos intensivos

Las propiedades de la distribución normal involucradas en esta actividad fueron dos, EI1: simetría respecto al eje vertical (media); y EI2: concavidad y convexidad. La Tabla 18 especifica la forma en que surgieron estos elementos.

Tabla 18. Elementos intensivos en actividad 3, creación propia.

Respuesta (parte A)	Elementos intensivos aparecidos (parte A)	F	Respuesta (parte B)	Elementos intensivos aparecidos (parte B)	F
Correcta	EI1 y EI2	8	Correcta	(RE) EI1 y EI2	1
				Sólo EI2	3
Incorrecta	Ninguno	1	Incorrecta	Variación de Error 1	1
				Ambigüedad en los EI	2
				Poca sustancia	1
				No responde	1
Total					9

En la parte A, de la muestra de nueve estudiantes, fueron ocho los que identificaron ambas propiedades. Esto se percibe de la congruencia con que ubicaron los valores de desviación estándar σ . Tal como se ha mencionado en los elementos de significado anteriores, solo una respuesta (estudiante 3) enfatiza sobre la similitud del eje vertical entre las tres curvas, haciéndolo mediante un trazo a lápiz, evidenciando un conocimiento directo de ambas propiedades. Las otras siete se limitan a la ubicación de valores de σ , lo cual también es correcto y exhibe un conocimiento de EI2, y un conocimiento indirecto de EI1.

Solo una de las respuestas fue incorrecta (estudiante 4). Al ubicar los valores de σ de manera incongruente, el estudiante demuestra no tener conocimiento directo de EI2, y dejando al margen su conocimiento de EI1.

Para la parte B, fueron cuatro estudiantes los que respondieron correctamente (estudiantes 1, 3, 5 y 8). Tres de estas respuestas (1, 5 y 8) fueron generalizaciones de la relación REL2, bajo la cual comprendían los estudiantes a EI2, y que atribuyen a que mayor altura de la curva, menor valor de desviación estándar σ , y viceversa. En estas generalizaciones no hubo alusión de ningún tipo al EI1, por lo que se dice que su conocimiento es indirecto. Contrario a esto, la otra respuesta correcta (estudiante 3), aunque no alude textualmente a EI1, sí traza un eje de simetría en el gráfico, bajo el cual se entiende que el estudiante expresa la igualdad de ejes de simetría.

Las respuestas incorrectas en esta parte fueron cinco, todas ellas disimiles entre sí. Una de ellas (estudiante 2) refiere a la tipificación, desdeñando las relaciones REL1 y REL2 para ello, con lo que se entiende que, al hacer esto, el estudiante se desvía de las propiedades involucradas en la actividad. Por otra parte, la respuesta del estudiante 9 contiene cierto grado de ambigüedad al hablar de un “rango horizontal”, el cual, a falta de explicaciones detalladas, no contiene referencias a ninguna de las propiedades. Una respuesta más (estudiante 7)

contiene una generalización de la REL2, pero equivoca al relacionar desviación estándar σ con “tamaño de áreas”, argumentando que las áreas disminuyen o aumentan de tamaño según su valor de σ , lo cual contradice directamente a la propiedad estadística EI3: área bajo la curva igual a uno.

Por último, la respuesta del estudiante 4 es poco sustanciosa ya que no demuestra conocimiento alguno de las propiedades, mientras que el estudiante 6 no responde a esta parte de la actividad.

Elementos validativos

Por las mismas razones que en las actividades pasadas, los elementos validativos en esta actividad también quedaban a criterio del estudiante. En la parte A, no aparecían estos elementos, debido a la naturaleza del planteamiento. La Tabla 19 muestra estas validaciones.

Tabla 19. Elementos validativos en actividad 3, creación propia.

Validación (parte A)	Validación (parte B)	Elemento validativo utilizado	Contenido de la validación	F
No aplica	Correcto	Generalización	(RE) Establece como regla general las relaciones REL1 y REL2, además de trazar el eje de simetría de las gráficas	1
		Generalización	Establece como regla general las relaciones REL1 y REL2	3
	Incorrecto	Análisis	Variación de Error 1	1
		Análisis	Ambigüedad de conceptos	2
		Síntesis	Poca sustancia	1
			No responde	1
Total				9

En la parte B de esta actividad, se tuvieron cuatro respuestas correctas (estudiantes 1, 3, 5 y 8). Todas ellas fueron generalizaciones en las que, de manera textual, aludían a la REL2, la cual es descrita en los elementos de significado anteriores, y en las que se utilizaba lenguaje simbólico para referirse a los parámetros. Solo una de estas respuestas (estudiante 3) se complementa con un trazo dentro del gráfico implícito en el planteamiento, aunque no lo detalla en su explicación, deja la sensación de que ha sido utilizado por el estudiante para analizar el problema y, posteriormente, hacer su generalización. Esta última se consideró la respuesta esperada (RE).

Las cinco respuestas incorrectas variaron en su intento de expresar elementos validativos. Una de ellas (estudiante 2) se trató de un análisis incorrecto por aludir a un tema que no estaba dentro del marco de la actividad; y otro intento de análisis también resultó no adecuado debido a su ambigüedad (estudiante 9). Así también hubo respuestas con generalizaciones incorrectas (estudiante 7), que derivaron en variaciones del error 1, detallado esto en los elementos de significado anteriores. La poca sustancia en la respuesta del estudiante 4, y la no respuesta del estudiante 6, imposibilitan un análisis más profundo.

5.3.1 Trayectorias cognitivas en la actividad 3

Fueron seis las trayectorias cognitivas que surgieron de las respuestas en esta actividad. Dos de ellas fueron correctas y cuatro incorrectas. Las trayectorias correctas se nombran de la siguiente manera: comprensión directa las propiedades EI1 y EI2; y comprensión directa de EI2 e indirecta de EI1. Las trayectorias incorrectas son: variación del error 1, ambigüedad al interpretar las propiedades, poca sustancia, y no responde.

Respuesta correcta: comprensión directa de las propiedades EI1 y EI2

Solo una respuesta (estudiante 3) entra en esta categoría, la cual se muestra en la Figura 20.

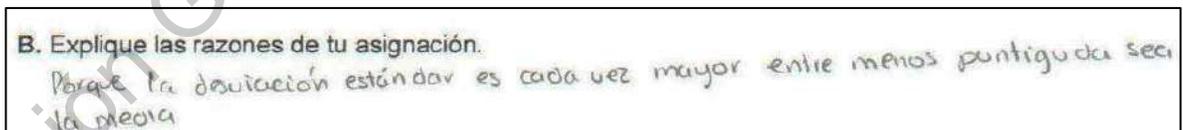


Figura 20. Respuesta del estudiante 3 a la parte B de la pregunta 3, tomada del instrumento de recogida de datos.

Esta explicación se complementa con la respuesta expuesta previamente en la Figura 18. En ella se nota una generalización respecto a la curtosis: “la desviación estándar es cada vez mayor entre menos puntiaguda sea la media”, la cual refiere

a lo que se ha conocido en este estudio como REL2. Como se ha dicho antes, aunque no se escriba de manera textual el conocimiento de la media como eje de simetría de la curva de densidad, el trazo a lápiz de este eje en el gráfico permite reconocer que el estudiante identifica esta cuestión en el planteamiento.

Lo anterior decae en un conocimiento general de P1, ajuste de un modelo a la distribución de datos reales, de los elementos extensivos. Esto ocurre a través de las conversiones pertinentes: del registro gráfico (RG) al registro alfanumérico (RAL) en la parte A; y del RAL al lenguaje natural (LN) en la parte B, esto refiriendo a los elementos ostensivos. En cuanto a los elementos actuativos, se realizó de manera pertinente A5: comparación de distribuciones con parámetros distintos, reflejándose con ello los elementos intensivos involucrados, EI1 y EI2, descritos anteriormente. Finalmente, ya que de manera informal se ha llegado a una conclusión que pudiera aplicarse a otros casos, se considera esta respuesta como una generalización, la cual pertenece a los elementos validativos del significado de referencia.

Respuesta correcta: comprensión directa de EI2 e indirecta de EI1

Tres respuestas (estudiantes 1, 5 y 8) entran en esta categoría. Como ejemplo prototípico de esta categoría se muestra la respuesta del estudiante 5 en la Figura 21.

Más puntiaguda (campana) = menor σ (desviación)

$\sigma=1$ = ~~Mucha~~ Más puntiaguda

$\sigma=2$ = Mitad (neutra)

$\sigma=3$ = Menos puntiaguda

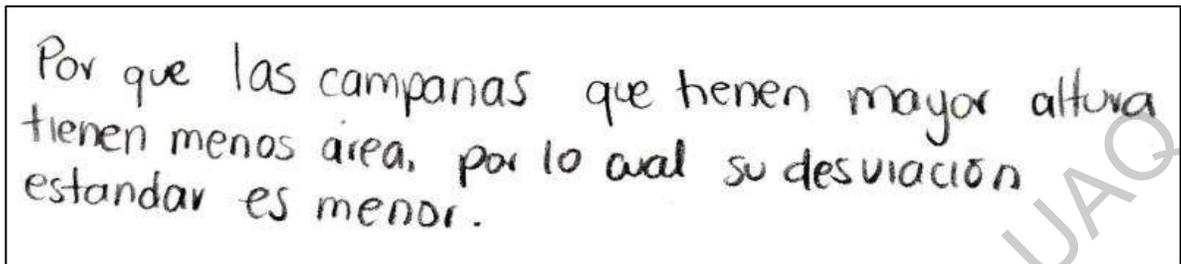
Figura 21. Respuesta del estudiante 5 a la parte B de la actividad 3, tomada del instrumento de recogida de datos.

El lenguaje simbólico es utilizado en esta respuesta para hablar de los valores de σ dados en el planteamiento. Complementando esto está la generalización entre curtosis y valor de σ . Resultado de esta conjunción es el razonamiento del estudiante sobre los valores de σ dados, con la generalización hecha por ella misma, lo cual resulta correcto. Por otro lado, no se hace mención alguna a la media μ , por lo que se considera que el conocimiento de esta como eje de simetría de las curvas es indirecto, al ser correcta la respuesta.

Tras esto, se considera que el estudiante reconoce P1. Además las conversiones de RG al RAL, parte A, y RAL al LN, parte B, también son pertinentes. El actuar, A5, también se considera adecuado, ya que compara los valores de σ dados en el planteamiento, sustentados estos en su curtosis, es decir, ocurre una doble comparación: una numérica y una geométrica. Esto saca a la luz la presencia de los elementos intensivos, específicamente de EI2, y de EI1 de manera indirecta, como se dijo antes. El análisis del planteamiento, por parte del estudiante, da pie a una generalización que le resulta efectiva y es, además, un elemento validativo del significado de referencia.

Respuesta incorrecta: variación del error 1

En esta categoría entró una respuesta (estudiante 7). En la Figura 22 se puede observar íntegramente.



Por que las campanas que tienen mayor altura tienen menos área, por lo cual su desviación estandar es menor.

Figura 22. Respuesta del estudiante 7 a la parte B de la actividad 3, tomada del instrumento de recogida de datos.

Del Error 1, creencia de que las áreas varían de una curva de densidad a otra, se nutre esta respuesta. La particularidad es que el estudiante sostiene que las curvas, a “mayor altura tienen menos área”, y por lo cual “su desviación estándar es menor”. La creencia contenida en la relación: *menor desviación estándar-mayor altura de curva-menos área de curva*, deriva en errores conceptuales que, a pesar de haber respondido correcto la parte A, se reflejan fuertemente en sus interpretaciones al explicar.

El conocimiento de P1 es regular, debido justamente a que solo la parte A es correcta. La conversión del RG al RAL ocurre de forma adecuada, pero no así la del RAL al LN, que se puede observar en la Figura 22 y contiene una variación del Error 1 que fue explicada anteriormente. En lo particular, la realización de A5 fue pertinente en la parte A, pero en la parte B contiene la relación mencionada en el párrafo anterior, la cual viene directamente de una interpretación errónea del área bajo la curva, cuando se trata de comparar curvas con parámetros diversos. De ahí que los elementos intensivos aparezcan en la parte A, EI2 de manera directa y EI1 de manera indirecta, pero no en la parte B. El análisis, elemento validativo seleccionado por el estudiante, es erróneo debido a que no contiene el aparato cognitivo pertinente, esto basado en las afirmaciones anteriores.

Respuesta incorrecta: ambigüedad al interpretar las propiedades

Una respuesta se incluye solamente en esta categoría (estudiantes 2 y 9), y se muestra en la Figura 23.

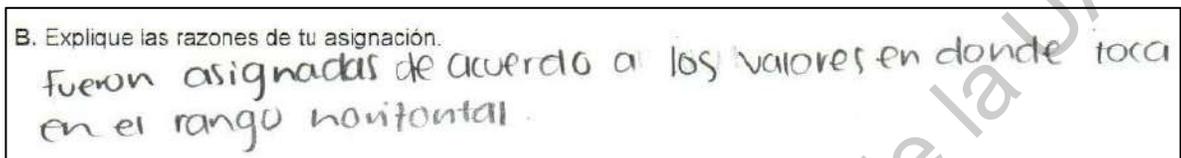


Figura 23. Respuesta del estudiante 9 a la parte B de la actividad 3, tomada del instrumento de recogida de datos.

La ambigüedad de esta respuesta recae en que el criterio de asignación fue “el rango horizontal”. Pudiendo ser este concepto una alegoría del estudiante a ciertas características de la distribución normal, se queda solo en una mención, prescindiendo de una explicación, por lo cual solo deja una carga de ambigüedad.

Una vez más el conocimiento de P1 es regular, ya que la parte A es correcta. La conversión del RG al RAL ocurre de manera coherente, no así la del RAL al LN, que no concluye su conversión entre registros. El accionar de A5 en A es correcto, pero deja una alta carga de ambigüedad en B al mencionar un “rango horizontal”, como criterio de comparación, que se aleja de lo convencional y resulta difícil de interpretar en un análisis. EI1, de manera indirecta, y EI2, de manera directa, surgen en A, pero a ninguno es posible identificarlo en B. El análisis, elemento validativo escogido por el estudiante, resulta vago, e incluso poco sustancioso, por lo que no se considera adecuado.

Respuesta incorrecta: poca sustancia

Solo una respuesta cae en esta categoría (estudiante 4). Puede observarse ésta en la Figura 24.

B. Explique las razones de tu asignación.

Por la forma de la curva dada.

Figura 24. Respuesta del estudiante 4 a la parte B de la actividad 3, tomada del instrumento de recogida de datos.

Hay poco que decir respecto a esta respuesta, ya que carece ampliamente de contenido epistemológico sobre la distribución de probabilidad normal. El tipo de problema P1 no es identificado por el estudiante en ninguna de las partes de la actividad. Tampoco ocurren las conversiones esperadas en A y B. Así pues, A5 no se realiza, y los elementos intensivos están ausentes. La síntesis, por llamar de alguna forma a esta respuesta, se cataloga de ese modo por su extensión, referenciando a los elementos validativos, pero carece de todo contenido que pueda ser analizado.

Respuesta incorrecta: no responde

En esta categoría está el estudiante 6 que, sin embargo, responde correctamente a la parte A. La falta de explicación permite dimensionar que el estudiante en realidad no tiene los conocimientos para responder a esta actividad, y que su respuesta en A pudo haber sido obtenido por otros medios y no por los propios. Esto se confirma por la ausencia de respuesta en B. Por obviedad, no se observa ninguno de los elementos de significado en esta parte de la actividad.

5.4 Análisis de la actividad 4

Elementos extensivos

El problema tipo P1: ajuste de un modelo a la distribución de datos reales, era el que presentaba esta actividad. En el planteamiento se mostraban dos conjuntos de seis datos, *Bloque A* y *Bloque B*, y los parámetros media μ y desviación estándar σ de cada uno de ellos.

En la parte A, los estudiantes debían representar gráficamente estos conjuntos, bajo la premisa de que su comportamiento era acorde a una distribución normal. Estas representaciones debían ser acordes a los parámetros dados, es decir, que mostraran las características geométricas atribuidas por los parámetros. Ambos conjuntos compartían un mismo valor de μ , 35, mientras que diferían en σ , con 18.71 para el *Bloque A*, y 27.39 para el *Bloque B*. Bajo esta premisa, y acorde a las relaciones utilizadas por los estudiantes, la curva de densidad debía tener el mismo valor en el eje de simetría, 35, y la curva del *Bloque A* debía tener más curtosis, ser más puntiaguda, que las del *Bloque B*. Al ser de criterio libre, los estudiantes podían bosquejar sus gráficas de la forma que ellos consideraran más pertinente.

En la parte B, los estudiantes debían explicar la diferencia existente entre estas curvas. Debido a que la instrucción no especificaba de qué manera debía hacerse esta explicación, esta resultaba a criterio del estudiante. La Tabla 20 muestra los elementos extensivos para esta actividad.

Tabla 20. Elementos extensivos en actividad 4, creación propia.

Identifica P1 (Parte A)	Representación gráfica	F	Identifica P1 (Parte B)	Comprensión de P1	F
Correcto	Acorde a los parámetros dados: media μ y desviación estándar σ	4	Correcto	Desde la REL2	1
				A través de una idea de probabilidad	1
				Desde una relación de los parámetros μ y σ	1
Incorrecto	Acorde solo al parámetro μ , y erróneo para σ	3	Incorrecto	Variación del Error 1	1
				Error particular referente a σ	1
				Alusión a la diferencia de σ , pero sin haberlo reflejado gráficamente	2
				Poca sustancia	1
				No responde	1
	Incongruente	2			
Total		9			9

En la parte A, de la muestra de nueve estudiantes, fueron cuatro de ellos los que respondieron correctamente. Las diferencias en esencia entre estas respuestas fueron poco sustanciosas, ya que precisaban una adecuada adaptación de las características geométricas, y únicamente variaron en la representación escogida por los estudiantes.

Dos de ellas (estudiantes 8 y 9) bosquejaron dos curvas de densidad independientes, una para cada conjunto de datos, y en ellas era notoria la diferencia de curtosis, siendo más pronunciada la del *Bloque A*, con lo que indicaban menor variación en dicho conjunto de datos, proveniente esto de un

menor valor de σ que el *Bloque B*. Mención específica del estudiante 9, quien intenta calcular las probabilidades involucradas, pero no lo hace con éxito. En este mismo sentido estuvo otra respuesta (estudiante 7), solo que para ello hizo uso de dos curvas superpuestas.

Por último, hubo una respuesta (estudiante 3) que utilizó ambas representaciones: dos curvas de densidad, independientes, en las que resaltaban las respectivas características geométricas, y en un espacio aparte dos curvas superpuestas que enfatizaban la diferencia entre ellas.

En caso contrario, fueron cinco los estudiantes que respondieron erróneamente a esta parte de la actividad. Dos de ellos utilizan curvas superpuestas (estudiantes 1 y 5), mientras que una utiliza curvas de densidad independientes (estudiante 2). En todas ellas se percibe un conocimiento de la media μ como eje de simetría, pero no se refleja geoméricamente la desviación estándar σ . Por otra parte, dos respuestas más (estudiantes 4 y 6) cayeron en una completa incongruencia.

En un caso particular, el estudiante 5 utilizó los valores de σ como los valores que debían tener las alturas de las curvas en el eje y , lo cual le resultó erróneo y propició en los análisis para categorizar al Error 2: utilización incorrecta del eje vertical de la gráfica.

El Error 2 estuvo presente en las respuestas de los estudiantes 1, 4, 5 y 6. Es decir, todos ellos utilizaron el eje vertical de la gráfica para representar valores no adecuados pues, cabe mencionar, el eje y en este tipo de gráficos representa a la probabilidad $p(x)$, valores decimales que indican probabilidad, justo como se muestra en las gráficas de los planteamientos en las actividades 1, 2 y 3. Mientras que los estudiantes les atribuían valores enteros, seguramente influidos por los datos mostrados en los conjuntos de los *Bloques A y B*.

En la parte B, se encontraron tres respuestas correctas. Una de ellas hacía referencia a la REL2 (estudiante 8), mientras que otra hizo referencia a la probabilidad acumulada en las diferentes regiones de la curva (estudiante 9). Una respuesta más (estudiante 3) resultó tener cierto grado de ambigüedad, pues se basaba en el intervalo $\mu \pm \sigma$ para explicar la diferencia entre curvas, lo cual deja cierto grado de superficialidad en su argumento.

Las seis respuestas incorrectas fueron distintas entre sí. En una de ellas (estudiante 7) se observa el Error 1, pues menciona que la diferencia entre las curvas bosquejadas, que fueron correctas en este caso, se debía a que estas tenían diferente área, algo que ya ha sido analizado en actividades anteriores. Dos más (estudiantes 1 y 2) explican textualmente que existe una diferencia entre los valores de σ pero no profundizan al respecto, aunque al no haber respondido correcto en la parte A, no podía esperarse más profundidad.

La respuesta del estudiante 5 fue acorde a su bosquejo, y su contenido fue la misma incongruencia de sus gráficos, es decir, argumentaba que el *Bloque B* tenía menos variación porque la curtosis de su gráfica era más alta, según una generalización de la REL2, pero esto no tenía razón ya que su valor de σ era más alto, resultando contradictorio. Se deduce por ello que el origen de esta respuesta es una errónea interpretación de σ . Poco sustanciosa e incoherente resulta la respuesta del estudiante 4, mientras que el estudiante 6 no responde a esta parte.

Elementos ostensivos

En la actividad estaban ya presentes términos numéricos y de lenguaje simbólico referente a la distribución normal. Específicamente, dos bloques, *A* y *B*, con seis números enteros cada uno, además de los valores de los parámetros media μ y desviación estándar σ en cada uno. Todo lo cual pertenece al registro alfanumérico (RAL). En la parte A, se pedía a los estudiantes que bosquejaran las gráficas pertenecientes a cada uno de estos bloques, lo que requería una

conversión del RAL al registro gráfico (RG). Mientras que la parte B pedía explicaciones sobre la diferencia que había entre las dos gráficas hechas por los estudiantes. Aunque de criterio libre, en esta parte se esperaba una conversión del RG al lenguaje natural (LN). La Tabla 21 arroja los resultados a estos elementos.

Tabla 21. Elementos ostensivos en actividad 4, creación propia.

Respuesta (Parte A)	Actividad cognitiva realizada (Parte A)	F	Respuesta (Parte A)	Actividad cognitiva realizada (Parte B)	F
Correcta	Conversión del RAL al RG	4	Correcta	Conversión del RG al LN	3
Incorrecta		5	Incorrecta		6
Total		9			9

En la parte A, de la muestra de nueve estudiantes, fueron cuatro los que realizaron la conversión del RAL al RG. Esta conversión ocurrió de distintas formas. Dos de ellas fueron a través de curvas de densidad independientes (estudiantes 8 y 9), resaltando el caso del estudiante 9, que utiliza lenguaje simbólico para anotar las probabilidades de los conjuntos de datos, aunque estas sean incorrectas. Otra más utiliza curvas superpuestas (estudiante 7), y solo una de ellas (estudiante 3) utiliza ambas representaciones, curvas de densidad y superpuestas.

Las cinco respuestas incorrectas fueron distintas entre sí. Las representaciones gráficas de dos ellas (estudiantes 1 y 2) no reflejaban la influencia de σ en ellas: el estudiante 2 hizo una curva de densidad para cada bloque, pero estas eran similares en curtosis, por otra parte, no grafica al eje y en sus bosquejos; el estudiante 1 utilizó curvas superpuestas, pero la diferencia entre ellas era el largo de la curva en el eje x, es decir, debido a que el intervalo $\mu \pm \sigma$ era distinto, el estudiante consideró apropiado solo resaltar esa diferencia, pero no sobre la curtosis, ya que las alturas de sus curvas son las mismas, y reflejan el Error 2.

El estudiante 5 utiliza también curvas superpuestas, pero en estas sí establece una diferencia de curtosis, solo que lo hace de manera incongruente. Al variar en valor de σ , el estudiante comprende que las curtosis son diferentes, pero lo refleja de manera incorrecta, pues considera a los valores de σ como las alturas de las curvas. Reflejando con ello el Error 2.

Se tuvieron además dos representaciones incongruentes. Una de ellas (estudiante 4) representó unos esbozos de ojivas “menor que” para cada bloque; mientras que la otra (estudiante 6) eran gráficos de barras con visibles incongruencias. En ambas respuestas estuvo presente el Error 2.

En la parte B, se tuvieron tres respuestas correctas, y en todas ellas se hace la conversión del RG al LN. Dos de ellas se limitan al LN, y explican la diferencia entre las curvas, una a través de la REL2 (estudiante 8), y la otra a través de la probabilidad acumulada (estudiante 9) aunque sus cálculos de esta fueron incorrectos. Una más (estudiante 3) complementa al LN con lenguaje simbólico para hablar del intervalo $\mu \pm \sigma$, pero lo hace con ligera ambigüedad, aunque no erróneo.

No hubo diferencias significativas entre los elementos ostensivos de las seis respuestas incorrectas. Cinco de ellas (estudiantes 1, 2, 4, 5 y 7) fueron hechas en LN, pero no cumplían con la cognición requerida para completar efectivamente una conversión del RG al LN. La respuesta del estudiante 7 fue la única de estas que sí había respondido correcto a la parte A, pero en su explicación se reflejó el Error 1. Por último, el estudiante 6 no respondió a esta parte.

Elementos actuativos

En esta actividad debían realizarse los elementos A1: estudio descriptivo de datos para ajustar una curva, bajo el cual se decide si los datos pertenecen o no a

una distribución normal, hecho esto por medio de representaciones gráficas y comprobación de parámetros; y el A5: comparación de puntuaciones diversas.

Es necesario decir que ambos elementos, A1 y A5, ocurrían en simultáneo, de ahí que la Tabla 22 los muestre en conjunto. Esto es así porque los estudiantes, al representar gráficamente de acuerdo a los parámetros dados (realización de A1), debían hacerlo en base a una comparación entre los parámetros de ambos bloques (realización de A5). En palabras generales, al tratarse de bosquejos propiamente, los estudiantes debían comparar (A5) para poder bosquejar sus gráficos (A1), y sus bosquejos representarían justamente esta comparación (A5, una vez más), creando así una especie de interdependencia.

Debido a esto, se decidió elaborar tipos de realización de A1/A5. Los cuales se describen a continuación:

Tipo 1: representa gráficamente los conjuntos de datos respecto a los parámetros dados μ y σ (A1), adecuada ubicación de ejes de simetría y curtosis de curvas, respectivamente, enfatizando las diferencias entre los parámetros de ambas distribuciones (A5). Esta se ve en la Figura 25.

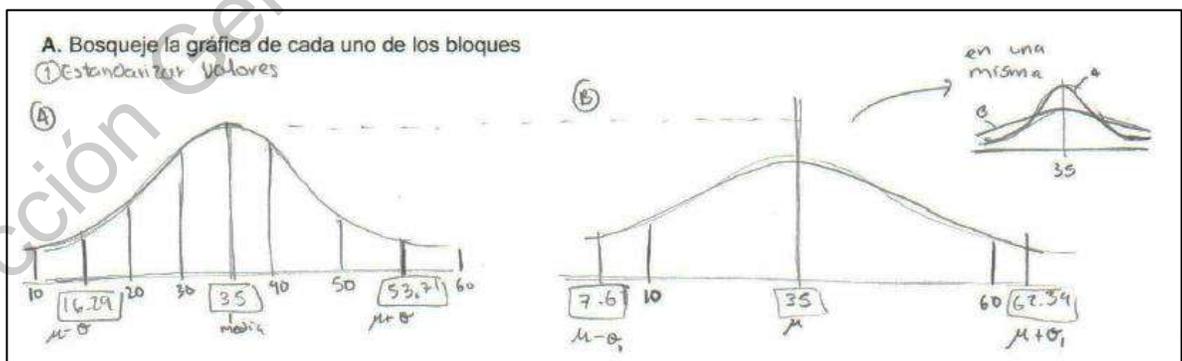


Figura 25. Ejemplo de realización tipo 1 de A1/A5, tomada del instrumento de recogida de datos.

Tipo 2: representa gráficamente los conjuntos de datos respecto solo al parámetro μ (A1), es decir, el estudiante entiende que μ define al eje de simetría, pero no señala en sus gráficos la diferencia entre las desviaciones estándar σ , es decir, las curtosis de las curvas no muestran la diferencia que deberían mostrar (A5). En la Figura 26 se observa este actuar.

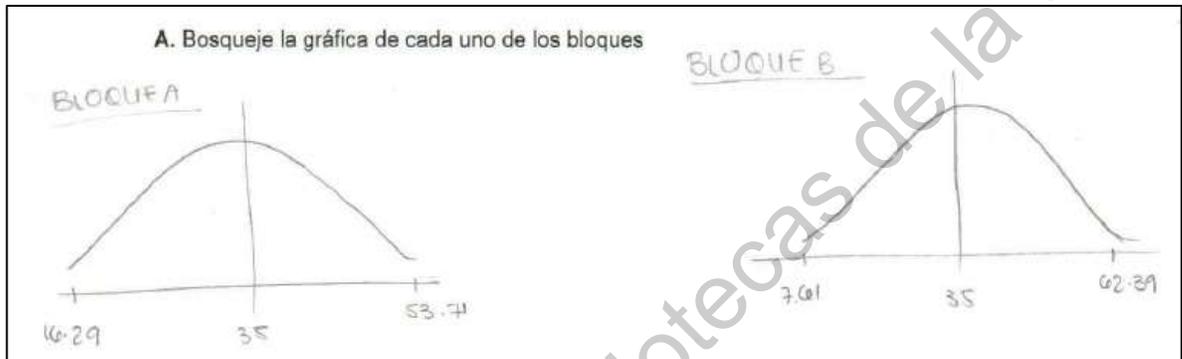


Figura 26. Ejemplo de realización tipo 2 de A1/A5, tomada del instrumento de recogida de datos.

Tipo 3: representaciones gráficas incongruentes, ya que no solo se alejan de las representaciones esperadas, sino que muestran un bajo, o nulo, conocimiento de las características geométricas de los parámetros μ y σ en la distribución de probabilidad normal. Esta respuesta se ve en la Figura 27.

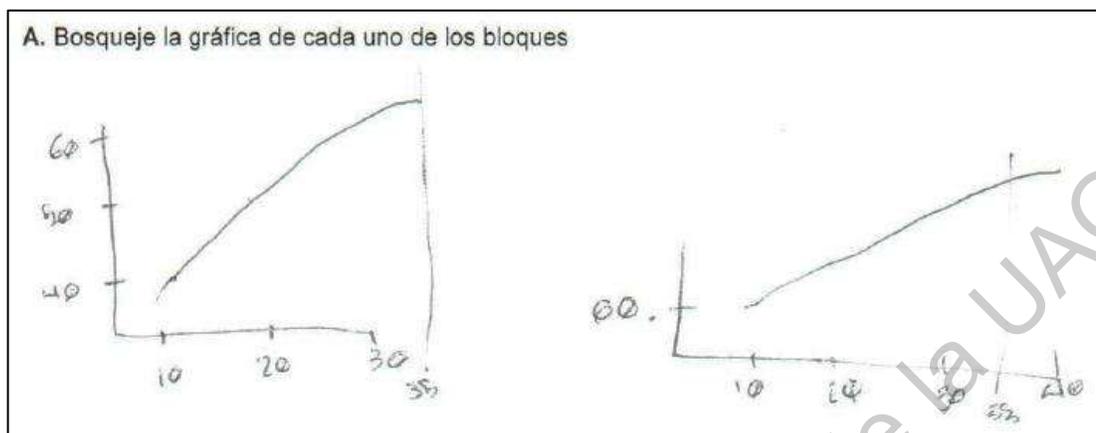


Figura 27. Ejemplo de realización tipo 3 de A1/A5, tomada del instrumento de recogida de datos.

