Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Didáctica de las Ciencias (Matemáticas)

Manual de secuencias didácticas de Geometría Analítica Plana implementando las TIC´S

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado

de Maestra en Didáctica de las Ciencias (Matemáticas)

Presenta
Verónica Castellanos Díaz

Dirigido por:
M.C. Luisa Ramírez Granados

Sinodales

Presidente
M.C. Luisa Ramírez Granados

Secretario
Dra. Diana del Carmen Torres Corrales

Vocal
Dra. Lilia Patricia Aké Tec

Sinodal 1
M.D.M. Cecilia Hernández Garciadiaego

Sinodal 2
M.D.M. Carmen Sosa Garza

Centro Universitario, Santiago de Querétaro,
Querétaro, México. Marzo 2025

Dedicatoria

A Dios por su infinita bondad.

A mis padres, quienes han sido la base de todo lo que soy, por darme su amor y apoyo sin reservas.

A mi madre Verónica por alentarme a dar lo mejor de mí todos los días, por ser una mujer excepcional. A mi padre Mauricio por enseñarme a no rendirme ante la adversidad y trabajar arduamente para conseguir mis objetivos.

A mi hermano Mauricio Emmanuel por contagiarme de su entusiasmo, carisma y ser mi compañero de aventuras.

A mis abuelos Rodolfo, María de los Ángeles, Eustasio, Concepción, Martín y Graciela por todo su cariño y enseñanzas.

A mi estudiante Eduardo Nicolas, que es la estrella que más brilla en el cielo.

A mis amigos que me han brindado su aliento y comprensión para alcanzar mis metas.

Agradecimientos

A la M.C. Luisa Ramírez Granados, a la Dra. Diana del Carmen Torres Corrales y a la Dra. Lilia Patricia Aké Tec, por su invaluable contribución en desarrollo de mi proyecto de investigación

A la Universidad Autónoma de Querétaro por brindarme las herramientas necesarias para crecer en mi formación docente.

Al Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios N° 164, por permitirme llevar a cabo la investigación.

A mis profesores que con su enseñanza y ejemplo lograron que alcanzara mis más altas metas. Por su paciencia y confianza, por sacar siempre lo mejor de mí en cada proyecto y tarea realizada, y por enseñarme a ser constante y dedicada.

A mi familia entera que fueron estímulo y aliciente para seguir adelante día a día, por su amor y cariño.

A mis amigos, y compañeros de viaje por sus sonrisas y buen humor que hicieron ligeros los días más pesados y estresantes, por compartir conmigo momentos de alegría y felicidad, pero también momentos en los que el estrés y la ansiedad nos agobiaban.

A todos aquellos que, de manera directa o indirecta, aportaron en la creación de esta tesis.

¡Muchas gracias!

Resumen

El presente trabajo de investigación propició la integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) al contexto específico de la Geometría Analítica Plana, a través del diseño e implementación de un manual de secuencias didácticas cuyo marco de referencia se fundamentó en la Teoría de Aprendizajes Significativos, propuesta por David Ausubel en 1983. El tipo de muestreo seleccionado fue el probabilístico y estuvo estratificado. Las fases del Modelo Van Hiele, fungieron como referente para el desarrollo de la investigación, iniciando con la aplicación del cuestionario diagnóstico que permitió identificar los aprendizajes adquiridos por los estudiantes durante el curso de Geometría Analítica, posteriormente se procedió al desarrollo las secuencias de aprendizaje en tres sesiones de clase, al finalizar las mismas, los estudiantes resolvieron el cuestionario final, que contenía los mismos reactivos que el inicial, esto con el propósito de evaluar el grado de incidencia de las TIC al contexto estudiado. El análisis de resultados se diseñó bajo el planteamiento metodológico del enfoque cuantitativo, utilizando el estadístico "t-Student" con el 5% de error y 95% de nivel de confianza, obteniendo un p-valor de 0.03525034, rechazando así la hipótesis nula; por lo tanto, fue posible afirmar que la implementación de las TIC en el contexto estudiado favoreció en gran medida la adquisición significativa de aprendizajes por parte de los educandos.

Palabras clave

Secuencia didáctica, geometría analítica, TIC, aprendizaje significativo, estudiante.

Abstract

This research promoted integration of Information and Communication Technologies (ICT) on Plane Analytic Geometry, through design and implementation of a manual of didactic sequences whose frame of reference was based on the Theory of Meaningful Learning, proposed by David Ausubel in 1983. Selected sample was probabilistic and stratified following Van Hiele Model's phases for research's development, starting with the application of diagnostic quizz that allowed to identify students' acquired learning during Analytical Geometry course, then proceeded to develop learning sequences in three class sessions, at the end, students solved a final questionnaire, which contained same items as initial one, with the purpose of evaluating incidence degree of ICT. TAnalysis of results was designed under the methodological approach of quantitative approach, using "t-Student" with 5% error and 95% confidence level, obtaining a p-value of 0.03525034, thus rejecting the null hypothesis; therefore, it was possible to affirm that the implementation of ICT in this studied context, greatly favored the significant acquisition of learning by the students

Key words

Didactic sequence, analytical geometry, ICT, meaningful learning, student.

Introducción General

El desarrollo del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas ha progresado en respuesta a las transformaciones y exigencias de la sociedad, aplicando nuevas tácticas, métodos, herramientas, materiales o recursos que promueven el crecimiento del pensamiento matemático de los alumnos en los diferentes grados de educación. (Castro y Gómez, 2021).

Las Nuevas Tecnologías y su adopción en el sector educativo fomentan la generación de nuevos ambientes pedagógicos que impactan no solo a los participantes del proceso de enseñanza y aprendizaje sino también al contexto en el que se realiza. De acuerdo con Cabrero-Almenara (1996), este nuevo ambiente, generado por las Nuevas Tecnologías, demanda un nuevo tipo de estudiante, más enfocado en el proceso que en el resultado, y con la capacidad de aplicar su pensamiento crítico para orientar su propio aprendizaje. En resumen, capacitado para el aprendizaje autónomo, lo que representa un reto para nuestro sistema educativo, Orientado a adquirir, almacenar y replicar información siguiendo esquemas preestablecidos.

La incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el entono educativo se ha transformado en un procedimiento, cuya relevancia trasciende más allá de los instrumentos tecnológicos que constituyen el entorno educativo. Se refiere a una estructura pedagógica y al modo en que se pueden edificar y consolidar aprendizajes relevantes. (Díaz-Barriga, 2013).

El presente trabajo de investigación promueve la integración de las TIC al contexto específico de la Geometría Analítica Plana, con la finalidad de hacer más accesible el aprendizaje por parte de los educandos, a través de la implementación de un manual de secuencias didácticas desarrollado a lo largo de tres sesiones. Previo a la implementación del manual los estudiantes realizaron un test inicial, con la finalidad de evaluar las habilidades y destrezas concernientes a los fundamentos de Geometría Analítica.

Al finalizar el manual, los estudiantes desarrollaron un postest de respuestas cerradas que contenía los mismos reactivos del test inicial, con el propósito no solo de evaluar la incidencia de las TIC en el contexto estudiado, sino también la construcción significativa de conocimientos por parte de los educandos.

En el primer capítulo de la tesis, se presentan los antecedentes de la investigación, se exponen algunos aspectos imprescindibles en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica y se plantea el uso de las TIC como recurso didáctico que promueve el aprendizaje significativo por parte de los educandos.

El segundo capítulo presenta el marco teórico que sustenta la investigación, se plantea la conceptualización de la Teoría de Aprendizaje Significativo, así como los tipos, formas y condiciones básicas necesarias para que este se produzca.

El tercer capítulo detalla la metodología de investigación empleada, la población, la muestra, el objeto de estudio, los instrumentos para la recopilación y el análisis de datos, además del método que sirvió como guía para el desarrollo del estudio.

El tercer capítulo detalla la metodología de investigación empleada, la población, la muestra, el objeto de estudio, los instrumentos para la recopilación y el análisis de datos, además del método que sirvió como guía para el progreso del estudio.

En el capítulo final se destacan los resultados de la investigación, poniendo especial atención en los hallazgos obtenidos. Además, se proponen algunas sugerencias para futuros estudios sobre el tema, con el objetivo de implementar estrategias que fomenten la incorporación de las TIC en el entorno analizado.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Antecedentes

El siglo XVII representa una de las etapas más críticas y fructíferas en la historia de la matemática, tanto por la gran cantidad de matemáticos destacados que vivieron en ese periodo, como por las aportaciones que se realizaron en él; las cuales abrieron nuevos campos a la investigación y dieron pauta al desarrollo de fecundas ramas de la matemática (Toledano, 2017).

Entre los logros más sobresalientes del siglo XVII se pueden mencionar el surgimiento de la geometría analítica, impulsada por Descartes y Fermat, y del cálculo infinitesimal, invención prácticamente paralela pero autónoma de Newton y Leibniz. Los dos hallazgos provocaron una revolución en la matemática de su tiempo y facilitaron la solución de numerosos problemas que hasta ese momento habían sido insolubles, incluso para los más destacados genios, o que no habían sido solucionados más que en ciertos casos específicos (Toledano, 2017).

Como lo atestiguan Jones y Tzekaki (2016) hay escasas investigaciones en la didáctica de la Geometría Analítica, en los diferentes grados académicos.

Bedoya (2013) realiza un estudio con el objetivo de comparar la incidencia de las TIC como recursos didácticos para el aprendizaje trascendental de la Geometría Analítica en un bachillerato de Ecuador. En la toma de datos participaron setenta estudiantes y diez docentes, los datos se recopilaron mediante dos cuestionarios tipo encuesta. Entre los resultados la autora concluye que los docentes emplean metodologías de enseñanza tradicional por lo que el uso que dan a los recursos didácticos no posibilita la integración de nuevos conocimientos en los estudiantes. Finalmente, la autora elabora una propuesta didáctica fundamentada en el modelo de Van Hiele y el uso de tecnología para el desarrollo del pensamiento geométrico en algunos temas del curso de Geometría Analítica.

Otra aportación de la implementación de las nuevas tecnologías al contexto educativo la exponen Álvarez-Niño y Arias-Ortiz (2014), cuyo objetivo fue el desarrollo de la práctica docente a través de la propuesta e implementación de un Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) como una herramienta complementaria en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica. En él se planteó una metodología de seis pasos, comenzando con un trabajo documental basado en la consulta de fuentes de información, posteriormente se seleccionaron los contenidos matemáticos a trabajar, se eligieron las herramientas tecnológicas y se procedió al diseño del material didáctico conformado por diferentes actividades de aprendizaje, luego de ello se realizó una capacitación tanto a docentes como a estudiantes involucrados en el proyecto, y finalmente se realizó una evaluación y retroalimentación de la propuesta. Este estudio reveló que el uso de AVA en el aula es un instrumento de motivación y de enseñanza que facilita la asimilación más rápida, clara y exacta de contenidos. Al implementarlo bajo la filosofía B-Learning, incorpora el enfoque convencional, específicamente organizacional, y lo potencia al generar conocimientos y métodos para apropiar al individuo de su propio proceso de aprendizaje.

El estudio llevado a cabo por Villagrán Cáceres et al. (2018) es otro ejemplo de que la incorporación de tecnologías emergentes en la enselanza de la Geometría Analítica influye positivamente en el desempeño académico de los alumnos. En este análisis descriptivo-correlacional, se examinaron dos grupos uniformes de estudiantes de primer semestre de ingeniería que estaban inscritos legalmente en la materia de Álgebra Lineal y Geometría Analítica. En el primer grupo se empleó el método convencional de enseñanza con actividades relacionadas con el agua, mientras que en el segundo grupo se empleó un sistema semiótico a través del uso de GeoGebra. El método consistió inicialmente en familiarizar a los alumnos con el ambiente gráfico del área de trabajo de GeoGebra, además de los comandos fundamentales y las herramientas que utiliza el software.

Posteriormente, se realizaron ejercicios que permitieron la articulación en el empleo de esta herramienta matemática, a través de la utilización de las funciones elementales para la construcción de superficies y funciones vectoriales. Luego de ello se aplicó un examen del primer parcial en ambos grupos (paralelo A y paralelo B) y se realizó un análisis de datos utilizando el estadístico "t-Student" con el 5% de error, y 95% de nivel de confianza, obteniendo un p-valor = 0.00099191. Los autores concluyen que la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales y el uso de GeoGebra para trabajar con superficies contribuyen significativamente en el rendimiento académico de los estudiantes.

Por otro lado, la investigación de Gusñay et al. (2019) titulada “Herramienta para la enseñanza de la geometría utilizando Tics, dirigido a los estudiantes del segundo año de bachillerato” presenta una propuesta didáctica empleando el software GeoGebra y posteriormente elaboran un cuestionario a los educandos para evaluar el grado de satisfacción al emplear este tipo de herramientas educativas en las sesiones de clase. Los resultados obtenidos arrojaron que un 72% de los estudiantes encuestados consideran, que el ambiente que genera el empleo de la tecnología, permite fortalecer áreas de oportunidad. Sin embargo, para la puesta en marcha de esta herramienta, será necesario que los docentes adquieran competencias digitales; no obstante, el hecho de implementar diferentes tecnologías favoreció en gran medida en el logro de aprendizajes trascendentales.

En el siglo XXI, los profesores enfrentan el desafío de ajustar el sistema educativo a la realidad social. Por lo tanto, deben comprometerse y adoptar las nuevas formas de aprender y enseñar, con el estudiante como protagonista esencial de su propio proceso de aprendizaje y las nuevas TIC como recurso sobresaliente (Vicario, 2017).

Al impartir Geometría, los profesores de matemáticas pueden elegir entre una instrucción geométrica intuitiva y experimental, hasta una instrucción geométrica lógica y racional. En todas las situaciones, la meta debe ser la misma: promover el crecimiento de alumnos críticos y reflexivos, capaces de solucionar de manera racional situaciones geométricas y proporcionar argumentos robustos a sus formas de razonamiento (Rainiere, 2013).

1.2 Problemática

De acuerdo con Orrantia (2006), el aprendizaje de las matemáticas, junto con la lectura y la escritura, representa uno de los aprendizajes fundamentales en la educación elemental, debido a la naturaleza instrumental de estos temas. Por lo tanto, comprender los desafíos en el aprendizaje de las matemáticas se ha vuelto una preocupación evidente para muchos profesionales involucrados en el ámbito educativo, especialmente si tomamos en cuenta el elevado índice de fracaso en estos temas entre los alumnos que finalizan la educación obligatoria.

Dada la importancia de las matemáticas en la vida diaria, diversos actores vinculados al campo de las matemáticas promueven que esta disciplina sea de interés para los ciudadanos presentes y venideros. No obstante, esto no es verdad, dado que esta materia genera pasiones y desafecciones en los alumnos, a causa de los retos que esta plantea (Zuazua y Río, 2002). Los hallazgos de estudios internacionales Mullis et al. (2014), evidencian el bajo desempeño en el campo de las matemáticas, un fenómeno complicado que puede ser atribuido a diversos factores.

Desde el punto de vista del docente y basándose en una investigación llevada a cabo por Hernández et al. (2014), se exponen los distintos elementos involucrados en el aprendizaje matemático:

1. Factores didácticos metodológicos: Incluye la falta de recursos y materiales educativos; el uso excesivo de la metodología convencional; la formación insuficiente en matemáticas de un considerable conjunto de profesores de básica general; maestros con alta formación en matemáticas, en premedia, media y superior, pero que no disponen de diversos métodos para transmitir sus saberes a sus alumnos.
2. Factores socio económicos: Incorpora la falta de conocimiento sobre los desafíos sociales de los alumnos; bajo nivel de ingreso familiar, falta de recursos y equipos indispensables para la instrucción y aprendizaje de las matemáticas; aumento en la población estudiantil con familias disfuncionales con varias deficiencias; entre otros.
3. Factores políticos: Incluye la ausencia de persistencia en los proyectos de educación; modificaciones en los planes y programas sin una argumentación adecuada; la política educativa se basa en el partido en el poder y no satisface completamente los intereses y requerimientos de la sociedad.
4. Factores culturales: Incorpora elementos como las raíces culturales; el punto de vista social y grupal de la población en relación a las matemáticas y la limitada importancia que los ciudadanos atribuyen a la educación matemática como una herramienta para el empleo y la superación.
5. Otros factores: En este contexto, se puede tomar en cuenta la mezcla de los factores previamente mencionados y los factores psicológicos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje matemático.

D’Amore et al. (2008) señala que lo que distancia a los alumnos de la matemática no es únicamente ella, sino la manera en que se les muestra, la ausencia de relación entre el contexto real y los temas impartidos en el salón de clases; se desmotivan a medida que perciben que la matemática impartida en el colegio no tiene conexión con la vida diaria.

Báez e Iglesias (2007) indican que la enseñanza de las matemáticas enfrenta desafíos, especialmente en la instrucción y aprendizaje de la Geometría Analítica. En ocasiones, los docentes no asimilan los contenidos previstos en los programas y planes de estudio, ya sea por desconocimiento de la importancia de la disciplina o por un limitado entendimiento de la asignatura. En las situaciones donde sí se generan, se distingue particularmente el uso de fórmulas o teoremas.

En relación con esto, Goncalves (2006) indica que, a pesar de que los alumnos pueden solucionar problemas específicos con gran destreza, no poseen estrategias de resolución cuando se topan con las mismas circunstancias propuestas en otros contextos distintos, abstractos o más formales. Otra circunstancia habitual es la de los alumnos que deben memorizar las ilustraciones de los teoremas o los métodos para solucionar problemas.

Aunque la relevancia de la instrucción en geometría analítica reside en que es la disciplina en la que los alumnos realizan procesos de pensamiento, la situación en las aulas es diferente; ya que uno de los desafíos en la instrucción de la geometría es el desafío de que los alumnos y estudiantes transiten de la descripción de las figuras a un proceso más formal, fundamentado en el razonamiento y la argumentación (Aray et al., 2019).

1.3 Justificación

El proceso de instrucción y adquisición de conocimientos matemáticos. matemáticas ha progresado en respuesta a las fluctuantes transformaciones y exigencias de la sociedad, aplicando nuevas tácticas, métodos, instrumentos, recursos o materiales que promueven la evolución del razonamiento matemático de los alumnos en todos los niveles educativos (Castro y Gómez, 2021).

En cuanto a la Geometría, la existencia de esta en el entorno cercano podría ser un motivo suficiente para respaldar la formación y adquisición de conocimientos. Sin embargo, es importante señalar que no es la única. La Geometría brinda la posibilidad de iniciar un camino hacia niveles más elevados de pensamiento (García y López, 2008).

La geometría es un campo fundamental de las Matemáticas, vital para el progreso humano y su desarrollo. Está íntimamente vinculada, de forma directa o indirecta, con varias actividades que fomentan el avance social, el aprendizaje o incluso el ocio. Para las personas, la geometría simboliza un idioma común que permite la descripción y edificación de su ambiente, además de transmitir su percepción del mundo a toda la humanidad. Esta disciplina fomenta en los alumnos diversas competencias que les facilitan una mejor comprensión de otros elementos de las Matemáticas y les proporcionan una perspectiva más nítida del entorno que les envuelve. Asimismo, hay numerosas aplicaciones matemáticas que incluyen componentes geométricos (Vargas y Araya, 2013).

Las Nuevas Tecnologías y su adopción en el sector educativo fomentan la generación de nuevos ambientes pedagógicos que impactan directamente tanto a los participantes del proceso de enseñanza-aprendizaje como al contexto en el que se realiza. Según Cabrero-Almenara (1996), este ambiente emergente, generado por las Nuevas Tecnologías, demanda un estudiante distinto; uno que priorice más el proceso que el resultado, dispuesto a tomar decisiones y seleccionar su propia ruta de aprendizaje. En resumen, preparado para el aprendizaje independiente, lo cual plantea un desafío para el sistema educativo, centrado en la enseñanza repetitiva y automática.

Por lo tanto, las Nuevas Tecnologías plantean un desafío novedoso al sistema educativo que implica transitar de un modelo de educación unidireccional, en el que usualmente los conocimientos reinciden en el docente o en su equivalente el libro de texto, a modelos más flexibles y adaptables, en los que la información contenida en grandes bases de datos puede ser intercambiada entre los estudiantes.

Tal como lo señala Díaz-Barriga (2013), la integración de las TIC en el ámbito educativo se ha transformado en un proceso, cuya relevancia trasciende más allá de los instrumentos tecnológicos que constituyen el entorno educativo. Se refiere a una estructura pedagógica y a la forma en que se pueden edificar y consolidar aprendizajes relevantes.

Las TIC no se originan con la implementación de la computadora en el salón de clases, sino que engloban el ingenio, la creatividad y la utilización de los diversos recursos que el profesor tiene a su disposición diariamente para comunicar su aprendizaje e incentivar a los alumnos a adquirir y utilizar de manera constante el conocimiento no solo en el entorno escolar, sino también en la vida diaria (Arista, 2014).

1.4 Objetivo general

- Diseñar e implementar una guía de secuencias didácticas de Geometría Analítica Plana fundamentada en las TIC, con la finalidad de propiciar el aprendizaje significativo del área por parte de los estudiantes.

1.5 Objetivos específicos

- Identificar las dificultades inmersas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica Plana.
- Diseñar secuencias didácticas de Geometría Analítica Plana que no solamente permitan superar las dificultades inmersas en el proceso de enseñanza- aprendizaje, sino que, además propicien el aprendizaje significativo por parte de los educandos.
- Implementar las secuencias didácticas fundamentadas en las TIC para evaluar el grado de incidencia de las nuevas tecnologías en el contexto educativo específico a la Geometría Analítica Plana.

1.6 Preguntas de investigación

- ¿Cuáles son los principales desafíos inmersos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica?
- ¿Qué tipo de secuencias didácticas se podrían diseñar para minimizar la incidencia de problemáticas presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica Plana y adicionalmente propicien aprendizajes significativos por parte de los estudiantes?
- ¿Cuál es el grado de incidencia que tendría la implementación de secuencias didácticas fundamentadas en las nuevas tecnologías en la Geometría Analítica?

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Este capítulo incorpora las secciones que proporcionan datos de literatura pertinente al tema de investigación. Se detalla la formulación de la teoría del aprendizaje significativo, además de los diferentes tipos, formas y condiciones fundamentales para su generación.

2.1 Teoría de aprendizaje significativo

Si me obligara a condensar toda la psicología educativa en un solo principio, diría: "Lo que más impacta al alumno es lo que ya conoce analícelo y enseñe en consecuencia" (Ausubel et al., 1983).

La teoría del aprendizaje significativo propuesta por Ausubel sugiere proteger y ejercitar el aprendizaje que genera un auténtico cambio en el individuo. El aprendizaje se refiere al proceso de interacción que genera transformaciones internas y la alteración de los procesos en la estructura psicológica del individuo de manera activa y constante (Serra, 2000).

En el aprendizaje significativo, estas modificaciones emergerán de nuevos saberes que otorgarán un significado personal y una consistencia lógica en las estructuras cognitivas de los estudiantes. Este tipo de educación requiere la autenticidad de la transformación (Torres, 2003)

Ausubel considera que la estructura cognitiva del individuo es esencial para el aprendizaje de un nuevo saber. Se refiere a la estructura cognitiva como el conjunto de ideas, imágenes, afirmaciones, conceptos y experiencias que el individuo ya tiene y que le son pertinentes, además de su estructura jerárquica, desde lo más amplio hasta lo más específico (Agudelo, 2004).

La representación de la estructura cognitiva suele hacerse en forma de redes, denominadas redes semánticas. Estas redes simbolizan estructuras formadas por nodos (equivalentes a los esquemas) con diferentes relaciones (como subordinadas, disyuntivas) o conexiones entre estos (Stepich y Newby, 1988).

