



Universidad Autónoma de Querétaro  
Facultad de Ingeniería  
Maestría en Matemáticas Aplicadas

Evolutoides de curvas convexas y la propiedad pedal de la elipse.

**TESIS**

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de  
Maestría en Matemáticas Aplicadas

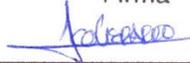
**Presenta:**  
Iván González García

**Dirigido por:**  
Dr. Jesús Jerónimo Castro

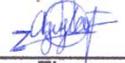
Dr. Jesús Jerónimo Castro  
Presidente

  
Firma

Dr. Francisco Gerardo Jiménez López  
Secretario

  
Firma

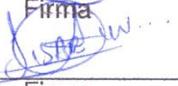
M.C. Víctor Antonio Aguilar Arteaga  
Vocal

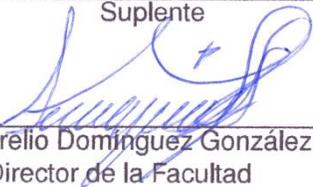
  
Firma

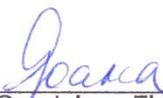
Dr. Roberto Augusto Gómez Loenzo  
Suplente

  
Firma

Dr. Angelica Rosario Jiménez Sánchez  
Suplente

  
Firma

  
Dr. Aurelio Domínguez González  
Director de la Facultad

  
Dra. en C. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña  
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario  
Querétaro, Qro.  
Octubre 2017



Universidad Autónoma de Querétaro  
Facultad de Ingeniería  
Maestría en Matemáticas Aplicadas

Evolutoides de curvas convexas y la propiedad pedal de la elipse.

**TESIS**

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de  
Maestría en Matemáticas Aplicadas

**Presenta:**

Iván González García

**Dirigido por:**

Dr. Jesús Jerónimo Castro

Dr. Jesús Jerónimo Castro

Presidente

Firma

Dr. Francisco Gerardo Jiménez López

Secretario

Firma

M.C. Víctor Antonio Aguilar Arteaga

Vocal

Firma

Dr. Roberto Augusto Gómez Loenzo

Suplente

Firma

Dr. Angelica Rosario Jiménez Sánchez

Suplente

Firma

Dr. Aurelio Domínguez González

Director de la Facultad

Dra. en C. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña

Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario  
Querétaro, Qro.  
Octubre 2017

©Iván González García

All rights reserved.



*Dedicado a mis padres, Rosa María y Bartolo.*



# Resumen

En esta tesis se continúa el estudio de los evolutoides de las curvas convexas. Se ha probado que si un evolutoide  $\gamma_\alpha$  de una curva  $\gamma$  dada, es homotética a ella, entonces  $\gamma$  es un círculo. Este resultado es el análogo, para el caso de los evolutoides, al caso planar del famoso problema homotético del cuerpo flotante que afirma que si un cuerpo flotante es homótico al cuerpo entonces es un elipsoide.

También, probamos que si un cuerpo convexo en el espacio euclidiano tridimensional tiene la propiedad pedal de la elipse, entonces es un elipsoide de la revolución. Además damos una familia de curvas en el plano con exactamente un punto que se comporta, en cierto sentido, como un foco en una elipse. Finalmente nosotros estudiamos otra propiedad de la elipse, la cual denominamos *propiedad armónica* y probamos que una curva convexa que tiene esta propiedad debe ser una elipse.

**Conceptos importantes** propiedad pedal, elipsoide de revolución, media armonica, elipses, evolutoides, series de Fourier.



# Abstract

In this thesis we continue the study of evolutoids of convex curves. It is proved that if a evolutoid  $\gamma_\alpha$  of a given curve  $\gamma$  is homothetic to it, then  $\gamma$  is a circle. This result is the analogous, for the case of evolutoids, to the planar case of the famous homothetic floating body problem which states that if a floating body is homothetic to the body itself then it is an ellipsoid.

Also, we prove that if a convex body in the three dimensional Euclidean space has the pedal property of the ellipse, then it is an ellipsoid of revolution. We also give a family of curves in the plane with exactly one point which behaves, in some sense, like a focus on an ellipse. Finally, we study another property of the ellipse which we name the *harmonic property* and prove that a convex curve with this property must be an ellipse.

**Keywords and phrases:** pedal property, ellipsoid of revolution, harmonic mean, ellipses, evolutoids, Fourier series.



# Agradecimientos

Doy gracia a la facultad de Ingeniería por ser mi casa de estudios. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT, por la beca proporcionada para la realización de mi maestría.

Quiero agradecer a mis padres, por ser el cimiento de mi vida. Gracias a ustedes veo al mundo con curiosidad y entusiasmo, gracias a todos sus esfuerzos he logrado seguir mis pasiones hasta donde me han traído y he perseverado cuando parece que no se puede más.

A mi director de tesis, *Dr. Jesús Jerónimo Castro*, por mantener mi mente activa todo el tiempo. He aprendido muchas cosas de usted y agradezco cada comentario, su entusiasmo y apoyo para culminar este proyecto.

A mis sinodales, Dr. Francisco Gerardo Jiménez López, Dra. Angelica R. Jiménez Sánchez, Dr. Roberto A. Gómez Loenzo, M. en C. Víctor A. Aguilar Arteaga, muchas gracias por guiarme durante mi trabajo con sus observaciones, correcciones y expectativas.

Al director de la facultad el Dr. Aurelio, a la maestra Carmen y Paty por su apoyo en los trámites administrativos. A Lupita de postgrado que nos tiene muchísima paciencia para la realización de nuestros trámites.

Y finalmente a todos aquellos que me han acompañado en esta travesía, mis amigo, algunos de ellos ahora colegas de trabajo. A todos ustedes por sus consejos, regaños y palabras de motivación para comprometerme a terminar mi proceso de titulación, gracias.



---

# **Evolutoides de curvas convexas y la propiedad pedal de la elipse**

---

*¿Cómo vas a buscar una cosa cuya naturaleza te es del todo desconocida? ¿cuál de entre las cosas que desconoces es la que pretendes buscar?, y si por azar dieras con ella, ¿cómo sabrías que es lo que buscabas, siendo así que la desconoces?*

*Platón*

**Iván González García**



# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Abstract</b>	<b>VII</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Justificación . . . . .	2
1.3. Distribución del trabajo . . . . .	3
<b>2. Objetivos</b>	<b>5</b>
2.1. Descripción del problema . . . . .	5
2.2. Hipótesis . . . . .	6
2.3. Objetivo General . . . . .	6
2.4. Objetivo Particular . . . . .	6
<b>3. Fundamentación Teórica</b>	<b>9</b>
3.1. Conjuntos convexos . . . . .	9
3.2. Función soporte . . . . .	10
3.2.1. Figuras de ancho constante . . . . .	12

3.2.2.	Fórmula de Cauchy para el perímetro . . . . .	13
3.2.3.	Fórmula de Blaschke para el área . . . . .	14
3.3.	Algunas aplicaciones de las fórmulas de Cauchy y de Blaschke . . . . .	14
3.3.1.	Desigualdad de Lutwak . . . . .	15
3.3.2.	Teorema de Rosenthal y Szasz . . . . .	15
3.3.3.	Fórmulas de Steiner . . . . .	16
3.4.	Aplicaciones de Series de Fourier en problemas geométricos . . . . .	17
3.5.	Coefficientes de Fourier e Identidad de Parseval . . . . .	17
3.6.	Expansión en series de Fourier de la función soporte . . . . .	18
3.7.	Desigualdades isoperimétricas . . . . .	19
3.7.1.	Desigualdad de Wirtinger . . . . .	19
<b>4.</b>	<b>Metodología y Resultados</b>	<b>23</b>
4.1.	Propiedad pedal de la elipse . . . . .	23
4.2.	Curvas planas con un punto con potencia pedal constante . . . . .	24
4.3.	Cuerpos con la propiedad pedal constante en tres dimensiones . . . . .	26
4.4.	Media Armónica . . . . .	27
4.5.	Evolutoides de curvas convexas . . . . .	30
4.6.	Evolutoide . . . . .	30
4.6.1.	Desigualdad de Chakerian . . . . .	31
4.7.	Una desigualdad para el área del Evolutoide . . . . .	32
4.8.	Unicidad del evolutoide . . . . .	34
4.9.	Una caracterización del círculo . . . . .	35
4.10.	Evolutoide izquierdo y derecho . . . . .	37
4.11.	Relación de los puntos de Steiner de una curva y su evolutoide . . . . .	40
4.12.	Cuerpos de iluminación y flotación . . . . .	41
4.13.	Coincidencia del evolutoide izquierdo y derecho . . . . .	44

**5. Conclusiones**

**49**

**Bibliografía**

**51**



# Lista de Figuras

3.1. Conjuntos convexos y no convexos. . . . .	9
3.2. Línea soporte. . . . .	10
3.3. Líneas soporte a través de un vértice. . . . .	10
3.4. Función soporte de $K$ . . . . .	11
3.5. Parametrización de una curva convexa $\gamma$ . . . . .	11
3.6. Ancho en dirección $u(t)$ . . . . .	12
3.7. Triángulo de Reuleaux. . . . .	13
4.1. Curva de Yanagihara. . . . .	24
4.2. Curva con un punto equipotencial. . . . .	25
4.3. Construcción de la curva. . . . .	26
4.4. Potencia pedal constante para $P$ y $Q$ . . . . .	26
4.5. Propiedad armónica de la elipse. . . . .	28
4.6. Igualdad de ángulos $\angle PXR = \angle RXQ$ . . . . .	29
4.7. Unicidad de la línea soporte. . . . .	29
4.8. Función soporte del Evolutoide. . . . .	31
4.9. Evolutoide de ancho constante. . . . .	36
4.10. Función soporte del evolutoide izquierdo. . . . .	37
4.11. Área del anillo $S_\alpha$ . . . . .	38
4.12. Área del anillo $S_\alpha$ . . . . .	39
4.13. Cuerpo de flotación $K_\delta$ . . . . .	41

4.14. <b>Cuerpo de Iluminación.</b> . . . . .	42
4.15. <b>Si los evolutoides son cuerpos flotantes entonces <math>\gamma</math> es un círculo.</b> . . . . .	43
4.16. <b>Cuerpo con coincidencia del evolutoide izquierdo y derecho.</b> . . . . .	45
4.17. <b>Triángulo equilátero circunscrito.</b> . . . . .	47
5.1. <b>Evolutoide en <math>\mathbb{R}^3</math>.</b> . . . . .	50

# Capítulo 1

## Introducción

La geometría convexa se remonta a la antigüedad. Resultados y sugerencias a los problemas que son de interés incluso hoy en día ya se pueden encontrar en los trabajos de Arquímedes, Euclides y Zenodoro. Mencionamos por ejemplo los sólidos platónicos, el problema isoperimétrico, la rigidez de las superficies convexas, politopos y el problema de el volumen de pirámides. Las contribuciones a la convexidad en los tiempos modernos comenzaron con el trabajo geométrico y analítico de Galileo, los Bernoulli, Cauchy y Steiner sobre los problemas de la antigüedad. Estos problemas se resolvieron sólo en el siglo XIX y principios del siglo XX por Cauchy, Schwarz y Dehn. Los resultados sin antecedentes en la antigüedad incluyen la fórmula de politopos de Euler y la desigualdad de Brunn. Gran parte de la convexidad moderna nació con Minkowski e importantes contribuyentes posteriores son las hechas por Blaschke, Hadwiger, Alexandrov, Pogorelov, Klee, Groemer, Schneider, Max Mullen junto con muchos matemáticos adicionales.

### 1.1. Antecedentes

Muchos son los problemas en matemáticas, particularmente en geometría, que no tienen aún una respuesta precisa. Es indudable que tal lista siga creciendo debido a que día a día seguimos haciendo nuevas conjeturas. Una de las tareas favoritas de los que gustan de las matemáticas es resolver problemas. Durante la vida estudiantil resolvemos una gran cantidad de problemas, cada uno de ellos nos producen una sensación diferente al encontrar la solución. Encontrar soluciones a problemas por primera vez es sin lugar a dudas una de las tareas más divertidas y emocionantes con las que uno se puede tropezar en la vida, personalmente siempre he tenido una debilidad por los problemas de geometría y gracias a la orientación del Dr. Jesús Jerónimo Castro, asesor de esta tesis, los temas que se abordan en este trabajo son: Evolutoides de curvas convexas y la propiedad pedal de la elipse.

Las curvas convexas pueden ser caracterizadas bajo alguna propiedad. Muchas relaciones se pueden hacer asociando curvas convexas con ciertas propiedades, en este trabajo estamos interesados en estudiar las relaciones entre la curva dada y su evoluta: es decir, la curva obtenida como la envolvente de líneas que forman un ángulo fijo con la línea normal en cada punto de la curva. Los resultados precedentes a este trabajo los encontramos en el artículo realizado por J. Jerónimo en [16].

Recordemos la siguiente propiedad del círculo: si  $P$  es un punto en el plano y una línea a través de

$P$  cruza un círculo dado  $\gamma$  en los puntos  $A$  y  $B$ , el valor de  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ , donde  $\overline{XY}$  denota la longitud del segmento  $XY$ , no depende de la elección de la línea. Otra forma de mencionar esta propiedad es que  $P$  tiene *potencia constante* respecto a  $\gamma$  o que  $P$  es un *punto equipotencial*. Podemos pensar en la pregunta inversa, es decir, si tenemos una curva convexa y cerrada  $\gamma$  en el plano con la propiedad de que cada punto tiene una potencia constante respecto a  $\gamma$ , es  $\gamma$  un círculo? No es difícil demostrar que la respuesta es sí, el lector interesado puede intentar probarlo o puede leer una prueba de los artículos por Kelly [43], Kelly y Straus [44], Yanagihara [47], o Rademacher y Toeplitz [45]. Sin embargo, es posible reducir el número de puntos conocidos con la propiedad de potencia constante con el fin de asegurar que  $\gamma$  es un círculo, por ejemplo, JB Kelly [43] demostró que dos puntos interiores con potencia constante son suficientes para probar que un cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{R}^2$  es un disco Euclideo. Por otra parte, hay muchos ejemplos que muestran cuerpos convexos diferentes de discos con un punto interior con potencia constante (por ejemplo, J. Rosenbaum [46], K. Yanagihara [47], L. Zuccheri [48]).

En 1901 Adolfo Hurwitz probó la desigualdad isoperimétrica usando Series de Fourier para dominios en el plano euclidiano, en un artículo posterior mostró cómo los esféricos armónicos puede ser utilizados para probar una desigualdad análoga de cuerpos convexos en el espacio. Pronto se hizo evidente que este enfoque no era sólo una curiosidad, sino más bien una idea fundamental con consecuencias y aplicaciones de largo alcance en la geometría, el análisis y la teoría de números. Desde entonces han aparecido muchos artículos que exploran las posibilidades de este tipo de métodos. El enfoque analítico de Fourier a la geometría convexa está muy bien descrito en un contexto histórico en el capítulo del libro de Groemer. En el artículo *On evolutooids of planar convex curves* trabajo de J. Jerónimo-Castro. Los evolutoides son curvas que aparecen por primera vez en el siglo XVII con trabajos realizados por Reaumur, a partir de entonces varios matemáticos han resuelto diversas cuestiones referentes a estas curvas tales como Lancret, Inzigner, Wunderlich, Heinrich, Kszypiec, Mozgawa, M. Hamman, Groemer, Giblin, Warder, J. Jerónimo-Castro entre otros.

## 1.2. Justificación

El estudio de curvas planas y en el espacio es un tema que se ha estudiado desde la antigüedad por su relación al mundo real, un ejemplo de ello es la trayectoria de los planetas. Muchos han sido los frutos de los resultados obtenidos, en un principio de manera teórica, con ellos se ha podido analizar la velocidad, aceleración, posición, distancia, etc., de múltiples cuerpos, teniendo aplicaciones de esto a cualquier objeto en movimiento. Este estudio también ha tenido influencia en la construcción de autos y aviones más aerodinámicos, atendiendo a las curvas de mínima energía. Como parte de las energías alternativas, las propiedades de las cónicas han sugerido construcción de calentadores con tal forma. Como se verá en un parte de este trabajo también se relaciona a los objetos sumergidos en algún líquido, conocidos como cuerpos de flotación. El hecho es que encontrar propiedades alternativas de ver un fenómeno siempre dará la oportunidad de realizar una tarea de una manera diferente, en algunas ocasiones tales caracterizaciones pueden aplicarse a circunstancias específicas.

### 1.3. Distribución del trabajo

En el capítulo dos presentamos la descripción general del problema y los objetivos planteados para este trabajo.

En el capítulo tres se presentan algunos conceptos básicos de convexidad y un par de fórmulas que serán de gran utilidad durante el texto, tal es el caso de la fórmula de Cauchy para el perímetro y la de Blaschke para el área. También se presentan propiedades de reflexión de curvas convexas con una propiedad en particular, la propiedad pedal constante de un punto. Este capítulo forma parte de un artículo publicado en la revista *International Journal of Geometry* de título *More on the pedal property of the Ellipse*.

Por último continuación al trabajo realizado sobre evolutoides surgen diversos resultados que se presentan en el capítulo, dicho trabajo es en conjunto con los matemáticos R. Ayala-Figueroa, V. A. Aguilar-Arteaga y J. Jerónimo-Castro, el cual está publicado en la revista *Aequationes Mathematicae* con título *On evolutooids of planar convex curves II*. Principalmente se relaciona el evolutoide con otras curvas conocidas tal es el caso del cuerpo de flotación y de iluminación, la relación de los puntos de Steiner de la curva y su evolutoide y que sucede cuando se tiene coincidencia entre el evolutoide izquierdo y derecho.

El lector de esta tesis que guste de la geometría encontrará aquí una serie de resultados muy interesantes, propiedades, caracterizaciones y algunos teoremas inéditos que son la parte medular de este trabajo.



## Capítulo 2

# Objetivos

Las curvas convexas pueden ser caracterizadas bajo alguna propiedad en específico. Muchas relaciones se pueden hacer asociando curvas convexas con ciertas propiedades, en este trabajo estamos interesados en estudiar las relaciones entre una curva dada y su evolutoide: es decir, la curva obtenida como la envolvente de líneas que forman un ángulo fijo con la línea normal en cada punto de la curva. También se pretende extender propiedades de la elipse a curvas más generales en el plano y el espacio.

