



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

Análisis de la comprensión de la Probabilidad Condicional en estudiantes
universitarios

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestra en Didáctica de las Matemáticas

Presenta
Montserrat Lino González

Dirigida por:
Dra. Lilia Patricia Aké Tec

Dra. Lilia Patricia Aké Tec
Presidente

Mtra. Luisa Ramírez Granados
Secretario

Mtra. Cecilia Hernández Garcíadiego
Vocal

Dr. Samuel Estala Arias
Suplente

Mtro. Marco Antonio Rojas Tapia
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Octubre 2020
México

AGRADEZCO:

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) del Gobierno de México y a la Universidad Autónoma de Querétaro, por su apoyo y patrocinio para realización de mi posgrado y proyecto de investigación. Septiembre 2018 a Agosto 2020.

A todos los docentes que me dieron clases en la Maestría por su colaboración en mi formación académica y muy especialmente a la Dra. Lilia Patricia Aké Tec por su dedicación e interés durante la dirección y asesoría de este trabajo.

A la Mtra. Luisa Ramírez Granados por su apoyo y ayuda incondicional.

Un agradecimiento especial a la Mtra. Cecilia Hernández Garciadiago porque me enseñó a programar en Descartes, culminando en la simulación de dos de las tareas que aborda este trabajo y su ayuda fue clave para su desarrollo.

A mi esposo Jorge Flores Maldonado y mis hijos Arantxa y Erick Flores Lino por su apoyo y paciencia cada día.

A mi madre y hermanos que me animaron a seguir mis sueños.

A la memoria de mi padre con admiración y gratitud.

ÍNDICE

Resumen	ix
Abstract	x
Introducción	xi
CAPÍTULO 1. Antecedentes	1
1.1 Probabilidad Condicional y sesgos	1
1.2 La Probabilidad Condicional desde la Didáctica de las Matemáticas	3
1.3 La Probabilidad Condicional mediante el uso de tecnología	10
1.4 La Probabilidad Condicional en los libros de texto y texto digitales	23
CAPÍTULO 2. Planteamiento del problema	27
2.1 Pregunta de investigación	29
2.2 Hipótesis	29
2.3 Objetivo general	29
2.4 Objetivos específicos	29
2.5 Justificación	30
CAPÍTULO 3. Marco Teórico y Metodológico	33
3.1 Teoría Antropológica de lo Didáctico	33
3.2 Metodología	35
3.2.1 Muestra y contexto	35
3.2.2 Descripción del Instrumento de recolección de datos	36
3.2.2.1 Organización praxeológica de la actividad 1	40
3.2.2.2 Organización praxeológica de la actividad 2	43
3.2.2.3 Organización praxeológica de la actividad 3	46
3.2.2.4 Organización praxeológica de la actividad 4	49
3.2.3 Procedimiento de aplicación: ACODESA	52
3.2.4 Descripción de la simulación en Descartes	57

CAPÍTULO 4. Resultados y Análisis	65
4.1 Criterios de análisis para el sesgo temporal diacrónico	65
4.2 Criterios de análisis para el sesgo de causación	68
4.3 Análisis de la Fase 1 ACODESA. Trabajo individual	75
4.3.1 Análisis de las actividades sobre el sesgo temporal diacrónico	75
4.3.2 Análisis de las actividades sobre el sesgo de causación	83
4.4 Análisis de la Fase 2 ACODESA. Trabajo en equipos	96
4.4.1 Análisis de las actividades sobre el sesgo temporal diacrónico	97
4.4.2 Análisis de las actividades sobre el sesgo de causación	105
4.5 Análisis de la Fase 3 ACODESA. Debate	114
4.5.1 Análisis de las actividades sobre el sesgo temporal diacrónico	115
4.5.2 Análisis de las actividades sobre el sesgo de causación	120
4.6 Análisis de la Fase 4 ACODESA. Auto-Reflexión	123
4.6.1 Análisis de las actividades sobre el sesgo temporal diacrónico	123
4.6.2 Análisis de las actividades sobre el sesgo de causación	133
4.7 Fase 5 ACODESA. Institucionalización del concepto	151
CAPÍTULO 5. Conclusiones	153
5.1 Conclusiones generales sobre los resultados obtenidos en las tareas	153
5.2 Conclusiones generales por fase de implementación ACODESA	154
5.3 Limitaciones de la secuencia y aplicación de actividades y propuesta de mejoras	158
5.4 Conclusiones respecto a la pregunta y objetivos de investigación	160
5.5 Conclusiones respecto a la hipótesis	161
5.6 Aportaciones y líneas de investigación abiertas	162
5.7 Publicación derivada del estudio	166
Referencias Bibliográficas	167

Anexos	177
Anexo I. Carta de consentimiento informado para el docente	178
Anexo II. Carta de consentimiento informado para los estudiantes	179
Anexo III. Carta de confidencialidad para el estudiante	180
Anexo IV. Instrumento de recolección de datos	181
Anexo V. Técnicas (τ)	185
Anexo VI. Tecnologías (θ)	187
Anexo VII. Simulación creada en el <i>software</i> Descartes	188
Anexo VIII. Programa en STATA v13.0 ®	189
Anexo IX. Opinión del estudiante sobre la simulación	192

Índice de Cuadros

Cuadro 1. Sesgos asociados al concepto de Probabilidad Condicional	3
Cuadro 2. Elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico	34
Cuadro 3. Actividades aplicadas a los estudiantes	37
Cuadro 4. Praxeología de la Actividad 1	42
Cuadro 5. Praxeología de la Actividad 2	45
Cuadro 6. Praxeología de la Actividad 3	48
Cuadro 7. Praxeología de la Actividad 4	51
Cuadro 8. Procedimiento de aplicación ACODESA	53
Cuadro 9. Criterios para el análisis del inciso a) actividades uno y dos	66
Cuadro 10. Criterios para el análisis del inciso b) actividades uno y dos	67
Cuadro 11. Criterios para el análisis del inciso c) actividades uno y dos	68
Cuadro 12. Criterios para el análisis del inciso a) actividades tres y cuatro	69
Cuadro 13. Criterios para el análisis del inciso b) actividades tres y cuatro	71
Cuadro 14. Criterios para el análisis del inciso c) actividades tres y cuatro	73
Cuadro 15. Criterios para el análisis del inciso d) actividades tres y cuatro	74
Cuadro 16. Análisis praxeológico de producciones en las actividades que evidencian sesgo temporal diacrónico. Fase 1	76

Cuadro 17. Análisis praxeológico de producciones en las actividades que evidencian sesgo causal. Fase 1	85
Cuadro 18. Análisis praxeológico de producciones en las actividades que evidencian sesgo temporal diacrónico. Fase 2	98
Cuadro 19. Análisis praxeológico de producciones en las actividades que evidencian sesgo causal. Fase 2	107
Cuadro 20. Análisis praxeológico de producciones en las actividades que evidencian sesgo temporal diacrónico. Fase 4	124
Cuadro 21. Análisis praxeológico de producciones en las actividades que evidencian sesgo causal. Fase 4	136

Índice de Figuras

Figura 1. Pantalla que muestra la cuarta escena: Diacrónico (1)	58
Figura 2. Pantalla que muestra la quinta escena: Diacrónico (2)	59
Figura 3. Pantalla que muestra la sexta escena: Diacrónico (3)	60
Figura 4. Pantalla que muestra la séptima escena: Causal (1)	61
Figura 5. Pantalla que muestra la octava escena: Causal (2)	62
Figura 6. Pantalla que muestra la novena escena: Causal (3)	64
Figura 7. Producciones de alumnos que no identifican eventos o identifican en más de una forma. Fase 1	77
Figura 8. Producciones que identifican es un problema de Probabilidad Condicional en actividades 1 y 2. F1.	78
Figura 9. Producciones usan otras herramientas al resolver. Actividad 2. F1	79
Figura 10. Producciones de identificación de eventos & técnicas para resolver	80
Figura 11. Tecnología mal aplicada en producciones de ambas actividades F1	81
Figura 12. Producción sobresaliente en actividad 2. Fase 1	82
Figura 13. Otras formas de identificar eventos (\square) y cuando no identifica todos o no identifica (\circ)	86
Figura 14. Id o no problema Probabilidad Condicional & dificultad al calcular	88
Figura 15. Uso de técnicas & sesgos	89

Figura 16. Sesgos de actividades 3 y 4 por confusión de conceptos asociados a Probabilidad Condicional	91
Figura 17. Sesgos en actividades 3 y 4. F1	92
Figura 18. Producciones más deficientes de actividades 3 y 4. F1	93
Figura 19. Producción más sobresaliente de actividades 3 y 4. F1	94
Figura 20. Tecnologías bien aplicadas en A3 y A4 correctamente resueltas	96
Figura 21. Validación incorrecta de respuesta A1 y correcta en A2. F2	101
Figura 22. Identifican todos los eventos, pero no que es problema de Probabilidad Condicional A1, A2. F 2	102
Figura 23. Identifican todos los eventos y que es problema de Probabilidad Condicional A1, A2. F 2	103
Figura 24. Evidencian tecnología y no la aplican bien A1, A2. F 2	104
Figura 25. Evidencian tecnología y sí la aplican bien A1, A2. F 2	104
Figura 26. Identificación de eventos A3, A4. F 2	109
Figura 27. No identifican que es problema de Probabilidad Condicional A4. F 2	109
Figura 28. Identifican que es Probabilidad Condicional, pero confunde con regla de producto A3. F 2	110
Figura 29. No emplean técnicas de resolución y cometen sesgo. F 2	111
Figura 30. Técnica de resolución probabilidad simple y lógica. F 2	111
Figura 31. No identifican problema Probabilidad Condicional, dificultad al Calcular, F 2	112
Figura 32. Producción más sobresaliente. F 2	113
Figura 33. Aplica tecnología en actividad correctamente resuelta. F 2	113
Figura 34. No aplican correctamente la tecnología. F 2	114
Figura 35. Producciones de las actividades uno y dos. F 3	116
Figura 36. Producciones de las actividades tres y cuatro. F 3	120
Figura 37. No identifican completo el espacio muestral A1 y A2. F4	127
Figura 38. Producciones sin evolución que continúan presentando sesgo temporal diacrónico de las actividades uno y dos. Fase 4	128

Figura 39. Producciones donde resuelven la actividad dos igual que la Actividad uno. Fase 4	129
Figura 40. Producciones sin evolución y evidenciando sesgo temporal Diacrónico en ambas actividades. Fase 4	129
Figura 41. Aplicación errónea de tecnología en la actividad dos. Fase 4	130
Figura 42. No identifica problema de Probabilidad Condicional ni muestreo Sin reemplazo al resolver. Fase 4	139
Figura 43. Identifica problema de Probabilidad Condicional, no desarrolla Fórmula. Fase 4	140
Figura 44. No identifica problema de Probabilidad Condicional y se le dificulta resolver. Fase 4	140
Figura 45. Producciones destacadas en actividades tres y cuatro. Fase 4	141
Figura 46. Evidencia de teoría en la actividad tres. Fase 4	142
Figura 47. Producciones de estudiantes que resolvían bien inciso b) en Fase 1 y resuelven mal ambos incisos en la fase 4 de la A3	144
Figura 48. Producciones sobresalientes en la actividad 3. Fases 1 & 4	146
Figura 49. Producciones sin evolución en la actividad 4. Fases 1 & 4	148
Figura 50. Producciones correctas en la actividad 4. Fase 4	149

Índice de Gráficas

Gráfica 1. Evolución de la respuesta de la actividad 1. Fase1 a la Fase 4	132
Gráfica 2. Evolución de la respuesta de la actividad 2. Fase1 a la Fase 4	133
Gráfica 3. Evolución de la respuesta de la actividad 3 b) $P(N_2 N_1)$. F1 a F4	147
Gráfica 4. Evolución de la respuesta de la actividad 3 c) $P(N_1 N_2)$. F1 a F4	147
Gráfica 5. Evolución de la respuesta de la actividad 4 b) $P(H_i P_i)$. F1 a F4	150
Gráfica 6. Evolución de la respuesta de la actividad 4 c) $P(P_i H_i)$. F1 a F4	150

Resumen

Parte de la problemática descrita en la literatura especializada en el proceso enseñanza-aprendizaje de la Probabilidad Condicional, está relacionada principalmente con los sesgos y el contexto del problema. La investigación descrita en este artículo tiene un enfoque cualitativo de tipo descriptivo con observación estructurada; la muestra fue por conveniencia, se obtuvo de un aula de estudiantes universitarios de la facultad de contabilidad de la carrera de Actuaría que ya habían cursado la materia de probabilidad y estadística como parte de las materias de tronco común y habían visto el tema de Probabilidad Condicional. Se asignaron a los participantes cuatro tareas, cada una con consignas; dos de las tareas se seleccionaron de cuestionarios que ya están estadísticamente validados para encontrar sesgos asociados al concepto de Probabilidad Condicional y son descontextualizados; mientras que, en las tareas restantes tenían como característica la presentación de los problemas en un contexto familiar a su campo de conocimiento, pero evidencian el mismo sesgo. Las tareas se modificaron bajo el marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en cada una de las cinco fases del procedimiento de aplicación ACODESA, con la intención de que al analizar sus producciones cognitivas se detectara qué y cómo resolvían los estudiantes las actividades propuestas, aportando evidencia que permitió establecer cómo comprenden la Probabilidad Condicional y observar su evolución de la fase uno a la fase cuatro. El análisis de los resultados evidenció que no tienen bien consolidados los conceptos asociados a la Probabilidad Condicional aunado a que manejan pocas técnicas para identificar y resolverlos acertadamente. Los resultados permiten concluir que la enseñanza de la Probabilidad Condicional es determinista y no se dejan tareas que promuevan diferentes métodos de solución, que les permitan reflexionar sobre sus técnicas y desarrollar habilidades de justificación. Los estudiantes resuelven los problemas de Probabilidad Condicional de forma intuitiva, de acuerdo a su grado de entendimiento de los conceptos asociados a la Probabilidad Condicional. Con la información obtenida fue posible focalizar los puntos donde es necesario incidir para la corrección de sesgos, y de esta manera, lograr que resuelvan con éxito problemas de Probabilidad Condicional.

Palabras Clave: Probabilidad Condicional, TAD, ACODESA, sesgo temporal, sesgo de independencia.

Abstract

Part of the problem described in specialized literature about teaching-learning process of conditional probability is mainly related to biases and problem context. The research described in this article has a qualitative and exploratory approach under natural observation. The sample will be for convenience and will be obtained from a group of engineering students, at university level, studying probability and statistics as part of the common core subjects and who have studied conditional probability. Participants will be assigned four tasks, each with obligations to fulfill; two of the tasks were selected from questionnaires that are already statistically validated to find biases associated with the concept of conditional probability and with which students are already familiar; while, in the remaining tasks the problems will be presented in a context different from their field of knowledge but they will show the same bias. The tasks were modified under the theoretical framework through Anthropological Theory of the Didactic, in each of the five phases of the ACODESA application procedure, with the intention that when analyzing their productions it is detected what and how the students solve the proposed activities, providing evidence that allows to establish how they understand the conditional probability and observe its evolution from phase one to phase four. The analysis of the results showed that the concepts associated with conditional probability are not well consolidated, coupled with the fact that they use few techniques to identify and solve them correctly. The results allow to conclude that the teaching of conditional probability is deterministic and no tasks are left that promote different solution methods, which allow them to reflect on their techniques and develop justification skills. Students solve conditional probability problems intuitively, according to their degree of understanding of the concepts associated with conditional probability. With the information obtained, it was possible to focus the points where it is necessary to influence the correction of biases, and in this way, the students will be able to successfully solve conditional probability problems.

Keywords: *conditional probability, ATD, ACODESA, temporary bias, independence bias.*

INTRODUCCIÓN

La Probabilidad Condicional es un tema importante que se utiliza en la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre y forma parte de la definición de otros conceptos estadísticos, lo que hace imprescindible su correcto entendimiento para el avance exitoso en el estudio de la estadística; sin embargo, ha sido reportada por varios autores como un concepto difícil de comprender por los estudiantes universitarios (Díaz, 2005; Estrada et al., 2006 y Barragués y Guisasola, 2009).

Esta inquietud da origen a esta investigación que pretende, en primera instancia, evidenciar cómo es comprendida la Probabilidad Condicional por los estudiantes. Se utilizan algunas actividades que han sido validadas estadísticamente para medir sesgos de falacia temporal (situación diacrónica) y de concepto de causalidad en su desarrollo, las cuales pueden ser usadas para encontrar sesgos en otras investigaciones (Díaz y de la Fuente, 2007).

El marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) que funge como eje rector de esta investigación, se utilizó para adaptar las actividades elegidas; con la finalidad de cubrir el objetivo principal de caracterizar la actividad matemática de los estudiantes universitarios al resolver actividades de Probabilidad Condicional analizando el *qué* y *cómo* resuelven estas actividades, aportando una idea del *cómo* es que comprenden la Probabilidad Condicional, pregunta de investigación que se pretende responder.

Aportaciones referidas en la literatura desde la Didáctica de las Matemáticas relacionadas con la comprensión de la Probabilidad Condicional en estudiantes universitarios ya han identificado causas de errores que cometen los estudiantes al calcularlas. Estas investigaciones son punto de partida para encontrar sesgos en la resolución de problemas.

Con la información obtenida es posible focalizar los puntos donde es necesario incidir para la corrección de sesgos. Esta información permite diseñar una secuencia de tareas de Probabilidad Condicional de acuerdo con su grado de dificultad, con la finalidad de favorecer la comprensión progresiva del concepto. Se espera que los estudiantes resuelvan con éxito problemas de Probabilidad Condicional en cualquier contexto mediante la comprensión de los conceptos asociados y no por la memorización de fórmulas.

El contenido de este trabajo queda conformado de la siguiente manera:

En el **capítulo 1** se explica brevemente el concepto de Probabilidad Condicional y los sesgos que cometen algunos estudiantes al calcularla. Se presenta la revisión de las aportaciones referidas desde la Didáctica de las Matemáticas relacionadas con la comprensión de la Probabilidad Condicional en estudiantes universitarios. La revisión bibliográfica se hizo desde tres vertientes: La Probabilidad Condicional desde la Didáctica de las Matemáticas, la Probabilidad Condicional mediante el uso de tecnología y la Probabilidad Condicional en los libros de texto y texto digitales.

En el **capítulo 2** se presenta el problema que llevó a plantear la pregunta de investigación: ¿Cómo comprenden la Probabilidad Condicional los estudiantes universitarios? su justificación, la hipótesis y los objetivos general y específicos.

El **capítulo 3** presenta el marco teórico y metodológico. El marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) la cual fundamenta, guía y sustenta esta investigación que permite analizar las producciones de los estudiantes universitarios dando una idea de cómo comprenden la Probabilidad Condicional. Con la TAD se podrá analizar cómo los estudiantes resuelven el problema planteado a través de las praxeologías matemáticas (técnicas (τ), tecnologías (θ) y teorías (Θ)).

En la metodología se describe la muestra y el contexto en el que fue realizada la investigación. Se explica a detalle cada una de las actividades propuestas y guiadas bajo la TAD para evidenciar sesgos de temporalidad y causalidad. Se describe el

procedimiento para la aplicación del instrumento de recolección de datos: ACODESA. Se concluye con la descripción de la simulación hecha en el *software* Descartes que se utilizó como herramienta auxiliar en la aplicación de las fases dos y tres de ACODESA.

En el **capítulo 4** se expone el análisis de la información recabada y se muestran los resultados obtenidos de los mismos.

En el **capítulo 5** se presentan las conclusiones en lo general y en lo particular en cuatro apartados: con respecto a la pregunta y objetivos de investigación, la hipótesis, las limitaciones del estudio para finalizar con las aportaciones y líneas de investigación abiertas.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

La Probabilidad Condicional es un tema importante, que se utiliza con frecuencia en la vida profesional y en la vida cotidiana, principalmente cuando se busca tomar decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre. La Probabilidad Condicional forma parte de la definición de otros conceptos estadísticos que son requisito en el estudio de la inferencia estadística; como en el estudio de la asociación de variables, la regresión y el contraste de las pruebas de hipótesis, entre otros conceptos que se definen mediante una Probabilidad Condicional, por tanto, es imprescindible que el alumno adquiera un conocimiento y competencia básica en este tema antes de avanzar en el estudio de la estadística (Díaz y de la Fuente, 2005).

1.1 Probabilidad Condicional y sesgos

La Probabilidad Condicional puede definirse con diversos grados de formalización. Intuitivamente podemos decir que la Probabilidad Condicional $P(A|B)$ de un suceso¹ A dado otro suceso B es simplemente la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B se ha verificado².

Desde un punto de vista más formal se define mediante la expresión (1):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \text{ siempre } P(B) > 0 \quad (1)$$

Un concepto relacionado es el de independencia y se obtiene cuando la Probabilidad Condicional es igual a la probabilidad simple de un evento.

¹ Suceso o evento es un subconjunto del espacio muestral, entendiéndose por espacio muestral Ω todos los posibles resultados de un experimento.

² Hay que tener en cuenta que el conocer esta información adicional que ha ocurrido B, conlleva el hecho que reduce el espacio muestral original Ω a un nuevo conjunto de resultados S que será el espacio muestral condicional.

Dos eventos son independientes si se demuestra una de las siguientes tres condiciones equivalentes:

- a) $P(A|B) = P(A)$
- b) $P(B|A) = P(B)$
- c) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Generalizando a n sucesos:

Si un conjunto de n sucesos A_1, A_2, \dots, A_n son independientes, entonces

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

Intuitivamente también se relaciona con el de Probabilidad Condicional, ya que dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionarlo por el otro.

Los sesgos relacionados con la Probabilidad Condicional podrían definirse como concepciones erróneas sobre conceptos de Probabilidad Condicional. Los errores o dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas de Probabilidad Condicional muchas veces se deben a que tienen sus propias ideas previas sobre las situaciones, las cuales suelen ser persistentes e inconsistentes con el punto de vista normativo, Sánchez (2009). La investigación teórica y experimental que se hace actualmente en Didáctica de la Matemática surge de observar que el alumno se equivoca cuando se le pide realizar ciertas tareas, cabe destacar, que estos errores no obedecen a un modo aleatorio e impredecible; sino que ya se han focalizado.

Cuadro 1. Sesgos asociados al concepto de Probabilidad Condicional

Dificultades para comprender el concepto de Probabilidad Condicional	
➤ Influencia de la presentación del problema	Estructura que presentan los problemas de enunciado verbal Relación con el contexto (no es familiar al estudiante)
➤ Condicionamiento y causación	Confusión entre diagnóstico y causa
➤ Condicionamiento y temporalidad de sucesos	$P(A B)$ es diferente de $P(B A)$
➤ Confusión entre Probabilidad Condicional y conjunta	Depende de cómo se redacten los enunciados
➤ Situaciones Sincrónicas	Estáticas, experimentos se realizan simultáneamente
➤ Situaciones Diacrónicas	Hay una clara secuencia temporal
➤ Concepto de Independencia	Definición

Fuente: Modificado de Díaz y de la Fuente (2005); Tarr y Lannin, (2005).

En este trabajo sólo se abordan dos sesgos; Diacrónico y de Causación, relacionándolos con el sesgo de la influencia de la presentación del problema ya que de cada uno se ponen actividades al estudiante en forma contextualizada y descontextualizada.

1.2 La Probabilidad Condicional desde la Didáctica de las Matemáticas

Una de las investigaciones pioneras en señalar problemas asociados con el cálculo de la Probabilidad Condicional es la de Falk (1986) donde reporta problemas que ya tenía detectados desde 1979 al trabajar con estudiantes.

En esa publicación menciona tres tipos de problemas relacionados con la Probabilidad Condicional: causalidad, condicionamiento y temporalidad inversa; con el propósito de aclararlos tanto a docentes como a estudiantes pues su cálculo les causa conflicto y obtienen un resultado erróneo.

Propuso actividades que eran difíciles de comprender y resolver correctamente al calcular su Probabilidad Condicional y ahora son propuestas por otras investigaciones para evidenciar dichos sesgos.

En el problema causal, donde el estudiante confunde el diagnóstico y la causa, la autora propuso el problema conocido como la “urna de Falk”. Explica que la confusión se da porque a los estudiantes no les hace sentido calcular la probabilidad de un evento posterior en el tiempo y suelen basar su respuesta en la composición obtenida al comienzo del experimento. Esta actividad además de evidenciar el problema causal, también tiene el sesgo temporal diacrónico motivo por lo que se seleccionó y se modificó para aplicarla con los estudiantes en esta investigación.

En investigaciones posteriores a este tipo de problemas se les da nombre de sesgos porque su origen tiene que ver con la forma en la que razonamos evidenciando un sesgo o tendencia de la forma intuitiva en que los comprendemos y no es coherente con la lógica probabilística del concepto de Probabilidad Condicional.

En algunas investigaciones teóricas y experimentales que se hacen actualmente en Didáctica de la Matemática surgen de observar que el alumno se equivoca cuando se le pide realizar ciertas tareas que requieren el cálculo de la Probabilidad Condicional, cabe destacar, que estos errores no obedecen a un modo aleatorio e impredecible; sino que estos ya se han focalizado; por otra parte, se ha determinado que otras dificultades se deben a la falta de conocimiento básico necesario para la comprensión correcta de un concepto o procedimiento dado (Batanero et al., 1998). Por su parte, Sánchez (2009) refiere que los errores o dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas muchas veces se deben a que tienen sus propias ideas previas sobre las situaciones, las cuales suelen ser persistentes e inconsistentes con el punto de vista normativo.

A continuación, se muestran algunas aportaciones referidas en la literatura, relacionadas con la comprensión de la Probabilidad Condicional en estudiantes universitarios.

Mediante un cuestionario de cuatro actividades y siguiendo un riguroso proceso metodológico, Estrada et al. (2006) evaluaron la comprensión y los sesgos específicos relacionados con la Probabilidad Condicional mediante cuatro falacias: conjunción, condicional transpuesta, eje temporal e independencia. Dichas actividades fueron elegidas de un cuestionario más amplio propuesto por Díaz y de la Fuente (2005). La muestra participante quedó conformada por un total de 159 estudiantes; de los cuales, 65 estudiantes de Magisterio que seguían una asignatura optativa de Estadística Aplicada a la Educación, 37 estudiantes de 5° de Matemáticas que seguían un curso optativo de Didáctica de la Matemática y 57 estudiantes de Psicología que seguían un curso obligatorio de Análisis de Datos. Dicha muestra la conformaron para analizar el razonamiento condicional de futuros profesores de Matemáticas, que posiblemente tuvieran que enseñar probabilidad en su vida profesional. Todos ellos habían estudiado probabilidad, aunque con diferente profundidad. El resultado de su investigación pone de manifiesto que muy pocos alumnos contestaron correctamente y la gran mayoría cae en los sesgos que tienen por objetivo evidenciar cada actividad coincidiendo estos resultados con otras investigaciones. Aunque los estudiantes de matemáticas tienen mayor formación probabilística, la distribución de respuestas de los tres grupos es similar en todas las actividades. Concluyen que no es un tema sencillo y genera confusiones en conceptos clave de la Probabilidad Condicional y sugieren presentar variedad de aplicaciones en temas reales, proponiendo situaciones interactivas y usar la tecnología para facilitar el aprendizaje con el objetivo de cuidar la preparación de los futuros profesores para no transmitir ideas erróneas en sus estudiantes. Se requiere también que los estudiantes confronten sus propios razonamientos incorrectos y la integración con la enseñanza de la lógica condicional.

Con respecto a la probabilidad (que incluye la condicional), Barragués y Guisasola, (2009) bajo el marco teórico de la probabilidad frecuencial, realizaron una investigación a partir de los resultados de pesquisas previas sobre la dificultad de la enseñanza-aprendizaje en dicha materia. Se utiliza la perspectiva social

constructivista y el concepto de demanda de aprendizaje para diseñar, implementar y evaluar una secuencia de enseñanza con el fin de introducir conceptos y procedimientos probabilísticos a estudiantes de segundo curso de ingeniería (18-20 años) de la universidad del País Vasco (España). Su trabajo evidenció la necesidad de un cambio metodológico en la enseñanza de la probabilidad en la universidad y sus objetivos; debido a que tiene deficiencias estructurales, epistemológicas y didácticas que dan origen al escaso aprendizaje obtenido. Su propuesta de secuencia de enseñanza y metodologías aplicadas en el aula logró como resultado que los estudiantes adquirieran mayor capacidad de razonamiento probabilístico.

Bajo la misma línea de investigación Batanero et al. (2012) publicaron un estudio sobre sesgos en el razonamiento en la Probabilidad Condicional e implicaciones para la enseñanza mediante la evaluación de dos estudios realizados con estudiantes de Psicología ($n= 414$ alumnos de primer curso de edades de 18 y 19 años), y futuros profesores de matemáticas (formado por dos tipos de alumnos con rango de edad de 22 a 30 años: 95 estudiantes de la licenciatura en matemática y 101 del máster de secundaria; ambos estudios realizados en varias universidades en España).

A través de diferentes tareas que adaptaron de otras investigaciones para después compararlas con sus resultados obtenidos, midieron los principales sesgos reportados en la literatura relativa a la Probabilidad Condicional; la comprensión de definiciones (probabilidad simple y condicional, independencia), condicionamiento, causación y temporalidad; intercambio de sucesos, confusión de probabilidad conjunta y condicional, así como situaciones sincrónicas-diacrónicas. Identificaron que en ambos grupos es alto el porcentaje de estudiantes que incurre en diferentes sesgos y preocupante en los futuros profesores de matemáticas por lo que sugieren la necesidad de mejorar la educación sobre probabilidad que reciben durante su formación para evitar que los transmitan a sus estudiantes. Proponen el uso de tablas de números aleatorios, calculadoras, ordenadores y el uso de diversas

representaciones, como árboles, o diagramas rectangulares para contribuir a la mejora del aprendizaje.

Los anteriores autores Díaz et al. (2012) aprovecharon la muestra del estudio previamente referido y realizaron otra investigación sólo con los 196 futuros profesores españoles de matemáticas en Educación Secundaria para evaluar los sesgos en el razonamiento sobre Probabilidad Condicional. El objetivo era evaluar si el conocimiento de los profesores de matemáticas, de los cuales pocos recibieron una formación específica en cómo enseñar probabilidad, era adecuado. Lo anterior con objeto de verificar si era viable renovar el currículo de la enseñanza en probabilidad haciéndola más experimental con el fin de darles a los alumnos una experiencia estocástica más directa.

Mediante la respuesta de los futuros profesores a siete actividades tomadas de un cuestionario de razonamiento sobre Probabilidad Condicional, encontraron una alta incidencia de falacias en el eje temporal, la condicional transpuesta, confusión entre Probabilidad Condicional y conjunta, falacia de las tasas base y concepciones incorrectas sobre la independencia. Concluyen en la necesidad de una mejor formación de los futuros profesores y un cambio en la aproximación de su aprendizaje con mayor énfasis en los razonamientos sesgados con el fin de evitar que los transmitan a sus estudiantes.

Sugieren que las actividades presentadas pueden servir de guía para preparar situaciones didácticas dirigidas a la formación de profesores para que en primera instancia los respondan intuitivamente y después se les proporcione información de cómo resolverlos enfrentándolos así a sus propias intuiciones incorrectas.

Desde otra perspectiva Contreras et al. (2013) reportaron y analizaron los resultados sobre las dificultades que tuvieron 153 estudiantes mexicanos sinaloenses (18-19 años), recién egresados de bachillerato al resolver problemas de Probabilidad Condicional. El instrumento de recolección de datos fue un cuestionario tomado de Amorós (2012), el cuál aplicaron durante el curso de inducción del proceso de admisión a una carrera universitaria donde el diseño de los problemas estaba

expresado en términos de porcentajes y podían ser resueltos por métodos aritméticos y algebraicos; sin embargo, también podían ser resueltos con representaciones matemáticas y modelos propios de la probabilidad.

Concluyen que debido al incremento del nivel en la estructura del problema se incrementa la dificultad del mismo. También refieren que las principales estrategias de solución fueron aritméticas dejando de lado las tablas de contingencia. Los pocos alumnos que resolvieron problemas utilizando representaciones simbólicas como diagramas de árbol y de Venn cometieron errores en su construcción debido a su falta de dominio de las mismas. Los autores mencionan que lo anterior es consecuencia de que algunos profesores enseñan la Probabilidad Condicional de manera superficial al igual que las representaciones para su resolución, aunque es parte del currículo en el sistema de bachillerato de Sinaloa. A pesar de que la mayoría de los estudiantes tenían conocimientos previos de probabilidad, aritmética y álgebra no lograron resolverlos con éxito en más del 90% de los casos.

Con el fin de entender el sesgo causal que se investiga en esta tesis, se refiere la investigación de Bastias et al. (2017) que guiada con el marco teórico del Enfoque Onto-Semiótico (EOS), estudian el significado intuitivo de las respuestas que dieron a ocho problemas de probabilidad, en un contexto de contingencia nacional, 118 profesores chilenos de matemáticas, todos con formación formal de Probabilidad, de nivel secundaria.

Las ideas intuitivas de probabilidad tienen un grado de creencia personal y colectivo de personas en un tema de contingencia nacional. Todas esas creencias pueden incidir en la comprensión de los estudiantes de la probabilidad formal.

El objetivo era mostrar que los resultados obtenidos al aplicar problemas probabilísticos que tienen sesgo de causación, diagnóstico, creencias a priori y estereotipos, se ven influenciados por el contexto o el entorno de donde sean aplicados al ignorar las consideraciones estadísticas relevantes. El conocimiento previo de los eventos puede interferir con el cálculo de las probabilidades cuando no se tiene una clara comprensión e interpretación de la Probabilidad Condicional.

Concluyen que los docentes deben tener una formación adecuada para un equilibrio de la intuición y el rigor en la enseñanza de la probabilidad.

La investigación de Acosta y Ruiz (2017) tuvo como fin analizar las respuestas intuitivas y sesgos cognitivos de 67 estudiantes de ingeniería de los cuales 17 eran de la carrera de telemática de una escuela superior perteneciente al Instituto Politécnico Nacional (IPN) de la ciudad de México como un acercamiento a su pensamiento en probabilidad. La carrera de telemática tiene en su currículo gran cantidad de contenido probabilístico donde los diversos problemas de aplicación se fundamentan en la probabilidad en las materias de: teoría de las comunicaciones, sistemas celulares, telefonía, comunicaciones digitales, transmisión de datos y teoría de la información.

El instrumento constó de una sola pregunta con ocho posibles respuestas que podría haber sido resuelta por heurísticas de representatividad y de disponibilidad bajo dos sistemas; el primero con pensar rápido donde los procesos mentales se vuelven rápidos y automáticos con la práctica recurrente haciendo asociación de ideas y adquiriendo habilidades de interpretación y entendimiento. El sistema dos aparece cuando el sistema uno encuentra dificultad en la solución y busca algún procedimiento detallado y preciso para resolver el problema que se enfrenta pues se caracteriza por el pensar despacio por hacer actividades mentales que demandan esfuerzo; aquí un estudiante hizo un diagrama de árbol y podrían haber hecho un diagrama de Venn para proporcionar la respuesta correcta.

El 91% de las respuestas tenían sesgo de insensibilidad a la previsibilidad y el otro 3% sesgo de validez y heurística de disponibilidad; mientras que las respuestas correctas y parcialmente correctas tuvieron el 3% cada una. Los investigadores concluyen que una mejor comprensión de las heurísticas y de los sesgos a que conducen mejorarían los juicios y decisiones de los estudiantes.

La investigación de Weber et al. (2018), exponen su desacuerdo al uso de las “frecuencias naturales” al resolver problemas de Probabilidad Condicional porque a los estudiantes se les dificulta su manejo a la hora de resolver estos problemas por

lo que suelen convertir dichas frecuencias naturales a sus probabilidades correspondientes con la desafortunada consecuencia de que después ya no podían resolver la tarea.

Señalan que profesores y estudiantes están más familiarizados con la probabilidad que con las frecuencias naturales porque es el formato dominante en el que se explican y están resueltos estos problemas en libros de texto y por primera vez el plan de estudios bávaro contenía una sección de la enseñanza de los números naturales.

Consideran el problema se podría resolver si se utilizara además de la versión textual de la tarea respaldada por información visual basada también en frecuencias naturales para activar dos canales diferentes de procesamiento cognitivo (verbal y visual) permitiendo una comprensión más profunda del problema evitando así que los participantes cambien el formato a probabilidades conocidas, pero no intuitivas. Para comprobarlo realizaron un estudio experimental con 183 estudiantes de educación matemática de la universidad de Regensburg (Baviera) en 2016.

Hallaron que los estudiantes muestran preferencia por las probabilidades sobre las frecuencias naturales, donde dos tercios de los participantes aplicaron probabilidades para resolver las tareas, incluso cuando el problema fue presentado en el formato intuitivo de frecuencia natural. El concepto de frecuencias naturales aún no está bien establecido en las escuelas y universidades a pesar de los esfuerzos por implementar su uso en los planes de estudio.

1.3 La Probabilidad Condicional mediante el uso de tecnología

La estadística y probabilidad son materias que se han visto influenciadas por la tecnología y ejemplo de ello es la página de la International Association for Statistical Education (www.stat.auckland.ac.nz/~iase/) que busca promover, apoyar y mejorar la educación estadística en todos los niveles en todo el mundo mediante materiales e información de publicaciones y conferencias.

Los investigadores Chance et al. (2007) informan del rol de la tecnología para mejorar el aprendizaje y razonamiento en probabilidad y estadística de los estudiantes. Analizan el impacto positivo de la tecnología desde el punto de vista pedagógico hasta obstáculos y problemas de implementación en el aula. Recomiendan que el foco de instrucción debe ser el contenido y no la herramienta, aunque el alumno debe estar familiarizado con esta para poder usarla.

Mencionan que la automatización de los cálculos permite que el alumno se enfoque más en entender los conceptos e incrementan su habilidad para explicarlos, interpretar los resultados y justificar sus conclusiones.

Proponen las simulaciones como herramienta pedagógica pues juegan un papel importante al estudiar procesos aleatorios y conceptos estadísticos al permitir ver y comprender lo que ocurre si el experimento se repite un gran número de veces a través de la observación directa con la finalidad el alumno genere sus propias conclusiones. Finalmente, concluyen recordando que la tecnología es una herramienta para el docente más nunca va a reemplazarlo y debe elegirse adecuadamente para mantener la atención en el concepto que se quiere enseñar.

Investigaciones como las de Barrera y Lugo-López (2019) muestran que la enseñanza de la estadística y probabilidad en aulas virtuales³, haciendo uso de los foros como medio de comunicación asincrónica, mejoran el desempeño académico de los estudiantes. Una situación problema propuesta puede ser contestada por cualquier estudiante del aula en cualquier momento a su ritmo y en su lugar de estudio, independientemente del docente y compañeros incentivando una retroalimentación constante del grupo al permitirle mayor tiempo de reflexión y debate para dar las respuestas al problema planteado. Además, permiten al alumno ser un ente activo en su proceso de enseñanza-aprendizaje al permitir el aprendizaje colaborativo, cooperativo y *e-learning*.

³ Herramienta que brinda las posibilidades de realizar la enseñanza en línea usando un sistema de comunicación mediado por computadoras.

Por otro lado, existe una gran variedad de programas profesionales para hacer análisis estadístico como SPSS, STATA, Statgraphics, Minitab, R, las hojas de cálculo como Excel o programas específicos para la enseñanza como Descartes y Fathom, estos dos últimos disponibles en Internet en forma gratuita. Con dichos programas además de hacer análisis estadístico de la información se pueden hacer simulaciones que simplifican la realidad al condensar un experimento en espacio y tiempo concreto.

Desde el ámbito de paquetes estadísticos, la investigación de Laborde et al. (2019), sugiere para facilitar la enseñanza y la comprensión de la probabilidad hacer un análisis con datos reales a través del paquete estadístico RStudio⁴ con la finalidad de que los estudiantes consoliden los conocimientos adquiridos en clase y comprendan la importancia y aplicabilidad de la probabilidad en la vida cotidiana. Compararon resultados obtenidos con el *software* estadístico SPSS Y RStudio y concluyen que los resultados obtenidos con el software SPSS son buenos, es de fácil manejo pero no es el software más completo del mercado; por lo que en su lugar emplearon RStudio que tiene ventajas para programar sus variables, además de la posibilidad de acceso a múltiples paquetes de librerías de comandos que posibilitan cualquier proceso estadístico tanto simple como complejo y se puede modelar acorde a las necesidades.

Emplearon RStudio para estudiar la Probabilidad Condicional así como conceptos asociados a la misma, mediante el análisis de una base de datos con información real de la que tomaron 400 registros y seis variables. Así también resaltaron la importancia de la correcta interpretación de los resultados obtenidos y como impactarían en la realidad. Concluyen que esperan influir con su investigación en los métodos de enseñanza empleados para impartir la teoría de probabilidad y facilitar así la comprensión de la utilidad la cual pueden emplear en su vida diaria,

⁴ Software de programación de uso libre para el análisis estadístico y gráfico de datos, formado por un conjunto de herramientas que son robustecidas por los mismos usuarios, de distribución gratuita y código abierto, desarrollado de un proyecto laboratorio voluntario de investigadores.

para encontrar predicciones que les permitan tomar mejores decisiones en cualquier ámbito.

Enfocándonos en la enseñanza de la Probabilidad Condicional mediante el uso de tecnología; Contreras et al. (2012) investigaron recursos existentes en Internet para apoyar la comprensión de la Probabilidad Condicional e independencia. Sugieren su uso para evitar cálculos rutinarios, favorecer la visualización de conceptos y como un complemento a los libros de texto.

Analizaron recursos para el cálculo de la Probabilidad Condicional mediante la construcción de diagramas de árbol, desarrollado en el Departamento de Ingeniería Matemática de la Universidad de Chile, pensados para enseñar esa tarea. Encontraron la falta de claridad de la *Applet* como posible dificultad de los estudiantes al utilizar dichos recursos, ya que no queda claro que probabilidad calcula a lo largo de cada rama ocasionando al estudiante errores en la interpretación desde la identificación de los mismos eventos o confusión de si es probabilidad simple y condicional o conjunta.

Presentan una tabla de recursos en Internet para la visualización de la Probabilidad Condicional y conceptos relacionados, los cuales fueron analizados por su tipo de idoneidad; epistémica o matemática, cognitiva, interaccional, mediacional y emocional.

Destacan que la idoneidad emocional fue la más alta de todas pues los recursos en Internet son interesantes para los estudiantes y los motiva en el proceso de estudio ya que se presentan los conceptos de forma atractiva y permiten al alumno tener un rol activo en su aprendizaje. Sugieren diseñar unidades didácticas para la enseñanza de la Probabilidad Condicional donde se incorporen dichos recursos. Concluyen que hay muchos recursos didácticos en Internet y su utilidad depende de los conocimientos que facilitan y el modo en que los utiliza el profesor.

En el libro de Batanero et al. (2016), menciona las herramientas organizativas como las tablas de dos por dos y los diagramas de árbol se usan para ayudar a enumerar los espacios muestrales y calcular probabilidades; en el apartado que habla de

tecnología y recursos educativos para apoyar la educación de la probabilidad citan a Pratt (2011):

...en la actualidad los juegos de los estudiantes son en pantallas y en tiempo real, la probabilidad tiene muchas más relevancia como herramienta para modelar acciones basadas en computadoras y para simular eventos y fenómenos del mundo real (p.892).⁵

Mencionan herramientas tecnológicas como “*Probability Explorer*” y “*Fathom*” para almacenar listas de datos, secuencias y permiten al estudiante examinar el historial de resultados en el orden que ocurrieron, y que terminan consolidándose en tablas, gráficas de frecuencias y realizar cálculos de datos con facilidad, permitiéndoles así dar sentido a los datos a través de diversas representaciones y tener diferentes perceptivas sobre el problema.

Con herramientas tecnológicas “*Fathom*” y “*TinkerPlots*” se pueden crear simulaciones de una situación donde se modela un problema real como una manera de simplificar la realidad y permiten discutir porque diferentes formas de modelar una situación pueden ser diferentes o diferenciadoras entre modelo y realidad.

La capacidad de ajustar los parámetros de un modelo permite que los estudiantes exploren escenarios de “qué pasaría si”, que es el caso de la Probabilidad Condicional. Estas herramientas permiten un proceso de desarrollo de modelos, generación, análisis de datos y ajustes del modelo permiten a los estudiantes modificarlos basándose en que tan bien se comportó el modelo en la simulación. Los modelos que se pueden generar con dichas herramientas pueden ser simples a sofisticados según la creatividad y conocimiento de que disponga la persona que los cree.

La investigación de Podworny (2016) describe el desarrollo de un curso de un semestre para 25 maestros en formación en la Universidad de Paderborn, Alemania

⁵ Parafrasée, del idioma inglés, la cita original del libro para enfocarla en el área que habla sobre la tecnología actual, la cual ya es muy portable.

cuyo fin fue profundizar en la comprensión de la probabilidad y el razonamiento inferencial a través de simulaciones elaboradas en el recurso tecnológico TinkerPlots pues está comprobado que las simulaciones en la probabilidad enriquecen la enseñanza y es necesario preparar a los futuros profesores para enseñar esos temas.

