Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Psicología
Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

CÁCULO ESTIMATIVO EN QUINTO GRADO DE LA ESCUELA PRIMARIA. IMPLEMENTACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA.

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

Presenta:
Sandra Stauffer

Dirigido por:

Dra. Diana Violeta Solares Pineda
Directora

Dra. Claudia Andrea Broitman
Co-directora

Dra. Diana Violeta Solares Pineda — Presidente — Firma

Dra. Claudia Andrea Broitman — Secretario — Firma

Dra. Mónica Alvarado Castellanos — Vocal — mónica Alvarado C. Firma

Dra. Karina Hess Zimmermann — Suplente — Firma

Dr. Armando Solares Rojas — Suplente — Firma

Lic. Manuel Fernando Gamboa Márquez
Director de la Facultad

Loarca
Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña
Directora de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Noviembre de 2017

RESUMEN

El cálculo mental estimativo juega un rol importante en el aprendizaje de los conocimientos numéricos y en el desarrollo del pensamiento algebraico de los niños; sin embargo, su presencia en la enseñanza aún es escasa. Y si bien existen estudios que documentan estrategias de alumnos para resolver problemas de cálculo estimativo, así como propuestas didácticas enfocadas al desarrollo de ese tipo de cálculo en la educación básica, existen pocos estudios que documenten la implementación de tales propuestas.

La presente investigación tuvo como objetivo el diseño y la implementación de una secuencia didáctica de cálculo estimativo de problemas multiplicativos para un grupo de 5° año de primaria; la finalidad era identificar qué tipos de problemas son fértiles para el aprendizaje de este tipo de cálculo y qué condiciones didácticas lo favorecen. Para ello, se realizó un análisis didáctico de los procedimientos de resolución de los alumnos y de las intervenciones didácticas que favorecen el aprendizaje del cálculo estimativo.

El marco teórico en el que se inscribió esta investigación es la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (2007), y su diseño metodológico se basó en los aportes de la Ingeniería Didáctica. Para llevar a cabo el estudio se elaboró una tipología de problemas de cálculo estimativo con base en propuestas didácticas ya existentes. De esa tipología se eligieron diferentes clases de problemas para diseñar una secuencia didáctica que se implementó en un grupo de 5° año de primaria de un colegio particular bilingüe de la ciudad de Querétaro. Se analizaron los procedimientos de resolución de los alumnos, así como algunas de las intervenciones didácticas. Se identificaron distintos procedimientos, entre ellos el redondeo, el uso de números compatibles y las estrategias que implican establecer relaciones entre dos cálculos. En cuanto a las intervenciones didácticas se destacan aquellas que propician prácticas matemáticas como la comparación y justificación de resultados, la identificación y análisis de errores, y la sistematización de la producción matemática.

Palabras claves: Cálculo estimativo, problemas multiplicativos, secuencia didáctica, Teoría de las Situaciones Didácticas, Ingeniería Didáctica.

SUMMARY

Computational estimation plays an important role in the learning of numerical knowledge and in the development of algebraic thinking of children; nevertheless, its presence in education is still limited. In addition, although studies that document student’s strategies for resolving estimation problems do exist, as well as didactic proposals focused on developing this type of calculating in basic education, few studies document the implementation of such proposals.

The present investigation had the objective to design and implement a didactic sequence of multiplicative computational estimation problems for a 5th grade primary group; the finality was identifying what kind of problems are fertile to the learning of this type of calculation and what didactic interventions favor it. For that, we made a didactic analysis of the student’s resolution procedures and of the didactic interventions that favor learning of computational estimation.

The theoretical framework of this investigation originates from the Theory of Didactical Situations from Brousseau (2007), and its methodological design was based on contributions from Didactic Engineering. To carry out the investigation we elaborated a typology of estimation problems, based on pre-existing didactic proposals. From that typology, we chose different clases of problems to design a didactic sequence, which was implemented in a 5th grade primary group of a private bilingual school in the city of Querétaro. We analyzed student’s resolution procedures, among them rounding numbers, using compatible numbers and strategies that imply establishing relations between two calculations. As to the didactic interventions, highlighted are the ones that favor mathematic practices such as comparing and justifying results, error identification and analysis and the systematization of mathematical production.

Key Words: Computational estimation, multiplicative problems, didactic sequence, Theory of Didactical Situations, Didactic Engineering

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi directora de tesis, Dra. Diana Violeta Solares Pineda, por su apoyo y compromiso constantes. Gracias, Diana, por el intercambio de ideas, tus comentarios críticos-constructivos y, sobre todo, por la generosidad con la que compartiste tus conocimientos y tu tiempo.

A mi co-directora, la Dra. Claudia Broitman, por compartir su mirada experta y ayudar a mejorar paso a paso la presente investigación.

A mis lectores, Dra. Mónica Alvarado Castellanos, Dra. Karina Hess Zimmermann y Dr. Armando Solares Rojas por los comentarios tan valiosos que ayudaron a hacer de este trabajo lo que es.

A la maestra Silvia García por sus pertinentes aportaciones metodológicas que ayduaron a mejorar la calidad de la secuencia didáctica.

A los alumnos que fueron los protoganistas en esta investigación, así como a sus padres que dieron el consentimiento para la participación; sin ellos no hubiera sido posible este trabajo.

A los directivos del colegio donde se implementó la secuencia didáctica por su apoyo determinante.

A mis amigas y amigos por su interés y por sus palabras de ánimo.

Hago extensivo mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme otorgado una beca para realizar mis estudios de Maestría.

Contenido

Índice de tablas

Índice de Figuras

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de investigación nos propusimos, por un lado, diseñar e implementar una secuencia didáctica de cálculo estimativo de problemas multiplicativos para un grupo de 5° año de primaria y, por el otro lado, analizar los procedimientos de resolución de los alumnos y ciertas intervenciones didácticas durante la implementación de la misma secuencia.

El cálculo mental estimativo juega un rol importante en el aprendizaje de los conocimientos numéricos y en el desarrollo del pensamiento algebraico; sin embargo, su difusión en los currículos y libros de texto revisados es escasa. Si bien existen varios estudios que indagan sobre las estrategias[1] que usan los alumnos para resolver problemas de cálculo mental, así como propuestas didácticas con el objetivo de desarrollar las habilidades de cálculo estimativo en alumnos de la educación básica, identificamos pocos estudios que documenten la implementación de propuestas didácticas.

El diseño de nuestra investigación es de tipo cualitativo con alcance exploratorio. Diseñamos una secuencia didáctica basándonos en propuestas didácticas existentes, la implementamos en un grupo de 5° año de primaria de una escuela particular y analizamos tal implementación.

En el primer capítulo de este trabajo se presenta el problema de investigación. Exponenemos un panorama de algunos antecedentes sobre el cálculo mental y el cálculo estimativo desde investigaciones didácticas y psicológicas y analizamos la presencia del cálculo estimativo en documentos curriculares, libros de texto y propuestas didácticas. Al final del capítulo presentamos las preguntas y los objetivos de investigación.

El capítulo 2 se dedica al marco teórico. Se describe qué es la Didáctica de las Matemáticas y cuáles son las teorías que enmarcan esta investigación: la Teoría

[1] En esta tesis se usarán los términos “estrategias” y “procedimientos” como sinónimos.

de las Situaciones Didácticas de Brousseau (2007), la Metodología de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) y la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaus (1990).

Las características metodológicas generales del estudio se delimitan en el capítulo 3, para después, en el capítulo 4, exponer cómo se diseñó, implementó y analizó la secuencia didáctica.

En los capítulos 5 y 6 se expone el análisis de los datos. Mientras que en el capítulo 5 se presentan los procedimientos de los alumnos, el capítulo 6 se dedica a analizar las intervenciones didácticas.

En el capítulo 7 se presentan las conclusiones de este estudio, poniendo en diálogo las preguntas de investigación con los datos de esta investigación. Para finalizar, incluimos algunas reflexiones sobre los alcances y límites del presente trabajo.

CAPÍTULO 1
PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

1.1 Problema de investigación

El cálculo mental suele asociarse a la repetición memorística de cálculos y resultados matemáticos como, por ejemplo, las tablas de multiplicación. Sin embargo, su sentido es mucho más amplio. Cecilia Parra (1994) define el cálculo mental como "el conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan, sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados" (p. 222). En este enfoque, que adoptamos para nuestra investigación, hacer cálculo mental no excluye la utilización de papel y lápiz; se refiere a que no se trabaja de manera sistemática con algoritmos definidos sino con procedimientos singulares adecuados a cada situación. Además, coincidimos con Gálvez y otros (2011) quienes afirman que:

> "…apropiarse de las estrategias del cálculo mentao implica utilizar de manera flexible y "oportunista" las propiedades del sistema de numeración y de las operaciones aritméticas para sustituir un cálculo que se propone en una situación dada por otro equivalente, pero más sencillo. Así, se desarrollan estrategias no convencionales "situadas", en el sentido que consideran la situación numérica donde se plantea el cálculo a realizar." (Gálvez et al., 2011, p. 11)

El cálculo estimativo es un tipo de problemas dentro del cálculo mental. A diferencia del cálculo mental exacto, el cálculo mental estimativo busca un resultado cuyo grado de aproximación puede variar según el problema. Segovia & Castro (1989) definen la estimación como "juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite" (p.18). Los mismos autores distinguen dos tipos de estimación: estimación en cálculo y estimación en medida. La estimación en cálculo se refiere a problemas del tipo "Estima el producto de 1985 multiplicado por 18". El concepto de estimación en medida incluye problemas sobre el valor de una determinada cantidad o la valoración que se puede hacer sobre el resultado de una medida. Se distinguen dos grupos de magnitudes: continua (p.ej. estimar la estatura de una persona) y discreta (p.ej. estimar el número de personas que asisten a un evento). En el presente estudio nos ocuparemos del primer tipo, estimación en cálculo.

Históricamente, el dominio de las cuatro operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) era un pilar de la escuela tradicional. La enseñanza de las matemáticas se enfocaba en la memorización y se consideraba de suma importancia la velocidad en el cálculo. Nuevas ideas pedagógicas en los años 60 y 70, sobre todo a partir de la Reforma de la Matemática Moderna[2], provocaron el olvido del cálculo mental. Se consideraba más importante la comprensión que la automatización y los maestros dedicaban mucho tiempo de clase a enseñar nociones nuevas como conjuntos y relaciones - que luego en los años 80 también - fueron revisadas. Hoy en día, gracias a diversas investigaciones al respecto, sabemos que la automatización y la comprensión no son aspectos antagónicos y que “los conocimientos construidos de uno u otro tipo de cálculo se alimentan recíprocamente” (Secretaría de Educación Pública, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2006, p.15).

El trabajo con problemas de cálculo mental estimativo puede contribuir a comprender particularidades del sistema decimal como, por ejemplo, la agrupación decimal o cuestiones de valor posicional, como lo muestran investigaciones de Lerner (2005) y de Broitman (2012), mismas que se abordarán en el apartado de los antecedentes.

El cálculo mental estimativo está incluido también en problemas de azar y probabilidad. Como explican Díaz, Batanero y Cañizares (1991), “la probabilidad proporciona un modo de medir la incertidumbre” ya que “a pesar del carácter

[2] En esta reforma se produjo un fenómeno llamado aplicacionismo de la teoría piagetiana. Uno de los efectos negativos de esta reforma fue el vaciamiento de contenidos que se reflejó por ejemplo en la disminución de la importancia del cálculo mental. (Parra, 1994, p.224)

aproximado de las leyes del azar, desde el momento en que se conoce su grado de aproximación, es posible hacer predicciones, como ocurre con las restantes leyes experimentales, ya que ninguna magnitud se puede medir con una precisión absoluta."

Además, algunos problemas de cálculo mental estimativo tienen el potencial de promover el desarrollo del pensamiento algebraico en los alumnos. Mason, Graham, Pimm & Gowar (1985) identifican cuatro raíces del álgebra: 1) aritmética generalizada, 2) posibilidades y restricciones, 3) reordenamiento y manipulación y 4) expresión de la generalidad. Mencionan que la esencia de la raíz de la expresión de la generalidad está en "identificar y aprovechar aquellos momentos cuando los alumnos están realizando cálculos que pueden revelar, con un poquito de indagación, las reglas de la aritmética" (p. 90). En el presente trabajo consideramos que algunos de los problemas planteados a los alumnos en esta secuencia implican cálculos que permiten evidenciar algunas de estas reglas. Es el caso de los problemas que implican la comparación de dos cálculos; por ejemplo, decidir si 12 x 12'600[3] es menor, mayor o igual a 24 x 6300.

Segovia y Castro (2009) explican dos razones fundamentales para que la estimación se incorpore al currículo escolar: la primera es su utilidad, la segunda es que completa la formación de los estudiantes. Además, subrayan que es importante que la enseñanza escolar abarque el doble carácter (exacto y aproximado) de la matemática.

Otro argumento que apoya la importancia de incorporar el cálculo mental estimativo al currículo escolar es que juega un rol importante en el desarrollo del sentido numérico. Para el National Council of Teachers of Mathematics (en los subsiguientes NCTM) el sentido numérico implica:

- "comprender bien el significado de los números,
- tener desarrolladas relaciones múltiples entre los números,
- reconocer las magnitudes relativas de los números,
- conocer los efectos relativos de las operaciones con números,

[3] Para escribir los números a partir de 10'000 se usará en todo el trabajo la notación de los libros de texto suizos (con apóstrofo en lugar de coma) ya que es la notación a la cual están acostumbrados los alumos y la que se usó durante toda la imlementación de la secuencia.

- desarrollar referentes para las medidas”

(NCTM, 1989, citado en Segovia y Castro, 2009, p. 502).

Por su lado, García (2014) hizo un amplio análisis de los programas de matemáticas, así como de exámenes nacionales de matemáticas en México. Presenta resultados de tales exámenes y considera que algunos de estos resultados se relacionan con un sentido numérico deficientemente desarrollado en la mayoría de los participantes de los exámenes. Cabe precisar que el término “Sentido numérico” se usa para hacer referencia a un eje temático en los programas oficiales de Educación Básica. Si bien la autora expresa que no hay una respuesta única sobre qué es el sentido numérico, expone que existen “diferentes posturas a partir de la consideración de que el sentido numérico es una habilidad, una intuición, comprensión, conocimiento o razonamiento acerca de los números” (p. 57). La autora vincula el cálculo estimativo con el sentido numérico afirmando que la estimación juega un rol muy importante en el desarrollo del sentido numérico. Manifiesta que, pese a que se pida un resultado exacto, es valioso primero hacer una estimación para revisar si el resultado exacto obtenido puede ser lógico o no.

Estas aportaciones muestran que el cálculo mental estimativo ha sido reconocido como contenido indispensable en la enseñanza de las matemáticas. Identificamos también propuestas didácticas en América Latina que abordan problemas de cálculo estimativo. Estas propuestas, así como la revisión de documentos curriculares, se presentarán en los siguientes apartados.

1.2 Antecedentes: El cálculo mental y el cálculo estimativo desde las investigaciones didácticas y psicológicas

En este apartado se presentan algunas investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza del cálculo mental y del cálculo estimativo, aunque no todas ellas estén apoyadas en el marco teórico que asumimos para nuestro estudio y que se expondrá en el siguiente capítulo.

Gálvez y otros (2011) investigaron sobre estrategias cognitivas para el cálculo mental empleadas por alumnos del primer ciclo de la enseñanza básica en Chile. Las autoras parten de la hipótesis de que para resolver tareas de cálculo mental aditivo los alumnos de primer ciclo básico, "emplean un repertorio diverso de estrategias que incluye tanto las convencionales - típicamente enseñadas en la escuela – como otras, no convencionales, que son eventualmente idiosincrásicas, aprendidas o desarrolladas por ellos mismos." (p. 19). En las entrevistas que hicieron a los alumnos en el marco de su investigación, los autores identificaron 16 diferentes estrategias, de las cuales las más usadas son el conteo de uno a uno con los dedos (23 %) y la reducción a operar con decenas y unidades por separado (22 %), mientras que solamente un 3% de los alumnos recurre a resultados memorizados. Si bien este estudio es sobre el primer ciclo de la educación primaria mientras que el nuestro se ubica en el segundo ciclo, nos aporta elementos sobre el repertorio de estrategias que pueden ser identificadas en el análisis de los procesos de resolución de los alumnos.

Otra investigación que arroja datos relevantes sobre la estimación en niños pequeños al sumar bidígitos es la de Lerner (2005). Con la intención de estudiar los conocimientos de los niños sobre el valor posicional, la investigadora argentina entrevista a alumnos y les presenta, entre otros, problemas del siguiente tipo. Les propone resolver con calculadora una serie de sumas cuyos primeros sumandos son números entre 30 y 39 mientras que los segundos son números entre 20 y 29, por ejemplo: 32 + 26; 34 + 28, etc. Se anotan los resultados obtenidos y al finalizar la serie, el entrevistador les pregunta si es posible, al sumar *treintialgo más veintialgo,* obtener un resultado *cuarentialgo o setentialgo.* En ambos casos, se les solicita justificación de la respuesta. Después se les presenta otra serie de sumas (56 + 22; 54 + 26 etc.) y se les pide a los niños que anticipen cómo empezará el resultado (*cuarentialgo o setentialgo)*.

En el análisis de las respuestas de los alumnos la investigadora distingue tres niveles de conocimiento. En el primero los alumnos se equivocan sistemáticamente cuando la cantidad de unidades de los sumandos da lugar a la formación de una nueva decena. Estos alumnos consideran que las unidades no tienen influencia en la cantidad de dieces del resultado. Los alumnos del segundo grupo anticipan correctamente en la mayoría de los casos; sin embargo, aunque sepan que las unidades pueden influir en el resultado, todavía no han comprendido por qué y cómo inciden. Los alumnos del tercer grupo hacen anticipaciones sistemáticamente correctas apelando desde el principio de la entrevista a la formación de una nueva decena para justificar sus respuestas. El trabajo de Lerner es un aporte fundamental para este estudio por su análisis detallado de las relaciones entre estrategias y conocimientos sobre las propiedades del sistema de numeración, aspectos que serán considerados para nuestro análisis de los procedimientos de resolución de los alumnos.

Por el otro lado, Ávila y Waldegg (1997), así como Broitman (2012), indagaron sobre las estrategias usadas por adultos con escasa escolaridad en México y Argentina, respectivamente. Aunque en la presente investigación trabajamos con alumnos de nivel primario, estos dos antecedentes con adultos son importantes ya que en ellas se pueden haber identificado algunos procedimientos que también presenten los alumnos de nuestro estudio. Ávila y Waldegg (1997), sostienen que los adultos con escasa o nula escolaridad, a la hora de resolver problemas cotidianos que involucran cálculo, desarrollan sus propias reglas no convencionales. Las autoras recopilan ciertas estrategias que se reportan reiteradamente en varias investigaciones y que parecen ser constantes en los adultos con escasa o nula escolaridad. En cuanto a las operaciones aritméticas elementales, encuentran que la memorización es el recurso más importante de sus estrategias. Además, entre sus hallazgos, analizan que los adultos recurren a la suma aún para resolver problemas que involucran a las otras operaciones. Al contrario del funcionamiento de los algoritmos convencionales, los adultos resuelven las operaciones de izquierda a derecha, es decir que en un cálculo como, por ejemplo, 235 + 314 suman primero las centenas (200 + 300), después las decenas (30 + 10) y al final las unidades (5 + 4). Para resolver multiplicaciones los adultos recurren a sumas iteradas (por ejemplo 3 x 4 = 4 + 4 + 4) y a “tablas de multiplicar incompletas y distintas a las escolares” que van construyendo a partir de sus experiencias. Además de la suma iterada se encuentra también la estrategia de la duplicación reiterada (p.ej. 15 x 7 → 15 x 2 = 30 → 30 x 2 = 60 → 30 + 60 = 90 → 15 x 7 = 60 + 30 + 15 = 105). Para la división se observa que los adultos suponen un cociente que ponen a prueba mediante sumas iteradas o duplicaciones (p.ej. 32 ÷ 4: Si el cociente fuera 1, el dividendo sería 4; si el cociente fuera 2, el dividendo sería 8, etc.) hasta llegar al resultado correcto. Otras estrategias que usan se vinculan con la descomposición del dividendo (p.ej. 480 ÷ 4 = (400 ÷ 4) + (80 ÷ 4) o del divisor (p.ej. 36 ÷4 = (36 ÷ 2) ÷ 2). Para todo tipo de problemas se encontró que los adultos con mayor experiencia en cálculos hacen uso de estimaciones por redondeo. Las investigaciones de Ávila y Waldegg son un aporte para nuestro trabajo en tanto a la diversidad de estrategias, sobre todo las relacionadas con el campo multiplicativo y con la estimación, que las autoras identifican en su estudio.

Por su lado, en su investigación con adultos que inician su escolaridad en la Ciudad de Buenos Aires, Broitman (2012) también encuentra que los cálculos memorizados constituyen un recurso importante para resolver problemas cotidianos. Algunos de ellos son: sumas con números de una cifra (p. ej. 5 + 5), sumas de números redondos con varias cifras (p. ej. 300 + 300). Se trata de cálculos que funcionan como punto de apoyo y son utilizados por los adultos entrevistados para resolver cálculos más complejos. Además, varios de los adultos entrevistados en su investigación hacen uso de estrategias de cálculo estimativo, sobre todo del redondeo, para resolver sumas y restas. Por ejemplo, en un problema en el que el entrevistado debe responder si 354 + 536 da como resultado más o menos que 1000, uno de los participantes contesta que da menos, “porque acá tenemos ochocientos… (señalando las centenas respectivas y sumándolas) y hay ochenta… (señalando las decenas respectivas y sumándolas)” (p. 163). Este ejemplo muestra que el participante utiliza sus conocimientos sobre el valor posicional e interpreta correctamente el 3 de 354 y el 5 de 536 como 300 y 500. Para problemas multiplicativos, Broitman reporta que los partcipantes de la investigación usan sumas iteradas y conocimientos que involucran, aunque sea de manera implícita, propiedades de proporcionalidad. Además, como en las sumas, recurren a resultados memorizados. En cuanto a los problemas que involucran a la división, la mayoría de los participantes dice no saber dividir; sin embargo, se muestra que interactuando con los problemas propuestos por la investigadora despliegan una variedad de estrategias de cálculo mental, sobre todo en problemas de reparto equitativo en contextos de manejo del dinero. Este estudio es un antecedente importante para nuestro trabajo por los procedimientos identificados que involucran estrategias de estimación, como por ejemplo el redondeo.

Además de los aportes ya mencionados, es necesario remitirnos a las investigaciones de Robert E. Reys (1982), Barbara J. Reys (1986), Cortés, Backhoff y Organista (2005), y Segovia y Castro (2007). Cabe precisar que todas estas invstigaciones se apoyan en las estrategias de cálculo estimativo identificadas por Reys.

Barbara J. Reys (Reys, 1986) distingue tres procesos mentales y cinco estrategias de cálculo estimativo, las cuales se presentan en el siguiente cuadro:

Tabla 1
Procesos mentales y estrategias de cálculo estimativo según Reys (1986)[4]

Procesos mentales	**Estrategias de cálculo estimativo**
Reformulación: Se cambian los datos numéricos, pero se deja intacta la estructura del problema.	• Dígito de la izquierda • Redondeo • Números compatibles
Traducción: Se cambian los datos numéricos y la estructura del problema.	• Agrupación • Números especiales
Compensación: Se hacen ajustes numéricos finales con el fin de acercar el resultado estimativo al resultado exacto.	• Ajustes

En la siguiente tabla se explican las diferentes estrategias:

[4] Tabla de elaboración propia

Tabla 2
Estrategias de cálculo estimativo con base en Reys (1986)[5]

Estrategia	Ejemplo	Explicación
Dígito de la izquierda (truncamiento)	355 +160 +478	1. Se suman los dígitos de la izquierda más significativos según la situación (300 + 100 + 400) 2. Ajuste: Se observa que 55 más 60 más 78 da casi 200 por lo que un resultado estimativo sería 1000.
Redondeo	43 x 62	1. 40 x 60 = 2400 2. Ajuste: El resultado será mayor que 2400 porque se redondearon los dos números hacia abaja.
Números compatibles	3380 ÷ 70	1. 3500 ÷ 70 = 50 (compatible porque 5 x 7 = 35) 2. Ajuste: El resultado será menor que 50 porque el dividendo compatible es mayor que el dividendo original
Agrupación	92´147 + 90'767 + 91'666	1. Todos los sumandos están alrededor de 90'000 por lo que se puede calcular: 3 x 90'000 = 270'000 2. Ajuste: El resultado será mayor que 270'000 porque se calculó con números menores que los números originales
Números especiales	$\frac{7}{8}+\frac{12}{13}$	Es una estrategia que combina puntos de las estrategias anteriores. 1. Los dos números están cerca de un entero por lo que la suma estimada es 1 + 1 = 2. 2. Ajuste: El resultado final da menos que 2 porque cada una de las dos fracciones es menor a un entero.
Ajustes		Los ajustes se pueden hacer al terminar de trabajar con cualquier otra estrategia para acercar el resultado estimativo al resultado exacto.

La estrategia de los números compatibles identificada por Reys, es explicada por Cortés y otros (2005) de la siguiente manera:

> "En esta estrategia, el estudiante debe observar de manera global todos los números involucrados en el problema y cambiar o redondear cada uno para hacerlos compatibles entre ellos. Se deben considerar parejas de números que den resultados exactos ya que mentalmente son muy fáciles de operar. Esta estrategia es especialmente efectiva en problemas de división." (p. 246)

[5] Tabla de elaboración propia

En problemas de división los números son compatibles si el dividendo es múltiplo del divisor o, como lo expresaron algunos alumnos, si "está en la tabla" del divisor.