### 2.1. Descripción del problema

Supongamos que estamos en un mundo plano y queremos pelar una papa convexa. El pelador de la papa produce un corte que hace un ángulo constante  $\alpha$  respecto a la línea tangente en el punto de contacto. Si en cada punto de los límites de una papa convexa  $K$  está actuando un pelador de papas, al mismo tiempo con el mismo ángulo respecto a la tangente, se obtiene una papa pelada  $K_\alpha$ . A tal papa pelada  $K_\alpha$ , que resulta ser la envolvente de todas las líneas tangentes le llamaremos *evolutoide* de ángulo  $\alpha$ .

El evolutoide de ángulo  $\alpha$  fue estudiado por primera vez por Réaumur en 1709 y por Lancret en 1811. Los Evolutoides son importantes en el diseño de los engranajes como lo muestra el estudio hecho por W. Wunderlich en su libro sobre *Plane Kinematics*; también hay algunas obras donde los evolutoides están relacionados con el *conjunto de centros de simetría* (CSS) o *conjunto* de curvas de Minkowski, que generalmente es una curva que contiene información acerca la simetría de la curva en estudio. Uno de las obras mencionados anteriormente se debe a M. Hamann [12] para las curvas convexas y otra se debe a Giblin y Warder [10] para curvas no convexas. Algunos estudios recientes sobre evolutoides son los realizados por Braude [33] y Inzinger.

Ahora vamos a considerar una propiedad relacionada con la elipse, sabemos que el producto de la distancias de los dos focos de una elipse a cualquier línea tangente es constante, y esta propiedad por lo general se conoce como *propiedad pedal* de la elipse. Para el espacio 3-dimensional euclidiano es posible probar la siguiente.

**Teorema 2.1.1** Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^3$  y Sea  $P, Q \in \text{int } K$  dos puntos con potencia pedal

constante. Entonces  $K$  es un elipsoide de revolución con eje de rotación  $PQ$ .

Sin embargo, ¿qué se puede decir de las curvas convexas y las superficies con exactamente un punto con la propiedad de potencia pedal constante? por ejemplo, el centro de una bola euclídiana tiene la propiedad de potencia pedal constante y es el único punto con esta propiedad. Se pretende probar la existencia de curvas convexas en el plano, además del círculo euclidiano, con exactamente un punto con la propiedad de potencia pedal constante. Esto se realiza mediante la construcción de una familia de curvas con la propiedad deseada.

## 2.2. Hipótesis

Es posible demostrar matemáticamente las conjeturas planteadas con las herramientas teóricas existentes. Como se ha sido descrito anteriormente, nuestro estudio se basa en las aportaciones realizadas desde el año 1703 y hasta la actualidad, durante estos años diversos autores alrededor del mundo han contribuido al desarrollo de estas propiedades, propiedades cuyas aplicaciones se han dado en diversas áreas de la ciencia.

## 2.3. Objetivo General

Durante mi trabajo de tesis, se pretende estudiar algunas relaciones entre una curva conocida como *evolutoide* y algunas curvas clásicas y otras recientemente introducidas en Geometría. El estudio de dichas curvas al encontrarse en el plano y el espacio tiene relaciones importantes al mundo físico lo que nos da la posibilidad de la aplicación de este conocimiento.

## 2.4. Objetivo Particular

Algunos de los resultados y las conjeturas que se pretenden demostrar son los siguientes:

**Conjetura:** Sea  $\gamma$  una curva cerrada y estrictamente convexa en el plano y sea  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . Entonces  $\gamma_\alpha$  es homotética a  $\gamma$  si y sólo si es un círculo.

**Conjetura:** Sea  $\gamma$  una curva cerrada convexa de clase  $C^2$  en el plano y sea  $\beta \in (0, \pi/2)$  un número pequeño y fijo. Si para cada  $\alpha \in (0, \beta)$  se tiene que el evolutoide  $\gamma_\alpha$  es la frontera de un cuerpo de flotación de  $\gamma$ , entonces  $\gamma$  es un círculo.

**Conjetura:** Sea  $\gamma \in \mathbb{R}^2$  un conjunto convexo de clase  $C^2$  y sea  $\beta \in (0, \pi/2)$  un número pequeño y fijo. Si para cada  $\alpha \in (0, \beta)$  se tiene que el evolutoide  $\gamma_\alpha$  es la frontera de un cuerpo de flotación de  $\gamma$ , entonces  $\gamma$  es una bola euclidiana.

**Nota:** Falta saber si un único  $\alpha$  implica que la curva es un círculo.

**Conjetura:** En  $\mathbb{R}^2$ , un solo  $\alpha$  implica que el conjunto convexo es una bola euclidiana.

**Conjetura** Sea  $n \geq 5$  un número entero fijo y sea  $\gamma$  una curva convexa, cerrada y diferenciable, tal que los puntos medios de los lados de cada  $n$ -ágono equiangular circunscrito pertenecen a  $\gamma$ . Entonces  $\gamma$  es un círculo.

Respecto a esta conjetura es importante decir que no podemos reemplazar la hipótesis de que los puntos medios de los lados de cada  $n$ -ágono equiangular circunscrito pertenecen a  $\gamma$  por la hipótesis de que cada  $n$ -ágono equiangular circunscrito es regular. De hecho, se sabe que por cada polígono regular  $P$  existe una curva convexa (diferente del círculo) que puede ser rotada dentro de  $P$ , de tal manera que en cualquier momento la curva toca a cada lado de  $P$ . Una curva de este tipo es conocida como un *rotor* para  $P$ . Por ejemplo, cada cuerpo convexo con ancho constante 1 es un rotor para el cuadrado de lado 1.

Finalmente, tenemos el siguiente teorema debido a E. Gutkin y V. Cyr.

**Teorema 2.4.1** *Sea  $\gamma$  una curva convexa, diferenciable, la cual posee una caústica de ángulo constante  $\alpha$ . Si  $\alpha/\pi$  es racional, entonces  $\gamma$  es un círculo.*

Respecto a esto conjeturamos lo siguiente:

**Conjetura:** Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto convexo con frontera de clase  $C^2$ , el cual posee una caústica de ángulo constante. Entonces  $K$  es una bola euclidiana.



## Capítulo 3

# Fundamentación Teórica

### 3.1. Conjuntos convexos

Gran parte de los objetos con que trabajaremos en esta tesis son los conocidos como *conjuntos convexos*. Estos se definen como sigue.

**Definición 3.1.1** *Un conjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  es convexo si dados  $x, y \in K$  se cumple que  $[x, y] \subset K$ . Donde por  $[x, y]$  denotamos al segmento de extremos  $x$  e  $y$ , es decir,  $[x, y] \equiv \{z \in \mathbb{R}^n : z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \forall \lambda \in [0, 1]\}$ .*

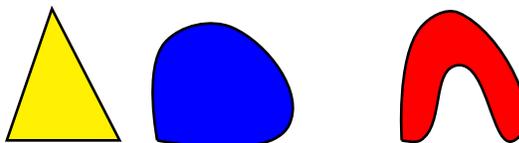


Figura 3.1: Conjuntos convexos y no convexos.

Dado un conjunto convexo y acotado en el plano, el cual posee interior no vacío, diremos que éste es un *cuerpo convexo* ó *figura convexa*. Por una curva convexa cerrada entenderemos a la curva que sirve de frontera de algún cuerpo convexo en el plano. Ahora introduciremos algunos de los conceptos relacionados con los conjuntos convexos, los cuales serán utilizados a lo largo de este trabajo.

**Definición 3.1.2** *Una línea  $\ell$  es soporte de un conjunto convexo  $K$  si ésta intersecta a  $K$ , y  $K$  queda contenido en uno de los semiplanos delimitados por  $\ell$ .*

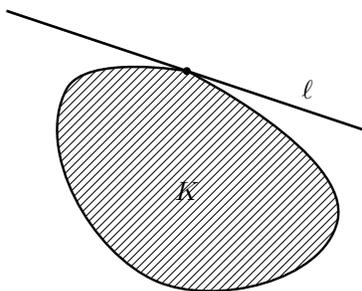


Figura 3.2: Línea soporte.

En otras palabras, una línea  $\ell \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, u \rangle = p, \text{ con } u \in \mathbb{S}^1, p \in \mathbb{R}\}$ , es soporte de un conjunto convexo  $K$  si  $p = \max_{x \in K} \langle x, u \rangle$ . Notemos que en general a través de un punto en la frontera de un conjunto convexo puede no existir la línea tangente, sin embargo, siempre existe al menos una línea soporte. Por ejemplo, a través de los vértices de un polígono no existen líneas tangentes, sin embargo, existen una infinidad de líneas soporte.

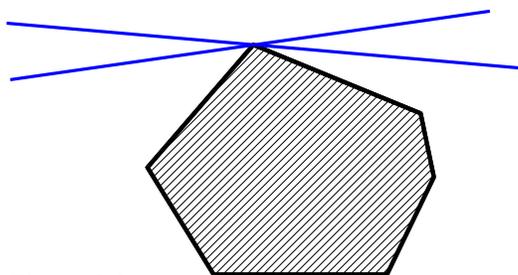


Figura 3.3: Líneas soporte a través de un vértice.

El concepto de línea soporte es de gran importancia en la Geometría de los conjuntos convexos. De hecho, existe un importante teorema debido a H. Minkowski el cual afirma que un conjunto compacto en el plano es convexo si a través de todo punto en la frontera pasa al menos una línea soporte.

### 3.2. Función soporte

Sea  $K$  un conjunto compacto convexo en el plano y sea  $\partial K$  su frontera. Para cada  $\theta \in [0, 2\pi]$  sea  $\ell(\theta)$  la línea soporte de  $K$  con vector normal exterior  $u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ , y denotemos por  $p(\theta)$  a la distancia con signo desde el origen 0 a  $\ell(\theta)$ .

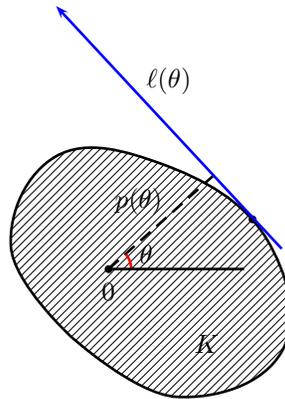


Figura 3.4: **Función soporte de  $K$ .**

La función  $p : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  es conocida como función soporte de  $K$ . Además, dada una *curva convexa*  $\gamma$ , es decir, una curva que sirve de frontera de un conjunto convexo, ésta se puede parametrizar como

$$\gamma(t) = p(t)u(t) + p'(t)u'(t),$$

para  $t \in [0, 2\pi]$ .

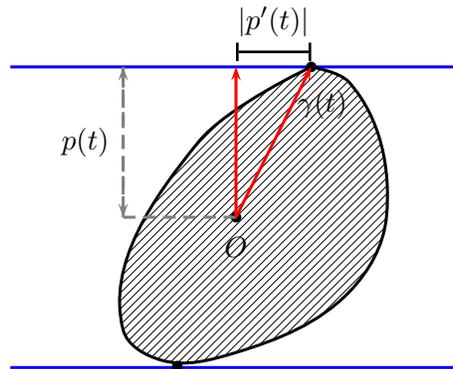


Figura 3.5: **Parametrización de una curva convexa  $\gamma$ .**

Para ver esto notemos que la recta  $\ell(t)$  tiene ecuación en forma normal

$$x \cos t + y \sin t = p(t) \tag{3.1}$$

y supongamos que  $\gamma$  no contiene segmentos. Entonces, si el punto de contacto entre  $\gamma$  y  $\ell(t)$  es  $(x_0, y_0)$ , tenemos que

$$x_0 \cos t + y_0 \sin t = p(t) \tag{3.2}$$

y

$$-x_0 \sin t + y_0 \cos t = p'(t). \tag{3.3}$$

De estas dos ecuaciones se obtiene que

$$x_0 = p(t) \cos t - p'(t) \sin t \quad (3.4)$$

y

$$y_0 = p(t) \sin t + p'(t) \cos t, \quad (3.5)$$

es decir,  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = p(t)u(t) + p'(t)u'(t)$ .

La parametrización de una curva convexa por medio de su función soporte, es bastante útil en muchos de los principales teoremas sobre curvas convexas. Esto se verá con más detalle en la siguiente sección.

### 3.2.1. Figuras de ancho constante

De aquí en adelante la palabra figura será utilizada para referirnos a un conjunto compacto (cerrado y acotado) con interior no vacío en el plano.

**Definición 3.2.1** Dado un vector dirección  $u(t) = (\cos t, \sin t)$ , para  $t \in [0, 2\pi]$ , se define el ancho de una figura convexa en dirección  $u(t)$ , como la distancia entre las dos líneas soporte de la figura las cuales son ortogonales a  $u(t)$ .

En términos de la función soporte, el ancho, el cual denotamos por  $w(t)$ , se obtiene como  $w(t) = p(t) + p(t + \pi)$ .

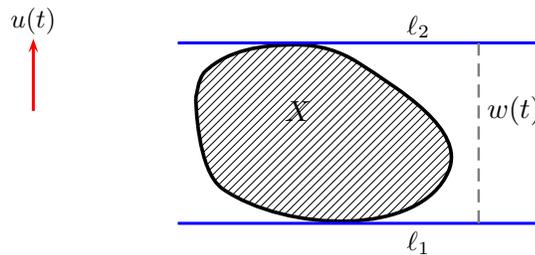


Figura 3.6: Ancho en dirección  $u(t)$ .

Notemos que el círculo Euclidiano tiene la propiedad que todos sus anchos son iguales. Es natural entonces preguntarse: ¿Existen figuras, además del círculo, para las cuales su ancho sea el mismo en toda dirección?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, de hecho, tales figuras son conocidas como *figuras de ancho constante*. Quizá la más famosa de éstas es el *triángulo de Reuleaux*, el cual consiste en tres arcos de circunferencia las cuales tienen centro en los vértices de un triángulo equilátero y como radio la longitud del lado del triángulo. Otro aspecto interesante del triángulo de Reuleaux es que su perímetro es igual al perímetro de un círculo cuyo diámetro sea igual al lado del triángulo equilátero. Más sorprendente aún, es el hecho que todas las figuras de un cierto ancho constante fijo, tienen el mismo perímetro. Esto se demostrará más adelante.

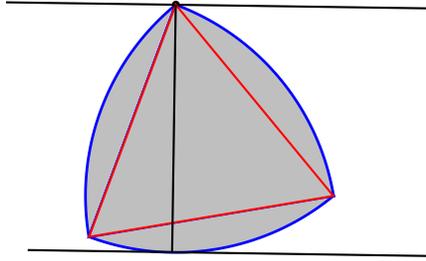


Figura 3.7: Triángulo de Reuleaux.

### 3.2.2. Fórmula de Cauchy para el perímetro

**Teorema 3.2.1** Sea  $\gamma$  una curva convexa cerrada, entonces su longitud se obtiene en términos de la función soporte como

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} p(t) dt. \quad (3.6)$$

**Demostración 3.2.1** Por simplicidad, demostraremos el caso cuando  $\gamma$  es estrictamente convexa, es decir, cuando no contiene segmentos. De este modo, tenemos que toda línea soporte de  $\gamma$  la interseca en un sólo punto. Sabemos que

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt,$$

como

$$\gamma'(t) = p'(t)u(t) + p(t)u'(t) + p''(t)u'(t) + p'(t)u''(t)$$

y además  $u''(t) = -u(t)$ , tenemos que  $\gamma'(t) = [p(t) + p''(t)]u'(t)$ , de donde se obtiene que  $\|\gamma'(t)\| = |p(t) + p''(t)|$ . Por otro lado, observemos que  $\gamma'(t)$  es un vector paralelo a  $u'(t)$  y con el mismo sentido, entonces se sigue que  $p(t) + p''(t)$  es siempre no negativo. Con esto tenemos que

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} [p(t) + p''(t)] dt = \int_0^{2\pi} p(t) dt + p'(t) \Big|_0^{2\pi},$$

además, como  $p'(t)$  es una función periódica con periodo  $2\pi$  tenemos que  $p'(t) \Big|_0^{2\pi} = 0$ . Se sigue que  $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} p(t) dt$ .  $\square$

**Observación 3.2.1** Notemos que dado que el ancho en una dirección  $u(t)$  se obtiene como  $w(t) = p(t) + p(t + \pi)$  entonces (3.6) se puede expresar como

$$L(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} w(t) dt.$$

De esta observación se obtiene fácilmente el Teorema de Barbier:

**Teorema 3.2.2** (Barbier.)

El perímetro de una figura  $K$  de ancho constante  $h$  es  $\pi h$ .

**Demostración 3.2.2** *Por la observación anterior tenemos que*

$$L(K) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h \, dt = \frac{1}{2} h(2\pi) = \pi h.$$

□

### 3.2.3. Fórmula de Blaschke para el área

**Teorema 3.2.3** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^2$  una figura convexa y sea  $p$  su función soporte. Entonces el área de  $K$  se obtiene mediante*

$$A(K) = \int_0^{2\pi} (p^2(t) - p'^2(t)) dt.$$

**Demostración 3.2.3** *Del teorema de Green para el cálculo de área de una curva cerrada simple*

$$A(K) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt \quad (3.7)$$

*De las ecuaciones 3.4 y 3.5 se tiene*

$$x'(t) = -(p(t) + p''(t)) \sin(t)$$

y

$$y'(t) = (p(t) + p''(t)) \cos(t).$$

*Sustituyendo y simplificando se llega a*

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p(t) + p''(t)) p(t) dt$$

*Resolviendo esta última integral por partes se tiene*

$$A(K) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2(t) - p'^2(t)) dt. \quad (3.8)$$

□

## 3.3. Algunas aplicaciones de las fórmulas de Cauchy y de Blaschke

En esta sección se muestran algunos resultados donde las fórmulas de Cauchy y de Blaschke son de utilidad.

### 3.3.1. Desigualdad de Lutwak

Consideremos el siguiente problema debido a Leo Moser: ¿puede toda curva cerrada de longitud  $2\pi$  ser acomodada en un rectángulo de área 4?

Si consideramos la envolvente convexa de una curva de longitud  $2\pi$ , tenemos que la frontera de dicha envolvente convexa tiene longitud menor o igual que  $2\pi$ , de acuerdo a esta observación podemos entonces restringirnos a analizar el problema de Moser para el caso cuando la curva en cuestión es convexa. Dada una figura convexa  $K$ , denotamos por  $R(t)$  al rectángulo circunscrito a  $K$  el cual tiene uno de sus lados perpendicular a  $u(t)$ . Demostraremos la siguiente desigualdad de E. Lutwak:

#### Teorema 3.3.1

$$\min_{t \in [0, 2\pi]} \mathcal{A}(R(t)) \leq \frac{1}{\pi^2} L(K)^2,$$

con la igualdad si y sólo si  $K$  es de ancho constante.