Este curso constaba de 5 actividades; donde el cuarto tema trataba sobre la independencia y dependencia y su modelado en TinkerPlots. En el enfoque que va del modelo a los datos, TinkerPlots se utilizó para hacer predicciones en un diseño de tarea de Probabilidad Condicional; mientras que el enfoque que va de los datos al modelo cuya finalidad era ver cuál modelo se ajustaba mejor a los datos. El curso fue aplicado a profesores en formación de primaria y secundaria inferior que ya habían llevado un curso introductorio de estadística y probabilidad elemental en el cual habían aprendido el uso del software Fathom para simulaciones. Dicho curso se centraba en los estudiante los cuales trabajaron, en pares o tercias las actividades, el enfoque fue desarrollar ideas y conceptos estadísticos los cuales eran monitoreados en su aprendizaje con una tarea semanal y una acumulativa usando TinkerPlot para generar simulaciones por la facilidad de uso y porque al ser una herramienta visual, no requiere de comandos lo que simplifica los procedimientos además de que se puede cambiar fácilmente el modelo.

Cada tarea tenía un propósito y necesidad de solución, en forma cíclica se requería la autoevaluación de los estudiantes para seleccionar, refinar y elaborar un modelo significativo que parte de la realidad para regresarlo a la realidad. La tarea debía estar bien documentada de forma tal que fuera un prototipo que pudieran ser utilizados y/o replicado por otras personas, además debía permitir a los usuarios hacer predicciones o identificar tendencias o patrones.

Sugiere una “regla de oro” para el número de repeticiones en una simulación y la precisión de las mismas como la distancia entre la probabilidad y la frecuencia relativa para varios números de repeticiones; $n=100$, 1000, 5000 y 10000.

Concluye a través de la revisión de actividades y la reflexión escrita que proporcionaron los futuros docentes al final del curso, que éste fue positivo, donde

ellos mismos experimentaron la utilidad del curso práctico al vincularse las actividades propuestas de la materia con datos reales mediante el vínculo tecnológico TinkerPlot para entender mejor los conceptos de probabilidad — incluida la condicional— y estadística, e igualmente aportaron ideas para mejorar el mismo.

En la investigación de tipo exploratorio de Budgett y Pfannkuch (2016) crearon un software y lo probaron en tres parejas de estudiantes universitarios de 18 a 19 años que habían cursado previamente un curso introductorio de probabilidad (incluida la condicional). El fin era descubrir qué comprensión conceptual de probabilidad y qué razonamiento probabilístico podría promoverse con el uso de herramientas de software, bajo un enfoque de modelado de probabilidad y estrategias de aprendizaje centradas en lenguaje e imágenes visuales dinámicas y estáticas.

El uso de la tecnología permite que los estudiantes experimenten el comportamiento aleatorio a través de simulaciones (nueva infraestructura de representación), crear modelos de probabilidad y ver la idoneidad de los datos para imitar la realidad permitiendo al estudiante el acceso a conceptos que antes no eran accesibles, logrando una comprensión más rica de conceptos estadísticos. Puntualizan que además de esos recursos lo que le da más sentido es ver como el docente y alumno ven y comprenden de esa forma la información creando un significado a partir de las imágenes lo que fomenta y promueve la formación y el desarrollo del razonamiento conceptual.

Para crear el software tomaron en cuenta los conceptos erróneos en el pensamiento de los estudiantes, en particular, los problemas de tipo bayesiano con la falacia de la tasa base, la dificultad de emplear el razonamiento proporcional al interpretar las tablas de contingencia y el sesgo de condicionamiento causación y temporalidad. Encontraron que a través del modelado se puede evitar caer en conceptos erróneos, que presentar la información de probabilidad en tablas de frecuencias en lugar de formato de probabilidad puede mejorar su razonamiento proporcional y acompañadas de representaciones visuales es beneficiosa para los estudiantes.

Implementaron en el *software* una visualización de tipo eikosograma⁶ para desarrollar los conceptos de condicionamiento causación, ya que proporciona una representación visual de una tabla de información bidireccional (o de doble entrada), encontraron que aunque los estudiantes tenían experiencia en interpretación de las tablas de doble entrada presentaron dificultades con esta nueva representación que les era desconocida y necesitaron tiempo para decodificar las dimensiones horizontal y vertical en el problema del contexto; problema que lograron solucionar cuando intercambiaron factores e interpretaron desde una perspectiva diferente pudiendo así ver la relación entre proporciones y recuentos.

Las reflexiones de los estudiantes indicaron que la visualización de la información de la tabla de dos vías, incluyendo la facilidad en el intercambio de factores fue útil y comentaron que era útil comenzar con un eikosograma no numérico porque al representar proporciones como áreas les daba un mejor sentido intuitivo de las ponderaciones e influencia de cada posible resultado.

Incorporaron otra herramienta visual en su *software* para abordar la falacia de la tasa base y la confusión de condicionamiento causación: el pachinkograma, que es una representación visual del tradicional árbol de probabilidad, la diferencia con este es que las ramas del pachinkograma son de tamaño proporcional a sus respectivas probabilidades. Un cambio en la tasa base crea un impacto en el ancho de la rama del pachinkograma, lo que permite a los estudiantes mejorar sus intuiciones iniciales. Al final de cada rama las proporciones de probabilidad se representan en cubos.

Al poner en la misma pantalla las dos herramientas visuales: eikosograma y el pachinkograma ayudan a los estudiantes a superar conceptos erróneos de probabilidad comunes como la falacia de la tasa base y las probabilidades condicionamiento causación, logrando que los estudiantes puedan interpretarlas mejor.

⁶ Eikosograma viene de la palabra griega Eikos=probabilidad y gamma=dibujo o imagen, apareció por primera vez en el trabajo de Oldfor y Cherry (2006), quienes argumentados dicha herramienta facilita el estudio de la probabilidad.

En base a los resultados observados, los investigadores proponen la modelación como un puente de unión entre la enseñanza clásica y la vida real. Señalan faltan desarrollar estrategias para que los estudiantes logren una transición de las representaciones tanto visuales como cognitivas desde los cubos del pachinkograma hasta las probabilidades reales de eikosograma vinculado gráfico de probabilidad y también a sus representaciones matemáticas.

En la misma línea de investigación Puloka y Pffannkuch (2018) con ocho estudiantes de 16 y 17 años, de una escuela mixta de Nueva Zelanda donde todos habían llevado un curso de probabilidad y tenían los conceptos básicos de probabilidad. Conjeturan que el uso del eikosograma como herramienta tecnológica de enseñanza-aprendizaje tiene el potencial para ayudar al razonamiento proporcional y la verbalización de probabilidad simple, condicional y conjunta. Dicha herramienta es semánticamente consistente con las reglas de probabilidad, pues se basa en un cuadrado que representa una probabilidad de uno sin superposición de regiones rectangulares que representan eventos con áreas que coinciden con las probabilidades.

Hicieron su investigación con estos estudiantes donde sólo dos de ellos habían usado las tablas de dos entradas para calcular probabilidades conjuntas y condicionales, los restantes seis aún no estaban familiarizados con el uso de procedimientos matemáticos o tablas de dos vías para calcular esas probabilidades y tenían una comprensión limitada de las mismas, la finalidad era ver cómo aprenden los estudiantes estas ideas de eikosograma, cómo interactuarían y razonarían desde el eikosograma con el fin de identificar cualquier problema en la secuencia de aprendizaje y el *software*.

Los estudiantes pudieron llegar a las respuestas correctas usando el eikosograma cuando el investigador hacía las preguntas concretas de lo que se deseaba encontrar; sin embargo, al dejarlos a ellos trabajar en pares, sin ninguna guía, no sabían verbalizar las preguntas concretas que se querían responder y no sabían diferenciar entre una Probabilidad Condicional y conjunta llegando siempre a

resultados erróneos de sus interpretaciones. Tampoco logran la transición clave en el razonamiento estadístico para comprender que las proporciones en lugar de frecuencias son las que deben usar al comparar grupos.

Con los resultados obtenidos pretenden hacerle mejoras al eikosograma como por ejemplo, que permita romperlo hacia abajo en gráficos de barras para mostrar visualmente proporciones con una variable transformándose en proporciones con dos variables.

Señalan que se debe de crear una trayectoria de aprendizaje para desarrollar el razonamiento de los estudiantes con los datos categóricos que se muestran en tablas de doble entrada.

A pesar de estas dificultades, las autoras aún creen que el eikosograma tiene potencial para mejorar el aprendizaje en el concepto de Probabilidad Condicional y conjunta de los alumnos.

Los investigadores Giuliano et al. (2019), realizaron un diseño experimental aleatorizando a los estudiantes en dos grupos para evaluar el aprendizaje de la estadística con la plataforma web *e-status*, desarrollada por docentes del Departamento de Investigación Operativa de la Universidad Politécnica de Cataluña UPC, el cuál es un sistema *e-learning* para la resolución de problemas que implican cálculos estadísticos o numéricos, entre estos la Probabilidad Condicional, en entornos universitarios del ámbito científico y técnico.

El programa permite la corrección automática comparando el resultado obtenido con la solución proporcionada por el alumno.

La aplicación del diseño se realizó en la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM) Argentina con 329 estudiantes que cursaban la asignatura de probabilidad y estadística correspondiente al plan de carreras de ingenierías en informática, electrónica, industrial, civil y mecánica, en un lapso de 16 semanas, dos evaluaciones parciales y un examen final.

Coinciden con otros estudios reconociendo a la tecnología como herramienta cognitiva que trasciende las limitaciones de la mente humana y favorece el aprendizaje de conceptos de probabilidad, entre ellos la condicional.

Investigaciones recientes como la de Acosta et al. (2019) utilizaron la noción de idoneidad didáctica para el diseño y análisis de situaciones de enseñanza, donde la Probabilidad Condicional estaba presente en el apartado de probabilidad como una integración de otras herramientas interdisciplinarias, para posteriormente analizar su implementación.

En un laboratorio de computación y usando el software MATLAB aplicaron a 30 estudiantes de ingeniería que cursaban el cuarto semestre de la carrera de telemática de una escuela superior perteneciente al Instituto Politécnico Nacional (IPN) de la ciudad de México que cursaba el cuarto semestre; debido a que los diversos problemas de aplicación se fundamentan en la probabilidad.

El objetivo fue introducir al estudiante en unidades de aprendizaje propias de su carrera a través del software Matlab para modelado de problemas tipo en la aplicación de la telemática y la necesidad de la Probabilidad Condicional para dicho fin.

El marco teórico del enfoque ontosemiótico y la instrucción matemática (EOS) en la categoría de la idoneidad didáctica fue utilizada para el diseño y análisis de situaciones de enseñanza, en la unidad de aprendizaje de probabilidad como una aplicación interdisciplinar.

La actividad consistió de pasar una fuente de información de dos símbolos o caracteres 0,1 si se podían enviar de manera independiente y equiprobable (probabilidad frecuentista) para en un segundo análisis suponer los valores 0 y 1 dependen del valor inmediato anterior pudiendo representarlo gráficamente por un diagrama e árbol y expresarlo en una Probabilidad Condicional, después poderla expresar como una cadena de Markov (diagrama de estados) para finalmente pasar a un vector estacionario mediante las potencias de una matriz de transición (álgebra lineal).

La Probabilidad Condicional, cuando el concepto se ha consolidado, es un puente de enlace entre conocimientos, permitiendo pasar de un conocimiento a otro.

Los investigadores proponen esos análisis desde la teoría de idoneidad didáctica, que trata de interrelacionar las distintas facetas que intervienen en el diseño, implementación y evaluación de la enseñanza aprendizaje donde las matemáticas se encuentran implícitas y son eje de muchas aplicaciones.

Para cerrar esta sección, Batanero y Gea (2019) quienes han sido referentes en investigaciones atinentes a la Probabilidad Condicional y los sesgos de razonamiento asociados a esta, analizan la causa de los errores y proponen algunos recursos didácticos para mejorar la comprensión de este concepto, su interpretación y la toma de decisiones.

Destacan el papel de la Probabilidad Condicional como base de la comprensión de las situaciones de riesgo; donde los alumnos requieren estrategias para modelizar situaciones de riesgo, verbalizarlas y comunicarlas.

El factor riesgo lleva asociada una probabilidad que puede ser frecuencial, subjetiva, o basada en la propensión (tendencia de un fenómeno).

Describen algunos recursos didácticos, que se pueden usar en el aula en forma tradicional o empleando tecnología para ayudar a los estudiantes a mejorar su razonamiento en Probabilidad Condicional:

- Frecuencias absolutas y tablas de contingencia

Sugieren cambiar el formato en que se dan los datos y pasarlos a frecuencias absolutas porque nuestra mente esta mejor equipada para razonar con frecuencias absolutas (frecuencias naturales) que con probabilidades y porcentajes. Haciendo uso de esos datos es más fácil llenar las celdas de las tablas de contingencia, para después hacer uso de la regla de Laplace y obtener el cálculo de probabilidades. La investigación de Vogel y Böcherer-Linder (2018) concuerdan que el uso de frecuencias naturales ayuda a los estudiantes universitarios, futuros docentes de probabilidad y

estadística, en la resolución de problemas de probabilidad Bayesina (la condicional queda implícita en este concepto).

- Diagramas de árbol y visualizaciones

Proponen pasar los datos de una tabla de contingencia a un diagrama de árbol pues es una herramienta más efectiva, pues ayuda a pensar en la secuencia temporal de los sucesos y separa claramente las dos subpoblaciones en estudio y permite llegar a las mismas conclusiones de una manera más visual. Sobre este tema, la investigación de Vogel y Böcherer-Linder (2018) señala que la capacidad de leer e interpretar representaciones gráficas de los datos es una idea estadística fundamental para enseñar estadística a futuros docentes de esa área; sin embargo, encontraron que el cuadrado de la unidad es más eficiente que el diagrama de árbol, debido a sus propiedades geométricas permite calcular proporciones cambiantes cualitativamente y el diagrama de árbol no. Confirmaron su hipótesis de a través del formato de frecuencias naturales y las visualizaciones se pueden combinar como herramientas facilitadoras para apoyar el razonamiento de la comprensión de la probabilidad bayesiana (que lleva implícita la condicional).

La visualización de los datos en un histograma de barras apilado permite introducir la idea de riesgo relativo, así se podría evitar caer en el sesgo de causación.

Estas herramientas permiten interpretar correctamente, en una situación de riesgo, probabilidades pequeñas que pueden ser importantes al repetir un experimento frecuentemente. Este sesgo es cuando se rechaza la hipótesis nula cuando es verdadera.

- Simulaciones y programas de cálculo (aplicaciones de tecnología)

Sugieren uso de numerosos programas de cálculo y *applets* de Internet que permiten introducir una metodología exploratoria y activa en el aula, reduciendo los cálculos.

Son herramientas importantes en los casos en que las soluciones de probabilidad chocan con la intuición que genera los sesgos.

Las simulaciones llevan a cabo actividades de modelización y el docente debe poner atención al aprendizaje de las fases que la conforman: observación de la realidad, construcción de un modelo matemático, trabajo con el modelo e interpretación de los resultados para finalmente conectar aproximaciones clásica y frecuencial de la probabilidad.

Concluyen que es importante reforzar la enseñanza de la Probabilidad Condicional y conectarla con contextos de la vida cotidiana que inciden en su vida real para que le hagan sentido al estudiante y les vea aplicación real, de esta manera comprenderá la importancia de interpretar correctamente un diagnóstico o tomar acertadamente una decisión aunado a una mejora en el razonamiento probabilístico de los estudiantes. Sugieren a profesores e investigadores contribuyan al diseño de ese tipo de tareas y su incorporación en el aula e ir más allá de la clásica forma de enseñanza de la probabilidad con los ejemplos de siempre con dados y monedas.

1.4 La Probabilidad Condicional en los libros de texto y texto digitales

En la actualidad es posible descargar de Internet libros de texto de cualquier área, incluidos los de enseñanza en probabilidad y estadística, permitiendo una portabilidad virtual de los mismos al poder acceder a ellos sin importar la hora ni el lugar, lo que hace más accesible el conocimiento.

Además de los libros digitales también es posible trabajar con bases de datos libres sobre casi cualquier tema con fines de investigación y aprendizaje de los estudiantes.

A continuación se muestran algunas investigaciones que se han hecho sobre el análisis de libros de texto en el tema de Probabilidad Condicional.

Una investigación sobre análisis de libro de texto escolares, fue realizada por Lonjedo y Huerta (2004). El estudio implicó el análisis de textos desde el nivel

elemental hasta superior en España de 1975 hasta 2002. Se clasificaron los problemas de Probabilidad Condicional por nivel, categoría y tipo de texto para investigar como son resueltos por los estudiantes, así como para analizar los textos escolares y su enseñanza.

Mediante el análisis de libros de texto, Díaz y Batanero (2005) elaboraron un cuestionario de evaluación sobre Probabilidad Condicional realizada desde el punto de vista del marco teórico de la Teoría de la Función Semiótica (TFS) para probar la hipótesis de que los sesgos no están correlacionados con el conocimiento matemático. Basándose en el análisis de contenido de una muestra de libros de texto sugeridos por 23 universidades españolas para la asignatura de análisis de datos en la carrera de Psicología; también tomaron en cuenta errores y dificultades señaladas en investigaciones previas sobre Probabilidad Condicional. De un total de 79 libros recomendados, trece incluían el tema de Probabilidad Condicional.

La selección de los *ítems*⁷ del cuestionario, fue mediante dos etapas: la valoración de expertos en Probabilidad Condicional (9 investigadores de Didáctica de la Estadística, tanto españoles como iberoamericanos); así como su experiencia de investigación sobre el tema. Los expertos eligieron de forma consensuada 18 ítems por su pertinencia y contenido primario (la intencionalidad de lo que se pregunta) y secundario (que el alumno resuelva correctamente lo que se le pregunta señalando la respuesta correcta y no alguno de los distractores); así como una serie de indicadores estadísticos obtenidos al administrar los ítems a una muestra de 157 alumnos de Psicología en un estudio pre-piloto.

El cuestionario piloto resultante fue probado en dos muestras de estudiantes universitarios. Mediante técnicas estadísticas hacen un estudio sobre la fiabilidad y validez del cuestionario piloto y con ello concluyen que la construcción del cuestionario no es la final y se necesitan más pruebas y revisiones más amplias para completar el estudio de la validez y una mejora de la fiabilidad; así como

⁷ Ítem: unidad de medida cuyo fin es inferir la capacidad del encuestado en un cierto constructo (habilidad, rasgo, etc.), proporcionando datos cuantificables sobre la persona que lo contesta.

entrevistas a los estudiantes para tener un conocimiento más profundo de sus razonamientos.

Batanero y Díaz (2006) retoman la investigación anterior (2005) pero analizando la información derivada de dicha investigación desde el enfoque Onto-Semiótico, con el fin de reflexionar sobre las instituciones y procesos de muestreo implicados; las posibilidades de generalización y criterios de idoneidad de las tareas e instrumentos de evaluación. Esta investigación reporta los resultados de la validación definitiva del cuestionario (que en la investigación anterior quedó como cuestionario piloto). Validaron el cuestionario sobre Probabilidad Condicional con una muestra de 414 estudiantes de psicología de cuatro universidades diferentes, después de haber visto el tema. Otra muestra de 170 estudiantes antes de la enseñanza, para hacer un estudio de discriminación.

Evaluaron la fiabilidad y validez del cuestionario con herramientas estadísticas.

Concluyen y confirman su hipótesis de que los sesgos no están correlacionados con el conocimiento matemático y por tanto es evidencia de validez de constructo de cuestionario.

En la investigación de Díaz y de la Fuente (2007) a partir del análisis de los libros de texto recomendados en cuatro Facultades de Psicología en España para la asignatura de análisis de datos, descomponen el constructo comprensión de la Probabilidad Condicional en unidades semánticas. Para ello recopilaron, tradujeron y adaptaron 49 actividades, de acuerdo con su índice de dificultad. A través de pruebas piloto, el cuestionario final integró 18 actividades. El objetivo fue aportar un cuestionario, validando estadísticamente su fiabilidad y validez mediante tres estudios, para evaluar la comprensión y sesgos de razonamiento probabilístico condicional de los estudiantes universitarios.

Actualmente muchos libros de texto electrónicos de estadística son libres de consulta por Internet.

En una revisión de algunos libros digitales de probabilidad y estadística que están disponibles en Internet y son sugeridos por algunos maestros que imparten clases en la Universidad Autónoma de Querétaro están los libros de Wasserman (2005) y Rincón (2006). En el libro de Wasserman se hace mención a la falacia de condicionamiento y temporalidad de sucesos; donde $P(A|B)$ es diferente de $P(B|A)$, el autor refiere que ese error se comete con suficiente frecuencia en medicina donde es más fácil de identificar y en casos legales donde resulta difícil de identificar por lo que a veces es llamado la falacia del fiscal. Sugiere calcular la respuesta numéricamente y no confiarse de la intuición y no usa ni sugiere ninguna técnica gráfica como diagrama de árbol ni las tablas de doble entrada para solucionarlo.

En el libro de Rincón no habla de ningún sesgo, aborda el tema de Probabilidad Condicional directamente así como algunos conceptos importantes relacionados a ésta y sus demostraciones. Las soluciones a los Problemas que plantea son mediante fórmulas y no da ningún recurso gráfico para su solución.

El libro de Sullivan (2016) es más didáctico y enseña en la sección de probabilidad como hacer un diagrama de árbol y refiere también a las tablas de doble entrada; sin embargo no refiere en el tema de Probabilidad Condicional ningún sesgo; es hasta el tema de prueba de hipótesis donde cita a Ronald A. Fisher cuando se da por cierta una hipótesis cuando realmente es falsa y esto sabemos es consecuencia del sesgo de condicionamiento y temporalidad de sucesos en la Probabilidad Condicional, donde $P(A|B)$ es diferente de $P(B|A)$.

Para cerrar este capítulo, los artículos antes mencionados sirvieron de base para desarrollar actividades que permiten entender como comprenden la Probabilidad Condicional los estudiantes universitarios y con base en ello proponer una secuencia didáctica de tareas de Probabilidad Condicional en las que suelen caer en los sesgos diacrónicos y de causación para su mejor comprensión y su correcta resolución.

CAPÍTULO 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La literatura referente a la Didáctica de las Matemáticas (DM) refiere que la Probabilidad Condicional es un tema complejo en el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre el cual se han realizado diversas investigaciones serias. La investigación teórica y experimental que se hace actualmente en Didáctica de la Matemática surge de observar que el alumno se equivoca cuando se le pide realizar ciertas tareas, cabe destacar, que estos errores no obedecen a un modo aleatorio e impredecible; sino que ya se han focalizado; por otra parte, se ha determinado que otras dificultades se deben a la falta de conocimiento básico necesario para la comprensión correcta de un concepto o procedimiento dado (Batanero et al., 1998). Por su parte Sánchez (2009) refiere que los errores o dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas muchas veces se deben a que tienen sus propias ideas previas sobre las situaciones, las cuales suelen ser persistentes e inconsistentes con el punto de vista normativo.

Las investigaciones revisadas muestran que la Probabilidad Condicional no es un tema sencillo pues tiene amplia variedad de matices y los alumnos lo asocian con la problemática de la causalidad y temporalidad, teniendo dificultad en la percepción de los experimentos compuestos en el caso de situaciones sincrónicas. Se confunde independencia y exclusión, se cambian los términos de la Probabilidad Condicional, se confunde ésta con la conjunta y se asigna a la probabilidad conjunta un valor mayor que a la probabilidad simple, violando las reglas lógicas del cálculo de probabilidades (Díaz y de la Fuente, 2005).

Diversos estudios de Probabilidad Condicional, como el realizado por Mejía et al. (2014) sugieren que incluso la redacción de los problemas causa conflicto a los estudiantes para entenderlos y resolverlos adecuadamente. Lo previo ocurre principalmente por el contexto al que hacen referencia con el cual los estudiantes no están muy familiarizados. Cuanto mayor sea el número de probabilidades condicionales que contiene la parte informativa de un problema mayor es la

dificultad de los estudiantes para resolverlo. Otro inconveniente que reportan es que hay diferentes grados de dificultad en estos problemas dados por el nivel, categoría y tipo de problema (Borovcnik, 2012; Yañez, 2012).

Según los autores Díaz y de la Fuente (2005); y Tarr y Lannin (2005) las principales dificultades para comprender el concepto de Probabilidad Condicional son:

- Influencia de la presentación del problema.
 - Estructura que presentan los problemas de enunciado verbal.
 - Relación con el contexto (no es familiar al estudiante).
- Condicionamiento y causación.
- Condicionamiento y temporalidad de sucesos en la Probabilidad Condicional $P(A|B)$ es diferente de $P(B|A)$
- Confusión entre Probabilidad Condicional y conjunta, pues depende de cómo se redacten los enunciados.
- Situaciones Sincrónicas (situaciones estáticas, donde los experimentos aleatorios se realizan simultáneamente) o Diacrónicas (hay una clara secuencia temporal).
- Concepto de Independencia

La Probabilidad Condicional fue reportada por docentes universitarios como un concepto que se les dificulta comprender a los estudiantes. Con base en esto surge la siguiente investigación y para tener una visión de cómo es comprendida la Probabilidad Condicional por los estudiantes, se utilizan algunas actividades propuestas para medir sesgos de falacia temporal (situación diacrónica) y de concepto de independencia en la resolución de dichos problemas, los cuales han sido validados estadísticamente y pueden ser usados por otras investigaciones con dicho fin (Díaz y de la Fuente, 2007). Los problemas elegidos se modificaron a la luz del marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999); la cual funge como eje rector de toda la investigación, con la finalidad de cubrir el objetivo principal de caracterizar la actividad matemática de los estudiantes

universitarios al resolver problemas de Probabilidad Condicional analizando el *qué* y *cómo* resuelven estos problemas, aportando una idea del *cómo* es que comprenden la Probabilidad Condicional, pregunta de investigación que se pretende responder.

Con la información obtenida será posible focalizar los puntos donde es necesario incidir para la corrección de sesgos, rediseñando una secuencia de tareas de Probabilidad Condicional mediante una selección de estas, de acuerdo con su grado de dificultad con la finalidad de favorecer la comprensión progresiva del concepto; y de esta manera, lograr que resuelvan con éxito problemas de Probabilidad Condicional en cualquier contexto mediante la comprensión de los conceptos asociados y no por la memorización de fórmulas.

A partir de las premisas previas que refieren a la problemática del razonamiento probabilístico y particularmente el de la comprensión de la Probabilidad Condicional, se plantea la pregunta de investigación.

2.1 Pregunta de investigación

¿Cómo comprenden la Probabilidad Condicional los estudiantes universitarios?

2.2 Hipótesis

Los estudiantes son capaces de evidenciar errores de temporalidad diacrónica y causalidad, con mayor facilidad, en situaciones de Probabilidad Condicional contextualizadas.

2.3 Objetivo general

Caracterizar la actividad matemática que presentan los estudiantes universitarios al resolver problemas de Probabilidad Condicional.

2.4 Objetivos específicos

OE1. Rediseñar una secuencia de actividades de Probabilidad Condicional utilizando los sesgos y la TAD.

OE2. Caracterizar la actividad matemática de los estudiantes respecto a la Probabilidad Condicional

OE3. Analizar bajo la TAD cómo resuelven los estudiantes los problemas de Probabilidad Condicional propuestos (¿Qué hace? y ¿Cómo lo hace?)

2.5 Justificación

En México, la Probabilidad Condicional no es una rama prioritaria dentro del currículo escolar. La Probabilidad Condicional se ve en el segundo año de secundaria mientras que en la preparatoria y la universidad son parte del tronco común de los primeros años de formación; sin embargo, a pesar de su utilidad práctica y de ser parte del programa curricular de secundaria se le deja al docente que elija el tratamiento de los contenidos del libro de texto de la SEP y lo referente a las nociones de probabilidad es el último punto del temario, por lo que muchas veces se enseña hasta el último o se omite como consecuencia del desconocimiento que muchos docentes tienen en temas de probabilidad la cual es necesaria para su correcta enseñanza y para la preparación o propuesta de algún material de apoyo. Los libros de texto de la SEP no le dan las herramientas suficientes ni sugerencias de bibliografía para tener las ideas fundamentales de probabilidad (Elizarraras, 2005). Igualmente, en el contexto de la Probabilidad Condicional Sánchez (2009) menciona que los docentes en cualquier parte del mundo no siguen fielmente sus currículos nacionales.

Según Lonjedo y Huerta (2004), los libros de texto no explican todos los casos que se pueden tener en la Probabilidad Condicional dependiendo del nivel, categoría y tipo de problema; y si lo hacen es mostrando su uso en situaciones repetidas en donde la estructura del problema no varía y sólo se varía el contexto y la presentación de los datos.

La dificultad para entender el concepto de Probabilidad Condicional impide aprender otros conceptos estadísticos que son requisito en el estudio de la inferencia estadística, tanto clásica como bayesiana; así como en el estudio de la asociación

de variables, la regresión y el contraste de las pruebas de hipótesis, entre otros conceptos que se definen mediante una Probabilidad Condicional. Por tanto, es necesario que el alumno adquiera conocimiento y competencias básicas en este tema antes de avanzar en el estudio de la estadística ya que, su uso en la vida profesional y cotidiana es fundamental para la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre, (Díaz y De la Fuente 2001).

En el ámbito de la tecnología, desde hace 27 años de la primera generación de las plataformas web se han ido incorporando recursos *online* a la enseñanza en universidades de todo el mundo gracias a su evolución y la personalización del conocimiento permitiendo al estudiante acceder a éste cuándo, dónde y cómo lo requiera, Dagger et al. (2007).

Investigaciones sugieren el uso de tecnología aplicada en la docencia debido a que desarrollan y potencian el razonamiento estadístico y probabilístico al basarse en juegos, animaciones y simulaciones que en conjunción con la enseñanza tradicional en el aula logran un reforzamiento de los conceptos estudiados y mejor comprensión de los mismos (Contreras et al., 2012; Chance, et al., 2007).

En el libro de Batanero et al. (2016), mencionan que el único problema que ven con el uso de la tecnología y la creciente variedad de recursos tecnológicos para la enseñanza de la probabilidad es que los docentes requieren una preparación específica para poder explotar el potencial que ofrecen dichas herramientas y reflejarlas en el material didáctico que el docente genere para la enseñanza de sus alumnos, la cual estará también en función de los conocimientos que el docente tenga de probabilidad y estadística para poder guiar la instrucción de manera exitosa.

Los docentes deben estar familiarizados con resultados de investigaciones que describen el razonamiento y las creencias de sus estudiantes en situaciones inciertas y con materiales didácticos que pueden ayudar a sus alumnos a desarrollar intuiciones correctas; dicha situación abre nuevas líneas de investigación: Conocimiento estadístico Pedagógico Tecnológico (*TPSK*, por sus

siglas en inglés) y formas efectivas de capacitar maestros que le ayuden a incrementar el conocimiento probabilístico y didáctico de los docentes.

En México no todas las escuelas aprovechan esta herramienta en parte porque no se tienen los recursos para que los alumnos de todas las escuelas puedan hacer uso de una computadora; por lo que las clases se siguen desarrollando de forma tradicional. Actualmente hay muchos desarrollos gratuitos y fáciles de descargar en Internet, pero muchas veces no traen una documentación detallada de las actividades y de su uso para que el alumno sin conocimientos y sin guía de algún docente pueda usarlos y aprender de ellos de forma adecuada; por lo que los profesores tendrían que ser capacitados para hacer uso de las herramientas tecnológicas eligiendo la más adecuada según el tema, conceptos y nivel al que será impartido con el fin de dar instrucciones detalladas y retroalimentación a sus alumnos.

CAPÍTULO 3. Marco Teórico y Metodológico

En este capítulo se van a describir los elementos teóricos y metodológicos que guiaron la investigación.

El presente trabajo tiene fundamento en el marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que permite analizar las producciones de los alumnos, observando el qué y cómo resuelven las actividades propuestas que nos da idea de la comprensión que tienen los estudiantes de la Probabilidad Condicional. Con la información obtenida será posible focalizar los puntos donde es necesario incidir para la corrección de sesgos y lograr que resuelvan con éxito problemas de Probabilidad Condicional.

3.1 Teoría Antropológica de lo Didáctico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1991, 1999), es una herramienta para el análisis del conocimiento matemático visto como un conjunto de prácticas sociales institucionalizadas, requiere de una forma de análisis que permita la descripción y el estudio de las condiciones de la realización desde:

* La Organización Matemática (OM) o *Praxeología*: Compuesta por varios tipos de tareas matemáticas cuya realización requiere técnicas matemáticas, que a su vez se justifican en tecnologías y teorías matemáticas específicas

Praxeologías	
Para que el conocimiento matemático se desarrolle hay que crear una situación $m(\pi, \tau, \theta, \Theta)$	
(s) Tipos de Situaciones π Problemas <i>(actividad que involucra al objeto matemático)</i>	Praxis o conocimiento SABER HACER
τ Técnicas <i>(procedimiento que permite resolver la tarea)</i>	Maneras de HACER <i>procedimientos que pueden ser empleados para resolver los problemas</i>
θ Tecnologías <i>(discurso que justifica y explica la técnica)</i>	SABER Discursos que sustentan, describen, explican y justifican los procesos matemáticos que ahí se encuentran involucrados y los cuales se espera que sean institucionalizados en los procesos de enseñanza-aprendizaje.
Θ La teoría <i>(discurso que justifica y explica la tecnología)</i>	SABER Argumento formal que permite justificar <i>rigurosamente</i> la tecnología

Cuadro 2. Elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico
 Fuente: Modificado de Chevallard, (1991, 1999).

En la Organización Matemática o Praxeología se observan las prácticas matemáticas éstas son actuaciones particulares en el abordaje de problemas matemáticos específicos. Está determinada por formas de razonar, comunicar, validar o generalizar y habitualmente no existe de manera aislada.

Lo que esta tesis presenta es una construcción de praxeologías matemáticas, ya que permiten determinar que los objetos matemáticos surgen de prácticas con las matemáticas ubicadas en diversos contextos geográficos y culturales, relacionada con la Probabilidad Condicional y direccionada por la TAD exponiendo así, la tarea, la técnica, la tecnología y la teoría.

Con la TAD se puede determinar si resolvieron correctamente el problema planteado al emplear alguna de las técnicas (τ) fundamentadas en alguna tecnología (θ) y alguna teoría (Θ).

3.2 Metodología

La investigación descrita en esta tesis tiene un enfoque cualitativo de tipo descriptivo con observación participativa¹ estructurada, acorde con la teoría de León y Montero (2003). Las cuatro actividades elegidas por que evidencian los sesgos temporal diacrónico y de causación, fueron modificadas en su diseño bajo la TAD con el fin de hacer emerger las técnicas y tecnologías que aplican los estudiantes al resolverlas y con ello tener una idea de cómo comprenden las Probabilidad Condicional. Las actividades fueron aplicadas a través de cada una de las cinco fases de ACODESA²: fase uno de trabajo individual, fase dos de trabajo en equipos, fase tres del debate grupal, la fase cuatro de auto-reflexión y la fase cinco de institucionalización del concepto. La implementación de las fases dos y tres de ACODESA requirieron del uso de una simulación de elaboración propia utilizando el *software* Descartes³ con el propósito de que la tecnología les ayudara a validar sus respuestas.

Como auxiliar en el análisis se utilizó el programa STATA® 13.0 para correr programas autoejecutables y obtener de una forma rápida y eficaz la información⁴ de las producciones recabadas.

3.2.1 Muestra y contexto

La muestra fue por conveniencia, se obtuvo de un aula de estudiantes universitarios de la facultad de Contaduría de la Universidad Autónoma de Querétaro que estaban matriculados en la carrera de Actuaría y estaban recursando⁵ la materia de

¹ Dada por el procedimiento de implementación. Se condujo por medio de la simulación con la intención de alcanzar un objetivo al preguntarles el porqué de sus respuestas.

² Ver sección 3.2.3 Procedimiento de aplicación: ACODESA, detallada en éste capítulo. Por su acrónimo en francés, se refiere al aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión.

³ <http://descartes.matem.unam.mx/>

⁴ Ver anexo VIII

⁵ Todos estaban en su segunda oportunidad para aprobar la materia.

probabilidad y estadística que fue parte de las materias de tronco común del primer año de la carrera, y ya habían visto el tema de Probabilidad Condicional.⁶

Los alumnos de dicho curso que se abrió exprofeso para alumnos repetidores, estuvo conformado por 24 alumnos que cursaban 4° (n=13), 6° (n=6), 8° (n=3) semestre de la carrera y 2 alumnos egresados siendo ésta una de las últimas materias que les faltaba por acreditar para liberar el 100% de los créditos. Debido a que la investigación requería se aplicaran las cuatro actividades en cada una de las cinco fases de ACODESA, se ocuparon tres sesiones con duración de una hora y no todos los alumnos inscritos en la materia asistieron a las tres prácticas; por lo que solo se dejaron los estudiantes que completaron todas las fases, quedando sólo once estudiantes como la muestra de estudio de esta investigación.

La muestra de once estudiantes estuvo conformada por un estudiante masculino egresado de 24 años de edad y diez alumnos de 4° semestre; de los cuales seis eran mujeres en un rango de edad de 19 a 21 años, con una media de 19 años y cuatro hombres en el rango de edad de 19 a 24 años con una media de edad de 20 años.

Se puede considerar que es una muestra homogénea en el sentido que los once estudiantes estaban re-cursando la materia de probabilidad y estadística, ya habían visto el tema de Probabilidad Condicional y en su mayoría estaban cursando el 4° semestre de la carrera de actuaría.

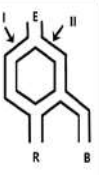



3.2.2 Descripción del instrumento de recolección de datos

El instrumento de recolección de datos⁷ quedó conformado por cuatro actividades de Probabilidad Condicional las cuales fueron elegidas con la finalidad de evidenciar los sesgos de temporalidad diacrónica y causalidad; se modificaron conforme el

⁶ Se habló con el Coordinador de la Carrera de Actuaría quién autorizo se prestara dicho grupo con fines investigativos, posteriormente se comunicó al docente y a sus estudiantes por medio de una carta de consentimiento informado la finalidad del proyecto de investigación y una carta de confidencialidad para cubrir las consideraciones éticas y poder aplicar la secuencia de actividades propuesta. (anexos I, II y III)

⁷ Ver anexo IV

marco teórico de la TAD, creando una praxeología^{8,9}, pues permite analizar la producción de los alumnos, observar el qué y cómo las resuelven, lo que nos dará una idea de cómo comprenden la Probabilidad Condicional.

Características de las actividades propuestas		
Actividad	Sesgo evidencia	Contexto
<p>Actividad 1.</p> <p>Analiza el esquema que se te presenta. Considera el hecho de soltar una bola en E y que esta bola salga por R.</p> 	Temporal diacrónico	Descontextualizado
<p>ACTIVIDAD 2.</p> <p>Analiza el esquema que se te presenta.</p> <p>Una máquina fabrica 100 tornillos por hora. Hay 82 tornillos que pasan por la banda I y caen en la caja R donde están los tornillos perfectos para ensamblar cualquier mueble. Se sabe que 14 de los tornillos que pasa por la banda II (defectuosos) tienen pequeñas imperfecciones y se pueden poner en la caja R dado que si sirven para ensamblado.</p> 	Temporal diacrónico	Contextualizado
<p>Actividad 3.</p> <p>Una urna contiene dos bolas negras y dos bolas blancas. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de la otra, sin devolver la primera a la urna.</p> 	Causalidad	Descontextualizado
<p>Actividad 4.</p> <p>Analiza la siguiente situación: ¿Cuál es la probabilidad de que un joven sea ingeniero dado que su padre es ingeniero?</p> 	Causalidad	Contextualizado

Cuadro 3. Actividades aplicadas a los estudiantes

Fuente: Actividades modificadas de Ojeda (1995), Falk (1986) y Retamal et al. (2017) bajo TAD

Las dos primeras actividades fueron para evidenciar el **sesgo temporal diacrónico**, la primera actividad se modificó de la situación planteada por Ojeda (1995)¹⁰ para problema descontextualizado y la segunda actividad tiene la misma estructura que la primera pero se les dan valores específicos con los que podrá calcular la

⁸ Praxeología implica crear una situación $m(\pi, \tau, \theta, \Theta)$, donde π = problemas, τ = Técnicas, θ = tecnologías y Θ = teorías.

⁹ Ver Glosario

¹⁰ Se eligió porque está probado por varias investigaciones que evidencia el sesgo temporal diacrónico

Probabilidad Condicional pedida conformando así un problema contextualizado; ambas actividades se modificaron conforme al marco teórico de la TAD para obtener con el inciso **a)** una idea de si comprendió el problema y refleja en sus producciones conceptos asociados a la Probabilidad Condicional como; experimento, eventos, espacio muestral total y reducido. Con el inciso **b)** se pretendía que el estudiante mostrara la técnica, la manera en la que resolvió la Probabilidad Condicional pedida, que podía ser desde un razonamiento lógico sin evidenciar ninguna fórmula hasta diagramas de árbol de probabilidades o tablas de doble entrada; así como una validación de su respuesta para ver si recuerda las leyes de probabilidad y la reducción del espacio muestral inherente en cálculo de la Probabilidad Condicional. Por último, el inciso **c)** tenía la intención de evidenciar la tecnología; es decir algún argumento que explicara o justificara el procedimiento que empleo para resolver la Probabilidad Condicional pedida; es decir la técnica.

Las dos últimas actividades se eligieron con la finalidad de evidenciar el **sesgo de causación**. La tercer actividad descontextualizada se modificó del problema de la urna planteado por Falk (1986) para evidenciar el problema de causación cuando se le pide al estudiante calcular $P(N2|N1)$ ¹¹ la inferencia causal es natural y compatible con el eje del tiempo y el estudiante suele realizar el cálculo de la probabilidad sin dificultad; pero cuando se le pide calcular $P(N1|N2)$ ¹² donde hay que hacer una inferencia hacia atrás le causa conflicto y es donde se evidencia también el sesgo temporal diacrónico ya que requiere pruebas probabilísticas de razonamiento que es indiferente al orden temporal.

La cuarta actividad contextualizada se modificó de Bastias et al. (2017) para evidenciar el razonamiento causal, donde se le pide al estudiante calcular la probabilidad de que un joven sea ingeniero dado que su padre es ingeniero; porque según Batanero (2009) cuando la Probabilidad Condicional se presenta en contextos sociales, el conocimiento previo de los estudiantes puede interferir en el

¹¹ Probabilidad de extraer una segunda bola negra dado que la primera bola extraída fue negra.

¹² Probabilidad de extraer la primer bola negra dado que la segunda bola extraída fue negra

cálculo de las probabilidades, especialmente cuando no hay una clara comprensión e interpretación del lenguaje condicional.

Ambas actividades se modificaron conforme al marco teórico de la TAD.

En la tercera actividad para obtener con el inciso **a)** una idea de comprensión del problema, reconocer que se trata de un muestreo sin reposición, lo que supone una restricción del espacio muestral e identificación de los eventos; así como el concepto de independencia. La finalidad de los incisos **b)** y **c)** era que el estudiante mostrará la técnica; es decir, la manera en que resolvió la Probabilidad Condicional que se le pedía. El inciso **d)** se puso con la finalidad de evidenciar la tecnología con algún argumento que explicara o justificara el procedimiento que empleo al resolver la probabilidad pedida.

La cuarta actividad es la más intuitiva pues influyen el contexto social y los conocimientos previos de los estudiantes. La finalidad del inciso **a)** es ver si el estudiante identifica los eventos, el concepto de independencia y justifica adecuadamente su respuesta. Los incisos **b)** y **c)** tienen la finalidad de evidenciar la técnica de los estudiantes al momento de calcular la Probabilidad Condicional pedida. En el inciso **b)** se espera el estudiante utilice un razonamiento causal, estimando el efecto dado cierto conocimiento de causas; mientras que en el **c)** es para evidenciar el razonamiento diagnóstico, al estimar una causa dado el conocimiento del efecto. Finalmente el inciso **d)** se puso para evidenciar las tecnologías; es decir, los argumentos que justifican las técnicas o las formas en las que resolvió los problemas.

En las cuatro actividades propuestas no se puso ningún inciso para evidenciar la teoría¹³, que corresponde a un segundo nivel de justificación y explicación de la técnica el cuál es el argumento formal que justifica rigurosamente la tecnología. Estudios han reportado como parte de sus resultados que los estudiantes no suelen referirlas, la teoría es evanescente o ausente (Castela, 2017); aunque es factible

¹³ Ver en el análisis de la información porque en los audios algunos alumnos verbalizan algunas teorías, aunque no las plasman en sus producciones escritas.

encontrarlas en estudiantes de matemáticas puras que llegan a citar teorías, teoremas y leyes como parte de la argumentación de sus técnicas. A continuación, se expresa la organización praxeológica para cada una de las actividades.

3.2.2.1 Organización praxeológica de la actividad 1

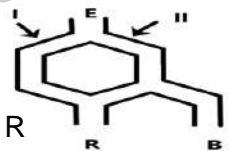
Tipo de actividad (T): Calcular la Probabilidad Condicional¹⁴

Objetivo: Ver si se presenta la falacia temporal o sesgo de secuencia temporal dado que es una situación diacrónica.

Actividad 1.

Analiza el esquema que se te presenta.

Considera el hecho de soltar una bola en E y que esta bola salga por R



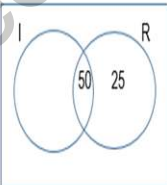
a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada

b) Calcula la probabilidad de que, si la bola sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta.

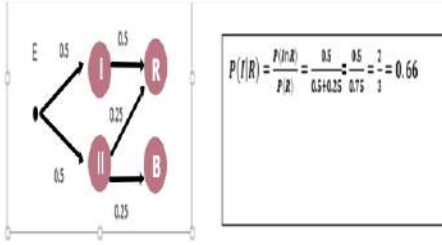
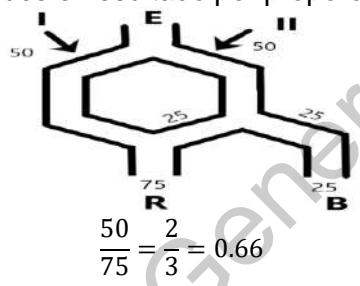
c) Bajo las mismas condiciones, si en lugar de una bola se dejan caer 100 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?

