



Universidad Autónoma de Querétaro  
Facultad de Ingeniería  
Doctor en Ingeniería

Control de Motores Síncronos de Imanes Permanentes (PMSM) Utilizando el Enfoque de Control por Orientación de Campo (FOC)

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de:

Doctor en Ingeniería

Presenta:

M. C. Fortino Mendoza Mondragón

Dirigido por:

Dr. Víctor Manuel Hernández Guzmán

Dr. Víctor Manuel Hernández Guzmán

Presidente

  
Firma

Dr. Juvenal Rodríguez Reséndiz

Secretario

  
Firma

Dr. Roberto Valentín Carrillo Serrano

Vocal

  
Firma

Dr. Jaime Horta Rangel

Suplente

  
Firma

Dra. Janet Ledesma García

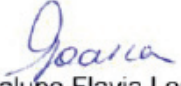
Suplente

  
Firma

  
Dr. Aurelio Domínguez González

Nombre y Firma

Director de la Facultad

  
Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña

Nombre y Firma

Directora de Investigación y Posgrado

# **Control de Motores Síncronos de Imanes Permanentes (PMSM) Utilizando el Enfoque de Control por Orientación de Campo (FOC)**

**por M. C. Fortino Mendoza Mondragón**

## RESUMEN

El control por orientación de campo es la técnica más utilizada en el control de máquinas eléctricas, esta exitosa técnica permite que las señales eléctricas, que cambian en amplitud y frecuencia, de un motor permitan ser reguladas de manera estacionaria al realizar una transformación vectorial y rotacional (las transformadas de *Clark* y *Park*), lo cual convierte el control de velocidad de motores eléctricos de un problema de control de seguimiento a un problema de regulación, bajo el cual de manera natural la opción para regular estas nuevas variables estacionarias es el control PI, bajo esta idea es que se constituye el control por orientación de campo estándar. En el presente trabajo se estudia desde el punto de vista de control la estabilidad de este controlador cuando se utiliza con motores síncronos de imanes permanentes. Se muestra una prueba de estabilidad de Lyapunov que explica porque este controlador funciona bien en la práctica y cuáles son las condiciones que debe de satisfacer desde un punto de vista riguroso de control no lineal. Además, se presenta dos controladores robustos para la regulación de velocidad y posición utilizando el control con dos grados de libertad, de los cuales se demuestra su estabilidad y establecen criterios de sintonía, esto con el fin de solucionar los problemas que presenta el controlador FOC estándar y presentar una alternativa más robusta.

**Palabras Clave:** Motor Síncrono de Imanes Permanentes, Control Adaptable, Control Robusto, Control por Orientación de Campo, Estabilidad de Lyapunov.

## SUMMARY

The control by field orientation is the most used technique in the control of electrical machines, this successful idea allows to control the electrical signals, which change in amplitude and frequency, can be regulated in a stationary frame when performing a vector and rotational transformation (the *Clark* and *Park* transformations). This strategy converts the problem of speed control in electric motors from a tracking to a regulation control problem; under these conditions the most common option to regulate these new stationary variables is naturally the PI control. This idea constitutes the standard field orientation controller. In the present work, the controller stability of this controller is studied when it is used with permanent magnet synchronous motors. A stability probe using Lyapunov method is presented which is intended to explain why this controller works well in practice, and what are the conditions that must be satisfied from a rigorous nonlinear analysis. In addition, there are presented two robust controllers for speed and position control using two degrees of freedom design. For both controllers, their stability is demonstrated establishing stability criteria and tuning guidelines. The robust controllers are presented to solve the inherited problems presented for the use of PI control by the standard FOC and present a more robust alternative.

**Keywords:** Permanent Synchronous Motor, Adaptive Control, Robust Control, Field Oriented Control, Lyapunov Stability.

## AGRADECIMIENTOS

Cada descubrimiento y progreso, cada incremento en la riqueza de la humanidad, se origina en el conjunto del trabajo manual y cerebral de ayer y hoy. Entonces, ¿Qué derecho asiste alguien de apoderarse de una partícula de ese todo y decir: "Esto es mío y no vuestro"?

“Piotr Kropotkin”

A mi familia que lo es todo y lo más importante; gracias por todo su apoyo incondicional.

Agradecimientos a mis compañeros y amigos, en especial a mi hermano Moisés por todos los años de apoyo, amistad y trabajo juntos por ser siempre un ejemplo de fortaleza, de esfuerzo, por ser alguien quien nunca claudica ante la adversidad, por todos esos años juntos gracias hermano. Un agradecimiento a mi profesor y amigo Juvenal quien ha sido todos estos años un apoyo incondicional, un amigo sincero que me ha ayudado a crecer personal y profesionalmente. A mi amigo el “Dr” Marcelino cuya actitud optimista, alegre y jovial han sido contagiosa y divertida; y por mostrarme lo importante que es mantener esta actitud en la adversidad y el día a día. A mi amigo el Rafa que con sus consejos me ayudo a ver lo importante que es la familia, a pesar de lo difícil que pueda ser esa responsabilidad. Y después de muchos, muchos años de estar estudiando en esta institución que es la UAQ, desde mi preparatoria hasta mi Doctorado no podría estar más agradecido con las personas que hacen esta institución ya que en ella he encontrado y forjado las relaciones más importantes de mi vida.

Agradecimiento especial a mi asesor, por brindarme su tiempo y conocimientos en esta carrera, pero principalmente por ser un ejemplo como profesor, como científico y como ser humano. Por alentar mi curiosidad y pasión de seguir aprendiendo.

# ÍNDICE DE CONTENIDO

RESUMEN .....	i
SUMMARY .....	ii
AGRADECIMIENTOS .....	iii
ÍNDICE DE CONTENIDO .....	iv
ÍNDICE DE TABLAS .....	vii
ÍNDICE DE FIGURAS.....	viii
I INTRODUCCIÓN .....	1
I.1 Antecedentes .....	1
I.2 Planteamiento del problema.....	3
I.3 Justificación.....	4
I.4 Hipótesis y objetivos .....	6
I.4.1 Hipótesis .....	6
I.4.2 Objetivo general.....	6
I.4.3 Objetivos específicos .....	6
I.5 Estructura de la Tesis .....	7
II REVISIÓN DE LITERATURA .....	8
II.1 Antecedentes .....	8
II.2 Marco Teórico .....	10
II.2.1 Motores Síncronos de Imanes Permanentes (PMSM) .....	10
II.2.2 Modelo matemático del PMSM.....	11
II.2.3 Control por Orientación de Campo (FOC) .....	12
II.2.4 Estabilidad de Sistemas Dinámicos .....	12
II.2.5 Punto de equilibrio.....	13

II.2.6	Método Directo de Lyapunov .....	13
II.2.7	Funciones de Lyapunov y Funciones Definidas Positivas.....	14
II.2.8	Teorema de Lyapunov de Estabilidad Local .....	14
II.2.9	Teorema de Lyapunov de Estabilidad Global.....	15
II.2.10	Estabilidad entrada-salida .....	15
II.2.11	Controladores con Dos Grados de Libertad (TDOF).....	17
III	METODOLOGÍA.....	19
III.1	Regulación de Velocidad en Motores PMSM Utilizando el Control por Orientación Estándar con Adaptación .....	19
III.1.1	Análisis de Estabilidad del Controlador SFOC .....	20
III.1.2	Equilibrios y Estabilidad del Origen.....	25
III.2	Controladores de Dos Grados de Libertad (2DOF).....	29
III.2.1	Control robusto de velocidad en motores de DC .....	30
III.2.2	Control robusto de posición en motores de DC .....	31
III.3	Control Robusto de Velocidad utilizando un Controlador de Dos Grados de Libertad	32
III.4	Control Robusto de Posición utilizando un Controlador de Dos Grados de Libertad	38
III.5	Plataforma de Pruebas .....	42
IV	RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....	45
IV.1	Regulación de velocidad con el controlador FOC estándar con adaptación .....	45
IV.1.1	Caso de estudio 1 – FOC Estándar en Motor PMSM con Polos Salientes.....	46
IV.1.2	Caso de estudio 2 – FOC Estándar en Motor PMSM con Polos No Salientes.....	49
IV.2	Regulación de velocidad con el controlador robusto de dos grados de libertad.....	54
IV.3	Regulación de posición con el controlador robusto de dos grados de libertad.....	67
IV.4	Conclusiones.....	73
	BIBLIOGRAFÍA .....	75

Anexo 1 ..... 83



## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla III.1 Valores nominales del motor PMSM Stun EMJ-04APB22.....	42
Tabla III.2 Valores del banco de pruebas .....	43
Tabla III.3 Principales valores utilizados en el kit de desarrollo .....	44
Tabla IV.1 Parámetros de motor y controlador utilizados por Petrovic et al, (2001).....	47
Tabla IV.2 Parámetros del controlador FOC estándar.....	49
Tabla IV.3 Parámetros del controlador 2DOF de velocidad.....	54
Tabla IV.4 Parámetros del controlador 2DOF de posición.....	67

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura II.1 Diagrama a bloques del controlador FOC estándar en motores PMSM.....	12
Figura II.2 Control con un solo grado de libertad.....	17
Figura II.3 Diagrama general de un control con dos grados de libertad.....	18
Figura III.1 Controlador con dos grados de libertad.....	30
Figura III.2 Diagrama a bloques de la plataforma de pruebas.....	43
Figura III.3 Banco de pruebas experimentales. ....	44
Figura IV.1 Diagrama a bloques del controlador FOC estándar. ....	46
Figura IV.2 Comparación de la respuesta al escalón de control FOC estándar con el controlador propuesto para un motor PMSM con polos salientes. (a) Respuesta de velocidad del motor. (b) Corrientes $I_q^*$ e $I_q$ . (c) Corrientes $I_d^*$ e $I_d$ . ....	48
Figura IV.3 Comparación de la respuesta al escalón de control FOC estándar con el controlador propuesto para un motor PMSM con polos no salientes. (a) Respuesta de velocidad del motor. (b) Corrientes $I_q^*$ e $I_q$ . (c) Corrientes $I_d^*$ e $I_d$ . ....	50
Figura IV.4 Resultados experimentales de la respuesta al escalón de control FOC estándar con adaptación. ....	51
Figura IV.5 Resultados experimentales de la respuesta al escalón de control FOC estándar con adaptación ante cambios de parámetros.....	52
Figura IV.6 Resultados experimentales de la respuesta al escalón de control FOC estándar con adaptación ante cambios de parámetros y perturbaciones externas con $k_p = 0.01$ y $k_i = 0.02.53$	53
Figura IV.7 Resultados experimentales de la respuesta al escalón de control FOC estándar con adaptación ante cambios de parámetros y perturbaciones externas con $k_p = 0.055$ y $k_i =$ $0.055$ .....	53
Figura IV.8 Diagrama a bloques del controlador 2DOF de velocidad. ....	55
Figura IV.9 Comparación de la respuesta al escalón de control 2DOF de velocidad con la respuesta de un primer orden. (a) Respuesta de velocidad del motor. (b) Corrientes $I_q^*$ e $I_q$ . (c) Corrientes $I_d^*$ e $I_d$ . ....	56
Figura IV.10 Comparación de la respuesta al escalón de control 2DOF de velocidad con cambios de inercia y perturbaciones de par. (a) Respuesta de velocidad del motor. (b) Corrientes $I_q$ . (c) Corrientes $I_d$ . ....	58

Figura IV.11 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad.....	59
Figura IV.12 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad ante cambios de parámetros y perturbaciones externas.....	59
Figura IV.13 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad ante incertidumbre en la constante de par. ....	60
Figura IV.14 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad cuando el coeficiente de fricción es considera casi cero $Bn \approx 0$ .....	61
Figura IV.15 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad con diferentes constantes de tiempo. ....	62
Figura IV.16 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad ante cambios de la velocidad deseada. ....	62
Figura IV.17 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF y el controlador FOC estándar. ....	63
Figura IV.18 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF y el controlador FOC estándar ante una perturbación sinusoidal. ....	63
Figura IV.19 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad ante cambios de parámetros y perturbaciones externas.....	64
Figura IV.20 Diagrama a bloques del controlador 2DOF de posición. ....	68
Figura IV.21 Comparación de la respuesta al escalón de control 2DOF de velocidad con la respuesta de un segundo orden. (a) Respuesta de velocidad del motor. (b) Corrientes $Iq * e Iq$ . (c) Corrientes $Id * e Id$ . ....	70
Figura IV.22 Comparación de la respuesta al escalón de control 2DOF de posición con cambios de inercia y perturbaciones de par. (a) Respuesta de velocidad del motor. (b) Corrientes $Iq$ . (c) Corrientes $Id$ . ....	71
Figura IV.23 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de posición. ....	72
Figura IV.24 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de posición ante cambios de parámetros y perturbaciones externas. ....	72

# CAPÍTULO 1

## I INTRODUCCIÓN

### I.1 Antecedentes

Cerca del 50% del total de la energía eléctrica generada es convertida en energía mecánica con ayuda de los motores eléctricos (Ahmad, 2011) y gracias a los desarrollos en la electrónica de potencia y la tecnología digital hoy en día es posible desarrollar modernos controladores conocidos como “*drives*” con avanzados y complejos algoritmos de control que mejoran su eficiencia (Lamchich, 2011). Los motores eléctricos son los principales actuadores en el sector industrial, sus aplicaciones son muy amplias van desde lavadoras, bombas, elevadores, ventiladores, grúas, vehículos eléctricos hasta aplicaciones de alta precisión como máquinas de control numérico CNC, del inglés Computer Numerical Control), impresoras 3D y robots industriales.

Existe un motor para cada aplicación y uno de ellos cuya popularidad sigue creciendo desde hace más de dos décadas es el motor síncrono de imanes permanentes (PMSM, del inglés Permanent Magnet Synchronous Motor) (Melfi *et al.*, 2009). Este rápidamente ha ganado popularidad en los variadores de frecuencia de alto desempeño o ASD (del inglés Adjustable Speed Drive) y su uso se extendió debido a la introducción de nuevos materiales magnéticos de bajo costo como el Neodimio Hierro y Boro (NdFeB) (Ocen *et al.*, 2006; Garcia *et al.*, 2006). Otras ventajas sobre los motores comunes, es la ausencia externa de una fuente de excitación para el rotor, la ausencia de escobillas, una mayor densidad de potencia lo cual proporciona una alta relación par-inercia (Akrad *et al.*, 2007). Esto unido a un correcto diseño y sintonía de la ley de control, tiene el potencial de reemplazar al motor de inducción (IM, del inglés Induction Motor) en un amplio rango de aplicaciones industriales, comerciales y domésticas (Ocen *et al.*, 2006) que se encuentren aproximadamente por debajo de los 1000 KW (Boldea, 2008).

Una característica del PMSM es que no puede ser conectado directamente a la línea trifásica de corriente alterna (AC, del inglés Alternating Current) debido a que se requiere energizar de manera síncrona las fases. Además, su operación en lazo abierto por medio de un

inversor es muy sensible a perturbaciones e inestabilidad por lo que su operación en lazo cerrado es clave para un alto desempeño (Al-Taee, 2006; Al-Taee *et al.*, 2011). Actualmente existen dos estrategias principales de control vectorial para los motores de AC síncronos y asíncronos: el control por orientación de campo (FOC, del inglés Field Oriented Control) y el control directo de par (DTC, del inglés Direct Torque Control) (Naouar *et al.*, 2007; Wilamowski y Irwin, 2011).

El concepto de FOC fue propuesto por Blaschke de Siemens© en Alemania en 1971 e inicialmente fue desarrollado para el control de motores de inducción (Rupprecht *et al.*, 1980; Casadei *et al.*, 2002; Marafuzzaman *et al.*, 2010). Este desarrollo fue posible gracias a una de las principales contribuciones el área de la electrónica de potencia del siglo XX, la transformada de Park (Heydt *et al.*, 2000). Esta transformación permite el análisis de máquinas síncronas y asíncronas. Esta novedosa transformación permite convertir las ecuaciones diferenciales con coeficientes variantes en el tiempo en ecuaciones con coeficientes constantes. Esto esencialmente cambia la estructura dinámica no lineal del motor de AC en una especie de motor de corriente directa (DC, del inglés Direct Current) con “excitación separada”, desacoplando el flujo magnético y la corriente de par electromagnético. Este concepto implica que los componentes de corriente deben estar orientados en fase (el componente del flujo), y en cuadratura o de manera ortogonal (el componente de par) al vector del flujo del rotor. Esto se logra controlando no sólo la magnitud y frecuencia de las señales de excitación, sino que también el ángulo de fase (Yano *et al.*, 2004), lo que permite obtener el máximo par del motor (Merzoug y Naceri, 2008). Actualmente el FOC es una técnica completamente desarrollada y madura desde el punto de vista industrial (Casadei *et al.*, 2002) y fue una importante innovación para los ASD, una industria de más 4800 millones de euros (Boldea, 2008).

Posteriormente una nueva técnica conocida como DTC fue introducida por Takahashi en 1984, esta nueva técnica se caracterizó por ser sencillo y robusto (Casadei *et al.*, 2002). La idea básica de este concepto es controlar el par y el flujo mediante la correcta selección de los vectores de voltaje, los cuales tienen una relación directa entre el deslizamiento en la frecuencia y el par (Ocen *et al.*, 2006). Existe una gran cantidad de trabajos comparativos entre estas dos estrategias de control FOC y DTC (Casadei *et al.*, 2002; García *et al.*, 2006; Merzoug y Naceri, 2008; Chikhi *et al.*, 2010). Una tabla detallada con las ventajas y desventajas del DTC y el FOC puede ser consultada en Wikipedia - Direct Torque Control (2013).

## I.2 Planteamiento del problema

Existe una fuerte fundamentación práctica y técnica del controlador FOC estándar en motores PMSM. Sin embargo, históricamente este controlador fue desarrollado gracias a la intuición y un profundo entendimiento del funcionamiento del motor de AC y no se tomó en cuenta un riguroso análisis de estabilidad y desempeño, lo cual es necesario cuando se requieren anchos de banda en el controlador y mejorar el rechazo a perturbaciones. Este estudio es desafortunadamente obstaculizado por el hecho de que la dinámica del lazo cerrado del controlador FOC estándar en motores PMSM es descrito por complejas relaciones no lineales (Chang *et al.*, 2000).

A pesar de la existencia de varias estrategias de diseño de control no lineal que presentan controladores con pruebas de estabilidad y un robusto respaldo teórico como es pasividad y “*backstepping*”, muchos de estos controladores no han sido adoptados por la comunidad de fabricantes y diseñadores, debido a la falta de entendimiento teórico o a las complejas leyes de control (Petrovic *et al.*, 1999; Petrovic *et al.*, 2001; Xue *et al.*, 2009, 2012; Ortega *et al.*, 2012). Esto incrementa la sensibilidad a errores numéricos, tiende a producir saturaciones en las señales de control y amplifica el ruido en la práctica (Ortega *et al.*, 1998) lo que degrada considerablemente el desempeño del controlador como señala Carrillo-Serrano (2010).

Este trabajo presenta la prueba de estabilidad para lo que hoy en día es el estándar industrial en el control de motores PMSM y con ello dar la confiabilidad necesaria que muchas aplicaciones de control requieren. Además, proporciona los criterios de sintonía bajo los cuales la estabilidad global del sistema se garantice. Adicionalmente, debido a los problemas que presenta el FOC como la sensibilidad a los cambios de parámetros y a perturbaciones, se propone un nuevo controlador robusto basado en el diseño de dos grados de libertad (TDOF). El cual sustituye al controlador clásico PI de velocidad del esquema del control FOC estándar. Se realiza un análisis de estabilidad y se proporcionan las reglas y criterios de diseño. Este mismo diseño se extiende al control de posición.

### I.3 Justificación

El uso y aplicación del PMSM en la industria es una realidad, siendo la industria automotriz la que más los utiliza en robots manipuladores y maquinaria CNC. Existen en el mundo más de 17 millones de robots de diferentes tipos (Federación Internacional en Robótica, agosto 2011) de los cuales alrededor del 40% son robots industriales que utilizan este tipo de motor, es decir, cerca de 6.8 millones de robots actualmente utilizan esta tecnología. Además, un número similar de equipos CNC se encuentra en circulación. Ambas máquinas utilizan entre 3 y 5 motores. De esta manera se puede concluir que aproximadamente 54 millones de motores PMSM junto con su controlador, son utilizados hoy en día en la industria a nivel mundial. No sólo en el sector de la robótica o el maquinado de piezas, el sector automotriz de vehículos eléctricos ha adoptado al motor PMSM como estándar debido a su eficiencia y densidad de potencia (Altun *et al.*, 2012).

De acuerdo al Consejo de Energía Mundial en 2009 (WEC, del inglés World Energy Council), en países industrializados existen tres principales sectores que consumen cerca del 75% de la electricidad producida, con el 45% en motores eléctricos, 15% en alumbrado y 15% en electrónica de consumo y electrodomésticos. El consumo mundial por parte de los motores está cerca de los  $900 \cdot 10^{12}$  Wh por año. Estos datos demuestran el impacto que tienen los motores en consumo de energía (Oliveira *et al.*, 2011), por lo que muchos fabricantes y países están investigando y desarrollando tecnologías eficientes en sus productos. Un ejemplo es Japón que durante las últimas dos décadas ha estado bajo presión debido a los altos precios de la energía, por lo que han optado por el uso de motores síncronos ya sea de conmutación sinusoidal (PM AC o PMSM) o trapezoidal; conocidos como motores de DC sin escobillas (BLDC, del inglés Brushless Direct Current motors). Estos se utilizan en aplicaciones como el aire acondicionado y refrigeradores; sin embargo, en países como Estados Unidos de América (USA, del inglés United States of America) se continúa utilizando ampliamente el barato motor de inducción, el cual tiene una eficiencia 10% menor que los motores PMSM (Gamazo-Real *et al.*, 2010). Motores como el de inducción de una sola fase tienen una eficiencia cerca del 60%, mientras que algunos estudios aplicados bajo condiciones del hogar y en aplicaciones donde la fuente de alimentación es proporcionada por una sola fase, los motores PMSM llegan a tener una eficiencia 24% mayor que

el motor de inducción de una sola fase, en ocasiones alcanzado el 90% de eficiencia, además de un factor de potencia cercano a uno (0.99) (Feng *et al.*, 2011).

La energía juega un importante papel en el paradigma del desarrollo sustentable. Hoy en día el consumo de energía es un factor importante para medir el desarrollo de un país. De acuerdo con la Administración de la Información de la Energía de USA en 2010 (IEO, del inglés Energy Information Administration), el consumo energético incrementa 1.4% por año. En este sentido la electrónica de potencia y el control juegan un papel muy importante en resolver o mitigar el problema del calentamiento global (Bose, 2009) y se espera que el control vectorial sea el estándar universal en control de máquinas eléctricas síncronas y asíncronas (Bose, 2002).

Hoy en día el control por orientación de campo (FOC) ha tomado fuerza a tal grado que podemos encontrar una gran cantidad de fabricantes de semiconductores (Microchip®, Texas Instruments®, Freescale Semiconductor®, Renesas®, Infineon®, Altera®, Atmel®, Actel®, ST Microelectronics®, International Rectifier® entre otros) que proporcionan información técnica detallada de cómo implementar la técnica FOC estándar en motores de AC síncronos y asíncronos, incluso algunos fabricantes han sacado al mercado circuitos de aplicación específica (ASIC, del inglés Application Specific Integrated Circuit) como los chips de la familia “*iMOTION™*” de International Rectifier que además incluyen la corrección del factor de potencia (PFC, del inglés Power Factor Correction). Este tipo de circuitos reduce enormemente los costos y el tiempo de desarrollo de productos. Actualmente existe mucha información técnica, códigos de ejemplo y notas de aplicación sobre el control FOC estándar (Microchip®, 2011; Texas Instruments®, 2013; Freescale Semiconductor®, 2013; ST®, 2007; Renesas®, 2013; Actel®, 2013; Altera®, 2012; Atmel®, 2013) y varias patentes (Kirstein, 2005; Yin-Ho, 2008; Erenay, 2012; Qin, 2013).

Sin embargo, aún queda abierto el problema de la prueba de estabilidad global de esta técnica de control que ha sido universalmente utilizada en toda la industria los últimos 40 años. Con esta prueba se busca establecer un criterio de sintonía para los lazos de control que garantice la convergencia del sistema en cualquier punto de operación, además de proporcionar a la comunidad de control un profundo análisis teórico del funcionamiento del controlador, lo que ayudara a facilitar las tareas de diseño y comisionamiento.



## **I.4 Hipótesis y objetivos**

### **I.4.1 Hipótesis**

Es posible desarrollar pruebas de estabilidad globales para el FOC estándar en motores síncronos de imanes permanentes (PMSM) y para un controlador con dos grados de libertad (TDOF) en el caso de posición y velocidad.

### **I.4.2 Objetivo general**

Desarrollar pruebas de estabilidad globales para el FOC estándar en motores síncronos de imanes permanentes (PMSM) y para un controlador con dos grados de libertad (TDOF), basado en el FOC.

### **I.4.3 Objetivos específicos**

1. Proponer una prueba de estabilidad global lo más cercana posible al FOC estándar para motores PMSM.
2. Crear un prototipo didáctico.
3. Verificar experimentalmente el funcionamiento del controlador y los criterios de sintonía.
4. Diseñar un controlador de velocidad y posición con dos grados de libertad con base en el FOC con ventajas sobre robustez, perturbaciones y cambio de parámetros.
5. Verificar experimentalmente el desempeño de los controladores robustos.

## I.5 Estructura de la Tesis

En esta tesis, se estudia la estabilidad del FOC estándar en motores PMSM, el cual consiste en tres lazos de control con reguladores lineales tipo PI (Proporcional –Integral); la estabilidad se estudia incluyendo la dinámica eléctrica y mecánica del sistema mediante el método directo de Lyapunov, donde se demuestra cómo esta estrategia es estable y el error de velocidad converge a cero, además se establece una guía para la sintonía y selección de ganancias. Posteriormente se presenta el desarrollo y análisis de estabilidad de dos controladores robustos ante cambios de inercia y perturbaciones para el caso de regulación de velocidad y posición respectivamente; los controladores están basados en el diseño de controladores con dos grados de libertad (2DOF); en el presente trabajo se demuestra la estabilidad exponencial de estas técnicas de control lineal aplicadas al motor PMSM, derivado de este análisis se establecen las condiciones de sintonía y operación del dichos controladores.

En el segundo capítulo, se presentan los antecedentes directos de esta investigación, se inicia con la introducción del concepto de sistemas trifásicos y el espacio de vectores, posteriormente se presenta el modelo matemático del motor PMSM para propósitos de control, el modelo obtenido es para dos tipos de motores con polos salientes y no-salientes. Para generalizar el presente trabajo se utiliza el modelo del motor con polos no-salientes; posteriormente el concepto de control vectorial para maquinas eléctricas es introducido.

En el tercer capítulo, se presenta en análisis de estabilidad con el método directo de Lyapunov aplicado al controlador FOC estándar en motores PMSM, se muestran simulaciones que corroboran su funcionamiento, posteriormente se muestra el análisis de estabilidad de los controladores 2DOF para el caso de velocidad y posición, finalmente se muestran simulaciones de ambos controladores.

En el cuarto capítulo, se presentan los resultados experimentales de los tres controladores (FOC estándar, 2DOF para velocidad y 2DOF para posición), los resultados experimentales fueron implementados en un microcontrolador TMS320F28377D, se demuestra el desempeño de los controladores ante cambios de inercia y perturbaciones, finalmente las conclusiones del trabajo son presentadas.

# CAPÍTULO 2

## II REVISIÓN DE LITERATURA

La información y experiencias adquiridas en estas investigaciones fueron pieza fundamental para el desarrollo de este trabajo. A continuación, se presentan los trabajos más relevantes.

### II.1 Antecedentes

En la literatura se pueden encontrar diferentes controladores de velocidad y posición para motores PMSM estos pueden o no utilizar sensores para cerrar el lazo de control. Estos últimos se denominan “Sensorless”, la mayoría utilizan el concepto del FOC sustituyendo los típicos controladores lineales del tipo Proporcional-Integral (PI) por controladores inteligentes como lógica difusa y redes neuronales, o combinaciones. Estos normalmente son desarrollados de manera intuitiva y presentan solo resultados experimentales, pero no garantizan la estabilidad de manera formal (Lin *et al.*, 2013; Choi y Jung, 2013). De la misma manera, técnicas de control clásico como el Proporcional-Integral-Derivativo (PID) con pre alimentación (“feedforward”) y algoritmos “anti-windup” o reguladores cuadráticos lineales (LQR, de inglés Linear Quadratic Regulator). Estas técnicas de control lineal no pueden garantizar siempre un alto desempeño ya que son sensibles a perturbaciones externas y al cambio de parámetros (Kim *et al.*, 2011; Duc-Do *et al.*, 2012; Liu *et al.*, 2013). Algoritmos como el filtro de Kalman difícilmente garantizan la convergencia del sistema (Assaad-Hamida *et al.*, 2013). Además, muy pocos de estos controladores incluyen pruebas de estabilidad global donde se analice la dinámica eléctrica y mecánica.

Actualmente es muy común encontrar en la literatura sistemas de control de velocidad y posición para motores PMSM es utilizando modos deslizantes de orden entero o fraccional u

observadores (SMC, del inglés Sliding Mode Control, FOSMC, del inglés Fractional Order Sliding Mode Controller, SMO, del inglés Sliding Mode Observer) (Altun *et al.*, 2012; Huang *et al.*, 2012; Qiao *et al.*, 2013). El control por modos deslizantes se caracteriza por proporcionar estabilidad asintótica en la superficie de deslizamiento (Huang *et al.*, 2012). Sin embargo, tiene el problema de la vibración de alta frecuencia o “*chattering*” (Assaad-Hamida *et al.*, 2013). Recientemente se han hecho esfuerzos para mitigar este problema, pero debido a la naturaleza discreta del controlador este problema es inherente por lo cual no puede ser completamente eliminado, sino solo reducido (Qiao *et al.*, 2013). El control SMC se encuentra entre los más robustos, pero siempre existirá una medida entre la robustez y la reducción del “*chattering*”. Otras técnicas de control robusto que también presentan un alto desempeño ante cambios de parámetros y perturbaciones externas son los controladores con dos grados de libertad (TDOF, del inglés Two Dreegres of Freedom). Estos han sido aplicados de manera exitosa en sistemas lineales descritos por funciones de transferencia y sistemas no lineales como los motores PMSM (Chuen-Gan *et al.*, 2000; Zhang *et al.*, 2006; Chou *et al.* 2009). A pesar de ello muchas de estas aplicaciones carecen de una metodología y un análisis riguroso, además no proporcionan criterios de sintonía, carecen de prueba de estabilidad global y utilizan un modelo totalmente lineal del motor PMSM.