En la Tabla 22 se muestran los elementos actuativos y los tipos de respuesta que se generaron desde estos.

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Tabla 22. Elementos actuativos en la actividad 4, creación propia.

Realiza A1/A5 (Parte A)	Resultado de realizar A1/A5	F	Realiza A1/A5 (Parte B)	Explicación de A1/A5	F
Correcto	Tipo 1	4	Correcto	Desde la REL2	1
				A través de una idea de probabilidad	1
				Con ambigüedad en el intervalo $\mu \pm \sigma$	1
Incorrecto	Tipo 2	3	Incorrecto	Variación del Error 1	1
				Error particular referente a σ	1
				Alusión a la diferencia de σ , pero sin haberlo reflejado gráficamente	2
	Tipo 3	2		Poca sustancia	1
				No responde	1
Total		9			9

En la parte A, de la muestra de nueve estudiantes, fueron cuatro de ellos los que entran en la categoría *tipo 1*. En todas ellas se puede apreciar que los estudiantes reconocen, de manera general, la influencia de los parámetros μ y σ sobre la curva de densidad. Dos de ellas (estudiantes 8 y 9) lo hacen a través de curvas de densidad, y ubican en el eje x todos los valores del conjunto, no solo el de la media μ . El estudiante 9 además calcula valores de probabilidad para los datos dentro del conjunto, e intenta graficar en base a estos, pero no lo hace de manera adecuada, aunque sus gráficos contienen las características geométricas pertinentes.

Una respuesta (estudiante 7) contiene dos curvas superpuestas con notorias diferencias entre curtosis, siendo la del *Bloque A* más “puntiaguda” que la del *Bloque B*, y señalando en el eje valor el de μ . La respuesta con más contenido es la mostrada en la Figura 25 (estudiante 3). En ella se observan dos curvas de densidad, una para cada bloque, con señalamiento de los datos en el eje x, el valor de μ , y los valores del intervalo $\mu \pm \sigma$. En la esquina superior derecha se ve además un bosquejo de dos curvas superpuestas, de lo cual se deduce la intención del estudiante por enfatizar la diferencia de curtosis entre las curvas.

Cabe mencionar que todas estas respuestas se dan desde el planteamiento de la actividad, el cual alude a la normalidad de la población de la que fueron extraídos ambos conjuntos de datos, y que ninguna de ellas cuestiona dicha normalidad, aunque la distribución de los datos daba para que ellos se hicieran este cuestionamiento.

De las cinco respuestas incorrectas, tres de ellas (estudiantes 1, 2 y 5) tuvieron una realización tipo 2, y dos de ellas un tipo 3. Las posibles causas de las respuestas tipo 2 vienen directamente de una incorrecta interpretación de la desviación estándar σ (estudiante 2 y 5), y una errónea interpretación del intervalo $\mu \pm \sigma$ (estudiante 1), esto se deduce del hecho de que estos estudiantes entienden al parámetro μ , pero equivocan al bosquejar las curtosis de las curvas, a pesar de que en las actividades pasadas la habían interpretado correctamente.

De las dos respuestas tipo 3 (estudiantes 4 y 6) es difícil reconocer posibles causas, ya que son demasiado incongruentes.

En la parte B, se tuvieron tres respuestas correctas. Una de ellas (estudiante 8) viene desde la REL2, es decir, desde la idea de que, a menor curtosis, mayor “altura” de la curva, lo cual resulta efectivo para este caso. La explicación del estudiante 9 es la única que refiere a la acumulación de probabilidad en la curva,

de modo que, a pesar de equivocarse en sus cálculos de probabilidades, se considera correcta porque el estudiante entiende que el área debajo de la curva simboliza probabilidad.

La última respuesta correcta (estudiante 3) refiere al intervalo $\mu \pm \sigma$. En la explicación se menciona, como principal diferencia entre las curvas, la diferencia y longitud de dicho intervalo, pues el intervalo del *Bloque B* “permite tener todos sus valores dentro”. Esta explicación, aunque se considera correcta, es poco sustanciosa, pero está bien respaldada por la respuesta de la parte A.

Las respuestas incorrectas fueron seis. Dos de ellas (estudiantes 1 y 2) se limitan a mencionar la igualdad entre las medias μ y la diferencia existente entre las desviaciones estándar σ , pero en ningún momento aluden a las características geométricas que estas cuestiones implican, y mucho menos lo reflejan en los bosquejos de la parte A.

La respuesta del estudiante 7 contiene la misma variación de Error 1 que se encontró, en esta misma estudiante, en la actividad 3. Esto es la creencia de que “un valor bajo de σ da una gráfica con mayor altura y menor área”. La posible causa puede ser una dificultad para entender el significado del área bajo la curva normal y, por tanto, para entender el concepto de probabilidad como tal.

Una explicación (estudiante 5) resulta incongruente debido a que se basa en los bosquejos hechos en la parte A, los cuales también eran incongruentes. En dicha parte, el estudiante representó los valores de los parámetros μ y σ en los ejes “x” y “y”, respectivamente, tal como puede verse en la Figura 28. Al tratar a los parámetros μ y σ , como (x, y) , respectivamente, se le nombró Error 3.

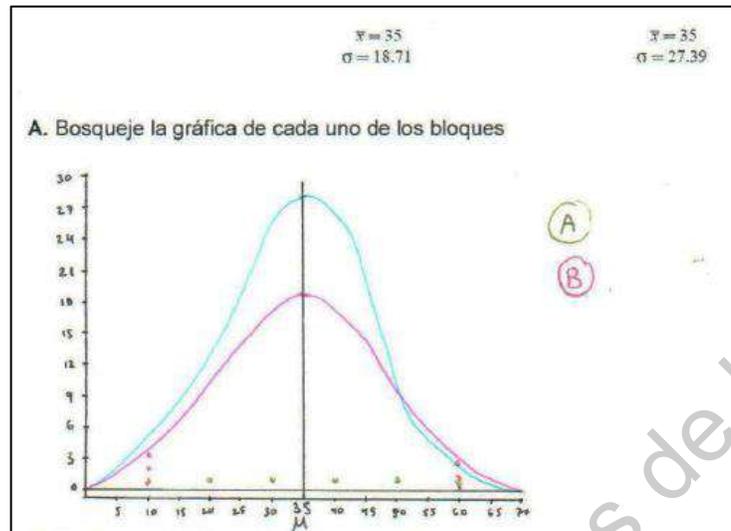


Figura 28. Respuesta del estudiante 5 a la parte A de la actividad 4, tomada del instrumento de recogida de datos.

Es notoria la intención del estudiante por actuar acorde a la REL2, pero la dificultad se presenta al bosquejar las gráficas. La curva del *Bloque B* presenta un eje de simetría situado en 35, en el eje “x”, lo cual es correcto debido al valor de la media, con una altura de 18.71, es decir, el valor de la desviación estándar del *Bloque A*. Por otra parte, la curva del *Bloque A* comparte el eje de simetría debido a que tiene el mismo valor de media, 35, pero su altura es de 27.39, es decir, el valor de σ del *Bloque B*.

Se puede deducir que, por conocimiento de la REL2, el estudiante sabía que la curva del *Bloque A* debía ser más puntiaguda que la del *Bloque B*. Sin embargo, tal vez por ansiedad epistemológica, apareció la creencia de que los valores de σ corresponden al eje “y”. De modo que, para que cuadrara la REL2 al graficar, el estudiante decidió intercambiar los valores de σ en los Bloques. El resultado de esto se ve en la parte B de la actividad, donde, además del Error 2, el estudiante intenta explicar de manera lógica esta incongruencia, partiendo de la REL2, lo cual deviene en lo incorrecto.

Por otra parte, la explicación del estudiante 4 es incoherente ya que no hay ninguna referencia ni a A1 ni a A5. El estudiante 6 no respondió a esta parte de la actividad.

Elementos intensivos

Las propiedades de la distribución normal presentes en esta actividad fueron EI1: simetría respecto al eje vertical (media); y EI2: concavidad y convexidad. La Tabla 23 muestra las propiedades presentes en esta actividad.

Dirección General de Bibliotecas de la UJAQ

Tabla 23. Elementos intensivos en la actividad 4, creación propia.

Respuesta (parte A)	Elementos intensivos aparecidos (parte A)	F	Respuesta (Parte B)	Elementos intensivos aparecidos (parte B)	F
Correcto	E11 y E12	4	Correcto	Identificación directa de E11 y E12	1
				E12 de manera directa, y E11 de manera indirecta	1
				Desde una idea de probabilidad	1
Incorrecto	Solo E11	3	Incorrecto	E11, de forma indirecta, con variación del Error 1 para E12	1
				E11, de forma indirecta, con error particular en E12	1
				Solo E11	2
				Poca sustancia	1
	Ninguno	2		No responde	1
Total		9			9

En la parte A, de la muestra de nueve estudiantes, fueron cuatro los que respondieron de forma adecuada. En estas respuestas se ponen de manifiesto ambas propiedades, E11 y E12, con ciertas particularidades debido a que se trata de representaciones de gráficas. El estudiante 3 utiliza curvas de densidad independientes en las que se enfatiza E11, y dos curvas superpuestas en las que se resalta E12. En cambio, el estudiante 7 señala ambas propiedades pero solo utilizando dos curvas superpuestas.

Las últimas dos respuestas (estudiantes 8 y 9) utilizan curvas de densidad independientes, y se elaboraron de tal manera que pudieran notarse las propiedades EI1 y EI2.

Las cinco respuestas incorrectas se agruparon en dos grupos: los que solo identificaron la propiedad EI1, y las que eran incongruentes. De la primera categoría, solo EI1, dos de ellas (estudiantes 1 y 5) utilizan curvas superpuestas, y una (estudiante 2) utiliza dos curvas superpuestas. Se agrupan de este modo porque, en sus bosquejos, reflejan un conocimiento del valor de la media como eje de simetría de la curva normal, es decir, identifican EI1, pero equivocan la interpretación de la desviación estándar en sus bosquejos.

El segundo grupo, representaciones incongruentes, se integra por los estudiantes 4 y 6, y se consideran así porque en sus bosquejos no se aprecia ninguno de los parámetros involucrados en la actividad.

En la parte B, hubo tres respuestas correctas. En una de ellas (estudiante 8) se refleja de manera directa el conocimiento de EI1 y EI2, debido a que alude a la REL2. De la respuesta del estudiante 3 se identifican también ambas propiedades, aunque de manera menos enfática, ya que su explicación se basa en el intervalo $\mu \pm \sigma$, una cuestión de la que no se desprende la cuestión geométrica. La última respuesta correcta (estudiante 9) se basa en la acumulación de probabilidad, un elemento que, aunque no refleja las propiedades EI1 y EI2 de manera directa, sí lo hace de manera indirecta, debido al razonamiento del estudiante a este respecto.

De las seis respuestas incorrectas, algunas comparten similitudes. Dos de ellas (estudiantes 1 y 2) hablan directamente de EI1, y no desarrollan ninguna idea sobre EI2, de ahí que no se consideren correctas. La generalización de la REL2 intentada por el estudiante 5, resulta incongruente, aunque reconoce de manera indirecta el EI1, ya que tiene dificultades con la interpretación de σ . Otra

interpretación errónea de σ se observa en la respuesta del estudiante 7, pero esta resulta una variación del Error 1, como se ha dicho anteriormente.

En una última respuesta (estudiantes 4) no se observa ninguna de las propiedades involucradas en esta actividad. El estudiante 6 no responde a esta parte.

Elementos validativos

El criterio del estudiante era el que dirigía estos elementos, tal como en las actividades pasadas. Asimismo, en la parte A no aplicaban estos, debido a la naturaleza de su planteamiento. Es en la parte B donde se muestran siete análisis (tres de ellos correctos), y una síntesis (incorrecta), además de una ausencia de respuesta. En la Tabla 24 se encuentran los elementos validativos surgidos en esta actividad.

Tabla 24. Elementos validativos en la actividad 4, creación propia.

Validación (parte A)	Validación (parte B)	Elemento validativo utilizado	Contenido de la validación	F
No aplica	Correcto	Análisis	REL2	1
		Análisis	Basada en una idea de probabilidad	1
		Análisis	Ambigüedad en el intervalo $\mu \pm \sigma$	1
	Incorrecto	Análisis	Variación de Error 1	1
		Análisis	Error particular respecto a la desviación estándar	1
		Análisis	Ambigüedad sobre las propiedades involucradas	2
		Síntesis	Poca sustancia	1
			No responde	1
Total				9

Tal como antes se mencionó, en la parte B, de las nueve posibles respuestas, solo tres fueron correctas. Las tres eran análisis, ya que analizaban particularidades de la situación que imperaba la actividad. Aun esto, cabe mencionar que estos análisis se enfocaban a diferentes aspectos de la actividad. Una de ellas (estudiante 3) dirigía su enfoque hacia el intervalo $\mu \pm \sigma$, y es quizás el que menos información contiene si se compara con los otros, aunque se sustenta efectivamente con su respuesta en la parte A. Otra respuesta (estudiante 8) se nutre de la REL2, ya que analiza las alturas de la curva en relación con los valores de desviación estándar σ . El enfoque de análisis de la última respuesta (estudiante 9) se encamina hacia el concepto de probabilidad, con todo lo que eso implica y lo

cual se atiende en los elementos de significado anteriores de esta actividad, a pesar de que los cálculos realizados por el estudiante no son los adecuados.

En contraparte, se tuvieron seis respuestas incorrectas. Cuatro de ellas fueron análisis: una contenía un razonamiento que se enmarcaba en el Error 1 (estudiante 7); otra era incongruente en su concepción, ya que intenta validar desde su determinación de los valores de σ como valores en el eje “y” en ambas partes de la actividad (estudiante 5); y las dos restantes (estudiantes 1 y 2) muestran dificultades para interpretar las características geométricas de σ , ya que no bosquejan adecuadamente sus curvas respecto a la curtosis requerida.

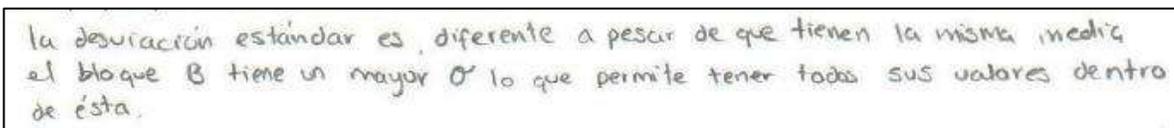
La única síntesis (estudiante 4) resulta incoherente al mencionar, pero no desarrollar, los términos “constante” e “incremental”, por lo que quedan difusos dentro de su validación. El estudiante 6 no respondió a esta parte de la actividad.

5.4.1 Trayectorias cognitivas en la actividad 4

En esta actividad se encontraron ocho trayectorias cognitivas. Tres de ellas fueron correctas y cinco incorrectas. Las trayectorias de respuesta correcta se nombran como sigue: comprensión directa de las propiedades EI1 y EI2, comprensión directa de EI2, e indirecta de EI1, y comprensión basada en una idea de probabilidad. Las trayectorias de respuesta incorrecta son: variación del error 1, presencia del error 3, ambigüedad en las propiedades, poca sustancia y no respuesta.

Respuesta correcta: comprensión directa de las propiedades EI1 y EI2

Una respuesta (estudiante 3) conforma esta trayectoria, la cual puede observarse en la Figura 29.



la desviación estándar es diferente a pesar de que tienen la misma media
el bloque B tiene un mayor σ lo que permite tener todos sus valores dentro
de ésta.

Figura 29. Respuesta del estudiante 3 a la parte B de la actividad 4, tomado del instrumento de recogida de datos.

Esta respuesta explica una respuesta Tipo 1 (ver Figura 25) en la parte A. La diferencia de los valores de desviación estándar σ , y la igualdad de medias μ , es reflejada en los intervalos en su respuesta gráfica bajo el constructo del intervalo $\mu \pm \sigma$, el cual se utiliza para la explicación de la parte B. Existe cierta ambigüedad al hablar de la permanencia de los datos dentro del intervalo, aunque esta se solventa con el conocimiento reflejado por el estudiante en su gráfico.

La identificación del problema tipo P1, de los elementos extensivos, es adecuada para ambas partes. De los ostensivos, las conversiones del RAL al RG, y del RG al LN, para las partes A y B, respectivamente, se realizan de manera correcta. El actuar A1/A5 también se refleja en ambas partes, debido en primera instancia a la respuesta que se observa en la Figura 25, aunque en la explicación vista en la Figura 29 pueda verse cierta ambigüedad, esta no afecta los resultados del estudiante. Las propiedades EI1 y EI2, por tanto, son identificados correctamente en ambas partes. El análisis hecho por el estudiante, aunque con cierta ambigüedad, sigue perteneciendo a los elementos validativos del significado de referencia.

Respuesta correcta: comprensión directa de EI2, e indirecta de EI1

Hubo solo una respuesta en esta categoría (estudiante 8), la cual se muestra en la Figura 30.

La distribución normal varía (una es más puntiaguda que otra), por la variación de la desviación estándar.

Figura 30. Respuesta del estudiante 8 a la parte B de la actividad 5, tomada del instrumento de recogida de datos.

Esta explicación viene de una respuesta tipo 1 en la parte A. La relación REL2 (mayor valor de desviación estándar implica menor curtosis, y viceversa) se manifiesta en el texto puesto entre paréntesis: “una es más puntiaguda que la otra”. Aunque no menciona los valores de desviación estándar, se percibe esta identificación mediante la relación antes mencionada, es decir, el estudiante da cuenta de la diferencia entre los valores de σ y decide reflejarlo directamente en su representación gráfica (REL2).

Bajo estas condiciones es como puede decirse que se ha identificado el problema tipo P1, ajuste de un modelo a la distribución de datos reales, de los elementos extensivos. Sucede esto gracias a las correctas conversiones realizadas: del registro alfanumérico (RAL) al registro gráfico (RG) en la parte A, y del RG al lenguaje natural (LN) en la parte B; actividades referentes a los elementos ostensivos. Por parte de los elementos actitudinales, recordar que en este caso se realizaron en conjunto A1, estudio descriptivo de datos para ajustar una curva, y A5, comparación de puntuaciones diversas. Ambas se reflejaron en el actuar tipo 1 de la parte A, y se explicaron pertinentemente mediante la REL2, como puede verse en la Figura 30. A través de lo anterior es como pudieron observarse las propiedades EI1, simetría respecto al eje vertical (media), y EI2, concavidad y convexidad, de los elementos intensivos. Por último, se tuvo un análisis, de los elementos validativos del significado de referencia, debido a que se analizaron las particularidades de la situación prototípica dada.

Respuesta correcta: comprensión desde una idea de probabilidad

Únicamente la respuesta del estudiante 9 entra en esta categoría. En la Figura 31 queda evidencia de ello.

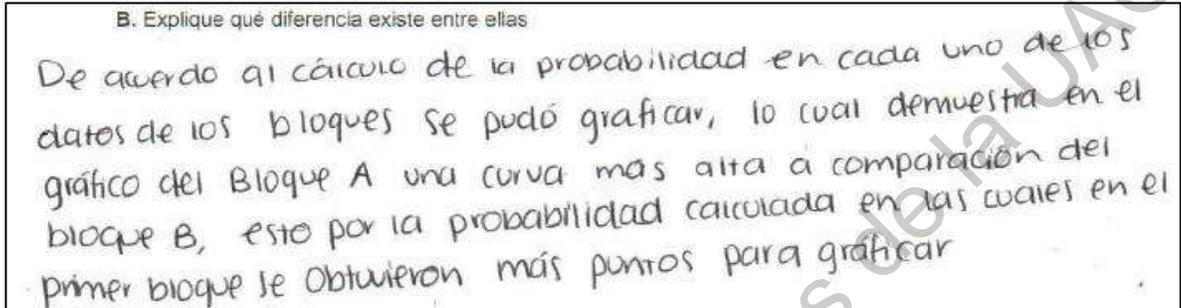


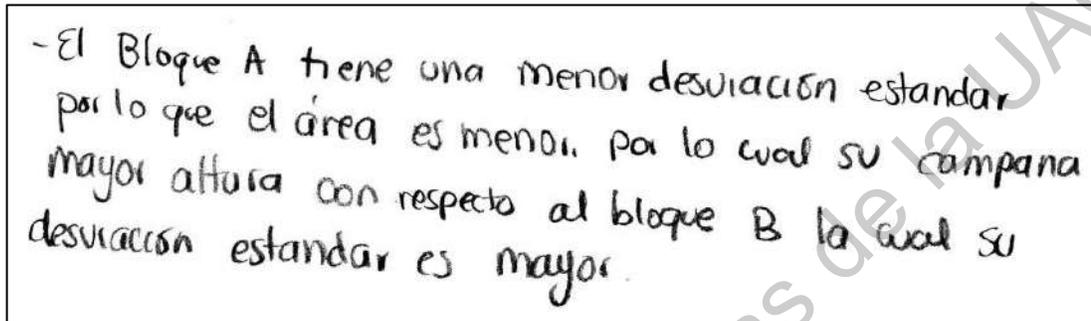
Figura 31. Respuesta del estudiante 9 a la parte B de la actividad 5, tomada del instrumento de recogida de datos.

Procedente de una respuesta tipo 1 en la parte A, esta respuesta vincula la acumulación de probabilidad con la curtosis de la curva. Si bien los cálculos de los que habla no fueron del todo correctos, puede percibirse en su respuesta que el estudiante comprende el hecho de que la altura de la curva se debe a que existe más probabilidad acumulada en la media, aunque esto último no se diga de manera directa.

Por todo ello, es posible decir que el problema tipo P1 fue identificado, de los elementos extensivos. De los elementos ostensivos, las conversiones esperadas del RAL al RG (parte A) y del RG al LN (parte B), fueron hechas adecuadamente. El actuar conjunto A1/A5 se refleja en la respuesta tipo 1, y se enfatiza en la explicación bajo la idea de probabilidad antes descrita. Con ello surgen las propiedades EI1 y EI2 de manera indirecta, puesto que no se les menciona a fondo en la respuesta vista en la Figura 31. Finalmente, los elementos validativos son abordados por medio de un análisis que se rige por una idea de probabilidad acumulada.

Respuesta incorrecta: variación del error 1

La respuesta del estudiante 7 cae en esta categoría. Ello se muestra en la Figura 32.



- El Bloque A tiene una menor desviación estándar por lo que el área es menor. Por lo cual su campana mayor altura con respecto al bloque B la cual su desviación estándar es mayor.

Figura 32. Respuesta del estudiante 7 a la parte B de la actividad 4, tomada del instrumento de recogida de datos.

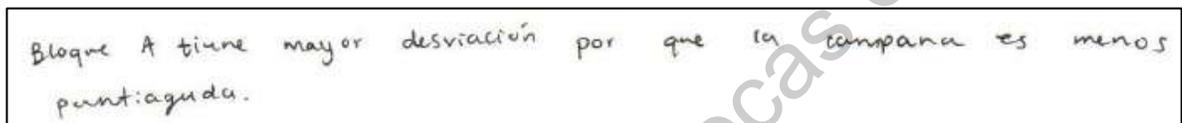
Esta explicación, proveniente de una respuesta Tipo 1 en la parte A, muestra claramente el Error 1, o al menos una variación de él, pues menciona que “el área es menor”. Este pensar contradice directamente a la propiedad estadística de que el área total bajo la curva es igual a la unidad. De ahí que su respuesta en A, a pesar de ser correcta, no se vea justificada correctamente en la explicación en B.

Con lo anterior, es posible decir que el estudiante 7 identifica P1 en la parte A, pero no lo identifica en la parte B, es decir, cuando se trata de interpretar y explicar su respuesta. La conversión en A es correcta, del RAL al RG, pero no en B, del RG al LN, por estar presente el Error 1 (creencia de que las áreas varían de unas a otras). Ocurre lo mismo en el actuar A1/A5, pues este es correcto en la parte A, pero no en la parte B, mostrando que el estudiante tiene dificultades para interpretar sus respuestas, aun siendo estas las correctas. Las propiedades EI1 y EI2 se reflejan en las curvas de densidad hechas por el estudiante en A; en B estas propiedades no se reflejan, pues son obstaculizadas por el Error 1, y mostrando que el estudiante no tiene claro ni las propiedades antes mencionadas ni la propiedad estadística del área bajo la curva igual a la unidad. El análisis que

se observa en la Figura 32 muestra este déficit: responder correcto a la parte A no implica que el estudiante responda correcto a la parte B, lo que indica que sus dificultades no provienen del RG, sino de otros, posiblemente el RAL.

Respuesta incorrecta: presencia del error 3

Tal como se menciona en el título, en esta categoría está la respuesta del estudiante 5, cuya respuesta muestra al error 3. En la Figura 33 se muestra la explicación dada por el estudiante.



Bloque A tiene mayor desviación por que la campana es menos puntiaguda.

Figura 33. Respuesta del estudiante 5 a la parte B de la actividad 4, tomada del instrumento de recogida de datos.

La respuesta de la Figura 33, dada en la parte B, proviene de una respuesta Tipo 2 (ver Figura 28) en la parte A. Es importante hacer esta señalación para tener el panorama completo de la respuesta de este estudiante. El error particular que se observa es que el estudiante considera que los valores de la desviación estándar σ corresponden a las alturas de la curva, manifestando con ello también el Error 2. Bajo este criterio, el estudiante tiene contradicciones al explicar, puesto que no le cuadra que la curva con mayor altura sea la que tenga mayor valor de σ , pues esto contradice directamente a la relación REL2, que este mismo estudiante había ejecutado correctamente en actividades anteriores. Este error puede tener su causa en que el estudiante quiera interpretar los valores de μ y σ de la misma forma que x y y , es decir, queriendo reflejarlos en el plano cartesiano, lo cual indica que puede existir un desconocimiento de la función de densidad de probabilidad. Esto devino en que ambas partes de la actividad fueran incorrectas.

El tipo de problema P1, de los elementos extensivos, no fue identificado, lo mismo que no se realizaron las conversiones esperadas: del RAL al RG en la parte A, y del RG al LN en la parte B, al hablar de los elementos ostensivos. El actuar A1/A5 no es posible decir que se realiza correctamente, pues la comparación realizada se basó en una incorrecta forma de ajustar los datos a una curva. Por todo esto, las propiedades esperadas, EI1 y EI2, no fueron potenciadas. Finalmente, el análisis del estudiante, de los elementos validativos, contiene la incongruencia derivada de su error particular.

Respuesta incorrecta: ambigüedad al interpretar las propiedades

Entran dos respuestas en esta categoría (estudiantes 1 y 2), y el ejemplo prototípico se muestra en la Figura 34.

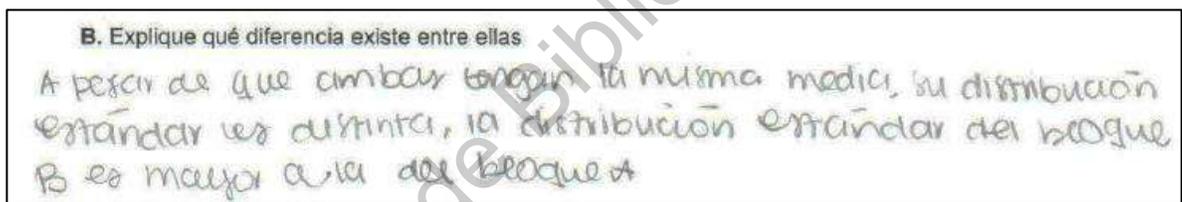


Figura 34. Respuesta del estudiante 2 a la parte B de la actividad 4, tomada del instrumento de recogida de datos.

Proveniente de una respuesta tipo 2, la explicación de la Figura 34 resulta poco congruente, puesto que en su representación gráfica (parte A) no manifiesta esta diferencia que de manera textual aquí describe. La posible causa de esta respuesta puede ser un poco desarrollada intuición respecto a las propiedades de los parámetros media μ y desviación estándar σ , más aun cuando el planteamiento está en RAL.

El problema tipo 1, de los elementos extensivos, no se ha identificado en ninguna de las partes de la actividad. Esto se refleja en el hecho de que las conversiones tampoco se han realizado: ni del RAL al RG en la parte A, ni del RG al LN en la

parte B. El accionar de A1/A5 no es visible, ya que las inconsistencias sobre el tratamiento de los parámetros en su forma gráfica no fue el adecuado. Por consiguiente, las propiedades EI1 y EI2 no llegan a potenciarse en la totalidad de esta actividad. Finalmente, el análisis se considera así porque analiza particularidades, pero no bajo el marco de un estudio descriptivo adecuado.

Respuesta incorrecta: poca sustancia

La respuesta del estudiante 4 entra en esta categoría, y puede observarse en la Figura 35.

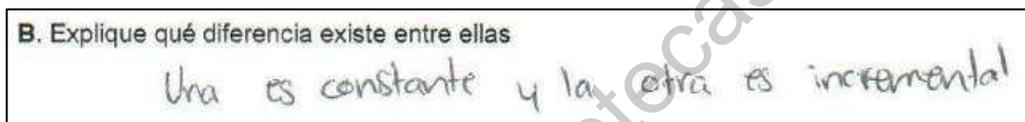


Figura 35. Respuesta del estudiante 4 a la parte B de la actividad 4, tomada del instrumento de recogida de datos.

Esta respuesta, que complementa a una respuesta Tipo 3 (ver Figura 27) en la parte A, deja muchos vacíos epistémicos. Lo poco que menciona tiene mucha ambigüedad, y no es posible detectar muchos elementos de significado.

El problema tipo P1 no se identifica en toda la actividad. Lo mismo las conversiones entre registros, que no llegan a realizarse. El actuar A1/A5 no se percibe de ningún modo: ni en lo gráfico ni en lo textual, por lo que no es posible ahondar en él. De lo anterior se infiere que las propiedades EI1 y EI2 no se identifican por el estudiante, y que su síntesis, considerada así por su extensión y brevedad, no tiene contenido alguno que pueda relacionarse con el objeto matemático que se está tratando.

Respuesta incorrecta: no responde

El estudiante 6 entra en esta categoría. Tras haber hecho una respuesta Tipo 3 en la parte A, decide no contestar a esta parte, por lo que es difícil saber si identifica alguno de los elementos de significado que se ponían en juego.

5.5 Análisis de la actividad 5

Elementos extensivos

En esta actividad se presentaba un problema tipo P1: ajuste de un modelo a la distribución de datos reales. El planteamiento presentaba un conjunto de diez datos y aludía a un posible comportamiento normal en la población de la que se extrajo esta muestra. Los parámetros que se daban de este conjunto eran la media μ , con un valor de 10.5, y la desviación estándar σ , con valor de 0.

En la parte A, los estudiantes debían representar gráficamente este conjunto de datos. Sin embargo, ya que el valor de la desviación estándar era 0, no podía existir una gráfica debido a que la función de densidad de probabilidad se indetermina cuando esto sucede. De manera que no había gráfica posible para estos parámetros ni, por tanto, para este conjunto de datos. El estudiante debía señalar esta ausencia.

En la parte B se hacía la pregunta: *¿cómo afecta el valor de σ a la gráfica?*, para la cual los estudiantes tenían libre criterio de respuesta. El contenido debía hacer referencia a la ausencia de gráfica de la parte A, indicando el por qué no podía existir una representación gráfica para este conjunto de datos. La Tabla 25 especifica dichas cuestiones respecto a estos elementos.

Tabla 25. Elementos extensivos en la actividad 5, creación propia.