La comprensión de la relación de condicionalidad se dificulta si la secuencia temporal de los sucesos no coincide con el orden dado en el condicionamiento. El suceso condicionante (caer en el orificio R) es posterior en el tiempo al suceso cuya probabilidad se evalúa (pasar por I). La secuencia temporal dificulta la identificación correcta del espacio muestral del experimento ya que se reduce a las bolas que caen por R y los estudiantes dan erróneamente la respuesta 0.5, no teniendo en cuenta las bolas que caen en el orificio B. Barragués & Guisasola (2009).

¹⁴ Las instrucciones, dadas por escrito y que aplican a todas las actividades, pedían además de dar respuestas ser lo más explícito posible en sus procedimientos y validaciones.

Praxeología Actividad 1		
Técnica (τ)	Tecnología (θ)	Teoría(Θ)
Manera de resolver, donde todas las técnicas conllevan el mismo valor numérico	Tienen un carácter justificativo, que argumenta la técnica realizada por el estudiante	Es un nivel superior de justificación de la tecnología usada y puede estar dada por teoremas, lemas, axiomas, definiciones puntuales (conceptos matemáticos)
Inciso a). Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada		
τ_{1a} : Escribir lo eventos: <ul style="list-style-type: none"> • Escriba posibles caminos que puede tomar la canica sin ninguna notación matemática de conjuntos. • Sale por R o por B • Paso por el canal I y salió por R • $\{(I, R), (II, B)\}$ • $\{(I, R), (II, R), (II, B)\}$ 	θ_{1a} : Espacio muestral asociado al experimento	Θ_{1a} : Interacción de eventos. Conceptos: eventos, espacio muestral total y reducido.
Inciso b)¹⁵. Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal izquierdo P (I R) .		
τ_{2b} . Escriba un razonamiento lógico sin utilizar ninguna fórmula	θ_{2b} Hace uso de la tecnología en la técnica	Θ_{2b} No hay evidencia
τ_{3b} . Realice el cálculo con la fórmula de Probabilidad Condicional $P(I R) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)}$	θ_{3b} . Uso de la fórmula de Probabilidad Condicional	Θ_{3b} : Definición de Probabilidad Condicional y uso de fórmula $P(I R) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)}$
τ_{4b} Realice una regla de tres $75 \rightarrow 100$ y $50 \rightarrow x = \frac{(100 \cdot 50)}{75} = \frac{5000}{75} = 66.6$	θ_{4b} : Noción de variables proporcionales	Θ_{4b} Teoría de números racionales y sus operaciones
τ_{5b} Dibuje un diagrama de VENN. Dejando como espacio muestral R, que es nuestro punto interés y no influye en el resultado el quitar "B".  $P(I R) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)} = \frac{50/100}{75/100} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3} = 0.66$	θ_{5b} : Operaciones con conjuntos y operaciones de probabilidad	Θ_{5b} : Teoría de probabilidades y conjuntos. Concepto de espacio muestral.

¹⁵ Pretende el estudiante muestre la técnica; es decir, la manera en que resolvió la Probabilidad Condicional pedida. Ver anexo V

<p>τ_{6b} Dibuje un diagrama de árbol</p> 	<p>θ_{6b}: Técnica gráfica de diagrama de árbol.</p>	<p>Θ_{6b}: Reglas de multiplicación para eventos independientes.</p>																
<p>τ_{7b}. Usando la Tabla, podría haber usado: $(\bullet/\S) = 50/75 = 2/3 = 0.66$</p> <table border="1" data-bbox="305 718 760 949"> <thead> <tr> <th>Canal</th> <th>R</th> <th>B</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>I (Izquierdo)</td> <td>50 •</td> <td>0 ♦</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>II (Derecho)</td> <td>25 *</td> <td>25 ▲</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>75 §</td> <td>25 □</td> <td>100</td> </tr> </tbody> </table>	Canal	R	B	Total	I (Izquierdo)	50 •	0 ♦	50	II (Derecho)	25 *	25 ▲	50	Total	75 §	25 □	100	<p>θ_{7b}: Haga uso de frecuencias observadas y esperadas.</p>	<p>Θ_{7b}: Concepto de probabilidades marginales.</p>
Canal	R	B	Total															
I (Izquierdo)	50 •	0 ♦	50															
II (Derecho)	25 *	25 ▲	50															
Total	75 §	25 □	100															
<p>τ_{8b}. Observa el esquema, y directamente del espacio muestral deduce el resultado por proporción.</p> 	<p>θ_{8b}: Uso de la definición de espacio muestral reducido dado por la Probabilidad Condicional</p>	<p>Θ_{8b}: Concepto de espacio muestral. Concepto de proporciones.</p>																
<p>Inciso c)¹⁶: Bajo las mismas condiciones, si en lugar de una bola se dejan caer 100 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?</p>																		
<p>τ_{1c}. En las fases 2 y 3 de la metodología ACODESA al usar el <i>software</i> Descartes repitiendo el experimento con un mayor número de canicas observe el valor de la frecuencia relativa al que tiende el número de canicas.</p>	<p>θ_{1c}: Haga uso de la Ley de los grandes números</p>	<p>Θ_{1c}: Teorema Fundamental de la Teoría de Probabilidad.</p>																

Cuadro 4. Praxeología de la Actividad 1
 Elaboración propia

¹⁶ Pretende que el estudiante evidencia las tecnologías; es decir argumentos que expliquen o justifiquen las técnicas. Ver anexo VI.

3.2.2.2 Organización praxeológica de la actividad 2

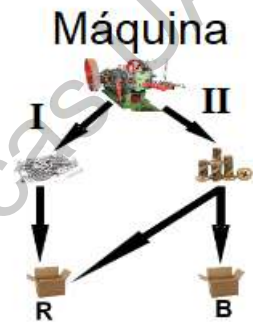
Tipo de tarea: Calcular la Probabilidad Condicional

Objetivo: Ver si se presenta la falacia temporal o sesgo de secuencia temporal dado que es una situación diacrónica.

ACTIVIDAD 2.

Analiza el esquema que se te presenta.

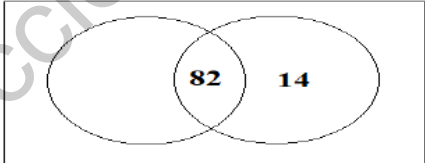
Una máquina fabrica 100 tornillos por hora. Hay 82 tornillos que pasan por la banda I y caen en la caja R donde están los tornillos perfectos para ensamblar cualquier mueble. Se sabe que 14 de los tornillos que pasa por la banda II (defectuosos) tienen pequeñas imperfecciones y se pueden poner en la caja R dado que si sirven para ensamblado.



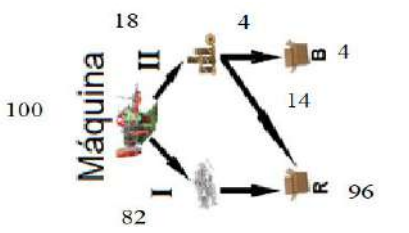
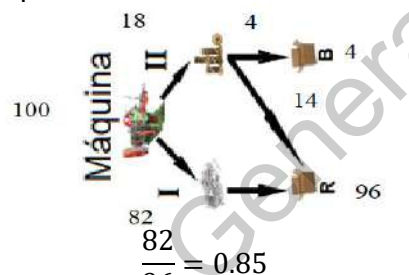
Ahora contesta lo que se te pide:

- Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada
- Calcula la probabilidad de que, si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal "I".
Valida tu respuesta.
- Bajo las mismas condiciones, si en lugar de 100 tornillos se produjeran 1000 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?

Este problema tiene la estructura de la actividad uno, pero tiene información puntual de la cantidad de tornillos que caerán en la caja "R", por lo que se espera el estudiante no tenga mucho problema de calcular correctamente la Probabilidad Condicional que se le pide, aunque la secuencia temporal está implícita.

Praxeología Actividad 2		
Técnica (τ)	Tecnología (θ)	Teoría(Θ)
Manera de resolver, donde todas las técnicas conllevan el mismo valor numérico	Tienen un carácter justificativo, que argumenta la técnica realizada por el estudiante	Es un nivel superior de justificación de la tecnología usada y puede estar dada por teoremas, lemas, axiomas, definiciones puntuales (conceptos matemáticos)
Inciso a). Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada		
τ_{1a} : Escribir lo eventos: <ul style="list-style-type: none"> $\{(I, R), (II, R), (II, B)\}$ 	θ_{1a} : Espacio muestral asociado al experimento	Θ_{1a} : Interacción de eventos. Conceptos: eventos, espacio muestral total y reducido.
Inciso b) ¹⁷ . Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal izquierdo P(I R) .		
τ_{2b} . Escriba un razonamiento lógico sin utilizar ninguna fórmula	θ_{2b} Hace uso de la tecnología en la técnica	Θ_{2b} No hay evidencia
τ_{3b} . Realice el cálculo con la fórmula de Probabilidad Condicional $P(I R) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)} = \frac{82}{96} = 0.85$	θ_{3b} : Uso de la fórmula de Probabilidad Condicional	Θ_{3b} : Definición de Probabilidad Condicional y uso de fórmula $P(I R) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)}$
τ_{4b} Realice una regla de tres $96 \rightarrow 100$ y $82 \rightarrow x = \frac{(100 \cdot 82)}{96} = \frac{8200}{96} = 85.4\%$	θ_{4b} : Noción de variables proporcionales	Θ_{4b} Teoría de números racionales y sus operaciones
τ_{5b} Dibuje un diagrama de VENN. Dejando como espacio muestral R, que es nuestro punto de interés y no influye en el resultado el quitar "B".  $P(I R) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)} = \frac{82}{96} = 0.85$	θ_{5b} : Operaciones con conjuntos y operaciones de probabilidad Usar sólo el espacio muestral reducido	Θ_{5b} : Teoría de probabilidades y conjuntos. Concepto de espacio muestral.

¹⁷ Pretende el estudiante muestre la técnica; es decir, la manera en que resolvió la Probabilidad Condicional pedida. Ver anexo V

<p>τ_{6b} Dibuje un diagrama de árbol</p>  $P(I R) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)} = \frac{82}{82 + 14} = \frac{82}{96} = 0.85$	<p>θ_{6b}: Técnica gráfica de diagrama de árbol.</p>	<p>Θ_{6b}: Reglas de multiplicación para eventos independientes</p>																
<p>τ_{7b}. Usando la Tabla, podría haber usado: $(\bullet/\S) = 82/96 = 0.85$</p> <table border="1" data-bbox="324 756 730 945"> <thead> <tr> <th>Canal</th> <th>R</th> <th>B</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>I (Izquierdo)</td> <td>82 •</td> <td>0 ♦</td> <td>82</td> </tr> <tr> <td>II (Derecho)</td> <td>14 *</td> <td>4 ▲</td> <td>18</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>96 §</td> <td>4 □</td> <td>100</td> </tr> </tbody> </table>	Canal	R	B	Total	I (Izquierdo)	82 •	0 ♦	82	II (Derecho)	14 *	4 ▲	18	Total	96 §	4 □	100	<p>θ_{7b}: Haga uso de frecuencias observadas y esperadas.</p>	<p>Θ_{7b}: Concepto de probabilidades marginales.</p>
Canal	R	B	Total															
I (Izquierdo)	82 •	0 ♦	82															
II (Derecho)	14 *	4 ▲	18															
Total	96 §	4 □	100															
<p>τ_{8b}. Observa el esquema, y directamente del espacio muestral deduce el resultado por proporción.</p>  $\frac{82}{96} = 0.85$	<p>θ_{8b}: Uso de la definición de espacio muestral reducido dado por la Probabilidad Condicional</p>	<p>Θ_{8b}: Concepto de espacio muestral. Concepto de proporciones.</p>																
<p>Inciso c)¹⁸: Bajo las mismas condiciones, si en lugar de 100 tornillos se produjeran 1000 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?</p>																		
<p>τ_{1c}. <i>Dado que tiene la misma estructura de la actividad 1, pero con datos precisos asociados la simulación que se les paso en la actividad 1 les hace sentido para resolver esta.</i></p>	<p>θ_{1c}: Haga uso de la Ley de los grandes números</p>	<p>Θ_{1c}: Teorema Fundamental de la Teoría de Probabilidad.</p>																

Cuadro 5. Praxeología de la Actividad 2
 Elaboración propia

¹⁸ Pretende que el estudiante evidencia las tecnologías; es decir argumentos que expliquen o justifiquen las técnicas. Ver anexo VI

3.2.2.3 Organización praxeológica de la actividad 3

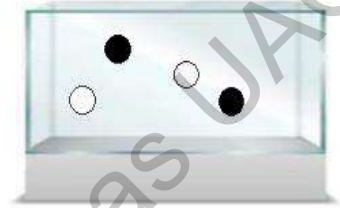
Tipo de tarea: Calcular la Probabilidad Condicional

Objetivo: Ver si se presenta el sesgo de causación

Actividad 3.

Una urna contiene dos bolas negras y dos bolas blancas.

Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de la otra, sin devolver la primera a la urna.



a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un **segundo lugar (N_2)**, habiendo extraído una bola negra en **primer lugar (N_1)**. Justifica tu respuesta.

c) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en **primer lugar (N_1)**, habiendo extraído una bola negra en **segundo lugar (N_2)**. Justifica tu respuesta.

d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en b) y c)?

Para resolver el problema de la urna de Falk, se requiere que el estudiante tenga claros los conceptos asociados al cálculo de la Probabilidad Condicional como son; muestro con y sin reposición, el espacio muestral y su restricción que se ve afectado por el tipo de muestreo, la Probabilidad Condicional misma que confunde con la conjunta al aplicar la regla del producto o bien la confunde con la probabilidad simple.

Según Falk (1986), psicológicamente, los problemas enunciados en **b)** y **c)** no se perciben simétricos ya que en el inciso c) requiere pruebas probabilísticas, razonamiento que es indiferente al orden temporal y los estudiantes suelen alegar que los eventos posteriores no pueden afectar el resultado de los anteriores.

Praxeología Actividad 3																		
Técnica (τ)	Tecnología (θ)	Teoría(Θ)																
Manera de resolver, donde todas las técnicas conllevan el mismo valor numérico	Tienen un carácter justificativo, que argumenta la técnica realizada por el estudiante	Es un nivel superior de justificación de la tecnología usada y puede estar dada por teoremas, lemas, axiomas, definiciones puntuales (conceptos matemáticos)																
Inciso a). ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta																		
τ_{1a} : Escribir lo eventos: Escribir el espacio muestral $S = \{(NN), (NB), (BN), (BB)\}$ Eventos dependientes	θ_{1a} : Espacio muestral asociado al experimento $P(N1 \cap N2) = P(N1) * P(N2 N1)$	Θ_{1a} : Muestreo con y sin reposición. Espacio muestral y su afectación dada por el tipo de muestreo Interacción de eventos. Concepto de independencia																
Inciso b)¹⁹. Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un segundo lugar (N₂) , habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N₁) . Justifica tu respuesta																		
τ_{2b} . Escriba un razonamiento lógico sin utilizar ninguna fórmula	θ_{2b} Hace uso de la tecnología en la técnica	Θ_{2b} No hay evidencia																
τ_{3b} . Realice el cálculo con la fórmula de Probabilidad Condicional $P(N2 N1) = \frac{P(N2 \cap N1)}{P(N1)} = \frac{1}{3}$	θ_{3b} : Uso de la fórmula de Probabilidad Condicional	Θ_{3b} : Definición de Probabilidad Condicional y uso de fórmula $P(N2 N1) = \frac{P(N2 \cap N1)}{P(N1)}$																
τ_{4b} Dibuje un diagrama de árbol y después aplique los resultados en la fórmula de Probabilidad Condicional 	θ_{4b} : Técnica gráfica de diagrama de árbol. Uso de la fórmula de Probabilidad Condicional Uso de la regla de multiplicación	Θ_{4b} : Reglas de Probabilidad conjunta e intersección de eventos dependientes.																
τ_{5b} . Usando la Tabla, podría haber usado: $(\bullet/\S) = (1/6)/(1/2) = 1/3 = 0.33$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Canal</th> <th>N1</th> <th>B1</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>N2</td> <td>1/6 •</td> <td>1/3 ♦</td> <td>0.5§</td> </tr> <tr> <td>B2</td> <td>1/3 *</td> <td>1/6 ▲</td> <td>0.5▣</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>0.5 §</td> <td>0.5 ▣</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	Canal	N1	B1	Total	N2	1/6 •	1/3 ♦	0.5§	B2	1/3 *	1/6 ▲	0.5▣	Total	0.5 §	0.5 ▣	1	θ_{5b} : Haga uso de frecuencias observadas y esperadas.	Θ_{5b} : Concepto de probabilidades marginales.
Canal	N1	B1	Total															
N2	1/6 •	1/3 ♦	0.5§															
B2	1/3 *	1/6 ▲	0.5▣															
Total	0.5 §	0.5 ▣	1															

¹⁹ Pretende el estudiante muestre la técnica; es decir, la manera en que resolvió la Probabilidad Condicional pedida. Ver anexo V

Inciso c)²⁰. Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un primer lugar (N₁), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N₂). Justifica tu respuesta																		
τ_{2c} . Escriba un razonamiento lógico sin utilizar ninguna fórmula	θ_{2c} Hace uso de la tecnología en la técnica	Θ_{2c} No hay evidencia																
τ_{3c} . Realice el cálculo con la fórmula de Probabilidad Condicional $P(N1 N2) = \frac{P(N1 \cap N2)}{P(N2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = 0.33$	θ_{3c} : Uso de la fórmula de Probabilidad Condicional	Θ_{3c} : Definición de Probabilidad Condicional y uso de fórmula $P(N1 N2) = \frac{P(N1 \cap N2)}{P(N2)}$																
τ_{4c} Dibuje un diagrama de árbol y después aplique los resultados en la fórmula de probabilidad condición. 	θ_{4c} : Técnica gráfica de diagrama de árbol. Uso de la fórmula de Probabilidad Condicional Uso de la regla de multiplicación	Θ_{4c} : Reglas de multiplicación para eventos dependientes y probabilidad conjunta.																
τ_{5c} . Usando la Tabla, podría haber usado: $(\bullet/\S) = (1/6)/(1/2) = 1/3 = 0.33$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Canal</th> <th>N1</th> <th>B1</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>N2</td> <td>1/6 •</td> <td>1/3 ♦</td> <td>0.5§</td> </tr> <tr> <td>B2</td> <td>1/3 *</td> <td>1/6 ▲</td> <td>0.5■</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>0.5 §</td> <td>0.5 ■</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	Canal	N1	B1	Total	N2	1/6 •	1/3 ♦	0.5§	B2	1/3 *	1/6 ▲	0.5■	Total	0.5 §	0.5 ■	1	θ_{5c} : Haga uso de frecuencias observadas y esperadas.	Θ_{5c} : Concepto de probabilidades marginales.
Canal	N1	B1	Total															
N2	1/6 •	1/3 ♦	0.5§															
B2	1/3 *	1/6 ▲	0.5■															
Total	0.5 §	0.5 ■	1															
Inciso d)²¹: Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en b) y c)?																		
τ_{1d} . Explique se trata del mismo experimento, son los mismos eventos, son dependientes y se tiene el mismo espacio muestral, dado que es un experimento sin reemplazo.	θ_{1d} : Eventos independientes Uso de fórmulas de probabilidad. La suma total debe ser ≤ 1 .	Θ_{1d} : Conceptos: experimento sin reemplazo, eventos, independencia, regla de multiplicación para eventos dependientes, espacio muestral.																

Cuadro 6. Praxeología de la Actividad 3
Elaboración propia

²⁰ Pretende el estudiante muestre la técnica; es decir, la manera en que resolvió la Probabilidad Condicional pedida. Ver anexo V

²¹ Pretende que el estudiante evidencia las tecnologías; es decir argumentos que expliquen o justifiquen las técnicas. Ver anexo VI

3.2.2.4 Organización praxeológica de la actividad 4

Tipo de tarea: Calcular la Probabilidad Condicional

Objetivo: Ver si se presenta el sesgo de causación

Actividad 4.

Analiza la siguiente situación:

¿Cuál es la probabilidad de que un joven sea ingeniero dado que su padre es ingeniero?

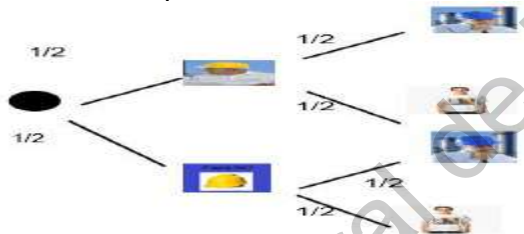


- a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta
- b) Calcula la probabilidad de que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero:
- c) Calcula la probabilidad de que un padre sea ingeniero dado que su hijo es ingeniero:
- d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en los incisos **b)** y **c)**?

Estudios que han explorado el tipo de pregunta planteada²² en el inciso **b)** los encuestados generalmente se dejan llevar por un razonamiento causal estimando el efecto dado cierto conocimiento de las causas; mientras que en el inciso **c)** es una relación diagnóstica, al estimar la causa dado el conocimiento del efecto.

Cuando la Probabilidad Condicional es presentada en contextos sociales, el conocimiento previo de los eventos puede interferir con el cálculo de las probabilidades, el resultado de la Probabilidad Condicional del inciso **b)** en el estudio de Bastias et al. (2017) aplicado a profesores de matemáticas dicen es de al menos un 60%, los autores refieren en Chile es muy apreciada la profesión de Ingeniero.

²² Según investigaciones de Pollasetket, 1987; Teversky y Kahneman, 1980 citados en: Bastias et al., 2017.

Praxeología Actividad 4		
Técnica (τ)	Tecnología (θ)	Teoría(Θ)
Manera de resolver, donde todas las técnicas conllevan el mismo valor numérico	Tienen un carácter justificativo, que argumenta la técnica realizada por el estudiante	Es un nivel superior de justificación de la tecnología usada y puede estar dada por teoremas, lemas, axiomas, definiciones puntuales (conceptos matemáticos)
Inciso a). ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta		
<p>τ_{1a}: Escribir lo eventos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • A: Hijo sea ingeniero, NA: Hijo no sea ingeniero • B: Padre sea ingeniero, NB: Padre no ingeniero • Eventos Independientes  <p>τ_{2a}: Dibujar diagrama de Venn y hacer operaciones con conjuntos y de probabilidad</p>	<p>θ_{1a}:</p> <p>Espacio muestral</p> <p>Dibujar un diagrama de árbol e identificar así el espacio muestral con el fin de asignarles probabilidades a cada uno de los eventos</p> <p>Lo vea como un problema análogo a lanzar una moneda</p>	<p>Θ_{1a}:</p> <p>Teoría de probabilidades y conjuntos. Concepto de espacio muestral</p> <p>Concepto de probabilidad simple</p> <p>Concepto de independencia de probabilidad conjunta</p> <p>Concepto de probabilidad total</p>
Inciso b)²³. Calcula la probabilidad de que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero		
<p>τ_{2b}. Escriba un razonamiento lógico sin utilizar ninguna fórmula</p>	<p>θ_{2b} Hace uso de la tecnología en la técnica</p>	<p>Θ_{2b} No hay evidencia</p>
<p>τ_{3b}. Realice el cálculo con la fórmula de Probabilidad Condicional</p> $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0.5$	<p>θ_{3b}. Uso de la fórmula de Probabilidad Condicional</p> <p>Diga que es análogo a lanzar una moneda y asigne el valor de $\frac{1}{2}$.</p>	<p>Θ_{3b}: Definición de Probabilidad Condicional y uso de fórmula</p> $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ <p>Use concepto independencia</p>

²³ Pretende el estudiante muestre la técnica; es decir, la manera en que resolvió la Probabilidad Condicional pedida. Ver anexo V

<p>τ_{4b}. Usando la Tabla, podría haber usado:</p> <table border="1" data-bbox="315 289 863 485"> <thead> <tr> <th>Canal</th> <th>A</th> <th>B</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> </tr> <tr> <td>total</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	Canal	A	B	Total	A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	total	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	<p>θ_{4b}: Haga uso de frecuencias observadas y esperadas.</p>	<p>Θ_{4b}: Concepto de probabilidades marginales.</p>
Canal	A	B	Total															
A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$															
B	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$															
total	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1															
<p>Inciso c)²⁴. Calcula la probabilidad de que un padre sea ingeniero dado que su hijo es ingeniero</p>																		
<p>τ_{1c}. Escriba un razonamiento lógico sin utilizar ninguna fórmula</p>	<p>θ_{1c} Hace uso de la tecnología en la técnica</p>	<p>Θ_{1c} No hay evidencia</p>																
<p>τ_{2c}. Realice el cálculo con la fórmula de Probabilidad Condicional</p> $P(B A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0.5$	<p>θ_{2b}: Uso de la fórmula de Probabilidad Condicional</p> <p>Diga que es análogo a lanzar una moneda y asigne el valor de $\frac{1}{2}$</p>	<p>Θ_{2c}: Definición de Probabilidad Condicional y uso de fórmula</p> $P(B A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ <p>Use concepto independencia</p>																
<p>τ_{3c}. Usando la Tabla, podría haber usado:</p> <table border="1" data-bbox="315 1024 863 1220"> <thead> <tr> <th>Canal</th> <th>A</th> <th>B</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	Canal	A	B	Total	A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	Total	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	<p>θ_{3c}: Haga uso de frecuencias observadas y esperadas.</p>	<p>Θ_{3c}: Concepto de probabilidades marginales.</p>
Canal	A	B	Total															
A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$															
B	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$															
Total	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1															
<p>Inciso d)²⁵: Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en b) y c)?</p>																		
<p>τ_{1d}. Porque son eventos independientes y uno no afecta ni determina al otro, sería el equivalente a la probabilidad de lanzar una moneda</p>	<p>θ_{1d}: Eventos independientes Uso de fórmulas de probabilidad La suma total debe ser ≤ 1</p>	<p>Θ_{1d}: Conceptos: eventos, independencia, regla de multiplicación para eventos independientes, espacio muestral</p>																

Cuadro 7. Praxeología de la Actividad 4
Elaboración propia

²⁴ Pretende el estudiante muestre la técnica; es decir, la manera en que resolvió la Probabilidad Condicional pedida. Ver anexo V

²⁵ Pretende que el estudiante evidencie las tecnologías; es decir argumentos que expliquen o justifiquen las técnicas. Ver anexo VI

3.2.3 Procedimiento de aplicación: ACODESA

El instrumento de recolección de datos²⁶ fue aplicado bajo el procedimiento ACODESA²⁷, por su acrónimo en francés, se refiere al aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión (Hitt y González-Martín, 2015). Es un método de enseñanza para introducir conceptos matemáticos en el aula y promover el desarrollo del pensamiento matemático, provoca que los estudiantes construyan significados, involucra escenarios individuales inmersos en socioculturales.

Las cuatro tareas propuestas de Probabilidad Condicional se aplicaron en cada una de las cinco fases ACODESA: 1) *Trabajo individual*, donde se recuperan los conocimientos previos del estudiante pues su producción cognitiva produce significados propios correctos o no; 2) *Trabajo en equipo*, sobre la misma tarea se espera un refinamiento de sus respuestas a partir de sus procesos de argumentación y validación; 3) *Debate*, todo el grupo discute las distintas formas en la que resolvieron la tarea, se espera obtener un refinamiento de su técnica y eventualmente su teoría; 4) *Auto-reflexión*, proceso individual de reconstrucción para afianzar lo logrado en el debate e 5) *Institucionalización del concepto* probabilístico asociado a la tarea analizada tomando en cuenta las producciones de los estudiantes. En cada una de las fases se aplicaron las mismas tareas que fueron diseñadas bajo la TAD.

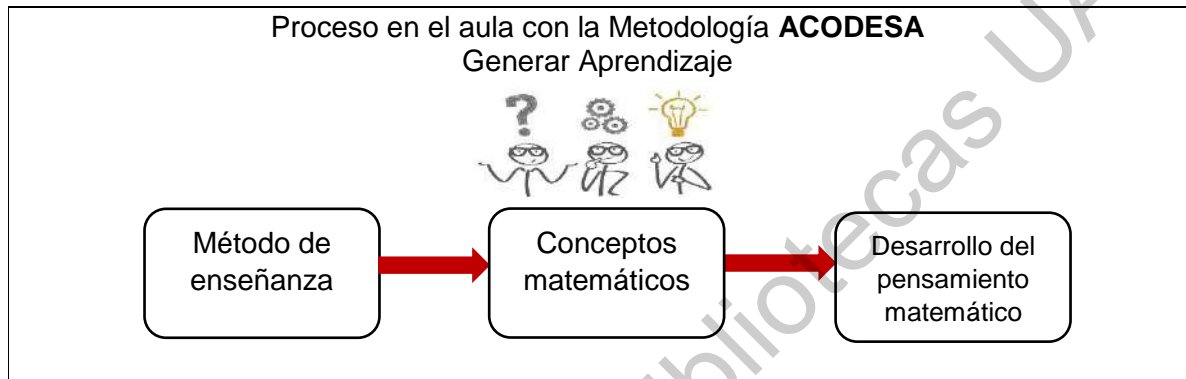
La finalidad de hacer la aplicación con ACODESA es ver la evolución del concepto de Probabilidad Condicional de la fase uno a la fase cinco porque las actividades propuestas tienen la intención de evidenciar sesgos temporal diacrónico y de causación, ver investigaciones de Ojeda (1995) y Falk (1986), encausando a cada uno de los estudiantes participantes a través de una simulación con preguntas guiadas a llegar a la correcta solución de las actividades y una mejor comprensión del concepto de Probabilidad Condicional; así como de los conceptos asociados inherentes a la misma que inciden en su solución

²⁶ Ver Anexo V

²⁷ Ver Cuadro 8

Procedimiento de aplicación ACODESA

Es un método de enseñanza para introducir conceptos matemáticos en el aula y promover el desarrollo del pensamiento matemático; se refiere al aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión. Provoca que los estudiantes construyan significados, involucra escenarios individuales inmersos en socioculturales. Esta metodología consta de 5 fases.



Fase	Propósito	Descripción
1 Trabajo individual	Contesta actividades con lo que sabe	Se recuperan los conocimientos previos del estudiante pues su producción cognitiva produce significados propios correctos o no.
2 Trabajo en equipo	Uso tecnología y grabación	Se espera un refinamiento de sus respuestas a partir de sus procesos de argumentación y validación.
3 Debate grupal	Uso tecnología y grabación	Todo el grupo discute las distintas formas en la que resolvieron la tarea, se espera obtener un refinamiento de su técnica y eventualmente su teoría.
4 Auto-reflexión	Contesta nuevamente en forma individual	Proceso individual de reconstrucción para afianzar lo logrado en el debate.
5 Institucionalización del concepto	Grabación	Institucionalización del concepto probabilístico asociado a la tarea analizada tomando en cuenta las producciones de los estudiantes.

Cuadro 8. Procedimiento de aplicación ACODESA

Fuente: Modificado de Hitt, González-Martín (2015)

Las cuatro actividades serán aplicadas en cada una de las cinco fases y serán dirigidas y analizadas bajo el marco teórico de la TAD.

Es pertinente aclarar que los alumnos no fueron avisados con antelación que resolverían ejercicios de Probabilidad Condicional por lo que resolvieron las actividades con lo que sabían o recordaban de su primer curso que llevaron en el segundo semestre de la carrera, esto para tener igualdad de condiciones y ver si efectivamente la propuesta era útil para corregir sesgos, si es que se presentaban, en la solución de estos problemas. Se les informó sería un taller y se les platicó brevemente sobre el fin investigativo del mismo, de la dinámica de aplicación; así como el tiempo que tendrían para responder cada una de las actividades y la duración total. Ese mismo día después de preguntarles si accedían participar²⁸, se tomó lista y se procedió a aplicar la primera fase.

La **primera fase** se aplicó el 30 de enero²⁹ a 17 estudiantes presentes en el salón y horario que les asignaron para re-cursar la materia de probabilidad y estadística con una duración total de una hora. A cada alumno se le dio en orden y por separado cada una de las cuatro actividades, dándoles quince minutos para su completa resolución; así una vez terminada la actividad se recogía y se le daba la siguiente. Se hizo de esta manera para guiar su atención únicamente en la actividad asignada con el fin de que lograran terminar completamente y sin distracciones cada una de las actividades. La intención de esta primera fase es recuperar lo que los estudiantes saben, correcto o no del tema de Probabilidad Condicional y conceptos asociados a la misma.

La **segunda fase** se aplicó el 5 de febrero, a casi una semana de haber aplicado la primera fase, y tuvo una duración de una hora. Ese día estuvieron presentes 17 estudiantes con los que se conformaron cuatro equipos³⁰, la dinámica fue igual a la fase uno: a cada equipo se le dio en orden y por separado cada una de las cuatro actividades dándoles quince minutos para la completa resolución de cada actividad;

²⁸ Todos los alumnos presentes aceptaron participar.

²⁹ Fue su primer día de clases de la materia de Probabilidad y Estadística del semestre.

³⁰ Equipo "Yankee": 4 integrantes, de los cuales 3 completaron todas las fases

Equipo "Cuatro": 5 integrantes, de los cuales 3 completaron todas las fases

Equipo "More": 5 integrantes y todos completaron todas las fases

Equipo "Sebastián": 3 integrantes y ninguno completo todas las fases

así una vez terminada la actividad se recogía y se le daba la siguiente. Se les proyectó una simulación elaborada en el *software* DescartesJS³¹ como herramienta de apoyo para las actividades uno y tres.

A cada equipo se le pidió grabar en un audio los argumentos con los que habían llegado a la solución consensada de todas las actividades; dicha petición con la finalidad de entender sus razonamientos al resolver cada una de las actividades ya que muchas veces sólo los expresaban verbalmente y no escribían en las hojas proporcionadas aunque ahí se les pidiera justificación de sus respuestas. Al finalizar la aplicación cada equipo mandó su grabación.

Las ventajas de retomar las actividades que se habían resuelto de manera individual en la fase uno, es que ya conocían la actividad y les fue más fácil retomarla; además de que ya tuvieron un tiempo para madurar la idea y pensar si lo que hicieron en esa primera fase fue correcto o no, es por esto que se espera haya un refinamiento de sus respuestas al ser enriquecidas por cada uno de los integrantes del equipo a partir de sus procesos de argumentación y validación.

Las **tercera y cuarta fases** se aplicaron el 10 de febrero, a cinco días de haber aplicado la fase dos, con una duración de una hora. Se pudo avanzar mucho debido a que ya habían tenido tiempo de madurar las actividades pues ya las habían trabajado en forma individual y por equipos en las respectivas fases anteriores.

La **tercera fase** fue el debate grupal; se les proyectó una simulación elaborada en el *software* DescartesJS, como herramienta de apoyo para las actividades uno y tres³², que les iba guiando a través de cuestionamientos relacionados con conceptos que inciden en la solución de dichas actividades, con el fin de hacerles comprender de una manera lógica el concepto de Probabilidad Condicional.

³¹ **DESCARTES** Matemáticas interactivas es un programa de código abierto, de uso libre y gratuito para la creación de unidades didácticas. Creado por los autores: **Diseño funcional:** José Luis Abreu Leon, José R. Galo Sanchez y Juan Madrigal Muga. **Autores del software:** José Luis Abreu Leon, Marta Oliveró Serrat, Oscar Escamilla González, Joel Espinosa Longi <http://arquimedes.matem.unam.mx/Descartes5/creditos/conCCL.html>

³² Ver la descripción de la simulación dentro del apartado de la descripción del instrumento de recolección de datos.

Se hizo una grabación del debate que se fue suscitando al responder las preguntas formuladas en la simulación y tener con ello evidencia de los argumentos que daban los estudiantes de cómo resolver las actividades y el porqué. Se les pidió a dos estudiantes escribieran las respuestas del grupo³³.

La **cuarta fase** fue de auto-reflexión y para recuperar lo dicho en el debate vuelven a contestar las cuatro actividades ya con toda la maduración y evolución de las respuestas del debate. Es un proceso individual de reconstrucción para afianzar lo logrado en el debate.

La **quinta fase** la realizaría el docente con su grupo en alguna de las clases siguientes con la finalidad de institucionalizar el concepto de Probabilidad Condicional, dándoles una breve explicación de la correcta solución de las actividades y las razones que las justifican.

3.2.4 Descripción de la simulación en Descartes

El procedimiento de aplicación ACODESA, requiere para las fases dos y tres alguna herramienta³⁴ que permita al estudiante validar sus respuestas a partir de sus procesos de argumentación, motivo por el cual se creó una simulación en el *software* Descartes³⁵.

La intención de la simulación es exponer directamente al estudiante a los sesgos antes mencionados mediante una serie de escenas con actividades que se sabe evidencian dichos sesgos. La intención es ir guiando al estudiante por medio de preguntas y simulación del experimento desarrollado en forma virtual y en tiempo real, con el fin de que reconozca los elementos clave con que se pretende cambiar

³³ Debido a que el docente, al concluir la fase tres, indico que se les dieran las actividades para la fase cuatro, los estudiantes que apuntaron las soluciones del debate lo hicieron superficialmente y sin justificar respuestas, al preferir poner más énfasis en su auto-reflexión; por esa razón aquí la grabación del debate será pieza clave para el análisis.

³⁴ Pueden ser materiales físicos o tecnológicos Hitt y González-Martín (2015)

³⁵ <http://descartes.matem.unam.mx/>

su concepción errónea previa o sesgo (si la tuviera). Se espera el estudiante vaya madurando la idea a través de cada una de las fases ACODESA y logre resolver correctamente la actividad planteada.

Mediante el uso del Software DescartesJS³⁶, se planteó una actividad didáctica de Probabilidad Condicional que consta de un solo archivo dividido en nueve escenas a las cuales se puede acceder desde un menú. Para fines de la aplicación en las fases dos y tres de ACODESA se accedió a solo seis escenas que abordan específicamente el problema uno y tres de las actividades propuestas las cuales se muestran a continuación junto a la breve descripción e intención de lo que contiene cada una:

Diacrónico (1)

En esta escena mediante una simulación se aborda el problema propuesto por Ojeda (1995), dándole el nombre de “Problema de las canicas”; donde las canicas soltadas por “E” van cayendo en forma aleatoria hasta salir por los canales “R” y “B”. Se puede saber la cantidad de canicas que van pasando por cada canal por medio de números de color mostrados al lado de cada canal que se van incrementando hasta que el estudiante pulse en la barra de herramientas la tecla pausa, esto con la finalidad de repetir el experimento³⁷, ello para hacer notar al estudiante que cada canica que se usa en el experimento es independiente y que el canal por el que aleatoriamente se vaya no depende del camino seguido por la canica anterior ni tampoco determina la subsecuente.

³⁶ **DESCARTES** Matemáticas interactivas es un programa de código abierto, de uso libre y gratuito para la creación de unidades didácticas. Creado por los autores: **Diseño funcional:** José Luis Abreu Leon, José R. Galo Sanchez y Juan Madrigal Muga. **Autores del software:** José Luis Abreu Leon, Marta Oliveró Serrat, Oscar Escamilla González, Joel Espinosa Longi <http://arquimedes.matem.unam.mx/Descartes5/creditos/conCCL.html>

³⁷ Por la ley de los grandes números se sabe que al incrementar el número de experimentos, la frecuencia de que suceda un cierto evento tiende a ser una constante y dicha constante será a su vez la probabilidad de que ocurra este evento.

PROBLEMA DE LAS CANICAS

Canicas se sueltan por el canal "E". Si sale por "R", ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal I?

Canal I= 10
Canal II= 7

¿De cuántas formas puede salir la canica?

a) {(R), (B)}

b) {(I,R),(II,R), (II,B)}

c) {(I,R),(II,B)}

Correcto

¿Cómo es en el tiempo el suceso condicionante (salir por R), al suceso cuya probabilidad se te pide encontrar (pasar por I)?

a) no se sabe

b) Posterior

c) Anterior

Correcto

MENÚ DIACRÓNICO (1) PAUSA

Figura 1. Pantalla que muestra la cuarta escena: Diacrónico (1)
Simulación en programa Descartes de elaboración propia.

Se les dijo que la pregunta planteada en la parte superior derecha era el objetivo a ser contestado para que lo tuvieran en mente, y si leyeron con atención sabrán que se trata de calcular la Probabilidad Condicional $P(I|R)$.

Las preguntas planteadas aparecen de izquierda a derecha y sólo cuando el estudiante ha seleccionado la respuesta correcta. Las preguntas tienen la intención de expresar el espacio muestral, el cuál es clave en la respuesta de estos problemas, ya que hará que se reduzca a "R" y que se trata de una Probabilidad Condicional donde la temporalidad diacrónica está implícita.

Diacrónico (2)

En esta escena se mantiene el esquema de Ojeda y la simulación continúa con la intención de que siga siendo un apoyo visual al estudiante y gracias a éste pueda analizar a detalle lo que sucede en el experimento y contestar correctamente las preguntas que se le hacen en esa misma escena.

SESGO TEMPORAL DIACRÓNICO

200
E
Canal I = 101
Canal II = 99
50
49
R
151
B
49

♦ ¿Cómo son las probabilidades de que la bola pase por el **CANAL I** o por el **CANAL II**?

a) Son diferentes

b) Son iguales **¡¡ Correcto !!**

♦ ¿Qué probabilidad es? $P(\text{CANAL I})$ ó $P(\text{CANAL II}) = 0.50$

♦ Entonces, si se dejaran caer **100 bolas por E**, ¿Cuántas bolas se irían por cada uno de los canales? = 50.00

♦ Si la bola se fue por el **CANAL II**. ¿Qué es más probable? ¿Que se vaya por el camino izquierdo o por el derecho?

a) Izquierdo

b) Igualmente probable **¡¡ Correcto !!**

b) Derecho

♦ Entonces, ¿Cuántas bolas en **total** saldrían por **R**? = 75.00

¡¡ Correcto !!

MENÚ DIACRÓNICO (2) PAUSA

Figura 2. Pantalla que muestra la quinta escena: Diacrónico (2)
Simulación en programa Descartes de elaboración propia.

La primer pregunta aparece en la parte superior y cada vez que conteste correctamente³⁸ aparecerá la siguiente pregunta; así sucesivamente hasta llenar la página. La intención de las preguntas es que el estudiante reconozca que son dos sucesos igualmente probables, sería el equivalente al lanzamiento de una moneda. Pero que también reconozca que $P(I) \neq P(I|R)$. Esta idea seguirá siendo reforzada cuando le fija el número de canicas a 100, se le pide la probabilidad y el número de canicas que pasarían por los canales con la finalidad de cerrar la idea y pueda decir cuántas canicas saldrían por "R". Con esto se verá si reconoce que cada canica que se usa en el experimento es independiente y son equiprobables los eventos asociados; por lo que el resultado de las probabilidades pedidas no se modifica, ya sea con una o con muchas canicas. Lo que permite la Ley de los grandes números es que la probabilidad al ser realizado el experimento en forma aleatoria haga que la probabilidad $P(I|R)$ tienda al valor constante de $\frac{2}{3} = 0.66$

³⁸ La respuestas que permiten el estudiante ingrese el resultado aceptan fracciones o decimales y sólo aparecerá la siguiente pregunta una vez que haya contestado correctamente.

Diacrónico (3)

Sigue corriendo la simulación sobre el mismo esquema como un apoyo visual de actualización constante. Se presenta una tabla resumen de frecuencias absolutas del número de canicas lanzadas por "E", el número de canicas que salieron por R y por B respectivamente; así como el cálculo de la Probabilidad Condicional pedida $P(I|R)$; dicha probabilidad solo aparece una vez que el alumno ya digitó la respuesta correcta de la probabilidad pedida (¡para no darle la respuesta!). La primera línea de dicha tabla muestra la actualización continua y en tiempo real del experimento. Las siguientes muestran los mismos resultados antes mencionados pero dejándole en los puntos de corte de cada 100 canicas con que se hizo el experimento.

Canicas se sueltan por "E". Si sale por "R", ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal I?

Entonces ¿Cuál es la $P(I|R)$?

a) 0.33

b) 0.50

b) 0.66

¡¡ Correcto!!

# Canicas	Salió R	Salió B	$P(I R)$
508	384	124	0.656
100	72	28	0.764
200	151	49	0.669
300	229	71	0.677
400	304	96	0.664
500	378	122	0.651

MENÚ DIACRÓNICO (3) PAUSA

Figura 3. Pantalla que muestra la sexta escena: Diacrónico (3)
Simulación en programa Descartes de elaboración propia

La intención es que ya con lo analizado en las dos escenas previas al estudiante le haga sentido el espacio muestral, que no es solo sale por R o sale por B; sino que por R salen $\frac{2}{3}$ partes del total de las canicas que se dejaron caer. Lo cual podría reforzar viendo en la tabla los resultados generados en forma aleatoria en cada 100 puntos de corte. Como la Probabilidad Condicional $P(I|R)$ es la probabilidad de que la bola haya pasado por el CANAL I=(0.5) en un espacio en el que estamos asumiendo ocurrió $R=(0.5+0.25)$, por tanto $P(I|R) = \frac{0.5}{0.5+0.25} = 0.66$

El propósito de ponerle al final la columna de la tabla P(I|R) con los resultados en rojo den cada punto de corte, una vez que haya digitado la respuesta correcta, es que valide su respuesta y argumentación al ver hay una estabilización en la probabilidad pedida debida a la ley de los grandes números y ya tenga una idea madurada del porqué pasa esto.