**Demostración 3.3.1** Claramente, se cumple que  $\mathcal{A}(R(t)) = w(t) \cdot w(t + \pi/2)$ . Si consideramos el mínimo sobre todos los valores de  $t$  obtenemos que

$$\left[ \min_{t \in [0, 2\pi]} \mathcal{A}(R(t)) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(t)^{\frac{1}{2}} \cdot w\left(t + \frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} dt,$$

con la igualdad si y sólo si  $w(t) \cdot w\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$  es constante para todo  $t$ . De la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\left[ \int_0^{2\pi} w(t)^{\frac{1}{2}} \cdot w\left(t + \frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} dt \right]^2 \leq \left[ \int_0^{2\pi} w(t) dt \right] \left[ \int_0^{2\pi} w\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt \right], \quad (3.9)$$

con la igualdad si y sólo si  $w(t)/w\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$  es constante para todo  $t$ . Dado que ambas integrales en el lado derecho de 3.9 son iguales, tenemos que

$$\min_{t \in [0, 2\pi]} \mathcal{A}(R(t)) \leq \frac{1}{4\pi^2} \left[ \int_0^{2\pi} w(t) dt \right]^2, \quad (3.10)$$

con la igualdad si y sólo si  $K$  es de ancho constante. Utilizando la fórmula de Cauchy para el perímetro en 3.10 obtenemos que

$$\min_{t \in [0, 2\pi]} \mathcal{A}(R(t)) \leq \frac{1}{4\pi^2} [4 \cdot L(K)]^2 = \frac{1}{\pi^2} L(K)^2,$$

con la igualdad si y sólo si  $K$  es de ancho constante. □

### 3.3.2. Teorema de Rosenthal y Szasz

**Teorema 3.3.2 (de Rosenthal y Szasz.)** Toda curva convexa y cerrada, de longitud  $L$  y diámetro  $D$ , verifica  $L \leq \pi D$ . La igualdad se alcanza si y sólo si, la curva tiene ancho constante  $D$ .

**Demostración 3.3.2** Utilizando la formula de Cauchy, expresamos la longitud de la curva de la forma

$$L = \int_0^{2\pi} p(\theta)d\theta = \int_0^\pi p(\theta)d\theta + \int_\pi^{2\pi} p(\theta)d\theta = \int_0^\pi [p(\theta) + p(\theta + \pi)]d\theta.$$

Obsérvese que  $p(\theta) + p(\theta + \pi)$  es, precisamente, la anchura de la curva en la dirección determinada por el ángulo  $\theta$ ; dado que el diámetro es la mayor de todos los anchos, se tiene claramente que  $p(\theta) + p(\theta + \pi) \leq D$ , luego

$$L = \int_0^\pi [p(\theta) + p(\theta + \pi)]d\theta \leq \int_0^\pi Dd\theta = D\pi.$$

La igualdad se alcanzará si, y sólo si, todos los anchos son iguales (teorema de Barbier). □

### 3.3.3. Fórmulas de Steiner

A continuación se da una relación que existe para el perímetro y el área de una curva llamada *curva paralela* la cual se define como sigue:

**Definición 3.3.1** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrizada regular. Se denomina **curva paralela a  $\alpha$  a distancia  $\rho$**  a la curva

$$\alpha_\rho^P(t) = \alpha(t) + \rho \frac{\mathbf{n}(t)}{|\alpha'(t)|}.$$

**Teorema 3.3.3 (Fórmulas de Steiner)** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  convexa y cerrada. Si se calcula el área y la longitud de su curva paralela a distancia  $\rho$  en función del área  $A$  y la longitud  $L$  de  $\alpha$ , entonces se cumple que

$$L_\rho = L + 2\pi\rho$$

y

$$A_\rho = A + \rho L + \pi\rho^2.$$

**Demostración 3.3.3** Consideremos las coordenadas polares tangenciales de  $\alpha$ , las cuales son  $(\theta, p(\theta))$  en un punto, las de la curva paralela  $\alpha_\rho^P$  son  $(\theta, p_\rho(\theta)) = (\theta, p(\theta) + \rho)$ . Por tanto, el cálculo siguiente permite calcular la longitud y el área de  $\alpha_\rho^P$ . Aplicando las fórmulas de Cauchy y Blaschke tenemos lo siguiente.

$$L_\rho = \int_0^{2\pi} p_\rho(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} [p(\theta) + \rho]d\theta = \int_0^{2\pi} p(\theta)d\theta + 2\pi\rho = L + 2\pi\rho,$$

$$\begin{aligned} A_\rho &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p_\rho(\theta)^2 - p'_\rho(\theta)^2]d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(p(\theta) + \rho)^2 - p'(\theta)^2]d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p(\theta)^2 - p'(\theta)^2]d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2\rho p(\theta)d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta, \end{aligned}$$

sustituyendo tenemos que

$$A_\rho = A + L\rho + \pi\rho^2.$$

□

### 3.4. Aplicaciones de Series de Fourier en problemas geométricos

En 1901 Adolfo Hurwitz probó la desigualdad isoperimétrica usando Series de Fourier para dominios en el plano euclidiano, en un artículo posterior mostró cómo los esféricos armónicos pueden ser utilizados para probar una desigualdad análoga de cuerpos convexos en el espacio. Pronto se hizo evidente que este enfoque no era sólo una curiosidad, sino más bien una idea fundamental con consecuencias y aplicaciones de largo alcance en la geometría, el análisis y la teoría de números. Desde entonces han aparecido muchos artículos que exploran las posibilidades de este tipo de métodos. Tal es el caso de Hermann Minkowski quien utiliza esféricos armónicos para demostrar una interesante caracterización de cuerpos convexos de ancho constante. El trabajo de Hurwitz y Minkowski ha de demostrar convincentemente que un estudio de esta interacción de análisis y geometría, en particular de series de Fourier y esféricos armónicos, por un lado, y la teoría de cuerpos convexos por otro, puede conducir a resultados geométricos interesantes. Durante el siglo pasado, la relación entre el análisis de Fourier y otras disciplinas se ha explorado sistemáticamente por muchos investigadores, como resultado se tienen importantes avances en estas áreas de estudio.

### 3.5. Coeficientes de Fourier e Identidad de Parseval

Una *serie de Fourier* es una expansión de una función periódica  $f(x)$  en términos de una suma infinita de senos y cosenos.

La serie de Fourier de una función  $f(x)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

A los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  se les llama *coeficientes de Fourier* de  $f(x)$  en  $[-\pi, \pi]$ , los cuales se determinan como sigue

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$\text{y } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

En el caso de la función soporte de un conjunto compacto convexo tenemos que la serie de Fourier descrita arriba converge. Esto se debe a que en tal caso la función soporte es uniformemente continua.

**Teorema 3.5.1** Sea  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la función soporte de un conjunto compacto convexo en  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 2$ . Entonces  $p$  es una función uniformemente continua.

**Demostración 3.5.1** Sea  $K$  un cuerpo convexo cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^n$ , existe  $M$  tal que  $\|k\| \leq M$  para toda  $k \in K$ .

Por definición,  $p(x) = \max\{\langle k, x \rangle : k \in K\}$ . Sabemos de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que  $|\langle k, x \rangle| \leq \|k\| \|x\|$ . Por ser  $K$  acotado se tiene

$$p(x) \leq \|k\| \|x\| < M\|x\|$$

para toda  $x \in R^n$ . De la linealidad de  $p$ , tenemos  $p(x+y) - p(x) \leq p(y)$  y de la desigualdad anterior se obtiene que

$$|p(x) - p(y)| \leq |p(x - y)| \leq M\|x - y\|$$

para toda  $x, y \in R^n$ .

Usando lo anterior mostremos la continuidad de  $p$ .

Sea  $\epsilon > 0$  y  $\delta := \frac{\epsilon}{M}$ , para  $x, y \in R^n$  tal que  $\|x - y\| < \delta$ , se tiene

$$|p(x) - p(y)| \leq M\|x - y\| < M \cdot \frac{\epsilon}{M}$$

entonces

$$|p(x) - p(y)| < \epsilon.$$

Así  $p(x)$  es una función uniformemente continua. □

La siguiente fórmula es conocida como la *Identidad de Parseval* y es el análogo del Teorema de Pitágoras para dimensión infinita.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

### 3.6. Expansión en series de Fourier de la función soporte

En el caso de la función soporte de una figura convexa, tenemos lo siguiente: si la expansión en series de Fourier de  $p(t)$  es

$$p(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

entonces

$$\dot{p}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nt - a_n \sin nt)$$

y

$$\ddot{p}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Estas expresiones son muy útiles cuando se trabaja con las parametrizaciones de curvas convexas en el plano.

**Definición 3.6.1** Dada una figura convexa  $K$  se define su punto de Steiner o centroide de curvatura como

$$z(K) = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cos t \, dt, \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \sin t \, dt \right).$$

El nombre centroide de curvatura se debe a que, bajo ciertas condiciones de diferenciabilidad, éste puede ser definido como el centro de masas de  $\partial K$  con respecto a la función de densidad que asigna a cada punto de  $\partial K$  la curvatura Gaussiana en ese punto.

Una razón por la que las series de Fourier son útiles para la convexidad es que importantes conceptos geométricos, tales como áreas, perímetro y punto de Steiner, se pueden expresar en términos de los coeficientes de la serie de Fourier de la función soporte. La siguiente proposición da un par de estas relaciones.

**Proposición 3.6.1** Sea  $p(t)$  la expansión en series de Fourier de la función soporte de una figura convexa  $K$ . Entonces se cumple que

(a)  $z(K) = (a_1, b_1)$ .

(b)  $L(K) = \pi \cdot a_0$ .

**Demostración 3.6.1** A continuación la demostración de ambos incisos.

(a) Se sigue directo de la definición de  $a_1, b_1$  y la definición del punto de Steiner.

(b) Se sabe que

$$L(K) = \int_{-\pi}^{\pi} p(t) dt,$$

sustituyendo queda

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \sim \frac{1}{2} a_0 dt + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos ntdt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin ntdt),$$

en el lado derecho de esta igualdad solo la primera integral es diferente de cero, resolviendo la integral se tiene que  $L(K) = \pi \cdot a_0$ .

□

## 3.7. Desigualdades isoperimétricas

### 3.7.1. Desigualdad de Wirtinger

Como una primera aplicación de series de Fourier en el estudio de curvas convexas, tenemos la siguiente desigualdad conocida como desigualdad de Wirtinger (ver por ejemplo [35]), la cual sirve como paso intermedio en varios importantes resultados geométricos.

**Teorema 3.7.1** Sea  $f(t)$  una función continua y periódica de periodo  $2\pi$  con derivada continua  $f'(t)$ . Si  $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$  entonces

$$\int_0^{2\pi} [f'(t)]^2 dt \geq \int_0^{2\pi} [f(t)]^2 dt,$$

con la igualdad si y sólo si  $f(t) = a \cos t + b \sin t$ .

**Demostración 3.7.1** Como  $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ , tenemos que el coeficiente  $a_0 = 0$ , entonces

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

y dado que  $f'(t)$  es continua

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nt - a_n \sin nt).$$

Por la identidad de Parseval tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) = \int_{-\pi}^{\pi} [f'(t)]^2 dt.$$

□

Los griegos ya conocían el hecho de que, en el plano, la curva que encierra área máxima entre todas las que tienen una longitud fija es la circunferencia, aunque no se conoce una demostración de esa época. Esta afirmación es equivalente a decir que si  $\alpha$  es una curva cerrada en el plano con área  $A$  y longitud  $L$ , entonces  $L^2 \leq 4\pi A$ , dándose la igualdad si y sólo si,  $\alpha$  es una circunferencia. Esta relación se conoce como la desigualdad isoperimétrica clásica. A continuación se da una prueba de tal desigualdad usando la desigualdad de Wirtinger.

**Corolario 3.7.1** (Desigualdad isoperimétrica) Consideremos una figura convexa  $K$  con frontera diferenciable, área  $A(K)$  y perímetro  $L(K)$ . Entonces

$$A(K) \leq \frac{1}{4\pi} L(K)^2. \quad (3.11)$$

**Demostración 3.7.2** Sea  $p$  la función soporte de  $K$  y  $f(t) = p(t) - \frac{1}{2\pi} L(K)$  para todo  $t \in [0, 2\pi]$ . Por la fórmula de Cauchy, tenemos que se cumple

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0,$$

se sigue por la desigualdad de Wirtinger que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ p(t)^2 - \frac{1}{\pi} L(K) \cdot p(t) + \frac{1}{4\pi^2} L(K)^2 \right] dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} [p'(t)]^2 dt,$$

entonces,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [p(t)^2 - p'(t)^2] dt \leq \frac{1}{2\pi} L(K)^2,$$

y por la fórmula de Blaschke para el área de  $K$  concluimos que

$$\mathcal{A}(K) \leq \frac{1}{4\pi} L(K)^2. \quad (3.12)$$

□

Ésta es una desigualdad clásica la cual ha sido ampliamente estudiada, actualmente existe una gran cantidad de generalizaciones y variaciones de ella. Podemos usarla para probar el siguiente teorema.

**Teorema 3.7.2 (de Bieberbach.)** Si  $A$  es el área de la región encerrada por una curva convexa y cerrada  $\alpha$  de diámetro  $D$ , entonces

$$4A \leq \pi D^2,$$

alcanzándose la igualdad si, y sólo si,  $\alpha$  es una circunferencia.

**Demostración 3.7.3** Del teorema de Rosenthal y Szasz tenemos que  $D\pi \geq L$ . Elevando ambos lados de la desigualdad al cuadrado y uniendo la relación resultando a la desigualdad isoperimétrica, obtenemos que  $\pi^2 D^2 \geq L^2 \geq 4\pi A$ , es decir,  $D^2 \pi \geq 4A$ . Para que se alcance la igualdad, ésta debe darse en las dos desigualdades que entran en juego; por tanto, sólo cumple para la circunferencia.

□



## Capítulo 4

# Metodología y Resultados

En este capítulo se presentan los resultados desarrollados durante un trabajo realizado junto con J. Jerónimo-Castro, dichos resultados también se pueden encontrar publicados en la revista **International Journal of Geometry**. Como se verá a en las siguientes páginas en este artículo se demuestra que si un cuerpo convexo en el espacio euclidiano tiene la propiedad pedal de la elipse, entonces es un elipsoide de revolución. También damos una familia de curvas en el plano con exactamente un punto equipotencias, que se comporta en cierto sentido, como el foco en una elipse. Por último, se muestra que dado un cuerpo convexo con la propiedad armónica, dicho convexo debe ser una elipse.

También los resultados de este capítulo forman parte de un artículo de investigación realizado en colaboración con el Dr. Jesús Jerónimo, M.C. Víctor Aguilar y el M.C. Rafael Ayala. Los resultados se encuentra publicados en la revista **Aequationes Mathematicae**.

En este capítulo continuamos el estudio de evolutoides de curvas convexas. Se dan algunos resultados que relacionan el evolutoides con el cuerpo flotación y de iluminación, la relación que hay entre los centros de Steiner de una curva convexa y su evolutoides.

### 4.1. Propiedad pedal de la elipse

Recordemos la siguiente propiedad del círculo: si  $P$  es un punto en el plano y una línea a través de  $P$  cruza un círculo dado  $\gamma$  en los puntos  $A$  y  $B$ , el valor de  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ , donde  $\overline{XY}$  denota la longitud del segmento  $XY$ , no depende de la elección de la línea. Otra forma de mencionar esta propiedad es que  $P$  tiene *potencia constante* respecto a  $\gamma$  o que  $P$  es un *punto equipotencial*. Podemos pensar en la pregunta inversa, es decir, si tenemos una curva convexa y cerrada  $\gamma$  en el plano con la propiedad de que cada punto tiene una potencia constante respecto a  $\gamma$ , es  $\gamma$  un círculo? No es difícil demostrar que la respuesta es sí, el lector interesado puede intentar probarlo o puede leer una prueba de los artículos por Kelly [43], Kelly y Straus [44], Yanagihara [47], o Rademacher y Toeplitz [45]. Sin embargo, es posible reducir el número de puntos conocidos con la propiedad de potencia constante con el fin de asegurar que  $\gamma$  es un círculo, por ejemplo, JB Kelly [43] demostró que dos puntos interiores con potencia constante son suficientes para probar que un cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{R}^2$  es un disco Euclidiano. Por otra parte, hay muchos ejemplos que muestran cuerpos convexas diferentes de discos con un punto interior con potencia constante (por ejemplo, J. Rosenbaum [46], K. Yanagihara [47], L. Zuccheri

[48]).

Ahora vamos a considerar una propiedad relacionada. Dado un cuerpo convexo  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  decimos que el punto  $P \in \text{int } K$  tiene *potencia pedal constante* si por cualesquiera dos hiperplanos soporte paralelos de  $K$ , el producto de las distancias de  $P$  a ambos hiperplanos es una constante que no depende del par de hiperplanos soporte. En otras palabras,  $P$  tiene una potencia constante respecto a la superficie pedal de  $K$  de  $P$ . En el plano, sabemos que cada foco de una elipse tiene la propiedad de potencia pedal constante y puesto que la elipse tiene un centro de simetría la constante es la misma para los dos focos. De ello se deduce que el producto de las distancias de los dos focos de una elipse a cualquier línea tangente es constante, y esta propiedad por lo general se conoce como *propiedad pedal* de la elipse. La demostración del enunciado inverso se da más adelante, de hecho, para el espacio 3-dimensional euclidiano es posible probar la siguiente.

**Teorema 4.1.1** *Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^3$  y Sea  $P, Q \in \text{int } K$  dos puntos con potencia pedal constante. Entonces  $K$  es un elipsoide de revolución con eje de rotación  $PQ$ .*

Sin embargo, ¿qué se puede decir de las curvas convexas y las superficies con exactamente un punto con la propiedad de potencia pedal constante? por ejemplo, el centro de una bola euclidiana tiene la propiedad de potencia pedal constante y es el único punto con esta propiedad. En la siguiente sección se prueba la existencia de curvas convexas en el plano, además del círculo euclidiano, con exactamente un punto con la propiedad de potencia pedal constante. Esto se realiza mediante la construcción de una familia de curvas con la propiedad deseada. En la última sección de este capítulo nosotros estudiamos otra propiedad de la elipse llamada la *propiedad armónica* y demostramos que una curva convexa que posee esta propiedad debe ser una elipse.