Por su parte, Robert E. Reys (Reys, 1982) indagó en el estado de Missouri, Estados Unidos, sobre las estrategias que usan alumnos de secundaria considerados como "buenos estimadores" para resolver problemas de estimación. Su investigación se replicó después, con ciertas adaptaciones, en varios países, entre ellos México (Cortés et al., 2005). Este último estudio, realizado también con alumnos de secundaria, muestra que la estrategia que más usan los alumnos que tienen un mayor dominio del cálculo estimtativo es el redondeo, y que la estrategia "dígito de la izquierda" se usa de manera "intuitiva" y correcta por la mayoría de los estudiantes. Los alumnos aplican pocas veces el agrupamiento de números ya que esta estrategia se puede sustituir por las dos anteriores. Dado que esos resultados coinciden con el estudio de Robert E. Reys, Cortés y otros (2005) concluyen que hay características, estrategias y procesos cognoscitivos comunes a los estudiantes con mayor dominio del cálculo estimativo, independientemente de sus bagajes culturales y sistemas de enseñanza Sin embargo, subrayan que los alumnos mexicanos muestran pocas habilidades para resolver problemas de cálculo mental, lo que les permite confirmar su propia aseveración de que la estimación de resultados de operaciones aritméticas mentales no se enseña en forma explícita ni adecuada en las escuelas.

Segovia y Castro (2007), por su parte, hacen una revisión de investigaciones sobre la estimación en el cálculo. Explican que "la estimación produce resultados aproximados porque en los procesos de estimación se transforman o sustituyen los datos por números sencillos; es decir que sean fáciles de memorizar y asequibles para las operaciones aritméticas mentales." (p. 2). Además, reportan tres formas diferentes de producir números sencillos: por truncamiento, por redondeo o por sustitución.

En el caso del truncamiento se toman solamente los dígitos de la izquierda más significativos según la situación. Las cifras suprimidas se pueden reemplazar por ceros o se puede calcular con el número tal como queda y añadir los ceros al final (p.ej. 3572 se puede truncar a 3570, a 3500, a 3000 o a 3; en el último de los casos hay que agregar los ceros después de hacer el cálculo en cuestión). En el redondeo también se trabaja solamente con los dígitos de la izquierda más significativos con la condición de que las cifras 0, 1, 2, 3 o 4 se redondean “hacia abajo” (p.ej. 34 → 30), mientras que las cifras 5, 6, 7 u 8 se redondean “hacia arriba” (p.ej. 36 → 40). En el caso del número 3572 posibles redondeos serían 3570, 3600 o 4000. Se habla de sustitución si un dato que resulta complicado se sustituye por otro próximo para hacer desaparecer la dificultad, por ejemplo, en 36’894 ÷ 7 se puede sustituir el 36’894 por 35’000 para que quede más sencilla la división (35’000 ÷ 7).

En el presente estudio nos apoyaremos en algunos de los términos propuestos por Reys para explicar los procedimientos de los alumnos, como se expondrá con detalle en el capítulo 3.

En el siguiente apartado presentaremos una exploración de la existencia del cálculo mental estimativo en documentos curriculares y libros de textos.

1.3 **Presencia del cálculo mental estimativo en documentos curriculares, libros de texto y propuestas didácticas**

Para el presente capítulo revisamos documentos curriculares, libros de textos y propuestas didácticas.

En México, el eje denominado “Sentido Numérico y pensamiento algebraico” aparece a partir del año 2009 en los programas oficiales de la educación primaria (García, 2014). El programa de estudios 2011 menciona en los “Propósitos del estudio de las Matemáticas para la Educación Básica” lo siguiente:

> “Mediante el estudio de las Matemáticas en la Educación Básica se pretende que los niños y adolescentes:
>
> - Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, así como elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.
> - Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución.
> - Muestren disposición hacia el estudio de la matemática, así como al trabajo autónomo y colaborativo. (Secretaría de Educación Pública, 2011, p. 61)

Aunque el cálculo estimativo no se menciona explícitamente en los puntos anteriores, se podría inferir su importancia para el propósito que se refiere a la utilización de diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución. En cambio, en los “Propósitos del estudio de las Matemáticas para la Educación Primaria” sí se menciona de manera explícita el cálculo estimativo:

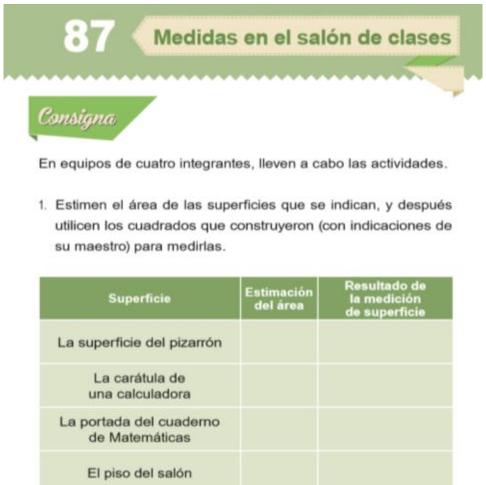
> “En esta fase de su educación, como resultado del estudio de las Matemáticas se espera que los alumnos utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y resta con números fraccionarios y decimales para resolver problemas aditivos y multiplicativos.” (Secretaría de Educación Pública, 2011, p. 62)

Sin embargo, en los “Estándares Curriculares de Matemáticas”, publicados por la Secretaría de Educación Pública de México, que pretenden “presentar la visión de una población que sabe utilizar los conocimientos matemáticos” y que “comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos en los cuatro periodos escolares para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática” (Secretaría de Educación Pública, 2011, p. 63) ya no aparece el cálculo mental y solamente se hace referencia a los algoritmos convencionales. La asignatura de Matemáticas, como lo menciona el Programa de Estudios 2011, se organiza en tres niveles: el primero corresponde a los tres ejes (Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida; Manejo de la información), el segundo a los temas y el tercero a los contenidos. Además de estos tres niveles se encuentran los “Aprendizajes esperados”, que señalan conocimientos y habilidades que todos los alumnos deben alcanzar como resultado del estudio de varios contenidos. El cálculo estimativo no se menciona en ninguno de estos tres niveles y tampoco en los “Aprendizajes esperados”.

En los libros de texto actuales (“Desafíos matemáticos”, 2013)[6] de 4°, 5º y 6° grado de primaria identificamos algunas propuestas relacionadas con el cálculo mental estimativo[7]. Hemos mencionado anteriormente que se distingue entre la estimación en medida y la estimación en cálculo. En 4° año, el cálculo estimativo aparece vinculado a la estimación en medida, por ejemplo, en el cálculo de áreas, así como en problemas de comparación de la capacidad de diferentes recipientes, como lo muestran los siguientes dos ejemplos:

[6] En México los alumnos reciben en forma gratuita libros de texto producidos por la Secretaría de Educación Pública.

[7] Para analizar la presencia del cáculo estimativo en los libros de texto, se hizo una búsqueda rápida con las palabras claves “estimar”, “anticipar” y “aproximado”.



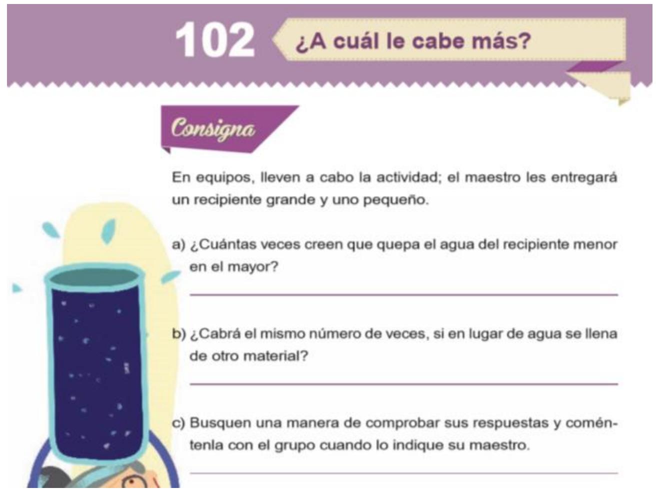
87 Medidas en el salón de clases

Consigna

En equipos de cuatro integrantes, lleven a cabo las actividades.

1. Estimen el área de las superficies que se indican, y después utilicen los cuadrados que construyeron (con indicaciones de su maestro) para medirlas.

Superficie	Estimación del área	Resultado de la medición de superficie
La superficie del pizarrón		
La carátula de una calculadora		
La portada del cuaderno de Matemáticas		
El piso del salón		



102 ¿A cuál le cabe más?

Consigna

En equipos, lleven a cabo la actividad; el maestro les entregará un recipiente grande y uno pequeño.

a) ¿Cuántas veces creen que quepa el agua del recipiente menor en el mayor?

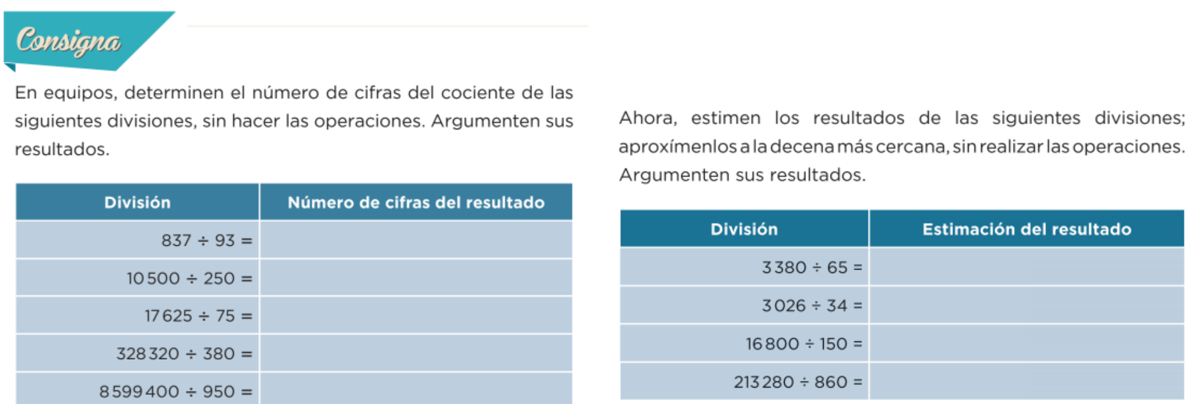
b) ¿Cabrá el mismo número de veces, si en lugar de agua se llena de otro material?

c) Busquen una manera de comprobar sus respuestas y coméntenla con el grupo cuando lo indique su maestro.

Figura 1: Estimación áreas (SEP, 2015, p. 164)

Figura 2: Estimación capacidad (SEP, 2015, p. 192)

En 5° año, a diferencia de lo señalado para el grado anterior, sí aparece la estimación ligada al cálculo, incluyendo problemas de anticipación de cifras y de estimación de cocientes en divisiones, tales como los que se presentan a continuación:



Consigna

En equipos, determinen el número de cifras del cociente de las siguientes divisiones, sin hacer las operaciones. Argumenten sus resultados.

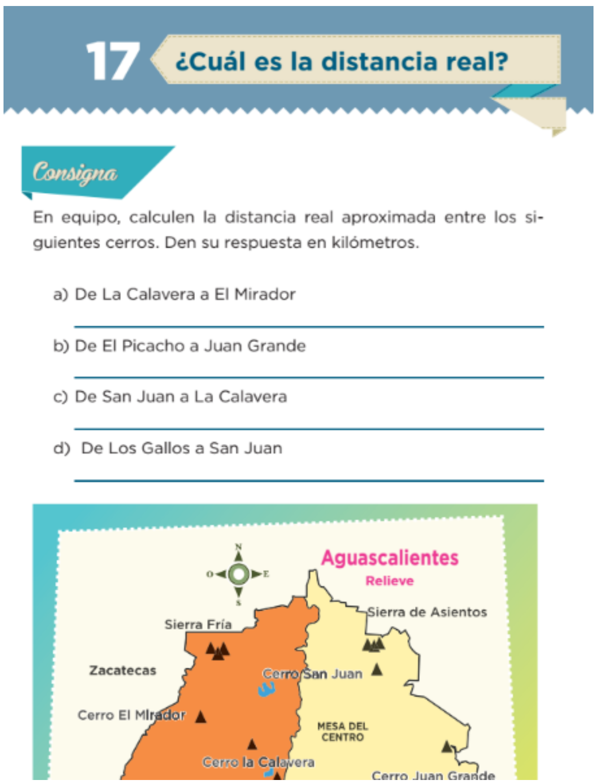
División	Número de cifras del resultado
837 ÷ 93 =	
10 500 ÷ 250 =	
17 625 ÷ 75 =	
328 320 ÷ 380 =	
8 599 400 ÷ 950 =	

Ahora, estimen los resultados de las siguientes divisiones; aproxímenlos a la decena más cercana, sin realizar las operaciones. Argumenten sus resultados.

División	Estimación del resultado
3 380 ÷ 65 =	
3 026 ÷ 34 =	
16 800 ÷ 150 =	
213 280 ÷ 860 =	

Figura 3: Estimación División (SEP, 2014, p. 13)

En los libros para 6° año hallamos una lección de estimación en medida y otra de estimación en cálculo. En la primera se trata de estimar distancias con base en un mapa, mientras que en la segunda se hace una estimación de un multiplicativo.



17 ¿Cuál es la distancia real?

Consigna

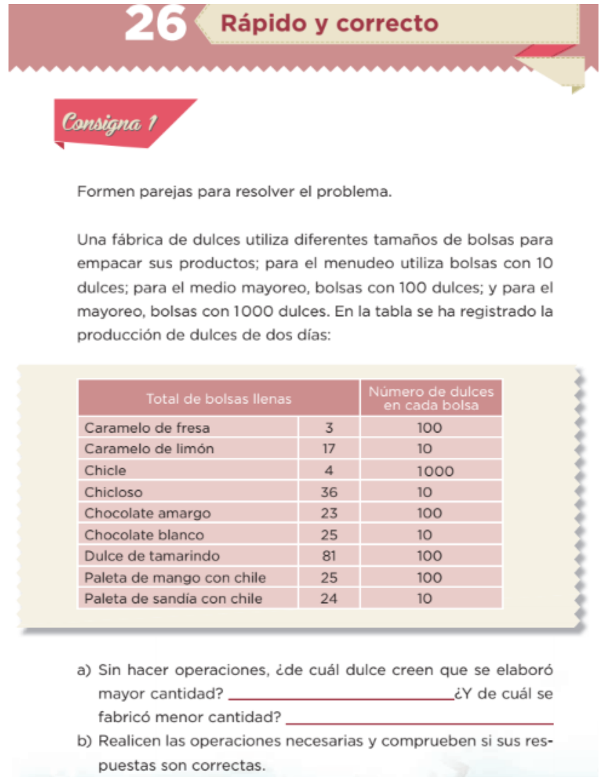
En equipo, calculen la distancia real aproximada entre los siguientes cerros. Den su respuesta en kilómetros.

a) De La Calavera a El Mirador

b) De El Picacho a Juan Grande

c) De San Juan a La Calavera

d) De Los Gallos a San Juan



26 Rápido y correcto

Consigna 1

Formen parejas para resolver el problema.

Una fábrica de dulces utiliza diferentes tamaños de bolsas para empacar sus productos; para el menudeo utiliza bolsas con 10 dulces; para el medio mayoreo, bolsas con 100 dulces; y para el mayoreo, bolsas con 1000 dulces. En la tabla se ha registrado la producción de dulces de dos días:

Total de bolsas llenas		Número de dulces en cada bolsa
Caramelo de fresa	3	100
Caramelo de limón	17	10
Chicle	4	1000
Chicloso	36	10
Chocolate amargo	23	100
Chocolate blanco	25	10
Dulce de tamarindo	81	100
Paleta de mango con chile	25	100
Paleta de sandía con chile	24	10

a) Sin hacer operaciones, ¿de cuál dulce creen que se elaboró mayor cantidad? ________ ¿Y de cuál se fabricó menor cantidad? ________

b) Realicen las operaciones necesarias y comprueben si sus respuestas son correctas.

Figura 4: Estimación distancia (SEP, 2016, p. 34)   *Figura 5: Estimación multiplicación (SEP, 2016, p. 48)*

La muy escasa presencia de la estimación en general, y del cálculo estimativo en particular en los libros de texto de segundo ciclo de la escuela primaria de México, nos permite considerar la insuficiencia de estas propuestas para generar un trabajo sistemático sobre los conocimientos del cálculo mental estimativo.

De manera consistente a su escasa presencia en la enseñanza propuesta a través de los libros de texto, algunos resultados de evaluaciones a gran escala reflejan dificultades en este ámbito. García (2014) reporta que en los resultados de los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos (EXCALE 2010), organizados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), se pueden identificar dificultades en la resolución de problemas que involucran trabajar con el sentido numérico. La misma autora documenta varios ejemplos en los cuales los estudiantes podrían llegar a la respuesta correcta descartando respuestas no razonables, apelando al sentido numérico. Un reactivo de la prueba para 6° año de primaria que nos ilustra lo anterior es el siguiente:

¿Cuál es el resultado correcto al resolver la operación $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$?

A. $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$

B. $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{2}{7}$

C. $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$

D. $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{2}{10}$

Figura 6: Reactivo Excale 2010 (García, 2014, p. 36)

Si se identifica que a $\frac{1}{2}$ se le suma “algo”, se podría deducir entonces que el resultado debe ser mayor que $\frac{1}{2}$, por lo que se podrían descartar las respuestas B, C y D sin aplicar ninguna estrategia de cálculo exacto. Sin embargo, los resultados de la aplicación de EXCALE 2010 reportan que solamente el 30 % de los alumnos de 6° de primaria resolvió correctamente este problema. (García, 2014). Ello nos hace inferir que la predominancia de los algoritmos convencionales y de los procedimientos de cálculo exacto en la enseñanza, sumada a la escasa presencia de la enseñanza en los libros de texto únicos y gratuitos de nuestro país, obstaculiza que los alumnos desarrollen estrategias basadas en el cálculo mental estimativo.

Por otra parte, el currículo del cantón de Zürich, Suiza[8] (Bildungsdirektion des Kantons Zürich, 2010), en el cual se apoya el colegio donde se implementó la secuencia didáctica de este estudio, considera al cálculo mental estimativo en los siguientes contenidos de enseñanza: estimar resultados a través del redondeo, usar propiedades de las operaciones para el cálculo mental, redondear medidas. Estos contenidos del currículo también se identifican en los libros de textos suizos “Mathematik” de 1° a 6° año de educación primaria, con los que se trabaja en el colegio en cuestión. Encontramos propuestas para abordar el cálculo estimativo a partir de 3° año de Primaria. Los autores no ubican el cálculo estimativo directamente dentro del cálculo mental, sino que lo abordan bajo el concepto de “aplicación de medidas”

[8] Se revisaron publicaciones suizas porque la institución en la cual se implementó la secuencia didáctica enseña las matemáticas con libros de texto suizos, basándose en el currículo del cantón de Zurich, Suiza.

(Anwendung von Grössen). En los libros de 3° a 5° año de primaria se trabaja la estimación de medidas y cantidades, como lo muestran los siguientes ejemplos:

- Establecer medidas de referencia para estimar longitudes (3° de primaria)

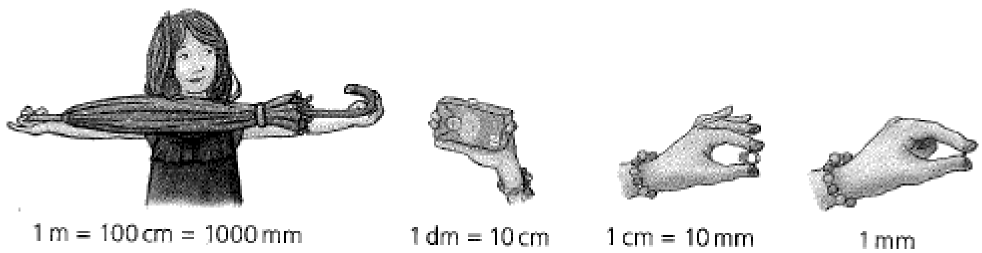


Figura 7: Medidas de referencia para estimar longitudes (Keller, 2015a, p. 37)

- Estimación a través de comparaciones aditivas con una medida de referencia (4° de primaria)

  (Traducción de la consigna: “Estima la cantidad de agua. Marca los niveles correspondientes de agua y escríbelos”).

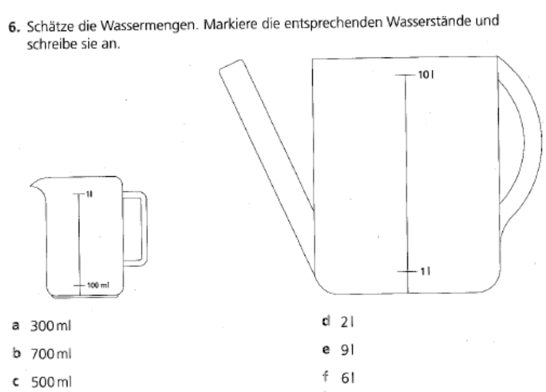


Figura 8: Estimar medidas de volumen (Keller, 2015b, p. 26)

- Estimación a través de comparaciones multiplicativas con una medida de referencia (5° de primaria)
  (Traducción de la consigna: “El lápiz mide aproximadamente 17 cm, ¿cuánto mínimo mide el pan? ¿Cuánto máximo mide el pan?”).

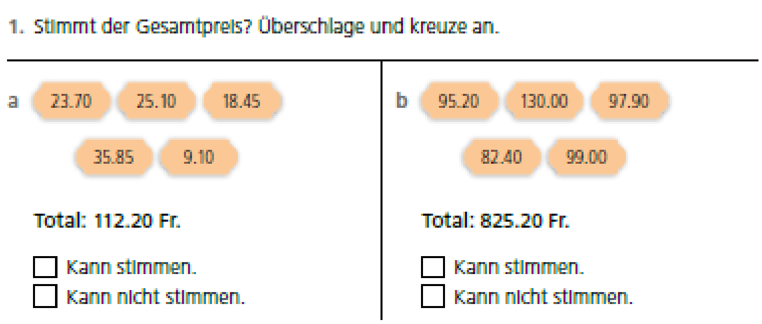
Figura 9: Estimar medidas de longitud (Keller, 2015d, p. 128)

- Estimación a través de cantidades (5° de primaria)
  (Traducción de la consigna: “¿Cuántas chinchetas hay aproximadamente? Anota tus reflexiones.”)

Figura 10: Estimar cantidades (Keller, 2015d, p. 129)

A diferencia de lo encontrado en los grados anteriormente comentados, en 6° año sí se trabaja la estimación en cálculos, como se puede ver en los siguientes ejemplos:

- Estimación con cálculos aproximados (6° de primaria)
  (Traducción de la consigna: “¿Es correcto el precio final? Haz una estimación y tacha la respuesta correcta.”)



1. Stimmt der Gesamtpreis? Überschlage und kreuze an.

a 23.70 25.10 18.45 35.85 9.10

Total: 112.20 Fr.

☐ Kann stimmen.
☐ Kann nicht stimmen.

b 95.20 130.00 97.90 82.40 99.00

Total: 825.20 Fr.

☐ Kann stimmen.
☐ Kann nicht stimmen.

Figura 11: Estimar cálculos (Keller, 2016a, p. 12)

Estos ejemplos parecen indicar que sí hay un tratamiento de la estimación en el contexto de medidas y cantidades, mientras que la estimación de cálculos parece estar menos presente y se introduce recién en 6° año de primaria.

También identificamos propuestas didácticas en otros países de América Latina. Tomaremos como ejemplo el caso de Argentina en donde hay una importante presencia del cálculo estimativo y donde se reconoce la importancia de que los alumnos lo desarrollen a lo largo de la educación primaria. En los Núcleos de los Aprendizajes Prioritarios (NAP) elaborados por el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (2005) para el segundo ciclo de la escuela primaria se plantea la necesidad de ofrecer situaciones de enseñanza que promuevan “El análisis y el uso reflexivo de distintos procedimientos para estimar y calcular en forma exacta y aproximada” (p. 17). Para 5° año, en el eje del número y las operaciones, se propone como contenido:

> “El reconocimiento y uso de las operaciones entre números naturales y la expilcitación de sus propiedades en situaciones problemáticas que requieran:
>
> - sumar, restar, multiplicar y/o dividir con distintos significados partiendo de información en textos, tablas, graáficos, estadísticas, analizando el cálculo requerido – exacto, aproximado, mental, escrito, con calculadora - y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido
> - elaborar y comparar procedimientos de cálculo – exacto y aproximado, mental, escrito y con calculadora - de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones por una cifra o más, analizando su pertinencia y economía en función de los números involucrados” (p. 21/22).

La importancia asignada al cálculo estimativo en este documento de carácter nacional aparece en todos los grados de la escuela primaria e inclusive para el cálculo entre fracciones y expresiones decimales.

Los diseños curriculares de varias jurisdicciones de Argentina también explicitan como contenidos el cálculo mental estimativo para las cuatro operaciones básicas con números naturales para ambos ciclos de la escolaridad y para los números racionales en el segundo ciclo, por ejemplo, el Diseño Curricular para la Escuela Primaria, Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, 2004 y el Diseño Curricular para la Educación Primaria del Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, 2007.

También numerosos libros de texto de este país presentan propuestas de enseñanza del cálculo estimativo, por ejemplo los libros “Hacer Matemática” de Saiz y Parra (2013) y “Los Matemáticos” de Broitman et al. (2005 y 2015). Relevamos asimismo materiales producidos para docentes con orientaciones para la enseñanza del cálculo estimativo, por ejemplo "Estrategias de cálculo con números naturales" de Broitman (2011), "Cálculo mental con números naturales" publicado por la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (2006). Broitman (2011) subraya la importancia de enseñar a hacer cálculos estimativos ya que, por un lado, "existe una gran cantidad de situaciones en las que es suficiente con un cálculo estimativo para responder una pregunta", y, por el otro lado, los cálculos estimativos "permiten anticipar el resultado exacto" (p. 38) lo que posibilita tener un control sobre los resultados. También en la publicación del la Secretaría de Educación de la Ciudad de Buenos Aires (2006) se considera que dentro del cálculo mental es importante enseñar estrategias de estimación y de cálculo aproximado para anticipar y controlar cálculos y, de esta manera, construir un "sentido de lo numérico" (p. 29). De estos últimos dos materiales hemos retomado numerosos problemas que serán presentados en la tiplología de problemas multiplicativos estimativos en el apartado 4.1.

