Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Informática
Doctorado en Tecnología Educativa

LOS PROCESOS COGNITIVOS PARA LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA ESCOLAR CON SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Doctora en Tecnología Educativa

Presenta:
M. M. E. María del Carmen Fajardo Araujo

Dirigido por:
Dr. Víctor Larios Osorio

Dr. Víctor Larios Osorio
Presidente

Dr. Ángel Homero Flores Samaniego
Secretario

Dra. Teresa Guzmán Flores
Vocal

Dr. Hugo Moreno Reyes
Suplente

Dr. Daniel Ramírez Balandra
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Noviembre 26 de 2020
México

DEDICATORIA

A Mario, porque es más fácil creer que me sigues los pasos desde un lugar que llaman cielo.

AGRADECIMIENTOS

El estudiante de doctorado debería empezar la redacción de esta sección al inicio de sus estudios, ya que a lo largo del sinuoso andar académico se agregan personajes que aportan elementos valiosos al trabajo.

Comenzaré agradeciendo la confianza que me tuvo inicialmente el Dr. Víctor Larios Osorio.

Seguidamente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT, al financiar por 42 meses mis estudios de Doctorado con número de becario 404769.

Al Dr. Ángel Homero Flores Samaniego por las interrogantes sobre el rumbo de la investigación, la reflexión sobre el estilo y contenido.

Al Dr. Hugo Moreno Reyes por las aportaciones bibliográficas para sustentar la sección metodológica y las conclusiones.

Al Dr. Daniel Ramírez Balandra por sus comentarios para repensar la escritura de este documento e intentar mejorarlo.

A mis profesoras la Dra. Gloria Avecilla Ramírez por contribuir a reflexionar sobre la forma de escribir para la ciencia. A la Dra. Leticia Pons Bonals porque desde la investigación narrativa aportó fundamentos axiológicos a mi investigación.

A la Dra. Ana Marcela Herrera Navarro y al M.I.S.D Juan Salvador Hernández Valerio, jefe de investigación y posgrado y director de la Facultad de Informática, respectivamente, por gestionar para la reducción de la cuota.

A la escuela Telesecundaria Participación, Desarrollo y Paz, específicamente a la profesora Tomasa Ruíz Sobrevilla por permitirme entrar a su aula, trabajar con sus alumnos y recomendarme con sus colegas para seguir con el proyecto doctoral.

A mis compañeras/amigas Ana María y Miroslava por suavizar este andar que parecía interminable.

Finalmente, sin restar importancia, mencionar a las personas que me rodearon en ámbitos no académicos y que de muchas maneras participaron en la conformación de este trabajo. A

Luis Antonio por ser un pilar fundamental soportando toda clase de cataclismos emocionales, principalmente sobre mis infortunios de publicación en revistas científicas. A Valeria por enseñarme a andar en el sendero de la paciencia.

A todos, gracias.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

El uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, TIC, en matemáticas se está potencializando debido a que estas pueden contribuir a que los alumnos conozcan diferentes representaciones del objeto matemático de manera que permitan dar sentido a conceptos y procedimientos que están involucrados en el razonamiento matemático. Esta investigación se enfocó en caracterizar a la demostración matemática escolar y los procesos que en ésta se manifiestan cuando alumnos de secundaria, con el uso de GeoGebra como mediador semiótico, establecen propiedades geométricas que le permitan generar conjeturas y validarlas. Desde los presupuestos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemáticos, se buscó entender qué procesos ejecutan los alumnos cuando argumentan sus procedimientos y validan sus resultados. El enfoque metodológico de la investigación fue cualitativo y la estrategia usada atañó al denominado estudio de casos. Para la recogida de datos se estructuraron temas del Programa de Estudios vigente para matemáticas de educación básica. En el diseño de las actividades se tomó la propuesta de la Unidad Cognitiva de los Teoremas, cuyo objetivo es mostrar la continuidad que hay entre la producción de la conjetura y su demostración. Además, se elaboraron tres configuraciones epistémicas para evidenciar los objetos matemáticos que podían emerger en la aplicación de las actividades. Se aplicó un instrumento diagnóstico con conceptos como congruencia, semejanza, homotecia, razón, entre otros. También siete actividades a estudiantes de tercer grado secundaria de modalidad Telesecundaria ubicada en San Miguelito una comunidad que pertenece a la delegación Santa Rosa Jauregui en el estado de Querétaro. Se tuvo un papel de participante como observador para orientar las construcciones en GeoGebra solicitadas en las actividades. Para el análisis de datos se prestó atención en la generación de la conjetura, el argumento escrito y el argumento verbal que podían ser elaborados con base en propiedades del software o en hechos matemáticos. Los resultados indican que no usan el software como una herramienta para la construcción de sus argumentos y que los procesos matemáticos que priorizan están orientados a la particularización, a generalizaciones del tipo disyuntivas y muy pocos alumnos alcanzan la reificación.

Palabras clave: procesos matemáticos, GeoGebra, demostración matemática escolar, argumentos.

ABSTRACT

The use of Information and Communication Technologies ICT, in mathematics is being made possible because they can help students know different representations of mathematical object in a way that makes sense of concepts and procedures that are involved in mathematical reasoning. This research focused on characterizing the mathematical demonstration of the school and the processes that manifest itself in it when high school students with the use of GoeGebra as a semiotic mediator they establish geometric properties that allow it to generate guesses and validate them. From the budgets of the Ontosemiotic Approach to Cognition and Instruction it was to sought to understand what processes students execute when they argue their procedures and validate their results. The methodological approach of the research was qualitative and the strategy used related to the called case study. For data collection topics of the current for basic education mathematics were structured. In the activities design the proposal of the Cognitive Unit of the Theorems was taken whose objective is to show the continuity between the production of the conjecture and its demonstration. In addition, three epistemic configurations were developed to highlight mathematical objects that could emerge in the application of activities. A diagnosis instrument was applied with concepts such as congruence, homothecy, similarity, reason, among others. Also, seven activities for third graders of Telesecondary modality located San Miguelito a community belonging to Santa Rosa Jauregui delegation in the state of Querétaro. A participant role was played as an observer to guide the constructions in GeoGebra requested in the activities. For data analysis attention was paid to the generation of conjecture the written argument and verbal argument that could be elaborated based on software properties or mathematical facts. The results indicated that they do not use the construction of their arguments and that the mathematical processes they prioritize are oriented to particularization, to disjunctive generalizations and very few students reach to reification.

Key words: mathematical processes, GeoGebra, demonstration of school math, arguments.

I. INTRODUCCIÓN

La diversidad de teorías del aprendizaje, cognitivas, constructivistas, asociativas o conductistas convergen en el cambio de conocimientos o conductas precedentes para que el aprendizaje se logre (Rivas, 2008). El aprendizaje, siguiendo a Rivas, denota un *proceso* y un *resultado*, es entonces una modificación de lo que se sabe y lo que se hace. El paradigma conductista, que predominó durante la primera mitad del siglo XX, ha experimentado un desplazamiento por una postura que se ocupa de procesos mentales, cognición, proyección en la acción, procesos de pensamiento y acción humana, este otro paradigma se denomina cognitivista.

La psicología cognitiva nació en el año de 1956 (Pozo, 1989) durante la celebración del Segundo Simposio sobre Teoría de la Información. En ese mismo año se publicaron algunos trabajos que fueron cruciales para que creciera el nuevo movimiento. El adjetivo *cognitivo* es el sucesor de *cognoscitivo*, cuyas raíces latinas *cognitio* conocimiento, acción de conocer, se entiende como el proceso para la adquisición de conocimientos (Rivas, 2008). La psicología cognitiva entonces se ocupa del análisis, la descripción, comprensión y explicación de los procesos cognitivos por los que los sujetos almacenan, recuperan y usan el conocimiento.

Dentro del paradigma cognitivo se encuentran algunas posturas como la teoría del procesamiento de la información que se basa en la aceptación de la analogía entre la mente humana y el funcionamiento del ordenador, es decir, los programas computacionales sirven como metáforas para el funcionamiento cognitivo del ser humano (Pozo, 1989). El hombre y la computadora intercambian información mediante la manipulación de símbolos, por ello sus sistemas de procesamiento son equivalentes. La entrada de información (*input*) involucra procesos de cognición como la adquisición, transformación, organización, retención, recuperación y uso de información (Rivas, 2008).

El *proceso* en la teoría del procesamiento de la información, consiste en un conjunto de operaciones para la transformación de una cosa en otra (*output*). De manera que, si se conoce la entrada y la operación, se vislumbraría el resultado o la salida. Los procesos cognitivos entonces, constituyen un referente importante para entender el mundo, se ponen a funcionar cuando los seres humanos observan, leen, miran y escuchan (Banyard, 1995). Estas estructuras o mecanismos mentales se clasifican en básicos y superiores. Los primeros son la percepción, atención y la memoria, mientras que el lenguaje, el pensamiento y la inteligencia (Vygotski, 1979) son considerados como procesos superiores.

Otra de las interesantes teorías del aprendizaje que se enmarcan en la psicología cognitiva es la de Piaget, quien mediante relaciones entre aprendizaje y desarrollo del sujeto explican cómo éste procede para construir e inventar (Pozo, 1989). Piaget (1978) mediante un proceso de equilibración que involucran esquemas de asimilación y acomodación explica cómo se consigue el aprendizaje. Ahora bien, como se mencionó, el desarrollo cognitivo del sujeto está relacionado con su crecimiento biológico, por ello Piaget estableció etapas como la sensoriomotriz de 0-2 años de edad que involucra el control motor y el aprendizaje sobre los objetos físicos. La preoperacional 2-7 años donde se desarrolla el lenguaje, la operacional de los 7 a los 12 años cuya particularidad es el inicio a lo abstracto y finalmente la operacional cuyas habilidades lógicas de razonamiento predominan.

En resumen, los procesos cognitivos que en este trabajo se enuncian, son afines a los procesos matemáticos o procesos cognitivo-matemáticos, porque se analizan las *respuestas* o *salidas*, en términos de la teoría del procesamiento de la información, que los alumnos otorgan a tareas (actividades) propuestas. Las generalizaciones, significaciones, asunciones, conjeturas, entre otros, constituyen el resultado del razonamiento que serán evidenciados en producciones escritas, verbales y gráficas.

Otro importante elemento a ser descrito en este trabajo tiene que ver con la *demostración.* La literatura en investigación en educación matemática da cuenta de algunas dificultades que los alumnos, principalmente de nivel superior, presentan al momento de enfrentarse a demostraciones matemáticas. También se destacan en diversos reportes, razones enérgicas por las que es importante insertar la demostración desde niveles básicos de escolaridad. Los Planes y Programas de Estudio 2011 para la Educación Básica en México proponen para el campo de formación de pensamiento matemático, que los alumnos durante su trayecto por los diferentes niveles de la educación básica formulen y validen conjeturas, se planteen nuevas preguntas, comuniquen, analicen e interpreten procedimientos y resultados, encuentren diferentes formas de resolver los problemas y manejen eficientemente técnicas (Secretaría de Educación Pública, SEP, 2011).

Aunado a lo anterior, dentro de los principios que propician la transformación de la práctica docente en la educación básica, están la generación de ambientes de aprendizaje definidos como espacios donde se desarrolla la comunicación y las interacciones que hacen suceder el aprendizaje. En dichos ambientes tienen cabida las Tecnologías de la Información y la Comunicación, TIC, donde se pretende desarrollar habilidades digitales en los alumnos. Las tendencias de los interesados en enseñar la demostración apuntan a usar herramientas distintas al lápiz y papel, como software que funcionan como mediador para optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la demostración.

El capítulo muestra la pregunta central de la investigación, así como dos cuestionamientos más que la complementan, se describe también la justificación principalmente basada en fusionar aspectos como las competencias matemáticas a desarrollar en educación básica (validar procedimientos y resultados), mediante el diseño de situaciones didácticas en ambientes de *Geometría Dinámica*, que evidencien procesos cognitivos-matemáticos desarrollados en los alumnos de secundaria cuando resuelven tareas enfocadas a dar explicaciones y justificaciones de sus resultados.

Los antecedentes son presentados en el capítulo dos, se describen aspectos sobre las concepciones sobre la demostración en el seno de matemáticas y en el ámbito escolar. También aparecen trabajos sobre geometría dinámica insertando un mediador semiótico en el salón de clases que potencialice los procesos semióticos. Se incluye, además, términos clave con las definiciones usadas por el autor para el desarrollo y explicación de este trabajo, con el fin de orientar al lector.

El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemáticos, EOS, es un modelo que tiene herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que ayuda a responder ¿qué ha sucedido y por qué?, sus cinco niveles de análisis del proceso de instrucción son descritos en el capítulo tres y se usan como fundamentación teórica. Se describen, además, la caracterización de los procesos matemáticos priorizados en esta investigación relacionados con las facetas duales y las configuraciones epistémicas que el EOS propone en dos sus niveles de análisis. Se agregan las características de cómo se tomó la demostración matemática escolar en este trabajo, apoyada de los esquemas de argumentación que permitan transitar entre los procesos matemáticos.

En el capítulo cuarto se explicitan los supuestos básicos de la investigación, basados en las etapas de desarrollo cognitivo del sujeto propuestas por Piaget, quien plantea una clasificación con base en el crecimiento del infante. Se sitúa al alumno de última etapa de educación básica, secundaria, en el estadio de las *operaciones formales* con todo lo que implican y debido a que no hay evidencia en la literatura en educación matemática que denote qué procesos matemáticos se manifiestan en los alumnos cuando usan como mediador al Software de Geometría Dinámica (SGD) para validar su conocimiento, se formularon los supuestos.

Los objetivos de la investigación se enuncian brevemente en el capítulo quinto, los cuales son la descripción de algunos de los procesos matemáticos que manifiestan los alumnos de último grado de educación básica (educación secundaria) cuando usan herramientas tecnológicas, como Software de Geometría Dinámica (SGD) al validar su conocimiento matemático en tareas geométricas. Mediante una caracterización de los procesos matemáticos para valorar los niveles de desarrollo en los que se encuentra el alumno al validar el conocimiento matemático. Debido que para la evidencia de los procesos matemáticos en las tareas diseñadas se utilizó el SGD, se identificaron algunos de los fenómenos ligados al trabajo en ambientes digitales que impiden la apropiación del SGD como una herramienta para ayudar a la validación del conocimiento matemático.

La metodología se especifica en el sexto capítulo, con un enfoque cualitativo porque usa métodos, observables, técnicas, estrategias e instrumentos que se centran en observar de manera subjetiva algún aspecto de la realidad. Para dar cuenta de los procesos matemáticos que los alumnos de secundaria manifestaron cuando validan conjeturas se recurrió a la estrategia de investigación denominada *estudio de casos*. El investigador fungió como participante como observador en cada una de las aplicaciones para seleccionar el escenario y los informantes. Se describen, además, la estructura general de las actividades, unánimes a los temas propuestos en el eje Forma, espacio y medida de los Planes y Programas para educación básica. El contenido de las actividades se basó en las etapas propuestas en la Unidad cognitiva de los teoremas. Para el análisis y la interpretación de los datos el investigador debido a que se trató de un estudio de casos se emplearon dos estrategias, la *interpretación directa* de ejemplos individuales y la otra es la *suma de ejemplos* hasta poder decir algo sobre éstos como conjunto o clase. Se analizaron los argumentos escritos de las hojas de trabajo y los verbales recolectados en audios. En este capítulo también se encuentran la descripción puntual de cada pregunta, la articulación entre preguntas y actividades, así como las respuestas esperadas.

El capítulo séptimo muestra los resultados primero los obtenidos del diagnóstico con los significados más recurrentes de los alumnos a respuestas sobre lo que se entiende por congruencia y semejanza. Enseguida se exponen los signos evocados cuando se usó el artefacto, en este caso el software GeoGebra para la resolución de las actividades, la otra parte de los resultados muestra ejemplos sobre algunos procesos matemáticos como generalización, particularización, reificación, condensación y descomposición. Para cada proceso se hace una breve descripción del contexto de la actividad y de las razones por las que se le clasificó en determinado proceso.

Las conclusiones de esta investigación son explicitadas en el capítulo octavo, el cual se seccionó en dos partes, la que refiere a las aportaciones de esta investigación en términos de responder a las interrogantes y objetivos planteados, de reflexionar sobre las áreas de oportunidad que se presentaron en la implementación de la investigación. La segunda parte de las conclusiones propone cuestionamientos que se deben seguir explorando a partir de lo obtenido en este trabajo.

Los capítulos noveno y décimo incluyen los trabajos consultados para el planteamiento y desarrollo de esta investigación, así como los cuestionarios sobre la exploración de contenidos (diagnóstico) y las actividades tal y como fueron presentadas para trabajar con los alumnos.

1.1 Planteamiento del problema

Las aportaciones de Samper (2013; 2014), Larios (2006), González y Larios (2012) y Mejía Ramos (2012) sobre la incorporación de la demostración en los escenarios escolares, da cuenta de la importancia de generar mecanismos para la valoración del aprendizaje de esta. La problemática que pretende abordar esta investigación se enfoca en conocer aquellos procesos matemáticos que el alumno pone en acción al momento de demostrar, con el empleo de herramientas tecnológicas como mediadoras; entonces la interrogante central se plantea como:

¿Cuáles son los procesos matemáticos que desarrolla un alumno de educación secundaria para aprender a demostrar con el uso de herramientas tecnológicas?

De esa cuestión se desprenden otras preguntas que complementan el estudio:

¿Cómo evaluar los procesos matemáticos para saber si un alumno de educación secundaria aprendió a demostrar?

¿Qué elementos se deben considerar al trabajar con la herramienta tecnológica de manera que ésta sea usada por los alumnos de educación básica como instrumento que les permita llegar a la demostración?

1.2 Justificación

El Plan de Estudios 2011 enfatiza la generación de *ambientes de aprendizaje* donde los aprendizajes esperados en el estudiante, el contexto y los materiales educativos impresos, audiovisuales y digitales implementados por el profesor, cobren relevancia para la creación efectiva de un ambiente de aprendizaje. Las TIC en educación básica apoyan el desarrollo de competencias para la vida y constituyen entonces un medio para favorecer la inserción de los alumnos a la sociedad del conocimiento. Ahora bien, si en los ambientes de aprendizaje el profesor debe usar herramientas digitales y dado que en matemáticas el uso de distintos recursos como calculadoras, hojas de cálculo, procesadores de texto, etc., posibilita de acuerdo con Dick y Hollebrands (2001) la exploración y observación de ideas matemáticas, el planteamiento y la validación de conjeturas, conviene hacer una conjunción de elementos de manera que se favorezca una de las competencias matemáticas que se deben desarrollar en educación básica.

El razonamiento humano puede ser desglosado en tres componentes básicos, la información disponible, el proceso cognitivo llevado a cabo y la generación de inferencias (Kurtz, Gentner y Gunn, 1999). Existen diferentes formas de razonamiento cuyos objetivos dependen del espacio donde tengan lugar, en la clase de matemáticas, en la calle y en la matemática profesional (Carrillo et al, 2016). En el contexto escolar el razonamiento ha de contribuir a desarrollar en los alumnos formas que les permitan analizar, reflexionar, argumentar y tomar decisiones. El razonamiento matemático entonces intrinca procesos para la comprensión del mundo (Mason, Burton y Stacey, 2013).

El razonamiento comprende conceptos encaminados a demostrar algo o a persuadir a otro (Ibañes y Ortega, 2004). Las relaciones entre los conceptos pueden ser de tipo abductivo, inductivo y deductivo. En el caso del razonamiento abductivo la conclusión se infiere a modo de conjetura sin haberse relacionado ni identificado con los datos. Usualmente este tipo de razonamiento se manifiesta en las primeras edades de educación primaria (Carrillo et al, 2016). El razonamiento inductivo alude a la obtención de la conclusión a partir de casos particulares y finalmente, el razonamiento deductivo la conclusión se obtiene mediante la aplicación a los datos de un principio o conocimiento.

El *validar procedimientos y resultados* es la competencia que resulta trascendental analizar con el uso de la tecnología como un medio que ayude a los alumnos a plantear argumentos a su alcance explicar y justificar sus procedimientos y sus resultados de manera que se vayan orientando al razonamiento deductivo y a la demostración formal (SEP, 2011). Sin embargo, como se ha evidenciado en los antecedentes de este trabajo, se soslaya por parte del profesor el estudio de la demostración en la escuela, por considerarla difícil e inalcanzable. Tampoco hay una orientación por parte de las autoridades educativas sobre cómo se entienden los conceptos de *demostración formal* para educación básica, así como qué conocimientos implica el generar *argumentos a su alcance.*

Algunos trabajos como la tesis doctoral de Camacho (2013) constató que los alumnos de niveles superior y posgrado de carreras que tienen alto contenido matemático, manifestaron serios problemas de *transición* a las demostraciones, por el rigor y formalidad que son necesarios en éstas. Aunque los alumnos poseen un buen manejo algorítmico de la matemática, es sólo una condición necesaria para que pueda leer y escribir una demostración. Además, expresa la carencia en los alumnos de habilidades *lógico metodológicas* para la demostración. Por ello, es importante que se empiece a trabajar en el razonamiento deductivo desde niveles escolares básicos.

El trabajo de Mejía Ramos (2012) sobre plantear un modelo de evaluación para la comprensión de pruebas en estudiantes de nivel superior, constituye un avance importante, ya que hace una propuesta, aún no experimentada, sobre aquellos elementos que den cuenta de que un alumno de nivel superior comprendió o no la demostración. Las investigaciones de Camacho y Mejía-Ramos están enfocadas a trabajar demostraciones en niveles superiores, sin embargo, es importante que se indague en lo que sucede en la escolaridad básica.

Los estudios que evidencia lo complejo que es la enseñanza y aprendizaje de la demostración, son los de Larios (2006), González y Larios (2012), quienes en ambientes de geometría dinámica proponen una serie de actividades, para estudiantes de nivel medio básico y medio superior, donde estos a través de un *software* específico en geometría dinámica (*Cabri)* y siguiendo la idea de la unidad cognitiva de los teoremas, sean capaces de elaborar y validar conjeturas, con el propósito de encauzarlos a la demostración.

Planteado lo anterior este trabajo ancla su relevancia en la caracterización que se propone al término *demostración matemática escolar* para educación secundaria con base en las posturas que hay sobre cómo debe ser concebida e implementada la demostración en las escuelas de educación media superior y superior. Además, se plantearán descriptores para los procesos matemáticos involucrados en la validación del conocimiento matemático del alumno como una herramienta que sea utilizada por el profesor en servicio para ayudar a los alumnos a avanzar en los procesos matemáticos. Por último y sin que eso le reste importancia, está el uso del Software de Geometría Dinámica (SGD) como una herramienta que viabiliza la observación de propiedades geométricas para el planteo y validación de conjeturas.

II. ANTECEDENTES

Como ya se mencionó, el razonamiento depende del contexto en el que tenga lugar, se razona de manera diferente en la matemática profesional, en la cotidianidad y en la matemática escolar (Carrillo et al, 2018). Enseguida se enuncian diversas posturas que expresan la diferencia entre una demostración en el seno de la matemática, una demostración realizada por alumnos y la incursión del software a los escenarios escolares como una herramienta que ofrece distintas representaciones de los objetos matemáticos.

2.1 La demostración en matemáticas

Se hará una breve descripción de algunos datos históricos importantes alrededor de lo que significa demostrar en matemáticas, desde la perspectiva de los matemáticos. La necesidad de probar el conocimiento para uno mismo o para los demás tiene sus orígenes hace cientos de años. La axiomática clásica ancla sus raíces en los *Elementos de Euclides*, ese mismo esquema propuesto por Euclides está en el libro sobre mecánica de Newton (Von, 1960, p. 115). Las pruebas, concluye Rav (1999) son el corazón de las matemáticas.

Arsac (2007) dice que el patrón de prueba que se estableció en los *Elementos de Euclides* todavía hasta el siglo XIX siguió como una tradición que no aceptaba otras formas diferentes de probar, lo que contribuyó a privilegiar el método euclidiano para la enseñanza y aprendizaje de las pruebas matemáticas. Probar en matemáticas generalmente apunta a dos dimensiones, una que se le llama *formal* en donde la prueba matemática es caracterizada por su forma como un texto con sus respectivas y precisas reglas. La otra dimensión de la prueba es la *social o cultural* donde la prueba es caracterizada como el procedimiento para validar usado por matemáticos.

La prueba menciona Arsac (2007) aparece en todas las tradiciones o culturas matemáticas. No se sabe cuándo o dónde exactamente se hizo la distinción entre inferencia inductiva y prueba deductiva, pero fue reconocida por los matemáticos griegos, más tarde los egipcios y los babilónicos aceptan la necesidad de una prueba deductiva que debe formar parte de los cálculos de la vida diaria.

La naturaleza de la verdad matemática puede entenderse mediante un análisis del método por el cual se establece (Hempel, 1960, p. 23), ese método es el de la demostración matemática siendo la deducción lógica el único método de la demostración matemática, es una técnica de análisis conceptual: explicita las afirmaciones ocultas en un conjunto dado de premisas y te hace darte cuenta de aquello que no te has comprometido a aceptar al admitir aquellas premisas.

A manera de resumen se puede decir que la validez de la matemática no descansa en hechos físicos y debe ser apoyada por el razonamiento riguroso de la axiomática y a pesar de que no hay datos precisos de cuándo se empezó con la demostración como una práctica, continúa siendo una rutina dentro de la comunidad matemática para aportar conocimiento.

2.2 La demostración en las aulas

La introducción de la demostración en la enseñanza se ha cuestionado porque se argumenta, por ejemplo, que no puede construirse geometría alguna a partir de las escasas y básicas proposiciones formuladas como axiomas en los textos didácticos (Von, 1960, p. 112). Los axiomas que se encuentran en los textos de la enseñanza media, su formulación está basada en costumbres lingüísticas inciertas, imprecisas, e inadecuadas, por tanto, su enseñanza es un fracaso. A raíz del poco éxito que ha tenido en las aulas el procedimiento axiomático, ha sido criticado por ser “demasiado formal” porque apela excesivamente a la poca intuición y está así, “alejado de la vida” (Von, 1960). Pero hay también acuerdos a favor de la sencilla axiomática de la enseñanza media como útil para entrenar al estudiante en el método de la deducción lógica.

En este sentido la matemática escolar tiene el objetivo de conjuntar conocimientos matemáticos que son justamente elaborados en el contexto escolar, por lo que la matemática se reconstruye o transpone de la matemática como ciencia. La transposición que se hace al contexto escolar tiene la finalidad de enculturar matemáticamente (Carrillo et al, 2018).

Las creencias de los profesores respecto a la demostración son reportadas por Acuña (2012) quien señala que la demostración es considerada como un tema extremadamente difícil, pero también el profesor le da un valor enérgico debido a su importancia en la disciplina de la matemática. Las ideas anteriores se pueden presentar en determinados niveles escolares como la educación básica y media superior, que evaden la enseñanza de la demostración. Así que ante la importancia de desarrollar razonamiento en los estudiantes se habla de la urgencia de implementar en las aulas la demostración y aquí se muestran algunas propuestas didácticas que apuntan a atender esos vacíos que hay en cuanto a la enseñanza de la demostración.

Balacheff (2008) reconoce las divergencias entre los campos, es decir lo que significa una prueba en matemáticas y lo que significa en el campo que tiene que ver con la enseñanza de la prueba. *Probar* dice Balacheff depende del contexto donde se esté realizando la prueba y del contenido. Hoy en día ya es posible responder afirmativamente a la pregunta sobre la enseñanza de la prueba, aunque el camino para hacerlo todavía no sea tan claro. El diagrama (*Figura 1*) fue una propuesta de Balacheff donde tres elementos (la validación, la naturaleza del conocimiento y la comunicación) están relacionados, no puede existir uno sin los otros dos. Trató de representar la complejidad de los estudiantes cuando intentan entender una prueba, pero no tomó en cuenta que el "control" era el concepto clave para la solución de un problema y para llegar a la demostración.

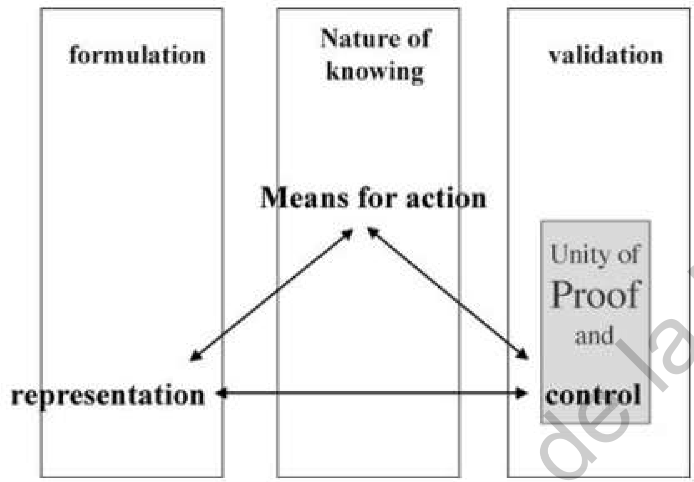


Figura 1. Propuesta de Balacheff sobre el entendimiento de la prueba en los estudiantes. Tomado de Balacheff, 2008, p. 511.

Las pretensiones por incursionar la demostración en la escuela se pueden encontrar en los trabajos de Perry, Samper, Camargo y Molina (2013) quienes desde una perspectiva sociocultural amplían la concepción de demostración y mediante estrategias metodológicas intentan favorecer la *actividad demostrativa,* de contextos escolares. La *actividad demostrativa* en el ámbito educativo tiene dos funciones importantes desde el punto de vista de los autores: promueve la comprensión del contenido matemático específico y posibilita la justificación correspondiente (Lara & Samper, 2014).

La actividad demostrativa entonces se compone de dos procesos que no son independientes. El proceso de *conjeturación* donde se establecen conjeturas en forma condicional (sí-entonces), producto de la exploración empírica o teórica, con la que se produce la comprensión. Las acciones que intervienen en el proceso de conjeturación, son: detectar y verificar propiedades (visualización, exploración y verificación), formular y corroborar conjeturas.

En el segundo proceso llamado *justificación* se construye una argumentación deductiva que valide la conjetura formulada en el proceso anterior (conjeturación), pero dicha argumentación es según el nivel escolar. Las acciones que intervienen en este proceso son: selección de elementos teóricos o empíricos, construir argumentos y formulación de la justificación.

Yang y Lin (2007) proponen un modelo para comprender pruebas en geometría, está compuesto por cinco facetas graduales (*Figura 2*). Los conocimientos básicos se refieren a la parte epistémica, el estado lógico tiene que ver con la discriminación de elementos dados, cambiándolos y aplicando propiedades. En resumen, es la identificación y crítica de las ideas principales, conceptos o argumentos coherentes de una prueba. Entendiendo el alumno el contenido y el significado de los argumentos e integrándolos todos dentro de la prueba hay dos facetas más a las que debe llegar, la generalización y la aplicación. Para terminar la faceta de encapsulación es una situación que no tiene fin porque el alumno ya se apropió de todos los elementos necesarios para poder entender una prueba. El modelo ilustrado en la figura dos fue propuesto por Yang y Lin (2007) y complementado por Mejía-Ramos (2012) quien plantea cuestionamientos específicos para cada faceta, de manera que se evidencie el avance.

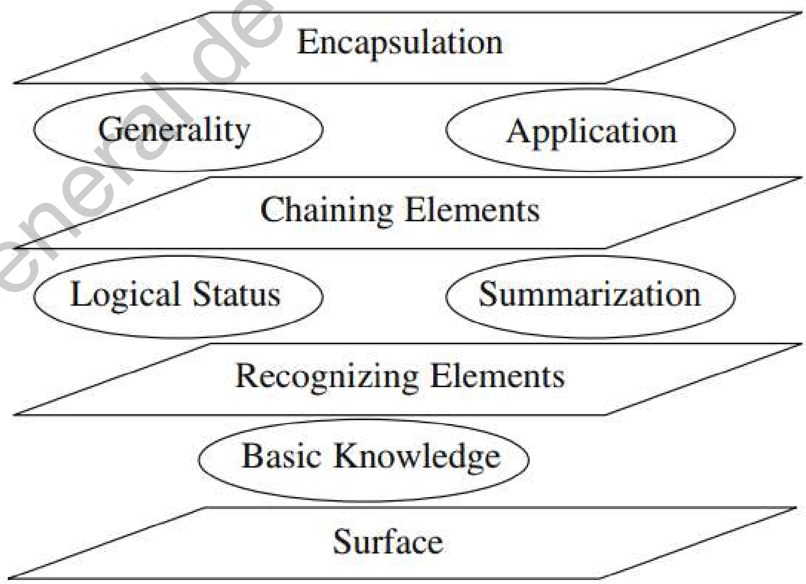


Figura 2. Propuesta para entender las pruebas en Geometría. Tomado de Yang y Lin, 2007, p. 71.

La continuidad entre la producción de una conjetura y la construcción posible de la prueba es sugerida por Boero y Garuti (1998) donde el avance a la prueba es cíclico, dividido en dos fases, la producción de conjeturas y la construcción de las pruebas, esas etapas incluyen explorar, conjeturar, explorar y reorganizar una nueva demostración.

Otra propuesta de elementos a considerar en el salón de clases cuando se promueven procesos como la argumentación para llegar a la demostración los menciona González y Larios (2005). Su idea se describe más adelante y es la que se toma como referencia para establecer cómo son los argumentos que generan los alumnos de secundaria.

El nivel educativo que ocupa esta investigación es el nivel básico, específicamente la etapa denominada como *educación secundaria,* se describirá lo que actualmente se debe enseñar en las aulas para promover el razonamiento matemático. Las recomendaciones de los Planes de Estudio vigentes para educación básica señalan la importancia de avanzar hacia el razonamiento deductivo vía la argumentación y validación de procedimientos y resultados, así que es preciso mencionar en dónde aparecen tales recomendaciones. La organización del programa de estudios de educación básica para matemáticas comprende cinco vertientes importantes (ver *Figura 3*) dentro de los propósitos generales se pretende desarrollar en los niños y adolescentes formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos (Secretaría de Educación Pública, SEP, 2011).