## 4.2. Curvas planas con un punto con potencia pedal constante

A continuación vamos a probar que un cuerpo convexo en el espacio con dos *puntos equipotenciales* es un elipsoide de revolución, sin embargo, ¿qué se puede decir de un cuerpo con solo un *punto equipotencial*, será un círculo? Como veremos en esta sección, hay una infinidad de cuerpos convexas, diferentes de círculos, con exactamente un *punto equipotencial*. Daremos un ejemplo de una curva de este tipo que se obtiene con una construcción adecuada a partir de una curva descrita por Yanagihara en [47]. Sea  $K$  sea el cuerpo convexo delimitada por los segmentos  $AB, CD$  y  $EF$  pertenecientes a un hexágono regular  $H = ABCDEF$ , por los tres arcos de los círculos circunscritos a los triángulos  $\triangle OBC$ ,  $\triangle ODE$  y  $\triangle OFA$  como se muestra en la 4.1.

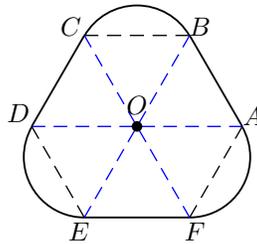


Figura 4.1: Curva de Yanagihara.

El uso de la geometría elemental nos permite ver que  $O$  es un *punto equipotencial* para  $K$ , es decir, el producto de la longitud de los segmentos determinados por  $O$  para cada cuerda de  $K$  por  $O$  es constante. La *curva antipedal* de  $\partial K$ , es decir, la curva que tiene  $\partial K$  como su curva pedal, es convexa y consta de arcos de parábolas. Ahora, vamos a describir con más detalle cómo construir una familia de tales curvas en el plano. Cuerpos convexos en el espacio tridimensional con esta propiedad son obtenidos mediante la rotación de las curvas construidas en el plano alrededor uno de sus ejes de simetría.

Sea  $n = 4k + 2$  ser un número natural dado por cualquier entero  $k \geq 1$ . Considere un  $n$ -ágono regular,  $V_1, V_2 \dots V_n$ , con centro  $O$ .

Para cada impar  $i$  se construyen los arcos de la circunferencia circunscrita al triángulo  $\triangle OV_i V_{i+1}$  de  $V_i$  a  $V_{i+1}$  (como en la 4.2). Con estas  $2k + 1$  piezas de arcos y los segmentos  $V_{i+1} V_{i+2}$ , donde  $V_{n+r} = V_r$ , construimos una curva convexa  $\gamma$  la cual tiene a  $O$  como punto *equipotencial*. La antipedal de esta curva consiste de  $2k + 1$  arcos de parábolas, cada una pasa a través de los puntos medios de dos arcos de circunferencia vecinos  $\widehat{V_i V_{i+1}}$  y  $\widehat{V_{i+2} V_{i+3}}$ , el punto medio de el segmento  $V_{i+1} V_{i+2}$ , y teniendo a  $O$  como foco.

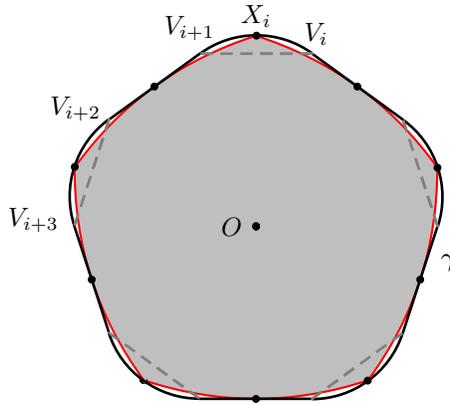


Figura 4.2: Curva con un punto equipotencial.

Para ver esto, considere los puntos medios  $X_1, X_3$ , de los arcos  $\widehat{V_1 V_2}$  y  $\widehat{V_3 V_4}$ , respectivamente, y el punto medio  $Y$  del segmento  $V_2 V_3$ . Sea  $V'_2$  y  $V'_3$  los puntos tal que  $V_2$  y  $V_3$  son los puntos medios de los segmentos  $OV'_2$  y  $OV'_3$ , respectivamente, y sea  $\ell$  la línea a través de ellos. Así la *pedal de la parábola* (desde el foco) es la línea tangente a través de sus vértice, tenemos que  $\ell$  es la directriz de la parábola  $\zeta$  con foco  $O$  y vértice  $Y$ .

Ahora, sea  $O_1$  y  $O_3$  los puntos medios de los segmentos  $OX_1$  y  $OX_3$ , respectivamente. Así la línea  $V_2 V_3$  es tangente común a los círculos circunscritos al  $\triangle OV_1 V_2$  y  $\triangle OV_3 V_4$  tenemos que  $O_1 V_2$  y  $O_3 V_3$  son perpendiculares a  $V_2 V_3$ . Se sigue por la semejanza de los triángulos, que  $X_1 V'_2$  y  $X_3 V'_3$  son perpendiculares a  $\ell$  y  $\overline{OX_1} = \overline{X_1 V'_2} = \overline{OX_3} = \overline{X_3 V'_3}$ , así los puntos  $X_1, X_3$  pertenecen a  $\zeta$ . Notesé que  $OX_1$  y  $OX_3$  son diámetros de los círculos circunscritos a los triángulos  $\triangle OV_1 V_2$  y  $\triangle OV_3 V_4$ , entonces para cada dos puntos  $Z_1 \in \widehat{X_1 V_2}$  y  $Z_3 \in \widehat{V_3 X_3}$  tenemos que  $\angle X_1 Z_1 O = \angle X_3 Z_3 O = \pi/2$ , así la curva pedal del arco  $\widehat{X_1 X_3}$  de  $\zeta$ , respecto a  $O$ , consiste de los arcos circulares  $\widehat{X_1 V_2}$ ,  $\widehat{V_3 X_3}$ , y el segmento  $V_2 V_3$ .

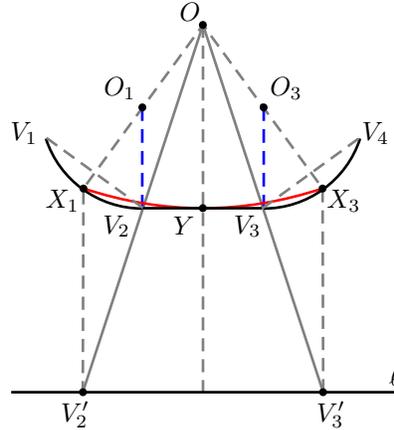


Figura 4.3: Construcción de la curva.

### 4.3. Cuerpos con la propiedad pedal constante en tres dimensiones

Un resultado conocido es el siguiente: el producto de las distancias de los focos de una elipse a una recta tangente cualquiera es constante, siendo esa constante el cuadrado de la longitud del semieje menor. El cual aparece como ejercicio en el libro de Cálculo de Apostol. El inverso de esta propiedad fue probada en [42]. Probaremos ahora una relación parecida usando precisamente esta caracterización.

**Lema 4.3.1** *Sea  $K$  un cuerpo convexo en el plano y sean  $P, Q \in \text{int } K$  dos puntos con potencia pedal constante. Entonces  $K$  es una elipse con focos  $P$  y  $Q$ .*

**Demostración del lema 4.3.1.** Notemos lo siguiente.

**Proposición.** La potencia pedal constante para  $P$  y  $Q$  es la misma.

**Demostración a la proposición.** Sea  $L$  una línea a través de  $P$  y  $Q$  y sean  $L_1$ , y  $L_2$  líneas soporte  $K$  paralelas a  $L$ . Como se muestra en la 4.4, sea  $A, A', B$ , y  $B'$  las proyecciones de  $P$  y  $Q$  sobre  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente. Tenemos que  $\overline{PA} = \overline{QA'}$  y  $\overline{PB} = \overline{QB'}$ , entonces  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{QA'} \cdot \overline{QB'}$ .  $\square$

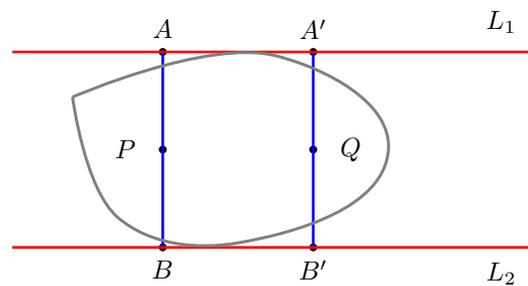


Figura 4.4: Potencia pedal constante para  $P$  y  $Q$ .

Probaremos que el producto de las distancias de  $P$  y  $Q$  para cualquier línea soporte de  $K$  es constante. De esto se tiene que  $K$  es una elipse, usaremos un resultado conocido de que esta propiedad caracteriza una elipse con focos  $P$  y  $Q$  (Puede ver la referencia en, [42]). Supongamos que  $L_1$ , y  $L_2$  son líneas soporte paralelas de  $K$ . Como en la demostración de la proposición, supongamos que  $A, A', B$ , y  $B'$  son las proyecciones de  $P$  y  $Q$  sobre  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente. Por la proposición conocemos que  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{QA'} \cdot \overline{QB'}$ , i.e., ambos puntos tienen la misma potencia pedal constante y así  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ , tenemos después de algunos cálculos que ya sea  $\overline{PA} = \overline{QA'}$  o  $\overline{PA} = \overline{QB'}$ . El primer caso es solo posible si  $L, L_1$ , y  $L_2$  son paralelas, entonces en cualquier otro caso tenemos que  $\overline{PA} = \overline{QB'}$ . Esto implica que  $\overline{PA} \cdot \overline{QA'}$  es constante, y por continuidad esto es también cierto para el caso cuando  $L_1$  es paralela a  $L$ .  $\square$

**Prueba del Teorema 4.1.1.** Sea  $u \in \mathbb{S}^2$  cualquier vector no paralelo a  $L$  (la línea a través de  $P$  y  $Q$ ), y sea  $\pi_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow u^\perp$  la proyección ortogonal sobre  $u^\perp$ . Por hipótesis tenemos que  $\pi_u(P)$  y  $\pi_u(Q)$  tienen potencia pedal constante y entonces por el lema 1 tenemos que  $\pi_u(K)$  es una elipse con focos  $\pi_u(P)$  y  $\pi_u(Q)$ . Así esto es cierto para cada  $u \in \mathbb{S}^2$ , no paralela a  $L$ , por el teorema debido a Blaschke y Hesse [41] concluimos que  $K$  es un elipsoide.

Probaremos un poco más, se probará que  $K$  es un sólido de revolución con eje  $L$ . El orden para esto es probar que la cuerda de  $K$  que corta a  $L$  es un diámetro afín de  $K$ , es decir, es una cuerda que a través de sus puntos extremos pasan planos soporte paralelos a  $K$ . Definamos  $\{A, B\} := L \cap \partial K$ , y suponga que  $AB$  no es un diámetro afín de  $K$ . Sea  $CD$  un diámetro afín de  $K$  paralelo a  $L$ . Considere el plano  $\Omega$  el cual contiene a  $AB$  y  $CD$ , y sea  $v \in \mathbb{S}^2$  un vector no paralelo a  $\Omega$  y paralelo al plano soporte de  $K$  a través de  $C$  y  $D$ . tenemos que  $\pi_v(K)$  es una elipse con un diámetro afín  $\pi_v(CD)$  y con focos  $\pi_v(P)$  y  $\pi_v(Q)$ . Por la elección de  $v$  tenemos que  $\pi_v(P)$  y  $\pi_v(Q)$  determinan una línea paralela a la línea  $\pi_v(CD)$ , sin embargo esto paso sólo si la línea  $\pi_v(P)\pi_v(Q)$  coincide con  $\pi_v(CD)$ . Así,  $\pi_v(P)\pi_v(Q)$  es el eje principal de la elipse  $\pi_v(K)$  para cada  $v$ , esto muestra que  $AB = CD$  y que los planos soporte de  $K$  a través de  $A$  y  $B$  son ortogonales a  $AB$ .

Sea  $\omega \in \mathbb{S}^2$  un vector paralelo a  $L$ . Así  $\pi_\omega(P) = \pi_\omega(Q)$  tenemos que  $\pi_\omega(K)$  es un círculo con centro  $\pi_\omega(P)$ . Es conocido que cada par de secciones paralelas de un elipsoide son homotéticas, entonces tenemos que cada sección de  $K$  ortogonal a  $L$  es un círculo centrado en  $L$ . Concluimos que  $K$  es un elipsoide de revolución con eje de rotación  $L$ .  $\square$

## 4.4. Media Armónica

Sea  $\mathcal{E}$  una elipse con focos  $P$  y  $Q$ . Consideremos una línea  $\ell$  tangente a  $\mathcal{E}$  en el punto  $X$ , y sea  $A$  y  $B$  las proyecciones de  $P$  y  $Q$  sobre  $\ell$ . Ahora, sea  $R$  el punto sobre la línea ortogonal a  $\ell$  a través de  $X$  y la intersección con el segmento  $PQ$ . Es conocido que  $\frac{2}{XR} = \frac{1}{BQ} + \frac{1}{AP}$  para cada línea tangente a  $\ell$ , llámenos a esta propiedad la *propiedad armónica* de la elipse. En esta sección probaremos que una curva estrictamente convexa con la propiedad armónica es una elipse.

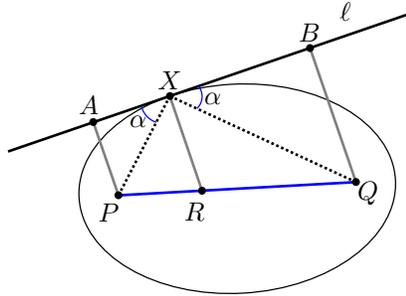


Figura 4.5: Propiedad armónica de la elipse.

**Teorema 4.4.1** Sea  $K$  un cuerpo estrictamente convexo en el plano y sean  $P, Q \in \text{int } K$  dos puntos. Para cada punto  $X \in \partial K$ , y cada línea  $\ell$  soporte de  $K$  en  $X$ , sea  $A, B$  las proyecciones de  $P, Q$  sobre  $\ell$ . Si la línea perpendicular a  $\ell$  en  $X$  corta al cuadrilátero  $ABQP$  un segmento  $XR$  tal que

$$\frac{2}{\overline{XR}} = \frac{1}{\overline{AP}} + \frac{1}{\overline{BQ}},$$

entonces  $K$  es una elipse con focos  $P$  y  $Q$ .

Antes de probar el Teorema 4.4.1 probaremos los siguientes lemas, recordaremos un poco de notación.

**Definición 4.4.1** Dados cuatro puntos colineales  $A, B, C$ , y  $D$ , se define la razón cruzada  $(A, C; B, D)$  como el número real

$$r = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{AD}},$$

donde  $\overrightarrow{XY}$  denota la dirección del segmento de  $X$  a  $Y$ .

**Lema 4.4.1** Sea  $T$  el punto de intersección de las líneas  $AB$  y  $PQ$  entonces  $(P, Q; R, T) = -1$ . Por otro lado, como  $\angle RXT = 90^\circ$  entonces  $\angle PXR = \angle RXQ$ .

**Demostración** Sabemos que  $\frac{\overline{XR}}{\overline{BQ}} + \frac{\overline{XR}}{\overline{AP}} = 2$ , entonces, por semejanza de triángulos tenemos

$$\frac{\overline{XT}}{\overline{BT}} + \frac{\overline{XT}}{\overline{AT}} = 2,$$

así

$$\frac{1}{\overline{BT}} + \frac{1}{\overline{AT}} = \frac{2}{\overline{XT}},$$

lo cual implica  $(A, B; X, T) = -1$  (ver referencia en [50]), y así las líneas  $AP, BQ$ , y  $RX$  son paralelas, tenemos que  $(P, Q; R, T) = -1$ . Para el segundo enunciado de el lema procederemos como sigue: así  $(P, Q; R, T) = -1$  y el  $\angle RXT = 90^\circ$ , y por un resultado conocido en geometría tenemos que  $\angle PXR = \angle RXQ$ .  $\square$

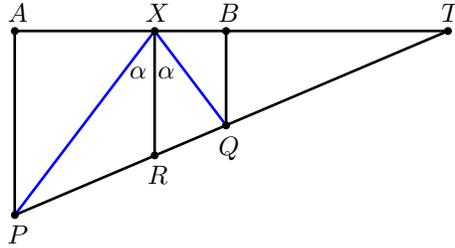


Figura 4.6: Igualdad de ángulos  $\angle PXR = \angle RXQ$ .

**Demostración del Teorema 4.4.1.** Primero probaremos que  $\partial K$  es una curva convexa diferenciable, es decir, para cada punto  $X \in \partial K$  existe una única línea soporte de  $K$  (es su línea tangente). Para probar esto, supongamos que existe un punto  $X \in \partial K$  tal que hay dos líneas  $\ell$  y  $\ell'$  a través de  $X$  las cuales son líneas soporte de  $K$ . Podemos suponer que ninguna de las líneas  $\ell$  y  $\ell'$  son paralelas a  $PQ$ , de lo contrario, podemos elegir un par de líneas que no se intersectan en el interior de  $K$  y contenidas en la región encerrada por  $\ell$  y  $\ell'$  tal que ninguna de ellas es paralela a  $PQ$ . Sean  $A$  y  $B$  las proyecciones de  $P$  y  $Q$  sobre las líneas  $\ell$ , y sean  $A'$  y  $B'$  las proyecciones sobre  $\ell'$ . Ahora, sean  $R$ , y  $R'$  las intersecciones de las líneas perpendiculares a  $\ell$ , y  $\ell'$ , respectivamente, a través del punto  $X$  con la línea  $PQ$ . Por las condiciones de el Teorema, tenemos que  $R$  y  $R'$  deberían estar en el interior de el segmento  $PQ$ . Por el lema 4.4.1 tenemos que  $\angle PXR = \angle RXQ$  y  $\angle PXR' = \angle R'XQ$ , lo cual ciertamente no es posible, entonces hay una única línea soporte a  $K$  en el punto  $X$ , es decir,  $\partial K$  es una curva diferenciable.

Ahora, para cada punto  $X \in \partial K$  tenemos la propiedad óptica  $\angle PXR = \angle RXQ$ , es conocido que si una curva convexa, cerrada y diferenciable que tiene la propiedad óptica es una elipse (ver referencia en [49]) con esto concluimos la demostración de el teorema.  $\square$

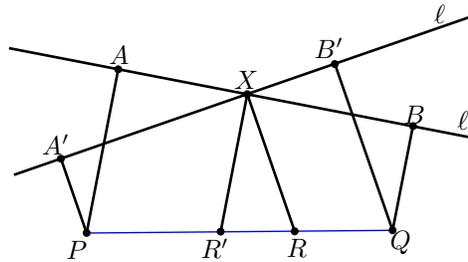


Figura 4.7: Unicidad de la línea soporte.