Como en nuestra investigación nos basamos en teorías didácticas francesas, nos interesó también ver en qué medida aparece el cálculo mental estimativo en el currículum francés. Encontramos lo que se denomina "competencias trabajadas" (*compétences travaillées*) relacionadas con el cálculo estimativo. Para el segundo ciclo, por ejemplo, se menciona: "Calcular con números enteros, mentalmente o por escrito, de manera exacta o aproximada, usando estrategias adaptadas a los números en juego"[9] (Ministère de l'Éducation Nationale, 2017, p. 74).

Para el tercer ciclo se encuentra una competencia parecida, pero esta vez para los números decimales: "Calcular con números decimales de manera exacta o aproximada, usando estrategias o técnicas apropiadas (mentalmente, horizontalmente, o con el algoritmo)" (Ministère de l'Éducation Nationale, 2017, p. 199).

En el cuarto ciclo se extiende la misma competencia a los números racionales: "Calcular con números racionales, de manera exacta o aproximada, combinando de

[9] Todos los extractos del currículo francés son traducciones propias del texto original.

modo apropiado el cálculo mental, el cálculo vertical y el cálculo con calculadora y software.” (Ministère de l’Éducation Nationale, 2017, p. 369)

1.4 **Comentarios**

En los apartados anteriores expusimos que el cálculo mental estimativo tiene el potencial de contribuir a la comprensión de diferentes particularidades del sistema decimal, así como al desarrollo del pensamiento algebraico. Además, está incluido en problemas de azar y probabilidad. Su importancia ha sido documentada en diferentes investigaciones con alumnos de educación básica y también con adultos que inician su escolaridad. Estas investigaciones dan cuenta de los diversos procedimientos que despliegan los alumnos al resolver problemas de esta índole.

Revisando documentos curriculares de México y de otros países encontramos que se reconoce la importancia del aprendizaje del cálculo estimativo en la educación primaria; sin embargo, en lo que se refiere a México, no identificamos en los documentos curriculares suficientes propuestas específicas para su enseñanza. Por otra parte, identificamos algunas propuestas didácticas latinoamericanas que sí ofrecen problemas matemáticos y otras actividades que tienen el propósito de desarrollar el cálculo estimativo en los alumnos. Sin embargo, pocos estudios documentan la implementación de tales propuestas didácticas.

Sintetizando podemos conlcuir que, aunque el cálculo estimativo está presente en los documentos curriculares tanto de la educación pública de México, como en el currículo de la institución en el que se implementó la secuencia, hay pocas propuestas concretas para trabajarlo. Ello nos motiva a plantear las preguntas y objetivos de investigación que se presentarán en el siguiente apartado.

1.5 Preguntas y objetivos de investigación

1.5.1 Preguntas de investigación

1. ¿Qué tipos de problemas se muestran fértiles para el aprendizaje del cálculo estimativo en problemas multiplicativos en alumnos de 5° grado de primaria?

2. ¿Qué conocimientos ponen en juego los alumnos durante la resolución de determinados tipos de problemas multiplicativos de cálculo estimativo?
   - ¿Qué procedimientos usan?
   - ¿A qué propiedades de las operaciones recurren?
   - ¿Qué errores producen?

3. ¿Qué tipo de intervenciones didácticas propician las siguientes prácticas matemáticas:
   - la presentación y comparación de procedimientos y resultados para resolver problemas de cálculo mental estimativo?
   - el análisis de los errores?
   - la sistematización y organización de la producción matemática?
   - la institucionalización de los saberes matemáticos?

1.5.2 Objetivos de investigación

1. Diseñar una secuencia didáctica de cálculo estimativo de problemas multiplicativos para un grupo de 5° año de primaria. Para este objetivo se reconoció como necesario:
    - revisar materiales curriculares y libros de textos
    - realizar un análisis de antecedentes de investigaciones
    - elaborar de una tipología de problemas de cálculo multiplicativo estimativo
    - seleccionar los tipos de problemas que se abordarán en la secuencia
    - hacer un análisis *a priori* de los problemas
2. Implementar la secuencia didáctica diseñada.
3. Analizar la implementación de la misma secuencia en cuanto a:
    - conocimientos puestos en juego por los alumnos
    - errores y dificultades que manifiestan los alumnos
    - intervenciones didácticas del docente

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentará el marco teórico del presente trabajo de investigación. Se hará una breve mención a la disciplina de la Didáctica de las Matemáticas y luego se expondrán, en particular, la Teoría de las Situaciones Didácticas, la Metodología de la Ingeniería Didáctica y la Teoría de los Campos Conceptuales y de qué manera sus conceptos aportan a este estudio.

2.1 Didáctica de las Matemáticas

De acuerdo con Gálvez (1994), la Didáctica de las Matemáticas es una disciplina científica que tiene sus raíces en los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (en lo subsecuente IREM) que se formaron en Francia al final de los años 60. En un primer momento los IREM se dedicaron a complementar la formación matemática de los maestros, así como a producir materiales de apoyo para el trabajo en el aula. Después surgió otra clase de actividades, “destinadas ya no a la producción de medios para actuar sobre la enseñanza, sino a la producción de conocimientos para controlar y producir tales acciones sobre la enseñanza” (p. 40). De tal manera se constituyó “una comunidad y una nueva disciplina científica que convertía en objeto de estudio todos los fenómenos y procesos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y, más ampliamente, con la circulación de los conocimientos matemáticos.” (Broitman, 2013, p. 9)

En los años ochenta y al principio de los noventa surgieron grandes teorías, entre ellas la Teoría de las Situaciones Didácticas, elaborada por Brousseau, la Metodología de la Ingeniería Didáctica de Artigue, y la Teoría de los Campos Conceptuales, creada por Vergnaud, cuyas contribuciones se presentarán a continuación. Se han seleccionado estos aportes porque constituyen marcos referenciales centrales para nuestro estudio.

2.2 Teoría de las Situaciones Didácticas

Para nuestra investigación nos basaremos en algunos conceptos e ideas de la Teoría de las Situaciones Didácticas (en adelante TSD). Esta teoría se propone estudiar las condiciones para generar la producción de los conocimientos matemáticos analizando con profundidad las posibles interacciones entre profesor y alumno durante las actividades matemáticas. Según la TSD, la enseñanza reúne simultáneamte dos procesos, uno de enculturación del alumno del saber matemático y otro de adaptación (Brousseau, 2007). La teoría estudia, por un lado, las interacciones entre grupos de culturas diferentes y, por el otro lado, la adaptación del alumno a un medio antagonista. La noción de "medio", tomada de Piaget, no refiere a un medio natural sino a un medio artificialmente construido para que los alumnos construyan sus conocimientos en el ámbito escolar. Este "medio" no se reduce solamente a los problemas con los cuales los alumnos deberán enfrentarse para reorganizar sus conocimientos, sino que también abarca un conjunto de circunstancias exteriores, como por ejemplo los materiales didácticos, problemas, ejercicios, las interacciones entre alumnos y maestro, entre otros. (Fregona y Orús, 2011). Para que haya producción de conocimientos por parte de los alumnos, el medio debería ser de tal manera que provoque un desequilibrio que lleve al alumno a actuar para asimilar y acomodar nuevos conocimientos. El medio brousseaniano, además, implica que da retroacciones al alumno sobre las decisiones que va tomando, en el sentido de que le permite validar por sus propios medios sus decisiones matemáticas. Si el medio cumple con estas características hablamos de un medio "antagonista". Es, en este sentido, responsabilidad del maestro organizar los medios apropiados para promover los aprendizajes.

Brousseau (1982, citado en Panizza 2003) define una *situación didáctica* como una "situación construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado" (p. 4). En ese marco conceptual, Brousseau propone el concepto de "situación a-didáctica", el cual alude a una situación en la cual la producción de conocimientos que desarrollan los alumnos no se justifica por indicaciones explícitas del maestro, sino por interacciones del alumno con el medio.

Eso implica que en una situación a-didáctica la validación de la respuesta debería ser posible a través de la interacción del alumno con el medio, sin la necesidad de una validación externa.

Como reporta Panizza (2003), en la TSD se distinguen tres tipos de situaciones a-didácticas: situaciones de acción, situaciones de comunicación y situaciones de validación. Esta distinción está inspirada en las prácticas de los matemáticos: resolver, formular y validar. Más tarde Brousseau agregó las situaciones de institucionalización.

Panizza (2003) explica que en una situación de acción el alumno actúa sobre un medio material o simbólico, mientras que en una situación de formulación un alumno emisor debe formular un mensaje destinado a otro alumno receptor, quien debe comprender el mensaje y actuar. Durante una situación de validación dos o más alumnos deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas.

En cuanto a la institucionalización Brousseau (1994) la define de la siguiente manera:

> “La consideración “oficial” del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización.” (p. 74).

Es decir que durante esta fase se establecen relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural. Además de guiar la institucionalización, el maestro tiene otro rol principal que es la “devolución”, es decir que debería devolver al alumno la responsabilidad de hacerse cargo del problema que le propone, olvidando – o por lo menos no poniendo en primer plano– la intencionalidad didáctica del mismo (Sadovsky, 2005).

Si bien en este estudio no se espera producir o proponer situaciones a-didácticas, los conceptos de devolución, validación e institucionalización serán tomados para diseñar y analizar las clases. Asimiso, los tipos de prácticas matemáticas que Brousseau estudia y la idea de la clase como una comunidad de producción serán también fuentes para las situaciones de enseñanza del cálculo estimativo en nuestra secuencia.

En nuestro trabajo se van a analizar tanto procedimientos correctos como incorrectos de los alumnos. Por lo tanto, es importante explicitar cómo se define el error dentro de la TSD.

Como menciona Broitman (1999), “la perspectiva piagetiana del aprendizaje escolar concibe a los errores como la expresión de un conocimiento” (p. 3). Sin embargo, durante mucho tiempo en la enseñanze de la matemática clásica los errores se concibieron “como accidentes, como marcas, como distracciones, como errores del material instructivo, o como ignorancia de saber” (p. 3). Es hasta los años ochenta que se puede observar un interés de la didáctica de la matemática por estudiar los errores, por comprender sus orígenes, así como por organizar las condiciones didácticas que favorecen su análisis. Brousseau (1998) dice sobre el error:

> “El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en la teorías empiristas o conductista del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. (p. 119).

Como señalamos anteriormente, en nuestro estudio esta concepción del error como un aspecto constitutivo del conocimiento es de suma importancia para el análisis de los procedimientos de los alumnos, así como de las intervenciones didácticas.

2.3 **Ingeniería Didáctica**

La Ingeniería Didáctica surgió en los años 80 dentro de la matemática francesa y se fundamenta en las teorías de la TSD de Brousseau, y de la transposición didáctica de Chevallard. Se trata de una metodología de investigación cualitativa mediante estudios de casos de propuestas didácticas experimentales. El nombre apareció en analogía al trabajo de un ingeniero quien "para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo." (Artigue, 1995, p.33).

Según Artigue (1995) la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación se determina por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Además, se delimita por el registro de los estudios de caso y por la forma de validación. La forma de validación es interna y se basa en la confrontación entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* de la secuencia realizada. Esta metodología de investigación –muy usada en la didáctica de las matemáticas e incluso exportada a otras didácticas específicas– no trabaja con una validación externa con comparación estadística del rendimiento entre un grupo experimental y un grupo control, como se suele hacer trabajando con otras metodologías.

En la metodología de la ingeniería didáctica se pueden distinguir cuatro fases:

1. Análisis preliminares
2. Fase de concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas
3. Experimentación
4. Análisis *a posteriori* y validación

La fase de concepción no se basa únicamente en un cuadro teórico sino también en varios análisis preliminares. Los más frecuentes son el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, y el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica. En nuestro estudio, a pesar de no tratarse de una ingeniería didáctica en sentido estricto, hemos intentado considerar estudios sobre el aprendizaje y la enseñanza del cálculo mental y hemos documentado un breve análisis de su presencia en la producción curricular, en materiales para docentes y en libros de texto.

Durante la fase de concepción y análisis a priori se toman decisiones sobre las “variables de comando”, que son los variables del sistema que no están fijadas por las restricciones y que el investigador considera importantes respecto al problema estudiado. Entre ellas, destacan las variables didácticas. Al respecto, Panizza (2003) señala que hay condiciones que “pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación.” (p. 67)

Para el presente trabajo es sumamente importante identificar y establecer estas variables durante el desarrollo del análisis *a priori*, ya que esto nos permite tomar decisiones respecto a las características de los problemas (por ejemplo, su grado de complejidad), en función de los procedimientos que nos proponemos propiciar en los alumnos.

La fase de experimentación es el momento de la aplicación de la ingeniería con maestros y estudiantes en aulas reales. Durante la experimentación se intenta respetar las decisiones tomadas en los análisis *a priori*.

El análisis *a posteriori* se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación. La confrontación de este análisis *a posteriori* con el análisis *a priori* permite la validación interna, como ya se había mencionado anteriormente.

Para llevar a cabo esta investigación nos apoyaremos en varios aspectos de la Ingeniería Didáctica para elaborar el análisis *a priori* de los problemas, así como para el análisis *a posteriori* de la implementación de la secuencia. Sin embargo, es importante aclarar que no se tratará de un trabajo de Ingeniería Didáctica en sentido estricto, sino de un trabajo exploratorio en el cual reutilizarán y adaptarán propuestas didácticas ya existentes que circulan en trabajos de investigación y en documentos curriculares.

2.4 Teoría de los Campos Conceptuales

Vergnaud (1990) define su Teoría de los Campos Conceptuales como “una teoría cognitivista, que pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y las técnicas“ (p. 133). Recupera las ideas de Piaget sobre la concepción constructivista e interaccionista y la noción de esquema, pero amplía estas ideas a los aprendizajes matemáticos escolares, considerando que para un sujeto un concepto toma sentido a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver. Vergnaud distingue dos clases de situaciones: por un lado, las situaciones para las cuales el sujeto tiene competencias necesarias que le permiten un tratamiento relativamente inmediato; por el otro lado las situaciones para cuyo tratamiento el sujeto no tiene las competencias necesarias. En este último caso, el sujeto está obligado a un tiempo de reflexión y de exploración, de dudas, de tanteos fracasados y de una serie de esquemas que deben ser acomodados para poder resolver la situación matemática.

La Teoría de los Campos Conceptuales surgió como específica de las matemáticas y sus contribuciones sobre los campos de las estructuras aditivas y multiplicativas son de suma importancia para la didáctica de las matemáticas. Vergnaud define un campo conceptual como una amplia red de conceptos y relaciones de la que forma parte el “conjunto de situaciones” que estos conceptos permiten resolver. Mientras que el campo conceptual de las estructuras aditivas se considera como un “conjunto de situaciones que requieren una adición, una sustracción o una combinación de dichas operaciones” (p. 139), el campo de las estructuras multiplicativas es “a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones…” (p. 140)

Esta teoría nos ha mostrado la complejidad que implica el aprendizaje de un concepto, así como la diversidad de problemas, entre ellos los que involucran el cálculo estimativo, que abarca el proceso de conceptualización. Por otra parte, consideramos importante tomar en cuenta que también forman parte del campo conceptual de las estructuras multiplicativas el conjunto de estrategias de resolución y los conocimientos que los alumnos pueden desplegar al resolver diferentes clases de problemas. Asimismo, las formas de representación vinculadas a cada procedimiento de resolución de problemas – tanto las propias de las matemáticas como las elaboradas por los alumnos – constituyen elementos de análisis para este campo conceptual. Los estudios de Vergnaud ayudan a ampliar el tratamiento didáctico de las operaciones y, de tal manera, abordar de manera intencional los distintos sentidos de una misma operación (Broitman, 2013).

En nuestro estudio consideraremos estos aportes para identificar clases de problemas – analizando cómo varía la complejidad de los mismos a partir del comando de las diversas modificaciones –, procedimientos de resolución (incluyendo los erróneos) y tipos de representaciones (convencionales y no convencionales). Por ello, su análisis del campo conceptual multiplicativo nos ayudará a anticipar e interpretar con detalle los problemas que se plantean a los alumnos dentro de la secuencia de cálculo estimativo que aquí se presenta, poniendo en vinculación problemas, estrategias, errores y conocimientos.

CAPÍTULO 3
METODOLOGÍA

3.1 Características generales de la investigación

La presente investigación se plantea como un estudio cualitativo de alcance exploratorio. Sampieri, Fernández y Baptista (2010) definen el enfoque cualitativo de la siguiente manera: “El enfoque cualitativo utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación” (p. 7). Los mismos autores dicen del alcance exploratorio: “Los estudios exploratorios se realizan cuando el objetivo consiste en examinar un tema poco estudiado” (p. 79). Nuestra investigación incluye la elaboración de una secuencia didáctica, así como el análisis de la implementación de la misma. El enfoque cualitativo nos permite indagar, por un lado, sobre la diversidad de procedimientos que ponen en juego alumnos de 5° año de primaria para resolver problemas estimativos multiplicativos y, por otro, sobre las intervenciones didácticas que favorecen el aprendizaje del cálculo estimativo. También esta clase de análisis se realiza con la finalidad de identificar qué tipos de problemas son fértiles para el aprendizaje de este tipo de cálculo.

Como se ha mencionado en los capítulos anteriores, entre los trabajos relevantes encontramos pocos que documenten la implementación de propuestas didácticas enfocadas al desarrollo del cálculo estimativo. Esta investigación busca aumentar la familiaridad con propuestas didácticas de este tipo, por ello la definimos como de carácter exploratorio.

Si bien la elaboración de la secuencia didáctica no es en sentido estricto una ingeniería didáctica hemos tomado de dicha metodología varios aspectos que ya han sido descritos en el marco teórico:

- Análisis preliminares
- Concepción y análisis *a priori* de la situación didáctica
- Experimentación
- Análisis *a posteriori* y validación

Los análisis preliminares sobre cómo se concibe el cálculo estimativo, sobre los antecedentes de estudios psicológicos y didácticos de esta clase de problemas y cuál es su presencia en documentos curriculares, materiales para docentes y libros de texto se desarrolló ya en los capítulos 1 y 2. En este capítulo presentaremos lo referente a la concepción y análisis *a priori* de la situación didáctica, los cuales se llevaron a cabo mediante el desarrollo de dos fases:

1. Diseño, implementación y análisis de la prueba piloto
2. Diseño, implementación y análisis de la secuencia didáctica final

Para llevar a cabo ambas fases fue necesario contar con un punto de partida, el cual consistió en identificar y caracterizar los problemas de cálculo estimativo presentes en producciones académicas, documentos curriculares y propuestas didácticas. Tales problemas se organizaron en una tipología de problemas estimativos, la cual se presentará en el próximo apartado.

Un aspecto importante a considerar, desde la perspectiva metodológica, es que en este estudio la investigadora es también la maestra titular de los grupos en los que se implementaron la secuencia piloto y la definitiva. Como en la Ingeniería Didáctica el objeto de estudio es la secuencia didáctica y no se busca analizar la intervención del docente en términos positivos o negativos, ni evaluar la cercanía o distancia con las previsiones del investigador, sino analizar las intervenciones didácticas desde un punto de vista ligado a la comprensión de las interacciones que sus intervenciones promueven, se consideró que para este estudio este doble rol de maestra-investigadora no era incompatible.

Si bien estamos conscientes de que ese doble rol podría haber dificultado el análisis *a posteriori*, consideramos que el distanciamiento necesario para el análisis fue posible, especialmente por tratarse de un estudio realizado bajo la supervisión de otros investigadores que colaboraron en el análisis y en la búsuqeda de maneras de comunicar esta dualidad de roles. El lector podrá apreciar dicho distanciamiento en las numerosas críticas que desde el rol de investigador se realiza a las propias intervenciones didácticas desplegadas desde el rol de docente. Hacia el final de esta tesis se plantearán algunas reflexiones acerca de lo que implica jugar este “doble papel”.

Se hicieron grabaciones de video de todas las sesiones, se transcribieron esas grabaciones[10] – haciendo la traducción del alemán al español, puesto que en el colegio donde se implementó la secuencia las clases de alemán se imparten en alemán – y, posteriormente, se hizo un análisis meticuloso de cada registro con los criterios que se describirán más adelante.

[10] Para hacer las grabaciones se les pidió a los padres de familia su consentimiento informado (véase anexo). Además, en las transcripciones se usaron pseudónimos para respetar la privacidad de los alumnos.

3.2 Establecimiento de una tipología de problemas estimativos multiplicativos

Durante la fase del análisis preliminar revisamos varias investigaciones sobre el cálculo estimativo que ya han sido mencionadas en los antecentes. Uno de los aspectos que recuperamos de esas investigaciones fueron los procedimientos y dificultades que manifiestan los alumnos ante determinados problemas de cálculo mental estimativo. Además, revisamos propuestas didácticas en libros de texto y materiales para docentes que ya han sido reseñados en el capítulo 2.2. Esa revisión que se hizo en función de tres aspectos (problema matemático que involucra, modo de presentación, tipo de respuesta) nos permitió elaborar una tipología de problemas estimativos multiplicativos que se presentará con detalle en el capítulo 4.1.

3.3 Implementación de la prueba piloto y de la secuencia final

Para elegir y adaptar los problemas de la secuencia didáctica nos basamos en los siguientes elementos: la tipología que elaboramos, las consideraciones de tipo lingüístico sobre la presentación de los problemas, y las estrategias de cálculo ya identificadas por algunas investigaciones previas, particularmente por Reys (1986).

Decidimos trabajar con números naturales; en las multiplicaciones se trabajó con un factor de una o dos cifras y el otro factor de cuatro a cinco cifras, de manera que el producto entre ambos números sea menor a 1’000’000. En las divisiones decidimos trabajar con dividendos menores a 1’000’000 y divisores de una o dos cifras. Los cocientes resultantes eran números de cuatro o cinco cifras. Optamos por este rango numérico por ser el rango con el cual los alumnos de 5° año de primaria del colegio donde se implementó la secuencia están acostumbrados a trabajar.

Se decidió implementar una prueba piloto con el objetivo de contar con primeras experiencias con los tipos de problemas elegidos, con la organización prevista de las clases, así como con algunos aspectos relacionados al idioma, ya que en la institución donde se implementaron la prueba piloto y la secuencia didáctica final las matemáticas no se trabajan en español, lengua materna de los alumnos.

Esta secuencia piloto se implementó en un grupo de 5° grado de un colegio bilingüe (español – alemán) de la ciudad de Querétaro. El grupo se componía de 11 alumnos, 6 niñas y 5 niños de entre 10 y 12 años. Todos provenían de un ámbito socio-económico medio-alto o alto. Aunque la lengua materna de la gran mayoría de los alumnos del colegio es el español, las clases de matemáticas se implementan en alemán, siguiendo el currículo del cantón de Zürich, Suiza, y usando libros de texto suizos en idioma alemán. Decidimos aplicar la secuencia piloto en alemán, para no alterar la dinámica establecida en el colegio y reconociendo además que la mayoría de los alumnos ya tienen una larga experiencia con ese idioma. Sin embargo, durante la implementación de la secuencia se aceptaron respuestas de los alumnos también en español, y se les invitó a usar su lengua materna en caso de que tuvieran dificultades para expresarse en alemán. Si bien algunas de nuestras decisiones didácticas tomaron en cuenta la condición del bilingüismo en la clase de matemáticas, como se precisará más adelante, es importante aclarar que el bilingüismo no es un aspecto en el que se haya profundizado dentro de esta tesis.

Se consideró implementar seis sesiones (una a tres por semana) de máximo 45 minutos durante las clases habituales de matemáticas del grupo en cuestión. Las sesiones fueron video-grabadas. El diseño de la prueba piloto se presentará con detalle en el apartado 4.2.

Al terminar la implementación de la prueba piloto se hizo un análisis de la misma para tomar decisiones en torno a la secuencia definitiva. Dichas decisiones impactaron en la duración de la secuencia.

La secuencia definitiva se implementó en un grupo de 5º grado en el mismo colegio donde se llevó a cabo la secuencia piloto. Este grupo compartió las mismas características respecto al nivel socio-económico y ámbito bilingüe que el de la secuencia piloto. En esta ocasión, el grupo se componía de 20 alumnos, 9 niñas y 11 niños, de entre 10 y 12 años. Se decidió implementar doce sesiones de 45 minutos (una a tres veces por semana) en el horario establecido por el colegio para las clases de matemáticas[11]. Todas las sesiones (excepto las dos sesiones de evaluación) fueron video-grabadas.

[11] Tanto en la implementación de la secuencia piloto como de la secuencia definitiva la duración fue mayor que la prevista.

3.4 Recolección y análisis de la información

Para analizar los procedimientos de los alumnos, así como las intervenciones didácticas, se video-grabaron todas las sesiones, a excepción de las dos sesiones de evaluación. Al terminar cada sesión se hizo un reporte escrito, incluyendo el desarrollo y observaciones importantes de la sesión. Además, se transcribieron las sesiones. Es importante mencionar que, debido a las circunstancias lingüísticas de la implementación, se trata de transcripciones traducidas (alemán – español). Posteriormente, y para facilitar el análisis de los datos, recurrimos a la propuesta metodológica de Kalman y Rendón (2016), quienes sugieren el uso de la hoja de cálculo (Excel) para analizar datos cualitativos. Aunque Kalman y Rendón no usan la herramienta para una investigación de enseñanza de las matemáticas, sino para un proyecto de investigación sobre formación docente y uso de tecnologías digitales, nos pareció un instrumento flexible que contribuyó a los propósitos de nuestro proyecto.