Identifica P1 (Parte A)	Representación gráfica	F	Identifica P1 (Parte B)	Comprensión de P1	F
Correcto	El alumno debía señalar la no existencia de gráfica debido a los parámetros dados	0	Correcto	La población de la que se extrajo la muestra no se comporta de manera normal	0
Incorrecto	No acorde a los parámetros dados	9	Incorrecto	Presencia del eje de simetría dado por μ	6
				Basado en curva de densidad (aun no siendo acorde)	1
				Incongruente	2
Total		9			9

En la parte A, de la muestra de nueve estudiantes, ninguno de ellos respondió correctamente. Esto indica que ninguno de los estudiantes identificó el tipo de problema P1 bajo los requerimientos que esta actividad requería. Al contraponerse esta situación con otras del instrumento, el conocimiento requerido a los estudiantes en esta actividad, y no presente en ninguna de las otras, es el de la relación existente entre la gráfica y la función de densidad de probabilidad de la distribución normal. Se infiere entonces que en el curso llevado por estos estudiantes no se habló de dicha relación, o incluso de la existencia de una función de densidad de probabilidad como generadora de la curva, por lo que esta señalización será una constante en el análisis de los demás elementos de esta actividad.

Así pues, para esta parte, fueron los nueve estudiantes que componen la muestra los que respondieron incorrectamente. Todos ellos respondieron de manera no

acorde a los parámetros dados, aunque con diferencias y con la particularidad de que todos fueron intentos de graficar de manera lógica, enfatizando así la necesidad de los estudiantes de contar con referentes gráficos para estas actividades. Seis de ellos (estudiantes 1, 2, 3, 5, 7 y 9) graficaron dos líneas perpendiculares en las que la línea vertical representaba a la media μ . Consideraban que de este modo graficaban al intervalo $\mu \pm \sigma$, el cual se convirtió en la referencia para esta actividad. En esta sección cabe la mención del estudiante 5, quien repitió el mismo error particular de la actividad 4, es decir, considerar al valor de σ como la altura de la curva.

Una respuesta (estudiante 8) se trató de una curva de densidad aunque esta no fuera acorde de ningún modo con los parámetros dados. Es importante señalar que esta no se consideró como incongruente debido a que el estudiante intentó apegarse a la normalidad que el planteamiento sugería, aunque haciéndolo sin cuestionarse el contexto y, por tanto, quedando de manera errónea.

Las dos respuestas (estudiantes 4 y 6) que se consideraron incongruentes fueron porque no se apegaron siquiera a la lógica de normalidad que el planteamiento les concedía, sino que en sus gráficos se reflejaba muy poco, o nulo, conocimiento del tema de la distribución de probabilidad normal.

Elementos ostensivos

El planteamiento de esta actividad venía del registro alfanumérico (RAL), ya que contenía datos numéricos además de los parámetros representantes de dicho conjunto puestos en lenguaje simbólico. En la parte A se pedía una conversión del RAL al registro gráfico (RG) de manera peculiar, debido esto a que la forma de representar en el RG las condiciones que el planteamiento requería era, aunque parezca contradictorio, enfatizando la ausencia de una gráfica. Es por esta cuestión que la actividad cognitiva de la semiosis referente a esta parte se considera una conversión.

Lo anterior también se refleja en la parte B, pues es de la ausencia de gráfica en el RG que se debe convertir al lenguaje natural (LN) para responder a la pregunta planteada. En la Tabla 26 se observan estos elementos.

Tabla 26. Elementos extensivos en actividad 5, creación propia.

Respuesta (Parte A)	Actividad cognitiva realizada (Parte A)	F	Respuesta (Parte A)	Actividad cognitiva realizada (Parte B)	F
Correcta	Conversión del RAL al RG	0	Correcta	Conversión del RG al LN	0
Incorrecta		9	Incorrecta		9
Total		9			9

En la parte A, de la muestra de nueve estudiantes, ninguno realizó la conversión del RAL al RG. Todos ellos realizaron bosquejos para tratar de representar los parámetros dados, mostrando con esto cierta ansiedad epistemológica por contar con representaciones gráficas. Es importante remarcar que, aunque sí existió una conversión, esta no reflejaba los puntos de cognición del registro inicial, RAL, en el registro de llegada, RG.

Las nueve respuestas incorrectas fueron distintas. Seis de ellas (estudiantes 1, 2, 3, 5, 7 y 9) intentaron representar a la media μ como el eje vertical y simétrico de “algo” que, por tener valor 0, no hacía presencia, es decir, la curva, formando solamente dos líneas perpendiculares. Con ello queda claro que los estudiantes desdeñan, o no conocen, a la función de densidad de probabilidad de la distribución normal pues, al representar gráficamente, abordan a los valores de los parámetros únicamente como números que deben ser ubicados en un plano cartesiano, y no como factores dentro de una función con la cual se genera la gráfica.

Otra muestra de lo anterior, y también de ansiedad epistemológica, se da en la respuesta del estudiante 8, cuyo bosquejo es una curva de densidad que parece haberse realizado de manera automática tan solo al ver en el planteamiento la posible normalidad de este conjunto de datos. Por consiguiente, esta respuesta es incorrecta. Dos respuestas más fueron incongruentes (estudiantes 4 y 6) debido a que no mostraron ningún punto de cognición entre el RAL y el RG.

En la parte B, de la muestra de nueve estudiantes, ninguna respuesta fue correcta debido a que todas ellas, aunque hechas en LN, referían a las respuestas de la parte A, las cuales fueron todas incorrectas. En contraparte, las nueve respuestas incorrectas mostraron, en LN, dificultades para comprender cómo afectaba a la gráfica un valor de cero en la desviación estándar σ . Algunas respuestas (estudiantes 1 y 8) aludieron al intervalo $\mu \pm \sigma$ para justificar la ausencia de curva y la sola presencia del eje de simetría; otras respuestas (estudiantes 2, 3, 5, 7 y 9) argumentaron que solo la media μ podía representarse debido a que el valor de σ era cero.

Finalmente, dos respuestas (estudiantes 4 y 6) fueron incongruentes al no hablar de los parámetros en sus explicaciones.

Elementos actuativos

El actuar de los estudiantes en esta actividad debía ser el A1: estudio descriptivo de datos para ajustar una curva. Este estudio de los datos, comprendido por A1, debía reflejarse en las respuestas de los estudiantes de dos formas: en la ausencia de una gráfica que pudiera satisfacer al conjunto de datos; y el cuestionamiento sobre la naturaleza de los datos mismos, pudiéndose decir incluso que la población de la que se extrajeron no se comportaba de manera normal. Este cuestionar la normalidad de una población, en base a los datos de una muestra extraída de ella, es también parte de A1.

En la parte A se pedía a los estudiantes que graficaran, pero estos debían estudiar los datos y llegar a la conclusión de que no se podía graficar bajo la lógica expuesta en el planteamiento, con lo cual se cuestionaba la normalidad de la distribución. Mientras que en la parte B se debía explicar esta ausencia de gráfica en la respuesta a la pregunta planteada.

Es necesario adelantar en esta parte que ninguno de los estudiantes cumplió con la comprensión esperada para esta actividad. La razón de adelantar esto es porque todos los estudiantes decidieron graficar, reflejando que su realización de A1 fue incorrecta. Sin embargo, las gráficas hechas por ellos muestran matices a los cuales es importante referir. Se encontraron tres tipos de gráficas, todas ellas incorrectas, para las respuestas de la parte A.

Tipo 1: representan a los parámetros mediante dos líneas perpendiculares. Le atribuyen a la línea vertical el valor de la media μ de 10.5, y consideran que la curva se genera por el intervalo $\mu \pm \sigma$, y al ser cero el valor de la desviación estándar σ , este intervalo queda 10.5 ± 0 , por lo que no puede graficarse una curva, sino simplemente el eje vertical, dado por la media μ , razonamiento del cual se genera este tipo de respuesta. En la Figura 36 se muestra en particular la respuesta del estudiante 5, donde se observa al error 2, es decir, no atribuir al eje y los valores de probabilidad correspondientes.

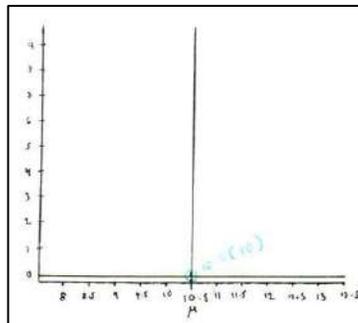


Figura 36. Ejemplo de realización tipo 1 en la actividad 5 (procedente del estudiante 5), tomada del instrumento de recogida de datos.

Tipo 2: representación de una curva de densidad. Por las características de los parámetros, esto no podía suceder. La causa de este representar puede deberse a que el planteamiento atribuye la normalidad a los datos, y el autor de este tipo de respuesta decidió no cuestionar esta afirmación. En la Figura 37 se ejemplifica lo anterior.

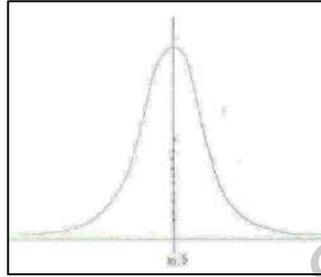


Figura 37. Ejemplo de realización tipo 2 en la actividad 5 (procedente del estudiante 8), tomada del instrumento de recogida de datos.

Tipo 3: representación incongruente. Los estudiantes cuyas respuestas entran en esta categoría muestran una baja comprensión, en general, del tema de distribución de probabilidad de normal. Es posible afirmar esto ya que su conocimiento no fue suficiente para elaborar respuestas tipo 1 o 2, las cuales, aun siendo incorrectas, reflejan un vacío epistémico ocasionado por no haber visto en su curso la función de densidad de probabilidad. En cambio, los autores de respuestas tipo 3 proyectan no solo este vacío, sino también otros referentes a los parámetros y a la forma de graficar cuando se refiere a la normalidad. Un ejemplo de lo anterior se muestra en la Figura 38.

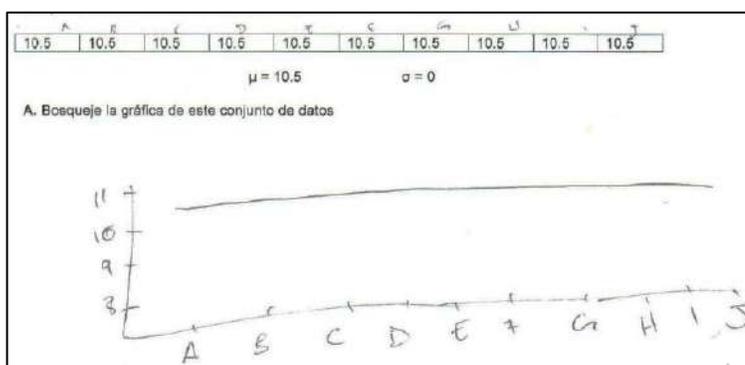


Figura 38. Ejemplo de realización tipo 3 en la actividad 5 (procedente del estudiante 4), tomada del instrumento de recogida de datos.

En la Tabla 27 se muestran los elementos actuativos que surgieron y que derivaron en los tipos de respuesta antes presentados.

Tabla 27. Elementos actuativos en actividad 5, creación propia.

Realiza A1 (Parte A)	Resultado de realizar A1	F	Realiza A1 (Parte B)	Explicación de A1	F
Correcto	Ausencia de gráfica	0	Correcto	No existe un comportamiento normal	0
Incorrecto	Tipo 1	6	Incorrecto	Énfasis en el eje de simetría dado por μ	6
	Tipo 2	1		Alusión al intervalo $\mu \pm \sigma$ (habiendo graficado una curva de densidad)	1
	Tipo 3	2		Incongruente	2
Total		9			9

De la muestra de nueve estudiantes, en la parte A, ninguno de ellos respondió de manera adecuada. Los intentos de gráfico realizados por todos ellos dejan en claro que, en la definición de la distribución normal vista en el curso, la función de

densidad de probabilidad no ocupó un lugar preponderante. Las seis respuestas tipo 1 (estudiantes 1, 2, 3, 5, 7 y 9) evidencian que los estudiantes realizan A1 de manera mecanizada pues no estudian como tal a los datos, indicando una nula intuición respecto a la distribución normal, sino que van directamente a los valores de los parámetros para graficar, ajustando en el plano cartesiano los valores de estos, y esforzándose por encontrarles cabida de manera gráfica. Esto explicaría por qué las gráficas Tipo 1 fueron las más frecuentes y que, además, fueran incorrectas debido a que la mecanización no solo aleja a los estudiantes de la intuición requerida, sino que invalida de cierta forma su capacidad de cuestionarse la normalidad de la población de la que se extrajo la muestra.

En la respuesta del estudiante 5, mostrada en la Figura 36, muestra al error 2 reflejado en el eje y. Se observa también al error 3, es decir, la intención de hacer que la altura de la curva sea el del valor de la desviación estándar σ , con valor cero en este caso, trazando para ello una línea asintótica al eje x cuyo valor, visto en el eje y, es de cero. Con esto se observa que los esfuerzos del estudiante por tratar de adaptar los valores de los parámetros al plano, sin tomar en cuenta el sustento algebraico que proporciona la función de densidad, no generan sino más errores.

La respuesta del estudiante 8, una respuesta Tipo 2, también va en este sentido porque no solo refleja una mecanización de A1 en el sentido intuitivo, sino también en el aspecto gráfico, pues no se cuestiona si deba existir una curvatura a pesar de que el valor de la desviación estándar sea cero, contrario a las respuestas tipo 1 en las que sí se percibe un cuestionamiento sobre la curvatura.

Por último, hubo dos respuestas tipo tres (estudiantes 4 y 6), es decir, con amplias incongruencias, tal como la observada en la Figura 38, en la que no se percibe de ninguna forma un conocimiento sobre la distribución normal.

En la parte B, no se encontraron respuestas correctas. Una vez más, la razón se atribuye al desconocimiento de la función de densidad de probabilidad por las razones antes mencionadas.

En contraparte, se tuvieron nueve respuestas incorrectas. Seis de estas respuestas (1, 2, 3, 5, 7 y 9) argumentan, de manera general, que su respuesta Tipo 1 en la parte A se debió a que la media μ era la única que podía representarse, debido a que la desviación estándar σ era cero. Esto da pie a formular dos hipótesis interrelacionadas: a) los estudiantes encuentran la lógica de la distribución normal en representaciones no pertenecientes a dicho objeto matemático; y b) los estudiantes no ven a la normalidad como un comportamiento que puede ser inferido e interpretado mediante el estudio de los datos, es decir la realización de A1, sino que tratan de verlo lo más parecido posible a un procedimiento algebraico que debe ser seguido rigurosamente.

De la única respuesta Tipo 2 (estudiante 8) no pudieran decirse ambas hipótesis, sino solo una, la *b*, pues manifiesta la rigurosidad del estudiante de graficar curvas de densidad a causa de que el planteamiento dicte una posible normalidad. En consecuencia, en su explicación el estudiante prefiere ignorar el hecho de que σ sea igual a cero, y solo responde aludiendo al intervalo $\mu \pm \sigma$ de forma poco sustanciosa, dando la idea de que solo ha respondido a lo que considera como lógico, desdeñando lo demás. Puede decirse entonces que, en este tipo de respuesta, la hipótesis *b* predomina sobre la realización de A1.

Finalmente, a las dos explicaciones provenientes de un gráfico Tipo 3 (estudiantes 4 y 6), por su poca sustancia y poca coherencia, no pueden atribuírseles ninguna de las hipótesis planteadas.

Elementos intensivos

Las propiedades que debían ponerse sobre relieve en esta actividad fueron la EI1: simetría respecto a la media; y EI2: concavidad y convexidad. Dadas las características del planteamiento, la ausencia de gráfica era la respuesta correcta. Es decir, ambas propiedades debían presentarse de manera indirecta. Así pues, si el estudiante comprende a fondo estas propiedades, caerá en cuenta de que no debía graficarse en la parte A, y explicar sus razones en la parte B. La Tabla 28 muestra los resultados de esto.

Tabla 28. Elementos intensivos en la actividad 5, creación propia.

Respuesta (Parte A)	Elementos intensivos aparecidos (Parte A)	F	Respuesta (Parte B)	Elementos intensivos aparecidos (Parte B)	F
Correcta	EI1 y EI2	0	Correcta	No hubo	0
Incorrecta	EI1	7	Incorrecta	EI1	6
				EI1 (sustentado en curva de densidad)	1
	Ninguno	2		Incongruente	2
Total		9			9

En la parte A, de la muestra de nueve estudiantes, ninguno de ellos respondió de manera correcta. Tal como se dijo al principio de estos elementos de significado, la presentación de las propiedades EI1 y EI2 debía ser indirecta, pues no había gráfica que pudiera satisfacer a los valores de los parámetros dados, y esto podía justificarse diciendo que la población de origen de la muestra no se comportaba de manera normal. No obstante, la necesidad de los estudiantes por contar con referentes gráficos sale a la luz en todas las respuestas, ya que en todas ellas hay intentos de gráfica. Es por ello que ninguna resulta adecuada, pues intentan enunciar las propiedades de manera directa en sus bosquejos, seguramente

porque no están acostumbrados a hacerlo de otra forma al no tener conocimiento sobre la función de densidad de probabilidad.

Es por ello que existen nueve respuestas incorrectas en esta parte. Es decir, ninguna de ellas fue acorde a los parámetros dados. En seis de ellas (estudiantes 1, 2, 3, 5, 7 y 9) es posible ver la intención de los estudiantes de adaptar su conocimiento de E11 y E12 a esta actividad, manifestado de forma adecuada en actividades anteriores del instrumento mediante las relaciones REL1 y REL2, pero obteniendo resultados poco favorables, resultado de que la aplicación de estas relaciones se debe más a una mecanización que a una intuición desarrollada a través del curso. El resultado de esto es una respuesta Tipo 1 (ver Figura 36), de la cual se ha hablado ya en los elementos actuativos.

El caso del estudiante 8 es similar, salvo que esboza una curva de densidad, respuesta Tipo 2 (ver figura 37), que en esencia refleja lo mismo que lo dicho en el párrafo anterior sobre las propiedades E11 y E12. Dos respuestas más (estudiantes 4 y 6) son incongruentes debido a que no tratan siquiera de adaptar su conocimiento de dichas propiedades a esta actividad, y no sobra decir que en actividades pasadas tampoco manifestaron tenerlo. El resultado son gráficos alejados del significado de referencia de la distribución normal.

En la parte B tampoco hubo respuestas correctas. Lo que trae a colación la presencia de nueve respuestas incorrectas. En seis de estas explicaciones (1, 2, 3, 5, 7 y 9) se explica que la media μ es la única que debe graficarse, quedando al margen la desviación estándar σ . Se nota en estas respuestas cierta dependencia de los estudiantes hacia el hecho de que ambos parámetros tengan sentido, simplemente por el hecho de estar en el planteamiento. En otras palabras, los estudiantes encuentran sentido a estos parámetros incluso sin analizar los datos que se les presentan en el conjunto de datos del cual provienen dichos parámetros. Resultado de ello es que en ninguna de estas explicaciones se hace

mención de que el valor de los diez datos del conjunto es el mismo (10.5), y por esa misma razón la desviación estándar es cero. Esto sin duda también se refleja en su manera de comprender las propiedades EI1 y EI2. En otra respuesta (estudiante 8), se prefirió no hablar de dichas propiedades y centrarse sólo en la existencia concreta de los parámetros μ y σ , e incluso del intervalo $\mu \pm \sigma$, quedando al margen el contexto que rodea a los parámetros, siendo este un ejemplo de una perspectiva determinista.

Por último, dos respuestas fueron incongruentes (estudiantes 4 y 6) porque sus respuestas no tienen contenido referente a las propiedades EI1 y EI2.

Elementos validativos

Las validaciones quedaban a criterio del estudiante. La razón de esto fue, al igual que en las actividades anteriores, para conocer los registros a los cuales los estudiantes recurrían para validar sus respuestas. Dada la naturaleza de la parte A, no se esperaba encontrar dichos elementos en esa parte, siendo solo en la parte B donde pudieron encontrarse. En la Tabla 29 se observa esto.

Tabla 29. Elementos validativos en la actividad 5, creación propia.

Validación (parte A)	Validación (parte B)	Elemento validativo utilizado	Contenido de la validación	F
No aplica	Correcto	No hubo	No hubo	0
	Incorrecto	Análisis	Argumento sobre la presencia del eje de simetría	6
		Análisis	Alusión al intervalo $\mu \pm \sigma$	1
			Incongruente	2
Total				9

Para la parte B, no hubo respuestas correctas. Por el contrario, hubo nueve respuestas incorrectas, todas ellas análisis, puesto que analizan las particularidades de la situación planteada, pero con variaciones en el contenido.

En seis de estas respuestas (estudiantes 1, 2, 3, 5, 7 y 9) se encontraron argumentos sobre la presencia del que debería ser el eje vertical de la curva, es decir, justificaciones sobre el porqué solo debía graficarse la media μ , y que esta, por propiedad de la distribución normal, siempre era el eje de simetría de la curva de densidad. Dado el caso de que la desviación estándar era σ era igual a cero, los estudiantes explicaron que por esta razón no podía haber curva alguna, sin embargo, y ya que el valor de μ era 10.5, este debía representarse como único, generando así dos líneas paralelas, cuyo ejemplo viene dado en las respuestas Tipo 1 (ver Figura 36).

Algo similar ocurre en la respuesta del estudiante 8, que prefiere no justificar desde la perspectiva gráfica, y solo menciona que un dato diferente de 10.5 (valor que tenían todos los datos del conjunto) quedaría fuera del intervalo $\mu \pm \sigma$. Esto da pie a pensar que los estudiantes no ven la relación que existe entre parámetros μ y σ cuando esta se analiza desde la perspectiva de la función de densidad de probabilidad.

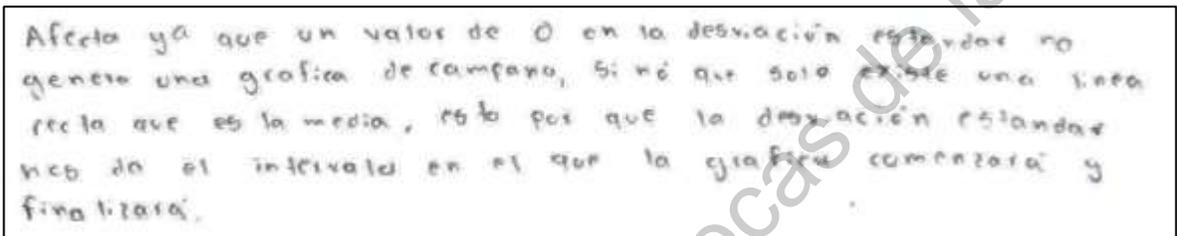
Para finalizar, las dos respuestas incongruentes (estudiantes 4 y 6) no tienen contenido sustancial, por lo que no puede calificarse como alguno de los elementos validativos del significado de referencia de la distribución normal.

5.5.1 Trayectorias cognitivas de la actividad 5

En esta actividad se encontraron tres trayectorias cognitivas, todas ellas incorrectas. Estas se nombran del siguiente modo: mecanización del eje vertical, mecanización de la curva de densidad, y respuesta incongruente.

Respuesta incorrecta: mecanización del eje vertical

En esta categoría entran seis de las respuestas (estudiantes 1, 2, 3, 5, 7 y 9) cuyas respuestas fueron del tipo 1, referido en los elementos actuativos de esta actividad. En la Figura 39 se muestra una explicación prototípica a este tipo de respuesta.



Afecta ya que un valor de 0 en la desviación estándar no genera una grafica de campana, si no que solo existe una linea recta que es la media, esto por que la desviación estándar nos da el intervalo en el que la grafica comenzara y finalizara.

Figura 39. Respuesta del estudiante 1 a la parte B de la actividad 5, tomada del instrumento de recogida de datos.

Proveniente de una respuesta Tipo 1 (ver Figura 36) en la parte A, en la explicación vista en la Figura 39 se puede leer la creencia del estudiante de que, al tener la desviación estándar σ un valor de cero, debe graficarse “una linea (sic) recta que es la media”. Esta creencia es explicada por el mismo estudiante al decir que “la desviación estándar nos da el intervalo en el que la gráfica comenzará y finalizará”. De aquí puede deducirse que el estudiante no interpreta de manera correcta las propiedades geométricas de dicho parámetro, y esto mismo genera errores en su interpretación de la media μ , reflejado esto en su respuesta tipo 1 en la parte A. Esta creencia por parte del estudiante también afecta, por tanto, a la interpretación del intervalo $\mu \pm \sigma$. Se infieren entonces dos principales fuentes de error: un desconocimiento de la función de densidad de probabilidad, y un posible desfase entre la distribución normal y el concepto de probabilidad.

Bajo este marco, es posible decir que el estudiante no identifica el problema tipo P1, de los elementos extensivos. Tampoco se realizan las conversiones

pertinentes, del registro alfanumérico (RAL) al registro gráfico (RG) en la parte A, y del registro gráfico al lenguaje natural (LN) en la parte B. El actuar tipo A1 se ve mermado debido a que el estudio de datos que debió hacerse para detectar una no normalidad en este conjunto de datos no se hace de manera correcta. De las propiedades puestas en juego, EI1, simetría respecto al eje vertical, y EI2, concavidad y convexidad, no se puede decir que se realicen correctamente, ya que puede existir un desconocimiento de la función de densidad de probabilidad. Tanto EI1 como EI2 son reiteradas por el estudiante, pero no bajo el contexto esperado. El análisis, aunque amplio en contenido y tiene las características que le confieren los elementos validativos del significado de referencia, sirve mayormente para adentrarse en las dificultades que presenta el estudiante en este tipo de problemas.

Respuesta incorrecta: mecanización de la curva de densidad

Solo la respuesta del estudiante 8, proveniente de la respuesta tipo 2 (la cual se puede ver en la Figura 37), entra en esta categoría. Puede observarse la explicación en la Figura 40.

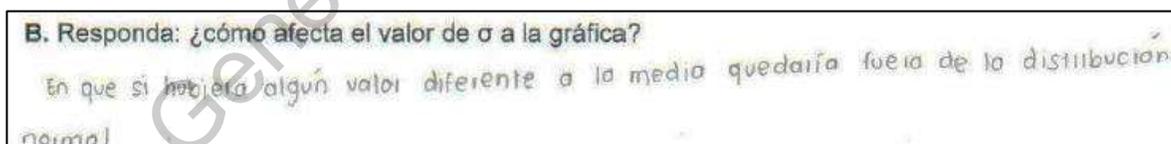


Figura 40. Respuesta del estudiante 8 a la parte B de la actividad 5, tomada del instrumento de recogida de datos.

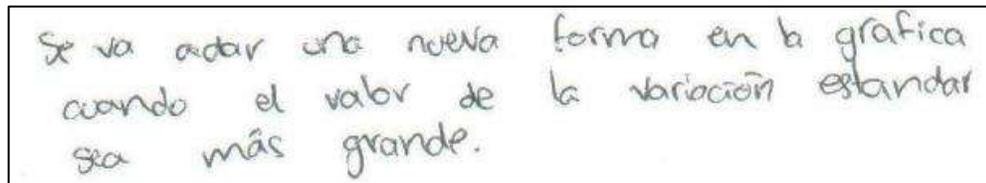
Esta explicación complementa a una respuesta Tipo 2 (ver Figura 37) en la parte A. Este tipo de comprensión no solo absorbe el tipo de creencia evidenciada en la trayectoria cognitiva anterior a esta, que mecanizaba el eje de simetría, sino que muestra la mecanización íntegra de la curva de densidad. Las posibles causas, tal como fueron escritas en la trayectoria anterior, son las mismas, pero sus

consecuencias rozan, en este caso, a la incongruencia. Es posible que, al verse superado epistemológicamente, el estudiante recurriera a lo primitivo de su curso y decidiera graficar directamente la curva de densidad, sin cuestionarse la pregunta que se le hace en la parte B pues, como puede verse en la Figura 40, esta se responde bajo la creencia de que la gráfica es una curva. En este caso, la realidad del planteamiento hecho en la actividad se ve modificada por el arraigo del estudiante de querer construir una curva, sin importarle los componentes de dicha curva o su origen algebraico: la función de densidad de probabilidad.

Con todo esto, el problema tipo P1, de los elementos extensivos, no se identifica bajo las condiciones establecidas en el planteamiento. De los elementos ostensivos, no es posible decir que se realizan adecuadamente las conversiones del RAL al RG en la parte A, ni del RG al LN en la parte B. En particular en el RG se nota un arraigamiento de querer ajustarse a lo establecido en el significado institucional de referencia, si bien las representaciones que en este registro se encuentran no son autónomas, sino que provienen de, en este caso, de la función de densidad de probabilidad, el estudiante parece creer lo contrario, es decir, que estas representaciones tienen cierta “autonomía” por tratarse de elementos “de apoyo” en la matemática, tal como ocurre con el plano cartesiano. Esta visión se agrega a las posibles causas de los errores aquí presentes, y que impidieron la realización adecuada de A1, en los elementos actitudinales. Las propiedades EI1 y EI2 no fueron identificadas en este planteamiento, si bien se trató de enfatizarlas en la respuesta Tipo 2, resultando con cierta incongruencia. En el análisis, de los elementos validativos, se alude al intervalo $\mu \pm \sigma$, aunque los fundamentos de esta explicación son incorrectos desde su origen.

Respuesta incorrecta: respuesta incongruente

Dos respuestas se consideraron atípicas (estudiantes 4 y 6), y de ahí que se adjudiquen a esta categoría. En la Figura 41 se observa un ejemplo de estas.



Se va a dar una nueva forma en la grafica cuando el valor de la variación estandar sea más grande.

Figura 41. Respuesta del estudiante 4 a la parte B de la actividad 5, tomada del instrumento de recogida de datos.

Siendo el origen de esta explicación una respuesta tipo 3 (específicamente la que se muestra en la Figura 38), es complicado detectar en ella a alguno de los elementos de significado, más aún porque la lógica seguida por el estudiante en esta explicación es superficial, y esto se explica porque tanto la respuesta en la parte A, como en la parte B, resultan atípicas en todo sentido.

Con ello se infiere que el problema tipo P1 no se ha identificado. Lo mismo con las conversiones esperadas, las cuales no se realizan. De los elementos actuativos no es posible decir que se hace A1, puesto que el estudio descriptivo de los datos es nulo, y las respuestas responden más a intuiciones respecto al planteamiento, más que surgidas de un conocimiento de la distribución normal. Es por ello que las propiedades EI1 y EI2 no se identifican, ni en una parte ni en otra, y no es posible explicar estos vacíos si no es como resultado de ausencias constantes durante el curso. Por último, no se considera como algún tipo de elemento validativo a la explicación de la Figura 41, ya que no está validando como tal una respuesta, sino que atiende a un sentido común simple que carece de toda comprensión respecto al objeto matemático.

5.6 Análisis de la actividad 6

Elementos extensivos

El tipo de problema que se planteaba en esta actividad era el P1: ajuste de un modelo a la distribución de datos reales. Se daba al estudiante un conjunto de

diez datos, aludiendo a una posible normalidad de la población de origen, y sus correspondientes parámetros media μ , con un valor de 50, y desviación estándar σ con valor de 46.83.

En la parte A se pedía al estudiante que graficara un conjunto de datos, el cual puede verse en la Figura 42. La representación gráfica esperada era una línea asintótica muy cercana al eje x, con apenas acentuación en μ debido a la alta dispersión de los datos, reflejado esto en el valor de σ , indicando una posible no normalidad de la población de origen.

2	98	94	96	6	5	99	1	97	2
$\mu = 50$					$\sigma = 46.83$				

Figura 42. Datos presentados en el planteamiento de la actividad 6, tomada del instrumento de recogida de datos.

En la parte B se hacía la pregunta: *¿cómo afecta a la gráfica la dispersión de los datos?*, y la respuesta esperada era un argumento que aludiera al alto valor de σ , siendo esta una medida de dispersión, el cual impedía formar la conocida curva “acampanada” de la distribución normal. En otras palabras, algunos de los datos estaban demasiado alejados unos de otros, y ninguno cercano a la media, de ahí que pudiera concluirse que la población de origen no se comporta de acuerdo a una distribución de probabilidad normal.

En este punto cabe mencionar los errores vistos a lo largo de los análisis, pues la mención de estos será una constante a lo largo del análisis de esta actividad. En la Tabla 30 se cubre esta función.