## 4.5. Evolutoides de curvas convexas

Supongamos que estamos en un mundo plano y queremos pelar una papa convexa. El pelador de la papa produce un corte que hace un ángulo constante  $\alpha$  respecto a la línea tangente en el punto de contacto. Si en cada punto de los límites de una papa convexa  $K$  está actuando un pelador de papas, al mismo tiempo con el mismo ángulo respecto a la tangente, se obtiene una papa pelada  $K_\alpha$ . A tal papa pelada  $K_\alpha$ , que resulta ser la envolvente de todas las líneas tangentes le llamaremos *evolutoide*. Por otra parte, supongamos que el ángulo  $\alpha$  es tal que  $K_\alpha$  es también una papa convexa. Realicemos las siguientes preguntas:

- (1) ¿Cómo se relacionan los perímetros (y áreas) de  $K$  y  $K_\alpha$ ?
- (2) ¿Es cierto que  $K_\alpha$  tiene ancho constante (es centralmente simétrico) si y sólo si  $K$  tiene ancho constante (es centralmente simétrico)?
- (3) Si  $K_\alpha$  es homotético a  $K$ , ¿Qué se puede decir sobre  $K$ ?
- (4) ¿Cómo se relacionan los puntos especiales de  $K$  (centroide, centroide de Steiner, etc...) respecto a los puntos de  $K_\alpha$ ?

Un objetivo de esta tesis es dar respuesta a las preguntas (3) y (4) y establecer más relaciones entre evolutoides y algunas curvas especiales que se pueden asociar.

La primera y segunda pregunta como se había mencionado ya han sido resueltas en un trabajo previo por J. Jerónimo en [16]. De tal trabajo se conocen las siguientes relaciones:

**Teorema 4.5.1**  $L(K_\alpha) = \cos \alpha \cdot L(K)$ .

**Teorema 4.5.2**  $A(K_\alpha) \leq (\cos \alpha)^2 \cdot A(K)$ , con la igualdad si y sólo si  $K$  es un círculo.

A veces cuando encontramos relaciones como las anteriormente descritas, es imposible dejar de pensar en cuantas cosas maravillosas aún nos depara el mundo de las matemáticas. El lector interesado puede consultar las pruebas de estos Teoremas en [16].

## 4.6. Evolutoide

Un poco más al respecto sobre la curva  $K_\alpha$ . El contorno de  $K_\alpha$  es conocido como el evolutoide de ángulo  $\alpha$  y fue estudiado por primera vez por Réaumur en 1709 y por Lancret en 1811. Los Evolutoides son importantes en el diseño de los engranajes como lo muestra el estudio hecho por W. Wunderlich en su libro sobre *Plane Kinematics* [32]; también hay algunas obras donde los evolutoides están relacionados con el *conjunto de centros de simetría* (CSS) o *conjunto* de curvas de Minkowski, que generalmente es una curva que contiene información acerca la simetría de la curva en estudio. Uno de las obras mencionados anteriormente se debe a M. Hamann [12] para las curvas convexas y otra se

debe a Giblin y Warder [10] para curvas no convexas. Algunos estudios recientes sobre evolutoides son los realizados por Braude [33] y Inzinger. [37].

El evolutoide con ángulo  $\alpha$  se denotará a lo largo de este trabajo como  $\gamma_\alpha$ . Para una curva convexa  $\gamma$  con función soporte  $p$  nosotros conocemos que su evolutoide con ángulo  $\alpha$  tiene función soporte  $p_\alpha$  la cual puede ser expresada como

$$p_\alpha(t) = p(t - \alpha) \cos \alpha + \dot{p}(t - \alpha) \sin \alpha. \quad (4.1)$$

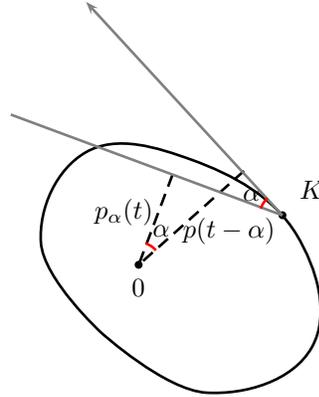


Figura 4.8: **Función soporte del Evolutoide.**

La expresión dada para  $p_\alpha$  es muy útil al establecer algunos resultados interesantes sobre la relación entre curvas convexas y sus evolutoides, como se muestra por ejemplo en los trabajos de Skrzypiec [24], Mozgawa, y Skrzypiec [38], donde los evolutoides son relacionados con otro tipo de curvas las cuales ellos nombran *secan-ópticas*.

#### 4.6.1. Desigualdad de Chakerian

La siguiente desigualdad se debe a G.D. Chakerian [34].

**Teorema 4.6.1** Sean  $K$  y  $M$  figuras convexas con puntos de Steiner  $z(K)$ ,  $z(M)$ , y con funciones soporte respectivas  $p$  y  $h$ . Entonces se cumple que

$$\int_0^{2\pi} p(t) \cdot h(t) dt \geq \pi \langle z(K), z(M) \rangle + \frac{L(M)}{L(K)} \mathcal{A}(K) + \frac{L(K)}{L(M)} \mathcal{A}(M).$$

Una aplicación de la desigualdad de Chakerian es la siguiente.

**Teorema 4.6.2** Dada una curva  $\gamma$  y su evolutoide  $\gamma_\alpha$ . Se tiene que

$$\int_0^{2\pi} p(t) p_\alpha(t) dt \geq \pi \|z(K)\|^2 + \frac{2}{\cos \alpha} \mathcal{A}(\gamma_\alpha).$$

**Demostración 4.6.1** Recordemos que

$$A(\gamma_\alpha) \leq \cos^2 \alpha A(\gamma)$$

$$L(\gamma_\alpha) \leq \cos \alpha L(\gamma)$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p(t)p_\alpha(t)dt &\geq \pi \langle z(K), z(K_\alpha) \rangle + \frac{L(\gamma_\alpha)}{L(\gamma)} A(\gamma) + \frac{L(\gamma)}{L(\gamma_\alpha)} A(\gamma_\alpha) \\ &= \pi \langle z(K), z(K) \rangle + \frac{L(\gamma) \cos \alpha}{L(\gamma)} A(\gamma) + \frac{L(\gamma)}{L(\gamma) \cos \alpha} A(\gamma_\alpha) \\ &\geq \pi \langle z(K), z(K) \rangle + \frac{\cos \alpha}{\cos^2(\alpha)} A(\gamma_\alpha) + \frac{1}{\cos \alpha} A(\gamma_\alpha) \\ &= \pi \|z(K)\|^2 + \frac{2}{\cos \alpha} A(\gamma_\alpha). \end{aligned}$$

□

## 4.7. Una desigualdad para el área del Evolutoide

Como un primer resultado nosotros tenemos la siguiente desigualdad entre el área encerrada por la curva y el área encerrada por su evolutoide.

**Teorema 4.7.1** Sea  $\gamma$  un curva cerrada y convexa de clase  $C^2$  en el plano y sea  $\alpha > 0$  un número pequeño tal que  $\gamma_\alpha$  es también una curva convexa. Entonces

$$A(\gamma_\alpha) \leq \cos^2 \alpha \cdot A(\gamma),$$

con la igualdad si y sólo si  $\gamma$  es el círculo Euclidiano.

**Demostración 4.7.1** Por la fórmula de Cauchy se tiene que

$$A(\gamma_\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p_\alpha(t)^2 - \dot{p}_\alpha(t)^2] dt,$$

entonces

$$A(\gamma_\alpha) = \frac{1}{2} \left\{ \cos^2 \alpha \int_0^{2\pi} [p(t)^2 - \dot{p}(t)^2] dt + \sin^2 \alpha \int_0^{2\pi} [\dot{p}(t)^2 - \ddot{p}(t)^2] dt + \sin 2\alpha \int_0^{2\pi} [p(t)\dot{p}(t) - \dot{p}(t)\ddot{p}(t)] dt \right\}$$

Así  $p(t)$  y  $\dot{p}(t)$  son periódicas con período  $2\pi$  se tiene que

$$\int_0^{2\pi} [p(t)\dot{p}(t) - \dot{p}(t)\ddot{p}(t)] dt = \frac{1}{2} [p(t)^2 - \dot{p}(t)^2]_0^{2\pi} = 0,$$

luego

$$A(\gamma_\alpha) = \frac{1}{2} \left\{ \cos^2 \alpha \int_0^{2\pi} [p(t)^2 - \dot{p}(t)^2] dt + \sin^2 \alpha \int_0^{2\pi} [\dot{p}(t)^2 - \ddot{p}(t)^2] dt. \right\}$$

En otras palabras

$$A(\gamma_\alpha) = \cos^2 \alpha \cdot A(\gamma) + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \int_{-\pi}^{\pi} [\dot{p}(t)^2 - \ddot{p}(t)^2] dt.$$

Ahora

$$p(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

por su expansión en series de Fourier  $p(t)$  (se puede consultar [35]), entonces

$$\dot{p}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nt - a_n \sin nt)$$

y

$$\ddot{p}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Ahora, por la desigualdad de Parseval se tiene

$$\frac{1}{2} \sin^2 \alpha \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \dot{p}(t)^2 dt - \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{p}(t)^2 dt \right] = \frac{\pi}{2} \sin^2 \alpha \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2) - \sum_{n=1}^{\infty} n^4(a_n^2 + b_n^2) \right],$$

entonces

$$A(\gamma_\alpha) = \cos^2 \alpha \cdot A(\gamma) + \frac{\pi}{2} \sin^2 \alpha \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n^4)(a_n^2 + b_n^2) \right].$$

Así para cada sumando en  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n^4)(a_n^2 + b_n^2)$  es no positivo excepto para  $n = 1$ , se tiene que

$$A(\gamma_\alpha) \leq \cos^2 \alpha \cdot A(\gamma),$$

con la igualdad si y sólo si

$$p(t) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t,$$

Esto es, si y sólo si  $p$  es la función soporte de un círculo. □

Para el perímetro de  $\gamma$  y  $\gamma_\alpha$  se tiene la siguiente relación.

**Lema 4.7.1** Sea  $\gamma$  una curva cerrada y convexa en el plano y sea  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . Entonces  $L(\gamma_\alpha) = \cos \alpha \cdot L(\gamma)$ .

**Demostración 4.7.2** El perímetro para una curva  $\gamma_\alpha$  viene dado por

$$L(\gamma_\alpha) = \int_0^{2\pi} p_\alpha(t) dt,$$

sustituyendo la parametrización de la función soporte

$$\begin{aligned} L(\gamma_\alpha) &= \int_0^{2\pi} p(t-\alpha)\cos\alpha + \dot{p}(t-\alpha)\sin\alpha dt \\ &= \cos\alpha \int_0^{2\pi} p(t-\alpha)dt + \int_0^{2\pi} \dot{p}(t-\alpha)\sin\alpha dt \\ &= \cos\alpha \cdot L(\gamma). \end{aligned}$$

□

## 4.8. Unicidad del evolutoide

Sea  $\zeta$  una curva convexa dada en el plano y sea  $\alpha \in (0, \pi/2)$  un número dado. Nos preguntamos si hay más de una curva  $\gamma$  tal que  $\zeta$  es su evolutoide correspondiente al ángulo  $\alpha$ . La respuesta es afirmativa y fue observado por primera vez por T. Apostol y MA Mnatsakanian en [2]. Sin embargo, si añadimos la hipótesis de convexidad y una orientación a  $\zeta$  obtenemos la unicidad de  $\gamma$ .

**Lema 4.8.1** *Sea  $\alpha \in (0, \pi/2)$  un número dado y sea  $\gamma_\alpha$  una curva convexa en el plano diferenciable. Entonces hay una única curva convexa diferenciable  $\gamma$  (respecto a una orientación positiva la cual tiene a  $\gamma_\alpha$  como su evolutoide respecto al ángulo  $\alpha$ ).*

**Demostración 4.8.1** *Supongase que hay dos curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  con funciones soporte  $p_1$  y  $p_2$ , y tienen a  $\gamma_\alpha$  como su evolutoide de ángulo  $\alpha$ . Se tiene que*

$$p_\alpha(t) = p_1(t-\alpha)\cos\alpha + \dot{p}_1(t-\alpha)\sin\alpha = p_2(t-\alpha)\cos\alpha + \dot{p}_2(t-\alpha)\sin\alpha.$$

Para esto obtenemos

$$\langle (p_1(t-\alpha) - p_2(t-\alpha), \dot{p}_1(t-\alpha) - \dot{p}_2(t-\alpha)), (\cos\alpha, \sin\alpha) \rangle = 0$$

para cada  $t \in [0, 2\pi]$ . Así  $p_1(t-\alpha) - p_2(t-\alpha)$  y  $\dot{p}_1(t-\alpha) - \dot{p}_2(t-\alpha)$  debería ser igual a 0 o diferente de 0 al mismo tiempo, tenemos dos posibles casos

(1)  $(p_1(t) - p_2(t), \dot{p}_1(t) - \dot{p}_2(t)) = (0, 0)$ , para cada  $t \in [0, 2\pi]$ , entonces  $p_1(t) = p_2(t)$  y  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ .

(2) Hay  $t_0 \in (0, 2\pi)$  (podríamos reparametrizar si es necesario) tal que  $p_1(t_0) - p_2(t_0) \neq 0$  y  $\dot{p}_1(t_0) - \dot{p}_2(t_0) \neq 0$ . Por la continuidad de  $p_1 - p_2$  y  $\dot{p}_1 - \dot{p}_2$  se tiene que hay una vecindad  $(t_1, t_2) \subset (0, 2\pi)$  de  $t_0$  tal que  $p_1(t) - p_2(t) \neq 0$  y  $\dot{p}_1(t) - \dot{p}_2(t) \neq 0$ , para cada  $t \in (t_1, t_2)$ . Esto muestra que

$$\frac{p_1(t) - p_2(t)}{\dot{p}_1(t) - \dot{p}_2(t)} = -\tan\alpha,$$

entonces si definimos  $\rho(t) = p_1(t) - p_2(t)$  entonces  $\dot{\rho}(t) = \dot{p}_1(t) - \dot{p}_2(t)$  y  $\frac{\rho(t)}{\dot{\rho}(t)} = -\tan\alpha$ . Si consideramos la curva parametrizada en coordenadas polares por  $(t, \rho(t))$ ,

tenemos que  $\frac{\rho(t)}{\dot{\rho}(t)} = \tan \phi(t)$ , donde  $\phi(t)$  es el ángulo formado por radio vector y el vector tangente en el punto  $(t, \rho(t))$ . Esto muestra que  $\phi(t) = \pi - \alpha$ , entonces la curva descrita por  $(t, \rho(t))$ , para  $t \in (t_1, t_2)$ , es una parte de un círculo o una espiral equiangular. Así  $\alpha < \pi/2$  obteniendo que solo el segundo caso es posible, por lo tanto, por la continuidad de  $\rho$  en todo el intervalo  $[0, 2\pi]$  y porque es periódica (con periodo igual a  $2\pi$ ) obtenemos que este caso no es posible.

Concluimos que  $p_1(t) - p_2(t) = 0$ , para cada  $t \in [0, 2\pi]$ , entonces  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ . □

## 4.9. Una caracterización del círculo

**Teorema 4.9.1** *Sea  $\gamma$  una curva convexa, diferenciable y cerrada en el plano y sea  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . Entonces  $\gamma$  es un círculo si y sólo si  $\gamma_\alpha$  es un círculo.*

Con la finalidad de dar la demostración al teorema 4.9.1 consideremos los siguientes lemas.

**Lema 4.9.1**  *$\gamma$  Tiene ancho constante si y sólo si  $\gamma_\alpha$  tiene ancho constante.*

**Demostración 4.9.1** *Como es usual, para cada  $t \in [0, 2\pi]$  denotamos por  $w(t)$  y  $w_\alpha(t)$  el ancho de  $\gamma$  y  $\gamma_\alpha$ , respectivamente, en otras palabras,  $w(t) = p(t) + p(t + \pi)$  y  $w_\alpha(t) = p_\alpha(t) + p_\alpha(t + \pi)$ . Si suponemos primero que  $\gamma$  tiene ancho constante entonces  $\gamma$  es estrictamente convexa y cada diámetro afín es binormal, esto es, cada diámetro afín ortogonal a las correspondientes líneas soporte. Tomemos  $w_\alpha(t) = \cos \alpha \cdot w(t - \alpha)$  (Ver Figura 2), y así  $w(t - \alpha)$  es constante para cada  $t \in [0, 2\pi]$  tenemos que  $w_\alpha(t)$  es también constante.*

Ahora supongamos que  $\gamma_\alpha$  tiene ancho constante, esto es,  $w_\alpha(t) = p_\alpha(t) + p_\alpha(t + \pi)$  es constante para cada  $t \in [0, 2\pi]$ . Sea  $t_0$  y  $t_1$  en  $[0, 2\pi]$  tal que  $w(t_0)$  y  $w(t_1)$  son máximos y mínimos, respectivamente. En ambos casos se tiene que los diámetros afines son ortogonales a sus correspondientes líneas soporte, entonces  $\dot{p}(t_0) = -\dot{p}(t_0 + \pi)$  y  $\dot{p}(t_1) = -\dot{p}(t_1 + \pi)$ , esto se muestra por (4.1) que

$$w_\alpha(t_0 + \alpha) = p_\alpha(t_0 + \alpha) + p_\alpha(t_0 + \pi + \alpha) = (p(t_0) + p(t_0 + \pi)) \cos \alpha$$

y

$$w_\alpha(t_1 + \alpha) = p_\alpha(t_1 + \alpha) + p_\alpha(t_1 + \pi + \alpha) = (p(t_1) + p(t_1 + \pi)) \cos \alpha.$$

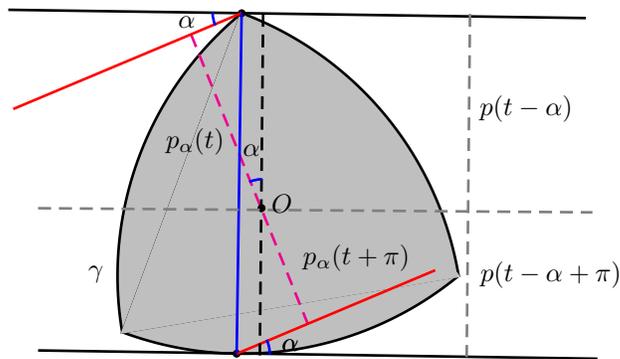


Figura 4.9: Evolutoide de ancho constante.