En un primer momento insertamos las transcripciones de cada una de las sesiones de la secuencia definitiva a una hoja de cálculo. En un segundo momento procedimos a identificar diferentes "acciones" de los alumnos y de la docente. Kalman y Rendón definen las "acciones" como "primer nivel de análisis a partir de los datos que describen lo que está ocurriendo línea por línea" (p. 37). Nosotros no hicimos el análisis por cada línea, sino por cada intervención. Nos preguntábamos qué acción estaba teniendo lugar en una intervención determinada, ya fuera de los alumnos o de la maestra, teniendo presente el contexto de esa intervención. De esa manera, logramos identificar diferentes acciones. Aunque estas acciones no hayan sido predeterminadas, nuestro análisis estaba guiado por las preguntas de investigación, de tal manera que las acciones nos ayudarían a identificar procedimientos de resolución y diferentes tipos de intervenciones por parte de los alumnos (p.ej. pedir ayuda, dar ejemplos, explicar, justificar), así como diferentes tipos de intervenciones por parte de la maestra (p.ej. pedir que se justifique una respuesta, animar a los alumnos a que contesten en español, dar ejemplos). En la Figura 12 se muestran algunas acciones identificadas en los alumnos y en la maestra. Para nombrar estas acciones usamos abreviaturas que siempre empezaban con un verbo, seguido de un sustantivo. Por ejemplo, “JustificaResp” para indicar que un alumno justifica su respuesta o “Reformula” para señalar que la maestra reformula algo dicho por un alumno.

Acciones de los alumnos	Acciones de la maestra	Explicación
JustificaProc		Un alumno justifica su respuesta.
	Reformula	La maestra reformula algo dicho por un alumno.
ExplicaProc		Un alumno explica un procedimiento de resolución.
	PideExplicarProc	La maestra pide a un alumno que explique un procedimiento.
	PideOtroProc	La maestra pide que los alumnos intenten resolver un problema con otro procedimiento.

Figura 12: Tabla de acciones

Las acciones identificadas se agregaron en las hojas de Excel, junto con las transcripciones. Además, como se puede observar en la Figura 13, se señala el tipo de problema que se estaba trabajando en la clase, así como una primera identificación del posible procedimiento y/o error que se pone de manifiesto.

Transcripción	Acciones	Tipo Problema	Procedimientos	Errores
Marco: Yo marqué menos porque no tomé seis mil seiscientos sino siete mil y once por siete mil da siete..., no setenta y siete mil y eso es menos que cien mil.	JustificaResp_A	AnticiparMult	RedondeoSegundoMult	
M: Ok, es decir Marco redondeó el segundo número, dijo ahh, seis mil seiscientos para que sea más fácil lo redondeo a siete mil y veo que once por siete da setenta y siete y los dos ceros setenta y siete mil y veo que da menos. ¿Qué equipos redondearon de manera diferente? Alicia.	Reformula_M		RedondeoSegundoMult	
Alicia: Yo lo hice de manera diferente: Diez por seis da sesenta, me da sesenta mil.	ExplicaProc_A		Redondeo2Mult	
M: Entonces, Alicia redondeó los dos números. En lugar de once dijo con 10 es más fácil y en lugar de seis mil seis cientos tomó seis mil y dijo me da sesenta mil y es mucho menos que cien mil.	Reformula_M		Redondeo2Mult	
M: ¿Alguien lo hizo de otra manera diferente? ¿Hay otras posibilidades? David, ¿cómo redondeaste tú?	PideExplicarProc_M PideOtroProc_M			

Figura 13: Tabla Excel con transcripción y acciones

Mientras que el trabajo de identificación de las acciones nos ayudó a tener una primera aproximación a la complejidad de las interacciones, la herramienta de la hoja de Excel nos permitió organizar los datos y, a partir de eso, elegir los aspectos que se abordan en los capítulos 6 y 7 de esta investigación.

CAPÍTULO 4
DISEÑO DE LA SECUENCIA

4.1 Tipología de problemas estimativos multiplicativos

A continuación, presentaremos la diversidad de problemas estimativos que han sido identificados en diferentes propuestas didácticas en función de tres aspectos: el problema matemático que involucra, el modo de presentación y el tipo de respuesta.

Como fue mencionado en el apartado 2.4., nos basamos en la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, enfocándonos en el campo de las estructuras multiplicativas.

Identificamos nueve diferentes tipos de problemas estimativos multiplicativos. A continuación, se presenta cada tipo de problema acompañado por un ejemplo y por el nombre del autor o fuente del que dicho ejemplo ha sido tomado:

A. Anticipar si el producto/cociente es menor, igual o mayor a un número dado

A.1. El número dado es una potencia de 10

Ejemplo de multiplicación (Broitman, 2011, p. 40) ¿Será menor, igual o mayor? Coloca el signo correspondiente sin hacer la cuenta exacta. 21’376 x 9 ____100’000	Ejemplo de división (Secretaría de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2006, p. 53) 260 ÷ 24 da ❍ menos que 10 ❍ igual a 10 ❍ más que 10

El número dado no es una potencia de 10

Ejemplo de multiplicación (Broitman, 2011, p. 40): ¿Será menor, igual o mayor? Coloca el signo correspondiente sin hacer la cuenta exacta. 34’671 x 99___3’467’100	Ejemplo de división (Broitman, 2011, p. 40): ¿Será menor, igual o mayor? Coloca el signo correspondiente sin hacer la cuenta exacta. 123’987 ÷ 4____40’000

B. Anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado

B.1 El cálculo dado está resuelto

Ejemplo multiplicación (adaptado de un problema de división de Broitman, 2015).	Ejemplo de división (Broitman, 2011, p. 41):
Mirando la primera cuenta, anticipa si las otras van a dar más o menos. 3 x 1512 = 4536 3 x 1612 2 x 1512	Mirando la primera cuenta, anticipa si las otras van a dar más o menos. 4536 ÷3 = 1512 4636 ÷ 3 4536 ÷ 4

B.2 El cálculo dado no está resuelto

Ejemplo de multiplicación (Keller, 2016a, p. 16)	Ejemplo de división (Keller, 2016a, p. 16):
Sin hacer el cálculo exacto, completa con <, =, > 3 x 8250 ____ 8 x 2190	Sin hacer el cálculo exacto, completa con <, =, > 3708 ÷ 3____6112 ÷ 8

C. Encuadrar el producto/cociente entre números dados

C1. Los números dados son potencias de 10

Ejemplo de multiplicación (Broitman, 2015, p. 61)	Ejemplo de división (Secretaría de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2006, p. 54)
Sin hacer el cálculo, señala entre qué números va estar el resultado. 350 x 99 ❍ menos que 1000 ❍ entre 1000 y 10’000 ❍ más que 10’000	5940 ÷ 24 da ❍ entre 0 y 10 ❍ entre 10 y 100 ❍ entre 100 y 1000

C2. Los números dados no son potencias de 10

Ejemplo de multiplicación (Broitman, 2015, p. 65): Decide, sin hacer la cuenta, en qué intervalos estará el siguiente producto. 1620 x 6 ❍ entre 0 y 300 ❍ entre 3000 y 6000 ❍ entre 6000 y 10'000	Ejemplo de división (Broitman, 2011, p. 39) 2817 ÷ 19 da ❍ menos que 2000 ❍ entre 2000 y 4000 ❍ más que 4000

D. Anticipar a cuál de varios números dados se acerca más el producto/cociente

D1. Los números dados son potencias de 10

Ejemplo de multiplicación (adaptado de Keller, 2016a) 17 x 33 ❍ 100 ❍ 1000 ❍ 10'000 ❍ 100'000	Ejemplo de división (adaptado de Secretaría de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2006) 4360 ÷ 25 está más cerca de: ❍ 10 ❍ 100 ❍ 1000

D2. Los números dados no son potencias de 10

Ejemplo de multiplicación (Keller, 2016a, p. 57) 17 x 33 ❍ 100 ❍ 2000 ❍ 10'000	Ejemplo de división (Secretaría de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2006, p. 55) 436 ÷ 25 está más cerca de: ❍ 20 ❍ 10 ❍ 30

E. Anticipar a cuál de varios cálculos dados se acerca más el producto/cociente

E1. Los cálculos dados están resueltos.

Ejemplo de multiplicación (adaptado de Keller, 2016b, p. 57) ¿Cuál de los cálculos A, B o C te da el resultado que está más cerca del cálculo siguiente? 375 x 420 = 157’500 A: 300 x 400 B: 400 x 400 C: 400 x 500	Ejemplo de división (adaptado de Keller, 2016b, p.57) ¿Cuál de los cálculos A, B, o C te da el resultado que está más cerca del cálculo siguiente? 16’810 ÷ 41 = 410 A: 16’000 ÷ 41 B: 17’000 ÷ 41 C: 18’000 ÷ 41

E2. Los cálculos dados no están resueltos

Ejemplo de multiplicación (Keller, 2016b, p. 59) ¿Cuál de las cuentas A, B o C te da el resultado que está más cerca del resultado de 375 x 420? A: 300 x 400 B: 400 x 400 C: 400 x 500	Ejemplo de división (Keller, 2016b, p. 59) ¿Cuál de las cuentas A, B o C te da el resultado que está más cerca del resultado de 4356 ÷ 18? A: 5000 ÷ 20 B: 4000 ÷ 20 C: 4000 ÷ 10

F. Revisar la validez de resultados

F1. Identificar si un resultado dado es correcto

Ejemplo de multiplicación (Keller, 2016b, p. 57): Sin hacer el cálculo exacto decide si el resultado puede ser correcto o no. 17 x 277 = 14’709	Ejemplo de división (Broitman, 2011, p. 40) Sin hacer la cuenta decide si el resultado puede ser correcto o no. 10’345 : 5 = 51’725

F2. Identificar el cociente/producto correcto entre varios resultados dados

Ejemplo multiplicación (Broitman, 2015, p. 65): Sin hacer la cuenta, selecciona cuál crees que es el resultado correcto. 250 x 6 = ❍ 1500 ❍ 2500 ❍ 3500	Ejemplo división (adaptado de Secretaría de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2006, p. 29) 3696 entre 12 da: ❍ 308 ❍ 3008 ❍ 30’008

G. Ordenar de menor a mayor producto/cociente de varios cálculos

Ejemplo de multiplicación (Keller, 2016b, p. 58). Ordena los resultados de los siguientes cálculos de menor a mayor, sin hacer el cálculo exacto. 25 x 69 64 x 63 71 x 68	Ejemplo de división (Keller, 2016b, p. 58): Ordena los resultados de los siguientes cálculos de menor a mayor, sin hacer el cálculo exacto. 3777 ÷ 3 5645 ÷ 7 4460 ÷ 5

H. Anticipar la cantidad de cifras de un producto/cociente

Ejemplo de multiplicación (Parra y Saiz, 2013, p. 80) Sin averiguar el resultado exacto, ¿se puede saber cuántas cifras tiene el resultado? 352 x 12	Ejemplo de división (Broitman et al., 2015, p. 66) Calcula la cantidad de cifras que tendrá el cociente, sin hacer la cuenta. 2230 ÷ 15

I. Anticipar producto/cociente de un cálculo dado

Ejemplo de multiplicación (Keller, 2016, p. 57)	Ejemplo de división (Broitman et al., 2015, p. 39)
Anticipa, sin hacer el cálculo exacto cuánto te va a dar más o menos el siguiente cálculo. 8 x 455	¿Cuánto te va a dar más o menos el siguiente cálculo? ¿Más de cuánto? ¿Menos de cuánto? 6551 ÷ 7

Las variables didácticas que tomamos en este estudio para el análisis a priori de los problemas son los siguientes: el tipo de problema, el rango de los números, la operación (multiplicación/división), el modo de presentar el problema y el modo de presentar los resultados. En cuanto al modo de presentar un problema, el análisis preliminar nos permitió identificar tres diferentes formas y analizar cuál de ellas es la más adecuada para nuestra secuencia:

a) Usando sólo términos numéricos. Por ejemplo:
   260 ÷ 24 da
   - menos que 10
   - igual a 10
   - más que 10

b) Usando términos numéricos en un enunciado. Por ejemplo:
   "Decide si el cociente de 260 entre 24 es menor, igual o mayor a 10."

c) Planteando una situación en un contexto determinado[12]. Por ejemplo:
   "El presidente de la cooperativa de la escuela calcula que para la fiesta de fin de cursos tendría que haber 260 refrescos. ¿Tengo que comprar menos, igual o más que 10 paquetes con 24 botellas cada uno para que alcance para todos?"

[12] A estos problemas también nos referimos con el nombre "problema situacional".

Tomando en cuenta que la secuencia se desarrollaría en alemán con un grupo de alumnos cuya lengua materna es el español (véase apartado sobre la muestra), fue importante considerar la forma de presentación de los problemas, pues desde el punto de vista lingüístico esa presentación podría influir en el grado de complejidad de los problemas, aun cuando todos implicaran el mismo conocimiento matemático.

En ese sentido, consideramos que, si bien la primera forma de presentar el problema requiere de la comprensión de lo que significan el símbolo matemático de la división y los términos “menos”, “igual” y “más que”, lingüísticamente demanda el uso de pocos términos, en comparación con la segunda forma, la cual usa más términos matemáticos (“cociente”) y demanda “traducir” el enunciado a una operación. Finalmente, la última forma no usa lenguaje explícitamente matemático y por lo mismo no ofrece “una pista matemática” para resolver el problema; demanda comprender la situación y establecer relaciones entre los datos numéricos para llevar a cabo una operación matemática. Por lo anterior, decidimos trabajar sobre todo con problemas que se presentaron en la primera forma.

Además de las diferentes maneras de presentar un problema, identificamos otra variable didáctica que abarca dos grandes categorías que agrupan los tipos de respuestas que se solicitan:

- Respuestas cerradas**:** El problema admite solamente una respuesta. Por ejemplo:

  260 ÷ 24 da

  - menos que 10
  - igual a 10
  - más que 10

- Respuestas abiertas**:** El problema admite varias respuestas. Por ejemplo:

  ¿Cuánto te va a dar más o menos el siguiente cálculo? 260 ÷ 24

  ¿Más de cuánto?_____ ¿Menos de cuánto? ______

Consideramos que, en general, los problemas con respuesta cerrada son más sencillos de resolver que los problemas de respuesta abierta, ya que con la limitación de pocas respuestas posibles el mismo problema podría dar cierta ayuda para hallar el resultado. En cambio, los problemas con respuesta abierta no indican ninguna pista sobre las eventuales respuestas. Para nuestra secuencia decidimos trabajar con problemas con respuestas cerradas.

4.2 Diseño, implementación y análisis de la secuencia piloto

La tipología que elaboramos, las consideraciones de tipo lingüístico sobre la presentación de los problemas y las estrategias de cálculo ya identificadas por algunas investigaciones previas, particularmente por Reys (1986), nos sirvieron como base para elegir y adaptar los problemas de la secuencia didáctica piloto que aquí se describe. Se consideró llevar a cabo seis sesiones de máximo 45 minutos, durante las cuales se abordarían los siguientes problemas.

Sesión 1

- Anticipar si el producto/cociente es menor, igual o mayor a un número dado; el número dado es una potencia de 10. (A1[13])
- Encuadrar el producto/cociente entre números dados; los números dados son potencias de 10. (C1)
- Para alumnos más avanzados que pudieran terminar los problemas anteriores de manera más rápida que los demás, tener previsto otros problemas: Anticipar a cuál de los números dados (potencias de 10) se acerca más el producto/cociente (D1)

Sesión 2

- Anticipar si el producto/cociente es menor, igual o mayor a un número dado; el número dado no es una potencia de 10. (A2)
- Encuadrar el producto/cociente entre números dados; los números dados no son potencias de 10. (C2)
- Para alumnos que pudieran terminar los problemas anteriores de manera más rápida que los demás, tener previsto otros problemas: Anticipar a cuál de los números dados (que no son potencias de 10) se acerca más el producto/cociente (D2)

[13] La numeración se refiere a los tipos de problema presentados en la tipología, apartado 4.1

Sesión 3

- Anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado. El cálculo dado no está resuelto. (B1)

- Variante de B1. Anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado (el cálculo dado no está resuelto) a través de un juego de comunicación entre equipos en el que los jugadores deben hacer explícitos procedimientos de resolución. (El juego se explicará con más detalle en el análisis a priori.)

Sesión 4

- Anticipar la cantidad de cifras de un producto/cociente (H)
- Anticipar producto/cociente de un cálculo dado (I)

Sesión 5

- Identificar si un resultado dado es correcto o no. (F1)

Sesión 6: Evaluación

- Decidir si para resolver un cierto problema es suficiente hacer un cálculo estimativo o no

Elegimos trabajar con estos tipos de problemas porque consideramos que son los más aptos para alumnos de 5° año de primaria que tienen poca experiencia con el cálculo estimativo. Estos problemas permiten desarrollar diferentes estrategias, por ejemplo: el redondeo, la búsqueda de números compatibles y la comparación con otros cálculos. Más adelante se explicará de manera amplia tales estrategias y, particularmente, qué aporta cada uno de los tipos de problemas al desarrollo de la estimación en problemas multiplicativos.

4.2.1 **Análisis *a priori* de la secuencia piloto**

El análisis que aquí presentamos procura justificar la elección de cada tipo de problema, el rango numérico y las características de los números elegidos, con la finalidad de anticipar el impacto que tales elecciones pudieran tener sobre los procedimientos de los alumnos. Cabe adelantar que, por cuestiones de tiempo, en la prueba piloto no se implementaron los problemas de las sesiones 4, 5 y 6. Por esta razón, se decidió que los tipos de problemas planteados en las sesiones 1, 2 y 3 serían los que definitivamente se incluirían en la secuencia final (esta decisión se justificará con detalle en el apartado 4.2.2). Es por ello que el análisis previo de esas sesiones es mucho más amplio y detallado que el de las sesiones 4, 5 y 6.

Sesión 1

Tipo de problema A1. Anticipar si el producto/cociente es menor, igual o mayor a un número dado (el número dado es potencia de 10)

Propósitos:

Se espera que los alumnos:

- anticipen si el producto de una multiplicación o el cociente de una división es menor o mayor a un número dado (el número dado es una potencia de 10).
- conozcan diferentes estrategias para resolver el mismo problema e identifican para qué problema conviene usar qué estrategia. Las estrategias son: redondeo de uno o los dos factores y/o comparación con otro cálculo para las multiplicaciones y números compatibles, comparación con otro cálculo y resolución a través de una multiplicación para las divisiones[14].

Descripción de la actividad

Los problemas se presentan en una hoja (Figuras 14 y 15) y los alumnos los resuelven de manera individual. La consigna dice: “Resuelve los problemas estimativos sin hacer cálculos exactos (puedes tomar notas)”. Al terminar la fase

[14] Estas estrategias se explicarán con detalle en el análisis *a priori* de los problemas.

individual se hace una puesta en común en la cual algunos alumnos presentan sus estrategias y resultados y la justificación de los mismos.

Session 1.1.A

Löse die folgenden Schätzaufgaben, ohne das exakte Resultat zu berechnen (du darfst Notizen machen):

a. 11 · 6600 gibt
- ❍ weniger als 100’000
- ❍ gleich viel wie 100’000
- ❍ mehr als 100’000

b. 97 · 21’376 gibt
- ❍ weniger als 100’000
- ❍ gleich viel wie 100’000
- ❍ mehr als 100’000

c. 260’000 : 24 gibt
- ❍ weniger als 10’000
- ❍ gleich viel wie 10’000
- ❍ mehr als 10’000

d. 659´379 : 90 gibt
- ❍ weniger als 10’000
- ❍ gleich viel wie 10’000
- ❍ mehr als 10’000

Notizen

Figura 14: Hoja de problemas: Anticipar productos y cocientes (potencias de 10)

Sesión 1.1.A

Resuelve los siguientes problemas de estimación, sin calcular el resultado exacto (puedes tomar notas):

a. 11 x 6600 da
- ❍ menos que 100’000
- ❍ igual a 100’000
- ❍ más que 100’000

b. 97 x 21’376 da
- ❍ menos que 100’000
- ❍ igual a 100’000
- ❍ más que 100’000

c. 260’000 ÷ 24 da
- ❍ menos que 10’000
- ❍ igual a 10’000
- ❍ más que 10’000

d. 659´379 ÷ 90 da
- ❍ menos que 10’000
- ❍ igual a 10’000
- ❍ más que 10’000

Notas:

Figura 15: Hoja de problemas (esp.): Anticipar productos y cocientes

Análisis de los problemas

Los cuatro problemas anteriores tienen en común que los resultados estimativos son potencias de 10. Consideramos que eso facilita la resolución de los mismos ya que, en general, es más fácil hacer cálculos con números que son potencias de 10, que calcular con números que no lo son.

En el primer problema (11 x 6600) los alumnos pueden usar el redondeo como posible procedimiento, por ejemplo, redondeando el primer factor a 10, manteniendo el segundo (6600) intacto. Sin embargo, puede haber alumnos que redondeen el segundo factor dejando el primero intacto (11 x 6000) o que redondeen los dos factores (10 x 7000/10 x 6000).

El segundo problema (97 x 21’376.) apunta al uso de la misma estrategia del redondeo, sin embargo, el problema tiene una complejidad más alta ya que el segundo factor es de cinco cifras y no termina en ceros. Esa característica posibilita otros cálculos estimativos. Por ejemplo, si redondeamos el primer factor a 100, podemos redondear el segundo de las siguientes maneras: 100 x 20’000; 100 x 21’000, 100 x 21’3000, 100 x 21’370, 100 x 21’376, siendo la última opción la más cercana al cálculo exacto

Con el tercer problema (260’000 ÷ 24) se busca introducir la estimación con la división. El propósito es que los alumnos usen números compatibles para anticipar cocientes. En este problema se puede redondear el dividendo a 240’000 y dejar el divisor intacto para hacer el cálculo estimativo 240’000 ÷ 24 = 10’000. Pero ahí no termina la resolución, ya que se les pide a los alumnos decidir si el cociente va a ser menor a mayor a 10’000. Por lo mismo es importante que los alumnos hagan uso de relaciones ya conocidas para deducir que el cociente va a ser mayor a 10’000. Por ejemplo: si aumenta el dividendo, manteniendo el divisor constante, aumenta el cociente.

En el cuarto problema (659´379 ÷ 90) el dividendo es más complejo ya que no termina en ceros, sin embargo, el divisor sí termina en ceros. Es probable que los alumnos busquen el número compatible preguntándose “¿qué número cerca de 65 está en la tabla del 9?” para encontrar 63, y hacer el cálculo 63 ÷ 9 y después agregar los ceros.

En los dos problemas de división también se podría hacer uso de la multiplicación. En 260’000 ÷ 24 podríamos multiplicar el divisor con el cociente estimativo dado (10’000 x 24 = 240’000) para ver que da menos que el dividendo, y deducir entonces que el cociente va a dar más que 10’000. Lo análogo en el cuarto problema sería multiplicar 10’000 x 90 = 900’000, y deducir que va a dar más que 10’000. Consideramos que es una estrategia muy potente por lo que sería importante proponerla en la puesta en común, en caso de que no apareciera entre los alumnos.

Tipo de problema C1. Encuadrar el producto/cociente entre números dados (los números dados son potencias de 10)

Propósitos

Se espera que los alumnos:

- encuadren productos entre números dados. Los números dados son potencias de 10.
- usen las estrategias de la primera sesión para justificar sus respuestas en el juego de encuadrar multiplicaciones.
- identifiquen que las mismas estrategias pueden servir para resolver diferentes tipos de problemas.

Descripción de la actividad

Se organiza al grupo en parejas, cada pareja recibe tarjetas con los cálculos que se muestran en la primera columna de las Figuras 16 y 17 (un cálculo por tarjeta) y una hoja de registro. Las tarjetas están apiladas con el cálculo hacia abajo, es decir está oculto para los alumnos. El juego se hizo primero con las tarjetas de multiplicación, después con las de división. Un miembro de la pareja toma una tarjeta al azar, encuadra el resultado y lo anota en la hoja de registro. El otro alumno verifica con la calculadora. Si el primer alumno resolvió de manera exitosa el encuadramiento se queda con la tarjeta, en caso contrario la regresa a la pila. Sigue el otro alumno. Gana quien se queda con más tarjetas.

A continuación, se presentan los cálculos y las respuestas correctas. Este material sirvió a la maestra para ir regulando la sesión; las hojas de registro de los alumnos eran similares, pero sin los cálculos escritos en la primera columna y sin las respuestas.

Multiplikationen A

	1000 – 10’000	10’000 – 100’000	100’000 – 1’000’000
11 · 3300		✓	
49 · 8900			✓
32 · 2400		✓	
98 · 4500			✓
8 · 2193		✓	
4 · 1278	✓		
9 · 9987		✓	
3 · 3059	✓		
12 · 68’000			✓
28 · 19’000			✓
39 · 21’000			✓
51 · 12’000			✓
7 · 10’956		✓	
2 · 36’781		✓	
8 · 42’692			✓
6 · 78’374			✓

Figura 16: Problemas: Juego de encuadrar multiplicaciones

Divisionen A

	10 - 100	100 - 1000	1000 – 10’000	10’000 – 100’000
490’000 : 51			✓	
570’000 : 62			✓	
620’000 : 92			✓	
270’000 : 39			✓	
720’000 : 68				✓
310’000 : 27				✓
850’000 : 43				✓
960’000 : 29				✓
23’175 : 80		✓		
64’679 : 70		✓		
55’237 : 60		✓		
70’289 : 90		✓		
48’731 : 30			✓	
73’367 : 60			✓	
39’526 : 20			✓	
84’207 : 50			✓	

Figura 17: Problemas: Juego de encuadrar divisiones

Análisis de los problemas que involucran multiplicaciones

Como se ve en la Figura 16, se incluyen cuatro grupos de cuatro problemas cada uno. En todos los grupos proponemos los mismos rangos de números (1000 a 10’000; 10’000 a 100’000; 100’000 a 1’000’000), todos potencias de 10. Se puede observar que los rangos numéricos de los resultados dados son bastante amplios (el primero de 9000, el segundo de 90’000 y el tercero de 900’000) lo que permite una aproximación relativamente sencilla, a diferencia de los problemas que se presentarán más adelante en la Figura 19, donde los rangos numéricos son de 500.

Los cálculos del primer grupo se caracterizan con un primer factor de dos cifras que está cercano a un número “redondo”[15] y por lo mismo se presta al redondeo. El segundo factor tiene cuatro cifras y termina en dos ceros. Este grupo da lugar estrategias que usan el redondeo del primer factor, el redondeo del segundo factor o el redondeo de los dos factores.