Tabla 30. Errores encontrados en los análisis, creación propia.

Concepto	Lógica del error
Error 1 (ER1)	El área de las gráficas varía según su curtosis
Error 2 (ER2)	Desdeñar el concepto de probabilidad. Esto se evidencia en la escala del eje y, pues ésta no se encuentra en los términos de probabilidad (decimales)
Error 3 (ER3)	Considerar al valor de la desviación estándar σ como la altura que debe tener la curva. Para ello se incurre también al ER2, aunque es importante mencionar que desde el ER2 no siempre se incurre en el ER3
Error 4 (ER4)	Idea de que la curva comienza y termina respectivamente en los valores del intervalo $\mu \pm \sigma$, generando la creencia de que el intervalo es el generador de la curva
Error 5 (ER5)	Contradecir a la propiedad EI5 (media es igual a moda), debido a que no se abordó esta propiedad en el curso.

A continuación, en la Tabla 31 se muestran los elementos extensivos de esta actividad.

Tabla 31. Elementos extensivos en la actividad 6, creación propia.

Identifica P1 (parte A)	Representación gráfica	F	Identifica P1 (parte B)	Comprensión de P1	F		
Correcto	Acorde a los parámetros dados	0	Correcto	No hubo	0		
Incorrecto	No acorde a los parámetros dados	4	Incorrecto	Explicación en base a una mecanización de la curva de densidad	5		
	Con ER4	1					
	No acorde a los parámetros dados	1				ER1	1
	Con ER2 y ER3	1				No responde	1
	Incongruente	2				Incongruente	2
Total		9			9		

En la parte A, de la muestra de nueve estudiantes, ninguno respondió de manera correcta. Una posible causa general de esta situación puede que durante el curso se haya propiciado a una mecanización de la curva, bajo efectos de así era más fácil tipificar y encontrar probabilidades. Es decir, se priorizó la tipificación sobre el desarrollo intuitivo de la distribución normal.

Por consiguiente, hubo nueve respuestas incorrectas. Cinco de estas (estudiantes 2, 3, 7, 8 y 9) fueron directamente a graficar una curva de densidad, situando en el eje x un punto por cada valor del conjunto. En el caso de la estudiante 7, esto derivó en el ER1. Se apoyaron en el intervalo $\mu \pm \sigma$ y ninguna de ellas consideró al eje y, por lo que no lo graficaron. Las demás respuestas también mecanizaron la curva de densidad, pero con diferentes matices. Una de ellas (estudiante 1) lo hizo bajo el ER4, restándole a la gráfica el espectro de continuidad característico de esta distribución; otra (estudiante 5) mecanizó su curva de acuerdo a los ER2 y ER3, es decir, situando la altura de la curva en 46.83 (el valor de σ), dándole por ello al eje y una escala inadecuada. Finalmente, dos respuestas fueron incongruentes: en una se trazaron tres curvas de densidad en conjunto con el ER2

(estudiante 4), y en otra (estudiante 6) se intentó mecanizar la curva bajo los límites del intervalo $\mu \pm \sigma$, pero estos se calcularon erróneamente.

Del mismo modo, en la parte B no hubo respuestas correctas. Dado que estas respuestas venían de representaciones incorrectas, terminaron por sesgarse hacia términos no convenientes.

Así pues, se tuvieron nueve respuestas incorrectas. Las cinco que venían únicamente de representaciones gráficas no acordes tuvieron diferencias entre ellas: en cuatro (estudiantes 2, 3, 8 y 9) se mencionó, como respuesta a la pregunta planteada, que la dispersión de los datos afectaba a la gráfica haciendo que algunos datos no quedaran dentro del intervalo $\mu \pm \sigma$; la otra respuesta en esta categoría era la proveniente de la gráfica hecha bajo el ER4 (estudiante 1), quien respondió a la pregunta de forma superficial y poca sustanciosa, diciendo que “la dispersión de los datos afecta en cómo se va a comportar la gráfica”.

La estudiante 7 argumentó directamente desde la lógica del ER1; mientras que las demás respuestas continuaron el razonamiento hecho desde sus gráficas en la parte A. De las representaciones incongruentes, una (estudiante 4) mencionó que su gráfico se debió a que “había mucha varianza”; y la otra (estudiante 6) menciona que “mayor valor = mayor variabilidad”, pero no desarrolla esta idea. Finalmente, la representación hecha en sincretismo con los ER2 y ER3 (estudiante 5) no tuvo respuesta en la parte B;

Elementos ostensivos

El registro en que estaba planteada esta actividad era el registro alfanumérico (RAL), ya que contaba con un conjunto de valores numéricos y sus respectivos parámetros escritos en lenguaje simbólico relacionado con la distribución normal. En la parte A, se debía graficar, por lo que esto requería una conversión del RAL al registro gráfico (RG), obviamente con los puntos cognitivos

correspondientes. En la parte B se respondió a una pregunta, y aunque no se especifica el registro en que esto debe hacerse, el registro hacia el que recurrieron los estudiantes fue el lenguaje natural (LN). La Tabla 32 muestra los resultados.

Tabla 32. Elementos ostensivos en actividad 6, creación propia.

Respuesta (Parte A)	Actividad cognitiva realizada (Parte A)	F	Respuesta (Parte A)	Actividad cognitiva realizada (Parte B)	F
Correcta	Conversión del RAL al RG	0	Correcta	Conversión del RG al LN	0
Incorrecta		9	Incorrecta		9
Total		9			9

En la parte A, tal como puede verse en la Tabla 32, no hubo respuestas correctas. Esto indica que los estudiantes tuvieron dificultades para encontrar los puntos cognitivos en el RAL que debían convertirse al RG.

En contraparte, hubo nueve respuestas incorrectas. Como se dijo anteriormente, en ellas no se encontraron los puntos cognitivos a convertir, aunque es posible decir que se identificó el lenguaje simbólico de los parámetros y la representación del conjunto de datos en la mayoría de casos (estudiantes 1, 2, 3, 5, 7, 8 y 9), indicando que las dificultades vienen directamente de las propiedades puestas en juego. Únicamente en dos representaciones (estudiantes 4 y 6) no puede decirse que se identificó el lenguaje simbólico, derivando en incongruencias.

En la parte B, también se tuvo una ausencia de respuestas correctas. La conversión esperada, del RG al LN, no se concretó debido a la ausencia de respuestas pertinentes en la parte A.

Las respuestas incorrectas fueron nueve, y en ellas es posible ver los diferentes tipos de dificultades que presentan los estudiantes. Dentro del LN, aunque si bien son incorrectas las respuestas, en seis de ellas es posible ver cierta lógica en el

lenguaje simbólico utilizado (estudiantes 1, 2, 3, 7, 8 y 9); lo cual no se refleja en las representaciones que en la parte A fueron incongruentes (estudiantes 4 y 6). Finalmente, es necesario decir que la estudiante 5 no respondió a esta parte.

Elementos actuativos

Los estudiantes debían ejecutar acciones acordes a un elemento A1: estudio descriptivo de datos para ajustar una curva. El efecto de A1, bajo el planteamiento de esta actividad, debía manifestarse en la parte A en una representación atípica: una línea asintótica al eje x que además estuviera casi sobre este (ver Figura 43); mientras que en la parte B debía manifestarse A1 con el cuestionamiento sobre la normalidad de la población de origen de la muestra.

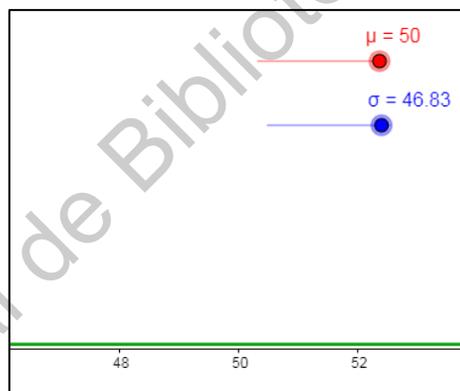


Figura 43. Respuesta esperada para la parte A de la actividad 6, tomada de *geogebra.org*

Así pues, como puede notarse del párrafo anterior, en la parte A se pedía a los alumnos que graficaran el conjunto de datos; mientras que en la parte B debían responder a la pregunta: *¿cómo afecta a la gráfica la dispersión de los datos?*

Al igual que en la actividad anterior, en esta tampoco hubo respuestas correctas, aunque sí se encontraron diferencias entre las representaciones gráficas hechas por los estudiantes, siendo unas más lógicas que otras. A continuación se

describen los cuatro tipos de respuestas hechas en la parte A, siendo el tipo 1 la menos ilógica y el tipo 4 la más, aunque se reitera que todas son incorrectas.

Tipo 1: mecanización de la curva de densidad. Este tipo de gráfica fue hecho por cinco estudiantes (2, 3, 7, 8 y 9), y consistió en el trazo de una curva de densidad, con la localización en el eje x de puntos correspondientes a los valores del conjunto. Este gráfico se caracterizó también por prescindir del eje y, además de indicar los valores del intervalo $\mu \pm \sigma$ para, en la parte B, utilizar a este como argumento. En la Figura 44 se muestra esta respuesta.

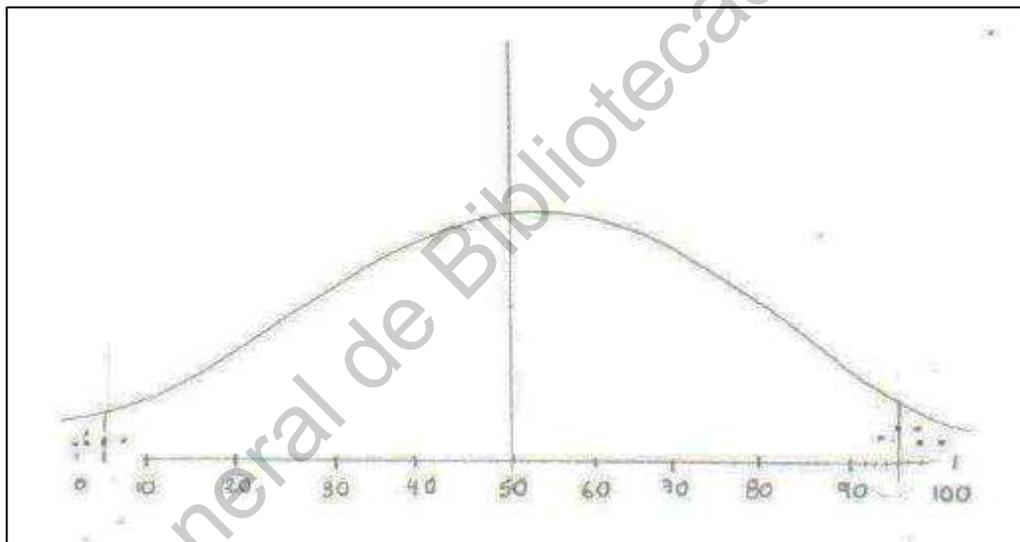


Figura 44. Respuesta tipo 1 de realización de A1 en la actividad 6, tomada del instrumento de recogida de datos del estudiante 8.

Tipo 2: mecanización de la curva de densidad bajo el ER4. Este tipo de respuesta solo fue hecha por el estudiante 1. Puede observarse en la Figura 45 cómo el estudiante comienza el trazo de la curva en el valor dado por $\mu - \sigma$, y la termina en el correspondiente a $\mu + \sigma$. Este accionar también se reflejará en su respuesta en la parte B. Particular atención en el valor negativo a la izquierda del eje de simetría, indicando una posible confusión del estudiante entre la distribución normal y la distribución normal estándar.

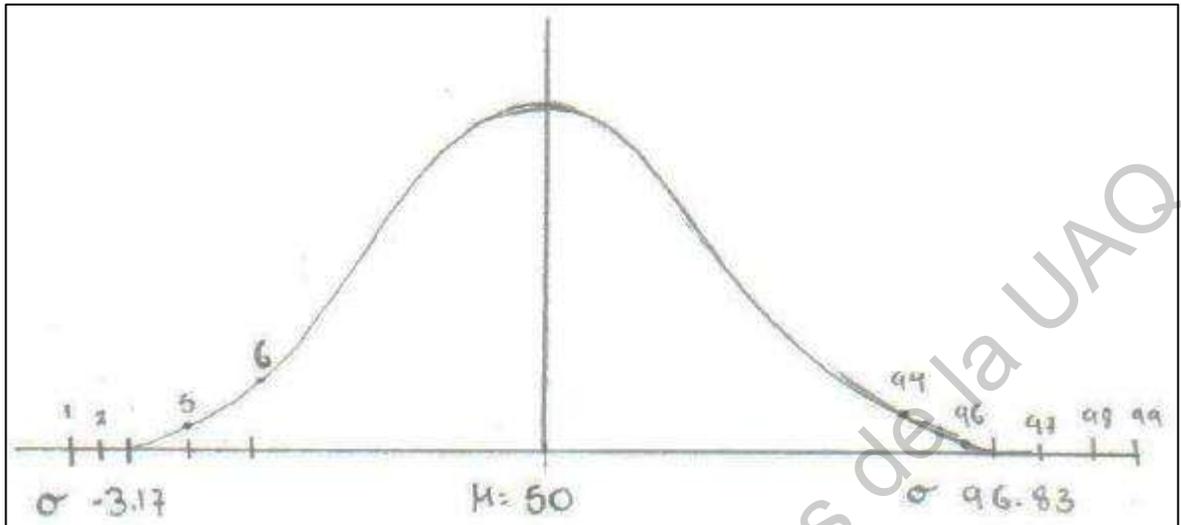


Figura 45. Respuesta tipo 1 de realización de A1 en la actividad 6, tomada del instrumento de recogida de datos del estudiante 1.

Tipo 3: mecanización de la curva de densidad bajo ER2 y ER3. Respuesta únicamente del estudiante 5. La mecanización aquí ocurrida es parecida a la tipo 1 en esencia, pero conserva ciertas particularidades que se atribuyen a los errores ER2 y ER3. Del ER2 es posible notar, en la Figura 46, una escala que va de los valores 0 al 80, mientras que del ER3 es visible la intención del estudiante por implicar la altura de la curva con el valor de σ de 46.83, reflejado este el eje y.

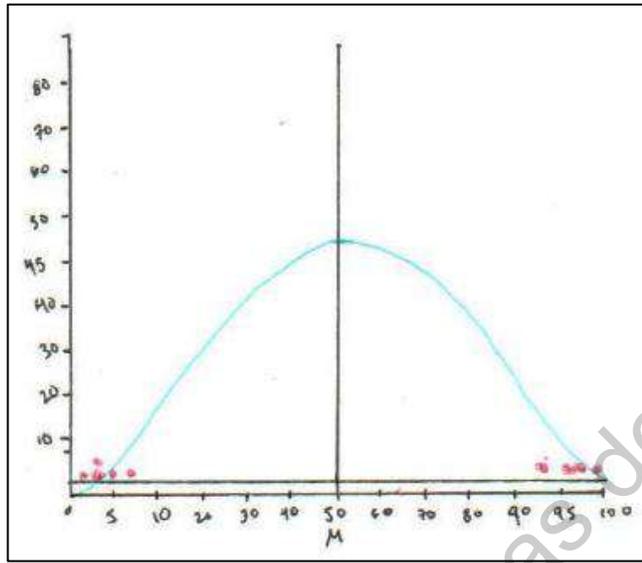


Figura 46. Respuesta tipo 1 de realización de A1 en la actividad 6, tomada del instrumento de recogida de datos del estudiante 5.

Tipo 4: representación incongruente. Aunque los dos estudiantes (4 y 6) que entran en esta categoría difieren en su representación, ambas son similares en el sentido de que son incongruentes y carecen de una lógica cercana a la distribución normal, tal como puede verse en la Figura 47 la del estudiante 4, que además tiene el ER2.

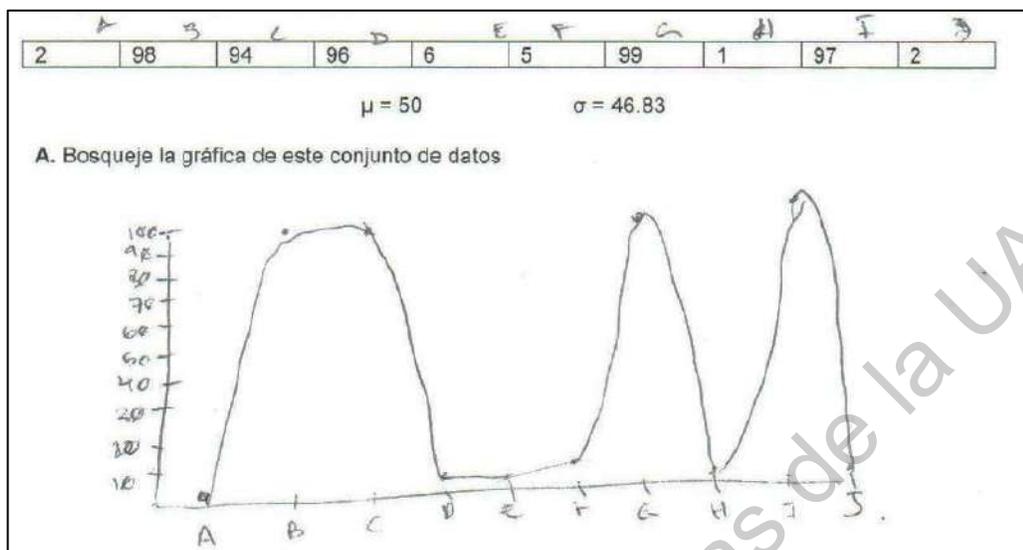


Figura 47. Respuesta tipo 1 de realización de A1 en la actividad 6, tomada del instrumento de recogida de datos del estudiante 4.

En la Tabla 33 se detallan a profundidad los elementos actuativos de esta actividad.

Tabla 33. Elementos actuativos en actividad 6, creación propia.

Realiza A1 (parte A)	Resultado de realizar A1	F	Realiza A1 (parte B)	Explicación de A1	F
Correcto	Línea asintótica al eje x, sin curvatura visible	0	Correcto	No hubo	0
Incorrecto	Tipo 1	4	Incorrecto	Explicación en base a una mecanización de la curva de densidad	5
	Tipo 2	1			
	Tipo 1	1			
	Tipo 3	1			
	Tipo 4	2			
Total		9		Incongruente	2
					9

En la parte A, de la muestra de nueve estudiantes, no hubo ninguna respuesta correcta. Como puede verse en la Tabla 33, las frecuencias están acumuladas del lado de las respuestas incorrectas, lo que indica que ningún estudiante realizó la representación gráfica esperada (ver Figura 43).

Así pues, existieron nueve respuestas incorrectas en esta parte de la actividad. Cinco de ellas fueron tipo 1, con particularidades entre ellas: una respuesta (estudiante 7) no ubicó en el eje x los valores del conjunto; en otra (estudiante 3) es posible ver un intento de tipificación (ver Figura 48), aunque esto no evitó que la respuesta fuera incorrecta, es posible notar la tendencia por tipificar, indicando que este rasgo fue distintivo del curso; y la última a mencionar (estudiante 9) intentó calcular probabilidades, pero el resultado general no se afectó por ello. Las dos restantes (estudiantes 2 y 8) fueron tal cual se describen en el apartado de respuesta Tipo 1, y son como se observa en la Figura 44.

Solo hubo una respuesta Tipo 2 (estudiante 1), enmarcada en el ER4, cuya descripción es tal como se hizo en el apartado correspondiente y puede verse en la Figura 45. Mismo situación es la de la respuesta Tipo 3 (estudiante 5), enmarcada en los errores ER2 y ER3, que es como se describe en su apartado y se observa en la Figura 46. Por último, las dos respuestas Tipo 4 (estudiantes 4 y 6) no varían mucho en su cualidad de incongruentes (ver Figura 47).

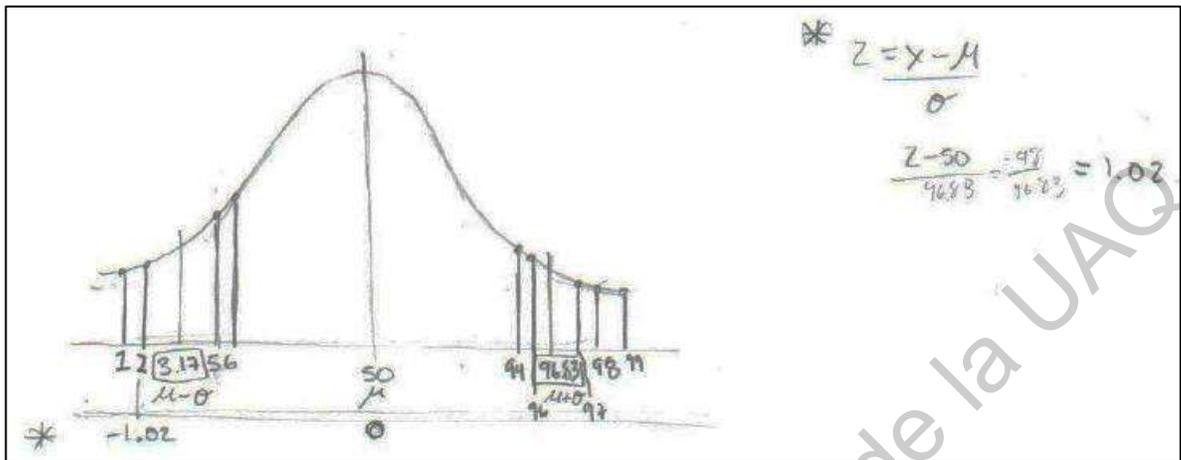


Figura 48. Respuesta del estudiante 3 en la parte A de la actividad 6, tomada del instrumento de recogida de datos.

En la parte B tampoco se tuvieron respuestas correctas. Esto era de esperarse porque el estudio descriptivo de los datos en la parte A, implicado por A1, no se hizo de forma apropiada, de manera que no se realizó cabalmente un cuestionamiento sobre la normalidad de los datos presentados.

Esto dio pie a que hubiera nueve respuestas incorrectas en esta parte. Como es de suponer, estas respuestas provienen directamente de lo respondido en la parte A, es decir, del gráfico realizado. Esta correspondencia entre lo graficado y lo explicado se puede observar en la Tabla 33. De aquí se desprende que los estudiantes que graficaron respuestas tipo 1 se desglosan en tres diferentes explicaciones en la pregunta planteada en la parte B: *¿cómo afecta a la gráfica la dispersión de los datos?* Tres de ellas (estudiantes 2, 3 y 8) aludieron a que la dispersión de los datos afectaba de manera que ciertos datos quedaban fuera del intervalo $\mu \pm \sigma$, que siendo cierto, no deja de ser poco sustancioso pues en ningún momento se habla de la variación y la posible no normalidad del conjunto. Lo anterior, complementando una respuesta Tipo 1, es lo que hace incorrectas a estas respuestas.

Las dos restantes que fueron tipo 1 son diferentes entre sí: una de ellas (estudiante 7) alude al ER1 (ver Tabla 30), y la otra (estudiante 9) cuestiona la curvatura mencionando que no es posible generar una curva tan pronunciada, debido a las probabilidades que suponen los datos, aunque aun así intentó dar a su gráfico la forma “acampanada” característica, aunque mantiene su análisis desde la perspectiva de que el gráfico debe ser una curva de densidad.

De la respuesta Tipo 2 (estudiante 1) se respondió a la pregunta aludiendo a un sentido común que culmina en un texto poco sustancioso, pues menciona que “la dispersión de los datos afectan en la forma de cómo se va a comportar la gráfica”, lo cual aporta poco para el análisis. Por otra parte, de la respuesta Tipo 3 (estudiante 5) no hubo respuesta a esta parte de la actividad.

Finalmente, las respuestas correspondientes a las representaciones incongruentes en la parte A (estudiantes 4 y 6) fueron diferentes entre sí, aunque no por ello menos incoherentes. El estudiante 4 menciona que “había mucha varianza”, lo cual se reflejó en sus “tres curvas” (ver Figura 47). El estudiante 6 elabora una respuesta con cierto contenido, utilizando términos como “variabilidad”, “distribución” y “valores alejados de la media”, los cuales no habían sido utilizados previamente en ninguna actividad del instrumento aunque sí era necesario hacerlo. Esto da la idea de que el estudiante en cuestión obtuvo su respuesta por medio de fuentes externas a su propio conocimiento, posiblemente de su teléfono celular. Aun así la respuesta no abarca las condiciones del planteamiento, por lo que igualmente se considera incorrecta.

Elementos intensivos

Las propiedades que debían potenciarse a través de esta actividad eran la EI1: simetría respecto al eje vertical (media), EI2: concavidad y convexidad, y EI3: curva de densidad como asíntota horizontal del eje x.

En la parte A, la respuesta esperada era como en la Figura 45, en la cual se reflejan las tres propiedades en cuestión. En la parte B se debía responder a una pregunta (*¿cómo afecta a la gráfica la dispersión de los datos?*) que potenciaba una explicación sobre la respuesta en la parte A (ver Figura 43). La Tabla 34 señala estas cuestiones.

Tabla 34. Elementos intensivos en la actividad 6, creación propia.

Respuesta (Parte A)	Elementos intensivos aparecidos (Parte A)	F	Respuesta (Parte B)	Elementos intensivos aparecidos (Parte B)	F
Correcto	EI1, EI2 y EI3	0	Correcto	No hubo	0
Incorrecto	EI1 en tipo 1	4	Incorrecto	EI1 desde una perspectiva errónea	5
	EI1 en tipo 2	1			
	EI1 en tipo 1	1		EI1 desde ER1	1
	EI1 en tipo 3	1		No responde	1
	Ninguno	2		Ninguno	2
Total		9			9

En la parte A, como puede verse en la Tabla 34, no hubo respuestas correctas. Esto indica que ningún estudiante identificó las tres propiedades que debían ponerse en juego: EI1, EI2 y EI3. Se obtuvieron, pues, nueve respuestas incorrectas. Debido a que no se graficó de manera correcta, no es posible identificar si alguno de los estudiantes tiene idea alguna de EI3, aunque sí es posible decir que ninguno de ellos tiene intuiciones sólidas sobre EI2, ya que todos ellos mecanizaron la curva. Por otra parte, EI1 es la propiedad que más tienen en claro la mayoría de los estudiantes, aunque con matices.

De los gráficos Tipo 1 (ver Figura 44), presentados por cinco de ellos (estudiantes 2, 3, 7, 8 y 9), el EI1 se estableció como un punto de partida para mecanizar la curva. En la respuesta del estudiante 1 también tuvo esa función, pero difiere de los anteriores por mostrar claramente al ER4 y, por consiguiente, un

desconocimiento de EI3, ya que los bordes de la curva tocan al eje x, algo que contradice directamente a EI3 (ver Figura 45). De la respuesta del estudiante 5 (ver Figura 46), en la que también se trató de identificar a EI1, además de los errores ER2 y ER3 se nota que los bordes de la curva tocan al eje x, contradiciendo a EI3.

Las anteriores fueron respuestas a la parte A en las que el intento de identificar a la propiedad EI1 culminó en diferentes errores conceptuales, lo cual no sucede en las dos respuestas tipo 4 (estudiantes 4 y 6), ya que estos no enfatizan ninguna propiedad de la distribución normal en sus gráficos de la parte A (ver Figura 47).

En la parte B tampoco hubo respuestas correctas. Las ideas tenidas por los estudiantes respecto a ciertas propiedades en la parte A, se tornan ambiguas en sus explicaciones dadas a esta parte de la actividad.

Las nueve respuestas incorrectas fueron distintas entre ellas. De las cinco explicaciones venidas de representaciones Tipo 1, en tres (estudiantes 2, 3 y 8) se explicó exclusivamente a la dispersión como causante de que algunos datos quedaran fuera del intervalo $\mu \pm \sigma$, evidenciando su conocimiento de EI1, pero dejando de lado términos importantes como “variabilidad” y “probabilidad”. Del estudiante 3 cabe mencionar su intención por tipificar, sin causar esto efecto alguno en sus respuestas; en una más (estudiante 7) se aludió al ER1, desdeñándose con ello mucho del contenido conceptual esperado y, por consiguiente, a las propiedades puestas en juego; finalmente, en la respuesta del estudiante 9 se nota una intención por cuestionar la normalidad de los datos, pero no se consigue debido a que no se consiguió una representación correcta en la parte A (ver Figura 49).

Del estudiante 1 no se obtuvo sustancia en la explicación, ya que menciona que la gráfica varía según la dispersión de los datos, pero no desarrolla una idea cabal ni

involucra términos del lenguaje simbólico para sustentarla, por lo que no es posible hablar de las propiedades en su respuesta. Por otra parte, la estudiante 5 no responde a esta pregunta, por lo que solo queda su respuesta en la parte A (ver Figura 46).

Las respuestas con representación incongruente en la parte A (estudiantes 4 y 6) siguieron la misma lógica de incongruencia en esta parte. No se alude pues a las propiedades, sino a esbozos de ideas: la varianza como generadora de tres curvas, en el caso del estudiante 4 (ver Figura 47), y contenido con lógica incompleta proveniente de fuentes difusas en el estudiante 6.

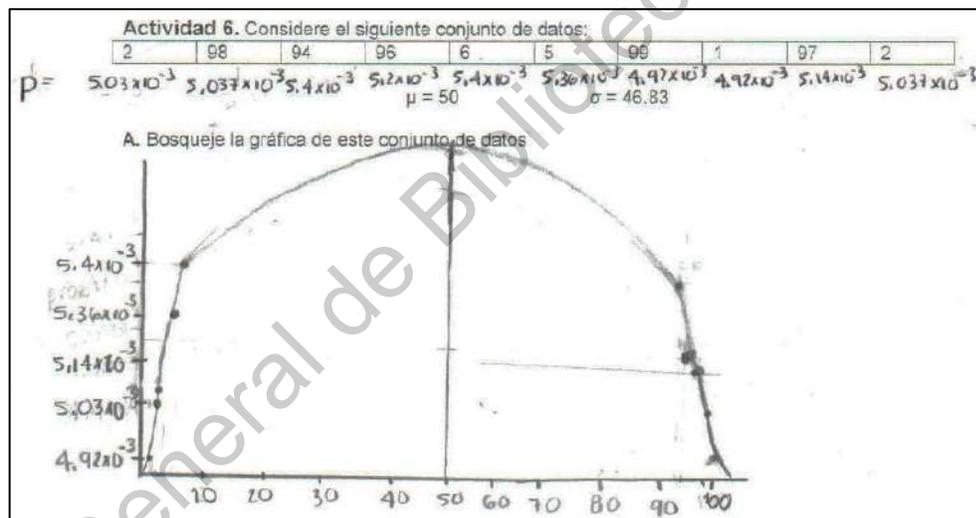


Figura 49. Respuesta del estudiante 9 a la parte A de la actividad 6, tomada del instrumento de recogida de datos.

Elementos validativos

La validación en esta actividad era regida por la pregunta: *¿cómo afecta a la gráfica la dispersión de los datos?* Y esta se hacía en la parte B, por lo que en la parte A no era requerida una explicación. Así pues, en la parte B de esta actividad es donde se encontraron las explicaciones en esta actividad, mostrándose los resultados de estos en la Tabla 35.

Tabla 35. Elementos validativos en la actividad 6, creación propia.

Validación (parte A)	Validación (parte B)	Elemento validativo utilizado	Contenido de la validación	F
No aplica	Correcto	No hubo	No hubo	0
	Incorrecto	Análisis	Desde gráficos incorrectos provenientes de parámetros μ y σ mal interpretados	5
			ER1	1
		No responde		1
		Ninguno	Incongruente	2
Total				9

No hubo respuestas correctas en esta parte de actividad, lo que equivale a decir que no hubo validaciones adecuadas.