Así  $w_\alpha(t_0 + \alpha) = w_\alpha(t_1 + \alpha)$  tenemos que  $p(t_0) + p(t_0 + \pi) = p(t_1) + p(t_1 + \pi)$ , i.e.,  $w(t_0) = w(t_1)$ . Concluimos que  $\gamma$  tiene ancho constante.  $\square$

**Lema 4.9.2** Sea  $\gamma$  una curva estrictamente convexa y diferenciable tal que  $\gamma_\alpha$  es también estrictamente convexa y diferenciable. Entonces  $\gamma$  tiene centro de simetría si y sólo si  $\gamma_\alpha$  tiene centro de simetría.

**Demostración 4.9.2** Si  $\gamma$  tienen centro de simetría entonces es fácil ver que  $\gamma_\alpha$  tiene también un centro de simetría. Ahora asumamos que  $\gamma_\alpha$  es centralmente simétrico y queremos probar que  $\gamma$  es también centralmente simétrica. El orden para hacer esto es exhibir una curva convexa centralmente simétrica la cual tiene a  $\gamma_\alpha$  como su evolutoide y entonces por el lema 4.8.1 tendríamos la conclusión de la prueba. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $O$  es el centro de  $\gamma_\alpha$ . Para cada  $t \in [0, 2\pi]$  consideremos  $d(t) = \|\gamma_\alpha(t + \alpha) - \gamma(t)\|$ . Así  $\gamma$  y  $\gamma_\alpha$  son curvas estrictamente convexas tenemos que  $d$  es una función continua y también  $f$ , tal que  $f(t) = d(t + \pi) - d(t)$ , es continua. Notesé que  $f(t + \pi) = -f(t)$  para cada  $t \in [0, 2\pi]$ , entonces existe un número  $t_0 \in [0, \pi]$  tal que  $f(t_0) = 0$ , i.e.,  $d(t_0 + \pi) = d(t_0)$ . Ahora, sea  $\zeta$  la curva la cual consiste de el arco  $\widehat{\gamma(t_0)\gamma(t_0 + \pi)}$  y su reflexión a través de  $O$ . Claramente,  $\zeta$  es una curva diferenciable, estrictamente convexa y centralmente simétrica con centro en  $O$ , y tiene  $\gamma_\alpha$  como su evolutoide con ángulo  $\alpha$ . Por el lema 4.8.1 concluimos que  $\gamma = \zeta$ , esto es,  $\gamma$  es centralmente simétrica.  $\square$

**Demostración al teorema 4.9.1.** Es claro que  $\gamma_\alpha$  es un círculo si  $\gamma$  es un círculo, entonces probaremos sólo que  $\gamma$  es un círculo si  $\gamma_\alpha$  es un círculo. Primero observemos que porque  $\gamma_\alpha$  es de ancho constante entonces por el lema 4.9.1  $\gamma$  también es de ancho constante, y es estrictamente convexa. Ahora podemos aplicar el lema 4.9.2 (así  $\gamma_\alpha$  es centralmente simétrica) y obtenemos que  $\gamma$  es centralmente simétrica. Conocemos que la única curva convexa la cual es al mismo tiempo de ancho constante y tiene centro de simetría es el círculo. Por lo tanto  $\gamma$  es un círculo.

## 4.10. Evolutoide izquierdo y derecho

Comencemos definiendo el evolutoide izquierdo y derecho.

Sea  $K$  un cuerpo convexo en el plano, y sea  $\partial K$  acotada. Para cada  $t \in [0, 2\pi]$  sea  $\ell(t)$  la línea soporte de  $K$  con vector normal hacia el exterior  $u(t) = (\cos t, \sin t)$ , y sea  $p(t)$  la función soporte de  $K$ . Recordemos que  $\partial K$  puede ser parametrizada por

$$\gamma(t) = p(t)u(t) + \dot{p}(t)\dot{u}(t),$$

con  $t \in [0, 2\pi]$ . Ahora, sea  $\alpha \in [0, \pi/2]$  un ángulo indexado, para cada  $t$  considere la línea a través de  $\gamma(t)$  la cual forma un ángulo  $\alpha$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj medido respecto a la línea soporte  $\ell(t)$ . La envolvente de todas las líneas es el *evolutoide izquierdo* de ángulo  $\alpha$ , y similarmente definimos el *evolutoide derecho* el cual es obtenido como la envolvente de las líneas que forman un ángulo  $\alpha$  en el sentido de las manecillas del reloj respecto a  $\ell(t)$ . El evolutoide izquierdo y derecho son denotados por  $\gamma_\alpha$  y  $\gamma_{-\alpha}$ , respectivamente, y ellos pueden ser parametrizados como

$$\gamma_\alpha(t) = p_\alpha(t)u(t) + \dot{p}_\alpha(t)\dot{u}(t),$$

y

$$\gamma_{-\alpha}(t) = p_{-\alpha}(t)u(t) + \dot{p}_{-\alpha}(t)\dot{u}(t),$$

donde la función soporte de los evolutoides (ver la referencias [16], [38], [24]) son expresadas como

$$p_\alpha(t) = p(t - \alpha) \cos \alpha + \dot{p}(t - \alpha) \sin \alpha, \quad (4.2)$$

y

$$p_{-\alpha}(t) = p(t + \alpha) \cos \alpha - \dot{p}(t + \alpha) \sin \alpha. \quad (4.3)$$

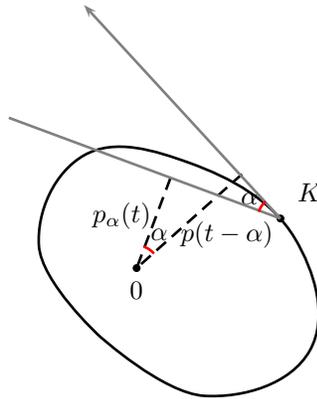


Figura 4.10: Función soporte del evolutoide izquierdo.

La convexidad y suavidad de un cuerpo  $K$  no es suficiente para garantizar que su evolutoide, para un determinado ángulo  $\alpha$ , sea convexo. Por ejemplo, el evolutoide izquierdo de una elipse (y también el

derecho) para el ángulo  $\alpha = \frac{1}{4}\pi$  no es una curva convexa, como se demostró por Giblin y Warder en [10] y también por Wunderlich en [30]. Sin embargo, si el ángulo  $\alpha$  es lo suficientemente pequeño, entonces el evolutoide de la elipse es convexo y sospechamos que esto es válido para cualquier curva suave y estrictamente convexa  $\gamma$ .

Sea  $\alpha \in (0, \pi/2)$  un ángulo fijo y sea  $\rho_\alpha(t)$  denota la distancia entre los puntos  $\gamma(t - \alpha)$  y  $\gamma_\alpha(t)$ . Por un resultado descubierto por T. Apostol y M. Mnatsakanian [1] nosotros conocemos que el área del anillo encerrado entre  $\gamma$  y  $\gamma_\alpha$ , el cual denotamos por  $S_\alpha$ , puede ser obtenido por

$$A(S_\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho_\alpha(t)^2 dt.$$

Por otra parte, lo siguiente es cierto.

**Proposición 4.10.1**  $A(S_\alpha) \geq (\sin \alpha)^2 \cdot A(\gamma)$ , con la igualdad si y sólo si  $\gamma$  es un círculo.

**Demostración 4.10.1** Así  $A(S_\alpha) = A(\gamma) - A(\gamma_\alpha)$  y por el Teorema 4.5.2 conocemos que  $A(\gamma_\alpha) \leq (\cos \alpha)^2 \cdot A(\gamma)$  con la igualdad si y sólo si  $\gamma$  es un círculo, tenemos que  $A(S_\alpha) \geq (\sin \alpha)^2 \cdot A(\gamma)$ , con la igualdad si y sólo si  $\gamma$  es un círculo.  $\square$

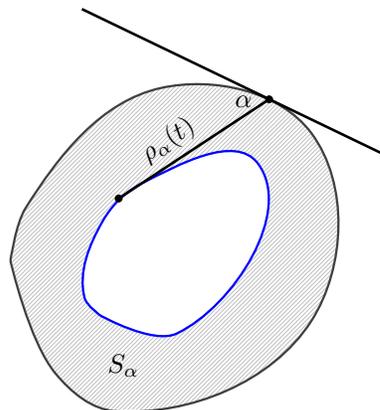


Figura 4.11: Área del anillo  $S_\alpha$ .

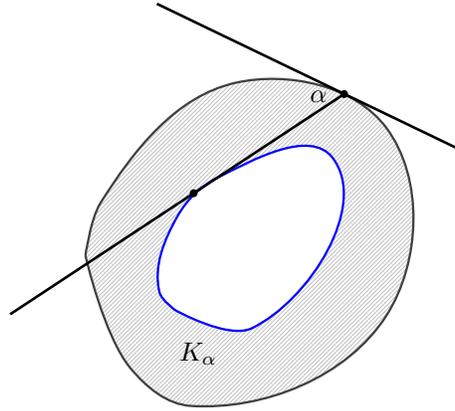


Figura 4.12: Área del anillo  $S_\alpha$ .

**Lema 4.10.1** Dada la notación anteriormente,  $\rho_\alpha(t) = \sin \alpha \cdot R(t - \alpha)$ , donde  $R(t - \alpha)$  denota el radio de curvatura de  $\gamma$  en  $t - \alpha$ .

**Demostración 4.10.2** Así  $\gamma(t - \alpha) = p(t - \alpha)u(t - \alpha) + \dot{p}(t - \alpha)\dot{u}(t - \alpha)$  y  $\gamma_\alpha(t) = [p(t - \alpha) \cos \alpha + \dot{p}(t - \alpha) \sin \alpha]u(t) + [\dot{p}(t - \alpha) \cos \alpha + \ddot{p}(t - \alpha) \sin \alpha]\dot{u}(t)$ , después de algunas simplificaciones tenemos que

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(t) &= \|\gamma_\alpha(t) - \gamma(t - \alpha)\| \\ &= \sin \alpha \cdot \|(-p(t - \alpha) \sin t - \ddot{p}(t - \alpha) \sin t, p(t - \alpha) \cos t + \ddot{p}(t - \alpha) \cos t)\| \\ &= \sin \alpha \cdot \|(-[p(t - \alpha) + \ddot{p}(t - \alpha)] \sin t, [p(t - \alpha) + \ddot{p}(t - \alpha)] \cos t)\| \\ &= \sin \alpha \cdot |p(t - \alpha) + \ddot{p}(t - \alpha)|. \end{aligned}$$

Así  $\gamma$  es estrictamente convexa y tenemos que  $p(t - \alpha) + \ddot{p}(t - \alpha) > 0$ , para cada  $t \in [0, 2\pi]$ , por lo tanto  $\rho_\alpha(t) = \sin \alpha \cdot R(t - \alpha)$ .  $\square$

**Corolario 4.10.1** Sea  $\alpha \in (0, \pi/2)$  un ángulo fijo. Entonces  $\rho_\alpha(t)$  es constante si y sólo si  $\gamma$  es un círculo.

**Demostración 4.10.3** Por el lema 4.10.1 tenemos que  $\rho_\alpha$  es constante si y sólo si  $R(t - \alpha)$  es constante, esto es, si y sólo si  $\gamma$  es un círculo.  $\square$

**Observación 4.10.1** El Corolario 4.10.1 puede ser interpretado como sigue: si la rueda delantera de una bicicleta hace un ángulo fijo con respecto al marco entonces los caminos de las ruedas trasera y delantera describen círculos concéntricos.

**Observación 4.10.2** Si  $R_\alpha(t)$  denota el radio de curvatura de  $\gamma_\alpha$  en el punto  $\gamma_\alpha(t)$  entonces es fácil probar que  $R_\alpha(t) = R(t - \alpha) \cos \alpha + \dot{R}(t - \alpha) \sin \alpha$ . De esta relación tenemos que el centro de curvatura de  $\gamma_\alpha$  en el parámetro  $t$  coincide con el centro de curvatura de  $\gamma$  en  $t - \alpha$ , para cada  $t \in [0, 2\pi]$ , si y sólo si  $\dot{R}(t - \alpha) = 0$  para cada  $t \in [0, 2\pi]$ , i.e., si y sólo si  $\gamma$  es un círculo.

**Observación 4.10.3** Sea  $O(t - \alpha)$  el centro de curvatura de  $\gamma$  en  $\gamma(t - \alpha)$ . Así el ángulo entre el segmento  $[O(t - \alpha), \gamma(t - \alpha)]$  y la línea a través de  $O(t - \alpha)$  perpendicular a la línea  $\gamma(t - \alpha)\gamma_\alpha(t)$  es  $\alpha$ , por el lema 4.10.1 sabemos que  $[\gamma(t - \alpha), \gamma_\alpha(t)]$  es ortogonal a  $[O(t - \alpha), \gamma_\alpha(t)]$ .

Ahora recordaremos la definición de otra curva interesante. Para una curva en el plano  $\gamma$  y un punto pedal fijo  $p$ , la *curva pedal* de  $\gamma$  es el conjunto de puntos  $x$  tal que, la línea  $px$  es perpendicular a la tangente  $\ell$  de la curva que pasa a través del punto  $x$ . Con esta definición en mente introducimos la siguiente notación: dado un punto fijo  $p$  y un número fijo  $\alpha \in (0, \pi/2)$  denotamos la región (el anillo) entre la curva pedal de  $\gamma$  y  $\gamma_\alpha$  por  $S_\alpha(p)$ . Sorprendentemente lo siguiente es cierto.

**Proposición 4.10.2** Para cada punto  $p$  en el plano tenemos que

$$A(S_\alpha(p)) = (\sin \alpha)^2 \cdot A(\gamma),$$

esto es, el área del anillo  $S_\alpha(p)$  no depende de la posición del punto pedal  $p$ .

**Demostración 4.10.4** Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $p$  es el origen del sistema de coordenadas. Sea  $p$  y  $p_\alpha$  la función soporte de  $\gamma$  y  $\gamma_\alpha$ , respectivamente. Note que dos curvas pedal pueden ser parametrizadas en coordenadas polares como  $(t, p(t))$  y  $(t, p_\alpha(t))$ , y por la fórmula para el área en coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned} A(S_\alpha(p)) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(t)^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_\alpha(t + \alpha)^2 dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p(t)^2 - p(t)^2 (\cos \alpha)^2 - \dot{p}(t)^2 (\sin \alpha)^2 - p(t)\dot{p}(t) \sin(2\alpha)] dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p(t)^2 (\sin \alpha)^2 - \dot{p}(t)^2 (\sin \alpha)^2 - p(t)\dot{p}(t) \sin(2\alpha)] dt. \end{aligned}$$

Así  $p(t)$  es una función periódica con período  $2\pi$  tenemos que

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p(t)\dot{p}(t) \sin(2\alpha)] dt = \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \int_0^{2\pi} \left[ \frac{d}{dt} p(t)^2 \right] dt = 0,$$

y así

$$A(S_\alpha(p)) = \frac{1}{2} (\sin \alpha)^2 \int_0^{2\pi} [p(t)^2 - \dot{p}(t)^2] dt.$$

Por la fórmula de Cauchy para el área en términos de la función soporte (ver [39]) tenemos que  $A(S_\alpha(p)) = (\sin \alpha)^2 \cdot A(\gamma)$ .  $\square$

## 4.11. Relación de los puntos de Steiner de una curva y su evolutoide

Un resultado muy interesante que relaciona el *centroide de Steiner* de una curva  $\gamma$  con su evolutoide  $\gamma_\alpha$  es el siguiente teorema, antes recordemos que dado un cuerpo convexo  $K$  con función soporte  $p(t)$  el *centroide de Steiner* se expresa en variable compleja como

$$s(K) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) e^{it} dt.$$

**Teorema 4.11.1** Sea  $\gamma$  una curva convexa y cerrada en el plano. Entonces para cada  $\alpha \in (0, \pi/2)$  tenemos que  $s(\gamma_\alpha) = s(\gamma)$ .

**Demostración 4.11.1** tenemos que

$$\begin{aligned} s(\gamma_\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_\alpha(t) e^{it} dt, \\ &= \frac{e^{i\alpha}}{\pi} \left[ \cos \alpha \int_{-\pi}^{\pi} p(t - \alpha) e^{i(t-\alpha)} dt + \sin \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \dot{p}(t - \alpha) e^{i(t-\alpha)} dt \right], \\ &= \frac{e^{i\alpha}}{\pi} \left[ \cos \alpha \int_{-\pi}^{\pi} p(t) e^{it} dt + \sin \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \dot{p}(t) e^{it} dt \right]. \end{aligned}$$

Por cambio de variables en la última integra para  $u = e^{it}$ ,  $dv = \dot{p}(t)dt$  y aplicando integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned} s(\gamma_\alpha) &= \frac{e^{i\alpha}}{\pi} \left[ \cos \alpha \int_{-\pi}^{\pi} p(t) e^{it} dt + \sin \alpha \left( e^{it} p(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} - i \int_{-\pi}^{\pi} p(t) e^{it} dt \right) \right], \\ &= \frac{e^{i\alpha}}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} p(t) e^{it} dt \right) (\cos \alpha - i \sin \alpha), \\ &= \frac{e^{i\alpha} e^{-i\alpha}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) e^{it} dt, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) e^{it} dt, \\ &= s(\gamma). \end{aligned}$$

□

## 4.12. Cuerpos de iluminación y flotación

Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $\delta < \text{vol}_n(K)$  un número real positivo. El *cuerpo de flotación*  $K_\delta$  es definido como la intersección de todos los subespacios cerrados que separan a  $K$  y una región de volumen fijo  $\text{vol}_n(K) - \delta$ .

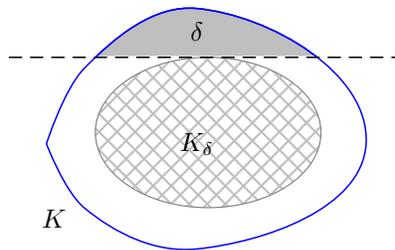


Figura 4.13: Cuerpo de flotación  $K_\delta$ .