La estabilidad juega un papel central en la mayoría de los análisis y síntesis de problemas dinámicos. El método de estabilidad directo de Lyapunov (LDM, del inglés Lyapunov Direct Method) ha sido la herramienta más utilizada y eficiente para realizar un análisis de estabilidad. Otro método como la pasividad también proporciona una buena herramienta para el análisis de funciones de almacenamiento que normalmente están relacionadas con la energía del sistema y proporcionan funciones candidatas de Lyapunov (Yang *et al.*, 2013). En este sentido se han propuesto algunos controladores que incluyen un riguroso análisis de estabilidad y criterios de sintonía, estos son diseñados normalmente utilizando principios de control no lineal como “*Backstepping*”, linealización por realimentación (“*Feedback Linearization*”), control en cascada y pasividad (Akrad *et al.*, 2007).

Se han hecho varios aportes tratando de realizar el análisis formal de estabilidad de la técnica de control FOC estándar en motores de AC. Un primer resultado es presentado en una serie de trabajos por Ortega *et al.* (1995,1996). Sin embargo, en este trabajo se utiliza el modelo universal de una máquina de AC alimentada por corriente, por lo que solo se presenta la prueba

para el controlador PI de velocidad del esquema de control FOC estándar. Posteriormente se presentan una serie de trabajos sobre el diseño de controladores robustos no lineales con pruebas de estabilidad (De-Wit *et al.*, 1996) y más tarde reglas de sintonía para el controlador de velocidad del esquema FOC en motores de inducción (Chang *et al.*, 2000). Sin embargo, nunca se presenta un criterio para todo el esquema de control FOC estándar en motores de AC síncronos o asíncronos que incluya la dinámica eléctrica y por ende los reguladores PI de corriente.

Hernández-Guzmán *et al.* (2011 a, b), presentaron las primeras pruebas más cercanas de estabilidad del control FOC estándar primeramente para la regulación de velocidad de motores PMSM y posteriormente en control de posición. En estos trabajos se tomó en consideración el análisis de la parte eléctrica del sistema. Sin embargo, se depende del conocimiento de la fricción, no se considera la parte integral de los controladores de corriente, se debe realizar un filtrado del error de velocidad y además requiere de control adaptable. Este trabajo constituye una gran aproximación al controlador FOC estándar; pero el problema sigue abierto para el control FOC estándar. Este tipo de análisis tiene como fin explicar desde el punto de vista teórico por que funcionan algunas prácticas comunes de control, además de presentar una sólida fundamentación teórica y proporcionar las reglas de diseño para la sintonía del controlador que garantice su estabilidad en todos los puntos de operación.

## **II.2 Marco Teórico**

### **II.2.1 Motores Síncronos de Imanes Permanentes (PMSM)**

Un PMSM es básicamente una máquina de AC con imanes en el rotor y con sus devanados distribuidos en el estator. De tal manera, que el flujo magnético que se crea es sinusoidal ya que sus embobinados se encuentran enrollados con un menor número de vueltas en los extremos y conforme se avanza hacia el centro, se tiene un mayor número de vueltas. En este tipo de motor, los imanes se pueden encontrar montados o insertados sobre la superficie del rotor o se pueden encontrar en el interior del mismo (Lamchich, 2011).

Existen diferentes tipos de composiciones de los imanes, siendo los más actuales las aleaciones de Ferrita y Bario (Ferrita), los de Aluminio, Níquel y Cobalto (Alnico) y también están los imanes de tierras raras como los de Samario-Cobalto y los de Neodimio, Hierro y Boro, siendo

estos últimos los más preferidos por presentar un flujo magnético mayor (Wilamowski y Irwin, 2011).

### II.2.2 Modelo matemático del PMSM

En el motor PMSM, el modelo dinámico  $dq$  está dado por las siguientes expresiones (Amhad, 2011; Huang *et al.*, 2012):

$$L_d \dot{I}_d = -R_s I_d + n_p L_q \omega I_q + v_d \quad (\text{II.1})$$

$$L_q \dot{I}_q = -R_s I_q - n_p L_d \omega I_d - \Phi_M \omega + v_q \quad (\text{II.2})$$

$$J \dot{\omega} = -b \omega + n_p (L_d - L_q) I_q I_d + \Phi_M I_q - \tau_L \quad (\text{II.3})$$

$$\Phi_M = \sqrt{\frac{3}{2}} n_p k_e \quad (\text{II.4})$$

En donde  $k_e$  es el coeficiente de fuerza contra-electromotriz,  $n_p$  es el número de pares de polos,  $\omega_r$  la velocidad angular del rotor,  $R_s$  la resistencia equivalente,  $I_d$  y  $I_q$  corriente de directa y cuadratura respectivamente,  $L_q$  y  $L_d$  las inductancias en el marco  $dq$  y se tiene que el par electromagnético  $\tau_e$  está dado por:

$$\tau_e = n_p (L_d - L_q) I_d I_q + \Phi_M I_q \quad (\text{II.5})$$

Cuando  $L_q = L_d$

$$\tau_e = \Phi_M I_q \quad (\text{II.6})$$

El modelo matemático de la parte mecánica del PMSM está dado como:

$$J \dot{\omega}_r + B \omega_r = \tau_e - \tau_L \quad (\text{II.7})$$

En donde  $J$  y  $B$  son escalares constantes y positivos que representan la inercia del rotor y el coeficiente de fricción viscosa,  $\tau_L$  representa el par ejercido por la carga.

### II.2.3 Control por Orientación de Campo (FOC)

La estrategia FOC es la más popular para el control de velocidad y posición de motores tanto de inducción como PMSM. A continuación, se muestra un diagrama general del controlador FOC estándar en motores PMSM (Rudnicki *et al.*, 2011).

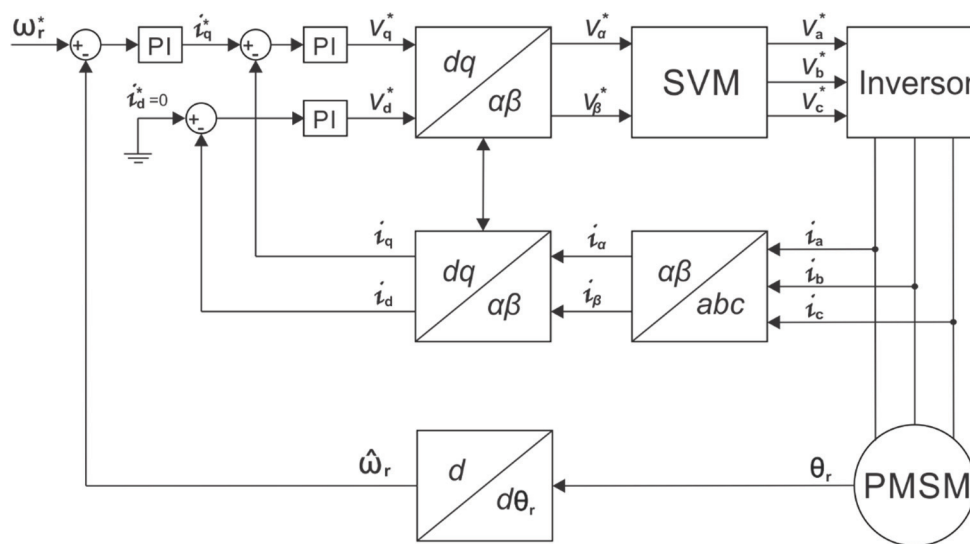


Figura II.1 Diagrama a bloques del controlador FOC estándar en motores PMSM.

### II.2.4 Estabilidad de Sistemas Dinámicos

La estabilidad es tema fundamental que unifica la ingeniería y la ciencia. Uno de los más importantes desarrollos en la teoría de estabilidad es debido a Aleksandr M. Lyapunov un matemático e ingeniero ruso. El estableció las condiciones suficientes para la estabilidad y la estabilidad asintótica. La principal propiedad que caracteriza a la teoría de estabilidad de Lyapunov reside en determinar la estabilidad de una ecuación diferencial y sus puntos de equilibrio sin necesidad de resolver dicha ecuación diferencial (Dong-Chiang, 2011).

Se considera que los sistemas dinámicos están dados por las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{II.8})$$

En donde  $x \in \mathbb{R}^n, t \geq t_0$ .

El sistema definido por (II.8) se dice es que es “autónomo” o invariante en el tiempo si  $f$  no depende de  $t$ , y es “no autónoma” cuando es variante en el tiempo. Se asume que  $f(t, x)$  es continua por tramos respecto a  $t$ . Esto significa que solo existe un número finito de puntos donde existen discontinuidades en el tiempo.

### II.2.5 Punto de equilibrio

Se dice que  $x$  es un punto de equilibrio de (II.8), si  $f(t, x) = 0$  para  $t \geq 0$ , si se traslada el origen a un punto de equilibrio  $x_0$  se puede hacer que el cero sea un punto de equilibrio, esto es de gran ayuda y se asume que el punto de equilibrio de la ecuación (II.8) es el cero, es decir  $x = 0$

### II.2.6 Método Directo de Lyapunov

La filosofía básica del método directo de Lyapunov, es analizar la energía total de un sistema mecánico o eléctrico, en donde la energía está siendo continuamente disipada. La principal propiedad que caracteriza a la teoría de estabilidad de Lyapunov reside en determinar la estabilidad de una ecuación diferencial y sus puntos de equilibrio sin necesidad de resolver dicha ecuación diferencial en todo el espacio de operación.

Sea un sistema lineal o no lineal eventualmente el sistema tiende a un punto de equilibrio. Por lo que se puede establecer la estabilidad de un sistema examinando la variación de una sola función escalar, es decir la función de su energía  $V(x)$ . Algunas relaciones entre la energía de un sistema y la estabilidad son:

- Energía cero corresponde a un punto de equilibrio ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ).
- Estabilidad asintótica implica la convergencia de la energía a cero.



- Inestabilidad está relacionada con un crecimiento en la energía.

Estas relaciones indican que las propiedades de estabilidad de un sistema pueden ser caracterizadas mediante la variación de la energía del sistema, es decir  $\dot{V}(x)$ . La finalidad del método directo de Lyapunov es analizar la función de Lyapunov del sistema donde la energía está siendo continuamente disipada.

## II.2.7 Funciones de Lyapunov y Funciones Definidas Positivas

### (i) Definición: Funciones Definidas Positivas

Una función escalar continua  $V(x)$  se dice que es localmente positiva si  $V(0) = 0$  y en una región  $B_{R_0}$ :

$$x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad V(x) > 0 \quad (\text{II.9})$$

Si  $V(0) = 0$  y (II.9) se cumplen sobre todo el espacio y no solo una región  $B_{R_0}$ , entonces se dice que  $V(x)$  es globalmente positiva definida.

### (ii) Definición: Función de Lyapunov

Si en una región  $B_{R_0}$ , la función  $V(x)$  es positiva definida, continuamente diferenciable, y su derivada en el tiempo a lo largo de la trayectoria de (II.8) es tal que  $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in B_{R_0}$ , entonces se dice que  $V(x)$  es una función de Lyapunov del sistema (7).

## II.2.8 Teorema de Lyapunov de Estabilidad Local

Si en una región  $B_{R_0}$ , existe una función escalar  $V(x)$  tal que su primera derivada parcial es continua y además:

- $V(x)$  es positiva definida (localmente en  $B_{R_0}$ ).
- $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in B_{R_0}$ .

Entonces el punto de equilibrio  $x = 0$  es estable. Si se tiene que  $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in B_{R_0} - \{0\}$ , entonces la estabilidad es asintótica. Una función  $V(x)$  es negativa definida si la función  $-V(x)$  es positiva definida.

### II.2.9 Teorema de Lyapunov de Estabilidad Global

Se asume la existencia una función escalar  $V(x)$  tal que su primera derivada parcial es continua y, además:

- $V(x)$  es positiva definida.
- $\dot{V}(x)$  es negativa definida.
- $V(x) \rightarrow \infty$  cuando la norma  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

Entonces el punto de equilibrio  $x = 0$  es globalmente asintóticamente estable. Es decir, la solución del sistema  $x(t) \rightarrow 0$  a partir de cualquier condición inicial en  $\mathbb{R}^n$ .

### II.2.10 Estabilidad entrada-salida

La representación de sistemas no lineales más usada es la representación por espacio de estados, pero además de esta existe la representación entrada-salida. La finalidad de la representación por espacio de estados es comprobar la estabilidad de los estados del sistema en lazo cerrado; en entrada-salida es observar la relación que existe entre la salida y la entrada. A continuación, se representa un sistema en la forma entrada-salida:

$$y = Hu$$

donde  $y$  es la salida,  $H$  es un operador que especifica la salida  $y$  en términos de  $u$ , en donde,  $u$  es la entrada que mapea el intervalo de tiempo  $[0, \infty]$  a un espacio euclidiano  $\mathbb{R}^m$ , que es,  $u: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Siendo una señal una función vectorial del tiempo, la función de un operador es mapear una señal a otra. Los espacios típicos de una señal son:

- $\mathcal{L}_\infty^m$  – Espacio de las funciones uniformemente acotadas, en donde la norma de  $u: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^m$  está definida como:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup\|u(t)\| < \infty, t > 0$$

- $\mathcal{L}_2^m$  – Espacio de las funciones seccionalmente continuas de cuadrado integrable, en donde la norma de  $u: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^m$  está definida como:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^\infty u^T(t)u(t)dt} < \infty = \sqrt{\int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt} < \infty$$

- $\mathcal{L}_p^m$  – para  $1 \leq p \leq \infty$  es el conjunto de todas las funciones seccionalmente continuas, en donde la norma de  $u: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^m$  está dada por:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p} = \left( \int_0^\infty \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Se suele referirse a la norma de una señal como la energía de la señal, esta interpretación es una generalización del concepto de energía. La estabilidad  $\mathcal{L}_2$  de ganancia finita implica que la norma  $\mathcal{L}_2$  de la salida:

$$\|y_s\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^s y^2(t)dt}, s \in [0, \infty]$$

es menor cuando la norma  $\mathcal{L}_2$  de la entrada también es menor

$$\|\varphi_s\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^s \varphi^2(t)dt}, s \in [0, \infty]$$

La estabilidad  $\mathcal{L}_2$  es utilizada en el análisis de sistemas ya que permite observar el efecto de una salida dada una entrada, se analiza el sistema utilizando señales de cuadrado integrable que pueden verse como señales de energía finita. En muchos problemas de control se requiere que el efecto de una entrada de perturbación sobre la salida sea pequeño. Con entradas en  $\mathcal{L}_2$ , el objetivo

de control es asegurar que el sistema sea  $\mathcal{L}_2$  estable con ganancia finita y minimizar la ganancia  $\mathcal{L}_2$  del sistema.

### II.2.11 Controladores con Dos Grados de Libertad (TDOF)

Con los controladores lineales clásicos como el PID de un solo grado de libertad, no es posible ajustar de manera simultánea las respuestas tanto de la referencia como de la respuesta ante las señales de perturbación. Sin embargo, una estructura de control de dos grados de libertad nos permite resolver este problema, existen diferentes estructuras de controladores TDOF, por lo que describiré solo una de sus principales estructuras (Moudgalya, 2007).

Se considera el sistema mostrado por la Figura II.2, en el cual el sistema está sujeto a la entrada de perturbación  $D(s)$  y a la entrada de ruido  $N(s)$ . En donde  $G_c(s)$  es la función de transferencia del controlador y  $G_p(s)$  es la función de transferencia de la planta. Se supone que  $G_p(s)$  es fija e invariante.

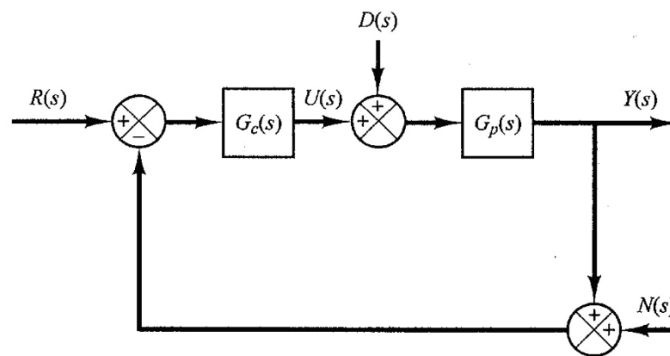


Figura II.2 Control con un solo grado de libertad.

En este caso se trata de un sistema con dos grados de libertad.

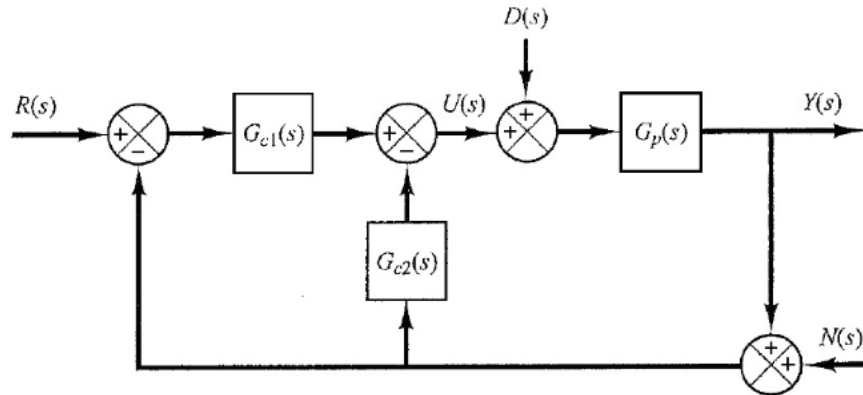


Figura II.3 Diagrama general de un control con dos grados de libertad.

De esta forma se pueden ajustar las características de la respuesta en lazo cerrado de forma independiente para mejorar el desempeño de la respuesta del sistema (Ogata, 2002), esto ayuda a mejorar los siguientes puntos:

- Desempeño del seguimiento (reducir error de seguimiento).
- Rechazo a perturbaciones
- Reducir la sensibilidad ante los errores de modelado.
- Establecer un margen de estabilidad robusta.
- Reducir la sensibilidad al ruido en el sensor.

# CAPÍTULO 3

## III METODOLOGÍA

### III.1 Regulación de Velocidad en Motores PMSM Utilizando el Control por Orientación Estándar con Adaptación

El modelo estándar  $dq$  del motor PMSM utilizando la transformación de Park de potencia invariante está dado por:

$$L_d \dot{I}_d = -R_s I_d + n_p L_q \omega I_q + v_d \quad (\text{III.1})$$

$$L_q \dot{I}_q = -R_s I_q - n_p L_d \omega I_d - \Phi_M \omega + v_q \quad (\text{III.2})$$

$$J \dot{\omega} = -b \omega + n_p (L_d - L_q) I_q I_d + \Phi_M I_q - \tau_L \quad (\text{III.3})$$

Utilizando el modelo  $dq$  del motor PMSM con polos salientes ( $L_d \neq L_q$ ) definido por las ecuaciones (III.1)-(III.3), para el desarrollo del controlador se considera que la velocidad deseada es constante así como el par de carga, el cual es desconocido, perturbaciones adicionales no son incluidas. Considérese el siguiente controlador:

$$v_d = -\alpha_d I_d - \alpha_{di} \int_0^t I_d(t) dt + h \quad (\text{III.4})$$

$$v_q = -\alpha_q \rho - \alpha_{qi} \int_0^t \rho(t) dt \quad (\text{III.5})$$

$$I_q^* = \frac{1}{\Phi'_M} \left( -k_p \tilde{\omega} - k_i \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt \right) \quad (\text{III.6})$$

$$h = -\hat{\gamma}_1 \rho^2 - \hat{\gamma}_2 I_q^* \rho - \hat{\gamma}_3 I_q^* \tilde{\omega} - \hat{\gamma}_4 \rho \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \hat{\gamma}_5 I_q^* \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \hat{\gamma}_6 \rho - \hat{\gamma}_7 I_q^* \quad (\text{III.7})$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\gamma}}_1 &= \Gamma_1 I_d \rho^2, & \dot{\hat{\gamma}}_2 &= \Gamma_2 I_d I_q^* \rho, & \dot{\hat{\gamma}}_3 &= \Gamma_3 I_d I_q^* \tilde{\omega}, \\ \dot{\hat{\gamma}}_4 &= \Gamma_4 I_d \rho \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt, & \dot{\hat{\gamma}}_5 &= \Gamma_5 I_d I_q^* \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt, & \dot{\hat{\gamma}}_6 &= \Gamma_6 I_d \rho, & \dot{\hat{\gamma}}_7 &= \Gamma_7 I_d I_q^*\end{aligned}$$

En donde se define los errores como:

$$\tilde{I}_d = I_d - I_d^* \quad \text{en donde} \quad I_d^* = 0 \quad \therefore \quad \tilde{I}_d = I_d \quad (\text{III.8})$$

$$\rho = I_q - I_q^* \quad (\text{III.9})$$

$$\tilde{\omega} = \omega - \omega^* \quad (\text{III.10})$$

En donde  $\omega^*$ ,  $\Phi'_M > 0$  constantes que representan la velocidad deseada (rad/s) y la constante de par estimada, respectivamente. Se define  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$  como constantes positivas arbitrarias.

**Proposición 1:** Dado el controlador definido por las ecuaciones (III.4)-(III.7) se propone que siempre existen ganancias positivas  $\alpha_d, \alpha_{di}, \alpha_q, \alpha_{qi}, k_p, k_i$  que aseguran que todo el estado es acotado y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(t) = 0$  desde cualquier condición inicial.

### III.1.1 Análisis de Estabilidad del Controlador SFOC

Definiendo:

$$\Phi'_M = \varepsilon \Phi_M \mid \varepsilon > 0 \quad (\text{III.11})$$

$$k'_p = \frac{k_p}{\varepsilon} \qquad k'_i = \frac{k_i}{\varepsilon}$$

Por lo que se puede reescribir la ecuación (III.6) como:

$$I_q^* = \frac{1}{\varepsilon \Phi_M} \left( -k'_p \tilde{\omega} - k'_i \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt \right) \quad (\text{III.12})$$

Para definir la dinámica mecánica en términos del error, se agregan y substraen los siguientes términos  $b\omega^*$ ,  $n_p(L_d - L_q)I_d I_q^*$ ,  $\Phi_M I_q^*$  en la ecuación (III.3), tomando en cuenta que  $\dot{\omega}^* = 0$ , se obtiene:

$$J(\dot{\omega} - \dot{\omega}^*) = -b(\omega - \omega^*) - b\omega^* + n_p(L_d - L_q)(I_q - I_q^*)I_d + n_p(L_d - L_q)I_d I_q^* + \Phi_M(I_q - I_q^*) + \Phi_M I_q^* - \tau_L \quad (\text{III.13})$$

Usando (III.12), la ecuación (III.13) puede reescribirse como:

$$J\dot{\tilde{\omega}} = -b\tilde{\omega} + n_p(L_d - L_q)I_d \rho + n_p(L_d - L_q)I_d I_q^* + \Phi_M \rho - k_p' \tilde{\omega} - k_i' \left[ \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt + \frac{1}{k_i'} (b\omega^* + \tau_L) \right]$$

Definiendo:

$$z = \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt + \frac{1}{k_i'} (b\omega^* + \tau_L) \quad (\text{III.14})$$

Simplificando se obtiene:

$$J\dot{\tilde{\omega}} = -b\tilde{\omega} + n_p(L_d - L_q)I_d \rho + n_p(L_d - L_q)I_d I_q^* + \Phi_M \rho - k_p' \tilde{\omega} - k_i' z \quad (\text{III.15})$$

Continuando se escribe la ecuación del error en la dinámica de la corriente  $I_d$ , agregando y substrayendo los términos  $n_p L_q I_q \omega^*$ ,  $n_p L_q \tilde{\omega} I_q^*$ ,  $n_p L_q I_q^* \omega^*$  en ambos lados de (III.1) y substituyendo la ecuación (III.4), se obtiene:

$$L_d \dot{I}_d = -R_s I_d + n_p L_q (\omega - \omega^*) I_q + n_p L_q I_q \omega^* - \alpha_d I_d - \alpha_{di} \int_0^t I_d(t) dt + h$$

$$L_d \dot{I}_d = -(R_s + \alpha_d) I_d + n_p L_q \tilde{\omega} (I_q - I_q^*) + n_p L_q \tilde{\omega} I_q^* + n_p L_q (I_q - I_q^*) \omega^* + n_p L_q I_q^* \omega^* - \alpha_{di} \int_0^t I_d(t) dt + h \quad (\text{III.16})$$



Substituyendo (III.12) en (III.16):

$$\begin{aligned}
 L_d \dot{I}_d = & -(R_s + \alpha_d)I_d + n_p L_q \rho \tilde{\omega} + n_p L_q \tilde{\omega} I_q^* + n_p L_q \rho \omega^* \\
 & + n_p L_q \omega^* \left[ \frac{1}{\Phi_M} \left( -k'_p \tilde{\omega} - k'_i \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt \right) \right] - \alpha_{di} \int_0^t I_d(t) dt + h
 \end{aligned} \quad (III.17)$$

Reescribiendo la ecuación (III.17):

$$\begin{aligned}
 L_d \dot{I}_d = & -(R_s + \alpha_d)I_d + n_p L_q \rho \tilde{\omega} + n_p L_q \tilde{\omega} I_q^* + n_p L_q \rho \omega^* - \frac{n_p L_q \omega^* k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} \\
 & - \frac{n_p L_q \omega^* k'_i}{\Phi_M} \left[ \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt + \frac{1}{k'_i} (b\omega^* + \tau_L) \right] \\
 & - \alpha_{di} \left\{ \int_0^t I_d(t) dt - \frac{1}{\alpha_{di}} \left[ \frac{n_p L_q \omega^*}{\Phi_M} (b\omega^* + \tau_L) \right] \right\} + h
 \end{aligned} \quad (III.18)$$

Definiendo:

$$z_1 = \int_0^t I_d(t) dt - \frac{1}{\alpha_{di}} \left[ \frac{n_p L_q \omega^*}{\Phi_M} (b\omega^* + \tau_L) \right] \quad (III.19)$$

Substituyendo z y z<sub>1</sub> se obtiene:

$$\begin{aligned}
 L_d \dot{I}_d = & -(R_s + \alpha_d)I_d + n_p L_q \tilde{\omega} \rho + n_p L_q \tilde{\omega} I_q^* + n_p L_q \omega^* \rho - \alpha_{di} z_1 - \frac{n_p L_q \omega^* k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} \\
 & - \frac{n_p L_q \omega^* k'_i}{\Phi_M} z + h
 \end{aligned} \quad (III.20)$$

Se define  $\tilde{\gamma}_i = \gamma_i - \hat{\gamma}_i$ , para  $i = 1, \dots, 7$ , en donde:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 = \gamma_2 = & \frac{n_p L_q k'_p (L_d - L_q)}{J \Phi_M} & \gamma_3 = & n_p L_d \\
 \gamma_4 = \gamma_5 = & \beta n_p (L_d - L_q) & \gamma_6 = & \frac{\gamma_4}{k'_i} (b\omega^* + \tau_L) \\
 \gamma_7 = & \frac{\gamma_5}{k'_i} (b\omega^* + \tau_L)
 \end{aligned}$$

Donde  $\beta$  es cualquier escalar positivo, por lo que se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\gamma}}_1 &= -\Gamma_1 I_d \rho^2, & \dot{\hat{\gamma}}_2 &= -\Gamma_2 I_d I_q^* \rho, & \dot{\hat{\gamma}}_3 &= -\Gamma_3 I_d I_q^* \tilde{\omega}, \\
 \dot{\hat{\gamma}}_4 &= -\Gamma_4 I_d \rho \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt, & \dot{\hat{\gamma}}_5 &= -\Gamma_5 I_d I_q^* \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt, & & \\
 \dot{\hat{\gamma}}_6 &= -\Gamma_6 I_d \rho, & \dot{\hat{\gamma}}_7 &= -\Gamma_7 I_d I_q^* & & 
 \end{aligned} \tag{III.21}$$

Agregando y substrayendo los términos correspondientes se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 h &= (\gamma_1 \rho^2 - \hat{\gamma}_1 \rho^2) + (\gamma_2 I_q^* \rho - \hat{\gamma}_2 I_q^* \rho) + (\gamma_3 I_q^* \tilde{\omega} - \hat{\gamma}_3 I_q^* \tilde{\omega}) \\
 &+ \left( \gamma_4 \rho \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \hat{\gamma}_4 \rho \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt \right) \\
 &+ \left( \gamma_5 I_q^* \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \hat{\gamma}_5 I_q^* \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt \right) + (\gamma_6 \rho - \hat{\gamma}_6 \rho) \\
 &+ (\gamma_7 I_q^* - \hat{\gamma}_7 I_q^*) - \gamma_1 \rho^2 - \gamma_2 I_q^* \rho - \gamma_3 I_q^* \tilde{\omega} - \gamma_4 \rho \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt \\
 &- \gamma_5 I_q^* \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \gamma_6 \rho - \gamma_7 I_q^*
 \end{aligned} \tag{III.22}$$

$$\begin{aligned}
 h &= \tilde{\gamma}_1 \rho^2 - \gamma_1 \rho^2 + \tilde{\gamma}_2 I_q^* \rho - \gamma_2 I_q^* \rho + \tilde{\gamma}_3 I_q^* \tilde{\omega} - \gamma_3 I_q^* \tilde{\omega} + \tilde{\gamma}_4 \rho \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt \\
 &- \gamma_4 \rho \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt + \tilde{\gamma}_5 I_q^* \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \gamma_5 I_q^* \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt + \tilde{\gamma}_6 \rho - \gamma_6 \rho \\
 &+ \tilde{\gamma}_7 I_q^* - \gamma_7 I_q^*
 \end{aligned} \tag{III.23}$$