Causal (1)

Se presenta el problema propuesto por Falk (1986); quién se dio cuenta que este problema les causaba mucho conflicto a sus alumnos ya que además de evidenciar el sesgo causal tiene incluido el sesgo temporal y no les hace sentido calcular, o incluso dicen no es posible dicho calculo, $P(N1|N2) = \text{Probabilidad de que la primer bola sacada sea negra, dado que la segunda fue negra.}$




Figura 4. Pantalla que muestra la séptima escena: Causal (1)
Simulación en programa Descartes de elaboración propia

En esta primera escena se pone una foto de una urna que contiene cuatro bolas que le sirva de apoyo visual y se refuerza con el texto: “Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de la otra, sin devolver la primera a la urna”. La intención es introducir al estudiante al problema y que reconozca que se trata de un muestreo sin reemplazo y lo tenga presente en las escenas siguientes pues es clave en la resolución correcta del problema.

Causal (2)

En esta escena se presenta como apoyo visual la misma urna pero con una bola negra afuera; junto con la pregunta que se pretende resolver y de la cual se puede apreciar el despliegado de la fórmula de Probabilidad Condicional con las respuestas correctas³⁹ que el estudiante ha ido proporcionando a cada una de las interrogantes planteadas en esta escena.

URNA



	2	●	○	Total		
1		●	○			
●		(0.5) × (0.33)	(0.5) × (0.67)	0.50		
○		(0.5) × (0.67)	(0.5) × (0.33)	0.50		
Total		0.50	0.50	1		
MENÚ	URNA (2)					PAUSA

¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar $P(N_2 | N_1)$? $P(N_2 | N_1) = \left(\frac{0.17}{0.5}\right) = 0.3$

¿Cuántos eventos son? **¡¡ Correcto !!**

¿Cómo son los eventos? Independientes Dependientes

Recuerda que cuando son dependientes $P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$
 En este caso: $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) * P(N_2 | N_1)$

¿Cuál es el espacio muestral?
 a) {NN, BB}
 b) {NN, NB, BN, BB}

¿Probabilidad de que la primer bola sacada sea negra (o blanca)? 0.50

¿Cuál es la probabilidad $P(N_2 | N_1)$ ó $P(B_2 | B_1)$? 0.33

¿Probabilidad que 2ª Blanca (B2) DADO QUE 1ª Bola negra (N1)? 0.67

¡ Muy bien! Ahora accede vía MENÚ a URNA (3)

Figura 5. Pantalla que muestra la octava escena: Causal (2)
 Simulación en programa Descartes de elaboración propia

El objetivo de esta escena es guiar al estudiante al través de preguntas sobre conceptos asociados a la Probabilidad Condicional: eventos, independencia y espacio muestral; que son necesarios para contestar correctamente las preguntas de probabilidad que siguen. Una vez que el estudiante contesta correctamente la probabilidad de que la primer bola sacada sea negra, aparece del lado izquierdo una tabla de doble entrada que se va a ir llenando cada casilla con números en color las respuestas correctas a las preguntas de probabilidad hechas al estudiante. Con decimales, distinto color y entre paréntesis las respuestas a cada probabilidad.

³⁹ Esta pantalla muestra la escena completada en su totalidad por el estudiante, la fórmula con respuestas es lo último que aparece. Las respuestas pueden ser digitadas en decimales o en fracción


Causal (3)

Se presenta la misma urna que en Causal (2) como apoyo visual y a un costado la pregunta se tiene que responder en esta escena y que es la que evidencia los sesgos de causación y temporal diacrónico ya que requiere pruebas probabilísticas de razonamiento que es indiferente al orden temporal y donde se debe hacer una inferencia hacia atrás que les causa conflicto.

Teniendo en mente de que se trata de un problema de muestreo sin reemplazo, se le pide al estudiante que responda si cambia el número de eventos asociados al problema y el espacio muestral del mismo, con el propósito que vea que es igual al que acaba de contestar.

Se pone la imagen de la tabla de doble entrada exhibiendo los resultados ya obtenidos en la escena anterior para confirmar que es el mismo problema, si usa su lógica desde aquí podría ver el resultado será igual que la escena anterior.

URNA DE FALK



¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, habiendo extraído una bola negra en segundo lugar $P(N_1 | N_2)$?

$P(N_1 | N_2) = \left(\frac{0.17}{0.5}\right) = 0.34$

¿Cambia el número de eventos? ¿Cambia el espacio muestral?

SI, cambia

NO, es igual ✔ **{NN, NB, BN, BB}**

Analiza la información de la tabla de doble entrada que se generó con las respuestas correctas que diste en el ejercicio para calcular $P(N_2 | N_1)$. Ahora responde las siguientes preguntas:

¿Probabilidad de haber sacado ambas bolas NEGRAS de la urna? ✔

Esa es la $P(N_1 \cap N_2)$

¿Probabilidad TOTAL de sacar en 2° lugar una bola NEGRA? ✔

Exacto es $[P(N_1 \cap N_2) + P(B_1 \cap N_2)] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Observa que para calcular $P(N_1|N_2)$ Se operó PRIMER columna (2 bola) NEGRA Mientras que para calcular $P(N_2|N_1)$ se opera PRIMER renglón (1 bola) NEGRA Entonces como son las probabilidades condicionales $P(N_1 | N_2)$ y $P(N_2 | N_1)$?

IGUALES ✔ DIFERENTES ✔ **¡MUY BIEN, LO TIENES! 🌟**

	2°	●	○	●	○	Total
1°	●	(0.5) × (0.33)	(0.5) × (0.67)	0.5	●	○
○	(0.5) × (0.67)	(0.5) × (0.33)	0.5	●	○	○
Total	0.50	0.50	1	●	○	○

MENÚ CAUSAL (3)
PAUSA

Figura 6. Pantalla que muestra la novena escena: Causal (3)
Simulación en programa Descartes de elaboración propia

La finalidad de ponerle la tabla de doble entrada es que tenga un apoyo que le ayude a contestar las probabilidades que se le preguntan en la escena. La primera probabilidad pedida puede dar directamente el resultado 0.17 o digitar $0.5 \cdot 0.33$ o bien $1/2 \cdot 1/3$

El propósito de darle información adicional al responder las primeras probabilidades es el de reforzar conceptos de independencia y las frecuencias marginales tanto para N1 (primer bola sacada sea negra) que es el primer renglón; como para N2 (segunda bola sacada sea negra) correspondiente a la primer columna.

Dirección General de Bibliotecas UNQ

CAPÍTULO 4. Resultados y Análisis

En este capítulo se describen detalladamente los criterios empleados para el análisis y la interpretación de la información obtenida al aplicar nuestro instrumento de recolección de datos¹. El análisis fue guiado bajo el marco teórico de la TAD, en cada una de las cinco² fases del procedimiento de aplicación ACODESA, con la finalidad de ver la evolución en las producciones de los estudiantes desde la comprensión de los conceptos asociados a la Probabilidad Condicional hasta la solución misma cuando se cometían los sesgos temporal y de causación que tenían por propósito evidenciar las actividades propuestas. Si una vez evidenciado el sesgo en la fase uno, hubo un cambio a través de cada una de las fases de ACODESA y si con ello se logró que el estudiante resolviera correctamente las actividades de Probabilidad Condicional y la correcta aplicación de los conceptos asociados a la misma. Para el análisis se empleó el programa *Stata/IC 13.0 for Windows®*, utilizando los criterios que a continuación se describen.

4.1 Criterios de análisis para el sesgo temporal diacrónico

Las actividades uno y dos fueron elegidas con el propósito de evidenciar el sesgo temporal diacrónico. La actividad uno, problema propuesto por Ojeda (1995)³ sobre la caída de bolas a través de canales, como problema descontextualizado. La actividad dos, la máquina de tornillos, de creación propia con la misma estructura de la actividad uno, pero contextualizado y asignándole valores fijos específicos. Ambas actividades fueron modificadas bajo la TAD con la misma intención en cada uno de los incisos a resolver por el estudiante. Mediante una praxeología se creó una situación $m(\pi, \tau, \theta, \Theta)$ en cada una de las actividades, así como una

¹ Ver Anexo IV

² El desarrollo de las cuatro primeras fases se hizo en conjunto con el profesor titular. La quinta fase la realizó solamente el profesor titular del grupo.

³ Se eligió porque está probado por varias investigaciones que evidencia el sesgo temporal diacrónico que se da cuando la secuencia temporal de los sucesos, no coincide con el orden dado de condicionamiento. El suceso condicionante que es salir por el orificio "R" es posterior en el tiempo al suceso cuya probabilidad se evalúa que es pasar por el canal I.

praxeología dentro del mismo inciso de manera que se manifestara en el inciso **a)** la comprensión del problema (π), en el **b)** las técnicas (τ) y en el **c)** las tecnologías (θ) y al interior de cada inciso se observan también las técnicas, tecnologías y teorías (Θ) (si las hubiera).

El inciso **a)** tiene el propósito de darnos una idea de si el estudiante comprendió el problema, ya que para poder resolverlo debe tener claro los conceptos asociados a la Probabilidad Condicional que aplican a esta actividad como son: experimento, eventos, espacio muestral total y reducido, los cuales si están bien expresados en las producciones de los estudiantes dan mayor posibilidad de que logren una correcta solución de la actividad. El análisis del inciso **a)** se hizo con las siguientes cuatro preguntas que dan una idea de si el estudiante comprende el problema.

a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada	
a1. ¿Identifica eventos?	SI.....1 NO.....0
a2. ¿Cómo los identifica?	No aplica.....0 Manera escrita, sin notación matemática.....1 Notación de conjunto.....2 Diagrama de árbol.....3 Símbolos tipo $E \rightarrow I \rightarrow R$4 R, B.....5
a3. ¿Los identifica todos? (\approx identifica espacio muestral Ω ?)	SI.....1 → PASE A b1 NO.....0
a4. ¿Por qué?	No aplica0 Dejo fuera (II,B).....1 Dejo fuera (II,R).....2 2 opciones: Camino I ó II3 Sale R o sale B.....4

Cuadro 9. Criterios para el análisis del inciso a) actividades uno y dos⁴
Elaboración propia

El inciso **b)** pretende que el estudiante muestre la técnica (τ), es decir la manera en la que resolvió la Probabilidad Condicional pedida, así como una validación de su respuesta. El análisis del inciso **b)**, se llevó a cabo mediante los siguientes siete

⁴ Las codificaciones que se encuentran en las tablas de éste apartado corresponden a las producciones hechas por los estudiantes, lo que se esperaba ver en las producciones de los estudiantes en cada inciso puede verse en la praxeología de las actividades uno y dos. Ver Cuadro 4 págs. 41-43, para la actividad uno y Cuadro 5 págs. 45-47, para actividad 2.

puntos, los cuales pretenden evidenciar si tiene conciencia de que es lo que se le solicita que resuelva y elementos que modifican o determinan su solución.

b) Calcula la probabilidad de qué si la bola sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta	
b1. ¿Identifica que el problema es P (I R)?	SI.....1
	NO.....0
b2. ¿Identifica que hay un segundo experimento al ir por el camino II?	SI.....1
	NO.....0
b3. ¿Uso alguna técnica?	SI.....1
	NO.....0 → PASE A b5
b4. ¿Cuál?	No aplica0
	Fórmula de Probabilidad Condicional.....1
	Proporción.....2
	Mal fórmula Probabilidad Condicional.....3
	Operaciones "raras".....4
b5. ¿Valido su respuesta? ⁵	SI.....1
	NO.....0 → PASE A b7
b6. ¿Aplica bien su validación?	NO.....0
	SI.....1
	No aplica.....2
b7. ¿Da el resultado correcto?	A1=1/2, A2=0.82.....0
	No se puede calcular1
	A1=0.33, A2= 0.18.....2
	A1=0.66 ⁶ , A2=0.85 ⁷3
	Otra respuesta.....4
	No escribe resultado.....5
No contestó nada.....6	

Cuadro 10. Criterios para el análisis del inciso b) actividades uno y dos
Elaboración propia

El punto b7, se registró con el número 3 la respuesta correcta para las actividades uno y dos (0.66 y 0.85, respectivamente) siendo los restantes los sesgos cometidos; donde 0 significa que no toma en cuenta las bolas (tornillos, en la actividad 2) que

⁵ Con respecto a lo que contestó de su técnica

⁶ Respuesta correcta en la actividad 1

⁷ Respuesta correcta en la actividad 2

caen por B; es decir, no tiene en cuenta el condicionamiento de un suceso posterior en el tiempo e implica una correcta restricción del espacio muestral. El número 1 hace referencia que el alumno comete la falacia del eje del tiempo y el número 2 que confunde el suceso condicionante, ya que está calculando la $P(H|R)$. Por último, el inciso **c)** tiene la intención de evidenciar la tecnología (θ); es decir, algún argumento que explique o justifique el procedimiento que empleo al resolver la Probabilidad Condicional pedida. El análisis del inciso **c)** se realizó con los siguientes puntos

c) A1. Bajo las mismas condiciones, si en lugar de una bola se dejan caer 100. ¿el resultado cambia? ¿Por qué?
A2. Bajo las mismas condiciones, si en lugar de 100 tornillos se produjeran 1000. ¿el resultado cambia? ¿Por qué?

c1. ¿Evidencia tecnología?	SI.....1 NO.....0
c2. ¿Aplica bien la tecnología?	SI.....1 NO.....0
c3. ¿Da alguna teoría (θ) ⁸ ?	SI.....1 NO.....0

Cuadro 11. Criterios para el análisis del inciso c) actividades uno y dos
 Elaboración propia

4.2 Criterios de análisis para el sesgo de causación

Las actividades tres y cuatro pretendían evidenciar el sesgo de causación. La tercera actividad se utilizó el problema de la urna planteada por Falk (1986)⁹ como problema descontextualizado; mientras que la cuarta actividad se modificó el problema de Bastias et al. (2017) de la influencia sobre elección de profesión como problema contextualizado social, donde el conocimiento previo puede interferir en el cálculo de las probabilidades. Ambas actividades se modificaron conforme al marco teórico de la TAD y comparten los mismos objetivos en cada uno de los

⁸ Se puso una columna para registrar la Teoría, a sabiendas de que no es común que los estudiantes argumenten formalmente una justificación de la tecnología

⁹ Esta probado que evidencia el sesgo de causación y además el temporal diacrónico a pedir que se calcule $P(N1|N2)$

incisos, con algunas variaciones dadas por la misma naturaleza de las actividades y se pueden apreciar en las tablas cuando se pone A3 o A4 para indicar que esa pregunta aplicó únicamente para la actividad tres o cuatro respectivamente.

En ambas actividades la finalidad del inciso **a)** es ver si el estudiante comprende el problema identificando correctamente los eventos, el concepto de independencia y justificación adecuada de su respuesta; sin embargo, en la tercera actividad debe reconocer que se trata de un muestreo sin reposición, lo que supone una restricción del espacio muestral. El análisis del inciso **a)** se hizo con las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta	
a1. ¿Identifica eventos?	SI.....1 NO.....0
a2. ¿Cómo los identifica?	Manera escrita, sin notación matemática.....1 Diagrama de árbol.....2 Manera escrita, con notación matemática.....3 árbol y escrita con notación matemática4 Deduce directamente.....5 Conjuntos.....6
a3. ¿Los identifica todos? (≈ identifica espacio muestral Ω ?)	SI.....1 → PASE A a5 NO.....0
a4. ¿Porqué?	No aplica0 A4: “No se puede calcular”.....1 A4: “0 no influye un evento sobre el otro”.....2 A3: Deduce directamente.....3 A4: “el padre sea o no ingeniero.....4
a5. A3 ¹⁰ . ¿Identifica se trata de muestreo SIN reposición?	SI.....1 NO.....0
a5. A4. ¿Identifica son eventos independientes?	SI.....1 NO.....0
a6. A3 ¿Identifica el espacio muestral y su afectación por el tipo de muestreo?	SI.....1 NO.....0
a7. ¿Justifica su respuesta?	SI.....1 NO.....0

Cuadro 12. Criterios para el análisis del inciso a) actividades tres y cuatro¹¹

Elaboración propia

Los incisos **b)** y **c)** en ambas actividades tienen la finalidad de que el estudiante muestre la técnica; es decir, la manera en la que resolvió la Probabilidad

¹⁰ A3= Aplica solo en la actividad tres y A4= aplica sólo en la actividad cuatro.

¹¹ Las codificaciones que se encuentran en las tablas de este apartado corresponden a las producciones hechas por los estudiantes, lo que se esperaba ver en las producciones de los estudiantes en cada inciso puede verse en la praxeología de las actividades tres y cuatro. Ver Cuadro 6 págs. 49-51, para la actividad tres y Cuadro 7 págs. 53-55, para actividad cuatro.

Condicional pedida. En la actividad tres en el inciso **b)** se analiza la forma en cómo resolvió la probabilidad de que la segunda bola sea negra, dado que la primera bola fue negra $P(N2|N1)$, donde la inferencia causal es natural y compatible con el eje del tiempo, por lo que se espera pueda resolverla sin problemas. Por otro lado, en la actividad cuatro, el inciso **b)** se le pide calcular la probabilidad de que un joven sea ingeniero dado que su padre es ingeniero, dicho cálculo se ve afectado por la intuición y conocimiento previo de causa de los estudiantes. El análisis del inciso **b)** se llevó a cabo mediante los siguientes nueve puntos que coinciden en ambas actividades excepto en los puntos b2 y b3, por lo que se puso A3 y A4 para distinguir las actividades en esos incisos.

b) A3. Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar (N2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N1). Justifica tu respuesta

A4. Calcula la probabilidad de que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero:

b1. ¿Identifica que es un problema de Probabilidad Condicional?	SI.....1 NO.....0
b2. A3 ¿Reconoce usa muestreo sin reemplazo al resolver?	SI.....1 NO.....0
b2. A4 ¿Evidencia uso de conocimientos previos?	SI.....1 NO.....0
b3. A3 ¿Se le dificulta el cálculo $P(N2 N1)$ cuando la información es causal y compatible con el tiempo?	SI.....1 NO.....0
b3. A4 ¿Usa razonamiento CAUSAL, estimando el efecto dado conocimiento de causas?	SI.....1 NO.....0
b4. ¿Uso alguna técnica?	SI.....1 NO.....0 →

PASE A **b6**

b5. ¿Cuál?	No aplica	0
	A4. Probabilidad Simple.....	1
	Lógica.....	2
	A3. Fórmula Probabilidad Condicional.....	3
	A4. Regla del producto.....	4
	A3. Lógica + P(A B).....	5
	A3. Dibujo eventos+lógica.....	6
	A4. Dibujo eventos + P(A B).....	7
	A4. Diagrama asigna probabilidades.....	8
	A4, "No se puede calcular".....	9
b6. ¿Respuesta correcta?	SI.....	1 → PASE A b8
	NO.....	0
b7. ¿Cuál sesgo cometió?	No aplica	0
	¼.....	1
	A3. 1/6	2
	A4. "No puedo calcular, no datos".....	3
	A4. Eventos independientes.....	4
	A4. No es medible.....	5
	A3. No ve es un muestreo SIN reemplazo.....	6
	A4. No contestó nada.....	7
b8. ¿Justificó su respuesta?	SI.....	1
	NO.....	0
b9. ¿Es correcta su justificación?	SI.....	1
	NO.....	0

Cuadro 13. Criterios para el análisis del inciso b) actividades tres y cuatro
Elaboración propia

En el punto **b7** quedó registrado el sesgo en siete categorías: la categoría **0** indica que el alumno contestó de forma correcta; es decir en la actividad tres (A3) su resultado fue $\frac{1}{3}$ y en la actividad cuatro (A4) su resultado fue $\frac{1}{2}$. La categoría **1** registra cuando en las dos actividades respondieron $\frac{1}{4}$; en el marco de la actividad tres significa que confunde la Probabilidad Condicional y la simple, ya que sólo considera la probabilidad de tener una bola negra en la primera extracción; mientras que en la actividad cuatro es por la forma en la definió los eventos. La categoría **2** registra cuando respondió $\frac{1}{6}$ en la actividad tres y es porque el estudiante confunde la Probabilidad Condicional con la conjunta al aplicar la regla del producto. Las

categorías: **3,4,5,6** y **7** de la actividad cuatro son porque el estudiante no tiene claros los conceptos de probabilidad que están inmersos en la Probabilidad Condicional.

En el inciso **c)** ambas actividades pretenden evidenciar la técnica; así en la actividad tres se analiza la forma en cómo resolvió la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar (N1), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N2) $P(N1|N2)$, que es justo donde suele aparecer el sesgo por requerir de pruebas probabilísticas de razonamiento que es indiferente al orden temporal. En la actividad cuatro muestra también el razonamiento diagnóstico, al estimar la causa dado el conocimiento del efecto la pedirle al estudiante que calcule la probabilidad de que un padre sea ingeniero dado que su hijo es ingeniero. Al igual que en el inciso **b)** solo en dos preguntas no se coincide y se aprecia en la siguiente tabla cuando aparece A3 o A4, significa que esa pregunta aplica solamente a la actividad tres o cuatro respectivamente.

c) A3. Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar (N1), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N2). Justifica tu respuesta A4. Calcula la probabilidad de que un padre sea ingeniero dado que su hijo es ingeniero	
c1. ¿Identifica que es un problema de Probabilidad Condicional?	SI.....1 NO.....0
c2. A3 ¿Reconoce usa muestreo sin reemplazo al resolver?	SI.....1 NO.....0
c2. A4 ¿Evidencia uso de conocimientos previos?	SI.....1 NO.....0
c3. ¿Se le dificulta el cálculo?	SI.....1 NO.....0
c4. A3. ¿Reconoce que hay que hacer una inferencia hacia atrás?	SI.....1 NO.....0
c4. A4 ¿Usa relación Diagnóstica?	SI.....1 NO.....0

c5. ¿Uso alguna técnica?	SI.....1	→ PASE A c7
	NO.....0	
c6. ¿Cuál?	No aplica0	
	A3. Lógica sin fórmulas1	
	A3. P(A B)=#, sin desarrollar.....2	
	A3. Regla del producto.....3	
	A4. Diagrama con probabilidades.....4	
	A4 Probabilidad Simple + Lógica.....7	
	A4. Ing.- Ing. Ing - no, no -Ing.....8	
	A4. Probabilidad Simple.....9	
c7. ¿Respuesta correcta?	SI.....1 →	PASE A c9
	NO.....0	
c8. ¿Cuál sesgo cometió?	No aplica0	
	1/2.....1	
	1/6.....2	
	1/4.....3	
	2/3.....4	
	No contesto.....5	
	“No tengo idea”.....6	
	“No puedo calcular, no hay datos”.....7	
	“No podemos saberlo”.....8	
	“No es medible”.....9	
	“ 0 (cero).....10	
c9. ¿Justificó su respuesta?	SI.....1	→ FIN
	NO.....0	
c10. ¿Es correcta su justificación?	SI.....1	
	NO.....0	

Cuadro 14. Criterios para el análisis del inciso c) actividades tres y cuatro

Elaboración propia

Finalmente, para ambas actividades el inciso **d)** tiene por objetivo evidenciar las tecnologías; es decir, los argumentos que justifican las técnicas o las formas en las que el estudiante resolvió los problemas. En la tabla siguiente se describen a detalle los puntos observados en este inciso, así como las codificaciones asignadas a cada uno para su análisis.

d) Explica ¿Por qué se obtienen esos resultados en los incisos b) y c)?

d1. ¿Evidencia tecnología?	SI.....1
	NO.....0
d2. ¿Aplica bien la tecnología?	SI.....1
	NO.....0
d3. A3. ¿Identifica que se trata del mismo experimento?	SI.....1
	NO.....0
d3. A4. ¿Identifica que b) y c) tienen la misma probabilidad?	SI.....1
	NO.....0
d4. A3. ¿Identifica que tienen el mismo espacio muestral?	SI.....1
	NO.....0
d4. A4. ¿Sesgo?	No.....0
	Sesgo Dx.....2
	Existen 4 combinaciones.....3
	Carezco de información.....4
	No se puede calcular.....5
	Es 0, eventos independientes.....6
	Datos subjetivos.....7
d5. A3. ¿Identifica que son los mismos eventos?	SI.....1
	NO.....0
d6. ¿Da alguna teoría (⊗) ¹² ?	SI.....1
	NO.....0

Cuadro 15. Criterios para el análisis del inciso d) actividades tres y cuatro
Elaboración propia

¹² Se puso una columna para registrar la Teoría, a sabiendas de que no es común que los estudiantes argumenten formalmente una justificación de la tecnología

4.3 Análisis de la Fase 1 ACODESA. Trabajo individual

En esta sección se describen los hallazgos encontrados en el análisis de la Fase 1 del procedimiento de aplicación ACODESA y es a través de sus producciones cognitivas que se recuperan los conocimientos previos del estudiante sobre Probabilidad Condicional¹³, sean correctos o no. Esta fase fue desarrollada con los 24 estudiantes durante 1 hora.

En la Fase 1 se analizan las producciones individuales de los estudiantes de la muestra a la luz del marco teórico de la TAD que nos permite caracterizar la actividad matemática focalizando el ¿qué hacen? y ¿cómo lo hacen? Las tablas detalladas en la sección anterior nos dan un panorama general y descriptivo de sus conocimientos actuales sobre Probabilidad Condicional, así como de las herramientas y conceptos que utilizan al resolver cada una de las actividades y la manera en la que justifican su forma de resolver, en conjunto nos dará una idea de ¿Cómo comprenden la Probabilidad Condicional?

4.3.1 Análisis de las actividades sobre el sesgo temporal diacrónico

Las actividades uno y dos se pusieron con el fin de hacer emerger el sesgo temporal diacrónico que se da cuando el suceso condicionante es posterior en el tiempo al suceso cuya probabilidad se evalúa, lo que suele ocasionar que el estudiante no identifique correctamente el espacio muestral del experimento con lo que acaba dando una respuesta errónea.

El análisis descriptivo de las producciones en ambas actividades bajo el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico resultante se detallan las frecuencias y porcentajes de cada una de las praxeologías de ambas actividades en el cuadro siguiente.

¹³ Como alumnos repetidores de la materia de probabilidad y estadística de cuarto semestre de la carrera de Actuaría, diez estudiantes de la muestra tenían un año de que habían cursado dicha materia en la que visto el tema de Probabilidad Condicional.

ANÁLISIS PRAXEOLÓGICO DE LAS ACTIVIDADES EVIDENCIAN SESGO TEMPORAL DIACRÓNICO					
FASE 1 ACODESA					
Criterios análisis e interpretación		ACTIVIDAD			
		UNO Descontextualizada n, (%)	DOS Contextualizada n, (%)		
a) Comprensión del problema (π)	a1. ¿Identifica eventos?	Si	9, (81.82%)	11, (100%)	
	a2. ¿Cómo los identifica?	No aplica	2, (18.18%)	8, (72.73%)	
		Escrita	6, (54.55%)		
		Árbol	1, (9.09%)		
		$E \rightarrow I \rightarrow R$	2, (18.18%)		
		R, B		2, (18.18%)	1, (9.09%)
	a3. ¿Identifica todos?	Si	5, (45.45%)	9, (81.82%)	
	a4. ¿Por qué?	NA	5, (45.45%)	9, (81.82%)	
		Faltó (II,B)	2, (18.18%)	2, (18.18%)	
		Faltó (II,R)	1, (9.09%)		
Fue I ó II		2, (18.18%)			
Salió R, B		1, (9.09%)			
b) Técnica (τ)	b1. ¿Identifica problema P (I R)?	Si	5, (45.45%)	3, (27.27%)	
	b2. ¿Identifica 2 experimentos?	Si	4, (36.36%)	3, (27.27%)	
	b3. ¿Usa técnica?	Si	5, (45.45%)	10, (90.91%)	
	b4. ¿Cuál?	NA	6, (54.55%)	3, (27.27%)	
		Fórmula	5, (45.45%)	6, (54.55%)	
		Proporción		1, (9.09%)	
		Fórmula Inv		1, (9.09%)	
		Op. "raras" §		1, (9.09%)	
	b5. ¿Valida su respuesta?	Si	7, (63.64%)	9, (81.82%)	
	b6. ¿Aplica bien validación?	Si	2, (18.18%)	1, (9.09%)	
b7. ¿Respuesta es correcta?	Sesgo	8, (72.73%)	6, (54.55%)		
	Correcto		2, (18.18%)		
	Otra	3, (27.27%)	1, (9.09%)		
	No resultado		2, (18.18%)		
c) Tecnología (θ)	c1. ¿Evidencia?	Si	11, (100%)	11, (100%)	
	c2. ¿Aplica correctamente?	Si	7, (63.64%)	8, (72.73%)	

Cuadro 16. Análisis praxeológico de producciones en las actividades que evidencian sesgo temporal diacrónico. Fase 1.

Elaboración propia

§No usa técnica, hace operaciones "raras"

**Solo un estudiante evidencia la teoría en ambas actividades donde dice que el resultado no cambia por ser eventos independientes

El cuadro anterior nos da una visión general de las producciones de los estudiantes; les es más fácil identificar eventos¹⁴ e identificarlos todos en problemas contextualizados cuando se tienen datos específicos y el azar no está presente. A pesar de ser alumnos de actuaría que suelen hacer uso de simbología y notación matemática por la formación misma de la carrera, la mayoría de ellos identifica los eventos en forma escrita sin ninguna notación simbólica matemática: 6 estudiantes (E01, E02, E06, E11, E13 y E14) en la actividad 1 y 8 estudiantes (E01, E03, E04, E06, E07, E11, E13 y E14) en la actividad 2 o contextualizada. En la actividad 1, dos estudiantes (E04 y E15) identifican los eventos en más de una forma¹³.

ACTIVIDAD 1

a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada

No identifica eventos: **E07**

- o Que tome el camino I
- o Que tome el camino II

Identifican eventos en más de una forma: **E04**

Figura 7. Producciones de alumnos que no identifican eventos o los identifican en más de una forma. Fase 1 Elaboración propia

En la Actividad 1, los estudiantes (E04, E06, E11, E13 y E15) logran identificar todos los eventos, e identificar que se trata de un problema de Probabilidad Condicional; sin embargo, a la hora de resolver “no conectan la idea” ya que hacen una incorrecta restricción del espacio muestral y al momento de calcular no toman en cuenta las

¹⁴ Ver Figura 7

bolas que caen por B. No se tiene en cuenta el condicionamiento por un suceso posterior, como el estudiante E11 que obtiene por resultado 0.5 al igual que otras investigaciones (Contreras et al., 2012; Estrada et al., 2006). En ambas actividades un mismo estudiante (E04) identifica como problema de Probabilidad Condicional dado que escribe la fórmula, pero no resuelve¹⁵. En la actividad 2, fueron dos estudiantes (E11 y E15) que identifican todos los eventos, usan la fórmula de Probabilidad Condicional y aunque no desarrollan la fórmula, si resuelven correctamente como se muestra en la siguiente figura.

ACTIVIDAD 1

b) Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta

E04

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(I|R)$

ACTIVIDAD 2

b) Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta

E15

R recibe 96 tornillos

82 → Vienen de I

14 → Vienen de II

100% = 96

85.41% = 82 → Tornillos hechos de I

$P[I|I] = 85.41\%$

Figura 8. Producciones que identifican es un problema de Probabilidad Condicional en actividades 1 y 2. F1 Elaboración propia

Haciendo un análisis bivariado con el fin de saber las intersecciones de las variables analizadas, en la actividad 1 solo hay 5 estudiantes (E04, E06, E11, E13 y E15) que utilizan alguna técnica para resolver el problema y es la fórmula de Probabilidad Condicional¹⁶; mientras que en la actividad 2, sólo la aplican 3 estudiantes (E04, E11 y E15) y un estudiante la escribe al revés (E06). En esta actividad contextualizada, los estudiantes al tener datos precisos usan alguna otra

¹⁵ Ver figura 8. Primera fila de ambas actividades.

¹⁶ Ver figura 8

herramienta al tratar de resolver, como proporción (E01, E02, E03, E07, E10 y E14) y hace operaciones raras un estudiante (E13), como lo evidencia la siguiente figura.

E01

$\frac{82}{100} = 0.82$ → porque sólo 82 tornillos de 100 pueden pasar por el canal I por ser perfectos

E14

Si en 100 tornillos y caen 82 = $\frac{82}{100} = .82$
si lo hacemos calculando su resultado caen 82% de tornillos
La probabilidad es de 50% o .5 o 1/2

Figura 9. Producciones usan otras herramientas para resolver. Actividad 2. Fase 1
Elaboración propia

En cuanto a la identificación de eventos y el uso de alguna técnica para resolver el problema, se aprecia que el hecho de identificar todos si no se conoce alguna técnica para calcular no les ayuda a resolver correctamente cayendo en el sesgo (E02, E07 y E13). Se aprecia de nuevo que los estudiantes que no identifican todos los eventos (E01 y E03) dejan fuera (II, B) cayendo en un sesgo dando por resultado 0.82 o 82% pues no toman en cuenta los que caen por B, lo que indica una incorrecta reducción del espacio muestral y conlleva a una incorrecta solución.

Actividad 2

Identifican todos eventos, no usan técnica

E13

a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada

- que los tornillos no tengan imperfecciones → R.
- que tengan imperfecciones pero pequeñas y vayan a R.
- que los tornillos estén defectuosos y vayan a B.

b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal "I".
Valida tu respuesta.

$\frac{1}{2} \cdot 14 = .07 + .82 = .89$

No identifican todos eventos, si usan técnica E03

a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada

- Están los perfectos que pasan por la banda I y van a la R
- Están los defectuosos que pasan por la banda II y van a la R

b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal "I".
Valida tu respuesta.

$\frac{82}{100}$ porque el mismo texto lo dice.

Figura 10. Producciones de identificación de eventos & técnicas para resolver. Fase 1
Elaboración propia

En ambas actividades se detectaron estudiantes que caen en sesgo debido a que presentaron dificultad para realizar el proceso de reducción del espacio muestral al no considerar la cantidad de canicas o tornillos que salen por la opción B; de tal manera que, del total de participantes, en la actividad 1, 8 estudiantes (E01, E02, E03, E06, E07, E10, E11 y E14)¹⁷ presentaron el sesgo al responder 0.5, mientras que en la actividad 2, 6 estudiantes (E01, E02, E03, E07, E10 y E14) respondieron 0.82.

Con respecto a sesgo temporal diacrónico en la actividad 1, se encontró que este sesgo también fue reportado por Díaz et al. (2012). Estos investigadores aplicaron

¹⁷ Importante los estudiantes E01, E02, E03, E07 y E10 son integrantes del equipo 1 en la Fase 2; los estudiantes E04 y E06 son dos integrantes del equipo 2 y por último, los estudiantes E11 y E14 son integrantes del equipo 3.

una actividad similar a futuros profesores de matemáticas, pero a diferencia de esta en nuestra investigación no se obtuvo ningún resultado correcto.

En cuanto al uso de la tecnología (θ), que bajo la TAD permite observar cuando el estudiante da argumentos que explican o justifican los procedimientos que empleo al resolver los problemas, de manera general todos los estudiantes evidencian tecnología en ambas actividades; pero sólo 7 estudiantes (E01, E02, E03, E10, E11, E14 y E15) lo hacen correctamente en la actividad 1; mientras que 8 estudiantes (E01, E03, E04, E06, E11, E13, E14 y E15) lo hacen correctamente en la actividad 2.

Actividad 1	
c) Bajo las mismas condiciones, si en lugar de una bola se dejan caer 100 ¿el resultado cambia? ¿por qué?	
E13	Considero que si cambia, al final es probabilidad, por consiguiente es impreciso.
Actividad 2	
E07	Sí, porque la probabilidad de que salgan más defectuosos cambia con el número de tornillos.

Figura 11. Tecnología mal aplicada en producciones de ambas actividades. Fase 1.
Elaboración propia

Ningún estudiante logró contestar correctamente la actividad 1, se obtuvo que 8 de ellos (E01, E02, E03, E06, E07, E10, E11 y E14) cometieron el sesgo que se esperaba evidenciar con la actividad de Ojeda al poner por respuesta 0.5 que indica una incorrecta restricción del espacio muestral y 3 estudiantes (E04, E13 y E15) pusieron otra respuesta.

La actividad 2 de la máquina de tornillos, donde hay datos fijos y el azar no está presente, dos estudiantes (E11 y E15) responden correctamente y fueron las más destacadas producciones en esta primera fase; aunque está mal expresada la Probabilidad Condicional, debiera ser $P(I|R)$ como se aprecia en la siguiente figura.

Actividad 2

E15

Ahora contesta lo que se te pide:

a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada

82T → I → R
 18T → II → 4T → B
 14T → R

b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal "I".
 Valida tu respuesta.

R recibe 96 tornillos → 82 → Vienen de I
 → 14 → Vienen de II

100% = 96
 85.41% = 82 → Tornillos fabricados de I

$P[I|I] = 85.41\%$

c) Bajo las mismas condiciones, si en lugar de 100 tornillos se produjeran 1000 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?

Si entonces 82 aumenta 820
 14 a 140
 4 a 40

Entonces se mantendrá la misma probabilidad

Figura 12. Producción sobresaliente en la actividad 2. Fase 1
 Elaboración propia

En ambas actividades sólo el estudiante E11 refiere algo de teoría, al responder al inciso c) que “no, porque cada evento es independiente” en la actividad 1 y similar respondió en la actividad 2 como se aprecia en la producción izquierda de la figura 12.

4.3.2 Análisis de las actividades sobre el sesgo de causación

La finalidad de las actividades tres y cuatro fue evidenciar el sesgo de causalidad que se da cuando el estudiante se deja llevar por un razonamiento causal estimando el efecto dado cierto conocimiento de las causas, incisos b) de ambas actividades; mientras que en los incisos c) es una relación diagnóstica, al estimar la causa dado el conocimiento del efecto.

En el análisis descriptivo de las producciones en ambas actividades bajo el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico resultante, se detallan las frecuencias y porcentajes de cada una de las praxeologías de ambas actividades en el cuadro siguiente.

ANÁLISIS PRAXEOLÓGICO DE LAS ACTIVIDADES EVIDENCIAN SESGO DE CAUSACION			
FASE 1 ACODESA			
Criterios análisis e interpretación		ACTIVIDAD	
		TRES Descontextualizada n, (%)	CUATRO Contextualizada n, (%)
a1. ¿Identifica eventos?	Si	10, (90.91%)	9, (81.82%)
a2. ¿Cómo los identifica?	Escrita Sin Mat Escrita Con Mat Árbol y escrita Deduce No aplica	7, (63.64%) 2, (18.18%) 1, (9.09%) 1, (9.09%)	9, (81.82%) 2, (18.18%)
a3. ¿Identifica todos?	Si	10, (90.91%)	9, (81.82%)
a4. ¿Por qué?	No aplica No puede calcular P=0, Son Independientes Deduce directamente	10, (90.91%) 1, (9.09%)	9, (81.82%) 1, (9.09%) 1, (9.09%)
a5. A3 ¿Identifica se trata de un muestreo sin reposición?	Si	10, (90.91%)	
a5. A4 ¿Identifica son eventos independientes?	Si		9, (81.82%)
a6. A3 ¿Identifica espacio muestral se afecta por tipo de muestreo?	Si	10, (90.91%)	No aplica
a7. ¿Justifica su respuesta?	Si	9, (81.82%)	7, (63.64%)
b) b1. ¿Identifica problema P (N2 N1)?	Si	6, (54.55%)	2, (18.18%)

	b2. A3 ¿Reconoce usa muestreo sin reemplazo al resolver?	Si	10, (90.91%)	
	b2. A4 ¿Evidencia uso de conocimientos previos al calcular $P(\text{Joven ing.} \text{Padre ing.})$	Si		5, (45.45%)
	b3. A3 ¿Dificulta calcular $P(N2 N1)$?	Si	3, (27.27%)	
	b3. A4 ¿Usa razonamiento Causal, estimando el efecto dado conocimiento de causa?	Si		1, (9.09%)
	b4. ¿Usa técnica?	Si	11, (100%)	7, (63.64%)
	b5. ¿Cuál?	No aplica		2, (18.18%)
		Lógica	6, (54.55%)	2, (18.18%)
		Fórmula $P(A B)$	1, (9.09%)	
		Regla producto	1, (9.09%)	
		Lógica + $P(A B)$	2, (18.18%)	
		Dibujo eventos+lógica	1, (9.09%)	
		Probabilidad simple		2, (18.18%)
		Dibujo eventos+ $P(A B)$		2, (18.18%)
		Diagrama asigna prob		1, (9.09%)
		“No se puede calcular”		2, (18.18%)
	b6. ¿Respuesta correcta?	Si	8, (72.73%)	6, (54.55%)
	b7. Sesgo	No aplica	8, (72.73%)	6, (54.55%)
		1/4	1, (9.09%)	1, (9.09%)
		1/6	2, (18.18%)	
		“No se puede calcular”		2, (18.18%)
		eventos independientes		1, (9.09%)
		No es medible		1, (9.09%)
	b8. ¿Justifica su respuesta?	Si	6, (54.55%)	9, (81.82%)
	b9. ¿Es correcta su justificación?	Si	5, (45.45%)	5, (45.45%)
	c1. ¿Identifica problema $P(N1 N2)$?	Si	5, (45.45%)	2, (18.18%)
	c2. A3 ¿Reconoce muestreo sin reemplazo?	Si	4, (36.36%)	
c)Técnica (τ)	c2.A4 ¿Evidencia uso de conocimientos previos al calcular $P(\text{Padre ing.} \text{Joven ing.})$	Si		4, (36.36%)
	c3 ¿Dificulta calcular $P(N1 N2)$ o $P(\text{Padre ing.} \text{Joven ing.})$?	Si	9, (81.82%)	6, (54.55%)

d) Tecnología (θ)	c4. A3 ¿Reconoce sesgo?	NO	11, (100%)	
	c4. A4 ¿Usa relación diagnóstica?			11, (100%)
	c5. ¿Usa técnica?	Si	10, (90.91%)	6, (54.55%)
	c6. ¿Cuál?	No aplica	1, (9.09%)	5, (45.45%)
		Lógica	7, (63.64%)	
		Fórmula P(A B)	2, (18.18%)	
		Regla producto	1, (9.09%)	
		Diagrama asigna prob		1, (9.09%)
		Probabilidad simple+Lógica		2, (18.18%)
	c7. ¿Respuesta correcta?	Si	1, (9.09%)	1, (9.09%)
				2, (18.18%)
	c8. Sesgo	No aplica	1, (9.09%)	5, (45.45%)
		1/2	5, (45.45%)	
		1/6	1, (9.09%)	
		1/4	2, (18.18%)	1, (9.09%)
		2/3	1, (9.09%)	
		No contesto	1, (9.09%)	
		“No tengo idea”		2, (18.18%)
		No puedo calcular, no datos		2, (18.18%)
	No es medible		1, (9.09%)	
c9. ¿Justifica su respuesta?	Si	9, (81.82%)	10, (90.91%)	
c10. ¿Es correcta su justificación?	Si	5, (45.45%)	4, (36.36%)	
d1. ¿Evidencia Tecnología?	Si	9, (81.82%)	10, (90.91%)	
d2. ¿Aplica correctamente?	Si	3, (27.27%)	5, (45.45%)	
d3 A3. ¿Identifica que se trata del mismo experimento?	Si	9, (81.82%)		
d3.A4. ¿Identifica que b) y c) tienen la misma probabilidad?			7, (63.64%)	
d4.A3 ¿Identifica que es el mismo espacio muestral?	Si	9, (81.82%)		
d4.A4 Sesgo	No		4, (36.36%)	
	Sesgo Diagnóstico		1, (9.09%)	
	Pone 4 combinaciones		1, (9.09%)	
	“Carezco información”		2, (18.18%)	
	“No se puede calcular”		2, (18.18%)	
0, eventos independientes		1, (9.09%)		
d5.A3 ¿Identifica que son los mismos eventos?	Si	9, (81.82%)		

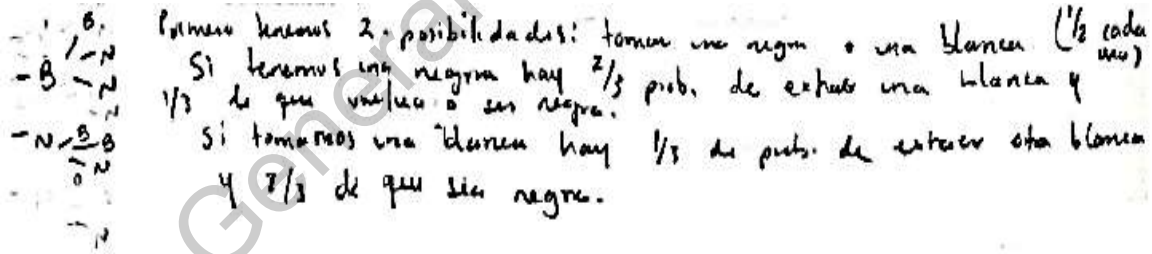
Cuadro 17. Análisis praxeológico de producciones en las actividades que evidencian sesgo causal fase 1. Elaboración propia

El cuadro anterior nos da una visión general de las producciones de los estudiantes. En la comprensión del problema, no hay mucha diferencia entre las dos actividades en la identificación de eventos y de que los identifique todos; pero si les fue más fácil hacerlo en el problema descontextualizado correspondiente a las urnas de Falk, que en la actividad 4 del padre ingeniero & hijo ingeniero donde no hay ningún dato numérico a priori asociado a cada una de las probabilidades pedidas. Al igual que en las primeras dos actividades, la manera en que más frecuentemente identifica los eventos es de forma escrita sin simbología matemática, pero a diferencia de las actividades 1 y 2, es en la actividad descontextualizada de las urnas de Falk donde ocupa otras herramientas al identificarlos¹⁸; mientras que en la actividad 4 del padre ingeniero & hijo ingeniero el hecho de no tener información les lleva a escribir que “no se puede calcular” , “ \emptyset no influye un evento sobre el otro” como se aprecia en la siguiente figura.