Desde esta perspectiva, el aprendizaje puede entenderse como una reorganización de redes en la memoria semántica, consiste en construir nuevas estructuras de conocimiento mediante la construcción de nuevos nodos y vinculándolos a los nodos existentes. Cuando el conocimiento existente se vincula con el nuevo conocimiento, el nuevo conocimiento se integra y se comprende mejor, el aprendizaje es la reorganización de las estructuras cognitivas de los estudiantes.

El aprendizaje significativo se produce cuando los contenidos nuevos se vinculan de forma lógica y consistente con lo que el alumno ya conoce. Lo crucial es la relación entre los saberes anteriores y la nueva información, no únicamente un vínculo superficial. Por lo tanto, la nueva información toma significado y se incorpora en la estructura cognitiva del alumno, contribuyendo a distinguir, evolucionar y consolidar los conceptos ya existentes, reforzando así toda la estructura cognitiva (Ausubel et al., 1983).

En la perspectiva de Ausubel, el conocimiento previo es el elemento más relevante para el aprendizaje significativo de nuevos conceptos. En resumen, si se tuviera que señalar un solo factor que tenga un impacto mayor en el proceso de aprendizaje, ese sería el saber previo, es decir, los conocimientos que el estudiante ya posee en su estructura cognitiva, los cuales facilitan la incorporación de nueva información (Moreira,2020).

El subsunsor es un saber inmerso en la estructura cognitiva del alumno, que, mediante su interacción, otorga sentido a otros conocimientos. No es adecuado adoptarlo de manera rigurosa o restringirlo a un concepto concreto. El subsunsor puede ser también una idea, un constructo, una declaración o una representación de un conocimiento precedente y relevante para el aprendizaje significativo de nuevos contenidos (Moreira, 2020).

El subsunsor puede presentar una estabilidad cognitiva superior o inferior, puede estar más o menos diferenciado, es decir, más o menos detallado en cuanto a significados. No obstante, dado que el proceso es interactivo, cuando actúa como un cimiento para un nuevo saber, él mismo se transforma obteniendo nuevos significados, confirmando los ya existentes.

2.2 Condiciones básicas para que se produzca el aprendizaje significativo

- El hecho de que el material tenga relevancia potencial implica que el contenido educativo pueda vincularse de forma coherente y significativa con la estructura cognitiva particular de cada estudiante. Esta relación debe ser coherente, es decir, debe haber un vínculo deliberado y significativo con las ideas pertinentes que el alumno ya posee en su estructura cognitiva. Este concepto hace referencia a las características internas del contenido a adquirir y a su esencia.

- Cuando el significado potencial se transforma en un conocimiento singular y único en una persona como consecuencia de un aprendizaje relevante, se puede afirmar que ha obtenido un significado psicológico. Así, la existencia del significado psicológico no solo se basa en cómo el alumno interpreta el contenido con coherencia lógica, sino también en que tenga realmente los conocimientos requeridos en su esquema mental.

- La disposición hacia un aprendizaje trascendental requiere que el alumno tenga la voluntad de vincular los nuevos saberes de forma profunda y no ajena con su esquema mental. Por lo tanto, independientemente de la importancia del contenido a adquirir, si el propósito del alumno es retener de manera mecánica y sin una comprensión auténtica, tanto el proceso como los resultados del aprendizaje serán mecanizados. Asimismo, sin importar la postura del alumno, ni el método ni los resultados tendrán un verdadero valor si el material no posee un carácter relevante y no tiene vínculo con sus saberes anteriores (Muñoz, 2004).

A continuación, se presenta una síntesis de los requisitos fundamentales para que ocurra el aprendizaje trascendental, las cuales incluyen los materiales significativos, el significado psicológico y la disposición para aprender. Estas condiciones son fundamentales para organizar de manera efectiva el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Tabla 1

Condiciones básicas para que se produzca el aprendizaje significativo.

Material significativo	Significado psicológico	Disposición para aprender
Que los materiales de enseñanza estén	Que se organice la enseñanza respetando la estructura psicológica del	Que los alumnos se encuentren motivados por aprender.

estructurados lógicamente con jerarquía conceptual.	alumno, es decir sus conocimientos previos y estilos de aprendizaje.	

El aprendizaje significativo no implica, como podría suponerse, que una persona recuerde un conocimiento de manera permanente. La incorporación atenuante es un proceso natural dentro de este tipo de aprendizaje; sin embargo, no conlleva un olvido total, sino una disminución en la capacidad de distinguir y diferenciar significados, sin que estos se pierdan por completo. Si la información se elimina por completo, como si nunca hubiera sido aprendida, es probable que el proceso de adquisición haya sido mecanizado y sin verdadera profundidad (Moreira, 2020).

La conexión relevante y no aleatoria hace referencia al vínculo entre los conceptos y algún componente particularmente importante de la composición mental del estudiante, como una perspectiva, una conceptualización o una afirmación (Ausubel et al., 1983).

Ausubel argumenta que la jerarquía de los contenidos cognitivos en la mente del estudiante está altamente estructurada, de manera que los conceptos más amplios se sitúan al comienzo de la jerarquía y los específicos se encuentran en los niveles inferiores y están subordinados a los superiores.

Así pues, fomentó la utilización de diseñadores preliminares, que son una exposición general y abstracta de los contenidos fundamentales del aprendizaje a impartir, con la finalidad de simplificar la relación entre la estructura mental y el contenido más concreto a impartir (Moreira y Novak, 1988).

Por su parte, el aprendizaje automático, a diferencia del aprendizaje significativo, ocurre cuando no existen conocimientos previos adecuados, lo que hace que la nueva información se retenga de manera aleatoria, sin interactuar con los saberes previos. Esto implica un almacenamiento literal, desordenado y exclusivamente repetitivo, sin significado, que no requiere comprensión y conduce a su aplicación automática en contextos conocidos. Además de ser útil solo para tareas mecánicas o "respuestas adecuadas", ese conocimiento es olvidado con rapidez cognitivamente hablando (Moreira y Novak, 1988).

A través de la instrucción, las estructuras conceptuales sufren modificaciones mediante dos procesos denominados "diferenciación progresiva" y "reconciliación integradora".

La diferenciación progresiva ocurre cuando la nueva información o conceptos se incorporan a una idea o afirmación más amplia que se ha establecido previamente, es decir, cuando la nueva información o conceptos se incorporan a una estructura que los engloba. De esta forma, su significado se genera a través de la diferenciación de otros conceptos o afirmaciones; esta diferenciación es gradual, la utilización por repetición de situaciones distintas genera su significado por diferenciación progresiva (Oré, 2016)

El proceso inverso, es decir, conocidos varios conceptos subordinados, la estructura cognitiva experimenta una transformación que genera, en esta ocasión, una idea, concepto o afirmación supraordinadora, que los engloba. Por lo tanto, se produce una reconciliación integradora.

2.3 Tipos de aprendizaje significativo

Ausubel identifica tres clases de aprendizaje significativo: el aprendizaje de representaciones, de conceptos y de proposiciones.

- **Aprendizaje de representaciones**

  Es el tipo de aprendizaje fundamental sobre el cual se basan otras formas de aprendizaje. Consiste en asignar significados a ciertos símbolos. En este sentido, Ausubel sostiene que este tipo de aprendizaje ocurre cuando símbolos arbitrarios se vinculan con sus referentes y adquieren para el estudiante el significado que esos referentes representan (Ausubel et al., 1983).

- **Aprendizaje de conceptos**

  Los conceptos pueden caracterizarse como elementos, sucesos, circunstancias o características que tienen características de criterios comunes y que se identifican a través de algún símbolo o signos. Según Ausubel, los conceptos se obtienen mediante dos procedimientos. Entrenamiento y absorción. Durante la creación de conceptos, las características (atributos) del concepto se obtienen mediante la experiencia directa, en fases sucesivas de formulación y comprobación de hipótesis (Ausubel et al., 1983).

- **Aprendizaje de proposiciones**

> Este enfoque de aprendizaje trasciende la mera acción de comprender lo que las palabras representan, ya sea individualmente o en combinación, debido a que exige captar el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones. El aprendizaje de proposiciones involucra la unión de diferentes palabras, cada una de las cuales representa un referente específico. Luego de ello se unen de tal manera que la idea resultante excede la suma de los significados individuales, creando un nuevo sentido que se incorpora al esquema mental (Hancco, 2017).

El aprendizaje significativo se puede clasificar en tres tipos: representaciones, conceptos y proposiciones. A continuación, se describen cada uno de ellos.

Tabla 2

Tipos de aprendizaje significativo

Representaciones	Conceptos	Proposiciones
Es aquel a través del cual se da significado a determinados símbolos.	Es aquel que a partir de un concepto permite la identificación de los atributos esenciales de sus referentes.	Se da cuando es posible enlazar varios conceptos y establecer la relación entre ellos.

2.4 Formas de aprendizaje significativo

Se pueden identificar tres tipos de aprendizaje significativo: el aprendizaje por subordinación, el aprendizaje por superordenación y el aprendizaje combinatorio.

- El aprendizaje significativo se denomina subordinado cuando los saberes adquiridos que podrían ser significativos toman significados para el individuo que aprende, mediante un proceso de esquema previo fundamentado en saberes anteriores más amplios e inclusivos ya presentes en su estructura cognitiva.

- Por lo tanto, el aprendizaje superordenado conlleva a métodos de conceptualización, deducción y integración, que conducen a nuevos saberes que se subordinan a los que los originaron. Es un instrumento esencial para la asimilación de conceptos, tal como se muestra en el ejemplo proporcionado.
- Por lo tanto, el aprendizaje combinatorio es una modalidad de aprendizaje significativo donde la asimilación relevante de un saber reciente conlleva el intercambio de diversos conocimientos ya existentes en el esquema mental, sin embargo, no es ni más inclusivo ni más específico que los saberes inéditos. Posee ciertas características criteriosas, algunos significados compartidos, pero no los subordina ni los superordena (Rivera et. al, 2011).

A continuación, se presentan las formas de aprendizaje significativo, las cuales se dividen en tres categorías: subordinado, superordenado y combinatorio. Estas formas se refieren a cómo la nueva información se organiza y se relaciona con los conceptos previamente existentes en la estructura cognitiva.

Tabla 3

Formas de aprendizaje significativo

Subordinado	Superordenado	Combinatorio
Cuando los nuevos conocimientos que podrían ser significativos adquieren significados para el individuo que aprende,	Conlleva procesos de abstracción, inducción y síntesis, que conducen a nuevos saberes que se subordinan a los que los originaron.	la asimilación relevante de un saber reciente conlleva el intercambio de diversos conocimientos ya existentes en el esquema mental.

En síntesis, la teoría del aprendizaje significativo destaca el proceso de creación de significados como un componente esencial de la enseñanza. Dentro de las condiciones necesarias para que ocurra un aprendizaje significativo, se deben resaltar: la relevancia lógica, la relevancia psicológica y la voluntad de los estudiantes de aprender.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA Y MÉTODOS

Este capítulo presenta de manera precisa y exhaustiva cada una de las fases del procedimiento de investigación. La etapa del método incorpora, tanto la población como la muestra, el tema de investigación y los recursos para la recopilación y el estudio de los datos.

3.1 Población y muestra

La población que fue objeto de estudio durante la presente investigación la conformaron 526 estudiantes del Centro de Bachillerato Tecnológico Industria y de Servicios ubicado en el estado de Tamaulipas “Emilio Portes Gil”. No obstante, el tamaño de la muestra la integraron solamente 30 estudiantes de entre 16 y 18 años (ver tabla 4).

El tipo de muestreo seleccionado fue el probabilístico, dado que todos los elementos que conformaban la población tuvieron la misma probabilidad de ser seleccionados y fue estratificado ya que la población de estudiantes estaba dividida en diferentes carreras técnicas tales como programación, soporte y mantenimiento de equipo de cómputo, logística, administración de recursos humanos, electrónica, electricidad, mantenimiento automotriz y mecánica industrial.

Tabla 4

Asignación de la muestra en relación con el peso proporcional

Estrato	Carrera técnica	Población	Peso proporcional	Muestra
1	Programación	68	13%	4
2	Soporte y mantenimiento de equipo de computo	67	13%	4
3	Logística	65	12%	4
4	Administración de recursos humanos	73	14%	4
5	Electrónica	61	12%	4
6	Electricidad	57	11%	3
7	Mantenimiento automotriz	63	12%	4
8	Mecánica industrial	72	14%	4
	∑=	**526**	**100%**	**30**

La técnica de recolección de datos utilizada para la realización del estudio fue la encuesta. Dicha técnica de investigación tuvo el propósito de evaluar el grado de incidencia de las TIC en el contexto específico de la Geometría Analítica Plana.

3.2 Objeto de estudio

Incidencia de las TIC en el contexto específico de la Geometría Analítica Plana.

3.3 Decisiones metodológicas basadas en el método de investigación

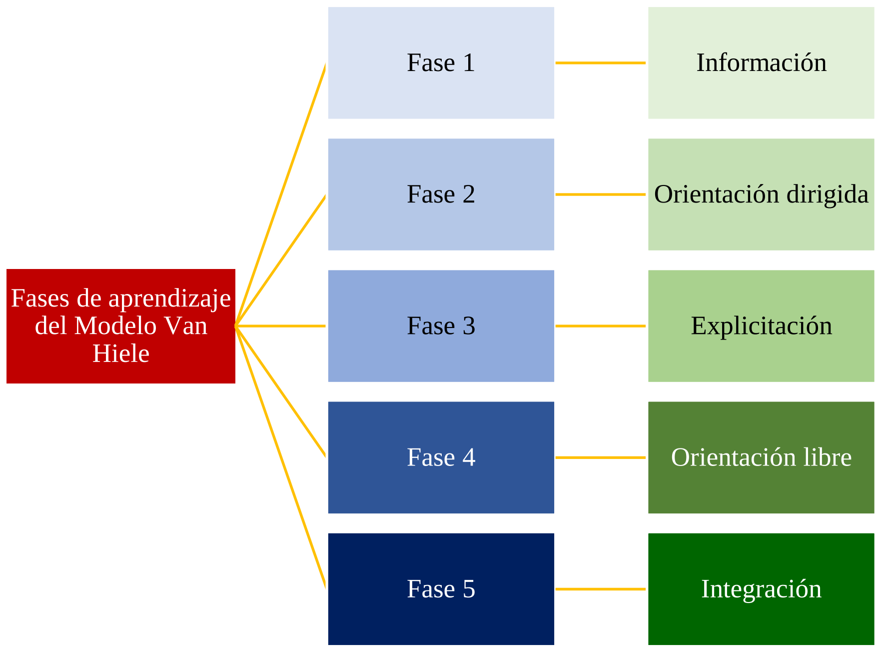
Considerando que el objeto de estudio de la presente investigación es la incidencia de las TIC en la Geometría Analítica Plana, el método seleccionado estará fundamentado en el Modelo Van Hiele, específicamente en las fases de aprendizaje, que posibilitan determinar de forma aproximada cómo los estudiantes generan, refinan, amplían y asimilan las ideas.

3.4 Método de investigación

El método implementado en el presente trabajo de investigación se encuentra fundamentado en las fases de aprendizaje del Modelo Van Hiele (ver figura 1). El método está integrado por cinco etapas de aprendizaje que orientan al profesor en la creación y estructuración de las experiencias educativas apropiadas para el progreso del alumno de un nivel a otro. En este método, las etapas no están limitadas a un nivel específico; cada nivel comienza con actividades de la primera etapa y sigue un orden, de modo que, al completar la quinta etapa, el alumno habrá alcanzado el siguiente nivel de razonamiento (Vargas y Araya, 2013).

Figura 1

Fases del modelo Van Hiele



A continuación, se caracterizan dichas fases de aprendizaje:

Fase 1: Información. En esta fase se introduce el nuevo contenido a estudiar. El docente debe reconocer los conocimientos previos de sus estudiantes y analizar su capacidad de razonamiento (Vargas y Araya, 2013).

Fase 2: Orientación dirigida. En esta fase los estudiantes inician su exploración del área de estudio a través de estudios fundamentados en el contenido que les ha sido suministrado. El propósito principal de esta etapa es que los alumnos identifiquen, entiendan y adquieran conocimientos sobre los conceptos, propiedades, figuras y demás elementos clave en el campo de la geometría que están estudiando (Chavarria-Pallarco, 1990).

Fase 3: Explicitación. El estudiante es consciente de las conexiones entre las características de los objetos geométricos, intenta comunicarlas verbalmente o por escrito y adquiere el lenguaje técnico que se encuentra en el curso. Basándose en sus vivencias anteriores, en el transcurso de las tareas sugeridas por el docente, los alumnos manifiestan e intercambian sus perspectivas con el propósito de establecer vínculos (Mora y Rodríguez, 2015).

Fase 4: Orientación libre. En esta etapa es fundamental reforzar el aprendizaje logrado en fases anteriores. Los estudiantes deberán aplicar los conocimientos adquiridos para resolver ejercicios diferentes a los anteriores, posiblemente de mayor grado de complejidad. El docente debe proponer retos que no se limiten a la aplicación de procedimiento conocido, sino que involucren nuevas conexiones o características, promoviendo enfoques más abiertos, con distintas formas de resolución, opción múltiple o, en algunos casos, con una alternativa de solución.

Fase 5: Integración. Los educandos desarrollan una perspectiva integral de los aprendizajes adquiridos concernientes con el tema y de la red de relaciones que están finalizando de construir, incorporando estos nuevos saberes, técnicas de trabajo y modos de pensar con los que contaban previamente. Es conveniente que el docente recopile la información necesaria que ayude a los estudiantes a alcanzar este nivel.

3.5 Registros utilizados para recoger los datos

Los estudiantes desarrollaron dos cuestionarios, el cuestionario inicial se realizó previo a la implementación de la secuencia didáctica fundamentada en las TIC. Al finalizar la misma los educandos resolvieron nuevamente el cuestionario aplicado al inicio de la investigación, esto con el propósito de evaluar la incidencia de las nuevas tecnologías en el contexto educativo.

3.6 Métodos utilizados para el análisis de los datos

El desarrollo de la metodología fundamentada en las fases de aprendizaje del Modelo Van Hiele se describe a continuación:

Fase 1: Información

Previo a la implementación de la secuencia didáctica, los estudiantes realizaron un cuestionario diagnóstico, con la finalidad de evaluar las habilidades y destrezas concernientes a los fundamentos de Geometría Analítica, la evaluación estuvo conformada por los siguientes subtemas:

1. Partición de un segmento en una razón dada.

2. Punto medio de un segmento.
3. Cálculo de perímetros y áreas de polígonos a partir de las coordenadas de sus vértices.
4. Pendiente y ángulo de inclinación.
5. Ecuación de la recta y sus transformaciones.

Fase 2. Orientación dirigida

Una vez concluida la evaluación, se procedió al desarrollo de la secuencia didáctica, implementando las TIC. La secuencia se dividió en tres sesiones de 50 minutos cada una. En la primera sesión se abordaron los temas de: división de un segmento en una razón dada, punto medio de un segmento, en la segunda sesión se abordaron los temas de cálculo de perímetros y áreas de polígonos a partir de las coordenadas de sus vértices. Finalmente, en la última sesión se estudiaron los temas de pendiente, ángulo de inclinación y ecuación de la recta y sus transformaciones.

Fase 3: Explicitación

Es importante mencionar, que al finalizar cada una de las sesiones, los estudiantes realizaron ejercicios selectos y actividades prácticas, para complementar los contenidos abordados durante las sesiones.

Fase 4: Orientación libre

Al finalizar la secuencia didáctica, los estudiantes resolverán el mismo cuestionario que desarrollaron en la primera fase de la investigación, esto con la intencionalidad de evaluar el grado de incidencia de las TIC al contexto específico de la Geometría Analítica Plana.

Fase 5: Integración

Durante esta fase, los estudiantes integraron los nuevos conocimientos a los existentes propiciando así ambientes de aprendizaje significativo.

En la tabla 5 se presenta el objetivo de cada uno de los ejercicios propuestos en el cuestionario inicial/final.

Tabla 5

Objetivos de ejercicios propuestos en el cuestionario inicial/final.

Ejercicio	Subtema	Objetivo
1	Distancia entre dos puntos	Identificar coordenadas en el plano cartesiano y calcular la distancia entre dos puntos.
2	Distancia entre dos puntos	Ubicar los vértices de un triángulo en el plano cartesiano, calcular sus longitudes y obtener su perímetro.
3	Punto medio de un segmento	Determinar el punto medio de un segmento, dadas las coordenadas de los extremos.
4	Punto medio de un segmento	Determinar el punto medio de un segmento, dadas las coordenadas de los extremos.
5	Punto medio de un segmento	Aplicar los conocimientos adquiridos del punto medio, en una situación del contexto real.
6	Cálculo de perímetros y áreas de polígonos a partir de las coordenadas de sus vértices.	Calcular la longitud que une cada uno de los vértices de figura geométrica dada y obtener los valores del perímetro y área.
7	Pendiente y ángulo de inclinación.	Aplicar el concepto de pendiente como tangente del ángulo θ.
8	Pendiente y ángulo de inclinación.	Aplicar la fórmula para calcular la pendiente dadas las coordenadas extremas.
9	Pendiente y ángulo de inclinación.	Identificar el sentido de la pendiente cuando el ángulo formado por la recta es agudo.
10	Pendiente y ángulo de inclinación.	Identificar el sentido de la pendiente cuando el ángulo formado por la recta es obtuso.
11	Pendiente y ángulo de inclinación.	Aplicar los conocimientos adquiridos de la pendiente a situaciones contexto real.

12	Pendiente y ángulo de inclinación.	Aplicar los conocimientos adquiridos de la pendiente a situaciones contexto real.
13	Ecuación de la recta y sus transformaciones.	Determinar la ecuación de la recta dadas la pendiente y la ordenada al origen.
14	Ecuación de la recta y sus transformaciones.	Determinar la ecuación de la recta dadas la pendiente y un punto.
15	Ecuación de la recta y sus transformaciones.	Calcular la ecuación de la de la recta dados dos puntos.

A continuación, se presentan los instrumentos utilizados en el diseño del proceso de enseñanza, los cuales son fundamentales para la recolección de datos y la organización de las actividades didácticas. Estos instrumentos incluyen tanto herramientas para evaluar el impacto de las TIC como estrategias de trabajo docente que guían el proceso de construcción del conocimiento.

Tabla 6

Instrumentos del diseño

Instrumento	Descripción	Justificación	Duración	Reglas para su conducción
Cuestionario inicial/final	Instrumento normalizado utilizado para la recopilación de datos durante el trabajo de campo de ciertas investigaciones cuantitativas, cuyo objetivo es recopilar, de forma sistemática y organizada, datos sobre la población con la que se realiza el estudio.	Al concluir la secuencia didáctica se aplicará un cuestionario para evaluar el impacto que tuvo la implementación de las TIC en el desarrollo de contenidos de geometría analítica plana.	50 min.	Ambas evaluaciones se contestarán con tinta negra, no se permitirá el uso de corrector, el desarrollo de cada reactivo deberá presentar el procedimiento llevado a cabo para su resolución.

Secuencia didáctica	Estrategia de trabajo docente que estructura y "controla el proceso de construcción de conocimientos, estableciendo un "mapa del saber para la formación de competencias. Esto implica una elección y organización de los contenidos que establecen los parámetros del saber construido y estructura ese saber en un orden establecido.	La secuencia didáctica integrará actividades que involucren la implementación de las TIC que los estudiantes deberán desarrollar durante tres sesiones.	Cada sesión tendrá una duración de 50 minutos.	Las tareas propuestas deberán ser entregadas en el tiempo establecido.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Este capítulo presenta los datos más significativos que surgen de la utilización de instrumentos de medición en la construcción de la secuencia de aprendizaje. A partir de estos, se presenta el proceso de análisis e interpretación, que facilita la solución a la problemática en estudio.