Nótese que:

$$\begin{aligned}
 -\gamma_5 I_q^* \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \gamma_7 I_q^* &= -\gamma_5 I_q^* \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \frac{\gamma_5}{k'_i} (b\omega^* + \tau_L) I_q^* = \\
 &= -\gamma_5 I_q^* \left[ \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt + \frac{1}{k'_i} (b\omega^* + \tau_L) \right] = -\gamma_5 I_q^* z
 \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene la ecuación del error en la dinámica de la corriente  $I_q$ , agregando y substrayendo los términos  $R_s I_q^*$ ,  $n_p L_d \omega^* I_d$ ,  $\Phi_M \omega^*$ ,  $L_q \dot{I}_q^*$  en ambos lados de (III.2) y substituyendo la ecuación (III.5), se obtiene:

$$\begin{aligned} L_q(\dot{I}_q - \dot{I}_q^*) = & -R_s(I_q - I_q^*) - R_s \dot{I}_q^* - n_p L_d(\omega - \omega^*)I_d - n_p L_d \omega^* I_d \\ & - \Phi_M(\omega - \omega^*) - \Phi_M \omega^* - \alpha_{qi} \int_0^t \rho(t) dt - L_q \dot{I}_q^* \end{aligned} \quad (III.24)$$

Reacomodando la expresión y substituyendo la ecuación (III.12):

$$\begin{aligned} L_q \dot{\rho} = & -(R_s + \alpha_{qi})\rho - \frac{R_s k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} - \frac{R_s k'_i}{\Phi_M} \left[ \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt + \frac{1}{k'_i} (b\omega^* + \tau_L) \right] - n_p L_d \tilde{\omega} I_d \\ & - n_p L_d \omega^* I_d - \Phi_M \tilde{\omega} \\ & - \alpha_{qi} \left[ \int_0^t \rho(t) dt + \frac{1}{\alpha_{qi}} \left( \frac{R_s}{\Phi_M} (\tau_L + b\omega^*) + \Phi_M \omega^* \right) \right] + \frac{L_q k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} \\ & + \frac{L_q k'_i}{\Phi_M} \tilde{\omega} \end{aligned} \quad (III.25)$$

Definiendo:

$$z_2 = \int_0^t \rho(t) dt + \frac{1}{\alpha_{qi}} \left( \frac{R_s}{\Phi_M} (\tau_L + b\omega^*) + \Phi_M \omega^* \right) \quad (III.26)$$

Substituyendo  $z$  y  $z_2$  se obtiene:

$$\begin{aligned} L_q \dot{\rho} = & -(R_s + \alpha_{qi})\rho + \frac{R_s k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} + \frac{R_s k'_i}{\Phi_M} z - n_p L_d \tilde{\omega} I_d - n_p L_d \omega^* I_d - \Phi_M \tilde{\omega} \\ & - \alpha_{qi} z_2 + \frac{L_q k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} + \frac{L_q k'_i}{\Phi_M} \tilde{\omega} \end{aligned} \quad (III.27)$$

Definidas las ecuaciones de la dinámica en lazo cerrado dadas por (III.14), (III.15), (III.19), (III.20), (III.21), (III.26), (III.27) cuyo estado está definido como:

$$\xi = (\tilde{\omega}, z, I_d, z_1, \rho, z_2, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_7) \in \mathcal{R}^{13} \quad (III.28)$$

### III.1.2 Equilibrios y Estabilidad del Origen

$$\dot{z} = \dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\omega} = I_d = \rho = 0$$

$$\tilde{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0$$

$$\dot{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_2 = 0$$

Por lo tanto  $\xi = 0$  es siempre un punto de equilibrio de las dinámicas en lazo cerrado. Para estudiar la estabilidad del origen, se propone la siguiente función escalar, esta se define como la función candidata de Lyapunov:

$$V(\xi) = \frac{1}{2}L_q\rho^2 + \frac{1}{2}L_dI_d^2 + \frac{1}{2}J\tilde{\omega}^2 + \frac{1}{2}\alpha_{di}z_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_{qi}z_2^2 + \frac{1}{2}(k'_i + \beta k'_p + b\beta)z^2 + \beta Jz\tilde{\omega} + \sum_{i=1}^7 \frac{1}{2\Gamma_i}\tilde{\gamma}_i^2 \quad (\text{III.29})$$

Nótese que los primeros tres términos representan la “energía magnética” almacenada en las inductancias ( $L_q$ ,  $L_d$ ) y la “energía cinética” de la dinámica mecánica respectivamente, estos son términos cuadráticos por lo tanto son positivos y radialmente desacotados, de igual manera los términos  $\frac{1}{2\Gamma_i}\tilde{\gamma}_i^2$ . Sin embargo, los términos dados por:

$$\frac{1}{2}(k'_i + \beta k'_p + b\beta)z^2 + \beta Jz\tilde{\omega}$$

No es evidente que siempre sean positivos y radialmente desacotados por lo que se reagrupan los términos:

$$\frac{1}{2}J\tilde{\omega}^2 + \frac{1}{2}(k'_i + \beta k'_p + b\beta)z^2 + \beta Jz\tilde{\omega}$$

Reescribiendo en su forma cuadrática matricial se tiene:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\omega} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & \beta J \\ \beta J & k'_i + \beta k'_p + b\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\omega} \\ z \end{bmatrix}$$

Para que la función  $V(\xi)$  sea positiva definida y radialmente desacotada se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\beta k'_p + k'_i + b\beta > J\beta^2 \quad (III.30)$$

$$\alpha_{di} > 0, \quad \alpha_{qi} > 0, \quad \beta > 0, \quad \Gamma_i > 0, i = 1, \dots, 7$$

Calculando la derivada de  $V(\xi)$  a lo largo de las trayectorias de las ecuaciones en lazo cerrado (III.14), (III.15), (III.19), (III.20), (III.21), (III.26), (III.27), vea Anexo I, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) = & -(R_s + \alpha_q)\rho^2 + \frac{R_s k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} \rho + \frac{R_s k'_i}{\Phi_M} z \rho - n_p L_d \omega^* I_d \rho - \frac{L_q k'_p b}{J \Phi_M} \tilde{\omega} \rho \\ & + \frac{L_q k'_p}{J} \rho^2 - \frac{L_q k'_p{}^2}{J \Phi_M} \tilde{\omega} \rho - \frac{L_q k'_p k'_i}{J \Phi_M} \rho z + \frac{L_q k'_i}{\Phi_M} \tilde{\omega} \rho - (R_s + \alpha_d) I_d^2 \\ & + n_p L_d \omega^* \rho I_d - \frac{n_p L_q \omega^* k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} I_d - \frac{n_p L_q \omega^* k'_i}{\Phi_M} z I_d - b \tilde{\omega}^2 - k'_p \tilde{\omega}^2 \\ & + \beta J \tilde{\omega}^2 + \beta \Phi_M \rho z - \beta k'_i z^2 \end{aligned} \quad (III.31)$$

Tomando en cuenta que  $\pm xy \leq |x||y|$ ,  $\forall x, y \in \mathcal{R}$ , la función  $\dot{V}(\xi)$  puede ser acotada por arriba y reescribirse como:

$$\dot{V} \leq -\zeta^T Q \zeta, \quad \zeta = [|\tilde{\omega}|, |z|, |I_d|, |\rho|]^T \quad (III.32)$$

Reescribiendo la ecuación (III.31) como una forma cuadrática matricial se tiene que las entradas de la matriz  $Q$  son:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{41} & \cdots & Q_{44} \end{pmatrix} \quad (III.33)$$

$$Q_{11} = b + k'_p - \beta J,$$

$$Q_{22} = \beta k'_i$$

$$Q_{33} = R_s + \alpha_d,$$

$$Q_{44} = R_s + \alpha_q - \frac{L_q k'_p}{J}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = 0$$

$$Q_{13} = Q_{31} = -\frac{n_p L_q |\omega^*| k'_p}{2\Phi_M}$$

$$Q_{23} = Q_{32} = -\frac{n_p L_q |\omega^*| k'_i}{2\Phi_M}$$

$$Q_{14} = Q_{41} = -\left| \frac{R_s k'_p + L_q k'_i}{2\Phi_M} - \frac{L_q k'_p (b + k'_p)}{2J\Phi_M} \right|$$

$$Q_{24} = Q_{42} = -\left| \frac{R_s k'_i}{2\Phi_M} + \frac{\beta\Phi_M}{2} + \frac{L_q k'_p k'_i}{2J\Phi_M} \right|$$

$$Q_{34} = Q_{43} = -\left| \frac{n_p (L_d - L_q) \omega^*}{2} \right|$$

La matriz es definida positiva si y solo si todos los cuatro menores principales son positivos, es decir:

$$b + k'_p - J\beta > 0, \quad \beta > 0, \quad k'_i > 0, \quad \alpha_d > 0, \quad \alpha_q > 0 \quad (\text{III.34})$$

Además, se requiere que  $\alpha_d$  y  $\alpha_q$  sean suficientemente grandes para que  $Q_{33}$  y  $Q_{44}$  sean positivos, es decir:

$$R_s + \alpha_d > 0 \qquad \alpha_q > \frac{L_q k'_p}{J} - R_s \quad (\text{III.35})$$

Cumpliendo las condiciones establecidas (III.30), (III.34), (III.35) de se asegura que:

$$\lambda_{\min}(Q) > 0$$

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(Q) \tilde{\omega}^2 \leq 0$$

$$\int_0^t \dot{V} dt \leq \int_0^t -\lambda_{\min}(Q) \tilde{\omega}^2 dt$$

$$\int_0^t \frac{dV}{dt} dt = \int_{V(0)}^{V(t)} dV \leq -\lambda_{\min}(Q) \int_0^t \tilde{\omega}^2 dt$$

$$\begin{aligned}
 (V(t) - V(0)) &\leq -\lambda_{\min}(Q) \int_0^t \tilde{\omega}^2 dt \\
 V(0) &\geq V(0) - V(t) \geq \lambda_{\min}(Q) \int_0^t \tilde{\omega}^2 dt \\
 \infty &> \sqrt{\frac{V(0)}{\lambda_{\min}(Q)}} \geq \sqrt{\int_0^t \tilde{\omega}^2 dt} \quad \forall t \geq 0 \\
 \sqrt{\int_0^\infty \tilde{\omega}^2 dt} &= \|\tilde{\omega}\|_{\mathcal{L}_2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\omega} \in \mathcal{L}_2
 \end{aligned}$$

Esto implica que  $\xi \in \mathcal{L}_\infty^{13}$  y que  $\tilde{\omega} \in \mathcal{L}_2$ , además el término de la derecha de la ecuación (III.15) está acotado por lo que  $\dot{\omega} \in \mathcal{L}_\infty$ , por lo tanto utilizando el lema de Barbalat se puede concluir que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(t) = 0$  desde cualquier condición inicial siempre y cuando se cumplan las condiciones dadas por (III.30), (III.34), (III.35), con eso de completa la demostración de la **Proposición 1**.

### Caso del Motor PMSM con Polos No Salientes

Para el caso de motor con polos no salientes se tiene que  $L_d = L_q = L$  por lo que el modelo se simplifica de la siguiente manera:

$$L_d \dot{I}_d = -R_s I_d + n_p L \omega I_q + v_d \quad (\text{III.36})$$

$$L_q \dot{I}_q = -R_s I_q - n_p L \omega I_d - \Phi_M \omega + v_q \quad (\text{III.37})$$

$$J \dot{\omega} = -b \omega + \Phi_M I_q - \tau_L \quad (\text{III.38})$$

Esto implica que  $\gamma_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 4, 5, 6, 7$ , por lo que tiene el siguiente controlador:

$$v_d = -\alpha_d I_d - \alpha_{di} \int_0^t I_d(t) dt + h \quad (\text{III.39})$$

$$v_q = -\alpha_q \rho - \alpha_{qi} \int_0^t \rho(t) dt \quad (III.40)$$

$$I_q^* = \frac{1}{\Phi'_M} \left( -k_p \tilde{\omega} - k_i \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt \right) \quad (III.41)$$

$$h = -\hat{\gamma}_3 I_q^* \tilde{\omega} \quad (III.42)$$

$$\hat{\gamma}_3 = \Gamma_3 I_d I_q^* \tilde{\omega},$$

**Proposición 2:** Dado el controlador definido por las ecuaciones (III.4)-(III.7), se considera la conexión en lazo cerrado de este controlador con las ecuaciones dinámicas de , sea una constante arbitraria positiva. Se propone que siempre existen ganancias positivas  $\alpha_d, \alpha_{di}, \alpha_q, \alpha_{qi}, k_p, k_i$  que aseguran que todo el estado es acotado y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(t) = 0$  desde cualquier condición inicial.

La prueba de esta proposición es exactamente la misma que la de la **Proposición 1** y la condiciones de estabilidad que aseguran el resultado son las mismas dadas por (III.30), (III.34), (III.35). En la matriz  $Q$  solo de deben de reemplazar  $L_d = L_q = L$ .

## III.2 Controladores de Dos Grados de Libertad (2DOF)

De acuerdo a la configuración de lazo cerrado de la Figura III.1 Controlador con dos grados de libertad., los siguientes controladores de dos grados de libertad pueden ser parametrizados como se propone en (Umeno y Hori, 1989a, 1989b, 1991) y (Umeno *et al*, 1993), en donde estos controladores se utilizan para el control robusto de motores de un servo sistema utilizando motores de corriente directa con escobillas.



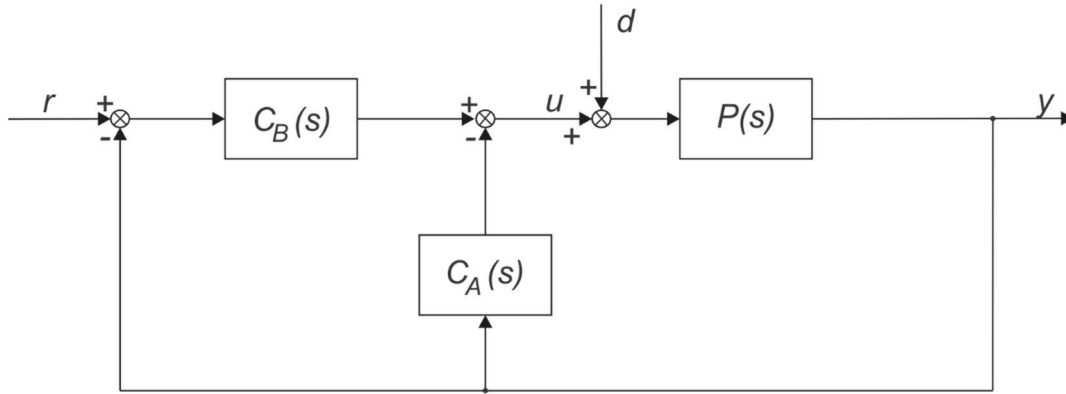


Figura III.1 Controlador con dos grados de libertad.

En donde:

$$C_A(s) = \frac{Q(s)}{P_n(s)(1 - Q(s))} \quad (III.43)$$

$$C_B(s) = \frac{G_{ry}(s)}{(1 - G_{ry}(s))} \left( \frac{1}{P_n(s)(1 - Q(s))} \right) \quad (III.44)$$

Se tiene que  $P(s)$  y  $P_n(s)$  representan respectivamente, la planta actual del sistema y la planta nominal la cual es usada en el diseño del controlador,  $G_{ry}(s)$  es el modelo deseado a la entrada de referencia, finalmente  $Q(s)$  es un filtro el cual determina la robustez y el desempeño de rechazo a perturbaciones.

### III.2.1 Control robusto de velocidad en motores de DC

De acuerdo con la metodología presentada en (Umeno y Hori, 1989a, 1989b, 1991) y (Umeno *et al*, 1993), cuando  $Q(s)$  es diseñada como un filtro “Butterworth” de segundo orden y con  $P_n(s)$  y  $G_{ry}(s)$  como:

$$P_n(s) = \frac{1}{J_n s + B_n} \quad G_{ry}(s) = \frac{1}{\tau_r s + 1} \quad (III.45)$$

El controlador resultante queda como:

$$C_A(s) = \frac{J_n \left[ 1.41^2 \tau_1 s^2 + \left( 1 + \frac{B_n}{J_n} 1.41^2 \tau_1 \right) s + \frac{B_n}{J_n} \right]}{1.41^2 \tau_1^2 s^2} \quad (\text{III.46})$$

$$C_B(s) = \frac{J_n \left[ 1.41^2 \tau_1^2 s^3 + \left( 1.41^2 \tau_1 + \frac{B_n}{J_n} 1.41^2 \tau_1^2 \right) s^2 + \left( 1 + \frac{B_n}{J_n} 1.41^2 \tau_1 \right) s + \frac{B_n}{J_n} \right]}{1.41^2 \tau_r \tau_1^2 s^3} \quad (\text{III.47})$$

En donde  $J_n > 0$  y  $B_n > 0$  representan la inercia nominal del motor y el coeficiente de fricción viscosa respectivamente,  $\tau_r$  representa la constante de tiempo del sistema en lazo cerrado del sistema y  $\tau_1$  es el parámetro fundamental del filtro  $Q(s)$  es cual tiene que ser escogido para garantizar la robustez deseada y el desempeño de rechazo a perturbaciones. Se remarca que la planta dada por  $P_n(s)$  la entrada del sistema  $U(s)$  es la entrada de par del sistema, por lo que desprecia la dinámica eléctrica.

### III.2.2 Control robusto de posición en motores de DC

De acuerdo con la metodología presentada en (Umeno y Hori, 1989a, 1989b, 1991) y (Umeno *et al*, 1993), cuando el  $Q(s)$  filtro es diseñado como un filtro binomial de cuarto orden y se considera la siguiente planta nominal de diseño se tiene que:

$$P_n(s) = \frac{1}{J_n s} \quad G_{ry}(s) = \frac{1}{\tau_r^2 s^2 + 2\zeta \tau_r s + 1} \quad (\text{III.48})$$

El controlador resultante queda como:

$$C_A(s) = \frac{J_n [6\tau_4^2 s^2 + 4\tau_4 s + 1]}{[\tau_4^4 s + 4\tau_4^3] s} \quad (\text{III.49})$$

$$C_B(s) = \frac{J_n [\tau_4^4 s^4 + 4\tau_4^3 s^3 + 6\tau_4^2 s^2 + 4\tau_4 s + 1]}{[\tau_4^4 \tau_r^2 s^2 + (4\tau_4^3 \tau_r^2 + 2\tau_4^4 \tau_r \zeta) s + 8\tau_4^3 \tau_r \zeta] s^2} \quad (\text{III.50})$$

En donde  $\tau_r > 0$  y  $\zeta > 0$  representan la constante de tiempo deseada del sistema en lazo cerrado y el factor de amortiguamiento, respectivamente  $\tau_4 = 1.41\tau_3$  con  $\tau_3 > 0$  representa el parámetro fundamental del filtro  $Q(s)$  la cual debe ser elegida para garantizar la robustez deseada y el desempeño al rechazo a perturbaciones. Nótese que la fricción viscosa es despreciada y de la misma manera la entrada de la planta  $U(s)$  es considerada como el par.

### III.3 Control Robusto de Velocidad utilizando un Controlador de Dos Grados de Libertad

Siguiendo la configuración de la dinámica en lazo cerrado de la Figura III.1, la definición de  $R(s) = W_d(s) = \omega_d/s$  con  $\omega_d$  constante,  $Y(s) = \omega(s)$ , realizando cancelaciones de potencias de  $s$  y aplicando transformada inversa de Laplace, nos encontramos el controlador de velocidad robusto en (III.46) y (III.47) se puede escribir así:

$$\begin{aligned}
 u = & k_p \tilde{\omega} + k_i \int_0^t \tilde{\omega}(r) dr + k_{ii} \int_0^t \int_0^r \tilde{\omega}(\sigma) d\sigma dr + k_{iii} \int_0^t \int_0^r \int_0^\sigma \tilde{\omega}(v) dv d\sigma dr - k_{pA} \omega \\
 & - k_{iA} \int_0^t \omega(r) dr - k_{iiA} \int_0^t \int_0^r \omega(\sigma) d\sigma dr
 \end{aligned} \tag{III.51}$$

$$\begin{aligned}
 k_p = \frac{J_n}{\tau_r}, \quad k_i = \frac{J_n(1.41^2\tau_1 + \frac{B_n}{J_n}1.41^2\tau_1^2)}{1.41^2\tau_1^2\tau_r}, \quad k_{ii} = \frac{J_n(1 + \frac{B_n}{J_n}1.41^2\tau_1)}{1.41^2\tau_1^2\tau_r} \\
 k_{iii} = \frac{B_n}{1.41^2\tau_1^2\tau_r}, \quad k_{pA} = \frac{J_n}{\tau_1}, \quad k_{iA} = \frac{J_n(1 + \frac{B_n}{J_n}1.41^2\tau_1)}{1.41^2\tau_1^2}, \quad k_{iiA} = \frac{B_n}{1.41^2\tau_1^2}
 \end{aligned}$$

Donde  $\tilde{\omega} = \omega_d - \omega$ . No es difícil verificar que la siguiente expresión es equivalente:

$$u = (k_p + k_{pA})\tilde{\omega} + (k_i + k_{iA})z_1 + (k_{ii} + k_{iiA})z_2 + k_{iii}z_3 + T_L + \omega_d b \tag{III.52}$$

$$z_1 = \int_0^t \tilde{\omega}(r) dr - \omega_d \frac{\alpha_1 k_{pA}}{k_i + k_{iA}}$$

$$z_2 = \int_0^t \left[ \int_0^r \tilde{\omega}(\sigma) d\sigma - \omega_d \frac{\beta_2 k_{iA}}{k_{ii} + k_{iiA}} \right] dr - \omega_d \frac{\alpha_2 k_{pA}}{k_{ii} + k_{iiA}}$$

$$z_3 = \int_0^t \left\{ \int_0^r \left[ \int_0^\sigma \tilde{\omega}(v) dv - \omega_d \frac{k_{iiA}}{k_{iii}} \right] d\sigma - \omega_d \frac{\beta_1 k_{iA}}{k_{iii}} \right\} dr - \frac{\omega_d b + T_L}{k_{iii}} - \omega_d \frac{\alpha_3 k_{pA}}{k_{iii}}$$

Donde  $\alpha_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_1$ , son constantes reales tales que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$  y  $\beta_1 + \beta_2 = 1$ . Además, podemos escribir:

$$\dot{z}_1 = \tilde{\omega}, \quad \dot{z}_2 = z_1, \quad \dot{z}_3 = z_2 \quad (\text{III.53})$$

Si:

$$\frac{\alpha_1 k_{pA}}{k_i + k_{iA}} = \frac{k_{iiA}}{k_{iii}} = \frac{\beta_2 k_{iA}}{k_{ii} + k_{iiA}} \quad \frac{\alpha_2 k_{pA}}{k_{ii} + k_{iiA}} = \frac{\beta_1 k_{iA}}{k_{iii}} \quad (\text{III.54})$$

Por lo tanto, las constantes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  tienen que ser elegidas con el fin de que satisfaga estas condiciones. Ahora, considere el siguiente controlador:

$$v_d = -r_d I_d - n_p L_q \omega I_q \quad (\text{III.55})$$

$$v_q = -r_q (I_q - I_q^*) - R_{qi} \int_0^t (I_q(r) - I_q^*(r)) dr \quad (\text{III.56})$$

$$I_q^* = \frac{u}{\Phi_M} \quad (\text{III.57})$$

En donde  $r_d$ ,  $r_q$ ,  $R_{qi}$  son constantes escalares positivas y  $u$  es definida en (III.51), nótese que  $u$  es equivalente a (III.64). Agregando y substrayendo los siguientes términos  $\omega_d b$ ,  $n_p(L_d - L_q)I_d I_q^*$ ,  $\Phi_M I_q^*$  en la expresión (III.3), utilizando (III.56), definiendo  $\rho = I_q - I_q^*$  y utilizando el hecho que  $\dot{\omega}_d = 0$ , se puede escribir que:

$$\begin{aligned}
 J\dot{\tilde{\omega}} = & -(k_p + k_{pA} + b)\tilde{\omega} - (k_i + k_{iA})z_1 - (k_{ii} + k_{iiA})z_2 - k_{iii}z_3 \\
 & -n_p(L_d - L_q)I_d\rho - n_p(L_d - L_q)I_dI_q^* - \Phi_M\rho
 \end{aligned} \tag{III.58}$$

Por otro lado, reemplazando (III.56) en (III.2), agregando y substrayendo los siguientes términos  $L_qI_q^*$ ,  $R_sI_q^*$ ,  $\Phi_M\omega_d$ ,  $n_pL_d\omega_dI_d$ , se puede escribir que:

$$\begin{aligned}
 L_q\dot{\rho} = & -R_q\rho + n_pL_d\tilde{\omega}I_d - n_pL_d\omega_dI_d + \Phi_M\tilde{\omega} \\
 & - \frac{L_q}{\Phi_M} [(k_p + k_{pA})\dot{\tilde{\omega}} + (k_i + k_{iA})\tilde{\omega} + (k_{ii} + k_{iiA})z_1 + k_{iii}z_2] \\
 & - \frac{R_s}{\Phi_M} [(k_p + k_{pA})\tilde{\omega} + (k_i + k_{iA})z_1 + (k_{ii} + k_{iiA})z_2 + k_{iii}z_3] \\
 & - R_{qi}\xi
 \end{aligned} \tag{III.59}$$

$$\xi = \int_0^t \rho(r)dr + \frac{\Phi_M\omega_d}{R_{qi}} + \frac{R_s(b\omega_d + T_L)}{\Phi_MR_{qi}} \tag{III.60}$$

En donde:

$$R_q = r_q + R_s$$

Finalmente, reemplazando (III.55) en (III.1) se tiene:

$$L_d\dot{I}_d = -(R_s + r_d)I_d \tag{III.61}$$

Dado que las dinámicas en lazo cerrado del sistema están dadas por (III.53), (III.58), (III.59), (III.60) y (III.61), note que (III.61) implica que:

$$|I_d(t)| = |I_d(0)|e^{-\lambda t}, \forall t \geq 0 \tag{III.62}$$

En donde:

$$\lambda = \frac{(R_s + r_d)}{L_d} > 0 \quad R_s + r_d > 0 \quad (III.63)$$

Por lo tanto, definiendo estas condiciones, se puede solo estudiar la estabilidad de las dinámicas dadas por (III.53), (III.58), (III.59) y (III.60) bajo la condición (III.62). Definiendo la dinámica de los estados como:

$$x = [z_3, z_2, z_1, \tilde{\omega}, \xi, \rho] \quad (III.64)$$

Dados los estados, se reescriben las ecuaciones (III.53), (III.58), (III.59) y (III.60) como:

$$\dot{x} = A_1 x + A_2(x) I_d + A_3 I_d + A_4 x \quad (III.65)$$

Donde  $A_3 \in R^6$  es un vector constante,  $A_2(x) \in R^6$  satisface  $\|A_2(x)\| \leq k_2 \|x\|$  para alguna constante finita escalar positiva  $k_2$ , las entradas de la matriz  $A_1$  son cero excepto por:

$$A_1(4,1) = -k_{iii}/J, \quad A_1(4,2) = -(k_{ii} + k_{iiA})/J, \quad A_1(4,3) = -(k_i + k_{iA})/J \quad (III.66)$$

$$A_1(4,4) = -(k_p + k_{pA} + b)/J, \quad A_1(4,6) = -\Phi_M/J$$

$$A_1(6,1) = ((k_p + k_{pA})/J - R_s/L_q)k_{iii}/\Phi_M$$

$$A_1(6,2) = [((k_p + k_{pA})/J - R_s/L_q)(k_{ii} + k_{iiA}) - k_{iii}]/\Phi_M$$

$$A_1(6,3) = [((k_p + k_{pA})/J - R_s/L_q)(k_i + k_{iA}) - (k_{ii} + k_{iiA})]/\Phi_M$$

$$A_1(6,4) = [((k_p + k_{pA})(k_p + k_{pA} + b)/J - R_s(k_p + k_{pA})/L_q) - (k_i + k_{iA})]/\Phi_M \\ + \Phi_M/L_q$$

$$A_1(6,5) = -R_{qi}/L_q \quad A_1(6,6) = (k_p + k_{pA})/J - R_q/L_q$$

$$A_1(1,2) = A_1(2,3) = A_1(3,4) = A_1(5,6) = 1$$

A pesar de que la matriz  $A_4$  de  $6 \times 6$  es la matriz cero, en el siguiente análisis se considera una matriz diferente de cero debido a que esta suposición será útil más adelante. Por lo que resolviendo (III.65) se tiene que:

$$x(t) = e^{A_1 t} x(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} [A_2(x(\tau))I_d(\tau) + A_3 I_d(\tau) + A_4 x(\tau)] d\tau \quad (\text{III.67})$$

Asumiendo que la matriz  $A_1$  es Hurwitz tenemos que  $\|e^{A_1 t}\| \leq \gamma_1 e^{-\lambda_1 t}$  para algunos positivos escalares  $\gamma_1, \lambda_1$ . Por lo tanto, la norma Ecludiana en ambos lados, usando (III.62) y  $\|A_2(x)\| \leq k_2 \|x\|$ , y por integración directa del término  $\int_0^t \gamma_1 e^{A_1(t-\tau)} \|A_3\| |I_d(\tau)| d\tau$  se tiene:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| e^{\lambda_1 t} &\leq \gamma_1 \|x(0)\| + \frac{\gamma_1 \|A_3\|}{\lambda - \lambda_1} |I_d(0)| (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda t}) e^{\lambda_1 t} \\ &\quad + \int_0^t \gamma_1 [\|A_4\| + k_2 |I_d(0)| e^{-\lambda \tau}] \|x(\tau)\| e^{\lambda_1 \tau} d\tau \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Gronwall-Bellman se tiene:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \gamma_1 \|x(0)\| e^{-\lambda t} + \frac{\gamma_1 \|A_3\|}{\lambda - \lambda_1} |I_d(0)| (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda t}) \\ &\quad + B(t) e^{-(\lambda_1 - \gamma_1 \|A_4\|)t} e^{\gamma_1 k_2 |I_d(0)| / \lambda} \end{aligned} \quad (\text{III.68})$$

$$B(t) = \frac{\gamma_1^2 k_2 \|x(0)\| |I_d(0)|}{-(\lambda + \gamma_1 \|A_4\|)} (e^{-(\lambda + \gamma_1 \|A_4\|)t} - 1) - \gamma_1 \|x(0)\| (e^{-\gamma_1 \|A_4\| t} - 1)$$

$$- \frac{\gamma_1^2 \|A_3\| k_2 |I_d(0)|^2}{\lambda - \lambda_1} \left( \frac{e^{-(\lambda + \gamma_1 \|A_4\|)t} - 1}{\lambda + \gamma_1 \|A_4\|} - \frac{e^{-(2\lambda + \gamma_1 \|A_4\| - \lambda_1)t} - 1}{2\lambda + \gamma_1 \|A_4\| - \lambda_1} \right)$$

$$- \frac{\gamma_1^2 \|A_3\| \|A_4\| |I_d(0)|}{\lambda - \lambda_1} \left( \frac{e^{-\gamma_1 \|A_4\| t} - 1}{\gamma_1 \|A_4\|} - \frac{e^{-(\lambda + \gamma_1 \|A_4\| - \lambda_1)t} - 1}{\lambda + \gamma_1 \|A_4\| - \lambda_1} \right)$$

Nótese que  $\frac{1}{\lambda - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda t}) > 0$ , para todo  $t > 0, \lambda > 0, \lambda_1 > 0$  y converge exponencialmente a cero conforme el tiempo crece. Revisando el procedimiento obtenido en (III.68) podemos verificar que  $B(t) > 0$ , para todo  $t \geq 0$ , porque  $\frac{1}{\lambda - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda t}) > 0$ . De (III.68), podemos concluir que  $x(t)$  converge global y exponencialmente a cero si  $\lambda > 0$  y  $\lambda_1 >$

$\gamma_1 \|A_4\|$ . Recordando en el caso de las dinámicas de (III.53), (III.58), (III.59) y (III.60) se tiene que  $\|A_4\| = 0$  y, por lo tanto, la condición previa para la convergencia global y exponencial de  $x(t)$  a cero se simplifica a  $\lambda > 0$  y  $\lambda_1 > 0$ . Esto completa la demostración de la siguiente proposición.