Consideramos que los problemas del segundo grupo son un poco más sencillos ya que tienen el primer factor de una sola cifra, aunque el segundo factor de cuatro cifras no termine en ceros. Supusimos que la mayoría de los alumnos dejaría “intacto” el primer factor y que redondearía el segundo.

El tercer grupo se parece al primero, ya que el primer factor tiene las mismas características (dos cifras, termina en ceros), sin embargo, se cambió el segundo factor a un número con cinco cifras que termina en tres ceros. Debido a esas similitudes estos cálculos se pueden resolver con las mismas estrategias que los problemas del primer grupo, sin embargo, podría haber más errores relacionados con el valor posicional, ya que se trabaja con números más grandes.

El cuarto grupo se parece al segundo: el primer factor tiene una cifra, el segundo se aumentó a cinco.

[15] Definimos como “números redondos” los que se constituyen de solamente una cifra de valor seguida de ceros, por ejemplo, 20, 400, 5000, 10’000 etc.

La comparación con otro cálculo puede ser una estrategia potente también en este tipo de problemas. En 11 x 3300 por ejemplo, un alumno podría decir que 10 x 10’000 le da 100’000, lo cual lo llevaría a deducir que 11 (“un poco más” que 10) x 3300 (“mucho menos” que 10’000) le va a dar menos que 100’000.

Análisis de los problemas que involucran divisiones

De manera similar a los problemas de multiplicación, también en las divisiones se trabajó con cuatro grupos de cuatro problemas cada una.

Los problemas del primer grupo tienen un divisor de seis cifras que termina en cuatro ceros, y un divisor de dos cifras que, aun cuando no termina en ceros, está cercano a un número “redondo”. Además, el divisor es mayor a las dos primeras cifras del dividendo, lo que ayuda a determinar que el cociente es menor a 10’000. Esos problemas se pueden resolver encontrando números compatibles (redondeando el dividendo, el divisor o ambos) o haciendo una multiplicación. Por ejemplo, en el primer problema (490’000 ÷ 51) se podría hacer primero la multiplicación 1000 x 51 = 51’000 y ver que el resultado es mucho menor que el dividendo 490’000; después se podría multiplicar 10’000 x 51 = 510’000 y ver que eso es mayor al dividendo 490’000, y por lo tanto deducir que el cociente estaría entre 1000 y 10’000.

En el segundo grupo se mantiene el número de cifras del dividendo y divisor, sin embargo, el divisor es menor a las primeras dos cifras del dividendo, por lo que los resultados van a quedar entre 10’000 y 100’000.

En el tercero y el cuarto grupo el dividendo tiene solamente cinco cifras, pero no termina en cero, mientras que el divisor se queda en dos cifras, pero esta vez sí termina en cero. La diferencia entre los dos grupos es que en el tercero el divisor es mayor a las dos primeras cifras del dividendo, mientras que en el cuarto grupo el divisor es menor a las dos primeras cifras del dividendo, lo cual determina el rango del cociente.

Para el tercer y el cuarto grupo se espera menos variedad en las estrategias del redondeo para buscar números compatibles ya que, como el divisor termina en cero, la mayoría de los alumnos podría dejarlo intacto y cambiar solamente el dividendo. Los problemas del tercer grupo podrían resultar más sencillos de resolver que los del cuarto grupo, pues se pueden resolver con cálculos memorizados que están dentro de las tablas hasta el diez. Por ejemplo, el 23’175 se puede redondear a 24’000. Para dividir 24’000 ÷ 80 los alumnos pueden recurrir a un cálculo memorizado, 24 ÷ 8. Para el grupo cuatro, dado que la mayoría de los alumnos no tiene memorizado los cálculos, es probable que recurran a una descomposición del dividendo. Por ejemplo, en 48’731 ÷ 30 se puede redondear el dividendo a 48’000; sin embargo, 48 ÷ 3 no es un cálculo de los que los alumnos suelen memorizar, por lo que podrían recurrir a una descomposición como la siguiente: 48 se descompone en 30 + 18 y tenemos entonces 48 ÷ 3 = 30 ÷ 3 + 18 ÷ 3.

Sesión 2

Tipo de problema A2. Anticipar si el producto/cociente es menor, igual o mayor a un número dado (número dado no potencia de 10)

Propósito

Se espera que los alumnos:

- se apoyen en los aprendizajes adquiridos con el tipo de problema anterior para calcular resultados estimativos que no son potencias de 10.

Descripción de la actividad

Los problemas se presentan en una hoja (Figura 18), los alumnos los resuelven de manera individual. La consigna dice: “Resuelve los problemas estimativos sin hacer cálculos exactos (puedes tomar notas).”

Session 1.1.A

Löse die folgenden Schätzaufgaben, ohne das exakte Resultat zu berechnen (du darfst Notizen machen):

a. 9 · 34’671 gibt
❍ weniger als 350’000
❍ gleich viel wie 350’000
❍ mehr als 350’000

b. 50 · 12’389 gibt
❍ weniger als 820’000
❍ gleich viel wie 820’000
❍ mehr als 820’000

c. 123’987 : 4 gibt
❍ weniger als 40’000
❍ gleich viel wie 40’000
❍ mehr als 40’000

d. 783’885 : 30 gibt
❍ weniger als 30’000
❍ gleich viel wie 30’000
❍ mehr als 30’000

Notizen

Figura 18: Hoja de problemas: Anticipar productos y cocientes (no pot. de 10)

Análisis de los problemas

A diferencia del tipo de problemas *A1*, en este caso se proponen resultados que no son potencias de 10. A pesar de este cambio, los problemas se pueden resolver con las mismas estrategias: redondeo en las multiplicaciones y búsqueda de números compatibles en las divisiones.

En el primer problema (9 x 34’671) se puede trabajar con el redondeo del primer factor, para que este quede en 10 de tal manera que solamente habría que “agregarle un cero” al segundo factor, lo cual permitiría identificar que el producto va a ser menor a 350’000. También se podrían redondear ambos factores (10 x 35’000), redondear solamente el segundo (9 x 30’000) o redondear el primero y el segundo (10 x 30’000).

El segundo problema (50 x 12’389) tiene el primer factor de dos cifras. Pero como termina en cero, es probable que la mayoría de los alumnos lo deje intacto y el redondeo lo haga con el segundo factor (50 x 12’000/50 x 10’000).

En el primer problema de división (123’987÷ 4) el dividendo es de seis cifras y no termina en ceros, mientras que el divisor es un número de una cifra. Por esa característica es muy probable que los alumnos dejen el divisor intacto y redondeen el dividendo a 120’000, para que les quede un número compatible para la división entre 4. Otros alumnos podrían hacer uso de la división multiplicando el resultado estimativo dado 40’000 por el divisor 4. Así llegarían a 160’000 y podrían deducir que el cálculo original les va a dar menos que 40’000, porque el dividendo original es menor a 160’000.

El dividendo del cuarto problema (783’885 ÷ 30) tiene las mismas características del dividendo anterior (seis cifras, no termina en ceros); sin embargo, el divisor aumenta a dos cifras. Como el divisor termina en cero, sigue siendo suficiente cambiar el dividendo para encontrar números compatibles. Lo que aumenta la dificultad, en comparación con el tercer problema, es el hecho de que 78 entre 3, para la mayoría de los alumnos, podría no ser un cálculo memorizado (como sí lo es 12 ÷ 4 del problema anterior), por lo que tendrían que hacer una descomposición del dividendo para llegar al cociente (por ejemplo 78 = 60 + 18). También en este problema es posible la resolución a través de una multiplicación: multiplicando el cociente dado (30’000) por el dividendo (30).

Tipo de problema C2. Encuadrar el cociente entre números dados (números dados no potencias de 10)

Propósito

Se espera que los alumnos:

- profundicen los aprendizajes adquiridos con el tipo de problema anterior, pero esta vez con resultados estimativos que no son potencias de 10.

Descripción de la actividad

Este tipo de problemas se trabajará con la misma modalidad de juego que los problemas C1 (con números dados potencia de 10). Sin embargo, se hará solamente con problemas de división, pues fueron los que causaron más dificultades a los alumnos durante el estudio piloto.

A continuación, se presentan los problemas incluyendo las respuestas correctas.

Divisiones Encuadramiento (No potencias de 10)

	0 - 500	500 – 1000	1000 - 1500	1500 - 2000
64’351 : 90		✓		
31’875 : 80	✓			
43’692 : 70		✓		
17’453 : 60	✓			
92’614 : 50				✓
59’718 : 40			✓	
46’579 : 30				✓
25’936 : 20			✓	
4621 : 9		✓		
2398 : 8	✓			
6578 : 7		✓		
1534 : 6	✓			
9713 : 5				✓
5169 : 4			✓	
4946 : 3				✓
2785 : 2			✓	
65’351 : 91		✓		
30’875 : 82	✓			
45’692 : 73		✓		
16’453 : 64	✓			
94’614 : 56				✓
57’718 : 47			✓	
65’579 : 38				✓
35’636 : 29			✓	

Figura 19: Problemas: Juego de encuadrar divisiones (no potencias de 10)

Análisis de los problemas

En la Figura 19 se muestran tres grupos de ocho problemas cada uno. Cada grupo se subdivide de la manera siguiente: en los primeros cuatro problemas el divisor es mayor a las dos primeras cifras del dividendo, mientras que en los otros cuatro problemas el divisor es menor a las dos primeras cifras del dividendo. Los rangos para ubicar al cociente son 0 a 500, 500 a 1000, 1000 a 1500 y 1500 a 2000. En comparación con el tipo de problema anterior, esta vez los rangos de números no son potencias de 10; esta característica permite que todos los rangos de resultado vayan de 500 en 500, es decir: 0 a 500; 500 a 1000 etcétera. Además, los rangos son más pequeños, lo que implica una mayor complejidad del problema.

En el primer grupo se proponen dividendos de cinco cifras que no terminan en cero y divisores de dos cifras que sí terminan en ceros. Como los divisores terminan en cero, la estrategia más esperada para encontrar números compatibles es redondear el dividendo, dejando al divisor intacto. También se puede usar la estrategia de multiplicar el divisor por los extremos de los rangos de números. Por ejemplo, en 64’351 ÷ 90, se puede multiplicar 500 por 90 = 45’000, el cual es menor al dividendo; después se multiplica 1000 por 90 = 90’000, que es mayor al dividendo; de ahí se puede deducir que el cociente tiene que estar entre 500 y 1000.

El segundo grupo contiene los problemas más sencillos, los dividendos son de cuatro cifras que no terminan en ceros, y los divisores son de una cifra. Se espera que los alumnos usen las mismas estrategias que usaron en los problemas del primer grupo.

Los problemas del tercer grupo pueden dar lugar a un cambio de estrategia, pues su resolución podría facilitarse si se cambian el dividendo y el divisor. Por ejemplo, en 65’351÷ 91 se podría redondear el divisor para después encontrar un dividendo compatible.

Sesión 3

Tipo de problema B1. Anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado (el cálculo dado no está resuelto)

Propósitos de la actividad de comparar cálculos:

Se espera que los alumnos:

- sigan usando las relaciones que ya conocen y que establezcan relaciones más complejas entre los números dentro de una multiplicación y dentro de una división:
    - Si se multiplica uno de los factores por un número y se divide el otro entre el mismo número, el producto se mantiene. (Ej.: 20 x 20 = 80 x 5)

- Si se multiplica el dividendo y el divisor por el mismo número, el cociente se mantiene. (Ej.: 20 ÷ 20 = 40 ÷ 40)
- Si se dividen el dividendo y el divisor entre el mismo número, el cociente se mantiene. (Ej.: 20 ÷ 20 = 5 ÷ 5)

- usen tales relaciones para comparar multiplicaciones y divisiones sin la necesidad de calcular el resultado.

Descripción de la actividad

Este tipo de problemas se trabaja con la misma modalidad de juego que los problemas que exigen encuadrar productos y cocientes, pero esta vez no se da un rango de números para encuadrar los resultados, sino que se plantea un "cálculo original" con el cual se tienen que comparar los demás cálculos.

Las reglas del juego son las siguientes: Primero se organiza al grupo en parejas; cada una recibe tarjetas con los cálculos y una hoja de registro (Figuras 20 y 21). Las tarjetas están apiladas con el cálculo hacia abajo, ocultándolo a la vista de los alumnos. Se juega primero con las tarjetas de multiplicación, después con las de división. Un miembro de la pareja toma una tarjeta al azar, compara el cálculo con el cálculo "original" y registra en la hoja si el cálculo de la tarjeta da menos, igual o más que el cálculo "original"[16]. Si el alumno resuelve de manera exitosa el problema se queda con la tarjeta, en caso contrario la regresa a la pila. Sigue el otro alumno. Gana quien se queda con más tarjetas.

Enseguida se presentan los cálculos y las hojas de registro.

[16] El análisis del término "original" y los posibles problemas didácticos en torno a su uso serán profundizados en el apartado 5.2.

Cálculo “original” con el cual se comparan los siguientes cálculos: 8 x 12’200.

Cálculo
7 x 12’200
9 x 12’200
8 x 11’200
8 x 13’200
7 x 11’200
9 x 13’200
16 x 12’200
4 x 12’200
8 x 24’400
8 x 6100
4 x 24’400
16 x 6100
2 x 48’800
32 x 3050

Session 6: Relationen

Rechnung	weniger als 8 x 12’200	gleich viel wie 8 x 12’200	mehr als 8 x 12’200

Figura 20: Problemas y hoja de registro para juego de relaciones (multiplicación)

Cálculo “original” con el cual se comparan los siguientes cálculos: 72’200 ÷ 8

Cálculo
71’200 : 8
73’200 : 8
72’200 : 7
72’200 : 9
71’200 : 9
73’200 : 7
144’000 : 8
36’100 : 8
72’200 : 16
72’200 : 4
36’100 : 4
144’400 : 16
18’050 : 2
288’800 : 32

Rechnung	weniger als 72’200 : 8	gleich viel wie 72’200 : 8	mehr als 72’200 : 8

Figura 21: Problemas y hoja de registro para juego de relaciones (división)

Análisis de los problemas

A continuación, se presenta un análisis sintético de los problemas. En la tabla 3 se explica cómo cambian los factores de cada uno de los cálculos, en comparación con el cálculo “original” dado. En la primera columna se explica la relación que se está trabajando, mientras que en la segunda se muestran los cálculos, y en la última la expresión algebraica de la relación. Es importante mencionar que para resolver los problemas no es necesario dominar todas las relaciones (véase pie de página número 13); en 16 x 12’200 por ejemplo, es suficiente ver que el producto aumenta para decidir que el cálculo va a dar más que el cálculo original 8 x 12’200. La relación “si se multiplica uno de los factores por x el producto se multiplica por x” no es necesaria para ganar el juego. Sin embargo, en la prueba piloto estas relaciones más complejas se explicitaron en la puesta en común de las estrategias, al terminar el juego.

La tabla de los problemas de división está elaborada de la misma manera: Se explica cómo cambian el dividendo y el divisor en comparación con el cálculo original dado y cuáles son las consecuencias de estos cambios para el cociente.

En los problemas de multiplicación y en los de división decidimos trabajar con “dobles” y “mitades” de los números implicados (a x b, 2a x 2b). Esta decisión se tomó para ayudar a los alumnos a que identifiquen las relaciones sin tanta dificultad. En otro momento podría modificarse esa relación, por ejemplo, duplicar un factor y triplicar el otro (a x b, 2a x 3b).

Multiplicación

Cálculo “original” con el cual se comparan los siguientes cálculos: 8 x 12’200

Tabla 3
Cálculos multiplicación

Cálculo “original”: 8 x 12’200		
Relación que se trabaja	**Cálculos que se comparan con el cálculo “original”**	**Expresión algebraica** x = primer factor y = segundo factor • x, y, z, a > 0 • x – z, y – z, y – a > 0
Si disminuye uno de los factores disminuye el producto.	7 ×12’200 8 × 11’200	$(x-z)\cdot y < x\cdot y$ $x\cdot(y-z) < x\cdot y$
Si aumenta uno de los factores aumenta el producto.	9 × 12’200 8 × 13’200	$(x+z)\cdot y > x\cdot y$ $x\cdot(y+z) > x\cdot y$
Si disminuyen los dos factores disminuye el producto.	7 × 11’200	$(x-z)\cdot(y-a) < x\cdot y$
Si aumentan los dos factores aumenta el producto.	9 × 13’200	$(x+z)\cdot(y+a) > x\cdot y$
Si se multiplica uno de los factores por z el producto se multiplica por z.[17]	16 × 12’200 8 × 24’400	$(x\cdot z)\cdot y = z\cdot(x\cdot y)$ $x\cdot(y\cdot z) = z\cdot(x\cdot y)$
Si se divide uno de los factores entre z el producto se divide entre z.	4 × 12’200 8 × 6100	$\frac{x}{z}\cdot y = \frac{x\cdot y}{z}$ $x\cdot\frac{y}{z} = \frac{x\cdot y}{z}$
Si se multiplica uno de los factores por z y se divide el otro entre el mismo número, el producto sigue igual.	4 × 24’400 16 × 6100 2 × 48’800 32 × 3050	$(x\cdot z)\cdot\frac{y}{z} = x\cdot y$ $\frac{x}{z}\cdot(y\cdot z) = x\cdot y$

[17] Es importante mencionar que en la actividad propuesta es suficiente que los alumnos reconozcan si un cálculo da menos/igual o más que el “cálculo original”, sin definir cuántas veces menos o más. Por ejemplo, es suficiente decidir que 4 x 12’200 da menos que 8 x 12’200 sin la necesidad de decidir que da exactamente la mitad. Esta aclaración es pertinente para problemas similares de las tablas 4, 5 y 6.

División

Cálculo “original” con el cual se comparan los siguientes cálculos: 72’200 ÷ 8

Tabla 4
Cálculos división

Cálculo “original”: 72’200 ÷ 8		
Relación que se trabaja	**Cálculos que se comparan con el cálculo “original”**	**Expresión algebraica** x = dividendo y = divisor • x, y, z, a > 0 • x – z, y – z, y – a > 0
Si disminuye el dividendo y se mantiene el divisor el cociente disminuye.	71’200 ÷ 8	$\frac{x-z}{y} < \frac{x}{y}$
Si aumenta el dividendo y se mantiene el divisor el cociente aumenta.	73’200 ÷ 8	$\frac{x+z}{y} > \frac{x}{y}$
Si disminuye el divisor y se mantiene el dividendo el cociente aumenta.	72’200 ÷ 7	$\frac{x}{y-z} > \frac{x}{y}$
Si aumenta el divisor y se mantiene el dividendo el cociente disminuye.	72’200 ÷ 9	$\frac{x}{y+z} < \frac{x}{y}$
Si disminuye el dividendo y aumenta el divisor el cociente disminuye.	71’200 ÷ 9	$\frac{x-z}{y+a} < \frac{x}{y}$
Si aumenta el dividendo y disminuye el divisor el cociente aumenta.	73’200 ÷ 7	$\frac{x+z}{y-a} > \frac{x}{y}$
Si se multiplica el dividendo por z y se mantiene el divisor, el cociente se multiplica por z.	144’400 ÷ 8	$\frac{x \cdot z}{y} = \frac{x}{y} \cdot z$
Si se divide el dividendo entre z y se mantiene el divisor, el cociente se divide entre z.	36’100 ÷ 8	$\frac{x \div z}{y} = \frac{x}{y} \div z$
Si se multiplica el divisor por z y se mantiene el dividendo el cociente se divide entre z.	72’200 ÷ 16	$\frac{x}{y \cdot z} = \frac{x}{y} \div z$
Si se divide el divisor entre z y se mantiene el dividendo el cociente se multiplica por z.	72’200 ÷ 4	$\frac{x}{y \div z} = \frac{x}{y} \cdot z$
Si se dividen/multiplican el dividendo y el divisor entre/por el mismo número el cociente sigue igual.	36’100 ÷ 4 144’400 ÷ 16 18’050 ÷ 2 288’800 ÷ 32	$\frac{x \div z}{y \div z} = \frac{x}{y}$ $\frac{x \cdot z}{y \cdot z} = \frac{x}{y}$

Variante de B1. Anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado (el cálculo dado no está resuelto) a través de un juego de comunicación

Propósitos

Se espera que los alumnos:

- sigan usando las relaciones establecidas en las sesiones anteriores.
- usen tales relaciones para comparar multiplicaciones y divisiones sin la necesidad de calcular el resultado.
- comuniquen sus estrategias de comparación de cálculos a sus compañeros para ganar un juego.

Descripción de la actividad

Se hace un juego de comunicación en el cual los alumnos tienen que dar a conocer sus estrategias tanto de multiplicaciones como de divisiones sobre cómo comparar cálculos para ganar. Se forman equipos de 3 o 4 alumnos y se les da la siguiente consigna:

1. Entre ustedes recuerden y explíquense las diferentes relaciones en las multiplicaciones y divisiones que hemos encontrado en las sesiones anteriores.
2. Va a pasar un alumno del primer equipo para resolver un problema de comparación entre cálculos. En este momento su equipo no puede ayudarle. Por eso es importante que revisen las estrategias antes.
3. Si la respuesta es correcta, el equipo gana un punto. Si la respuesta no es correcta, otro equipo se puede ganar el punto si un miembro del equipo resuelve bien el problema.
4. Un equipo no puede enviar dos veces al mismo alumno a que resuelva un problema, tienen que pasar todos los integrantes del equipo.
5. El equipo que al final tenga más puntos gana el juego.
6. Después de que todos los equipos hayan pasado una vez, se les dará nuevamente un tiempo para pensar en estrategias.

Análisis de los problemas

A continuación, se presentan los problemas del juego, así como un análisis sintético de ellos. Se hace de la misma manera que en la actividad anterior con un análisis de cómo cambian las partes del cálculo en comparación con el cálculo original y describiendo las relaciones que se ponen en juego para resolver cada uno de los problemas.

Multiplicación

Cálculo "original" con el cual se comparan los siguientes cálculos: 12 x 16'100

Tabla 5
Cálculos multiplicación

Cálculo "original": 12 x 16'100		
Relación que se trabaja	**Cálculos que se comparan con el cálculo "original"**	**Expresión algebraica** x = primer factor y = segundo factor • x, y, z, a > 0 • x – z, y – z, y – a > 0
Si disminuye uno de los factores disminuye el producto.	11 × 16'100 12 × 15'100	$(x - z) \cdot y < x \cdot y$ $x \cdot (y - z) < x \cdot y$
Si aumenta uno de los factores aumenta el producto.	13 × 16'100 12 × 17'100	$(x + z) \cdot y > x \cdot y$ $x \cdot (y + z) > x \cdot y$
Si disminuyen los dos factores disminuye el producto.	11 × 15'100	$(x - z) \cdot (y - a) < x \cdot y$
Si aumentan los dos factores aumenta el producto.	13×17'100	$(x + z) \cdot (y + a) > x \cdot y$
Si se multiplica uno de los factores por z el producto se multiplica por z.	24 × 16'100 12 × 32'200	$(x \cdot z) \cdot y = z \cdot (x \cdot y)$ $x \cdot (y \cdot z) = z \cdot (x \cdot y)$
Si se divide uno de los factores entre z el producto se divide entre z.	6 × 16'100 12 × 8050	$\frac{x}{z} \cdot y = \frac{x \cdot y}{z}$ $x \cdot \frac{y}{z} = \frac{x \cdot y}{z}$
Si se multiplica uno de los factores por z y se divide el otro entre el mismo número, el producto sigue igual.	6 × 32'200 24 × 8050 3 × 64'400 48 × 4025	$(x \cdot z) \cdot \frac{y}{z} = x \cdot y$ $\frac{x}{z} \cdot (y \cdot z) = x \cdot y$

División

Cálculo “original” con el cual se comparan los siguientes cálculos: 48’120 ÷ 12

Tabla 6
Cálculos división

Cálculo “original”: 48’120 ÷ 12		
Relación que se trabaja	**Cálculos que se comparan con el cálculo “original”**	**Expresión algebraica** x = dividendo y = divisor • x, y, z, a > 0 • x – z, y – z, y – a > 0
Si disminuye el dividendo y se mantiene el divisor el cociente disminuye.	47’120 ÷ 12	$\frac{x-z}{y} < \frac{x}{y}$
Si aumenta el dividendo y se mantiene el divisor el cociente aumenta.	49’120 ÷ 12	$\frac{x+z}{y} > \frac{x}{y}$
Si disminuye el divisor y se mantiene el dividendo el cociente aumenta.	48’120 ÷ 11	$\frac{x}{y-z} > \frac{x}{y}$
Si aumenta el divisor y se mantiene el dividendo el cociente disminuye.	48’120 ÷ 13	$\frac{x}{y+z} < \frac{x}{y}$
Si disminuye el dividendo y aumenta el divisor el cociente disminuye.	47’120 ÷ 13	$\frac{x-z}{y+a} < \frac{x}{y}$
Si aumenta el dividendo y disminuye el divisor el cociente aumenta.	49’120 ÷ 11	$\frac{x+z}{y-a} > \frac{x}{y}$
Si se multiplica el dividendo por z y se mantiene el divisor, el cociente se multiplica por z.	96’240 ÷ 12	$\frac{x \cdot z}{y} = \frac{x}{y} \cdot z$
Si se divide el dividendo entre z y se mantiene el divisor, el cociente se divide entre z.	24’060 ÷ 12	$\frac{x \div z}{y} = \frac{x}{y} \div z$
Si se multiplica el divisor por z y se mantiene el dividendo el cociente se divide entre z.	48’120 ÷ 24	$\frac{x}{y \cdot z} = \frac{x}{y} \div z$
Si se divide el divisor entre z y se mantiene el dividendo el cociente se multiplica por z.	48’120 ÷ 6	$\frac{x}{y \div z} = \frac{x}{y} \cdot z$
Si se dividen/multiplican el dividendo y el divisor entre/por el mismo número el cociente sigue igual.	24’060 ÷ 6 96’240 ÷ 24 12’030 ÷ 3 192’480 ÷ 48	$\frac{x \div z}{y \div z} = \frac{x}{y}$ $\frac{x \cdot z}{y \cdot z} = \frac{x}{y}$

Sesión 4

Tipo de problema H. Anticipar la cantidad de cifras de un producto/cociente.