Según Araya y Alfaro (2010), la formación convencional en Geometría Analítica ha puesto el énfasis en la memorización de fórmulas, definiciones geométricas, teoremas y propiedades, respaldada por construcciones mecanicistas y descontextualizadas.

Vargas y Araya (2013) indican que gran parte de las instituciones educativas llevan a cabo la enseñanza de la geometría de forma tradicional, destacando principalmente la clase magistral, la labor en equipo y, en particular, la utilización del discurso del docente como principal instrumento de enseñanza. Aunque se utilice cualquier método educativo, en la mayoría de las situaciones existe un factor común: se proporciona una educación fundamentada en el lápiz y papel, o en la pizarra y la tiza, que no brinda al alumno más oportunidades para su crecimiento.

Hernández y Villalba (2001) señalan que, en las clases de geometría, se ofrece al alumno un producto final y ya finalizado, lo que no incentiva su participación activa en la evolución de su saber matemático; además, no promueve la creatividad y el aprendizaje relevante en el estudiante.

La problemática de estudio abordó las dificultades inmersas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Geometría Analítica, iniciando con un pretest, que evidenció las competencias de los estudiantes, posteriormente el desarrollo de la secuencia de aprendizaje y por último la aplicación del postest que fungió como referente para evaluar el grado de incidencia de las TIC en el contexto analizado.

4.1 Presentación del grupo

La propuesta didáctica de Geometría Analítica Plana fundamentada en las fases de aprendizaje del Modelo Van Hiele, se implementó en un grupo conformado por 30 estudiantes de entre 16 y 18 años, pertenecientes al CBTIS No. 164.

4.2 Concepciones iniciales del pretest.

En la primera sesión, los estudiantes desarrollaron un pretest de respuestas cerradas (ver anexo 1), con finalidad de evidenciar las habilidades y destrezas concernientes a los fundamentos de Geometría Analítica, dicha evaluación estuvo conformada por un total de 15 reactivos, cada reactivo tenía un valor de 10 puntos, por lo que el total de puntos del pretest era de 150, dicha evaluación integró los siguientes subtemas de la asignatura:

1. División de un segmento en una razón dada.
2. Punto medio de un segmento.
3. Cálculo de perímetros y áreas de polígonos a partir de las coordenadas de sus vértices.
4. Pendiente y ángulo de inclinación.
5. Ecuación de la recta y sus transformaciones.

En la tabla 7 se describe el panorama general de los aciertos obtenidos por los estudiantes en el pretest. En la primera columna se muestra el total de puntos que conforman la evaluación, mismos que fueron agrupados en intervalos de diez, la segunda columna presenta la cantidad de alumnos que obtuvieron dicho puntaje, y finalmente, en la tercera columna se refleja el porcentaje del puntaje conseguido con respecto al número de estudiantes que lo obtuvieron.

Tabla 7

Aciertos obtenidos por los estudiantes en el pretest.

Total de puntos	Cantidad de alumnos que lo obtuvieron	Porcentaje
10-20	4	14
30-40	8	27
50-60	9	30
70-80	4	13
90-100	1	3
110-120	3	10
130-140	1	3
150-160	0	0
Totales	30	100

A continuación, se analizan las respuestas obtenidas por los estudiantes en cada reactivo propuesto.

1. Encuentra la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son A (-3,-8) y B (10,6).

Tabla 8

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el primer reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que lo obtuvieron	Porcentaje
11.9	1	3
19.1	18	61
13.1	10	33
15.2	1	3
Total	30	100

La tabla 8 muestra los resultados obtenidos en el primer reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era 19.104 unidades, no obstante, solo el 61% de los estudiantes identificó las coordenadas en el plano cartesiano y aplicó correctamente la fórmula para calcular su distancia. El 3% de los estudiantes, a pesar de haber identificado las coordenadas olvidaron la fórmula requerida para la resolución del ejercicio, el 33% de los estudiantes, identificó erróneamente las coordenadas y aplicó la fórmula, sin embargo, la solución del ejercicio no fue la adecuada, finalmente el 3% restante, no realizó el ejercicio propuesto.

2. Los vértices de un triángulo son D (2,0) E (2,4) y F (5,0). Calcula las longitudes de sus lados.

Tabla 9

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el segundo reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
2, 3, 4	2	7
3, 4, 5	22	73
2, 4, 6	5	17
5, 6, 7	1	3
Total	30	100

La tabla 9 muestra los resultados obtenidos en el segundo reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era 3, 4 y 5 unidades, el 73% de los estudiantes, ubicó los vértices del triángulo en el plano cartesiano, y calculó correctamente las longitudes de sus lados, mientras que 27% restante, solo identificó los vértices en el sistema de coordenadas.

3. Halla las coordenadas del punto medio cuyos extremos son G (-2,1) y H (-5,3).

Tabla 10

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el tercer reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
(-7, 9)	3	10
(2, 6.8)	12	40
(-3.5, 2)	10	33
(4, 6.1)	5	17
Total	30	100

La tabla 10 muestra los resultados obtenidos en el tercer reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era $(-3.5, 2)$, sin embargo, solo el 33% identificó en el sistema de coordenadas los puntos extremos G y H y aplicó efectivamente el cálculo para encontrar su punto medio. Aunque el 67% restante logró identificar los puntos extremos, obtuvo resultados erróneos al aplicar la fórmula para calcular el punto medio de un segmento.

4. Las coordenadas del punto medio del segmento IJ son (3,5). Halla las del punto J siendo I (2,9).

Tabla 11

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el cuarto reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
(7, -1)	3	10
(6, 13)	12	40
(8, 4)	10	33
(4,1)	5	17
Total	30	100

La tabla 11 muestra los resultados obtenidos en el cuarto reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era (4,1), no obstante, solo el 17% de los estudiantes, aplicó asertivamente la fórmula del punto medio para determinar el extremo restante del segmento. El 83% restante, no pudo resolver el reactivo.

5. Determina la ecuación de la recta con pendiente 4/5, cuya intersección y una intersección en el eje y en el punto (0,5).

Tabla 12
Respuestas obtenidas por los estudiantes en el quinto reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
$4x - 5y = -25$	4	14
$4x + 5y = 25$	7	23
$4y - 5x = 5$	12	40
$4x + 5y = 5$	7	23
Total	30	100

La tabla 12 muestra los resultados obtenidos en el quinto reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era $4x - 5y = -25$, sin embargo, solo el 14% de los estudiantes, sustituyeron correctamente los valores de la pendiente y la ordenada en la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$. El 86% de los estudiantes presentó dificultades para resolver el reactivo.

6. Elija la opción que corresponda al valor de la pendiente de una recta cuyo ángulo de inclinación es de 350°

Las posibles opciones para responder este reactivo eran: -0.17, 0.17, 0 y -1.07.

Tabla 13

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el sexto reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
-0.17	19	63
0.17	4	13
0	5	17
-1.07	2	7
Total	30	100

La tabla 13 muestra los resultados obtenidos en el sexto reactivo. En este ejercicio se pretendía que los estudiantes aplicaran la definición formar de la pendiente como tangente del ángulo, la respuesta esperada era -0.1763, el 63% de los estudiantes, contestaron el reactivo de manera satisfactoria, mientras que el 37% de los estudiantes presentaron dificultades para resolver el reactivo.

7. Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-5,-1) y (1,3).

Tabla 14

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el séptimo reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
2/3	19	63
-2	4	13
0	3	11
-2/3	4	13
Total	30	100

La tabla 14 muestra los resultados obtenidos en el séptimo reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era 2/3, sin embargo, solo el 63% de los estudiantes aplicó de manera asertiva la fórmula para calcular la pendiente de la recta, el 37% restante, no pudo resolver el ejercicio de manera satisfactoria.

8. ¿Qué tipo de pendiente tiene una recta cuando el ángulo que forma es obtuso?

Tabla 15

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el octavo reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
Negativa y decrece al crecer el ángulo	16	53
Positiva y crece al crecer el ángulo	14	47
Total	30	100

La tabla 15 muestra los resultados obtenidos en el octavo reactivo. Si la recta forma un ángulo obtuso con el lado positivo del eje de abscisas, su pendiente es negativa y disminuye a medida que el ángulo aumenta. Esta definición formal era la que se esperaba que tuvieran presente para contestar el reactivo propuesto, no obstante, solo el 53% de los estudiantes contestó de manera asertiva el reactivo mientras que el 47% restante, aplicó la definición formal de manera inversa.

9. ¿Qué tipo de pendiente tiene una recta cuando el ángulo que forma es agudo?

Tabla 16

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el noveno reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
Negativa y decrece al crecer el ángulo	17	57
Positiva y crece al crecer el ángulo	13	43
Total	30	100

La tabla 16 muestra los resultados obtenidos en el noveno reactivo. Si la recta forma un ángulo agudo con el lado positivo del eje de abscisas, su pendiente es positiva y aumenta a medida que el ángulo se hace mayor. Esta definición formal era la que se esperaba que tuvieran presente para contestar el reactivo propuesto, no obstante, solo el 43% de los estudiantes contestó de manera asertiva el reactivo mientras que el 57% restante, aplicó la definición formal de manera inversa.

10. Dos jugadores de baloncesto están ubicados en los puntos A (1,7) y B (8,9). El jugador A va a pasar el balón al jugador B, pero un tercer jugador, C, del equipo contrario, se posiciona entre ellos para intentar interceptarlo. Si el jugador C está equidistante de los jugadores A y B, ¿cuáles son sus coordenadas?

Tabla 17

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el décimo reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
(9/2, 8)	4	13

(7, 5/3)	11	37
(6, 4/3)	13	43
(10, 9/2)	2	7
Total	30	100

La tabla 17 muestra los resultados obtenidos en el décimo reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era (9/2, 8), no obstante, solo el 13% de los estudiantes, aplicaron correctamente la fórmula para calcular el punto medio del segmento, el 87% restante, presentó dificultades al aplicar la fórmula.

11. Un barco se encuentra en el océano en el punto C (-8,10), mientras que el puerto está localizado en el punto D (6,-5). Determina el punto medio del segmento que conecta ambas ubicaciones.

Tabla 18

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el undécimo reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
(4, 6.7)	6	20
(9, 3.1)	10	33
(-1, 2.5)	13	43
(5, 4.8)	1	4
Total	30	100

La tabla 18 muestra los resultados obtenidos en el undécimo reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era (-1, 2.5), sin embargo, solo el 43% de los estudiantes aplicaron correctamente la fórmula para calcular el punto medio del segmento, el 57% restante, presentó dificultades concernientes a la aplicación de la fórmula.

12. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto K (3, 2) y tiene una pendiente m=2.

Tabla 19

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el duodécimo reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
$y = 4 - 2x$	4	13
$y = 2x - 4$	11	37

$y = 3x + 2$	13	43
$y = 2x - 3$	2	7
Total	30	100

La tabla 19 muestra los resultados obtenidos en el duodécimo reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era $y = 2x - 4$, sin embargo, solo el 37% de los estudiantes determinaron correctamente la ecuación de la recta, el 63% restante, presentó dificultades concernientes a la aplicación de la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$.

13. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos K (−3,−1) y L (5,2)

Tabla 20

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el decimotercer reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
$y = 3/8x + 1/8$	9	30
$y = 7/8x + 2/3$	10	33
$y = 5/6x + 4/3$	7	23
$y = 2/9x + 6/8$	4	14
Total	30	100

La tabla 20 muestra los resultados obtenidos en el decimotercer reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era $y = 3/8x + 1/8$, no obstante, solo el 30% de los estudiantes calculo asertivamente la ecuación de la recta, el 70% restante, presentó dificultades al calcular la pendiente de la recta y posteriormente sustituir los valores en la ecuación $y = mx + b$.

14. En una iniciativa de reforestación, se planta un árbol en el punto A (5, -3) y otro en el punto B (-7, 9). El sistema de riego automático se ubica en el punto medio entre ambos árboles. ¿Cuáles son las coordenadas del sistema de riego?

Tabla 21

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el decimocuarto reactivo del pretest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
(2, 4)	4	13

(7,3)	4	13
(-1,3)	21	70
(5,8)	1	4
Total	30	100

La tabla 21 muestra los resultados obtenidos en el decimocuarto reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era (-1,3), afortunadamente el 70% de los estudiantes, aplicaron correctamente la fórmula para determinar el punto medio del segmento que une los puntos A, B, el 30% restante presentó dificultades concernientes a la sustitución de los valores en la fórmula.

15. Determina la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto A (1, -2) y exprésala en su forma general.

Tabla 22

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el decimoquinto reactivo del pretest.

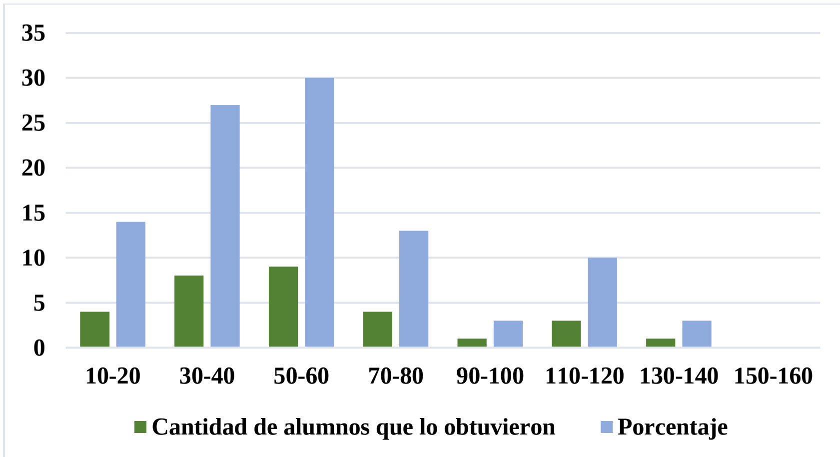
Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
$-3x + y + 5 = 0$	8	27
$4x + 6y - 8 = 0$	6	20
$2x + 3y - 7 = 0$	11	36
$5x + 4y + 9 = 0$	5	17
Total	30	100

La tabla 22 muestra los resultados obtenidos en el decimoquinto reactivo. La respuesta esperada en este reactivo era $-3x + y + 5 = 0$, sin embargo, solo 27% de los estudiantes, determinó correctamente la ecuación de la recta, el 73% restante, presentó dificultades concernientes a la sustitución de los valores en la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$.

4.3 Concepciones finales del pretest

Figura 2

Gráfica que representa los aciertos obtenidos por los estudiantes en el pretest



De acuerdo con los resultados obtenidos, solo el 3% de los estudiantes que presentaron la evaluación obtuvo entre 130 y 140 puntos, el 10% obtuvo entre 110 y 120 puntos, el 3% entre 90 y 100 puntos, el 13% entre 70 y 80 puntos, el 30% entre 50 y 60 puntos, el 27% entre 30 y 40 puntos y finalmente el 14% entre 10 y 20 puntos.

Tomando como referencia los resultados anteriores, se procedió al desarrollo de la secuencia de aprendizaje fundamentada en las TIC.

4.4 Secuencia didáctica distancia entre dos puntos

4.4.1 Introducción al plano cartesiano

El deseo de entender, analizar y prever la realidad a través de la razón ha llevado al ser humano a utilizar sistemas de referencia que permiten ubicar y describir elementos u objetos en el plano y el espacio. Estos sistemas de referencia se originan en surgen en determinados contextos, en los que son identificados, establecidos y utilizados con el objetivo de solucionar problemas (Aravena y Morales, 2018).

El plano cartesiano se utilizó como marco de referencia para el estudio de curvas, representaciones de funciones, la construcción de ciertos elementos geométricos, como puntos, o para describir el desplazamiento de objetos. Los ejes fueron creados para resolver problemas matemáticos específicos de esa época o para reabrir discusiones matemáticas con el fin de encontrar nuevas soluciones. Desde Menecmo, el concepto de distancia se empleó para definir la ubicación de cualquier elemento desde el punto de origen de los ejes (Aravena y Morales, 2018).

Estrategias preinstruccionales

En esta primera sección de la secuencia didáctica, los estudiantes analizaron la relación existente entre la posición de un punto en el plano cartesiano y sus coordenadas. Para ello se hizo uso del siguiente applet.

Enlace:https://proyectodescartes.org/PI/materiales_didacticos/M_B3_CoordenadasCartesianas-JS/index.html

Figura 3

Applet del plano cartesiano abscisas y ordenadas

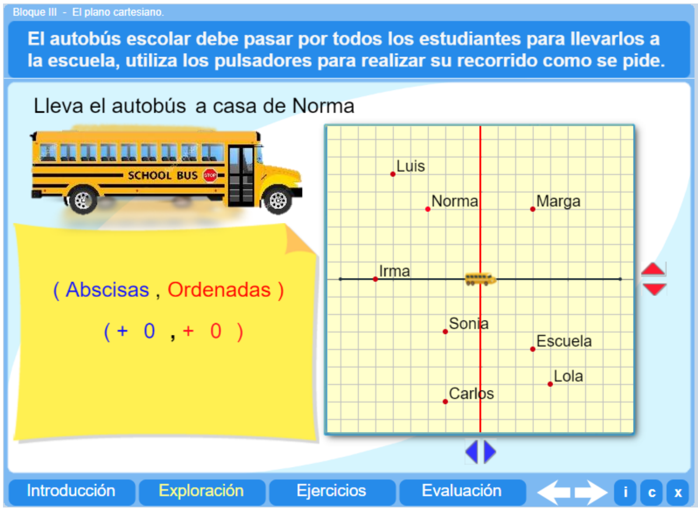


Figura 4

Applet del plano cartesiano ubicación de coordenadas

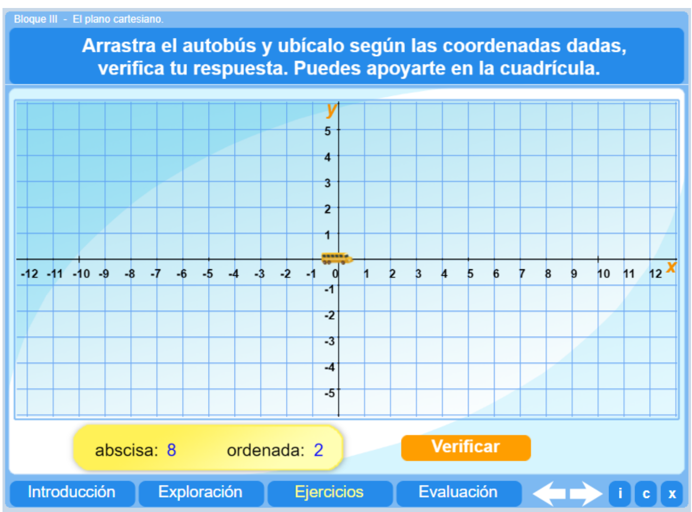
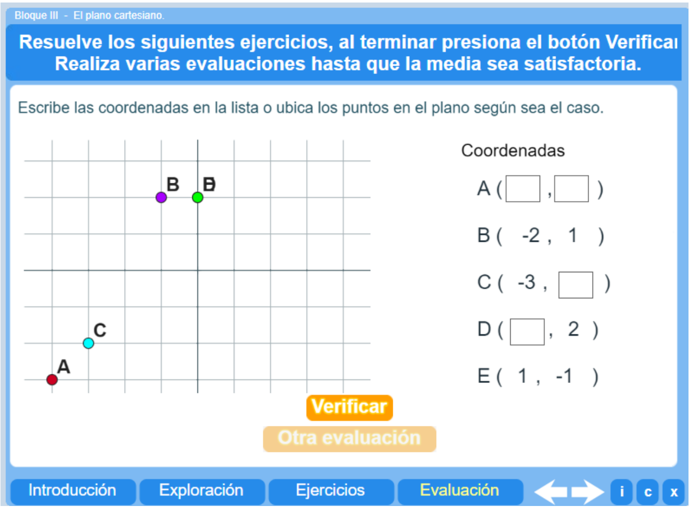


Figura 5

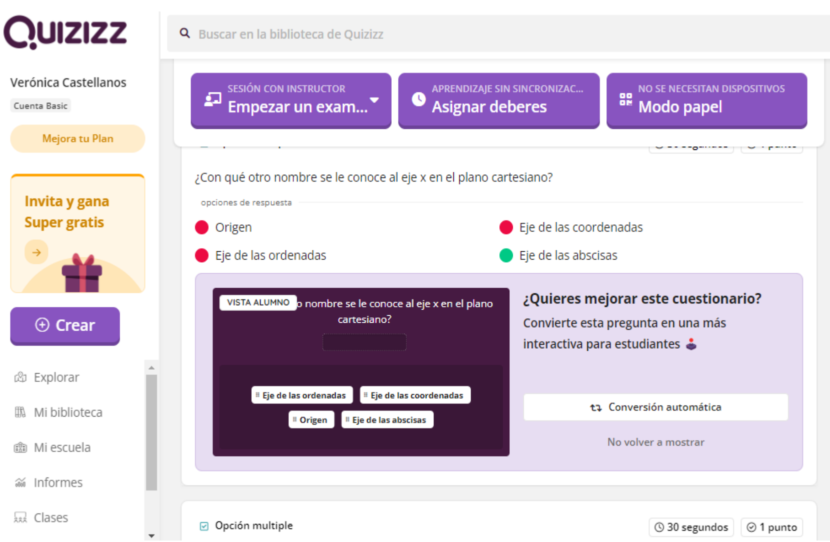
Applet del plano cartesiano ejercicios de verificación



Con el propósito de evaluar los conocimientos adquiridos en el apartado anterior, los estudiantes desarrollarán el siguiente cuestionario elaborado en la plataforma Quizizz.

Figura 6

Evaluación de conocimientos adquiridos concernientes al plano cartesiano



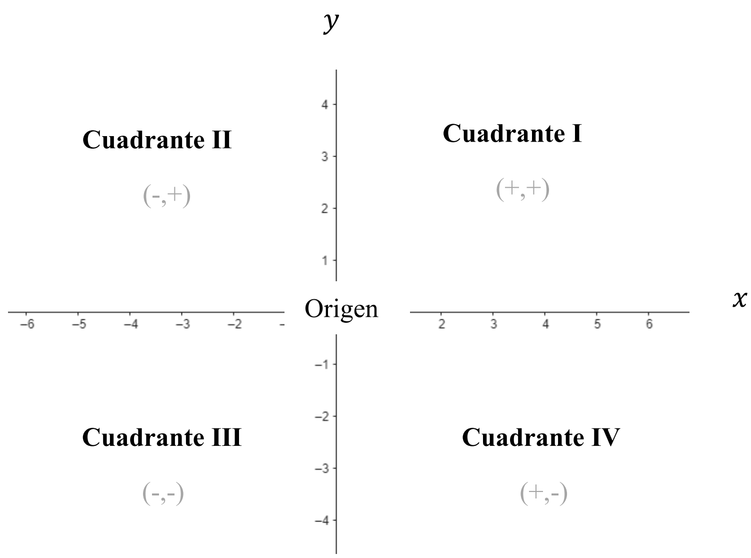
Estrategias construccionales

4.4.2 Definición del plano cartesiano

El sistema de coordenadas cartesianas está constituido de dos líneas perpendiculares rectas, conocidas como ejes coordenados, que se cortan en un punto conocido como origen. Este cruce produce cuatro cuadrantes, numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj, iniciando con el lado derecho superior. El eje de las ordenadas es la línea vertical y se representa con la letra y. El eje central de las abscisas se representa con la letra x.