**Proposición 1.** Considere el modelo dinámico (III.1)-(III.3) en lazo cerrado con controlador (III.52), (III.55), (III.56) y (III.57). Todo el estado del sistema en lazo cerrado, es decir  $x = [z_3, z_2, z_1, \tilde{\omega}, \xi, \rho]^T$  y  $I_d$ , convergen global y exponencialmente a cero si la matriz  $A_1$ , definida en (24) es Hurwitz,  $R_s + r_d > 0$  y la condición en (III.66) son satisfechas.

**Observación 1.** No es difícil verificar que, utilizando (III.51):

$$\frac{k_{iiA}}{k_{iii}} = \tau_r \approx \frac{k_{iA}}{k_{ii} + k_{iiA}} = \frac{J_n(1 + \frac{B_n}{J_n} 1.41^2 \tau_1)}{\frac{J_n(1 + \frac{B_n}{J_n} 1.41^2 \tau_1)}{\tau_r} + B_n}$$

Si  $B_n$  es pequeña, que es común en la práctica. Debido a eso, se puede decir que la primera condición en (15) se satisface mediante  $\beta_2 > 1$  cercano a la unidad a causa de que  $\beta_1 + \beta_2 = 1$ , la segunda condición en (III.54) se satisface usando  $\beta_1 < 0$  y  $\alpha_2 < 0$ . Por lo tanto, tenemos que elegir un  $\alpha_1 > 0$  (posiblemente grande) que satisfaga la primera condición en (III.54) que requiere una constante real  $\alpha_3$  (posiblemente negativa) que satisfaga  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ . Es de resaltar que una vez se evalúan que ambas condiciones en (III.54), todas las constantes  $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  son exactamente conocidas.



### III.4 Control Robusto de Posición utilizando un Controlador de Dos Grados de Libertad

Para el desarrollo del controlador robusto de posición se utiliza el modelo DQ estándar en donde la carga mecánica depende de la posición, se tiene el siguiente modelo:

$$L_d \dot{I}_d = -R_s I_d + n_p L_q \omega I_q + v_d \quad (III.69)$$

$$L_q \dot{I}_q = -R_s I_q - n_p L_d \omega I_d - \Phi_M \omega + v_q \quad (III.70)$$

$$J \ddot{\theta} + b \omega + g(\theta) = n_p (L_d - L_q) I_q I_d + \Phi_M I_q - \tau_L \quad (III.71)$$

En donde  $\theta$  representa la posición del rotor y se asume que el termino  $g(\theta) = \frac{dU(\theta)}{d\theta}$ , en donde  $U(\theta)$  es alguna función escalar que es continuamente diferenciable y  $g(\theta)$  satisface la condición de Lipschitz  $|g(x) - g(w)| \leq k_g |x - w|$ , para todo  $x, w \in \mathcal{R}$  y algún escalar positivo  $k_g$ . Note que la expresión en (III.49) y (III.50) pueden reescribirse como:

$$C_B(s) = \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2} \quad C_A(s) = \frac{d_2 s^2 + d_1 s + d_0}{s^2 + e_1 s} \quad (III.72)$$

$$b_4 = \frac{J_n}{\tau_r^2} \quad b_3 = \frac{4J_n}{\tau_4 \tau_r^2} \quad b_2 = \frac{6J_n}{\tau_4^2 \tau_r^2} \quad b_1 = \frac{4J_n}{\tau_4^3 \tau_r^2} \quad b_0 = \frac{J_n}{\tau_4^4 \tau_r^2}$$

$$a_3 = \frac{4\tau_4^3 \tau_r^2 + 2\tau_4^4 \tau_r \zeta}{\tau_4^4 \tau_r^2} \quad a_2 = \frac{8\zeta}{\tau_4 \tau_r} \quad d_2 = \frac{6J_n}{\tau_4^2} \quad d_1 = \frac{4J_n}{\tau_4^3}$$

$$e_1 = \frac{4}{\tau_4} \quad D_0 = \frac{J_n}{\tau_4^4}$$

Definiendo  $R(s) = \Theta_d(s) = \theta_d/s$  con  $\theta_d$  constante,  $Y(s) = \theta(s)$ ,  $\tilde{\theta} = \theta_d - \theta$ , añadiendo y restando términos  $C_a(s)\Theta_d(s)$ , y realizando las divisiones indicadas en (26), nos encontramos con la realización del controlador como:

$$u = b_4 \tilde{\theta} + v_1 + d_2 \tilde{\theta} + v_2 + d_2 \theta_d + v_3 \quad (III.73)$$

$$\dot{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\theta}, \quad v_1 = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3] \omega$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e_1 \end{bmatrix} \bar{\omega} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\theta}, \quad v_2 = [f_0 \quad f_1] \bar{\omega},$$

$$v_3 = G_0 e^{-e_1 t} + G_1 t + G_2 \quad \bar{\omega} = [\bar{\omega}_1 \quad \bar{\omega}_2]^T, \quad \omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4]^T$$

$$c_3 = b_3 - a_3 b_4, \quad c_2 = b_2 - a_2 b_4, \quad c_1 = b_1, \quad c_0 = b_0$$

$$f_1 = d_1 - e_1 d_2, \quad f_0 = d_0,$$

Donde  $G_0, G_1, G_2$  son constantes reales. No es difícil comprobar que la siguiente expresión es equivalente:

$$u = b_4 \tilde{\theta} + c_0 y_2 + c_1 y_1 + c_2 \omega_3 + c_2 \omega_4 + d_2 \tilde{\theta} + f_1 \bar{\omega}_2 + G_0 e^{-e_1 t} + g(\theta_d) \quad (III.74)$$

$$y_1 = \int_0^t \omega_3(r) dr + \frac{\alpha_4 d_2 \theta_d}{c_1} = \int_0^t \omega_3(r) dr + \frac{G_1}{c_0}, \quad (III.75)$$

$$y_2 = \int_0^t \left[ \int_0^r \omega_3(\sigma) d\sigma + \frac{f_0}{c_0} \bar{\omega}_2(r) + \frac{G_1}{c_0} \right] dr + \frac{\alpha_5 d_2 \theta_d}{c_0} - \frac{g(\theta_d)}{c_0} + \frac{G_2}{c_0}, \quad (III.76)$$

Teniendo en cuenta que (III.76) es siempre verdadera ya que existen dos constantes reales  $\alpha_4$  y  $\alpha_5$  de tal forma que  $\frac{\alpha_4 d_2 \theta_d}{c_1} = \frac{G_1}{c_0}$  y  $\alpha_4 + \alpha_5 = 1$ , sin requerir conocer a  $G_1$ . Se puede escribir:

$$\dot{y}_1 = \omega_3, \quad \dot{y}_2 = y_1 + \frac{f_0}{c_0} \bar{\omega}_2 \quad (III.77)$$

Ahora, considerando el siguiente controlador:

$$v_d = -r_d I_d - n_p L_q \dot{\theta} I_q, \quad (III.78)$$

$$v_q = -r_q (I_q - I_q^*) - R_{qi} \int_0^t (I_q(r) - I_q^*(r)) dr, \quad I_q^* = \frac{u}{\Phi_M} \quad (III.79)$$

Donde  $r_d$ ,  $r_q$ ,  $R_{qi}$  son escalares constantes positivas y  $u$  es definida en (III.73), es decir  $u$  es equivalente a (III.74). Sumando y restando términos  $n_p(L_d - L_q)I_d I_q^*$ ,  $\Phi_M I_q^*$ , usando la segunda expresión en (III.79) y definiendo  $\rho = I_q - I_q^*$ , se puede escribir (III.3) como:

$$J\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} + n_p(L_d - L_q)I_d\rho + n_p(L_d - L_q)I_d I_q^* + \Phi_M\rho + b_4\ddot{\theta} + c_0y_2 + c_1y_1 + c_2\omega_3 + c_3\omega_4 + d_2\ddot{\theta} + f_1\ddot{\omega}_2 + G_0e^{-e_1t} - g(\theta) + g(\theta_d) \quad (\text{III.80})$$

Se debe utilizar con la ecuación (III.77). Por otra parte, reemplazando (III.79), es decir  $v_q$ , en (III.2), sumando y restando términos  $L_q\dot{I}_q^*$ ,  $R_s I_q^*$ , y usando la segunda expresión de (III.79), encontremos:

$$\begin{aligned} L_q\dot{\rho} = & -R_q\rho - n_pL_d\dot{\theta}I_d - \Phi_M\dot{\theta} \\ & - \frac{L_q}{\Phi_M} \left[ -b_4\ddot{\theta} + c_0\dot{y}_2 + c_1\dot{y}_1 + c_2\dot{\omega}_3 + c_3\dot{\omega}_4 + d_2\ddot{\theta} + f_1\ddot{\omega}_2 \right. \\ & \left. - G_0e_1e^{-e_1t} \right] \\ & - \frac{R_s}{\Phi_M} \left[ -b_4\ddot{\theta} + c_0y_2 + c_1y_1 + c_2\omega_3 + c_3\omega_4 + d_2\ddot{\theta} + f_1\ddot{\omega}_2 \right. \\ & \left. - G_0e^{-e_1t} \right] - R_{qi}\bar{\xi} \end{aligned} \quad (\text{III.81})$$

$$\bar{\xi} = \int_0^t \rho(r)dr + \frac{R_s g(\theta_d)}{\Phi_M R_{qi}} \quad (\text{III.82})$$

Donde  $R_q = r_q + R_s$ . Finalmente, reemplazando (III.78) en (III.1) nos encontramos con que  $I_d$  como se muestra en (III.62), si  $R_s + r_d > 0$ . Por lo tanto, la dinámica de lazo cerrado está dada por (III.77), (III.80), (III.82), (III.83) y (III.83):

$$\dot{\bar{\omega}}_2 = -e_1\bar{\omega}_2 + \bar{\theta} \quad \dot{\omega}_3 = \omega_4 \quad \dot{\omega}_4 = -a_2\omega_3 - a_3\omega_4 + \bar{\theta} \quad (\text{III.83})$$

Bajo la condición (III.62). Definiendo el estado de esta dinámica como  $\bar{x} = [\bar{\omega}_2, y_2, y_1, \omega_3, \omega_4, \bar{\theta}, \dot{\theta}, \bar{\xi}, \rho]^T$ . Se puede escribir (III.77), (III.80), (III.82), (III.83) y (III.83), como:

$$\dot{\bar{x}} = A_5 \bar{x} + A_6(\bar{x})I_d + A_7 I_d + A_8(t) + A_9(g(\theta) - g(\theta_d)) \quad (\text{III.84})$$

Donde todas las entradas del vector  $A_7 \in R^9$  están acotadas,  $A_6(\bar{x}) \in R^9$  satisface  $\|A_6(\bar{x})\| \leq k_3 \|\bar{x}\|$  para algunas constantes escalares positivas finitas  $k_3$ , todas las entradas al vector  $A_8(t) \in R^9$  convergen exponencialmente a cero y  $A_9 \in R^9$  es tal que  $\|A_9\| = 1$ , es decir, de acuerdo con la propiedad de Lipschitz  $g(\cdot)$  y el hecho de que  $|\tilde{\theta}| \leq \|\bar{x}\|$ , podemos escribir  $\|A_9(g(\theta) - g(\theta_d))\| \leq k_g \|\bar{x}\|$ . Finalmente, las entradas de la matriz  $A_5$  son cero excepto:

$$\begin{aligned} A_5(1,1) &= -e_1, & A_5(2,1) &= f_0/c_0, & A_5(5,4) &= -a_2, & A_5(5,5) &= -a_3 \\ A_5(1,6) &= A_5(2,3) = A_5(3,4) = A_5(4,5) = A_5(5,6) = A_5(8,9) = 1 = -A_5(6,7), \\ A_5(7,1) &= f_1/J, & A_5(7,2) &= c_0/J, & A_5(7,3) &= c_1/J, & A_5(7,4) &= c_2/J, \\ A_5(7,5) &= c_3/J, & A_5(7,6) &= (b_4 + d_2)/J, & A_5(7,9) &= \Phi_M/J, \\ A_5(9,1) &= (-R_s f_1/L_q - f_0 + f_1 e_1)/\Phi_M, & A_5(9,2) &= (-R_s c_0/L_q \Phi_M), \\ A_5(9,3) &= (-R_s c_1/L_q - c_0)/\Phi_M, & A_5(9,4) &= (-R_s c_2/L_q - c_1 + a_2 c_3)/\Phi_M, \\ A_5(9,5) &= (-R_s c_3/L_q - c_2 + a_3 c_3)/\Phi_M, \\ A_5(9,6) &= (-R_s (b_4 + d_2)/L_q - c_3 - f_1)/\Phi_M, \\ A_5(9,7) &= (-\Phi_M/L_q + b_4 + d_2)/\Phi_M, \\ A_5(9,8) &= -R_{qi}/L_q, & A_5(9,9) &= -R_q/L_q, \end{aligned} \quad (\text{III.85})$$

Asignando  $\|A_4\| = k_g$  en este caso, se puede proceder de manera similar a la ecuación (III.84) en la sección 4, es decir, resolviendo (III.84) y aplicando la desigualdad de Gronwall-Bellman, se puede concluir que  $\bar{x}(t)$  converge global y exponencialmente a cero si  $\lambda > 0$  (Mirar(III.62)) y  $\lambda_1 > \gamma_1 k_g > 0$ , donde  $\|e^{A_5 t}\| \leq \gamma_1 e^{-\lambda_1 t}$ . Esto completa la demostración de la siguiente preposición.

**Preposición 2.** Considerando el modelo dinámico (III.69)-(III.71) en lazo cerrado con controlador (III.78) y (III.79). Todo el estado del sistema en lazo cerrado, es decir,  $\bar{x}$  y  $I_d$ , converge global y exponencialmente a cero si  $R_s + r_d > 0$  y la matriz  $A_5$  definida en (III.85) es Hurwitz cumpliendo que  $\lambda_1 > \gamma_1 k_g > 0$ , donde  $\|e^{A_5 t}\| \leq \gamma_1 e^{-\lambda_1 t}$ .

### III.5 Plataforma de Pruebas

En la Figura III.2 se muestra el diagrama a bloques del banco de pruebas experimentales. El cual contiene un motor PMSM modelo Stun EMJ-04APB22, vea Tabla III.1 con los parámetros nominales los cuales fueron identificados experimentalmente. El banco incluye un motor sin escobillas (BLDC) marca Hurst DMA020402B101 es cual esta acoplado de manera rígida a la flecha del motor PMSM y es utilizado para aplicar perturbaciones externas de par, además el acoplamiento incluye una masa para incrementar la inercia de todo el sistema, véase Tabla III.2 con los parámetros del banco de pruebas.

**Tabla III.1 Valores nominales del motor PMSM Stun EMJ-04APB22**

Variable	Valor
Potencia nominal	400 W
Corriente nominal de fase	2.7 A <sub>rms</sub>
Tensión nominal de fase	200 V <sub>rms</sub>
Velocidad nominal	3000 rpm
Par nominal	1.27 N·m
Resolución del encoder	10000 pulsos/rev
Numero de pares de polos ( $n_p$ )	4
Resistencia del estator ( $R_s$ )	2.7 $\Omega$
Inductancia del estator ( $L = L_d = L_q$ )	8.5 mH
Constante de par ( $\Phi_M$ )	0.301 N·m /A
Constante de fuera contra electromotriz ( $k_e$ )	0.0615Wb
Inercia nominal ( $J$ )	31.69e <sup>-6</sup> kg·m <sup>2</sup>
Constante de fricción viscosa nominal ( $b$ )	52.79e <sup>-6</sup> N·m·s/rad
Fricción estática nominal ( $c$ )	0.0289 N·m

Tabla III.2 Valores del banco de pruebas

Variable	Valor	Valor
Inercia total ( $J_T$ )	$167.1e^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$5.2 \text{ J}$
Fricción viscosa total ( $b_T$ )	$106.9e^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$	$2b$
Fricción estática total ( $c_T$ )	$0.0384 \text{ N}\cdot\text{m}$	$1.32c$

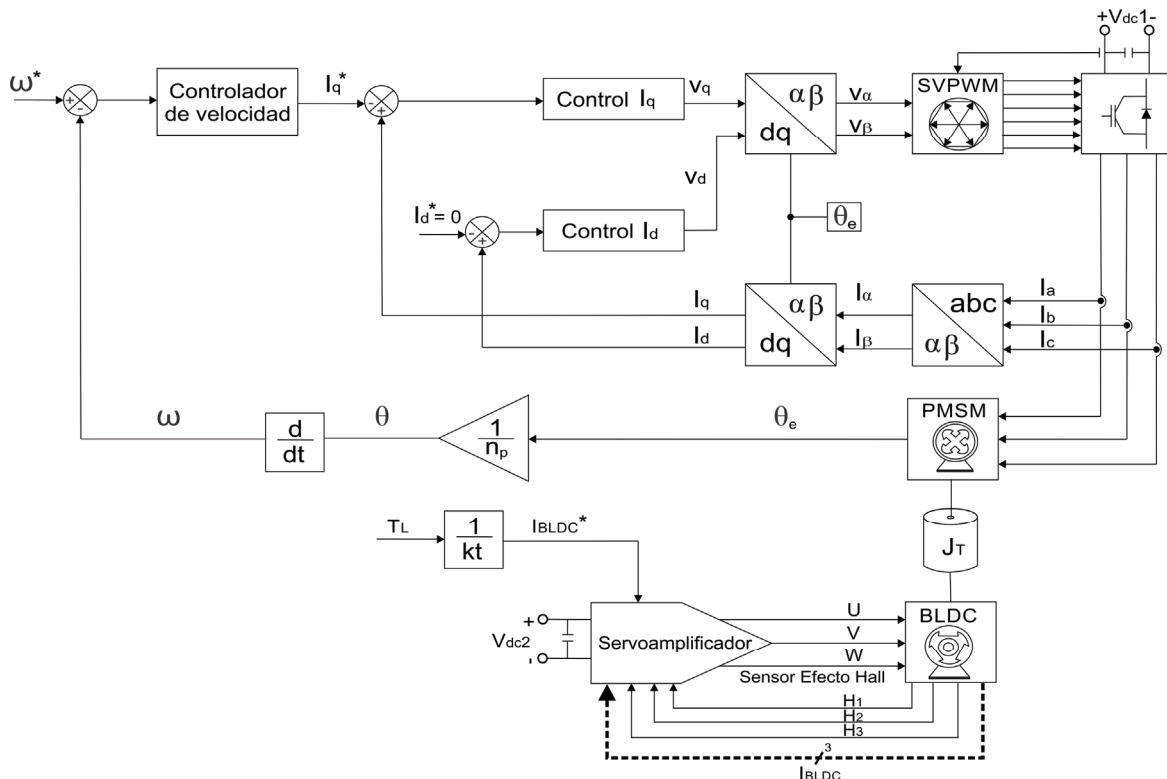


Figura III.2 Diagrama a bloques de la plataforma de pruebas.

La corriente del motor BLDC es controlada utilizando un servoamplificador externo modelo B15A8 de Advanced Motion Controls, el cual recibe una señal analógica +/-10V, la cual fue debidamente calibrada para producir un par proporcional +/- 0.25Nm. Este servoamplificador fue alimentado con una fuente de 48V que incluye un sistema de resistencia de frenado dinámico, para protegerla de sobre tensión debido a que el motor BLDC actúa como generador la mayor parte del tiempo.

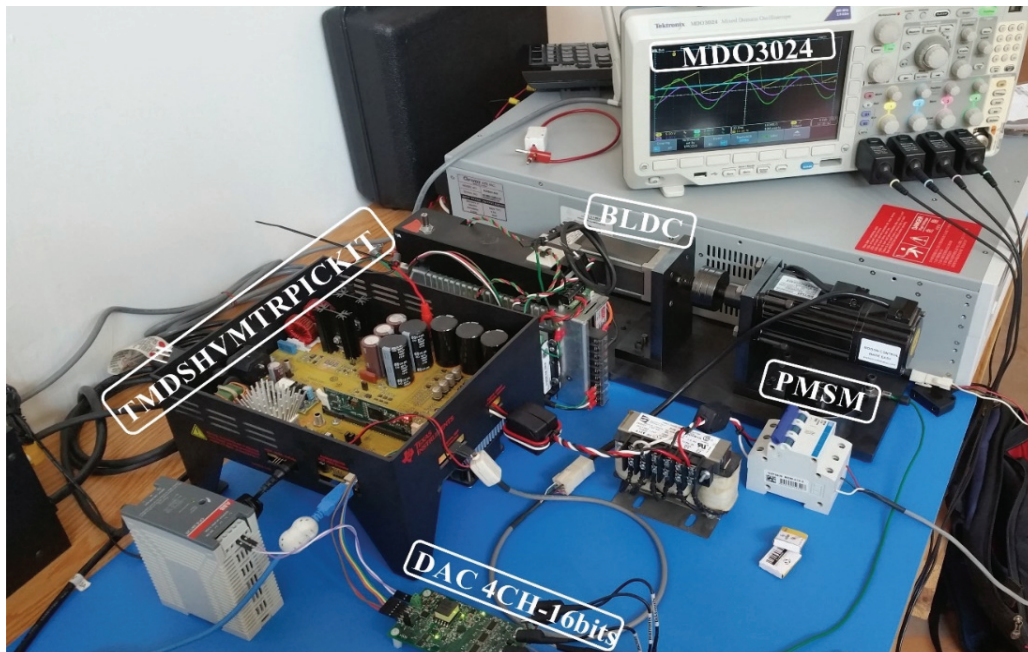
Los controladores probados fueron implementados en el kit de desarrollo de Texas Instruments modelo TMDSHVMTRPFCKIT, el cual incluye un microcontrolador

TMS320F28335, el cual es un controlador digital de señales que puede operar hasta 150MHz e incluye una unidad de aritmética de punto flotante de precisión simple (32-bits), vea Tabla III.3 con las principales características.

**Tabla III.3 Principales valores utilizados en el kit de desarrollo**

Características	Valor
Potencia nominal	1kW
Tensión de alimentación	300 V <sub>DC</sub>
Capacitancia de entrada	1650μF
Frecuencia de conmutación	10kHz

La adquisición de datos se realiza por medio un convertidor digital analógico de 16-bit con cuatro canales que son actualizados de manera simultánea cada 100μs con una salida +/-10V, estas señales son medidas utilizando un osciloscopio Tektronix MDO3024, véase Figura III.3 con el banco de pruebas experimentales. El sistema fue alimentado por una fuente Chroma modelo 62050H-600.



**Figura III.3 Banco de pruebas experimentales.**

# CAPÍTULO 4:

## IV RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se muestran los resultados obtenidos de cada controlador desarrollado, primeramente, se muestran los resultados obtenidos del controlador FOC estándar con los términos adaptables que fueron necesarios durante la prueba de estabilidad desarrollada en la sección III.1, se demuestra mediante simulaciones y de manera experimental como estos términos adicionales no afectan de manera significativa al esquema clásico de control por orientación de campo. Posteriormente se muestran los resultados obtenidos de los controladores robustos de dos grados libertad tanto para la regulación de velocidad como de posición; además se verifican las propiedades que ofrecen los controladores ante cambio de parámetros e incertidumbres en los mismos, así como perturbaciones de par externas.

### IV.1 Regulación de velocidad con el controlador FOC estándar con adaptación

Primeramente, los resultados del controlador propuesto en la sección III.1 son validados mediante una simulación numérica en MATLAB/Simulink, en la cual se consideran dos casos de estudio primeramente un motor de polos salientes, es decir  $L_d \neq L_q$ . Esto se hizo para validar la generalidad del controlador propuesto, posteriormente, en un segundo caso de estudio, se muestran las simulaciones y resultados experimentales con el motor PMSM descrito en la Tabla III.1 en cual es un motor de polos redondos (no salientes), es decir,  $L_d = L_q$ . En la Figura IV.1 se muestra el diagrama de bloques general del controlador FOC estándar y su banco de pruebas.



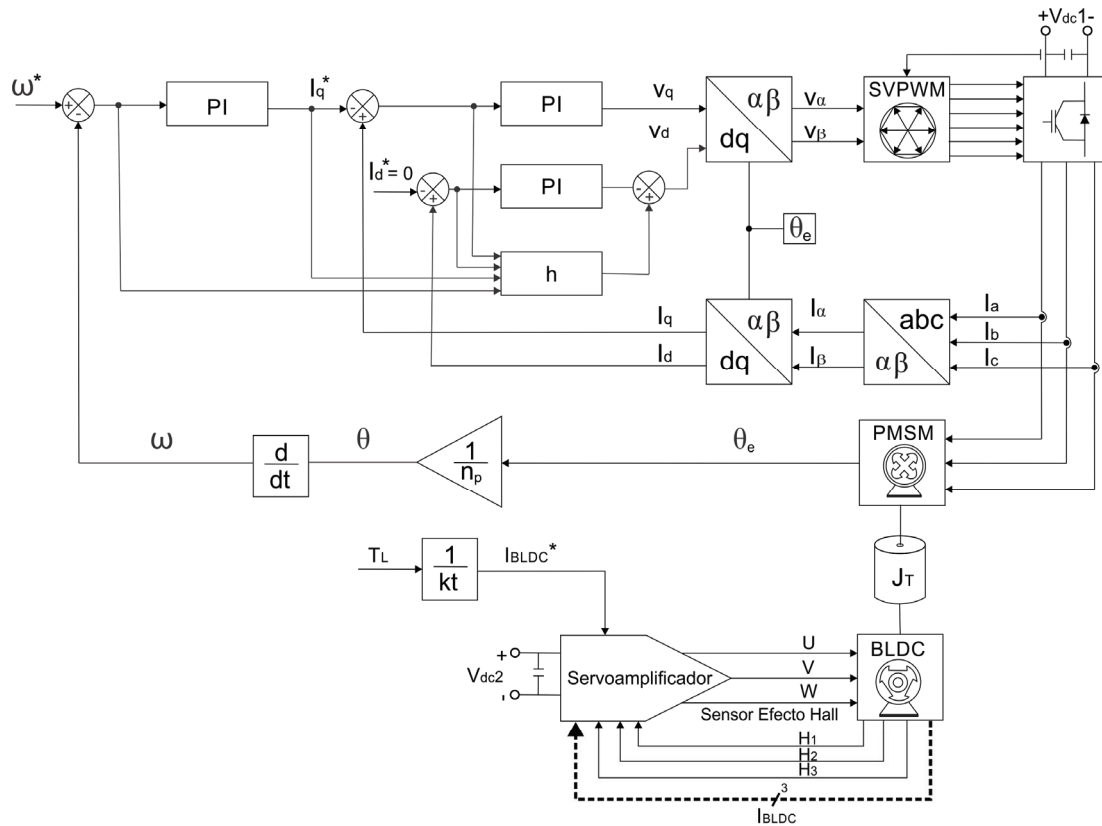


Figura IV.1 Diagrama a bloques del controlador FOC estándar.

### IV.1.1 Caso de estudio 1 – FOC Estándar en Motor PMSM con Polos Salientes

A continuación, en la Tabla IV.1, se muestran los valores utilizados por Petrovic *et al.*, (2001) el cual probó de manera experimental el controlador FOC estándar, además se puede verificar de manera fácil que todas las ganancias de controlador satisfacen las condiciones establecidas al final **proposición 1**. En la Tabla IV.1 también se incluyen las ganancias  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$  utilizadas en el control propuesto, nótese que la ganancia  $\varepsilon$  representa la diferencia entre la constante de par real del motor y la estimada  $\Phi'_M = \varepsilon\Phi_M$ . En la Figura IV.2 se muestran los resultados ante una entrada tipo escalón, donde se comparará el controlador FOC estándar con el controlador propuesto.

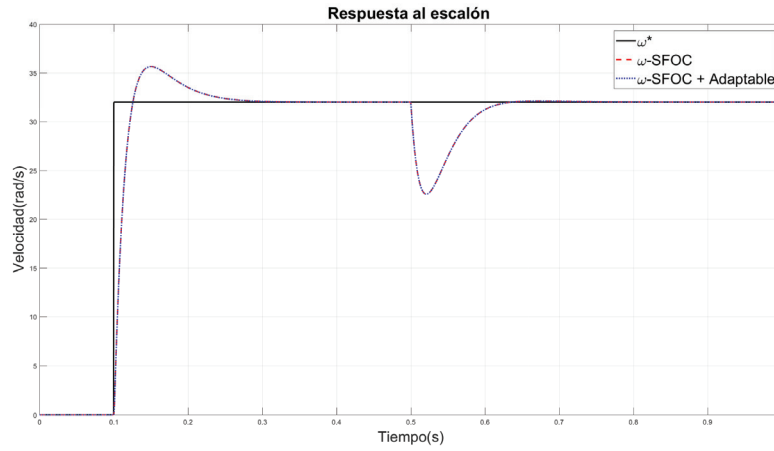
Tabla IV.1 Parámetros de motor y controlador utilizados por Petrovic *et al*, (2001).