Propósito

Se espera que los alumnos:

- usen el cálculo estimativo para anticipar la cantidad de cifras de productos y cocientes.

En la primera parte de esta sesión se trabaja con la anticipación del número de cifras de productos y cocientes, por ejemplo:

¿Cuántas cifras tendrá el producto 12 x 352?

Para resolver este tipo de problema los alumnos pueden trabajar con las estrategias de la sesión 1 (redondeo, dígitos de la izquierda, números compatibles), sin embargo, se pide un paso de abstracción más, ya que no se pregunta por el resultado en sí, sino por el número de cifras del mismo.

Tipo de problema I. Anticipar producto/cociente de un cálculo dado.

Propósito
Se espera que los alumnos:

- anticipen resultados aproximados de multiplicaciones y divisiones.

En la segunda parte los alumnos vuelven a anticipar resultados de productos y cocientes como en la sesión 1 y 2, pero esta vez sin tener números de referencia. Se trata de problemas como:

¿Cuánto te va a dar más o menos el siguiente cálculo?: 19 x 4550

¿Más de cuánto? ¿Menos de cuánto? Explica por qué.

Ellos mismos tienen que establecer sus referencias, por ejemplo: “Me va a dar menos que 100’000 porque 20 x 5000 es 100’000 y los factores de la multiplicación son más pequeños. Y me va a dar más que 50’000 porque 10 x 5000 da 50’000 pero mi primer factor es más grande.” En este tipo de problema es importante que los alumnos se percaten de que hay varias respuestas correctas y que varían en su grado de aproximación.

Sesión 5

Problemas del tipo F1. Identificar si un resultado dado es correcto o no

Propósito

Se espera que los alumnos:

- usen el cálculo estimativo para determinar la validez de resultados.

Una de las aplicaciones prácticas del cálculo mental en el aula es la de usarlo para validar el resultado de un cálculo exacto. Por lo mismo dedicaremos la 5° sesión a trabajar con problemas del tipo:

Sin hacer el cálculo exacto decide si el resultado es correcto o no.

9 x 8480 = 7258 ❍ correcto ❍ incorrecto

Para la resolución de estos problemas los alumnos pueden usar procedimientos vistos en las sesiones anteriores como, por ejemplo, el redondeo para anticipar el producto (p.ej. 9 x 8000 = 72’000, por lo que el producto no me puede dar algo con 7000), el redondeo para encuadrar el producto (p.ej. 9x 8000 = 72’000; 9 x 9000 = 81’000, por lo mismo el producto tiene que estar entre 72’000 y 81’000) o anticipar el número de cifras del cociente. Algunos de los problemas permiten otras deducciones lógicas como, por ejemplo: “No puede ser que uno de los factores sea más grande que el producto.”

Sesión 6

Problemas del tipo: Decidir si para resolver un cierto problema es suficiente hacer un cálculo estimativo o no

Propósito

Se espera que los alumnos:

- decidan si para resolver un cierto problema es suficiente hacer un cálculo estimativo o no.

En la última sesión de la secuencia se trabajan problemas situacionales, es decidir problemas que plantean una situación en un contexto determinado. En un primer paso, se trata de decidir qué problemas se pueden resolver con un cálculo estimativo y cuáles requieren de un cálculo exacto. Esta actividad tiene como objetivo que los alumnos se den cuenta, una vez más, de que los problemas matemáticos no requieren siempre de un resultado exacto y que pueden, por el contrario, resolverse con un cálculo estimativo. En un segundo paso, los alumnos resuelven algunos problemas situacionales que se pueden resolver con cálculo estimativo. En esta actividad se puede indagar si los alumnos reutilizan los procedimientos de las sesiones anteriores o si recurren al cálculo exacto.

Conocimientos previos necesarios

Para que los alumnos pudieran contar con recursos que les permitieran enfrentar los problemas matemáticos que se les plantearon tanto en la secuencia piloto como en la definitiva, consideramos que requerían de los siguientes conocimientos previos:

- Disponer en memoria de los resultados de las tablas del 1 al 10 y usarlos para resolver multiplicaciones y divisiones.
- Resolver mediante cálculo mental multiplicaciones y divisiones con números grandes que terminan en ceros:
  Ejemplo: 300 x 400 = 120’000 480’000 ÷ 6000 = 80
- Resolver mediante cálculo mental multiplicaciones con un factor potencia de 10/Divisiones con el divisor potencia de 10:
  Ejemplos: 100 x 1268 = 126’800 456’000 ÷ 1000 = 456
- Resolver divisiones mediante la descomposición de dividendos
  Ejemplo: 78 ÷ 3 = (60 ÷ 3) + (18 ÷ 3)
- Establecer las siguientes relaciones entre la multiplicación y la división:
  - Si 360’000 ÷ 90 da 4000, 4000 x 90 da 360’000
  - Si 360’000 ÷ 90 da 4000, 360’000 ÷ 4000 da 90,
  - Si 360’000 ÷ 4000 da 90, 90 x 4000 da 360’000
- Establecer las siguientes relaciones entre los componentes de una multiplicación o entre los componentes de una división:
  - Si aumenta uno de los factores (o los dos) aumenta el producto.
  - Si disminuye uno de los factores (o los dos) disminuye el producto.
  - Si aumenta el dividendo aumenta el cociente (manteniendo constante el divisor).
  - Si disminuye el dividendo disminuye el cociente (manteniendo constante el divisor).
  - Si aumenta el divisor disminuye el cociente (manteniendo constante el dividendo).
  - Si disminuye el divisor aumenta el cociente (manteniendo el dividendo).

Algunos de estos conocimientos se habían trabajado dentro del currículo regular del colegio a lo largo del año escolar y de años escolares pasados, otros se reforzaron de manera específica antes de implementar la secuencia.

4.2.2 Implementación, análisis *a posteriori* y validación de la secuencia piloto

Como ya hemos mencionado la prueba piloto se implementó durante el segundo semestre del año escolar 2015/2016 en un grupo de 5° año de un colegio particular bilingüe (español-alemán) en la ciudad de Querétaro. El grupo piloto se componía de 11 alumnos, 6 niñas y 5 niños de entre 10 y 12 años. Al igual que el grupo con el que se implementó la secuencia final, todos provenían de un ámbito socio-económico medio-alto o alto, la lengua materna de casi todos los alumnos era el español y habían aprendido alemán como segunda lengua desde Kinder 1, en el mismo colegio. La secuencia se implementó durante las clases habituales de matemáticas del grupo en cuestión. Se trabajó entre una y tres veces por semana durante 45 minutos. Todas las sesiones fueron video-grabadas.

Los alumnos participaron de manera muy activa en todas las sesiones, resolviendo problemas y explicando sus procedimientos. Inicialmente estaba planeado implementar 6 sesiones de 45 minutos cada una. Durante la primera sesión se puso de manifiesto que las puestas en común de los procedimientos de los alumnos fueron mucho más enriquecedoras de lo esperado, y por lo mismo tomaron más tiempo de lo previsto. Por ello, se decidió ajustar la planeación haciendo las siguientes modificaciones en vista al diseño de la secuencia definitiva: se abordaron menos contenidos de los originalmente planeados (los problemas de las sesiones 4, 5 y 6 ya no se plantearon), pero se trabajaron de manera más profunda los contenidos de las sesiones 1, 2, y 3, dando mayor espacio a las interacciones entre alumnos y a la puesta en común; eso último motivó a que se llevaran a cabo nueve sesiones en lugar de seis.

Respecto al uso del idioma (español y/o alemán) se tomó la decisión de realizar un acuerdo explícito entre los alumnos y la maestra: aunque la maestra invitó continuamente a los alumnos a contestar en español cuando se les dificultaba explicar algo en alemán, pocos alumnos recurrieron al español; la mayoría respondía que sí podía responder en alemán. Sin embargo, en momentos de trabajo en parejas y/o equipos, los alumnos recurrieron casi siempre al español. Ello nos lleva a suponer que los alumnos –a excepción de una alumna cuya lengua materna era el alemán– se sentían más cómodos expresándose en español, pero que tenían un nivel de alemán que les permitía explicar sus procedimientos en ese idioma, aunque no siempre con la misma claridad que en su propia lengua.

A continuación, se describen las estrategias utilizadas con mayor frecuencia por los alumnos durante la secuencia piloto, ya sea para la multiplicación o para la división.

Tabla 7
Estrategias de multiplicación observadas en la secuencia piloto

Tipo de problema	**Estrategia**	**Cálculo hecho por el alumno**	**Explicación del alumno**
Anticipar/Encuadrar 97 x 21’376 da ❍ menos que 100’000 ❍ igual a 100’000 ❍ más que 100’000	Redondeo	100 x 21’376	“Con 100 es más fácil y veo que me da mucho más que 100’000”
	Dígito de la izquierda	97 x 2 = 194 “más 4 ceros” → 1’940’000	“Hice 97 x 2 y puse los 4 ceros. Veo que me da mucho más.”
	Comparación con otro cálculo	10 x 21’376	“Yo vi que si pongo 10 en lugar de 97 ya me da mucho más.”
Comparación de cálculos 7 x 12’200 en comparación con 8 x 12’200	Redondeo	7 x 12’000 = 84’000 8 x 12’000 = 96’000	“7 por 12’000 te da 84’000, pero si multiplicas el mismo número (12’200) 8 veces te da 96’000.
	Comparar factores		“Estás multiplicando el 12’200 por menos veces, por eso te da menos.

Tabla 8
Estrategias de división observadas en la secuencia piloto

Tipo de problema	**Estrategia**	**Cálculo hecho por el alumno**	**Explicación del alumno**
Anticipar/Encuadrar 1534 ÷ 6	Números compatibles	1800 ÷ 6	“El 15 no va entre 6, por eso tomé 1800 y vi que me da menos de 500.”
❍ 0 - 500 ❍ 500 - 1000 ❍ 1000 – 1500 ❍ 1500 - 2000	Comparación con otro cálculo	1534 : 2	“Hice 1534 entre 2 y sé que me da menos que 1000, pero si divido entre 6 me va a dar mucho menos.”
Comparación de cálculos 71’200 ÷ 8 en comparación con 72’200 ÷ 8	Comparar dividendos y divisores		En 71’200 tienes mensos que dividir que en 72’200, pero dividen entre el mismo número, por esto te va a dar menos.
	Ejemplo situacional		Tienes menos dulces, pero los repartes al mismo número de alumnos. Te va a dar menos dulces para cada uno.

La implementación de la secuencia piloto, así como el análisis de la misma, nos permitieron tomar decisiones para el diseño de la secuencia final. Estas decisiones se basaron en los siguientes resultados de la prueba piloto:

- En general, las divisiones causaron más dificultades que las multiplicaciones.
- No se observaron cambios de procedimientos en los ítems cuyos números dados eran potencias de 10, en relación con aquellos que no lo eran.
- Algunas actividades, por ejemplo, la dinámica del juego con tarjetas, resultaron repetitivas; sin embargo, esto ayudó a los alumnos a ver semejanzas entre las diferentes actividades, sin que fuera necesario explicar cada vez las reglas.

Además, hubo otros factores que nos llevaron a hacer adaptaciones a la secuencia piloto. Estos se presentan a continuación:

Modificaciones sobre la muestra:

- Se trabajó con un grupo más numeroso (20 en lugar de 11 alumnos).
- En general, el grupo piloto contó con mayores conocimientos previos para afrontar la secuencia planeada.
- En el grupo de la secuencia definitiva se se puso de manifiesto una mayor heterogeneidad en los conocimientos matemáticos de los alumnos al interior del grupo.

Modificaciones sobre el momento de la implementación (debido a cuestiones de organización del programa de la maestría):

- La secuencia final se implementaría en el primer semestre (noviembre) de un grupo de 5º grado, mientras que la prueba piloto se implementó en el segundo semestre (mayo) de 5° año de primaria.

Modificaciones sobre la dinámica de las clases y la gradualidad de los problemas:

- Se procuró que las sesiones fueran más secuenciadas y que el nivel de dificultad aumentara de una sesión a otra.
- Se buscaron otras maneras de presentar los problemas, para no ser repetitivos.

- Desde el inicio se trabajó con todos los alumnos planteando problemas con un nivel bajo de dificultad y, en función de su desempeño, se aumentó el grado de dificultad.

Modificaciones sobre la necesidad de institucionalizar:

- Se estableció qué se institucionalizaría, qué serviría de base para sesiones posteriores. Este punto no se había considerado lo suficiente para la secuencia piloto.

Con base en las observaciones anteriores, y considerando que las puestas en común fueron mucho más enriquecedoras de lo esperado, decidimos acotar la secuencia. Esto implicaba trabajar con solamente tres tipos de problemas: 1) anticipar productos y cocientes, 2) encuadrar productos y cocientes, y 3) comparar cálculos con otros cálculos dados. Además, decidimos hacer algunos ajustes específicos en los diferentes tipos de problemas:

- Problemas que exigen anticipar productos y cocientes:
  - Ofrecer solamente dos respuestas posibles (*menos que/más que*) ya que en el piloto se observó que los alumnos descartaron de manera muy rápida la posibilidad de “igual a”. Además, la opción “igual a” refiere más a un cálculo exacto y no a un cálculo estimativo.
  - Elegir números más sencillos para las primeras sesiones para posibilitar que todos los alumnos pudieran ser exitosos en la resolución de problemas y así se facilitara el acceso al cálculo estimativo.
  - No trabajar de manera explícita la diferencia entre problemas que solicitan anticipar el producto/cociente con resultados dados que no son potencias de 10 y los que exigen anticipar el producto/cociente con resultados dados que sí son potencias de 10, ya que en la prueba piloto no se pudieron observar diferencias en las estrategias usadas.

- Problemas que involucran encuadrar productos y cocientes:
    - No trabajar de manera explícita la diferencia entre problemas que exigen encuadrar con rangos de números que no son potencias de 10 y los que solicitan encuadrar con rangos de números que sí son potencias de 10, ya que en la prueba piloto no se pudieron observar diferencias en las estrategias usadas.
- Problemas que exigen comparar cálculos (Juego en equipos):
    - Dividir el grupo en dos para que todos los alumnos tengan la oportunidad de participar en el juego.
- Evaluaciones:
    - Incluir dos evaluaciones (en lugar de una) para recuperar procedimientos de los alumnos, una en la sesión 5 (problemas de anticipar y encuadrar), otra en la sesión 10 (problemas de comparar).
    - No incluir problemas situacionales ya que estos casi no se trabajan durante la secuencia.
    - Incluir en la segunda evaluación solamente problemas que implican la comparación con otros cálculos, pues los de anticipar y encuadrar se abordarían en la primera evaluación.

4.3 Diseño de la secuencia definitiva

A continuación, se presenta de manera sintética el diseño de la secuencia definitiva sesión por sesión. Es preciso señalar que en un primero momento estaba planeado implementar 9 sesiones. Sin embargo, se hicieron algunos cambios durante la implementación, de manera tal que al final se implementaron 14 sesiones de 45 minutos cada una. Estos cambios se explicarán en la presentación de cada una de las sesiones.

En cuanto a las evaluaciones es importante mencionar que las mismas son de carácter formativo y tienen dos objetivos: Por un lado, recuperar procedimientos de los alumnos para su análisis, por otro lado, identificar qué concocimientos de los tratados en las diferentes sesiones reutilizan los alumnos al resolver los problemas de la evaluación.

Además, es necesario precisar que se desarrollará el análisis *a priori* únicamente de aquellos problemas que tuvieron cambios relevantes, en comparación con la versión implementada en la secuencia piloto. El análisis *a priori* de los demás problemas se encuentra el apartado 4.2.1. Los problemas que sí tuvieron modificaciones importantes son los de anticipar productos y cocientes de la sesión 1, así como los problemas que se plantean en la evaluación de la sesión 5.

Sesión 1

Actividades
Introducción al tema “estimación” con un problema situacional. “Fernando ahorró seiscientos pesos. En la juguetería ve una pelota a 189 pesos, un videojuego de 275 pesos y una cuerda para saltar a 55 pesos. Para ver si le alcanza el dinero suma doscientos pesos más trescientos pesos más cincuenta pesos. Le dio quinientos cincuenta pesos y ve que sí le alcanza el dinero.” Se habla sobre lo que hizo Fernando, para ver si los alumnos consideran si es “válido” lo que hizo Fernando y para introducir vocabulario matemático importante (estimar/redondear). Se pregunta a los alumnos si saben cómo se llama lo que hizo Fernando. Si conocen la palabra (estimar; redondear) en español, se les dice cómo se dice en alemán (schätzen; runden) y se apuntan las nuevas palabras en el pizarrón.
Los alumnos resuelven en parejas los siguientes problemas del tipo A1 “Anticipar productos”: 11 x 6600 da: ~~❍~~ menos que 100’000 ❍ más que 100’000 29 x 3200 da: ~~❍~~ menos que 100’000 ❍ más que 100’000
Puesta en común de las estrategias: Se presentan, justifican y difunden estrategias (redondeo, comparar con otro cálculo). En un primer momento presentan los alumnos. La docente propone luego analizar aquellas estrategias que pudieron no haber aparecido.
Los alumnos resuelven en parejas los siguientes problemas del tipo A1 “Anticipar cocientes”: 52’000 ÷ 6 da ~~❍~~ menos que 10’000 ❍ más que 10’000 55’351 ÷ 4 da ❍ menos que 10’000 ~~❍~~ más que 10’000
A través de una puesta en común se presentan, justifican y difunden varias estrategias (dígito de la izquierda, comparar con otro cálculo).
Institucionalización de las diversas estrategias que se presentaron anteriormente. Las estrategias se apuntan en un cartel para que estén visibles en el salón para las siguientes sesiones.

Análisis *a priori* de los ítems de multiplicación:

11 x 6600: Este ítem se puede resolver con redondeo del primer factor (10 x 6600), redondeo del segundo factor (11 x 7000/11 x 6000) o por redondeo del primero y redondeo del segundo factor (10 x 7000/10 x 6000). Todos estos redondeos llevan al mismo resultado “menos que 100’000”. Otro procedimiento podría ser la comparación con otro cálculo, por ejemplo, se podría decir que 10 x 10’000 = 100’000 y de ahí deducir que 11 (solamente “un poco más” que 10) x 6600 (“mucho menos” que 10’000) va a dar menos que 100’000.

29 x 3200: También el segundo ítem se puede resolver por redondeo de uno o dos factores. Sin embargo, es un poco más difícil porque no tenemos ningún factor de 10, como sí se obtuvo en el primer ítem después de redondear el 11. Además, tiene la dificultad de que el redondeo a 30 x 4000 lleva a un resultado estimativo de más de 100’000 mientras que los demás dan menos de 100’000 (30 x 3200 = 96’000; 30 x 3000 = 90’000). Aunque este último redondeo no sea muy probable, durante la prueba piloto se observó un caso parecido donde en un cálculo (32 x 2400) un alumno dijo que había calculado 20 x 2400, porque era más fácil calcular con 20 que con 32. Otro alumno contestó que el 20 quedaba muy lejos, que era mejor calcular 30 x 2400.

Análisis *a priori* de los ítems de división:

52’000 ÷ 6: El primer ítem de división se puede resolver con encontrar un número compatible. Puede haber alumnos que “quiten los ceros” a 52’000, identifiquen que 52 entre 6 “no da” y encuentren un número compatible que podría ser el 48 o el 54. Es más probable que lleguen a 48, ya que para resolver divisiones con descomposición o con el algoritmo siempre se busca un número menor al original; sin embargo, puede haber alumnos que se den cuenta que para estimar no importa si el número es menor o mayor al número original, sino que esté lo más cerca posible. También se podría hacer la división 60’000 ÷ 6 = 10’000 y deducir que 52’000 ÷ 6 va a da menos que 10’000. Otro procedimiento podría ser la resolución a través de una multiplicación, multiplicando el resultado estimativo dado 10’000 por el cociente 6. Como da 60’000, es decir más que el dividendo original, se puede deducir que el cálculo original va a dar menos que 10’000.

55’351 ÷ 4: El segundo ítem de división es más complejo que el primero en dos sentidos: de un lado el dividendo no termina en ceros, lo que requiere que se haga un redondeo antes de encontrar un número compatible. Del otro lado, una vez que se haya encontrado el número compatible (p. ej. 52 o 56), la división correspondiente no es una división cuyo resultado la mayoría de los alumnos tenga memorizado. Es decir, que tienen que hacer una descomposición, por ejemplo, 52 ÷ 4 = (40 ÷ 4) + (12 ÷ 4)) para encontrar el resultado estimativo. También en este ítem existen otros posibles procedimientos que no requieren ni hacer un redondeo, ni buscar números compatibles, ni descomponer el dividendo. Se podría por ejemplo, hacer la comparación con otro cálculo (40’000 ÷ 4 = 10’000, por lo tanto 55’351 ÷ 4 va a dar más que 10’000) o resolver con una multiplicación (10’000 x 4 = 40’000, por lo tanto, para obtener 55’351 necesito más que 10’000).

Sesión 2

Actividades
Retomar la institucionalización de las diversas estrategias que se presentaron en la primera sesión.
Juego de encuadrar multiplicaciones, tipo de problema C1. (La explicación del juego, los problemas así como el análisis *a priori* de los mismos se pueden consultar en el apartado 4.2.1.)

Sesión 3

Actividades
Puesta en común de las estrategias usadas para resolver algunos problemas del juego de la sesión anterior: Cada alumno recibe un cálculo del juego en una hoja más grande y lo pega en la tabla de rangos que está en el pizarrón. Se identifican los cálculos que no están bien puestos y se justifica por qué no están bien puestos y dónde deberían de ir.
Institucionalización (de manera paralela a la puesta en común): Se comparan las estrategias con las estrategias ya apuntadas de la primera sesión. Si aparecen nuevas estrategias se agregan. Además, se anotan características comunes entre ciertos cálculos.
Se analizan los dos ítems de división que quedaron pendientes de la primera sesión (Tipo A1, anticipar cocientes): 52’000 ÷ 6 da   55’351 ÷ 4 da ⊖ menos que 10’000   ❍ menos que 10’000 ❍ más que 10’000   ❍ menos que 10’000 A través de una puesta en común se presentan, justifican y difunden estrategias.
Institucionalización (de manera paralela a la puesta en común) de las diversas estrategias que se presentan. Las estrategias se apuntan en un cartel para que estén visibles en el salón para las siguientes sesiones.

Es importante mencionar que la idea de trabajar con carteles para la institucionalización surgió durante el análisis de la implementación de la prueba piloto, ya que nos percatamos de que había faltado un espacio de reorganización durante el cual se retomaran e hicieran visibles procedimientos y explicaciones.

Sesión 4

Actividades
Retomar lo que se apuntó en el cartel de institucionalización y explicar el juego de encuadrar divisiones (Tipo de problema C1) con un ejemplo en el pizarrón
Juego de encuadrar divisiones, tipo de problema C1 (La explicación del juego, los problemas, así como el análisis *a priori* de los mismos se pueden consultar en el apartado 4.2.1.)
Puesta en común de las estrategias de algunos problemas del juego: Cada alumno recibe un cálculo del juego en una hoja más grande y lo pega en la tabla de rangos que está en el pizarrón. Se identifican los cálculos que no están bien puestos y se justifica por qué no están bien puestos y dónde deberían de ir.

Sesión 5

Actividades
"Evaluación 1": Problemas del tipo A1 "anticipar" y C1 "encuadrar"; de cada uno de los tipos se propone dos problemas de multiplicación y dos de división. (véase Figuras 22 y 23) Propósito: Identificar procedimientos de los alumnos.

A continuación, se presenta la primera evaluación, seguida del análisis *a priori* de los problemas que la integran.

Estimación

1. **Resuelve las siguientes estimaciones y explica cómo hallaste la respuesta. Recuerda que no puedes hacer cálculos exactos.**

Cálculo	**Notas/Explicación**
a. 21 x 6200 da ○ menos que 100'000 ○ más que 100'000	
b. 12 x 7900 da ○ menos que 110'000 ○ más que 110'000	
c. 650'379 : 92 da ○ menos que 10'000 ○ más que 10'000	
d. 380'367 : 41 da ○ menos que 9000 ○ más que 9000	

Figura 22: Evaluación Sesión 5.1

2. **Resuelve las siguientes estimaciones y explica cómo hallaste la respuesta. Recuerda que no puedes hacer cálculos exactos.**

	1000 a 10'0000	10'000 a 100'000	100'000 a 1'000'000
42 x 2300			
Notas/Explicación: ______			

	1000 a 8000	8000 a 80'000	80'000 a 800'000
18 x 3800			
Notas/Explicación: ______			

	0 a 100	100 a 1000	1000 a 10'000
42'179 : 31			
Notas/Explicación: ______			

	0 a 400	400 a 4000	4000 a 40'000
25'178 : 82			
Notas/Explicación: ______			

Figura 23: Evaluación Sesión 5.2

Análisis *a priori* de los ítems de la evaluación:

En la primera parte (ejercicio 1), los alumnos resuelven dos ítems de anticipación de productos y dos de anticipación de cocientes; en algunos de ellos el resultado dado es potencia de 10, y en los otros no.

21 x 6200 (menor/mayor a 100’000): El primer ítem del ejercicio uno es una multiplicación con un factor de dos cifras que no termina en cero y el otro de cuatro cifras que termina en 00. El producto dado es potencia de 10. El ítem se puede resolver con redondeo de uno o de los dos factores (20 x 6200, 21 x 6000, 20 x 6000), todos los redondeos llevan al resultado estimativo “mayor a 100’000”.

12 x 7900 (menor/mayor a 110’000): El segundo ítem parece al primero, sin embargo, el producto dado no es potencia de 10. El ítem se puede resolver con el procedimiento del redondeo de uno o dos factores (10 x 7900, 12 x 8000, 10 x 8000) para encontrar el resultado estimativo menor a “120’000”.