Actividad 3 (□)

a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta

E04



Actividad 4 (○)

E14

\emptyset No influye un evento sobre el otro

Figura 13. Otras formas de identificar eventos (□) y cuando no identifica todos o no identifica (○)
Elaboración propia

Se puede observar que diez estudiantes (E01, E03, E04, E06, E07, E10, E11, E13, E14 y E15) no tienen problema en identificar que se trata de un muestreo sin

¹⁸ Ver figura 12

reposición y que el espacio muestral se ve afectado por el mismo en la actividad 3 de las urnas de Falk. La actividad 4 sobre ingenieros 9 estudiantes (E01, E02, E03, E04, E06, E07, E11, E14 y E15) identifican que son eventos independientes. La justificación de los eventos que señalan es menor en la actividad 4 contextualizada dónde sólo 7 estudiantes (E03, E04, E06, E10, E11, E13 y E14) los justifica.

En los incisos **b)** de ambas actividades se espera que los estudiantes muestren las técnicas (τ) que emplean al resolver. En la actividad 3 de las urnas de Falk, se pide al estudiante calcular $P(N2|N1)$ ¹⁹, donde la inferencia causal es natural y compatible con el eje del tiempo y el estudiante suele calcular dicha probabilidad sin dificultad; mientras que en la actividad 4 de los ingenieros $P(\text{Hijo ingeniero} | \text{Padre ingeniero})$ es para evidenciar el razonamiento causal estimando el efecto dado cierto conocimiento de las causas.

La proporción de los estudiantes que sí identifican que se trata de un problema de Probabilidad Condicional les fue más fácil de reconocer en la actividad 3 de las urnas, que es descontextualizada, que en la actividad 4 de los ingenieros; sin embargo, no cambia mucho respecto a las actividades 1 y 2 que evidencian el sesgo temporal diacrónico. En cuanto al uso de alguna técnica para resolver, en la actividad 3 del problema de la urna es el 100%; mientras que en la actividad 1 solo fueron 5 estudiantes (E04, E06, E11, E13 y E15) que si usaron alguna técnica al resolver. En las actividades contextualizadas 2 y 4 no cambia mucho el número de alumnos que usan alguna técnica.

En la actividad 3, son 10 estudiantes (todos, excepto E02) que reconocen que la actividad tiene implícito el muestreo sin reemplazo. En la actividad 4, son 5 estudiantes (E01, E06, E11, E13 y E15) que hace uso de conocimientos previos para calcular.

Al hacer un cruce de variables para encontrar los casos en que identifica o no que se trata de un problema de Probabilidad Condicional vs si se le dificulta su cálculo (en la actividad 3) ó vs usa razonamiento causal en la actividad 4, se encontró que

¹⁹ Probabilidad de extraer una segunda bola negra dado que la primera bola fue negra.

sólo el estudiante E01, que no identificó que era problema de Probabilidad Condicional y uso razonamiento causal, resuelve correctamente como se aprecia en la actividad 4 de la siguiente figura.

Actividad 3

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta.

E02

negra }
 negra }
 negra }
 negra }

 $\frac{1}{2}$

 negra - $\frac{3}{4}$
 blanca
 blanca . 3

 proba: $\frac{1}{6}$

Actividad 4

E01

50% porque son dos posiciones casu.

Figura 14. Identifica o no problema Probabilidad Condicional & dificultad al calcular.
Elaboración propia

Todos los estudiantes usaron alguna técnica al calcular la actividad 3 de las urnas de Falk; mientras que 7 estudiantes (E01, E02, E04, E06, E11, E13 y E15) las usaron en la actividad 4 de los ingenieros. Haciendo un cruce de variables para ver si el usar alguna técnica le ayuda a resolver correctamente, en la actividad 3 se observa que de los 11 estudiantes que conforman la muestra, sólo 8 de ellos (E01, E03, E04, E06, E07, E10, E11 y E13) respondieron correctamente $P(N_2|N_1)=1/3$, cuando el suceso condicionante antecede al condicionado. Este sesgo también fue reportado por Contreras et al. (2012). Estos investigadores aplicaron la misma actividad en un ítem donde preguntaban sobre la misma probabilidad de la urna de Falk $P(N_2|N_1)$ en una muestra de 95 futuros profesores de Matemáticas y obtuvieron resultados similares en proporción, pero a diferencia de esta en nuestra investigación nadie puso por resultado $\frac{1}{2}$ y todos contestaron.

Los restantes 3 estudiantes (E02, E14 y E15) evidenciaron un sesgo: 1 estudiante (E15) confunde la Probabilidad Condicional con la simple y los otros 2 estudiantes

(E02 y E14) confunden la Probabilidad Condicional con la conjunta, ya que aplican la regla del producto.²⁰

En la actividad 4, de los ingenieros, 6 estudiantes (E01, E04, E06, E11, E13 y E15) respondieron correctamente la $P(\text{Hijo ingeniero} | \text{padre ingeniero})=0.5$ al usar alguna técnica para resolver, se encontró que este sesgo causal también fue reportado por Bastias et al. (2017). Estos investigadores aplicaron la misma actividad en 118 profesores de matemáticas de los cuales 44 contestaron 0.5, pero a diferencia de esta nuestra investigación fueron 6 estudiantes de 11 los que respondieron 0.5, coincidiendo más con la investigación de Pollatsek et al. (1987) que indican que la mayoría de los sujetos de estudio encuentran altamente probable esa situación evidenciando así el sesgo de causación.

(37.3%). Un estudiante (E02) respondió $\frac{1}{4}$ por la forma en la que definió los eventos; mientras que los 4 estudiantes restantes (E03, E07, E10 y E14) no usaron ninguna técnica para resolver y solo justifican “no puedo”, “eventos independientes” o que “no es medible”. Como se aprecia en la siguiente figura.

Actividad 3

b) calcula la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta.

E15

Evento 1 + Evento 2 + Evento 3 + Evento 4 = 1
por lo que la probabilidad de cada evento es = 0.25
En este caso el evento 1 es el solicitado
por lo tanto la respuesta es 0.25

Actividad 4

E03

No puedo calcularla, no conozco datos.

Figura 15. Uso de técnicas & sesgos
Elaboración propia

²⁰ Ver figura 14

En los incisos **c)** de ambas actividades se espera que los estudiantes muestren las técnicas (τ) que emplean al resolver; en la actividad 3 de las urnas de Falk se pide al estudiante calcular $P(N1|N2)$ ²¹, donde se ha invertido el orden de la condición para evaluar la falacia del eje del tiempo y requiere un razonamiento probabilístico que es indiferente al orden temporal y el hacer esa inferencia hacia atrás le causa conflicto y se evidencia el sesgo temporal diacrónico; mientras que en la actividad 4 de los ingenieros $P(\text{Padre ingeniero} | \text{Hijo ingeniero})$ se evidencia el sesgo diagnóstico, al estimar una causa dado el conocimiento del efecto.

Se observa que en la actividad 3 inciso c) de las urnas de Falk como problema descontextualizado, caen en el sesgo 9 estudiantes (E01, E02, E03, E06, E07, E10, E11, E14 y E15), 1 estudiante (E04) no contesta y sólo 1 estudiante (E13) responde en forma correcta. Los investigadores Díaz et al. (2012) también reportaron ese sesgo en la misma actividad aplicada a futuros profesores de matemáticas, pero a diferencia de esta en nuestra investigación sólo un estudiante de once responde acertadamente y ellos fueron 22 de 95. En nuestra investigación fueron 6 alumnos de once que no comprendieron que se puede condicionar un suceso con otro que ocurra posteriormente, al contestar $\frac{1}{2}$ en dicha producción y en la de Díaz solo 32 de 95 futuros profesores de matemáticas pusieron $\frac{1}{2}$ por resultado.

En la actividad 4, de los ingenieros, no hay mucha diferencia entre los resultados en b) y c) y son 5 estudiantes (E04, E06, E11, E13 y E15) los que contestan correctamente. Dicho problema puede ser comparable con el de que una madre tenga los ojos azules, dado que su hija tiene los ojos azules (efecto diagnóstico), se encontró que este sesgo también fue reportado en Bastias et al. (2017) que aplicaron a futuros profesores de matemáticas, pero a diferencia de esta en nuestra investigación obtuvimos respuestas como: “no puedo calcular, no hay datos” y “no tengo idea”. En ese artículo 48 de 118 futuros profesores respondieron $\frac{1}{2}$ a la probabilidad pedida y en nuestra investigación fueron 5 de 11 estudiantes los que respondieron $\frac{1}{2}$. 1 estudiante (E02) pone por resultado $\frac{1}{4}$ por la forma en la que

²¹ Probabilidad de extraer la primera bola negra dado que la segunda bola extraída fue negra.

define los eventos y 5 estudiantes (E01, E03, E07, E10 y E14) refieren: “No tengo idea” y “no se puede calcular, no hay datos” como lo muestra la siguiente figura.

Actividad 3

c) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar (N_1), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N_2). Justifica tu respuesta.

E14

$\frac{1}{2}$ en primer lugar N_1 $\frac{1}{2}$ en segundo lugar N_2
Porque el segundo lugar no afecta el resultado del primero.

Actividad 4

E07

No sé, no conozco los datos.

Figura 16. Sesgos F1. Actividades 3 y 4 por confusión de conceptos asociados a Probabilidad condicional
Elaboración propia

La producción del estudiante²² E14 en la actividad 3 estuvo muy rara, porque en la comprensión del problema resuelve correctamente $P(N_2|N_1)$ usando la lógica como técnica; sin embargo, en el inciso donde debió resolver dicha probabilidad confunde la Probabilidad Condicional con la conjunta al aplicar la regla del producto; el mismo estudiante E14 tiene una inadecuada producción en la actividad 4.

²² El mismo estudiante resuelve también de forma incorrecta las actividades 1 y 2 que evidencian el sesgo temporal diacrónico

Actividad 3

E14

- a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, Justifica tu respuesta

En el primer saque tenemos un 50% de prob de sacar negra o blanca, en el segundo dado que sacamos negra tenemos $\frac{1}{3}$ de sacar negra de nuevo o $\frac{2}{3}$ de sacar blanca y es análogo si sacamos blanca

- b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

- c) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar (N_1), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N_2). Justifica tu respuesta.

$\frac{1}{2}$ en primer lugar N_1 $\frac{1}{2}$ en segundo lugar N_2
Porque el segundo lugar no altera el resultado del primero

- d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en b) y c)?

Porque si sacamos una bola negra primero, para el segundo saque solo queda una bola y no dos como al principio, sin embargo si quedan dos blancas.

Figura 17. Sesgos en actividades 3. F 1
Elaboración propia

Fueron dos los estudiantes (E02 y E14) que tuvieron las producciones más deficientes, donde respondieron de manera incorrecta los incisos b) y c) de ambas actividades

Actividad 3

E02

a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta
Tienes $\frac{1}{2}$ de proba de sacar negra o blanca
La proba de sacar una de cada color es 50
cada bola tiene 25% de salir

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta.

negra $\frac{1}{2}$ negra $\frac{3}{4}$ Proba: $\frac{1}{6}$
negra blanca
negra blanca
negra blanca

c) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar (N_1), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N_2). Justifica tu respuesta.

0.25, por que si las bolas primera están todas

d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en b) y c)?

por que en el b) o para la segunda solo estan 3 bolas
y c) estan las 4

Actividad 4

E14

a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta

\emptyset No influye un evento sobre el otro

b) Calcula la probabilidad de que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero:

\emptyset No influye un evento sobre el otro

c) Calcula la probabilidad de que un padre sea ingeniero dado que su hijo es ingeniero:

\emptyset no influye un evento sobre el otro

d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en los incisos b) y c)?

Es \emptyset porque no influye en la probabilidad que su padre sea ingeniero entonces dado que pasa lo primero o lo segundo hay probabilidad \emptyset

Figura 18. Producciones más deficientes de actividades 3 y 4. F 1
Elaboración propia

Realizando un cruce de variables para ver los desempeños sobresalientes como aquellos estudiantes que contestaron correctamente los incisos b) y c) que muestran las técnicas en ambas actividades, solo un estudiante (E13) respondió bien ambos incisos en ambas actividades, con lo que se refuerza que los problemas descontextualizados son más difíciles de responder correctamente. Para la actividad 4, fueron 5 estudiantes (E04, E06, E11, E13 y E15) respondieron bien ambos incisos. Se eligieron las dos producciones más sobresalientes (E04 y E13) y se muestran en la siguiente figura.

Actividad 3

E13

a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta

• Al extraer la primera bola sea blanca o negra, la segunda bola - también puede ser blanca o negra (con diferente probabilidad puesto que no se devuelve la primera).

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta.

1. $\frac{0}{2} = 0.5$ de extraer bola negra.

2. $\frac{0}{3} = \frac{1}{3} = 0.33$ al ya no haber una bola negra.
(No lo justifico porque no estoy seguro.)

c) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar (N_1), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N_2). Justifica tu respuesta.

Se comporta de la misma manera al caso b).

d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en b) y c)?

Se obtienen debido a que la bola no se devuelve y las probabilidades cambian.

Figura 19. Producción más sobresaliente de actividad 3. F 1
Elaboración propia

De los dos estudiantes (E11 y E15) que resolvieron de forma correcta la actividad 2 de la máquina de tornillos como contextualizada, su producción muestra que identificaron: todos los eventos (el espacio muestral), se trataba de un problema de

Probabilidad Condicional, hay un segundo experimento; la técnica usada para resolver fue la fórmula de Probabilidad Condicional y validaron su respuesta en forma correcta. Uno de estos estudiantes (E15) también respondió en forma correcta la actividad 4 en ambos incisos; es decir b) $P(\text{Hijo ingeniero} \mid \text{Padre ingeniero})$ y c) $P(\text{Padre ingeniero} \mid \text{Hijo ingeniero})$ y su producción muestra que identifica todos los eventos y por tanto el espacio muestral, no reconoce es un problema de Probabilidad Condicional, hace evidencia de uso de conocimientos previos, no se le dificultó el cálculo, en b) no usa razonamiento causal y en c) no usa relación diagnóstica, uso como técnica la probabilidad simple, dio la respuesta correcta pero no justificó su respuesta en b) y si lo hizo en c) pero de manera incorrecta.

Respecto a las tecnologías (θ), que son los argumentos que explican o justifican los procedimientos empleados al resolver las actividades, se encontró que en la actividad de la urna, 3 estudiantes (E11, E13 y E14) si evidenciaron tecnología y la aplicaron bien de acuerdo con lo que contestaron; pero solo 1 estudiante (E13) tuvo ambos incisos correctos.

En la actividad del ingeniero, fueron 5 estudiantes (E01, E04, E06, E13 y E15) los que evidenciaron y aplicaron bien la tecnología dependiendo de lo que contestaron; sin embargo, solo 4 estudiantes (E04, E06, E13 y E15) contestaron correctamente los incisos b) y c) donde se presenta la técnica.²³

Los 3 estudiantes (E11, E13 y E14) de la actividad 3 que evidenciaron y aplicaron bien la tecnología; también identificaron se trataba del mismo experimento, del mismo espacio muestral en ambos incisos donde se muestra la técnica y que eran los mismos eventos. En la Actividad 4, son 4 estudiantes (E04, E06, E13 y E15) que además de evidenciar y aplicar correctamente la tecnología identifican que los incisos b) y c) donde se evidencia la técnica tienen la misma probabilidad y los respondieron correctamente sin cometer ningún sesgo. Hubo 1 estudiante (E01)

²³ Ver Figura 20

que evidencia y aplica correctamente la tecnología, pero no identifica que b) y c) tienen la misma probabilidad cometiendo el sesgo diagnóstico.

Referente a la teoría (©), que es discurso que justifica y explica la tecnología, ningún estudiante la evidencia en las actividades 3 y 4.

Actividad 3

d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en los incisos b) y c)?

E13

Se obtienen debido a que la bola no se devuelve y las probabilidades cambian.

Actividad 4

E15

Realmente due de las respuestas puesto que no crea posible determinar las probabilidades con tan poca información sin embargo de dan los mismos resultados dado que solo hay 2 opciones como

Figura 20. Tecnologías bien aplicadas en actividades 3 y 4 correctamente resueltas
Elaboración propia

4.4 Análisis de la Fase 2 ACODESA. Trabajo en equipos

En esta sección se describen los resultados encontrados en el análisis de la Fase 2 del procedimiento de aplicación ACODESA mediante las producciones cognitivas sobre las mismas actividades, pero ahora resueltas en equipo. Se espera un refinamiento de sus respuestas a partir de los procesos de argumentación y validación al ser enriquecidos al debatir entre los integrantes del equipo el cómo y porqué resolvieron de cierta manera las mismas actividades en la primera fase, expliquen a su equipo porque resolvieron así tratando además de convencer a los demás integrantes de su equipo cuando creen su resultado es el correcto.

Terminado el debate se espera logren un consenso y resuelvan las actividades conforme a lo acordado entre ellos.

La segunda fase fue aplicada a casi una semana de haber aplicado la primera fase. Con los 17 estudiantes presentes ese día se conformaron cuatro equipos²⁴. Para efectos de este análisis se eliminó un equipo de tres integrantes por no haber completado ningún integrante todas las fases. De los tres equipos restantes solo el equipo EQ1 todos sus integrantes (E01, E02, E03, E07 y E10) completaron todas las fases, el equipo EQ2 de 3 integrantes²⁵ (E04, E06 y E13) y el equipo EQ3 de 3 integrantes²⁶ (E11 E14 y E15), en ambos equipos, sólo tres participantes completaron todas las fases; es por eso, que en la primera fase y en cuarta fase solo se tienen once participantes en total para el análisis.

En esta segunda fase se les pusieron dos simulaciones sobre las actividades 1 de las canicas de Ojeda y la actividad 3 de las urnas de Falk, como herramienta visual de apoyo. Cada equipo hizo una grabación de los argumentos para saber cómo es que llegaron a la solución consensuada y plasmada en la hoja de papel de la que se hace el análisis.

4.4.1 Análisis de las actividades sobre el sesgo temporal diacrónico

El análisis descriptivo de las producciones por equipo en las actividades uno y dos cuya inclusión es la de evidenciar el sesgo temporal diacrónico se analizaron en esta segunda fase bajo el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El objetivo de poner las mismas actividades es ver si se continúa teniendo el sesgo, si se evidenció en la fase uno o ya resuelven las actividades en forma correcta al tener retroalimentación del equipo y la herramienta de la simulación. El análisis descriptivo

²⁴ Es importante mencionar los alumnos suelen sentarse en el salón cerca de sus amigos, y los equipos fueron conformados por ellos mismos.

²⁵ Originalmente participaron 4 estudiantes en esa etapa, pero se eliminó del análisis un estudiante que no completó todas las fases.

²⁶ Originalmente participaron 5 estudiantes en esa etapa, pero se eliminaron del análisis a dos estudiantes que no completaron todas las fases.

resultante donde se detallan las frecuencias y porcentajes de cada una de las praxeologías de ambas actividades se muestra en el cuadro siguiente.

ANÁLISIS PRAXEOLÓGICO DE LAS ACTIVIDADES EVIDENCIAN SESGO TEMPORAL DIACRÓNICO				
FASE 2 ACODESA				
Criterios análisis e interpretación			ACTIVIDAD	
			UNO Descontextualizada No. equipos	DOS Contextualizada No. equipos
a) Comprensión del problema (π)	a1. ¿Identifica eventos?	Si	3	3
	a2. ¿Cómo los identifica?	Escrita	1	3
		Árbol	1	
		Conjunto	1	
	a3. ¿Identifica todos?	Si	3	3
	a4. ¿Por qué?	NA	3	3
	b1. ¿Identifica problema P (IIR)?	Si	1	2
b2. ¿Identifica 2 experimentos?	Si	3	3	
b) Técnica (τ)	b3. ¿Usa técnica?	Si	1	3
	b4. ¿Cuál?	NA	2	
		Fórmula	1	1
		Proporción		1
		Fórmula Inv		1
	b5. ¿Valida su respuesta?	Si	3	2
	b6. ¿Aplica bien validación?	Si	1	1
b7. ¿Respuesta es correcta?	Sesgo	2	1	
	Correcto		2	
	Otra	1		
c) Tecnología (θ)	c1. ¿Evidencia?	Si	2	3
	c2. ¿Aplica correctamente?	Si	1	2

Cuadro 18. Análisis praxeológico de producciones en las actividades que evidencian sesgo temporal diacrónico en la fase 2.

Elaboración propia

Comparando con lo obtenido en la primera fase si hubo mejora respecto a la comprensión del problema al identificar eventos e identificarlos todos, ya son los

tres equipos en ambas actividades que así lo manifestaron. Respecto a las técnicas, siguen sin identificar que es un problema de Probabilidad Condicional el EQ1 en ambas actividades, pero hubo un incremento de identificación en la actividad 2 respecto a la primera fase con dos equipos (EQ2 Y EQ3) que ya lo lograron. Los tres equipos en ambas actividades identifican que hay dos experimentos.

En cuanto a las técnicas que usan para resolver, no hay modificación con lo encontrado en la primera fase, les es más fácil emplear alguna técnica para resolver al tener datos determinados y no estar presente el azar, ya que tres de los equipos en la actividad 2 ocuparon la fórmula de Probabilidad Condicional (EQ2 y EQ3) y llegan a la respuesta correcta; mientras que el EQ1 usa como técnica para resolver proporciones y resuelve de forma incorrecta.

A continuación, se transcribe parte del audio de lo que discutió el EQ2²⁷ en las técnicas de la actividad 2:

M1: *“Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal I”.*

H1: “Si se acuerdan, éste tiene la probabilidad del que hicimos hace rato, porque éste es el mismito diagrama de hace rato”

M2: “¡Ajá!, osea sólo hay que cambiarle los números, pero es el mismo planteamiento”

H1: “¡Pero ni los números!”

H2: “Sí, porque aquí tienes un 1 y aquí tienes un 82% de todo bien, aquí tienes 18 de que fueron mal””

M1: “Osea en vez de tener 50%, aquí tienes 82%....son otros porcentajes”

H1: “El porcentaje ya esta dado”

M2: “Exacto”

²⁷ EQ2, conformado por los integrantes E04, E06 Y E13 y 2 integrantes más, que se eliminaron de la muestra pues no se presentaron a las fases 3 y 4 de ACODESA.

M2: "Entonces, cuál es la probabilidad de que pase por I, osea 82 intersección...."

M1: "¡NO, no, no!, ¿Qué ibas a hacer?, ¿ibas a plantearlo primero?"

H1: "Si, lo mismo de hace rato, pero ahora con los nuevos números: $P(I \rightarrow R)$, entonces quedamos que es?"

M2: 96, osea de los 100, 96% si se puede usar, 4 no.

H2: "Por eso, pero entonces tenemos que multiplicar el .82 por .96"

M2: "Ah, sacar la probabilidad"

H1: "No, aquí es 82 por estas diciendo que aquí es la R"

M1: "Más bien es 82, más bien es 82"

H3: "Es 82, porque estas diciendo que aquí es la R"

M2: "Osea la unión del I con el II se juntan los 96"

H2: "82 perfectos desde el inicio, desde siempre"

H1: Ahora $II \rightarrow R$,

M2: "Esos son 14, los que pasan acá y de aquí se vayan acá"

H2: "Si porque eran 18:

M2: "pero no son perfectos, desde el inicio y ya sólo los que no sirven de nada"

M1: "Sumado nos tiene que dar el 100"

M1: "Si da el 100"

M1: "Aquí igual como el otro los puedes unir para que te dé el 96"

H1: " $P(I|R)$ "

M2: "Pues ya la de R intersección I, son estos no?"

H3: "Son 96"

M2: "No es sólo el 82?, porque de acá llega a acá y también paso por aquí"

H2: "Según yo la intersección sería este (82) y el total el 96, porque son los que salen por R"

M2: "Ajá, por eso, va a ser 82/96"

H3: "85"

La validación de la respuesta aparece a la inversa en comparación con la primera fase, tres quipos validan su técnica en la actividad 1, pero su respuesta es errónea

ya que no identificaron que era un problema de Probabilidad Condicional, ni tampoco usaron alguna técnica al resolver dando por resultado una respuesta incorrecta. En la actividad 2, sólo 1 equipo (EQ3) valida correctamente e identifica se trata de un problema de Probabilidad Condicional y usa fórmula de Probabilidad Condicional para resolver, logrando así dar la respuesta correcta como se aprecia en la siguiente figura.

Actividad 1

EQ1
b) Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal I
Valida tu respuesta.

$\frac{1}{2}$ / Por que solo existen dos canales

Actividad 2

EQ3
b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal "I".
Valida tu respuesta.

```

graph LR
    I --> I_A[82]
    I --> I_B[46]
    II --> II_A[18]
    II --> II_B[9]
    I_A --> A
    I_B --> B
    II_A --> A
    II_B --> B
            
```

Como 82 pasan por I
y 9 por II en A B

$$\rightarrow P(I|A) = \frac{82}{91} = 0.85$$

Figura 21. Validación incorrecta de su respuesta A1 y correcta en A2 fase2.
Elaboración propia

Los equipos que resolvieron en forma correcta, en la actividad 1 no hay evolución a lo encontrado en la primera fase ya que dos equipos (EQ1 y EQ2) siguen cometiendo el sesgo temporal diacrónico y el restante (EQ3) pone otra respuesta que no es correcta; por otra parte, en la actividad 2 si mejora respecto a la primera fase al contestar correctamente dos equipos (EQ2 y EQ3) y solo uno (EQ1) comete el sesgo, además es importante aclarar que los dos estudiantes (E11 y E15) que en la fase uno habían contestado correctamente esa actividad pertenecen al mismo equipo (EQ3); así que tres estudiantes (E04, E06 y E13) del equipo (EQ2) ahora ya contestaron correctamente.

En la actividad 1, el no usar alguna herramienta al resolver, aunque identifiquen todos los eventos hace que caigan en el sesgo.

Los que identificaron todos los eventos, pero no identificaron que es un problema de Probabilidad Condicional siguen cometiendo sesgos.

Actividad 1

EQ1

a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada
 Puede caer en R o no caer en R
 la probabilidad que saiga por R entrando por I es mas alta que si entra por II $\{I \cap R, II \cap R, II \cap B\}$

b) Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal I
 Valida tu respuesta.
 $\frac{1}{2}$ / Por que solo existen dos canales

Actividad 2

EQ1

a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada
 Pase por la banda I y caiga en R / que pase por II y caiga en R y que pase por II y caiga en B.

b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal "I".
 Valida tu respuesta.
 $\frac{82}{100}$ / por que el total de tornillos es 100 y 82 estaban en R y pasaron por I

Figura 22. Identifican todos los eventos, pero no que es problema de Probabilidad Condicional A1, A2. F 2
 Elaboración propia

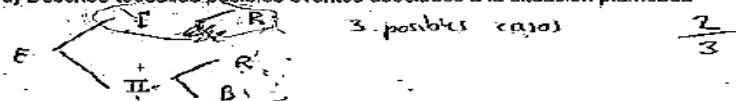
Como se observa en la figura anterior hacen una incorrecta restricción del espacio muestral al resolver no tomando en cuenta las bolas que caen por B, no tienen en cuenta el condicionamiento por un suceso posterior y obtienen por resultado 0.5 en la actividad 1 los equipos: EQ1 y EQ2, (0.82 en la actividad 2, el quipo EQ1) que es justo el sesgo temporal diacrónico que aún sigue evidenciándose.

Los que identifican todos los eventos, que es un problema de Probabilidad Condicional y resolvieron con la fórmula de Probabilidad Condicional, en la actividad 2 sí obtuvieron la respuesta correcta (EQ2 y EQ3); sin embargo, en la actividad 1 (EQ3) no sustituyen bien los datos en la fórmula y aunque obtuvo la respuesta correcta en el inciso a) a la hora de resolver en el inciso b) se aprecian confusión en la intersección y la probabilidad total de "R" como se muestra en la siguiente figura.

Actividad 1

EQ3

a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada



b) Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta.

$A = \frac{3}{4}$

$$P(R|I) = \frac{P(R \cap I)}{P(I)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

- La prob de I es .5
- La prob de II es .5
- La prob de todos los casos por los que salga por R es .5 + .25 = .75

Actividad 2

EQ2

a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada

De 82% de los tornillos son perfectos y pasan por I siempre y caen en R.
 Hay 14% de los tornillos pasan por II y tienen pequeños defectos, así que caen en R o en B.
 Hay 4% de los tornillos que están defectuosos pasan por II y caen en B.

b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta.

$$P(I|R) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)} = \frac{0.82}{0.96} = 0.854$$

EQ3

a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada

Hay 2 posibles eventos (casos). Que caigan por I y de ahí a R, o que caigan por II y que caigan ya sea por R o B.

b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta.

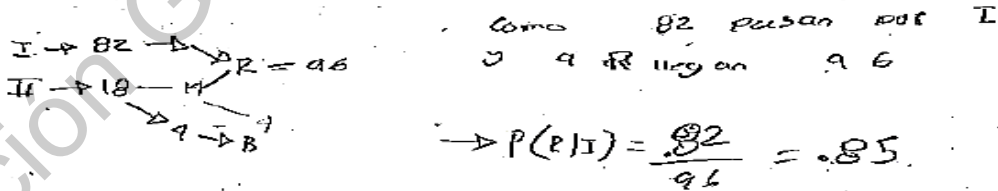


Figura 23. Identifican todos los eventos y que es problema de Probabilidad Condicional A1, A2. F 2 Elaboración propia

En cuanto a si se evidencia tecnología, disminuyo en la actividad 1 con solo dos equipos (EQ2 y EQ3) respecto a la primera fase; sin embargo, disminuye a si la aplica correctamente en la actividad 1 donde solo lo logra un equipo (EQ3) y en la actividad 2 se mantiene similar.

En la siguiente figura se aprecian las producciones de dos equipos (EQ1 y EQ2) que evidencian tecnología, pero no la aplican bien.

Actividad 1

EQ2
c) Bajo las mismas condiciones, si en lugar de una bola se dejan caer 100 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?

Sí.
Porque al repetir más veces el experimento podemos observar el comportamiento que siguen las bolas.

Actividad 2

EQ1
c) Bajo las mismas condiciones, si en lugar de 100 tornillos se produjeran 1000 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?

No, por que es un hecho que de 100 / 82 estan bien

Figura 24. Evidencian tecnología y no la aplican bien A1, A2. F 2
Elaboración propia

A continuación, se muestran las tecnologías que evidenciaron y aplicaron bien dos equipos (EQ2 y EQ3).

Actividad 1

EQ3
c) Bajo las mismas condiciones, si en lugar de una bola se dejan caer 100 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?

No cambian, puesto que son eventos independientes cada bola tendrá la misma posibilidad, por lo tanto no cambia el resultado.

Actividad 2

EQ3
c) Bajo las mismas condiciones, si en lugar de 100 tornillos se produjeran 1000 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?

No cambia, las probabilidades siguen siendo las mismas.

Figura 25. Evidencian tecnología y si la aplican bien A1, A2. F 2
Elaboración propia

Respecto a la teoría, ningún equipo las refiere en ambas actividades.

4.4.2 Análisis de las actividades sobre el sesgo de causación

El análisis descriptivo de las producciones por equipo en las actividades tres y cuatro cuya inclusión es la de evidenciar el sesgo de causación se analizaron en esta segunda fase bajo el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El objetivo de poner las mismas actividades que en la fase uno es ver si se continúa teniendo el sesgo, si éste fue cometido en la primera fase, ya resuelven las actividades en forma correcta al tener retroalimentación del equipo y la herramienta de la simulación o se mantiene consistente la respuesta correcta. El análisis descriptivo resultante donde se detallan las de cada una de las praxeologías de ambas actividades se muestra en el cuadro siguiente.

ANÁLISIS PRAXEOLOGICO DE LAS ACTIVIDADES EVIDENCIAN SESGO DE CAUSACION				
FASE 2 ACODESA				
Criterios análisis e interpretación		ACTIVIDAD		
		TRES Descontextualizada No. equipos	CUATRO Contextualizada No. equipos	
a) Comprensión del problema (π)	a1. ¿Identifica eventos?	Si	3	3
	a2. ¿Cómo los identifica?	Escrita Sin Mat Árbol y escrita	2 1	3
	a3. ¿Identifica todos?	Si	3	3
	a4. ¿Por qué?	No aplica	3	3
	a5. A3 ¿Identifica se trata de un muestreo sin reposición?	Si	3	
	a5. A4 ¿Identifica son eventos independientes?	Si		3
	a6. A3 ¿Identifica espacio muestral se afecta por tipo de muestreo?	Si	3	
b) Técnica	a7. ¿Justifica su respuesta?	Si	1	2
	b1. ¿Identifica problema P (N2 N1)?	Si	1	0
	b2. A3 ¿Reconoce muestreo sin reemplazo?	Si	3	
	b2. A4 ¿Evidencia uso de conocimientos previos al calcular P(Joven ing. Padre ing.)	Si		1

b3. A3 ¿Dificulta calcular $P(N2 N1)$?	Si	1	
b3. A4 ¿Usa razonamiento Causal, estimando el efecto dado conocimiento de causa?	Si		0
b4. ¿Usa técnica?	Si	3	1
b5. ¿Cuál?	No aplica		
	Lógica	2	1
	Regla producto	1	
b6. ¿Respuesta correcta?	Si	2	1
b7. Sesgo	No aplica ²⁸	2	1
	1/6	1	
	eventos independientes		1
	No es medible		1
b8. ¿Justifica su respuesta?	Si	3	1
b9. ¿Es correcta su justificación?	Si	2	1
c1. ¿Identifica problema $P(N1 N2)$?	Si	0	0
c2. A3 ¿Reconoce muestreo sin reemplazo?	Si	2	
c2.A4 ¿Evidencia uso de conocimientos previos al calcular $P(\text{Padre ing.} \text{Joven ing})$?	Si		0
c) Técnica (τ)			
c3 ¿Dificulta calcular $P(N1 N2)$ o $P(\text{Padre ing.} \text{Joven ing})$?	Si	2	2
c4. A3 ¿Reconoce sesgo?			
c4. A4 ¿Usa relación diagnóstica?	NO	2	3
c5. ¿Usa técnica?	Si	2	1
c6. ¿Cuál?	No aplica	1	2
	Lógica sin fórmulas	1	1
	Regla producto	1	

²⁸ No aplica significa no cometió sesgo y que dio la respuesta correcta (b6=1)

	c7. ¿Respuesta correcta?	Si	1	1
	c8. Sesgo	No aplica	1	1
		1/2	1	
		1/6	1	
		No contesto		2
	c9. ¿Justifica su respuesta?	Si	2	2
	c10. ¿Es correcta su justificación?	Si	1	1
	d1. ¿Evidencia Tecnología?	Si	3	3
	d2. ¿Aplica correctamente?	Si	0	1
Tecnología (θ)	d3 A3. ¿Identifica que se trata del mismo experimento?			
	d3.A4. ¿Identifica que b) y c) tienen la misma probabilidad?	Si	0	1
	d4.A3 ¿Identifica que es el mismo espacio muestral?	Si	3	
	d4.A4 Sesgo	No		1
		“No se puede calcular” 0, eventos independientes		1 1
	d5.A3 ¿Identifica que son los mismos eventos?	Si	0	

Cuadro 19. Análisis praxeológico de producciones en las actividades que evidencian sesgo de causación en la fase 2.

Elaboración propia

El cuadro anterior nos da una visión general de las producciones de los equipos en el sesgo de causación y comparando con lo obtenido en la primera fase, se incrementó la identificación de eventos e identificarlos todos al lograrlo los tres equipos (EQ1, EQ2 y EQ3) en ambas actividades, en su mayoría los identifican de manera escrita solo un equipo (EQ2) lo hace mediante un diagrama de árbol²⁹.

²⁹ Ver figura 26.

En igual proporción aumenta la identificación de que se trata de un muestreo sin reposición e identifican que el espacio muestral se ve afectado por el tipo de muestreo en la actividad 3 y de igual forma se incrementa a tres equipos los que logra identificar que son eventos independientes en la actividad 4. En cuanto a la justificación de la respuesta, se invirtió lo encontrado en la primera fase en la actividad 1 en el que sólo un equipo justificó su respuesta.

Referente a la técnica, en el inciso b), disminuye la identificación como problema de Probabilidad Condicional al sólo lograrlo un equipo (EQ03) en la actividad 3; mientras que en la cuatro ningún equipo lo hace. Solo a un equipo (EQ3) se le dificulta calcular para resolver en la actividad 3 y ninguno usa razonamiento causal en la actividad 4. Solo un equipo (EQ2) hace uso de técnicas al resolver la actividad 4 al disminuir respecto a lo reportado en la primera fase.

En comparación con la primera fase que produjeron muchas técnicas para resolver, en esta segunda fase impera la lógica (EQ1 y EQ2) y un equipo (EQ3) usó la regla del producto. El sesgo se mantuvo en la actividad 3 y aumentó en la actividad 4 al lograr resolver correctamente un equipo (EQ2) en la actividad 4. La justificación de la respuesta mejora en la actividad 3 al hacerlo los 3 equipos y 2 de ellos (EQ1 y EQ2) de manera correcta, pero disminuye en la actividad 4 al hacerlo correctamente sólo un equipo (EQ2).

En cuanto a las técnicas empleadas en el inciso c), que es donde suele evidenciarse el sesgo causal de ambas actividades. Disminuyó la identificación de problema de Probabilidad Condicional en ambas actividades, el reconocimiento de sesgo, el número y uso de técnicas para resolver así como respuesta correcta comparando con la primera fase. Mejora en la actividad 3, cuando reconocen que es un muestreo sin reemplazo, hay menos tipos de respuestas erróneas; mientras que en la actividad 4 ya no se observa uso de conocimientos previos al calcular y ninguno usa relación diagnóstica.

Por último, las tecnologías, aunque se evidencian en los tres equipos, a diferencia con la primera fase sólo un equipo (EQ2) lo hace correctamente en la actividad 4 y aunque en la actividad 3 todos los equipos identifican es el mismo espacio muestral,

no identifican que se trata del mismo experimento ni de los mismos eventos en los incisos b) y c) puntos que disminuyó con lo encontrado en la primera fase.

A continuación, se detalla lo encontrado en esta segunda fase; referente a la comprensión del problema, en la actividad 3 hay un equipo (EQ2) que usa un diagrama de árbol para identificar los eventos, los equipos restantes (EQ1 y EQ3) lo hacen de manera escrita en las dos actividades.

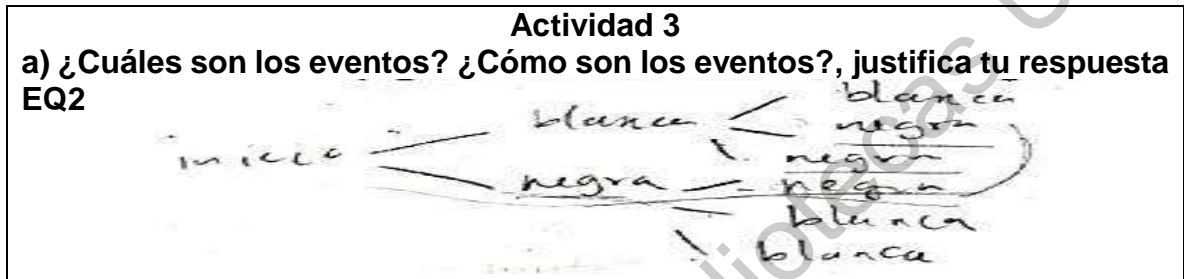


Figura 26. Identificación de eventos A3, A4. F 2
Elaboración propia

En la actividad 4, los equipos (EQ1 y EQ3) que no identifican que es un problema de Probabilidad Condicional, ni hacen uso de conocimientos previos, generaron la siguiente producción en el inciso b):

Actividad 4

EQ1

a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta

- Que sea ingeniero
- Que no sea ingeniero

b) Calcula la probabilidad de que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero:

- Es immedible

Figura 27. No identifican que es problema de Probabilidad Condicional A4. F 2
Elaboración propia

Ante la diferencia en retroceso a lo encontrado en las producciones de la primera fase inciso b), se pudo constatar que el equipo (EQ1) conformado por 5 integrantes (E01, E02, E03, E07 y E10), de los cuales sólo uno (E01) había respondido correctamente en la fase 1, los 4 integrantes restantes (E02, E03, E07 y E10) habían respondido en esa primera fase: "1/4" (E02), "No se puede calcular, no hay datos" (E03 y E10) y el último (E07) escribió: "No es medible; por lo que no es difícil

imaginar que convencieron al integrante (E01) que estaba correcto en su respuesta y pusieron la incorrecta.³⁰

El otro equipo (EQ3) en la misma situación, dos integrantes (E11 y E15) habían resuelto de forma correcta en la primera fase inciso b) y el tercero (E14) no, siendo este último que había escrito: “son eventos independientes”

Con lo antes mencionado el trabajar en equipos puede ser negativo en el aspecto de que si no se tienen bien afianzados los conceptos que inciden en el cálculo de la Probabilidad Condicional y se duda de si el resultado obtenido fue correcto, es fácil dejarse convencer de alguien que parece tener buenos argumentos, aunque no sean correctos.

Hubo un equipo (EQ3) que en la actividad 3 identificó era un problema de Probabilidad Condicional, pero se le dificultó el cálculo de $P(N_2|N_1)$ cuando la información es causal y compatible con el tiempo y que normalmente es la que no les cuesta trabajo calcular, pero no entendieron bien el problema pues no identifican formalmente los eventos ni el espacio muestral sino que resolvieron por lógica desde el inciso a) y lo hacen bien tal vez de manera intuitiva, pero a la hora de quererlo traspasar a la fórmula de Probabilidad Condicional en el inciso b) confunden con la probabilidad conjunta y usan la regla del producto como se puede apreciar en la siguiente figura.

Actividad 3 (EQ3)

a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta 50/50

Sacar N. primero hay 2 negras y 2 blancas, al sacar una negra queda una negra y 2 blancas, por lo tanto de sacar una negra ha $\frac{1}{3}$ y blanca $\frac{2}{3}$. Otra Blanca al principio es análogo.

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta.

$P(N_1) = .5$

$P(N_2|N_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ Debido a que solo queda una bola negra y dos blancas

$= \frac{1}{6}$

Figura 28. Identifican que es Probabilidad Condicional, pero confunde con regla producto A3. F 2
Elaboración propia

³⁰ Ese equipo se sentó en lugares contiguos en todas las aplicaciones de las actividades

En la actividad 4, dos de los tres equipos (EQ1 y EQ3) que no emplearon ninguna técnica para resolver, cometieron algún sesgo como se muestra en las siguientes producciones y la tecnología demuestra el razonamiento por el cuál no les es posible resolver adecuadamente.

Actividad 4 (EQ1)

a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta
 → Que sea Ingeniero
 → Que no sea ingeniero

b) Calcula la probabilidad de que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero:
 → Es immedible

c) Calcula la probabilidad de que un padre sea ingeniero dado que su hijo es ingeniero:
 → Es immedible

d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en los incisos b) y c)?
 Porque subjetivo debido a que no sabes de qué manera va a afectar o no que sea ingeniero

Figura 29. No emplean técnicas de resolución y cometen sesgo. F 2
 Elaboración propia

En la actividad 3, un equipo (EQ3) no identifica que es problema de Probabilidad Condicional en el inciso c), no se le dificulta el cálculo y usa lógica y probabilidad simple como método de resolución.

Actividad 3

EQ3

c) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar (N_1), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N_2). Justifica tu respuesta.

al haber sacado las 2 bolas y no conocer la primera, pero sabemos que la segunda fue negra, por lo tanto la primera tiene $\frac{1}{3}$ de probabilidad de ser negra

Figura 30. Técnica de resolución probabilidad simple y lógica. F 2
 Elaboración propia

Las siguientes producciones son los dos equipos (EQ1 y EQ2) que no identifican es un problema de Probabilidad Condicional, se les dificulta el cálculo pedido y sólo un equipo (EQ2) usa alguna técnica de resolución, los restantes no como se observa a continuación. En la actividad 4, dos equipos (EQ1 y EQ3), son los que no identifican es un problema de Probabilidad Condicional y se les dificulta calcular la probabilidad pedida.

Actividad 3

(EQ1)

c) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar (N_1), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N_2). Justifica tu respuesta.

$\frac{2}{4}$, porque hay dos negras de 4.

↓

$\frac{1}{2}$

Actividad 4

(EQ1)

c) Calcula la probabilidad de que un padre sea ingeniero dado que su hijo es ingeniero:

→ Es immedible

Figura 31. No identifican problema Probabilidad Condicional, dificultad al calcular. F 2
Elaboración propia

Sólo en la actividad 4, un equipo (EQ2) identifica son eventos independientes, no identifica que es un problema de Probabilidad Condicional, no se le dificulta el cálculo, usa la técnica de proporción como herramienta de resolución y contestó correctamente los incisos b) y c) y de igual manera su tecnología es asertiva, como se aprecia en la siguiente figura. Es por esto, que fue la producción más sobresaliente de las actividades que evidencian el sesgo de causación

Actividad 4

EQ2

a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, Justifica tu respuesta
Sólo hay dos eventos, que el hijo sea ingeniero o no lo sea, dado que su padre es ingeniero

b) Calcula la probabilidad de que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero:

$$P = \frac{1}{2}$$

Pues el padre ya es ingeniero y el hijo puede serlo o no

c) Calcula la probabilidad de que un padre sea ingeniero dado que su hijo es ingeniero:

$$P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} //$$

Por las 4 opciones posibles (donde puede ser o no ing. su padre y donde él puede o no ser ing.)

d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en los incisos b) y c)?