Variable	Valor
Numero de pares de polos ( $n_p$ )	2
Resistencia del estator ( $R_s$ )	1.5 $\Omega$
Inductancia del estator ( $L_d$ )	12.0 mH
Inductancia del estator ( $L_q$ )	6.0 mH
Constante de par ( $\Phi_M$ )	0.398 N·m /A
Inercia nominal ( $J$ )	2.16e-3 kg·m <sup>2</sup>
Constante de fricción viscosa nominal ( $b$ )	8.6e-3 N·m·s/rad
Ganancia proporcional ( $k_p$ )	0.2
Ganancia integral ( $k_i$ )	5
Ganancia proporcional ( $\alpha_d$ )	5
Ganancia integral ( $\alpha_{di}$ )	200
Ganancia proporcional ( $\alpha_q$ )	9
Ganancia integral ( $\alpha_{qi}$ )	200
Ganancias $\Gamma_i$ , $i = 1, \dots, 7$	0.001
Ganancia $\varepsilon$	1
Par de carga ( $\tau_L$ )	2.5 N·m
Velocidad deseada ( $\omega^*$ )	32 rad/s

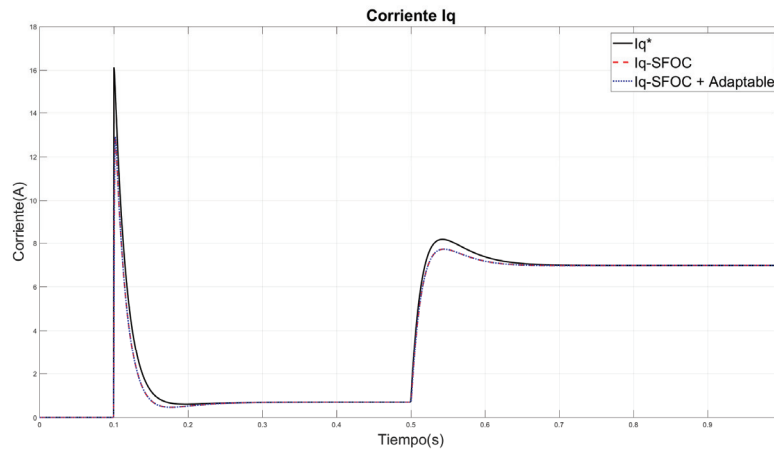
Como puede observarse en la Figura IV.2 todas las variables son idénticas y se sobre ponen todo el tiempo, excepto la variable  $I_d$  la cual es ligeramente diferente que es de esperarse debido a la influencia del término  $h$ , sin embargo esta diferencia no implica una diferencia en el desempeño de motor el cual puede corroborarse debido al comportamiento de las otras variables ( $\omega$  e  $I_q$ ), además nótese que la influencia del término  $h$  desaparece en el estado estable lo cual es claro si analizamos los términos de  $h$ , en donde se demostró que  $\xi = 0$  es un punto de equilibrio, nótese que  $\hat{\gamma}_5$  y  $\hat{\gamma}_7$  tienden a un equilibrio.

$$h = \tilde{\gamma}_1 \overset{\rightarrow 0}{\tilde{\rho}^2} - \gamma_1 \overset{\rightarrow 0}{\tilde{\rho}^2} + \tilde{\gamma}_2 I_q^* \tilde{\rho} - \gamma_2 I_q^* \tilde{\rho} + \tilde{\gamma}_3 I_q^* \tilde{\omega} - \gamma_3 I_q^* \tilde{\omega} + \tilde{\gamma}_4 \tilde{\rho} \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \gamma_4 \tilde{\rho} \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt + \boxed{\tilde{\gamma}_5 I_q^* \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt} + \tilde{\gamma}_6 \tilde{\rho} - \gamma_6 \tilde{\rho} + \boxed{\tilde{\gamma}_7 I_q^*} - \gamma_5 I_q^* \tilde{z}$$

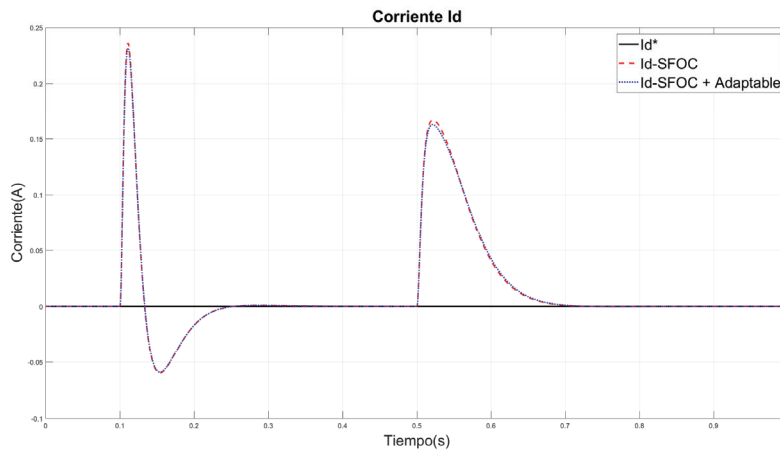
$$\tilde{\gamma}_5 I_q^* \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt + \tilde{\gamma}_7 I_q^* = 0 \quad \left( \frac{1}{k_i} (b\omega^* + \tau_L) \right) \hat{\gamma}_5 = \hat{\gamma}_7$$



(a)



(b)



(c)

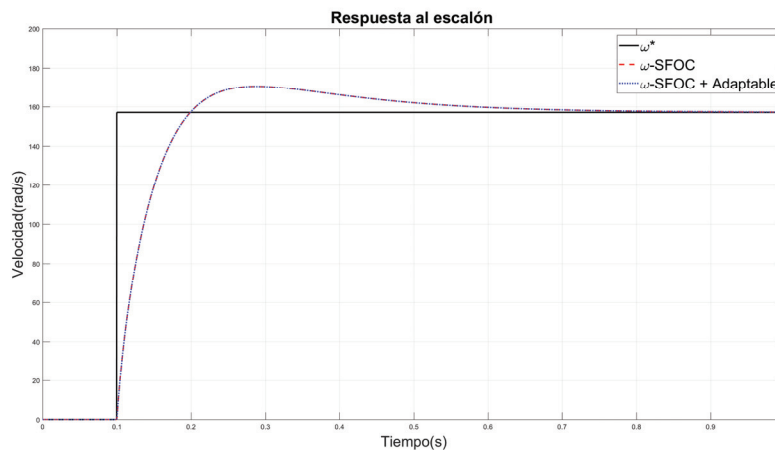
**Figura IV.2 Comparación de la respuesta al escalón de control FOC estándar con el controlador propuesto para un motor PMSM con polos salientes. (a) Respuesta de velocidad del motor. (b) Corrientes  $I_q^*$  e  $I_q$ . (c) Corrientes  $I_d^*$  e  $I_d$ .**

### IV.1.2 Caso de estudio 2 – FOC Estándar en Motor PMSM con Polos No Salientes

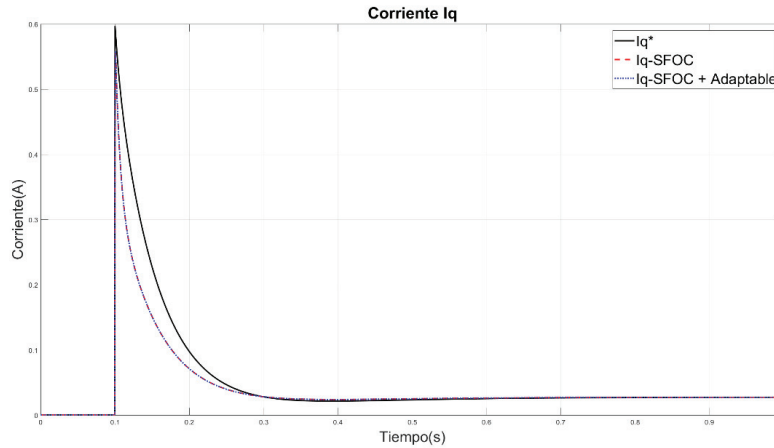
A continuación, se muestran los resultados de la simulación numérica para el motor descrito en la Tabla III.1, el motor al vacío. En la Tabla IV.2 se muestran las ganancias empleadas para el controlador, nótese que en este caso es un motor con polos no salientes ( $L_d = L_q$ ), por lo que el termino adaptable  $h$  se simplifica a la ecuación (III.42)

Tabla IV.2 Parámetros del controlador FOC estándar.

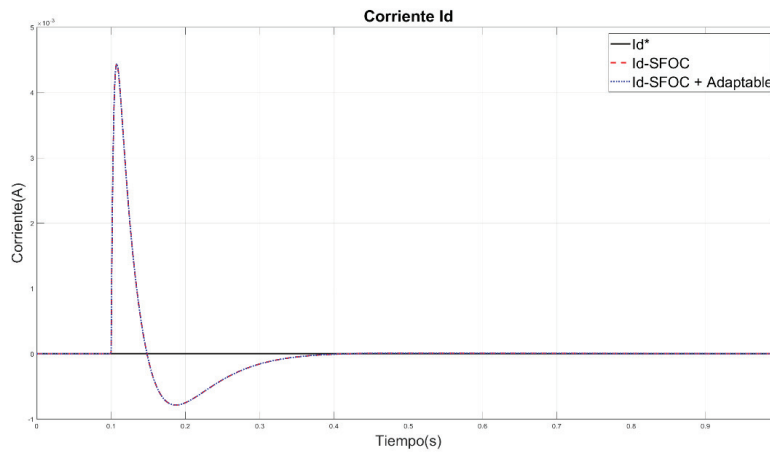
Variable	Valor
Ganancia proporcional ( $k_p$ )	0.0038
Ganancia integral ( $k_i$ )	0.02
Ganancia proporcional ( $\alpha_d$ )	60
Ganancia integral ( $\alpha_{di}$ )	6000
Ganancia proporcional ( $\alpha_q$ )	60
Ganancia integral ( $\alpha_{qi}$ )	6000
Ganancias $\Gamma_3$	0.001
Ganancia $\varepsilon$	1
Par de carga ( $\tau_L$ )	0.0 N·m
Velocidad deseada ( $\omega^*$ )	1500rpm



(a)



(b)



(c)

**Figura IV.3 Comparación de la respuesta al escalón de control FOC estándar con el controlador propuesto para un motor PMSM con polos no salientes. (a) Respuesta de velocidad del motor. (b) Corrientes  $I_q^*$  e  $I_q$ . (c) Corrientes  $I_d^*$  e  $I_d$ .**

Como puede observarse en la Figura IV.3 el impacto del término adaptable es aún menor, quedando la respuesta del controlador idéntica al controlador por orientación de campo estándar, más aún de la metodología aplicada a las simulaciones anteriores se establece el siguiente procedimiento de sintonía:

- I. Escoger cualquier valor de  $\beta > 0$  y proponer algún valor de  $k'_p > 0$  y  $k'_i > 0$  talque las condiciones  $\beta k'_p + k'_i + b\beta > J\beta^2$  y  $b + k'_p - J\beta > 0$  sean cumplidas.

- II. Seleccionar  $\alpha_d > 0$  y  $\alpha_q > 0$  talque el tercero y cuarto de los menores principales de la matriz  $Q$  definida en (III.33), sea positiva, es decir  $R_s + \alpha_d > 0$  y  $\alpha_q > \frac{L_q k_p'}{J} - R_s$ .
- III. Escoger cualquier constante  $\Gamma_i > 0, i = 1, \dots, 7$ , y  $\alpha_{di} > 0, \alpha_{qi} > 0$ .
- IV. Calcular  $k_p = \varepsilon k_p'$  y  $k_i = \varepsilon k_i'$ , utilizando una  $\varepsilon > 0$  tal que  $\Phi'_M = \varepsilon \Phi_M$ .

A continuación, se muestran los resultados experimentales de la Figura IV.3, en donde el procedimiento se sintonía fue aplicado, las ganancias utilizadas son las mismas presentadas en la Tabla IV.2, es importante aclarar que el método presentado garantiza una operación estable, sin embargo, no establece parámetros para definir las características de la respuesta transitoria, como tiempo de respuesta o sobrepaso y tampoco establece criterios de robustez.

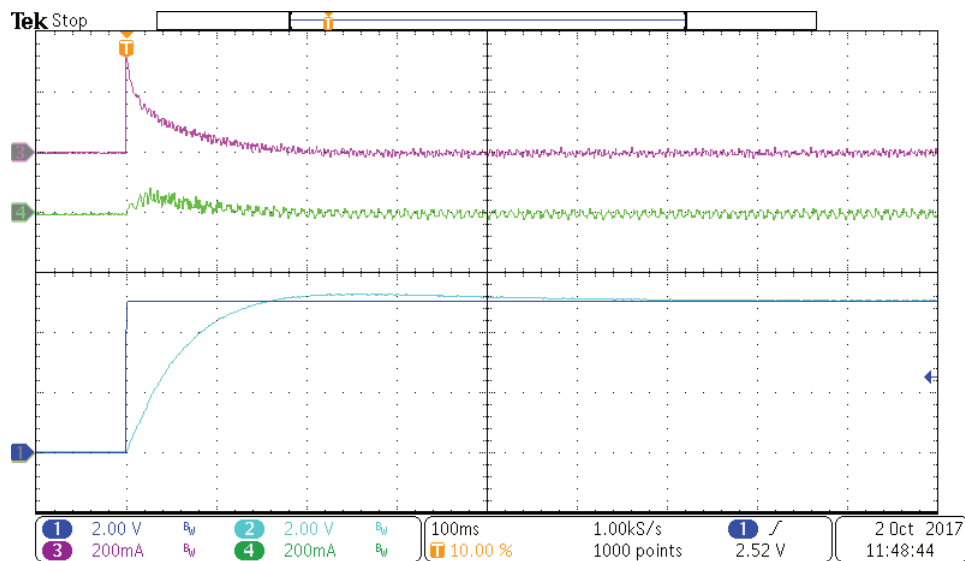
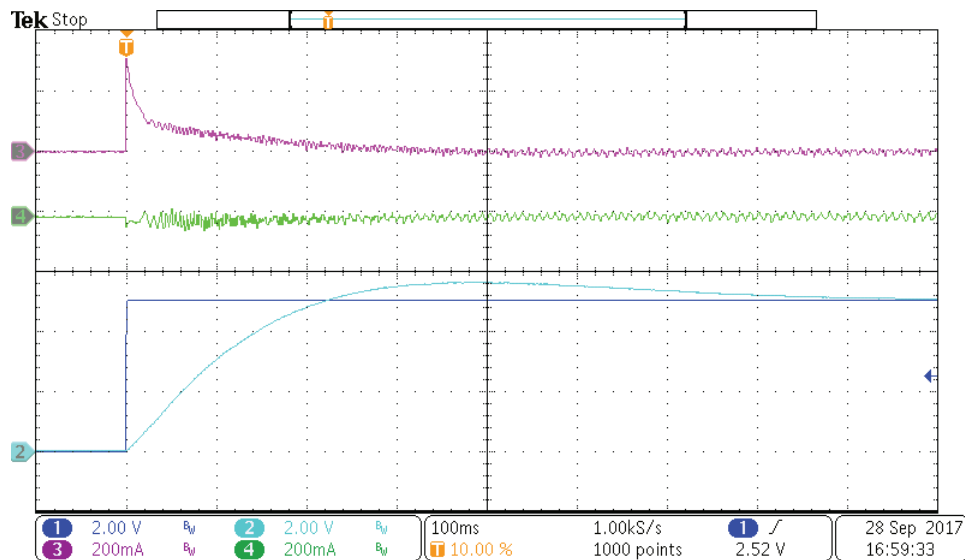


Figura IV.4 Resultados experimentales de la respuesta al escalón de control FOC estándar con adaptación.

En la Figura IV.4, se muestran la respuesta al escalón en donde la línea azul y cian representan la velocidad deseada  $\omega^*$  y la velocidad medida  $\omega$  respectivamente con un factor de escalamiento de 3000rpm/10V. Los trazos verde y magenta representan la corriente  $I_d$  y la corriente  $I_q$  respectivamente, en donde el factor de escalamientos es de 1:1.

Utilizando los mismos colores y factores de escalamiento, en la Figura IV.5, se muestra la respuesta del controlador FOC estándar cuando hay un cambio de parámetros, es decir en este caso

se muestra la respuesta después de haber conectado el motor PMSM al banco de pruebas, en donde ahora los nuevos parámetros están definidos por la Tabla III.2. Nótese que, a pesar de este incremento en la inercia del sistema, principalmente, el controlador FOC estándar sigue manteniendo su estabilidad ya que este cambio de inercia está dentro de los límites mencionados en el procedimiento de sintonía, sin embargo, se modificó su respuesta transitoria llevando consigo un sobrepaso mayor y un tiempo de establecimiento más largo.



**Figura IV.5 Resultados experimentales de la respuesta al escalón de control FOC estándar con adaptación ante cambios de parámetros.**

Para mejorar la respuesta del controlador y evitar el sobrepaso se seleccionaron de manera intuitiva nuevas ganancias del controlador PI de velocidad en donde las nuevas ganancias son  $k_p = 0.14$  y  $k_i = 0.15$ . En la Figura IV.6 se puede observar la respuesta al escalón con las nuevas ganancias en donde se evita tener un sobrepaso de la respuesta transitoria, sin embargo cuando se aplica un perturbación de par  $\tau_L$  de  $\pm 0.25 Nm$  representada por el trazo magenta con una factor de escalamiento de  $0.25 Nm/10V$ , la regulación de velocidad es severamente deteriorada. El trazo negro corresponde a la corriente  $I_q$  con factor de escalamiento 1:1, los demás trazos siguen siendo los mencionados el experimento anterior.

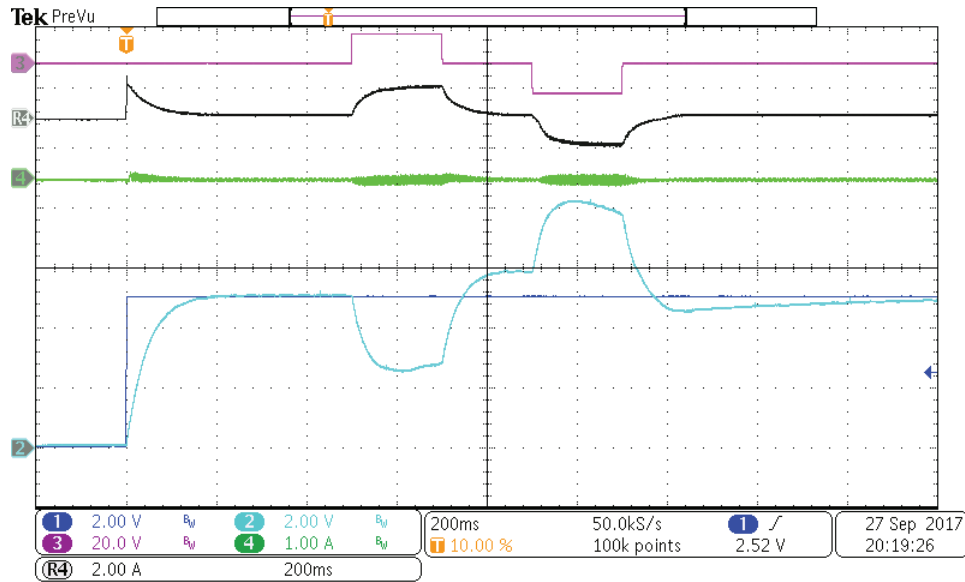


Figura IV.6 Resultados experimentales de la respuesta al escalón de control FOC estándar con adaptación ante cambios de parámetros y perturbaciones externas con  $k_p = 0.01$  y  $k_i = 0.02$ .

Buscando reducir el efecto de las perturbaciones se siguieron las ideas intuitivas del control clásico PI, en donde se incrementaron  $k_p = 0.055$  y  $k_i = 0.055$ , esto llevo a un menor tiempo de respuesta y mayor rechazo ante las perturbaciones, sin embargo, el sobre paso es algo que no es posible evitar, además que genera una saturación de la corriente deseada (trazo verde) en la respuesta transitoria.

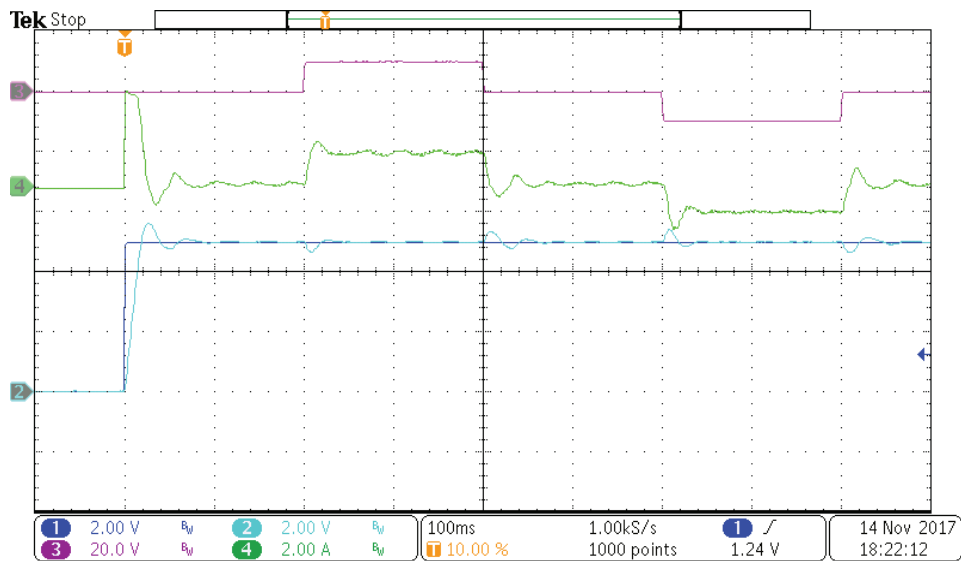


Figura IV.7 Resultados experimentales de la respuesta al escalón de control FOC estándar con adaptación ante cambios de parámetros y perturbaciones externas con  $k_p = 0.055$  y  $k_i = 0.055$ .



## IV.2 Regulación de velocidad con el controlador robusto de dos grados de libertad

Como se mostró en la sección IV.1 el controlador por orientación de campo clásico tiene grandes ventajas ya que es fácil de sintonizar y obtener una respuesta estable de una manera muy intuitiva, sin embargo, no es posible obtener una buena respuesta transitoria y rechazo a perturbaciones en un amplio rango de operación, llevando consigo a cambios constantes en sus ganancias dadas ciertas condiciones de operación; en la teoría de control lineal este problema es resuelto mediante el uso de controladores de dos grados de libertad que permiten ajustar la respuesta transitoria del rechazo a perturbaciones de manera independiente, en la sección III.3 se llevaron estas ideas para la regulación de velocidad a un sistema no lineal como el PMSM y se demostró de manera formal, como sus propiedades son conservadas aun tratándose de un motor con polos salientes. A continuación, se muestran los resultados experimentales, nótese que el controlador es el mismo para  $L_d \neq L_q$  y  $L_d = L_q$ , por lo que solo se muestran resultados de simulación y experimentales con el motor descrito en la Tabla III.1.

Se muestran en la Figura IV.8, el diagrama de bloques de controlador, nótese solo depende de los parámetros  $\tau_r, \tau_1, J_n, B_n$ . En la Tabla IV.3 se muestran las ganancias de controlador utilizadas, no es difícil verificar que las ganancias satisfacen las condiciones obtenidas en la sección III.3.

**Tabla IV.3 Parámetros del controlador 2DOF de velocidad.**

Variable	Valor
Constante de tiempo deseada ( $\tau_r$ )	50ms
Constante de tiempo del filtro $Q$ ( $\tau_1$ )	1.8ms
Inercia aproximada ( $J_n$ )	31.69e-6
Constante de fricción viscosa aproximada ( $B_n$ )	52.79e-6
Constante de par estimada ( $\Phi_M$ )	0.301
Ganancia proporcional ( $r_d$ )	60
Ganancia integral ( $R_{di}$ )	6000
Ganancia proporcional ( $r_q$ )	60
Ganancia integral ( $R_{qi}$ )	6000
Velocidad deseada ( $\omega^*$ )	1500rpm

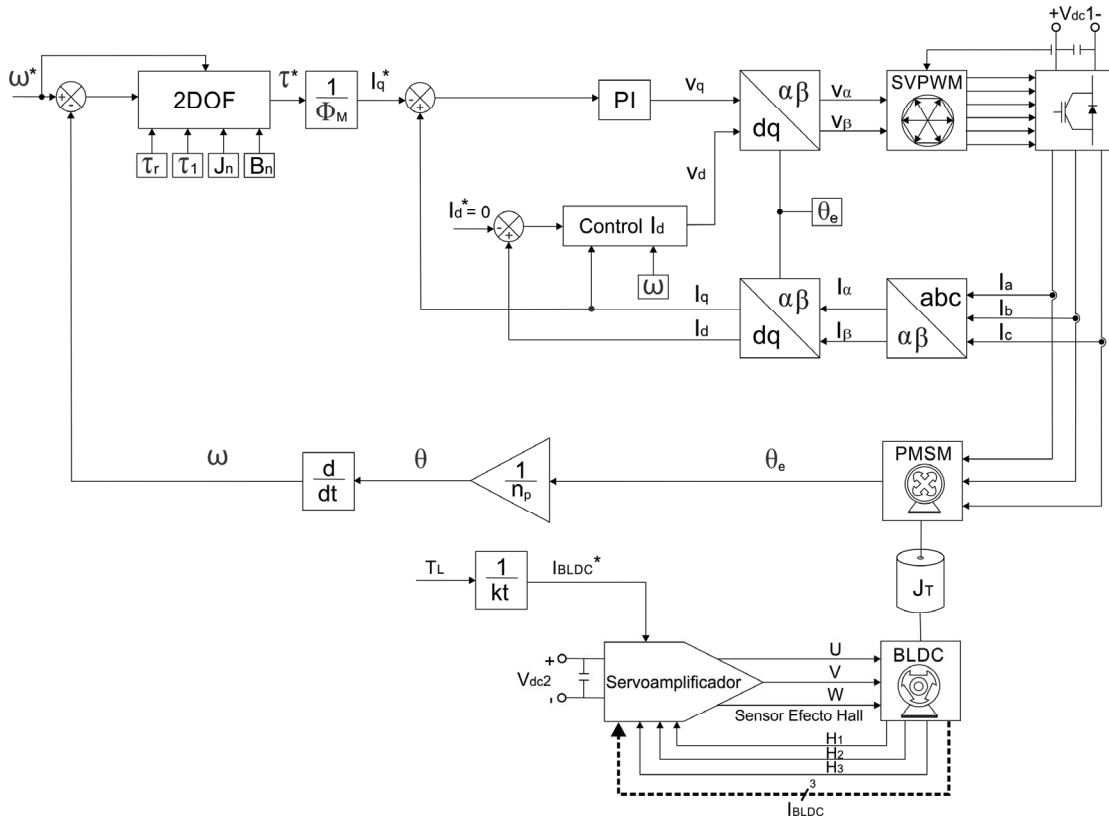
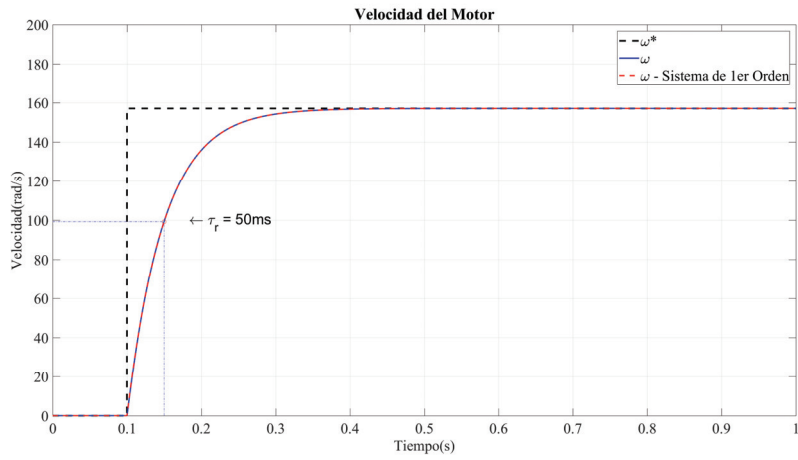
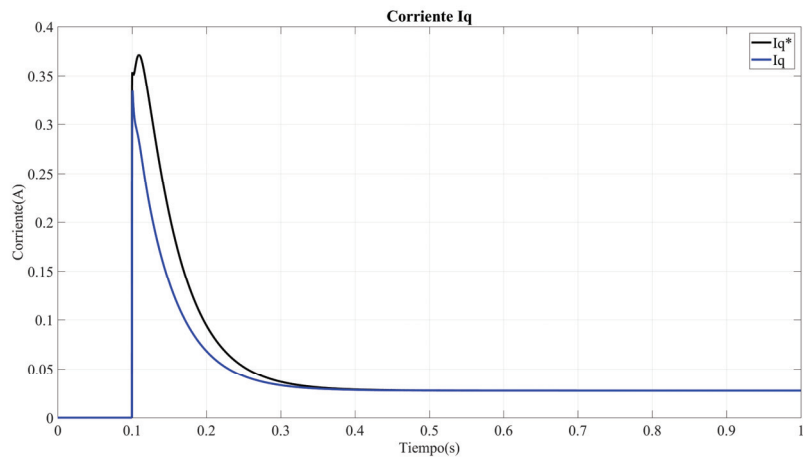


Figura IV.8 Diagrama a bloques del controlador 2DOF de velocidad.