Particularizando los propósitos generales al área de matemáticas los alumnos de educación secundaria en esta etapa han de justificar propiedades de figuras y cuerpos geométricos, justificar fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de diferentes figuras y cuerpos. De los propósitos del área de matemáticas hay que llegar a aquellos aprendizajes que los alumnos deben desarrollar en toda la educación básica. Los estándares de matemáticas son el conjunto de aprendizajes organizados en cuatro bloques, avanzando del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados, así como el ampliar y profundizar los conocimientos para favorecer la comprensión y el uso eficiente de herramientas matemáticas.

Los propósitos generales y los particulares para matemáticas, son apoyados por una serie de competencias. Interesa describir la concerniente a la validación de procedimientos y resultados, la cual implica que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal, es una de las competencias a desarrollarse en los alumnos durante la educación básica.

Finalmente, para los aprendizajes esperados el estudio de la geometría implica aspectos esenciales como la exploración de características y propiedades de las figuras y cuerpos geométricos, la generación de condiciones para un trabajo con propiedades deductivas y las justificaciones de fórmulas que se utilizan para el cálculo geométrico.

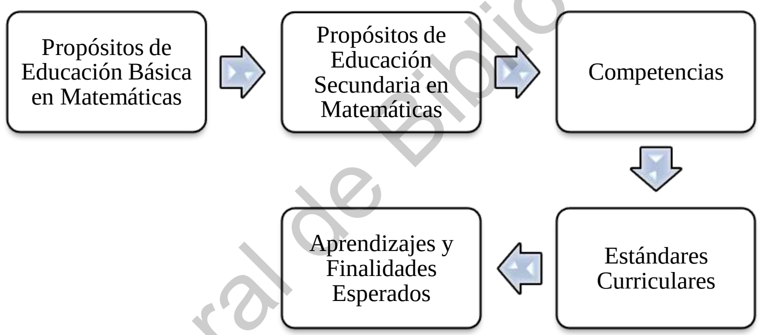


Figura 3. Esquema de organización del Programa de Estudios de Educación Básica para Matemáticas. Elaboración propia.

A manera de resumen sobre este apartado, la demostración matemática escolar sucede en los escenarios escolares y aunque tiene varios enfoques como procesos de demostración, funciones de la demostración, niveles de demostración, demostración en el aula, etcétera, se requiere de un trabajo paralelo al de la enseñanza de la argumentación (Carrillo et al, 2016), de manera que el alumno con el uso de ciertas definiciones y propiedades matemáticas el alumno de nivel secundaria genere explicaciones que lo convenzan y a otros sobre la veracidad de la información que está presentado.

2.3La enseñanza de la geometría con software

La incursión de la tecnología computacional a los escenarios escolares de acuerdo con Rojano (2014) se encuentran en los años setentas. Los estudios empíricos sobre el lenguaje de programación *Logo* revelaron que conceptos matemáticos específicos eran comprensibles más fácilmente en ese ambiente. Por ello, en los años posteriores se desarrollaron programas que apoyaran la enseñanza de las matemáticas, es decir usar la tecnología ajustada al currículo oficial. Emergen entonces los programas de geometría dinámica como Cabri-Géometre y Goemeter's Skechpad que apoyaban la enseñanza de la geometría euclidiana.

La *Geometría Dinámica* es un término que refiere a la Geometría estudiada con herramientas computacionales, donde el usuario puede realizar construcciones geométricas y manipularlas con el ratón mediante el arrastre para modificar su forma, sin perder las propiedades geométricas de los objetos involucrados (Larios,2006). Con las anteriores características el usuario tiene acceso exploratorio y experimental a la geometría (Jones, Mackrell y Stevenson (2010), por ello la geometría dinámica se convierte en una herramienta didáctica muy poderosa.

Los ambientes de geometría dinámica permiten la precisión en las construcciones y mediciones, así como la capacidad de visualización de relaciones y propiedades geométricas. También la posibilidad de simulación y la creación de *micromundos*, que, según Papert, 1982 (citado en Larios & González, 2012) son aquellos espacios interactivos de aprendizaje basados en computadora, donde el alumno se convierte en constructor activo de su propio aprendizaje. El *micromundo,* posee una serie de componentes que interactúan entre sí, dentro del campo de conocimiento:

- Componente técnico, que es la herramienta o *software* que se va a utilizar en el experimento de enseñanza.
- Componente pedagógico, incluye la planeación y las actividades que realizará el profesor, su función es dotar de sentido al uso del componente técnico, ya que estructura la investigación y la exploración de los conceptos a estudiar.

- Componente contextual, corresponde al ambiente social donde se llevará a cabo el *micromundo*.
- Componente del alumno, refiere al sujeto que aprende, visto desde lo cognitivo y lo afectivo

El uso de un software de geometría dinámica puede servir para hacer conjeturas sobre objetos geométricos, específicamente estos pueden jugar el rol de mediador en la transición entre la argumentación y la prueba, a través de la función de "arrastre", que abre nuevas rutas a los conocimientos teóricos dentro de un entorno concreto que sea significativo para los estudiantes (Hanna, 2009). Larios (2012) destaca que dentro de las habilidades que los alumnos pueden desarrollar en ambientes de geometría dinámica están las de observación de propiedades, la visualización de los objetos geométricos y de razonamiento deductivo, elementos que contribuyen a la demostración.

Con la implementación de la tecnología en las aulas de matemáticas y los estudios sobre ellas surgieron nuevas dificultades, por lo que se requirió de otros enfoques teóricos que ayudaran a explicar dichas problemáticas. Estos son, la teoría de la génesis instrumental, la teoría de la mediación semiótica en la clase de matemáticas y la teoría del construccionismo Rojano (2014). Se describirán elementos de la génesis instrumental y la mediación semiótica ya que se espera que los alumnos en un salón de clases de matemáticas mediante el uso de signos (mediación semiótica) se apropien del artefacto o software para transformarlo en instrumento que les permita resolver las actividades propuestas para el aprendizaje (génesis instrumental).

Diversas investigaciones han reportado cómo se convierten en herramientas los artefactos, específicamente el software que funciona como mediador semiótico para el aprendizaje de objetos matemático. Rabardel (2002) por ejemplo, menciona las funciones de un instrumento como entidad intermediaria en dos elementos, el sujeto usuario del instrumento y el objeto de la acción. Dos tipos de mediación se identifican: la mediación del objeto a sujeto que es descrita como una mediación epistémica en donde el instrumento es un medio que permite el conocimiento del objeto. La mediación pragmática se da del sujeto al objeto, donde el instrumento es un medio que propicia una acción de transformación directa sobre el objeto.

La interacción del sujeto en ambientes de enseñanza computarizada, a partir de la postura de Rabardel sobre el artefacto como un objeto y el instrumento como un constructo psicológico Trouche, lo retoma para proponer la denominada "génesis instrumental" como una combinación de procesos entre la instrumentación y la instrumentalización.

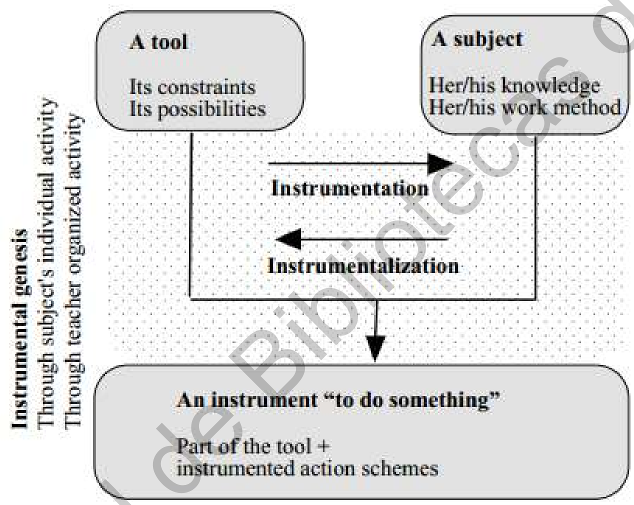


Figura 4. Génesis instrumental como la combinación de dos procesos. Tomado de Trouche 2004, p.289.

Es importante entender cómo se dan las actividades con artefactos para que así puedan llegar a ser instrumentos en los alumnos y mediante qué recursos es posible analizar esos procesos de avance en los estudiantes para apropiarse del artefacto. Por ello se describe la *génesis instrumental* y la manifestación de signos (gestos, producciones verbales, producciones escritas, un dibujo, etc.) en las tareas planteadas con artefactos a los alumnos como una forma de acceder al aprendizaje de éstos. Los signos son culturalmente determinados, es decir influye el contexto, el bagaje de información personal y social, en términos de Godino (2003) serían los significados personales e institucionales.

Las actividades con artefactos son descritas por Rabardel (2002) y tienen sus orígenes en la idea de la internalización planteada por Vygotsky (1979). Rabardel llama al avance de un individuo del artefacto al instrumento como *génesis instrumental*. Los elementos de la génesis instrumental son: el *sujeto*, alumno, operador trabajador, etc., el *artefacto* que es considerado como un objeto material o simbólico, el *instrumento* es la entidad intermediaria entre dos entidades, el sujeto y el objeto de la acción.

La utilización de un artefacto está ligada a esquemas, que Rabardel los denomina *esquemas de utilización* que pertenecen a dos dimensiones de la actividad, las que tienen que ver con las propiedades específicas del artefacto y las orientadas hacía el objeto de la actividad donde el artefacto es el medio de funcionamiento. *Esquemas de uso*, se caracterizan por estar orientados hacía tareas secundarias correspondientes a acciones y actividades específicas directamente relacionadas al artefacto. *Esquemas de acción instrumental*, tienen que ver con la actividad del sujeto hacía el artefacto dirigida a obtener una meta. *Esquemas de acción colectiva*, cuando un grupo trabaja con un mismo instrumento generan acciones individuales que luego integran como una contribución al logro de objetivos comunes.

La génesis instrumental es desarrollada por el sujeto en dos dimensiones, la instrumentalización (hacía el artefacto) y la instrumentación (hacía el sujeto). La instrumentalización está dirigida hacia el artefacto, y es la evolución de sus componentes al instrumento, como la selección, reagrupación, producción, institución de funciones, catacresis, atribución de propiedades, transformación del artefacto (estructura, funcionamiento, etc.,) que prolonga las creaciones y realizaciones de artefactos cuyos límites son difíciles de determinar debido a este proceso de transformación. La instrumentación es el proceso relativo a la emergencia y evolución de esquema de utilización y de acción instrumental: su constitución, funcionamiento y evolución por adaptación, coordinación, combinación, inclusión y asimilación recíproca, asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos.

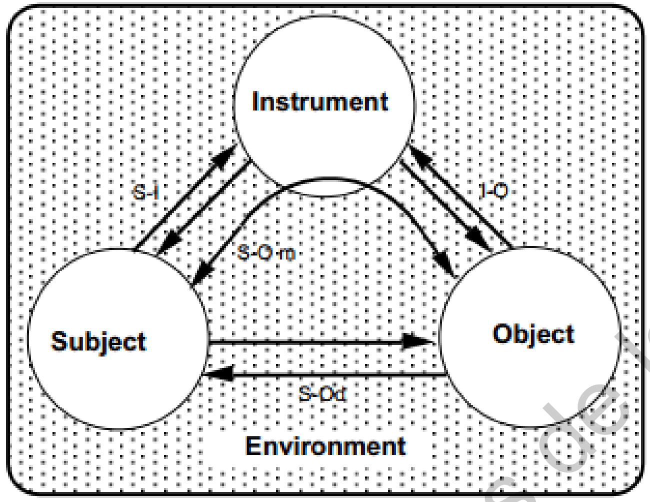


Figura 5. Modelo de la naturaleza triádica de actividades mediadas con instrumentos. Tomado de Rabardel, 2002, p. 45.

Para ilustrar la transición del artefacto al instrumento, Rabardel propone una interacción tríadica entre sujeto, objeto e instrumento (*Figura 5*). Esa interacción desde la perspectiva educativa se complementa introduciendo otros elementos (

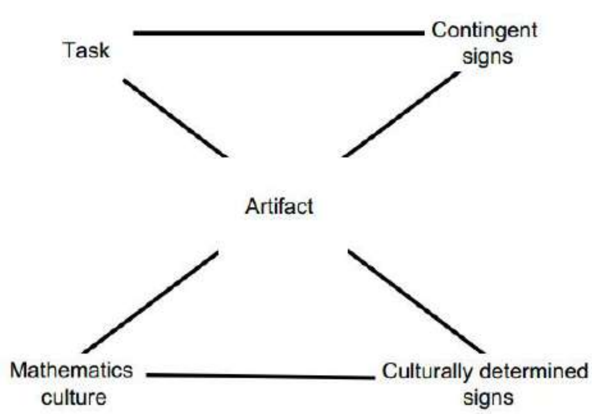


Figura 6) que determinan la génesis instrumental en el salón de clases (Bartolini & Mariotti, 2008, p. 753). El resultado de las actividades con artefactos son los signos, los signos representan la relación entre artefacto y tarea, son socialmente elaborados, además tienen influencias personales, combinadas con el propio bagaje matemático del individuo que está usando el artefacto.

Figura 6. Polisemia de un artefacto. Tomado de Bartolini & Mariotti, 2008, p. 753.

Insertar un mediador semiótico en el salón de clases requiere de una serie de características que las actividades a desarrollar con dicho artefacto (software) potencialicen los procesos semióticos y permitan el análisis de éstos, Bartolini & Mariotti (2008) lo denomina "ciclo didáctico" donde describe las etapas por las que se pretende pase un alumno cuando el profesor lo afronta a actividades con artefactos: los estudiantes se enfrentan a tareas que deben realizarse con el artefacto, producción individual de signos: es la producción posterior al trabajo con el artefacto, pueden ser dibujos, escritos, anotaciones, elaboraciones de gráficas, etc., producción colectiva de signos: juega un papel crucial puesto que es colectiva, las producciones puedes ser mímicas, dibujos hechos en equipo, conclusiones elaboradas también en equipo. La emergencia de signos o la evolución de éstos en la etapa de producción colectiva debe estar fuertemente apoyada por la guía del profesor.

El surgimiento de distintos tipos de signos en el ciclo didáctico lleva a una clasificación que no tiene otro propósito que ayudar a su análisis, su tránsito de un significado personal a uno en el contexto matemático. La *Figura 7*, muestra las relaciones que se establecen entre los diferentes tipos de signos que aparecen en el salón de clases cuando se usa un artefacto como mediador semiótico para abordar contenidos matemáticos. Tres principales categorías es posible identificar, los signos del artefacto: tienen que ver con el contexto de uso del artefacto generalmente asociados con acciones realizadas con el artefacto o partes de este; signos matemáticos, refieren al contexto matemático como proposiciones, definiciones, etc., y son expresados en el salón de clases. Finalmente están los signos pivote que son de carácter polisémico, la particularidad de este tipo de signos es que refieren tanto al lenguaje natural como al del artefacto, su dualidad es usada para pasar del contexto del artefacto al contexto matemático.

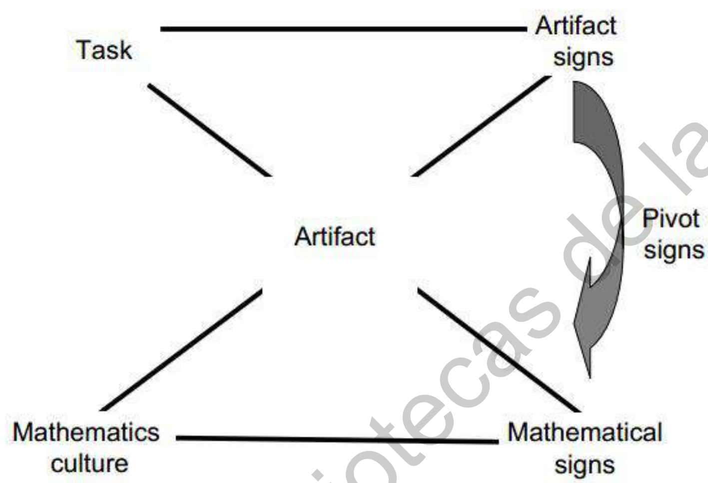


Figura 7. Mediación semiótica en el contexto escolar al abordar contenidos matemáticos con ayuda de un artefacto. Tomado de Bartolini y Mariotti, 2008, p.257.

2.4 Definición de términos

Con la intención de ofrecer una orientación inicial sobre los significados que se emplearán en esta investigación, se enlistan los siguientes constructos específicos, las definiciones son caracterizaciones que se realizaron a partir de la revisión de trabajos como los de Piaget, las nociones propuestas por el EOS, la postura del procesamiento de la información, entre otras:

Esquema: representación que activa acciones de todo tipo, se asimila, repite y generaliza.

Proceso: secuencia de prácticas.

Práctica: toda actuación o expresión verbal, gráfica, etc., que un sujeto realiza para resolver problemas matemáticos, comunicar a alguien más la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contexto y problemas.

Objeto matemático: elemento abstracto como número, figura geométrica, conjunto, función, etc.

Proceso matemático: secuencia de acciones activada o desarrollada para conseguir un objetivo, una respuesta a una tarea propuesta.

Argumento: expresión verbal o escrita que incluye elementos matemáticos cuya función es persuadirse a sí mismo y a los demás.

Institución: la constituyen los sujetos con prácticas socialmente compartidas, por ejemplo, reglas en un aula, definiciones de los objetos matemáticos y tratamiento de ellos, entre otros.

Software de Geometría Dinámica (SGD): programas cuyas características permiten crear construcciones geométricas e interactuar con ellas, además se pueden modificar condiciones del diseño para observar y analizar qué sucede.

GeoGebra: software de matemáticas dinámicas de código abierto para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra y hoja de cálculo de forma dinámica.

Demostración matemática escolar: Validación del conocimiento matemático, mediante argumentos explicativos que pretenden justificar una conjetura.

III. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Se ha mencionado reiteradamente la necesidad de enseñar la demostración en la escuela básica, por las bondades que puede traer no sólo en el campo de la matemática, sino en la actividad cotidiana de los sujetos, además si se incluye una herramienta digital que funcione como mediador semiótico para la creación de conjeturas, potencia en los alumnos procesos como la visualización, la argumentación, entre otras. Sin embargo, es preciso aclarar que dada la complejidad para definir lo que es una demostración, este trabajo la caracterizará. Se asume una demostración matemática escolar como diferente de una demostración matemática, la primera es entendida como aquella que se realiza en el salón de clases y la segunda es la que ejecutan los matemáticos. Entonces la demostración matemática escolar se concibe en términos de una construcción social que se da en el aula, donde los alumnos explican mediante argumentos válidos, usando mayormente el lenguaje matemático, la certeza de sus conjeturas.

3.1 El enfoque ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemáticos

El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemáticos [EOS] es un modelo teórico compuesto por cinco niveles que pretenden describir, explicar y valorar los procesos de instrucción matemática (Font, Planas y Godino, 2010). El modelo tiene herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que ayuda a responder ¿qué ha sucedido y por qué?

Los cinco niveles para el proceso de instrucción se describen a continuación:

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4. Identificación del sistema de normas y metanormas.
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

El primer nivel pretende estudiar las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de estudio matemático, tomando en cuenta tanto al agente que realiza la práctica, como el contexto en que se ejecuta dicha práctica. Dado que el agente realiza acciones para la resolución de situaciones problema, hay que considerar otros aspectos como valores, intenciones, objetos y procesos matemáticos.

El segundo nivel de análisis se enfoca en los objetos y procesos que intervienen en las prácticas, así como los que emergen de ellas. Este nivel de análisis describe la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos.

El tercer nivel implica el análisis didáctico con orientación a describir de los patrones de interacción, los conflictos y su resolución, así como la relación con los aprendizajes de los estudiantes.

El cuarto nivel de análisis estudia la relación de normas y metanormas que condicionan los procesos de instrucción, en este nivel hay que tomar en cuenta los fenómenos de interacción social que suceden en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El quinto nivel se centra en la valoración de la idoneidad didáctica de los niveles previos, con la intencionalidad de identificar mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

Se toma en cuenta lo anterior y es preciso definir ciertos conceptos que intervienen en los niveles de análisis y que servirán a esta investigación. La noción de *práctica*, en el EOS, es definida como toda actuación o expresión verbal, gráfica, etc., que realiza un sujeto para resolver problemas matemáticos, comunicar a alguien más la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. En las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales como símbolos, gráficos, etc., y objetos abstractos que son representados en forma textual, oral, gráfica o gestual, así que las prácticas de una persona es posible observarlas.

La noción de *institución* está constituida por los sujetos involucrados en una misma clase de situaciones problemáticas, dado que las prácticas son socialmente compartidas, las reglas y modos de funcionamiento están ligados a la institución. Es posible identificar a la institución escolar donde los significados de los objetos matemáticos se encuentran en los libros de texto y en las prácticas de los maestros, mientras que la institución matemática implica que el significado está en explorar las prácticas asociadas a los problemas que le dieron origen, lo que involucra analizar el desarrollo histórico del concepto.

La noción de *conflicto semiótico*, según Godino (2003) es entendido como cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, ya sean personas o instituciones. Se habla de conflictos semióticos epistémicos si la discrepancia se produce entre significados institucionales y si la diferencia se da entre las prácticas del significado personal de un mismo sujeto se le llama conflicto semiótico cognitivo. El conflicto semiótico interaccional se presenta cuando hay disparidad entre las prácticas, ya sean discursivas u operativas de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa, alumno-alumno o alumno-profesor.

La noción de *función semiótica* según Godino (2003) permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que interviene el objeto O. La función semiótica permite formular en términos semióticos de modo general y flexible el conocimiento matemático, además de explicar en términos de conflictos semióticos las dificultades y los errores de los estudiantes.

La *configuración epistémica* es el conglomerado de objetos primarios institucionales, en una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos que pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o bien se distribuyen entre ambos.

3.2 Los procesos cognitivos en las prácticas matemáticas

Al referirse al término “proceso” se ha tomado la postura del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática [EOS] que no hace una definición general de proceso, sino que se entiende éste como una secuencia de prácticas. Entonces un proceso matemático es según Rubio (2012) lo que se puede inferir que ha generado una respuesta a una demanda dada, es una secuencia de acciones activada o desarrollada para conseguir un objetivo, es decir una respuesta (salida) ante una propuesta de una tarea (entrada). La definición de proceso en el EOS es comparable con la propuesta de aprendizaje de la teoría cognitiva de procesamiento de la información.

El [EOS] sugiere una lista de procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (Rubio, 2012), están la algoritmización, argumentación, particularización, generalización, idealización, materialización, representación, significación, reificación, descomposición, personalización, institucionalización, comunicación, enunciación y problematización. Es posible también identificar los megaprocesos donde entraría la resolución de problemas y la modelización.

Los procesos están relacionados entre sí, agrupados por familias que tienen características en común si se comparan dos a dos, pero no hay ninguna característica común a todos ellos. Los procesos duales son los ilustrados en el decágono de la Figura 8:

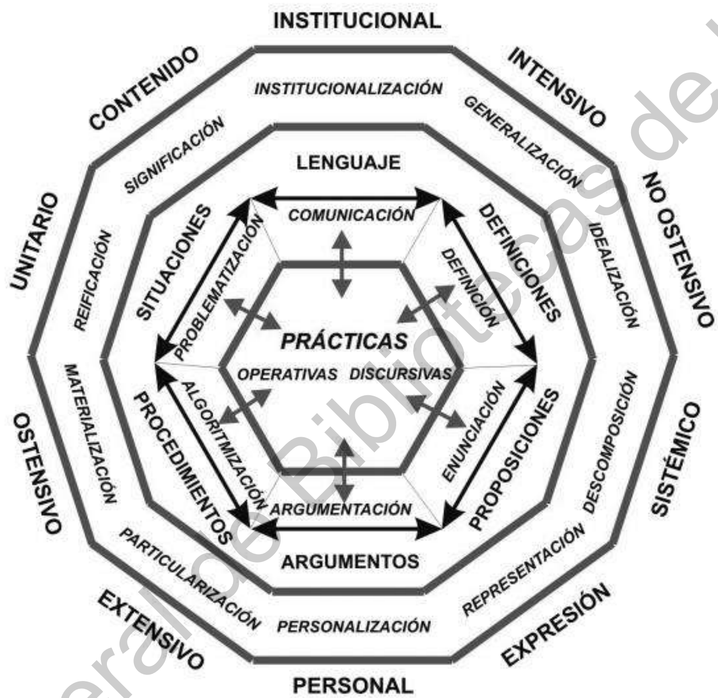


Figura 8. Procesos duales del EOS. Tomado de Font, Planas y Godino, 2010.

3.3 Las Facetas Duales del [EOS]

Los procesos se pueden relacionar con las configuraciones epistémicas, que se definen como el conglomerado de objetos primarios institucionales, en una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos que pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o bien se distribuyen entre ambos. Según el contexto se prioriza un sólo proceso y un sólo objeto primario.

Los objetos que emergen de las prácticas matemáticas son: lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, situaciones problema. Los objetos se consideran con base a las cinco dimensiones duales: personal/institucional, unitaria/sistémica, expresión/ contenido, ostensiva/no ostensiva, extensiva/intensiva. Las dimensiones duales se pueden analizar desde una perspectiva de producto- proceso.

- **Institucional- Personal:** la "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas. La "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman parte de una comunidad de prácticas.
- **Intensivo- Extensivo:** los objetos matemáticos pueden estar participando como particulares o como generales o a la inversa.
- **Ostensivo- No ostensivo:** el objeto matemático puede se puede mostrar a otro directamente o bien no se puede mostrar directamente, sólo por medio de otro que sí es posible mostrar. Los ostensivos matemáticos presentan una característica que es propia de las cosas (existencia real en el tiempo y espacio), los no ostensivos matemáticos se les considera que tienen una existencia ideal.
- **Sistémico- Unitario:** el objeto matemático participa como entidad unitaria (conocidas previamente), algunas otras veces los objetos matemáticos intervienen como sistemas de prácticas que se deben descomponer para su estudio. Esta forma de estar de los objetos matemáticos permite la interpretación de éstos como parte de otros objetos.
- **Expresión- Contenido:** los objetos matemáticos pueden estar participando como representaciones o bien como objetos representados, pueden también pasar de ser representaciones a ser objetos representados.

Se describirá brevemente la relación de los procesos duales a tratar en esta investigación con las dimensiones duales antes mencionadas.

Figura 9. Dimensión dual como procesos duales de descomposición-reificación. Adaptado de Font, Planas y Godino, 2010.

El proceso dual descomposición-reificación (*Figura 9*) tiene relación con la faceta dual sistémico-unitario, puesto que el objeto matemático algunas veces interviene como sistemas de prácticas que hay que descomponer para su comprensión. La relación con lo ostensivo y no ostensivo se da ya que el objeto matemático se puede mostrar o no a otro, es decir necesita ser representado para que sea tangible; en el momento de interiorización puede haber objetos ostensivos (por la representación tangible) o bien no ostensivos, que es la representación mental del objeto matemático. En cuanto a la faceta expresión-contenido hay relación porque se necesitan las representaciones de los objetos matemáticos para poder descomponerlos y luego reificarlos.

Figura 10. Faceta dual con proceso dual de particularización-generalización. Adaptado de Font, Planas y Godino, 2010.

El proceso dual particularización- generalización (Figura 10), tiene relación con la faceta dual extensivo- intensivo, ya que con frecuencia se hace una descomposición de los objetos matemáticos en objetos más simples e identificables. Con la faceta expresión-contenido porque el objeto matemático necesita ser representado, eso incluye también a la faceta ostensivo-no ostensivo puesto que el objeto en ocasiones *está o no* de forma tangible.

3.4 Caracterización de los procesos matemáticos-cognitivos

Debido a que la pregunta principal de este trabajo está enfocada en conocer los procesos matemáticos que desarrolla un alumno al validar su conocimiento matemático apoyados del SGD como mediador, se priorizarán ciertos procesos duales la *Particularización-Generalización* y la *Descomposición-Reificación* propuestos por el [EOS]. Estos procesos alentarían la producción de conjeturas y su justificación.

3.4. 1Procesos matemáticos de Descomposición- Reificación

De acuerdo con Sfard (1991) la formación de un concepto matemático obedece a una dualidad complementaria de procesos operacional y estructural. La concepción operacional se relaciona con los procesos, algoritmos y acciones que ocurren a nivel físico o mental. Una concepción estructural es más abstracta, más integradora y menos detallada, es isomorfa. Las concepciones estructurales reciben el apoyo de las imágenes mentales compactas e integradoras, las imágenes mentales permiten al estudiante realizar ideas abstractas más tangibles. En el proceso de la formación del concepto, las concepciones operacionales preceden a las estructurales.

Para llegar a la formación de un nuevo concepto matemático es necesario pasar de manera jerárquica y cíclica por tres momentos. La *Interiorización* se ha logrado si pueden hacerse representaciones mentales. La *Condensación* es el proceso de "extracción", la persona es capaz de pensar en un proceso dado como un todo sin sentir un impulso de entrar en detalles. La *Reificación* significa ver la nueva entidad como una integración, el objeto como un todo puede ser adquirido, es decir el cambio cualitativo manifestado por la transformación del pensamiento operacional (centrado en el proceso matemático) al pensamiento estructural (centrado en las propiedades y relaciones entre los objetos matemáticos).

Para cuestiones escolares la *reificación* debe ayudar al estudiante a pasar de lo operacional a lo estructural, de manera tal que al *descomponer* sus respuestas éstas denoten sus estructuras mentales de cómo se ha comprendido el concepto matemático. La reificación representa el nacimiento de una metáfora, que *hace* de manera sencilla la comprensión de un objeto matemático permitiendo al estudiante acceder a toda la matemática en sí.

El proceso complementario a la *reificación* es la *descomposición*, que puede ser entendida como la regresión de la reificación, es decir el proceso hacia atrás, lo que implica analizar las etapas de condensación e interiorización para poder hacer nuevas operaciones al objeto. Si el alumno es capaz de *reificar*, entonces puede *descomponer* el objeto matemático, sin embargo, sí se inicia con las etapas previas a la reificación, eso no necesariamente quiere decir que el sujeto llegará a ésta, puede ser que se estanque en la interiorización o en la condensación. Se describen las etapas para llegar a la *reificación*:

Concepción de etapa de interiorización: se logra si se el sujeto puede hacer representaciones mentales. Debido a que según Otte (2006) todo nuestro acceso a la realidad es relativo y mediado por signos, estos son los que se "ven" cuando el sujeto está en la etapa de interiorización. Los signos visibles pueden ser las palabras, los dibujos, los gráficos, etc., que representan al objeto matemático.

Concepción de etapa de condensación: la persona es capaz de pensar en un proceso dado como un todo sin sentir un impulso de entrar en detalles. La condensación permite al estudiante trabajar una secuencia como un solo proceso y relacionar su entrada y salida sin los pasos intermedios.

Reificación del concepto: significa ver la nueva entidad como una integración, el objeto como un todo puede ser adquirido y se realizan acciones sobre él.

3. 4.2 Procesos matemáticos de Particularización- Generalización

Debido a que en términos de Sfard (1991) cuando se trabaja en el proceso de condensación, este ya se perfila a la *generalización* se aborda dicho proceso. Krutestskii (1976) distingue dos niveles para generalizar un contenido matemático. La habilidad personal para ver algo general y conocido en lo que es particular y concreto (someter un caso particular a un concepto general conocido) y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado (deducir lo general a partir de casos concretos para formar un concepto). En términos escolares para un alumno una cosa es ver la posibilidad de aplicar una fórmula conocida a un caso particular y otra cosa es deducir una fórmula desconocida a partir de casos particulares.

Al considerar la propuesta de Piaget (1970) puede tomarse a la generalización como el producto de la abstracción reflexiva, por lo que el tipo de generalización depende de las construcciones mentales del individuo (Harel & Tall, 1991). Se han distinguido tres tipos de generalización de los esquemas cognitivos según Harel & Tall (1991), hay *expansiva, reconstructiva y disyuntiva*. La *expansiva* cuando el sujeto amplía el rango de aplicabilidad del esquema sin reconstruirlo (comportamiento gamma). La *reconstructiva* cuando el sujeto reconstruye un esquema existente en orden a ampliar su aplicabilidad (comportamiento beta). La generalización del esquema es *disjuntiva* cuando el sujeto construye un nuevo esquema no conectado con los existentes.

El proceso complementario a la *generalización* es la *particularización*, pues implica trabajar con objetos matemáticos individualizados, si se toma en cuenta la propuesta de Krutestskii, así como la de Harel y Tall, se habla en ambos casos que, para llegar a la *generalización,* hay que recurrir al empleo de casos particulares.

3.5 Caracterización de la demostración matemática escolar

La validación de procedimiento y resultados es una de las competencias matemáticas que se pretende desarrollar en los alumnos durante la educación básica, se espera que éstos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar procedimientos y soluciones encontradas, con argumentos a su alcance que se orienten al razonamiento deductivo y la demostración formal (SEP, 2011). Para desarrollar dicha competencia es necesario, entre otras cosas, definir lo que se entiende por *argumentos a su alcance* y *demostración formal.*

Para caracterizar la *demostración formal*, es necesario situarse en dos contextos el de la matemática formal y el de la matemática escolar. Es importante definir las características de la demostración que se da en la escuela, cómo serían los argumentos que apoyen a ésta, de tal manera que eso contribuya a tener elementos para *hacer* demostraciones matemáticas escolares.

A pesar de que Duval (2003) habla de una ruptura cognitiva entre la argumentación y la demostración, donde los alumnos de nivel básico en términos de él no lograrán hacer demostraciones, sino más bien dan explicaciones de lo que hacen. Se pretende trabajar como antecedente de la demostración matemática escolar a la argumentación donde los argumentos tendrán ciertas características por el nivel de desarrollo cognitivo de los alumnos.