Se obtienen esas resultados ya que estamos hablando del mismo caso pero visto desde un punto de perspectiva diferente.

Figura 32. Producción más sobresaliente. F 2
Elaboración propia

En cuanto al uso de tecnologías, que son los argumentos que justifican las técnicas, se puede observar en el cuadro 19 es producida por los tres equipos en las actividades 3 y 4, donde se devela es sesgo de causación; sin embargo, sólo un quipo (EQ2) en la actividad 4 la emplea en forma correcta ya que sus respuestas a los incisos b) y c) con correctas ya que identifica que tienen la misma probabilidad.

Actividad 4

EQ2

d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en los incisos b) y c)?

Se obtienen esas resultados ya que estamos hablando del mismo caso pero visto desde un punto de perspectiva diferente.

Figura 33. Aplica tecnología en actividad correctamente resuelta. F 2
Elaboración propia

En la actividad 3, ninguna de las tecnologías empleadas por los tres equipos es adecuada y fue debido a que, aunque identifican que es mismo espacio muestral ningún equipo identifica se trata del mismo experimento ya que son los mismo eventos; mientras que en la actividad 4 no identifican que b) y c) tienen la misma

probabilidad y cometen sesgo, dicen no se puede calcular o es cero porque son eventos independientes.

Actividad 3

E02

d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en b) y c)?

En b) ya que la primera bola fue negra, el núm. de bolas en la urna se reduce y quedan 3, de las cuales, al haber tomado ya una negra, queda una sola negra. Es mayor la prob. de obtener una blanca.

En c) lo propio de que la primera bola sea negra dado que la segunda FASEZ lo es, es menor a que la primera sea blanca. Esto dado que si tomamos primero una blanca, quedan 2 negras y 7 blancas y en el otro caso 1 negra y 2 blancas.

Actividad 4

E01

d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en los incisos b) y c)?

Porque subjetivo debido a que no sabes de qué manera va a afectar o no que sea ingeniero

Figura 34. No aplican correctamente la tecnología. F 2
Elaboración propia

4.5 Análisis de la Fase 3 ACODESA. Debate

En esta sección se describen los resultados encontrados en el análisis de la Fase 3 del procedimiento de aplicación ACODESA de las mismas actividades, pero ahora resueltas mediante el debate de todo el grupo. En esta fase se les puso nuevamente la simulación en Descartes de las actividades uno y tres correspondientes a los sesgos temporal diacrónico y de causación respectivamente, pero mostrando algunas técnicas para resolver como una tabla de doble entrada –en el caso de la actividad tres– y preguntas dirigidas que permitieran abordar los conceptos que se

requieren al calcular problemas de Probabilidad Condicional y que inciden en su correcta resolución pero sin darles la respuesta.³¹

En esta fase se esperaba obtener un refinamiento de la técnica y eventualmente la teoría al discutir todo el grupo la forma en la que habían resuelto las actividades. En las simulaciones, algunos estudiantes del grupo iban respondiendo verbalmente las respuestas solicitadas y el porqué de las mismas, pero como no se designó al inicio de la fase 3 a algún estudiante para que registrase simultáneamente lo resuelto de cada problema conforme se resolvía la simulación; sino hasta que se finalizaron las 2 simulaciones, las argumentaciones dadas no quedaron plasmadas en el instrumento de recolección de datos³², pero se tiene prueba de ello por la grabación de audio.

4.5.1 Análisis de las actividades sobre el sesgo temporal diacrónico

En este apartado se analiza lo escrito por los dos participantes que se les pidió y accedieron a registrar los resultados de las actividades uno y dos, derivado de lo discutido por el grupo durante el debate y cuya producción se observa en la siguiente figura.

³¹ Ver Anexo VII. Videos de la simulación creadas en el *software* Descartes

³² Debido a que el docente, al concluir la fase tres, indico que se les dieran las actividades para la fase cuatro, los dos estudiantes que apuntaron las soluciones del debate lo hicieron superficialmente y sin justificar respuestas, al preferir poner más énfasis en su última auto-reflexión correspondiente a la fase cuatro; por esa razón aquí la grabación del debate será pieza clave para el análisis.

Actividad 1	Actividad 2
<p>a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada</p> <p>$\{(I,R), (II,R), (II,B)\}$ Porque es el espacio muestral Canal I y Canal II misma Prob</p>	<p>a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada</p> <p>(I, R) (II, B) (II, R)</p>
<p>b) Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal I Valida tu respuesta.</p> <p>$P(I R) = \left(\frac{2}{3}\right)$</p>	<p>b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta.</p> <p>50%</p>
<p>c) Bajo las mismas condiciones, si en lugar de una bola se dejan caer 100 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?</p> <p>No cambia la probabilidad es la misma.</p>	<p>c) Bajo las mismas condiciones, si en lugar de 100 tornillos se produjeran 1000 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?</p> <p>No, las (P) no se modifican</p>

Figura 35. Producciones de las actividades uno y dos. F 3

En una primera mirada, se puede observar que las actividades fueron contestadas por dos estudiantes distintos³³ y que, aunque ambos vieron la simulación y participaron del debate no respondieron de acuerdo con lo debatido en la simulación, simplemente contestaron por ellos mismos con lo que les quedó en mente de dicho proceso. El estudiante que respondió la segunda actividad lo hace de forma incorrecta pues, aunque reconoce que la estructura de fondo de la segunda actividad es igual a la de la primera actividad, no transfiere la idea ajustándola a la información determinada y específica ya dada por la actividad dos misma, por lo que llega a una respuesta incorrecta.³⁴

Referente a la primera actividad, se aprecia que en el inciso a) el grupo si comprende la actividad planteada al identificar eventos e identificarlos todos en

³³ Hubiera sido interesante ver si el participante que respondió la primera actividad correctamente, lo hacía de forma correcta en la segunda actividad también ya que son del mismo tipo de sesgo y es la misma estructura de fondo. Un estudiante respondió las actividades 1, 3 y 4; donde la las actividades 1 y 3 son las que corresponden a las simulaciones; mientras que el otro estudiante respondió la actividad 2.

³⁴ Al no haber registrado en manera simultánea las respuestas consensuadas en el debate él participante pudo haber respondido la actividad propuesta con lo que entendió o recuerda ocasionando la respuesta incorrecta de la misma.

notación de conjunto (técnica) y además refiere teoría al indicar que esos eventos son el espacio muestral del experimento.

La transcripción del audio correspondiente a la comprensión del problema se detalla a continuación:³⁵

Y- *¿De cuántas formas puede salir la canica?*

Y- *¿Alguien quiere decir en voz alta cuales son las opciones?*

E1: *Esta la opción de: {(R), (B)}, está la opción de: {(IR), (IIR), (IIB)} y la opción de: {(IR), (IIB)}*

Y- *Entonces, ¿de cuántas formas puede salir la canica?*

E1: *De 3*

Y- *¿Por qué?*

E2: *Porque es el espacio muestral*

Y- *¿Y qué es el espacio muestral?*

E2: *Son todas las posibles opciones que tienes de un experimento*

En el inciso b) referente a la técnica, el grupo si identifica que es un problema de Probabilidad Condicional, que hay un segundo experimento al pasar por el canal II, usa la fórmula de Probabilidad Condicional como técnica de resolución, mas no la desarrolla ni la valida, sólo la escribe junto con el resultado correcto. Esto último es un indicador de que si les sirvió la simulación para resolver en forma correcta la primera actividad y ya no se comete el sesgo temporal diacrónico.

La transcripción del audio correspondiente a la técnica fue la siguiente:

Y- *¿Cómo es en el tiempo el suceso condicionante (salir por R), al suceso cuya probabilidad se te pide encontrar (pasar por I)?*

A2: *Posterior*

Y- *¿Por qué?*

³⁵ La letra Y, es lo que se les solicitó responder.

A2: Porque tiene que pasar primero por el camino 1 para salir por R

Y- ¿Cómo son las probabilidades de que la bola pase por el CANAL I o por el CANAL II?

VARIOS ESTUDIANTES: Son diferentes

A2: Iguales

VARIOS ESTUDIANTES: Iguales

Y- ¿Por qué son iguales?

A2: Porque tienes el 50 y el 50 de pasar por las 2 rutas

Y- ¿Qué probabilidad es?

A3: $\frac{1}{2}$

Y- Entonces, si ustedes dejaran caer 100 bolas por E, ¿Cuántas bolas se irían por cada uno de los canales?

A1, A2 y otros estudiantes: 50 y 50

Y- "Si la bola se fue por el canal II. ¿Qué es más probable? ¿Qué se vaya por el camino izquierdo o por el derecho?"

A3: Igualmente probable

Y- Entonces, si estamos pensando que eran 100 bolas ¿Cuántas bolas en total saldrían por R?

A4: 66³⁶

Y- ¿Cuántos?

VARIOS ESTUDIANTES: 66

A5: No 33³⁷

A1, A2 y A3: No, 75

Y- ¿Por qué?

³⁶ Aquí ya están brincándose la pregunta a la respuesta que se esperaba obtener de 66% o 0.66 que es la Probabilidad Condicional pedida P (I|R)

³⁷ Este alumno está confundiendo el suceso condicionante, ya que se estaría calculando la probabilidad de que, habiendo salido la bola por R, hubiese pasado por II

A1: Porque las cuentas de las primeras 50

A3: 25 Y 25 de la segunda

A5: iah ok!

Y- Entonces, con todo lo que han visto ¿Cuál es la probabilidad $P(I|R)$?

A1, A3: 66

Y- y eso en proporciones ¿cuánto es?

A1, A2, A3: "2/3"

En cuanto al inciso c) referente a la tecnología, se observa que sí se evidencia al responder que “no cambia, la probabilidad es la misma” aunque no da teorías al respecto, en el fondo de ese argumento están asociados conceptos como independencia de resultados del experimento y la ley de los grandes números.

Por otra parte, la segunda actividad para la cual no hubo simulación, ya que comparte la misma estructura que la primera actividad, pero a diferencia de ésta los datos dados son fijos y no hay presencia del azar, no se obtuvo la respuesta esperada⁴.

Referente al inciso a) que permite ver si se entendió el problema, se observa que sí identifica eventos y los identifica todos en notación de conjunto; pero de manera aislada como si no fueran parte del mismo espacio muestral.

El inciso b) que muestra la técnica, no identifica que es un problema de Probabilidad Condicional, ni que hay un segundo experimento al pasar por el canal II, no uso ninguna técnica, la respuesta fue incorrecta y no la validó. Se comete el sesgo temporal diacrónico como consecuencia de no haber comprendido el problema al no identificar los eventos dados como el espacio muestral.

Por último, el inciso c), si evidencia la tecnología y la aplica bien, a pesar de que la respuesta fue incorrecta.

En ningún inciso hace evidencia de teoría.

4.5.2 Análisis de las actividades sobre el sesgo de causación

En este apartado se analiza lo escrito por el estudiante E14, quién también accedió registrar las actividades tres y cuatro, derivado de lo discutido por el grupo en el debate y cuyas producciones se muestra en la siguiente figura.

Actividad 3	Actividad 4
<p>E14</p> <p>a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta Son 2 eventos negra y blanca, son eventos independientes $\{w_1, w_2, b_1, b_2\}$</p> <p>b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta. 0.5</p> <p>c) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar (N_1), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N_2). Justifica tu respuesta. 0.5</p> <p>d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en b) y c)? Porque al sumar las probabilidades de los dos eventos da esos resultados</p>	<p>E14</p> <p>a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta Son ajenos / ind.</p> <p>b) Calcula la probabilidad de que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero: Son ajenos / ind.</p> <p>c) Calcula la probabilidad de que un padre sea ingeniero dado que su hijo es ingeniero: Son ajenos / ind.</p> <p>d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en los incisos b) y c)? Son eventos independientes</p>

Figura 36. Producciones de las actividades tres y cuatro. F 3
 Elaboración propia

Ambas actividades fueron resueltas por el estudiante E14, quien también contestó la primera actividad de esta fase 3, pero a diferencia de ésta comete el sesgo de causación a pesar de haber visto la simulación y que se mostró convencido del resultado al término de la misma.

Analizando lo que contestó el estudiante de la actividad tres³⁸, respecto al inciso a) que es la comprensión del problema si identifica eventos y los identifica todos mediante notación de conjuntos; sin embargo, no identifica que se trata de un

³⁸ Ver figura 36

muestreo sin reposición ni que el espacio muestral se afecta por el tipo de muestreo y si justifica su respuesta.

En cuanto a la técnica en el inciso b) que no debería haber tenido problemas al calcular por ser información causal y compatible con el tiempo da una respuesta incorrecta y comete sesgo. No identifica que es un problema de Probabilidad Condicional, no reconoce debe usar muestreo sin reemplazo al resolver, se le dificulta el cálculo ya que ni siquiera pone alguna fórmula, es decir no usa ninguna técnica, para obtener el resultado plasmado dando por resultado una respuesta incorrecta y no hace ninguna justificación del resultado.³⁹

El inciso c) donde se espera se muestre la técnica para resolver la actividad donde hay que hacer una inferencia hacia atrás. No identifica que se trata de un problema de Probabilidad Condicional pues no produce ninguna técnica asociada a ésta, no reconoce que debe usar un muestreo sin reemplazo al resolver, se le dificulta el cálculo ya que no produce ninguna técnica, no reconoce que hay que hacer una inferencia hacia atrás y ocasiona plasmar solamente el resultado de 0.5 sin ninguna fórmula ni argumento que lo explique. El resultado 0.5 es porque no tuvo en cuenta el condicionamiento a un suceso que ocurre posteriormente, mostrando el sesgo temporal diacrónico.

Por último, la tecnología, que se observa en el inciso d), no corresponde a lo producido en los incisos b) y c) además de que es incorrecta. Aunque identifica que se trata del mismo experimento, que tiene el mismo espacio muestral y por tanto los mismos eventos. También se puede observar que sabe el resultado es el mismo en ambos incisos, pero no recuerda la respuesta correcta pues se aprecia que borro un resultado anterior y reescribió el dato que se aprecia en la figura 36.

Esto realmente confirma la necesidad de analizar las grabaciones de audio realizadas durante el debate.

Respecto a la cuarta y última actividad, que pregunta por la probabilidad de que un joven sea ingeniero dado que su padre es ingeniero y viceversa, tampoco fue

³⁹ Al parecer el estudiante opto por dedicarle más tiempo a responder a sus cuatro actividades individuales de la fase 4 que llenar esta actividad como se esperaba.

resuelta en forma correcta por el estudiante E14, aunque no hubo simulación de la misma en el debate, alguno de los estudiantes dijo que era similar a lanzar una moneda.

En el análisis bajo la TAD de esta cuarta actividad⁴⁰ lo que se observa es una producción errónea. No se aprecia una comprensión del problema, no identifica eventos, ni muestra ninguna técnica y solo argumenta: “son ajenos / ind” e igualmente en la tecnología justifica: “son eventos independientes”. Aunque terminada la simulación se les cuestionó sobre esta actividad y algún alumno sugirió sería equivalente a lanzar una moneda, el estudiante E14 debió escribir aquí lo acordado en el debate. Se aprecia que el estudiante E14 solo proyectó su pensar al respecto de esta actividad y que no tiene claros los conceptos de probabilidad que inciden en la solución de los problemas de Probabilidad Condicional.

En resumen, de las producciones de estas dos últimas actividades el estudiante E14, no entendió la consigna de plasmar las respuestas obtenidas por consenso durante el debate y definitivamente están influenciadas por su pensamiento y al menos a el estudiante E14, no le quedó clara la resolución de las actividades y sigue cometiendo el sesgo de causación. Es probable que si dicha simulación se hubiera resuelto de manera individual donde el estudiante hubiera tenido que pensar la respuesta pedida por la simulación habría comprendido mejor.

No quiere decir que la simulación no sirva, pero es difícil en una sola intervención donde se avanzó la simulación al ritmo de los alumnos que iban contestando de manera correcta, tal vez no dio tiempo a madurar la idea del porqué de las respuestas a muchos estudiantes.

⁴⁰ Ver figura 36

4.6 Análisis de la Fase 4 ACODESA. Auto-Reflexión

En esta sección se describen los hallazgos encontrados en el análisis de la Fase 4 del procedimiento de aplicación ACODESA y es a través de sus producciones cognitivas que se recuperan los conocimientos posteriores al debate de los estudiantes sobre las actividades de Probabilidad Condicional elegidas para aplicarlas durante todas las fases de ACODESA, en un proceso individual de reconstrucción para ver si se afianzó lo logrado en el debate y si hubo una evolución favorable en la resolución de las actividades propuestas para evidenciar los sesgos temporal diacrónico y de causación.

En la Fase 4 se analizan las producciones individuales de auto-reflexión de los estudiantes de la muestra, a la luz del marco teórico de la TAD que nos permite caracterizar la actividad matemática permitiéndonos comparar respecto a la primera fase y medir la evolución en la comprensión de los conceptos de Probabilidad Condicional al poder cuantificar lo logrado y saber cuáles son los conceptos que se deben de reforzar más para lograr los resultados esperados. Se podrá saber si hubo un cambio respecto a cómo comprenden la Probabilidad Condicional.

4.6.1 Análisis de las actividades sobre el sesgo temporal diacrónico

En esta sección se analizan las producciones de los estudiantes de la primera y segunda actividades propuestas para evidenciar el sesgo temporal diacrónico. La finalidad es ver si con las actividades de equipo y grupal utilizando como herramienta visual una simulación logran resolverlas de manera correcta sin caer en los sesgos antes mencionados.

El análisis descriptivo de las producciones en ambas actividades, bajo el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico resultante se detallan con las frecuencias y porcentajes de cada una de las praxeologías de ambas actividades en el cuadro siguiente.

**ANÁLISIS PRAXEOLOGICO DE LAS ACTIVIDADES EVIDENCIAN SESGO TEMPORAL DIACRONICO
FASE 4 ACODESA**

	Criterios análisis e interpretación		ACTIVIDAD	
			UNO Descontextualizada n, (%)	DOS Contextualizada n, (%)
a) Comprensión del problema (π)	a1. ¿Identifica eventos?	Si	11, (100%)	11, (100%)
	a2. ¿Cómo los identifica?	Escrita	2, (18.18%)	2, (18.18%)
		Not. conjunto	8, (72.73%)	8, (72.73%)
		$E \rightarrow I \rightarrow R$	1, (9.09%)	1, (9.09%)
a3. ¿Identifica todos?	Si	10, (90.91%)	9, (81.82%)	
a4. ¿Por qué?	NA	10, (90.91%)	9, (81.82%)	
	Faltó (II,B)	1, (9.09%)	2, (18.18%)	
b) Técnica (τ)	b1. ¿Identifica problema P (I R)?	Si	4, (36.36%)	2, (18.18%)
	b2. ¿Identifica 2 experimentos?	Si	6, (54.55%)	4, (36.36%)
	b3. ¿Usa técnica?	Si	8, (72.73%)	3, (27.27%)
	b4. ¿Cuál?	NA	3, (27.27%)	8, (72.73%)
		Fórmula	2, (18.18%)	2, (18.18%)
		Proporción	4, (36.36%)	1, (9.09%)
		Fórmula Inv	2, (18.18%)	
b5. ¿Valida su respuesta?	Si	8, (72.73%)	7, (63.64%)	
b6. ¿Aplica bien validación?	Si	5, (45.45%)	1, (9.09%)	
b7. ¿Respuesta es correcta?	Correcto	7, (63.64%)	6, (54.55%)	
	Sesgo	4, (36.36%)	4, (36.36%)	
	Otra respuesta		4, (36.36%)	
	No contesto		1, (9.09%)	
c) Tecnología (θ)	c1. ¿Evidencia?	Si	11, (100%)	11, (100%)
	c2. ¿Aplica correctamente?	Si	11, (100%)	10, (90.91%)

Cuadro 20. Análisis praxeológico de producciones en las actividades que evidencian sesgo temporal diacrónico en la fase 4.

En ninguna de las 2 actividades se evidenció teoría.

Al igual que en la primera fase, el cuadro anterior nos da un panorama general de las producciones cognitivas de los estudiantes y permite ver si hubo un cambio en su comprensión de la Probabilidad Condicional.

Respecto al inciso a) que en conjunto aporta una idea de si comprendió el problema, todos los alumnos identifican eventos y los identifican todos (todos menos el E13) en la actividad uno, de la cual hubo una simulación. En la actividad dos, los estudiantes E06 y E13 son los que no identifican todos los eventos. El identificar todos los eventos, implica que reconoce el concepto de espacio muestral subyacente en la actividad y es importante pues al aplicar la fórmula de Probabilidad Condicional dicho espacio se reduce.

La manera de identificar los eventos es igual en ambas actividades, con los mismos estudiantes en cada una de las formas: 8 estudiantes (E01, E02, E03, E04, E07, E11, E14 y E15) que lo hacen con notación de conjuntos, 2 (E06 y E13) en forma escrita sin notación matemática y 1 estudiante (E10) usando símbolos. Aquí se observa una mejoría respecto a la fase uno donde sólo lo hacían de forma escrita sin usar notación matemática.

En cuanto a las técnicas b) que son las maneras de resolver las actividades para solucionarlas, hay un aumento en la actividad uno, aunque solo 4 estudiantes (E04, E11, E14 y E15) identifican como problema de Probabilidad Condicional dado que usan la fórmula como técnica para resolver hay otros 4 estudiantes (E01, E06, E10 y E13) que usan proporción; mientras que en la actividad dos, sólo 2 estudiantes (E11 y E15) ocupan la forma de Probabilidad Condicional y 1 estudiante (E01) proporciones.

En la actividad uno, de los 8 estudiantes (E01, E02, E03, E04, E06, E07, E10, E13) que validan su respuesta sólo 5 (E01, E04, E06, E10 y E13) lo hacen de manera correcta; mientras que en la actividad dos, 1 estudiante (E01) de 7 estudiantes (E01, E02, E03, E06, E07, E10, E13) que validó su respuesta lo hizo correctamente.

Al parecer la simulación sí les ayudo a resolver la primera actividad ya que de resolverlo mal todos los estudiantes y evidenciar sesgo en la primera fase, ahora ya fueron 7 estudiantes (E01, E04, E06, E10, E11, E13 y E14) que resolvieron

correctamente⁴¹ y sólo 4 (E02, E03, E07 y E15) caen en sesgo; sin embargo se aprecia que la segunda actividad les costó trabajo de resolver y aunque identifican que el esquema es igual que en la primera actividad no les es fácil trasladar la forma de resolver y adecuarlo a los datos ya dados y fijos de la segunda actividad y ponen por resultado la respuesta de la primera actividad⁴²; situación contraria a lo encontrado en la fase 1, donde 2 estudiantes (E11 y E15) la habían resuelto en forma correcta y 6 (E01, E02, E03, E07, E10 y E14) habían cometido sesgo.

Referente a evidenciar tecnología y aplicarla correctamente se aprecia ya más confianza en sus argumentaciones, aunque hayan producido un resultado erróneo ya que la tecnología en estas actividades hace referencia al resultado que se podría obtener al realizar el experimento al menos 100 veces, donde va implícito la independencia de eventos y la ley de los grandes números.

Analizando cruces de variables se puede ver en la siguiente figura cómo identificaron los eventos quienes no identificaron todos (E06 y E13), dejando fuera el evento (II,B) dando lugar a una incorrecta restricción del espacio muestral. En la actividad dos, al no tomar en cuenta los tornillos que caen en B, esto es no toman en cuenta el condicionamiento por un suceso posterior obtienen por resultado 0.82 (en la actividad dos) que es justo el sesgo temporal diacrónico. Se puede observar que, aunque en la primera actividad un estudiante (E13) resuelve por proporciones, la forma por la que llega al resultado correcto es extraña. También se aprecia que ninguno de ellos identifica las actividades como problemas de Probabilidad Condicional.

⁴¹ Sólo 4 estudiantes (E04, E11, E14 y E15) plantean la Probabilidad Condicional (2 escriben la probabilidad invertida: $P(R|I)$ (E11 y E15)) y de ellos 3 (E04, E11 y E14) inmediatamente después escriben el resultado sin desarrollar la fórmula y 1 de ellos (E04) escribe un argumento del porqué del mismo. Solo 1 estudiante (E15) desarrolla parcialmente la fórmula de Probabilidad Condicional en la parte del numerador. Todo esto deja ver que como hace ya al menos un año que vieron el tema no recuerdan bien la fórmula

⁴² Se pueden apreciar respuestas casi iguales entre los estudiantes que conformaron los equipos en la fase 2, lo que sugiere se dejaron influenciar en sus respuestas, aunque debieran de haber respondido de manera individual.

Actividad 1	Actividad 2
E13	E13
a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada	a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada
- Que pase por I y llegue a R.	- que los tornillos sean perfectos y vayan a R por I
- Que pase por II pero llegue a R.	- que tengan pequeñas imperfecciones, pasen por II y vayan a R.
b) Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal I Valida tu respuesta.	b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta.
R = 0.66 o $\frac{2}{3}$ ya que hay 2 posibles caminos que llevan a R.	P = 0.92, puesto que no se sabe que probabilidad de los que tienen pequeñas imperfecciones vayan a R
$P = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	

Figura 37. No identificó completo el espacio muestral de las actividades uno y dos. Fase 4
Elaboración propia

Tres estudiantes (E02, E03 y E07) que pertenecían al equipo⁴³ (EQ1) que tuvo más dificultades para resolver las actividades de la fase 2, y lo hicieron de forma incorrecta, no mostró ninguna evolución positiva de la fase 1 a la fase 4 a pesar de haber presenciado la simulación, contestaron prácticamente igual las cuatro actividades en esta fase como si se les hubiera pedido que trabajaran por equipo, es aquí donde se refuerza la idea de que la simulación debe ser resuelta en forma individual ya que no les permite avanzar en la misma hasta no haber dado la respuesta correcta a cada cuestionamiento forzándoles a pensar cómo resolverlas, pues es claro que al haberla proyectado al grupo completo e ir avanzando conforme algunos integrantes del grupo respondían de forma correcta y justificaban sus respuestas, quién no tiene bien afianzados los conceptos asociados de Probabilidad

⁴³ Ver figura 38, Cada fila corresponde a la producción del mismo estudiante en las dos primeras actividades de la fase 4, donde continúa evidenciándose el sesgo temporal diacrónico

Condicional desde la fórmula misma, difícilmente podrán resolver de forma correcta cualquier ejercicio relativo al mismo aunque se le ponga la mejor simulación que haya existido.

Actividad 1	Actividad 2
<p>E02</p> <p>a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada</p> <p>$\{IR, IIR, IIG\}$</p> <p>b) Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta.</p> <p>$\frac{1}{2}$, por que solo habia del canal R</p>	<p>E02</p> <p>Ahora contesta lo que se te pide:</p> <p>a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada</p> <p>$\{IR, IIR, IIG\}$</p> <p>b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal "I". Valida tu respuesta.</p> <p>$\frac{1}{2}$, por que solo habiamos de R</p>
<p>E03</p> <p>a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada</p> <p>$\{IR, IIR, IIB\}$</p> <p>b) Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta.</p> <p>$\frac{1}{2}$, porque solo hay dos caminos para llegar a R.</p>	<p>E03</p> <p>a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada</p> <p>$\{IR, IIR, IIB\}$</p> <p>b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal "I". Valida tu respuesta.</p> <p>$\frac{1}{2}$ porque solo hay de dos opciones para llegar.</p>
<p>E07</p> <p>a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada</p> <p>$\{IR, IIR, IIB\}$</p> <p>b) Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta.</p> <p>$\frac{1}{2}$, por que solo se toman en cuenta 2 caminos.</p>	<p>E07</p> <p>a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada</p> <p>$\{IR, IIR, IIB\}$</p> <p>b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal "I". Valida tu respuesta.</p> <p>$\frac{1}{2}$ solo hay dos caminos que cuentan.</p>

Figura 38. Producciones sin evolución que continúan presentando sesgo temporal diacrónico de las actividades uno y dos. Fase 4
Elaboración propia

Las producciones de los estudiantes E01, E11 y E14 muestran que, si comprenden el problema al poner el espacio muestral, pero que se dan cuenta que la estructura de la actividad dos es igual que la primera actividad y sin más le ponen el mismo resultado que a la primera actividad, sin adecuarla antes con los datos fijos dados en la actividad (aquí el espacio muestral se reduce de 100 tornillos a 96 que caen en "R"). Quieren resolver con proporciones, poniendo por resultado: $\frac{2}{3}$, pero aquí

no es posible ya que no hay azar y no igualdad de probabilidad en cada camino así que sacan proporción de forma equivocada como se aprecia en la siguiente figura⁴⁴.

Actividad 1		Actividad 2	
E14	a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada $\{(I, R), (II, R), (II, B)\}$	E14	a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada $\{(I, R), (II, R), (II, B)\}$
	b) Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta. $\frac{2}{3} \quad P(I R)$		b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal "I". Valida tu respuesta. $\frac{2}{3} \quad \frac{0.2}{1}$

Figura 39. Producciones donde resuelven la actividad dos igual que la actividad uno. Fase 4
Elaboración propia

La siguiente producción es de un estudiante (E15) que aunque en la fase uno y la cuatro identificó el espacio muestral al poner todos los eventos, reconoció que eran problemas de Probabilidad Condicional por que intentó usar la fórmula como técnica al resolver; pero no la supo aplicar ni desarrollar dando por consecuencia otra respuesta o cayó en el sesgo en ambas actividades con lo que se observa que no evoluciono su desempeño, situación de esperar si no se tiene bien clara ni la fórmula misma, como se aprecia en la siguiente figura.

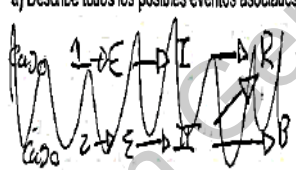
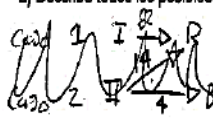
Actividad 1		Actividad 2	
E15	a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada  $(I, R), (II, B), (II, R)$	E15	a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada  $(I, R), (II, R), (II, B)$
	b) Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal I. Valida tu respuesta. $P(R I) \Rightarrow P(R \cap I) = P(R) P(I) = 1 \cdot 0.5 = 0.5$		b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal "I". Valida tu respuesta. $P(R I) = P(R \cap I) = P(I) P(R) = 0.2$ $P(I R) = \frac{2}{3}$

Figura 40. Producciones sin evolución y evidenciando sesgo temporal diacrónico en ambas actividades. Fase 4
Elaboración propia

⁴⁴ La primera y segunda filas corresponden a la producción de dos estudiantes que resolvieron igual las dos primeras actividades.

En lo referente a la tecnología, que son los discursos que justifican o explican la técnica todos los alumnos la aplican en ambas actividades, sólo un estudiante (E01) no la aplica bien en la actividad dos como se aprecia en la siguiente figura.

Actividad 2	
E01	
c) Bajo las mismas condiciones, si en lugar de 100 tornillos se produjeran 1000 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?	
	No, no cambia según el núm de tornillos, de 100, 82 están bien

Figura 41. Aplicación errónea de tecnología en la actividad dos. Fase 4
Elaboración propia

Para concluir con esta sección es importante ver si en general hubo evolución positiva en las producciones de esta cuarta fase respecto a la primera por lo que se analiza a continuación.

Se observa una mejoría en la comprensión de la primera actividad respecto a las producciones de la primera fase en donde respondieron sólo con conocimientos previos; mientras que la segunda actividad se mantuvo casi idéntica que en la primera fase y sólo mejoró en la identificación de los eventos cambiando de la forma escrita y sin notación matemática a notación de conjuntos.

En la primera actividad hay notable mejoría en identificación de eventos, ya lograron hacerlo todos los alumnos. La identificación de todos los eventos, aumento un 50% respecto a la primera fase. En la cuarta fase, sólo un estudiante (E13) no identifica todos los eventos, pero si resuelve correctamente usando proporciones.

Cambio la forma de identificar los eventos; antes, más de la mitad del grupo solo los expresaba en forma escrita sin notación matemática (E1, E2, E6, E11, E13 y E14), pero en esta cuarta fase, más del 70% del grupo lo hace con notación de conjuntos (E1, E2, E3, E4, E7, E11, E14 y E15), la identificación escrita sin notación matemática se redujo a dos estudiantes (E6, E13) y mediante símbolos de los eventos sólo un estudiante (E10).

A los alumnos que no identificaron los eventos les faltó poner (II,B) que es el recorrido de haber pasado por el camino II y caer en B, en la actividad 1 el estudiante E13 y en la actividad 2 los estudiantes: E06, E13. Más que error pareciera que se limitaron a responder a los eventos involucrados en la pregunta y que especifican que terminaba el experimento al caer por "R"; sin embargo, no ponerlo implica que no está tomando por completo el espacio muestral cuando en el inciso a) se les pide textualmente describir todos los posibles eventos asociados a la situación planteada y el no poner todo el espacio muestral puede ocasionar errores al momento de resolver la Probabilidad Condicional ya que requiere la reducción del mismo cuando la técnica de resolución es la fórmula de Probabilidad Condicional.

Con respecto a la técnica, la identificación de la actividad como un problema de Probabilidad Condicional disminuyó en ambas actividades en un estudiante, pero hubo un ligero incremento en la identificación de un segundo experimento al pasar por el canal II con 2 y 1 estudiante en las actividades uno y dos respectivamente.

Mejóro del 50 al 70 % el uso de alguna técnica para resolver en la actividad uno ocupando la fórmula de Probabilidad Condicional (E04, E11, E14 y E15) o proporciones (E1, E6, E10 y E13); mientras que en la actividad dos decae respecto a la primera fase ya que de 10 estudiantes (todos menos E13) que usaban alguna técnica para resolver se redujo a tres estudiantes (E1, E11 y E15) y de estos, dos estudiantes (E11 y E15) usan la fórmula de Probabilidad Condicional y el estudiante E1 proporciones.

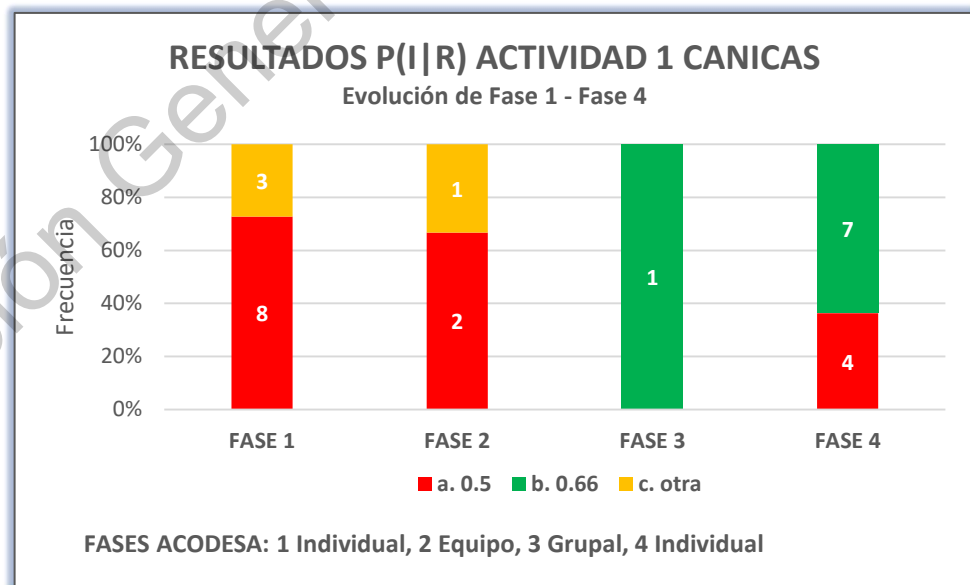
La validación de la respuesta aumenta ligeramente en la actividad uno (un estudiante) y disminuye en la actividad dos; en cuanto si aplica bien la validación se incrementa a un 27.27% en la actividad uno mientras que la actividad dos disminuye de 2 a 1 estudiante.

En cuanto a si la respuesta es correcta hubo mejoría relevante en la actividad uno ya que en la primera fase todos pusieron una respuesta incorrecta: 8 estudiantes (E1, E2, E3, E6, E7, E10, E11 y E14) cayeron en el sesgo que se quería evidenciar

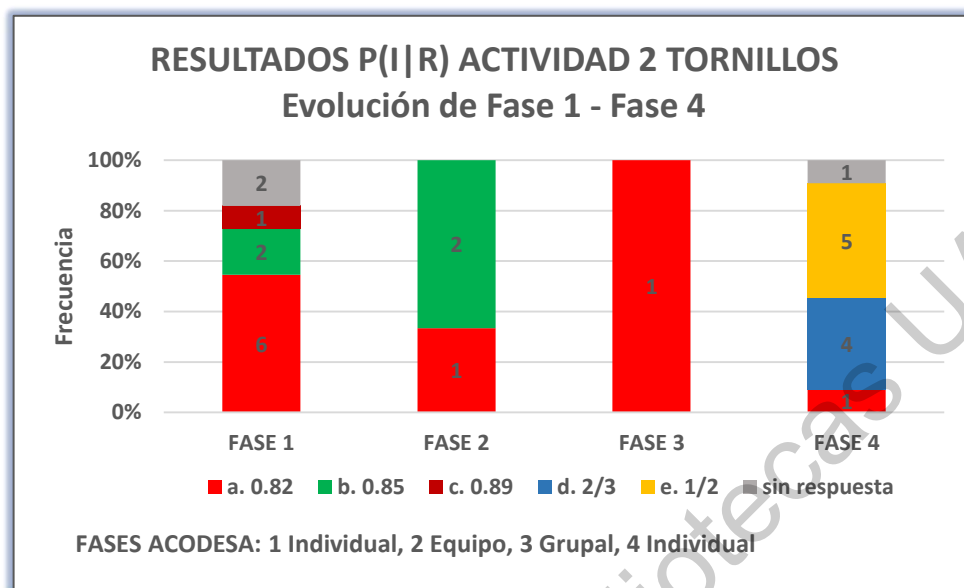
y 3 estudiantes (E4, E13 y E15) pusieron otra respuesta; mientras que en la cuarta fase 7 estudiantes (E1, E4, E6, E10, E11, E13 y E14) logran obtener el resultado correcto y los 4 restantes (E2, E3, E7 y E15) caen en el sesgo. Esto nos hace suponer si les ayudo la interacción con la simulación en Descartes. Referente a la segunda actividad disminuye el desempeño observado en la primera fase donde 2 estudiantes (E11 y E15) habían obtenido una respuesta correcta y en esta cuarta fase ninguno lo logra. Se sigue manteniendo a 6 estudiantes (E2, E3, E6, E7, E10 y E13) en el sesgo, 4 estudiantes (E1, E11, E14 y E15) dan otra respuesta y 1 estudiante (E14) no contesta nada. La evidencia de tecnología se mantiene igual que en la primera fase, pero si hay incremento significativo en esta cuarta fase de haberla aplicado correctamente todos los estudiantes en la actividad 1 y en la actividad 2 sólo el estudiante E1 no lo logró.

En ambas fases, ningún estudiante produce teoría.

A continuación, lo mencionado previamente se puede observar gráficamente en la evolución de las respuestas de los estudiantes en las actividades 1 (gráfica 1) y la actividad 2 (gráfica 2) correspondientes al sesgo temporal diacrónico.



Gráfica 1. Evolución de la respuesta de la actividad 1. Fase 1 a la Fase 4
Elaboración propia



Gráfica 2. Evolución de la respuesta de la actividad 2. Fase 1 a la Fase 4
Elaboración propia

4.6.2 Análisis de las actividades sobre el sesgo de causación

En esta sección se presenta el análisis descriptivo de las producciones cognitivas individuales de auto-reflexión posteriores al debate sobre las actividades tres y cuatro que evidencian el sesgo de causación. La finalidad es ver si hay una evolución positiva de la primera fase a ésta y si la simulación usada como herramienta de apoyo para solucionar este tipo de problemas favorece la correcta solución de las mismas y evita caer en el sesgo de causación.

El análisis descriptivo de las producciones en ambas actividades, bajo el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico resultante se detallan con las frecuencias y porcentajes de cada una de las praxeologías de ambas actividades en el cuadro siguiente.

ANÁLISIS PRAXEOLÓGICO DE LAS ACTIVIDADES EVIDENCIAN SESGO DE CAUSACION
FASE 4 ACODESA

Criterios análisis e interpretación		ACTIVIDAD		
		TRES Descontextualizada n, (%)	CUATRO Contextualizada n, (%)	
a) Comprensión del problema (π)	a1. ¿Identifica eventos?	Si	8, (72.73%)	10, (90.91%)
	a2. ¿Cómo los identifica?	Escrita Sin Mat	3, (27.27%)	10, (90.91%)
		Conjuntos	5, (45.45%)	
		No aplica	3, (27.27%)	1, (9.09%)
	a3. ¿Identifica todos?	Si	8, (72.73%)	9, (81.82%)
	a4. ¿Por qué?	No aplica	8, (72.73%)	9, (81.82%)
		0 No información El padre sea o no ingeniero		1, (9.09%) 1, (9.09%)
	a5. A3 ¿Identifica se trata de un muestreo sin reposición?	Si	8, (72.73%)	
	a5. A4 ¿Identifica son eventos independientes?	Si		10, (90.91%)
	a6. A3 ¿Identifica espacio muestral se afecta por tipo de muestreo?	Si	8, (72.73%)	No aplica
a7. ¿Justifica su respuesta?	Si	3, (27.27%)	2, (18.18%)	
b) Técnica	b1. ¿Identifica problema P (N2 N1)?	Si	3, (27.27%)	0, (0%)
	b2. A3 ¿Reconoce usa muestreo sin reemplazo al resolver?	Si	10, (90.91%)	
	b2. A4 ¿Evidencia uso de conocimientos previos al calcular P(Joven ing. Padre ing.)	Si		0, (0%)
	b3. A3 ¿Dificulta calcular P(N2 N1)?	Si	5, (45.45%)	
	b3. A4 ¿Usa razonamiento Causal, estimando el efecto dado conocimiento de causa?	Si		0, (0%)
	b4. ¿Usa técnica?	Si	9, (81.82%)	5, (45.45%)
	b5. ¿Cuál?	Probabilidad simple	5, (45.45%)	5, (45.45%)
Lógica Fórmula P(A B)		1, (9.09%) 3, (27.27%)		

	b6. ¿Respuesta correcta?	Si	6, (54.55%)	5, (45.45%)
	b7. Sesgo	No aplica 1/4 1/6 "No se puede calcular" eventos independientes No es medible No contestó	6, (54.55%) 1, (9.09%) 4, (36.36%)	5, (45.45%) 2, (18.18%) 1, (9.09%) 2, (18.18%) 1, (9.09%)
	b8. ¿Justifica su respuesta?	Si	7, (63.64%)	7, (63.64%)
	b9. ¿Es correcta su justificación?	Si	5, (45.45%)	3, (27.27%)
	c1. ¿Identifica problema P (N1 N2)?	Si	3, (27.27%)	0, (0%)
	c2. A3 ¿Reconoce muestreo sin reemplazo?	Si	3, (27.27%)	
	c2.A4 ¿Evidencia uso de conocimientos previos al calcular P(Padre ing. Joven ing)	Si		0, (0%)
	c3 ¿Dificulta calcular P(N1 N2) o P(Padre ing. Joven ing)?	Si	9, (81.82%)	8, (72.73%)
	c4. A3 ¿Reconoce sesgo?	Si	3, (27.27%)	
	c4. A4 ¿Usa relación diagnóstica?			2, (18.18%)
	c5. ¿Usa técnica?	Si	9, (81.82%)	3, (27.27%)
c) Técnica (τ)	c6. ¿Cuál?	No aplica Lógica Fórmula P(A B)* Prob simple+Lógica	2, (18.18%) 1, (9.09%) 3, (27.27%) 5 (45.45%)	8, (72.73%) 1, (9.09%) 2, (18.18%)
	*Fórmula sin desarrollar			
	c7. ¿Respuesta correcta?	Si	2, (18.18%)	3, (27.27%)
	c8. Sesgo	No aplica 1/2 1/6 No contesto No puedo calcular, no datos Eventos independientes No es medible 0	2, (18.18%) 8, (72.73%) 1, (9.09%)	3, (27.27%) 1, (9.09%) 2, (18.18%) 2, (18.18%) 1, (9.09%)
	c9. ¿Justifica su respuesta?	Si	8, (72.73%)	5, (45.45%)

d) Tecnología (θ)	c10. ¿Es correcta su justificación?	Si	2, (18.18%)	2, (18.18%)
	d1. ¿Evidencia Tecnología?	Si	10, (90.91%)	10, (90.91%)
	d2. ¿Aplica correctamente?	Si	2, (18.18%)	3, (27.27%)
	d3 A3. ¿Identifica que se trata del mismo experimento?	Si	3, (27.27%)	3, (27.27%)
	d3.A4. ¿Identifica que b) y c) tienen la misma probabilidad?			
	d4.A3 ¿Identifica que es el mismo espacio muestral?	Si	4, (36.36%)	
	d4.A4 Sesgo	No		3, (27.27%)
		“Carezco información”		4 (36.36%)
		“No se puede calcular”		1, (9.09%)
		0, eventos independientes		2, (18.18%)
	Datos subjetivos		1, (9.09%)	
	d5.A3 ¿Identifica que son los mismos eventos?	Si	8, (72.73%)	
	d6. ¿Da alguna teoría?	Si	2, (18.18%)	0

Cuadro 21. Análisis praxeológico de producciones en las actividades que evidencian sesgo causal Fase 4
Elaboración propia

El cuadro anterior nos da una visión general de las producciones de los estudiantes en un proceso de auto-reflexión después de haber completado la fase 3 de debate grupal y permite ver si hubo evolución positiva en la resolución de las actividades tres y cuatro que evidenciaban el sesgo de causación.⁴⁵

El inciso a) nos da un panorama de la comprensión del problema, y se observa que en la tercera actividad 8 estudiantes (E01, E04, E06, E07, E10, E11, E14 y E15) identifican todos los eventos, que se trata de un muestreo sin reposición y que el espacio muestral se afecta por el tipo de muestreo. La forma en la que identifican los eventos fue: 5 estudiantes (E04, E10, E11, E14 y E15) lo hacen con notación de

⁴⁵ Hay que recordar que las fase 3 (debate) y la fase 4 (auto-reflexión) las hicieron ambas en un lapso de una hora razón que ocasionó contestaran rápidamente la cuarta fase donde en su mayoría solo pusieron la respuesta y si pusieron la formula no la desarrollaron; de igual forma sus argumentaciones fueron muy escuetas para todas las actividades.

conjuntos y los 3 restantes (E01, E06 y E07) los pone de forma escrita sin notación matemática

En la cuarta actividad, 10 estudiantes (E01, E02, E03, E04, E06, E07, E10, E11, E13 y E15) identifican los eventos de forma escrita y sin notación matemática. A excepción de los estudiantes E02 y E14 identifican todos los eventos. Todos los estudiantes menos el E01, identifican que son eventos independientes.