En cambio hubo nueve respuestas incorrectas. Tres de ellas (estudiantes 2, 3 y 8) se basaron en la idea de que es el intervalo $\mu \pm \sigma$ es el que rige la curva, y la importancia de la dispersión, en relación a este, es que deja a algunos valores fuera de los límites de dicho intervalo. Más allá de esta idea no hubo desarrollo de ideas, por lo que resultan poco sustanciosas. Del estudiante 7 es posible mencionar su idea de la curva acorde al ER1, es decir, creyendo que las áreas de las curvas varían de acuerdo a su curtosis, lo que indica que, según este estudiante, el área de las curvas varía de acuerdo a sus parámetros. El estudiante 9, por otra parte, es el único que se cuestiona la normalidad del conjunto de datos, basándose en un cálculo erróneo de probabilidades. Esto no era requerido, pues la intención de la actividad era conocer las capacidades de intuir la distribución normal por parte de los estudiantes. De ahí que este cálculo, siendo incorrecto, terminó por hacer de esta respuesta inadecuada, a pesar de que la idea inicial de la estudiante era correcta al cuestionar la curvatura.

El estudiante 1 da una explicación superficial al decir que la dispersión afecta la forma de la curva, pero al no haber desarrollo de esta idea es difícil conocer el conocimiento del estudiante en esta actividad. Por último, la estudiante 5 no responde a esta parte de la actividad, y las dos últimas respuestas (estudiantes 4 y 6) resultan incongruentes desde la perspectiva del objeto matemático en cuestión, descritos los diferentes polos de esta incongruencia en los elementos de significado anteriores.

5.6.1 Trayectorias cognitivas en la actividad 6

Hubo cuatro trayectorias cognitivas en esta actividad, incluida la no respuesta. Todas ellas fueron incorrectas, y se nombran del siguiente modo: mecanización de la curva de densidad (estudiantes 1, 2, 3, 8 y 9), mecanización de la curva de densidad sustentada desde el error 1 (estudiante 7), respuesta incongruente (estudiantes 4 y 6) y no responde (estudiante 5).

Respuesta incorrecta: mecanización de la curva de densidad

En esta categoría entraron tres respuestas (estudiantes 1, 2, 3, 8 y 9), las cuales provienen de representaciones Tipo 1 (ver Figura 44), excepto la del estudiante 1, que proviene de una Tipo 2 (ver Figura 45), aunque razona del mismo modo que los demás estudiantes en esta categoría. El ejemplo de explicación viene en la Figura 50.

A rectangular box containing handwritten text in Spanish: "En que algunos de los datos quedan dentro y otros fuera". The handwriting is somewhat blurry and appears to be from a student's response.

Figura 50. Respuesta de la estudiante 8 a la parte B de la actividad 6, tomada del instrumento de recogida de datos.

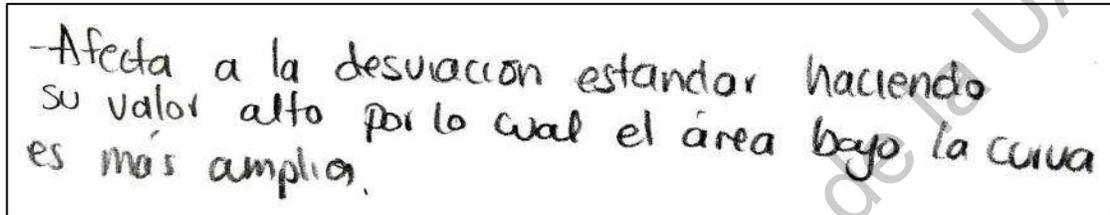
Es fácil deducir en esta respuesta que cuando la estudiante menciona “dentro” y “fuera”, es respecto al intervalo $\mu \pm \sigma$. La pregunta que sirvió como referencia fue:

¿cómo afecta a la gráfica la dispersión de los datos? Lo que lleva a pensar que la respuesta en cuestión fue superficial en cuanto a la dispersión de los datos se refiere, ya que no habla de “variabilidad” o “probabilidad”, probablemente porque la intuición hacia estos conceptos no fue desarrollada durante el curso al menos por esta estudiante. Así pues, la respuesta de la estudiante se acerca poco a lo esperado, es decir, a cuestionar la normalidad de la población de origen, debido en parte al tipo de representación gráfica utilizada, que tampoco era acorde a los parámetros dados.

Todo esto lleva a concluir que la estudiante no identifica el tipo de problema P1, ajuste de un modelo a la distribución de datos reales, ya que la representación gráfica del estudiante no se ajusta a los datos y parámetros dados. En cuanto a los elementos ostensivos, no es posible decir que la estudiante realiza las conversiones esperadas, del registro alfanumérico (RAL) al registro gráfico (RG) en la parte A, y del RG al lenguaje natural (LN), pues los puntos cognitivos que debían convertirse de un registro a otro no fueron detectados. Por otra parte, el elemento actuativo A1, estudio descriptivo de datos para ajustar una curva, no se conduce en el sentido esperado, pues el estudio descriptivo de datos se ve afectado por la arraigada mecanización de una curva de densidad. Las propiedades EI1, simetría respectiva al eje vertical (media), EI2, concavidad y convexidad, y EI3, curva de densidad como asíntota del eje horizontal, no se identifican acorde a lo esperado, salvo EI1 que es representado acorde a la mecanización, las otras propiedades no es posible decir que son identificadas por el estudiante. Por último, se considera como análisis a esta respuesta por analizar la particularidad respecto al intervalo $\mu \pm \sigma$, aunque, como se dijo antes, esto no condujo a una respuesta correcta.

Respuesta incorrecta: mecanización de la curva de densidad sustentada desde el error 1

Solo la respuesta del estudiante 7 entra en esta categoría, proveniente de una respuesta gráfica tipo 1, y su respuesta se puede ver en la Figura 51.



-Afecta a la desviacion estandar haciendo su valor alto por lo cual el área bajo la curva es más amplia.

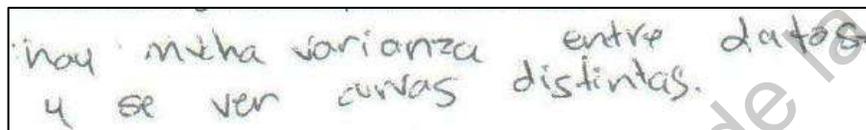
Figura 51. Respuesta de la estudiante 7 a la parte B de la actividad 6, tomada del instrumento de recogida de datos.

En cierto sentido, el estudiante atina a decir que la dispersión de los datos “afecta a la desviación estándar”, pero puede verse que el enfoque bajo el cual elabora este argumento es incorrecto, pues resultado de esto sería que el área bajo la curva sería “más amplia”. Lo anterior encaja en la lógica del error 1 (ver Tabla 30) y contradice al mismo tiempo a la propiedad EI4, el área bajo la curva es igual a 1, en el momento en que menciona que las áreas varían, son más “amplias” unas de otras. Es posible que la estudiante no conozca la palabra “curtosis” para referirse a la curvatura de la curva.

Con esto es posible decir que no se identifica el problema tipo P1. Así pues, las conversiones esperadas para los elementos ostensivos, del RAL al RG en A, y del RG al LN en B, no se logran íntegramente. Con todo ello, el estudio descriptivo de datos convenido por el elemento actuativo A1 no se realiza apropiadamente. La propiedad EI1 es identificada, puesto que la respuesta es identificable con la de la Figura 44 pero, al igual que esta, no concreta las propiedades EI2 y EI3. El análisis del estudiante, cuya lógica encaja con el Error 1, es lo encontrado en esta respuesta desde la perspectiva de los elementos validativos del significado de referencia.

Respuesta incorrecta: respuesta incongruente

En esta categoría entran dos respuestas (estudiantes 4 y 6), que corresponden a una respuesta Tipo 4 (ver Figura 47) en la parte A. En la Figura 52 se observa un ejemplo de esta categoría.



hay mucha varianza entre datos
y se ven curvas distintas.

Figura 52. Respuesta del estudiante 4 a la parte B de la actividad 6, tomada del instrumento de recogida de datos.

Esta explicación corresponde, específicamente, a la respuesta Tipo 4 (ver Figura 47). Al unificar lo respondido en ambas partes, es posible deducir que el estudiante no ha desarrollado una intuición hacia la distribución normal, ni tampoco está relacionado con acciones relacionadas a su aplicación.

Bajo esta observación, es posible decir que no se identifica el problema tipo P1, de los elementos extensivos. No se realizan las conversiones entre los registros de representación semiótica en ninguna de las partes. No hay estudio descriptivo de los datos bajo el cual pueda decirse que se ha realizado el actuar tipo A1, de los elementos actuativos. En cuanto a las propiedades que debieron potenciarse en esta actividad, EI1, EI2 y EI3, no se ha identificado ninguna. El texto visto en la Figura 52 resulta incongruente, y se enfatiza esta incongruencia al relacionarse con su gráfico correspondiente (ver Figura 47), por lo que no es posible decir que esta explicación sea uno de los elementos validativos del significado de referencia.

Respuesta incorrecta: no responde

La estudiante 5 entra en esta categoría debido a que no responde a la parte B de la actividad. Al no verse complementada su respuesta en la parte A (ver

Figura 46) no es posible saber si identifica en alguna medida los elementos de significado. No obstante, es posible observar que en su comprensión confluyen los errores ER2 y ER3, como se mencionó ya en cada uno de los elementos del significado de referencia en esta actividad.

5.7 Análisis del inciso a de la actividad 7

Elementos extensivos

Esta actividad presentaba un problema tipo P1, ajuste de un modelo a la distribución de datos reales, en lo que refiere a los elementos extensivos. Cabe mencionar que este análisis trata del inciso a de la actividad 7, la cual se compone de tres incisos, *a*, *b* y *c*. También es importante mencionar que estos no se relacionan entre sí, y que las respuestas son independientes unas de otras, de ahí que se decidiera a analizar cada inciso por separado. La razón de agrupar los tres incisos en una sola actividad fue porque el actuar (comprobación de la veracidad de una sentencia) es el mismo en los tres. Así también, aunque en ninguno de los incisos de esta actividad se marcaba literalmente una *parte A* y una *parte B*, se seguirá refiriendo a ellas de ese modo en el sentido de que su estructura es igual que en las actividades anteriores: una primera parte de realización técnica, y una parte explicativa de lo técnico.

En el caso de este inciso, en la parte A se presentaba la sentencia: *en una distribución normal, el 50% de los datos caen por encima de la media*. Esto es verdadero, por lo que lo esperado era que el estudiante marcara dicha casilla. En la parte B se debía explicar la veracidad de la sentencia haciendo referencia a la propiedad E14, el área bajo la curva es igual a la unidad, pudiendo complementarse también con aportes de la propiedad E11, simetría respecto al eje vertical (media). En la Tabla 36 se observan los resultados de este inciso.

Tabla 36. Elementos extensivos en el inciso a de la actividad 7, creación propia.

Identifica P1 (parte A)	V/F	F	Identifica P1 (parte B)	Comprensión de P1	F
Correcto	Verdadero	5	Correcto	Referencia a la propiedad EI4	3
				Referencia a EI4 y EI1 (a través de gráfico)	1
Incorrecto	Falso	4	Incorrecto	Incongruencia al intuir μ	1
				Poca sustancia	2
				No responde	2
Total		9			9

En la parte A, se tuvieron cinco respuestas correctas. Esto implica que estos estudiantes (1, 2, 3, 7 y 9) indicaron como verdadera a la sentencia dada, y gracias a ello es posible deducir que identifican las propiedades potenciadas en este inciso, es decir, EI1 y EI4. Los matices de esta deducción se reflejan en la parte B de la actividad.

Las respuestas incorrectas fueron cuatro, por consiguiente, son estos estudiantes (4, 5, 6 y 8) quienes marcaron como falsa a la sentencia. Esto indica que los estudiantes, o bien no están relacionados con el lenguaje utilizado en la sentencia, o no tienen el conocimiento puesto en juego en este inciso. En el caso del lenguaje utilizado, son los términos: *distribución normal*, *50%* y *media*, los que pudieran llegar a generar dificultades, aunque tampoco se trata de términos complejos, pues son conceptos básicos del tema, y no deberían representar dificultades para los estudiantes si asistieron de manera regular al curso. Es por ello que es posible decir que los estudiantes no tienen el conocimiento requerido.

En cambio, en la parte B se tuvieron cuatro respuestas correctas. Entre ellas no hubo muchas diferencias, aunque vale mencionar las particularidades que las

definieron como correctas. En tres de estas (estudiantes 1, 3 y 9) se aludió directamente a la propiedad E14 desde la perspectiva de que a cada hemisferio de la media corresponde el 50% de los datos, manifestando indirectamente que la suma de estos es la unidad, tal como la propiedad lo indica. El estudiante 2, además de explicar lo anterior, complementa su respuesta con un gráfico en el que se muestran los porcentajes, 50% a cada lado de la media, y la media simbolizada mediante μ . Con ello es posible decir que este estudiante no solo identifica E14, sino que para ello ha referido también a E11.

Las cinco respuestas incorrectas sí muestran más diferencias entre ellas. El estudiante 6 explica la lógica de la media μ , incluida la forma de calcularla, pero no refiere a ninguna de las propiedades, por lo que su explicación, aunque amplia, resulta incongruente al no referir en ningún momento a lo requerido. Dos de las respuestas (estudiantes 4 y 7) son poco sustanciosas: mientras el estudiante 4 menciona que la situación *depende de los datos*; el estudiante 7, quien había respondido correctamente a la parte A, refiere a que esto es así *por propiedad*. Por último, los estudiantes 5 y 8 no responden a esta parte.

Elementos ostensivos

Este inciso, al igual que los otros incisos pertenecientes a la actividad 7, estaba planteado en lenguaje natural (LN). La respuesta en la parte A ocurría dentro de este mismo registro, mientras que la explicación correspondiente a la parte B, al igual que en las actividades anteriores, era a criterio libre para los estudiantes, de ahí que se hagan las distinciones correspondientes en la Tabla 37.

Tabla 37. Elementos ostensivos en el inciso a de la actividad 7, creación propia.

Respuesta (parte A)	Actividad cognitiva realizada (Parte A)	F	Respuesta (parte B)	Actividad cognitiva realizada (Parte B)	F
Correcta	Tratamiento (respuesta dentro del mismo registro LN)	5	Correcta	Tratamiento dentro de LN	3
				Conversión al registro gráfico (RG)	1
Incorrecta		4	Incorrecta	Tratamiento dentro de LN	3
				No responde	2
Total		9			9

En la parte A, hubo cinco respuestas correctas. Estas se veían regidas por la estructura del planteamiento, es decir, marcar la casilla, verdadera o falsa, respecto a la sentencia dada. Debido a ello no era posible hablar de una conversión, pues no había cambio de registro de representación implicado. En cambio, se daba un tratamiento dentro del mismo registro, pues la respuesta implicaba un razonamiento dentro del LN, lo cual ocurrió para estas respuestas (estudiantes 1, 2, 3, 7 y 9). De estas es posible decir que alcanzan las propiedades potenciadas por el inciso, EI1 y EI4, mediante este tratamiento, ya que tomaron a la sentencia como verdadera.

En contraparte, hubo cuatro respuestas incongruentes. Si bien la respuesta estuvo dentro del mismo registro, esta constó de tomar como falsa a la sentencia, lo cual contradecía directamente a lo esperado. Es posible decir, por tanto, que los estudiantes no identificaron las propiedades presentadas bajo este planteamiento el registro LN.

En la parte B, en cambio, hubo cuatro respuestas correctas. Tres de ellas (estudiantes 1, 3 y 9) fueron explicaciones hechas en LN, aludiendo directamente a la propiedad EI4. La otra respuesta correcta (estudiante 2) se trató de una

conversión al registro gráfico (RG), donde el estudiante graficó una curva de densidad en la cual enfatizó el eje de simetría respecto a la media μ , identificando así la propiedad EI1, y los correspondientes valores de porcentajes (ver Figura 54 más adelante), enfatizando la propiedad EI4.

Por otra parte, las cinco respuestas incorrectas (estudiantes 4, 5, 6, 7 y 8) fueron todos intentos de explicación dentro únicamente del LN. Dos de ellos (estudiantes 4 y 7) fueron poco sustanciosos, sin hacer referencia a alguna propiedad, mientras que otra (estudiante 6) se explayó explicando la lógica de la media μ , sin por ello hablar también de las propiedades esperadas. Los estudiantes 5 y 8 no respondieron a esta parte de la actividad.

Elementos actuativos

Este inciso planteaba una comprensión tipo A1, estudio descriptivo de datos para ajustar una curva, respecto a las propiedades EI1 y EI4. En la parte A esto debía hacerse a través de marcar como verdadera la sentencia dada; mientras que en la parte B se debía explicar esta veracidad desde la perspectiva de las propiedades antes dichas. En la Tabla 38 se observan los resultados de A1.

Tabla 38. Elementos actuativos en el inciso a de la actividad 7, creación propia.

Realiza A1 (parte A)	Resultado de realizar A1	F	Realiza A1 (parte B)	Explicación de A1	F
Correcto	Marca Verdadero	5	Correcto	Alude a que el área bajo la curva es igual a 1 (propiedad E14)	3
				Alude a E14, con gráfico	1
Incorrecto	Marca Falso	4	Incorrecto	Incongruencia de μ	1
				Poca sustancia	2
				No responde	2
Total		9			9

En la parte A, se encontraron cinco respuestas correctas (estudiantes 1, 2, 3, 7 y 9). Todas ellas eran similares en el sentido de haber marcado como verdadera a la sentencia dada, identificando así las propiedades E11 y E14 tras haber estudiado la información de la sentencia bajo una perspectiva de la distribución normal, realizando con ello A1.

En sentido opuesto, se encontraron cuatro respuestas incorrectas (estudiantes 4, 5, 6 y 8), y fueron de este modo por haber marcado como falsa a la sentencia dada. De manera concreta, es posible deducir que estos estudiantes no identifican las propiedades potenciadas por esta actividad, encallando la realización de A1.

En la parte B, se encontraron cuatro respuestas correctas bajo las cuales A1 se desarrolló de distinta manera. Mientras que en tres explicaciones (estudiantes 1, 3 y 9) se razonó alrededor de la propiedad E14, es decir, del área bajo la curva igual a la unidad, en la explicación restante (estudiante 2) se vislumbra también la propiedad E11 a través de una curva de densidad graficada por la estudiante como parte de su validación.

En las cinco respuestas incorrectas también hubo variaciones. El estudiante 6 decide explayarse al hablar de la media μ , pero no corresponde este conocimiento con las propiedades aquí potenciadas. Dos explicaciones, en cambio, fueron poco sustanciosas (estudiantes 4 y 7), pues no refieren a las propiedades y responden de manera escueta basándose en un sentido común que se aleja de una intuición respecto a la distribución normal. Los estudiantes 5 y 8 no respondieron a esta parte de la actividad.

Elementos intensivos

Para este punto cabe reiterar que las propiedades de la distribución normal potenciadas por esta actividad, parte de los elementos intensivos del significado de referencia, fueron la EI1, simetría respecto al eje vertical (media), y EI4, área bajo la curva igual a 1. En la Tabla 39 se observan la forma en que estos emergieron.

Tabla 39. Elementos intensivos en el inciso a de la actividad 7, creación propia.

Respuesta (Parte A)	Elementos intensivos aparecidos (Parte A)	F	Respuesta (Parte B)	Elementos intensivos aparecidos (Parte B)	F
Correcto	EI1 y EI4	5	Correcto	EI4	3
				EI1 y EI4	1
Incorrecto	Ninguno	4	Incorrecto	Solo EI1	1
				Poca sustancia	2
				No responde	2
Total		9			9

En la parte A, como puede observarse en la Tabla 39, se tuvieron cinco respuestas correctas (estudiantes 1, 2, 3, 7 y 9) de las cuales es posible decir que se identificaron las propiedades EI1 y EI4. Esto tras haber marcado como verdadera la sentencia dada. Por otra parte, hubo cuatro respuestas incorrectas

(4, 5, 6 y 8), es decir, que marcaron como falsa a la sentencia cuando esta era verdadera y, por tanto, tampoco lograron hacer emerger las propiedades correspondientes.

En la parte B, hubo cuatro respuestas correctas. Tres de estas (estudiantes 1, 3 y 9) fueron directo a escudriñar la propiedad EI4, pues aluden directamente a la forma en que el área de la curva se distribuye para complementar la unidad. La estudiante 2, además de aludir textualmente a la propiedad EI4, también lo hizo de manera gráfica, a través de una curva de densidad, donde también enfatizó la situación de la media μ .

De las cinco respuestas incorrectas, dos de ellas (estudiantes 4 y 7) fueron poco sustanciosas, a pesar de que el estudiante 7 contestó correctamente en la parte A, refutando así la idea de que este estudiante identificaba las propiedades dadas; por otro lado, el estudiante 6 se explayó hablando sobre la media μ , aunque no hizo referencia a la propiedad EI1, y tampoco sobre EI4. Por último, los estudiantes 5 y 8 no respondieron a esta parte.

Elementos validativos

Estos elementos podían observarse solo en la parte B del inciso, debido a que era la que requería de los estudiantes explicaciones sobre su comprobación de veracidad de la sentencia dada. El criterio de respuesta era libre, en cuanto al registro utilizado se refiere, y por ello se obtuvieron diferencias en los registros utilizados. Seis estudiantes validaron dentro del LN, uno de ellos convirtió al RG, y dos no respondieron a esta parte. El desglose de estos resultados se observa en la Tabla 40.

Tabla 40. Elementos validativos en el inciso a de la actividad 7, creación propia.

Validación (parte A)	Validación (parte B)	Elemento validativo utilizado	Contenido de la validación	F
No aplica	Correcto	Generalización	Propiedad EI4	3
		Demostración informal	Propiedades EI1 y EI4	1
	Incorrecto	Generalización	Cálculo de la media	1
		Ninguno	Poco sustanciosa	2
		No responde		2
Total				9

Tal como se observa en la Tabla 40, se obtuvieron cuatro respuestas correctas. De estas, tres fueron generalizaciones (estudiantes 1, 3 y 9) pues parten de una particularidad para generar conclusiones que apliquen también para casos con condiciones similares, en este caso al razonar de la propiedad EI4; la respuesta correcta restante (estudiante 2) hizo una demostración informal, ya que utiliza una curva de densidad para explicar la forma de intuir esta propiedad.

Las cinco respuestas incorrectas también se distinguieron unas de otras. Una de ellas (estudiante 6) hizo una generalización, ya que tiene las características propias de una, pero lo hace centrándose en la media μ y no en las propiedades EI1 y EI4, por lo cual resulta incoherente. Dos más (estudiantes 4 y 7) fueron poco sustanciosas, por lo que no alcanzan a estructurar ninguno de los elementos validativos del significado de referencia. Los estudiantes 5 y 8 no respondieron a esta parte de la actividad.

5.7.1 Trayectorias cognitivas en el inciso a de la actividad 7

En el inciso a de la actividad 7 se encontraron cinco trayectorias cognitivas, dos correctas y tres incorrectas, incluidas en esta última la no respuesta. Las

trayectorias correctas son: comprensión basada en la propiedad EI4 (estudiantes 1, 3 y 9), y comprensión basada en una curva de densidad con las propiedades EI1 y EI4 (estudiante 2). Las trayectorias incorrectas son: intuición errónea de la media μ (estudiante 6), poca sustancia (estudiantes 4 y 7), y no responde (estudiantes 5 y 8). A continuación se habla a profundidad de estas trayectorias.

Respuesta correcta: comprensión basada en la propiedad EI4

Tres estudiantes entraron en esta categoría (estudiantes 1, 3 y 9) cuyo ejemplo se muestra en la Figura 53, siendo esta la respuesta del estudiante 1.



El 50% de los datos si cae por encima de la media, ya que es el 50% por ambos lados de la misma

Figura 53. Respuesta del estudiante 1 a la explicación del inciso a de la actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.

Se aprecia en la respuesta del estudiante la lógica de la propiedad EI4, tomando como referencia la media, lo que hace posible decir que indirectamente también se habla de EI1. Esta explicación viene de haber indicado como verdadera a la sentencia dada, la cual es correcta, y la comprensión emergida de esa respuesta se ve confirmada con esta explicación pues se hace referencia a las propiedades puestas en juego, EI1 y EI4.

Tras lo anterior, es posible decir que se identifica el problema tipo P1, ajuste de un modelo a la distribución de datos reales, de los elementos extensivos. De los elementos ostensivos, la actividad cognitiva, en el caso de estos tres estudiantes, fue hecha dentro del lenguaje natural (LN), sin recurrir a conversiones. El elemento actuativo A1, estudio descriptivo de datos para ajustar una curva, se realiza adecuadamente en cuanto al razonamiento proveniente del análisis, pues los estudiantes no recurren a otro tipo de representación complementaria, como curvas de densidad. Las propiedades aquí potenciadas, de los elementos

intensivos, fueron EI1, simetría respecto al eje vertical (media), de manera indirecta; y EI4, área bajo la curva igual a la unidad. Finalmente, el elemento validativo utilizado fue una generalización, pues parte de una particularidad para encontrar una propiedad general.

Respuesta correcta: comprensión basada en una curva de densidad con las propiedades EI1 y EI4

Solo el estudiante 2 entra en esta categoría. Su respuesta puede verse en la Figura 54.

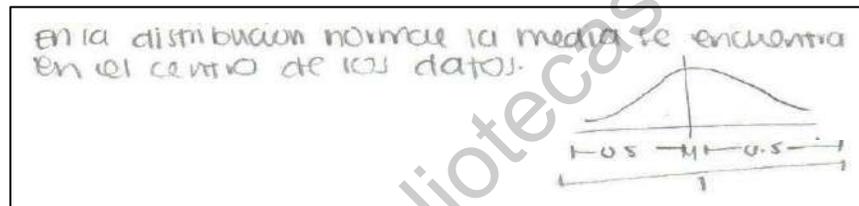


Figura 54. Respuesta del estudiante 2 a la explicación del inciso a de la actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.

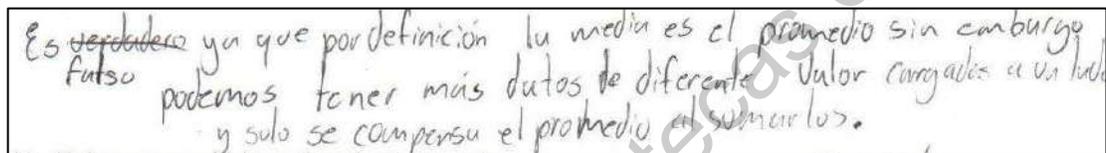
De manera textual, el estudiante alude a la propiedad EI1 fundamento para explicar EI4. En la curva de densidad es donde se conjuntan ambas propiedades, al señalar el eje de simetría de la curva como la media μ , y la probabilidad correspondiente a cada lado, 0.5. Por último, una línea debajo de la curva muestra que la suma de estas dos mitades de área es igual a 1.

Con ello es posible decir que el estudiante identifica el problema tipo P1, de los elementos extensivos. En cuanto a los elementos ostensivos, se tiene una actividad dentro del LN al responder como verdadera a la sentencia, y posteriormente una conversión del LN al RG, con la curva de densidad que se observa en la Figura 54. El actuar A1 se observa desde dos perspectivas: la identificación de las propiedades puestas en juego, y mediante la curva de densidad graficada por el estudiante como sustento de las mismas. Por ello es que

es posible decir que las propiedades EI1 y EI4, de los elementos intensivos, fueron reconocidas por el estudiante. Finalmente, el elemento validativo del estudiante es una demostración informal, ya que utiliza gráfico y texto para señalar las particularidades que, posteriormente, comprenden una generalización.

Respuesta incorrecta: intuición errónea de la media μ

El estudiante 6 abarca por completo esta categoría, y su respuesta se puede ver en la Figura 55.



Es verdadero ya que por definición la media es el promedio sin embargo
falso podemos tener más datos de diferente valor cargados a un lado
y solo se compensa el promedio al sumarlos.

Figura 55. Respuesta del estudiante 6 a la explicación del inciso a de la actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.

Con una lógica centrada en la media de la distribución normal, el estudiante prescinde del concepto de probabilidad que la sentencia plantea. Al hablar sobre los datos estrictamente desde la perspectiva de la media, el estudiante no atiende a las características del planteamiento que lo guiarían hacia las propiedades aquí potenciadas, no pudiendo decir, por tanto, que identifique dichas propiedades.

El problema tipo P1, de los elementos extensivos, no fue identificado en ninguna de las partes de este inciso. Lo mismo con la actividad cognitiva esperada para los elementos ostensivos, pues no hay conversiones fuera del LN, aunque tampoco es adecuado su actuar dentro de este registro. El elemento actuario A1 no se percibe en este inciso ya que el estudiante realiza un estudio sesgado exclusivamente hacia la media μ , y por tanto no potencia las propiedades EI1 y EI4, de los elementos intensivos. Por último, el elemento validativo es un análisis, por sus características estructurales, pero no contiene lo esperado y esto se debía a que su confirmación de veracidad a la sentencia dada tampoco era adecuada.

Respuesta incorrecta: poca sustancia

Los estudiantes 4 y 7 entran en esta categoría. El ejemplo de respuesta viene en la Figura 56.

A rectangular box containing handwritten text in Spanish. The text is written in a cursive, somewhat blurry style. It reads "Por propiedades de la materia". The word "materia" is partially cut off on the right side of the box.

Figura 56. Respuesta del estudiante 7 a la explicación del inciso a de la actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.

Lo escueto de la respuesta no permite observar si se identifican las propiedades puestas en juego. En el caso del estudiante 7, quien había respondido correcto al marcar la sentencia como verdadera, no es posible decir si identifica o no las propiedades debido a que explica como se ve en la Figura 56, es decir, de manera poco sustanciosa. Lo mismo con el estudiante 4, quien sí había errado al marcar como falsa la sentencia, al escribir: *depende de los datos*.

Así pues, el problema tipo P1, de los elementos extensivos, no fue identificado al no haber explicaciones concretas. Los elementos ostensivos no se observan y, a pesar de haber sido dentro del LN, muestran una clara falta de conocimiento por parte de los estudiantes. Lo mismo ocurre con el actuar tipo A1, de los elementos actuativos, que simplemente no se refleja en las respuestas. Con ello es posible decir que las propiedades EI1 y EI4, de los elementos intensivos, no fueron identificadas por estos estudiantes y, dado las características de las explicaciones, tampoco es posible decir que tengan la esencia de alguno de los elementos validativos del significado de referencia.

Respuesta incorrecta: no responde

Los estudiantes 5 y 8 no respondieron a esta parte de la actividad. Ambos habían marcado como falsa a la sentencia, lo cual es incorrecto. Con ello, y tras no haber explicación, no es posible analizar los elementos del significado de referencia en estos casos.

5.8 Análisis del inciso b de la actividad 7

Elementos extensivos

El tipo de problema abordado en este inciso era el P1, ajuste de un modelo a la distribución de datos reales, en lo que refiere a los elementos extensivos. Asimismo, las condiciones dentro del instrumento de este inciso son similares a las del inciso a, detallado esto en los elementos extensivos del inciso en cuestión.

En la parte A de este inciso se daba a comprobar la veracidad de la sentencia: *en la curva normal, la media es igual a la moda*. Esto es verdadero y los estudiantes debían marcarlo como tal, emergiendo así la propiedad EI5: media es igual a moda en la distribución normal, aunque también era posible el surgimiento de EI6, media es igual a moda y a mediana en la distribución normal, que, como puede observarse, EI6 contiene a EI5, aunque para el caso de la sentencia dada la mención de EI5 era suficiente. Así pues, en la parte B se debía explicar esta sentencia desde dichas propiedades. En la Tabla 41 se observan los resultados de esta actividad para los elementos extensivos.

Tabla 41. Elementos extensivos en el inciso b de la actividad 7, creación propia.