Figura 7

El plano cartesiano



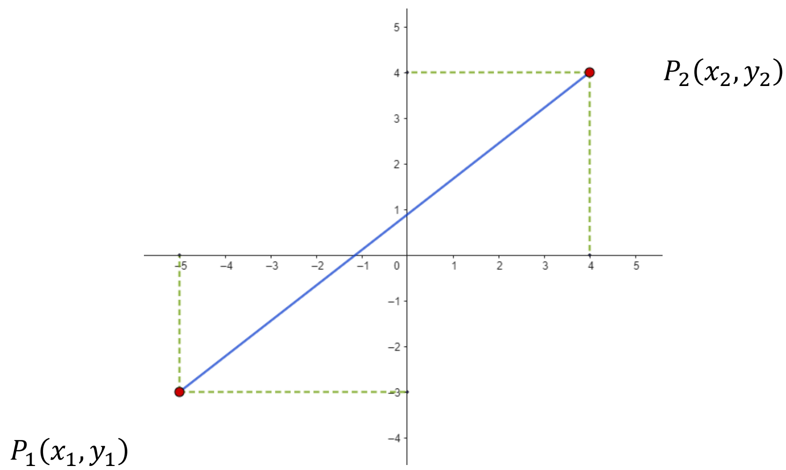
4.4.3 Cálculo de la distancia entre dos puntos

Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ ubicados en el sistema de referencia, la distancia entre los mismos se define como la longitud del segmento que los une.

¿Cómo podríamos calcular la longitud del segmento P_1 y P_2?

Figura 8

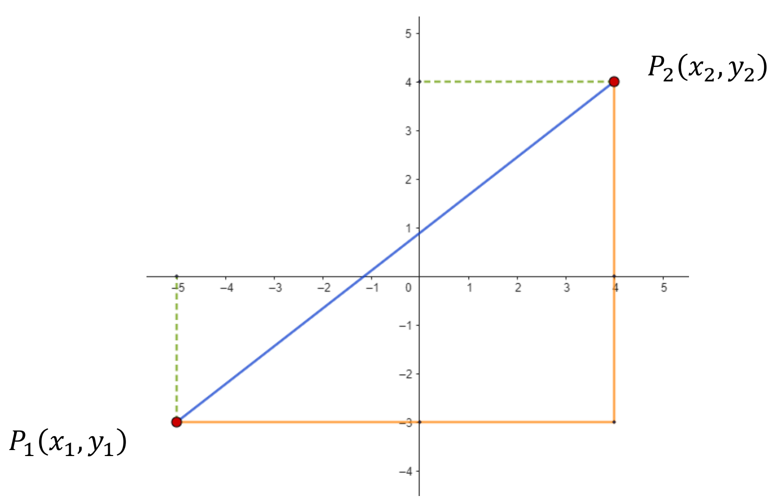
Representación gráfica de la distancia entre dos puntos



Las líneas imaginarias que proyectan los puntos en el eje x establecen un segmento horizontal, el cual representa un cateto de un triángulo recto. Las líneas imaginarias que proyectan los puntos sobre el eje establecen un segmento vertical, el cual representa otro cateto de un triángulo recto.

Figura 9

Líneas de proyección de la distancia entre dos puntos



El segmento P_1 y P_2, y los segmentos horizontal y vertical, forman un triángulo rectángulo.

Hipotenusa: segmento P_1 P_2 , su medida es la distancia entre los puntos.

Cateto horizontal: segmento cuya medida es x_2 menos x_1.

Cateto vertical: segmento cuya medida es y_2 menos y_1 .

El resultado del triángulo es rectángulo, por lo que cumple con el teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras

$$H^2 = {C_1}^2 + {C_2}^2$$

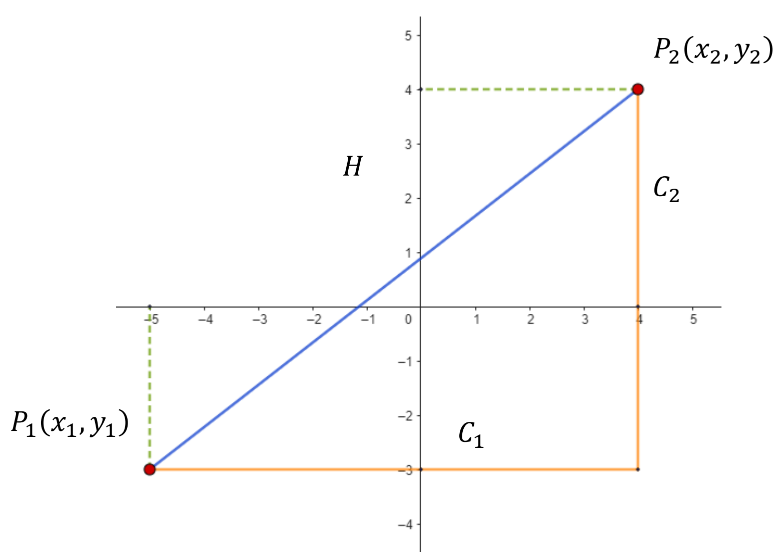
$$H = \sqrt{{C_1}^2 + {C_2}^2}$$

$${d_{p_1p_2}}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d_{p_1p_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Figura 10

Representación teorema de Pitágoras



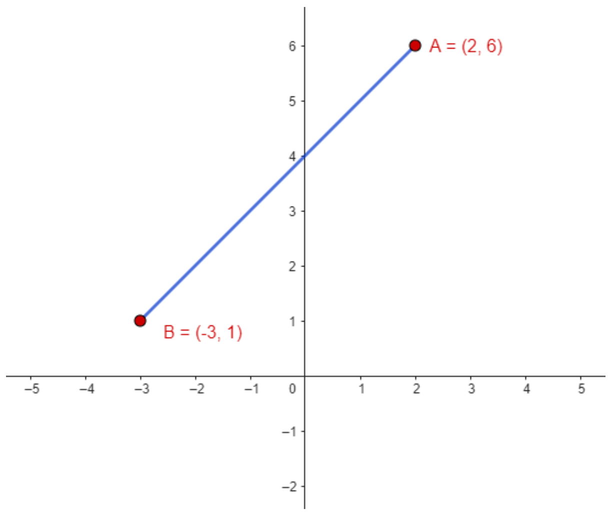
Ejemplo 1.

Calcula la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son *A* (-3,1) y *B* (2,6).

El primer paso es ubicar ambas coordenadas, haciendo uso del software matemático GeoGebra.

Figura 11

Ubicación de coordenadas en el plano cartesiano



Una vez ubicadas las coordenadas en el sistema de referencia, se procederá a aplicar la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos.

$$d_{p_1p_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{p_1p_2} = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (6 - 1)^2}$$

$$d_{p_1p_2} = \sqrt{(2 + 3)^2 + (6 - 1)^2}$$

$$d_{p_1p_2} = \sqrt{(5)^2 + (5)^2}$$

$$d_{p_1p_2} = \sqrt{25 + 25}$$

$$d_{p_1p_2} = \sqrt{50}$$

$$d_{p_1p_2} = 7.07$$

Por lo que la distancia entre las coordenadas $(2,6)$ y $(-3,1)$ es igual a 7 unidades.

Ejemplo 2.

Los vértices de un triángulo son D (1,2) E (6,2) y F (4,6). Calcula las longitudes de sus lados.

Para este segundo ejercicio, los estudiantes deberán graficar en el plano cartesiano las coordenadas de los puntos D, E y F, para posteriormente calcular las distancias de las rectas que los unen.

$$dDE = \sqrt{((6)-(1))^2 + ((2)-(2))^2}$$

$$dDE = \sqrt{(5)^2 + (0)^2}$$

$$dDE = \sqrt{25 + 0}$$

$$dDE = 5$$

$$dEF = \sqrt{((4)-(6))^2 + ((6)-(2))^2}$$

$$dEF = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2}$$

$$dEF = \sqrt{4 + 16}$$

$$dEF = \sqrt{20}$$

$$dEF = 4.472$$

$$dDF = \sqrt{((4)-(1))^2 + ((6)-(2))^2}$$

$$dDF = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$dDF = \sqrt{9 + 16}$$

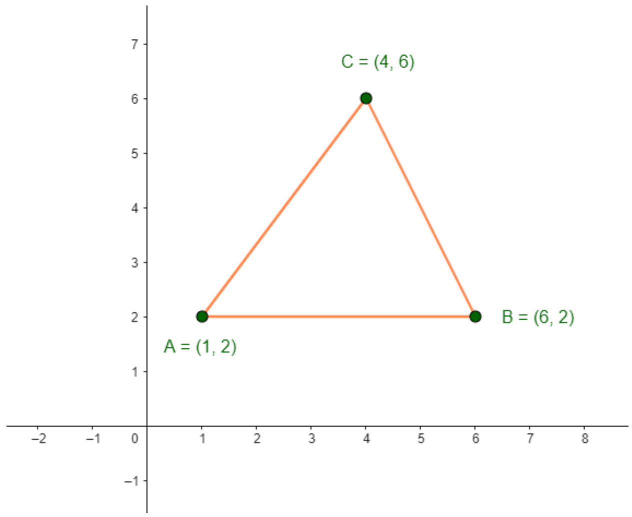
$$dDF = \sqrt{25}$$

$$dDF = 5$$

Por lo tanto, las medidas de los lados del triángulo son 5, 4.4 y 5 unidades respectivamente.

Figura 12

Longitudes del lado de un triángulo



4.4.5 Perímetro y área de polígonos

El perímetro y el área son mediciones fundamentales que establecen las características esenciales de una figura geométrica. El perímetro se utiliza para establecer la longitud total del borde o contorno de una figura, mientras que el área se utiliza para identificar la medida de la superficie interna de dicha figura.

Para determinar el perímetro de cualquier polígono, necesitamos medir y sumar las longitudes de sus lados. Algunas figuras, dado que poseen lados idénticos, cuentan con fórmulas sencillas y veloces para determinar su perímetro.

Con el conocimiento de sus vértices, se puede determinar el perímetro de un polígono simplemente calculando las distancias entre estos y sumándolas.

El área es un indicador que muestra la magnitud de una superficie, expresado en unidades de medición conocidas como unidades de superficie. Este principio resulta más comprensible en superficies planas. Es posible fraccionar cualquier superficie plana con lados rectos en triángulos, y su área puede determinarse al sumar las áreas de dichos triángulos. Usualmente, se emplea el término "área" en vez de superficie cuando no hay malentendidos entre la noción geométrica y la magnitud métrica vinculada a esta.

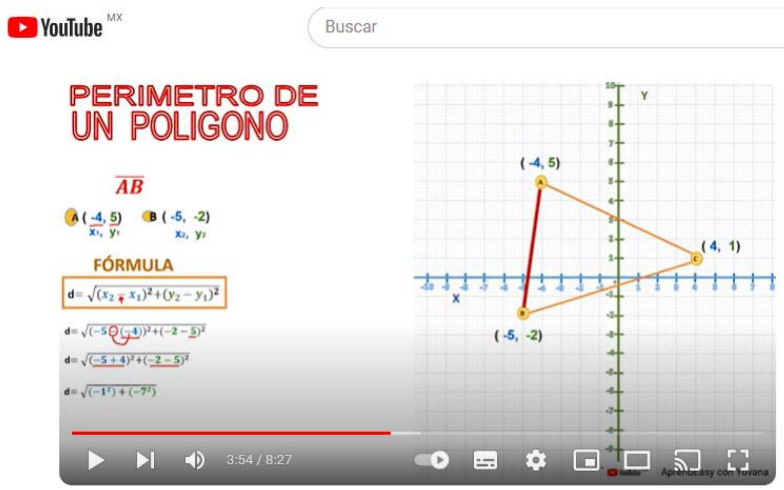
Actividad 1. Video práctico

Los estudiantes deberán visualizar el video práctico en dónde se realizan diferentes cálculos de áreas y perímetros de polígonos.

Enlace: https://www.youtube.com/watch?v=fEmaXRKSLQk&t=234

Figura 13

Perímetro de un polígono

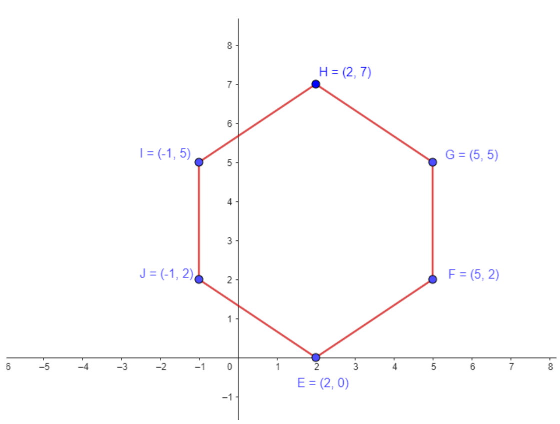


Ejercicio 1.

En una empresa dedicada a la fabricación de espejos, necesitan estimar la cantidad de material necesario para producir un espejo de forma hexagonal, lo que implica calcular su diámetro y superficie. Los vértices de este espejo corresponden a los puntos: E (2,0), F (5,2), G (5,5), H (2,7), I (-1,5) y J (-1,2). Se utiliza el metro como unidad de medida. Determina el perímetro del espejo.

Figura 14

Ubicación de puntos en el espejo



Respuesta esperada

Se pretende que los estudiantes grafiquen en el plano cartesiano las coordenadas de los puntos E, F, G, H, I, J y posteriormente apliquen la fórmula para calcular las distancias de las rectas que los unen. Al finalizar deberán el perímetro del polígono.

$$dEF = \sqrt{((5) - (2))^2 + ((2) - (0))^2}$$

$$dEF = \sqrt{(3)^2 + (2)^2}$$

$$dEF = \sqrt{13}$$

$$dEF = 3.60$$

$$dFG = \sqrt{((5) - (5))^2 + ((2) - (5))^2}$$

$$dFG = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2}$$

$$dFG = \sqrt{9}$$

$$dFG = 3$$

$$dGH = \sqrt{((2) - (5))^2 + ((7) - (5))^2}$$

$$dGH = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2}$$

$$dGH = \sqrt{13}$$

$$dGH = 3.60$$

$$dHI = \sqrt{((2) - (-1))^2 + ((7) - (5))^2}$$

$$dHI = \sqrt{(3)^2 + (2))^2}$$

$$dHI = \sqrt{13}$$

$$dHI = 3.60$$

$$dIJ = \sqrt{((-1) - (-1))^2 + ((2) - (5))^2}$$

$$dIJ = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2}$$

$dIJ = \sqrt{9}$

$dIJ = 3$

Por lo que el perímetro del espejo es igual a $16.8\ m$

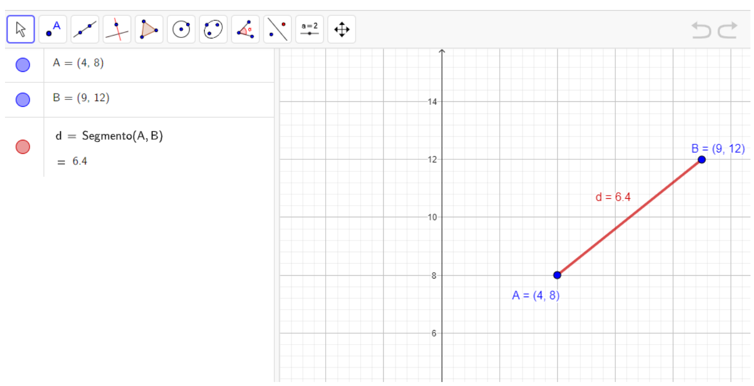
Estrategias postinstruccionales

A través del siguiente applet, los educandos podrán corroborar los resultados de los ejercicios propuestos y continuar aplicando los conocimientos adquiridos.

Enlace: https://www.geogebra.org/m/bfMcsP5Z

Figura 15

Applet distancia entre dos puntos



4.5 Punto medio de un segmento, pendiente y ángulo de inclinación

Estrategias preinstruccionales

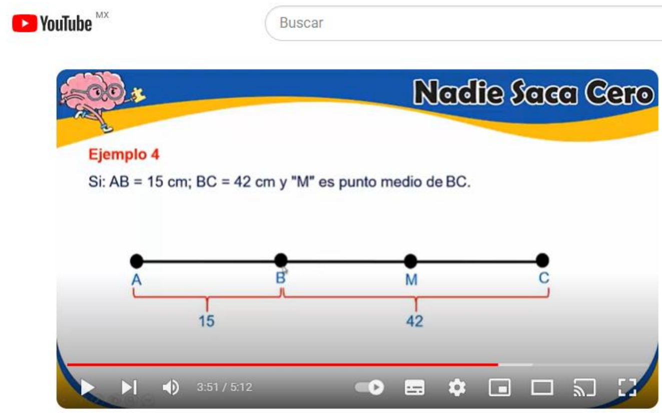
Actividad 1. Video práctico

Los estudiantes deberán visualizar el siguiente video de introducción al cálculo del punto medio de un segmento.

Enlace: https://www.youtube.com/watch?v=5cGCuXz6LSY

Figura 16

Introducción al punto medio de un segmento



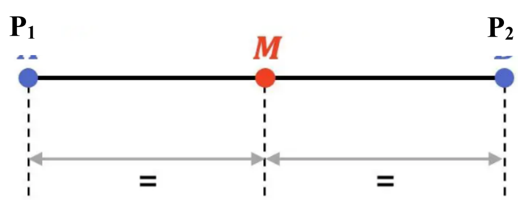
Estrategias construccionales

4.5.1 Punto medio de un segmento

El punto central del segmento P_1 y de P_2, denominado M, es un punto que está a la misma distancia de $\mathbf{P_1}$ y de $\mathbf{P_2}$. Esto significa que, en el caso de un segmento limitado, el punto central divide el segmento en dos partes iguales. En este contexto, el punto medio es único y se encuentra en la misma posición que los extremos del segmento.

Figura 17

Definición formal punto medio de un segmento



Para obtener el punto medio de un segmento dado por los puntos P_1 y P_2, solo se usa una variación de la fórmula para división de un segmento en una razón dada; en la cual, la razón en 1, ya que el segmento P_1P es igual al segmento PP_2.

La fórmula para calcular su punto medio es

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

El punto medio será expresado como las coordenadas $M = (x_3, y_3)$.

Ejemplo 1.

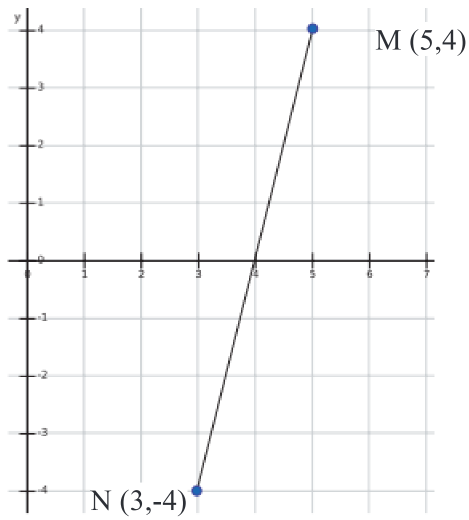
Calcula el punto central del segmento que une los puntos M (5,4) y N (3,-4).

Solución:

Tenemos que $(x_{1,}y_1) = (5{,}4)$ y $(x_{2,}y_2) = (3, -4)$

Figura 18

Ubicación de coordenadas para el cálculo del punto medio de un segmento



Una vez que ubicamos las coordenadas en el sistema de referencia, procedemos a sustituir los valores en la fórmula.

$$\left(\frac{5+3}{2}\right), \left(\frac{4+(-4)}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{0}{2}\right) = (4{,}0)$$

Así que, las coordenadas del punto central entre M (5,4) y N (3,-4) son (4,0).

Ejemplo 2.

Determina las coordenadas del punto B, sabiendo que $P_{m=}(2{,}2)$ es el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y el otro extremo tiene las coordenadas $A(-3{,}1)$.

Solución:

Es importante señalar que las coordenadas del punto medio ya han sido proporcionadas, es decir, las coordenadas (2,-2) fueron obtenidas utilizando la fórmula.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Es decir:

$$x_m = 2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Y

$$y_m = -2 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

No obstante, también se conocen las coordenadas de uno de los vértices, el punto A(-3,1), que podemos tomar como el punto inicial del segmento. Esto es $x_1 = -3$ y $y_1 = 1$. Al sustituir estos valores en la fórmula del punto medio, obtenemos:

$$2 = \frac{-3 + x_2}{2}$$

Y

$$-2 = \frac{1 + y_2}{2}$$

Despejando x_2 obtenemos:

$$2 = \frac{-3 + x_2}{2}$$

$$2(2) = -3 + x_2$$

$$4 = -3 + x_2$$

$$4 + 3 = x_2$$

$$7 = x_2$$

Despejando y_2 obtenemos:

$$-2 = \frac{1 + y_2}{2}$$

$$-2(2) = 1 + y_2$$

$$-4 = 1 + y_2$$

$$-4 - 1 = y_2$$

$$-5 = y_2$$

Por lo que, las coordenadas del extremo B del segmento de recta $\overline{AB}$ es el punto de coordenadas $(7, -5)$.

Ejercicios propuestos

1. Calcula las coordenadas del centro de la circunferencia, sabiendo que su diámetro corresponde al segmento de recta que une los puntos A(2,-4) y B(5,8).
2. Encuentras las coordenadas del punto D, sabiendo que $P_{m=}(4{,}7)$ es el punto medio del segmento $\overline{DE}$ y el otro extremo tiene coordenadas $E(7{,}8)$.

Solución

1. (3.5,2)
2. (1,6)

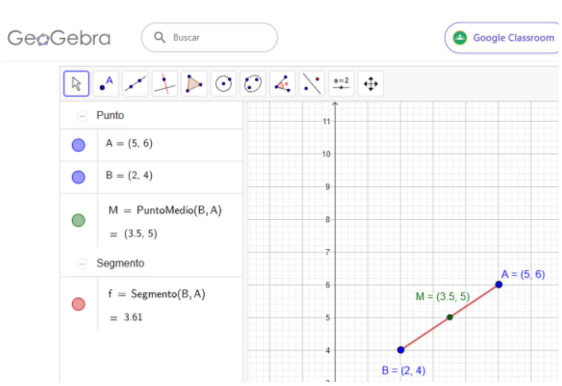
Estrategias postinstruccioanles

Una vez expuesta la definición formal, los estudiantes a través del siguiente applet, pondrán en práctica los conocimientos adquiridos.

Enlace: https://www.geogebra.org/m/ydafntep

Figura 19

Applet punto medio entre dos puntos



Estrategias construccionales

4.5.2 Pendiente de una recta

La inclinación de una recta que atraviesa los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ se representa con la letra m y se define como la razón entre la variación de las coordenadas *"y"* y la variación de las coordenadas "x", es decir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Siempre que la diferencia $x_2 - x_1$sea distinto de cero. Si esta diferencia es igual a cero, se considera que la pendiente de la recta no está definida.