El inciso b) de ambas actividades es para ver si el estudiante se deja llevar por un razonamiento causal estimando el efecto dado cierto conocimiento de las causas, este apartado no les cuesta trabajo calcularlo pues va en el sentido del tiempo y con razonamiento lógico y probabilidad simple puede llegar al resultado sin necesidad de utilizar la fórmula de Probabilidad Condicional.

En la tercera actividad, sólo 3 estudiantes (E04, E11 y E15) identifican que se trata de un problema de Probabilidad Condicional, ya que lo ocupan cómo fórmula al resolver. Diez participantes (E01, E02, E03, E04, E06, E07, E10, E11, E13 y E15) reconocen que se usa muestreo sin reemplazo; sin embargo, a más de la mitad del grupo se les sigue dificultando resolver (E01, E04, E11, E14 y E15). Usan alguna técnica para resolver 9 participantes (E01, E02, E03, E04, E06, E07, E10, E11 y E15), los estudiantes E02, E03, E06, E07 y E10 usan solo probabilidad simple y responden en forma correcta. Hay 4 estudiantes (E04, E11, E14 y E15) que ponen por resultado $1/6$ lo que indica que confunden la Probabilidad Condicional con la conjunta. Los estudiantes E01, E02, E03, E04, E06, E07 y E10 justifican su respuesta, pero sólo el E01, E03, E06, E07 y E10 lo hacen de manera correcta.

En el inciso b) de la cuarta actividad, cinco estudiantes (E02, E04, E11, E13 y E15) usan probabilidad simple como técnica para resolver obteniendo la respuesta correcta; mientras que los seis restantes dicen: “no se puede calcular” (E01, E03), “eventos independientes” (E14), no es medible” (E07, y E10) y uno (E06) no contesto. De los siete participantes que justificaron su respuesta (E01, E02, E04, E07, E10, E13 y E14), sólo tres (E02, E04 y E13) lo hacen de manera correcta.

El inciso c) en ambas actividades es una relación diagnóstica, al estimar la causa dado el conocimiento del efecto, ya que se requieren pruebas probabilísticas, razonamiento que es indiferente al orden temporal y los estudiantes suelen alegar que los eventos posteriores no pueden afectar el resultado de los anteriores, o bien que eso no es posible de resolver.

En la tercera actividad inciso c) de esta cuarta fase, tres participantes (E04, E11 y E15) identifican que es un problema de Probabilidad Condicional (al igual que en el inciso anterior) ya que usan la fórmula para resolver, aunque no la desarrollan y solo plasman inmediatamente después del signo igual el resultado (que por cierto es erróneo en ambos incisos). También tres estudiantes (E04, E06 y E13) reconocen que es un muestreo sin reemplazo, pero sólo los el E06 y E13 resuelven correctamente.

A nueve estudiantes (E01, E02, E03, E04, E07, E10, E11, E14 y E15) se le dificulta el cálculo y usan alguna otra técnica para resolver: 6 usan lógica y Probabilidad Condicional (E01, E02, E03, E06, E07 y E10) y tres la fórmula de Probabilidad Condicional (E04, E11 y E15). Sólo dos participantes (E06 y E13) logran responder correctamente los incisos b) y c) de la tercera actividad. Ocho estudiantes (E01, E02, E03, E07, E10, E11, E14 y E15) caen en un sesgo al poner $\frac{1}{2}$ por respuesta e implica que no están reconociendo que es un muestreo sin reemplazo y uno (E04) contesta $\frac{1}{6}$ lo que demuestra que confunde la Probabilidad Condicional con la conjunta. Ocho estudiantes (E01, E02, E03, E04, E06, E07, E10 y E13) justifican su respuesta, pero sólo dos (E06 y E13) lo hacen correctamente.

En el inciso c) de la cuarta actividad⁴⁶, sólo tres estudiantes (E04, E13 y E15) usan probabilidad simple y lógica como técnica para resolver y lo hacen correctamente; sin embargo, solo dos de ellos (E04 y E13) justifican su respuesta de forma acertada. Los ocho restantes (E01, E02, E03, E06, E07, E10, E11 y E14) tienen

⁴⁶ No hubo simulación para esta actividad.

dificultad para resolver, por lo que no usan ninguna técnica y escriben cosas como: “no puedo calcular, no hay datos” (E01, E03), “eventos independientes” (E02 y E14), “no es medible” (E07 y E10) o “0 (cero)” estudiante E11 y el estudiante E06 no contestó.

El apartado que hace referencia a la tecnología, inciso d), diez estudiantes (E01, E02, E03, E04, E06, E07, E10, E11, E13 y E14) la evidencian, pero sólo dos (E06 y E11) en la actividad 3 y tres estudiantes (E04, E13 y E15) de la actividad 4 lo hacen acertadamente. En esta cuarta actividad no hay evidencia de teoría.

Se hizo el análisis con el cruce de variables del inciso b) y se encontró un estudiante (E14) en la actividad 3 que ni identifica que es un problema de Probabilidad Condicional, ni que debe usar un muestreo sin reemplazo al resolver como se aprecia en la siguiente figura, donde a pesar de haber escrito todo el espacio muestral y reconocer en el inciso a) el muestreo sin reemplazo al momento de resolver en el inciso b) no se ve reflejado porque ni siquiera usa alguna técnica y mucho menos justifica, se aprecia que no tiene claros muchos conceptos de Probabilidad Condicional desde la fórmula misma.

Actividad 3	
E14	<p>a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta $\{(N1W)(N1B)(B1W)(B1B)\}$ independientes</p> <p>b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta.</p> <p style="text-align: center;">$\frac{1}{6}$</p>

Figura 42. No identifica problema de Probabilidad Condicional ni muestreo sin reemplazo al resolver. Fase 4
 Elaboración propia

En la actividad 3 en el inciso b), los tres estudiantes (E04, E11 y E15) que reconocen es un problema de Probabilidad Condicional, ya que usan la fórmula al resolver se les dificulta el cálculo, aunque la información es causal y compatible con el tiempo y es porque no desarrollan la fórmula con lo que evidencian su desconocimiento por

lo que no llegan a la respuesta correcta y se observa que confunden la Probabilidad Condicional con conjunta como se aprecia en la siguiente figura.

Actividad 3

b) calcula la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta.

E11

$$P(N_2 | N_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Figura 43. Identifica problema de Probabilidad Condicional, no desarrolla fórmula. Fase 4
Elaboración propia

También hay los que no identifican que es problema de Probabilidad Condicional (E01 y E14) dado que ocupan otras técnicas para resolver y también tienen dificultades para resolver como se observa a continuación.

Actividad 3

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta.

E14

$\frac{1}{6}$

Figura 44. No identifica problema de Probabilidad Condicional y se le dificulta resolver. Fase 4
Elaboración propia

Cinco estudiantes (E01, E04, E11, E14 y E15) en la actividad 3 presentaron deficientes producciones pues llegan a resultados erróneos en los inciso b) y c), de cuatro de ellos (E04, E11, E14 y E15) que habían contestado en b) $\frac{1}{6}$ (confunden con probabilidad conjunta) en c) respondieron $\frac{1}{2}$ con lo que no reconocen el muestreo sin reemplazo y el estudiante restante (E01) respondió b) $\frac{1}{4}$ (confunde con probabilidad simple) y c) $\frac{1}{2}$; mientras que en la actividad 4 son seis los participantes (E01, E03, E06, E07, E10 y E14) que contestaron erróneamente y de forma igual ambos incisos con argumentos tales como: “No es medible” (E07 y E10),

“No se puede calcular, no hay datos” (E01 y E03), “ eventos independientes” (E14) y un participante (E06) no contestó nada.

La producción de dos estudiantes en la actividad 3 (E06 y E13) y tres estudiantes de la actividad 4 (E04, E13 y E15) fue destacada al resolver en forma correcta los incisos b) y c) y de ellos sólo uno⁴⁷ (E13) lo hace de forma correcta en ambas actividades como se muestra a continuación.

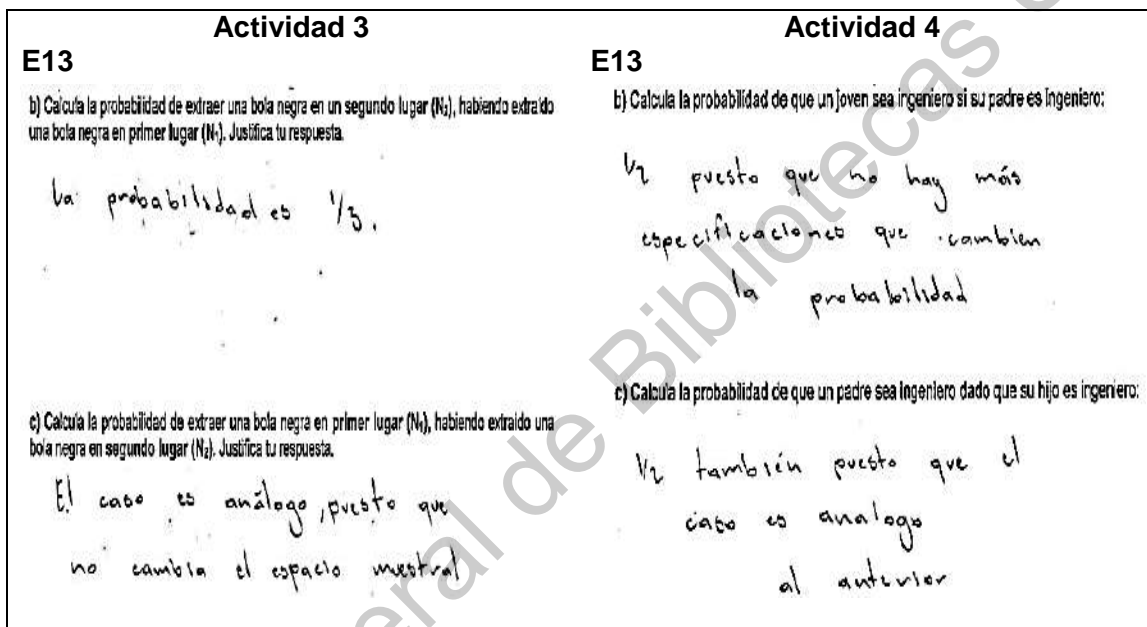


Figura 45. Producciones destacadas en actividades tres y cuatro. Fase 4
Elaboración propia

Se observó que los alumnos contestaron en equipo, justo como lo conformaron en la fase 2, como si no hubieran entendido que era individual⁴⁸, se aprecia que alguno de ellos convence al resto de que su respuesta era la correcta y todo el grupito acabó poniendo la misma respuesta y casi la misma argumentación de un resultado que solo fue plasmado y no se aprecia ninguna fórmula.

Respecto a la tecnología, en ambas actividades el 90% de los participantes argumenta el por qué obtuvieron esos resultados en los incisos b) y c), sólo dos (E06 y E11) lo hacen bien en la actividad 3 y tres (E04, E13 y E15) en la actividad

⁴⁷ Primeras producciones de la figura 45.

⁴⁸ Se confirma que no fue buena estrategia mostrar a todo el grupo la simulación al mismo tiempo, si la hubieran resuelto se les habría forzado a pensar en la respuesta correcta ya que de otra forma el programa no le permitiría avanzar.

4. En la actividad 3, tres participantes (E04, E06 y E13) identifican que se trata del mismo experimento y cuatro de ellos (E04, E06, E11 y E13) tienen el mismo espacio muestral; mientras que en la actividad 4. Tres estudiantes (E04, E13 y E15) identifican que b) y c) tienen la misma probabilidad y son los que contestaron correctamente dicha actividad.

Por último, hay evidencia de teoría en dos estudiantes (E06 y E07) como se aprecia a continuación.

Actividad 3	
<p>E07</p> <p>d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en b) y c)?</p> <p>Por el espacio muestral y los eventos</p>	<p>E06</p> <p>d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en b) y c)?</p> <p>Don lo mismo porque el espacio muestral no cambia ni los eventos, solo suceden en diferente orden</p>

Figura 46. Evidencia de teoría en la actividad tres. Fase 4
Elaboración propia

A continuación, se analiza si hubo una evolución positiva en las producciones de esta cuarta fase para las actividades 3 y 4 respecto a la primera fase.

En esta cuarta fase al comparar los resultados obtenidos al aplicar las dos últimas actividades respecto a los encontrados en la primera fase.

En lo referente a la comprensión del problema a), en la actividad 3 se redujo de 10 participantes (E01, E03, E04, E06, E07, E10, E11, E13, E14 y E15) que identificaban eventos y los identificaban todos en la primera fase a 8 estudiantes (E01, E04, E06, E07, E10, E11, E14 y E15).

Lo que mejoró en la cuarta fase fue la forma de identificarlos, ya que los 10 estudiantes (E01, E03, E06, E07, E10, E11, E13, E14 y E15) que lo hacían de manera escrita y sin notación matemática solo continúa así 3 estudiantes (E01, E06 y E07) y los estudiantes (E04, E10, E11, E14 y E15) lo ponen en notación de conjuntos.

Disminuyó de 10 estudiantes (E01, E03, E04, E06, E07, E10, E11, E13, E14 y E15) a 8 estudiantes (E01, E04, E06, E07, E10, E11, E14 y E15) que identificaban que se trataba de un muestreo sin reposición y que el espacio muestral se ve afectado por el tipo de muestreo.

Disminuyó también la justificación de la respuesta de 9 participantes (E02, E03, E04, E06, E10, E11, E13, E14 Y E15) en la primera fase a sólo 3 (E06, E13 y E14) en la cuarta fase.

En la cuarta actividad de la cual no hubo simulación, no hay gran variación respecto de la primera fase, solo se incrementa de 9 a 10 participantes (E01, E02, E03, E04, E06, E07, E10, E11, E13 y E15) en la identificación de eventos e identificarlos de manera escrita. Identificar que son eventos independientes (sólo faltó E01). La justificación de la respuesta fue mejor en la primera fase con 7 estudiantes que si lo hicieron (E03, E04, E06, E10, E11, E13 y E14); mientras que en la cuarta fase solo dos estudiantes (E06 y E13) lo hicieron.

En la actividad 3, los incisos b) y c) es dónde los alumnos emplean técnicas para resolver y según Falk (1986) psicológicamente no se perciben simétricos al momento de resolver, ya que en el inciso b) la información es causal y compatible con el tiempo por lo que la mayoría no debería de tener problemas para resolverlo; mientras que el inciso c) es el sesgo que se quiere evidenciar dado que se requieren pruebas probabilísticas, razonamiento que es indiferente al orden temporal y suelen argumentar que los eventos posteriores no pueden afectar el resultado de los anteriores.

La mala noticia es que de tres estudiantes (E02, E14 Y E15) que resolvieron mal ambos incisos en la fase 1, se incrementan a cinco (E01, E04, E11, E14 y E15) en la fase 4, de esos cinco estudiantes, dos (E14 y E15) ya lo habían hecho mal en la fase 1 (no evolucionaron) pertenecían al mismo equipo (EQ3) de la fase 2 y ahora el integrante que faltaba (E11) también lo resuelve mal⁴⁹, dicho participante y los dos restantes que en esta fase contestaron ambos incisos mal, en la fase 1 habían contestado bien el inciso b) y mal el c); es decir caían en el sesgo como se observa a continuación en las producciones de esos dos estudiantes en la fase 1 y 4.

⁴⁹ Se sigue viendo que contestaron en equipo aunque se les pidió que fuera de forma individual, lo que lleva a pensar que se debe sentar alejados de los equipos de la segunda fase al resolver la cuarta fase.

Actividad 3
Fase 1

E11

a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, Justifica tu respuesta

Al sacar la primer bola tenemos 50% de prob de que sea blanca o negra.

Al sacar la primera, ya sea blanca o negra disminuye las prob.

si la primera fue blanca, la segunda tiene 66% de prob de que sea blanca, ^{o el otro caso es contrario}
b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta.

$$P(N_2 | N_1) = 33\%$$

c) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar (N_1), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N_2). Justifica tu respuesta.

$$P(N_1 | N_2) = 50\%$$

① El evento de sacar la primer bola no es afectado por el segundo evento.

Fase 4

E11

a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta

$$\{(N_1, N_2), (B_1, B_2), (N_1, B_2), (B_1, N_2)\}$$

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta.

$$P(N_2 | N_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

c) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar (N_1), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N_2). Justifica tu respuesta.

$$P(N_1 | N_2) = \frac{1}{2}$$

Figura 47. Producciones de estudiantes que resolvían bien inciso b) en fase 1 y resuelven mal ambos incisos en la fase 4 de la actividad 3.

Elaboración propia

Se observa que como no se tienen bien claros los conceptos de Probabilidad Condicional, la simulación en lugar de ayudarles les causo confusión pues en la segunda producción hablan de independencia de cada bola negra, cuando la independencia es de los eventos y terminan así confundiendo la probabilidad conjunta con la condicional.

De siete participantes (E01, E03, E04, E06, E07, E10 y E11) que en la fase 1 contestaron bien el inciso b) y mal el inciso c); es decir cometían el sesgo que se pretendía evidenciar, se redujo a cuatro (E02, E03, E07 y E10); de esos cuatro, tres lo hicieron igual en la fase 1 (E03, E07 y E10 no evolucionaron) pertenecían al mismo equipo (EQ1) y se les agregó otro estudiante (E02) de su equipo que en la fase 1 entregó producciones resueltas de forma errónea en ambos incisos.

La buena noticia es que al menos uno de los participantes (E06) que cometía el sesgo en c) en la fase 1, ya logra resolver correctamente en la fase 4 (primeras producciones de la figura siguiente) y el estudiante (E13) que desde la fase 1 tuvo una producción sobresaliente, la mantiene en la fase 4, con lo que se quedan como las producciones sobresalientes para la actividad 3 de este estudio.⁵⁰

⁵⁰ Ver figura 48

Actividad 3

Fase 1

E06

a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, Justifica tu respuesta

Primero tenemos $\frac{2}{3}$ de tomar una bola negra y $\frac{1}{3}$ de tomar una bola blanca.
Si sacamos una bola negra ahora tenemos $\frac{1}{3}$ de tomar una blanca y $\frac{2}{3}$ de sacar la negra y así mismo si primero sacamos la blanca.

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta.

$$P(B_{N_1}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{2}{3} \quad \text{Negra } N_1$$

c) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar (N_1), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N_2). Justifica tu respuesta.

$$P(B_{N_2}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{2}{3}$$

d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en b) y c)?

En el primero solo sacamos la probabilidad de sacar una bola negra en el segundo intento dado que ya sacamos una en el primer intento. Eso quiere decir que de los $\frac{2}{3}$ de sacar la negra nos quedaba $\frac{1}{3}$ de sacar otra negra.

En la segunda es igual porque las probabilidades son las mismas.

Fase 4

E06

a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, Justifica tu respuesta

Sacar una bola negra y que queden dos blancas y una negra y luego poder sacar otra negra o una blanca y viceversa.

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un segundo lugar (N_2), habiendo extraído una bola negra en primer lugar (N_1). Justifica tu respuesta.

$$R = 0,3 \quad \text{Porque tienes un medio de sacar una negra y luego hay un tercio para sacar una negra}$$

c) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar (N_1), habiendo extraído una bola negra en segundo lugar (N_2). Justifica tu respuesta.

$$R = 0,3 \quad \text{lo mismo que en el de arriba pero se invierten los casos.}$$

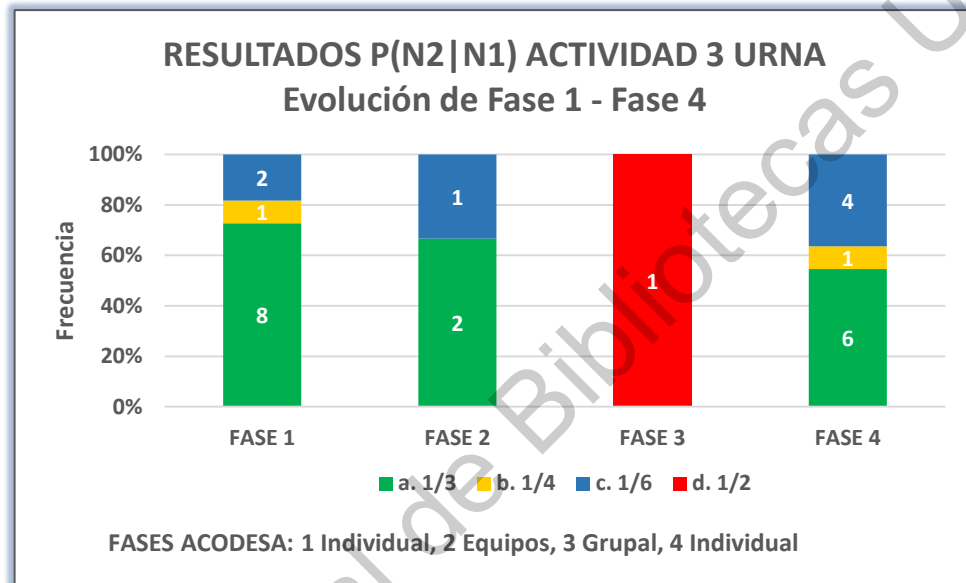
d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en b) y c)?

Don lo mismo porque el espacio muestral no cambia ni los eventos, solo suceden en diferente orden

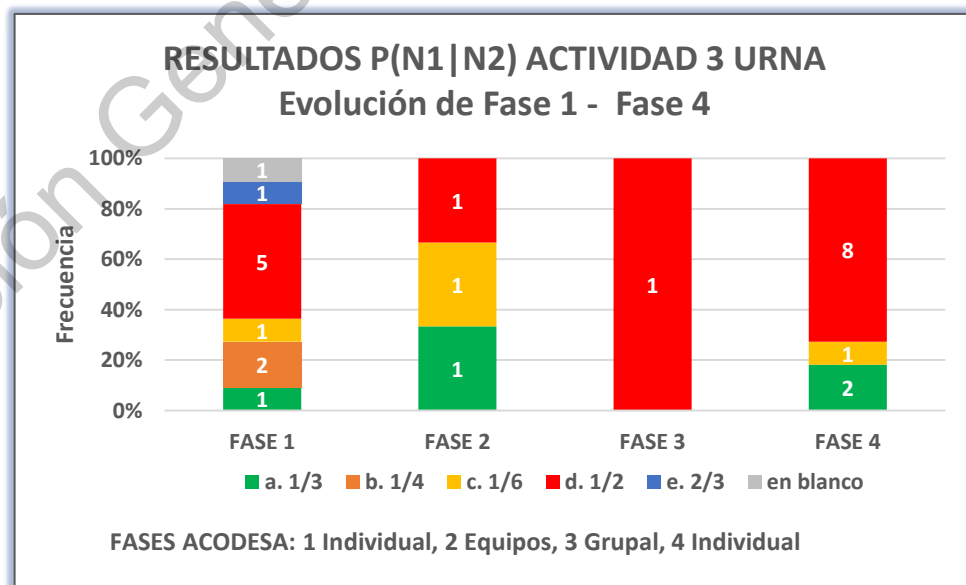
Figura 48. Producciones sobresalientes en la actividad 3. Fase 1 & fase 4.

Elaboración propia

A continuación, lo mencionado previamente en la sección, se puede observar gráficamente en la evolución de las respuestas de los estudiantes en la actividad 3 de la urna. La gráfica 3 corresponde a las respuestas del inciso b) $P(N2|N1)$; mientras que la gráfica 4 son las respuestas del inciso c) $P(N1|N2)$ donde se suele evidenciar el sesgo causal.



Gráfica 3. Evolución de la respuesta de la actividad 3 b) $P(N2|N1)$. Fase 1 a la Fase 4
Elaboración propia



Gráfica 4. Evolución de la respuesta de la actividad 3 c) $P(N1|N2)$. Fase 1 a la Fase 4
Elaboración propia

Con respecto a la actividad 4, de la cual no hubo ninguna simulación, no hubo evolución positiva y simplemente el hecho de estar acostumbrados a tener más información en los problemas por la forma determinística en que se les enseña la probabilidad, les lleva a pensar que si no les dan puntualmente con valores predeterminados, los datos del problema, no lo pueden calcular. Aquí es donde más claramente se ve que siempre trabajaron en equipos desde la fase 1 particularmente el equipo EQ1⁵¹ conformado por los integrantes: E01, E02, E03, E07 y E10; donde 4 de sus 5 integrantes (E02, E03, E07 y E10) no modificó su primera producción y el integrante restante (E01) intercambié su puesto con el único que en la fase 1 resolvía acertadamente el inciso b) y en la fase 4 (E02). El estudiante E01 es convencido por el resto de su equipo y ahora resuelve ambos incisos de manera inadecuada. Las argumentaciones para no resolver la actividad 4 se muestran a continuación.

Actividad 4	FASE 1 (E03)
b) Calcula la probabilidad de que un joven sea Ingeniero si su padre es Ingeniero:	No puedo calcularla, no conozco datos.
c) Calcula la probabilidad de que un padre sea Ingeniero dado que su hijo es Ingeniero:	No sé, no conozco los datos.
d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en los incisos b) y c)?	Porque carezco de información.
	FASE 4 (E03)
b) Calcula la probabilidad de que un joven sea Ingeniero si su padre es Ingeniero:	No se puede calcular sin datos.
c) Calcula la probabilidad de que un padre sea Ingeniero dado que su hijo es Ingeniero:	No se puede calcular sin datos.
d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en los incisos b) y c)?	Porque nos faltan los medidos.

Figura 49. Producciones sin evolución en la actividad 4. Fases 1 & 4.
Elaboración propia

⁵¹ Fue justo el único equipo que asistió a todas la fases, siempre se sentaron juntos y a juzgar por sus producciones siempre resolvieron en equipo.

De un participante (E01) que en fase 1 resolvió bien inciso b), pero cayó en sesgo en inciso c), se incrementa a dos participantes (E02 y E11) en la fase 4.

De cinco participantes (E04, E06, E11, E13 y E15) que en la fase 1 resolvieron de forma correcta ambos incisos en la fase 4 disminuye a 3 (E04, E13 y E15) habiéndolo hecho también correctamente en la fase 1.

Actividad 4

E13

b) Calcula la probabilidad de que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero:

$\frac{1}{2}$ puesto que no hay más especificaciones que cambien la probabilidad

c) Calcula la probabilidad de que un padre sea ingeniero dado que su hijo es ingeniero:

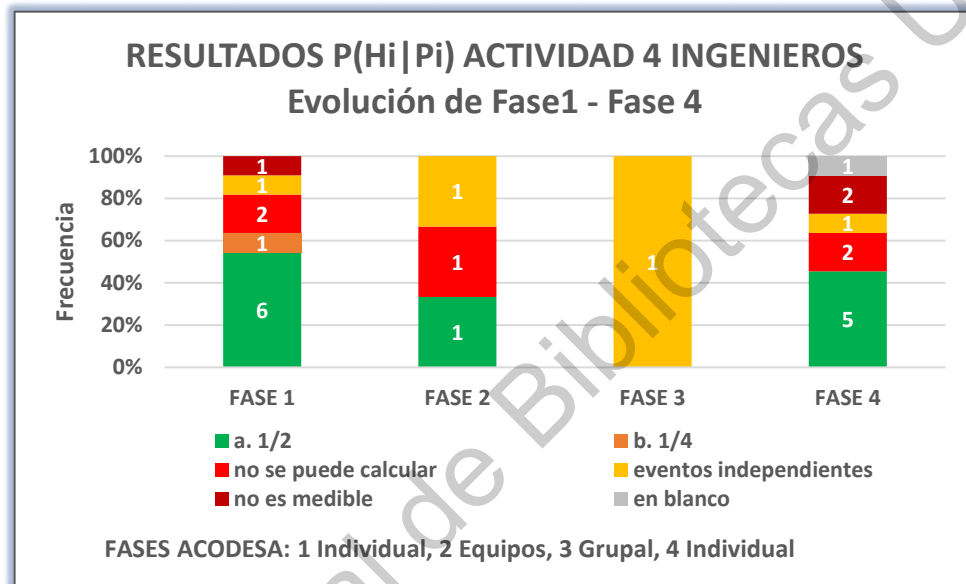
$\frac{1}{2}$ también puesto que el caso es análogo al anterior

d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en los incisos b) y c)?

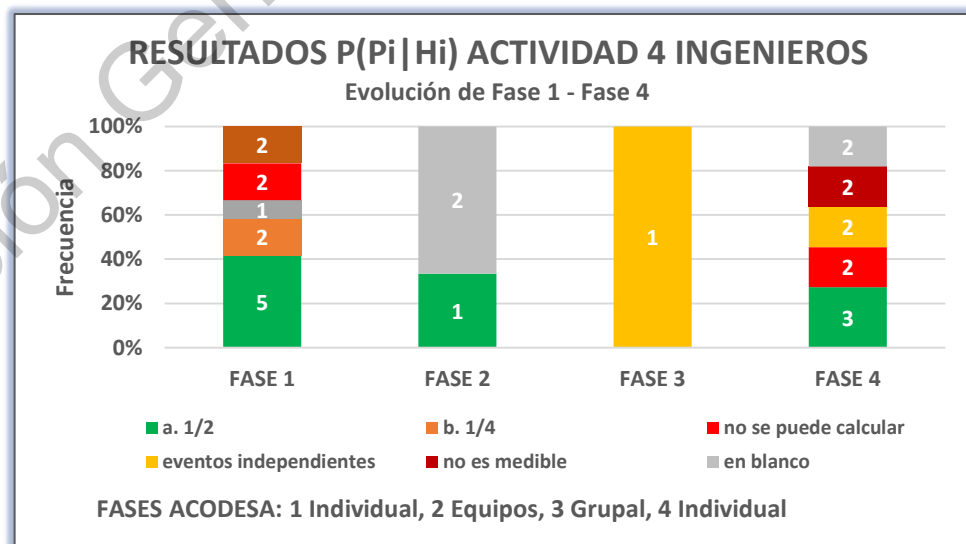
porque no se tienen más especificaciones.

Figura 50. Producción correcta en la actividad 4. Fase 4
Elaboración propia

A continuación, lo mencionado previamente sobre la actividad 4, se puede observar gráficamente en la evolución de las respuestas de los estudiantes. La gráfica 5 corresponde a las respuestas del inciso b) $P(H_i|P_i)$; mientras que la gráfica 6 son las respuestas del inciso c) $P(P_i|H_i)$ donde se suele evidenciar el sesgo causal.



Gráfica 5. Evolución de la respuesta de la actividad 4 b) $P(H_i | P_i)$. Fase 1 a la Fase 4
Elaboración propia



Gráfica 6. Evolución de la respuesta de la actividad 4 c) $P(P_i | H_i)$. Fase 1 a la Fase 4
Elaboración propia

4.7 Fase 5 ACODESA. Institucionalización del concepto

En esta sección se realiza el cierre formal del procedimiento de aplicación ACODESA, que es la institucionalización del concepto de Probabilidad Condicional que llevo a cabo el docente titular del grupo a sus alumnos referente a las cuatro actividades que se trabajaron durante las cuatro fases, con el fin de afianzar los conocimientos adquiridos.

Durante esta fase se precisa que el docente analice las respuestas de los estudiantes en las cuatro fases previas y a partir de éstas retomar las técnicas y las tecnologías más frecuentes que utilizaron los estudiantes para resolver y justificar o argumentar las formas en que resolvieron las actividades, así como los resultados obtenidos.

El deber ser, para llevar a cabo esta fase se requiere que el profesor:

- Haya analizado las producciones de los estudiantes.
- Tenga conocimiento de lo que hicieron los estudiantes en cada una de las actividades, tanto de las técnicas como de las tecnologías
- Organice los errores manifestados por los alumnos con el fin de retomarlos con los estudiantes y aclararlos.

Desde estas referencias el docente debe introducir las técnicas, tecnologías y teorías que debieron utilizarse en la resolución de las tareas y que precisan estar acordes con el nivel educativo.

Hay que resolver y discutir con el estudiante desde su respuesta y cómo la valida. Es necesario contar con un guion que conduzca la clase y que suelen ser cuestionamientos sobre los motivos o posibles explicaciones que condujeron a los estudiantes a manifestar el desempeño registrado en las hojas de trabajo.

- ¿Por qué estas técnicas?, cuestionando ¿Por qué estos procedimientos?
- ¿Por qué estas tecnologías?, cuestionando ¿Por qué estas explicaciones?
- ¿Por qué no teorías?, cuestionando ¿Por qué este uso de propiedades?

Lo anterior con el fin de consolidar los conocimientos adquiridos.

Estas indicaciones para la fase de institucionalización de la metodología ACODESA se justifica debido a que por diversos factores no fue posible presenciar este desarrollo por parte del docente titular. La fase de institucionalización representa una parte importante de la actividad docente debido a la necesidad de realizar una retroalimentación de los conocimientos abordados en las actividades. No es suficiente con brindar las respuestas correctas sino se hace necesario la discusión de los procedimientos (técnicas empleadas) y justificaciones (tecnologías) utilizadas a luz de los errores manifestados. Es en esta fase en donde el docente adquiere mayor presencia en el aula y evidencia su papel como gestor del conocimiento matemático.

CAPÍTULO 5. Conclusiones

El presente capítulo se elaboró con la intención de evidenciar en qué medida se cumplieron los elementos expresados en el planteamiento del problema; es decir, si al término de esta investigación es posible contestar la pregunta de investigación y determinar su alcance, así como, establecer si el objetivo general y los objetivos particulares se lograron y si la hipótesis planteada mostró comprobación no estadística.

Se presentan las conclusiones generales basadas en los resultados obtenidos de las tareas y por fase de implementación ACODESA. Las limitaciones de la secuencia del estudio y propuesta de mejoras centradas en los elementos de oportunidad, dirigidos a fortalecer la comprensión de los estudiantes, con miras a realizar propuestas para la enseñanza de probabilidad en donde suelen aparecer sesgos temporal diacrónico y de causación. Finalmente se presentan las principales aportaciones realizadas y algunas de las futuras líneas de investigación que se derivan del presente trabajo.

5.1 Conclusiones generales sobre los resultados obtenidos en las tareas

Los resultados obtenidos de las cuatro actividades desarrolladas bajo el marco teórico de la TAD e implementados en cada una de las fases del procedimiento ACODESA, nos permiten concluir que los estudiantes:

- Resuelven los problemas de Probabilidad Condicional de manera intuitiva
- No les es fácil identificar eventos e identificarlos todos, haciendo una incorrecta restricción del espacio muestral.
- Si no tienen claro el concepto de Probabilidad Condicional, aunque identifiquen bien los eventos, no identifican que el denominador reduce el espacio muestral.
- Al pedirles que describan eventos, la mayoría lo hace en forma escrita y sin notación matemática, aunque su formación profesional sea de un área relacionada con las matemáticas.

- Muy pocos estudiantes usan el diagrama de árbol como técnica para identificar eventos.
- Ningún estudiante usa Diagramas de Venn, tablas de doble entrada ni diagrama de árbol como técnicas para resolver. Lo previo indica que los estudiantes no se encuentran familiarizados con los diferentes métodos y procedimiento (técnicas) de resolución de estos problemas.
- Los pocos estudiantes que usan como técnica para resolver la fórmula de Probabilidad Condicional, a veces sola la plasman e intentan desarrollar, pero sin sustituir en ningún momento los datos, pues les es difícil identificar a los elementos de la intersección del numerador de la fórmula. En su mayoría después de poner la fórmula escriben inmediatamente después un resultado que no argumentan ni justifican como fue obtenido. Estas manifestaciones de uso casi exclusivo de fórmulas confirman la falta de diversificación respecto a los diferentes métodos para dar solución a un problema. También sugieren que los estudiantes recurren a un único procedimiento a partir de la fórmula de Probabilidad Condicional.
- Los estudiantes no suelen validar sus resultados ni, aunque se les indique de forma escrita en la misma actividad. Esto indica la necesidad de favorecer escenarios en el que el estudiante desarrolle las habilidades de justificación para dar sentido a su propia actividad matemática.

5.2. Conclusiones generales por fase de implementación ACODESA.

Fase 1. Trabajo individual.

Les es más fácil resolver actividades contextualizadas (actividades 2 y 4), donde los datos están fijos y el azar no está presente, usando proporciones y la fórmula de Probabilidad Condicional como técnicas para resolver. El desempeño por actividades fue el siguiente:

- **La actividad 1**, no fue resuelta en forma correcta por ningún estudiante, 8 de ellos se evidencia el sesgo temporal diacrónico y 3 estudiantes dan otra respuesta incorrecta.

- **La actividad 2**, fue resuelta en forma correcta por 2 estudiantes, 8 evidencian el sesgo y 1 estudiante pone una respuesta incorrecta.
- **La actividad 3**, en el inciso b) cuando la información es causal y compatible con el tiempo no suelen presentar problemas y resuelven correctamente 8 estudiantes, 2 confunden con la probabilidad conjunta y 1 confunde la Probabilidad Condicional con la simple. En el inciso c) es donde suele evidenciarse el sesgo temporal diacrónico y el de causación, sólo 1 estudiante (E13) responde correctamente y de hecho fue el único que tuvo un desempeño sobresaliente en las fases 1 y 4.
- **La actividad 4**, sólo el equipo EQ2 (E04, E06 y E13), contestaron todos sus integrantes en forma correcta ambos incisos; el equipo EQ3, dos de sus integrantes (E11 y E15) contentan bien. El EQ1 (E01, E02, E03, E07, y E10) responden de forma incorrecta y solo el E01 contesta bien el inciso b).

Fase 2: Trabajo en equipos. En esta fase se esperaba mejoraran las respuestas al ser enriquecidas por las argumentaciones de cada integrante en su equipo respectivo. También podían quedarse sin evolución, si los integrantes del equipo tenían ideas parecidas de solución de las actividades o incluso empeorar si algún integrante con conceptos no estructurados que inciden en la Probabilidad Condicional, convencía al resto de su equipo con buenos argumentos que la forma en la que él resolvió es la correcta. El desempeño por actividades fue el siguiente:

- Se pudo observar que el equipo EQ1 conformado por los integrantes: E01, E02, E03, E07 y E10, no tuvo un buen desempeño en la resolución de las cuatro actividades, logrando contestar de manera asertiva sólo el inciso b) de la actividad 3.
- El equipo EQ2, cuyos integrantes eran: E04, E06 y E13, fue el que tuvo el mejor desempeño en esta fase, con las actividades 2 y 4 resueltas correctamente y la actividad 3 en el inciso b). Sigue evidenciando el sesgo en la actividad 1. Pero se aprecia una mejoría de la fase 1 a la fase 2, al lograr responder ya la actividad 2 de manera correcta.
- El equipo EQ3 con sus integrantes: E11, E14 y E15, resolvieron en forma correcta la actividad 2 y el inciso c) de la actividad 3.

Fase 3: Debate. En esta fase se esperaba que se generara una discusión al momento de ir contestando la simulación que fue proyectada una sola vez a todo el grupo. El debate fue abierto a todo el grupo, se anota lo más importante y se graba un audio como evidencia de lo que ocurre en el mismo.

Durante esta fase, solo 3 estudiantes respondían y justificaban de manera correcta sin darle oportunidad a los demás estudiantes de razonar el porqué de las respuestas.¹ En esta fase la Producción el estudiante E14, se ofreció a plasmar lo acordado en el debate en cada una de las actividades una vez concluida la simulación; sin embargo, lo que termino plasmando fue lo que él comprendió de cada una de las actividades y de hecho es igual a lo que plasmó en sus producciones de la fase 4.

Fase 4: Auto-Reflexión. En este proceso individual² de reconstrucción para confirmar lo desarrollado y alcanzado respecto a los en el debate y ya habiendo visto la simulación. El desempeño por actividades fue el siguiente:

- **La actividad 1**, de la cual se resolvió mediante la simulación en la fase 3, si se observa una notable mejoría respecto de la fase 1, pues ya responden en forma correcta 7 alumnos; mientras que en la fase 1 nadie lo hizo.
- **La actividad 2**, de la cual no se tuvo simulación, pero que podía ser resuelta como la actividad 1, ya que por ser actividades concatenadas comparten la misma estructura, solo deberían haber ajustado a los datos ya dados y fijos de ésta actividad trasladando el conocimiento adquirido. Sin embargo se confunden y todos contestan de forma incorrecta cayendo en el sesgo temporal diacrónico 7 estudiantes, 5 de ellos integrantes del EQ1 y 2 del EQ2. Los restantes ponen $\frac{2}{3}$ no tomando en cuenta que ya hay datos establecidos y no es como la actividad anterior donde el azar estaba presente.
- **La actividad 3**, el EQ1, quedo prácticamente igual que en la fase 1, solo el E01 que antes respondió bien ahora en esta fase lo hace de manera incorrecta y el estudiante E02 a la inversa de la situación de E01. Este equipo

¹ Ver limitaciones del estudio

² Aunque se les dijo era una actividad individual, se pudo observar por sus producciones que las hicieron con el equipo que conformaron en la fase2.

en la fase 1 ninguno uso alguna técnica para resolver y en esta fase 4 tres de sus integrantes (E2, E3 y E7)³ siguen sin usar ninguna técnica. El EQ2 mejora al logra dos de sus integrantes (E06 y E13) responder correctamente ambos incisos de la actividad. El EQ3 en cambio ninguno resuelve en forma correcta esta actividad, confunden los tres integrantes (E11, E14 y 15) en el inciso b) la Probabilidad Condicional con la conjunta y en el inciso c) los tres caen en el sesgo y no tienen en cuenta el condicionamiento a un suceso que ocurre posteriormente, mostrando la falacia del eje.

- **La actividad 4**, Los equipos EQ1 Y EQ3, quedaron igual que en la fase 1 de la misma actividad, a excepción del estudiante E11 que en esta fase ahora resuelve de manera incorrecta respondiendo “0”. El EQ2, de 3 estudiantes que resolvían acertadamente, ahora el E06 no contesta.
- En general, se puede observar que el mejor desempeño lo tuvo el EQ2, donde todos sus integrantes responden en forma correcta las actividades 1, 3 y 4, con excepción del E04 que confunde la Probabilidad Condicional con la conjunta al poner por respuesta $1/6$ en ambos incisos de la actividad 3. En la actividad 2 (E06 y E13) cometen sesgo y E04 no contesta nada. Su integrante E13 fue el que contesto las actividades 1, 3 y 4 de manera correcta.
- El segundo equipo en progreso fue el EQ3, ya que las actividades 2 y 3 las resuelven todos de forma incorrecta.
- El EQ1, no mostró evolución con respecto a la fase 1. Se observó carencia de técnicas para resolver y necesidad de consolidar conceptos que inciden en la Probabilidad Condicional.

Las conclusiones previas sugieren la necesidad de incorporar elementos específicos en las tareas y actividades que se les proponen a los estudiantes. Tareas que permitan estudiar y superar los sesgos (errores) sobre Probabilidad Condicional en los estudiantes. También que promuevan diferentes métodos de solución tal como se evidenció en el análisis a priori de estas tareas que se

³ Esos tres integrantes contestaron la fase 1 y la fase 4 en equipo, cuando se les dijo era individual, de hecho la fase 4 son casi idénticas las repuestas de esos tres integrantes como se observa en la figura 49 del capítulo 4.

implementaron en el aula. Asimismo, que también permita llevar a los estudiantes a reflexionar sobre sus propios procedimientos (técnicas) a partir de desarrollar sus habilidades de justificación (tecnologías).

La metodología ACODESA resulta sustancial para la consolidación de los conceptos, en este caso, de la Probabilidad Condicional. Es un proceso cíclico que permite al estudiante estudiar el problema en diferentes momentos. Sin embargo, las cuestiones temporales y habilidades de análisis y discusión de los alumnos son elementos que intervienen en su efectividad. Con base en las conclusiones, se evidencia una necesidad de incorporar escenarios de discusión o debate basados en propiedades de las matemáticas que permita a los estudiantes desarrollar competencias analíticas y de pensamiento crítico.