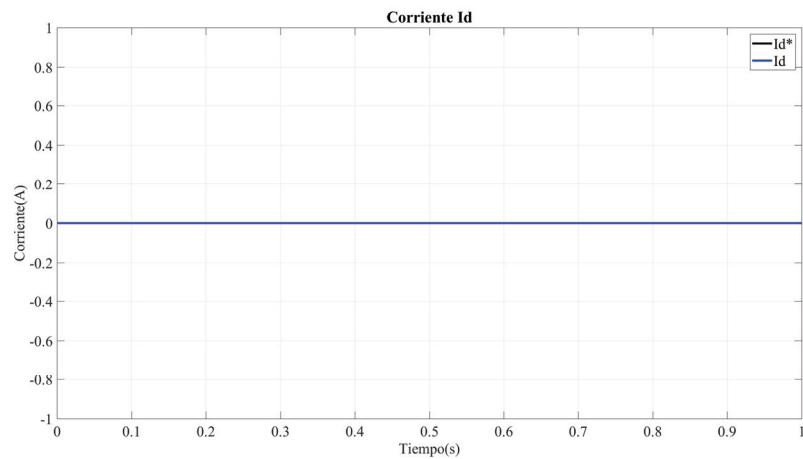
En la Figura IV.9 se muestran los resultados de la simulación, véase que  $J_n, B_n, \Phi_M$  son iguales a los valores nominales de la Tabla III.1, es decir el motor al vacío; en la Figura IV.9 podemos observar que bajo las condiciones nominales el motor response como es de esperarse, como un sistema lineal de primer orden con una constante de tiempo de 50ms y sin sobrepaso, en este caso no se aplica ninguna perturbación de par externa. Esto demuestra que el controlador 2DOF es capaz de obtener la respuesta transitoria deseada de un sistema lineal de primer orden a pesar de que se trate de un sistema no lineal. Sin embargo, este resultado no demuestra la robustez del controlador cuando existen cambios de parámetros o perturbaciones externas. Note que la corriente  $I_d$  es cero en la simulación debido a que esta es idealmente linealizada por el termino  $n_p L_q \omega I_q$  incluido en la ecuación (III.55), sin embargo como se muestra en los resultados experimentales la linealización exacta produce un mínimo error debido a incertidumbre en la medición de  $L_q$  y ruido que existe en la mediciones de las variables  $\omega$  y  $I_q$ , causados por la conmutación PWM y la diferenciación numérica de los pulsos del encoder.



(a)



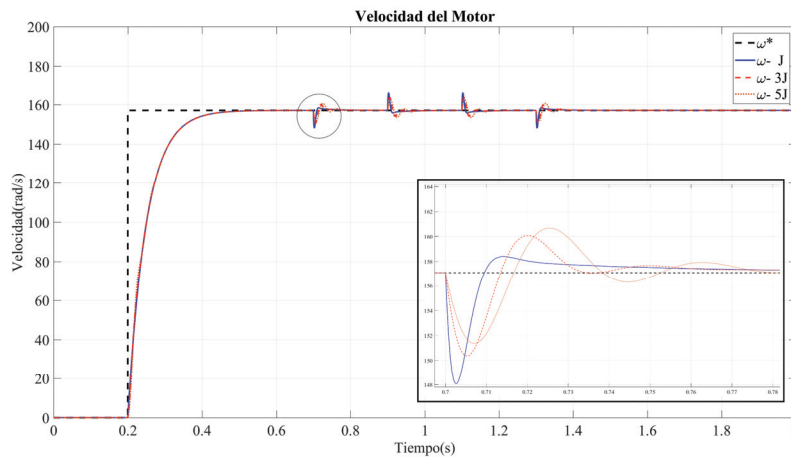
(b)



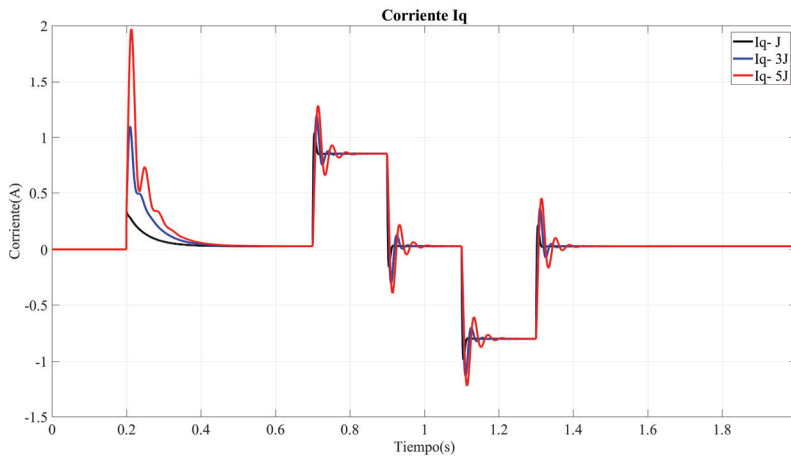
(c)

Figura IV.9 Comparación de la respuesta al escalón de control 2DOF de velocidad con la respuesta de un primer orden. (a) Respuesta de velocidad del motor. (b) Corrientes  $I_q^*$  e  $I_q$ . (c) Corrientes  $I_d^*$  e  $I_d$ .

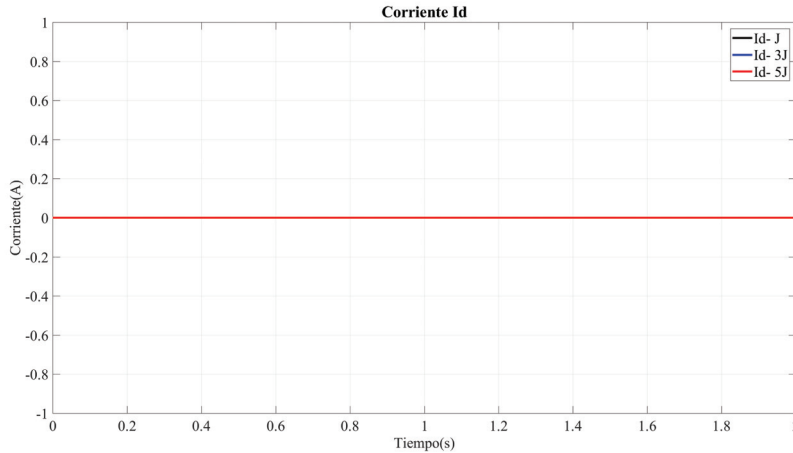
A continuación, en la Figura IV.10 se compara la respuesta sistema antes cambios de inercia de 300% y hasta un 500% de su valor nominal, además de incluir perturbaciones externas de par. Nótese que la respuesta transitoria es preservada a pesar de estos cambios, además las perturbaciones de par externas son mitigadas rápidamente. Se quiere enfatizar que para esta simulación las ganancias de controlador se mantuvieron en sus valores nominales de la Tabla IV.3, y los cambios fueron introducidos en los parámetros físicos de la simulación del motor y no de manera virtual sobre estimando la inercia nominal del motor dentro de las ganancias del controlador.



(a)



(b)



(c)

Figura IV.10 Comparación de la respuesta al escalón de control 2DOF de velocidad con cambios de inercia y perturbaciones de par. (a) Respuesta de velocidad del motor. (b) Corrientes  $I_q$ . (c) Corrientes  $I_d$ .

Como puede observarse en la Figura IV.10 el controlador es bastante robusto ante cambios de parámetros como la inercia y perturbaciones de par externas. A continuación, se muestran los resultados experimentales aplicados utilizando los valores de la Tabla III.1 y Tabla IV.3. En los resultados experimentales se muestran cambios que fueron aplicados de manera física al motor agregando inercia extra, aplicando perturbaciones de par y también cambios o perturbaciones virtuales al sobre o sub estimar parámetros como  $J_n$ ,  $B_n$ ,  $\Phi_M$ . La Figura IV.11 muestra la respuesta al escalón en vacío en donde la línea naranja y negra representan  $\omega^*$  y  $\omega$  respectivamente con un factor de escalamiento de 3000rpm/10V. Los trazos verde y rojo representan la corriente  $I_d$  y la corriente  $I_q$  respectivamente, en donde el factor de escalamientos es de 1:1. Véase la magnitud de la corriente  $I_d$  la cual es evidente es muy cercana a cero, el nivel de ruido de la señal está por debajo de los 100mA. Véase que también se verifica que la velocidad medida en  $\Delta T = 50ms$  corresponde con el 63.2% de la velocidad deseada la cual corresponde al 63.2% de 5V, lo cual es 3.16V.

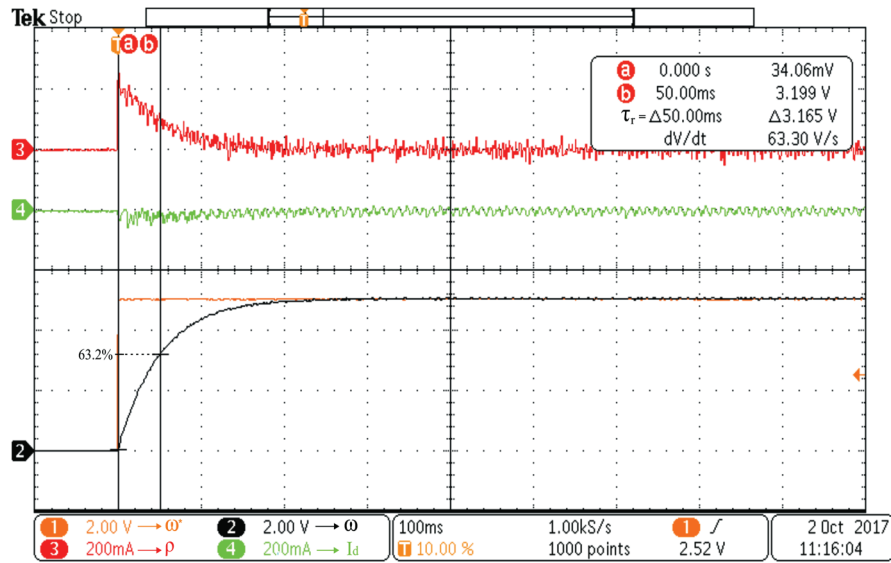


Figura IV.11 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad.

A continuación, en la Figura IV.12 se muestran los resultados cuando el motor PMSM es acoplado al banco de pruebas, en donde se presentan cambios de hasta un 520% de diferencia en la inercia el cual es el parámetro más crítico en la regulación de velocidad, además de cambios en los coeficientes de fricción viscosa y estática, dados por la Tabla III.2. Los factores de escalamiento son mantenidos a lo largo de todos los experimentos reportados.

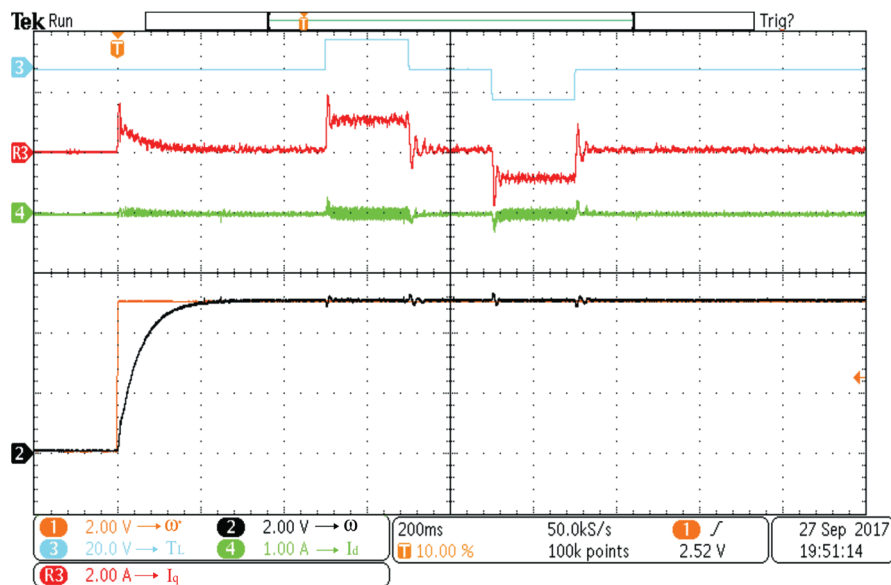


Figura IV.12 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad ante cambios de parámetros y perturbaciones externas.

De los experimentos anteriores se puede observar que los resultados experimentales coinciden con los resultados mostrados por la simulación. Verificando así la viabilidad del controlador propuesto en la práctica, así como sus extraordinarias propiedades al preservar la respuesta transitoria sin generar ningún sobre paso y además de mitigar rápidamente las perturbaciones de manera eficaz. A continuación, en la Figura IV.13 se demuestra cómo además de ser robusto antes cambios de inercia, fricción y perturbaciones de par, también es robusto ante cambios de la constante de par, estos cambios ocurren de manera natural debido al calentamiento y efectos de desmagnetización del campo magnético del rotor. Para simular estos cambios o discrepancias entre la constante de par nominal de motor y la real, se introducen de manera virtual en las ganancias del controlador dos condiciones cuando  $\Phi_M' = 0.5\Phi_M$ , es decir se subestima la constante de par y cuando  $\Phi_M' = 2\Phi_M$  es decir se sobrestima.

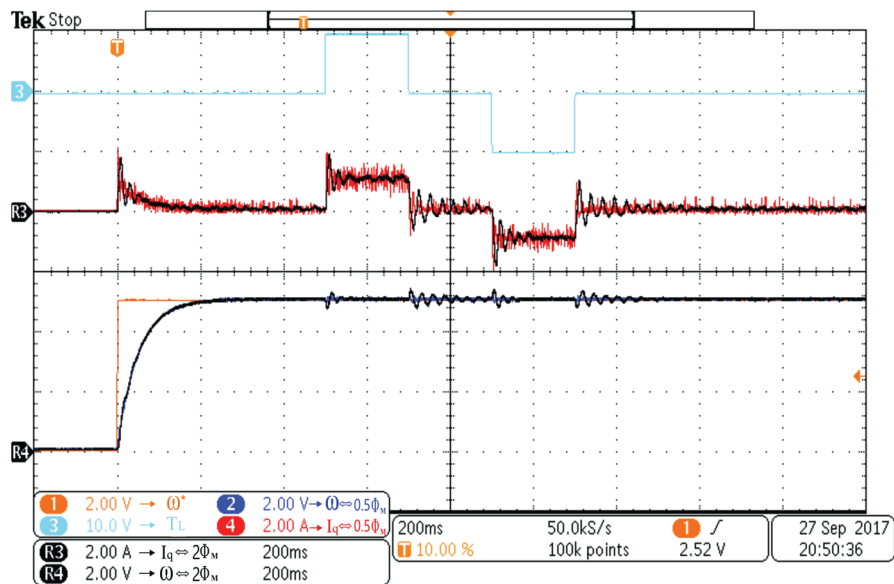


Figura IV.13 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad ante incertidumbre en la constante de par.

En la Figura IV.13 cuando la constante par es subestimada el controlador no presenta cambios significativos en su respuesta transitoria, sin embargo si puede apreciarse que la corriente  $I_q$  es mas ruidosa, este comportamiento es explicado dado el hecho que para un valor de  $\Phi_M$  menor la corriente demandada  $I_q^*$  es mayor, véase (III.57), por otro lado cuando es sobre estimada es menor lo que produce las oscilaciones durante las perturbaciones. Nótese que esto no representa un problema en la práctica ya que la constante de par suele disminuir no incrementar, por lo que

elegir un valor por debajo del nominal garantiza su operación estable y robusta aun cuando el motor en la realidad sufra de perdidas por calentamiento, desmagnetización o envejecimiento.

Como se puede observar (III.51), la constante de fricción viscosa es otro parámetro utilizado para calcular las ganancias del controlador, sin embargo, este parámetro raramente viene en la placa de motor. En la Figura IV.14 se muestra la respuesta del controlado cuando las ganancias del controlador son calculadas utilizando el coeficiente de fricción viscosa nominal  $B_n = b$  y cuando es considerada muy cercana a cero  $B_n = 1.0^{-12}$ . Nótese que las respuestas son idénticas lo cual prueba que el controlador es robusto ante incertidumbres en el coeficiente de fricción viscosa.

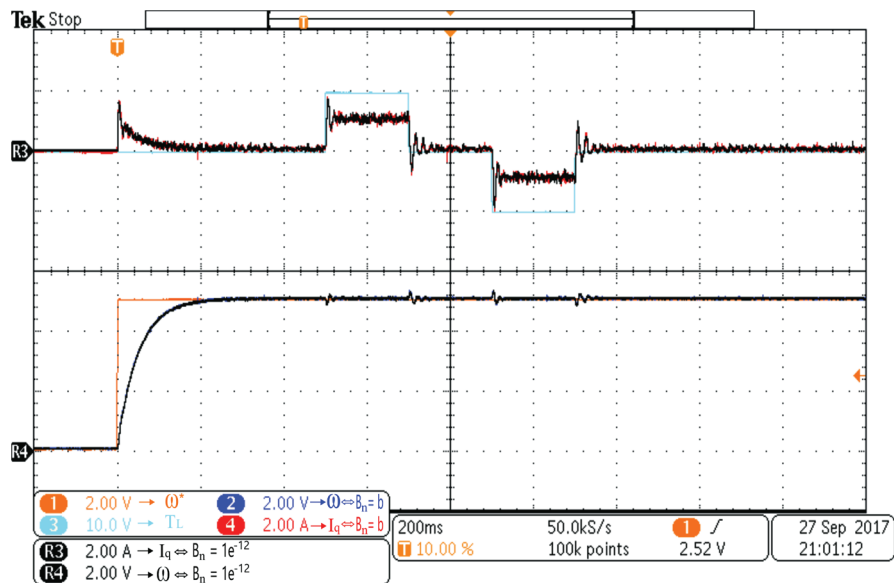


Figura IV.14 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad cuando el coeficiente de fricción es considera casi cero  $B_n \approx 0$ .

En la Figura IV.15 y Figura IV.16 se muestran dos propiedades que se quiere resaltar del controlador propuesto, primeramente la facilidad de escoger la constante de tiempo  $\tau_r$  deseada de manera arbitraria, nótese que la constante de tiempo representa el ancho de banda del controlador y esta desacoplada de la capacidad de rechazo a perturbaciones como se puede observar claramente sin importar que se tengan constantes de tiempo más lentas, *i.e.* un ancho de banda menor, la perturbaciones siguen siendo rechazadas de la misma manera. Otra propiedad importante es la preservación de la respuesta transitoria ante cualquier entrada, es decir el tiempo de respuesta es



el mismo sin importar la velocidad comandada  $\omega^*$ , en la Figura IV.16 se muestran las respuestas antes las siguientes entradas  $\omega^* = [5,10,20,30,40,50,60,70,80,90,100]\%$  de la velocidad nominal, nótese que en todo el rango de operación se tiene la misma respuesta.

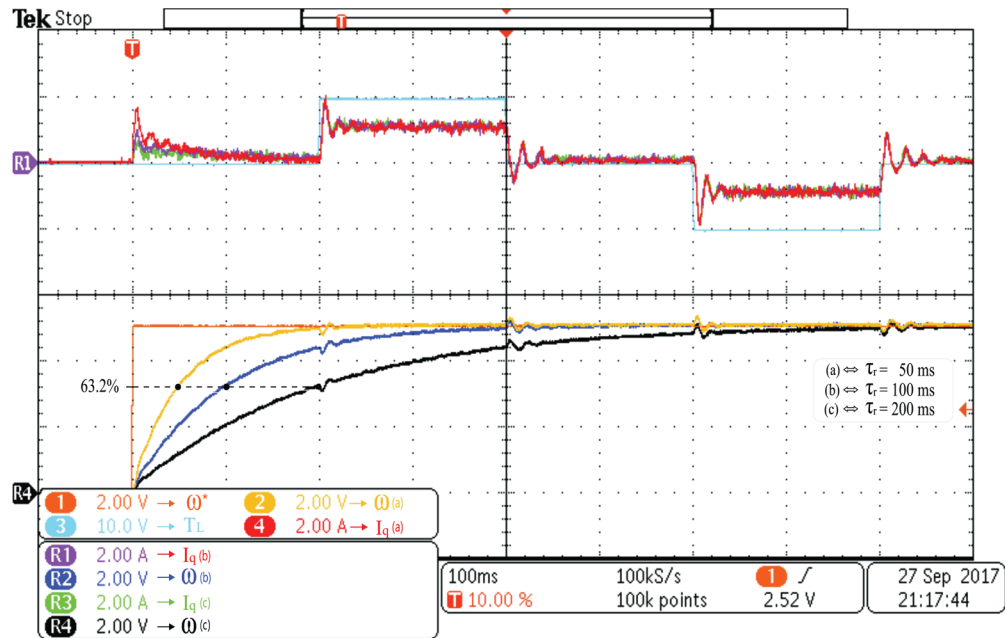


Figura IV.15 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad con diferentes constantes de tiempo.

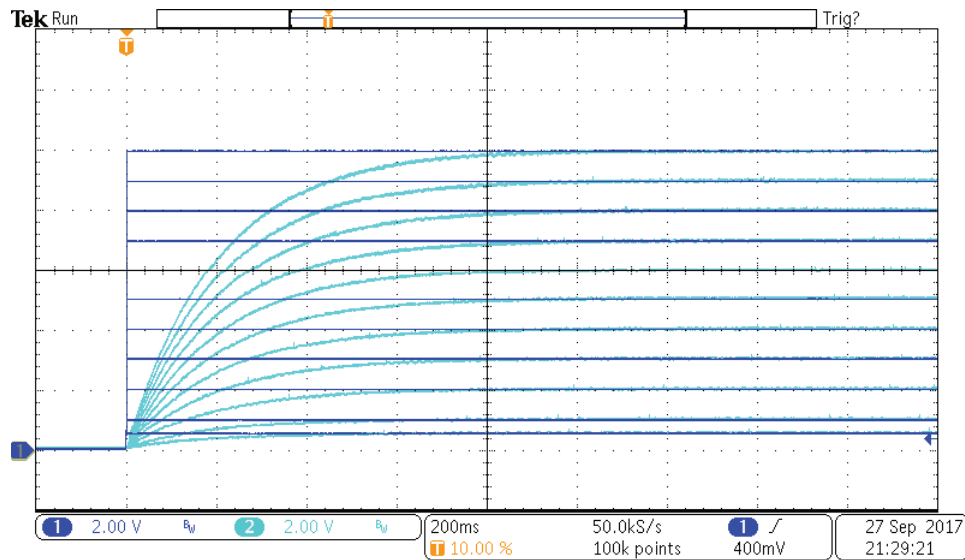


Figura IV.16 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad ante cambios de la velocidad deseada.

A continuación, se muestran resultados comparativos entre el controlador FOC estándar y el controlador de dos grados de libertad, en la Figura IV.17 se muestran cambios de velocidad que van de  $\omega^* = \pm[5,15,25,35,45,55]\%$  de la velocidad nominal, como puede observarse la regulación del PI (trazo negro) se ve severamente deteriorada en bajas velocidades, más aun si se aplica una perturbación sinusoidal de par de 10Hz con una amplitud de 0.125Nm, nótese que bajo estas condiciones el controlador 2DOF sigue manteniendo el mismo desempeño.

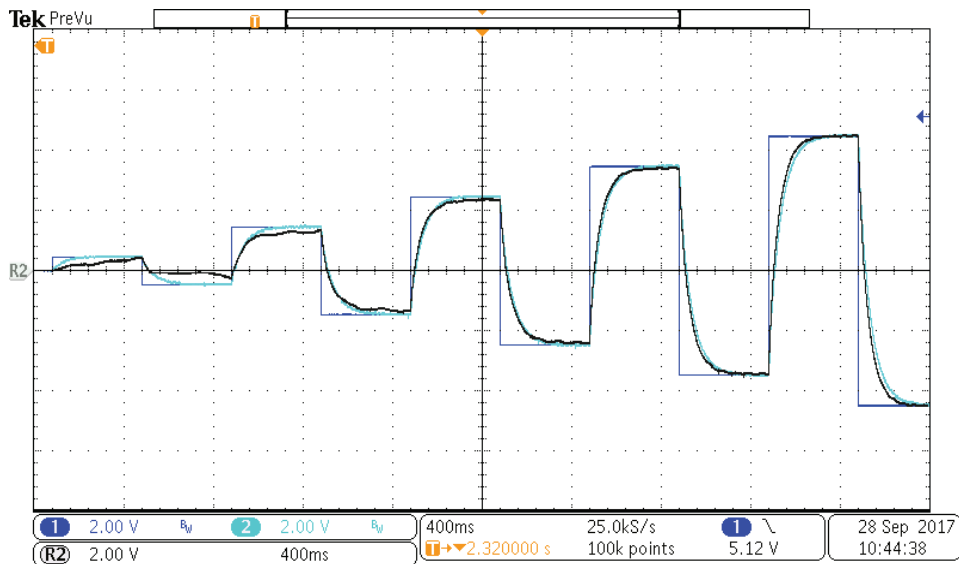


Figura IV.17 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF y el controlador FOC estándar.

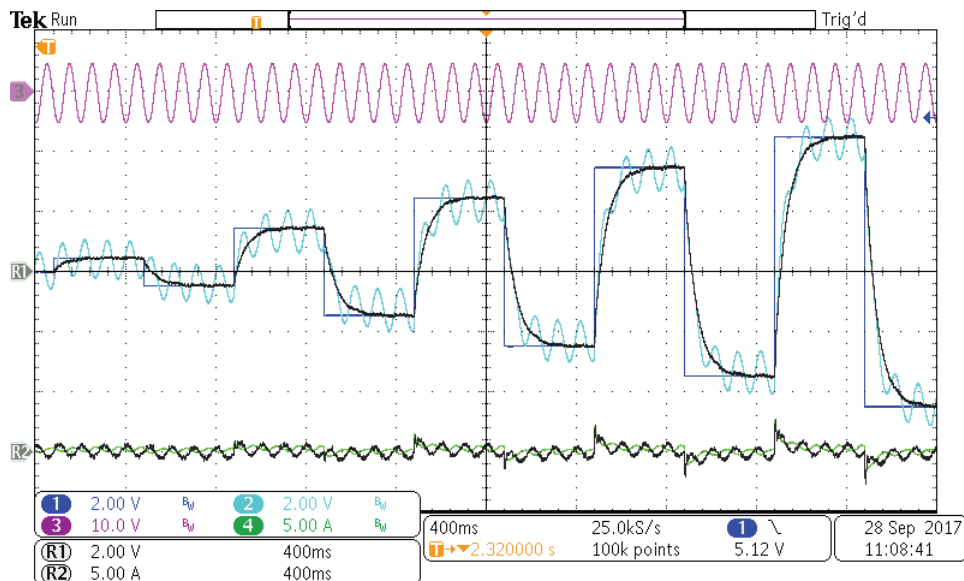
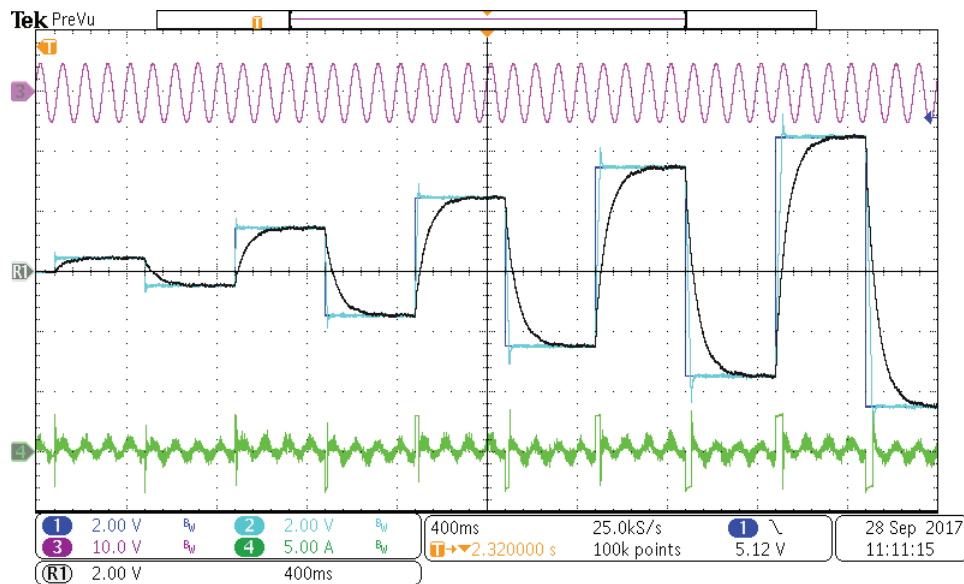


Figura IV.18 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF y el controlador FOC estándar ante una perturbación sinusoidal.

Siguiendo de manera intuitiva las practicas aplicadas a la sintonía del control PI del FOC estándar y tomando en cuenta lo resultados presentados anteriormente, se incrementan las ganancias integral y proporcional para lograr el rechazo satisfactorio a la perturbación sinusoidal constante, sin embargo, esto conlleva a un inevitable sobrepaso el cual puedes observarse (trazo cian) , además de esto se presenta la corriente  $I_q$  (trazo verde) el cual se presenta una saturación durante la respuesta transitoria la cual crece a medida que la diferencia de la velocidad comandada es mayor.



**Figura IV.19 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de velocidad ante cambios de parámetros y perturbaciones externas.**

En los experimentos mostrados se muestra la dificultad y los problemas comunes al controlador PI clásico, y como una estrategia de control que es ampliamente la más utilizada termina siendo más complicada debido a que requiere de otras estrategias para reducir los problemas presentados, como lo es la necesidad de perfiles de para evitar el sobre paso, estrategias para evitar la saturación de la acción integral, utilizar ganancias de pre-alimentación para eliminar el error del seguimiento de perfiles de velocidad, sin embargo a pesar de todas estas mejoras el controlador PI y su capacidad a rechazo a perturbaciones se ve severamente afectada cuando las condiciones nominales de operación cambian, i.e. la inercia, lo cual conlleva a buscar nuevas ganancias que proporcionen el desempeño deseado.

El controlador 2DOF para velocidad presentado resuelve todos los inconvenientes presentados por el controlador FOC estándar, al mismo tiempo presenta una complejidad de sintonía similar o incluso menor PI, a continuación, se describe un resumen de los parámetros  $\tau_r, \tau_1, J_n, B_n$  que se utilizan para el controlador 2DOF.

$\tau_r$ - Representa la constante de tiempo deseada en segundos, dado que la respuesta deseada del controlador es un primer orden significa que en este tiempo la respuesta alcanzara un 63.2% del su valor final. Esta constante de tiempo solo está limitada por limitaciones prácticas, como la máxima corriente pico del motor, la máxima potencia del inversor, etc. Este parámetro no es considerado una ganancia sino un parámetro que permite al usuario de manera rápida y transparente cumplir un requerimiento de diseño, como lo es el ancho de banda del controlador.