Como se mencionó con anterioridad en los trabajos de González y Larios (2012) éstos han propuesto una serie de características que debieran tener los argumentos para poder alcanzar la demostración matemática en un contexto escolar, particularmente en nivel medio básico (secundaria) y medio superior (bachillerato). Así que un argumento que aspire a ser considerado para la demostración debe tener lo siguiente:

1. Hacen referencia a un hecho matemático.
2. Tienen como función primaria el convencerse a sí mismo y a otros para proporcionar una explicación del hecho matemático.
3. Las formas de comunicación utilizadas deben ser conocidas por los miembros de la comunidad escolar, o en su defecto, que puedan ser aprendidas por ellos.
4. Los enunciados utilizados son aceptados por la comunidad escolar, ya sea explícita o implícitamente.
5. La serie de argumentos está organizada con base en formas de razonamientos validas o correctas. En particular se puede considerar el razonamiento deductivo que provee argumentos deductivos.

Se tomará la propuesta pragmática de Larios (2015) sobre la construcción continua de la demostración (CCD) (Figura 11), donde en cada momento se podrán encontrar diversos esquemas de argumentación, que pueden presentarse inicialmente esquemas de tipo autoritario y paulatinamente avanzar a tener esquemas en los argumentos de los alumnos de tipo analíticos. Para introducir la demostración en los contextos escolares (secundaria y bachillerato) el autor propone iniciar con la *exploración* que ha de generar una *conjetura*, dicho conjetura ha de ser *explorada y sistematizada* (validada) para entonces llegar a la *demostración*. Como la demostración está en construcción, no es una etapa última en el sentido estricto de la palabra, sino iterativa, es decir el reinicio de ese proceso, donde la demostración puede ser nuevamente explorada para revalidarla.

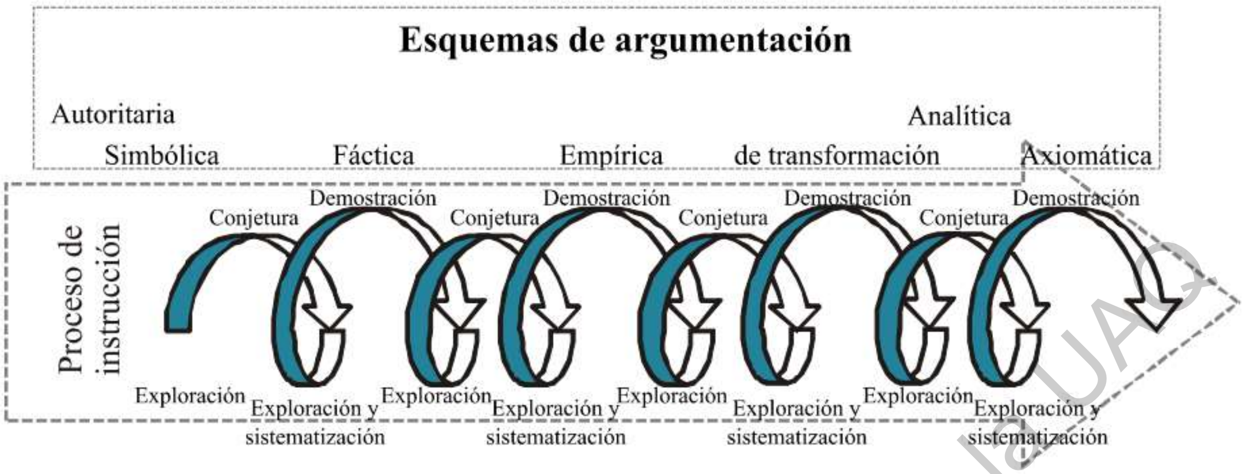


Figura 11. Propuesta de Construcción Continua de la Demostración. Tomado de Larios, 2015.

La propuesta de Larios puede ser ampliada al agregar a cada momento algunos procesos matemáticos- cognitivos como la *descomposición-reificación* y la *particularización-generalización.* La *Figura 12* representa la adhesión de los procesos matemáticos- cognitivos que pudieran encontrarse cuando el alumno va hacia la demostración. Para la etapa de exploración, por ejemplo, el o los procesos que pudieran encontrarse serían los de descomposición o de particularización, ya que los alumnos pudieran descomponer el objeto matemático para comprenderlo, necesitan una representación mental del objeto para poder avanzar a otras etapas, o bien también puede ser que particularicen a algún caso. En la elaboración de la conjetura, es posible que los alumnos reifiquen lo que descompusieron en la etapa anterior o bien que lleguen a una generalización que posteriormente será explorada y sistematizada para finalmente llegar a la demostración. Los procesos cognitivos no tienen un orden jerárquico, más bien se presentan de esa manera (como en la Figura 12) por las características de las etapas de construcción continua de la demostración.

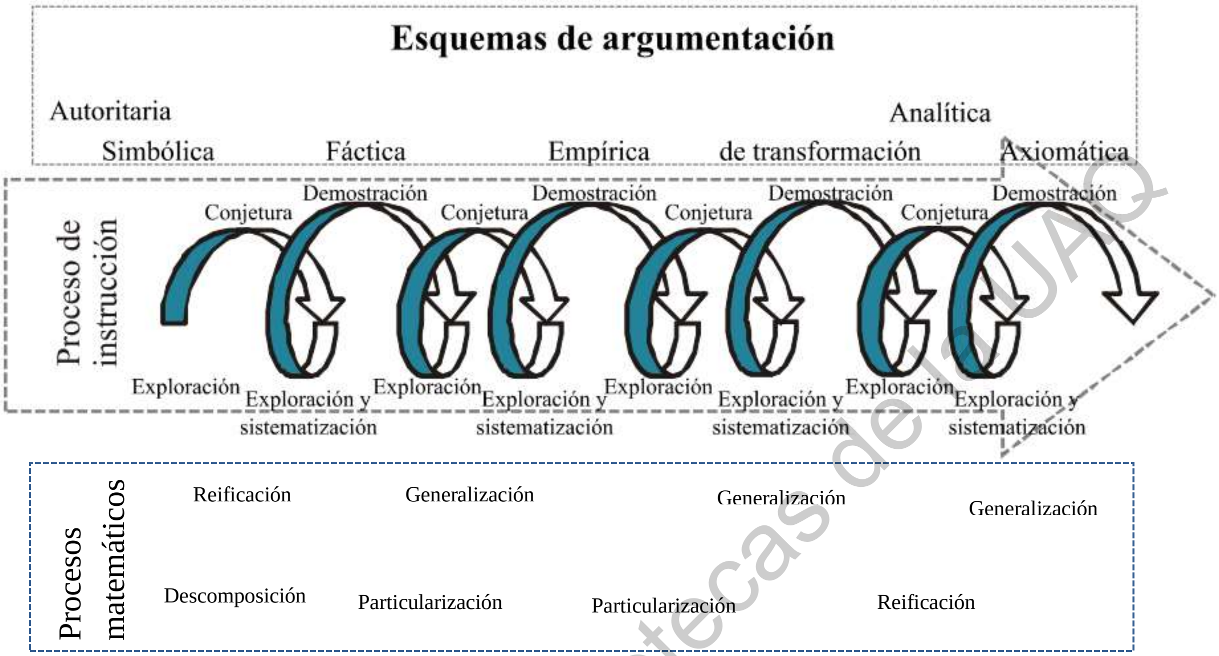


Figura 12. Propuesta ampliada de la Construcción Continua de la Demostración con procesos matemáticos. Adaptado de Larios, 2015.

2.6 Esquemas de Argumentación

El estudio realizado por Flores (2007) sobre las prácticas argumentativas y las concepciones de demostración en profesores de bachillerato le permitió hacer un rediseño de los esquemas de prueba de Harel y Sowder, ya que encontró que algunos esquemas de los profesores no estaban caracterizados por Harel y Sowder, por ejemplo el esquema de recuento fáctico, donde el profesor relata lo que hizo como una justificación a su conjetura, un esquema ritual simbólico donde el profesor emplea conceptos poco claros, que no existen o que la definición es redundante y a veces contradictoria.

Los esquemas de argumentación quedaron caracterizados de la siguiente manera:

• *Autoritarios*, donde sus argumentaciones se apoyan de las afirmaciones hechas por una autoridad (profesor, libro de texto).

• *Simbólicos*, donde se utiliza un lenguaje matemático y símbolos de manera superflua y poco consistente sin llegar realmente a las conclusiones deseadas, el sujeto puede mencionar conceptos poco claros o inventados.

- *Fácticos*, en los que se hace un recuento de lo que se hizo o se repiten hechos evidentes de una situación a manera de explicación o justificación de algún resultado, como una serie de pasos que parecen un algoritmo.

- *Empíricos*, en los cuales el apoyo está en hechos particulares (inductivos) o en un dibujo (perceptuales), donde este constituye un argumento por sí mismo y no un apoyo para visualizar el argumento.

- *Analíticos*, donde se sigue una cadena deductiva, sin que por ello se llegue forzosamente a una conclusión válida.

Los esquemas anteriores servirán para clasificar las respuestas (argumentos) de los alumnos a las tareas propuestas.

IV. SUPUESTOS BÁSICOS

El desarrollo cognitivo del sujeto es exhibido en los trabajos de Piaget, quien plantea una clasificación con base en el crecimiento del infante. Piaget propone que una vez que el objeto se ha asimilado por el sujeto sucederá una acomodación, a esa etapa él la denomina *sensoriomotriz*. La siguiente etapa corresponde a la *interiorización* de lo construido en la etapa sensoriomotriz, aquí las significaciones se extienden a través de los juicios. La acomodación también es interiorizada en forma de significantes imaginados: la imagen mental y símbolo del objeto, aquí sucede como en la asimilación, la acomodación es prolongada. La *operación concreta* aparece en un tercer momento y consiste en la *reversibilidad*, donde el sujeto equilibra la asimilación y la acomodación. La reversibilidad en esta etapa consiste en acomodar simultáneamente los esquemas a todas las transformaciones y asimilar cada transformación con una de las restantes por intermedio de las acciones que las provocan (Piaget, 1975, p.75). Finalmente, como resultado de las operaciones concretas, aparecen las *operaciones abstractas* o *formales.* Las operaciones formales se caracterizan porque descansan en asunciones y no sobre realidades manipulables, Piaget (1975) menciona que esa constitución de proposiciones puede ser aplicada a varios sistemas operatorios a la vez. Las proposiciones pueden coordinarse y ser reversibles, pero en el plano simbólico e hipotético.

El alumno de última etapa de educación básica, conforme a la identificación de etapas que hace Piaget se sitúa en el estadio de las *operaciones formales* y se explorarán los procesos matemáticos que se manifiestan en los alumnos cuando usan como mediador al Software de Geometría Dinámica (SGD) para validar su conocimiento. De manera que se plantean los siguientes supuestos.

1. Dadas las características del estadio de las operaciones formales en donde el alumno usa un método hipotético-deductivo y debido a la probable relación circular análoga entre la abstracción y la generalización, donde el resultado de una abstracción reflexionante es siempre una generalización (Piaget, 1979, p.53). Algunos de los procesos matemáticos que por sus características se orientan a validar el conocimiento matemático serían los procesos duales de particularización-generalización y descomposición-reificación.
2. La evaluación de los procesos matemáticos establecerá descriptores que permitan ubicar los argumentos que los alumnos emiten mientras prueban una conjetura.
3. El conocimiento o desconocimiento de las funciones del *Software para Geometría Dinámica (SGD)* no determina que los alumnos lo usen como una herramienta que les apoye para hacer demostraciones matemáticas escolares.

V. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Derivados de las preguntas de investigación, los objetivos son los siguientes:

1. Describir algunos de los procesos matemáticos que manifiestan los alumnos de último grado de educación básica (educación secundaria) cuando usan herramientas tecnológicas, como Software de Geometría Dinámica (SGD) al validar su conocimiento matemático en tareas geométricas.
2. Caracterizar los procesos matemáticos para valorar los niveles de desarrollo en los que se encuentra el alumno al validar el conocimiento matemático.

3. Identificar algunos de los fenómenos ligados al trabajo en ambientes digitales que impiden la apropiación del SGD como una herramienta para ayudar a la validación del conocimiento matemático.

VI. METODOLÓGIA

El objetivo de este capítulo es exponer el enfoque metodológico en el cual se enmarcó esta investigación. Las características del problema planteado llevaron a elegir el *modelo cualitativo* ya que según Vargas (2011), este tipo de enfoque usa métodos, observables, técnicas, estrategias e instrumentos que se centran en observar de manera subjetiva algún aspecto de la realidad. Como resultado de esta aplicación metodológica se producen categorías, patrones, etc., que se relacionan de manera sistémica entre ellas y el todo de la realidad que se estudia.

El enfoque cualitativo según Rodríguez, Gil y García (1999) plantea que el observador es competente y cualificado para informar de manera objetiva, clara y precisa sobre lo que observa de forma propia en el mundo social y de las experiencias de los demás. Siguiendo la idea de los autores el investigador cualitativo se aproxima al sujeto real que puede ofrecer información de sus experiencias, conocimientos, opiniones, valores, etc., con el uso de diferentes métodos o técnicas como entrevistas, historias de vida, estudios de caso o análisis documental.

La investigación cualitativa es flexible y no opera siguiendo un esquema de acción previamente determinado (Rodríguez, et al, 1999) sin embargo, se propone una serie de fases que se pueden seguir al realizar una investigación de este corte, en esas fases intervienen etapas (*Figura 13*)

Figura 13. Fases y etapas de la investigación cualitativa. Tomado de Rodríguez, et al (1999) p. 64.

6.1 La estrategia de diseño de investigación

Debido a que el interés de este trabajo se centró en determinar los procesos matemáticos que los alumnos de última etapa de educación básica manifiestan cuando validan conjeturas se recurrió a la estrategia de investigación denominada *estudio de casos*. El estudio de casos posee características que contribuyeron a cumplir el objetivo de este trabajo.

La orientación del estudio de casos de acuerdo con Vargas (2011) está dirigida específicamente a investigaciones centradas en un objeto, una persona, un grupo, una institución, de forma directa y delimitada. Stake (1999) menciona que el caso puede ser un niño, un grupo de alumnos y lo que se busca es una comprensión mayor del caso. Por su parte Yin (2003) dice que el estudio de caso como una estrategia de investigación es usada en muchas situaciones para contribuir a nuestro conocimiento individual, grupal, social, político y fenómenos relacionados. Rodríguez, et al (1999) destacan que el estudio de caso se basa en el razonamiento inductivo y que uno de sus objetivos es el descubrimiento de nuevas relaciones y conceptos, más que comprobar hipótesis.

Benítez (2016) propone cuatro etapas para aplicar el estudio de caso. La primera es la adquisición de herramientas conceptuales tiene que ver con la compresión de los conceptos centrales del objeto de estudio, así como manejar adecuadamente el trabajo de campo. La gestión centrada en el campo es la segunda etapa e implica seleccionar el contexto social pertinente y establecer contacto con los informantes. Después de gestionar el campo se debe realizar el trabajo de campo donde se observarán y registrarán datos sobre los aspectos sociales en los que se desea focalizar. Finalmente está la etapa de desarrollo de la descripción de los datos, donde se analizan los datos recabados y se hace una descripción escrita de los mismos.

6.2 El rol del investigador

El investigador desempeña varios roles Rodríguez et al (1999) menciona que dichos roles dependen de la interacción del investigador con las personas y el contexto en donde se desarrolla el trabajo de campo. En esta investigación la función del investigador tuvo un papel de *participante como observador* el cual consistió en vincularse más con la situación que se observaba y en ocasiones se adquirieron responsabilidades Bufford, 1960 (citado en Álvarez Gayou, 2003), como las de orientar a los alumnos en las construcciones con el SGD para cumplir con los propósitos de las actividades. El investigador no se convirtió completamente en miembro del grupo, ya que no compartió totalmente los valores ni las metas del grupo.

6.2.1 Selección de los informantes y escenario

La selección de los sujetos con que ha de realizarse la investigación en el enfoque cualitativo no se basa en el hecho de que todos los miembros de la población tienen el mismo valor como fuentes de información. Para la investigación cualitativa se eligen porque cumplen con ciertos criterios que en ese mismo contexto otros sujetos no cumplen. Por lo tanto, el proceso de selección de informantes no se interrumpe, sino que se prolonga a lo largo de la investigación (Rodríguez et al, 1999).

Este trabajo pasó por varios momentos para definir la estrategia de selección. El primer momento se denominó *exploración-diagnóstico*, cuyo objetivo se centró en conocer las debilidades tanto del cuestionario diagnóstico, como de las actividades, en esta primera aplicación se tomaron en cuenta cinco temas de los propuestos en el Programa de Estudios 2011. El orden de aplicación fue el siguiente: Diagnóstico, Teorema de Tales, Criterios de Congruencia, Criterios de Semejanza, Homotecia Directa e Inversa. En este primer momento se revelaron las dificultades de los alumnos al trabajar con SGD.

El escenario donde se inició la investigación fue una Secundaria General del municipio de San Juan del Río en el estado de Querétaro, esto debido a las facilidades otorgadas para trabajar con el grupo en el centro de cómputo. Esta primera aplicación se realizó en el mes de noviembre del año 2015. Los informantes fueron alumnos de tercer año de secundaria, del turno matutino. Este grupo de alumnos no conocía el Software de Geometría Dinámica GeoGebra, por lo que se les guio en las construcciones requeridas en las actividades.

La *reorganización* fue el segundo momento en donde se reestructuró el orden de aplicación de las actividades, se amplió el número de temas, así como el número de preguntas del cuestionario de diagnóstico. El orden de aplicación fue el siguiente: Diagnóstico, La circunferencia como lugar geométrico, Desigualdad Triangular y Rigidez Geométrica, Ángulos entre paralelas, Criterios de Congruencia, Teorema de Tales, Criterios de Semejanza, Homotecia Directa e Inversa. También se cambiaron los conceptos, como congruencia, por igualdad, con la intención de hacerlos más asequibles al alumno.

El contexto de aplicación en este segundo momento fue en el mes de febrero de 2016 en una secundaria de la modalidad Telesecundaria que se encuentra ubicada en la periferia de la ciudad de Querétaro. Los alumnos informantes también fueron de tercero de secundaria, estos alumnos sí conocían y habían trabajado con GeoGebra, sin embargo, también se les apoyó en las construcciones de las actividades.

Los dos momentos descritos permitieron categorizar los atributos que debían tener los informantes, así como el contexto donde se concluiría la investigación. Rodríguez, et al, (1999) proponen una selección de informantes denominada *casos ideal-típicos* y la definen como el desarrollo de un perfil ideal que deberán cumplir los sujetos informantes. Ese perfil ideal debe incluir atributos que permitan al investigador obtener información suficiente orientada al cumplimiento de los objetivos. La Tabla 1 resume los atributos que se consideraron en este trabajo para elegir los informantes y el escenario definitivo de aplicación.

Tabla 1. *Atributos para selección de informantes y escenario de la investigación*.

Atributo	Descripción
Disposición	Los alumnos muestran interés al realizar las actividades.
Argumentos escritos	Los alumnos son capaces de escribir con lenguaje matemático las razones de sus respuestas.
Argumentos verbales	Los alumnos pueden transmitir verbalmente y con uso del lenguaje matemático las regularidades observadas en sus construcciones.
Tecnológico	La escuela cuenta con computadoras suficientes para el trabajo individual o en parejas. La escuela cuenta un proyector.
Tiempo	Los alumnos han abordado, según los Programas de Estudio, los temas a trabajar en la investigación, es decir tienen conocimientos previos.

El tercer momento se denominó *consolidación* porque a las actividades y al cuestionario de diagnóstico se le hicieron ajustes mínimos, sobre todo en el orden de aparición de las preguntas de las actividades. La secuencia de aplicación de las actividades fue la misma que en el momento de reorganización. El contexto de trabajo en esta etapa se desarrolló durante el mes de marzo en una Telesecundaria ubicada en la comunidad de San Miguelito perteneciente a la delegación Santa Rosa Jauregui en el municipio de Querétaro. Los alumnos en esta aplicación también fueron de tercer grado y no conocían las funciones de GeoGebra.

El momento *conclusivo* se realizó en la última semana del mes de junio y las primeras semanas del mes de julio del año 2017. El orden de aplicación de las actividades fue el mismo que en el momento de reorganización y el contexto de aplicación sucedió en la Telesecundaria de San Miguelito, con alumnos de tercer año a los que también se les orientó en el funcionamiento de GeoGebra.

6.3 Estructura general de las actividades

El objetivo principal de esta investigación fue describir algunos de los procesos matemáticos que manifiestan los alumnos de último grado de educación básica (educación secundaria) al usar herramientas tecnológicas, como Software de Geometría Dinámica (SGD) al validar su conocimiento matemático en tareas geométricas. Por lo que se recurrió a estructurar temas del eje *Forma, Espacio y Medida* del Programa de Estudios 2011 de matemáticas, cuatro temas correspondientes al último año de educación secundaria los cuales son: Criterios de Congruencia, Teorema de Tales, Criterios de Semejanza y Homotecia de Triángulos. Los tres temas restantes, la circunferencia como lugar geométrico, construcciones de triángulos (desigualdad triangular) y ángulos entre paralelas, se abordan en primero y segundo año de secundaria, pero se incluyeron porque complementan a los cuatro temas principales.

Conviene mencionar que el orden de los temas y de las actividades no obedece al sugerido por el Programa de Estudios, sino es una adaptación propia de cómo se ha considerado que los alumnos pudieran tener elementos para elaborar argumentos sólidos que les permitieran generar conjeturas y construir demostraciones. La *Figura 14* corresponde a la organización de los temas, también muestra algunos de los procesos matemáticos que es posible encontrar en cada una de las actividades de dichos temas. Es preciso decir que éste sólo es un ejemplo y no significa que los procesos mencionados sean los únicos que aparezcan en esas actividades.

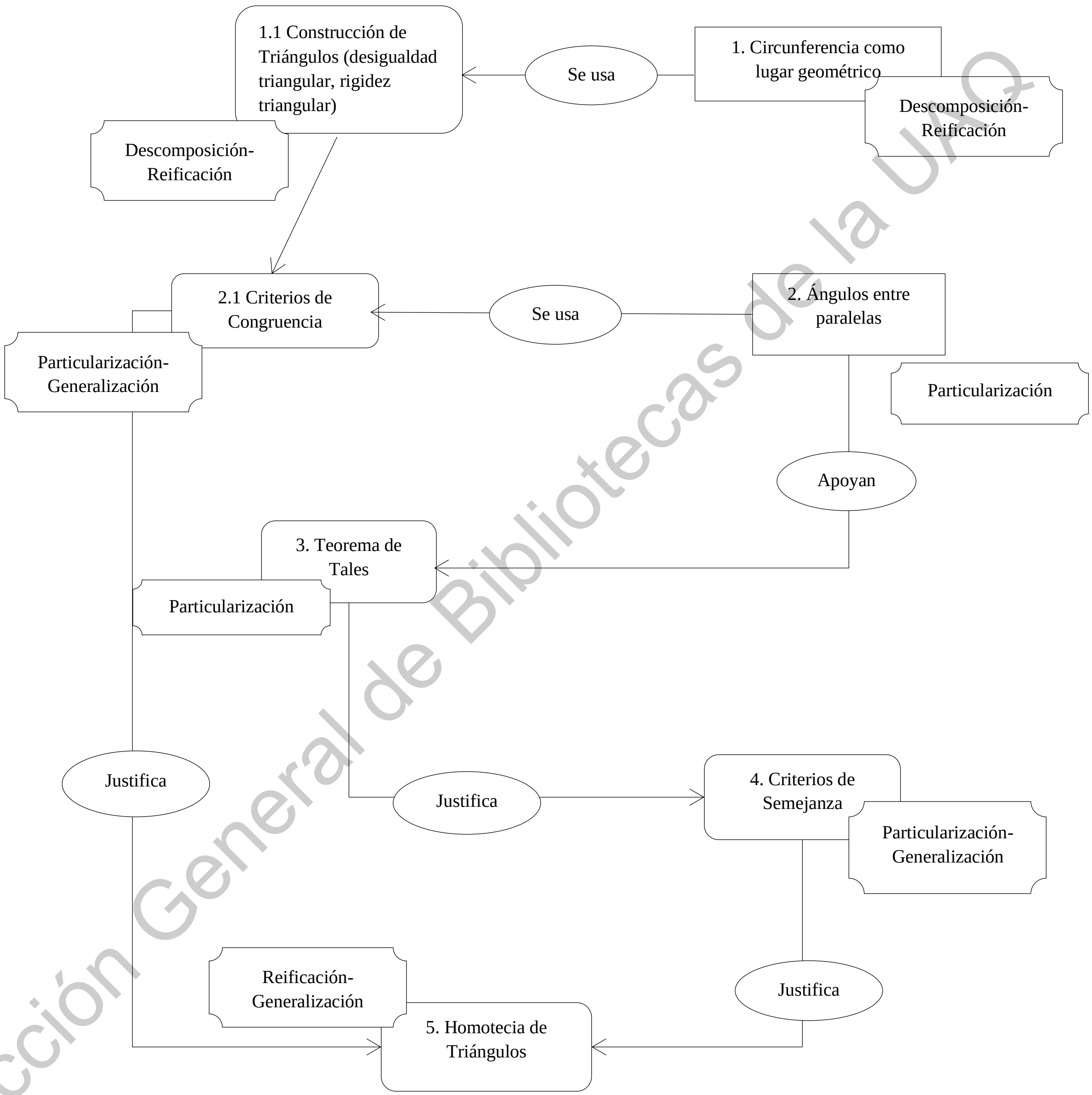


Figura 14. Organización de los temas para la aplicación de las actividades y propuesta de procesos matemáticos. Elaboración propia.

Como una justificación más a la articulación de los temas antes mostrada y debido a que los alumnos resolverían problemas matemáticos, expresarían de forma verbal y escrita sus argumentos, validarían sus soluciones, a las actividades se les consideró como *prácticas matemáticas*. En las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales como símbolos, gráficos, etc., y objetos abstractos que son representados en forma textual, oral, gráfica o gestual. A los temas de Criterios de Congruencia, Teorema de Tales y Homotecia de Triángulos se les identificaron los objetos primarios intervinientes, éstos articulados convergen en la *configuración*. Las configuraciones epistémicas entonces ayudan a evaluar las situaciones, problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que se activan en las prácticas matemáticas (Godino, Font y Batanero, 2008). La tipología de objetos matemáticos primarios propuesta por el EOS es la siguiente:

Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos, en sus diversos registros, escrito, oral, gestual.

Situaciones-problemas: aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios.

Conceptos-definición: introducidos mediante definiciones o descripciones, por ejemplo, el concepto de recta, número, función, media, ángulo, razón.

Proposiciones: enunciados sobre conceptos.

Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.

Argumentos: enunciados usados para validar, o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

Las situaciones- problemas dice Godino et al, (2008) son el origen y la razón de ser de la actividad, el lenguaje sirve de instrumento para la acción y los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan a los conceptos entre sí. Lo anterior puede verse de manera gráfica en la *Figura 15*.

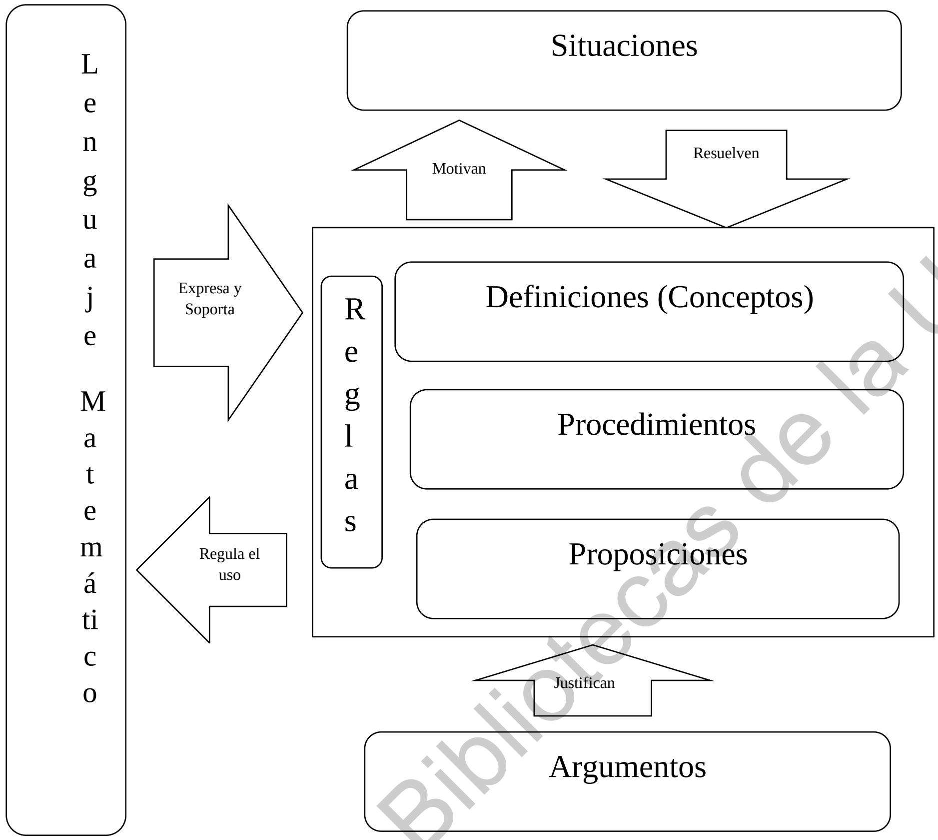


Figura 15. Elementos de una configuración epistémica. Tomado de Godino et al, 2018, p.

Las configuraciones que se elaboraron son las siguientes:

La primera configuración epistémica (Figura 16) engloba cuatro temas, que apoyarían la observación de regularidades, el planteo de la conjetura y la argumentación sobre la validez de ésta. La segunda configuración (Figura 17) apoya a la primera, entre los temas que se tomaron en cuenta destacan la proporcionalidad de segmentos en rectas paralelas cuando son cortados por transversales, a su vez eso soporta la semejanza de triángulos. La última configuración (Figura 18) resume las propiedades establecidas en las otras configuraciones, porque congrega significados, argumentos, procedimientos y proposiciones que se emplearon en las actividades de los temas previos. Las configuraciones constituyen una herramienta de utilidad para anticiparse a las respuestas, argumentos, símbolos, lenguajes que usan los alumnos en la resolución de tareas.

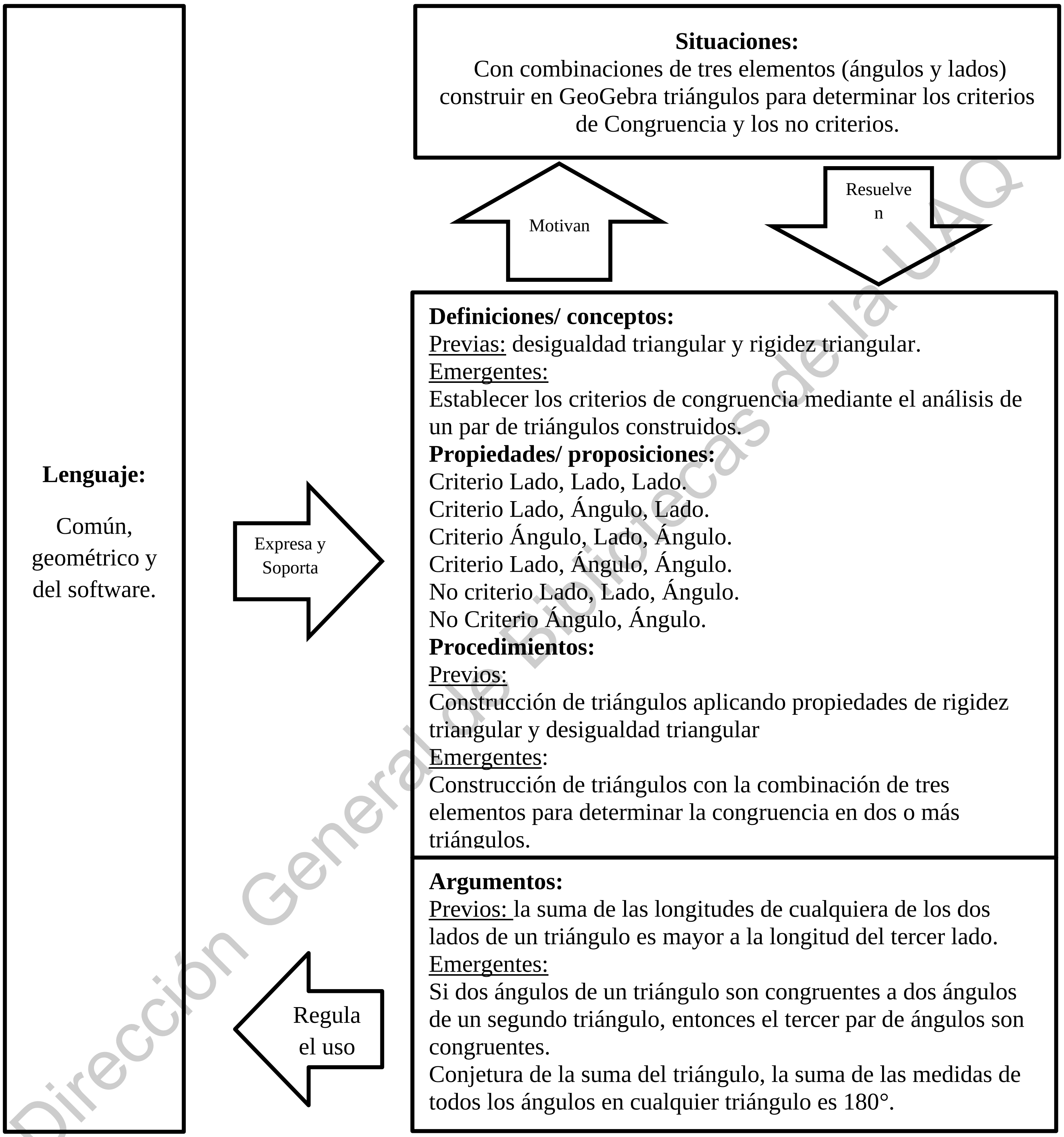


Figura 16. Configuración epistémica.