Identifica P1 (parte A)	V/F	F	Identifica P1 (parte B)	Comprensión de P1	F
Correcto	Verdadero	2	Correcto	Refiere a la propiedad EI5	1
				Refiere a la propiedad EI6, con gráfico	1
Incorrecto	Falso	7	Incorrecto	Contradice directamente a EI5 (ER5)	6
				No responde	1
Total		9			9

En la parte A, se tuvieron dos respuestas correctas (estudiantes 3 y 9). Estas fueron similares en el sentido de confirmar la veracidad de respuesta al marcar la casilla de *Verdadero*. Emerge así la propiedad EI5, aunque es necesaria la explicación para confirmar si no ha emergido también EI6.

Respuestas incorrectas fueron siete (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 8), siendo idénticas al marcar la casilla de *Falso*, negando directamente a la propiedad EI5. Al ocurrir esto, es posible añadir que el concepto de probabilidad, del cual surgen las propiedades EI5 y EI6 de la distribución normal, también es poco reconocido por los estudiantes.

En la parte B, se repitieron las dos respuestas correctas (estudiantes 3 y 9), aunque esta vez existieron diferencias entre ellas. El estudiante 3 describe a la media y a la moda por separado para, posteriormente, decir que su sentido coincide, de donde se entiende que se ha considerado a la probabilidad para hacer esta afirmación de coincidencia y, por consiguiente, hacer emerger a EI5. El estudiante 9 retoma esta igualdad de sentidos entre media y moda, añadiendo además a la mediana, y explicando que estas se sitúan en el mismo punto. Para

sustentar esta afirmación, que hace surgir la propiedad EI6, grafica una curva de densidad en la sitúa las tres medidas centrales en el eje vertical de la curva.

Las respuestas incorrectas fueron siete (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 8). Las diferencias entre seis de estas respuestas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6 y 7) no fueron sustanciales, pues todas aludieron a que media y moda eran distintas entre sí desde su descripción conceptual, es decir, presentaban el Error 5 (ER5). En algunos casos (estudiante 4) también se puntualizaba que las fórmulas para calcularlas eran distintas. La estudiante 8 no respondió a esta parte de la actividad.

Elementos ostensivos

Planteado en el lenguaje natural (LN), este inciso no exigía a los estudiantes que hicieran conversiones de manera estricta. En la parte A debía verificarse la veracidad de la sentencia, la cual era verdadera. De aquí se esperaba un tratamiento dentro del LN, pues se trataba de marcar una casilla, mientras que en la parte B, explicar lo respondido en la parte A, podían ocurrir tratamientos dependiendo de si el estudiante lo consideraba pertinente. En la Tabla 42 se muestran las respuestas a este inciso.

Tabla 42. Elementos ostensivos en el inciso b de la actividad 7, creación propia.

Respuesta (parte A)	Actividad cognitiva realizada (Parte A)	F	Respuesta (parte B)	Actividad cognitiva realizada (Parte B)	F
Correcta	Tratamiento (respuesta dentro del mismo registro LN)	2	Correcta	Tratamiento dentro de LN	1
				Conversión al registro gráfico (RG)	1
Incorrecta		7	Incorrecta	Tratamiento dentro de LN	6
				No responde	1
Total		9			9

En la parte A, hubo dos respuestas correctas (estudiantes 3 y 9), las cuales son similares en el sentido de que marcaron la casilla que confirmaba la veracidad de la sentencia dada, hecho esto dentro del LN, y haciendo emerger la propiedad EI5.

Las siete respuestas incorrectas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 7, y 8) no muestran matices en esta parte de la actividad, debido a que consisten en marcar como falsa la sentencia, lo cual es incorrecto y evidencia que los estudiantes no identifican la propiedad EI5. Todo esto hecho dentro del LN.

En la parte B, en las dos respuestas correctas (estudiantes 3 y 9) se encuentran diferencias. Mientras el estudiante 3 elabora su explicación dentro del LN, el estudiante 9 hace una conversión al registro gráfico (RG). La diferencia de contenido no proviene directamente de la actividad cognitiva semiótica, pues del estudiante 3 emerge el EI5 y del estudiante 9 el EI6, sino directamente de la alusión a la mediana hecha por el estudiante 9, debido a que esta medida de tendencia central no era abarcada por la sentencia dada.

Por otra parte, de las siete respuestas incorrectas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 8), seis de ellas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6 y 7) son tratamientos dentro del LN, cuyo contenido es una contradicción directa a la propiedad EI5, mientras que el estudiante 8 no responde a la explicación, no pudiendo establecerse relación con la TRRS en esta parte del inciso por parte de este estudiante que, cabe mencionar, había respondido incorrecto en la parte A.

Elementos actuativos

La comprensión esperada para este inciso provenía de un actuar tipo A1, estudio descriptivo de datos para ajustar una curva, del cual debía emerger la propiedad EI5, aunque también podía emerger la propiedad EI6. En la parte A se daba una sentencia cuya veracidad debía ser confirmada o refutada; y en la parte

B se pedía al estudiante que explicara su razonamiento hecho en la parte A. Es en la Tabla 43 donde pueden observarse los resultados de A1 para este inciso.

Tabla 43. Elementos actuativos en el inciso b de la actividad 7, creación propia.

Realiza A1 (parte A)	Resultado de realizar A1	F	Realiza A1 (parte B)	Explicación de A1	F
Correcto	Marca <i>Verdadero</i>	2	Correcto	Explica la igualdad entre media y moda en la DN (EI5)	1
				Explica la igualdad entre media, mediana y moda en la DN (EI6), y construye gráfico	1
Incorrecto	Marca <i>Falso</i>	7	Incorrecto	Explica que media y moda no son iguales (ER5)	6
				No responde	1
Total		9			9

En la parte A de este inciso, tal como puede verse en la Tabla 43, solo dos estudiantes (3 y 9) respondieron correctamente al marcar la casilla de *Verdadero*. El resultado de A1 se refleja en el surgimiento de la propiedad EI5 al marcar dicha casilla, pues de ese modo es posible asumir que los estudiantes tienen en claro al concepto de probabilidad, siendo este el que unifica a las medidas de tendencia central, media y moda, de las que se habla en la sentencia dada.

Las siete respuestas incorrectas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 8) muestran justo lo opuesto, ya que contradicen directamente a la propiedad EI5 al mismo que evidencian no tomar en cuenta el concepto de probabilidad para elaborar un estudio descriptivo de la información dada.

En la parte B, se mantuvieron dos respuestas correctas (estudiantes 3 y 9), aunque con diferencias entre ellas. Por parte del estudiante 3, A1 se manifiesta en una descripción de los conceptos media y moda para, posteriormente, realizar una comparación entre ellos y mencionar que, dadas las características, estos coinciden. Bajo esta premisa es posible decir que la estudiante tomó en cuenta a la probabilidad, ya que es este concepto el que unifica ambos conceptos. La estudiante 9 realiza un razonamiento similar, salvo que involucra a la media en la comparación, lo cual encaja en la terminología de la propiedad EI6. Se añade a esto último el gráfico realizado por la estudiante: una curva de densidad en la cual se señalan estas medidas de tendencia central en el eje vertical (media).

De las siete respuestas incorrectas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 8), seis de ellas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6 y 7) tuvieron la misma dificultad para responder, es decir, mencionaron que los conceptos de media y moda no son distintos, y por tanto no pueden ser iguales. El estudiante 4 además mencionó que las fórmulas para calcular las medidas eran diferentes, por lo que no era posible una similitud. Esto indica que, al realizar el estudio descriptivo requerido por A1, los estudiantes no consideraron a la probabilidad, y de ahí que no solo no emergiera la propiedad EI5, sino que fue directamente contradicha.

Elementos intensivos

Las propiedades de la distribución normal que fueron potenciadas en este inciso fueron la EI5: media es igual a moda; y EI6: media es igual a moda y mediana. Como puede observarse, EI6 contiene a EI5, pero se hace la diferenciación entre ellas porque en la sentencia dada solo se habla de media y moda, y no de mediana, aunque los estudiantes podían argumentar al respecto. En otras palabras, el inciso potenciaba a EI5 y hacerla emerger se consideraba lo correcto, y el surgimiento de EI6, a criterio del estudiante, también se consideraría correcto.

En la parte A, solo era posible potenciar EI5 si era marcada como verdadera la sentencia dada: *en la curva normal, la media es igual a la moda*. En la parte B, se podía explicar la respuesta en la parte A tanto de EI5 como desde EI6, ya que ambas eran correctas. En la Tabla 44 se establece cómo fue el surgimiento de estas propiedades en este inciso.

Tabla 44. Elementos intensivos en el inciso b de la actividad 7, creación propia.

Respuesta (Parte A)	Elementos intensivos aparecidos (Parte A)	F	Respuesta (Parte B)	Elementos intensivos aparecidos (Parte B)	F
Correcto	EI5	2	Correcto	EI5	1
				EI6	1
Incorrecto	Ninguno	7	Incorrecto	Ninguno	6
				No responde	1
Total		9			9

En la parte A, hubo dos respuestas correctas (estudiantes 3 y 9). Tal como se dijo en párrafos anteriores, al marcar la sentencia como verdadera, emergía la propiedad EI5, lo cual ocurre en el caso de estos estudiantes.

En las siete respuestas incorrectas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 8), en cambio, no surge ninguna propiedad, debido a que la sentencia dada era puntual en potenciar EI5, y de no marcarla como verdadera, es decir, al marcarla como falsa, esta propiedad no emergía de ninguna otra forma.

En la parte B, se repitió la frecuencia de respuestas correctas (estudiantes 3 y 9), solo que con matices. El estudiante 3 explicó desde la propiedad EI5, remarcando la similitud entre media y moda, así como su coincidencia; mientras que el estudiante 9 elaboró una curva de densidad en la cual enfatizó la igualdad entre media, mediana y moda, es decir, argumentando desde la propiedad EI6.

Las siete respuestas incorrectas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 8) no tuvieron diferencias sustanciales. En seis de ellas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6 y 7) todas se contradecía directamente a la propiedad EI5, explicando que media y moda no eran iguales en concepto, y por tanto no podían serlo de forma general. Esta lógica de error se puntualiza en el estudiante 4, quien menciona la diferencia entre las fórmulas de ambas medidas de tendencia central, quedando evidente que no se tomó en cuenta el concepto de probabilidad al razonar la sentencia dada, y que seguramente esta propiedad no fue vista en el curso llevado por los estudiantes. La estudiante 8 no respondió a esta parte de la actividad.

Elementos validativos

Este elemento de significado solo podía reflejarse en la parte B, donde se pedía a los estudiantes explicaciones sobre su comprobación de veracidad en la parte A. Esto daba pie al criterio de los estudiantes respecto al registro de representación utilizado. En la Tabla 45 se muestran los resultados a esta cuestión.

Tabla 45. Elementos validativos en el inciso b de la actividad 7, creación propia.

Validación (parte A)	Validación (parte B)	Elemento validativo utilizado	Contenido de la validación	F
No aplica	Correcto	Análisis	Propiedad EI5	1
		Demostración informal	Propiedad EI6	1
	Incorrecto	Análisis	Contradicción de EI5 (ER5)	6
		No responde		1
Total				9

Hubo pues, en la parte B, dos respuestas correctas (estudiantes 3 y 9). Una de ellas (estudiante 3) consistió en un análisis de las particularidades de las medidas de tendencia central abordadas en la sentencia dada, media y moda, y su posterior similitud de sentido, emergiendo así la propiedad EI5. La otra respuesta correcta (estudiante 9) fue más una generalización de las tres medidas de tendencia central, media, mediana y moda, enfatizadas sobre una curva de densidad graficada por la estudiante, siendo entonces una demostración informal el elemento validativo de donde surge EI6, en el caso de esta este estudiante.

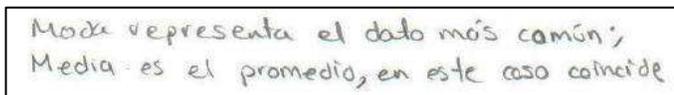
De las siete respuestas incorrectas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 8), hubo seis que intentaron un análisis (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6 y 7) cuyo contenido fue estrictamente una contradicción de la propiedad EI5, de lo cual se deduce que los estudiantes prescindieron en su razonamiento del concepto de probabilidad. Finalmente, la estudiante 8 no respondió a esta parte de la actividad.

5.8.1 Trayectorias cognitivas en el inciso b de la actividad 7

De este inciso surgen cuatro trayectorias cognitivas, dos correctas y dos incorrectas, incluyendo la no respuesta. De las trayectorias correctas se tienen: comprensión directa de EI5 (estudiante 3), y comprensión directa de EI6 (estudiante 9). Y de las trayectorias incorrectas: contradicción de EI5 (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6 y 7), y no respuesta (estudiante 8).

Respuesta correcta: comprensión directa de EI5

En esta categoría entra la respuesta del estudiante 3. Su respuesta se observa en la Figura 57.



Moda representa el dato más común;
Media es el promedio, en este caso coincide

Figura 57. Respuesta del estudiante 3 a la explicación del inciso b de la actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.

El estudiante decide describir el sentido de cada medida de tendencia central y, a partir de una comparación de conceptos, menciona que estos coinciden. Aunque no se menciona el concepto de probabilidad, que es el que unifica a ambas medidas, la deducción hecha por la estudiante indica que reconoce la igualdad de sentidos de estas medidas cuando se ven desde la perspectiva de la distribución normal.

Puede decirse entonces que se identifica el problema tipo P1, de los elementos extensivos. En cuanto a los elementos ostensivos, no hubo conversiones debido a que el inciso no lo requería y se trató solo de tratamientos dentro del lenguaje natural (LN) en ambas partes del inciso, todos realizados de manera apropiada. Del actuar tipo A1, de los elementos actuativos, se produce de forma adecuada el estudio descriptivo de las medidas de tendencia central. De aquí se produce el surgimiento de la propiedad EI5, media es igual a moda, de los elementos intensivos. Y, finalmente, el elemento validativo utilizado fue un análisis, debido a que analiza las particularidades de la sentencia dada para, posteriormente, tender hacia la generalización.

Respuesta correcta: comprensión directa de EI6, con curva de densidad.

En esta categoría entra la respuesta del estudiante 9. En la Figura 58 se puede ver su respuesta.

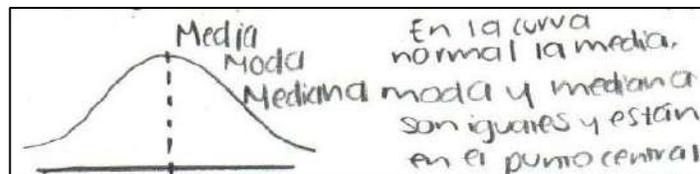


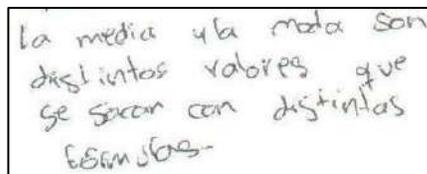
Figura 58. Respuesta del estudiante 9 a la explicación del inciso b de la actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.

Esta es, textualmente, la propiedad EI6, media es igual a moda y a mediana. Al mencionar “punto central” se entiende, gracias a la curva de densidad graficada por la estudiante, que se trata del eje vertical y simétrico de la curva, dado este por la media. Aunque se esperaba el surgimiento de la propiedad EI5, la respuesta del estudiante resulta correcta debido a que EI5 viene contenida en EI6.

Se identifica entonces el problema tipo P1, de los elementos extensivos. En el caso de esta trayectoria, para los elementos ostensivos, sí existe una conversión entre registros. Se trata de una conversión del LN al registro gráfico (RG), tal como puede verse en la Figura 58. Se deduce entonces que la estudiante recurre al RG para sustentar sus argumentos y proporcionar solidez de conceptos. El actuar tipo A1 se desarrolla apropiadamente bajo la manifestación textual de la propiedad EI6. Por último, el elemento validativo es una demostración informal, ya que complementa su descripción de EI6 con una curva de densidad, siendo estas las características de dicho elemento de validación.

Respuesta incorrecta: contradicción de EI5

En esta categoría entran seis respuestas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6 y 7). El sentido de estas respuestas es similar y, para ejemplificarlo, se muestra la contestación del estudiante 4, que es la más enfática en el error cometido. Ésta se encuentra en la Figura 59.



La media y la moda son
distintos valores que
se sacan con distintas
fórmulas.

Figura 59. Respuesta del estudiante 4 a la explicación del inciso b de la actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.

El razonamiento del estudiante es explícito: considera que las medidas son distintas y que estas se calculan con distintas fórmulas. La posible causa de esta

contradicción directa a la propiedad EI5 puede deberse a la mecanización de las fórmulas de estas medidas de tendencia central, en conjunto con el poco desarrollo intuitivo hacia estas. El arraigamiento del cálculo de las fórmulas, sumado a la poca intuición, impide al estudiante recapacitar que entre estos conceptos existe una relación de similitud, cuando se ven desde la distribución normal. Esta relación se razona directamente desde la probabilidad, y es posible que este concepto tampoco se haya visto demasiado durante el curso, lo cual se agregaría a las posibles causas del error. En lo sucesivo se considerará a este el Error 5 (ER5).

No fue identificado el problema tipo P1, de los elementos extensivos, bajo este planteamiento. En cuanto a los elementos ostensivos, en los seis estudiantes (1, 2, 4, 5, 6 y 7) no hubo intenciones de convertir a otro registro, siendo sus respuestas dentro del LN, aunque incorrectas. El actuar tipo A1, de los elementos actuativos, no se realiza de forma apta debido a las posibles causas ya descritas en el párrafo anterior. Por lo anterior también se observó que la propiedad EI5, de los elementos intensivos, no surge como se esperaba, sino que es contradicha directamente. Finalmente, los análisis elaborados para explicar no tenían el contenido requerido para ser considerados como correctos.

Respuesta incorrecta: no responde

Únicamente el estudiante 8 entra en esta categoría. Tras responder *Falso* en la confirmación de veracidad, algo que es incorrecto, no hubo explicación al respecto, por lo que no es posible saber si el estudiante identifica alguna de las propiedades, o cual fue su lógica de error al responder esta parte.

5.9 Análisis del inciso c de la actividad 7

Elementos extensivos

En este apartado se aborda el problema tipo P1, ajuste de un modelo a la distribución de datos reales. Al igual que los incisos anteriores, este se constituía por una confirmación de veracidad de una sentencia y una explicación al respecto.

En la parte A se daba la sentencia: *la curva normal representa una distribución que se distribuye en forma simétrica con respecto a la media*. Esta sentencia es verdadera, por lo que esa era la casilla que debía marcar el estudiante. En la parte B, la explicación esperada debía centrarse en la propiedad EI1, simetría respecto al eje vertical (media). En la Tabla 46 se ven los resultados a este respecto.

Tabla 46. Elementos extensivos en el inciso c de la actividad 7, creación propia.

Identifica P1 (parte A)	V/F	F	Identifica P1 (parte B)	Comprensión de P1	F
Correcto	Verdadero	9	Correcto	Refiere a la propiedad EI1	6
				Refiere a EI1, con gráfico	1
				Refiere a la propiedad EI6	1
Incorrecto	Falso	0	Incorrecto	No responde	1
Total		9			9

En la parte A, tal como puede verse en la Tabla 46, se tuvieron nueve respuestas correctas. Esto indica que todos los estudiantes de la muestra marcaron como verdadera a la sentencia dada y, por tanto, identifican a la propiedad EI1 en ella. En contraparte, no hubo respuestas incorrectas que analizar en esta parte.

En la parte B, se tuvieron ocho respuestas correctas (estudiantes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9). Estas tuvieron pequeñas diferencias sustanciales. En seis de ellas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6 y 7) se alude a la propiedad EI1 de manera textual (ver

Figura 60), mientras que el estudiante 3, adicionalmente a su explicación, grafica una curva de densidad en la que enfatiza dicha propiedad (ver Figura 61). La última respuesta correcta (estudiante 9) difiere de las demás porque explica que la simetría de la curva se hace tanto de la media como de la moda y mediana, es decir, de su explicación surge la propiedad EI6, media es igual a moda y a mediana, lo cual también es correcto porque, como se ve, EI1 viene contenida en EI6. La posible causa de este surgimiento puede deberse al inciso anterior, que sentenciaba la igualdad entre media y moda, por lo cual la estudiante 9 consideró apropiado continuar dicha lógica en este inciso.

Por otra parte, la única respuesta incorrecta (estudiante 8) fue por no responder a la explicación de este inciso, por lo que no es posible un análisis más trascendente.

Elementos ostensivos

Este inciso estaba planteado únicamente en el registro del lenguaje natural (LN), y sus respuestas no requerían una conversión a otro registro. No obstante, en la parte explicativa los estudiantes tenían criterio libre de respuesta, por lo que podían optar por otros registros si así lo consideraban pertinente. En la Tabla 47 se muestran los resultados de estos elementos de significado.

Tabla 47. Elementos ostensivos en el inciso c de la actividad 7, creación propia.

Respuesta (parte A)	Actividad cognitiva realizada (Parte A)	F	Respuesta (parte B)	Actividad cognitiva realizada (Parte B)	F
Correcta	Tratamiento (respuesta dentro del mismo registro LN)	9	Correcta	Tratamiento dentro de LN	7
				Conversión al registro gráfico (RG)	1
Incorrecta		0	Incorrecta	No responde	1
Total		9			9

En la parte A, es posible ver en la Tabla 47 que se contabilizaron nueve respuestas correctas, es decir, el total de los estudiantes de la muestra. Estas consistieron en un tratamiento dentro del LN, al marcar la casilla verdadera respecto a la sentencia dada, que al mismo tiempo potenciaba la propiedad E11. La consecuencia de lo anterior es que no existan respuestas incorrectas en esta parte del inciso.

En la parte B, se observa que hubo ocho respuestas correctas, aunque distintas entre sí. Siete de ellas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 9) fueron tratamientos dentro del LN, ya que consistieron en argumentos textuales sobre la propiedad E11. Únicamente hubo una conversión (estudiante 3) debido a que el estudiante, además de explicar desde la propiedad E11, graficó una curva de densidad en la cual se puntualiza la simetría de la media. La única respuesta correcta (estudiante 9) no responde, por lo que no hay tratamiento o conversión analizable para estos elementos de significado.

Elementos actuativos

El actuar desde este elemento era el tipo A1, estudio descriptivo de datos para ajustar una curva, en este caso enfocado sobre la simetría respecto al eje

vertical (media), es decir, la propiedad EI1. La manera en que A1 fue realizada se puede mirar en la Tabla 48.

Tabla 48. Elementos actuativos en el inciso c de la actividad 7, creación propia.

Realiza A1 (parte A)	Resultado de realizar A1	F	Realiza A1 (parte B)	Explicación de A1	F
Correcto	Marca <i>Verdadero</i>	9	Correcto	Explica la simetría respecto a la media (EI1)	6
				Explica la simetría respecto a la media (EI1), con gráfico	1
				Explica la simetría respecto a media, mediana y moda (EI6)	1
Incorrecto	Marca <i>Falso</i>	0	Incorrecto	No responde	1
Total		9			9

En la parte A puede verse, gracias a la Tabla 48, que hubo nueve respuestas correctas. Esto refiere a que el total de los estudiantes de la muestra realizaron adecuadamente A1 en esta parte del inciso, marcando la casilla *Verdadero*, y manifestando así que identificaron la propiedad EI1 en la sentencia dada. La consecuencia directa de esto es que no se encontraron respuestas incorrectas en esta sección.

En la parte B, hubo ocho respuestas correctas (estudiantes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9). La realización de A1 tuvo matices, pues las respuestas tuvieron diferencias estructurales. En el caso de seis estudiantes (1, 2, 4, 5, 6 y 7), la explicación resultado del estudio descriptivo se basó estrictamente en la propiedad EI1, de manera textual; mientras que, en el caso del estudiante 3, este estudio descriptivo

también generó una curva de densidad para sustentar lo explicado textualmente (ver Figura 61). Por su parte, el estudiante 9 explica, solo de forma textual, que la simetría es respecto a media, mediana y moda, es decir, la propiedad EI6, lo cual también resulta correcto bajo la sentencia dada, por estar contenida EI1 en EI6.

La estudiante 8 no responde a esta parte del inciso, a pesar de haber respondido de manera correcta a la confirmación de veracidad, por lo que no es posible analizar más profundamente y se le cataloga como incorrecta.

Elementos intensivos

La propiedad que era potenciada por este inciso era la EI1, simetría respecto al eje vertical (media), aunque también podrían surgir propiedades cercanas como la EI5, media es igual a moda, o EI6, media es igual a moda y mediana, debido esto a que EI1 pertenece tanto a una como a otra, dependiendo la perspectiva bajo la cual se explique. En la Tabla 49 se observan las propiedades que surgieron de las respuestas de los estudiantes.

Tabla 49. Elementos intensivos en el inciso c de la actividad 7, creación propia.

Respuesta (Parte A)	Elementos intensivos aparecidos (Parte A)	F	Respuesta (Parte B)	Elementos intensivos aparecidos (Parte B)	F
Correcto	EI1	9	Correcto	EI1	6
				EI1, con gráfico	1
				EI6	1
Incorrecto	Ninguno	0	Incorrecto	Ninguno	1
Total		9			9

En la parte A, hubo nueve respuestas correctas. Esto indica que, al marcar como verdadera a la sentencia, todos los estudiantes de la muestra identificaron la propiedad EI1, es decir, reconocieron que la simetría de la curva es respecto a la

media, que funge como eje vertical de la misma. Bajo este panorama, se ve que no hubo respuestas incorrectas en esta parte.

En la parte B, se observa en la Tabla 49 que hay ocho respuestas correctas (estudiantes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9), con diferencias de forma entre ellas. Por una parte, seis de ellas (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6 y 7) hicieron surgir a EI1 desde explicaciones en las que se parafraseaba el argumento descriptivo de dicha propiedad; por otro lado se tiene al estudiante 3, que complementa dicha explicación, similar a la descrita previamente, con una curva de densidad en la que se da énfasis a la simetría del eje vertical (media). Por último, la explicación del estudiante 9 viene desde la propiedad EI6, ya que menciona a media, mediana y moda como coincidentes en el eje vertical y simétrico de la curva.

La única respuesta incorrecta (estudiante 8) viene de la ausencia de respuesta en esta parte del inciso, por lo que no es posible saber si identifica las propiedades puestas en juego.

Elementos validativos

Tras la verificación de veracidad de la sentencia dada: *la curva normal representa una distribución que se distribuye en forma simétrica con respecto a la media*, se pedía explicaciones al respecto. De esta última sección es donde surgirían los elementos validativos para este inciso, los cuales se pueden ver en la Tabla 50.

Tabla 50. Elementos validativos en el inciso c de la actividad 7, creación propia.

Validación (parte A)	Validación (parte B)	Elemento validativo utilizado	Contenido de la validación	F
No aplica	Correcto	Análisis	Propiedad EI1	6
		Demostración informal	Propiedad EI1	1
		Análisis	Propiedad EI6	1
	Incorrecto	No responde		1
Total				9

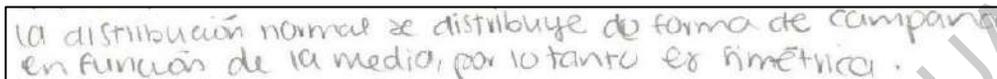
Respuestas correctas hubo ocho (estudiantes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9), cuya configuración es distinta entre sí. La propiedad EI1 es el eje de contenido bajo el cual se desarrollan los análisis de seis estudiantes (1, 2, 4, 5, 6 y 7); por otro lado, el estudiante 3, aunque adscrito en este mismo eje de contenido, difiere de la categoría anterior por presentar una curva de densidad como sustento gráfico de su explicación, lo que le acredita a ser una demostración informal, esto según el significado institucional de referencia. La última respuesta correcta es la del estudiante 9, quien argumenta desde la propiedad EI6, es decir, media es igual a moda y a mediana, y deduce que la simetría de la curva es respecto a estas tres medidas de tendencia central, con lo que se infiere que la estudiante identifica tanto EI1 como EI6. De respuestas incorrectas solo hubo una (estudiante 8), que no respondió a esta parte del inciso.

5.9.1 Trayectorias cognitivas en el inciso c de la actividad 7

En este inciso surgieron cuatro trayectorias cognitivas incluyendo la no respuesta. Tres de estas fueron correctas y una incorrecta. Como trayectorias correctas se tiene: comprensión directa de EI1 (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 9); y comprensión directa de EI1, con curva de densidad (estudiante 3). Mientras que la única trayectoria cognitiva incorrecta es la no respuesta (estudiante 8).

Respuesta correcta: comprensión directa de EI1

En esta categoría entran seis estudiantes (1, 2, 4, 5, 6, 7 y 9), cuya respuesta prototípica se muestra en la Figura 60.



La distribución normal se distribuye de forma de campana en función de la media, por lo tanto es simétrica.

Figura 60. Respuesta del estudiante 2 a la parte explicativa del inciso c de la actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.

La reiteración de la sentencia dada: *la curva normal representa una distribución que se distribuye en forma simétrica con respecto a la media*, se complementa además con el razonamiento de la forma “acampanada” de la gráfica. De esto se deduce que el estudiante identifica tanto a la representación gráfica como a la propiedad EI1, propiciado esto por el planteamiento del inciso.

Esto quiere decir que se identifica el problema tipo P1, ajuste de un modelo a la distribución de datos reales, de los elementos extensivos. Respecto a los elementos ostensivos, ocurren dos tratamientos dentro del lenguaje natural (LN): cuando se confirma la veracidad de la sentencia, y al explicarla. En el caso de los estudiantes de esta categoría, ambos ocurren de manera correcta. El actuar tipo A1, estudio descriptivo de datos para ajustar una curva, de los elementos actuativos, se realiza desde la perspectiva de la sentencia dada, es decir, la simetría de la curva de densidad, de lo cual surge la identificación de la propiedad EI1, simetría respecto al eje vertical (media), de los elementos intensivos. Finalmente, el elemento validativo utilizado en esta categoría fue el análisis, ya que repasaba las particularidades de la sentencia dada, y culminaba en la generalización de la propiedad EI1.

Respuesta correcta: comprensión desde EI1, con curva de densidad

El estudiante 3 conforma por completo esta categoría, y su respuesta se ve en la Figura 61.

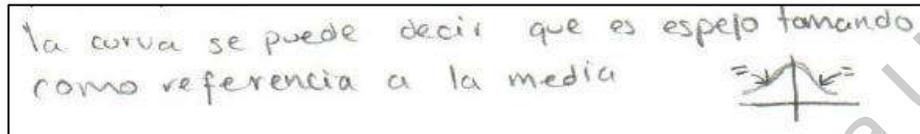


Figura 61. Respuesta del estudiante 3 a la parte explicativa del inciso c de la actividad 7, tomada del instrumento de recogida de datos.

La simetría, mencionada como “espejo” por la estudiante, respecto a la media, es reflejada también en la curva de densidad esbozada por la estudiante (ver Figura 61). Dos flechas, una a cada lado de la curva, puntualizan la igualdad entre ambas áreas, y la mención de la media, aunque prescinde del símbolo μ , es referida en la explicación. Todo ello sirve de plataforma para deducir que el estudiante identifica la propiedad EI1, y hace uso de representaciones gráficas para corroborarlo.

Esto indica que se ha identificado el problema tipo P1 de los elementos extensivos. En cuanto a los elementos ostensivos, se hizo un tratamiento dentro del LN en la verificación de veracidad de la sentencia dada; mientras que en la parte explicativa se hizo una conversión al registro gráfico (RG), como puede verse en la Figura 61. El resultado de hacer A1 se refleja en las dos secciones del inciso, pues se potencia la propiedad EI1, de los elementos intensivos, en ambas partes. Para terminar esta categoría, en los elementos validativos se utilizó una demostración informal, ya que hace uso de gráficos y explicaciones para validar la propiedad puesta en juego.