$\tau_1$ - Representa la constante de tiempo para el filtro pasa altas  $Q(s)$ , el cual determina la robustez y desempeño del rechazo a perturbaciones independientemente de la constante de tiempo deseada, la selección de esta constante solo está acotada por la condición de  $\tau_r \gg \tau_1$ , lo que significa que una vez seleccionado el tiempo de respuesta deseado la constante  $\tau_1$  debe ser mucho menor que  $\tau_r$ , por lo que el usuario puede ir decrementando esta constante de manera gradual hasta obtener el desempeño deseado, de manera similar a la ganancia proporcional  $k_p$  en el controlador PI el usuario necesita verificar que una ganancia muy alta ( $1/\tau_1$ ) no cause oscilaciones o sature la corriente comandada al lazo interno de corriente  $I_q$ .

$J_n$ - Representa una aproximación vaga de la inercia nominal del sistema, nótese que se verifico de manera experimental que esta aproximación puede ser tan lejana como un 500% de su valor nominal y aun así obtener el desempeño deseado. Cabe mencionar que una vaga aproximación de la inercia de un cuerpo puede ser calculada de manera directa y sencilla con la formulación de la física clásica. Enfatizando que el controlador no depende del conocimiento exacto de la inercia del sistema.

$B_n$ -Representa una vaga aproximación del coeficiente de fricción viscosa, la cual puede despreciarse como se demostró en los resultados experimentales. El hecho de que la fricción fuera despreciada en el cálculo de las ganancias del controlador y esta estuviera presente con cambios de hasta un 200% e incluyera dinámicas no modeladas como la fricción estática demuestra que el

controlador es robusto ante cambios que son causados por condiciones ambientales como el polvo, el óxido etc.

Resumiendo, durante los experimentos presentados se demostró la robustez del controlador a pesar de que varios parámetros fueron cambiados de manera física y de manera virtual, además se considera que el controlador presentado requiere casi el mismo esfuerzo, o incluso menos, que sintonizar un control PI. Dado que los principales parámetros a considerar en el control 2DOF son dos  $\tau_1$  y  $J_n$  los cuales tienen la clara ventaja que son independientes uno de otro, además estas variables tienen una clara interpretación física, y más importante con un sólido respaldo teórico y práctico que validan los resultados presentados.

### IV.3 Regulación de posición con el controlador robusto de dos grados de libertad

En la sección III.4 se presentó una extensión del controlador de dos grados de libertad para la regulación de posición y se demostró de manera formal, como sus propiedades son conservadas aun tratándose de un motor PMSM. A continuación, se muestran los resultados experimentales, nótese que el controlador es el mismo para  $L_d \neq L_q$  y  $L_d = L_q$ , por lo que solo se muestran resultados de simulación y experimentales con el motor descrito en la Tabla III.1.

Se muestran en la Figura IV.8, el diagrama de bloques de controlador, nótese solo depende de los parámetros  $\tau_r, \tau_3, J_n, \xi$ . En la Tabla IV.4 se muestran las ganancias de controlador utilizadas, no es difícil verificar que las ganancias satisfacen las condiciones obtenidas en la sección III.4.

**Tabla IV.4 Parámetros del controlador 2DOF de posición.**

Variable	Valor
Constante de tiempo deseada ( $\tau_r$ )	50ms
Constante de tiempo del filtro $Q$ ( $\tau_3$ )	1.8ms
Factor de amortiguamiento ( $\xi$ )	1
Inercia aproximada ( $J_n$ )	9.507e-5
Constante de par estimada ( $\Phi_M$ )	0.301
Ganancia proporcional ( $r_d$ )	60
Ganancia integral ( $R_{di}$ )	6000
Ganancia proporcional ( $r_q$ )	60
Ganancia integral ( $R_{qi}$ )	6000
Posición deseada ( $\theta^*$ )	$2\pi$

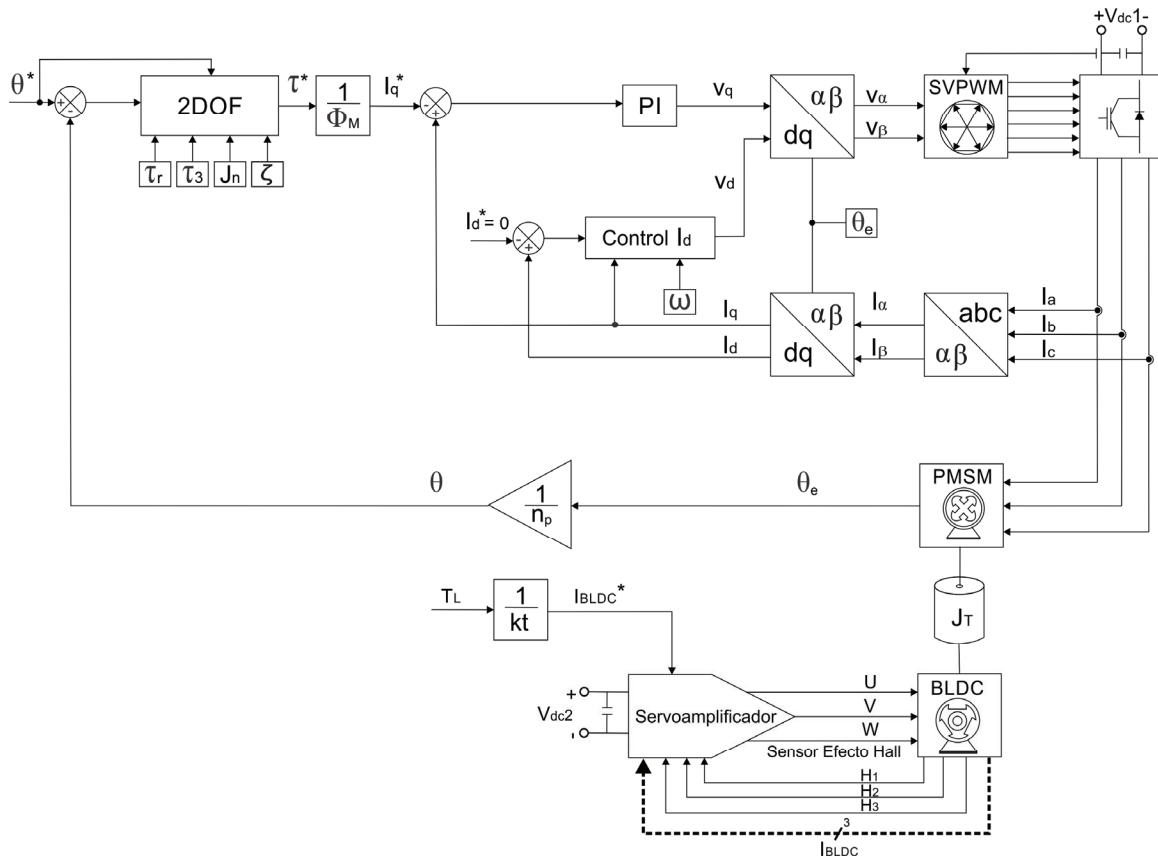


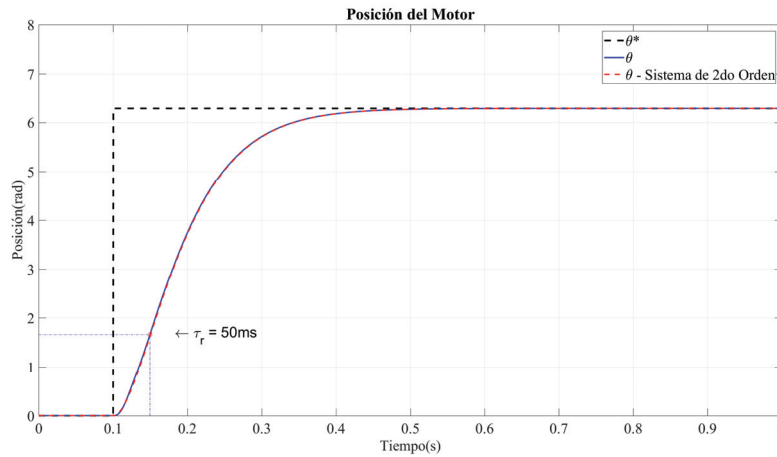
Figura IV.20 Diagrama a bloques del controlador 2DOF de posición.

En la Figura IV.9 se muestran los resultados de la simulación, véase que  $J_n$ , es tres veces mas grande que la inercia nominal mostrada en la Tabla III.1; en la Figura IV.9 podemos observar que el motor responde como es de esperarse, como un sistema lineal de segundo orden, nótese que cuando el factor de amortiguamiento es  $\xi = 1$ , la constante de tiempo del sistema equivale a la combinación de dos sistemas de primer orden como se muestra a continuación:

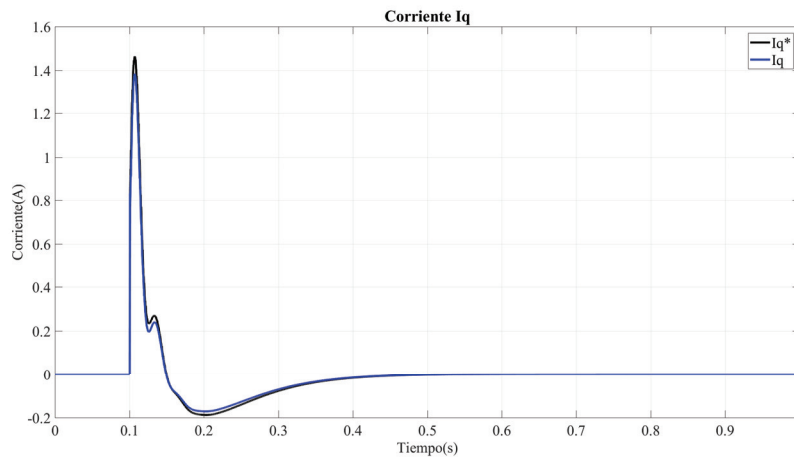
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \left( \frac{1}{\tau_1 s + 1} \right) \left( \frac{1}{\tau_2 s + 1} \right) = \frac{1}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2) s + 1} = \frac{1}{\tau_r^2 s^2 + 2\xi \tau_r s + 1}$$

En donde  $\tau_r^2 = \tau_1 \tau_2$ ,  $(\tau_1 + \tau_2) = 2\xi \tau_r$ , cuando  $\xi = 1$  se tiene que entrada del sistema  $X(s)$  alcanza un 26.4% de su respuesta, i.e.  $1 - (e^{-1} + e^{-1}) = 0.264$ . En este caso no se aplica ninguna perturbación de par externa. Esto demuestra que el controlador 2DOF de posición es capaz

de obtener la respuesta transitoria deseada de un sistema lineal de segundo orden a pesar de que se trate de un sistema no lineal. Sin embargo, este resultado no demuestra la robustez del controlador cuando existen cambios de parámetros o perturbaciones externas.

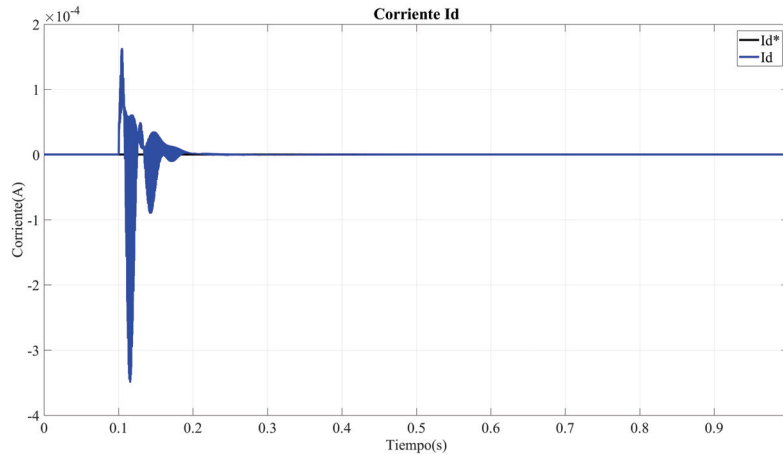


(a)



(b)

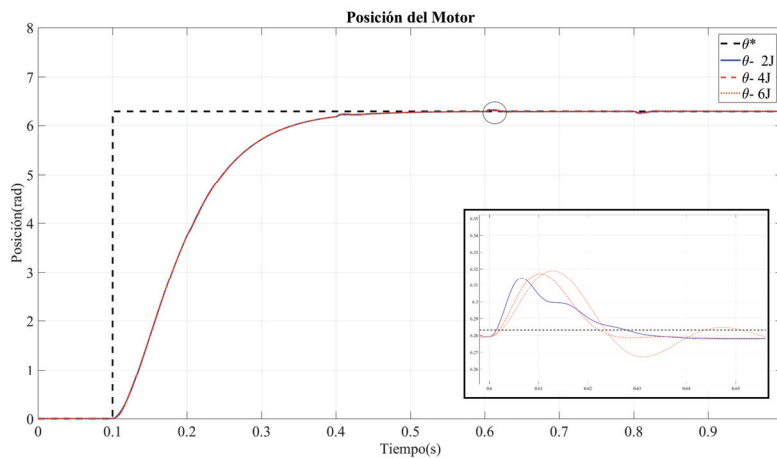




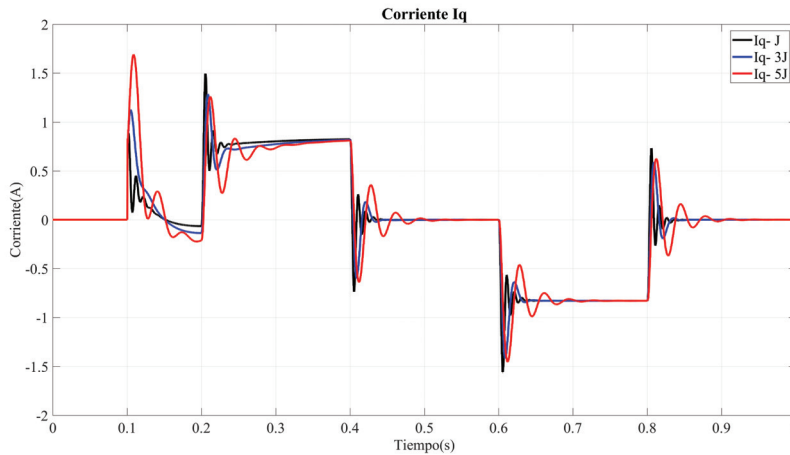
(c)

Figura IV.21 Comparación de la respuesta al escalón de control 2DOF de posición con la respuesta de un segundo orden. (a) Respuesta de posición del motor. (b) Corrientes  $I_q^*$  e  $I_q$ . (c) Corrientes  $I_d^*$  e  $I_d$ .

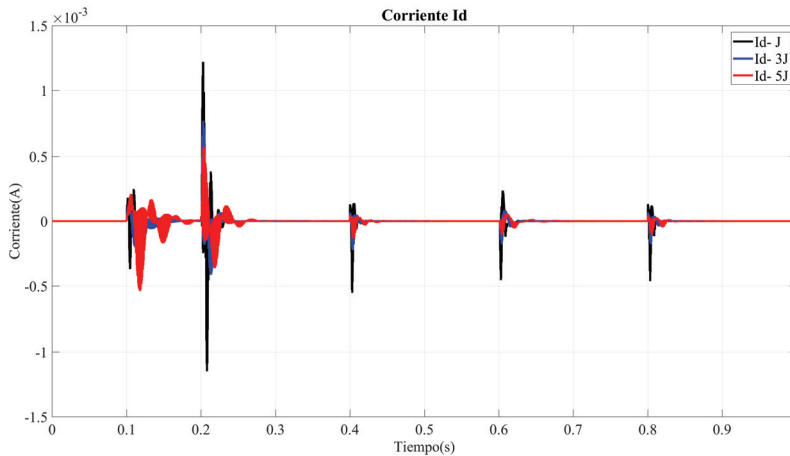
A continuación, en la Figura IV.22 se compara la respuesta sistema antes cambios de inercia, además de incluir perturbaciones externas de par. Nótese que la respuesta transitoria es preservada a pesar de estos cambios, además las perturbaciones de par externas son mitigadas rápidamente. Como puede observarse en la Figura IV.22 el controlador de posición es bastante robusto ante grandes cambios de parámetros como la inercia y perturbaciones de par externas. Estas características son deseables en control de máquinas herramientas como CNC o robots industriales. Note que los principales cambios en la respuesta es la magnitud de la corriente  $I_q$  que es de esperarse debido al incremento de la inercia de sistema, se requiere de un mayor par para preservar la respuesta deseada.



(a)



(b)



(c)

**Figura IV.22 Comparación de la respuesta al escalón de control 2DOF de posición con cambios de inercia y perturbaciones de par. (a) Respuesta de posición del motor. (b) Corrientes  $I_q$ . (c) Corrientes  $I_d$ .**

A continuación, se muestran los resultados experimentales aplicados utilizando los valores de la Tabla IV.4. En los resultados experimentales se muestran cambios que fueron aplicados de manera física al motor agregando inercia extra, aplicando perturbaciones de par. La Figura IV.11 muestra la respuesta al escalón con el motor conectado al banco; no se aplica ningún par externo; en donde la línea azul y cian representan  $\theta^*$  y  $\theta$  respectivamente con un factor de escalamiento de  $8\pi \text{ rad}/10V$ . Los trazos verde y magenta representan la corriente  $I_d$  y la corriente  $I_q$  respectivamente, en donde el factor de escalamientos es de 1:1. Véase que también se verifica que la velocidad medida en  $\Delta T = 50ms$  corresponde con el 24.6% de la posición deseada la cual corresponde al 26.4% de 2.5V, lo cual es 0.66V.

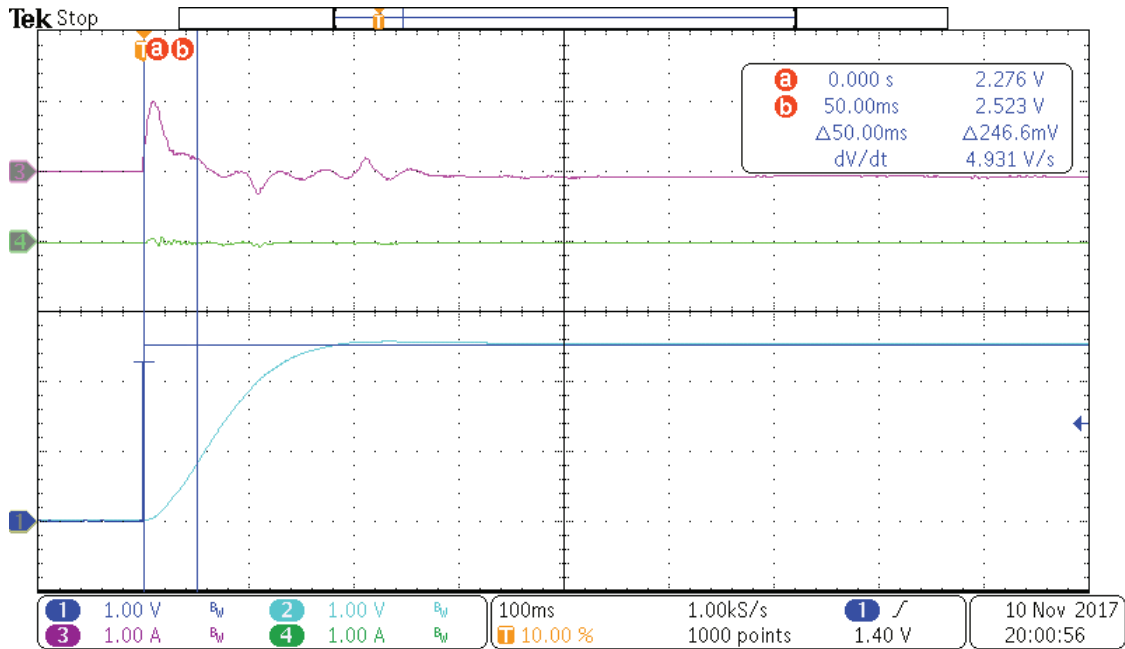


Figura IV.23 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de posición.

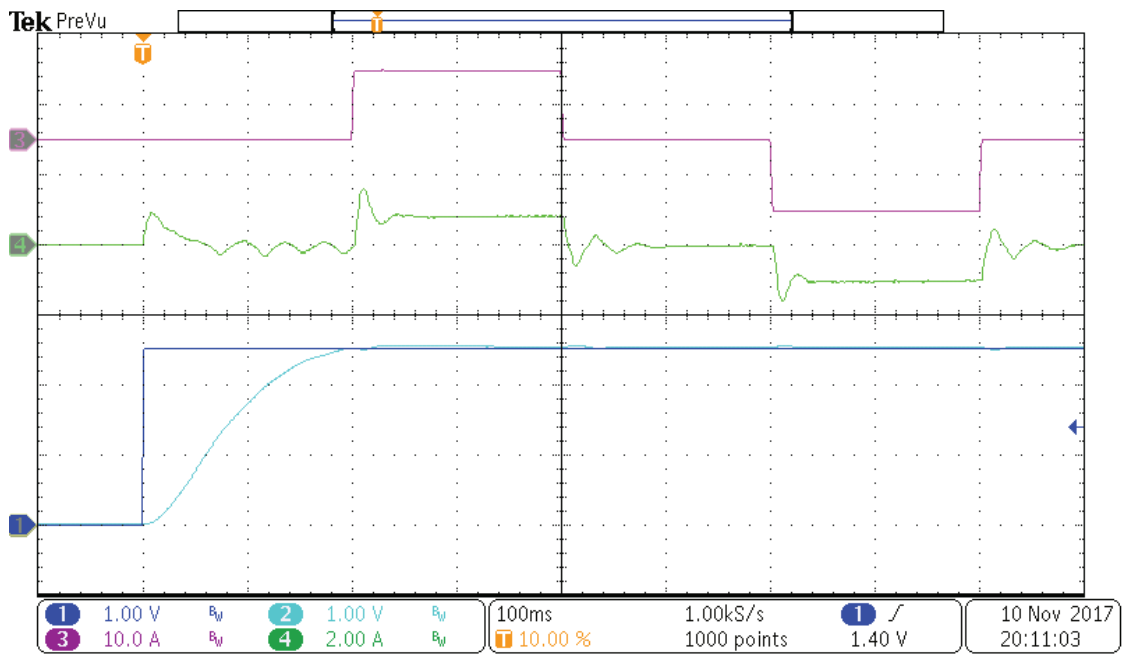


Figura IV.24 Resultados experimentales de la respuesta al escalón del control 2DOF de posición ante cambios de parámetros y perturbaciones externas.

En la Figura IV.24 se muestran los resultados bajo condiciones de cambio de parámetros y perturbaciones externas. Ahora el trazo verde representa la corriente  $I_q$ , y el trazo magenta representa la perturbación de par aplicada con un factor de 0.25Nm/10V.

De los experimentos anteriores se puede observar que los resultados experimentales coinciden con los resultados mostrados por la simulación. Verificando así la viabilidad del controlador propuesto en la práctica, así como sus extraordinarias propiedades al preservar la respuesta transitoria pudiendo elegir el factor de amortiguamiento deseado y además de mitigar rápidamente las perturbaciones de manera eficaz. Este esquema seguirá siendo investigado para su aplicación posterior en el control de robots en donde la regulación y seguimiento de trayectorias es de gran importancia.

## IV.4 Conclusiones

En este trabajo se analizó el control por orientación de campo estándar en motores síncronos de imanes permanentes, el cual consiste en dos controladores PI de corriente internos, y un controlador PI de velocidad externo, esta exitosa estrategia de control ha sido la más utilizada en las últimas décadas. La principal ventaja de este controlador es su sencillez para lograr una buena regulación de la velocidad con solo seleccionar dos ganancias (Proporcional e integral). Bajo estas premisas y respaldada por décadas de uso, esta estrategia de control lineal ha sido adoptada de manera generalizada en el control de motores. Sin embargo, esta práctica de control no contaba con una explicación formal, desde el punto de vista de sistemas no lineales, de como una estrategia de control lineal era empleada de manera exitosa para regular un sistema no lineal, lo que originaba preguntas en cuanto a la estabilidad del sistema, cuáles eran sus características y limitaciones. En este trabajo se presentó una prueba de estabilidad que explica de manera generalizada como es que esta estrategia de control funciona bien en la práctica, cuáles son las limitaciones y condiciones que restringen este buen funcionamiento, más aún se presentó una guía se sintonía la cual fue verificada mediante ejemplos numéricos de trabajos es existentes en la literatura además de experimentos, los cuales validaron los resultados presentados. La idea principal del desarrollo de esta prueba de estabilidad es remplazar a la intuición con la que muchas

veces se busca la sintonía de un controlador por un conjunto de reglas que guíen esta búsqueda, además de dar formalidad a la práctica empírica de la teoría de control.

Posteriormente, se presentaron dos controladores robustos utilizando controladores con dos grados de libertad para la regulación de velocidad y posición en motores PMSM, los cuales son una extensión que elimina muchos de los problemas y limitaciones del control PID clásico. La principal ventaja de esta estrategia de control es la capacidad de desacoplar la respuesta transitoria del desempeño al rechazo de perturbaciones. En este trabajo se presentaron dos extensiones del control de dos grados de libertad aplicados a motores de DC, i.e. sistema lineal, aplicados de manera generalizada a motores PMSM, en donde se demuestra de manera formal como estas estrategias diseñadas para sistemas lineales conservan sus propiedades cuando son empleadas en el motor PMSM. Posteriormente se presentan resultados experimentales que validan como estas estrategias presentan un desempeño y robustez extraordinarias sin incrementar la complejidad de la sintonía de estos, y ofreciendo una flexibilidad de diseño para cumplir con requerimientos como ancho de banda, tiempo de respuesta, rechazo a perturbaciones, incertidumbre y cambio de parámetros.

Los análisis de estabilidad presentados muestran cómo interactúan las diferentes dinámicas dentro de un sistema de control en lazo cerrado, dinámica de control, eléctrica y mecánica, lo cual permite claramente entender y visualizar que propiedades o dinámicas no lineales del sistema son las críticas; también nos permite visualizar como es que existe un intercambio y conversión de la energía entre los sistemas eléctrico y mecánico, así como la disipación natural de esta energía. En los análisis presentados se explotaron estas propiedades las cuales nos permitieron de manera formal y en qué condiciones explicar porque estrategias de control lineales (PI y 2DOF) regulan de manera exitosa un sistema no lineal como el PMSM. Sin llevar a la generalidad, el trabajo presentado puede servir de base para demostrar como muchos de los trabajos presentados en la literatura que bajo suposiciones consiguen de manera experimental llevar a la práctica muchas de las ideas control desarrolladas para sistemas lineales.

---

**BIBLIOGRAFÍA**

Actel®. 2013. Field Oriented Control - Encoder.

<http://www.actel.com/products/solutions/motorcontrol/>. (Accessed 14 June 2013.).

Ahmad, M. 2011. *Advances in Motor Torque Control* (1st Ed.). (M. Ahmad, Editor), INTECH, pp. 1-122.

Akrad, A., Hilairret, M., Ortega, R. and Diallo, D. 2007. Interconnection and Damping Assignment Approach for Reliable PM Synchronous Motor Control. *IEEE Colloquium on Reliability in Electromagnetic Systems*, pp. 1–6, Paris, France.

Al-Taee, M. A. 2006. Real-Time Stability Index for Open Loop Controlled Synchronous Permanent Magnet Motor Drive. In *IEEE International Universities Power Engineering Conference*, pp. 719–723. Newcastle upon Tyne, England.

Al-Taee, M. A., AlZu'bi, H. S., and Al-Din, M. S. 2008. Stable and Highly Efficient Operation of Open-Loop Controlled PM Synchronous Motor Drive. In *IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, pp. 1–6. Amman, Jordan.

Altera®. 2012. WP-01162-Optimize Motor Control Designs with an Integrated FPGA Design Flow. <http://www.altera.com/literature/wp/wp-01162-motor-control-toolflow.pdf>. (Accessed 14 June 2013.)

Altun, Y., and Gulez, K. 2012. Linear Parameter Varying Control of Permanent Magnet Synchronous Motor via Parameter-Dependent Lyapunov Function for Electrical Vehicles. In *IEEE International Conference on Vehicular Electronics and Safety (ICVES)*, pp. 340–345. Istanbul, Turkey.

Assaad-Hamida, M., Leon, J. de, Glumineau, A., and Boisliveau, R. 2013. An Adaptive Interconnected Observer for Sensorless Control of PM Synchronous Motors with Online Parameter Identification. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, no. 2, pp. 739–748.

Atmel®, 2013, Application Note-Atmel AVR1636: Configurable PMSM Sensorless Field Oriented Control using the XMEGA. <http://www.atmel.com/Images/doc42061.pdf>. (Accessed 14 June 2013.)

Boldea, I. 2008. Control Issues in Adjustable-Speed Drives - A Key Component for Realizing Energy Savings in Today's Technology. *IEEE Industrial Electronics Magazine*, pp. 32–50.

Bose, B. K. 2002. Power Electronics and Motor Drives - Recent Technology Advances. *IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, pp. 22–25, Knoxville, USA.

Bose, B. K. 2009. The Past, Present, and Future of Power Electronics. *IEEE Industrial Electronics Magazine*, pp. 7–12.

Carrillo-Serrano, R. V., Hernández-Guzmán, V. M., and Santibáñez, V. 2010. PD Control with Feedforward Compensation for Rigid Robots Actuated By Brushless DC Motors. *Robotica*, vol. 29, no. 4, pp. 507–514.

Casadei, D., Profumo, F., Serra, G. and Tani, A. 2002. FOC and DTC: Two Viable Schemes for Induction Motors Torque Control. *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 17, no. 5, pp. 779–787.

Chang, G. W., Espinosa-Pérez, G., Mendes, E., and Ortega, R. 2000. Tuning Rules for the PI Gains of Field-Oriented Controllers of Induction Motors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 47, no. 3, pp. 592–602.

Chang-Chou, M., & Ming-Liaw, C. 2009. Development of Robust Current 2-DOF Controllers for a Permanent Magnet Synchronous Motor Drive with Reaction Wheel Load. *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 24, no. 5, pp. 1304–1320.

Chikhi, A., Djarallah, M., and Chikhi, K. 2010. A Comparative Study of Field-Oriented Control and Direct-Torque Control of Induction Motors Using an Adaptive Flux Observer. *Serbian Journal of Electrical Engineering*, vol. 7, no. 1, pp. 41–55.

Choi, H. H., and Jung, J. W. 2013. Discrete-Time Fuzzy Speed Regulator Design for PM Synchronous Motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, no. 2, pp. 600–607.