Situaciones:
Construcción en GeoGebra para establecer la proporcionalidad de segmentos en rectas paralelas que son cortadas por transversales. En esa misma construcción, determinar los criterios de semejanza y los no criterios.

Motivan

Resuelven

Lenguaje:

Común, geométrico, aritmético y del software.

Expresa y Soporta

Definiciones/ conceptos:
Previas: ángulos entre paralelas (opuestos por el vértice y correspondientes), proporcionalidad, ángulo incluido.
Emergentes:
Razón de proporcionalidad, proporcionalidad de segmentos.
Propiedades/ proposiciones:
Criterio Lado, Lado, Lado.
Criterio Ángulo, Ángulo.
Criterio Ángulo, Lado, Ángulo.
Criterio Lado, Ángulo, Ángulo.
Criterio Lado, Ángulo, Lado.
No criterio Lado, Lado, Ángulo.

Regula el uso

Argumentos:
Previos:
Establecer propiedades de los ángulos correspondientes y de los opuestos por el vértice.
Emergentes:
Razón de proporcionalidad (razón de semejanza) de segmentos.
Teorema de Tales, Si dos o más paralelas son cortadas por una transversal se forman segmentos proporcionales.
Si tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados correspondientes de dos o más triángulos, entonces son congruentes.
Si dos lados y un ángulo incluido de un triángulo son congruentes a dos lados correspondientes y el ángulo de otro triángulo, los triángulos son congruentes.
Si dos lados y un ángulo no incluido de un triángulo son congruentes a los lados correspondientes y el ángulo no incluido de otro triángulo, los triángulos no son congruentes.
Si dos ángulos y un lado incluido en dos ángulos son congruentes a dos ángulos y el ángulo incluido de otro triángulo, los triángulos son congruentes.
Si tres ángulos de un triángulo son congruentes a tres ángulos correspondientes de otro triángulo, no son congruentes los triángulos.

Figura 17. Configuración Epistémica

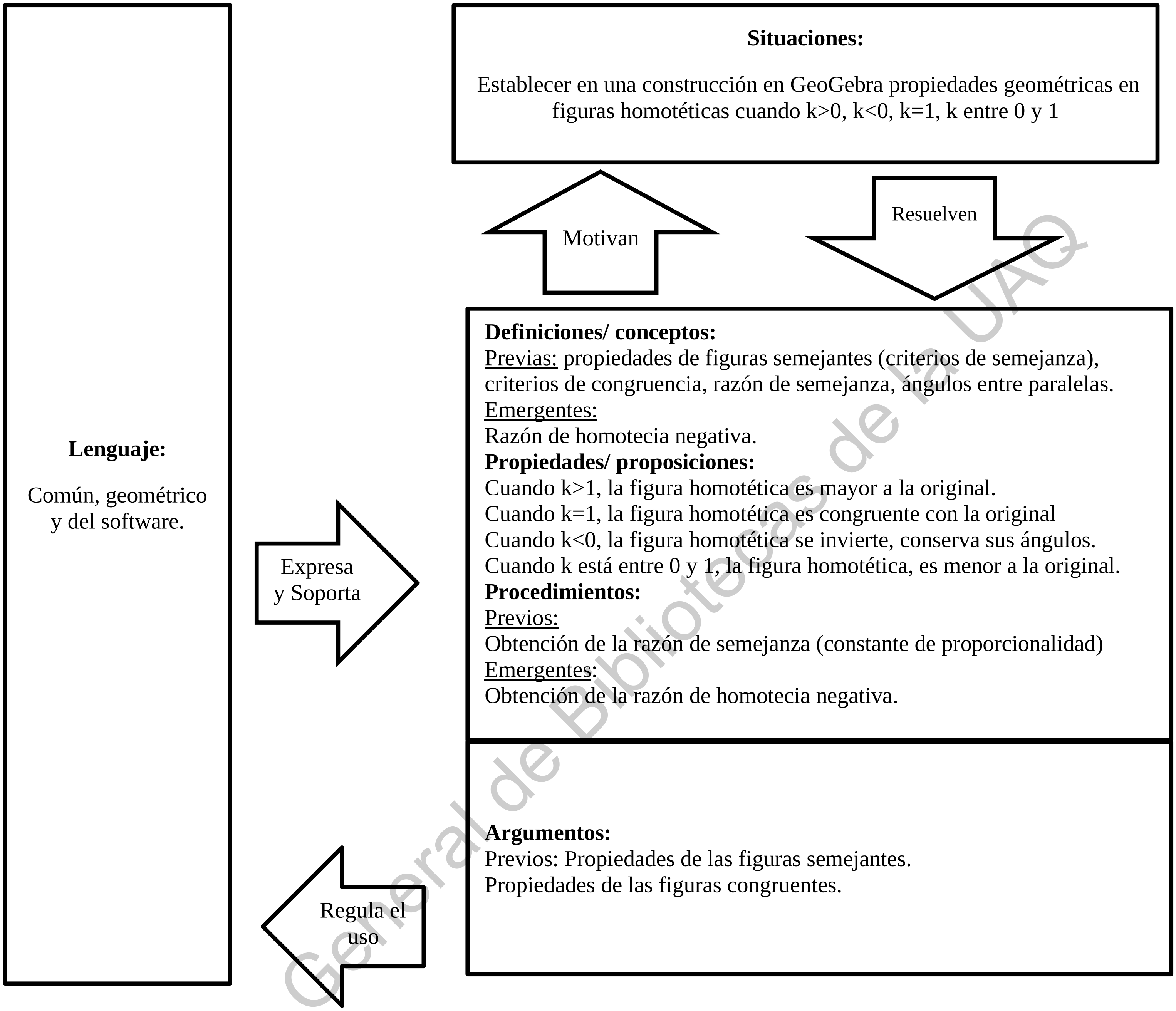


Figura 18 Configuración Epistémica.

6.3.1 Organización del contenido de las actividades

Debido a que el objetivo de la investigación que se enfocó en conocer procesos matemáticos en alumnos de último grado de educación secundaria cuando validaban su conocimiento matemático con apoyo de GeoGebra, para cada tema (*Figura 14*) se tomó la propuesta de Boero, Garuti y Lamut (1998) sobre el fenómeno de continuidad que se da entre la producción de una conjetura y la construcción de su prueba, ellos lo llamaron

"*Cognitive Unity of Theorems*". Las etapas se observan en la *Figura 19*, en términos generales se describirá en qué consiste cada una de ellas.

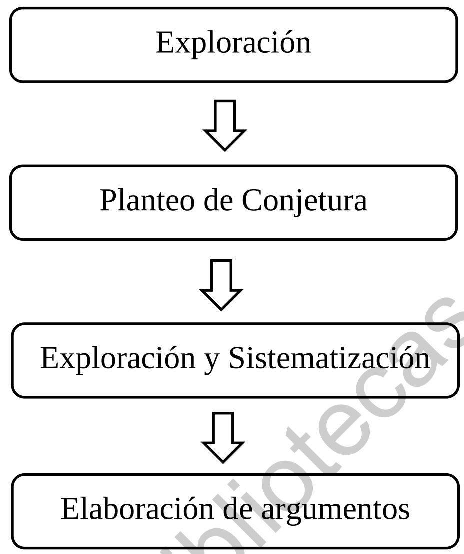


Figura 19. Etapas de la Unidad Cognitiva de los Teoremas. Adaptado de Boero, Garuti y Lamut 1998.

- **La exploración**: es donde el alumno mediante construcciones hechas por él o proporcionadas por el investigador, empieza a ver algunos conceptos que se emplearán durante el desarrollo de la actividad.
- **Planteo de Conjetura:** con preguntas se guía para que el alumno observe regularidades en las construcciones y genere una conjetura.
- **Exploración y sistematización:** el alumno una vez formulada la conjetura va a intentar probarla, nuevamente recurre a la visualización de patrones y se establecieron preguntas que le ayuden a verificar la conjetura establecida.
- **Elaboración de Argumentos:** una vez que se ha explorado la conjetura para detectar errores y generarla nuevamente, se empiezan a elaborar argumentos que la validen.

Se usará una actividad a manera de ejemplo para exponer las etapas de la unidad cognitiva de los Teoremas. El resto de las actividades se pueden consultar en el apartado "anexos".

Actividad 1.1 Construcciones

Nombre: ____

Fecha:

____

Los puntos los creas con

El segmento lo trazas con

Para mover usa

Para medir los lados

Las circunferencias se trazan con

1. Traza un segmento AB.

2. Traza dos circunferencias de radio arbitrario, una con centro en A y la otra con centro en B.

3. Pon un ***punto nuevo*** en cada circunferencia y únelo con el centro de cada una de ellas.

4. Mueve las circunferencias y los puntos nuevos, de tal manera que éstos (puntos nuevos) coincidan. ¿Qué figura geométrica se forma si unes los ***puntos nuevos***?

5. ¿Qué condición se debe de cumplir en las circunferencias para que exista la figura?

Etapa de Exploración

7. ¿Cuándo desaparece la figura?

En cada actividad hay un recuadro donde aparecen íconos alusivos a funciones de GeoGebra que los alumnos debían usar para sus construcciones.

8. ¿Qué condiciones se deben de cumplir para que puedas construir un triángulo?

9. Traza el punto de intersección de las circunferencias, construye el triángulo. Mide los lados del triángulo, muévelos y observa. ¿Qué relación hay entre las medidas de los lados menores, respecto a la medida del lado mayor?

Etapa de Planteo de Conjetura

10. ¿Cómo son los ángulos del triángulo?

11. ¿Qué características deben tener entonces los segmentos para la construcción del triángulo?

Etapa de Exploración y Sistematización

Etapa de Elaboración de Argumentos

12. Reflexiona a partir de lo anterior realizado y responde: ¿Cuántos y cuáles elementos son suficientes para construir un triángulo? ¿Por qué?

6.4 Proceso de análisis e interpretación

Según Rodríguez, et al, (1999) no existe un modo único y estándar para realizar un análisis, por su parte Stake (1999) menciona que el estudio cualitativo aprovecha las formas habituales de interpretar las cosas, como la experiencia y la reflexión que permiten a cada investigador encontrar las formas de análisis que le sirvan. Continuando con la propuesta de Stake dice que para los significados de los casos (estudios de casos) el investigador puede emplear dos estrategias: una es la *interpretación directa* de ejemplos individuales y la otra es la *suma de ejemplos* hasta poder decir algo sobre éstos como conjunto o clase. En esta investigación se usaron ambas estrategias para permitir cumplir con los objetivos de la misma.

Como se mencionó en el apartado de *selección de informantes*, éstos debían cumplir con una serie de requisitos para que fueran analizados. El primero era la disposición en las tareas planteadas, el segundo era referente a la generación de argumentos escritos para poder identificar procesos matemáticos, esos argumentos escritos se apoyaban de argumentos verbales cuando se les preguntaban las razones por las cuáles daban esas respuestas (escritas). Además, se contrastaban los argumentos verbales y escritos con las construcciones en GeoGebra.

El primer análisis se daba en el salón de clases cuando se les planteaban las actividades a los alumnos. Se revisaban las conjeturas escritas que se había establecido, entonces se preguntaba las razones (argumentos escritos) por las cuales se había llegado a esa respuesta, después de que el alumno argumentaba y reflexionaba sobre sus respuestas se regresaba a la construcción en GeoGebra para detectar posibles errores en la construcción. El ciclo de análisis es exhibido en la *Figura 20*.

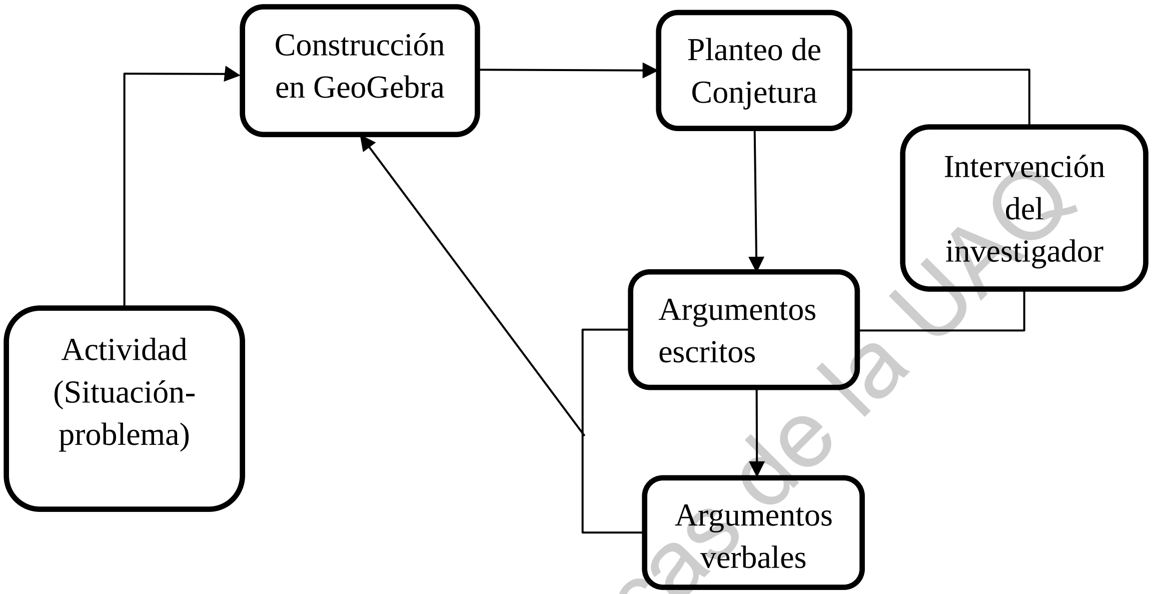


Figura 20. Ciclo de análisis de argumentos de los alumnos.

El segundo análisis consistió en contrastar las actividades en papel, es decir de la escritura de la conjetura y de los argumentos escritos, con los argumentos verbales grabados en el salón de clases y con las construcciones realizadas en GeoGebra. Entonces la conjetura escrita podía ser basada en hechos matemáticos o en el software, de esas opciones se generaban argumentos que estaban basados también en hechos matemáticos o en las propiedades del software. Los argumentos escritos generaban argumentos verbales cuando se les preguntaban a los alumnos las justificaciones que apoyaban a la conjetura, de la misma manera que en los argumentos escritos, los argumentos verbales podían estar apoyados en hechos matemáticos o en funciones del software. En todo el escenario descrito se manifestaban procesos matemáticos. El resumen de lo antes mencionado se relaciona en el esquema de la *Figura 21*.

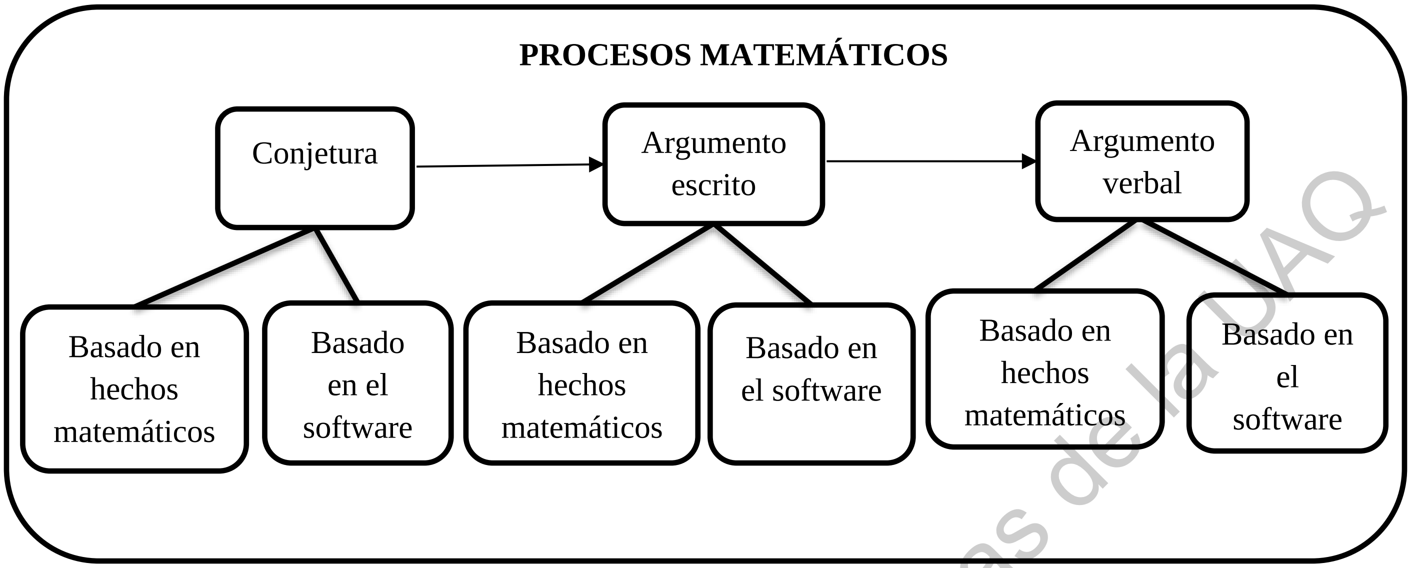


Figura 21. Análisis de los argumentos escritos y verbales.

Respecto al registro de la información, como los objetivos fueron determinar procesos matemáticos y evaluarlos, además de exhibir fenómenos ligados al trabajo con el SGD, se recurrió a grabaciones de audio para los argumentos verbales, hojas de trabajo para los argumentos escritos que daban evidencia de los procesos matemáticos y archivos de GeoGebra.

En el capítulo siguiente se describen explícitamente las intenciones de cada una de las preguntas y las razones por las que se estructuraron de esa manera. Se exponen también algunas de las respuestas que se esperaba generaran los alumnos.

6.5 DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Este apartado está dedicado a mostrar las respuestas que el alumno debía otorgar a determinadas preguntas. Se les denominó “respuestas esperadas” porque corresponden a soluciones que proporcionaban información matemática importante para avanzar en las actividades subsecuentes. En algunos casos no hay respuesta esperada, ya que sólo era un sondeo sobre las concepciones personales y el desarrollo de los alumnos. Las respuestas esperadas están escritas en un recuadro con una letra diferente a la del formato de las preguntas de las actividades.

6.5.1 Actividad 1. El lugar geométrico

La actividad 1 “El lugar Geométrico” tenía la intención de recordarle al alumno las características de una circunferencia como lugar geométrico para que, en posteriores construcciones, como en la regla de la desigualdad triangular pudieran generar la conjetura de la relación entre los lados menores respecto al lado mayor.

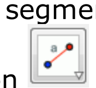
La primera pregunta se diseñó para que el alumno respondiera conforme a la representación que esa descripción le generaba, por lo que no hay respuesta específica a esa pregunta. La pregunta cinco se formuló para que mediante la construcción pudieran *ver* la figura que se formaba con las características que inicialmente se les habían planteado. En el paso seis se les solicitaba que observaran activando el rastro la figura generada para que corroboraran visualmente sus respuestas a las preguntas anteriores. Finalmente, los alumnos debían establecer una generalización sobre las propiedades geométricas de la circunferencia.

1. ¿Qué figura geométrica se forma si tienes un conjunto de puntos que equidistan una distancia fija a un punto fijo?

2. Traza un punto y a partir de ahí traza un segmento de longitud fija, con la medida que tú decidas.

3. Al punto trazado anteriormente llámale *O*.

4. Mueve el punto que permite el giro en *O*.

El segmento se traza con 

Para mover usa

5. ¿Qué figura se forma con el movimiento?

Una circunferencia

6. Activa "rastro" y observa lo que sucede cuando mueves el punto alrededor de O.

7. Escribe las características (propiedades geométricas) de la figura que se formó.

Figura geométrica que se forma con un conjunto de puntos que equidistan de una distancia fija de un punto fijo. El punto fijo se llama centro y la distancia de éste al cualquier punto de la circunferencia se llama radio, también tiene una cuerda denominada diámetro y pasa por el centro de la circunferencia.

6.5.2 Actividad 1.1 Construcciones

La actividad 1.1 "Construcciones" empleaba la generalización sobre propiedades geométricas de la circunferencia que se estableció en la primera actividad, ya que con el uso de radios se buscaba que orientaran al alumno para establecer la conjetura sobre la desigualdad triangular. Las preguntas de la cuatro a la siete son de exploración en la construcción para que en la pregunta nueve con el triángulo trazado y probando para varios casos escribiera la conjetura de lo que sucede con los lados del triángulo. La pregunta ocho esperaba que el alumno respondiera con base en los conocimientos previos sobre construcción de triángulos, no basado en la construcción realizada en el software.

La pregunta diez se formuló para que el alumno enunciara lo que desde su educación primaria se le enseñó, esto es que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180° y que debido a esa conjetura basta con conocer la medida de dos ángulos para obtener la del tercero. Este conocimiento se empleará en la construcción de triángulos con tres ángulos para determinar la congruencia. Las preguntas once y doce corresponden a la etapa de argumentación en donde los alumnos debían poner en manifiesto procesos matemáticos como la generalización y la reificación. Además, esas conclusiones obtenidas para las preguntas once y doce, también se emplearán en la construcción de triángulos para establecer los criterios de congruencia.

1. Traza un segmento AB.

2. Traza dos circunferencias de radio arbitrario, una con centro en A y la otra con centro en B.

3. Pon un ***punto nuevo*** en cada circunferencia y únelo con el centro de cada una de ellas.

4. Mueve las circunferencias y los puntos nuevos, de tal manera que éstos (puntos nuevos) coincidan. ¿Qué figura geométrica se forma si unes los ***puntos nuevos***?

Un triángulo.

5. ¿Qué condición se debe de cumplir en las circunferencias para que exista la figura?

Que las circunferencias se intersequen.

7. ¿Cuándo desaparece la figura?

Cuando las circunferencias no están intersecadas.

8. ¿Qué condiciones se deben de cumplir para que puedas construir un triángulo?

Tener dos segmentos de determinada medida o dos ángulos o la combinación de ángulos y segmentos.

9. Traza el punto de intersección de las circunferencias, construye el triángulo. Mide los lados del triángulo, muévelos y observa. ¿Qué relación hay entre las medidas de los lados menores, respecto a la medida del lado mayor?

La suma de las medidas de los lados menores es siempre mayor a la medida mayor del triángulo.

10. ¿Cómo son los ángulos del triángulo?

La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

11. ¿Qué características deben tener entonces los segmentos para la construcción del triángulo?

Deben ser de tal manera que la suma de dos segmentos sea mayor a un tercer segmento.

12. Reflexiona a partir de lo anterior realizado y responde: ¿Cuántos y cuáles elementos son suficientes para construir un triángulo? ¿Por qué?

Cuando se quiere construir un triángulo hay que tomar en cuenta la medida de sus lados, cuya suma de los menores debe ser mayor a la de un tercer lado. Respecto a construir un triángulo con ángulos basta con conocer la medida de dos de ellos, porque la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo son 180°.

6.5.3 Actividad 2 Ángulos entre paralelas

La actividad 2 "Ángulos entre paralelas" tenía la intención de recordar en el alumno conocimientos sobre la congruencia de ángulos opuestos por el vértice y ángulos correspondientes en rectas paralelas que son cortadas por una transversal. La pregunta dos no tiene respuesta debido a que corresponde a una percepción de los alumnos al realizar su construcción. Sin embargo, se esperaba que la mayoría contestara que se forman ocho ángulos, para así recordar que dos rayos que parten de un punto hacen al ángulo. La indicación tres confirma lo anterior, pues para medir los ángulos el software funciona con tres puntos de referencia, lo cual permitiría al alumno “eliminar” algunos de los ángulos que según se formaban (respuesta a la pregunta dos).

La pregunta cuatro alude a los ángulos opuestos por el vértice y se ofrece una definición para que el alumno pueda identificarlos en su construcción. Una vez localizados los ángulos se pide que los escriba por parejas. Debido a que el nombre de los ángulos depende de cómo los hayan identificado en la construcción esa pregunta no ofrece una respuesta esperada. En la pregunta cinco se pidió que el alumno moviera las rectas paralelas y la transversal para que a partir de probar varios casos particulares llegaran a la generalización de ángulos opuestos por el vértice.

1. Traza un par de rectas paralelas, nombralas como R_1 y R_2. Traza una recta que corte a las paralelas (transversal), a la nueva recta le llamarás *T*.

2. ¿Cuántos ángulos se forman al cortar las paralelas?

3. Mide todos los ángulos que dijiste que se forman.

4. ¿Cuáles son los **ángulos opuestos por el vértice**? Escríbelos en parejas. **Nota:** los ángulos opuestos por el vértice son aquellos que se forman por dos rectas que se intersecan en un punto y éste (punto de intersección) está entre otros dos puntos de cada recta.

5. Mueve las rectas paralelas y la recta *T,* observa los ángulos y responde. ¿Cómo son las medidas de los ángulos opuestos por el vértice?

Las medidas de los ángulos opuestos por el vértice son iguales o congruentes.

Las dos preguntas de la indicación seis fueron diseñadas para recordar al alumno las propiedades de los ángulos correspondientes u homólogos, puesto que dicha definición la emplearían para argumentar sobre los criterios de congruencia, semejanza y en las figuras homotéticas. La primera pregunta no tiene respuesta esperada, pues como en el caso de la indicación cuatro, los nombres de los ángulos correspondientes dependerían de cómo el alumno los midió. La respuesta para la segunda pregunta era “iguales” o (congruentes). Es preciso aclarar que, del análisis del diagnóstico sobre conceptos básicos aplicado a los alumnos, se obtuvo que una mayoría utiliza el concepto igual como sinónimo de congruente, por lo que en adelante como respuesta aparecerán ambos conceptos.

El caso de la pregunta siete, como para la generalización de los ángulos opuestos por el vértice, los alumnos debían probar para varios casos particulares lo que sucedía con las medidas de los ángulos correspondientes y así poder establecer la generalización. Las preguntas ocho y nueve corresponden a la generalización que el alumno estableció para ángulos opuestos por el vértice y ángulos correspondientes.

6. ¿Cuáles ángulos son correspondientes? Y ¿Cómo son las medidas de esos ángulos? **Nota:** los ángulos correspondientes son los que están en posición coincidente en las paralelas respecto a la transversal.

Las medidas son iguales o congruentes.

7. Mueve nuevamente las paralelas, observa los ángulos correspondientes y los opuestos por el vértice. ¿Qué característica presentan?

Las medidas de los ángulos son iguales o congruentes.

8. Elabora un enunciado general que resuma cómo deben ser los ángulos correspondientes en rectas paralelas.

Los ángulos correspondientes u homólogos en rectas paralelas cortadas por una transversal son congruentes o de igual medida.

9. Elabora también un enunciado general que resuma cómo deben ser los ángulos opuestos por el vértice en rectas paralelas.

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes o de igual medida.

6.5.4 Actividad 2.1 Congruencia

Las actividades de la 2.1 a la 2.7 "Congruencia" mediante la construcción con combinaciones de elementos de ángulos y segmentos el alumno debía probar si se trataba o no de un caso de congruencia y con base en argumentos enunciar por qué se trataba de un caso de congruencia, o bien, justificar por qué no eran congruentes las figuras. Los casos de construcción de triángulos para determinar la congruencia se alternaron, es decir, se inició con un no criterio (actividad 2.2), después un criterio (actividad 2.3). Lo anterior para evitar que el alumno elaborara conjeturas de manera inductiva y asegurar que se trataba de criterios de congruencia, entonces tenía que realizar las construcciones para cada caso y argumentar si era o no criterio. Para los casos en donde se empleaban ángulos se les instaba a los alumnos a evitar el uso de medidas congruentes, así como ángulos de medidas enteras.

En la primera pregunta el alumno debía responder que son tres elementos los que se necesitan para construir un triángulo, esos elementos deben ser combinaciones de lados y ángulos. La segunda pregunta buscó explorar de manera intuitiva lo que el alumno considera que deben tener los triángulos para poder argumentar si son iguales o congruentes, razón por la cual no tiene respuesta esperada.

1. ¿Cuántos elementos son suficientes para construir un triángulo?

Tres elementos. Lados y ángulos.

2. ¿Qué elementos consideras que son necesarios para determinar si dos o más triángulos son congruentes?

6.5.5 Actividad 2.2 Lado, Lado, Ángulo

La actividad se formuló para establecer si con esos tres elementos lado, lado y ángulo, se podía determinar la congruencia de otro triángulo que tuviera las medidas de un primer triángulo. La indicación uno pretendió que el alumno construyera y explorara para intentar formular la conjetura. La respuesta esperada para la pregunta dos fue que sí se puede construir un triángulo diferente al original, lo cual no determina que los triángulos sean congruentes, de manera que esta combinación de elementos no es un criterio de congruencia. La pregunta dos esboza la conjetura que será validada con argumentos en las siguientes preguntas. Las preguntas tres y cuatro se diseñaron para que el alumno diera argumentos sobre las razones por las que no se puede considerar lado, lado, ángulo como un criterio de congruencia.

1. Con dos segmentos de medidas diferentes entre sí y un ángulo que no esté incluido en los segmentos construye un triángulo $\triangle LMN$. Con los datos anteriores traza un triángulo diferente.

2. ¿Cuántos triángulos diferentes pudiste construir con los datos del triángulo inicial? ¿Por qué?

Se pudo trazar un triángulo distinto al original. Debido a que los lados pueden ser de diferentes medidas, aunque el ángulo sea congruente para los triángulos.

3. ¿Qué relación guardan entre sí los triángulos construidos?

Los triángulos no guardan relación porque las medidas de sus lados son diferentes lo cual no determina que sean congruentes, aunque el ángulo no comprendido en esos segmentos es congruente, con esa información no se asegura la congruencia en los triángulos construidos.

4. ¿Con esos datos es suficiente para asegurar que dos o más triángulos son congruentes? ¿Por qué?

Con esos datos no se garantiza la congruencia de los triángulos porque los lados toman diferentes medidas y eso no es una propiedad de la congruencia. Aunque el ángulo sea congruente para los triángulos, esa información tampoco es suficiente para la congruencia.

6.5.6 Actividad 2.3 Lado, Lado, Lado

Como se describió al inicio de la actividad Congruencia, se empezó con un no criterio de congruencia y luego un criterio. El caso que sigue corresponde a construir un triángulo dados tres segmentos de medida arbitraria, para este caso el alumno debía recordar la regla de desigualdad triangular y así construir su primer triángulo. También tenía que usar la definición de circunferencia y radio para trasladar las medidas de los segmentos y construir el segundo triángulo. La pregunta dos se formuló para la exploración de la construcción y así poder generar la conjetura, la cual se escribió en la pregunta tres y reafirmó en la cuatro. Los argumentos para considerar al caso lado, lado, lado como un criterio de congruencia se escribieron en la pregunta cinco.

1. Traza un triángulo $\triangle ABC$, con tres segmentos de medidas diferentes. Haz un triángulo diferente al construido, pero con las mismas medidas de tu primer triángulo (usa circunferencias para trasladar las medidas de tu triángulo inicial al nuevo triángulo)
2. ¿Lograste construir el triángulo? ¿Por qué sí o por qué no?

Sí, pero tiene segmentos correspondientes congruentes, puesto que las medidas de éstos se tomaron de los segmentos del primer triángulo.

3. ¿Qué características tiene el nuevo triángulo?

Los lados correspondientes son congruentes o iguales.

4. ¿Cómo son los lados del nuevo triángulo respecto al triángulo inicial?

Los lados correspondientes son congruentes o iguales.

5. Enuncia una regla general que describa cómo deben ser los elementos de los triángulos (de los que acabas de construir) para determinar que son congruentes y justifícala (toma en cuenta todo lo realizado anteriormente):

En dos o más triángulos para determinar la congruencia de éstos los lados correspondientes deben ser congruentes o iguales sin importar la posición en la que se encuentren.

6.5.7 Actividad 2.4 Lado, Ángulo, Lado

El siguiente caso para construir triángulos y determinar la congruencia en estos es la combinación de lado, ángulo, lado. La primera y segunda preguntas se diseñaron para la etapa de exploración en la construcción, a su vez se pretendió que el alumno generara una conjetura y diera argumentos sobre esta. La pregunta tres era para explorar nuevamente en la construcción, corroborar la conjetura y sistematizar, de manera que en la pregunta cuatro con argumentos se validara la conjetura.

1. Traza un triángulo $\triangle FGH$, con un ángulo comprendido entre dos segmentos de diferente medida. Ahora con los datos anteriores (medidas de los dos segmentos y el ángulo) traza un triángulo diferente.
2. ¿Pudiste construir el triángulo diferente? ¿Por qué?

El segundo triángulo es igual al primero porque tiene dos lados correspondientes iguales y el ángulo comprendido entre éstos también es igual a su correspondiente.

3. ¿Qué características tienen los elementos de tus triángulos?

Los lados del primer triángulo son congruentes con los lados correspondientes del segundo triángulo, también el ángulo comprendido entre estos dos lados es congruente con su correspondiente u homólogo.

4. Escribe una regla general que resuma las propiedades que deben tener los elementos los triángulos (que acabas de construir) para determinar que son congruentes, justifica (recuerda que puedes tomar en cuenta todo lo realizado anteriormente):

Dos o más triángulos son congruentes si tienen sus lados correspondientes congruentes o iguales y el ángulo comprendido entre ellos también congruente o igual.

6.5.8 Actividad 2.5 Ángulo, Ángulo, Ángulo

El caso de la construcción de triángulos empleando tres ángulos para determinar su congruencia, se diseñó para que el alumno empezara con la etapa de exploración, él decidía las medidas de los ángulos interiores del triángulo que construiría. Eso lo obligaba a recordar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo debe ser 180°. La pregunta dos se orientó a la exploración y planteo de la conjetura. El alumno debía recordar que para que exista la congruencia entre dos o más figuras deben tener lados congruentes y ángulos congruentes, no basta con tener dos pares de ángulos congruentes. Entonces en la pregunta dos exploraba para varios casos y descubría que el segundo triángulo tomaba medidas para los lados diferentes a las medidas de los segmentos con los que se construyó el primer triángulo. A pesar de que las medidas de los ángulos interiores eran congruentes en ambos triángulos eso no garantizaba la congruencia en estos.