650’379 ÷ 92 (menor/mayor a 10’000): El tercer ítem es una división con dividendo de seis y divisor de dos cifras, los dos no terminan en cero. El cociente dado es potencias de 10. El cálculo se puede resolver buscando números compatibles (630’000 ÷ 90), con una comparación con otro cálculo (900’000 ÷ 90 daría 10’000, por lo mismo 650’379 ÷ 92 da menos) o con una multiplicación (10’000 x 92 = 920’000; el dividendo original es menor a 920’000 por lo mismo da menos que 10’000).

380’367 ÷ 41 (menor/mayor a 9000): El último ítem de este ejercicio tiene características similares al ítem anterior, sin embargo, el cociente dado no es potencia de 10. Se pueden usar las mismas estrategias del ítem tres: Números compatibles (380’000 ÷ 38; 400’000 ÷ 40; 410’000 ÷ 41), comparación con otro cálculo (410’000 ÷ 41 daría 10’000 por lo mismo el cálculo dado dará menos) o multiplicación (10’000 x 41 = 410’000; el dividendo original es menor a 410’000 por lo mismo da menos que 10’000).

En la segunda parte de la evaluación (ejercicio 2), los alumnos resuelven dos ítems de encuadramiento de productos y dos de cocientes, uno de cada uno con rangos de resultados dados potencias 10, el otro con rangos de resultados dados no potencias de 10.

42 x 2300 (= 1000 a 10’000; 10’000 a 100’000; 100’000 a 1’000’000): El primer ítem se puede resolver con los mismos procedimientos explicados en el ejercicio de anticipar: redondeo de uno o dos factores (40 x 2300 = 92’000; 42 x 2000 = 84’000; 40 x 2000 = 80’000). Todos estos redondeos llevan al rango de 10’000 a 100’000.

18 x 3800 (= 1000 a 8000; 8000 a 80’000; 80’000 a 800’000): Para el segundo ítem aplica el mismo procedimiento, aunque los rangos dados no sean potencias de 10: 20 x 3800; = 76’000; 18 x 4000 = 72’000; 20 x 4000 = 80’000.

42’179 ÷ 31 (= 0 a 100; 100 a 1000; 1000 a 10’000): En la primera división de este ejercicio se puede trabajar con números compatibles (42’000 ÷ 30 = 1400), comparación con otro cálculo (310’000 ÷ 31) o acercándose con multiplicaciones (100 x 31 = 3100; 1000 x 31 = 31’000; 10’000 x 31 = 310’000).

25’178 ÷ 84 (= 0 a 400; 400 a 4000; 4000 a 40’000): Aunque en el cuarto ítem los rangos de números no sean potencias de 10 se puede trabajar con números compatibles (24’000 ÷ 80 = 300) o con acercamiento con multiplicaciones (400 x 80 = 32’000). La comparación con otro cálculo me parece menos factible.

Sesión 6

<table>
<tr><th>Actividades</th></tr>
<tr><td>Retrospección corta sobre lo que se trabajó en las sesiones pasadas e información a los alumnos acerca de que se trabajaría otro tipo de problemas (B2: Anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado)
“Hasta ahora vimos si un cálculo da más o menos que un número dado, hoy vamos a comparar diferentes cálculos.”
Poner un ejemplo en el pizarrón:
<table>
<tr><td>menos que
8 x 14’300</td><td>igual a
8 x 14’300</td><td>más que
8 x 14’300</td></tr>
</table>
“No me interesa el resultado del cálculo, pero si les doy otro cálculo, por ejemplo 7 x 14’300, ¿me pueden decir si da más o menos que el cálculo que está en la tabla? ¿Por qué?”</td></tr>
<tr><td>Juego de comparación de multiplicaciones
(La explicación del juego, los problemas. así como el análisis a priori de los mismos se pueden consultar en el apartado 4.2.1.)</td></tr>
<tr><td>Puesta en común e institucionalización:
Se distribuyen los cálculos del juego a los alumnos para que los pongan en la tabla que está en el pizarrón. Se revisan los cálculos y se expresan las relaciones, mismas que se anotarán el un cartel.</td></tr>
</table>

Sesión 7

Actividades
Retrospección corta a las relaciones en las multiplicaciones y averiguar con “números pequeños” qué relaciones juegan en la comparación de divisiones.
Juego de comparación de divisiones (La explicación del juego, los problemas, así como el análisis *a priori* de los mismos se pueden consultar en el apartado 4.2.1.)
Puesta en común e institucionalización: Se distribuyen los cálculos del juego a los alumnos para que los pongan en la tabla que está en el pizarrón. Se revisan los cálculos y se expresan las relaciones que se anotarán en un cartel.

Sesión 8

Actividades
Explicación del juego de comunicación, formar equipos (La explicación del juego, los problemas, así como el análisis *a priori* de los mismos se pueden consultar en el apartado 4.2.1.)
Tiempo para buscar estrategias en los equipos
Juego

Sesión 9

Actividades
En parejas, los alumnos anotan en una hoja lo más importante que aprendieron durante las tres sesiones pasadas acerca de la comparación de cálculos
Los alumnos comunican a la maestra lo que escribieron, ella escribe en un cartel lo que considera más relevante de lo que los alumnos le comunican.

Sesión 10

Actividades
“Evaluación 2”: Problemas del tipo “anticipar si el producto/cociente de un cálculo es menor/mayor o igual al producto/cociente de otro cálculo no resuelto. (véase Figuras 24 y 25) Propósito: Recuperar procedimientos de los alumnos

A continuación, se presenta la segunda evaluación.

Estimación 2

1. **Decide si los cálculos dan menos, igual o más que el cálculo original. Recuerda que no puedes hacer cálculos exactos.**

	menos que 3 x 5400	igual a 3 x 5400	más que 3 x 5400
4 x 5400			

Explica tu respuesta: ______________________________

	menos que 6 x 24'800	igual a 6 x 24'800	más que 6 x 24'800
5 x 23'800			

Explica tu respuesta: ______________________________

Figura 24: Evaluación Sesión 10.1

	menos que 3700 : 4	igual a 3700 : 4	más que 3700 : 4
3900 : 4			
Explica tu respuesta:			

	menos que 18´800 : 6	igual a 18´800 : 6	más que 18´800 : 6
17´800 : 7			
Explica tu respuesta:			

Figura 25: Evaluación Sesión 10.2

2. Contesta la siguiente pregunta y escribe tu explicación.

a. Un alumno de otro colegio dijo que 12 x 34'600 daba lo mismo que 6 x 17'300. ¿Estás de acuerdo con él?

❍ Sí ¿Por qué?

❍ No ¿Cómo le explicarías por qué no está bien su respuesta?

____

____

____

____

____

____

____

3. ¿Cuáles de los siguientes cálculos crees que darán lo mismo que 12'400 : 6? Contesta sin hacer los cálculos exactos y justifica tu respuesta.

a. **12'400 : 8** ❍ da lo mismo que 12'400 : 6 ❍ no da lo mismo que 12'400 : 6

____

____

____

____

b. **24'800 : 3** ❍ da lo mismo que 12'400 : 6 ❍ no da lo mismo que 12'400 : 6

____

____

____

____

c. **6200 : 3** ❍ da lo mismo que 12'400 : 6 ❍ no da lo mismo que 12'400 : 6

____

____

____

____

Figura 26: Evaluación Sesión 10.3

Sesión 11

Es importante mencionar que la decisión de introducir esta sesión se tomó en el transcurso de la implementación, pues consideramos importante retomar algunos problemas de la primera evaluación (sesión 5) para que los alumnos intercambiaran y revisaran en parejas algunas de sus estrategias. El objetivo de este intercambio fue que los alumnos explicitaran sus procedimientos de resolución y que aprendieran de las estrategias de los demás.

Actividades
Formación de parejas (según indicación de la maestra quien consideró el desempeño de los alumnos en la evaluación 1) y explicación del formato "Guía de preguntas" (Figura 27) para que los alumnos sepan cómo trabajar.
Revisión de la "evaluación 1" en parejas para intercambiar y revisar estrategias

Guía de preguntas

Nombres: ____________________ Ítems que van a revisar: ____________________

1. Comparen sus respuestas. Identifiquen en cuáles problemas tienen las mismas respuestas y en cuáles tienen diferentes respuestas.

Mismas respuestas	Diferentes respuestas

2. En caso de tener las mismas respuestas, ¿están seguros de ellas? Revísenlas y, de ser necesario, corríjanlas. Expliquen cómo resolvieron el problema.

3. En caso de no tener las mismas respuestas, revisen el problema y decidan cuál es la repuesta correcta. Expliquen cómo resolvieron el problema.

4. ¿Hay otra manera de resolver cada problema, sin recurrir al cálculo exacto y sin redondear los números? Explíquenla.

Figura 27: Guía de preguntas

Sesión 12

La decisión de introducir esta sesión también se tomó en el transcurso de la implementación porque identificamos que los alumnos se enfocaron mucho en el procedimiento del redondeo y nos interesó que tomaran consciencia de varios aspectos más: que redondear no es la única estrategia para resolver problemas estimativos; que solamente redondear no es suficiente, sino que después hay comparar; que la estrategia más adecuada depende de los números implicados y de la situación, y que se puede estimar independientemente del tamaño de los números.

Actividades
Plantear otros problemas para provocar otras estrategias. Se plantean y discuten los siguientes problemas: • Comparar con otro cálculo Ejemplo: 28 x 32 menos/más 100 → 10 x 10 = 100, por lo mismo 28 x 32 tiene que dar más • Dígito de la izquierda Ejemplo: 32 x 51 menos/más que 2000 → 3 x 5 = 15, agrego dos ceros, va a dar menos • Estimación a “primera vista” Ejemplo: 38 x 24 menos/más que 100’000 • Multiplicar el divisor por resultado dado 2534 ÷ 24 da 10 – 100; 100 a 1000, 1000 a 10’000, 10’000 a 100’000 → 10 x 24 = 240 (demasiado poco); → 100 x 24 = 2400 (demasiado poco, pero “ya casi”) →1000 x 24 = 24’000 (“ya me pasé”) → 1000 a 10’000

Sesión 13/Sesión14

Actividades
Elaboración en equipo de carteles que representen lo que los alumnos consideran más importante de lo que aprendieron durante la secuencia. Explicar la actividad de hacer carteles y recordar los tipos de problemas que se habían visto en la clase. Formar los equipos.
Elaboración de carteles en equipos
Presentación de los carteles, discusión sobre las presentaciones

CAPÍTULO 5
ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN: CONOCIMIENTOS DE LOS ALUMNOS

Uno de los objetivos de este trabajo de investigación ha sido identificar los conocimientos que ponen en juego los alumnos durante la resolución de determinados tipos de problemas multiplicativos de cálculo estimativo. Tal objetivo permite evaluar la pertinencia y profundizar en la caracterización de los tres tipos de problemas (anticipar resultados, encuadrar resultados, comparar cálculos) que se seleccionaron para promover el desarrollo del cálculo estimativo en problemas multiplicativos.

Para identificar los conocimientos que los alumnos pusieron en marcha al resolver los problemas que se les plantearon, se centró la atención en los procedimientos de resolución que los alumnos desplegaron por escrito y de manera oral, en los errores que aparecieron, así como en los intercambios sobre los procedimientos y errores. El hecho de analizar los errores es de suma importancia ya que, como se mencionó en el marco teórico, partimos de una perspectiva en la cual consideramos que el error no muestra ausencia de conocimiento, sino que refleja conocimientos anteriores que en algún momento estaban correctos pero que son inadaptados o falsos en la situación actual. Por ello intentaremos mostrar qué conocimientos e ideas subyacen a los errores más típicos.

La identificación de procedimientos correctos y errores también estuvo fuertemente apoyada en el análisis previo, pues en él se plasmaron las posibles respuestas, errores y dificultades de los alumnos de acuerdo con las variables didácticas que se determinaron para cada tipo de problema.

Es importante precisar que los datos que se tomaron para el análisis de las formas de resolución que los alumnos usaron, provienen sobre todo de los intercambios entre maestra y alumnos durante los momentos de confrontación grupal a lo largo de toda la secuencia. Dado que no todos los alumnos externaron sus procedimientos, en la mayor parte del análisis no reportamos datos cuantitativos (cuántos alumnos hicieron *x* procedimiento o tuvieron *y* error); en cambio, en las sesiones de evaluación sí fue posible obtener datos individuales y sí contamos con datos cuantitativos, los cuales se mostrarán más adelante.

Cabe decir que, respecto a las evaluaciones individuales, nos encontramos con una dificultad de los alumnos para verbalizar sus procedimientos de resolución de manera escrita. Esta dificultad ya está documentada en otros trabajos de investigación como, por ejemplo, en Gálvez y otros (2011) quienes hablan de "la dificultad que experimentaron los niños para verbalizar su modo de trabajo personal" (p. 34). En el apartado del análisis de las intervenciones de la maestra se reportarán las intervenciones para apoyar a los alumnos en este proceso.

Como se advertirá, hay alumnos cuyas aportaciones orales y/o escritas aparecen con mayor frecuencia; la razón de ello es que procuramos elegir ejemplos que muestren de manera explícita los procedimientos y justificaciones que nos interesa analizar de acuerdo con las preguntas de investigación.

El análisis de los procedimientos matemáticos de los niños se organizará por tipos de problemas. Es relevante mencionar que los tipos de problemas "anticipar" y "encuadrar" se juntaron en un grupo, pues se identificó que los alumnos usaron los mismos procedimientos y manifestaron las mismas dificultades en la resolución de estos dos tipos de problemas. Por ello, decidimos presentar el análisis *a posteriori* considerando dos grupos de problemas:

a) Problemas que consisten en anticipar y problemas que exigen encuadrar un resultado
b) Problemas que consisten en comparar cálculos

Para cada uno de esos grupos se presentarán cuatro apartados:

a) Procedimientos correctos usados por los alumnos en problemas de multiplicación
b) Errores y dificultades que manifestaron los alumnos en problemas de multiplicación
c) Procedimientos correctos usados por los alumnos en problemas de división
d) Errores y dificultades que manifestaron los alumnos en problemas de división

5.1 Procedimientos identificados al resolver problemas que implican la anticipación y el encuadramiento de un resultado

5.1.1 Presentación de las actividades

Como se mencionó en el capítulo 3, “Metodología”, los problemas que implican anticipar un resultado de una multiplicación consistieron en estimar el resultado de un cálculo eligiendo entre dos opciones, como se muestra en el ejemplo:

29 x 3200 da:

❍ menos que 100’000

❍ más que 100’000

En el caso de los encuadramientos los problemas estimativos consistieron en elegir, entre tres o cuatro rangos numéricos dados, aquel en el que se encontraba el producto de un cálculo. Ese tipo de problemas se planteó de la siguiente manera:

	1000 a 10’0000	10’000 a 100’000	100’000 a 1’000’000
42 x 2300			

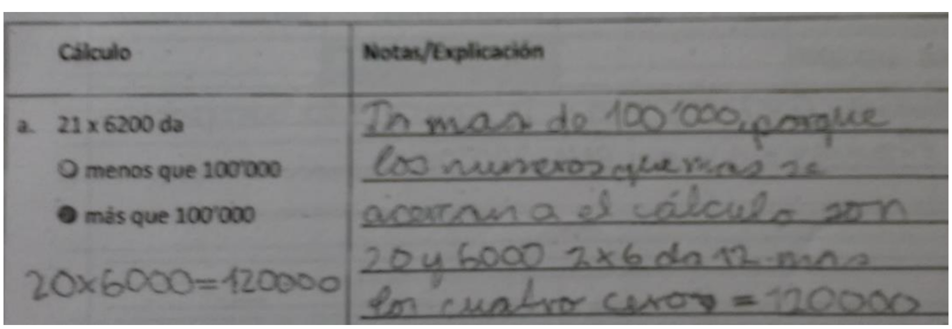
Los problemas que exigen anticipar resultados se trabajaron en diferentes momentos de la secuencia. Durante la primera sesión se resolvieron en parejas y se analizaron después en plenaria. En la quinta sesión se retomó este tipo de problemas dentro de una evaluación individual escrita. Las respuestas de esta evaluación se revisaron en parejas en la sesión 11. En las sesiones 3, 12, 13 y 14 no se resolvieron problemas de este tipo, sin embargo, se mencionaron ejemplos en el trabajo en la plenaria para evocar procedimientos que aparecieron en sesiones anteriores y para institucionalizar procedimientos.

En cuanto a los problemas que solicitan un encuadramiento, se incluyeron por primera vez en las sesiones 3 y 4, en las cuales se resolvieron en parejas y se analizaron después en plenaria. Al igual que como se hizo con los problemas que exigen anticipar, los que solicitan un encuadramiento se retomaron en la evaluación individual escrita durante la sesión 5 y se analizaron las respuestas en parejas durante la sesión 11. En las sesiones 12, 13 y 14 se presentaron ejemplos de este tipo de problemas durante la plenaria para evocar procedimientos o para institucionalizarlos.

Los dos tipos de problemas se trabajaron en un primer momento con la multiplicación y después con la división.

5.1.2 Procedimientos correctos de los alumnos para anticipar o para encuadrar un producto

En los intercambios orales grupales respecto a la comparación de procedimientos y resultados a lo largo de la secuencia, se identificó que para la resolución de los problemas que involucran anticipar y encuadrar productos la mayoría de los alumnos recurrió a un procedimiento compuesto de tres pasos: 1) redondear los factores; 2) determinar el producto del cálculo con los números redondeados; 3) comparar ese producto con el resultado o los rangos de resultados ya dados en el problema. Este procedimiento se muestra en el siguiente ejemplo de la evaluación de la sesión 5 donde David escribe: “Da mas de 100’000, porque los numeros que mas se aceran al cálculo son 20 y 6000. 2 x 6 da 12 ms los cuatro ceros = 120’000.”[18]



Cálculo	Notas/Explicación
a. 21 x 6200 da ○ menos que 100'000 ● más que 100'000 20x6000=120000	Da mas de 100'000, porque los numeros que mas se acerran a el cálculo son 20 y 6000 2x6 da 12 mas los cuatro ceros = 120000

Figura 28: Procedimiento de tres pasos (David), Sesión 5

[18] En todas las transcripciones de respuestas escritas por los alumnos se respetaron la redacción y la ortografía originales.

En cuanto al redondeo se identificaron –y en el transcurso de la secuencia se institucionalizaron– tres diferentes opciones para redondear. Por ejemplo, para el problema “29 x 3200 ¿da menos o más que 100’000?” los alumnos eligieron entre:

- redondear solamente el primer factor: 30 x 3200
- redondear solamente el segundo factor: 29 x 3000
- redondear los dos factores: 30 x 3000

La elección de uno de esos tipos de redondeo dependió sobre todo de la complejidad de los factores: En problemas con un factor cerca de diez, como por ejemplo, 11 x 6600, algunos alumnos optaron por redondear solamente uno de los factores (10 × 6600 o 11 x 7000), comentando que para obtener el resultado “solamente agregas los ceros” (redondearon para multiplicar por 10, por potencias de 10 o por números “redondos”), mientras que en un problema como 29 x 3200 se observó una tendencia a redondear los dos factores (30 x 3000).

Una vez que los números ya habían sido redondeados, para hacer el cálculo estimativo aparentemente muchos alumnos usaron la técnica del “dígito de la izquierda”, la cual consiste en calcular considerando solamente las primeras cifras de los factores y después “agregar los ceros”. Si bien esta técnica aparece en pocos casos de manera explícita (en la evaluación 1 por ejemplo, solamente dos de veinte alumnos la expresan en alguno de los cuatro problemas de anticipar o encuadrar) las experiencias previas de los alumnos en cuanto a estrategias de cálculo mental nos llevan a pensar que usan esta estrategia de manera intuitiva e implícita. David es uno de los alumnos que sí explica cómo resuelve el cálculo 20 x 6000 escribiendo: “2 x 6 da 12 más los cuatro ceros = 120’000”.

El siguiente paso fue comparar el producto obtenido con el resultado dado, por ejemplo, en “¿29 x 3200 da menos o más que 100’000?”. Un alumno explicó que “veintinueve por tres mil doscientos da menos que cien mil porque treinta por tres mil doscientos da solamente noventa y seis mil”. Es interesante mencionar que en la evaluación 1 solamente un alumno anotó este paso: en el problema “¿12 x 7900 da menos o más que 110’000?”, David escribe: “12 x 8000 = 96’000. Da menos que 110’000 porque en la cifra (se refiere al resultado 96’000) sólo hay cinco números (se refiere a las 5 cifras del número 96’000) y en cambio en 110’000 hay seis.”

En síntesis, podemos decir que el procedimiento más usado para resolver problemas que implican anticipar y encuadrar un producto fue el redondeo, en el cual se pudieron identificar variantes como redondear solamente uno de los factores o redondear los dos factores. Para comparar el resultado del cálculo con números redondeados con el cálculo dado, los alumnos recurrieron a relaciones como, por ejemplo: “si se aumenta uno o los dos factores, aumenta el resultado” o “si se disminuye uno o los dos factores, disminuye el resultado”.

Estas relaciones se analizarán con más detalle en el apartado “Comparar cálculos”, mientras que la manera de llevar a cabo la institucionalización de las mismas se explicará en el apartado 5.3 “Análisis de las intervenciones didácticas”.

5.1.3 Errores y dificultades de los alumnos en los problemas que implican anticipar o encuadrar un producto

Se identificaron errores en dos momentos: al resolver el cálculo y al comparar el resultado obtenido con el resultado o los rangos de resultados dados.

Uno de los procedimientos que se presentó fue descomponer los factores para facilitar la multiplicación y un error frecuente al realizar ese procedimiento fue hacer las descomposiciones de manera incorrecta. Esto fue el caso de Laura, quien durante la primera sesión explicó de manera oral su procedimiento para resolver el problema “29 x 3200, ¿da más o menos que 100’000?”:

Laura: Yo hice nueve por dos. Nueve por dos da dieciocho y llevo uno, y dos por tres da seis más uno da siete y me dio menos (que 100’000).[19]

(Sesión 1; Intervención 126)

Una descomposición correcta del cálculo, quitando los ceros a 3200 como lo hace Laura, sería: (20 x 30) + (20 x 2) + (9 x 30) + (9 x 2); sin embargo, Laura calculó

[19] Las transcripciones son traducciones propias del alemán al español. Las expresiones originalmente dichas por los alumnos en español se señalan con letra cursiva.

solamente (9 x 2) + (2 x 30), lo cual nos hace suponer que, además de descomponer de manera errónea, se confundió con el valor posicional de las cifras.

Otra descomposición errónea se pudo observar en el caso de Alicia (Figura 29), quien durante una evaluación escrita en la sesión 5 resolvió el cálculo 20 x 6200 con una descomposición del factor 20 en 10 x 10 y calculó lo siguiente (redondeó hacia abajo el 21):

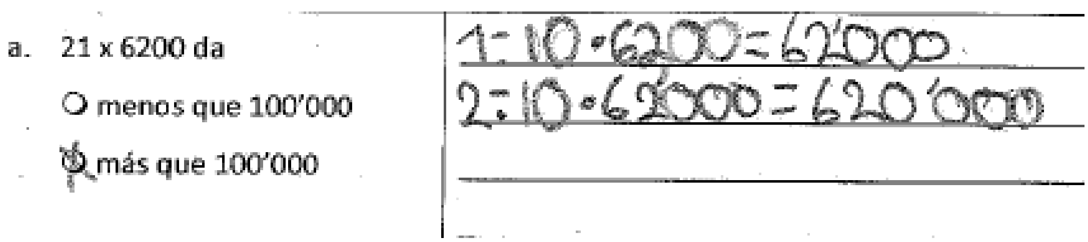


Figura 29: Descomposición errónea (Sesión 5)

Es importante mencionar que, en el primer caso, a pesar de la descomposición errónea, Laura eligió la opción correcta del problema (da menos que 100'000). Ello nos lleva a considerar que, aunque no lo tengamos documentado, es probable que este error haya ocurrido en otros problemas y con otros alumnos, ya que en algunos casos solamente tuvimos acceso a los resultados, pero no a los procedimientos.

Al momento de comparar el producto obtenido con números redondeados con el cálculo dado, se manifestaron otros errores. Algunos de ellos parecen estar relacionados con una falta de control sobre las repercusiones del redondeo en el resultado final, como lo muestra el ejemplo de Melisa (Figura 30) en la evaluación de la sesión 5 donde elige la respuesta "más que 110'000" para el cálculo 12 x 7900 y escribe: "10 x 7900 = 79'000 porque quite y está muy serca."

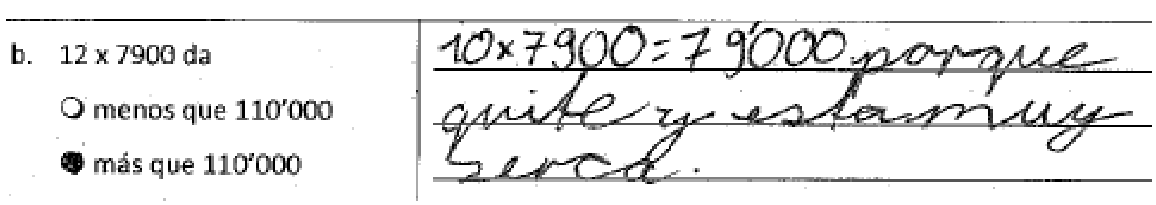


Figura 30: Comparación errónea (Sesión 5)

Melisa eligió una manera adecuada de redondear los factores y calculó correctamente el producto de la multiplicación con los números redondeados. Sin embargo, probablemente consideró que al redondear el primer factor de 12 a 10 disminuía considerablemente el resultado (79’000), quedando muy cerca de 110’000, por lo que concluyó que el resultado del cálculo dado iba a dar más que 110’000.

Un error poco frecuente que apareció en tres momentos de la sesión, parece estar relacionado con una falta de control sobre las magnitudes que hay que comparar. En el problema “11 x 6600, ¿da menos o más que 100’000?” que se trabajó en parejas durante la primera sesión, tres parejas de alumnos afirmaron que “da más”; la maestra les pidió que explicaran en plenaria cómo llegaron a esta respuesta y Melisa contestó:

Melisa: Es que es un número grande por otro número grande… (Sesión 1; Intervención 87)

Parece que la alumna centró su atención en los dos factores que considera como “grandes”, deduciendo que el resultado va a dar “más” y perdiendo de vista con qué tenía que comparar el resultado.