Ángulo de inclinación

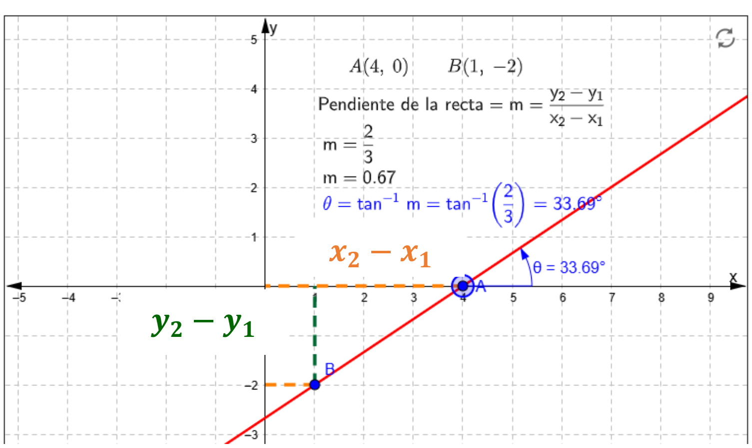
El ángulo de inclinación de la línea recta, θ, es el ángulo establecido por la parte positiva del eje x y la línea recta, y se mide en sentido contrario a las agujas del reloj. Una vez obtenido este ángulo, es posible calcular la pendiente de la línea mediante el uso de la razón trigonométrica tangente:

$$m = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \theta}{cateto\ adyacente\ a\ \theta}$$

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Figura 20

Representación ángulo de inclinación de una recta



Por lo que:

$\theta = arc\tan(m)$

Ejemplo 1.

Calcula el ángulo de inclinación de una recta que pasa por los puntos $A\ (0, -2)$ y $B(3,4)$**.**

Solución

En primera instancia, es necesario, calcular la pendiente, para a partir de ella poder obtener el ángulo de inclinación. Recordemos que la fórmula para calcular la pendiente es la siguiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Al sustituir los valores, se tiene:

$m = \frac{4 - (-2)}{3 - 0}$

$m = \frac{4 + 2}{3 - 0}$

$m = \frac{6}{3}$

$m = 2$

$m = \tan\theta$

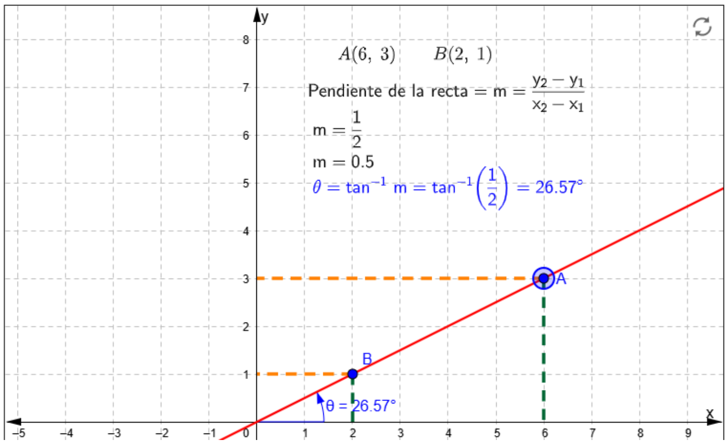
$\tan\theta = 2$

$\theta = arc\tan(2)$

$\theta = 63.43°$

Figura 21

Representación gráfica pendiente de una recta



Estrategias postinstruccioanles

A través del siguiente applet, los estudiantes podrán visualizar el comportamiento que tiene la pendiente cuando el ángulo formado por la recta es agudo (entre 0° y 90°) u obtuso (mayor que 90° pero menor que 180°).

Enlace: https://www.geogebra.org/m/SHSy6Jpx

Figura 22

Recta con pendiente negativa

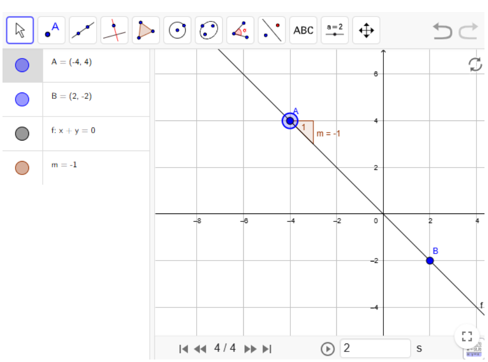
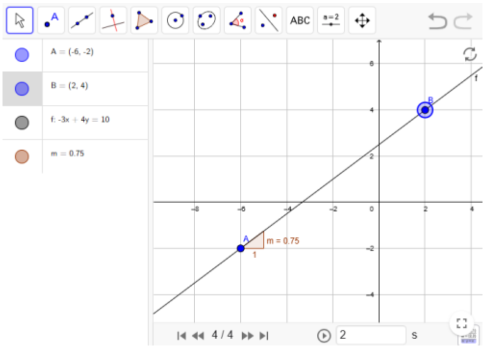


Figura 23

Recta con pendiente positiva



Enlace: https://www.geogebra.org/m/DbSVSa9R

Cuando la recta con la parte positiva del eje de abscisas tiene un ángulo obtuso, la pendiente es negativa y disminuye a medida que el ángulo aumenta. Si la recta forma un ángulo agudo con la parte positiva del eje de abscisas, la pendiente es positiva y aumenta a medida que el ángulo aumenta.

Ejercicios propuestos

1. Determina la pendiente de una recta que pasa por los puntos (1, 2) y (4, 8).
2. ¿Cuál es la pendiente de una recta que contiene a los puntos (-3,-2) y (1, -10)?
3. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-2, 1) y (4, 4)?
4. Una recta contiene los puntos (-1, -2) y (3, -5). ¿Cuál es su pendiente?
5. Encuentra la pendiente de una recta que contiene a los puntos (-4,-2) y (4, -4).

Respuestas

1. M=2
2. M=-2
3. M=0.5
4. M=-0.75
5. M=0.25

Utiliza la fórmula del ángulo de inclinación de la pendiente de una recta para resolver los siguientes ejercicios.

1. Encuentra el ángulo de inclinación de la recta que pasa por A=(5, 2) y B=(7, 10).

2. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la recta que pasa por A=(-3, -2) y B=(4, 8)?
3. Encuentra el ángulo de inclinación de la recta que tiene los puntos A=(3, 7) y B=(2, 5).
4. ¿Cuál es el ángulo de la pendiente de la recta que tiene los puntos A=(3, -3) y B=(5, -4)?
5. Encuentra el ángulo de inclinación de la recta que pasa por A=(7, -2) y B=(-3, 5).

Respuestas

1. 76°
2. 55°
3. 63.4°
4. -26.6°
5. -35°

4.6 Ecuación general de la recta y pendiente ordenada al origen

4.6.1 Ecuación general de la recta

La ecuación general de la recta representa el comportamiento de todas las líneas rectas dentro del plano cartesiano. Independientemente de la recta que se dibuje, siempre seguirá esta ecuación:

$$A_x + B_y + C = 0$$

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3,2)$ y $(-1,-2)$

El primer paso es determinar la pendiente de la recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-2-2}{-1-3} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Para encontrar la ecuación de la recta, se utilizará el modelo punto pendiente.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = 1(x - 3)$

$y - 2 = x - 3$

$y - 2 - x + 3 = 0$

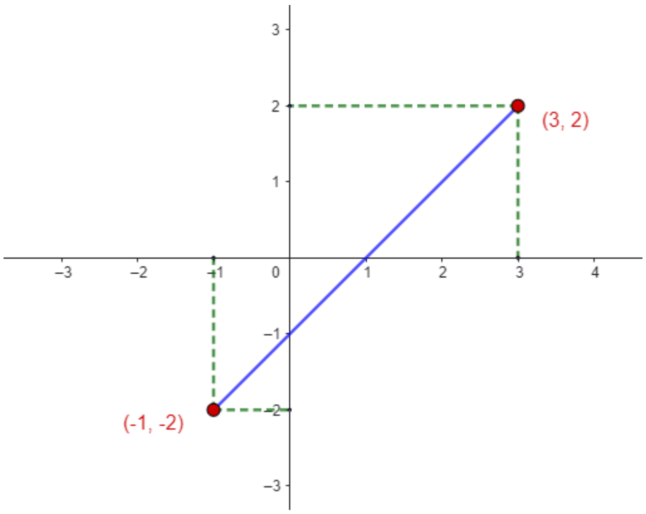
$-x + y + 1 = 0$

Al multiplicar por (-1) tenemos:

$x - y - 1 = 0$

Figura 24

Representación gráfica de la ecuación de la recta



Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,3) y (2,-5)

Solución

$8x + y - 11 = 0$

Ecuación pendiente ordenada al origen

Para establecer la ecuación de la línea que atraviesa dos puntos, es imprescindible tener conocimiento de las coordenadas.

La ecuación que representa la recta que pasa por dos puntos es:

$$y = mx + b$$

En esta ecuación m es la pendiente y b es el punto de corte con el eje y.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,4)$ y $(-3,-1)$

En primera instancia calcularemos el valor de la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituyendo los valores tenemos

$$m = \frac{-1-4}{-3-2} = \frac{-5}{-5} = 1$$

Intersección eje y

$$y = mx + b$$

$$4 = 1(2) + b$$

$$4 = 2 + b$$

$$b = 4 - 2 = 2$$

Por lo que la ecuación de la recta es

$$y = x + 2$$

Ejercicio propuesto

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-1,6) y (5,-4)

Solución

$$y = -\frac{5}{3}x - \frac{13}{3}$$

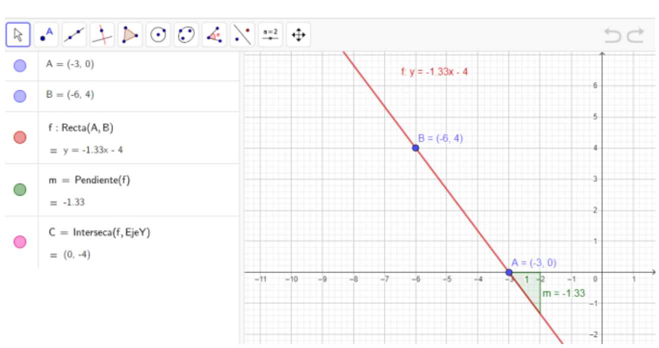
Estrategias postinstruccionales

Como actividad de cierre, los estudiantes podrán aplicar los conocimientos adquiridos durante esta sección a través del siguiente applet de GeoGebra.

Enlace: https://www.geogebra.org/m/bvdxqb88

Figura 25

Applet ecuación de la recta



4.7 Concepciones iniciales del postest.

En la última sesión, los estudiantes desarrollaron un postest de respuestas cerradas (ver anexo 1), que contenía los mismos reactivos del test inicial, con el propósito no solo de evaluar la incidencia de las TIC en el contexto específico de la Geometría Analítica, sino también la construcción significativa de conocimientos por parte de los educandos.

Tabla 23

Puntaje obtenido por los estudiantes en el postest.

Total de puntos	Cantidad de alumnos que lo obtuvieron	Porcentaje
10-20	0	0
30-40	0	0
50-60	2	7
70-80	4	13
90-100	6	20
110-120	14	47
130-140	4	13
150-160	0	0
Totales	30	100

En la tabla 23 se describe el panorama general del puntaje obtenido por los estudiantes en el postest. En la primera columna se muestra el total de puntos que conforman la evaluación, mismos que fueron agrupados en intervalos de diez, la segunda columna presenta la cantidad de alumnos que obtuvieron dicho puntaje, y finalmente, en la tercera columna se refleja el porcentaje del puntaje conseguido con respecto al número de estudiantes que lo obtuvieron.

A continuación, se analizan las respuestas obtenidas por los estudiantes para cada reactivo propuesto.

1. Encuentra la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son A (-3,-8) y B (10,6).

Tabla 24

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el primer reactivo del postest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que lo obtuvieron	Porcentaje
11.9	4	13
19.1	25	83
13.1	1	3
15.2	0	0
Total	30	100

La tabla 24 muestra los resultados obtenidos en el primer reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era 19.104 unidades, el 83% de los estudiantes identificó las coordenadas en el plano cartesiano y aplicó correctamente la fórmula para calcular su distancia. El 17% restante de los estudiantes aplicó la formula correspondiente, sin embargo, presentó dificultades para identificar los valores de x_1, y_1 y x_2, y_2.

2. Los vértices de un triángulo son D (2,0) E (2,4) y F (5,0). Calcula las longitudes de sus lados.

Tabla 25

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el segundo reactivo del postest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
2, 3, 4	2	7
3, 4, 5	27	90
2, 4, 6	0	0
5, 6, 7	1	3
Total	30	100

La tabla 25 muestra los resultados obtenidos en el segundo reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era 3, 4 y 5 unidades, el 90% de los estudiantes, ubicó los vértices del triángulo en el plano cartesiano, y calculó correctamente las longitudes de sus lados, mientras que 10% restante, continuó presentando dificultades en la aplicación de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos.

3. Halla las coordenadas del punto medio cuyos extremos son G (-2,1) y H (-5,3)

Tabla 26

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el tercer reactivo del postest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
(-7, 9)	3	10
(2, 6.8)	7	23
(-3.5, 2)	20	67
(4, 6.1)	0	0
Total	30	100

La tabla 26 muestra los resultados obtenidos en el tercer reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era $(-3.5, 2)$, el 67% de los estudiantes identificó en el sistema de coordenadas los puntos extremos G y H y aplicó la fórmula correspondiente al ejercicio. Aunque el 33% restante identificó los puntos extremos, obtuvo resultados erróneos al aplicar la fórmula para calcular el punto medio de un segmento.

4. Las coordenadas del punto medio del segmento IJ son (3,5). Halla las del punto J siendo I (2,9).

Tabla 27

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el cuarto reactivo del postest

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
(7, -1)	1	3
(6, 13)	0	0
(8, 4)	8	27
(4,1)	18	70
Total	30	100

La tabla 27 muestra los resultados obtenidos en el cuarto reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era (4,1), no obstante, solo el 70% de los estudiantes, aplicó asertivamente la fórmula del punto medio para determinar el extremo restante del segmento. El 30% restante, presentó dificultades para resolver el reactivo.

5. Determina la ecuación de la recta con pendiente 4/5, cuya intersección y una intersección en el eje y en el punto (0,5).

Tabla 28

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el quinto reactivo del postest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
$4x - 5y = -25$	17	56
$4x + 5y = 25$	6	20
$4y - 5x = 5$	2	7
$4x + 5y = 5$	5	17
Total	30	100

La tabla 28 muestra los resultados obtenidos en el quinto reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era $4x - 5y = -25$, el 56% de los estudiantes, sustituyeron correctamente los valores de la pendiente y la ordenada en la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$. El 44% restante presentó dificultades para resolver el reactivo.

6. Elija la opción que corresponda al valor de la pendiente de una recta cuyo ángulo de inclinación es de 350°

Tabla 29

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el sexto reactivo del postest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
-0.17	27	90
0.17	3	10
0	0	0
-1.07	0	0
Total	30	100

La tabla 29 muestra los resultados obtenidos en el sexto reactivo. En este ejercicio se pretendía que los estudiantes aplicaran la definición formar de la pendiente como tangente del ángulo, la respuesta esperada era -0.1763, el 90% de los estudiantes, contestaron el reactivo de manera satisfactoria, mientras que el 10% de los estudiantes presentaron dificultades para resolver el reactivo.

7. Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-5,-1) y (1,3).

Tabla 30

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el séptimo reactivo del postest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
2/3	28	93
-2	0	0
0	0	0
-2/3	2	7
Total	30	100

La tabla 30 muestra los resultados obtenidos en el séptimo reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era 2/3, el 93% de los estudiantes aplicó de manera asertiva la fórmula para calcular la pendiente de la recta, el 37% restante, no pudo resolver el ejercicio de manera satisfactoria.

8. ¿Qué tipo de pendiente tiene una recta cuando el ángulo que forma es obtuso?

Tabla 31

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el octavo reactivo del postest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
Negativa y decrece al crecer el ángulo	24	80
Positiva y crece al crecer el ángulo	6	20
Total	30	100

La tabla 31 muestra los resultados obtenidos en el octavo reactivo. Si el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas es obtuso, la pendiente es negativa y decrece al crecer el ángulo, está definición formal era la que se esperaba que tuvieran presente para contestar el reactivo propuesto, el 80% de los estudiantes contestó de manera asertiva el reactivo, mientras que el 20% restante, aplicó la definición formal de manera inversa.

9. ¿Qué tipo de pendiente tiene una recta cuando el ángulo que forma es agudo?

Tabla 32

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el noveno reactivo del postest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
Negativa y decrece al crecer el ángulo	6	20
Positiva y crece al crecer el ángulo	24	80
Total	30	100

La tabla 32 muestra los resultados obtenidos en el noveno reactivo. Si el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas es agudo, la pendiente es positiva y crece al crecer el ángulo, está definición formal era la que se esperaba que tuvieran presente para contestar el reactivo propuesto, el 80% de los estudiantes contestó de manera asertiva el reactivo mientras que el 20% restante, aplicó la definición formal de manera inversa.

10. Dos jugadores de baloncesto están ubicados en los puntos A (1,7) y B (8,9). El jugador A va a pasar el balón al jugador B, pero un tercer jugador, C, del equipo contrario, se posiciona entre ellos para intentar interceptarlo. Si el jugador C está equidistante de los jugadores A y B, ¿cuáles son sus coordenadas?

Tabla 33

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el décimo reactivo del postest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
(9/2, 8)	16	53
(7, 5/3)	6	20
(6, 4/3)	8	27

(10, 9/2)	0	0
Total	30	100

La tabla 33 muestra los resultados obtenidos en el décimo reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era (9/2, 8), el 53% de los estudiantes, aplicaron correctamente la fórmula para calcular el punto medio del segmento, el 47% restante, presentó dificultades al aplicar la fórmula.

11. Un barco se encuentra en el océano en el punto C (-8,10), mientras que el puerto está localizado en el punto D (6,-5). Determina el punto medio del segmento que conecta ambas ubicaciones.

Tabla 34

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el undécimo reactivo del postest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
(4, 6.7)	3	10
(9, 3.1)	4	13
(-1, 2.5)	23	77
(5, 4.8)	0	0
Total	30	100

La tabla 34 muestra los resultados obtenidos en el undécimo reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era (-1, 2.5), el 77% de los estudiantes aplicaron correctamente la fórmula para calcular el punto medio del segmento, el 23% restante, presentó dificultades concernientes a la aplicación de la fórmula.

12. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto K (3, 2) y tiene una pendiente m=2.

Tabla 35

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el duodécimo reactivo del postest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
$y = 4 - 2x$	4	13
$y = 2x - 4$	20	67

$y = 3x + 2$	5	17
$y = 2x - 3$	1	3
Total	30	100

La tabla 35 muestra los resultados obtenidos en el duodécimo reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era $y = 2x - 4$, el 67% de los estudiantes determinaron correctamente la ecuación de la recta, el 33% restante, presentó dificultades concernientes a la aplicación de la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$.

13. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos K (−3,−1) y L (5,2)

Tabla 36

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el decimotercer reactivo del postest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
$y = 3/8x + 1/8$	21	70
$y = 7/8x + 2/3$	3	10
$y = 5/6x + 4/3$	4	13
$y = 2/9x + 6/8$	2	7
Total	30	100

La tabla 36 muestra los resultados obtenidos en el decimotercer reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era $y = 3/8x + 1/8$, el 70% de los estudiantes calculo asertivamente la ecuación de la recta, el 30% restante, presentó dificultades al calcular la pendiente de la recta y posteriormente sustituir los valores en la ecuación $y = mx + b$.

14. En una iniciativa de reforestación, se planta un árbol en el punto A (5, -3) y otro en el punto B (-7, 9). El sistema de riego automático se ubica en el punto medio entre ambos árboles. ¿Cuáles son las coordenadas del sistema de riego?

Tabla 37

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el decimocuarto reactivo del postest.

Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
(2, 4)	3	10
(7,3)	1	3

(-1,3)	15	50
(5,8)	11	37
Total	30	100

La tabla 37 muestra los resultados obtenidos en el decimocuarto reactivo. La respuesta esperada para este reactivo era (-1,3), el 50% de los estudiantes, aplicaron correctamente la fórmula para determinar el punto medio del segmento que une los puntos A, B, el 50% restante presentó dificultades concernientes a la sustitución de los valores en la fórmula.

15. Determina la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto A (1, -2) y exprésala en su forma general.

Tabla 38

Respuestas obtenidas por los estudiantes en el decimoquinto reactivo del postest

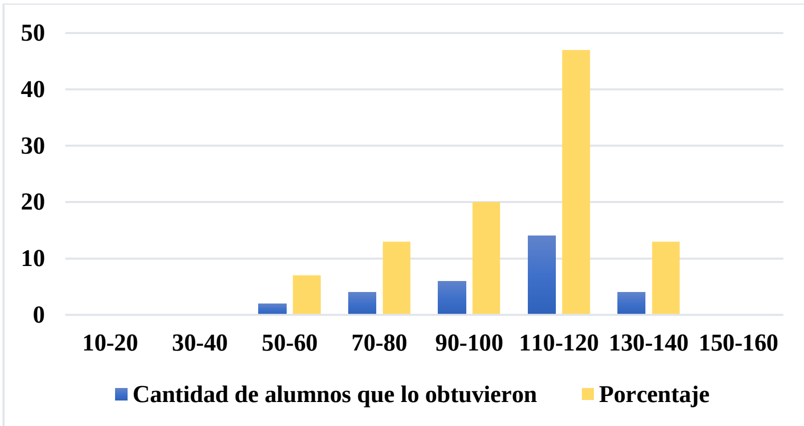
Respuesta	Cantidad de alumnos que la obtuvieron	Porcentaje
$-3x + y + 5 = 0$	16	53
$4x + 6y - 8 = 0$	5	17
$2x + 3y - 7 = 0$	6	20
$5x + 4y + 9 = 0$	3	10
Total	30	100

La tabla 38 muestra los resultados obtenidos en el decimoquinto reactivo. La respuesta esperada en este reactivo era $-3x + y + 5 = 0$, el 53% de los estudiantes, determinó correctamente la ecuación de la recta, el 37% restante, presentó dificultades concernientes a la sustitución de los valores en la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$.

4.8 Concepciones finales del postest

Figura 26

Gráfica que representa los aciertos obtenidos por los estudiantes en el postest



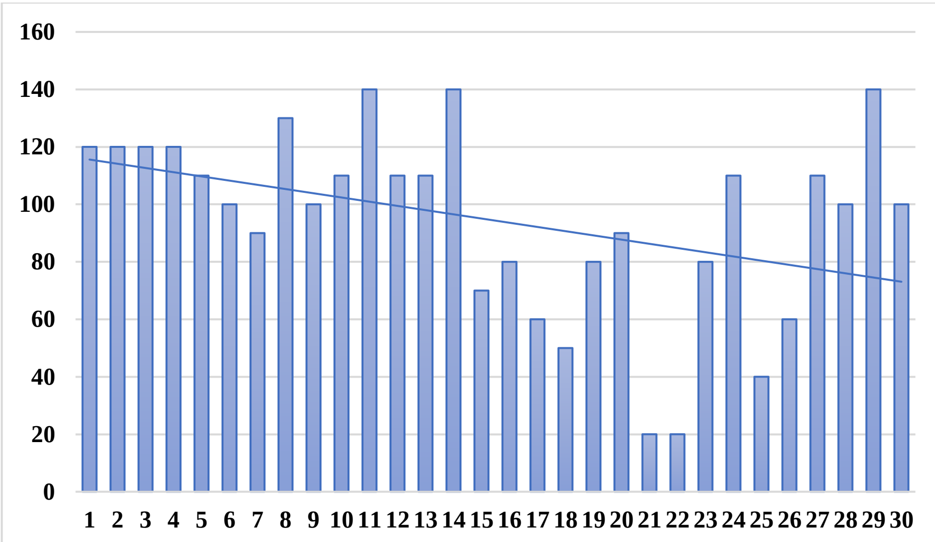
De acuerdo con los resultados obtenidos, el 13% de los estudiantes que presentaron la evaluación obtuvieron entre 130 y 140 puntos, el 33% obtuvo entre 110 y 120 puntos, el 20% entre 90 y 100 puntos, el 13% entre 70 y 80 puntos, el 10% entre 50 y 60 puntos, mientras que el 4% entre 30 y 40 puntos.