La pregunta tres incitaba al alumno a explorar nuevamente y sistematizar los hallazgos para enunciar cómo eran los ángulos y lados de ambos triángulos. La información le serviría para argumentar en la pregunta cuatro y cinco por qué construyendo dos o más triángulos con ángulos congruentes no es suficiente para enunciar la congruencia en ellos.

1. Construye un triángulo $\triangle HIJ$ con tres ángulos de medidas diferentes. Construye ahora un triángulo diferente usando las medidas de los tres ángulos del triángulo inicial.

2. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir dados tres ángulos? ¿Por qué?

Se pueden construir un número infinito de triángulos debido, pues para tener triángulos congruentes deben tener sus lados y sus ángulos correspondientes congruentes o iguales.

3. ¿Qué características tienen los ángulos y los lados de los dos triángulos?

Los ángulos son congruentes o iguales, pero las medidas de los lados son diferentes.

4. Observa los triángulos, mueve y responde: ¿Son congruentes los triángulos? ¿Por qué sí o por qué no?

No son congruentes los triángulos pues, aunque sus ángulos son congruentes eso no garantiza que los triángulos lo sean. Además, se pueden construir muchos triángulos conociendo dos ángulos.

5. A partir de lo realizado anteriormente responde y **argumenta**: ¿A partir de tres ángulos es suficiente para asegurar la congruencia de dos o más triángulos?

A partir de tres ángulos no es suficiente para determinar la congruencia de dos o más triángulos puesto que para que exista la congruencia debe haber ángulos congruentes y lados congruentes, para este caso no aplica.

6.5.9 Actividad 2.6 Ángulo, Lado, Ángulo

El caso para construir un triángulo con dos ángulos y un lado comprendido entre éstos, los alumnos debían usar las conjeturas probadas en los ejercicios previos para poder determinar la congruencia en el caso expuesto en esta actividad. Por ejemplo, concluirían que la medida del tercer ángulo interior del triángulo, puesto que contaban con dos medidas de ángulos interiores.

La primera pregunta se diseñó para la exploración en la construcción y esbozar la conjetura sobre la congruencia en los triángulos con dos ángulos y un lado comprendido en ellos. La pregunta dos sugería el empleo de argumentos mediante la descomposición de los elementos del triángulo. Esa descomposición se afianzaba en la pregunta tres, donde los alumnos debían describir las propiedades geométricas de lados y ángulos. En la pregunta cuatro y cinco los alumnos debían argumentar para validar la conjetura sistematizada previamente.

1. Traza un triángulo $\triangle PQR$ a partir de dos ángulos de diferente medida y un segmento comprendido entre ellos. Crea un triángulo distinto, pero usando las mismas medidas de los elementos con que trazaste el primer triángulo.

2. ¿Lograste construir el nuevo triángulo? ¿Por qué?

Se construyó otro triángulo, pero no es distinto al inicial puesto que tiene las mismas medidas de ángulos y el lado comprendido entre éstos también de la misma medida.

3. ¿Qué características en común tienen los elementos de los triángulos que construiste?

Los ángulos correspondientes son congruentes y el segmento comprendido entre éstos también es congruente.

4. Observa, mueve y responde: ¿Son congruentes los triángulos? ¿Por qué?

Si son congruentes, porque los ángulos correspondientes son congruentes y el segmento comprendido entre éstos también es congruente al correspondiente.

5. Responde y **argumenta** a partir de las observaciones realizadas con anterioridad: ¿Es posible establecer la congruencia de dos o más triángulos a partir del segmento comprendido entre dos ángulos?

Sí es posible establecer la congruencia porque tienen dos ángulos correspondientes congruentes o iguales y el segmento comprendido entre esos dos ángulos es congruente a su correspondiente.

6.5.10 Actividad 2.7 Lado, Ángulo, Ángulo

Las construcciones de triángulos con tres de las seis partes que los conforman finalizaban con el caso donde los alumnos elegirían medidas para los ángulos interiores del triángulo, de manera que cumplieran con la propiedad de la rigidez triangular. Además, el segmento que también sería de medida arbitraria no estaba comprendido en los ángulos. Se les indicaba a los alumnos con especial ahínco que evitaran usar ángulos de medidas congruentes y enteros. La indicación uno, como en los casos anteriores, motivaba a que el alumno explorara en la construcción. La pregunta dos emanaba la conjetura. La pregunta tres exploraba nuevamente el primer planteamiento de la conjetura, pero ahora por separado los elementos con los que se construyeron los triángulos. Se debían emplear las propiedades construidas con anterioridad para ángulos y segmentos.

Las preguntas cuatro y cinco se formularon para que el alumno proporcionara argumentos con base en lo concluido con anterioridad (las preguntas sobre exploración y formulación de conjetura), tanto en la actividad como las conjeturas validadas en los otros casos para probar la congruencia de triángulos. La pregunta seis se seccionó en dos partes, con el objetivo de inducir al alumno a procesos de reificación o generalización. La primera parte de la pregunta seis aspiraba a recapitular las conjeturas validadas para la congruencia de triángulos, que los alumnos generalizaran las propiedades geométricas con las que se debe cumplir la congruencia en figuras. La otra parte de la pregunta seis buscaba que los alumnos dieran argumentos para los casos en los que no se puede comprobar la congruencia en triángulos con los elementos que se solicitaba construir el triángulo.

1. Con dos ángulos de medida arbitraria y un segmento que no esté en medio de los ángulos, construye un triángulo $\triangle WDZ$. Ahora traza un triángulo diferente, pero usando las mismas medidas de los elementos con que trazaste el primer triángulo.

2. ¿Cuántos triángulos diferentes lograste trazar? ¿Por qué?

Se pudo trazar otro triángulo, pero no es distinto al original en lados, sus ángulos miden lo mismo para que exista la congruencia deben tener sus lados y sus ángulos correspondientes congruentes o iguales.

3. Observa, mueve y responde: ¿Qué características tienen los elementos de los triángulos?

Los ángulos son congruentes y el lado no incluido en los ángulos también lo es.

4. ¿Son congruentes los triángulos? ¿Por qué?

Los triángulos son congruentes, porque los lados correspondientes no incluidos son congruentes y ángulos correspondientes también son congruentes.

5. Una vez que realizada la actividad responde: ¿Cómo puedes afirmar la congruencia de dos o más triángulos dados dos ángulos y un segmento no incluido en éstos?

Se puede afirmar porque sus lados correspondientes son congruentes, también su ángulo opuesto lo es.

6. Cada una de las actividades anteriores usó ciertas formas (LLA, LLL, ALA, AAA, LAL, LAA) para verificar la congruencia de dos o más triángulos.

¿Cuáles son las formas que sirven para verificar la congruencia? ¿Por qué?

Las formas son Lado, Lado, Lado; Ángulo, Lado, Ángulo; Lado, Ángulo, Lado; Lado, Ángulo, Ángulo. Porque sus lados correspondientes son congruentes o iguales, además, sus ángulos correspondientes también son congruentes.

¿Por qué no te sirven las otras formas?

Las otras formas Lado, Lado, Ángulo y Ángulo, Ángulo, Ángulo no garantizan la congruencia debido a que para que ésta exista se deben tener lados correspondientes congruentes o iguales, lo mismo ángulos correspondientes congruentes. Los casos mencionados no tienen esa particularidad.

6.5.11 Actividad 3 Teorema 1

La actividad 3 "Teorema 1" tenía el objetivo de establecer la proporcionalidad de segmentos, particularmente de los segmentos que se forman en rectas paralelas cortadas por una transversal. Las indicaciones de la uno a la cinco corresponden a la construcción que el alumno debía realizar en el software, la pregunta seis se formuló para que el alumno explorara y probara en un caso en particular qué cociente resultaba de comparar las medidas de los segmentos, la respuesta esperada era que los cocientes de esas razones eran iguales. En la pregunta siete el alumno, ahora moviendo una de las transversales, debía obtener los cocientes al comparar los segmentos. Con esos dos casos, el de la pregunta seis y el de la siete, se esperaba que pudieran plantear la conjetura de que los cocientes eran iguales, aunque las medidas de los segmentos fueran diferentes. La pregunta ocho se enfocó a la segunda transversal con el objetivo de reafirmar la conjetura establecida previamente.

En el caso de la exploración y planteo de la conjetura para la comparación de segmentos al mover las rectas paralelas se abordó en la pregunta nueve; para la pregunta diez el alumno que ya había explorado y sistematizado la conjetura para transversales y para el caso de una recta paralela se esperaba que se estableciera que los cocientes que resultan de comprar segmentos en rectas que son cortadas por transversales son iguales, sin embargo, faltaba decir por qué se podía observara esa regularidad en la igualdad de cocientes. Lo anterior descrito permite justificar las preguntas once y doce, donde el alumno establece que, debido a que se constituye la comparación de un conjunto de razones que forman proporciones es que se pueden obtener cocientes iguales. Esta actividad auxiliará al alumno en el establecimiento de la proporcionalidad de triángulos para determinar los criterios de semejanza, ya que el cociente obtenido en las comparaciones de segmentos se le denomina razón de proporcionalidad, la cual cambiará de nombre a razón de semejanza y razón de homotecia.

1. Traza tres rectas paralelas y renómbralas como R_1, R_2 y R_3 respectivamente.
2. Traza dos rectas que corten a las rectas paralelas. No tienen que pasar por los puntos generados por las paralelas.
3. Renombra las rectas como $Trans_1$ y $Trans_2$ para que puedas diferenciarlas. Las rectas trazadas que cortan a las paralelas se llaman transversales.
4. Mueve las transversales hasta que se crucen y encuentra su punto de intersección, dicho punto lo renombras como "I". Encuentra también los puntos de intersección de las transversales con las paralelas.
5. Renombra los puntos de intersección de $Trans_1$ como M_1, M_2 y M_3 (empieza a nombrar de manera ascendente, a partir del punto de intersección I), renombra los de $Trans_2$ como N_1, N_2 y N_3(inicia a nombrar del punto de intersección I de manera ascendente).
6. Mide los segmentos $\overline{IM_1}$, $\overline{IM_2}$, $\overline{IM_3}$, $\overline{IN_1}$, $\overline{IN_2}$, $\overline{IN_3}$ además obtén el cociente que resulte de dividir $\frac{\overline{IN1}}{\overline{IM1}}$, $\frac{\overline{IN2}}{\overline{IM2}}$, $\frac{\overline{IN3}}{\overline{IM3}}$. Anota tus resultados en el espacio en blanco y responde ¿Cómo es el cociente en las comparaciones que hiciste?

Los cocientes son iguales.

<u>Sugerencia:</u> puedes obtener los cocientes introduciendo los valores en la barra "Entrada", los resultados te aparecerán en el área de "vista algebraica"

7. Mueve una de las transversales y vuelve a obtener los cocientes con las nuevas medidas que resultaron de mover la transversal. Escribe los segmentos

comparados y el nombre de la transversal que moviste ¿Qué se mantiene? ¿Por qué?

Los cocientes son iguales no importa que se mueva la transversal. Porque guardan una relación de proporción.

8. ¿Qué sucederá con los cocientes si mueves la otra transversal? ¿Por qué?

Los cocientes van a ser iguales entre sí.

9. Mueve una de las rectas paralelas vuelve a obtener los cocientes. Escribe los segmentos comparados y el nombre de la recta que moviste. ¿Qué se mantiene? ¿Por qué?

Los cocientes se mantienen a pesar de que el tamaño de los segmentos cambia.

10. ¿Qué sucederá con los cocientes si mueves las demás rectas paralelas? ¿Por qué?

Los cocientes se van a mantener iguales. Porque al establecer las razones de las medidas se obtienen igualdad de razones.

11. ¿Qué condiciones se deben cumplir al comparar segmentos? ¿Cómo llamarías a dicha condición?

Los cocientes deben ser los mismos. Proporcionalidad, debe existir proporcionalidad en los segmentos para que el cociente sea el mismo. Al cociente se le llama razón de proporcionalidad.

12. Haz un enunciado general donde resumas: ¿Cómo debe ser la proporcionalidad de segmentos? ¿Qué características deben tener, para poder decir entonces lo que significa tener segmentos proporcionales?

Las rectas que son paralelas al ser cortadas por transversales forman segmentos proporcionales, se establecen razones entre los segmentos correspondientes de las rectas para formar una proporción. El cociente obtenido de la proporción se le llama razón de proporcionalidad, el cual debe ser el mismo para cada caso que se está comparando.

6.5.12 Actividad 4. Semejanza

La actividad 4 "Semejanza" incluye seis casos con los que el alumno deberá establecer los criterios de semejanza. La primera pregunta de la actividad tenía la intención de conocer cómo los alumnos determinaban la semejanza, además la segunda pregunta rescataba la definición de triángulo y la propiedad de rigidez triangular. Debido a la diversidad de respuestas a ambas preguntas no hay una esperada. La indicación tres daba al alumno la opción de explorar nuevamente la construcción y recordarle que un triángulo es un polígono de tres lados y tres vértices por lo que hay un número limitado de triángulos que se forman con las transversales sobre las paralelas. La pregunta cuatro se formuló para identificar por lo menos una propiedad de las figuras semejantes.

1. ¿Qué formas conoces para verificar la semejanza de dos o más triángulos?

2. Vuelve a la construcción que realizaste en la **Actividad 3** y responde **¿Cuántos triángulos ves** que se forman con las transversales sobre las paralelas? **Dibuja** los triángulos tal como los ves en la pantalla. **Guarda** también una impresión de pantalla.

3. Une los puntos (vértices) para formar los triángulos vistos.

4. ¿Qué características tienen las figuras semejantes?

Las figuras semejantes se caracterizan por tener lados correspondientes proporcionales y ángulos correspondientes congruentes.

6.5.13 Actividad 4.1 Lado, Lado, Lado

La actividad 4.1 “Lado, Lado, Lado” corresponde a uno de los criterios de semejanza, se decidió empezar por este criterio porque los alumnos ya tenían la medida de dos segmentos que se obtuvieron en la actividad de Teorema 1, entonces era más provechoso usar ese antecedente. La indicación uno pretendió organizar los triángulos que los alumnos compararían para establecer la proporcionalidad, aquí se genera la conjetura para que en la segunda pregunta se puedan usar los conocimientos obtenidos en la actividad sobre proporcionalidad de segmentos y entonces se hable sobre la proporcionalidad que hay en los lados correspondientes de los triángulos.

La pregunta tres se diseñó para que el alumno determinara con base en la proporcionalidad de los lados, que los triángulos son semejantes. En la pregunta cuatro el alumno establece una generalización, argumenta que debido a la proporcionalidad de los lados de los triángulos éstos son semejantes, además, si se comparan dos pares de lados correspondientes, es suficiente para asegurar la semejanza.

1. Ya tienes las medidas de dos lados de cada triángulo, obtén la del tercer lado, también saca el cociente que resulte de dividir las medidas de lados correspondientes de los triángulos. Recuerda que un lado correspondiente es aquel que está en posición coincidente en las figuras. **Anota el nombre de los triángulos, el nombre de los lados que vas a comprar, las medidas de los lados y el cociente.**

2. Con base en tus resultados responde: ¿Cómo son los lados de los triángulos? ¿Por qué?

Los lados de los triángulos son proporcionales. Porque se compararon las medidas de los lados correspondientes las cuales guardan una razón de semejanza.

3. ¿Cómo son entonces los triángulos?

Los triángulos son semejantes.

4. ¿Cuántos pares de lados es suficiente comparar para poder determinar la propiedad anterior? ¿Por qué?

Los pares de lados que se deben comparar para poder determinar la semejanza en triángulos son dos, debido a que si son proporcionales el tercer par de lados lo será.

6.5.14 Actividad 4.2 Ángulo, Ángulo, Ángulo

La actividad 4.2 se enfocó a determinar si comparando los ángulos correspondientes de dos o más triángulos, era suficiente para asegurar la congruencia de éstos. Se retomaron conocimientos de la actividad de "Congruencia", específicamente el caso donde se construyeron triángulos con tres ángulos, el cual no determinó la congruencia, pero sí ayudó para que el alumno reconociera que el tener ángulos congruentes en un triángulo, pueden tenerse las medidas de esos mismos ángulos en otro triángulo, pero con medidas de lados diferentes. También el alumno recordó que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, por lo que con la suma de dos ángulos se puede determinar la medida del tercero.

El caso de la primera pregunta retomó la generalización establecida en las características de los ángulos en rectas paralelas que son cortados por la transversal, específicamente la congruencia de los ángulos correspondientes, así que en la pregunta uno sólo se extendía los conocimientos. La pregunta dos retomó la suma de los ángulos internos del triángulo, pretendió que el alumno argumentara las razones por las que es suficiente comparar dos pares de ángulos. La respuesta a la pregunta tres era para concretar la conjetura sobre los ángulos para determinar la semejanza y ofrecer algunos argumentos.

1. Ahora te vas a centrar en los ángulos de tus triángulos: ¿Cómo son los ángulos de tus triángulos? ¿Por qué?

Los ángulos son congruentes. Porque son ángulos correspondientes en rectas paralelas.

2. ¿Cuántos pares de ángulos es suficiente comparar para poder determinar la propiedad anterior? ¿Por qué?

Los pares que se deben comparar son dos, porque sí dos pares de ángulos correspondientes son congruentes el tercero lo será debido a que ya se conocen dos ángulos y el tercero se puede obtener por la suma de los ángulos internos de un triángulo.

3. ¿Cómo son los triángulos entre sí? ¿Por qué?

Los triángulos son semejantes. Porque tienen sus ángulos correspondientes congruentes y sus lados proporcionales.

6.5.15 Actividad 4.4 Lado, Ángulo, Lado

Las actividades 4.3,4.4, 4.5 y 4.6 ya no centraban la atención en la construcción en sí, se formuló sólo una pregunta para que el alumno de manera deductiva, con las definiciones previas, las conjeturas probadas, etc., establecieran la semejanza en casos como lado, ángulo, lado; ángulo, lado, ángulo; lado, lado, ángulo y lado, ángulo, ángulo. El caso de la segunda pregunta de la actividad 4.6 se diseñó para promover procesos matemáticos como la generalización y la reificación, ya que los alumnos debían sintetizar los postulados de semejanza, basados en particularizaciones y las características de estos, apoyados de procesos como la descomposición.

1. Basándote en tus resultados anteriores determina ¿Qué sucede en dos o más triángulos si tienes pares de lados (correspondientes) proporcionales y el ángulo comprendido entre éstos congruente? ¿A qué se debe tal hecho?

Los triángulos van a ser semejantes, porque tiene dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre esos dos lados es congruente con su correspondiente.

6.5.16 Actividad 4. 4 Ángulo, Lado, Ángulo

1. Con las conclusiones anteriores determina ¿Qué sucede en dos o más triángulos si tienes pares de ángulos congruentes y el lado comprendido entre ellos proporcional? ¿Por qué?

Los triángulos serán semejantes porque tienen dos parejas de ángulos correspondientes congruentes y el lado comprendido en esos dos ángulos es congruente a su correspondiente.

6.5.17 Actividad 4. 5 Lado, Lado, Ángulo

1. Vuelve a tu construcción, mueve, observa y responde: ¿Cómo son dos o más triángulos que tienen pares de lados correspondientes proporcionales y pares de ángulos no comprendidos entre ellos (entre los lados) congruentes? ¿Por qué?

Los triángulos no son semejantes, no se puede asegurar la semejanza

6.5.18 Actividad 4. 6 Lado, Ángulo, Ángulo

1. Una vez más emplea lo obtenido en las anteriores actividades y responde: ¿Cómo son dos o más triángulos si tienes pares de lados correspondientes proporcionales, con pares de ángulos correspondientes congruentes?

Los triángulos serán semejantes porque tienen pares de ángulos correspondientes congruentes, además las rectas paralelas al ser cortadas por una trasversal formar ángulos correspondientes congruentes. El lado opuesto a uno de los triángulos es proporcional al correspondiente del otro triángulo, por eso se dice que los triángulos son semejantes.

2. A manera de resumen usa las conclusiones de las actividades de semejanza y enuncia: ¿Cuántas y cuáles condiciones suficientes hay para poder determinar la semejanza entre dos o más triángulos?

Para determinar la semejanza de dos o más triángulos se pueden emplear combinaciones de elementos llamados "criterios de semejanza". El criterio Ángulo, Ángulo, Ángulo, donde con dos pares de ángulos correspondientes congruentes se puede asegurar la semejanza de los triángulos. El criterio Lado, Lado, Lado donde debe haber tres lados proporcionales a sus correspondientes para decir que son semejantes. El criterio Lado, Ángulo, Lado, si el ángulo incluido en un par de lados proporcionales es congruente a su correspondiente entonces los triángulos son semejantes. El criterio Ángulo, Lado, Ángulo determina la semejanza porque hay dos ángulos congruentes a sus correspondientes y el segmento comprendido entre éstos es proporcional a su correspondiente.

6.5.19 Actividad 5 Homotecia directa

La actividad 5 "Homotecia directa" y "Homotecia inversa", no requirió que el alumno realizara construcciones en GeoGebra, se le proporcionó un archivo con dos triángulos. Las actividades se diseñaron para que el estudiante usara definiciones, postulados, teoremas, generalizaciones, construidas a lo largo de las actividades previas. La primera pregunta se formuló para que mediante un proceso visual el alumno determinara algunas propiedades geométricas estudiadas con anterioridad como paralelismo, congruencia de ángulos correspondientes, proporcionalidad de segmentos.

La segunda pregunta rescató el procedimiento para la obtención de la razón o constante de proporcionalidad que se estableció en la actividad de Teorema 1, posteriormente esa definición de razón de proporcionalidad en la actividad de semejanza se le llamó "razón de semejanza". En el caso de la actividad de homotecia, se le llama "razón de homotecia", de manera que los conceptos que están involucrados en la obtención de dicha razón son: lados correspondientes, razones, proporciones y cociente.

Las preguntas tres y cuatro se formularon para recordar el paralelismo que deben guardar las rectas al realizar una transformación geométrica. La pregunta cinco se enfocó a que el alumno con una exploración en la construcción moviera el triángulo homotético sin cruzar el centro de homotecia y observara lo que sucedía con los vértices correspondientes. Esta pregunta intentó generar los inicios de una conjetura para las figuras homotéticas, porque el alumno probaba y observaba para varios casos lo que ocurría con los vértices correspondientes al ampliar la figura.

Como una transformación geométrica implica un cambio, se deben tomar en cuenta, la figura original, aquello que generó el cambio, ya sea una regla o una operación y la figura resultante del cambio. Lo anterior justifica la pregunta seis cuyo objetivo fue determinar aquella regla u operación, es decir encontrar el intervalo en que debe estar la razón de homotecia para obtener una figura homotética ampliada. El caso de la operación o intervalo que se debe considerar para obtener una figura homotética que esté entre el centro de homotecia y la figura original se abordó en la pregunta siete, de manera que en la pregunta ocho el alumno pudiera descomponer, es decir reconocer los dos casos en los que se da la homotecia directa y describir las características de las figuras homotéticas en cada caso.

Abre el archivo Homotecia.ggb observa las construcciones y responde. **No muevas nada**:

1. ¿Qué propiedades de las estudiadas anteriormente tienen esas dos figuras entre sí?

Visualmente parecen ser semejantes por el criterio Lado, Lado, Lado, por Ángulo, Ángulo o bien por Lado, Ángulo, Lado. Sus lados correspondientes son paralelos.

2. Describe el procedimiento que usarás para encontrar la razón de semejanza y anota cuál es.

Tomar la medida de los lados del triángulo mayor y establecer razones con

las medidas correspondientes del triángulo menor para poder sacar la razón de semejanza. También se puede obtener a la inversa, es decir las medidas del triángulo menor entre las correspondientes del triángulo mayor.

3. ¿Cuál es la relación del segmento $\overline{AC}$ con respecto al segmento $\overline{A_1C_1}$?

Los segmentos son paralelos.

4. ¿Cómo son los segmentos restantes ($\overline{BC}$ y $\overline{AB}$) respecto a sus segmentos correspondientes ($\overline{B_1C_1}$ y $\overline{A_1B_1}$)?

Los segmentos también son paralelos.

El punto denotado como "$Centro_H$" que está en la construcción, se llama **centro de homotecia** y se dice que dos figuras son homotéticas porque sufren una transformación geométrica, donde a partir de una figura dada se obtiene una o varias en tamaño mayor (ampliada) o en tamaño menor (reducida), determinada por una **razón de homotecia *K***.

5. Mueve el triángulo mayor por el vértice A_1 , sin cruzar el Centro de Homotecia y responde: ¿Qué sucede con el vértice correspondiente de A, B y C? **Sugerencia:** activa "rastro" para cada vértice correspondiente.

Los vértices correspondientes se trasladan por una recta hacia la izquierda del triángulo original y hacia el centro de homotecia.

6. ¿En qué intervalo debe estar la razón de homotecia en figuras ampliadas? ¿Por qué?

La razón de homotecia representado por K debe ser mayor que 1, K>1.

7. ¿En qué intervalo está la razón de homotecia si la figura homotética está entre la figura original y el centro de homotecia?

El intervalo es 0<K<1.

8. Considera las observaciones anteriores para poder responder: ¿Qué propiedades geométricas se conservan en las figuras homotéticas cuando la razón de homotecia es mayor que cero?

Hay que distinguir dos casos.

1. Cuando 0<K<1: la figura homotética. En este caso los ángulos son congruentes o iguales a sus homólogos o correspondientes y los lados de los triángulos son proporcionales a sus homólogos. Además, los lados de los triángulos son paralelos. Sin embargo, la figura homotética es menor a la figura original.
2. Cuando K>1: la figura homotética. Para este caso la figura homotética es mayor a la original, los ángulos son congruentes o iguales a sus homólogos o correspondientes y los lados de los triángulos son proporcionales con sus homólogos. Los lados también son paralelos.

6.5.21 Actividad 5.1 Homotecia inversa

El caso de la "Homotecia inversa" con la primera indicación se pretendió empezar a generar la conjetura, ahora el alumno explorando en la construcción debía cruzar el centro de homotecia y observara lo que sucedía con los vértices correspondientes. Para apoyar el planteo de la conjetura se pedía al alumno que activara el "rastro" para cada vértice. Como se trata de un movimiento de rotación los vértices se van a trasladar al lado derecho después del centro de homotecia, es ahí donde inicia la generación de la conjetura que se va a concretar con la pregunta diez, donde el alumno dando argumentos validará o reestructurará la conjetura sobre por qué la figura se invirtió.

La pregunta once se diseñó para que el alumno determinara qué características tiene la razón de homotecia para que las figuras homotéticas presenten la característica establecida en la conjetura. Con la pregunta doce nuevamente validan y replantear la conjetura si es que así se requiere, de manera que establezcan el intervalo que incluya a todas las figuras homotéticas con razón negativa. Una vez que el alumno ha explorado para varios casos particulares, determinará las características de las figuras homotéticas, también empleará definiciones establecidas previamente como los ángulos correspondientes en figuras semejantes y congruentes, paralelismo, proporcionalidad de lados, eso apoya los argumentos para la pregunta trece. El caso de la pregunta catorce sólo se centra en determinar las características de los ángulos en figura homotéticas, nuevamente se recurre a lo establecido en las actividades anteriores.

Las preguntas quince y dieciséis, aunque no tienen que ver con homotecia inversa se diseñaron para que el alumno tomara en cuenta las características de las figuras homotéticas con razón de homotecia 0 y 1, lo que se esperaba en esas dos preguntas es que de manera deductiva establecieran las propiedades utilizando los conocimientos abordados en actividades anteriores. Con esos dos casos particulares establecidos en las preguntas, finalizan las actividades.

Actividad 5.1 Homotecia Inversa

9. Mueve el triángulo mayor por el vértice A_1 , cruza el Centro de Homotecia y responde: ¿Qué sucede con el vértice correspondiente de A, B y C? **Sugerencia:** activa "rastro" para cada vértice correspondiente.

Los vértices correspondientes están en el lado opuesto a los del triángulo original, se trasladaron por una recta hacia la derecha de la figura original después del centro de homotecia.

10. ¿Qué le sucedió a la figura homotética? ¿Por qué?

La figura homotética se invirtió. Sufrió una rotación de 180°.

11. ¿Cómo es la razón de homotecia cuando las figuras presentan esta característica?

La razón de homotecia para este caso es menor que cero o negativa.

12. ¿En qué intervalo está la razón de homotecia para que las figuras presenten la característica arriba mencionada (respuesta a pregunta 10)?

El intervalo en que debe estar la razón de homotecia es menor que cero.

13. ¿Cuáles son las características de las figuras homotéticas cuando la razón de homotecia es negativa?

Los ángulos son congruentes o iguales a sus homólogos, los lados son proporcionales a sus correspondientes u homólogos, también son paralelos. Sin embargo, si la razón de homotecia es igual a −1 se tendrán figuras congruentes donde la figura homotética está invertida.

14. ¿Qué sucede con los ángulos de la figura homotética respecto a los ángulos de la figura original?

Los ángulos son congruentes o iguales.

15. ¿Cuáles son las características de las figuras homotéticas cuando la razón de homotecia es 0?

No hay transformación de figura para cuando K=0.

16. Describe las características de las figuras homotéticas cuando la razón de homotecia es igual a 1.

Los ángulos de la figura homotética son congruentes o iguales, los lados son congruentes o iguales y hay paralelismo en sus lados. Es decir, la figura homotética es congruente con la original.

VII. RESULTADOS

La sección está dedicada a mostrar los resultados más significativos de los análisis descriptivos-interpretativos que se realizaron. En esta investigación se empleó el método de estudio de casos, que sugiere estrategias de análisis como la *interpretación directa* de ejemplos individuales y la *suma de ejemplos* hasta poder decir algo sobre éstos como conjunto o clase. Como se mencionó en el tercer capítulo en el apartado de “selección de informantes”, el proceso se realizó en diversos momentos que se enunciarán nuevamente de forma breve.

El primer momento llamado *exploración-diagnóstico*, se centró en conocer las limitantes tanto del cuestionario diagnóstico, como de las actividades. El diagnóstico consistió en diez preguntas con conceptos como vértice, lado homólogo, figuras congruentes, figuras semejantes, lado adyacente, ángulo adyacente, razón, proporción, semejanza e ideas sobre la expresión “condición suficiente”. Los temas que se tomaron en cuenta correspondieron al Programa de Estudios 2011 para Educación Básica Secundaria. El orden de aplicación fue el siguiente: Diagnóstico, Teorema de Tales, Criterios de Congruencia, Criterios de Semejanza, Homotecia Directa e Inversa. En este primer momento se revelaron las dificultades de los alumnos al trabajar con SGD.

Los resultados del diagnóstico fueron que los alumnos confunden los conceptos de congruencia y semejanza, invierten las definiciones de éstos, además atribuyen algunas propiedades de la semejanza a la congruencia o de la congruencia a la semejanza (ver *Figura 24*). Otro de los resultados interesantes fue que una mayoría considerable de estudiantes asocia el término “igualdad” (*Figura 22* y *Figura 24*) como sinónimo de congruencia, también “similitud” (*Figura 25*) o “parecido” (*Figura 23*) con semejanza. Los otros conceptos incluidos en el diagnóstico presentaron ausencia en las definiciones.

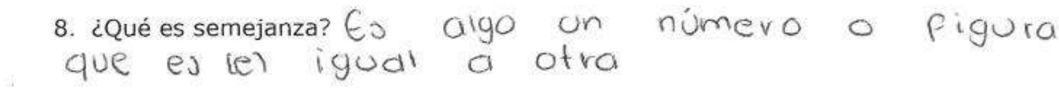
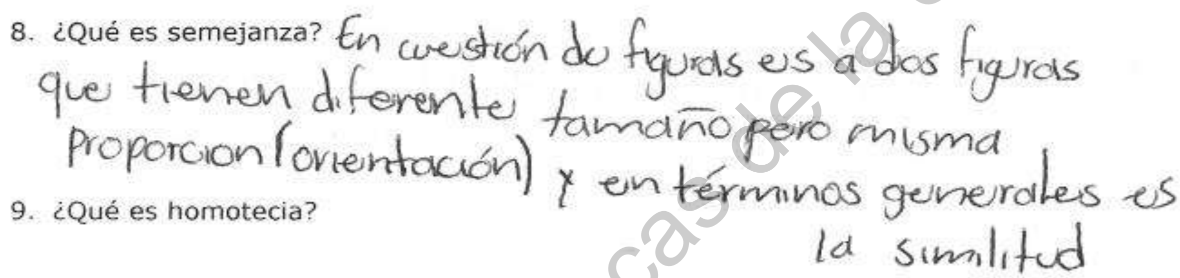
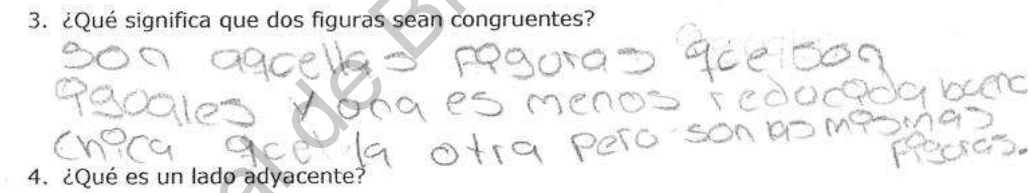

8. ¿Qué es semejanza? Es algo un número o figura que es (e) igual a otra

Figura 22. Ejemplo de concepción sobre semejanza.


8. ¿Qué es semejanza? En cuestión de figuras es a dos figuras que tienen diferente tamaño pero misma proporcion (orientación) y en términos generales es la similitud

9. ¿Qué es homotecia?

Figura 23. Ejemplo de concepción sobre semejanza como sinónimo de similitud.


3. ¿Qué significa que dos figuras sean congruentes? son aqcellas figuras qce son igoales y una es menos reducida pero chica qce la otra pero son las mismas figuras.