Ahora, dado un número positivo  $\delta$  se define el *cuerpo de iluminación*  $K^\delta$  de  $K$  como el conjunto

$$K^\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{vol}_n(\text{conv}(x \cup K)) - \text{vol}_n(K) \leq \delta\}.$$

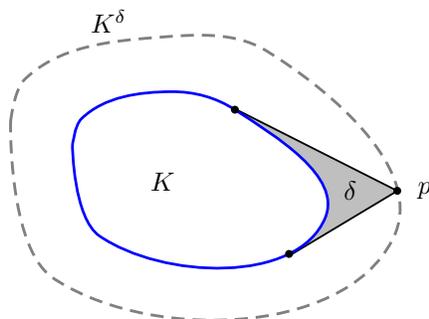


Figura 4.14: **Cuerpo de Iluminación.**

Un interesante e importante problema en Geometría convexa relacionada con el cuerpo de flotación es la conjetura homotética realizada por C. Schütt y E. Werner en [23]: *Tiene un cuerpo convexo  $K$  que ser un elipsoide, si  $K$  es homotético a  $K_\delta$  para algún  $\delta > 0$ ?*

En [23] en efecto, ellos prueban que si hay una sucesión  $\delta_k \rightarrow 0$  tal que  $K_{\delta_k}$  es homotética a  $K$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  (con respecto a el mismo centro de homotecia), entonces es un elipsoide. finalmente, en [29], E. Werner y D. Ye dan una prueba completa de la conjetura.

Es de nuestro interés el problema de alguna forma análoga para el caso de evolutoides en lugar de cuerpos flotantes, es decir, tiene un cuerpo convexo  $K$  en el plano tiene que ser un círculo si para alguna  $\alpha \in (0, \pi/2)$  el evolutoide  $K_\alpha$  es homotética a  $K$ ? La respuesta es dada por el siguiente teorema.

**Teorema 4.12.1** *Sea  $\gamma$  una curva convexa, cerrada y estrictamente convexa en el plano y sea  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . Entonces  $\gamma_\alpha$  es homotética a  $\gamma$  si y sólo si es un círculo*

**Demostración 4.12.1** *Supongamos que el radio de homotecia es  $\lambda$ , i.e.,  $\gamma_\alpha = x + \lambda \cdot \gamma$  para algún vector  $x \in \mathbb{R}^2$ . Entonces, el perímetro y área son relacionados como  $L(\gamma) = \lambda \cdot L(\gamma_\alpha)$  y  $A(\gamma) = \lambda^2 \cdot A(\gamma_\alpha)$ . Por los Teoremas 4.5.1 y 4.5.2 conocemos que  $L(\gamma) = (\cos \alpha)^{-1} \cdot L(\gamma_\alpha)$  y  $A(\gamma) \geq (\cos \alpha)^{-2} \cdot A(\gamma_\alpha)$ , con la igualdad si y sólo si  $\gamma$  es un círculo. Así  $\lambda$  debería ser igual a  $(\cos \alpha)^{-1}$  tenemos que  $A(\gamma) = (\cos \alpha)^{-2} \cdot A(\gamma_\alpha)$ , esto es,  $\gamma$  es un círculo.*

□

Ahora vamos a relacionar los evolutoides con los cuerpos de flotación y demostrar que si cada evolutoide es al mismo tiempo un cuerpo de flotación entonces la curva es un círculo euclidiano.

Antes de probar el siguiente teorema tenemos que notar que la frontera de un cuerpo convexo dado  $K \subset \mathbb{R}^2$  es estrictamente convexa si y sólo si su función soporte es diferenciable ( véase, por ejemplo

[21]), se sigue que si un evolutoide  $K$  es convexo entonces es estrictamente convexa si y sólo si  $\partial K$  es de clase  $C^2$ . Por otro lado esto fue probado por Schütt Werner[22] que el cuerpo convexo de flotación siempre es estrictamente convexo. Se sigue que si el evolutoide de un cuerpo convexo de clase  $C^2$  es la frontera de un cuerpo de flotación convexo entonces es diferenciable y estrictamente convexo.

**Teorema 4.12.2** *Sea  $\gamma$  una curva cerrada convexa de clase  $C^2$  en el plano y sea  $\beta \in (0, \pi/2)$  un número pequeño y fijo. Si para cada  $\alpha \in (0, \beta)$  se tiene que  $\gamma_\alpha$  es la frontera de un cuerpo de flotación de  $\gamma$ , entonces  $\gamma$  es un círculo.*

*Demostración 1.* Supongamos que  $\gamma$  no es un círculo. Sea  $t_0, t_1 \in [0, 2\pi]$  los valores para el ángulo  $t$  donde la curvatura de  $\gamma$  alcanza el mínimo y el máximo, respectivamente. Sea  $\omega$  una copia de  $\gamma$  bajo un movimiento rígido  $\sigma$  de tal manera que el punto  $\gamma(t_0)$  coincide con  $\sigma(\gamma(t_1))$  y ambas curvas comparten la línea tangente  $\ell$  y están contenidas en el mismo plano (como se muestra en la 4.15). Por un resultado conocido de Geometría diferencial (ver referencia en [26]) se tiene un intervalo abierto  $(t_2, t_3)$  que contiene a  $t_0$  tal que para cada  $t \in (t_2, t_3)$  la distancia de  $\omega(t)$  a  $\ell$  es más grande que la distancia de  $\gamma(t)$  a  $\ell$ . En otras palabras, en una vecindad  $V$  de  $\gamma(t_0)$  se tiene que  $\{V \cap \omega\} \setminus \{\gamma(t_0)\} \subset \text{int}(\text{conv}(\gamma))$ . Sea  $\alpha_0 \in (0, \beta)$  un ángulo lo suficientemente pequeño a partir del rayo que inicia en  $\gamma(t_0)$  y formando un ángulo  $\alpha_0$ , respecto a  $\ell$  en sentido contrario a las manecillas del reloj, además intersecta a  $\omega$  y  $\gamma$  en la vecindad  $V$ . Sea  $p$  y  $q$  los puntos donde este rayo intersecta a  $\omega$  y  $\gamma$ . Por la elección de  $\alpha_0$  se tiene que  $p \in [\gamma(t_0), q]$  y el arco  $\widehat{\gamma(t_0)p}$  está contenido en  $\text{conv}(\gamma)$ , por lo tanto el área de la región cortada por el rayo  $\gamma(t_0)q$  en  $\text{conv}(\omega)$  es más pequeña que el área cortada en  $\text{conv}(\gamma)$ . Esto contradice el hecho de que  $\gamma_{\alpha_0}$  es un cuerpo de flotación de  $K$ . Por lo tanto, la curvatura de  $\gamma$  es constante, esto concluye que  $\gamma$  es un círculo.  $\square$

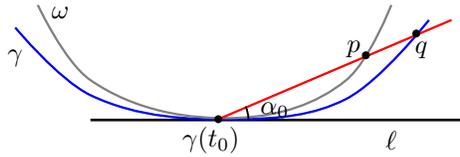


Figura 4.15: Si los evolutoides son cuerpos flotantes entonces  $\gamma$  es un círculo.

*Demostración 2.* Sea  $t_0 \in [0, 2\pi]$  un número fijo y sea  $\alpha_0 \in (0, \beta)$  un ángulo. Sea  $[z, \gamma(t_0)]$  la cuerda de chord of  $\gamma$  la cual forma un ángulo  $\alpha_0$  respecto a la línea tangente a  $\gamma$  en  $\gamma(t_0)$ , en sentido contrario a las manecillas del reloj. usaremos la siguiente propiedad de los cuerpos de flotación (ver [28]): *a través de cada punto de  $K_\lambda$  hay la menos una línea que corta un área  $\lambda$  de  $K$ .* Entonces, porque  $\gamma_{\alpha_0}$  es diferenciable y estrictamente convexa tenemos que cada línea que es tangente a  $\gamma_{\alpha_0}$  corta conjuntos de área contante. También es conocido (ver [28]) que *kis oybtis neduis* de cada cuerda de  $\gamma$  y tangentes a  $\gamma_{\alpha_0}$  pertenecen a  $\gamma_{\alpha_0}$ . Por la observación 4.10.3 se tiene que  $[\gamma_{\alpha_0}(t_0 + \alpha), O_{t_0}]$  es ortogonal a  $[z, \gamma(t_0)]$ , así, tenemos que  $\|z - O(t_0)\| = \|\gamma(t_0) - O(t_0)\|$ ; esto es verdad para cada  $\alpha_0 \in (0, \beta)$  se tiene que el arco  $\widehat{z\gamma(t_0)}$  (en sentido de las manecillas del reloj) es un arco de algún círculo. Procediendo de la misma manera podemos demostrar que  $\gamma$  es la unión de un número adecuado de arcos de círculo superpuestos. Por lo tanto,  $\gamma$  es un círculo.  $\square$

Para el caso especial cuando el ángulo  $\alpha = \pi/2$ , esto es, cuando  $\gamma_\alpha$  es la evoluta de  $\gamma$  podemos probar

lo siguiente.

**Teorema 4.12.3** *Sea  $\gamma$  una curva convexa cerrada en el plano. Si cada línea normal biseca el área encerrada por  $\gamma$ , entonces  $\gamma$  es un círculo.*

**Demostración 4.12.2** *Primero probaremos que  $\gamma$  es una curva diferenciable. Supongamos que hay un punto  $x \in \gamma$  tal que hay dos líneas soporte  $\ell_1, \ell_2$  de  $\gamma$  a través de  $x$ . Si esto pasa entonces hay dos líneas normales diferentes a través de  $x$  cada una de ellas biseca el área encerrada por  $\gamma$ . Ciertamente esto no es posible, así  $\gamma$  es diferenciable.*

*Ahora probaremos que  $\gamma$  es estrictamente convexa. Supongamos que hay un segmento  $[x, y] \subset \gamma$ . Si este es el caso entonces para cada punto  $z \in [x, y]$  la correspondiente línea normal biseca el área encerrada por  $\gamma$ . Sin embargo no puede haber solo una línea ortogonal a  $[x, y]$  y que biseque el área encerrada por  $\gamma$ . Esto muestra que  $\gamma$  es estrictamente convexa.*

*Sea  $x \in \gamma$  un punto arbitrario y sea  $\ell_x$  la única línea normal a  $\gamma$  a través de  $x$ . Sea  $z \in \gamma$  el otro punto de intersección entre  $\gamma$  y  $\ell_x$ . Si  $\ell_z$  es la línea normal a  $\gamma$  en el punto  $z$  entonces ya que cada línea normal divide al área, tenemos que  $\ell_z = \ell_x$ ; en este caso la cuerda  $[x, z]$  es llamada binormal. Dado que los cuerpos de ancho constante son caracterizados por la propiedad de cada normal es también una binormal (ver [5] para esta referencia), tenemos que  $\gamma$  es una curva de ancho constantes y cada binormal es un diámetro de  $\gamma$ . Por otro lado, Harazišvili [14] comprobaron que si cada diámetro afín biseca el área de un convexo, entonces la figura tiene un centro de simetría. Así tenemos que  $\gamma$  tiene ancho constante y un centro de simetría, por lo tanto es un círculo.  $\square$*

### 4.13. Coincidencia del evolutoide izquierdo y derecho

Dada una curva convexa y cerrada  $\gamma$  y un ángulo fijo  $\alpha \in (0, \pi/2)$ , no podemos decir en general que siempre ocurra que  $\gamma_\alpha = \gamma_{-\alpha}$ , en otras palabras, el evolutoide izquierdo y derecho son usualmente distintos. Sin embargo, que se puede decir acerca de una curva  $\gamma$  si el evolutoide izquierdo es el mismo que el derecho? La respuesta es que el cuerpo convexo quién tiene frontera  $\gamma$  tiene un cierto tipo de estabilidad, este enunciado lo explicaremos más ampliamente después. De (4.2), y (4.3), es fácil ver que el evolutoide izquierdo y derecho coinciden si y sólo si

$$p(t - \alpha) \cos \alpha + \dot{p}(t - \alpha) \sin \alpha = p(t + \alpha) \cos \alpha - \dot{p}(t + \alpha) \sin \alpha. \quad (4.4)$$

Por otra parte, si  $\gamma$  tiene simetría rotacional de ángulo  $2\alpha$  en el origen, entonces obtenemos que  $\dot{p}(t - \alpha) = 0$  para cada  $t \in [0, 2\pi]$ . De ello se deduce que, en tal caso  $\gamma$  es un círculo. Sin embargo, vamos a demostrar en el teorema 4.13.1 que si los evolutoides izquierdo y derecho para el mismo ángulo  $\alpha$  coinciden, entonces  $\gamma$  es la frontera de un cuerpo de iluminación de  $\gamma_\alpha$ . Antes de probar el teorema daremos un lema que se mantiene incluso si el evolutoide izquierdo y derecho son curvas diferentes.

**Lema 4.13.1** *Sea  $\gamma$  una curva estrictamente convexa de clase  $C^2$  en el plano y sea  $\alpha \in (0, \pi/2)$  un número fijo. Para cada  $t \in [0, 2\pi]$  defina  $q(t) = \gamma_\alpha(t + \alpha) - \gamma_{-\alpha}(t - \alpha)$ . Entonces  $q(t)$  es paralela a  $\dot{\gamma}(t)$ . Por otro lado,  $q(t) = R(t) \sin(2\alpha) \dot{u}(t)$ .*

**Demostración 4.13.1** Por (4.2) y (4.3) tenemos

$$\gamma_\alpha(t + \alpha) = [p(t) \cos \alpha + \dot{p}(t) \sin \alpha]u(t + \alpha) + [\dot{p}(t) \cos \alpha + \ddot{p}(t) \sin \alpha]\dot{u}(t + \alpha)$$

y

$$\gamma_{-\alpha}(t - \alpha) = [p(t) \cos \alpha - \dot{p}(t) \sin \alpha]u(t - \alpha) + [\dot{p}(t) \cos \alpha - \ddot{p}(t) \sin \alpha]\dot{u}(t - \alpha).$$

Es fácil ver que  $u(t + \alpha) = \cos \alpha \cdot u(t) + \sin \alpha \cdot \dot{u}(t)$ ,  $\dot{u}(t + \alpha) = \cos \alpha \cdot \dot{u}(t) - \sin \alpha \cdot u(t)$ ,  $u(t - \alpha) = \cos \alpha \cdot u(t) - \sin \alpha \cdot \dot{u}(t)$ , and  $\dot{u}(t - \alpha) = \cos \alpha \cdot \dot{u}(t) + \sin \alpha \cdot u(t)$ . Entonces después de algunas simplificaciones tenemos que

$$q(t) = \gamma_\alpha(t + \alpha) - \gamma_{-\alpha}(t - \alpha) = [p(t) + \ddot{p}(t)] \sin(2\alpha) \cdot \dot{u}(t),$$

esto es,

$$q(t) = R(t) \sin(2\alpha) \cdot \dot{u}(t).$$

Con lo cual concluimos la demostración. □

**Observación 4.13.1** Este lema podría también ser probado usando el Lema 4.10.1.

**Teorema 4.13.1** Sea  $\gamma$  una curva estrictamente convexa de clase  $C^2$  en el plano y sea  $\alpha \in (0, \pi/2)$  un número fijo. Si  $\gamma_\alpha = \gamma_{-\alpha}$  entonces  $\gamma$  es el la frontera del cuerpo de iluminación de  $\gamma_\alpha$ .

**Demostración 4.13.2** Si el evolutoide izquierdo y derecho coinciden entonces  $\gamma$  es la  $\beta$ -isoptica de  $\gamma_\alpha$  con ángulo de visión  $\beta = \pi - 2\alpha$ , esto es, la curva debajo de  $\gamma_\alpha$  es vista con ángulo constante  $\beta$ . Por el lema 4.13.1 tenemos el que el segmento  $q(t) = [\gamma_\alpha(t + \alpha), \gamma_{-\alpha}(t - \alpha)]$  es paralelo a  $\gamma'(t)$ , para cada  $t \in [0, 2\pi]$ . como se demostró por W. Cieslak, A. Miernowski, y W. Mozgawa en [6] (Theorem 5.1), un par de curvas  $\gamma$  y  $\gamma_\alpha$  con las dos condiciones dadas anteriormente tienen la propiedad que  $\gamma$  es la frontera de un cuerpo de iluminación de  $\gamma_\alpha$ . Esto completa la demostración. □

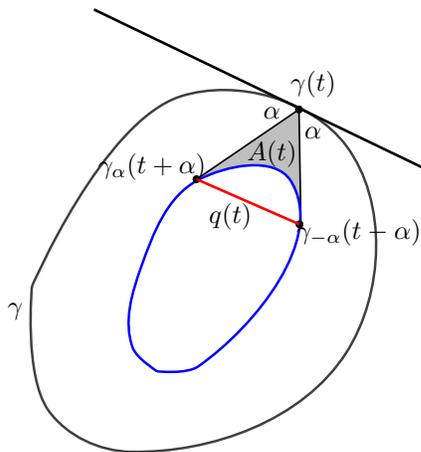


Figura 4.16: Cuerpo con coincidencia del evolutoide izquierdo y derecho.

Ahora recordemos el concepto de *cáustica* para una mesa de billar: *una cáustica es una curva plana dentro de una mesa de billar tal que si un segmento de una trayectoria de billar es tangente a esta curva, entonces también lo es cada segmento reflejado*. Tenemos que  $\gamma_\alpha$  es la cáustica de  $\gamma$  para el ángulo de reflexión constante  $\alpha$ . Esta clase de cáusticas son nombrados por E. Gutkin como *cáusticas de ángulo constante*. Claramente, el disco euclidiano tiene cáusticas de ángulo constante para todos los ángulos  $\alpha \in (0, \pi/2)$ , Sin embargo, nos preguntamos si hay curvas convexas, además del disco euclidiano, tal que para algún ángulo  $\alpha \in (0, \pi/2)$  La cáustica correspondiente es de ángulo constante, y si este es el caso, para que valores de  $\alpha$  es posible esta situación. En [11] E. Gutkin dio una condición necesaria para la existencia de curvas no circulares  $\Gamma$  que tienen una cáustica de ángulo constante  $\Gamma_\theta$ ,

**Theorem G.** Sea  $\Gamma$  una mesa no circular de billar con caustica de ángulo constante  $\Gamma_\theta$ ,  $0 < \theta < \pi/2$ , entonces existe un entero  $n > 1$  tal que

$$\tan(n\theta) = n \tan \theta. \quad (4.5)$$

De acuerdo a [7], si  $\theta$  satisface la ecuación (4.5) para algún  $n > 1$  entonces  $\theta/\pi$  es irracional. Se deduce de los teoremas de Gutkin y Cyr's, que si para un ángulo racional  $\alpha \in (0, \pi/2)$  los evolutoides izquierdo y derecho de una curva  $\gamma$  coinciden, entonces  $\gamma$  es un círculo.

El siguiente lema fue previamente probado por Bezdek y Conelly [3] usando Series de Fourier. Aquí damos una prueba usando solo álgebra vectorial.