4.9 Organización de datos

Para la organización de datos, se efectuó la prueba t de Student para muestras relacionadas, dado que se compararon los promedios obtenidos en el pretest y postest.

Figura 27

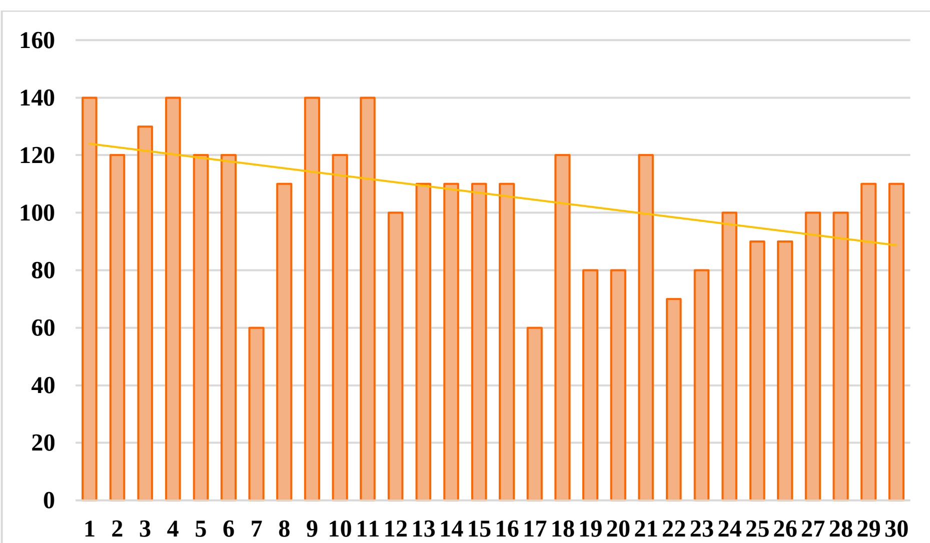
Gráfica del puntaje global obtenido por los estudiantes en el pretest



La figura 26, muestra el puntaje global obtenido por los treinta estudiantes que presentaron el pretest.

Figura 28

Gráfica que representa el puntaje global obtenido por los estudiantes en el postest



La gráfica 27, muestra el puntaje global obtenido por los treinta estudiantes en el postest.

4.10 Verificación de hipótesis

La implementación de las TIC en el contexto específico de la Geometría Analítica Plana, propiciará la adquisición de aprendizajes significativos entre los educandos del CBTIS No. 164 “Emilio Portes Gil”.

4.11 Variable independiente

TIC

4.12 Variable dependiente

Aprendizaje significativo de la Geometría Analítica Plana.

4.13 Planteamiento de las hipótesis

Hipótesis Nula

$\boldsymbol{H_0}$**:** La implementación de las TIC en el contexto específico de la Geometría Analítica Plana no propicia la adquisición de aprendizajes significativos, dado que el puntaje del pretest no presenta diferencias significativas con respecto al puntaje del postest.

Hipótesis Alternativa

$\boldsymbol{H_1}$**:** La implementación de las TIC en el contexto específico de la Geometría Analítica Plana propicia la adquisición de aprendizajes significativos, dado que el puntaje del pretest presenta diferencias significativas con respecto al puntaje del postest.

α=0.05=5%

Tabla 39

Prueba de t para medidas de dos muestras relacionadas

	Pretest	*Postest*
Media	94.3333333	106.333333
Varianza	1080.57471	506.781609
Observaciones	30	30
Coeficiente de correlación de Pearson	0.47420893	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	29	

Estadístico t	-2.20873373
P(T<=t) una cola	0.01762517
Valor critico de t (una cola)	1.69912703
P(T<=t) dos colas	0.03525034
Valor critico de t (dos colas)	2.04522964

Dado que *p-value* es menor que 0.05, se rechaza la hipótesis nula, por lo cual es posible afirmar que la implementación de las TIC en el contexto específico de la Geometría Analítica Plana propiciaron la adquisición de aprendizajes significativos.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Este capítulo expone los resultados logrados en el estudio, destacando los descubrimientos y restricciones. Basándose en las preguntas, suposiciones y metas establecidas al comienzo, se expone un análisis para dar respuesta a la pregunta de investigación. De igual forma, se proponen algunas sugerencias para futuros estudios sobre el asunto.

El objetivo general de la investigación fue diseñar e implementar una guía de secuencias didácticas de Geometría Analítica Plana fundamentada en las TIC con la finalidad de propiciar entre los estudiantes un ambiente de aprendizaje significativo.

5.1 Hallazgos

La investigación inició con la aplicación de un pretest de respuestas cerradas, con la intencionalidad de evidenciar las habilidades y destrezas concernientes a los fundamentos de Geometría Analítica. En base a los resultados obtenidos, se procedió a la realización e implementación del manual de secuencias didácticas de Geometría Analítica Plana. Al concluir la secuencia de aprendizaje los estudiantes realizaron un postest que contenía los mismos reactivos del test inicial, mismo que fungió como referente para evaluar el grado de incidencia de las TIC en el contexto analizado.

La evaluación inicial, estuvo conformada por un total de 15 reactivos, cada reactivo tenía un valor de 10 puntos, por lo que el puntaje máximo a obtener era de 150 puntos. El 16% de los estudiantes que presentaron el pretest obtuvo entre 100 y 140 puntos. Tomando como referencia estos resultados, se procedió a la elaboración y desarrollo de la secuencia de aprendizaje fundamentada en las TIC. Al finalizar la misma, los estudiantes resolvieron el postest que contenía los mismos reactivos del test inicial, no obstante, en esta segunda evaluación se obtuvo un incremento en el porcentaje del puntaje deseado del 50%, es decir, el 66% de los estudiantes, obtuvo entre 100 y 140 puntos.

En la evaluación inicial, los educandos presentaron dificultades concernientes a la identificación de los datos, la aplicación de las fórmulas, la sustitución de valores y las leyes de los signos, mismas que se trataron de solventar a través del diseño e implementación de la secuencia didáctica de aprendizaje.

Para cada subtema abordado en la secuencia, se propuso una estrategia preinstruccional, implementado las TIC, el propósito principal fue que los estudiantes experimentaran nociones de las definiciones formales de manera lúdica.

Las definiciones formales forman parte de las estrategias construccionales, no solo se les proporcionó a los educandos las fórmulas a utilizar, sino también se les presentó su aplicación a través de la ejemplificación en contextos reales.

Por último, se encuentran las estrategias postinstruccionales, mismas que consolidan los aprendizajes adquiridos en las sesiones de clase.

Las fases de aprendizaje del Modelo Van Hiele, guiaron el diseño y la organización de las experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso de los estudiantes en su paso de un nivel a otro. El pretest pertenece a la fase de información, dado que se identificaron los conocimientos previos de los estudiantes, por su parte, la secuencia didáctica pertenece a la fase de orientación el objetivo principal de esta fase fue conseguir a través de diferentes actividades propuestas, que los estudiantes descubrieran, comprendieran y aprendieran las definiciones formales de los contenidos abordados.

Al concluir cada subtema de la secuencia, se propusieron ejercicios selectos y actividades prácticas, con el propósito de consolidar los aprendizajes adquiridos durante la sesión, mismas que forman parte de la tercera fase del Modelo Van Hiele, denominada explicitación.

El postest forma parte de la fase de orientación libre y la integración, ya que el postest contenía los mismos reactivos de la prueba inicial, esto con el propósito no solo de evaluar el grado de incidencia de las TIC al contexto específico de la Geometría Analítica Plana, sino también propiciar un ambiente de aprendizaje significativo.

A partir de lo expuesto, es posible concluir que se cumplió con el objetivo planteado al inicio de la investigación, el cual consistía en diseñar e implementar una guía de secuencias didácticas de Geometría Analítica Plana fundamentada en las TIC, con la finalidad de propiciar entre los estudiantes aprendizajes significativos.

Dado que las dos muestras tomadas en el estudio guardaban una estrecha relación, se realizó un análisis de datos utilizando el estadístico “t-Student” con el 5% de error, y 95% de nivel de confianza, obteniendo un *p-value* de 0.03525034, ya que el resultado es menor que 0.05, se rechaza la hipótesis nula, por lo cual es posible afirmar que la implementación de las TIC en el contexto específico de la Geometría Analítica Plana propician en gran medida la adquisición de aprendizajes significativos.

5.2 Limitaciones

La propuesta didáctica se limitó a la institución educativa previamente mencionada situada en Cuidad Madero Tamaulipas, sobre la que se tomaron muestras de los puntajes obtenidos por los estudiantes para posteriormente implementar el manual de secuencias didácticas, una vez finalizado el mismo se tomaron nuevas muestras para evaluar su incidencia en el contexto estudiado.

El tiempo destinado para el desarrollo del manual resultó ser otra limitante dado que solo se destinaron tres días para su culminación, motivo por el cual, a pesar de haber abordado todos los contenidos, no es posible propiciar en su totalidad aprendizajes significativos.

5.3 Recomendaciones

La secuencia didáctica, integró los diferentes estilos de aprendizaje, no obstante, las actividades propuestas estuvieron planeadas para llevarse a cabo en modalidad de trabajo individual, Se recomienda que en futuras implementaciones, se propongan actividades que los estudiantes puedan llevar a cabo tanto en equipo como en grupo, pues facilita que los estudiantes interactúen de manera colectiva con los problemas y planteen una solución mediante el diálogo, la propuesta de ideas y la experimentación. De igual manera, es más viable fomentar un entorno de aprendizaje colaborativo.

Se sugiere que, en futuras investigaciones, se seleccione exclusivamente un contenido de la asignatura de Geometría Analítica y en base al mismo se proponga una secuencia didáctica, y se desarrolle en un tiempo mínimo de una semana, para propiciar ambientes de aprendizaje significativo entre el grupo de estudiantes.

El uso del formulario es imprescindible y contribuirá significativamente a la asimilación y comprensión de las fórmulas analizadas.

Finalmente, es fundamental fomentar de manera constante la motivación en los estudiantes, con el propósito de transformar la percepción que tienen sobre las disciplinas derivadas de las matemáticas. Es relevante señalar que el uso de tecnologías constituye un recurso y no un objetivo en sí mismo para lograr aprendizajes significativos por parte de los estudiantes.

5.4 Resultados obtenidos en investigaciones previas

El estudio de Bedoya (2013) se realizó con el objetivo de determinar cómo incide la aplicación de recursos didácticos en el aprendizaje significativo de la Geometría Analítica en un bachillerato de Ecuador. Entre los resultados la autora concluye que los docentes continúan implementando metodologías de enseñanza tradicional por lo que el uso que dan a los recursos didácticos imposibilita la integración de nuevos conocimientos entre los estudiantes.

En el estudio llevado a cabo por Álvarez-Niño y Arias-Ortiz (2014), se descubrió que el uso de los Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA) en el salón de clases son mecanismos de motivación y constituyen un instrumento de enseñanza que facilita la asimilación más ágil, clara y exacta de contenidos. Este, al implementarlo bajo la filosofía B-Learning, fusiona el enfoque convencional, específicamente organizativo, y lo potencia al generar conocimientos y formas de apropiar al individuo de su propio aprendizaje.

Por su parte, Villagrán-Cáceres et. al (2018) llevaron a cabo el análisis de datos utilizando el estadístico “t-Student” con el 5% de error, y 95% de nivel de confianza, obteniendo un p-value = 0.00099191. Concluyendo que, la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales y el manejo de superficies a través de GeoGebra mejora el rendimiento académico de los estudiantes en función de las notas obtenidas.

Los resultados obtenidos en la investigación de Gusñay et. al (2019) arrojaron que un 72% de los estudiantes consideran, que el ambiente que genera el empleo de la tecnología permite fortalecer áreas de oportunidad. No obstante, para poderse implementar en años venideros es necesario que los docentes se comprometan a adquirir las competencias digitales necesarias.

Referencias

Aray A., Párraga Q., & Chun M., (2019). La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí.. *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo)*, 4(1), 20-31. https://www.redalyc.org/pdf/6731/673171021002.pdf

Araya, R., & Alfaro, J. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria: La perspectiva de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(2), 147-165. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/1941/194115606010.pdf

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.

Agudelo, M. (2009). Importancia del diseño instruccional en ambientes virtuales. *Nuevas Ideas en Informática Educativa*, *5*(1),118-127. https://www.tise.cl/volumen5/TISE2009/Documento15.pdf

Álvarez-Niño, L., & Arias-Ortiz., C. (2014). Los ambientes virtuales de aprendizaje (AVA) como facilitadores del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica en la educación media. *Revista de Educación y Desarrollo*, *1* (30), 63-70. https://www.cucs.udg.mx/revistas/edu_desarrollo/anteriores/30/RED30_CompletaVF.pdf

Araújo, A. A. (2019). La enseñanza de la geometría analítica en la educación media. Revista U.D.C.A *Actualidad & Divulgación Científica*, *22*(1), 158-163. http://orcid.org/0000-0003-2786-4848

Aravena, A., & Morales, A. (2018). El Plano Cartesiano en estudiantes de Quinto Básico: su Resignificación en una Situación Específica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(62), 825-846. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a04

Arista, J. (2014). Tecnologías de la información y la comunicación (TIC) aplicadas a la docencia. *Logos Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 2*, *1*(1). https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa2/article/view/1045

Báez, R., & Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática*, *12*(16), 67-87. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/principios-didacticos-a-seguir-en-el-proceso-de-ensenanza-y-aprendizaje-de-la-geometria-en-la-upel-el-macaro/

Bedoya, I. (2013). *Incidencia de la aplicación de recursos didácticos en el Aprendizaje Significativo de la Geometría Analítica de los estudiantes de la Unidad Educativa Técnica Particular Hermano Miguel de la Ciudad de Latacunga* [Tesis de maestría, Universidad Técnica de Ambato]. Repositorio institucional de la Universidad Técnica de Ambato/ http://repositorio.uta.edu.ec/handle/123456789/5282

Cabrero-Almenara, J. (1996). Nuevas tecnologías, comunicación y educación. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 1 (1). /https://doi.org/10.21556/edutec.1996.1.576

Castro, P., & Gomez, P. (2021). Educación matemática en países hispanohablantes: evolución de su documentación de acceso abierto. *Revistas de la Universidad de Granada, 15*(2), 69-92. https://doi.org/10.30827/pna.v15i2.16155

Chavarria-Pallarco, N. A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele. *Investigación Valdizana, 14*(2), 295-384. https://doi.org/https://doi.org/10.33554/riv.14.2.587

Díaz-Barriga, Á. (2013). TIC en el trabajo del aula. Impacto en la planeación didáctica. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, *IV* (10), 3-21. https://doi.org/10.1016/S2007-2872(13)71921-8

D'Amore, B., Godino, J. D., & Fandiño, M. I. (2008). *Competencias y matemática*. Editorial Magisterio. https://es.scribd.com/document/457224904/D-Amore-Competencia-y-Matematica-pdf

García Peña, S., & López Escudero, O. L. (2008). *La enseñanza de la geometría*. Colección Materiales para apoyar la práctica educativa. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D401.pdf

Goncalves, T. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? *Revista Ciencias de la Educación*, 6(1), 83-98. http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/volIn27/27-5.pdf

Gusñay, J. C., Nogales, J. M., Mosquera, J. R., & Ortega, J. R. (2019). Herramienta para la enseñanza de la geometría utilizando Tics, dirigido a los estudiantes del segundo año de bachillerato. *Explorador Digital*, *3*(3.1), 41-58. https://doi.org/10.33262/exploradordigital.v3i3.1.864

Hancco, M. (2017). *Aplicación del constructivismo en el desarrollo de sesiones de aprendizaje del V escolar ciclo en la institución educativa primaria N° 70026 del barrio porteño puno 2015*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional del Altiplano, Puno].Repositorio institucional/ https://repositorio.unap.edu.pe/handle/20.500.14082/10640?show=full

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación (6ª ed.). McGraw-Hill.

Hernández, V. y Villalba, M. (2001). *Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI*. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original. http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the Teaching and Learning of Geometry. https://eprints.soton.ac.uk/400610/1/Jones_Tzekaki_PME_2nd_research_handbook_geometry_2016.pdf

Á. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Ed.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp.109-149). The Journey Continues. https://repensarlasmatematicas.wordpress.com/wp-content/uploads/2016/10/s90-documento-de-referencia.pdf

Mora, F. B., & Rodríguez, A. R. (2015). La teoría de Van Hiele: Niveles de pensamiento Geométrico. *Pädi Boletín Científico De Ciencias Básicas E Ingenierías Del ICBI,* 3(5). https://doi.org/https://doi.org/10.29057/icbi.v3i5.554

Moreira, M. A., & Novak, J. D. (1988). Investigación en enseñanza de las ciencias en la Universidad de Cornell: esquemas teóricos, cuestiones centrales y abordes metodológicos. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *6*(1), 3-18. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/51028

Moreira, M. A. (2020). Aprendizaje significativo: la visión clásica, otras visiones e interés. *Proyecciones* (14), 0-10. https://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/110620/Documento_completo.pdf-PDFA.pdf?sequence=1&isAllowed=y

, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (2008). *Resultados internacionales de TIMSS 2007 en ciencias* (Informe No. 2008-01). Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (IEA). https://timss.bc.edu/timss2007/pdf/timss2007_internationalmathematicsreport.pdf

Muñoz, J. R. (2004). El aprendizaje significativo y la evaluación de los aprendizajes. *Revista de investigación educativa,* *8*(14), 47-52. https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/educa/article/view/7098

Oré, F. A. (2016). El aprendizaje significativo y su relación con otras estrategias. *Horizonte de la Ciencia,* *6*(10), 130-140. https://www.redalyc.org/journal/5709/570960870014/html/

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía,* *23*(71), 158-180. http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-84862006000200010

Rainiere, A. F. (2013). *Abordaje metodológico de la enseñanza de la Geometría en Bachillerato* [Tesis de maestría, Universidad ORT Uruguay]. Repositorio institucional de la Universidad ORT Uruguay/ https://rad.ort.edu.uy/items/498319a2-440a-4e4c-b8eb-9572ad8040c2

Rivera, E. O., Gómez, J. D., & Saavedra, Á. O. (2011). Tipos de aprendizaje en estudiantes de enseñanza media técnico profesional . *Orientación y Sociedad*, *12*(1), 1-37. https://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/art_revistas/pr.5162/pr.5162.pdf

Serra, D. J. (2000). Una concepción integradora del aprendizaje humano. *Revista cubana de psicología* , *17*(2), 124-130. https://pepsic.bvsalud.org/pdf/rcp/v17n2/05.pdf

Stepich, D. A., & Newby, T. J. (1988). Analogical instruction within the information processing paradigm: effective means to facilitate learning. Instructional Science, 129–144. https://doi.org/10.1007/BF00052699

Toledano, J. M. (2017). El nacimiento de la geometría analítica. *Lecturas Matemáticas*, *38*(2), 93-124. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6332646.pdf

Torres, T. V. (2003). El aprendizaje verbal significativo de Ausubel. Algunas consideraciones desde el enfoque histórico cultural. *Universidades* (26), 37-43. https://www.redalyc.org/pdf/373/37302605.pdf

Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). El Modelo De Van Hiele Y La Enseñanza De La Geometría. *Uniciencia*, *27*(1), 74-94. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475947762005

Vicario, E. S. (2017*). La integración de la tecnología en el aula de matemáticas de secundaria: obstáculos y oportunidades* [Tesis de maestría, Universidad de Valladolid]. Repositorio institucional de la Universidad de Valladolid/ https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/26137/TFMG695.pdf;jsessionid=C90CF4916959D5350D4932BD7BFFD636?sequence=1

Villagrán-Cáceres, W. J., Cruz-Siguenza, E. L., Barahona-Avecilla, F. R., Barrera-Cárdenas, O. B., & Insuasti-Castelo, R. M. (2018). Utilización de GeoGebra como herramienta metodológica en la enseñanza de la geometría Analítica y su incidencia en el control del rendimiento académico de estudiantes del primer semestre de ingeniería. *Revista Científica Dominio de las Ciencias*, *4*(4), 128-144. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6657243

Zuazua, E., & Río, R. R. (2002). Enseñar y aprender matemáticas. *ResearchGate 1*(329), 239-256. https://verso.mat.uam.es/web/ezuazua/documentos_public/archivos/personal/conferencias/RZ_EDUCA_FINAL.pdf

Anexos

Anexo 1 Test inicial/final

Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios N° 164 “Emilio Portes Gil”

Unidad 1. Fundamentos de Geometría Analítica

Test inicial/final

Nombre: ____ Fecha: _________

Instrucciones: Lee detenidamente cada uno de los incisos que se presentan a continuación, resuélvelos y justifica tu respuesta.

1. Encuentra la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son *A* (-3,-8) y *B* (10,6).

Respuesta esperada:

Se pretende que los estudiantes grafiquen en el plano cartesiano las coordenadas del punto A, y del punto B, y apliquen la fórmula para calcular su distancia.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(10) - (-3))^2 + ((6) - (-8))^2}$$

$$d = \sqrt{(13)^2 + (14)^2}$$

$$d = \sqrt{169 + 196}$$

$$d = \sqrt{365}$$

$$d = 19.104$$

2. Los vértices de un triángulo son D (2,0) E (2,4) y F (5,0). Calcula las longitudes de sus lados.

Respuesta esperada:

Se pretende que los estudiantes grafiquen en el plano cartesiano las coordenadas del punto D, E y F, y posteriormente calculen las distancias de las rectas que los unen.

$$dDE = \sqrt{((2) - (2))^2 + ((4) - (0))^2}$$

$dDE = \sqrt{(0)^2 + (4)^2}$

$dDE = \sqrt{16}$

$dDE = 4$

$dEF = \sqrt{((5) - (2))^2 + ((0) - (4))^2}$

$dEF = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$

$dEF = \sqrt{9 + 16}$

$dEF = \sqrt{25}$

$dEF = 5$

$dDF = \sqrt{((5) - (2))^2 + ((0) - (0))^2}$

$dDF = \sqrt{(3)^2 + (0)^2}$

$dDF = \sqrt{9}$

$dDF = 3$

3. Halla las coordenadas del punto medio cuyos extremos son: $G\ (-2{,}1)$ y $H\ (-5{,}3)$.

Respuesta esperada:

Se pretende que los estudiantes grafiquen en el plano cartesiano las coordenadas de los puntos G y H y posteriormente apliquen las fórmulas para calcular el punto medio del segmento que los une.

$$x_m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{(-2) + (-5)}{2}\right) = \frac{-7}{2} = -3.5$$

$$y_m = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{(1) + (3)}{2}\right) = \frac{4}{2} = 2$$

$x_m, y_{m=}(-3.5, 2)$

4. Las coordenadas del punto medio del segmento *IJ* son $(2, -2)$. Halla las del punto *J* siendo *I* (−3,1).

Respuesta esperada:

Se pretende que los estudiantes apliquen los conocimientos adquiridos en asignaturas anteriores y posteriormente, apliquen la fórmula del punto medio de un segmento.