4. ¿Qué es un lado adyacente?

Figura 24. Ejemplo de atribución de aparentes propiedades de la semejanza a la congruencia de figuras.

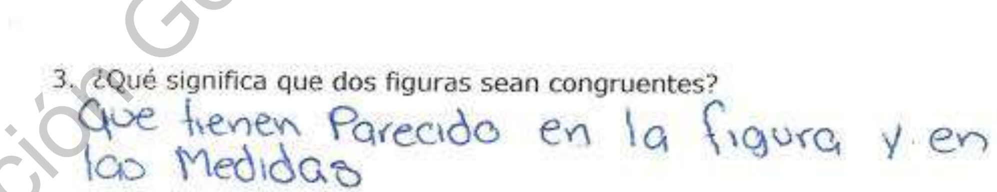

3. ¿Qué significa que dos figuras sean congruentes? Que tienen Parecido en la figura y en las Medidas

Figura 25. Ejemplo de uso de sinónimos para la semejanza.

Respecto a los resultados de las actividades la primera aplicación dejó ver que el orden en que se estructuraron los temas y las preguntas formuladas no permitían la elaboración de argumentos donde se manifestaran procesos matemáticos encaminados a la validación. Además, algunos problemas que se exteriorizaron con el uso de software fueron sobre querer usar las herramientas del software como si se tratara de instrumentos de medición físicos. Por ejemplo, al medir los ángulos de los triángulos querían hacerlo como con su transportador sin tomar en cuenta los tres puntos que se deben “marcar” para obtener la medida del ángulo. También presentaron dificultades con identificar cuál ángulo querían medir, porque no recordaban cuál “marcaron” primero y eso en ocasiones les generaba una doble medida del ángulo. Las *Figura 26* y *Figura 27* corresponden a reconstrucciones de los errores que los alumnos cometieron.

En el caso de la *Figura 26*, el alumno debía obtener la medida del ángulo de lado izquierdo formado con la paralela *a* con la transversal *c* y el punto *F*, obtuvo una medida para α= 270.22° pues marcó los puntos en el siguiente orden *D*, *F*, *A.* El caso del ángulo β= 269.78° el orden en que marcó los puntos fue *B*, *F*, *D*. Entonces debió marcar un punto nuevo en la transversal *c* para entonces obtener las medidas correspondientes a dichos ángulos.

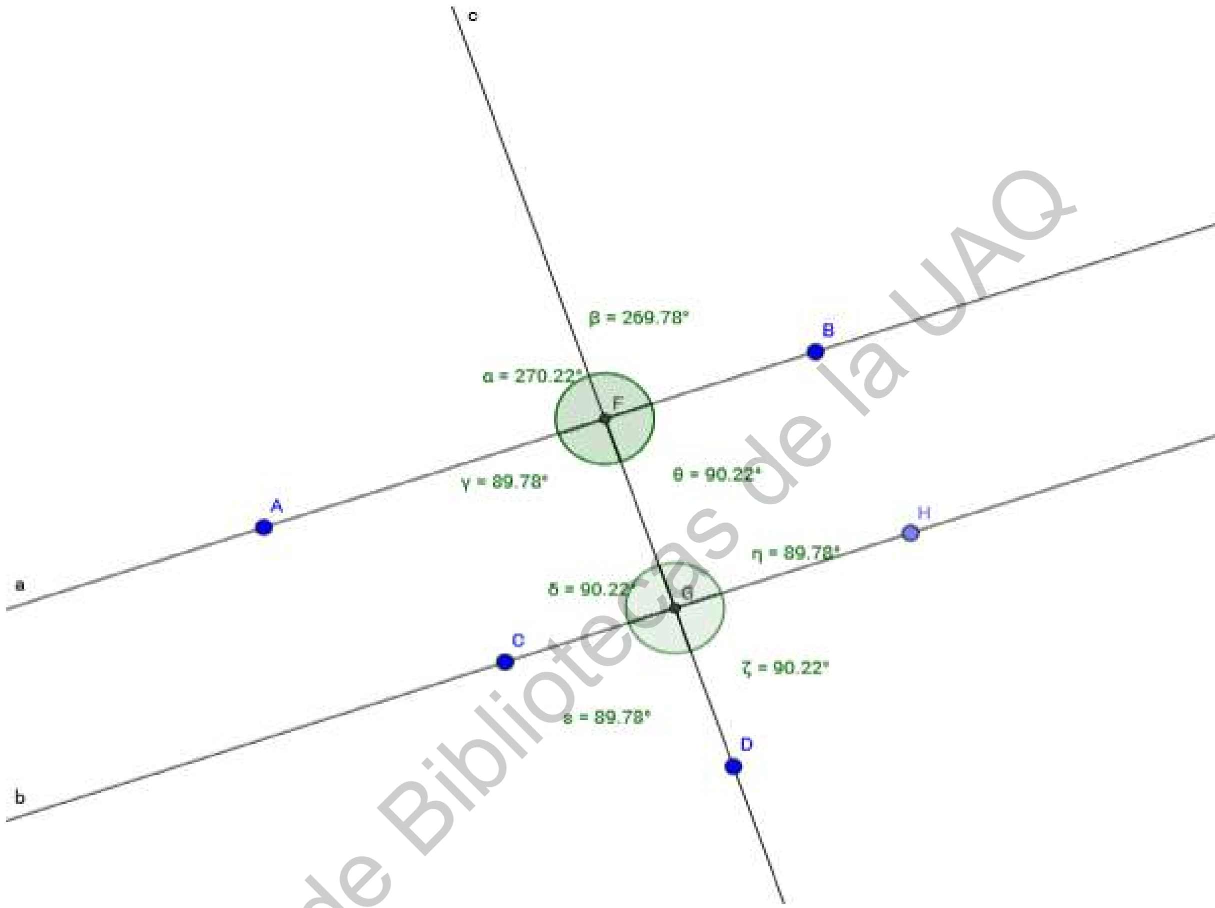


Figura 26. Errores de medición de ángulos con GeoGebra.

Otra de las opciones con las que se puede obtener la medida de un ángulo es seleccionando dos rectas, semirrectas o segmentos, en el caso mostrado en la *Figura 27* se deseaba obtener el tercer ángulo interior formado por J_1 y l_1 sin embargo, el alumno duplicó la medida del ángulo formado por J_1 y K_1.

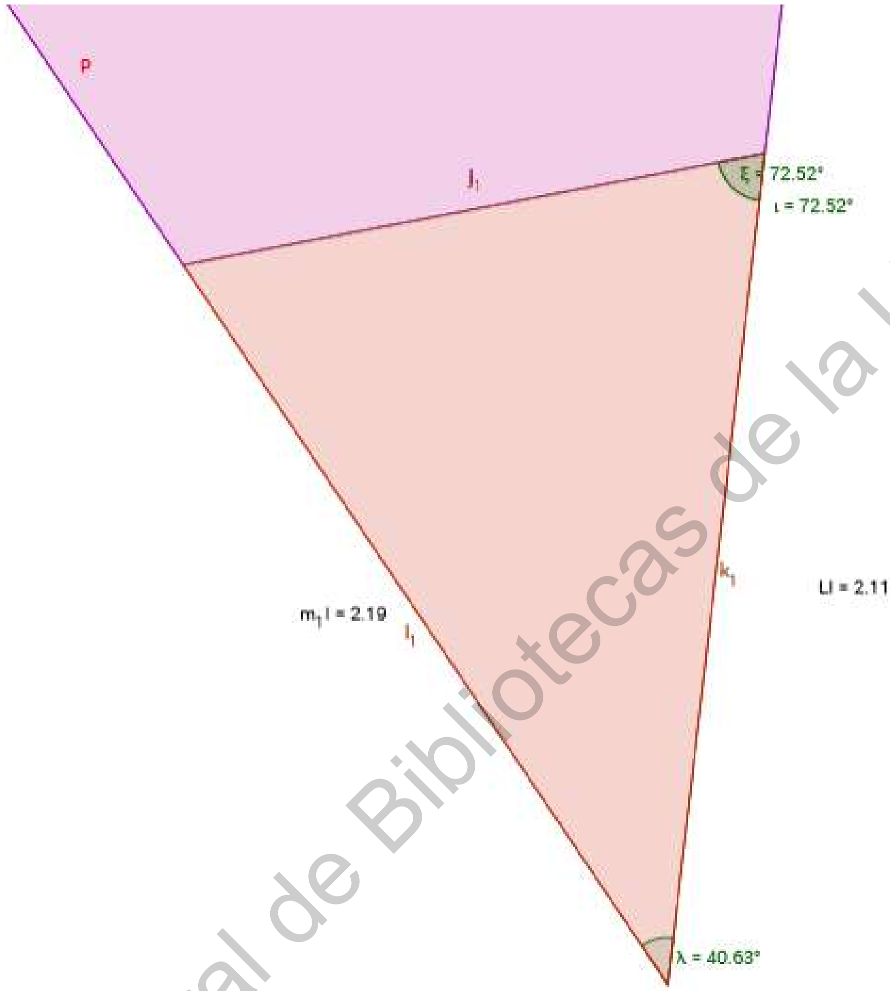


Figura 27. Duplicación de la medida de un ángulo.

El segundo momento denominado *reorganización* implicó la reestructuración del orden de aplicación de las actividades, se ampliaron los temas quedando como se enlista, para también ser aplicados: Diagnóstico, La circunferencia como lugar geométrico, Desigualdad Triangular y Rigidez Geométrica, Ángulos entre paralelas, Criterios de Congruencia, Teorema de Tales, Criterios de Semejanza, Homotecia Directa e Inversa. Las preguntas de las actividades para que permitieran la generación de conjeturas y argumentos se elaboraron atendiendo a la propuesta de la Unidad Cognitiva de los Teoremas. El número de preguntas del cuestionario de diagnóstico aumentó, incorporando algunas palabras a las preguntas para facilitar la comprensión de estas a los alumnos. Se incluyeron el concepto de circunferencia para que el alumno describiera sus propiedades geométricas y la definición de circunferencia para que escribiera el concepto.

Los resultados más significativos de la etapa de *reorganización* fueron que, a pesar de que los alumnos informantes conocían y habían trabajado con GeoGebra, eso no determinó que emplearan el software como una herramienta que les ayudara a observar regularidades en las construcciones para plantear la conjetura y validarla. Se hicieron ajustes mínimos a la redacción de las preguntas sobre todo porque en este grupo de alumnos también prevalecieron como sinónimos los conceptos de congruencia-igualdad y semejanza-similitud-parecido (*Figura 28* y *Figura 29*).

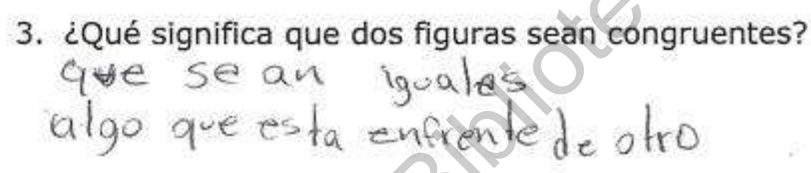

3. ¿Qué significa que dos figuras sean congruentes?
que se an iguales
algo que esta enfrente de otro

Figura 28. Ejemplo de sinónimo para la congruencia.

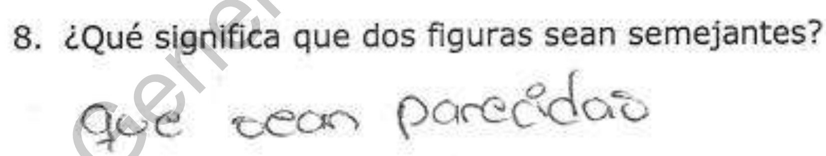

8. ¿Qué significa que dos figuras sean semejantes?
que sean parecidos

Figura 29. Uso de sinónimos para la semejanza.

La *exploración-diagnóstico* y la *reorganización* proporcionaron información para establecer la categorización de los atributos que debían tener los informantes, así como el contexto donde se concluiría la investigación. De acuerdo con Rodríguez et al, (1999) hay una selección de informantes denominada *casos ideal-típicos*, cuyas características están enfocadas a definir el desarrollo de un perfil ideal que deberán cumplir los sujetos informantes. Los atributos del perfil deben permitir al investigador obtener información suficiente orientada al cumplimiento de los objetivos de la investigación. Es decir, que los sujetos informadores manifestaran de forma escrita, verbal y en construcciones en GeoGebra algunos de los procesos matemáticos al validar su conocimiento matemático en tareas geométricas. Que los contendidos a trabajar en la investigación hayan sido abordados previamente con el profesor. Que la escuela secundaria contara con recursos tecnológicos como computadoras, cañón para la orientación de las construcciones con el software.

Una vez establecidos los criterios para la selección de informantes y del contexto de aplicación se llegó a los momentos nominados de *consolidación* y *conclusivo.* En la consolidación se les hicieron ajustes mínimos a las actividades y al cuestionario diagnóstico. Las precisiones realizadas correspondieron al orden de aparición de las preguntas de las actividades y a agregar alguna información a los cuestionamientos del diagnóstico para que resultaran mayormente entendibles a los alumnos. En cuanto a la secuencia de aplicación de las actividades fue la misma que en el momento de reorganización. Los alumnos de esta escuela, de modalidad Telesecundaria, no conocían el software GeoGebra.

Los resultados de los momentos descritos en los párrafos antepuestos proporcionaron información invariante para categorizar el trabajo de los alumnos, que fueron exhibidos en planteo de conjetura, argumentos escritos y argumentos verbales. Los informes escritos, verbales y los archivos en GeoGebra se contrastaron y se obtuvieron dos categorías. La primera fue de los signos evocados durante la resolución de las hojas de trabajo con el uso del software GeoGebra lo cual evidenció un *arraigo* en el software, pues los alumnos en sus argumentos no evocaron signos matemáticos como consecuencia de un tránsito entre los signos del artefacto y los signos pivote. La segunda categoría estrechamente ligada a los signos fue la de *procesos matemáticos,* que los alumnos manifestaron en el planteo de la conjetura y en los argumentos que intentaron probar la validez de la conjetura suscitada.

7.1 Signos evocados con el uso del artefacto y el arraigo en el artefacto

Debido al potencial semiótico que se asumió para el software de geometría dinámica GeoGebra se le consideró, en términos de Mariotti (2009) como una herramienta de mediación semiótica que tiene la posibilidad de guiar a los estudiantes a vincular significados personales que surgen del uso del artefacto con los significados matemáticos.

En el proceso de mediación semiótica intervienen distintos tipos de signos, los del artefacto: tienen que ver con el contexto de uso de este, generalmente partes o acciones realizadas con el artefacto; los signos matemáticos, están en el contexto matemático como proposiciones, definiciones, etc., y son expresados en el salón de clases. Finalmente están los signos pivote que son de carácter polisémico, este tipo de signos se caracterizan por ser expresiones del lenguaje natural que tienen una correspondencia con términos matemáticos, su dualidad es usada para pasar del contexto del artefacto al contexto matemático.

La tabla muestra algunos de los signos pivote, del artefacto que se encontraron en las respuestas de los alumnos, los signos pivote tienen la interpretación que les permitió transitar del signo del artefacto, al lenguaje natural y asociarlo con el signo matemático. Los ejemplos de los signos del artefacto también fueron el resultado de encontrar regularidades en las expresiones verbales de los alumnos, así como en las escritas de aquellas acciones o elementos propiamente del software. Los signos matemáticos corresponden a los conceptos con sus definiciones que se pretendía que el alumno empelara como respaldo a sus argumentos al validar la conjetura.

Se consideró como arraigo en el artefacto aquellos argumentos escritos y verbales que incluyeron signos evidenciados en expresiones o acciones que son propiamente del software y que no evolucionaron a los signos matemáticos vía los signos pivote. Lo mostrado en la Tabla 2 corresponde a los signos invariantes que se encontraron en las hojas de trabajo. En el caso de los deícticos usados tanto por alumnos como por el instructor, en este trabajo se consideraron como signos del artefacto porque se emplearon para indicar elementos en la pantalla alusivos a la construcción como rectas, ángulos, lados, figuras, medidas, circunferencias, puntos, entre otros.

Tabla 2. *Ejemplos de signos evocados con el uso del artefacto.*

Tipo de Signo	Signos del artefacto	Signos pivote	Signos matemáticos
Ejemplos	Mover el punto, la línea, la raya, la línea, punto, los puntos, “pedazos” “cachitos”, uso de deícticos “este, ese, aquel, aquí, ahí”.	Empalmar-intersecar Una sobre la otra-intersecar, Chocar-intersecar, Chocar-límite, Juntar-intersecar, Igualdad-congruencia, Encimar, empalmar-congruencia, Parecido-semejanza, Proporcional-semejante, Al revés, Inversión, Voltear -rotación, Cero, Punto H -centro de homotecia, Copia, Figura pirata -figura homotética,	Vértices, vértices homólogos, vértices correspondientes, triángulo, circunferencia, círculo, paralelas, transversales, ángulos, segmentos, centro de homotecia, razón de homotecia, lados correspondientes, ángulos correspondientes, congruencia, razón de semejanza, proporcionalidad, semejanza, figura homotética, intervalo, rotación.

Los siguientes diálogos (Tabla 3 y Tabla 4) pretenden reflejar el papel de los signos pivote para discurrir de los signos del artefacto a los signos matemáticos. La actividad de “Construcciones”, cuyo objetivo era que el alumno construyera la regla de la desigualdad triangular, así como la rigidez, fue de donde se tomaron las conversaciones. Los segmentos continuos (________) representan los signos del artefacto-signos pivote y los segmentos discontinuos (_ _ _ _ _) los signos matemáticos que aparecieron en el discurso de los alumnos.

Al alumno en la etapa de exploración se le solicitaba realizar una construcción con dos circunferencias (*Figura 30*), cuyos puntos nuevos sobre la circunferencia (en la construcción están denotados como E y F) debían unirse con el centro de su respectiva circunferencia (en la construcción los centros son A y B), esos puntos nuevos de los radios debían “juntarse” para esbozar la conjetura sobre la desigualdad triangular.

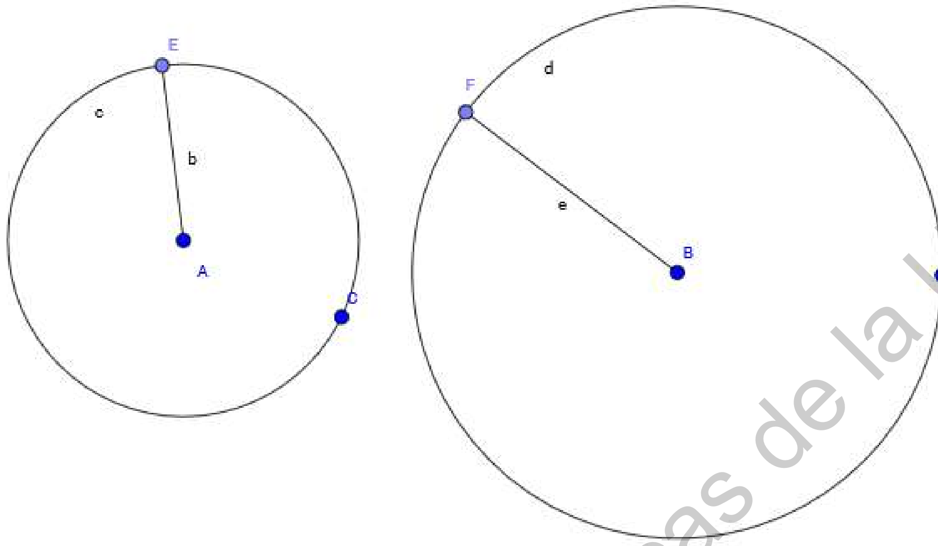
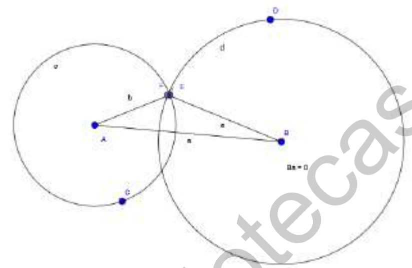
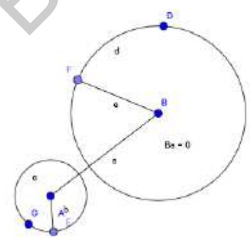


Figura 30. Construcción realizada en la etapa de exploración para esbozar la conjetura sobre la desigualdad triangular.

Tabla 3. *Signos pivote y signos matemáticos en diálogos con alumnos.*

Diálogo	Figuras	Comentarios
I*: a ver cuéntenme qué es lo que están haciendo.* A: *estamos ampliando la circunferencia para así poder que se empalmen nuestros dos puntos nuevos…así, no, no mucho… (ordenando a su compañero J que movía las circunferencias). J: ¡eh ya formó un triángulo!* I*: ¿Cuándo desaparecerá la figura?* A*: cuando quitamos nuestras circunferencias o -interviene J diciendo-reducimos los círculos se desformarían.* I*: ¿Cuál es la relación entre las medidas de los lados menores respecto a la medida del lado mayor?* A*: los puntos finales (el alumno se refería a los puntos donde "terminan" los segmentos).* I*: ¿los puntos finales?, pero la pregunta se refiere a las medidas, ahorita no se centre en los puntos, sino en las medidas, dice usted que no podemos construir el triángulo porque no cerraría y acá qué ¿sí cierra? (en la construcción en GeoGebra) cómo son las medidas de los lados menores respecto a la medida del lado mayor.*	 *Figura 31*. Formación del triángulo al unir los radios de las circunferencias.  *Figura 32*. Separación de las circunferencias donde el triángulo "desaparecía".	En la etapa de exploración los alumnos debían unir los "puntos nuevos" de las circunferencias con sus centros, de manera que después esos puntos nuevos coincidieran para formar un triángulo. Una vez que veían el triángulo formado por la unión de los puntos nuevos debían argumentar por qué se formaba dicha figura, así mismo proporcionar razones para cuando la figura desaparecía. Aquí los alumnos emplearon signos pivote como "quitar" aludiendo a reducir el tamaño de las circunferencias, aunque ellos los llaman círculos. "Desformar" lo utilizaron para referirse a cuando no es posible construir el triángulo. La pregunta que motivaba a plantear la conjetura era sobre la relación entre las medidas de los

A: *que dos lados son casi iguales, más que uno es un poco más chico, bueno bastante, a lo que estos dos son casi parecidos.*

I: *a ver mueva esta circunferencia (señalando en la pantalla) para que este lado no se parezca a este (tenía un triángulo "aparentemente" isósceles).*

A: *tendría que mover uno de los lados para que sea un poco más grande.*

I: *¿a ver y cuándo desaparecía el triángulo?*

A: *¿Cuándo?*

I: *sí.*

A: *cuando a un lado le aumente… no, no sé.*

I: *a ver en la otra construcción que teníamos usted dijo (leyendo la respuesta de su hoja) que el triángulo… "empalmar nuestras circunferencias de modo que nos quede un triángulo, cuando movemos nuestros puntos o nuestras circunferencias o las reduzcamos o las agrandemos". Entonces si aquí reduce las circunferencias usted dijo que el triángulo desaparecía, entonces aquí (moviendo las circunferencias para un caso particular donde no hay triángulo) ¿hay triángulo?*

A: *no.*

I: *¿entonces qué tenemos solamente?*

lados menores, respecto a la medida del lado mayor. El alumno usa la expresión "puntos finales" como signo del artefacto para argumentar dicha relación. El instructor le menciona que se debe centrar en las medidas, y le recuerda al alumno la regla de la rigidez triangular usando el signo pivote "no cerraría" para referirse a que un triángulo es una figura cerrada de tres lados y que es indeformable.

El instructor a partir de un caso particular, dando medidas de 1cm, 2cm y 3cm, pedía que construyeran un triángulo. Con ese ejemplo se esperaba que los alumnos pudieran ver la relación entre los lados menores respecto al mayor y así poder enunciar la conjetura. Se probaron varios casos en la construcción de los alumnos contrastándolas con la respuesta sobre la existencia del

A: *el segmento que mide 8.92.*

I: *(moviendo las circunferencias para que haya triángulo) ¿y aquí hay triángulo?*

A: *sí, sí ya entendí.*

I: *(probando para varios casos) ¿aquí también hay triángulo? porque dice que las circunferencias se juntan, ahora, ¿cómo es esta medida (señalando en la construcción) respecto a esta medida? dice que son diferentes, evidentemente son diferentes, pero si usted dice que al separar las circunferencias se desaparece el triángulo y que un triángulo de 1, 2 y 3 no lo puedo construir, entonces cómo podría yo determinar cómo construir un triángulo.*

A: *porque si tiene tres a la base los dos (refiriéndose a la medida del segmento) que tendríamos de lado de acá y el uno de acá serían tres, forman tres, sería una línea recta (este caso lo probó en el programa con su construcción).*

I: *entonces si yo quiero construir un triángulo ya vimos que sería dos más uno que sería tres.*

A: *que sería la línea.*

I: *entonces, cómo tendrían que ser estos lados (los lados menores señalando en*

triángulo.

El alumno vuelve a explorar en la construcción del software para generar la conjetura. Usa el signo matemático "segmento" como signo pivote para otorgarle una medida (8.92) que alude a un signo del artefacto pues es lo que observó en su construcción. El instructor recurrió nuevamente a la particularización y a los signos pivote para promover la conjetura.

El alumno con un proceso de descomposición a partir de una particularización (el caso de construir un triángulo con medidas 1cm, 2cm y 3cm) empieza a "probar" en su construcción que las medidas pequeñas (1cm y 2cm) sumadas dan la medida mayor *la construcción) para que yo pudiera construir el triángulo.*

A*: se tendrían que ser iguales (refiriéndose a los lados), o uno tendría que ser más grande… que al final fuera la suma de esos dos lados sea más grande que la línea recta que tenemos, en este caso tres, la que es de tres centímetros. La suma de las dos de arriba (refiriéndose a los lados) tendrían que ser más grande.*

I*: a ver dice usted que la suma de estos dos tendría que ser mayor que la de abajo (A repite con el instructor) entonces ¿Esta de abajo cómo le llamaríamos?*

A: se me fue su nombre…lo que le dije al principio…base.

Yo: cómo tienen que ser entonces los segmentos.

A*: los segmentos se supone que son los lados.*

I*: ajá.*

A*: que al final la suma de los dos de arriba no sea igual a la de abajo.*

(3cm), el alumno a partir de la observación en su construcción enuncia el signo matemático "línea" como suma de los lados menores. El instructor intenta que generalice para cualquier triángulo a partir del caso particular. Utilizó el signo matemático lado y lo asoció en la construcción del alumno.

Inició el planteo de la conjetura, porque el alumno usó un proceso de descomposición al referirse a que dos de los lados podrían ser iguales (signo pivote), es decir de medida congruente para construir el triángulo o bien un lado debía medir más, el alumno usa el signo pivote "más grande". Luego empleó el signo matemático de lados para decir que la suma (signo matemático) de éstos debía ser más grande (signo pivote) que la línea recta (signo matemático).

El instructor utilizó los signos pivote "estos dos" para referirse a

		los lados del triángulo en la construcción del alumno y “la de abajo” con la intención de que el alumno evocara el signo matemático “lado” sin embargo, no se logró debido a que el alumno lo relacionó con el signo matemático “base”. Se observó un cambio de signos cuando el alumno mencionó que el signo segmento (signo pivote) corresponde al signo matemático lado. En los argumentos sobre las características de los segmentos para construir un triángulo el alumno no logró avanzar de los signos pivote a los matemáticos, ya que mencionó que la suma de “los dos de arriba” no sea “igual a la de abajo”

La Tabla 4 es un ejemplo más de los diálogos sostenidos con los alumnos utilizando signos pivote para llegar a los signos matemáticos, en este caso a la definición y aplicación del concepto “intervalo”. La actividad corresponde al tema de Homotecia directa, debido a que los alumnos no habían escuchado la palabra intervalo, fue necesario explicarles de forma grupal el significado de ésta en el contexto matemático. Entonces el intervalo se tomó como un conjunto de valores que se le pueden asignar a la razón de homotecia, esos valores tenían límites que podían ser considerados o no para formar figuras homotéticas. A los alumnos se les proporcionó un archivo con triángulos como se muestra en la *Figura 33*, el triángulo homotético se movía por el vértice A_1 para empezar con la etapa de exploración y elaboración de la conjetura.

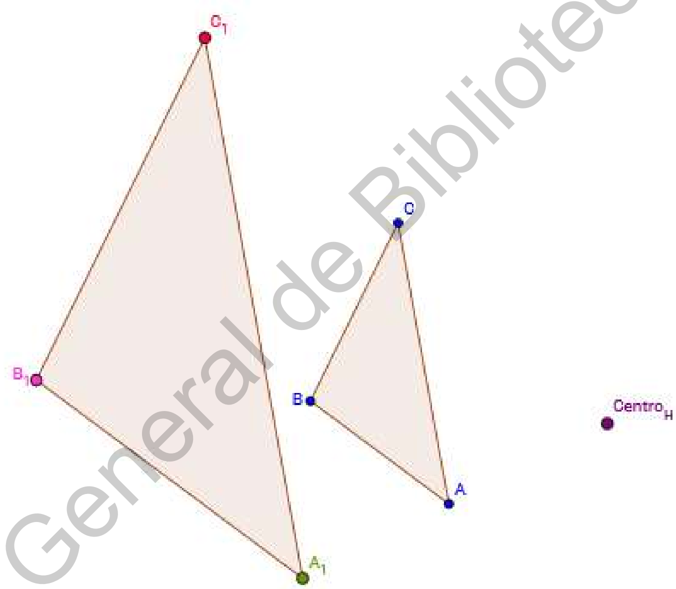
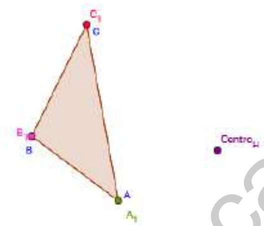


Figura 33. Construcción proporcionada a los alumnos para actividad de homotecia.

Tabla 4. *Signos pivote y signos matemáticos.*

Diálogo	Figuras	Comentarios
I *Entonces a ver, si yo tengo una figura ampliada [señalando en la construcción el triángulo homotético]. Esta es la figura ampliada (triángulo* A_1,B_1C_1*), esta es mi figura original (triángulo ABC) Si yo encimo esta figura (homotética) ¿cuánto van a medir sus lados?* *A: lo mismo.* I*: ¿por qué lo mismo?* A2*: diferente.* I*: ¿diferente por qué?* A2*: porque cuando lo mueves cambia su medida.* I*: a ver lo voy a encimar (muevo para encimar el triángulo). ¿cuánto miden entonces los lados?* A*: 2.89* I*: ¿y el lado de la figura original?* A*: ¿De la grandota?* I*: cuál grandota, dije que los iba a encimar. A ver vamos a hacer otra prueba, ya tenemos aquí dos cocientes que son iguales para un determinado caso. Ahora vamos a hacer otra prueba,*	 Figura 34.El triángulo homotético se empalmó con el original.	Se pretendía que el alumno obtuviera el intervalo donde debe estar la razón de homotecia para figuras ampliadas, por lo que se recurrió a casos particulares para poder generalizar. Este ejemplo se realizó de manera grupal. Los signos pivote que se usaron por el instructor fueron figura “ampliada” para referirse a la figura homotética y “encimar” cuando se trataba de hacer coincidir los lados del triángulo con sus correspondientes. El signo pivote encimar se empleó debido a que los alumnos lo usaron para referirse a una forma con la que ellos pueden comprobar la congruencia de figuras. El signo pivote “grandota” era para referirse a la figura homotética ampliada. Se siguen planteando casos particulares para obtener el cociente, de manera que eso ayude a los alumnos a establecer

cuando la figura homotética es mayor a la original 5.36 entre 2. 81, 4.67 entre 2.44, cómo es el cociente.

A3*: igual.*

A4*: ¿maestra qué es lo que vamos a dividir?*

I*: la medida del triángulo mayor de uno de los lados entre su correspondiente del triángulo menor. Ahora 2.74 entre 2.44, 3.16 entre 2.81. Hay una variación de .01. Ahora ¿cuál será la razón de homotecia si yo encimo los triángulos?*

A4*: igual.*

I*: igual que qué.*

A4*: igual a la homotecia.*

I*: ¿cómo la figura original será igual a la homotética?*

A4*: sí.*

I*: ¿Y cuánto valdría la razón de homotecia?*

A5*: hay que dividir los lados.*

I*: A ver yo voy a empalmar los triángulos ¿cuánto vale la razón de homotecia en este caso?*

A4*: vale uno.*

I*: ¿por qué?*

A4*: porque divide la misma medida.*

I*: Ya podemos decir en qué intervalo está la razón de homotecia de figuras*

los valores que debía tomar la razón de homotecia para figuras ampliadas.

El instructor combina los signos matemáticos de “lados correspondientes” para explicar al alumno cómo obtener el cociente. También emplea signos pivote como “triángulo mayor” y “triángulo menor”

El alumno emplea el signo matemático “homotecia” para referirse a las figuras homotéticas.

El instructor insiste en los valores de la razón de homotecia y un alumno utilizó los signos pivote “dividir los lados” para referirse al procedimiento con el que se obtiene la razón de homotecia.

Nuevamente el instructor emplea el signo pivote “empalmar” para hacer coincidir los triángulos original y homotético, vuelve a preguntar sobre el valor de la razón de homotecia (signo matemático).