Chuen-Gan, W., and Qiu, L. 2000. Robust Two Degree of Freedom Regulators for Velocity Ripple Elimination of AC Permanent Magnet Motors. In IEEE International Conference on Control Applications, pp. 156–161. Anchorage, Alaska, USA.

De Wit, P. A. S., Ortega, R., and Mareels, I. 1996. Indirect Field-Oriented Control of Induction Motors Is Robustly Globally Stable. *Automatica*, vol. 32, no. 10, pp. 1393–1402.

Dong-Chiang, H., 2011. Direct Methods for Stability Analysis of Electric Power Systems - Theoretical Foundation, BCU Methodologies, and Applications (1st Ed.). John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

Duc-Do, T., Ho-Choi, H., and Woo-Jung, J. 2012. SDRE-Based Near Optimal Control System Design for PM Synchronous Motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 59, no. 11, pp. 4063–4074.

Erenay, H. K. 2012. Permanent Magnet Synchronous Motor Control Circuit. Publication No. WO2012089466 A2, Applicant: Arcelik Anonim Sirketi.

Feng, G., Qi, W., Zhang, B., & Li, C. 2011. Analysis and Comparison of Three-Phase Variable Frequency PMSM with Single-phase Induction Motor in Household Appliances. In IEEE International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS), pp. 1–5, Beijing, China.

Freescale Semiconductor®. 2013. AN4656-PMSM FOC of Industrial Drives using the 56F84789. [http://cache.freescale.com/files/microcontrollers/doc/app\\_note/AN4656.pdf](http://cache.freescale.com/files/microcontrollers/doc/app_note/AN4656.pdf). (Accessed 14 June 2013.)

Gamazo-Real, J. C., Vázquez-Sánchez, E., and Gómez-Gil, J. 2010. Position and Speed Control of Brushless DC Motors Using Sensorless Techniques and Application Trends. *Sensors*, vol. 10, no. 7, pp. 6901–6947.

Garcia, X. T., Zigmund, B., Terlizzi, A., Pavlanin, R., and Salvatore, L. 2006. Comparison between FOC and DTC Strategies for Permanent Magnet Synchronous Motors. *Advances in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 5, no. 1, pp. 76–81.



Hernández-Guzmán, V. M., and Silva-Ortigoza, R. 2011a. PI Control plus Electric Current Loops for PM Synchronous Motors. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 19, no. 4, pp. 868–873.

Hernández-Guzmán, V. M., and Carrillo-Serrano, R. V. 2011b. Global PID Position Control of PM Stepper Motors and PM Synchronous Motors. *International Journal of Control*, vol. 84, no. 11, pp. 1807–1816.

Heydt, G. T., Venkata, S. S., and Balijepalli, N. 2000. High Impact Papers in Power Engineering 1900-1999. In *North American Power Symposium (NAPS)*, pp. 1–7, Ontario, Canada: University of Waterloo.

Huang, J., Li, H., Chen, Y. Q., and Xu, Q. 2012. Robust Position Control of PMSM Using Fractional-Order Sliding Mode Controller. *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2012, pp. 1–33.

Kim, W., Yang, C., and Chung, C. C. 2011. Design and Implementation of Simple Field-Oriented Control for Permanent Magnet Stepper Motors without DQ Transformation. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 47, no. 10, pp. 4231–4234.

Kirstein, R. F. 2005. Modular Functional Block for a Field Oriented Control System. Publication No. WO2003083611 A3, Applicant: International Rectifier Corporation.

Lamchich, M. T. 2011. *Torque Control (1st Ed.)*. (M. T. Lamchich, Editor), INTECH, pp. 1–304.

Lin, F. J., Hung, Y. C., Hwang, J. C. and Tsai, M. T. 2013. Fault-Tolerant Control of a Six-Phase Motor Drive System Using a Takagi–Sugeno–Kang Type Fuzzy Neural Network with Asymmetric Membership Function. *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 28, no. 7, pp. 3557–3572.

Liu, G., Chen, L., Zhao, W., Jiang, Y., and Qu, L. 2013. Internal Model Control of Permanent Magnet Synchronous Motor Using Support Vector Machine Generalized Inverse. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 9, no. 2, pp. 890–898.

Marafuzzaman, M., Reaz, M. B. I., and Ali, M. A. M. 2010. FPGA Implementation of an Intelligent Current DQ PI Controller for FOC PMSM Drive. In *IEEE International Conference on*

---

Computer Applications and Industrial Electronics (ICCAIE), pp. 602–605, Kuala Lumpur, Malaysia.

Melfi, M. J., Evon, S., and Mcelveen, R. 2009. Induction versus Permanent Magnet Motors - For Power Density and Energy Savings in Industrial Applications. *IEEE Industry Applications Magazine*, pp. 28–35.

Merzoug, M. S., and Naceri, F. 2008. Comparison of Field-Oriented Control and Direct Torque Control for Permanent Magnet Synchronous Motor (PMSM). *World Academy of Science, Engineering and Technology*, vol. 45, pp. 299–304.

Microchip®, 2011, AN1017 – Sensored Sinusoidal Control of a PMSM Motor. <http://ww1.microchip.com/downloads/en/AppNotes/01017A.pdf>. (Accessed 14 June 2013.)

Moudgalya, K. 2007. *Digital Control* (1st Ed.). John Wiley & Sons, West Sussex, England.

Ocen, D., Romeral, L., Ortega, J. A., Cusido, J. and García, A. 2006. Discrete Space Vector Modulation Applied on a PMSM Motor. *IEEE International Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC)*, pp. 320–325, Portoroz, Slovenia.

Ogata, K. 2002. *Modern Control engineering* (4th Ed.). Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Oliveira, J. de, Nied, A., Farias-Santos, M. H. and Pinho-Dias, R. 2011. Study on the Energy Efficiency of Soft Starting of an Induction Motor with Torque Control. *Advances in Motor Torque Control* (1st Ed.). INTECH, chapter 3, pp. 33–46.

Ortega, R., Espinosa-Pérez, G., and Astolfi, A. 2012. Theory for the User and Application Examples of the Passivity-based Control for AC Electric Machines. In *IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, pp. 758–763. Hangzhou, China.

Ortega, R., Nicklasson, P. J., and Espinosa-Pérez, G. 1996. On Speed Control of Induction Motors. *Automatica*, vol. 32, no. 3, pp. 455–460.

Ortega, R., Nicklassont, P. J., and Espinosa-Pérez, G. 1995. On Speed Control of Induction Motors. In *IEEE American Control Conference*, pp. 3521–3525. Seattle, USA.

Petrovic, V., Ortega, R., and Stankovic, A. M. 1999. A Globally Convergent Energy-Based Controller for PM Synchronous Motors. In IEEE Conference on Decision and Control, pp. 334–340. Phoenix, USA.

Petrovic, V., Ortega, R., and Stankovic, A. M. 2001. Interconnection and Damping Assignment Approach to Control of PM Synchronous Motors. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 9, no. 6, pp. 811–820.

Qiao, Z., Shi, T., Wang, Y., Yan, Y., Xia, C., and He, X. 2013. New Sliding-Mode Observer for Position Sensorless Control of Permanent-Magnet Synchronous Motor. IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 60, no. 2, pp. 710–719.

Qin, L. 2013. Field oriented control of a motor with a single shunt. Publication No. US20130043811 A1, Applicant: Texas Instruments Incorporated.

Renesas®. 2013. Motor control by RL78/G14 micro controller Sensorless vector control of permanent magnetic synchronous motor.  
[http://documentation.renesas.com/doc/products/mpumcu/apn/rl78/r01an1661ej0100\\_rl78g14.pdf](http://documentation.renesas.com/doc/products/mpumcu/apn/rl78/r01an1661ej0100_rl78g14.pdf)  
(Accessed 14 June 2013.)

Rudnicki, T., Czerwiński, R., and Frechowicz, A. 2011. Permanent Magnet Synchronous Motor Control Driver. In IEEE International Conference on Mixed Design of Integrated Circuits and Systems (MIXDES), pp. 545–548. Gliwice, Poland.

Rupprecht, G., Werner, L., and Nordby, C. J. 1980. Field-Oriented Control of a Standard AC Motor Using Microprocessors. IEEE Transactions on Industry Applications, vol. 16, no. 2, pp. 186–192.

Sastry, S. and Bodson, M. 1989. Adaptive Control – Stability, Convergence and Robustness (1st Ed.). Prentice-Hall. Englewood Cliffs, New Jersey.

ST®. 2007. AN1947-ST7MC PMAC Sine Wave Motor Control Software Library.  
[http://www.st.com/web/en/resource/technical/document/application\\_note/CD00020409.pdf](http://www.st.com/web/en/resource/technical/document/application_note/CD00020409.pdf)  
(Accessed 14 June 2013.)

Texas instruments®. 2013. controlSUITE v3.2.1. <http://www.ti.com/tool/controlsuite>. (Accessed 14 June 2013.)

Wikipedia, 2013, “Direct Torque Control”, [http://en.wikipedia.org/wiki/Direct\\_torque\\_control](http://en.wikipedia.org/wiki/Direct_torque_control). (Accessed 14 June 2013.)

Wilamowski, B. M., and Irwin, J. D. 2011. *Power Electronics and Motor Drives* (2nd Ed.). CRC Press, Taylor & Francis Group, Florida, USA.

Wissem-Naouar, M., Monmasson, E., Ammar-Naassani, A., Slama-Belkhdja, I., and Patin, N. 2007. FPGA-based current controllers for AC machine drives—a review. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 54, no. 4, pp. 1907–1925.

Xue, H., and Jiang, J. 2009. Passivity-based Control of Synchronous Motors. In *IEEE International Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC)*, pp. 2047–2050, Wuhan, China.

Xue, H., and Wang, Y. 2012. Passivity-based Control of Synchronous Motors. In *IEEE International Conference and Exhibition on Innovative Smart Grid Technologies (ISGT)*, pp. 1–5, Berlin, Germany.

Yang, C., Sun, J., Zhang, Q. and Ma, X. 2013. Lyapunov Stability and Strong Passivity Analysis for Nonlinear Descriptor Systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 60, no. 4, pp. 1003-1012.

Yano, M., Abe, S., and Ohno, E. 2004. History of Power Electronics for Motor Drives in Japan. In *IEEE Conference on the History of Electronics (CHE)*, pp. 1–11, Bletchley, United Kingdom.

Yin-Ho, E. Y. 2008. Parking Control Technique for Permanent Magnet Motor Drives with Sinusoidal BEMF. Publication No. WO2008005363 A2, Applicant: International Rectifier Corporation.

Zhang, Y., Akujuobi, C. M., Ali, W. H., Tolliver, C. L., and Shieh, L. S. 2006. Load Disturbance Resistance Speed Controller Design for PMSM. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 53, no. 4, pp. 1198–1208.

Umeno, T. and Hori, Y., 1989a, “Generalized Robust Servosystem Design Based on the Parametrization of Two Degrees of Freedom Controllers,” *Power Electron. Spec. Conf.*, no. 1, pp. 945–951.

Umeno, T. and Hori, Y., 1989b, “Robust DC Servosystem Design Based On the Parameterization of Two Degrees of Freedom Control Systems,” in *IEEE Annual Conference of the Industrial Electronics Society (IECON)*, pp. 313 – 318.

Umeno, T. and Hori, Y., 1991, “Robust Speed Control of DC Servomotors Using Modern Two Degrees-of-Freedom Controller Design,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 38, no. 5, pp. 363–368.

Umeno, T., Kaneko, T., and Hori, Y., 1993, “Robust Servosystem Design with Two Degrees of Freedom and its Application to Novel Motion Control of Robot Manipulators,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 40, no. 5, pp. 473–485.

## ANEXO 1

A continuación, se muestra el desarrollo de la obtención de la ecuación (III.31), se tiene la función candidata de Lyapunov, en donde se busca  $\dot{V}(\xi)$ .

$$V(\xi) = \frac{1}{2}L_q\rho^2 + \frac{1}{2}L_dI_d^2 + \frac{1}{2}\alpha_{di}z_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_{qi}z_2^2 + \frac{1}{2}J\tilde{\omega}^2 + \frac{1}{2}(k'_i + \beta k'_p + b\beta)z^2 + \beta Jz\tilde{\omega} + \sum_{i=1}^7 \frac{1}{2\Gamma_i} \tilde{\gamma}_i^2$$

En donde la derivada de  $V(\xi)$  está dada por:

$$\dot{V}(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

Encontrando las derivadas parciales se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) = & L_q\rho\dot{\rho} + L_dI_d\dot{I}_d + \alpha_{di}z_1\dot{z}_1 + \alpha_{qi}z_2\dot{z}_2 + J\tilde{\omega}\dot{\tilde{\omega}} + (k'_i + \beta k'_p + b\beta)z\dot{z} + \beta Jz\dot{\tilde{\omega}} + \beta J\tilde{\omega}\dot{z} \\ & + \sum_{i=1}^7 \frac{\tilde{\gamma}_i}{\Gamma_i} \dot{\tilde{\gamma}}_i \end{aligned}$$

Substituyendo los estados  $\dot{z}$ ,  $\dot{\tilde{\omega}}$ ,  $\dot{z}_1$ ,  $\dot{I}_d$ ,  $\dot{\tilde{\gamma}}_i$ ,  $\dot{z}_2$ ,  $\dot{\rho}$ , dados por (III.14), (III.15), (III.19), (III.20), (III.21), (III.26) y (III.27), respectivamente y cancelando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) = & \frac{L_q k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} + \frac{L_q k'_i}{\Phi_M} \tilde{\omega} \left[ \frac{1}{\epsilon_{\tilde{\gamma}}} + \frac{L_q I_d}{\epsilon_{\tilde{\gamma}}} \left[ -(R_s + \alpha_d)I_d + n_p L_q \tilde{\omega} \rho + n_p L_q \tilde{\omega} I_q^* + n_p L_q \omega^* \rho - \alpha_{di} z_1 - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{n_p L_q \omega^* k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} - \frac{n_p L_q \omega^* k'_i}{\Phi_M} z + h \right] \frac{1}{\epsilon_{\tilde{\gamma}}} + \alpha_{di} z_1 I_d + \alpha_{qi} z_2 \rho + f \tilde{\omega} [-b \tilde{\omega} + n_p (L_d - L_q) I_d \rho + \right. \right. \\ & \left. \left. n_p (L_d - L_q) I_d I_q^* + \Phi_M \rho - k'_p \tilde{\omega} - k'_i z \right] \frac{1}{f} + (k'_i + \beta k'_p + b\beta) z \tilde{\omega} + \beta f z [-b \tilde{\omega} + \right. \\ & \left. n_p (L_d - L_q) I_d \rho + n_p (L_d - L_q) I_d I_q^* + \Phi_M \rho - k'_p \tilde{\omega} - k'_i z \right] \frac{1}{f} + \beta J \tilde{\omega} [\tilde{\omega}] + \frac{\tilde{\gamma}_1}{\epsilon_{\tilde{\gamma}}} [-F_{\tilde{\gamma}} I_d \rho^2] + \\ & \frac{\tilde{\gamma}_2}{\epsilon_{\tilde{\gamma}}} [-F_2 I_q^* I_d \rho] + \frac{\tilde{\gamma}_3}{\epsilon_{\tilde{\gamma}}} [-F_{\tilde{\gamma}} I_q^* \tilde{\omega} I_d] + \frac{\tilde{\gamma}_4}{\epsilon_{\tilde{\gamma}}} [-F_{\tilde{\gamma}} \rho I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt] + \frac{\tilde{\gamma}_5}{\epsilon_{\tilde{\gamma}}} [-F_{\tilde{\gamma}} I_q^* I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt] + \\ & \frac{\tilde{\gamma}_6}{\epsilon_{\tilde{\gamma}}} [-F_{\tilde{\gamma}} \rho I_d] + \frac{\tilde{\gamma}_7}{\epsilon_{\tilde{\gamma}}} [-F_{\tilde{\gamma}} I_q^* I_d] \end{aligned}$$

Realizando los productos y reduciendo términos

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\xi) = & \left[ -(R_s + \alpha_q)\rho^2 + \frac{R_s k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} \rho + \frac{R_s k'_i}{\Phi_M} z \rho \right] - n_p L_d I_d \rho \tilde{\omega} - \\
& n_p L_d \omega^* I_d \rho \left[ -\Phi_M \tilde{\omega} \rho - \alpha_{qi} z_2 \rho \right] + \frac{L_q k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} \rho + \frac{L_q k'_i}{\Phi_M} \tilde{\omega} z \rho + \left[ -(R_s + \alpha_q) I_d^2 + n_p L_q I_d \rho \tilde{\omega} \right] + \\
& n_p L_q I_d I_q^* \tilde{\omega} + n_p L_q \omega^* \rho I_d \left[ -\alpha_{di} z_1 I_d \right] - \frac{n_p L_q \omega^* k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} I_d - \frac{n_p L_q \omega^* k'_i}{\Phi_M} z I_d + I_d h + \left[ \alpha_{di} z_1 I_d \right] + \\
& \left[ \alpha_{qi} z_2 \rho \right] + \left[ -b \tilde{\omega}^2 + n_p (L_d - L_q) I_d \rho \tilde{\omega} \right] + n_p (L_d - L_q) I_d I_q^* \tilde{\omega} + \left[ \Phi_M \tilde{\omega} \rho \right] - k'_p \tilde{\omega}^2 \left[ -k'_i z \tilde{\omega} \right] + \\
& \left[ k'_i z \tilde{\omega} \right] + \left[ \beta k'_p z \tilde{\omega} \right] + \left[ b \beta z \tilde{\omega} \right] + \left[ -b \beta z \tilde{\omega} \right] + n_p (L_d - L_q) I_d \rho \beta z + n_p (L_d - L_q) I_d I_q^* \beta z + \\
& \Phi_M \rho \beta z \left[ -\beta k'_p z \tilde{\omega} - k'_i z^2 \beta \right] + \beta J \tilde{\omega}^2 - \tilde{\gamma}_1 \rho^2 I_d - \tilde{\gamma}_2 I_q^* I_d \rho - \tilde{\gamma}_3 I_q^* \tilde{\omega} I_d - \tilde{\gamma}_4 \rho I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \\
& \tilde{\gamma}_5 I_q^* I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \tilde{\gamma}_6 \rho I_d - \tilde{\gamma}_7 I_q^* I_d
\end{aligned}$$

Sustituyendo  $h$  y reduciendo términos iguales:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\xi) = & \left[ -(R_s + \alpha_q)\rho^2 + \frac{R_s k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} \rho + \frac{R_s k'_i}{\Phi_M} z \rho - n_p L_d \omega^* I_d \rho + \frac{L_q k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} \rho + \frac{L_q k'_i}{\Phi_M} \tilde{\omega} z \rho \right] + \\
& \left[ -(R_s + \alpha_q) I_d^2 + n_p L_q \tilde{\omega} I_q^* I_d + n_p L_q \omega^* \rho I_d - \frac{n_p L_q \omega^* k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} I_d - \frac{n_p L_q \omega^* k'_i}{\Phi_M} z I_d + \tilde{\gamma}_1 \rho^2 I_d \right] - \\
& \gamma_1 \rho^2 I_d + \left[ \tilde{\gamma}_2 I_q^* \rho I_d \right] - \gamma_2 I_q^* \rho I_d + \left[ \tilde{\gamma}_3 I_q^* \tilde{\omega} I_d \right] - \gamma_3 I_q^* \tilde{\omega} I_d + \left[ \tilde{\gamma}_4 \rho I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt \right] - \\
& \gamma_4 \rho I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt + \left[ \tilde{\gamma}_5 I_q^* I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt \right] - \gamma_5 I_q^* I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt + \left[ \tilde{\gamma}_6 \rho I_d \right] - \gamma_6 \rho I_d + \left[ \tilde{\gamma}_7 I_q^* I_d \right] - \\
& \gamma_7 I_q^* I_d + \left[ -b \tilde{\omega}^2 + n_p (L_d - L_q) I_d I_q^* \tilde{\omega} - k'_p \tilde{\omega}^2 \right] + \left[ n_p (L_d - L_q) I_d \rho \beta z + n_p (L_d - \right. \\
& \left. L_q) I_d I_q^* \beta z + \Phi_M \rho \beta z - k'_i z^2 \beta \right] + \\
& \beta J \tilde{\omega}^2 \left[ -\tilde{\gamma}_1 \rho^2 I_d \right] \left[ -\tilde{\gamma}_2 I_q^* \rho I_d \right] \left[ -\tilde{\gamma}_3 I_q^* \tilde{\omega} I_d \right] \left[ -\tilde{\gamma}_4 \rho I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt \right] \left[ -\tilde{\gamma}_5 I_q^* I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt \right] \left[ -\tilde{\gamma}_6 \rho I_d \right] \\
& \left[ -\tilde{\gamma}_7 I_q^* I_d \right]
\end{aligned}$$

Simplificando se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) = & \left[ -(R_s + \alpha_q)\rho^2 + \frac{R_s k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} \rho + \frac{R_s k'_i}{\Phi_M} z \rho - n_p L_d \omega^* I_d \rho + \frac{L_q k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} \rho + \frac{L_q k'_i}{\Phi_M} \tilde{\omega} \rho \right] + \\ & \left[ -(R_s + \alpha_q) I_d^2 + n_p L_q \tilde{\omega} I_q^* I_d + n_p L_q \omega^* \rho I_d - \frac{n_p L_q \omega^* k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} I_d - \frac{n_p L_q \omega^* k'_i}{\Phi_M} z I_d - \gamma_1 \rho^2 I_d - \right. \\ & \left. \gamma_2 I_q^* \rho I_d - \gamma_3 I_q^* \tilde{\omega} I_d - \gamma_4 \rho I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \gamma_5 I_q^* I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \gamma_6 \rho I_d - \gamma_7 I_q^* I_d \right] + \\ & \left[ -b \tilde{\omega}^2 + n_p (L_d - L_q) I_d I_q^* \tilde{\omega} - k'_p \tilde{\omega}^2 \right] + \left[ n_p (L_d - L_q) I_d \rho \beta z + n_p (L_d - L_q) I_d I_q^* \beta z + \right. \\ & \left. \Phi_M \rho \beta z - k'_i z^2 \beta \right] + \beta J \tilde{\omega}^2 \end{aligned}$$

En donde:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{n_p L_q k'_p (L_d - L_q)}{J \Phi_M} & \qquad \qquad \qquad \gamma_3 = n_p L_d \\ \gamma_4 = \gamma_5 = \beta n_p (L_d - L_q) & \qquad \qquad \qquad \gamma_6 = \frac{\gamma_4}{k'_i} (b \omega^* + \tau_L) \\ \gamma_7 = \frac{\gamma_5}{k'_i} (b \omega^* + \tau_L) & \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \tilde{\omega}$  y reduciendo términos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) = & \left[ -(R_s + \alpha_q)\rho^2 + \frac{R_s k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} \rho + \frac{R_s k'_i}{\Phi_M} z \rho - n_p L_d \omega^* I_d \rho + \frac{L_q k'_p}{\Phi_M} \left( \frac{\rho}{J} \right) \left\{ -b \tilde{\omega} + \right. \right. \\ & \left. \left. \boxed{n_p (L_d - L_q) I_d \rho} + \boxed{n_p (L_d - L_q) I_d I_q^*} + \Phi_M \rho - k'_p \tilde{\omega} - k'_i z \right\} + \frac{L_q k'_i}{\Phi_M} \tilde{\omega} \rho \right] + \left[ -(R_s + \alpha_q) I_d^2 + \right. \\ & \left. \boxed{n_p L_q I_q^* \tilde{\omega} I_d} + n_p L_q \omega^* \rho I_d - \frac{n_p L_q \omega^* k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} I_d - \frac{n_p L_q \omega^* k'_i}{\Phi_M} z I_d - \boxed{-\left\{ \frac{n_p L_q k'_p (L_d - L_q)}{J \Phi_M} \right\} \rho^2 I_d} - \right. \\ & \left. \boxed{\left\{ \frac{n_p L_q k'_p (L_d - L_q)}{J \Phi_M} \right\} I_q^* \rho I_d} - \boxed{\{n_p L_d\} I_q^* \tilde{\omega} I_d} - \gamma_4 \rho I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \gamma_5 I_q^* I_d \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \gamma_6 \rho I_d - \right. \\ & \left. \gamma_7 I_q^* I_d \right] + \left[ -b \tilde{\omega}^2 + \boxed{n_p (L_d - L_q) I_q^* \tilde{\omega} I_d} - k'_p \tilde{\omega}^2 \right] + \left[ n_p (L_d - L_q) I_d \rho \beta z + n_p (L_d - \right. \\ & \left. L_q) I_d I_q^* \beta z + \Phi_M \rho \beta z - k'_i z^2 \beta \right] + \beta J \tilde{\omega}^2 \end{aligned}$$



Sustituyendo  $\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7$ , se identifican factores comunes.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) = & -(R_s + \alpha_q)\rho^2 + \frac{R_s k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega}\rho + \frac{R_s k'_i}{\Phi_M} z\rho - n_p L_d \omega^* I_d \rho - \frac{L_q k'_p b}{J\Phi_M} \tilde{\omega}\rho + \frac{L_q k'_p}{J} \rho^2 - \\ & \frac{L_q (k'_p)^2}{J\Phi_M} \tilde{\omega}\rho - \frac{L_q k'_p k'_i}{J\Phi_M} z\rho + \frac{L_q k'_i}{\Phi_M} \tilde{\omega}\rho - (R_s + \alpha_q) I_d^2 + n_p L_q \omega^* \rho I_d - \frac{n_p L_q \omega^* k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} I_d - \\ & \frac{n_p L_q \omega^* k'_i}{\Phi_M} z I_d - b \tilde{\omega}^2 - k'_p \tilde{\omega}^2 + \beta J \tilde{\omega}^2 + \beta \Phi_M \rho z - k'_i z^2 \beta + [n_p (L_d - L_q) I_d \rho \beta z + \\ & n_p (L_d - L_q) I_d I_q^* \beta z] - \{\beta n_p (L_d - L_q)\} \boxed{\rho I_d} \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \{\beta n_p (L_d - L_q)\} \boxed{I_q^* I_d} \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt - \\ & \left\{ \frac{\beta n_p (L_d - L_q)}{k'_i} (b\omega^* + \tau_L) \right\} \boxed{\rho I_d} - \left\{ \frac{\beta n_p (L_d - L_q)}{k'_i} (b\omega^* + \tau_L) \right\} \boxed{I_q^* I_d} \end{aligned}$$

Factorizando los términos comunes  $\rho I_d, I_q^* I_d$  y utilizando la ecuación (III.14) se obtienen las siguientes expresiones:

$$-\beta n_p (L_d - L_q) \rho I_d \left\{ \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt + \frac{1}{k'_i} (b\omega^* + \tau_L) \right\} = -\beta n_p (L_d - L_q) \rho I_d z$$

$$-\beta n_p (L_d - L_q) I_q^* I_d \left\{ \int_0^t \tilde{\omega}(t) dt + \frac{1}{k'_i} (b\omega^* + \tau_L) \right\} = -\beta n_p (L_d - L_q) I_q^* I_d z$$

Sustituyendo las expresiones encontradas

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) = & -(R_s + \alpha_q)\rho^2 + \frac{R_s k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega}\rho + \frac{R_s k'_i}{\Phi_M} z\rho - n_p L_d \omega^* I_d \rho - \frac{L_q k'_p b}{J\Phi_M} \tilde{\omega}\rho + \frac{L_q k'_p}{J} \rho^2 - \\ & \frac{L_q (k'_p)^2}{J\Phi_M} \tilde{\omega}\rho - \frac{L_q k'_p k'_i}{J\Phi_M} z\rho + \frac{L_q k'_i}{\Phi_M} \tilde{\omega}\rho - (R_s + \alpha_q) I_d^2 + n_p L_q \omega^* \rho I_d - \frac{n_p L_q \omega^* k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} I_d - \\ & \frac{n_p L_q \omega^* k'_i}{\Phi_M} z I_d - b \tilde{\omega}^2 - k'_p \tilde{\omega}^2 + \beta J \tilde{\omega}^2 + \beta \Phi_M \rho z - k'_i z^2 \beta + \boxed{n_p (L_d - L_q) I_d \rho \beta z} + \\ & \boxed{n_p (L_d - L_q) I_d I_q^* \beta z} \quad \boxed{-\beta n_p (L_d - L_q) \rho I_d z} \quad \boxed{-\beta n_p (L_d - L_q) I_q^* I_d z} \end{aligned}$$

Finalmente  $\dot{V}(\xi)$  esta dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) = & -(R_s + \alpha_q)\rho^2 + \frac{R_s k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} \rho + \frac{R_s k'_i}{\Phi_M} z \rho - n_p L_d \omega^* I_d \rho - \frac{L_q k'_p b}{J \Phi_M} \tilde{\omega} \rho + \frac{L_q k'_p}{J} \rho^2 - \\ & \frac{L_q (k'_p)^2}{J \Phi_M} \tilde{\omega} \rho - \frac{L_q k'_p k'_i}{J \Phi_M} z \rho + \frac{L_q k'_i}{\Phi_M} \tilde{\omega} \rho - (R_s + \alpha_q) I_d^2 + n_p L_q \omega^* \rho I_d - \frac{n_p L_q \omega^* k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} I_d - \\ & \frac{n_p L_q \omega^* k'_i}{\Phi_M} z I_d - b \tilde{\omega}^2 - k'_p \tilde{\omega}^2 + \beta J \tilde{\omega}^2 + \beta \Phi_M \rho z - k'_i z^2 \beta \end{aligned}$$

Agrupando términos comunes:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) = & \left[ -(R_s + \alpha_q) + \frac{L_q k'_p}{J} \right] \rho^2 + \left[ \frac{R_s k'_p + L_q k'_i}{\Phi_M} - \frac{L_q k'_p b + L_q (k'_p)^2}{J \Phi_M} \right] \tilde{\omega} \rho + \left[ \frac{R_s k'_i}{\Phi_M} - \frac{L_q k'_p k'_i}{J \Phi_M} + \right. \\ & \left. \beta \Phi_M \right] z \rho + [n_p (L_q - L_d) \omega^*] \rho I_d + [\beta J - b - k'_p] \tilde{\omega}^2 - k'_i \beta z^2 - (R_s + \alpha_q) I_d^2 - \\ & \frac{n_p L_q \omega^* k'_p}{\Phi_M} \tilde{\omega} I_d - \frac{n_p L_q \omega^* k'_i}{\Phi_M} z I_d \end{aligned}$$