$x_m, y_{m=}(2, -2)\ \ I = (-3{,}1)$

$$x_2 = \left(\frac{-3 + x_2}{2}\right) = 2$$

$$-3 + x_2 = 4$$

$$x_2 = 4 + 3$$

$$x_2 = 7$$

$$y_2 = \left(\frac{1 + y_2}{2}\right) = -2$$

$$1 + y_2 = -4$$

$$y_2 = -5$$

Por lo tanto, el punto J tiene como coordenadas $(4{,}1)$

5. Encuentra la ecuación de la recta cuya pendiente es igual a $\frac{4}{5}$,cuya intersección con el eje y es 5.

Respuesta esperada:

Se pretende que los estudiantes determinen la ecuación de la recta en la forma pendiente ordenada al origen $y = mx + b$, conociendo la pendiente y la ordenada al origen.

a) $\boldsymbol{4x - 5y = -25}$

b) $4x - 5y = 25$

c) $4y - 5x = 5$

d) $4x + 5y = 5$

6. Seleccione la opción con el valor de la pendiente de una recta con ángulo de inclinación de $350°$

Respuesta esperada:

Se pretende que los estudiantes apliquen la definición formar de la pendiente como tangente del ángulo, para este ejercicio tendrán que calcular la tangente de $350º$ que es igual a $-0{,}1763$, por lo tanto, la pendiente es $-0{,}1763$.

a) -0.17

b) 0.17

c) 0

d) -1.07

7. Encuentra el valor de la pendiente de una recta que pasa por los puntos: $(-5, -1)$ y (1,3).

Respuesta esperada:

Se pretende que los estudiantes, apliquen la fórmula para calcular la pendiente de una recta, y resuelvan el ejercicio propuesto.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{3 - (-1)}{1 - (-5)}$$

$$m = \frac{2}{3}$$

a) $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

b) -2

c) 0

d) $-\frac{2}{3}$

8. ¿Cómo es la pendiente, cuando el ángulo formado por la recta, es obtuso?

Respuesta esperada:

Si el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas es obtuso, la pendiente es negativa y decrece al crecer el ángulo.

9. ¿Cómo es la pendiente, cuando el ángulo formado por la recta, es agudo?

Respuesta esperada:

Si el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas es agudo, la pendiente es positiva y crece al crecer el ángulo.

10. Dos jugadores de basquetbol se encuentran en los puntos $A(1,7)$ y $B(8,9)$. El jugador A le hará un pase al jugador B. El jugador C, del equipo contrario, se coloca entre ellos para intentar interceptar el pase. Considerando que el jugador C, se encuentra a la misma distancia del jugador A que del jugador B, ¿cuáles son las coordenadas del jugador C?

Respuesta esperada:

Se pretende que los estudiantes apliquen los conocimientos adquiridos en la resolución de ejercicios prácticos del punto medio de un segmento. Lo ideal es que ubiquen en el plano cartesiano los puntos A y B y posteriormente realicen las operaciones pertinentes.

$$x_m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{(1) + (8)}{2}\right) = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$y_m = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{(7) + (9)}{2}\right) = \frac{16}{2} = 8$$

$x_m, y_{m=}(4.5, 8)$

11. Un barco está ubicado en el océano en el punto de coordenadas C $(-8{,}10)$, y el puerto está situado sobre el punto de coordenadas D $(6, -5)$. Encuentra el punto medio del segmento que los une.

Respuesta esperada:

Se pretende que los estudiantes apliquen los conocimientos adquiridos en la resolución de ejercicios prácticos del punto medio de un segmento. Es conveniente que ubiquen en el plano cartesiano las coordenadas de los puntos C y D y posteriormente realicen las operaciones pertinentes.

$$x_m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{(-8) + (6)}{2}\right) = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y_m = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{(10) + (-5)}{2}\right) = \frac{5}{2} = 2.5$$

$x_m, y_{m=}(-1, 2.5)$

12. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto K (3 ,2) y la pendiente m=2.

Respuesta esperada:

Se pretende que los estudiantes determinen la ecuación de la recta, conociendo un punto y su pendiente, a través de la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$.

$y - 2 = 2\ (x - 3)$

$y - 2 = 2x - 6$

$y = 2x - 6 + 2$

$y = 2x - 4$

13. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos L (−3,−1) y M (5,2).

Respuesta esperada:

Se pretende que los estudiantes calculen en primera instancia la pendiente de los puntos dados y posteriormente encuentren la ecuación de la recta al sustituir en uno de los puntos con la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{2 - (-1)}{5 - (-3)}$$

$$m = \frac{2 + 1}{5 + 3}$$

$$m = \frac{3}{8}$$

$$y - 2 = \frac{3}{8}(x - 5)$$

$$y - 2 = \frac{3}{8}x - \frac{15}{8}$$

$$y = \frac{3}{8}x - \frac{15}{8} + 2$$

$$y = \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}$$

14. En una campaña de reforestación, se planta un árbol en el punto $A\ (5,-3)$ y otro árbol en el punto $B(-7,9)$. Justo en medio de estos dos árboles, se instala un sistema de riego automático. ¿Cuáles son las coordenadas del dispositivo de riego?

Respuesta esperada:

Se pretende que los estudiantes realicen el ejercicio práctico, aplicando la formula para determinar el punto medio del segmento que une los puntos A, B.

$$x_m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{(5) + (-7)}{2}\right) = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y_m = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{(-3) + (9)}{2}\right) = \frac{6}{2} = 3$$

$x_m, y_{m=}(-1, 3)$

15. Encuentra la ecuación de la recta cuya pendiente es 3, que pasa por el punto A (1,–2).

Respuesta esperada:

Se pretende que los estudiantes determinen la ecuación de la recta, conociendo un punto y su pendiente, a través de la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$.

$y - (-2) = 3(x - 1)$

$y + 2 = 3x - 3$

$y = 3x - 3 - 2$

$y = 3x - 5$

Para representarla en forma general tenemos:

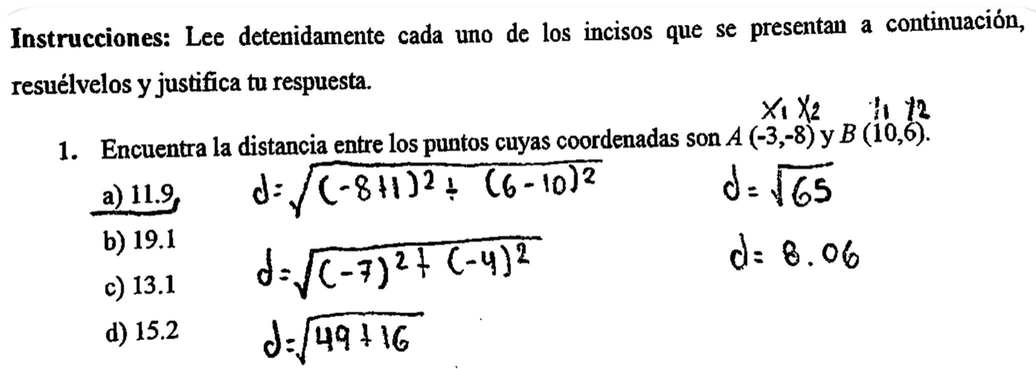
$-3x + y + 5 = 0$

Anexo 2 Procedimientos llevados a cabo por los estudiantes en el test inicial y final

1. Encuentra la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son *A* (-3,-8) y *B* (10,6).

Figura 29

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el primer reactivo del pretest.



Instrucciones: Lee detenidamente cada uno de los incisos que se presentan a continuación, resuélvelos y justifica tu respuesta.

x_1 x_2 y_1 y_2

1. Encuentra la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son *A* (-3,-8) y *B* (10,6).

a) 11.9

b) 19.1

c) 13.1

d) 15.2

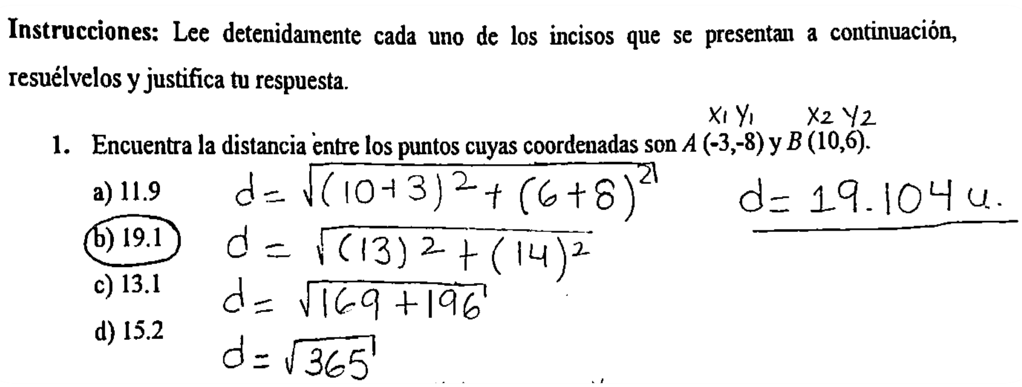
$d = \sqrt{(-8+1)^2 + (6-10)^2}$ $d = \sqrt{65}$

$d = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2}$ $d = 8.06$

$d = \sqrt{49+16}$

Figura 30

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el primer reactivo del postest.



Instrucciones: Lee detenidamente cada uno de los incisos que se presentan a continuación, resuélvelos y justifica tu respuesta.

x_1 y_1 x_2 y_2

1. Encuentra la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son *A* (-3,-8) y *B* (10,6).

a) 11.9

b) 19.1

c) 13.1

d) 15.2

$d = \sqrt{(10+3)^2 + (6+8)^2}$ $d = 19.104$ u.

$d = \sqrt{(13)^2 + (14)^2}$

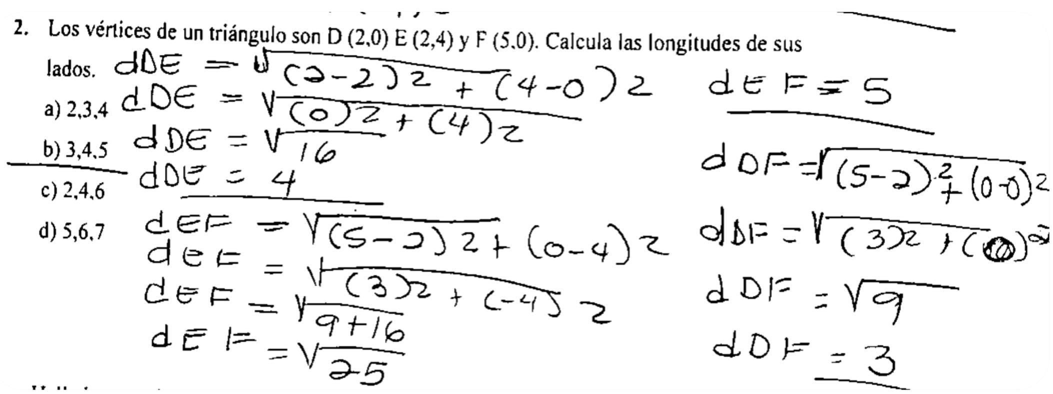
$d = \sqrt{169+196}$

$d = \sqrt{365}$

2. Los vértices de un triángulo son D (2,0) E (2,4) y F (5,0). Calcula las longitudes de sus lados.

Figura 31

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el segundo reactivo del pretest.



2. Los vértices de un triángulo son D (2,0) E (2,4) y F (5,0). Calcula las longitudes de sus lados.

a) 2,3,4

b) 3,4,5

c) 2,4,6

d) 5,6,7

$d_{DE} = \sqrt{(2-2)^2 + (4-0)^2}$

$d_{DE} = \sqrt{(0)^2 + (4)^2}$

$d_{DE} = \sqrt{16}$

$d_{DE} = 4$

$d_{EF} = \sqrt{(5-2)^2 + (0-4)^2}$

$d_{EF} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$

$d_{EF} = \sqrt{9+16}$

$d_{EF} = \sqrt{25}$

$d_{EF} = 5$

$d_{DF} = \sqrt{(5-2)^2 + (0-0)^2}$

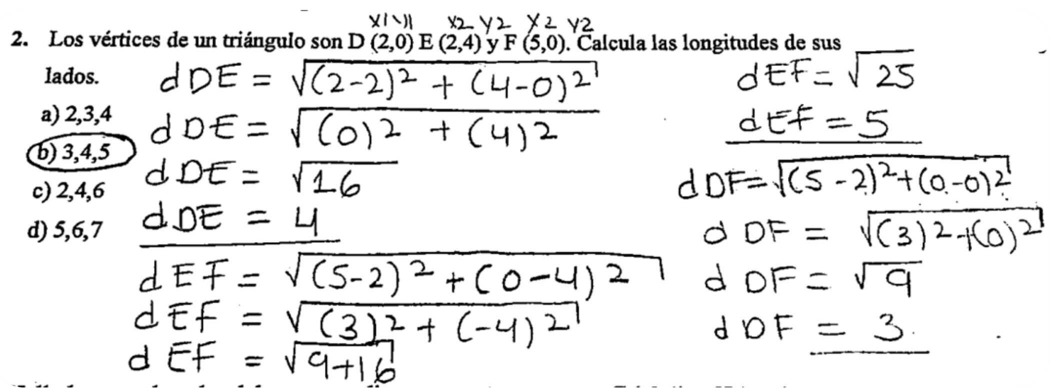
$d_{DF} = \sqrt{(3)^2 + (0)^2}$

$d_{DF} = \sqrt{9}$

$d_{DF} = 3$

Figura 32

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el segundo reactivo del postest.



2. Los vértices de un triángulo son D (2,0) E (2,4) y F (5,0). Calcula las longitudes de sus lados.

x1 y1 x2 y2 x2 y2

a) 2,3,4

b) 3,4,5

c) 2,4,6

d) 5,6,7

$d_{DE} = \sqrt{(2-2)^2 + (4-0)^2}$

$d_{DE} = \sqrt{(0)^2 + (4)^2}$

$d_{DE} = \sqrt{16}$

$d_{DE} = 4$

$d_{EF} = \sqrt{(5-2)^2 + (0-4)^2}$

$d_{EF} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$

$d_{EF} = \sqrt{9+16}$

$d_{EF} = \sqrt{25}$

$d_{EF} = 5$

$d_{DF} = \sqrt{(5-2)^2 + (0-0)^2}$

$d_{DF} = \sqrt{(3)^2 + (0)^2}$

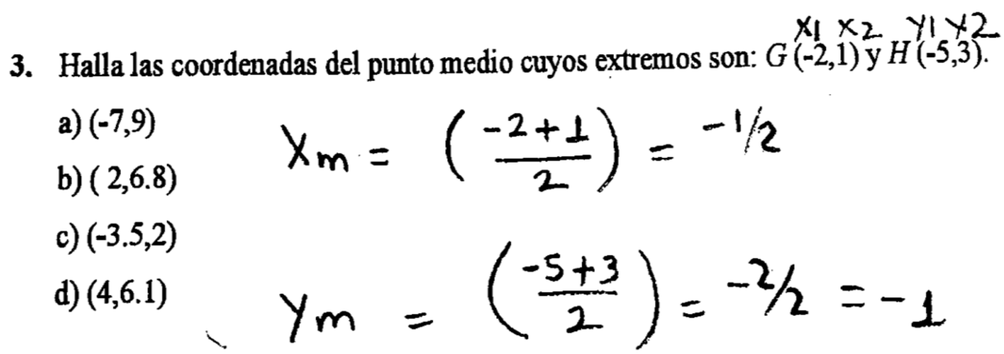
$d_{DF} = \sqrt{9}$

$d_{DF} = 3$

3. Halla las coordenadas del punto medio cuyos extremos son: *G* (-2,1) y *H* (-5,3).

Figura 33

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el tercer reactivo del pretest.



3. Halla las coordenadas del punto medio cuyos extremos son: *G* **(-2,1) y** *H* **(-5,3).**

x1 x2 y1 y2

a) (-7,9)

b) (2,6.8)

c) (-3.5,2)

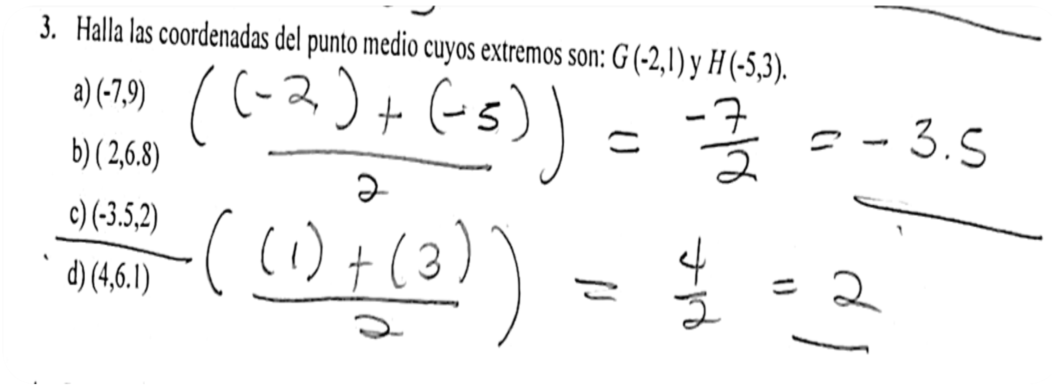
d) (4,6.1)

$X_m = \left(\frac{-2+1}{2}\right) = -1/2$

$Y_m = \left(\frac{-5+3}{2}\right) = -2/2 = -1$

Figura 34

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el tercer reactivo del postest.



4. Las coordenadas del punto medio del segmento *IJ* son (3,5). Halla las del punto *J* siendo *I* (2,9).

Figura 35

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el cuarto reactivo del pretest.

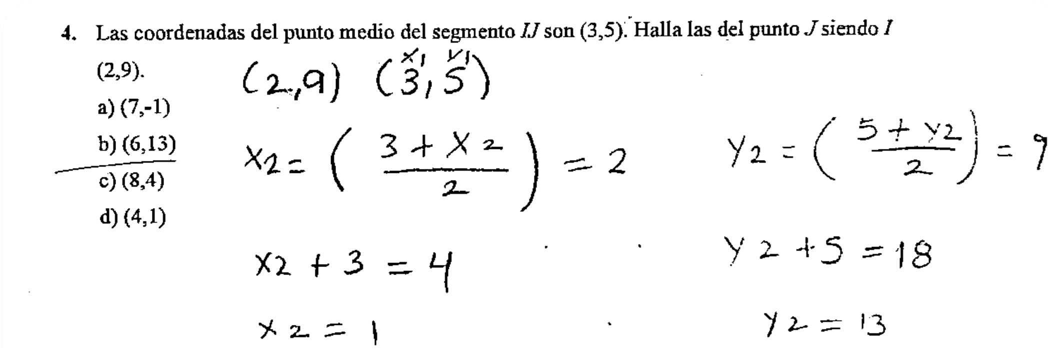
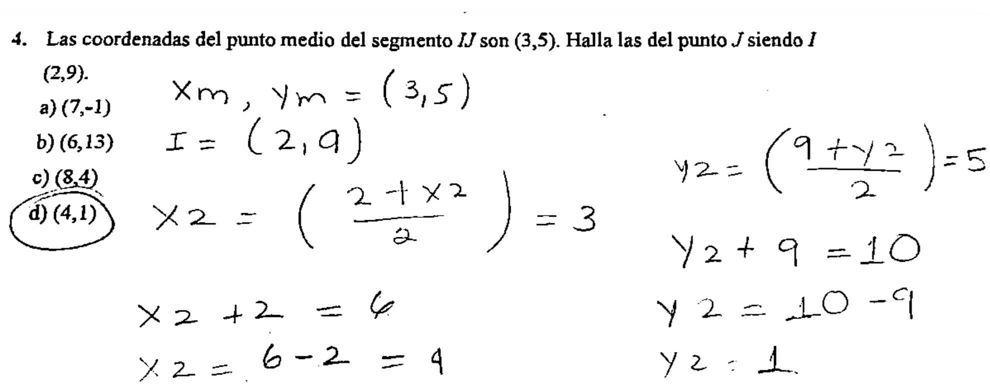


Figura 36

Procedimiento llevado a cabo un estudiante en el cuarto reactivo del postest.



4. Las coordenadas del punto medio del segmento *IJ* son (3,5). Halla las del punto *J* siendo *I* (2,9).

a) (7,-1)

b) (6,13)

c) (8,4)

d) (4,1)

$x_m, y_m = (3,5)$

$I = (2,9)$

$x_2 = \left(\frac{2 + x_2}{2}\right) = 3$

$x_2 + 2 = 6$

$x_2 = 6 - 2 = 4$

$y_2 = \left(\frac{9 + y_2}{2}\right) = 5$

$y_2 + 9 = 10$

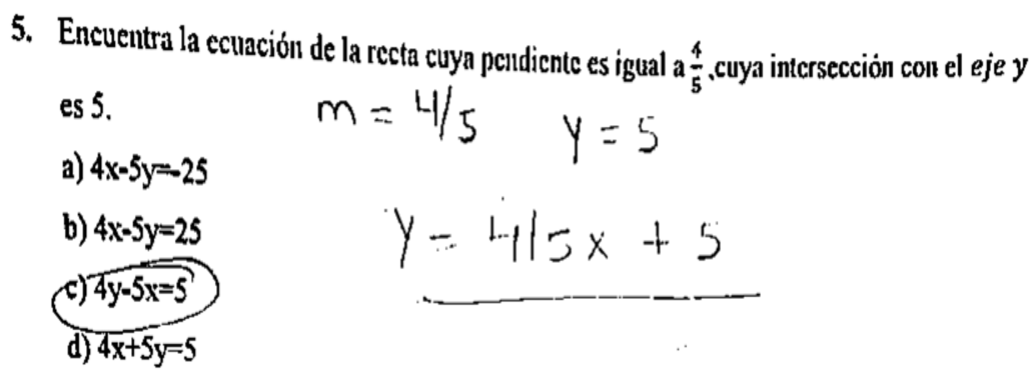
$y_2 = 10 - 9$

$y_2 = 1$

5. Determina la ecuación de la recta con pendiente 4/5, cuya intersección y una intersección en el eje y en el punto (0,5).

Figura 37

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el quinto reactivo del pretest.



5. Encuentra la ecuación de la recta cuya pendiente es igual a $\frac{4}{5}$,cuya intersección con el *eje y* es 5.

a) 4x-5y=-25

b) 4x-5y=25

c) 4y-5x=5

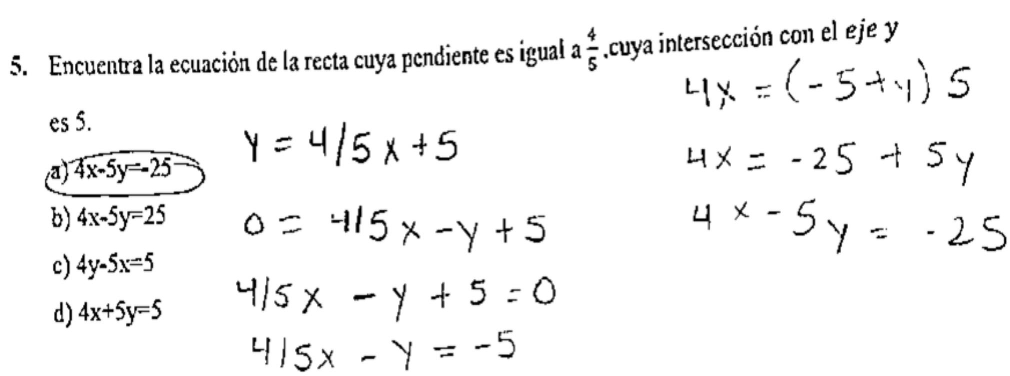
d) 4x+5y=5

$m = 4/5 \quad y = 5$

$y = 4/5x + 5$

Figura 38

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el quinto reactivo del postest.