Un alumno entonces concluye que la razón de homotecia es uno y su

ampliadas. Estos tres casos que tenemos aquí son para <u>figuras ampliadas</u> ¿Cuánto valdría la razón de homotecia para las <u>figuras ampliadas</u>? para que sea <u>más grande</u> la figura homotética ¿cuánto tiene que valer la <u>razón de homotecia</u> entonces? Este cociente de homotecia [señalando en vista algebraica al 1] lo obtuvimos cuando <u>empalmamos</u> la figura y dijimos que era 1. Ahora cuánto tiene que valer el <u>cociente</u> o la <u>razón de homotecia</u> para que yo pudiera tener figuras ampliadas. A6*: <u>mayor que 1</u>.* I: *Si el cociente vale 1 ¿cómo es la figura? si vale más de uno [el cociente] ¿cómo tiene que ser la figura?* A7*: diferente, pero <u>más grande</u>.* I*: [reafirmando] diferente, pero más grande. Si el <u>cociente</u> valiera <u>menos de uno</u> cómo sería la figura.* A8*: <u>más pequeñita</u>.*		argumento fue por las "mismas medidas" (signo pivote) en los triángulos. El instructor recurre a los ejemplos mostrados, retomando signos pivote para ir a los signos matemáticos, se emplean también signos del artefacto (vista algebraica) para insistir en el valor de la razón de homotecia en figuras ampliadas, hace un recuento de lo realizado y un alumno concluye que el intervalo de la razón de homotecia para figuras ampliadas debe ser mayor que uno (signo matemático). El argumento escrito que los alumnos dieron para el intervalo en que está la razón de homotecia en figuras ampliadas se consideró como un cambio de los signos del artefacto a los matemáticos, a pesar de que la notación del intervalo no es la que se usa en matemáticas se consideró válido que lo escribieran "mayor que uno" por su falta de experiencia con esa definición.

La identificación de los múltiples signos del artefacto y de signos pivote permitió establecer lo siguiente: el uso de signos pivote en los argumentos de los alumnos, por encima del empleo de signos matemáticos, no significa que no haya una movilización de esquemas en los alumnos, pues como menciona Mariotti (2009, p. 437) es común encontrar signos del artefacto en las respuestas a las tareas propuestas, puesto que se ha tenido experiencia con el artefacto. Respecto al planteamiento de la conjetura fue posible identificar que se hacía basada en elementos del software o con algunos signos matemáticos, De manera que el fracaso en la observación de regularidades se debía en muchas ocasiones al fallo en la construcción en GeoGebra, esto por no seguir un orden para realizarla, Trouche lo llama "restricciones de orden" que tienen que ver con la sintaxis de los comandos, por ejemplo el algoritmo para medir un ángulo, para construir rectas paralelas, para mover las circunferencias, etc.

7.2 Los procesos matemáticos en la práctica argumentativa

Los ejemplos a continuación mostrados exponen algunos los procesos matemáticos de generalización, particularización, reificación, condensación y descomposición. En cada caso se hará una breve descripción del contexto de la actividad y de las razones por las que se le clasificó en determinado proceso.

La pregunta del ejemplo de la Figura 35 refiere a la generación de la regla de rigidez y desigualdad triangular, el alumno mediante construcciones a partir de radios de circunferencias debía establecer que para construir un triángulo era necesario que las circunferencias se intersecaran. La pregunta exhibida en la Figura 36 se diseñó con la intención de que a partir de una particularización el alumno generalizara a lo obtenido en la construcción y eso le permitiera avanzar a la generación de la regla de desigualdad triangular. Se consideró como generalización del tipo disyuntiva porque según Harel y Tall (1991) el esquema nuevo que el alumno tiene en un contexto conocido (considerar que para construir un triángulo hay que tener tres lados y que la suma de sus ángulos sea 180°) y lo quiere aplicar a uno nuevo, que sería el de intersecar las circunferencias para que de ahí se construyera la regla de desigualdad triangular puesto que se tenían radios de diferente medida.

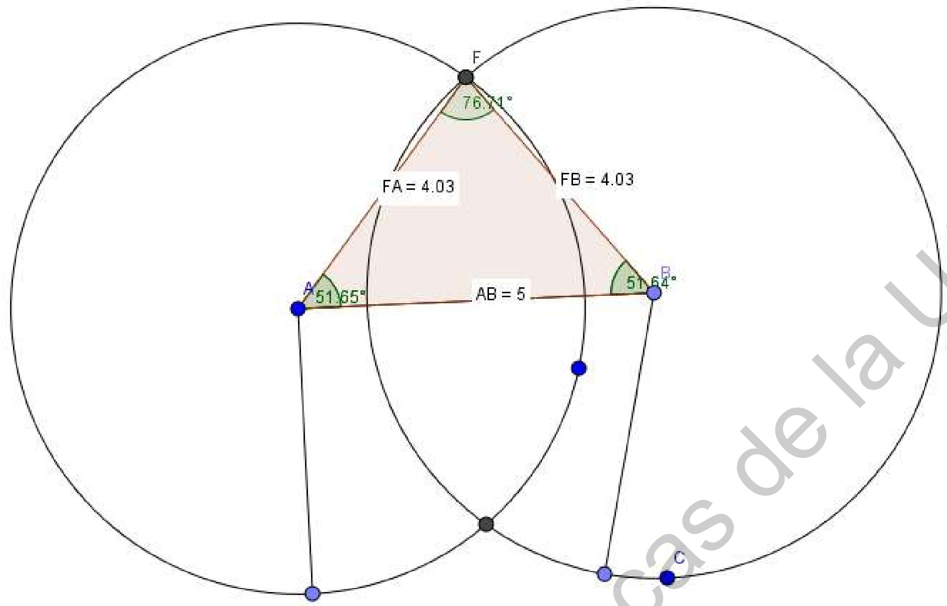
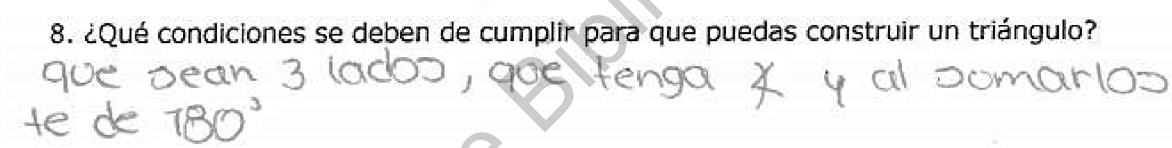


Figura 35. Construcción realizada por los alumnos para establecer la rigidez y la desigualdad triangular.



8. ¿Qué condiciones se deben de cumplir para que puedas construir un triángulo?

que sean 3 lados, que tenga X y al sumarlos te de 180°

Figura 36. Ejemplo de generalización disyuntiva.

La actividad de ángulos entre paralelas pretendió que el alumno con la construcción de paralelas cortadas por una transversal probara en casos particulares (moviendo las rectas) lo que sucedía con los ángulos correspondientes y opuestos por el vértice. Lo anterior para generar una definición para ambos casos. La pregunta de la *Figura 37*correspondía a la conclusión de cómo deben ser los ángulos correspondientes. Se le consideró generalización reconstructiva porque el alumno después de hacer varias pruebas como casos particulares, en términos de Harel y Tall (1991) a esos casos particulares se les puede llamar esquemas viejos que se enriquecen para lograr un esquema más amplio, es decir la generalización para todos los ángulos correspondientes.

8. Elabora un enunciado general que resuma cómo deben ser los ángulos correspondientes en rectas paralelas. los angulos correspondie siempre van a medir lo mismo no importa que muevas la recta

Figura 37. Ejemplo de generalización reconstructiva.

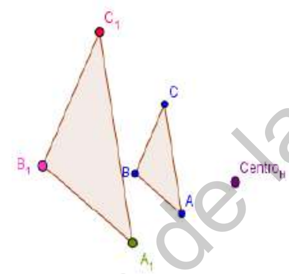
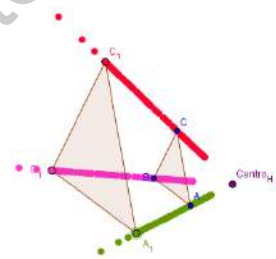
El ejemplo de la *Figura 38* es tomado de la actividad de homotecia directa; para esta actividad se le proporcionó al alumno un archivo con dos triángulos (el original y el homotético) y debía mover el homotético por un vértice para observar regularidades y llegar a establecer las propiedades geométricas para $k > 1$ y para k entre 0 y 1. Se le enmarcó como generalización del tipo expansiva porque según Harel y Tall (1991) este tipo de generalizaciones se caracterizan porque el rango de aplicabilidad del esquema es ampliado sin que sea reconstruido, y el esquema anterior es incluido como caso especial en el esquema final. En el ejemplo el esquema anterior corresponde a las propiedades geométricas de las figuras homotéticas cuando $k = 1$ y el esquema final sería la respuesta sobre el intervalo a partir de cual debe estar la razón de homotecia para tener figuras ampliadas.

6. ¿En qué intervalo debe estar la razón de homotecia en figuras ampliadas? ¿Por qué? más de 1 para que sea mayor a la original

Figura 38. Ejemplo de generalización expansiva.

La Tabla 5 muestra un extracto de una conversación sostenida con un alumno para la identificación de vértices correspondientes en figuras homotéticas; se tomó este ejemplo porque predominó como respuesta en la totalidad de los alumnos. Esto constituye una evidencia de lo complejo que es introducir un artefacto al aula para que éste pueda ser una herramienta que apoye a los alumnos en la construcción de argumentos para la modificación o ampliación de esquemas sobre determinado objeto matemático.

Tabla 5. *Diálogo sostenido con un alumno sobre la identificación de vértices correspondientes en figuras homotéticas.*

Diálogo	Figuras
Instructor*: ¿Cómo son los vértices correspondientes?* Alumno: *está a tamaño proporcional, está como a escala, esta figura es escalar de ésta, entonces el vértice correspondiente se va alejando más, se va haciendo más grande.*	 *Figura 39.*El triángulo homotético se movía por el vértice A_1.
Instructor: *¿el vértice? me dice que se va haciendo más grande, pero ¿cómo veo yo que es más grande?* Alumno: *por la prolongación de las líneas [señala los rastros].* Instructor: *¿va aumentando de grosor el vértice o cómo?* Alumno: *va aumentando de tamaño la figura* Instructor: *¿y eso quiere decir que sea más grande el vértice?* Alumno: *ajá* Instructor: *entonces si la figura homotética está entre el centro de homotecia y la figura original ¿qué le pasa a los vértices?*	 *Figura 40.* Para cada vértice correspondiente el alumno debía activar el “rastro”, herramienta que le ayudaría a concluir cómo son los vértices correspondientes en figuras con homotecia directa.

Alumno: *se vuelven iguales*

Instructor: *¿se vuelven iguales? A ver qué le pasa a los vértices [moviendo la figura homotética]*

Alumno: *se cruzan*

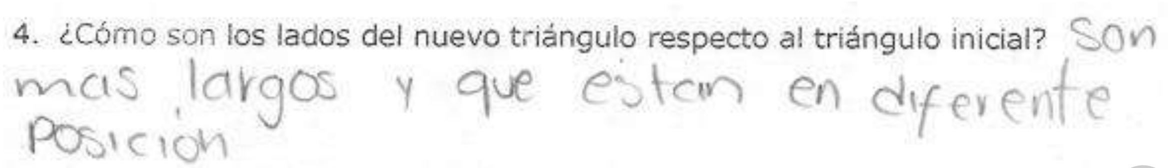
Instructor: *si dice que la figura cuando va a la izquierda los vértices se van haciendo grandes, que la figura crece ¿y cuándo la figura es chica qué le pasa a los vértices?*

Alumno: *se van uniendo más, se van haciendo pequeños*

Instructor: *¿y eso quiere decir que la figura se hace pequeña?*

Alumno: *ajá*

La *Figura 42* corresponde a la actividad de Congruencia para el caso Lado, Lado, Lado, donde los alumnos debían construir un triángulo con tres medias arbitrarias para después intentar construir otro triángulo con las mismas medidas. El objetivo era que los alumnos se dieran cuenta que para este caso (Lado, Lado, Lado) no era posible construir un triángulo distinto al inicial, puesto que se trataba de tomar las mismas medidas. El ejemplo constituye una particularización, porque según Krutestskii (1976) hay que distinguir dos niveles para generalizar un contenido matemático. El argumento del alumno (Figura 41) se ubica en el segundo nivel que refiere a la deducción general a partir de casos concretos, aunque llega a una conclusión no válida debido a que realizó una construcción errónea (midió los ángulos del triángulo inicial y los reprodujo en el segundo triángulo). Establece una particularización porque alude al caso que él obtuvo.



4. ¿Cómo son los lados del nuevo triángulo respecto al triángulo inicial? Son mas largos y que estan en diferente posicion

Figura 41. Ejemplo de particularización

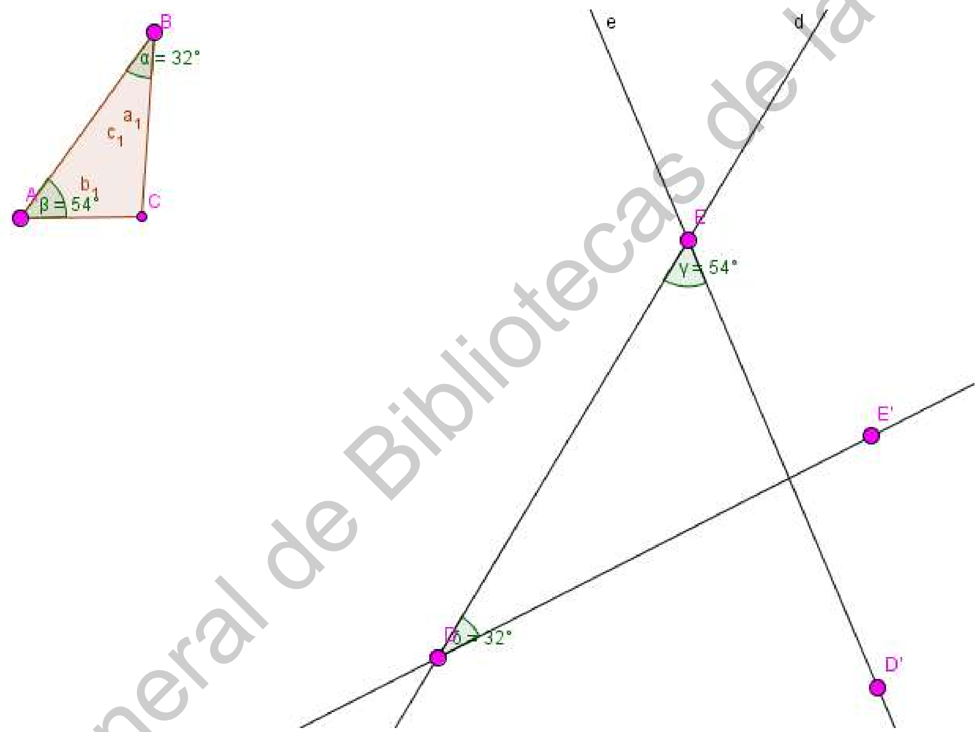


Figura 42 .Construcción realizada para el caso de Congruencia Lado, Lado, Lado.

El proceso de reificación como se mencionó anteriormente recurrió a la propuesta de Sfard (1991) para su caracterización. Sfard menciona que para llegar a la reificación se debe pasar por la interiorización y la condensación que son consideradas etapas jerárquicas y cíclicas. Para el caso de la interiorización se partió de que todos los alumnos lograron esa etapa, pues sin importar si son correctas o no, se tienen representaciones mentales de los objetos matemáticos, que luego fueron manifestadas por dibujos, gráficas o proposiciones.

La actividad de construcción de triángulos mediante dos radios de distintas medidas pretendía generar la propiedad de desigualdad triangular. Con la unión de los radios (intersección de las circunferencias) se buscaba que el alumno observara que es en ese momento cuando el triángulo se forma. Lo anterior ayuda al alumno a ir construyendo las características de cómo deben ser los segmentos para trazar cualquier triángulo. En la Tabla 6 se describe específicamente en qué consistió la actividad y los argumentos que dio el alumno. Además, se muestran las etapas que anteceden a la reificación.

Tabla 6. *Descripción de actividades para la identificación de las etapas de interiorización, condensación y reificación.*

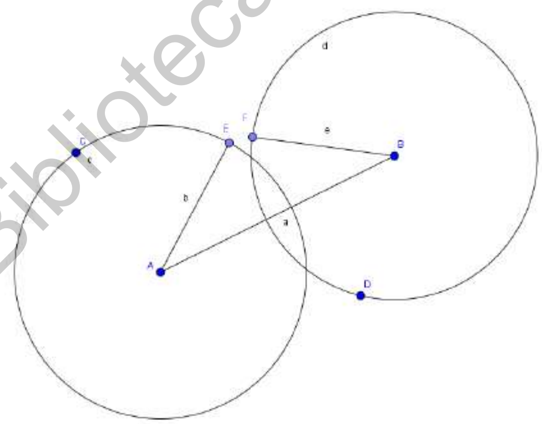
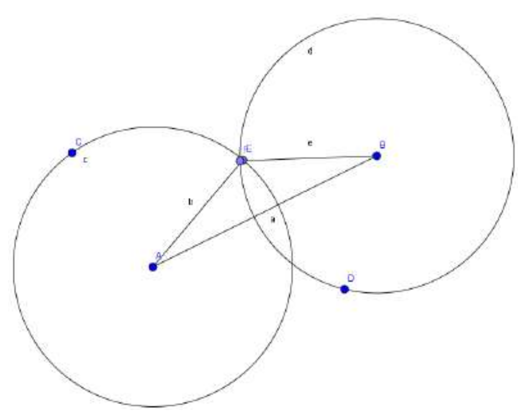
Descripción de la actividad	Figuras
1. Trazar un segmento *AB*. 2. Trazar dos circunferencias de radio arbitrario, una con centro en *A* y otra con centro en *B*. 3. Pon un **punto nuevo** en cada circunferencia y unirlo con el centro de cada una de ellas.	 *Figura 43.* Trazos realizados por los alumnos para establecer la regla de desigualdad triangular. En esta figura se muestran los intentos por "juntar" los nuevos puntos para observar la figura que se formaba.
4. Mueve las circunferencias y los **puntos nuevos**, de manera que éstos (los puntos nuevos) coincidan. ¿Qué	

figura geométrica se forma si unes los puntos nuevos? [En esta pregunta puede identificarse la etapa de interiorización, *Figura 44*].

5. ¿Qué condiciones se deben de cumplir en las circunferencias para que exista la figura? [Las preguntas 5, 6 y 7, evidencian la etapa de condensación, pues aún no hay explicaciones matemáticas de por qué existe la figura, las respuestas de los alumnos son resultado de operaciones visuales].
6. ¿Cuándo desaparece la figura?

7. ¿Qué condiciones se

Figura 44. Construcción del alumno donde se muestra que ya juntó los nuevos puntos y se forma un triángulo (etapa de interiorización).

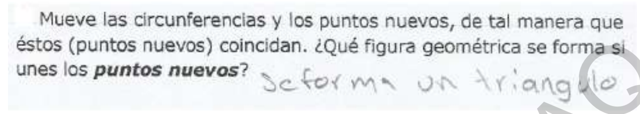

Mueve las circunferencias y los puntos nuevos, de tal manera que éstos (puntos nuevos) coincidan. ¿Qué figura geométrica se forma si unes los ***puntos nuevos***? se forma un triangulo

Figura 45. Argumento del alumno al juntar los nuevos puntos.

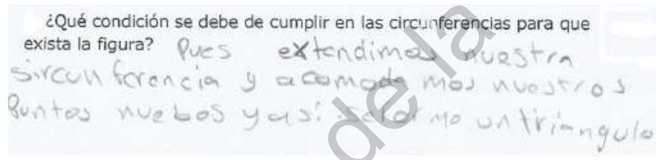

¿Qué condición se debe de cumplir en las circunferencias para que exista la figura? Pues extendimos nuestra sircunferencia y acomodamos nuestros puntos nuebos y asi se formo un triangulo

Figura 46. Argumento a partir de las exploraciones realizadas en la construcción.

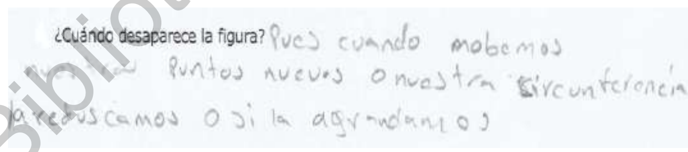

¿Cuándo desaparece la figura? Pues cuando mobemos nuestros puntos nuevos o nuestra sircunferencia la reduscamos o si la agrandamos

Figura 47. Argumento que alude a la etapa de condensación.

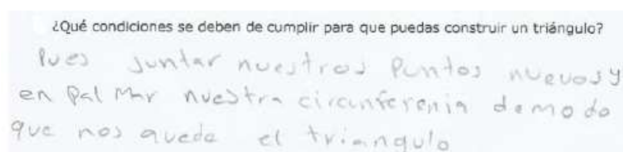

¿Qué condiciones se deben de cumplir para que puedas construir un triángulo?
Pues juntar nuestros puntos nuevos y en Palmar nuestra circunferenia de modo que nos queda el triangulo

Figura 48. Argumento que alude a la etapa de condensación.

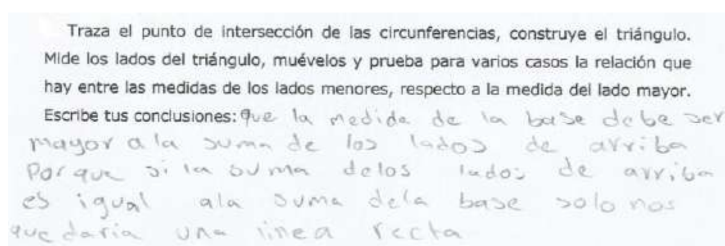

Traza el punto de intersección de las circunferencias, construye el triángulo. Mide los lados del triángulo, muévelos y prueba para varios casos la relación que hay entre las medidas de los lados menores, respecto a la medida del lado mayor. Escribe tus conclusiones: que la medida de la base debe ser mayor a la suma de los lados de arriba porque si la suma delos lados de arriba es igual ala suma dela base solo nos quedaria una linea recta

Figura 49. Argumento donde se manifiesta un proceso de reificación.

deben de cumplir para que puedas construir un triángulo? 8. Trazar el punto de intersección de las circunferencias, construir el triángulo. Medir los lados del triángulo, moverlos y probar para varios casos la relación que hay entre las medidas de los lados menores, respecto a la medida del lado mayor [reificación]	

La actividad descrita en la tabla es un ejemplo que ilustra el proceso de reificación tomando en cuenta las etapas previas, como son la interiorización y la condensación. La*Figura 49* que se tomó como reificación porque el alumno se da cuenta que si la suma de dos lados (que él les llamó lados de arriba), mide lo mismo que un tercer lado (que él llama base) entonces hay una línea recta, es decir no se puede construir el triángulo. En el diálogo previo a la escritura del argumento, el alumno llegó a la siguiente conclusión:

Instructor *Entonces cómo tendrían que ser estos lados* [los lados menores señalando en la construcción], *para que yo pudiera construir el triángulo.*

Alumno *Tendrían que ser iguales, o uno tendría que ser más grande…* [el alumno hace una pausa, ve su construcción] *que al final fuera la suma de esos dos lados más grande que la línea recta que tenemos* [señalando un tercer lado que él le llama base]. *La suma de las dos de arriba* [señalando los lados en la construcción] *tendrían que ser más grandes que la de abajo* [el alumno le llama base al segmento de abajo y lo señala en la construcción].

Aunque hubo errores al escribir la conclusión verbal, se toma como reificación porque fue ese cambio instantáneo del que habla Sfard (1991) en donde lo familiar se ve en una luz nueva.

El ejemplo de proceso de descomposición (Figura 50) es tomado de la actividad de Semejanza de triángulos donde el alumno debió usar la construcción para determinar el teorema de Tales y de ahí llegar a los criterios de Semejanza. La pregunta corresponde al establecimiento del criterio Ángulo, Ángulo, Ángulo para comprobar la semejanza en dos o más triángulos. Se le clasificó como descomposición al argumento debido a que previamente concluyó que Lado, Lado, Lado es un criterio para determinar la semejanza. Usa entonces en su argumento una separación de objetos y determinar que los ángulos en triángulos semejantes son congruentes.

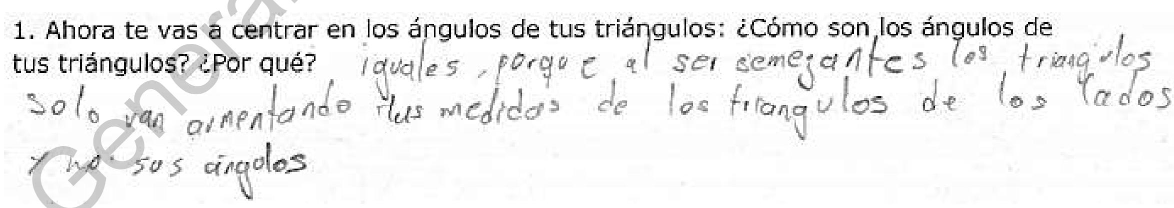

1. Ahora te vas a centrar en los ángulos de tus triángulos: ¿Cómo son los ángulos de tus triángulos? ¿Por qué? iguales, porque al ser semejantes los triangulos solo van aumentando las medidas de los triangulos de los lados y no sus ángulos

Figura 50. Ejemplo de descomposición.

Derivado del análisis expuesto con anterioridad, se plantean los siguientes descriptores enunciados en las Tabla 7 y

Tabla 8 para los procesos matemáticos descomposición, reificación, particularización y generalización. Se dan algunos ejemplos para cada proceso, de manera que puedan orientar a la identificación de éstos en las prácticas de los alumnos de secundaria.

Tabla 7. *Propuesta de descriptores para la identificación de los procesos de descomposición y reificación.*

Descomposición	Reificación	
Separa el objeto matemático para comprenderlo. Ejemplo: las combinaciones de elementos (ángulos y segmentos) para construir triángulos y probar cuáles determinan la congruencia o la semejanza.	Realiza acciones sobre el objeto matemático, lo lleva del nivel operacional al estructural. Ejemplo: Saber distinguir entre los criterios y los no criterios de semejanza y congruencia a partir de construcciones con elementos combinados (ángulos, lados).	*Interiorización* Logra hacer representaciones mentales, que son evidenciadas, por ejemplo, con palabras, gráficas, dibujos, proposiciones, etc. *Condensación* No detalla propiedades geométricas y nace el concepto del objeto matemático. Ejemplo: enunciar el objeto matemático producto de una operación visual, como el concepto de circunferencia.

Tabla 8. *Propuesta de descriptores para la identificación de los procesos particularización y generalización*.

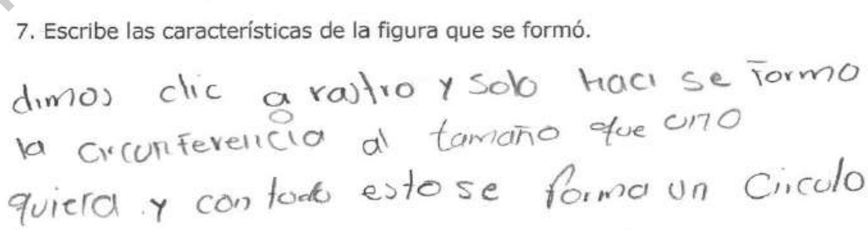
Particularización	Generalización
Objeto matemático individualizado, un ejemplo de una clase de objetos matemáticos. Ejemplo: Encontrar la constante de proporcionalidad en los segmentos que se generan de cortar paralelas con transversales.	Expansiva El esquema no se reconstruye, pero se amplía el rango de aplicación. Ejemplo: distinguir las características geométricas de figuras ampliadas de $k > 1$ de las de k entre 0 y 1. Reconstructiva El esquema viejo es cambiado y enriquecido. Ejemplo: Reconocer que la constante de proporcionalidad se aplica a semejanza y a homotecia de figuras. Disyuntiva Se construye un nuevo esquema. Se mueve de un contexto familiar a uno nuevo, pero sin conexión con los esquemas anteriores. Ejemplo: no justificar los criterios y los no criterios, tanto de semejanza como de congruencia, sino más bien memorizarlos.

7.3 Los esquemas de argumentación y los procesos cognitivos en la demostración matemática escolar

La propuesta de este trabajo de incluir los esquemas de argumentación en cada etapa del proceso de instrucción para la demostración continua y a su vez identificar algunos procesos cognitivo-matemáticos en la exploración, elaboración de conjetura, exploración y sistematización, demostración se evidenciará en este apartado. Debido al carácter de persuasión para sí y para los demás que tiene el proceso de demostración se esperaría encontrar en esta última etapa argumentos del tipo analíticos y axiomáticos, con procesos de generalización y reificación. Los resultados de explorar en cada etapa los esquemas de argumentación se muestran a continuación. Lo anterior no quiere decir que esos esquemas sean los únicos que se manifestaron, pero fue favorecedor relacionarlos con las etapas de la demostración continua, porque como se mencionó, la intención era que llegaran a establecer argumentos de tipo deductivos o axiomáticos.

La etapa de exploración es donde el alumno mediante construcciones hechas por él o proporcionadas por el investigador, se iniciaba a ver algunos conceptos que se emplearían durante el desarrollo de la hoja de trabajo. El tipo de argumentos que predominaron fueron del estilo empíricos. La tarea de "lugar geométrico" se diseñó para que, en posteriores construcciones, como en la regla de la desigualdad triangular pudieran generar la conjetura de la relación entre los lados menores respecto al lado mayor. La actividad formuló preguntas de observación, para que finalmente (*Figura 51*), los alumnos establecieran una generalización sobre las propiedades geométricas de la circunferencia. Sin embargo, sus respuestas mayormente se inclinaron a enunciar la forma de proceder para obtener la circunferencia. Se les aclaró que se refería a propiedades geométricas, lo cual no generó una modificación en los argumentos escritos.

Los argumentos como los mostrados en la *Figura 51*, pudieran tener su explicación en el primer contacto de los alumnos con el artefacto, ya que como menciona Mariotti (2009), es común encontrar elementos alusivos al artefacto en sí debido a que los alumnos tendrían que elaborar o reelaborar estructuras (Inhelder, 1975) para conocer el software y así utilizarlo como una herramienta.


7. Escribe las características de la figura que se formó.

dimos clic a rastro y solo haci se formo
la circunferencia al tamaño que uno
quiera y con todo esto se forma un Circulo

Figura 51. Ejemplo de esquema de argumentación tipo empírico.

La etapa de planteo de conjetura refería a preguntas guía para que el alumno observara regularidades en las construcciones y estableciera una conjetura. En la actividad "Construcciones" se empleó la generalización sobre propiedades geométricas de la circunferencia, ya que con el uso de radios se buscó orientar al alumno para establecer la conjetura sobre la desigualdad triangular. Las primeras preguntas (de la cuatro a la siete), en la hoja de trabajo fueron de exploración en la construcción para que en la pregunta nueve con el triángulo trazado y probando para varios casos (particularización) escribiera la conjetura de lo que sucede con los lados del triángulo (*Figura 53*).

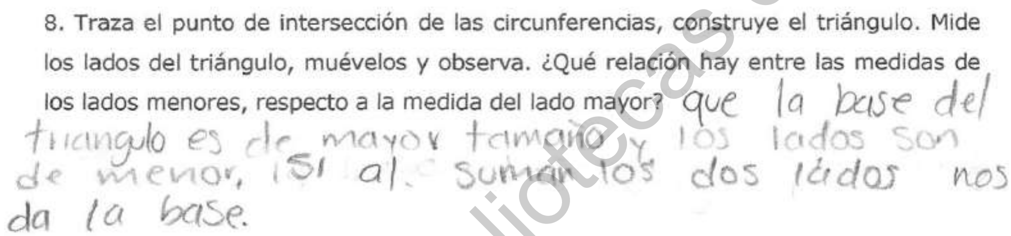

8. Traza el punto de intersección de las circunferencias, construye el triángulo. Mide los lados del triángulo, muévelos y observa. ¿Qué relación hay entre las medidas de los lados menores, respecto a la medida del lado mayor? que la base del triangulo es de mayor tamaño y los lados son de menor, (si al sumar los dos lados nos da la base.

Figura 52. Ejemplo de rigidez geométrica en argumentos escritos.

El argumento de la figura 52 da cuenta de la significación que los alumnos otorgan a la base del triángulo, la cual siempre debe ser mayor y es donde "descansan" los otros dos lados. En términos de Acuña (2012), eso se debe a la rigidez geométrica, ya que el alumno sólo reconoce propiedades de las figuras si están en posición estándar. Incluso en las construcciones, los alumnos buscaban que estas quedaran sin ninguna "deformación", es decir que correspondieran a lo que ellos escolarmente conocen como un triángulo, rectas paralelas, un ángulo, rectas perpendiculares, círculo y circunferencia (sus trazos).

Respecto al esquema de argumentación que se manifestó en esta etapa fueron del tipo simbólico, los alumnos utilizan la definición de base para formular la conjetura sobre la desigualdad triangular. El esquema simbólico se caracteriza precisamente por la manifestación superflua del lenguaje matemático, en este caso de la base como el "lado mayor" (*Figura 53*).

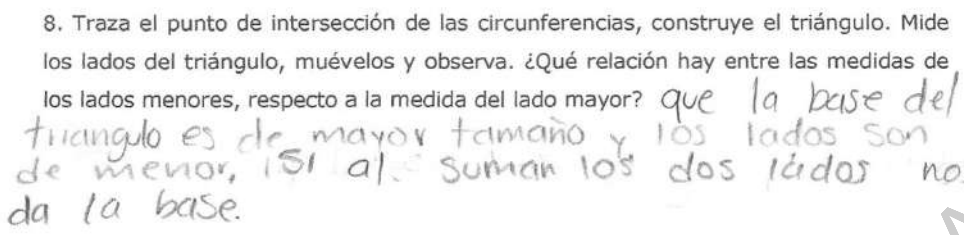

8. Traza el punto de intersección de las circunferencias, construye el triángulo. Mide los lados del triángulo, muévelos y observa. ¿Qué relación hay entre las medidas de los lados menores, respecto a la medida del lado mayor? que la base del triangulo es de mayor tamaño y los lados son de menor, si al suman los dos lados nos da la base.

Figura 53. Esquema de tipo simbólico en la etapa de planteo de conjetura.