**Lema 4.13.2** *Sea  $\gamma$  una vurma convexa, cerrada y diferenciable tal que los puntos medios de los lados de cada triángulo equilátero circunscrito pertenecen a  $\gamma$ . Entonces  $\gamma$  es un círculo.*

**Demostración 4.13.3** *Supongamos que el origen 0 esta contenido en el interior de la región encerrada por  $\gamma$ . Sea  $t$  algún número en el intervalo  $[0, 2\pi]$  y sea  $T(t)$  el triángulo equilátero circunscrito a  $\gamma$  tal que uno de sus lados es ortogonal a  $u(t)$ , como se muestra en la 4.17. Denotemos por  $m(t)$  y  $r(t)$  el centro y radio, respectivamente, de el círculo inscrito en  $T(t)$ . Tenemos que  $m(t)$  y  $r(t)$  son funciones diferenciables y periódicas con período igual a  $2\pi/3$ . Expresamos  $\gamma(t)$  como  $\gamma(t) = m(t) + r(t) \cdot u(t)$ , entonces*

$$\langle \dot{\gamma}(t), u(t) \rangle = 0,$$

Obtenemos que

$$\langle \dot{m}(t) + \dot{r}(t) \cdot u(t) + r(t) \cdot \dot{u}(t), u(t) \rangle = \langle \dot{m}(t), u(t) \rangle + r(t) = 0. \quad (4.6)$$

De una manera análoga obtenemos que

$$\langle \dot{m}(t + 2/3\pi), u(t + 2/3\pi) \rangle + r(t + 2/3\pi) = 0, \quad (4.7)$$

y

$$\langle \dot{m}(t + 4/3\pi), u(t + 4/3\pi) \rangle + r(t + 4/3\pi) = 0. \quad (4.8)$$

De (4.6), (4.7), y (4.8) Así  $r(t) = r(t + 2/3\pi) = r(t + 4/3\pi)$ ,  $m(t) = m(t + 2/3\pi) = m(t + 4/3\pi)$ ,  $\dot{r}(t) = \dot{r}(t + 2/3\pi) = \dot{r}(t + 4/3\pi)$ , y  $\dot{m}(t) = \dot{m}(t + 2/3\pi) = \dot{m}(t + 4/3\pi)$  tenemos que  $\langle \dot{m}(t), u(t) - u(t + 2/3\pi) \rangle = 0$  y  $\langle \dot{m}(t), u(t) - u(t + 4/3\pi) \rangle = 0$ . Así los vectores  $u(t) - u(t + 4/3\pi)$  y  $u(t) - u(t + 2/3\pi)$  son no colineales y tenemos  $\dot{m}(t) = 0$ , i.e.,  $m(t) = m$  para un vector constante  $m$ . Finalmente, usando que  $\dot{m}(t) = 0$  para cada  $t \in [0, 2\pi]$ , de la ecuación (4.6) obtenemos que  $\dot{r}(t) = 0$ . Así el centro  $m(t)$  y el radio  $r(t)$  son constantes, Concluimos que  $\gamma$  es un círculo.  $\square$

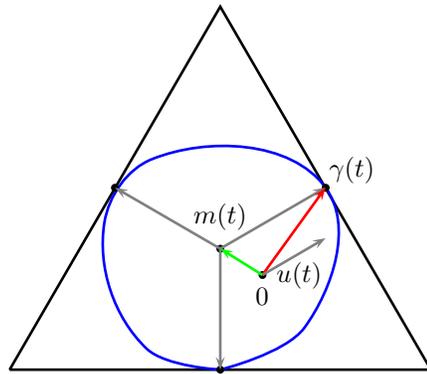


Figura 4.17: Triángulo equilátero circunscrito.

El siguiente lema puede ser probado en el mismo sentido. Este resultado fue primero probado por Khassa [19] y después por H. Groemer [8]. Nuestra prueba, es exactamente la misma como la demostración del lema 4.17, es simple.

**Lema 4.13.3** *Sea  $\gamma$  una curva convexa, cerrada y diferenciable, tal que toca los puntos medios de los lados de cada rectángulo circunscrito a  $\gamma$ . Entonces  $\gamma$  es un círculo.*

De manera un más general nos planteamos la siguiente conjetura.

**Conjetura** Sea  $n \geq 5$  un número entero fijo y sea  $\gamma$  una curva convexa, cerrada y diferenciable talque para cada  $n$ -gon, equiangular circunscrito  $\gamma$  toca a los puntos medios de los lados. Entonces  $\gamma$  es un círculo.

Respecto a esta conjetura es importante decir que no podemos reemplazar la hipótesis de que los puntos medios de los lados de cada  $n$ -gono equiangular circunscrito pertenecen a  $\gamma$  por la hipótesis de que cada  $n$ -gono equiangular circunscrito es regular. De hecho, se sabe que por cada polígono regular  $P$  existe una curva convexa ( diferente del círculo) que puede ser girado dentro de  $P$  de tal manera que en cualquier momento la curva toca a cada lado de  $P$ . Una curva de este tipo es conocido como un *rotor* para  $P$ . Por ejemplo, cada cuerpo convexo con ancho constante 1 es un rotor para el cuadrado de lado 1. Para obtener más información acerca de rotores en polígonos, el lector interesado puede consultar el libro [35] escrito por Groemer.

Como nuestro últimos resultados tenemos una demostración simple del siguiente caso particular del teorema de Gutkin-Cyr.

**Proposición 4.13.1** *Sea  $\gamma$  una curva en el plano, estrictamente convexa, cerrada y de clase  $C^2$ . Asu- mimos que  $\gamma$  posee una cáustica convexa con ángulo constante  $\pi/3$ . Entonces  $\gamma$  es un círculo.*

**Demostración 4.13.4** *Por las condiciones de la proposición tenemos que*

$\gamma_{\pi/3} = \gamma_{-\pi/3}$  y también,  $\gamma_{\pi/3}$  es la caústica de ángulo constante de  $\gamma$ . Es fácil ver que para cada punto  $x \in \gamma$  hay puntos  $y$  y  $z$  en  $\gamma$  tal que el triángulo equilátero  $\Delta xyz$  es circunscrito a  $\gamma_{\pi/3}$ . En efecto, sea  $y, z \in \gamma$  dos puntos tal que  $[x, y]$  y  $[y, z]$  son tangentes a  $\gamma_\alpha$ , y sea  $z', x' \in \gamma$  dos puntos tal que  $[x, z']$  y  $[z, x']$  son tangentes a  $\gamma_\alpha$ . Dado que los ángulos  $\angle z'xy = \pi/3$  y  $\angle x'zy = \pi/3$  tenemos  $[x, z']$  y  $[z, x']$  son ambos paralelos a la línea tangente a  $\gamma$  en  $y$ . Esto es solo posible si  $x' = x$  y  $z' = z$ , así  $[z, x]$  es también tangente a  $\gamma_\alpha$ .

Sea  $m, n, y p$ , los puntos de contacto entre  $\gamma_\alpha$  y los lados  $[x, y]$ ,  $[y, z]$ , y  $[z, x]$ , respectivamente. Por el lema 4.10.1 tenemos  $\|x - m\| = \|x - p\|$ ,  $\|y - m\| = \|y - n\|$ , y  $\|z - n\| = \|z - p\|$ ; esto implica que  $\Delta mnp$  es equilátero y sus lados son paralelos a los respectivos lados del triángulo  $\Delta xyz$ . Esto muestra que  $m, n, y p$ , son los puntos medios de los lados del triángulo  $\Delta xyz$ . Aplicando el lema 4.17 y concluyendo que  $\gamma_\alpha$  es un círculo. Por el Teorema 4 en [16] tenemos finalmente que  $\gamma$  es también un círculo.  $\square$

**Observación 4.13.2** De una manera completamente análoga es posible demostrar que si  $\gamma$  tiene una caústica convexa con ángulo constante  $\pi/4$  entonces es un círculo.

## Capítulo 5

# Conclusiones

En este trabajo de tesis hemos tratado de abordar una serie de tópicos que a nuestro parecer resultan relevantes debido a que han sido tratados desde el siglo XVII hasta la actualidad y que resultaron eventualmente en un esfuerzo fructífero, pues las conjeturas planteadas en los objetivos fueron probadas matemáticamente. También se tienen dos artículos publicados basados en este trabajo. Aún así, lo que presentamos aquí supone un trabajo aún incompleto debido a que el estudio en estos temas puede seguir extendiéndose; generalizando los teoremas y encontrando relaciones con más áreas de Matemáticas. Ésta no es una tarea fácil y supone un gran reto.

Uno de los conceptos más utilizados fue el de evolutoide, a continuación se da una propuesta para extender el concepto de evolutoide en  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$ , definamos  $H = \{J \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \angle(\mathbf{n}_J, \mathbf{n}_x) = \alpha, K \cap J \neq \emptyset\}$ , donde  $\mathbf{n}_J$  resulta ser el vector normal del hiperplano  $J$  y  $\mathbf{n}_x$  el vector normal del hiperplano soporte en  $x$  de  $K$  con  $x \in K \cap J$ .

**Definición de evolutoide en  $\mathbb{R}^n$ .** Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo, a la envolvente de todos los planos del conjunto  $H$  que forman un ángulo  $\alpha$  le llamaremos evolutoide de  $K$ , denotado como  $K_\alpha$ .

Consideremos un punto  $P \in K$ , el hiperplano soporte a  $K$  por  $P$  y el conjunto de hiperplanos por  $P$  tal que sus vectores normales forman ángulo  $\alpha$  respecto al vector normal del hiperplano soporte, entonces la intersección de los semi-espacios generados por los hiperplanos generan un cono-esférico. Dicho esto podemos dar una interpretación del evolutoide para el caso en  $\mathbb{R}^3$ .

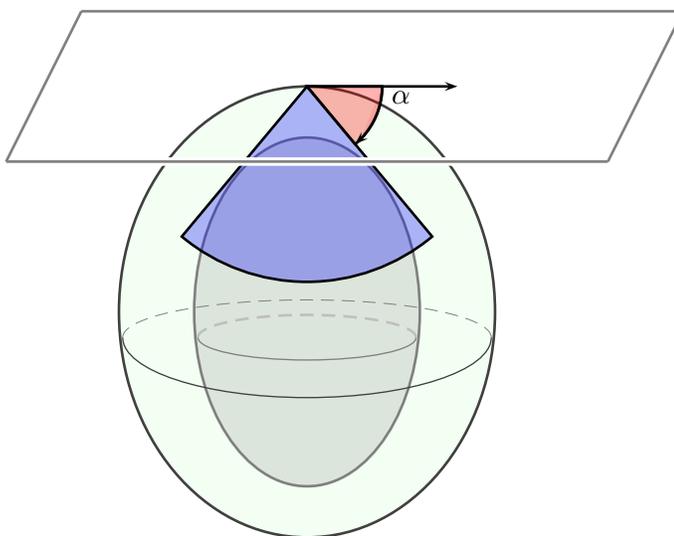


Figura 5.1: Evolutoide en  $\mathbb{R}^3$ .

Al respecto, podemos observar que lo siguiente es cierto.

**Teorema 5.0.1** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo tal que su evolutoide  $K_\alpha$ , para algún  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , es homotético a  $K$ . Entonces  $K$  es una bola Euclidiana.*

Por último merece la pena dedicar un tiempo a las siguientes preguntas. Lo cual sugiere una continuación del presente trabajo.

Consideremos  $K \subset \mathbb{R}^n$ , y  $K_\alpha$  evolutoide de  $K$ .

1. Si  $K_\alpha$  es caustica de  $K$ , ¿será  $K$  una bola Euclidiana?
2. ¿Existirán desigualdades para relacionen el área de la superficie, el volumen de  $K$  y  $K_\alpha$ ?
3. Si  $K$  y  $K_\alpha$  son homotéticos, ¿será siempre  $K$  una bola Euclidiana?
4. ¿Cómo se relacionan los puntos de Steiner de  $K$  y  $K_\alpha$ ?
5. ¿Qué relación existe entre  $K$  y  $K_\alpha$  con los cuerpos de flotación e iluminación?

# Bibliografía

- [1] T. Apostol, and M. A. Mnatsakanian. *The Method of Sweeping Tangents*, Mathematical Gazette **92** (2008), 396 – 417.
- [2] T. M. Apostol, and M. A. Mnatsakanian. *Tanvolutes: Generalized Involutives*, Amer. Math. Monthly **117** (2010) 701-713.
- [3] K. Bezdek, and R. Connelly. *Minimal translation cover for sets of diameter 1*, Period. Math. Hungar. **34** (1997), 23 – 27.
- [4] L. Braude. *Über einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Evolutoide*, Archiv der Math. und Physik **3** (1912), 44 – 52.
- [5] G. D. Chakerian, and H. Groemer. *Convex bodies of constant width*, in Convexity and its Applications, Eds. P.M. Gruber and J.M. Wills, Birkhäuser, Basel, (1983).
- [6] W. Cieslak, A. Miernowski, and W. Mozgawa.  *$\varphi$ -optics and generalized Bianchi-Auerbach equation*, J. Geom. Phys. **62** (2012), 2337 – 2345.
- [7] V. Cyr. *A number theoretic question arising in the geometry of plane curves and in billiard dynamics*, Proc. AMS, in press.
- [8] H. Groemer. *On a characterization of circles and spheres*, Beitr. Algebra Geom. **36** (1995), 211 – 218.
- [9] H. Groemer. *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996).
- [10] P.J. Giblin, and J.P. Warder. *Evolving involutoids*, preprint.
- [11] E. Gutkin. *Capillary floating and the billiard ball problem*, J. Math. Fluid Mech. **14** (2012), 363 – 382.
- [12] M. Hamann. *A note on ovals and their involutoids*, Beitr. Algebra Geom. **50** (2009), 433 – 441.
- [13] W. Hammer. *A note on ovals and their involutoids*, Beitr. Algebra Geom., **50** (2009), 433 – 441.
- [14] A.B. Harazišvili. *Some properties of the center of symmetry*, Soobsch. Akad. Nauk. Gruzin SSR **89** (1978), 21 – 24.
- [15] R. Inzinger. *Über die Evolutoiden und Zwischenevolutoiden von Raumkurven*, Monatsh. Math. Phys. **42** (1935), 57 – 84.

- [16] J. Jerónimo-Castro. *On evolutoids of planar convex curves*, to appear in Aequat. Math.
- [17] J. Jerónimo-Castro, and E. Roldán-Pensado. *A characteristic property of the Euclidean disc*, Period. Math. Hungar. **59** (2009), 215 – 224.
- [18] J. Jerónimo-Castro. *A characterization of the ellipse related to illumination bodies*, submitted.
- [19] D.S. Khassa. *Relation between maximal chords and symmetry for convex sets*, J. London Math. Soc. **15** (1977), 541 – 546.
- [20] W. Mozgawa, and M. Skrzypiec. *Some properties of secantoptics of ovals*, Beitr. Algebra Geom. **53** (2012), 261 – 272.
- [21] R. Schneider. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Cambridge University Press, Cambridge, (1993).
- [22] C. Schütt, and E. Werner. *The convex floating body*, Math. Scand. **66** (1990), 275 – 290.
- [23] C. Schütt, and E. Werner. *Homothetic floating bodies*, Geom. Dedicata **49** (1994), 335 – 348.
- [24] M. Skrzypiec. *A note on secantoptics*, Beitr. Algebra Geom. **49** (2008), 205 – 215.
- [25] A. Stancu. *The floating body problem*, Bull. London Math. Soc **38** (2006), 839 – 846.
- [26] V.A. Toponogov. *Differential geometry of curves and surfaces, a concise guide*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin (2006).
- [27] F. A. Valentine. *Convex sets*. McGraw-Hill, New York (1964).
- [28] E. Werner. *Floating bodies and Illumination bodies*, Proceedings of the Conference “Integral Geometry and Convexity” Wuhan 2004, World Scientific, Singapore (2006).
- [29] E. Werner, and D. Ye. *On the homothety conjecture*, Indiana Univ. Math. J. **60** (2011), 1 – 20.
- [30] W. Wunderlich. *Über die Evolutoiden der Ellipse*. Elem. Math. **10** (1953), 37 – 40.
- [31] W. Wunderlich. *Ebene Kinematik*. Bibliographisches Institut, Mannheim (1970).
- [32] W. Wunderlich. *Ebene Kinematik*. Hochschultaschenbücher, 433/433a (1970).
- [33] L. Braude. *Über einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Evolutoide*, Archiv der Math. und Physik **3** (1912), 44 – 52.
- [34] G.D. Chakerian. *Geometric inequalities for plane convex bodies*, Canad. Math. Bull. **22** (1979), 9 – 16.
- [35] H. Groemer. *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996).
- [36] J. Jerónimo-Castro. *On evolutoids of planar convex curves*, Aequationes Math., por aparecer.
- [37] R. Inzinger. *Über die Evolutoiden und Zwischenevolutoiden von Raumkurven*, Monatsh. Math. Phys., **42** (1935), 57 – 84.
- [38] W. Mozgawa, and M. Skrzypiec. *Some properties of secantoptics of ovals*, Beitr. Algebra Geom. **53** (2012), 261 – 272.

- [39] F. A. Valentine. *Convex sets*. McGraw-Hill, New York (1964).
- [40] W. Blaschke. *Kreis und Kugel*, Veit, Leipzig, de Gruyter, Berlin, (1956).
- [41] W. Blaschke and G. Hessenberg. *Lehrsätze über konvexe Körper*, Jber. Deutsche Math. Verein. **26**, (1917), 215-220.
- [42] J. Jerónimo-Castro, G. Ruiz-Hernández, and S. Tabachnikov. *The equal tangents property*, Adv. Geom., in print.
- [43] Kelly, J.B., *Power points*. Amer. Math. Monthly **53** (1946), 395–396.
- [44] Kelly, P., Straus, E., *A characteristic property of the circle, ellipse and hyperbola*. Amer. Math. Monthly, **63** (1956), 710–711.
- [45] H. Rademacher, and O. Toeplitz. *The enjoyment of mathematics*. Princeton University Press, 1957.
- [46] Rosenbaum, J., *Some Characteristic Properties of the Circle*. The Mathematical Gazette, **33** (1949), 273-275.
- [47] Yanagihara, K., *On a characteristic property of the circle and the sphere*. Tôhoku Math. J., **10** (1916), 142–143.
- [48] Zuccheri, L., *Characterization of the circle by equipower properties*. Arch. Math., **58** (1992), 199–208.
- [49] Y. Lyubich, and L. A. Shor. *The kinematic method in geometrical problems*. Translated from the Russian by Vladimir Shokurov, Little Mathematics Library. Mir, Moscow, (1980).
- [50] L. S. Shively. *An Introduction to Modern Geometry*. John Wiley and Sons, New York, (1939).