5. Encuentra la ecuación de la recta cuya pendiente es igual a $\frac{4}{5}$,cuya intersección con el *eje y* es 5.

a) 4x-5y=-25

b) 4x-5y=25

c) 4y-5x=5

d) 4x+5y=5

$y = 4/5x + 5$

$0 = 4/5x - y + 5$

$4/5x - y + 5 = 0$

$4/5x - y = -5$

$4x = (-5 + y)5$

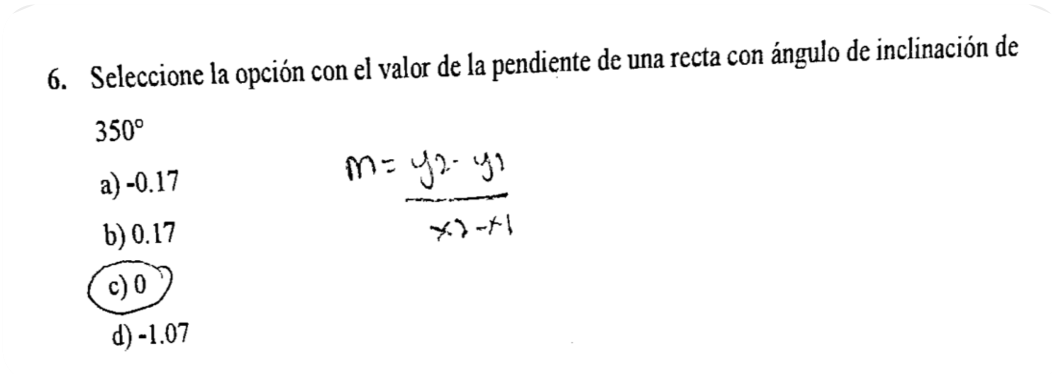
$4x = -25 + 5y$

$4x - 5y = -25$

6. Elija la opción que corresponda al valor de la pendiente de una recta cuyo ángulo de inclinación es de 350°

Figura 39

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el sexto reactivo del pretest.


6. Seleccione la opción con el valor de la pendiente de una recta con ángulo de inclinación de 350°

a) -0.17

b) 0.17

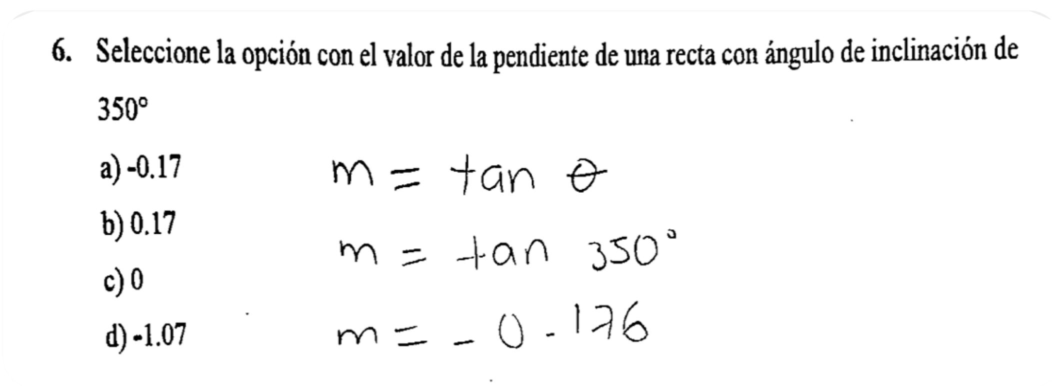
c) 0

d) -1.07

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Figura 40

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el sexto reactivo del postest.


6. Seleccione la opción con el valor de la pendiente de una recta con ángulo de inclinación de 350°

a) -0.17

b) 0.17

c) 0

d) -1.07

$m = \tan \theta$

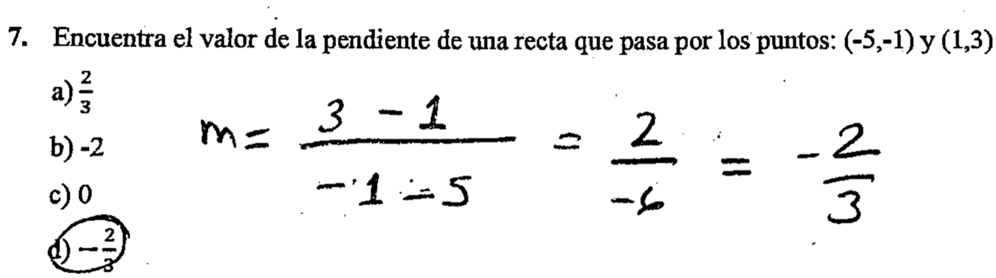
$m = \tan 350°$

$m = -0.176$

7. Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-5,-1) y (1,3).

Figura 41

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el séptimo reactivo del pretest.


7. Encuentra el valor de la pendiente de una recta que pasa por los puntos: (-5,-1) y (1,3)

a) $\frac{2}{3}$

b) -2

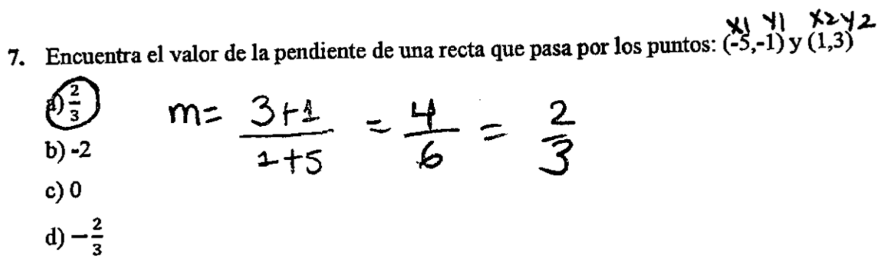
c) 0

d) $-\frac{2}{3}$

$$m = \frac{3-1}{-1-5} = \frac{2}{-6} = -\frac{2}{3}$$

Figura 42

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el séptimo reactivo del postest.


7. Encuentra el valor de la pendiente de una recta que pasa por los puntos: (-5,-1) y (1,3)

x1 y1 x2 y2

a) $\frac{2}{3}$

b) -2

c) 0

d) $-\frac{2}{3}$

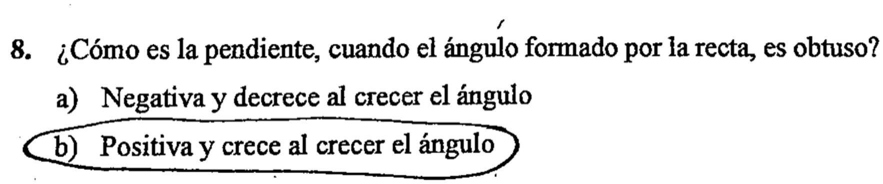
$$m = \frac{3+1}{1+5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

8. ¿Qué tipo de pendiente tiene una recta cuando el ángulo que forma es obtuso?

9.

Figura 43

Respuesta seleccionada por un estudiante en el octavo reactivo del pretest.

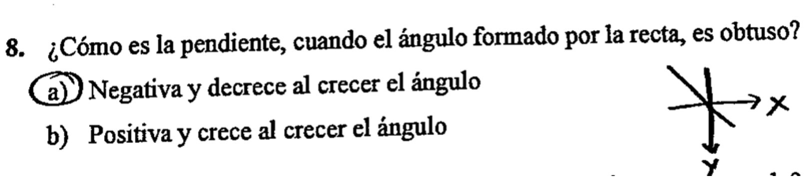

8. ¿Cómo es la pendiente, cuando el ángulo formado por la recta, es obtuso?

a) Negativa y decrece al crecer el ángulo

b) Positiva y crece al crecer el ángulo

Figura 44

Respuesta seleccionada por un estudiante en el octavo reactivo del postest.


8. ¿Cómo es la pendiente, cuando el ángulo formado por la recta, es obtuso?

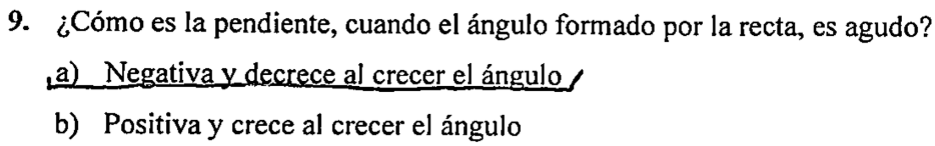
a) Negativa y decrece al crecer el ángulo

b) Positiva y crece al crecer el ángulo

10. ¿Qué tipo de pendiente tiene una recta cuando el ángulo que forma es agudo?

Figura 45

Respuesta seleccionada por un estudiante en el noveno reactivo del pretest.



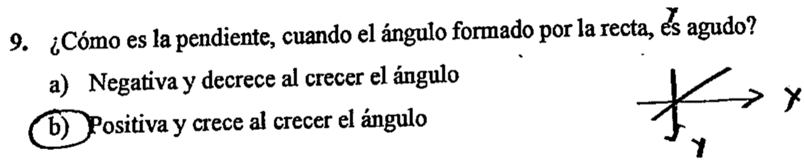
9. ¿Cómo es la pendiente, cuando el ángulo formado por la recta, es agudo?

a) Negativa y decrece al crecer el ángulo

b) Positiva y crece al crecer el ángulo

Figura 46

Respuesta seleccionada por un estudiante en el noveno reactivo del postest.



9. ¿Cómo es la pendiente, cuando el ángulo formado por la recta, es agudo?

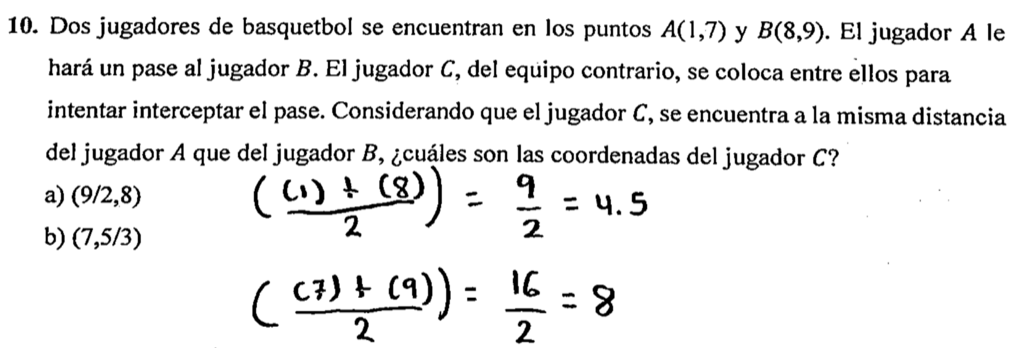
a) Negativa y decrece al crecer el ángulo

b) Positiva y crece al crecer el ángulo

11. Dos jugadores de baloncesto están ubicados en los puntos A (1,7) y B (8,9). El jugador A va a pasar el balón al jugador B, pero un tercer jugador, C, del equipo contrario, se posiciona entre ellos para intentar interceptarlo. Si el jugador C está equidistante de los jugadores A y B, ¿cuáles son sus coordenadas?

Figura 47

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el décimo reactivo del pretest.



10. Dos jugadores de basquetbol se encuentran en los puntos $A(1,7)$ y $B(8,9)$. El jugador A le hará un pase al jugador B. El jugador C, del equipo contrario, se coloca entre ellos para intentar interceptar el pase. Considerando que el jugador C, se encuentra a la misma distancia del jugador A que del jugador B, ¿cuáles son las coordenadas del jugador C?

a) (9/2,8)

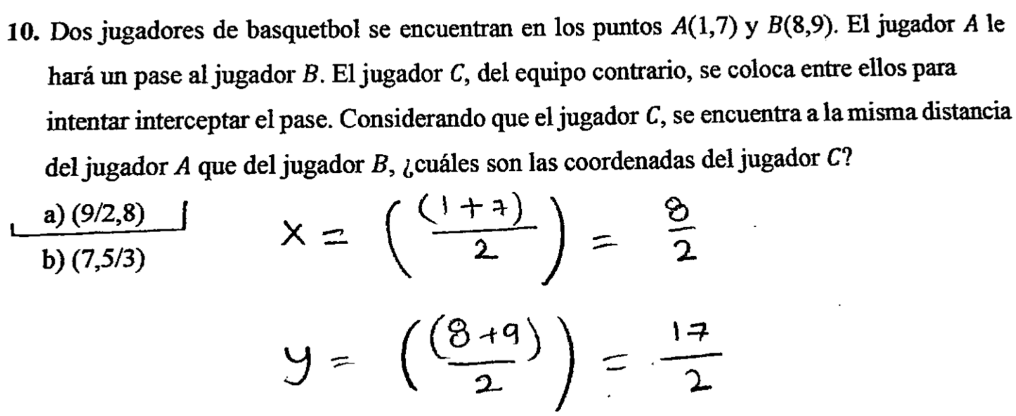
b) (7,5/3)

$$\left(\frac{(1)+(8)}{2}\right) = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\left(\frac{(7)+(9)}{2}\right) = \frac{16}{2} = 8$$

Figura 48

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el décimo reactivo del postest.



10. Dos jugadores de basquetbol se encuentran en los puntos $A(1,7)$ y $B(8,9)$. El jugador A le hará un pase al jugador B. El jugador C, del equipo contrario, se coloca entre ellos para intentar interceptar el pase. Considerando que el jugador C, se encuentra a la misma distancia del jugador A que del jugador B, ¿cuáles son las coordenadas del jugador C?

a) (9/2,8)

b) (7,5/3)

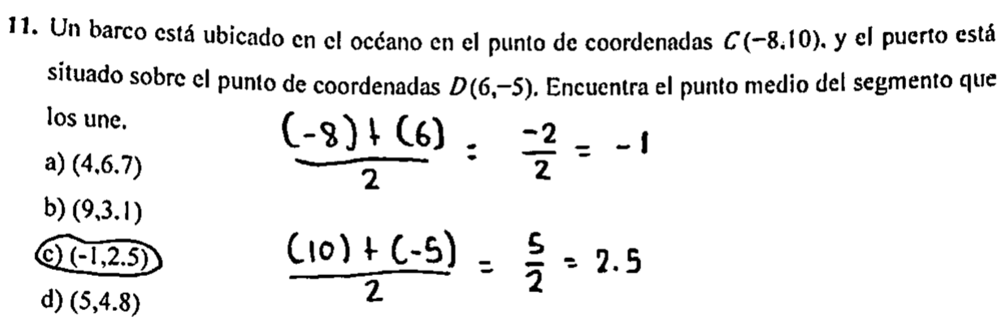
$$x = \left(\frac{(1+7)}{2}\right) = \frac{8}{2}$$

$$y = \left(\frac{(8+9)}{2}\right) = \frac{17}{2}$$

12. Un barco se encuentra en el océano en el punto C (-8,10), mientras que el puerto está localizado en el punto D (6,-5). Determina el punto medio del segmento que conecta ambas ubicaciones.

Figura 49

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el undécimo reactivo del pretest.



11. Un barco está ubicado en el océano en el punto de coordenadas $C(-8,10)$, y el puerto está situado sobre el punto de coordenadas $D(6,-5)$. Encuentra el punto medio del segmento que los une.

a) (4,6.7)

b) (9,3.1)

c) (-1,2.5)

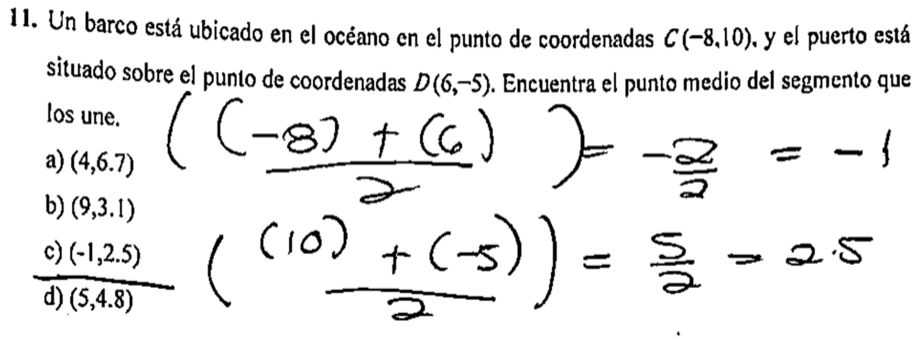
d) (5,4.8)

$$\frac{(-8)+(6)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\frac{(10)+(-5)}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

Figura 50

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el undécimo reactivo del postest.


11. Un barco está ubicado en el océano en el punto de coordenadas $C(-8,10)$, y el puerto está situado sobre el punto de coordenadas $D(6,-5)$. Encuentra el punto medio del segmento que los une.

a) (4,6.7)

b) (9,3.1)

c) (-1,2.5)

d) (5,4.8)

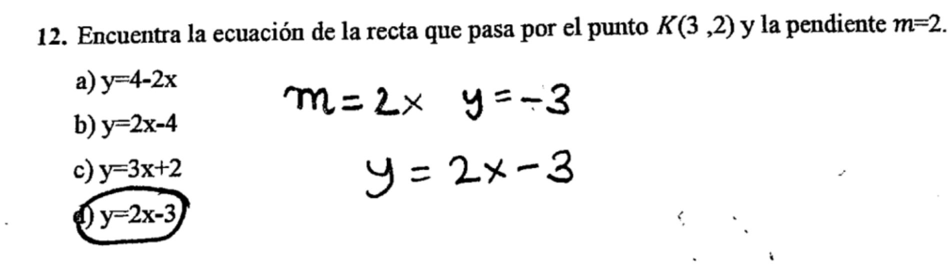
$\left(\frac{(-8)+(6)}{2}\right) = -\frac{2}{2} = -1$

$\left(\frac{(10)+(-5)}{2}\right) = \frac{5}{2} = 2.5$

13. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto K (3, 2) y tiene una pendiente m=2.

Figura 51

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el duodécimo reactivo del pretest.


12. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $K(3\ ,2)$ y la pendiente m=2.

a) y=4-2x

b) y=2x-4

c) y=3x+2

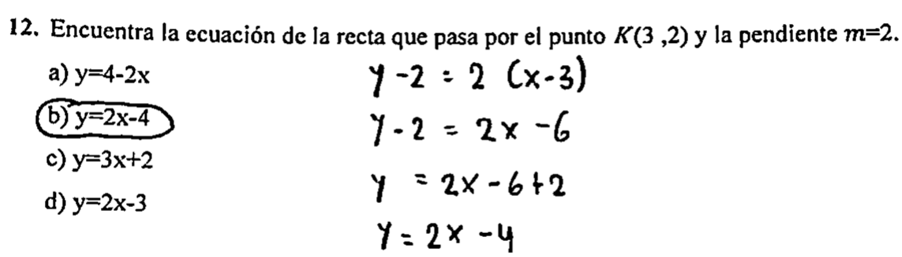
d) y=2x-3

$m = 2x \quad y = -3$

$y = 2x - 3$

Figura 52

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el duodécimo reactivo del postest.


12. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $K(3\ ,2)$ y la pendiente m=2.

a) y=4-2x

b) y=2x-4

c) y=3x+2

d) y=2x-3

$y - 2 = 2\ (x-3)$

$y - 2 = 2x - 6$

$y = 2x - 6 + 2$

$y = 2x - 4$

14. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos K (−3,−1) y L (5,2).

Figura 53

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el décimo tercer reactivo del pretest.

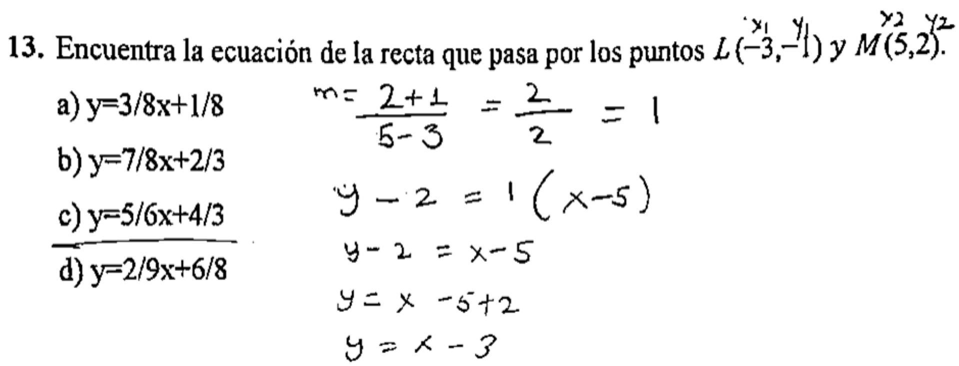
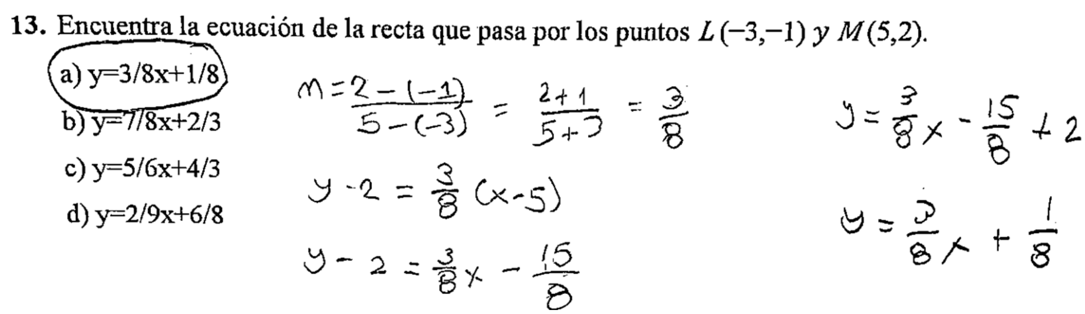


Figura 54

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el décimo tercer reactivo del postest.



15. En una iniciativa de reforestación, se planta un árbol en el punto A (5, -3) y otro en el punto B (-7, 9). El sistema de riego automático se ubica en el punto medio entre ambos árboles. ¿Cuáles son las coordenadas del sistema de riego?

Figura 55

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el décimo cuarto reactivo del pretest.

14. En una campaña de reforestación, se planta un árbol en el punto $A\ (\overset{x_1}{5},\overset{y_1}{-3})$ y otro árbol en el punto $B(\overset{x_2}{-7},\overset{y_2}{9})$. Justo en medio de estos dos árboles, se instala un sistema de riego automático.

¿Cuáles son las coordenadas del dispositivo de riego?

a) (2,4)

b) (7,3)

c) (-1,3)

d) (5,8)

$$m = \frac{9 - -3}{-7-5} = \frac{9+3}{-12} = \frac{12}{-12} \quad -1$$

Figura 56

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el décimo cuarto reactivo del postest.

14. En una campaña de reforestación, se planta un árbol en el punto A (5,−3) y otro árbol en el punto B(−7,9). Justo en medio de estos dos árboles, se instala un sistema de riego automático.

¿Cuáles son las coordenadas del dispositivo de riego?

a) (2,4)

b) (7,3)

c) (-1,3)

d) (5,8)

$$P_m = \frac{15+(-7)}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$P_m = \frac{(-3)+9}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$Q = (-1, 3)$$

16. Determina la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto A (1, -2) y exprésala en su forma general.

Figura 57

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el décimo quinto reactivo del postest.

15. Encuentra la ecuación de la recta cuya pendiente es 3, que pasa por el punto $A\ (\overset{x}{1},\overset{y}{-2})$.

a) -3x+y+5=0

$$y = mx + b$$

$$y = 3x + (-2)$$

$$y = 3x - 2$$

Figura 58

Procedimiento llevado a cabo por un estudiante en el décimo quinto reactivo del postest.

15. Encuentra la ecuación de la recta cuya pendiente es 3, que pasa por el punto $A\,(\overset{x_1}{1},\overset{y_1}{-2})$.

a) -3x+y+5=0 $m=3$ $R = -3x+y+5=0$

$y-(-2) = 3\ x-1$

$y+2 = 3x-3$

$y = 3x-3-2$

$y = 3x-5$