Respuesta incorrecta: no responde

La estudiante 8, a pesar de haber respondido adecuadamente a la verificación de veracidad, decide no responder a la parte explicativa. Es por esta ausencia que no

se pueda considerar correcta esta parte, ya que no permite analizar los elementos del significado institucional de referencia.

5.10 Comentarios globales sobre los análisis de datos

Para realizar comentarios sobre los análisis de las respuestas de los estudiantes es necesario observar panorámicamente sus respuestas. En la Tabla 51 se muestran las frecuencias de respuestas correctas e incorrectas de cada una de las actividades y sus respectivos incisos.

Tabla 51. Tabla general de respuestas correctas e incorrectas del instrumento, creación propia.

Actividad	Parte A		Parte B		Total
	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	
1	8	1	4	5	18
2	7	2	5	4	18
3	8	1	4	5	18
4	4	5	3	6	18
5	0	9	0	9	18
6	0	9	0	9	18
7a	5	4	4	5	18
7b	2	7	2	7	18
7c	9	0	8	1	18
Total	43	38	30	51	162

En este punto es necesario recordar la Tabla 2 (ver página 90), donde se muestran los elementos de significado potenciados por el instrumento de recogida de datos, y que se presenta al final del marco teórico (capítulo III). De la Tabla 2 es de donde se genera la Tabla 4, mostrada anteriormente al final del capítulo IV, y que se trae de vuelta a esta sección.

Tabla 4. Elementos de significado potenciados en cada actividad, creación propia.

Elemento de significado	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad 5	Actividad 6	Actividad 7 (a)	Actividad 7 (b)	Actividad 7 (c)
Extensivo	P1	P1	P1	P1	P1	P1	P1	P1	P1
Ostensivo	RG al RAL; RAL al LN	RG al RAL; RAL al LN	RG al RAL; RAL al LN	RAL al RG; RG al LN	RAL al RG; RG al LN	RAL al RG; RG al LN	LN; LN a otros registros	LN; LN a otros registros	LN; LN a otros registros
Actuativo	A5	A5	A5	A1 y A5	A1	A1	A1	A1	A1
Intensivo	EI1 y EI2	EI1 y EI2	EI1 y EI2	EI1 y EI2	EI1 y EI2	EI1, EI2 y EI3	EI1 y EI4	EI1 y EI5	EI1
Validativo	A criterio	A criterio	A criterio	A criterio	A criterio	A criterio	A criterio	A criterio	A criterio

La estructura que seguirán estos comentarios sobre los análisis será desde los elementos de significado y, desde ellos, se referirá a las tablas 51 y 52 cuando sea necesario.

Elementos extensivos

Tal como puede observarse en la Tabla 4, solo se abarcó un tipo de problema en todo el instrumento, el P1. Para tener una referencia sobre las respuestas correctas desde los datos mismos, se procedió a calcular la media aritmética con las respuestas correctas de todas las actividades, tanto para la parte A como para la parte B. En la parte A se obtuvo 4.7, que se tomara como 5. Y en la parte B se obtuvo 3.3, que se tomará como 4. Esto será válido para todos los elementos de significado.

Es así que, para la parte A, es posible decir que las frecuencias de identificación del problema tipo P1 son altas (mayor o iguales que 5) cuando debe identificarse el tipo de problema: a) marcando un inciso que relacione aspectos geométricos de los parámetros media μ y desviación estándar σ (actividades 1, 2 y 3), y b) verificando la veracidad de una sentencia que involucre las propiedades EI1, simetría respecto a l eje vertical (media), y EI4, área bajo la curva igual a 1 (actividades 7a y 7c).

En cambio, las frecuencias son bajas (menores que 5) cuando el problema debe identificarse: a) al graficar respecto a los parámetros μ y σ dados de un conjunto de datos (actividades 4, 5 y 6), y b) cuando se pide verificar la veracidad de una sentencia que alude a la propiedad EI5, media es igual a moda (actividad 7b).

Para la parte B, puede verse que las frecuencias son altas (mayor o igual que 4) cuando el problema tipo P1 debe identificarse explicando: a) los incisos marcados de acuerdo a los parámetros μ y σ observados en las gráficas, manifestando las propiedades EI1 y EI2, concavidad y convexidad (actividades 1, 2, 3); y b) la veracidad de sentencias que aludan a las propiedades EI1 y EI4 (actividades 7a y 7c).

Por otra parte, las frecuencias en esta parte son bajas (menores que 4) cuando el problema tipo P1 debe identificarse al explicar: a) desde gráficos realizados por el mismo alumno (actividades 3, 4 y 5); y b) en la verificación de sentencias que aludan a la propiedad EI5, media es igual a moda (actividad 7b).

El problema tipo P1, ajuste de un modelo a la distribución de datos reales, es el primero de los tipos de problemas que conforman el significado de referencia de la distribución de normal establecido por Tauber (2001). La identificación y comprensión de este problema es necesaria para adentrarse al aprendizaje de los siguientes tipos de problema P que van, desde la tipificación para encontrar probabilidades, hasta el contraste de hipótesis. Por los resultados del instrumento, es posible notar la tendencia de los estudiantes por tipificar (actividades 3, 4, 5 y 6), a pesar de que el planteamiento no se los requería, indicando así que su curso se centró en esta cualidad de la distribución normal, es decir, a los problemas tipo P2.

No obstante, a pesar de tender a tipificar, los estudiantes muestran no tener desarrollada su intuición respecto al concepto de probabilidad, provocando así los

errores ER2 y ER3, lo cual puede observarse en las actividades 4, 5 y 6, en ambas partes, A y B. Lo anterior no puede dejar de relacionarse con el hecho de que los estudiantes tienen dificultades para esbozar gráficos según los parámetros dados, como se dijo anteriormente, teniendo frecuencias de corrección bajas (menores de 5 en la parte A de las actividades 4, 5 y 6), y obviamente para explicar estos gráficos incorrectos (frecuencias menores de 4 en la parte B de las actividades 4, 5 y 6).

Elementos ostensivos

La perspectiva dada desde estos elementos de significado se basa en los registros utilizados en el instrumento: el registro gráfico (RG), el registro alfanumérico (RAL), y el lenguaje natural (LN), vistos desde la perspectiva de la teoría de registros de representaciones semióticas (TRRS). En la Tabla 52, que es un extracto de la Tabla 51, se tiene la perspectiva desde el RG.

Tabla 52. Frecuencias en las actividades planteadas en registro gráfico, creación propia.

Actividad	Actividades planteadas en registro gráfico				Total
	Parte A		Parte B		
	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	
1	8	1	4	5	18
2	7	2	5	4	18
3	8	1	4	5	18
Total	23	4	13	14	54

Es en estas actividades es donde hubo más respuestas correctas en todo el instrumento en la parte A, con 23 respuestas correctas. Esto indica que los alumnos encuentran más facilidad en identificar en el planteamiento al RG, y convertirlo al RAL en los incisos de respuesta, que era la mecánica de respuesta en estas actividades. Las actividades 1 y 3 coinciden en una frecuencia de 8, y la actividad 2 tiene 7, tal como se observa en la tabla 52. Finalmente, en la parte B, la respuesta era a criterio del estudiante, y en todas ellas se optó por el LN. El déficit entre las partes A y B es el más amplio de todo el instrumento, teniendo 23

correctas en A, y 13 en B. A continuación se muestra la Tabla 53, también un extracto de la Tabla 51, pero enfocada en las actividades planteadas en el RAL.

Tabla 53. Frecuencias en las actividades planteadas en registro alfanumérico, creación propia.

Actividad	Actividades planteadas en registro alfanumérico				Total
	Parte A		Parte B		
	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	
4	4	5	3	6	18
5	0	9	0	9	18
6	0	9	0	9	18
Total	4	23	3	24	54

Este fue el registro de planteamiento donde hubo más frecuencias de respuestas incorrectas, con 23 en total en la parte A, y 24 en la parte B. Para la parte A se esperaba una conversión del RAL al RG, la cual ocurre de manera minoritaria. Es posible que los problemas surjan directamente del RAL, ya que los estudiantes no tuvieron la capacidad de interpretar los datos dados en el planteamiento. Esto originó gráficos incorrectos, los cuales devinieron en explicaciones incorrectas en la parte B. En esta parte la respuesta era a criterio, y todas ellas fueron al LN. Por último, es este registro donde menos déficit existe entre las respuestas correctas entre A (4 correctas) y B (3 correctas). Las frecuencias de las actividades planteadas en LN se observan a continuación en la Tabla 54.

Tabla 54. Frecuencias en las actividades planteadas en lenguaje natural, creación propia.

Actividad	Actividades planteadas en lenguaje natural				Total
	Parte A		Parte B		
	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	
7a	5	4	4	5	18
7b	2	7	2	7	18
7c	9	0	8	1	18
Total	16	11	14	13	54

Las frecuencias de respuestas correctas fueron de 16 y 14 para las partes A y B, respectivamente. La actividad 7c es la única en la que hubo 9 respuestas correctas en todo el instrumento, indicando que la propiedad aquí vista (E11) es la

más reconocida de todas las que se abordaron. La parte B era a criterio, y 3 de esas 14 respuestas correctas fueron en RG, mientras que las 11 restantes fueron en LN. El déficit entre las partes de este registro fue de 2, ya que hubo 16 respuestas correctas en la A, y 14 en la B.

De estos comentarios parciales sobre los elementos ostensivos, es posible observar que el RG es el que los estudiantes más identifican, no solo por lo visto en la Tabla 52, sino por las validaciones dadas por ellos mismos en las actividades planteadas en LN; esto se cumple siempre y cuando no sean los estudiantes los que deban realizar estas representaciones gráficas basándose en la interpretación de conjuntos de datos, ya que esto deviene en errores, justo como se observa en las actividades planteadas en RAL (ver Tabla 53). Asimismo, las actividades planteadas en RAL (actividades 4, 5 y 6) demuestran que los estudiantes no están relacionados con el análisis de conjuntos de datos.

En cuanto a LN, este registro es identificado por los estudiantes dependiendo de a qué registro esté ligado por medio de una conversión o tratamiento. En las actividades planteadas en RAL (4, 5 y 6), el LN fue identificado de manera minoritaria; mientras que en las planteadas en RG (1, 2 y 3) se identificó en mayor medida. Las actividades planteadas dentro del mismo LN (7a, 7b y 7c) resultaron ser aquellas en las que hubo mayor frecuencia de respuestas correctas en la parte B, es decir, en la parte explicativa de la actividad, pero no así en la parte A, debido a que este lugar lo ocupa la parte A de las actividades planteadas en RG.

Finalmente, es posible decir que el RG (por su capacidad de reflejar de manera directa las propiedades referentes a los parámetros μ y σ) y el LN (por la forma de adaptarse y proyectar a los demás registros, tomando la cualidad de registro complementario) son los que más identifican los estudiantes, reflejado esto en sus altas frecuencias de respuestas correctas y, en este sentido, el RAL es el que en menor medida es identificado.

Elementos actuativos

En el instrumento se abordaban dos tipos de actuar: A1, estudio descriptivo de datos para ajustar una curva, y el A5, comparación entre distribuciones con parámetros distintos.

En lo referente al A1, este se abordaba en las actividades 4, 5, 6, 7a, 7b y 7c, como se ve en la Tabla 4. No obstante, es distinto el planteamiento, pues en las actividades 4, 5 y 6 se presenta mediante el RAL, y en las 7a, 7b y 7c mediante el LN. Aunque lo anterior se profundiza en los elementos ostensivos, respecto al A1 es muy notorio que este se identifica más en las actividades planteadas en LN, que en las planteadas en RAL.

De esto es posible decir que A1 es identificado, y realizado, por los estudiantes cuando se dan sentencias en las que ya estén aludidas las propiedades que deben ser identificadas (actividades 4, 5 y 6); y se identifica en menor medida cuando el estudio descriptivo (A1) se debe hacer a través de conjuntos de datos y sus respectivos parámetros (actividades 4, 5 y 6).

Por su parte, A5 debía efectuarse en las actividades 1, 2, 3 y 4. Existe en este caso también una distinción, ya que las actividades 1, 2 y 3 están planteadas en RG, mientras que la 4 está en RAL. En este caso, A5 se identifica, y realiza, en mayor medida en las actividades planteadas en RG, mientras que en la planteada en RAL la frecuencia de respuestas correctas bajan.

Las combinaciones entre el tipo de actuar A, y el respectivo registro en que se plantea la actividad, no dejan de asomar en este análisis. El actuar tipo A1 se identifica cuando el registro de planteamiento es el LN, pero no es así cuando interviene el RAL. Mientras que A5 es identificado a través del RG, pero no cuando se presenta el RAL.

A este respecto es importante hacer énfasis en la actividad 4, que es en la cual se deben realizar ambos tipos de actuar, el A1 y el A5. Desde el A5, debe notarse que este se realiza en las actividades 1, 2 y 3 con alta frecuencia de respuestas correctas (mayor o igual a 5), pero en la actividad 4, en la que también intervienen las mismas propiedades (ver Tabla 4), la frecuencia es baja (menor que 5), y la única diferencia entre ellas es el registro inicial del planteamiento.

Para el A1 ocurre algo similar, solo que comparado con los incisos de la actividad 7, es decir, las propiedades y el actuar que fueron identificados en los incisos a, b y c de la actividad 7, no fueron identificados en la actividad 4, siendo la diferencia el registro de planteamiento, LN en los incisos a, b y c, y RAL en la actividad 4.

Por último, las frecuencias de respuesta correcta son altas (mayor o igual que 5) tanto para A1 como para A5, siempre y cuando no intervenga el RAL en su realización, ya que esto deviene en errores, como puede verse en las Tablas 53, 54 y 55.

Elementos intensivos

Las propiedades abordadas en el instrumento fueron seis, y se abreviarán como EI, y estas fueron: EI1, simetría respecto al eje vertical (media); EI2, concavidad y convexidad; EI3, curva como asíntota del eje horizontal; EI4, área bajo la curva igual a 1; EI5, media es igual a moda; y de manera opcional EI6, media es igual a moda y mediana.

Nuevamente es posible ver una influencia del registro en que se plantean la actividad respecto a la identificación de las propiedades. De la Tabla 4 es posible ver que las propiedades EI1 y EI2 se ponían en juego en las actividades 1, 2 y 3, es decir, las planteadas en RG. Estas fueron identificadas de forma frecuente (mayor o igual que 5) en estas actividades (ver Tabla 51). Sin embargo, es posible

ver que en la actividad 4 se involucraban estas mismas propiedades, EI1 y EI2, y el resultado fue que se identificaron en menor medida (menos de 4 respuestas correctas), siendo la única diferencia entre las actividades 1, 2 y 3, y la actividad 4, el hecho de que esta última se planteaba en RAL.

Por otro lado, en la actividad 5, donde también se ponían en juego EI1 y EI2, difiere de la actividad 4 por el hecho de que implicaba un conocimiento de la función de densidad de probabilidad. Los estudiantes mostraron no tener el conocimiento de esta función, por lo cual ninguno consiguió responder correctamente a esta actividad.

La actividad 6 involucraba también a EI1 y EI2, pero influenciadas por EI3. Bajo este planteamiento, los estudiantes mostraron no conocer la propiedad EI3, ya que, además de bosquejar curvas que no correspondían a los parámetros, en estas representaciones no se aludía a un comportamiento cercano a EI3, siendo esta una propiedad que se refleja de manera evidente en el gráfico. Algunas respuestas incluso la contradecían (ver análisis de actividad 6), ya que sus curvas tocaban al eje horizontal, cuando en realidad esta debe ser asintótica. De aquí que se puede deducir que esta propiedad no se mencionó durante el curso.

La propiedad EI4 fue contradicha constantemente a través del instrumento, por medio del ER1. No obstante, llegados a la actividad 7a, donde se refería a ella directamente, se puede decir que se identificó esta propiedad de manera alta en ambas partes (mayor o igual que 5 en la parte A; mayor o igual que 4 en la parte B). Puede decirse entonces que esta propiedad es identificada cuando se plantea en LN, pero no cuando el planteamiento es en RAL o RG. Algo que resulta interesante debido al hecho de que el curso parece haber sido enfocado hacia la tipificación. Esto puede deberse a que los estudiantes no comprenden el concepto de distribución normal como un todo, sino que lo entienden de manera fragmentaria, sea: tipificando, graficando o explicando desde alguno de los

parámetros; más no son capaces de interpretar desde una visión panorámica de todos estos elementos.

Lo anterior se manifiesta también para la propiedad EI5. La opcionalidad de la propiedad EI6 se debe a que una de las estudiantes manifestó esta propiedad en vez de EI5, por ello se tomó como una posible vía que podían tomar los alumnos; por lo demás, tanto EI5 como EI6 satisfacían al planteamiento de 7b. Así pues, por medio de las explicaciones de los alumnos a la actividad 7b, cuya frecuencia de respuestas correctas fue baja en ambas partes, es posible deducir que la propiedad EI5 no se vio durante el curso. Sin embargo, hubo 2 estudiantes (ver Tabla 51) que respondieron correctamente, y esto fue así debido al razonamiento que siguieron, relacionando la probabilidad con la media μ y el concepto previo que tenían de moda. Al reflexionar sobre estos tres elementos, llegaron a la conclusión de que sí, efectivamente, media era igual a moda (EI5) cuando se trata de la distribución de probabilidad normal. No obstante, vistas las respuestas a esta actividad, este tipo de respuesta fue una particularidad dentro del instrumento, ya que la mayoría de los estudiantes respondieron incorrectamente, dejándose llevar por el hecho de que los conceptos de media y moda no son iguales, y por tanto tampoco podían serlo para esta actividad.

Con todo esto, es posible hablar de qué propiedades fueron identificadas en mayor y en menor medida por los estudiantes. La propiedad EI1 es la que mayormente se identifica. Esto puede verse en la actividad 7c, que alude directamente a ella, y cuya frecuencia de respuestas correctas es de 9 en la parte A, es decir, la totalidad de estudiantes, y de 8 en la parte B. Esta propiedad además tiene la cualidad de aparecer en todas las actividades e incisos del instrumento (ver Tabla 4). Es posible, pues, notar cuando es identificada por los estudiantes en mayor medida (en las actividades 1, 2 y 3, planteadas en RG, y en las actividades 7a y 7c, planteadas en LN), y en menor medida (en las actividades 4, 5 y 6, planteadas en RAL). Desglosando lo anterior, se infiere que la propiedad

EI1 es identificada por los estudiantes cuando se les presentan curvas de densidad superpuestas, y relacionarlas con incisos referentes a los parámetros μ y σ (actividades 1, 2 y 3), así como cuando se involucra en sentencias textuales que refieran a las propiedades EI4 y a la misma EI1 (actividades 7a y 7c, respectivamente). Por otra parte, la propiedad EI1 no se identifica cuando los estudiantes deben graficar ellos mismos las curvas de densidad y comparar distribuciones con distintos parámetros (actividad 4); analizar un conjunto de datos y sus respectivos parámetros desde la función de densidad de probabilidad normal (actividad 5); y cuando se debe graficar involucrando las propiedades EI2 y EI3 (actividad 6).

La propiedad EI2 se pone en juego en las actividades que van de la 1 a la 6, esto es, en las actividades planteadas en RG (1, 2 y 3) y las planteadas en RAL (4, 5 y 6). Al observar las frecuencias de corrección (ver tabla 51) y los comentarios de los elementos de significado anteriores, es posible hablar de las condiciones que dan pie a que los estudiantes para identificar la propiedad EI2. Con ello, es posible deducir que los estudiantes identifican la propiedad EI2 (respuestas correctas mayores o iguales a 5 en A, y mayores o iguales a 4 en B) cuando se deben comparar curvas superpuestas para relacionar con sentencias dadas en incisos, las cuales refieran a las propiedades geométricas de los parámetros μ y σ (actividades 1, 2 y 3); pero esta propiedad no se identifica cuando los estudiantes deben reflejarla en bosquejos propios de curvas de densidad, los cuales servirán para comparar distribuciones (actividad 4) o para el análisis descriptivo de datos (actividades 5 y 6).

En cuanto a la propiedad EI3, esta solo se aborda de manera directa en la actividad 6. Y de aquí que sea posible decir que esta propiedad no se identifica, ya que ninguno de los estudiantes la respondió de manera correcta. Asimismo, la propiedad EI3 puede considerarse como de aparición indirecta en todas aquellas

actividades donde apareciera el ER1 y ER4, puesto que esto manifestaba un desconocimiento de dicha propiedad.

Algo similar ocurre con la propiedad EI4, ya que esta aparece solo en la actividad 7a, pero de manera indirecta cuando ocurría el ER1. Sobre esta propiedad, solo reflejada directamente en la actividad 7a, es posible decir que se identifica en mayor medida, ya que las respuestas correctas superan la media aritmética considerada para este fin (5 en A, y 4 en B).

La propiedad EI5 era vista en la actividad 7b, y puede decirse, por sus respuestas de corrección, que no es identificada en gran medida por los estudiantes, ya que no superan las medias aritméticas en ninguna de las partes. Al igual que la propiedad EI3, se puede pensar que esta propiedad no fue vista durante el curso.

Elementos validativos

Estos elementos solo involucran a la parte B de la actividad, ya que esta era la parte que pedía explicaciones a los estudiantes respecto a sus respuestas en A. Lo primero a notar, por medio de la Tabla 51, es que esta parte tiene más respuestas incorrectas que la parte A, lo que indica que los estudiantes muestran dificultades para interpretar y explicar sus respuestas. Esto puede deberse al enfoque determinista con que se abordó el curso, pues este pudo influir para que los estudiantes no desarrollaran una capacidad de interpretar los resultados, debido a que se conformaban únicamente con obtener uno o varios números que funcionaran como respuesta única e inamovible.

Las explicaciones requeridas en este instrumento estaban relacionadas con los parámetros y sus propiedades geométricas y estadísticas, es decir, en cómo se generaba un desarrollo de la intuición respecto a la distribución normal, y no tanto en su aplicación en la tipificación u otro de los enfoques desde los cuales puede abordarse.

Los elementos validativos eran a criterio del estudiante, de ahí la variedad que surgieron: análisis, síntesis, generalizaciones y demostraciones informales. Estos eran correctos dependiendo de dos cosas: 1) el registro en el que se planteaba la actividad, y 2) la propiedad que se ponía en juego. En general, los elementos validativos eran correctos cuando abordaban las propiedades EI1, EI2 y EI4 (frecuencias correctas mayores o iguales a 4), ocurriendo esto en las actividades planteadas en RG y LN (actividades 1, 2, 3, 7a y 7b); pero resultaban incorrectos, incongruentes o sin respuesta, cuando las propiedades puestas en juego eran EI1, EI2, EI3 y EI5 (frecuencias correctas menores de 4) en actividades planteadas en RAL y LN (actividades 4, 5, 6 y 7b).

En la Figura 62 se presenta un gráfico que muestra, de manera global, la comprensión de las propiedades por parte de los estudiantes en el instrumento de recogida de datos.

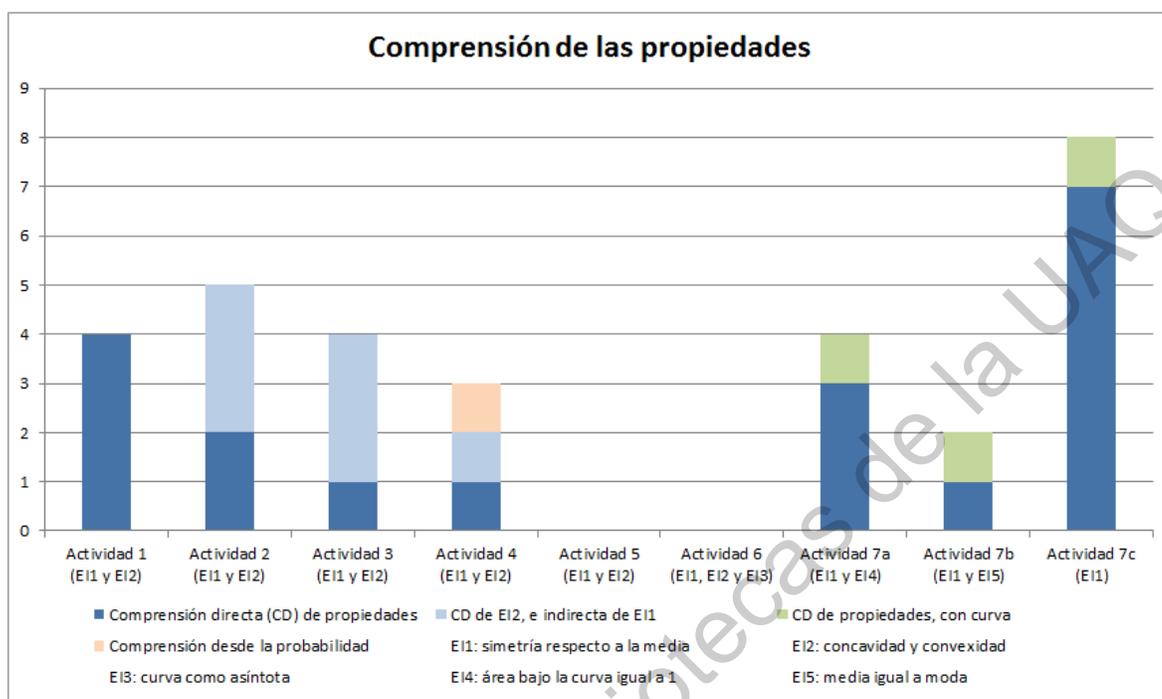


Figura 62. Panorama global de la comprensión de las propiedades en el instrumento, creación propia.

El gráfico muestra, en la base de cada barra, a la actividad correspondiente y, entre paréntesis) a las propiedades que debían ser identificadas en ella. Era posible que los estudiantes identificaran de manera directa estas propiedades, como es el caso de la actividad 1, o que ciertos estudiantes identificaran de manera indirecta, como ocurre en las actividades 2, 3 y 4. La identificación indirecta ocurre, en estos casos, para la misma propiedad: la simetría respecto al eje vertical (media), etiquetada como E11 (Elemento intensivo 1).

La identificación directa de una propiedad significa que esta fue aludida de manera textual en la parte explicativa de la actividad. Mientras que una identificación indirecta implica que el estudiante no alude a la propiedad de manera textual (E11, en este caso), pero es posible decir que la identifica porque, en base a esta, ha identificado otra u otras propiedades. Para el caso de las actividades 2, 3 y 4, los estudiantes aluden textualmente a la concavidad y convexidad (E12), y por ello la

identifican directamente, pero al hacerlo de manera correcta, es posible decir que también identifican EI1, aunque no lo mencionen, y de ahí que se diga que la identifican indirectamente.

Como puede verse en la barra de la actividad 4, solo hubo un estudiante en todo el instrumento que explicó desde una perspectiva de probabilidad. Se resalta de este modo porque, en su explicación, no alude a los parámetros, como los demás estudiantes, ni a las implicaciones geométricas de estos, sino que habla de probabilidad acumulada en torno a la media aritmética. Por ello es que se señala este tipo de comprensión como independiente de las otras.

Para el caso de las actividades 7a, 7b y 7c, hubo un estudiante en cada una de ellas que validó apoyándose en registros gráficos. Todos ellos realizaron curvas de densidad, señalando lo que implicaba cada inciso, haciendo énfasis en la propiedad en cuestión. Por último, debe resaltarse que los colores y frecuencias coinciden con las trayectorias cognitivas surgidas en cada actividad, tanto para las respuestas correctas como las incorrectas.

En la Figura 63 se presenta un gráfico con los errores y dificultades encontrados en las respuestas al instrumento.

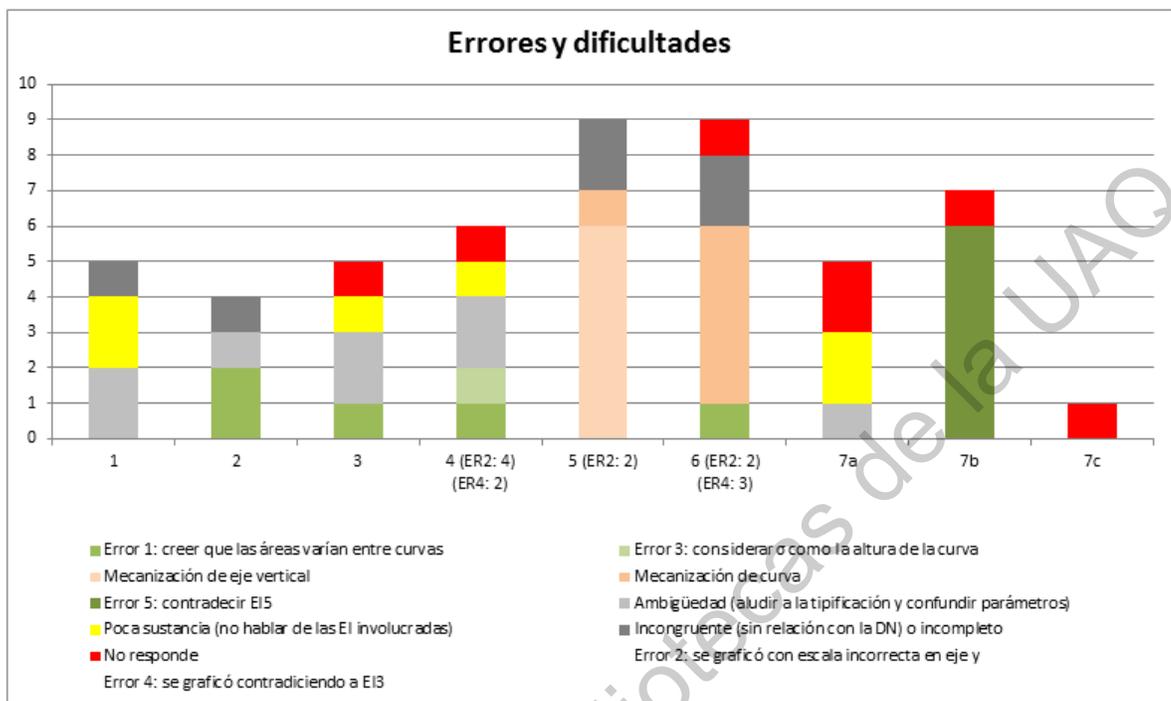


Figura 63. Panorama global de los errores y dificultades en el instrumento, creación propia.

De las dificultades que se encontraron, la ambigüedad es la más frecuente (color gris claro), ya que se encuentra en las actividades 1, 2, 3, 4 y 7a, con una frecuencia de 8. Esta dificultad se refiere a que los estudiantes, al explicar sus respuestas, confundieron a los parámetros, o a su característica geométrica, por lo que no se pudo considerar correcto su actuar. También dentro de este tópico entran las alusiones a la tipificación, que varios estudiantes intentaron realizar más por un intento de paliar el desconocimiento de la información requerida, que por una utilidad real dentro de la actividad. Como se dijo en los análisis, esto indica que el curso se centró en la tipificación y en la búsqueda de probabilidades de área.

La poca sustancia (amarillo) y la incongruencia (gris oscuro) aparecen el mismo número de veces en todo el instrumento: 6. La poca sustancia indica que, aunque

se percibe un conocimiento muy general de la distribución de probabilidad normal, la explicación del estudiante no estaba nutrida de alusiones a las propiedades que debieron identificarse. Mientras que la incongruencia implica que los estudiantes no argumentaron dentro del tema de la distribución de probabilidad normal, y que incluso no se percibe que lo conozcan. Por otra parte, la no respuesta (rojo) tiene una frecuencia de 7 en todo el instrumento, como puede verse en la Figura 63.