El alumno en la etapa de exploración y sistematización una vez formulada la conjetura intentaría probarla, nuevamente recurría a la visualización de propiedades. Mediante preguntas se pretendió apoyar la validación de la conjetura establecida. En la hoja de trabajo Construcciones, el tipo de argumentos presentados por los alumnos son como se muestran en la *Figura 54*. trasladan al argumento escrito los pasos que realizaron para la construcción, en este caso (*Figura 54*) relata el proceso que siguió en la etapa de exploración de la hoja de trabajo.

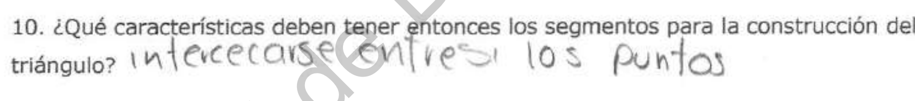

10. ¿Qué características deben tener entonces los segmentos para la construcción del triángulo? intercecarse entre si los puntos

Figura 54. Esquema de tipo fáctico en la etapa de exploración y sistematización.

Finalmente, para la etapa de elaboración de argumentos, una vez que se ha explorado la conjetura para detectar errores y generarla nuevamente, se empiezan a elaborar argumentos que la validen. La última pregunta de la hoja de trabajo construcciones relacionaba propiedades de ángulos y lados para construir el triángulo. Se esperaría que para la validación de la conjetura los argumentos que aparecieran fueran de tipo analítico que llegaran a conclusiones válidas, sin embargo, surgieron esquemas de argumentación fácticos. Estos se caracterizaron por la enunciación del proceso seguido en el software y en las etapas anteriores para justificar (*Figura 55*).

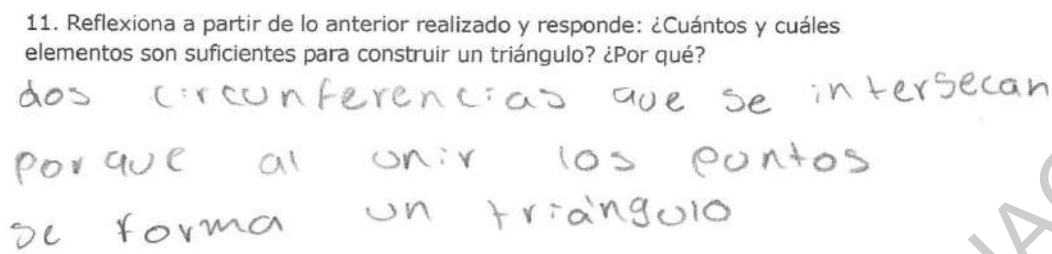

11. Reflexiona a partir de lo anterior realizado y responde: ¿Cuántos y cuáles elementos son suficientes para construir un triángulo? ¿Por qué?
dos circunferencias que se intersecan
porque al unir los puntos
se forma un triángulo

Figura 55. Ejemplo de esquema en la etapa de elaboración de argumentos.

Los ejemplos de las figuras anteriores se situaron conforme a las etapas de la unidad cognitiva de los teoremas, ya que así se estructuraron las actividades. Ello no significa que sean los únicos esquemas que aparecieron. Se observaron ciertas regularidades, por ejemplo, para la etapa de exploración donde los argumentos fueron de tipo empírico, es probable que haya sucedido por el contacto inicial con el software para la realización de las construcciones. Conviene mencionar que una mayoría de argumentos posee características de la forma de operar el programa computacional para obtener la construcción.

Ahora bien, la poca frecuencia de esquemas analíticos y axiomáticos, puede tener su explicación en la poca cultura de la argumentación que se da en los escenarios escolares (Carillo et al, 2016), pues generalmente el profesor no aprovecha los razonamientos abductivo e intuitivo como un recurso potente para llevar a cabo con los alumnos argumentaciones más elaboradas.

VIII. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Las conclusiones presentadas serán abordadas tomando en cuenta los objetivos que persiguió la investigación, seguidos de las preguntas de investigación. Se añaden también algunas aportaciones de la investigación y las inquietudes que se espera acometer en el futuro.

El objetivo general de la investigación se centró en describir algunos de los procesos matemáticos que se manifestaban en los alumnos de último grado de educación básica (educación secundaria) cuando empleaban herramientas tecnológicas, como

Software de Geometría Dinámica (SGD) para validar su conocimiento matemático en tareas geométricas. Del objetivo se elaboró la siguiente pregunta general: ¿Cuáles son los procesos matemáticos que desarrolla un alumno de educación secundaria para aprender a demostrar con el uso de herramientas tecnológicas?

Al situar la respuesta dentro de la psicología cognitiva se reconocen procesos cognitivos básicos y superiores. En los últimos se encuentra el razonamiento cuya función es apoyar las relaciones que se dan entre los conceptos mediante conjeturas, generalizaciones, significaciones, argumentaciones, particularizaciones, reificaciones, demostraciones, etcétera, sin embargo, conviene precisar que lo anterior tiene características especiales, porque sucede en contextos escolares. En este mismo sentido, los alumnos debieran pasar de la abstracción empírica a la reflexiva, ya que esta se relaciona con la experiencia lógico-matemática (Inhelder, 1975).

Se logró identificar procesos matemáticos fundamentales que condujeron al alumno a elaborar conjeturas y argumentar su validez. Los procesos que predominaron en los argumentos de los alumnos fueron los de particularización, sin que eso implicara llegar a la generalización, los alumnos seccionan elementos matemáticos, pero eso no garantiza que posteriormente se sistematicen. La reificación fue el proceso que menos apareció y sin esa propiedad reversible. Respecto a los esquemas de argumentación que tienen concomitancia con los tipos de signos evocados y con los procesos matemáticos, aquellos que los alumnos manifestaron en sus producciones escritas y verbales fueron los simbólicos, fácticos y empíricos tanto deductivos como perceptuales

Otro de los objetivos fue caracterizar los procesos matemáticos de manera que permitieran valorar los niveles de desarrollo en los que se encontraba el alumno al validar el conocimiento matemático, la pregunta a ese objetivo fue: ¿Cómo evaluar los procesos matemáticos para saber si un alumno de educación secundaria aprendió a demostrar?

En este objetivo se establecieron características concretas para identificar los procesos matemáticos de los alumnos con base en sus respuestas orales y escritas. En el caso del proceso de generalización se distinguieron tres tipos, la disyuntiva, la expansiva y la reconstructiva, las cuales están asociadas con el proceso de abstracción reflexiva, que en este trabajo se denominó "proceso de reificación". El proceso de reificación se alcanza si el sujeto pasa por etapas de interiorización y condensación, depende de la generalización y esta involucra un proceso de particularización.

El último objetivo pretendía identificar algunos fenómenos ligados al trabajo en ambientes digitales que impedían la apropiación del SGD como una herramienta para ayudar a la validación del conocimiento matemático. La pregunta se formuló como se enuncia: ¿Qué elementos se deben considerar al trabajar con la herramienta tecnológica de manera que ésta sea usada por los alumnos de educación básica como instrumento que les permita llegar a la demostración?

Algunas manifestaciones se relacionaron con el uso de signos del artefacto en las conjeturas y argumentos tanto verbales como escritos, si bien se emplearon signos pivote por parte del investigador como de los alumnos, para que se llegara a los signos matemáticos, la transición no fue exitosa. La falta de un orden para realizar las construcciones, o bien el trazo indiscriminado de puntos, puntos de intersección, rectas o polígonos no permitía el avance en la resolución de la actividad.

Muchos alumnos no llegaban a otras etapas por tener una construcción equivocada, como no recordar las propiedades de las paralelas, medir ángulos que no correspondían a lo solicitado, eso concluía en una conjetura mal planteada. Otra de las regularidades evidenciadas con el software fue que los alumnos en sus construcciones acomodaban los triángulos de manera que siempre el lado mayor estuviera como base. Finalmente, otorgaban dimensiones a los puntos pues decían que "crecían" cuando los movían o al aproximar la vista gráfica.

La incorporación de artefactos tecnológicos, en este caso el GeoGebra al salón de clases da cuenta de las consideraciones que se deben tener, las cuales no son solamente de índole técnica, de acceso y de uso, sino también las dinámicas sociales en las que suceden (Moreno, 2014). Es decir, considerar los procesos de adaptación social y cultural de los alumnos, otorgan una interpretación al momento de manejar dichos artefactos. Moreno

(2016) menciona la importancia de proponer en espacios escolares una alfabetización digital que tendrá trascendencia también fuera de la escuela.

8.1 Principales aportaciones de la investigación

Las aportaciones que se rescatan de esta investigación radican principalmente en la caracterización que se hizo a los procesos matemáticos que se consideraron importantes cuando el alumno valida su conocimiento matemático. También se rescatan la identificación de algunos signos matemáticos que se usan como sinónimos, como en el caso de la circunferencia y el círculo, cuyas características no distinguibles quizá estén en las prácticas docentes que incluyen los significados personales. El uso de signos matemáticos equívocos desemboca en un empleo inapropiado de la herramienta (software GeoGebra).

Otro elemento donde es preciso enfocar la atención corresponde al uso del significado y representación del objeto matemático *base* de un triángulo. Los alumnos de esta investigación evidenciaron sus significados personales sobre la base de un triángulo como el "lado de mayor longitud", así mismo su representación que debía estar acomodada de esa forma para entonces trabajar en la construcción.

Finalmente, se debe tener cuidado en el empleo que el docente otorga a los signos pivote para arribar a objetos matemáticos de congruencia y semejanza, pues no se avanza a los signos matemáticos. Al alumno se le dificulta modificar el significado, producto del lenguaje natural para otorgar propiedades matemáticas que caracterizan a la congruencia y a la semejanza.

8.2 Futuras investigaciones

Algunas de las interrogantes que surgen a partir de lo realizado en esta investigación, tienen que ver con el uso del artefacto como herramienta y la segunda es una hibridación entre procesos matemáticos, signos de distintas clases y significados personales de profesores sobre determinados objetos matemáticos que instalan a su vez esos significados en los alumnos y que no se propicia un avance en el uso adecuado del lenguaje matemático en estos.

¿Cómo lograr que un alumno incorpore el proceso de reificación para validar su conocimiento matemático?

¿Cuál es el grado que debe preciarse para enunciar que un alumno transformó un artefacto en instrumento?

¿Cuál es el papel de los signos gestuales en la formulación de argumentos de los alumnos?

¿Qué signos pivote emplean los docentes para significar las propiedades de figuras congruentes y semejantes en sus alumnos?

IX. BIBLIOGRAFÍA

Acuña, C. (2014). *Visualización como una forma de ver en matemáticas, un acercamiento a la investigación.* México: Gedisa.

Álvarez-Gayou, J. L. (2013 Octava reimpresión). *Cómo hacer investigación cualitativa fundamentos y metodología.* México: Paidós Educador.

Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof. En P. Boero, *Theorems in school: Form history, epostemology and cognition to classroom practice* (págs. 27-42). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Lationoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*(Especial, Semiótica cultura y pensamiento matemático), 267-299.

Bartolini, M. G. (2011). Artefacts and utilization schemes in mathematics teachereducation: place value in early childhood education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 93-112.

Bartolini, M. G., & Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom. 746-783.

Benítez, L. (2016). *Metodología de la Investigación social II.* México: Cengage Learning Editores.

Boero, P., R.Garuti, Lemut, E., & Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceedings of the 20th PME International Conference 2,* (págs. 113-1120). Valencia.

Camacho, V. (2014). *Algunas dificultades para transitar entre un buen desempeño algorítmico y la demostración en el nivel superior.* México D.F.: DME,Cinvestav.

Carillo, J., & Muñoz-Catalán, M. (2018). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación infantil.* España: Paraninfo.

Carillo, J., Contreras, L., Climent, N., Montes, M., Escudero, D., & Flores, E. (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria.* España : Paraninfo.

Duval. (2003). "Ver" en Matemáticas. En E. Filloy, *Aspectos de la Investigación Actual* (págs. 41-76). México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Flores, Á. (2007). *Prácticas argumentativas y esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del Bachillerato*. México.

Flores, Á. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas de Bachillerato. *Educación Matemática*, 63-98.

Font, Planas, & Godino. (2010). Modelo para el Análisis Didáctico en Educación Matemática . *Infancia y Aprendizaje*, 89-105.

Garuti, Boero, & ut, L. (1998). *Cognitive unity of theorems and difficulty of proof.* Recuperado el 25 de julio de 2016, de Preuve, Proof, Prueba: http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/garuti.html

Hanna, G. (mayo de 2009). *International Commission on Mathematical instruction.* Obtenido de ICMI 19: www.mathunion.org

Inhelder, B. (1975). *Aprendizaje y estructuras del conocimiento.* Madrid: Morata.

Jones, K., Mackrell, K., & Stevenson, I. (2019). Designing Digital Technologies and Learning Activities for Different Geometries. En L. J. Hoyles C., *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain.* (Vol. 13, págs. 47-60). Boston: New ICMI Study Series. doi:doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_4

Kurtz, J., Getner, D., & Gunn, V. (1999). *Cognitive science.* (B. Martin, & D. Rumelhart, Edits.) Estados Unidos de América: Academic Press.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* (6), 283-317.

Laborde, C. (2007). Towards theoretical foundations of mathematics education. *ZDM Mathematics Education*(39), 137-144.

Larios, V. (2006). *Demostrar es un problema o el problema es demostrar.* Querétaro: UAQ.

Larios, V. (2006). *La influencia de la computadora como mediadora semiótica entre el conocimiento y el alumno: El caso de la Geometría.* Recuperado el 03 de mayo de 2014, de Sociedad Mexicana de Computación en la Educación: www.somece.org.mx

Larios, V., & Díaz-Barriga, A. (2013). *Las prácticas docentes en Matemáticas en el estado de Querétaro.* Querétaro: UAQ.

Larios, V., & González, N. (2010). Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa*, 147-160.

Larios, V., & González, N. (2012). *Justificaciones en la Geometría Dinámica de Secundaria.* Alemania: Academía Española.

Mariotti, M. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective:the role of the teacher. *ZDM Mathematics Education*(41), 427-440.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2013). *Cómo razonar matemáticamente.* México: Trillas.

Mejía, J. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 3-18.

Miles, M., & Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis an expanded source book.* Thousand Oaks EEUU: SAGE Publications.

Moreno, H. (2016). Incorporación de las TIC en las prácticas educativas: el caso de las herramientas, recursos, servicios y aplicaciones digitales de Internet para la mejora de los procesos de aprendizaje escolar. (U. A. Xochimilco, Ed.) *REencuentro. Análisis de Problemas Universitarios*(72), 71-92.

Moreno, H., Ledezma, I., & Adriana, L. (2014). Procesos sociales y culturales que entretejen la apropiación y aplicación de las TIC´s en educación superior. *Revista Electrónica sobre Educación Media y Superior, 1*(1). Obtenido de http://www.cemys.org.mx/index.php/CEMYS/article/view/199

National Council Teachers of Mathemactis. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* EEUU: NCTM.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 11-38.

Piaget, J. (1978). *La equilibración de las estructuras mentales.* México: Siglo veintiuno editores.

Piaget, J. (2016). *La formación del símbolo en el niño, imitación, juego y sueño. Imagen y representación* (Segunda Edición ed.). México: Fondo de Cultura Económica.

Piaget, J. (séptima reimpresión 2010). *La equilibración de las estructuras cognitivas problema central del desarrollo.* (E. Bustos, Trad.) México: Siglo XXI editores.

Pozo, J. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Madrid: Morata.

Rabardel, P., & Verillon, P. (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, X*(1), 77-101.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica, 7*(3), 5-41.

Rivas, M. (2008). *Procesos cognitivos y aprendizaje significativo.* España: La suma de todos.

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1999). *Metodología de la Investigación cualitativa.* España: Aljibe.

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnología digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Revista Educación Matemática*(Especial 25 años), 11-30.

Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de práticas, objetos y procesos matemáticos.

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática, 21*(1), 5-27.

SEP. (2011). *Planes de Estudios 2011.* México D.F.: SEP.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objetcts as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22-36.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students´command processs through instrumental orchestrations . *International Journal of Computers for Mathematical Learning*(9), 281-307.

Trouche, L., & Guin, D. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of intrumental orchestrations. *ZDM, 34*(5), 204-211.

Vargas, X. (2011). *¿Cómo hacer investigación cualitativa? Una guía práctica para saber qué es la investigación en general y cómo hacerla, con énfasis en las etapas de la investigación cualitativa.* México: ETXETA.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* México: Trillas.

Vygotski, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* (S. Furio, Trad.) España: Grijalbo.

Yang, K.-L., & Lin, F.-L. (2007). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educationa Studies in Mathematics*, 59-76.

Yin, R. (2003). *Case study research: design and methods.* United States of America: Sage Publications.

X. ANEXOS

Anexo I. Cuestionario sobre exploración de contenidos

Exploración de Contenidos

Nombre: ____

Edad: _____________ Fecha: ___________________________________

Responde las siguientes preguntas de forma breve.

1. ¿Qué es un vértice?

2. ¿Qué es un lado homólogo?

3. ¿Qué significa que dos figuras sean congruentes?

4. ¿Qué es un lado adyacente?

5. ¿Qué es un ángulo adyacente?

6. ¿Qué es una razón en matemáticas?

7. ¿Qué es una proporción?

8. ¿Qué significa que dos figuras sean semejantes?

9. ¿Qué es homotecia?

10. Cuando se usa la expresión ***condición suficiente*** ¿a qué se refiere?

11. ¿Qué es una circunferencia?

12. ¿Qué figura se forma si tienes un punto y muchos alrededor de éste a la misma distancia?

Anexo II. Actividades del Experimento de Enseñanza

Actividad 1. El lugar geométrico

Nombre: ____

Fecha: __________________________

1. ¿Qué figura geométrica se forma si tienes un conjunto de puntos que equidistan una distancia fija a un punto fijo?

El segmento se traza con 

Para mover usa

2. Traza un punto y a partir de ahí traza un segmento de longitud fija, con la medida que tú decidas.

3. Al punto trazado anteriormente llámale *O.*

4. Mueve el punto que permite el giro en *O.*

5. ¿Qué figura se forma con el movimiento?

6. Activa "rastro" y observa lo que sucede cuando mueves el punto alrededor de *O.*

7. Escribe las características (propiedades geométricas) de la figura que se formó.

Actividad 1.1 Construcciones

Nombre: ____

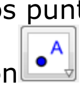
Fecha: ___________________________

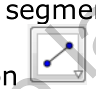
1. Traza un segmento AB.

2. Traza dos circunferencias de radio arbitrario, una con centro en A y la otra con centro en B.

3. Pon un ***punto nuevo*** en cada circunferencia y únelo con el centro de cada una de ellas.

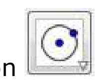
4. Mueve las circunferencias y los puntos nuevos, de tal manera que éstos (puntos nuevos) coincidan. ¿Qué figura geométrica se forma si unes los ***puntos nuevos***?

Los puntos los creas con 

El segmento lo trazas con 

Para mover usa 

Para medir los lados 

Las circunferencias se trazan con 

5. ¿Qué condición se debe de cumplir en las circunferencias para que exista la figura?

7. ¿Cuándo desaparece la figura?

8. ¿Qué condiciones se deben de cumplir para que puedas construir un triángulo?

9. Traza el punto de intersección de las circunferencias, construye el triángulo. Mide los lados del triángulo, muévelos y observa. ¿Qué relación hay entre las medidas de los lados menores, respecto a la medida del lado mayor?

10. ¿Cómo son los ángulos del triángulo?

11. ¿Qué características deben tener entonces los segmentos para la construcción del triángulo?

12. Reflexiona a partir de lo anterior realizado y responde: ¿Cuántos y cuáles elementos son suficientes para construir un triángulo? ¿Por qué?

Actividad 2. Ángulos entre paralelas

Nombre: ____

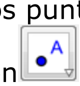
Fecha: _____________________

1. Traza un par de rectas paralelas, nombralas como R_1 y R_2. Traza una recta que corte a las paralelas (transversal), a la nueva recta le llamarás *T*.

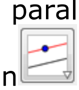
2. ¿Cuántos ángulos se forman al cortar las paralelas?

3. Mide todos los ángulos que dijiste que se forman.

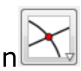
4. ¿Cuáles son los **ángulos opuestos por el vértice**? Escríbelos en parejas. **Nota:** los ángulos opuestos por el vértice son aquellos que se forman por dos rectas que se intersecan en un punto y éste (punto de intersección) está entre otros dos puntos de cada recta.

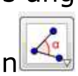
Los puntos los creas con 

La recta se traza con 

La recta paralela se traza con 

Para mover usa 

Para los puntos de intersección 

Los ángulos se miden con 

5. Mueve las rectas paralelas y la recta *T,* observa los ángulos y responde. ¿Cómo son las medidas de los ángulos opuestos por el vértice?

6. ¿Cuáles ángulos son correspondientes? Y ¿Cómo son las medidas de esos ángulos? **Nota:** los ángulos correspondientes son los que están en posición coincidente en las paralelas respecto a la transversal.

7. Mueve nuevamente las paralelas, observa los ángulos correspondientes y los opuestos por el vértice. ¿Qué característica presentan?

8. Elabora un enunciado general que resuma cómo deben ser los ángulos correspondientes en rectas paralelas.

9. Elabora también un enunciado general que resuma cómo deben ser los ángulos opuestos por el vértice en rectas paralelas.

Actividad 2.1 Congruencia

Nombre: ____

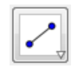
Fecha: ______________________

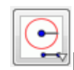
5. ¿Cuántos elementos son suficientes para construir un triángulo?

6. ¿Qué elementos consideras que son necesarios para determinar si dos o más triángulos son congruentes?

Para mover usa 

Para los puntos de intersección 

El segmento se traza con 

Usa  para trasladar medidas

Actividad 2.2 Lado, Lado, Ángulo

1. Con dos segmentos de medidas diferentes entre sí y un ángulo que no esté incluido en los segmentos construye un triángulo $\triangle LMN$. Con los datos anteriores traza un triángulo diferente.

2. ¿Cuántos triángulos diferentes pudiste construir con los datos del triángulo inicial? ¿Por qué?

3. ¿Qué relación guardan entre sí los triángulos construidos?

4. ¿Con esos datos es suficiente para asegurar que dos o más triángulos son congruentes? ¿Por qué?

Actividad 2.3 Lado, Lado, Lado

6. Traza un triángulo $\triangle ABC$, con tres segmentos de medidas diferentes. Haz un triángulo diferente al construido, pero con las mismas medidas de tu primer triángulo (usa circunferencias para trasladar las medidas de tu triángulo inicial al nuevo triángulo)
7. ¿Lograste construir el triángulo? ¿Por qué sí o por qué no?

8. ¿Qué características tiene el nuevo triángulo?

9. ¿Cómo son los lados del nuevo triángulo respecto al triángulo inicial?

10. Enuncia una regla general que describa cómo deben ser los elementos de los triángulos (de los que acabas de construir) para

determinar que son congruentes y justifícala (toma en cuenta todo lo realizado anteriormente):

Actividad 2.4 Lado, Ángulo, Lado

2. Traza un triángulo $\triangle FGH$, con un ángulo comprendido entre dos segmentos de diferente medida. Ahora con los datos anteriores (medidas de los dos segmentos y el ángulo) traza un triángulo diferente.
2. ¿Pudiste construir el triángulo diferente? ¿Por qué?

3. ¿Qué características tienen los elementos de tus triángulos?

4. Escribe una regla general que resuma las propiedades que deben tener los elementos los triángulos (que acabas de construir) para

determinar que son congruentes, justifica (recuerda que puedes tomar en cuenta todo lo realizado anteriormente):

Actividad 2.5 Ángulo, Ángulo, Ángulo

1. Construye un triángulo $\triangle HIJ$ con tres ángulos de medidas diferentes. Construye ahora un triángulo diferente usando las medidas de los tres ángulos del triángulo inicial.

2. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir dados tres ángulos? ¿Por qué?

3. ¿Qué características tienen los ángulos y los lados de los dos triángulos?

4. Observa los triángulos, mueve y responde: ¿Son congruentes los triángulos? ¿Por qué sí o por qué no?

5. A partir de lo realizado anteriormente responde y **argumenta**: ¿A partir de tres ángulos es suficiente para asegurar la congruencia de dos o más triángulos?

Actividad 2.6 Ángulo, Lado, Ángulo

1. Traza un triángulo $\triangle PQR$ a partir de dos ángulos de diferente medida y un segmento comprendido entre ellos. Crea un triángulo distinto, pero usando las mismas medidas de los elementos con que trazaste el primer triángulo.

2. ¿Lograste construir el nuevo triángulo? ¿Por qué?

3. ¿Qué características en común tienen los elementos de los triángulos que construiste?

4. Observa, mueve y responde: ¿Son congruentes los triángulos? ¿Por qué?

5. Responde y **argumenta** a partir de las observaciones realizadas con anterioridad: ¿Es posible establecer la congruencia de dos o más triángulos a partir del segmento comprendido entre dos ángulos?

Actividad 2.7 Lado, Ángulo, Ángulo

1. Con dos ángulos de medida arbitraria y un segmento que no esté en medio de los ángulos, construye un triángulo $\triangle WDZ$. Ahora traza un triángulo diferente, pero usando las mismas medidas de los elementos con que trazaste el primer triángulo.

2. ¿Cuántos triángulos diferentes lograste trazas? ¿Por qué?

3. Observa, mueve y responde: ¿Qué características tienen los elementos de los triángulos?

4. ¿Son congruentes los triángulos? ¿Por qué?

5. Una vez que realizada la actividad responde: ¿Cómo puedes afirmar la congruencia de dos o más triángulos dados dos ángulos y un segmento no incluido en éstos?

6. Cada una de las actividades anteriores usó ciertas formas (LLA, LLL, ALA, AAA, LAL, LAA) para verificar la congruencia de dos o más triángulos.

¿Cuáles son las formas que sirven para verificar la congruencia? ¿Por qué?

¿Por qué no te sirven las otras formas?

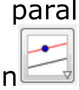
Actividad 3. Teorema 1

Nombre: ____

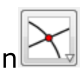
Fecha: ______________________________

Los puntos los creas con 

La recta se traza con 

La recta paralela se traza con 

Para mover usa 

Para los puntos de intersección 

Los segmentos se miden con 

13. Traza tres rectas paralelas y renómbralas como R_1, R_2 y R_3 respectivamente.
14. Traza dos rectas que corten a las rectas paralelas. No tienen que pasar por los puntos generados por las paralelas.
15. Renombra las rectas como $Trans_1$ y $Trans_2$ para que puedas diferenciarlas. Las rectas trazadas que cortan a las paralelas, se llaman transversales.
16. Mueve las transversales hasta que se crucen y encuentra su punto de intersección, dicho punto lo renombras como "I". Encuentra también los puntos de intersección de las transversales con las paralelas.
17. Renombra los puntos de intersección de $Trans_1$ como M_1, M_2 y M_3 (empieza a nombrar de manera ascendente, a partir del punto de intersección I), renombra los de $Trans_2$ como N_1, N_2 y N_3(inicia a nombrar del punto de intersección I de manera ascendente).
18. Mide los segmentos $\overline{IM_1}$, $\overline{IM_2}, \overline{IM_3}$, $\overline{IN_1}$, $\overline{IN_2}, \overline{IN_3}$ además obtén el cociente que resulte de dividir $\frac{\overline{IN1}}{\overline{IM1}}$, $\frac{\overline{IN2}}{\overline{IM2}}$, $\frac{\overline{IN3}}{\overline{IM3}}$. Anota tus resultados en el espacio en blanco y responde ¿Cómo es el cociente en las comparaciones que hiciste?

Sugerencia: puedes obtener los cocientes introduciendo los valores en la barra "Entrada", los resultados te aparecerán en el área de "vista algebraica"

19. Mueve una de las transversales y vuelve a obtener los cocientes con las nuevas medidas que resultaron de mover la transversal. Escribe los segmentos comparados y el nombre de la transversal que moviste ¿Qué se mantiene? ¿Por qué?

20. ¿Qué sucederá con los cocientes si mueves la otra transversal? ¿Por qué?

21. Mueve una de las rectas paralelas vuelve a obtener los cocientes. Escribe los segmentos comparados y el nombre de la recta que moviste. ¿Qué se mantiene? ¿Por qué?

22. ¿Qué sucederá con los cocientes si mueves las demás rectas paralelas? ¿Por qué?

23. ¿Qué condiciones se deben cumplir al comparar segmentos? ¿Cómo llamarías a dicha condición?

24. Haz un enunciado general donde resumas: ¿Cómo debe ser la proporcionalidad de segmentos? ¿Qué características deben tener, para poder decir entonces lo que significa tener segmentos proporcionales?

Actividad 4. Semejanza

Nombre:____

Fecha:____

1. ¿Qué formas conoces para verificar la semejanza de dos o más triángulos?

2. Vuelve a la construcción que realizaste en la **Actividad 3** y responde ¿**Cuántos triángulos ves** que se forman con las transversales sobre las paralelas? **Dibuja** los triángulos tal como los ves en la pantalla. **Guarda** también una impresión de pantalla.

3. Une los puntos (vértices) para formar los triángulos vistos.

4. ¿Qué características tienen las figuras semejantes?

Actividad 4.1 Lado, Lado, Lado

1. Ya tienes las medidas de dos lados de cada triángulo, obtén la del tercer lado, también saca el cociente que resulte de dividir las medidas de lados correspondientes de los triángulos. Recuerda que un lado correspondiente es aquel que está en posición coincidente en las figuras. **Anota el nombre de los triángulos, el nombre de los lados que vas a comprar, las medidas de los lados y el cociente.**

2. Con base en tus resultados responde: ¿Cómo son los lados de los triángulos? ¿Por qué?

3. ¿Cómo son entonces los triángulos?

4. ¿Cuántos pares de lados es suficiente comparar para poder determinar la propiedad anterior? ¿Por qué?

Actividad 4.2 Ángulo, Ángulo, Ángulo

1. Ahora te vas a centrar en los ángulos de tus triángulos: ¿Cómo son los ángulos de tus triángulos? ¿Por qué?

2. ¿Cuántos pares de ángulos es suficiente comparar para poder determinar la propiedad anterior? ¿Por qué?

3. ¿Cómo son los triángulos entre sí? ¿Por qué?

Actividad 4. 3 Lado, Ángulo, Lado

1. Basándote en tus resultados anteriores determina ¿Qué sucede en dos o más triángulos si tienes pares de lados (correspondientes) proporcionales y el ángulo comprendido entre éstos congruente? ¿A qué se debe tal hecho?

Actividad 4. 4 Ángulo, Lado, Ángulo

1. Con las conclusiones anteriores determina ¿Qué sucede en dos o más triángulos si tienes pares de ángulos congruentes y el lado comprendido entre ellos proporcional? ¿Por qué?

Actividad 4. 5 Lado, Lado, Ángulo

1. Vuelve a tu construcción, mueve, observa y responde: ¿Cómo son dos o más triángulos que tienen pares de lados correspondientes proporcionales y pares de ángulos no comprendidos entre ellos (entre los lados) congruentes? ¿Por qué?

Actividad 4. 6 Lado, Ángulo, Ángulo

1. Una vez más emplea lo obtenido en las anteriores actividades y responde: ¿Cómo son dos o más triángulos si tienes pares de lados correspondientes proporcionales, con pares de ángulos correspondientes congruentes?

2. A manera de resumen usa las conclusiones de las actividades de semejanza y enuncia: ¿Cuántas y cuáles condiciones suficientes hay para poder determinar la semejanza entre dos o más triángulos?

Actividad 5. Homotecia Directa

Nombre:____

Fecha:____

Abre el archivo Homotecia.ggb observa las construcciones y responde. **No muevas nada**:

17. ¿Qué propiedades de las estudiadas anteriormente tienen esas dos figuras entre sí?

18. Describe el procedimiento que usarás para encontrar la razón de semejanza y anota cuál es.

19. ¿Cuál es la relación del segmento $\overline{AC}$ con respecto al segmento $\overline{A_1C_1}$?

20. ¿Cómo son los segmentos restantes ($\overline{BC}$ y $\overline{AB}$) respecto a sus segmentos correspondientes ($\overline{B_1C_1}$ y $\overline{A_1B_1}$)?

El punto denotado como "$Centro_H$" que está en la construcción, se llama **centro de homotecia** y se dice que dos figuras son homotéticas porque sufren una transformación geométrica, donde a partir de una figura dada se obtiene una o varias en tamaño mayor (ampliada) o en tamaño menor (reducida), determinada por una **razón de homotecia *K***.

21. Mueve el triángulo mayor por el vértice A_1 , sin cruzar el Centro de Homotecia y responde: ¿Qué sucede con el vértice correspondiente de A, B y C? **Sugerencia:** activa "rastro" para cada vértice correspondiente.

22. ¿En qué intervalo debe estar la razón de homotecia en figuras ampliadas? ¿Por qué?

23. ¿En qué intervalo está la razón de homotecia si la figura homotética está entre la figura original y el centro de homotecia?

24. Considera las observaciones anteriores para poder responder: ¿Qué propiedades geométricas se conservan en las figuras homotéticas cuando la razón de homotecia es mayor que cero?

Actividad 5.1 Homotecia Inversa

25. Mueve el triángulo mayor por el vértice A_1 , cruza el Centro de Homotecia y responde: ¿Qué sucede con el vértice correspondiente de A, B y C? **Sugerencia:** activa "rastro" para cada vértice correspondiente.

26. ¿Qué le sucedió a la figura homotética? ¿Por qué?

27. ¿Cómo es la razón de homotecia cuando las figuras presentan esta característica?

28. ¿En qué intervalo está la razón de homotecia para que las figuras presenten la característica arriba mencionada (respuesta a pregunta 10)?

29. ¿Cuáles son las características de las figuras homotéticas cuando la razón de homotecia es negativa?

30. ¿Qué sucede con los ángulos de la figura homotética respecto a los ángulos de la figura original?

31. ¿Cuáles son las características de las figuras homotéticas cuando la razón de homotecia es 0?

32. Describe las características de las figuras homotéticas cuando la razón de homotecia es igual a 1.