5.3 Limitaciones de la secuencia y aplicación de actividades y propuesta de mejoras

La investigación presenta algunas limitaciones tales **como el acceso y el tamaño de la muestra, en primera instancia**, por la dificultad de encontrar un grupo que ya hubiera visto el tema de Probabilidad Condicional y que accediera a participar en la investigación debido al tiempo requerido en el procedimiento de la implementación. **En segunda instancia**, el tamaño de la muestra, pues a pesar de haber iniciado con una muestra más amplia, 24 alumnos, se tuvo que reducir quedando sólo 11 estudiantes que fueron los que completaron las cuatro primeras fases.

Una **segunda limitación** fue **el tiempo de aplicación** pues no fue el suficiente para la realización de la implementación. Con más tiempo disponible se les debe hacer hincapié en desarrollar fórmulas y utilizar otros métodos de solución, escribir procedimientos y sobre todo que argumenten y/o validen sus técnicas y resultados.

La tercera limitación fue que al no contar con un laboratorio de cómputo, ni que cada uno de los participantes pudiera llevar una computadora portátil, se les proyectó a todo el grupo la simulación y aunque por una parte fue práctico y ahorro tiempo, no es conveniente porque no se les da la oportunidad a cada uno de los estudiantes de pensar y madurar sus ideas para contestar lo que se le cuestiona en

la simulación, ya que el programa no permite avanzar hasta haber dado una respuesta correcta. Esto ocasionó que solo dos o tres estudiantes de la muestra contestaran ocasionando que el resto de los estudiantes no entendieran las razones de las respuestas, porque no tienen afianzados los conocimientos que se requieren y necesitan ir a su propio ritmo para lograr una mejor comprensión.

Una **cuarta limitación** se da porque se observó que algunos participantes siguieron respondiendo en equipo, situación evidenciada en sus hojas de resolución donde hay respuestas exactamente iguales en todos los incisos de las cuatro actividades proporcionadas en las fases uno y cuatro.

Una **quinta limitación** fue no contar con el apoyo de colegas que fungieran como observadores no participantes para tener un mejor control de las intervenciones de los estudiantes en la fase 3 del debate, mediante anotaciones pertinentes de la evolución de la misma a la par que se desarrollaba el debate.

Una **sexta limitación** se dio por la interrupción en la intervención de la fase 5 debido a la pandemia y no se pudo coincidir con el profesor titular para la recolección de los datos.

Estas limitaciones podrían subsanarse poniendo como parte del curso regular de probabilidad un taller donde se aplique esta propuesta con duración total de cinco horas, una hora para implementación de cada fase⁴. El taller podría ser aplicado en el laboratorio de cómputo, donde previamente se hayan instalado el *Software* DescartesJS y la simulación creada. De esta manera, se expondría de forma individual a los estudiantes a dar solución a las actividades uno y tres en la simulación a su propio ritmo y con ello lograr una mejor comprensión, lo que facilitaría el traslado del conocimiento al resolver en papel en la cuarta fase de ACODESA.

También se puede evitar que los alumnos que suelen sentarse cercanos a sus amigos y por lo mismo elegirlos parte de su equipo al permitir que sea por indicación del docente el lugar donde deberán sentarse en cada fase, evitando así que sigan

⁴ Contando hasta la fase 4, pues la fase 5 es la institucionalización del conocimiento y es proporcionada por el docente a cargo del grupo

resolviendo en equipo o influenciar las respuestas cuando lo que se quiere es ver la evolución personal sobre la comprensión del concepto.

Para subsanar la limitación dada por el contexto específico de la pandemia se dan recomendaciones en la fase 5 de cómo se debió llevar a cabo la institucionalización del conocimiento.

5.4 Conclusiones respecto a la pregunta y objetivos de investigación

Los resultados obtenidos respecto a la pregunta de investigación: ¿Cómo comprenden la Probabilidad Condicional los estudiantes universitarios?, nos permiten concluir que, los estudiantes tienen una comprensión muy intuitiva de la Probabilidad Condicional y que cuando no se tienen consolidados los conceptos inherentes a esta, les es difícil resolver las actividades propuestas. Lo previo tiene su justificación en las metodologías deterministas que suelen utilizarse en el aula para la enseñanza de la probabilidad.

Comprenden de acuerdo con su grado de entendimiento de los conceptos asociados a la Probabilidad Condicional.

Aunque las actividades estaban concatenadas en ambos sesgos, la actividad 2 tiene la misma estructura de fondo que la actividad 1, y lo identifican⁵ no les es fácil trasladar lo aprendido en el proceso de debate y la simulación para resolver y adecuarlo a los datos ya dados y fijos de la segunda actividad. Ponen por resultado la respuesta de la primera actividad $\frac{2}{3}$, y caen en el sesgo al no tomar en cuenta el todo el espacio muestral pues dejaron fuera el canal (II, B).

Las actividades 3 y 4, cuya intención era evidenciar el sesgo de causación y también estaban concatenadas, a pesar de haber visto la simulación en la actividad 3 solo se logró confundir a los alumnos que no tienen bien consolidados los conceptos y no desarrollan ni usan la fórmula de Probabilidad Condicional, ni algún otro método para resolver. El EQ3, ninguno de sus integrantes contesta en forma correcta ambos incisos. En la actividad 4 que en el inciso b) media razonamiento causal y en el c) relación diagnóstica, el EQ1, un integrante del EQ2 (E06) y uno del EQ3 (E14)

⁵ Ver el audio equipo página 99 y 100 del capítulo 4.

ponen respuestas como “No es medible”, “no se puede calcular sin datos”, “no podemos saberlo, porque no tenemos datos exactos” y “no podemos calcularlo con los datos que tenemos”, sólo muestran un reflejo de la forma determinista en la que les enseña la probabilidad.

El logro de los objetivos específicos permitió cumplir el objetivo general de esta investigación de caracterizar la actividad matemática que presentan los estudiantes universitarios al resolver problemas de Probabilidad Condicional al decir en forma puntual que hace y cómo lo hace.

5.5 Conclusiones respecto a la hipótesis

De acuerdo con la pregunta de investigación planteada: ¿Cómo comprenden la Probabilidad Condicional los estudiantes universitarios?, se propuso la siguiente hipótesis: Los estudiantes son capaces de evidenciar errores de temporalidad diacrónica y causalidad, con mayor facilidad, en situaciones de Probabilidad Condicional contextualizadas.

La hipótesis se rechaza en las actividades de sesgo temporal diacrónico (actividades 1 y 2), ya que, sólo dos estudiantes resuelven correctamente la actividad 2 en la fase 1, empleando para ello la fórmula de Probabilidad Condicional; sin embargo aunque el resto de los estudiantes no llega a la respuesta correcta al tener datos específicos en las actividades, suelen emplear otras técnicas para resolver como son las proporciones y la lógica. Por otra parte, en la fase 4, después de haber visto la simulación les resultó más fácil resolver correctamente la actividad 1 descontextualizada y también se observó que ningún estudiante resuelve correctamente la actividad 2.

La hipótesis, sólo se acepta para la actividad 4, atingente al sesgo de causación, donde 5 de 11 estudiantes (EE04, E06, E11, E13 y E15) resuelven correctamente ambos incisos en la fase 1, y sólo 1 estudiante (E01) responde en forma correcta el inciso b). Por otra parte, en la fase 4, se observa la misma tendencia; 5 estudiantes (E02, E04, E13, E11 y E15) son capaces de identificar el sesgo, de los cuales 3

(E04, E13 y E15) lo hacen en ambos incisos, mientras que los otros 2 (E11 y E02) siguen cometiendo el sesgo.

5.6 Aportaciones y líneas de investigación abiertas

En la literatura en Didáctica de las Matemáticas se pueden encontrar muchos estudios que se han hecho para evidenciar los sesgos en la Probabilidad Condicional y las razones de los mismos; pero no hay ninguno en que se conjunten en su metodología el marco teórico de la TAD de Chevalard y el procedimiento ACODESA para su implementación.

Lo que motivo a hacer esta investigación guiada bajo esa metodología fue porque el marco teórico de la TAD permite separar de una manera completa cada una de las actividades propuestas gracias a las praxeologías matemáticas: tarea, técnica, tecnología y teoría. Con ello se puede ver a detalle como comprenden la Probabilidad Condicional los estudiantes y focalizar en qué parte del conocimiento se requiere incidir para lograr su correcta comprensión y solución. Permite ver las diferentes técnicas que les han enseñado para resolver y si hay patrones de enseñanza en este tipo de problemas que pudieran estar dadas de manera institucional. Las teorías, si es que emergen, nos hablarían del grado de completitud con que se les enseñó la Probabilidad Condicional.

El utilizar el procedimiento ACODESA en la implementación, aplicando las mismas actividades bajo la TAD en cada una de las cinco fases, permite ver la evolución de la comprensión de la Probabilidad Condicional identificando si lograron corregir o no los sesgos en la cuarta fase que se hayan manifestado en fases previas.

Una de las aportaciones de este trabajo se obtienen gracias a la metodología empleada haciendo posible detectar los puntos a incidir para lograr que los estudiantes resuelvan de manera correcta problemas de Probabilidad Condicional en cada una de las praxeologías y son:

Hacer mayor énfasis en los conceptos asociados a la Probabilidad Condicional para consolidarlos en la comprensión del estudiante antes de enseñarles el tema y son:

- Experimento
 - Experimentos con y sin reemplazo
 - Azar
 - Identificación de eventos
 - Probabilidad de eventos
 - Espacio muestral y sus características
 - Concepto de independencia
 - Probabilidad simple
 - Probabilidad conjunta
 - Probabilidad marginal
 - Probabilidad condicional y reducción del espacio muestral
- En cuanto a las técnicas⁶, que son las maneras y las herramientas que utilizaron los estudiantes para resolver las actividades propuestas, se observó que sólo algunos utilizaron el diagrama de árbol para describir los eventos; pero no lo usaron como herramienta para calcular la Probabilidad Condicional pedida.
Sólo algunos estudiantes pusieron la fórmula de Probabilidad Condicional, pero solo un estudiante la plantea en forma completa y correcta; sin embargo, ninguno la desarrolla para calcular el resultado y simplemente plasman el resultado obtenido sin dejar plasmado sobre el papel ninguna evidencia del cálculo matemático que usaron para llegar a él, lo que evidencia que aunque saben identificar eventos no saben obtener su intersección, ni que hay un cambio en el espacio muestral y se debe reducir a la probabilidad del evento condicionante. Es decir no la saben aplicar, resolver ni interpretar.
Un resultado importante es que en la cuarta actividad donde se les pide calcular la probabilidad de que un joven sea ingeniero dado que su padre es ingeniero y viceversa, donde la Probabilidad Condicional se presenta en un contexto social, todos los estudiantes contestaron de forma intuitiva usando acaso probabilidad simple y deducción lógica, se manifiestan en ellos muchas ideas preconcebidas junto con la creencia de que hace falta

⁶ Ver Anexo V

información, que no es medible o que no se puede calcular, lo que evidencia una clara incomprensión e interpretación de conceptos que inciden directamente en la Probabilidad Condicional. En ninguna de las cuatro fases escribieron siquiera la fórmula de Probabilidad Condicional en dicha actividad.

Se sugiere la enseñanza de más herramientas que les sirvan de apoyo para una correcta solución como las tres primeras del listado siguiente que son las “clásicas” y pueden ser enseñadas en el aula de clases tradicional, las restantes⁷ que son nuevas herramientas propuestas por otras investigaciones y algunas requieren del uso de computadora:

- Diagramas de Venn
- Diagramas de árbol asignándoles probabilidades
- Tablas de doble entrada
- Representaciones diagramáticas
- Pachinkograma
- Eikosograma
- Simulaciones comerciales disponibles u otros recursos de Internet¹
- Usar la simulación creada para esta investigación⁸
- Las tecnologías, que son las maneras de argumentar o validar sus técnicas son muy escasas, y son el reflejo de la mala comprensión que tienen de las actividades planteadas aunado a la falta de herramientas para resolver pues no saben justificar la forma utilizada al resolver. Una vez más se ve la necesidad de tener bien consolidados los conceptos asociados a la Probabilidad Condicional y la necesidad de enseñarles más herramientas para resolver.
- Las teorías son raramente reportadas en las investigaciones pues no suelen ser evidenciadas por los estudiantes a menos que sean de formación de matemáticas puras donde están acostumbrados a hacer demostraciones y para hacerlas requieren habilidad para aplicar teoremas, lemas, corolarios,

⁷ Ver anexo V

⁸ Sólo para los sesgos temporal diacrónico y de causación.

axiomas y definiciones como argumentos formales para justificar rigurosamente las tecnologías. En esta investigación solo dos estudiantes hicieron referencia a ellas uno al mencionar el espacio muestral y otro el concepto de independencia.

- Para lograr que los estudiantes comprendan y aprendan a resolver problemas que suelen evidenciar sesgos de tipos temporal diacrónico y de causación es necesario exponerlos a resolver problemas de este tipo.

Otra aportación de la investigación fue la creación de una simulación de elaboración propia desarrollada en el *software* DescartesJS como herramienta de apoyo para las actividades uno y tres.⁹

La simulación de la actividad uno, de las canicas o el problema de Ojeda (1995), si les fue de ayuda tener un apoyo visual de cómo en forma aleatoria las canicas que se dejaban caer por “E” se iban por los dos canales I y II, y si al pasar por II se iban por el canal izquierdo o derecho para finalmente salir por R o B ya que podían ver como se incrementaba el número de canicas en forma de dígitos que habían pasado por cada uno de los canales antes mencionados. Esto permitió tener una idea de la proporción de canicas que terminaban cayendo por “R” o por “B” y de manera intuitiva, sin usar la fórmula de Probabilidad Condicional, dar el resultado correcto.

La simulación de la actividad tres, la urna de Falk, al igual que la simulación anterior sólo 2 o tres estudiantes iban respondiendo a las preguntas hechas en la misma y que se les pedía respondieran, como esos pocos estudiantes daban las respuestas correctas se avanzaba de manera rápida, razón que pudo ocasionar que quienes no tienen bien afianzados los conocimientos asociados a la Probabilidad Condicional simplemente no pudieran acabar de comprender la razón de los resultados obtenidos

Los estudiantes respondieron a un breve cuestionario¹⁰ que se les pidió contestaran al final de la cuarta fase para saber si el haber visto la simulación les había ayudado a entender la actividad propuesta y la respuesta general fue que ver físicamente lo

⁹ Se adjuntará la simulación

¹⁰ Ver anexo IX

que ocurre les ayudó a entender mejor lo que se les pedía resolver, también les ayudo a darse cuenta si habían resuelto incorrectamente la actividad en etapas previas y en consecuencia corregir sus respuestas.

Sin embargo, se pudo observar que la simulación no le ayuda de mucho a los estudiantes que no entienden bien los conceptos relacionados con la Probabilidad Condicional; desde la identificación misma de los eventos que conforman el espacio muestral, porque aunque lo entendieron al ver la simulación al momento de pedirles que contesten nuevamente la actividad de manera individual no les es posible trasladar la nueva información proporcionada en la simulación porque no saben ni plantear la fórmula de Probabilidad Condicional.

Líneas de investigación abiertas

Al concluir el análisis surgen nuevas preguntas, ideas y vías de trabajo.

Dado que la metodología ACODESA puede aplicarse a cualquier grupo de estudiantes universitarios, sería interesante hacerlo con un grupo que estuviera estudiando por primera vez la Probabilidad Condicional. Se podría utilizar actividades que estudien los sesgos, es decir, con estructura similar, pero usando otros contextos para ver los efectos de la implementación.

Otra línea de investigación podría ser aplicar la fase uno y cuatro de ACODESA y entre ellas darles a resolver de manera individual la simulación con el fin de reducir la implementación de las actividades, pues en este estudio se pudo observar que el trabajar en un equipo cuyos miembros tienen débiles conocimientos de conceptos asociados a la Probabilidad Condicional, no permite una evolución que posibilite corregir los sesgos.

Otra posible línea de trabajo consiste en desarrollar otras simulaciones de los otros sesgos que no se abordaron en este trabajo de investigación.

5.7 Publicación derivada del estudio

Lino González, M. (2020). Comprensión de la Probabilidad Condicional a través de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Pãdi. Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería*, 4 (1) n7, 1-9.

Referencias Bibliográficas

Acosta, F., Ruiz, E.R. (2017). Respuestas intuitivas de alumnos de ingeniería, un primer acercamiento al pensamiento rápido en probabilidad. *Revista Latinoamericana de Educación Física*, 11(3), 33061- 33066.

Acosta F., Ruiz E.R. y Rojas J. (febrero de 2019). Idoneidad de un curso de probabilidad en la carrera de telemática en una escuela de ingeniería del Instituto politécnico Nacional. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Se transmitió por videoconferencia desde el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada, España. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Barragués, J. I. y Guisasola, J. (2009). Una propuesta para la enseñanza de la probabilidad en la universidad basada en la investigación didáctica. *Educación matemática*, 21(3), 127-162.

Bastias, H. Alvarado, H. y Retamal, L. (2017). Explorando el significado intuitivo de probabilidad en profesores de matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista digital matemática, educación e Internet*, 12(2), 1-13.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2006). *Research on Teaching and Learning Probability*. Switzerland: Springer Open

Batanero, C., Díaz, C. (2006). Análisis del proceso de Construcción sobre Probabilidad Condicional. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(2), 197-223.

Batanero, C., Gea, M. M. (2018). El riesgo como contexto en la enseñanza de la probabilidad condicional. En L.A., Serna, D., Páges (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 125-132). Llevado a cabo por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, DF, México.

Batanero, C., Godino, J.D., Green, D.R., Holmes, P., y Vallecillos, A. (1998). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics*, 25(4), 527-247.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2, 5-27.

Budget, S. and Pfannkuch, M. (2016). Visualising chance: Learning probability through modeling. *Teaching & learning research initiative*. 1-25.

Castela, C. (2017). La teoría antropológica de lo didáctico: Herramientas para las ciencias de la educación. *Acta Herediana*, 59, 8-15.

Chevallard Y., (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Researches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.

Inzunsa, S. Huerta, P. (2013). Dificultades de estudiantes mexicanos que concluyeron el bachillerato para resolver problemas ternarios de probabilidad condicional. En Contreras, J., Cañadas, M., Gea, M., Arteaga P. (Eds.), *Actas de las 1^{as} Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. (pp. 205-212). Granada, departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Dagger, D., O'Connor A. y Lawless, S. (2007). Service-oriented e-learning platforms: from monolithic systems to flexible services. *IEEE Internet Computing*, 11(3), 28-35.

- Díaz, C., Batanero, C. (2005). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. Reflexiones desde el marco de la TSF. Dialnet. **(Eds.) Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas**, (pp. 15-40). Jaén, España.
- Díaz, C., y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Épsilon*, 59, 245-260.
- Díaz, C., y de la Fuente, I. (2007). Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional. *Revista electrónica de metodología aplicada*, 12(1), 1-15.
- Díaz, C., Contreras, J., Batanero C., Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Bolema*, 26 (44), 1207-1225
- Estrada, A., Díaz, C., de la Fuente, I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios, *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Universidad de Zaragoza, España.
- Elizarrarás, Saúl (2005). Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en segundo grado de secundaria. En Lezama, Javier; Sánchez, Mario; Molina, Juan Gabriel (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 71-78). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Giuliano M., Pérez S., Falsetti M., González J.A. (2019). Diseño experimental para la evaluación de aprendizajes de la estadística con la plataforma e-status. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Se transmitió por videoconferencia desde el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada, España. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Hitt, F., González-Martín, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational studies in mathematics*, 88(2), 201-219.

Laborde, J., Salvatierra, D., Borbor, R., Salazar, C. (2019). Proceso de enseñanza para el aprendizaje de análisis de probabilidad en base a su aplicación en casos de la vida real con el lenguaje de programación R y RStudio. *Ecuadorian Science Journal*. 3 (1), 1-7.

León, O. y Montero, I. (2003). *Métodos de una investigación en psicología y educación*. España: Mc Graw Hill.

Lonjedo, M. y Huerta, M.P. (2004). Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional: su uso para la investigación y el análisis de textos. Investigación en educación matemática: *Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)*. ISBN 84-9749-120-3, (pp. 229-238). Coruña, España.

López, M. (2011) Temporalidad y relaciones de inclusión: el procesamiento de la regla condicional en la tarea de selección y sus dificultades. *Alpha*. (32), 215-234.

Magallanes y Rodríguez. Significado de la probabilidad condicional en libros de textos de nivel medio. *Yupana* 6 (11), 23-38.

Mejía, G., Sierra L.Y., Fernández F., (2014). Influencia del contexto y la estructura en la actuación de los estudiantes al resolver problemas de probabilidad condicional. *Revista de Didáctica de las matemáticas*. 86, 95-100.

- Podworny, S. (2016). Design of a Course for learning probability via simulation with TinkerPlots. *13th International Congress on Mathematical Education Hamburg*.(pp. 1-8). University of Paderborn, Germany.
- Pollatsek, A., Well, A.D., Konold, C., Hardiman, P., Cobb, G. (1987). Understanding conditionals probabilities. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255-269.
- Puloka, M.S. and Pffankuch, M.,(2018).Year 13 student's reasoning from eikosogram: an exploratory study. *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS10, July, 2018). Kyoto, Japan.*
- Rincón, L. (2006). *Una introducción a la probabilidad y estadística*. México: Editorial UNAM.
- Sánchez, E (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación matemática*, 21(2), 39-77.
- Sullivan Michael III, 2016, *Statistics. Informed Decisions Using data*. Joliet Junior College, Illinois: Pearson.
- Tarr, J. E. & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, (pp. 216–238). New York, NY: Springer.
- Vega-Amaya, O. (2002). Surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad. *Apuntes de historia de las matemáticas*, 1 (1), 54-62.
- Vogel, M., Böcherer-Linder, K. (2018). The effect of visualizing statistical information in bayesian reasoning problems. In M. A. Sorto, A. White, & L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS10, July, 2018)*, Kyoto, Japan.
- Wasserman Larry, 2005. *All of Statistics. A concise course in Statistical Inference*. USA: Springer.

Weber, P., Krauss, S. and Binder, K. (2018). Frequency phobia in spite of probability blindness. In M. A. Sorto, A. White, & L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS10, July, 2018), Kyoto, Japan.*

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Anexos

Anexo I. Carta de consentimiento informado para el docente

Querétaro, Qro. ____ de _____ de ____

CARTA DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

La investigación a la cual se le invita a su grupo a participar es con objetivo de recabar datos para hacer una investigación educativa con el fin de la elaboración de tesis de Maestría en Didáctica de las Matemáticas. En dos intervenciones con un tiempo estimado de dos hora cada una, se aplicarán cuatro actividades relacionadas con la Probabilidad Condicional.

Yo _____, docente de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, acepto de manera voluntaria que se incluya mi grupo como sujeto de estudio en el proyecto de investigación: Análisis de la comprensión de la Probabilidad Condicional en estudiantes universitarios, y en el entendido de que:

- Mi participación como docente no repercutirá en mis actividades ni evaluaciones programadas en mis cursos.
- No habrá ninguna sanción para mí en caso de no aceptar la invitación.
- Puedo retirarme del proyecto si lo considero conveniente a mis intereses, aun cuando el investigador responsable no lo solicite; pudiendo si así lo deseo, recuperar toda la información obtenida de mi participación.
- No haré ningún gasto, ni recibiré remuneración alguna por la participación en el estudio.
- Se guardará estricta confidencialidad sobre los datos obtenidos producto de mi participación, con un número de clave que ocultará mi identidad.
- Puedo solicitar, en el transcurso del estudio información actualizada sobre el mismo, al investigador responsable.

Lugar y Fecha:

Nombre y firma del participante:

Nombre y firma de quien proporcionó la información para fines de consentimiento:

Anexo II. Carta de consentimiento informado para los estudiantes

Querétaro, Qro. ____ de _____ de ____

CARTA DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

La investigación a la cual se le invita a participar es con el objetivo de recabar datos para hacer una investigación educativa con el fin de la elaboración de tesis de Maestría en Didáctica de las Matemáticas titulada: "Análisis de la comprensión de la Probabilidad Condicional en estudiantes universitarios". Dicha participación consta de dos intervenciones con un tiempo estimado de dos hora cada una, se aplicarán cuatro actividades relacionadas con la Probabilidad Condicional.

Yo _____, alumno (a) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro y de ____ años de edad, acepto de manera voluntaria que se me incluya como sujeto de estudio en el proyecto de investigación: Análisis de la comprensión de la Probabilidad Condicional en estudiantes universitarios, y en el entendido de que:

- Mi participación como alumno no repercutirá en mis actividades ni evaluaciones programadas en mis cursos.
- No habrá ninguna sanción para mí en caso de no aceptar la invitación.
- Puedo retirarme del proyecto si lo considero conveniente a mis intereses, aun cuando el investigador responsable no lo solicite; pudiendo si así lo deseo, recuperar toda la información obtenida de mi participación.
- No haré ningún gasto, ni recibiré remuneración alguna por la participación en el estudio.
- Se guardará estricta confidencialidad sobre los datos obtenidos producto de mi participación, con un número de clave que ocultará mi identidad.
- Puedo solicitar, en el transcurso del estudio información actualizada sobre el mismo, al investigador responsable.

Lugar y Fecha:

Nombre y firma del participante:

Nombre y firma de quien proporcionó la información para fines de consentimiento:

Anexo III. Carta de confidencialidad para el estudiante

Querétaro, Qro. _____ de _____ de _____

CARTA DE CONFIDENCIALIDAD

Conste por el presente documento que Yo: Montserrat Lino González, en mi carácter de: Estudiante de la Maestría en Didáctica de las Matemáticas, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, es mi obligación respetar la privacidad del participante y mantener la confidencialidad de la información que se derive en consecuencia de la investigación para la elaboración de la tesis: “Análisis de la comprensión de la Probabilidad Condicional en estudiantes universitarios”

Me comprometo indefinidamente a:

1. Mantener la reserva y confidencialidad de dicha información.
2. No divulgar a terceras personas físicas o morales el contenido de la información.
3. No usar la información directa o indirectamente en beneficio propio o de terceros, excepto para cumplir a cabalidad la investigación relacionada al trabajo de tesis.
4. No revelar total ni parcialmente a ningún tercero la información obtenida como consecuencia directa o indirecta de las conversaciones a que hayan habido lugar.
5. No enviar a terceros, archivos que contengan la información del participante a través de correo electrónico u otros medios a los que tenga acceso, sin la autorización respectiva.
6. En general, guardar reserva y confidencialidad de los asuntos que lleguen a mi conocimiento con motivo del trabajo de investigación que desempeño y en específico a la información precisada.

En caso de incumplimiento de lo estipulado en el presente documento, me someto a las sanciones estipuladas por la Universidad Autónoma de Querétaro.

Nombre y firma

Anexo IV. Instrumento de recolección de datos

El instrumento de recolección de datos estuvo conformado por cuatro actividades, diseñadas bajo el marco teórico de la TAD, mismas que fueron aplicadas en cada una de las cinco fases de la metodología ACODESA.

Tarea 1



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas



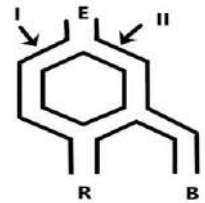
Nombre: _____ Fecha: _____

Carrera: _____ Edad: _____ Folio: _____

Instrucciones: A continuación, se te presenta una secuencia de actividades, se te solicita dar respuestas y ser lo más explícito posible en tus procedimientos y validaciones.

Actividad 1.

Analiza el esquema que se te presenta.
Considera el hecho de soltar una bola en E y que esta bola salga por R



a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada

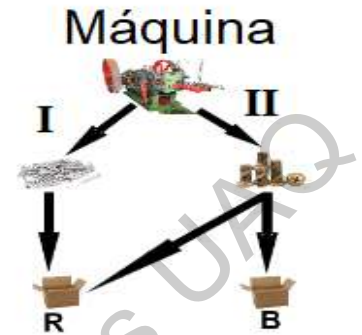
b) Calcula la probabilidad de que si la bola sale por R, haya pasado por el canal I
Valida tu respuesta.

c) Bajo las mismas condiciones, si en lugar de una bola se dejan caer 100 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 2.

Analiza el esquema que se te presenta.

Una máquina fabrica 100 tornillos por hora. Hay 82 tornillos que pasan por la banda **I** y caen en la caja **R** donde están los tornillos perfectos para ensamblar cualquier mueble. Se sabe que 14 de los tornillos que pasa por la banda **II** (defectuosos) tienen pequeñas imperfecciones y se pueden poner en la caja **R** dado que si sirven para ensamblado.



Ahora contesta lo que se te pide:

a) Describe todos los posibles eventos asociados a la situación planteada

b) Calcula la probabilidad de que si el tornillo sale por R, haya pasado por el canal "I".
Valida tu respuesta.

c) Bajo las mismas condiciones, si en lugar de 100 tornillos se produjeran 1000 ¿el resultado cambia? ¿Por qué?

Actividad 3.

Una urna contiene dos bolas negras y dos bolas blancas.

Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de la otra, sin devolver la primera a la urna.



a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en un **segundo lugar (N_2)**, habiendo extraído una bola negra en **primer lugar (N_1)**. Justifica tu respuesta.

c) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra en **primer lugar (N_1)**, habiendo extraído una bola negra en **segundo lugar (N_2)**. Justifica tu respuesta.

d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en b) y c)?

Actividad 4.

Analiza la siguiente situación:

¿Cuál es la probabilidad de que un joven sea ingeniero dado que su padre es ingeniero?



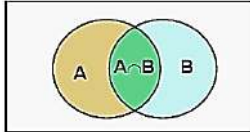
- a) ¿Cuáles son los eventos? ¿Cómo son los eventos?, justifica tu respuesta
- b) Calcula la probabilidad de que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero:
- c) Calcula la probabilidad de que un padre sea ingeniero dado que su hijo es ingeniero:
- d) Explica ¿por qué se obtienen esos resultados en los incisos b) y c)?

Anexo V. Técnicas (τ)¹

Técnicas (τ)	CARACTERÍSTICAS	PROS Y/O CONTRAS
Fórmula directa $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)};$ <p>donde $p(B) > 0$</p>	<p>La Probabilidad Condicional $P(A B)$ de un suceso² A dado otro suceso B es simplemente la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B se ha verificado.</p> <p>B= Espacio muestral de interés en el problema</p>	<p>El alumno olvida que el espacio muestral general se reduce al espacio B.</p> <p>Le causa conflicto cuando los eventos A y B son independientes y debe aplicar la regla: si A y B son independientes ssi $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$</p> <p>Por tanto el alumno debe tener bien claros conceptos asociados al concepto de Probabilidad Condicional: eventos, independencia, espacio muestral total y reducido, para resolver correctamente con la fórmula.</p>

Representaciones gráficas

Diagrama de Venn



Representar eventos. Visión espacial de diferentes situaciones en el comportamiento de \cup , \cap como condiciones de los eventos

Facilita identificar de la reducción del espacio muestral y ubicar si los eventos son independientes; i.e., si $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

Representaciones diagramáticas

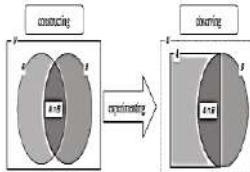
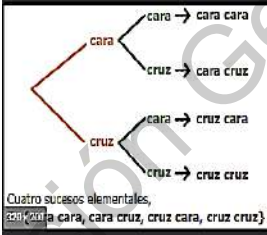


Figura 1. Bases al diagrama de representación en ejemplo de la figura 1

Se basa en el conocimiento del Diagrama de Venn y puede ser usada efectivamente por los estudiantes para resolver problemas de Probabilidad Condicional.

Según el hallazgo de la investigación de Ishibashi (2018), permite responder correctamente problemas de Probabilidad Condicional donde se suele caer en el sesgo de causación considerando el eje temporal (sesgo temporal diacrónico)

Diagrama de árbol³



Herramienta visual organizativa que facilita la resolución de problemas de probabilidad.

En la investigación de Contreras et al. (2013) reportan que los alumnos tienen dificultades en construirlo adecuando al problema debido a la falta de dominio de las mismas y a que se les enseña Probabilidad Condicional de manera superficial.

Batanero y Gea (2019), lo proponen en lugar de la tabla de contingencia y dicen es una herramienta más efectiva, pues ayuda a pensar en la secuencia temporal de los sucesos y separa claramente las dos subpoblaciones en estudio y permite llegar a las mismas conclusiones de una manera más visual.

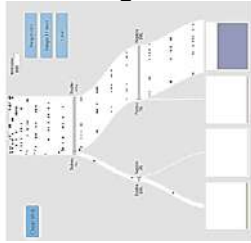
¹ Procedimientos empleados para resolver problemas de Probabilidad Condicional

Debido a que puede resolverse de forma intuitiva y pensamiento lógico hay quién resuelve y llega al resultado correcto sin emplear ninguna fórmula matemática en su resolución.

² Suceso o evento es un subconjunto del espacio muestral, entendiendo por espacio muestral Ω todos los posibles resultados de un experimento.

³ Las tablas de contingencia y los diagramas de árbol son herramientas organizativas que se usan para enumerar los espacios muestrales y calcular probabilidades. Batanero et al. (2016).

Pachinkograma⁴



Que es una representación visual del tradicional diagrama de árbol de probabilidad; la diferencia con éste es que las ramas del pachinkograma son de tamaño proporcional a sus respectivas probabilidades.

Los investigadores Budgett y PfannKuch (2016) lo utilizaron porque permite abordar la falacia de la tasa base y la confusión del sesgo de causación. Un cambio en la tasa base crea un impacto en el ancho de la rama del pachinkograma, lo que permite a los estudiantes mejorar sus intuiciones iniciales. Al final de cada rama las proporciones de probabilidad se representan en cubos.

Tabla de doble entrada (contingencia)

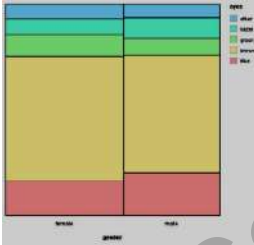
Útiles para calcular probabilidades...

Variables	A^c	Total
B	$A \cap B$	B
	$B^c \cap A^c$	
Total	A^c	1

Herramienta organizativa que se usa para ayudar a enumerar los espacios muestrales y calcular probabilidades.

Diversas investigaciones Budgett y PfannKuch (2016), Vogel y Böcherer-Linder (2018) y la de Batanero y Gea (2018); sugieren su uso pero con los datos como frecuencias absolutas o naturales, porque nuestra mente esta mejor equipada para razonar con frecuencias absolutas en lugar de probabilidades y porcentajes logrando así mejorar su razonamiento proporcional. Para después hacer uso de la regla de Laplace y obtener el cálculo de probabilidades.

Eikosograma²

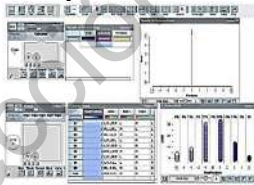


Es una representación visual de una tabla de doble entrada, donde se representan proporciones como áreas.

Como herramienta tecnológica tiene el potencial para ayudar al razonamiento proporcional y la verbalización de probabilidad simple, condicional y conjunta. Es consistente con las reglas de probabilidad, pues se basa en un cuadrado que representa una probabilidad de uno y la superposición de regiones rectangulares que representan eventos con áreas que coinciden con las probabilidades. Puloka y Pfannkuch (2018)

Tiene potencial para mejorar el aprendizaje del concepto de Probabilidad Condicional y conjunta de los estudiantes.

Simulaciones Nueva estructura de representación



Herramientas tecnológicas visuales como Probability Explorer, Fathom y Tinkerplots que permiten experimentar el comportamiento aleatorio al crear simulaciones modelando un problema real como una manera de simplificar la realidad.

Las simulaciones en la probabilidad enriquecen la enseñanza, permite evaluar cuál modelo se ajusta mejor a los datos. Chernoff et al. (2016), TinkerPlots es fácil de usar pues no requiere comandos y se puede cambiar fácilmente el modelo que parte de la realidad y se regresa a la realidad. Podworny (2016)

⁴ El Pachinkograma (2016) y el Eikosograma (apareció por primera vez en 2006), son herramientas tecnológicas visuales relativamente nuevas, que gracias a las computadoras son fáciles de hacer y son muy precisas en las probabilidades indicándolas como áreas. El Pachinkograma enriquece el clásico diagrama de árbol y el Eikosograma a las tablas de doble entrada (contingencia o dos vías). Y al poner en la misma pantalla ambas visualizaciones ayudan a superar conceptos erróneos de probabilidad como la falacia de la tasa base y causación, logrando que los estudiantes las entiendan mejor. Budgett y PfannKuch (2016)

Anexo VI. Tecnologías (θ)⁵

<p>(τ): Fórmula directa</p> <p>(θ). Discurso con:</p> <p>Uso directo de la fórmula de Probabilidad Condicional $p(A B)$, donde B es espacio muestral de interés (reducido)</p>	<p>(τ): Regla de tres</p> <p>(θ). Discurso con:</p> <p>Noción de variables proporcionales. Números racionales y operaciones.</p>	<p>(τ): Deduce observando</p> <p>(θ). Discurso con:</p> <p>Se aplica de fondo el espacio muestral, reducido y proporciones</p>	<p>(τ): Escribe un razonamiento lógico</p> <p>(θ). Discurso con:</p> <p>Aquí es estudiante no usa una técnica, más bien se brinca a la tecnología usando razonamientos lógicos</p>
<p>(τ): Diagrama de Venn</p> <p>(θ). Discurso con:</p> <p>Identifica eventos por conjuntos e independencia Operaciones con conjuntos Operaciones de probabilidad</p>	<p>(τ): Diagramáticas</p> <p>(θ). Discurso con:</p> <p>Basado en diagramas de Venn, clarifica reducción espacio muestral Operaciones con conjuntos Operaciones de probabilidad</p>	<p>(τ): Diagrama de árbol</p> <p>(θ). Discurso con:</p> <p>Herramienta gráfica organizativa. Separa claramente los eventos Secuencia temporal de sucesos</p>	<p>(τ): Pachinkograma</p> <p>(θ). Discurso con:</p> <p>Basado en diagramas de árbol idea muy clara de la probabilidad que es proporcional ramas</p>
<p>(τ): Tabla doble entrada</p> <p>(θ). Discurso con:</p> <p>Haga uso de frecuencias observadas y esperadas</p>	<p>(τ): Eikosograma</p> <p>(θ). Discurso con:</p> <p>Basada tabla doble entrada, reglas de probabilidad, las regiones son áreas que coinciden probabilidades</p>	<p>(τ): Simulaciones</p> <p>(θ). Discurso con:</p> <p>Experimentar comportamiento aleatorio mejor ajuste datos Modela problema simplificar la realidad</p>	

⁵ Discurso que justifica y explica la técnicas asociadas referidas en el anexo V

Anexo VII. Simulación creada en el software Descartes

El programa de la simulación de las actividades uno (canicas de Ojeda 1995) y tres (Urna de Falk 1986) se llama:

SIMULACION FASE 3 ACODESA (el cuál se adjunta y es un documento tipo Microsoft Edge HTML que corre bajo el programa Descartes)

Para el correcto funcionamiento de la simulación, necesitan estar dentro del folder: **imagen** dentro de DESCARTES, los siguientes archivos de imágenes:

- **diacrónico.png**
- **feliz.png**
- **ops.png**
- **tabla.png**
- **URNAFALK.png**
- **Zuly.png**

Anexo VIII. Programa en STATA v13.0 ®

Los criterios en que se caracterizaron las praxeologías en cada una de las actividades bajo la TAD son muy detalladas, gracias a ello fue posible hacer un programa para identificar fácilmente las producciones destacadas y deficientes de los alumnos que participaron en este trabajo en cada una de las fases de ACODESA

Se hizo un programa para cada sesgo, a continuación se pone el programa que se corrió en la fase #⁶

```
*****
*   FASE 4. ANALISIS DE LAS ACTIVIDADES 1 Y 2 SESGO TEMPORAL DIACRONICO   *
*****
*   Inciso a) Comprensión del problema
*
*   Por actividad: ¿Identifican eventos?
    . sort ACTIVIDAD
    . by ACTIVIDAD: tab a1 if FASE==4
*   ¿Cómo los identifican?
    . by ACTIVIDAD: tab a2 if FASE==4
*   ¿Identifican todos?
    . by ACTIVIDAD: tab a3 if FASE==4
*   ¿Por qué?
    . by ACTIVIDAD: tab a4 if FASE==4
*****
*   inciso b) Técnicas
*
*   ¿Identifica que es un problema de Probabilidad Condicional P(I|R)?
    . by ACTIVIDAD: tab b1 if FASE==4
*   ¿Identifica hay un segundo experimento probable pasando por el camino II?
    . by ACTIVIDAD: tab b2 if FASE==4
*   ¿Uso alguna técnica?
    . by ACTIVIDAD: tab b3 if FASE==4
*   ¿Cuál?
    . by ACTIVIDAD: tab b4 if FASE==4
*   ¿Validó su respuesta?
    . by ACTIVIDAD: tab b5 if FASE==4
*   ¿Aplicó bien la validación?
    . by ACTIVIDAD: tab b6 if FASE==4
*   ¿Da el resultado correcto?
    . by ACTIVIDAD: tab b7 if FASE==4
```

⁶ # Dado que son los mismos ejercicios y las mismas consignas en cada uno en todas las fases el #: {1,2,3,4} dependiendo de la fase a la que se hacia el análisis.

*** inciso c Tecnologías**

*** evidencia Tecnología?**

. by ACTIVIDAD: tab c1 if FASE==4

*** aplica bien la tecnología?⁷**

. by ACTIVIDAD: tab c2 if FASE==4

***Da alguna teoria?**

. by ACTIVIDAD: tab c3 if FASE==4

*** para el análisis bivariado de las actividades 1 y 2**

*** a1 & a2**

. by ACTIVIDAD: tab a2 a1 if FASE==4,col

*** a2 & a3**

. by ACTIVIDAD: tab a3 a2 if FASE==4,col

*** a3 & a4**

. by ACTIVIDAD: tab a4 a3 if FASE==4,col

*** Los que NO IDENTIFICAN TODOS LOS EVENTOS... ¿IDENTIFICAN ES UN PROBLEMA DE PROBABILIDAD CONDICIONAL?**

. by ACTIVIDAD: tab a4 b1 if FASE==4,col

. list FOLIO ACTIVIDAD a1 - b1 if (a4==0 & b1==0 & FASE==4)

. list FOLIO ACTIVIDAD a1 - b1 if (a4==1 & b1==0 & FASE==4)

. by ACTIVIDAD: tab b1 b2 if FASE==4,col

. list FOLIO a3 a4 b1 b2 if (b1==1 & b2==0 & FASE==4)

. list FOLIO ACTIVIDAD a3 a4 b1 b2 if (b1==1 & b2==0 & FASE==4)

. list FOLIO ACTIVIDAD a2 a3 a4 b1 b2 if (b1==1 & b2==0 & FASE==4)

. list FOLIO ACTIVIDAD a3 a4 b1 if (a3==1 & b1==1 & FASE==4)

. by ACTIVIDAD:tab b1 b4 if FASE==4

. list FOLIO ACTIVIDAD b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b7 if (b4>1 & FASE==4)

*** Si identifica que es un problema de Probabilidad Condicional... ¿llega al resultado correcto?**

. by ACTIVIDAD:tab b7 if FASE==4

. by ACTIVIDAD:tab b7 b1 if FASE==4,col

. by ACTIVIDAD:tab b4 b3 if FASE==4,col

. by ACTIVIDAD:tab b4 a3 if FASE==4,col

⁷ *Aplica bien para justificar lo que respondió en inciso b), más no significa que este correcto

* Los que si identifican eventos pero no usan ninguna herramienta al resolver:

```
. list FOLIO ACTIVIDAD a3 a4 b3 if (a3==1 & b4==0 & FASE==4)
```

* Los que si identifican eventos pero no usan ninguna herramienta:

```
. list FOLIO ACTIVIDAD a3 a4 b3 b4 b7 if (a3==1 & b4==0 & FASE==4)
```

* Los que no identifican todos los eventos, pero si usan una técnica:

```
. list FOLIO ACTIVIDAD a3 a4 b3 b4 b7 if (a3==1 & b4!=0 & FASE==4)
```

```
. list FOLIO ACTIVIDAD a3 a4 b3 b4 b7 if (a3==1 & b4==0 & FASE==4)
```

```
. list FOLIO ACTIVIDAD a3 a4 b3 b4 b7 if (a3==0 & b4!=0 & FASE==4)
```

```
. list FOLIO ACTIVIDAD b7 if (b7==4 & FASE==4)
```

***** TECNOLOGÍAS

```
. tab c1 if FASE==4
```

```
. tab ACTIVIDAD c1 if FASE==4
```

```
. sort ACTIVIDAD
```

```
. by ACTIVIDAD:tab c1 if FASE==4
```

```
. by ACTIVIDAD:tab c2 if FASE==4
```

```
. by ACTIVIDAD:tab c2 c1 if FASE==4
```

```
. by ACTIVIDAD:tab c2 c1 if FASE==4, col
```

```
. by ACTIVIDAD:tab c3 if FASE==4
```

```
. list if (c2==1 & c1==0 & FASE==4)
```


Anexo IX. Opinión del estudiante sobre la simulación

Fase 4. Contesta

Nombre: _____

¿Al responder los ejercicios supiste se trataba de Probabilidad Condicional?

¿Cambió tu percepción de los ejercicios al pasar de la fase 1 a la fase 4? ¿Por qué?

Al final, ¿Te quedó claro la razón de la respuesta? ¿Por qué?

¿Crees se podría mejorar la prueba? ¿Qué cambiarías?

¿Te pareció bien la dinámica de los ejercicios? ¿Por qué?

¿Comprendiste el problema?

¡Gracias por participar!