Hubo dificultades que se consideraron más de orden técnico que conceptual. Se trata de la mecanización del eje vertical (naranja claro) y la mecanización de la curva de densidad (naranja oscuro), ambas con frecuencias de 6 en todo el instrumento. En el caso de la mecanización del eje vertical, la posible causa puede ser un desconocimiento de la Ecuación 1 (ver sección 3.2), ya que esta representación de dos líneas perpendiculares no pertenece a los elementos ostensivos del significado de referencia de la distribución normal. La mecanización de la curva de densidad puede deberse, en cambio, a una combinación de factores: no reconocer las propiedades geométricas de la desviación estándar σ , y un desconocimiento de la propiedad EI3, es decir, curva como asíntota del eje horizontal.

Es posible diferenciar los errores identificados (ver Tabla 30) entre técnicos y conceptuales. Los conceptuales son más factibles de representar en la Figura 63. El error 1, creencia de que el área de las curvas varía de unas a otras, apareció 5 veces durante el instrumento, en las actividades 2, 3, 4 y 6. Mientras que el Error 3 apareció en 1 ocasión, en la actividades 4.

Los errores 2 y 4 son de forma más técnica, ya que solo aparecen cuando al estudiante se le pide graficar, y esto ocurre en las actividades 4, 5 y 6. De aquí que no se les dé un color dentro del gráfico, ya que este actuar derivaba en otro tipo de comprensiones, por ejemplo en el error 1, o en ambigüedad, contabilizándose bajo este color. En la actividad 4, por ejemplo, el Error 2 tiene

una frecuencia de 4, y el error 4 una frecuencia de 2. Esto es posible leerlo en la base de la barra. De manera que el Error 2, una escala incorrecta en el eje y, apareció en 8 ocasiones en todo el instrumento. Mientras que el Error 4, graficar contradiciendo a la propiedad EI3, aparece en 5 ocasiones.

Por último, el Error 5 (verde oscuro), que implica una contradicción directa de la propiedad EI5, media es igual a moda, aparece en 6 ocasiones, todas ellas en la actividad 7b. La posible causa de este error puede ser que no se vio a la propiedad EI5 durante el curso, de ahí que los pocos estudiantes identificaran esta propiedad lo hicieran de manera intuitiva.

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

El principal interés de esta investigación fue conocer la forma en que se desarrolla la intuición sobre las propiedades y representaciones de la distribución de probabilidad normal. En la enseñanza de este tema es común que el conocimiento de estos elementos sea a través, y cómo sustento, de la tipificación, es decir, de la búsqueda de probabilidades de área debajo de la curva; por tanto, el enfoque de las propiedades y representaciones de la distribución normal cobra sentido para los estudiantes únicamente porque se dirige a encontrar el porcentaje existente en una porción de la curva, lo cual resulta acorde a la forma determinista de enseñar estadística mencionada por Fischbein (1975).

Es por ello que el instrumento de recogida de datos para esta investigación, de manera intencional, se aleja de la tipificación. La razón de ello fue conocer el razonamiento de los estudiantes cuando se les “desprende” del propósito principal para el cual han aprendido dichas propiedades y representaciones, y observar la forma en que intuyen íntegramente estos elementos, o si son capaces de hacerlo.

Por lo anterior, no fue extraño encontrar en algunas respuestas una intención, por demás forzada, de tipificar, aludiendo a la fórmula de tipificación e incluso aplicándola, aunque ninguna de las actividades lo requería. En otras situaciones la tipificación no se mostró de manera directa, sino que estuvo insinuada en las validaciones de los estudiantes, siendo obviamente incorrectas, además de evidenciar que el curso llevado por los alumnos estuvo centrado en dicha aplicación de la distribución normal, justo como es la manera tradicional de hacerlo.

Es entendible que el tema de la distribución normal se centre en la tipificación, ya que es la forma más práctica de introducir sus propiedades y representaciones, pero no solo eso, sino que la mayoría de las veces no se cuenta con el tiempo necesario para desarrollar la intuición respecto a estas durante el curso, por lo que la tipificación se convierte en la alternativa más óptima para enseñar la distribución

de probabilidad normal y, con ello, inevitablemente enseñarla de forma determinista.

Los resultados de esto son visibles cuando los estudiantes tienen dificultades para entender temas para los que la distribución de probabilidad normal se convierte en un conocimiento básico, es decir, temas como el teorema del límite central, intervalos de confianza, contrastes de hipótesis, análisis de varianza, entre otros. En estos temas es imprescindible contar con intuiciones sobre las propiedades y representaciones de la distribución normal, ya que de no haber estas, existirá un vacío epistemológico en el estudiante, quien no dudará en recurrir, nuevamente, a su visión determinista de los términos numéricos involucrados, desdeñando la interpretación de estos, y haciendo superfluas estas aplicaciones estadísticas, ya que su fuerza radica precisamente en la interpretación que se les dé.

En otras palabras, la intuición sobre las propiedades y representaciones está fuertemente ligada a la capacidad interpretativa. Sin contar con un desarrollo intuitivo sobre la distribución normal, difícilmente se tendrán interpretaciones coherentes de los resultados numéricos obtenidos.

El instrumento da luz sobre esta cuestión, ya que evidenció el sentido que tenían los estudiantes respecto a la distribución normal, es decir, como herramienta cuyo único fin era encontrar probabilidades de área, y nunca como un enfoque de análisis para interpretar situaciones en base a conjuntos de datos. Todo lo anterior se trata de conclusiones generales que el autor ha reflexionado durante el análisis de resultados. A continuación se detallan las conclusiones desde ambos elementos teóricos, TRRS y significado y comprensión de objetos matemáticos y estadísticos, y desde la problemática que dio pie a esta investigación. Así también, se abordan reflexiones sobre el futuro de la misma.

6.1 Conclusiones desde la TRRS

Durante la concepción de esta investigación, la TRRS parecía el elemento teórico justo para el análisis, debido a que la coordinación entre registros de representación podía observarse plenamente dada la particularidad de las propiedades y representaciones de este objeto matemático. De relecturas a los antecedentes de esta investigación, se reconoció que la TRRS podía quedarse un tanto corta en determinados aspectos. Es decir, la existencia de coordinación entre dos registros es fácilmente observable, pero la TRRS no abunda en el trasfondo de dicha coordinación, ya que solo precisa si existe o no dicha coordinación.

Para reconocer la intuición de los estudiantes sobre la distribución normal, era necesario conocer ese trasfondo. El significado institucional de la distribución normal, creado por Tauber (2001), resultó adecuado para este propósito debido a que mostraría ese trasfondo a través de sus cinco elementos de significado. Con la unificación de estos dos elementos teóricos, fue posible observar si existía una conversión o tratamiento de registros, y conocer las formas de razonamiento que los estudiantes tenían al realizarlas.

Esta sinergia entre los elementos teóricos permitió observar, en las respuestas de los estudiantes al instrumento, las múltiples formas de razonar las propiedades y representaciones, tanto erróneas como acertadas, lo cual derivó, posteriormente, en una respuesta a la pregunta de investigación de este trabajo.

Desde la TRRS, es posible concluir que el registro de representación en el que menos dificultad tuvieron los alumnos fue el gráfico. Esto se puede afirmar desde dos perspectivas: 1) el hecho de que fuera el registro que tuvo más respuestas correctas; y 2) que en las actividades planteadas en lenguaje natural los estudiantes recurrieron, en las validaciones, a realizar gráficos para apoyarse.

En oposición a esto, fue el registro alfanumérico el que más complejidad representó para los estudiantes. Este fue el que menos respuestas correctas arrojó en general, y en parte puede deberse a que no se abordó la tipificación. Lo anterior se deduce de que los estudiantes pueden actuar sobre los conjuntos de datos tratando de tipificar. Es posible ver que en varias ocasiones ellos decidían tomar esa ruta para tratar de solucionar la actividad, aunque en ningún momento se les pidiera hacerlo. En general, el conjunto de datos estimuló a los estudiantes a tipificar, pero no a analizar la variación y la normalidad del conjunto, siendo esto último lo que los iba a llevar a responder correctamente la pregunta que se les hacía en la parte B.

Por último, el lenguaje natural demostró ser afable hacia los estudiantes, ya que las respuestas correctas en este registro fueron casi las mismas que en el registro gráfico. Además, alentó a los estudiantes a graficar para apoyar sus validaciones, como ya antes se mencionó, por lo que hace de este registro uno versátil, es decir, uno en el que los estudiantes se sienten cómodos de unificar con otros registros para el alcance de una mayor comprensión.

En sección 6.2, cuando se hable de los elementos ostensivos, se hará referencia a algunas de las afirmaciones hechas en este apartado. Esto se debe a que es este elemento de significado el que habla de las representaciones de la distribución de probabilidad normal.

6.2 Conclusiones desde el significado y comprensión de objetos matemáticos y estadísticos

En base a los análisis de resultados, es posible señalar que el elemento de significado que más complicado resultó de abordar para los estudiantes fue el validativo. Una visión general de esto se tiene en la tabla general de respuestas correctas e incorrectas (ver Tabla 51), donde puede verse que en la parte B, parte explicativa en todas las actividades, la frecuencia de correctas es menor que en la

parte A, parte más técnica de la actividad. La excepción es la actividad 7b, donde la frecuencia es la misma para ambas partes. Este déficit entre la parte técnica (parte A) y la parte explicativa (B), siendo la parte B la de menor frecuencia, muestra de manera general que los estudiantes tuvieron dificultades para validar su actuar durante todo el instrumento.

Así también, dentro de los elementos validativos utilizados, fue el análisis el usado mayoritariamente, seguido de la síntesis y la generalización, aunque en algunas ocasiones estas mostraban ambigüedad o dificultades. La demostración informal, específicamente utilizada en las partes 7a, 7b y 7c, mostró ser efectiva, pues todas ellas fueron correctas. Cabe destacar que en la demostración informal se utilizó una misma representación gráfica en las tres veces que se utilizó (curva de densidad), y que esta no fue hecha por el mismo estudiante.

En contra parte, el elemento de significado que menos complejidad tuvo para los estudiantes fue el ostensivo. Particularmente cuando los estudiantes tuvieron que realizar funciones semióticas entre o dentro de los registros de representación que se utilizaron en el instrumento, encontraron facilidad, específicamente cuando se trató de una conversión del registro gráfico al alfanumérico (actividades 1, 2 y 3), y de tratamientos dentro del lenguaje natural (actividades 7a, 7b y 7c). Dentro de este tópico, donde encontraron dificultad fue en las conversiones del registro alfanumérico al registro gráfico (actividades 4, 5 y 6).

Otro aspecto derivado del estudio y que merece énfasis son los errores encontrados en los estudiantes (Tabla 30).

Tabla 30. Errores encontrados en los análisis, creación propia.

Concepto	Lógica del error
Error 1 (ER1)	El área de las gráficas varía según su curtosis
Error 2 (ER2)	Desdeñar el concepto de probabilidad. Esto se evidencia en la escala del eje y, pues ésta no se encuentra en los términos de probabilidad (decimales)
Error 3 (ER3)	Considerar al valor de la desviación estándar σ como la altura que debe tener la curva. Para ello se incurre también al ER2, aunque es importante mencionar que desde el ER2 no siempre se incurre en el ER3
Error 4 (ER4)	Idea de que la curva comienza y termina respectivamente en los valores del intervalo $\mu \pm \sigma$, generando la creencia de que el intervalo es el generador de la curva
Error 5 (ER5)	Contradecir a la propiedad E15 (media es igual a moda), debido a que no se abordó esta propiedad en el curso.

Si bien las posibles causas de los errores vistos en la Tabla 30 provienen directamente del desconocimiento de distintas propiedades, cabe reflexionar, de manera más profunda, sobre el por qué los estudiantes no son capaces de intuir estas propiedades. Y es que detrás de estas propiedades, que pertenecen íntegramente a la distribución de probabilidad normal, existen un conjunto de conceptos que no son pertenecen directamente a este objeto matemático y que son, sin embargo, conocimientos críticos para comprender las propiedades.

Quizás el más importante de estos conocimientos críticos sea el del concepto de probabilidad. Más allá de las propiedades que originan los errores, si se lee

detenidamente la lógica de los errores de la Tabla 30, se puede percibir que todos ellos están ligados de cierta manera al concepto de probabilidad. Si los estudiantes no tienen reforzado un conocimiento básico de este concepto, mucho menos serán capaces de comprender lo que significa distribuir la probabilidad. Esto se refleja al momento de adentrarse directamente al concepto de distribución de probabilidad normal, ya que los estudiantes no verán que este objeto matemático es, en realidad, una construcción en base a serie de conceptos, los cuales, por mencionar algunos, son: probabilidad, distribución de probabilidad, función de densidad de probabilidad, medidas de tendencia central (media aritmética), medidas de dispersión (desviación estándar), y todo esto sin contar el contenido algebraico y aritmético.

Lo previo tiene sus motivos en la forma tradicional de enseñar la distribución normal, donde solo se proyecta la curva de forma instantánea y la ubicación de los parámetros media μ y desviación estándar σ . Estos parámetros necesitan ser abordados desde dicha perspectiva, ya que son los que definen la curva de densidad a través de la función de densidad. Si lo anterior se omite, el estudiante posiblemente creerá que el origen de la curva es meramente geométrico mediante los valores de μ y σ , y no considerará el aspecto algebraico de este objeto matemático, generando estos y, seguramente, otros errores conceptuales y técnicos.

6.3 Conclusiones respecto al planteamiento del problema

Respecto a *¿qué propiedades de la distribución normal interpretan los alumnos universitarios ante actividades con diferentes registros de representación?* Los análisis de los resultados demostraron que había una relación entre las propiedades y los registros, ya que los estudiantes identificaron e interpretaron las propiedades EI1: simetría respecto a la media, EI2: concavidad y convexidad, y EI4: área bajo la curva igual a 1, involucradas en las actividades planteadas en RG y LN, pero no identificaban estas mismas propiedades cuando

se presentaba en RAL. En los casos particulares de las propiedades EI3: curva como asíntota del eje x, y EI5: media es igual a moda, estas no mostraron estar dentro del bagaje conceptual de los estudiantes, por lo que es probable que no hayan sido vistas durante el curso. A pesar de ello, la propiedad EI5 fue intuita por dos estudiantes (3 y 9), cuyo accionar se detalla en la sección correspondiente (ver *Actividad 7b*).

Todo lo anterior se reflejó en las trayectorias cognitivas que se crearon para cada actividad. Al observar estas trayectorias, se tiene un panorama general del razonamiento de los estudiantes en la actividad, y estas se muestran en la Tabla 55.

Tabla 55. Trayectorias cognitivas encontradas en el análisis del instrumento.

Actividad	Trayectorias cognitivas encontradas
1	4
2	5
3	6
4	8
5	3
6	4
7^a	5
7^b	4
7^c	3

Bajo esta perspectiva, la actividad 4 es en la que los estudiantes mostraron mayores dificultades, ya que esta tuvo mayor variabilidad de respuestas (con 8 trayectorias cognitivas), teniendo 4 y 3 respuestas correctas para las partes A y B, respectivamente, siendo los elementos de significado puestos en juego en esta

actividad los que menos identifican los estudiantes, todo esto bajo un planteamiento hecho en el registro alfanumérico (RAL).

Sobre las propiedades y representaciones que los estudiantes menos tuvieron dificultades para interpretar e identificar, en base a la variabilidad de respuestas, están las actividades 1, 7b y 7c, con 4 trayectorias cognitivas cada una (ver Tabla 55). Al ocurrir esta paridad, es necesario volver a la Tabla 51 para notar que en la actividad 7b hay una cantidad de respuestas incorrectas considerable, por lo que no se trata de que los elementos de significado de esta actividad fueron identificados, sino que más bien los estudiantes desconocían grandemente cómo responder a este planteamiento, por lo cual no hubo mucha variabilidad. En cambio, las actividades 1 y 7c sí muestran una buena cantidad de respuestas correctas en la Tabla 51 (mayores de 5 y 4 para las partes A y B, respectivamente), por lo que las propiedades (EI1 y EI2, específicamente) y representaciones (registro gráfico y lenguaje natural) que se involucraban en estas actividades fueron en buena medida identificadas. Todo lo anterior deviene en el cumplimiento del objetivo general, el cual era *determinar las propiedades y representaciones de la distribución normal que los estudiantes universitarios identifican en las situaciones que se les plantean a través de los diferentes registros de representación.*

En lo referente a los objetivos específicos, es necesario hablar de ellos por separado. En cuanto al OE1 (*Diseñar un instrumento que estimule la intuición de los estudiantes sobre las propiedades de la Distribución Normal*), se considera cumplido ya que el instrumento presentó una plataforma en la que los estudiantes debieron desarrollar su intuición y salir de su zona de confort respecto a la distribución de probabilidad normal (es decir, se les alejó de la tipificación), lo cual se refleja en particular en la actividad 7b, donde 2 estudiantes intuyeron la propiedad EI5.

Para el OE2 (*Detectar diferentes errores y dificultades a los mencionados en los antecedentes, que surjan de la enseñanza y aprendizaje de la Distribución Normal*) se puede volver a citar a la Tabla 30. Los errores que ahí aparecen, identificados en el análisis del instrumento, son nuevos en el sentido de que no se enlistan en los antecedentes de la investigación, aunque sí pueden relacionarse con algunos de los errores ya encontrados por Tauber (2001), los cuales también se confirman bajo esta perspectiva de análisis de la lógica de los errores, lo que al mismo tiempo hace cumplir el OE3 (*Comprobar algunos de los errores mencionados en los antecedentes, con la finalidad de caracterizarlos*).

Finalmente, el OE4 (*Encontrar los registros de representación en que los estudiantes desarrollan más ampliamente el tema de la Distribución Normal y sus propiedades, y aquellos en los que tienen dificultades*) se dilucida en el hecho de haber sido respondida la pregunta de investigación, ya que se establece que el RG y el LN fueron los registros de representación donde los estudiantes pudieron identificar las propiedades puestas juego; mientras que el RAL resultó ser el registro de planteamiento en el que los estudiantes encontraron mayores dificultades.

En cuanto a la hipótesis (*Los alumnos interpretan determinadas propiedades de la distribución normal influenciados por el registro en que se les presenten*), es posible aceptarla, ya que los estudiantes interpretan las propiedades E11, E12 y E14, influidos por el registro en que se les presentan, es decir, las interpretan siempre y cuando estas se planteen en el RG o el LN, pero no las interpretarán bajo el RAL.

Con la comprobación de la hipótesis se finaliza este capítulo de conclusiones, ya que se han abordado los puntos que representaban el planteamiento del problema vistos en el capítulo 1.

6.4 Reflexiones desde esta investigación

De las secciones anteriores de este capítulo, es posible ver el carácter determinista de la enseñanza de la estadística y en particular de la distribución normal. En contraposición se presenta la Figura 64, que podría significar una especie de mapa para abordar a este objeto matemático de forma significativa.

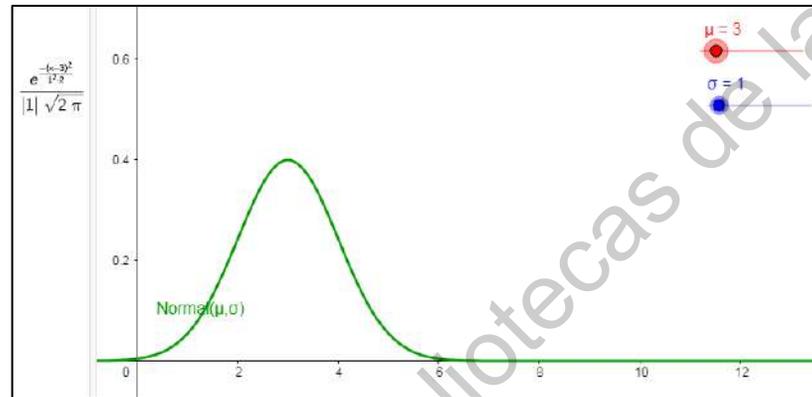


Figura 64. Distribución normal y los conceptos desde la cual se construye, tomada de geogebra.org.

En la Figura 64 es posible observar los conceptos que construyen la distribución de probabilidad normal. La finalidad de esto es denotar justamente que este concepto “se construye”, y que no se genera espontáneamente con el fin de encontrar probabilidades. Al lado izquierdo de la Figura 64 se observa la función de densidad de probabilidad (registro algebraico); en la parte central (registro gráfico) se observan al eje y (escalado en decimales que van del 0 al 0.6), al eje x (con una escala del 0 al 12), y a la curva de densidad que se forma a partir de la función de densidad del lado derecho, respecto a los parámetros media μ (con valor de 3) y desviación estándar σ (con valor de 1), vistos al lado derecho de la curva en la Figura 64.

Al mostrar a la distribución de probabilidad como una construcción, es probable que el estudiante vea la necesidad de entender los componentes de dicha

construcción, y más aún cuando estos entren en contacto con contextos reales. De la Figura 64 también se rescata la herramienta de geogebra, ya que esta es de acceso fácil, tanto para estudiantes como docentes, y resulta un instrumento efectivo para mostrar la coordinación entre registros de representación.

Otra de las cuestiones que son del interés del autor es la utilización del instrumento para evaluar la intuición de los estudiantes respecto a otras distribuciones de probabilidad. Para ello será necesario realizar las modificaciones pertinentes en el instrumento (ver Anexo 1) para aplicarlo. De los resultados será posible encontrar observar la manera en que los estudiantes intuyen cómo se distribuye la probabilidad, dónde encuentran dificultades y qué utilidad le confieren.

De lo anterior, el instrumento puede evolucionar a convertirse en algo más sólido en cuanto a la didáctica, ya sea una secuencia o un material bibliográfico. Para ello no sería imprudente reformular planteamientos, dar más profundidad a ciertos problemas, introducir contextos reales, introducir a la tipificación y mostrarla desde un punto de vista interpretativo y de toma de decisiones, en apoyo con instrumentos como geogebra. Lo anterior podría complementarse con otro de los intereses del autor: la gamificación. La construcción de juegos de mesa o cartas, o el análisis de juegos ya existentes, daría pie incluso a otra perspectiva desde la cual enseñar la probabilidad y estadística y, sobre todo, a la distribución de probabilidad normal.

Para ello es claro que se necesitaría de los recursos de una investigación más profunda. Mientras tanto, el actual trabajo funcionó para dar cuenta del razonamiento de los estudiantes en lo referente al desarrollo intuitivo de la distribución normal, así como los errores y dificultades que obstaculizan su aprendizaje.

Bibliografía

- Amaya de Armas, T. R., Pino-Fan, L. R., Rivilla, A. M. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática*, 28 (3), 111-144.
- Arce, G. R. (2008). Formas de razonamiento que muestran estudiantes de maestría de Matemática Educativa sobre la distribución normal mediante problemas de simulación de Fathom. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 3(1), 10-23.
- Batanero, C., Estepa, A., & Godino, J. D. (1991). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, 25 – 31.
- Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la estadística?. *Blaix*15, 2 – 13.
- Batanero, C., Tauber, L. M., & Sánchez, V. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos. *Cuadrante*, 10(1), 59-92.
- Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*. Buenos Aires: conferencia inaugural.
- Batanero, C., & Godino, J. D. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. En R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 203 – 226). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Batanero, C., Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., & Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7 – 18.

Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P., & Vallecillos, A. (2014). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. *Internation Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527 – 547.

Bayés, A. S. (2013). El proyecto internacional de alfabetización estadística. *Números*, 83, 19 – 33.

Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burril y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education – A joint ICMI/IASE study* (pp. 57 – 69). Dordrecht: Springer.

Calandra, M. V., & Costa, V. A. (2018). Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de distribución normal en carreras de ingeniería. *IV Congreso Argentino de Ingeniería – X Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería*, Córdoba, Argentina.

Cardona, L. Z. (2011). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística?. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 33, 234 – 247.

Carpio, M., Gaita, C., Wilhelmi, M. R., & Sáenz de Cabezón, A. (2009). Significados de la distribución normal en la universidad. En M. J. González,

M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM*. Santander.

Castro, A. E., & Ruiz, J. P. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números*, 83, 43 – 63.

Contreras, J. M., & Portillo, E. M. (2019). Alfabetización Estadística. 25 años de la evolución de un término. *Números*, 100, 35 – 38.

D'amore, B., Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10, 191-218.

D'amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica*, 11, 150-164.

D'amore, B., Pinilla, M. F., Iori, M., Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18 (2), 177-212.

Del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 49(1), 53 – 64.

- Díaz-Levicoy, D., & Cezón, P. A. (2014). Análisis de gráficos estadísticos en textos escolares de séptimo básico en Chile. *Revista Electrónica Diálogos Educativos*, 28, 21 – 40.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME*, 9 (1), 143-168.
- Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70 (1), 1 – 25.
- Garfield, J., del Mas, R., & Chance, B. (2003). The Web-based ARTIST: Assessment resource tolos for improving statistical thinking. In *Annual meeting of the American Educational Research Association*, Chicago.
- Godino, J. D., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

- Godino, J. D. (1995). ¿Qué aportan los ordenadores a la enseñanza y aprendizaje de la estadística?. *UNO*, 5, 45 – 56.
- Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A., Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 91-110.
- Herrera, M. I, & Rodríguez, M. I. (2011). Educación estadística: desarrollo del pensamiento y razonamiento estadístico. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.
- Holmes, P. (1980). *Teaching Statistics 11 – 16*. Sloug: Foulsham Educational.
- Hughes, E. (2005). Uso de hojas electrónicas en la enseñanza de la distribución normal. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18 (1), 757-763.
- León, O. G., & Montero, I. (2002). *Métodos de investigación en psicología y educación*. (3ra Edición). España: S. A. McGraw-Hill/Interamericana de España.
- Marín, M. V. (2017). *Un estudio de la presentación de la distribución normal en los textos de bachillerato*. (Tesis inédita). Universidad de Granada, Granada, España.
- Mendenhall, W., Beaver, R. J., & Beaver, B. M. (2010). *Introducción a la probabilidad y estadística* (13ª. Edición). México: Cengage Learning Editores.
- Ortiz de Haro, J. J. (2019). La educación estadística en la revista números (1987 – 2018). *Números*, 100, 45 – 48.

- Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 13, 29-36.
- Pérez, R. S. (1986). *Nociones básicas de estadística*. España: servicio de publicaciones de la Universidad de Oviedo.
- Pfannchuck, M., Wild, C. J. (2000). Statistical thinking and statistical practice: themes gleaned from professional statisticians. *Statistical Science*, 15, 132 – 152.
- Pfannchuck, M., & Wild, C. J. (2005). Towards an understanding statistical thinking. En D. Ben-Zvi, J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (15ª. edición). México: Editorial Trillas s. a. de c. v.
- Sánchez, J. M. (2014). Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa Conect@2*, 4 (9), 27-57.
- Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones*. España: McGraw-Hill/Interamericana de España.
- Tauber, L. M. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. (Tesis doctoral inédita).

Universidad de Sevilla, Sevilla, España. Disponible en:

<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Tesisliliana.pdf>

Tauber, L., Sánchez, V., & Batanero, C. (2004). Diseño, implementación y análisis de una secuencia de enseñanza de la distribución normal en un curso universitario. *Revista EMA*, 9, 82 – 105.

Taylor, S. J., & Bogdan R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados*. España: Paidós.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 133 – 170.

Walpole, R. E., Myers, R. H., & Myers, S. L. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (9ª. Edición). México: Pearson educación.

Dirección General de Bibliotecas de la UAG

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Anexo 1. Instrumento de recogida de datos



Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Didáctica de las Matemáticas



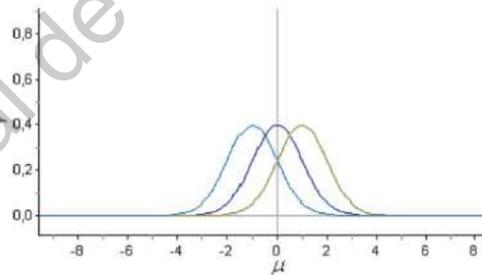
Nombre: _____ Tipo de ingeniería: _____

Edad: _____

Nota: las respuestas a las siguientes actividades son confidenciales y son para uso exclusivo de una investigación del programa de Maestría en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias. Los resultados no afectarán a la calificación de la materia, por lo que se pide que las actividades sean contestadas de manera individual y de la forma más comprometida y honesta posible.

Instrucciones: A continuación, se te presenta una secuencia de actividades, se te solicita dar respuestas y ser lo más explícito posible en tus procedimientos y validaciones.

Actividad 1. En la siguiente representación, se muestra la gráfica de tres distribuciones normales con media μ y desviación estándar σ .

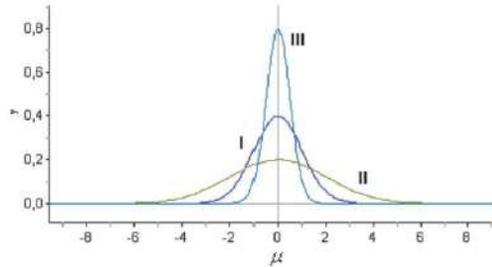


A. Marque con una X la relación se cumple:

- Las tres distribuciones tienen la misma media μ y lo que varía es su desviación estándar σ
- En las tres distribuciones varían la media μ y la desviación estándar σ
- En las tres distribuciones varían la media μ y se mantiene constante su desviación estándar σ
- No se puede decir nada de las distribuciones

B. Explique su respuesta

Actividad 2. En la siguiente representación, se muestran las gráficas de tres distribuciones normales con media μ y desviación estándar σ



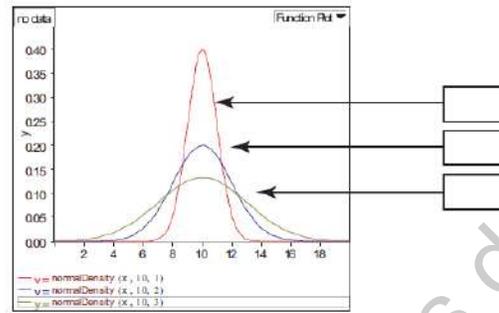
A. Marque con una X, la relación que se cumplen:

- En la gráfica I hay mayor variación
- En la gráfica II hay mayor variación
- En la gráfica III hay mayor variación
- Las tres se distribuyen con igual variación

B. Explique su respuesta

Actividad 3. En las siguientes gráficas aparecen tres distribuciones poblacionales cuya media es $\mu = 10$ y sus desviaciones estándar son $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ y $\sigma = 3$.

A. Coloca sobre cada una de ellas la desviación estándar que le corresponde.



B. Explique las razones de tu asignación.

Actividad 4. Considere que los siguientes bloques, A y B, contemplan una serie de mediciones de un mismo objeto, y que estos datos se comportan de acuerdo a la distribución normal:

Bloque A

10	20	30
40	50	60

$$\bar{x} = 35$$

$$s = 18.71$$

Bloque B

10	10	10
60	60	60

$$\bar{x} = 35$$

$$s = 27.39$$

A. Bosqueje la gráfica de cada uno de los bloques

B. Explique qué diferencia existe entre ellas

Actividad 5. Considere que el siguiente conjunto de datos fue extraído de una población que se comporta de acuerdo a la distribución normal:

10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

$$\bar{x} = 10$$

$$s = 0$$

A. Bosqueje la gráfica de este conjunto de datos

B. Responda: ¿cómo afecta el valor de σ a la gráfica?

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Actividad 6. Considere que el siguiente conjunto de datos fue extraído de una población que se comporta de acuerdo a la distribución normal:

2	98	94	96	6	5	99	1	97	2
---	----	----	----	---	---	----	---	----	---

$$\bar{x} = 50$$

$$s = 46.83$$

A. Bosqueje la gráfica de este conjunto de datos

B. Responda: ¿cómo afecta a la gráfica la dispersión de los datos?

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Actividad 7. Responda Verdadero o Falso en los siguientes incisos y explique su elección:

a) En una distribución normal, el 50% de los datos caen por encima de la media. V () F ()
Explique su respuesta.

b) En la curva normal, la media es igual a la moda. V () F ()
Explique su respuesta

c) La curva normal representa una distribución que se distribuye en forma simétrica con respecto a la media. V () F ()
Explique su respuesta.