En otras ocasiones las explicaciones de los alumnos fueron contradictorias, lo que dificulta interpretar el origen del error, como el caso de Marco (Figura 31). Este alumno escribe dentro de la evaluación de la sesión 5: “En realidad la multiplicación (12 x 7900) da más de 110’000 pero yo lo redonde de manera que el 12 fuera un 10 lo que me dio 79’000”. Marco hace bien el redondeo y el cálculo correspondiente, sin embargo, selecciona una opción incorrecta. Posiblemente identifica que tiene que aumentar el producto porque 12 es mayor que 10, pero no controla cuánto.

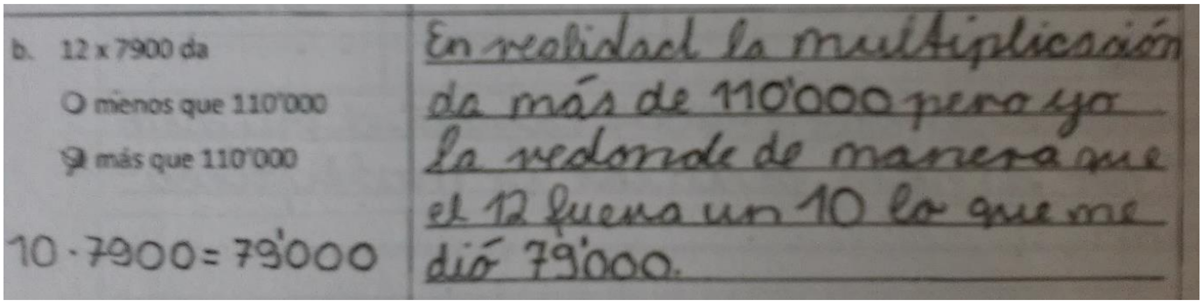


Figura 31: Comparación errónea (Sesión 5)

En resumen, pudimos identificar que los errores que más aparecieron en los problemas que implican anticipar y encuadrar un producto se vinculan con errores en la descomposición del cálculo, así como con una falta de control sobre las repercusiones del redondeo sobre el resultado.

5.1.4 Procedimientos correctos de los alumnos para anticipar o para encuadrar un cociente

Los problemas que solicitan anticipar cocientes se plantearon de la misma manera que los problemas de multiplicación, por ejemplo:

52’000 ÷ 6 da:

❍ menos que 10’000

❍ más que 10’000

Los problemas que exigen encuadrar cocientes se plantearon de la siguiente manera:

	0 a 100	100 a 1000	1000 a 10’000
42’179 ÷ 31			

Al igual que en los problemas que implican una multiplicación los alumnos usaron el redondeo, cuidando que los números fueran lo que denominamos “números compatibles”. Se identificaron diferentes formas para establecer números compatibles:

- Cambiar solamente el dividendo
  p.ej.: 490’000 ÷ 51 → 510’000 ÷ 51
- Cambiar solamente el divisor
  p.ej.: 490’000 ÷ 51 → 490’000 ÷ 49
- Cambiar el dividendo y el divisor
  p.ej.: 490’000 ÷ 51 → 450’000 ÷ 50
- Cambiar el dividendo y el divisor, convirtiéndolos a números “redondos”
  p.ej.: 490’000 ÷ 51 → 500’000 ÷ 50

La elección de uno u otro de estos procedimientos dependía de las características del dividendo y del divisor.

Para encontrar los números compatibles varios alumnos recurrieron a la estrategia de los dígitos de la izquierda; esto se identificó particularmente en la Evaluación 1, en la que 7 de 20 alumnos explicitaron por escrito ese procedimiento, como es el caso de Gisela (Figura 32) quien escribe: “7 x 9 = 63, solo tienes que redondear hasta que te de el resultado correcto.”

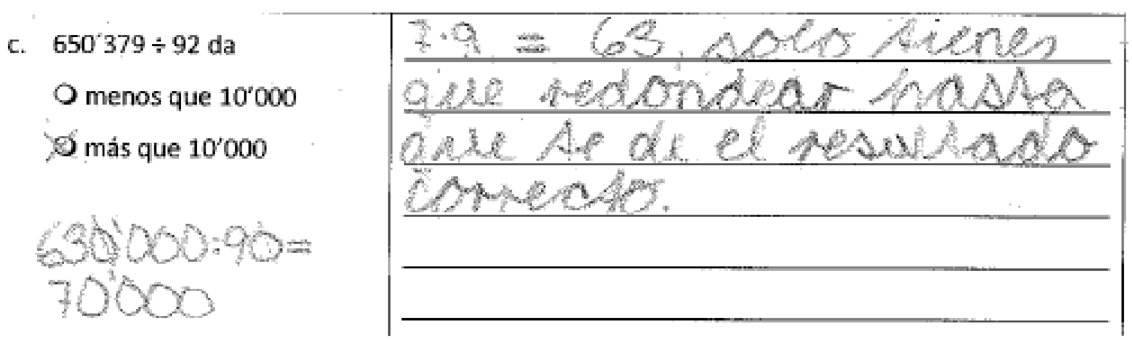
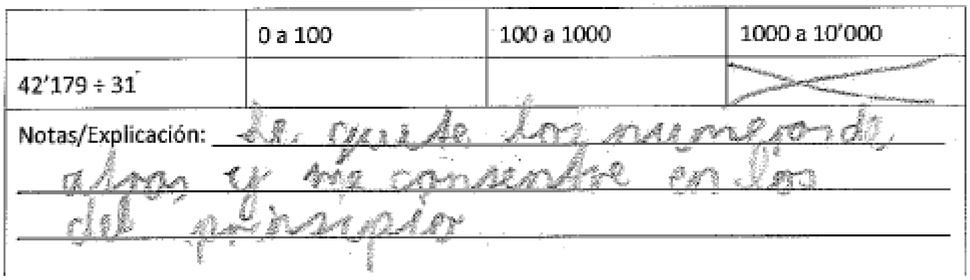


Figura 32: Dígito de la izquierda (Sesión 5)

Además de recurrir a una multiplicación para resolver la división, Gisela trabajó con los dígitos de la izquierda (63 del dividendo 63’000 y 9 del divisor 92) y no con los números enteros redondeados (63’000 y 90).

En varias explicaciones de los alumnos se muestra que también para calcular el cociente de divisiones con números ya redondeados, trabajaron con el procedimiento del dígito de la izquierda, como lo muestran los siguientes ejemplos: En la primera evaluación Pedro, para decidir si 42’179 ÷ 31 da de 0 a 100, de 100 a 1000 o de 1000 a 10’000, escribió: “Le quite los numeros de atras y me consentre en los del prinsipio.” (Figura 33)



	0 a 100	100 a 1000	1000 a 10’000
42’179 ÷ 31			X

Notas/Explicación: le quite los numeros de atras y me consentre en los del prinsipio

Figura 33: Dígito de la izquierda (Sesión 5)

En la sesión 8, frente a una intervención de la docente dirigida a la explicitación de los alumnos y a la elaboración de justificaciones sobre los resultados obtenidos, Adrián explicó por qué opinaba que 47’120 ÷ 13 daba menos que 48’120 ÷ 12:

Adrián: *“Es menos, porque hazte cuenta que tienes cuarenta y siete lápices, bueno cuarenta y siete mil ciento veinte, pero tienes trece niños, o sea más niños… y menos lápices.”*

(Sesión 8, intervención 228)

Se puede observar que en un primer momento el alumno no calculó con el número entero, sino que consideró solamente los dígitos de la izquierda, considerando el 47 para operar.

Suponemos que más alumnos de los identificados trabajaron con los dígitos de la izquierda sin mencionarlo explícitamente. En comparación con la estrategia del redondeo, la cual fue reconocida, usada y nombrada por los alumnos, la del dígito de la izquierda fue utilizada pero no tuvo un reconocimiento similar a la anterior. Por ejemplo, en la sesión 12, cuando la docente realizó una intervención de devolución en la cual solicitó a los alumnos que opinaran acerca de si existen procedimientos diferentes al redondeo para resolver los problemas de estimación, los alumnos manifestaron que no existían, hasta que un alumno dijo que en el problema "28 x 32 da más o menos que 100" él había calculado solamente 2 x 3:

David: Yo hice dos por tres.

M: Ok, David dice, yo hago dos por tres (Anota en el pizarrón 2 x 3). ¿Por qué dos por tres Mateo? ¿Tienes una idea de por qué David dice que hace solamente dos por tres? (Le solicita contestar sin que haya pedido la palabra.)

Mateo: ¿Creo que dos por el veinte y tres por el treinta?

M: Ok, entonces…

Mateo: Y agregas dos ceros.
(Sesión 12, intervención 25 a 28)

El hecho de que aún en la sesión 12 los alumnos no consideraran al procedimiento del dígito de la izquierda como un procedimiento que ayuda a resolver problemas de estimación, puede explicarse de dos formas. Por un lado, como ya se ha mencionado, es posible que, debido a experiencias anteriores con problemas de cálculo mental, los alumnos hayan interiorizado y "naturalizado" este procedimiento, y por ello no lo explicitan. Por el otro lado, hipotetizamos que la ausencia de intervenciones didácticas dirigidas al reconocimiento y a la sistematización de estra estrategia (a la que ni siquiera se le puso un nombre) pudo haber influido en que los alumnos no la expliciten ni nombren. Además, la misma docente igualó el procedimiento del dígito de la izquierda con el redondeo. Esta confusión se puede observar en la siguiente interacción de la sesión 1, donde se hizo una puesta en común de los procedimientos para decidir si 11 x 6600 daba menos o más que 100'000:

Alicia: Yo lo hice de manera diferente: diez por seis da sesenta, me da sesenta mil.

M: Entonces, Alicia redondeó los dos números. En lugar de once dijo con diez es más fácil y en lugar de seis mil seiscientos tomó seis mil y dijo me da sesenta mil y es mucho menos que cien mil.

(Sesión 1, intervención 99 – 100)

Alicia trabajó con los dígitos de la izquierda (10 en lugar de 11 y 6 en lugar de 6600), mientras que la maestra interpreta su procedimiento como redondeo (de 11 a 10 y de 6600 a 6000). Si se hubiera nombrado la estrategia del “dígito de la izquierda” y si se le hubiera distinguido claramente del redondeo, probablemente eso habría ayudado a que tal estrategia se reconociera y difundiera más.

Hacia al final de la secuencia (Sesión 11) apareció otro procedimiento correcto dentro de un trabajo en pareja en el cual José y Lucas recurrieron a la reversibilidad entre la división y la multiplicación para resolver un problema de encuadramiento, como se muestra en el siguiente fragmento:

Lucas: (Están eligiendo el rango en el que podría estar el resultado de 25’178 ÷ 82: cero a 400; 400 a 4000; 4000 a 40’000).

(…) estoy explicando a José que un número (se refiere al cociente) por este número (se refiere al divisor) tiene que dar este número (se refiere al dividendo)

(Sesión 11; Intervención 322)

Al día siguiente la docente realizó una intervención en la cual tuvo como intención hacer público este procedimiento aún privado. Frente a esta intervención José y Lucas expresaron que el cociente multiplicado por el divisor da el dividendo. Ante esta respuesta de los alumnos la docente tomó la decisión didáctica de dejar registro escrito de este procedimiento en el pizarrón, incluyendo un ejemplo con números sencillos, como se ve en la siguiente imagen:

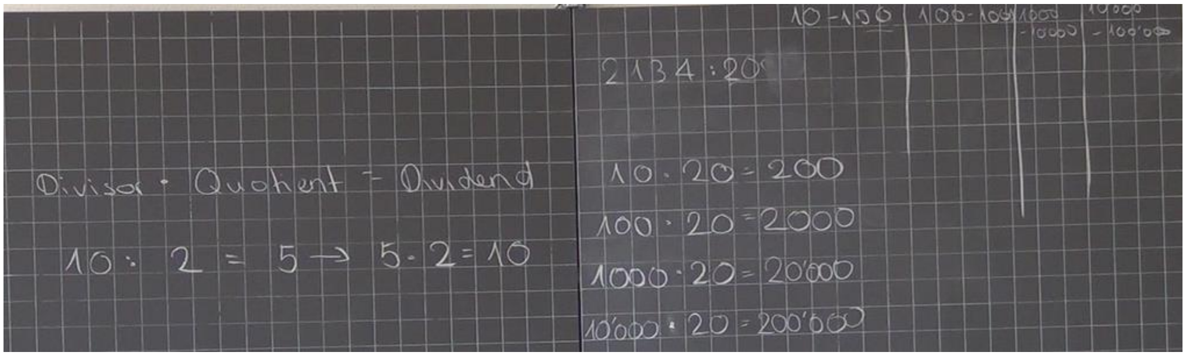


Figura 34: Uso multiplicación para resolver división

La intención didáctica de la docente de institucionalizar esta manera de resolver era hacer público y reutilizable una estrategia que en principio no era nada novedosa para ellos. En el lado derecho del pizarrón se puede observar el problema sobre el que el grupo estaba trabajando: Había que decidir el rango correcto (0 a 100; 100 a 1000; 1000 a 10’000; 10’000 a 100’000) para el cociente del cálculo 2134 ÷ 20). El interés de la docente estuvo centrado en esta ocasión en promover que los alumnos fueran “probando” con los rangos de números, acercándose de esta manera al dividendo. Podrían ver que 10 x 20 = 200 es mucho menos que el dividendo, 100 x 20 = 2000 ya está bastante cerca y con 1000 x 20 = 20’000 se pasa del dividendo por lo que se podría concluir que el cociente debe estar entre 100 y 1000. Sin embargo, los alumnos no consideraron el procedimiento como adecuado. Matías, por ejemplo, comentó que era un procedimiento demasiado largo como lo muestra el siguiente fragmento de una discusión grupal en la sesión 12:

M: (…) Y ahora, ¿esta estrategia (se refiere a la de irse acercando al dividendo multiplicando los posibles rangos de resultados con el divisor) nos ayuda para encontrar el resultado? Matías, hace mucho que no te oigo… Lucas, José, Adrián y otros presentaron una estrategia. Y ahora mi pregunta: ¿Eso nos ayuda para resolver estos ejercicios? O dicen, ¡No, no es una buena estrategia!

Matías: Sí, pero no. (Lo dice de manera espontánea.)

M: ¡Explica! ¿Por qué sí, por qué no?

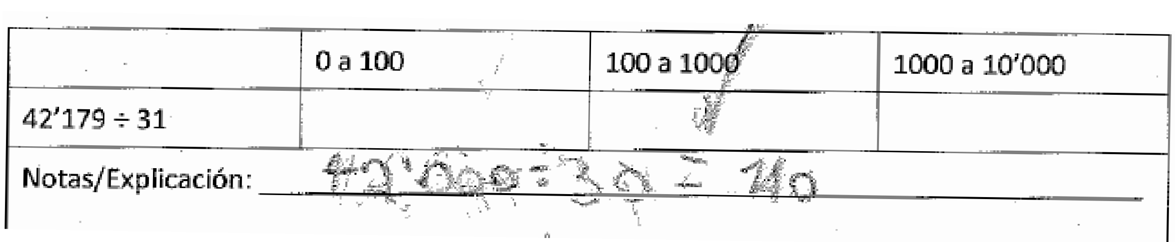
Matías: No, porque es demasiado largo y lo puedes hacer más rápido con otra estrategia. (No está claro a qué estrategia se refiere.)

(Sesión 12, intervención 183 – 186)

En síntesis, se indagó que para resolver problemas que implican anticipar o encuadrar un cociente los alumnos recurrieron a técnicas de redondeo, cuidando que los números redondeados fueran compatibles. Se pudieron identificar variantes de cómo hacer compatibles el dividendo con el divisor: cambiar solamente el dividendo o el divisor, cambiar el dividendo y el divisor, cambiar el dividendo y el divisor a “números redondos”. Además, para calcular el cociente del cálculo con números redondeados varios alumnos usaron la técnica del dígito de la izquierda.

5.1.5 **Errores y dificultades de los alumnos en los problemas que implican anticipar o encuadrar un cociente**

En los problemas de división se registraron errores en diferentes aspectos. Por un lado, se observaron dificultades para encontrar números compatibles; por ejemplo, para 620’000 ÷ 92 algunos alumnos redondearon el divisor a 90, pero no redondearon el dividendo a 630’000. Por otro lado, hubo errores frecuentes con el valor posicional: a pesar de haber encontrado números compatibles, los alumnos llegaron a respuestas erróneas por haberse equivocado con el valor posicional, agregando ceros de más o de menos. En el ejemplo siguiente (Figura 35) Adrián redondea a números compatibles: de 42’179 ÷ 31 pasa a 42’000 ÷ 30; sin embargo, se equivoca en el resultado, pues escribe140 en lugar de 1400:



	0 a 100	100 a 1000	1000 a 10’000
42’179 ÷ 31		✓	
Notas/Explicación: 42’000 ÷ 30 = 140			

Figura 35: Dificultad Valor posicional

Una vez que los alumnos redondeaban los números y obtenían un cociente, al compararlo con el resultado dado en el problema, aparecieron otras dificultades; de hecho, hubo más dificultades en los problemas de división que en los de multiplicación. Estas dificultades parecen estar vinculadas a lo que Reys (1986) llama “compensación” y que son los “ajustes numéricos finales con el fin de acercar el resultado estimativo al resultado exacto.” Se puede observar que a veces los alumnos usaron en la división procedimientos de compensación que habían sido exitosos en la multiplicación, lo que llevó a resultados erróneos.

En el siguiente ejemplo (650’379 ÷ 92, ¿da menos o más que 10’000?), Melisa escribe: “630’000 ÷ 90 debe de ser más (que 650’379 ÷ 92) porque yo quité en los dos números y 7000 está muy cerca de 10’000.” Melisa redondea el dividendo y el divisor de manera tal que sean compatibles (630’000 ÷ 90) y calcula correctamente el cociente (7000). Sin embargo, afirma que el cálculo dado tiene que dar más que 10’000, porque ella “quitó” algo tanto en el dividendo como en el divisor. Probablemente considera que debe agregar algo al resultado para compensar parte de lo que quitó a los números al redondearlos. Esa estrategia, si bien funciona en la multiplicación, en la división no es exitosa.

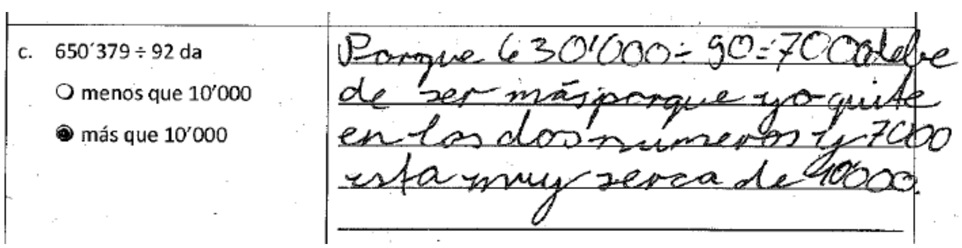


Figura 36: Dificultad Comparación

Se pudo observar que estas dificultades en la comparación del cociente del cálculo con números redondeados con el resultado dado aparecieron especialmente cuando se cambiaba solamente el divisor y cuando se cambiaba el dividendo y el divisor, mientras que un cambio del dividendo presentó menos dificultad.

En síntesis, se reflejó que los problemas que exigen anticipar y encuadrar cocientes dieron lugar a errores relacionados con encontrar números compatibles, a errores de valor posicional y a otros, vinculados a las estrategias de compensación para acercar el resultado estimativo al resultado exacto.

Comparando los problemas que solicitan anticipar y encuadrar un producto con los de anticipar y encuadrar un cociente encontramos que causaron más dificultad los de cocientes. Aparentemente, los problemas de división provocan más inseguridad en cuanto a cuestiones de valor posicional y en cuanto al control sobre los ajustes que se hacen después de redondear los números.

En el próximo apartado presentaremos procedimientos correctos, así como errores y dificultades en los problemas que exigen comparar cálculos.

5.2 Procedimientos identificados al resolver problemas que implican anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado

5.2.1 Presentación de las actividades

En este tipo de problemas se comparan dos cálculos, decidiendo si uno dará menos, igual o más que el otro. Para resolver este tipo de problemas, la idea es que los alumnos hagan la comparación entre los dos cálculos sin la necesidad de obtener el resultado exacto de ninguno de ellos, analizando las relaciones que existen entre los factores de cada uno de ellos, en el caso de las multiplicaciones, y las relaciones entre divisores y dividendos, en el caso de las divisiones. Si bien es cierto que algunas de estas relaciones implican cálculos exactos (por ejemplo, si se duplica uno de los dos factores de una multiplicación, se duplica el producto), se decidió incluir este tipo de problemas en la secuencia porque consideramos que analizar estas relaciones ayudaría a desarrollar estrategias que puedan abarcar distintos tipos de problemas de cálculo mental.

Como se explicó en el Capítulo 1, este tipo de problemas contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico en tanto no se exige una búsqueda de resultados numéricos sino un análisis de relaciones entre cálculos. Sin embargo, en la implementación de la secuencia piloto y de la secuencia definitiva se introdujeron términos que podrían obstaculizar la vinculación con el sentido algebraico arriba descrito; éstos son “cálculo original” y “cambio”. Tales expresiones se presentaron en el contexto de la siguiente actividad: se organizaron juegos en parejas durante los cuales los alumnos compararon diferentes multiplicaciones o divisiones. Cada pareja recibió varias tarjetas con un cálculo escrito en cada una de ellas, y una hoja de registro con cuatro encabezados, por ejemplo: “cálculo”, “menos que 8 x 12’200”, “igual a 8 x 12’200” y “más que 12’200”. Se explicaba a los alumnos que tenían que sacar una tarjeta, anotar el cálculo de esa tarjeta en la columna “cálculo”, y después marcar en la columna correspondiente si el cálculo daría menos, igual o más que el cálculo que estaba anotado en el encabezado, (en este caso, 8 x 12’200).

Session 6: Relationen

Rechnung	weniger als 8 x 12'200	gleich viel wie 8 x 12'200	mehr als 8 x 12'200
4·24'400		✓	
4·12'200	✓		
8·13'200			✓
9·12'200			✓
9·13'200			✓
8·11'200	✓		
7·11'200	✓		
8·24'4[illegible]			✓

Figura 37: Hoja de registro "Comparación de cálculos"

Para facilitar la comunicación y saber a qué cálculo se hacía referencia, (si al "arriba" o al "la izquierda"), la maestra nombró al cálculo de la izquierda como "cálculo original" (en la Figura 37 sería el cálculo 8 x 12'200), ya que es el cálculo que se usa durante toda la actividad y con el cual hay que realizar las comparaciones de varios otros.

Si bien esta designación fue operativa en la clase, desde un punto de vista matemático-algebraico, esta designación se podría considerar como riesgosa, puesto que la idea de "cálculo original" evoca que este cálculo es "el primero" o que hay un orden jerárquico entre los dos cálculos.

Incluso el término "original" podría promover la idea de que se produce un cambio entre esos cálculos; por ejemplo: "Si se multiplica un factor por dos y el otro se divide entre dos, el producto se mantiene." Gráficamente la maestra representó estas relaciones de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccc} 8 & \times & 12'200 & = & \underline{\qquad\quad} \\ \downarrow \div 2 & & \downarrow \times 2 & & \downarrow = \\ 4 & \times & 24'400 & = & \underline{\qquad\quad} \end{array}$$

Posiblemente hubiera sido más pertinente y conveniente expresar estas relaciones en términos que no evoquen transformaciones ni hagan alusión a la posición o jerarquía entre cálculos, por ejemplo: "Si el primer factor de un cálculo es el doble del primer factor del otro, y el segundo factor es la mitad del otro, el producto se mantiene." Ambos cálculos son términos de una ecuación o inecuación y se pueden intercambiar, como lo muestra el siguiente ejemplo: 4 x 24'400 = 8 x 12'200 o 8 x 12'200 = 4 x 24'400.

Quizás la expresión usada en la clase y propuesta por la docente podría abonar a enfatizar la idea de que el cálculo de la izquierda siempre está presentado en la escuela para obtener un resultado que se escribe a la derecha. Esta idea que tienen muchos alumnos ha sido elaborada a partir del tradicional trabajo aritmético escolar y podría funcionar como una dificultad a la hora de proponer a los alumnos un tratamiento más algebraico de las relaciones entre cálculos.

Si bien recomendaremos para futuras implementaciones didácticas evitar expresiones que colaboren a reforzar la idea escolar de cálculo a la izquierda y resultado a la derecha o de cálculo original y cálculo cambiado, presentaremos en esta tesis el análisis didáctico con los términos que se han usado verdaderamente, tanto en el diseño, como en la implementación de la secuencia.

Los problemas que implican una comparación se trabajaron de diferentes maneras: en la sesión 6 se introdujo este nuevo tipo de problema con multiplicaciones que se resolvieron en plenaria para que los alumnos entendieran en qué consistía la tarea. Después se planteó la actividad arriba explicada. En la sesión 7 se repitió la misma actividad en parejas, pero con divisiones, mientras que en la octava sesión se trabajaron problemas que exigen comparar multiplicaciones y divisiones a través de un juego en equipos. En la sesión 9 la docente propuso un espacio colectivo de recapitulación y síntesis de los procedimientos vistos. Primero, los alumnos anotaron en parejas lo que habían aprendido en las sesiones anteriores y después lo dictaron a la maestra, quien anotó las conclusiones más importantes en un cartel. Durante la sesión 10 los alumnos resolvieron una evaluación individual donde los problemas (de multiplicación y de división) se presentaron de dos maneras diferentes, como lo muestran los siguientes ejemplos:

1. **Decide si los cálculos dan menos, igual o más que el cálculo original. Recuerda que no puedes hacer cálculos exactos.**

	menos que 3 x 5400	igual a 3 x 5400	más que 3 x 5400
4 x 5400			
Explica tu respuesta: ____ ____ ____			

Figura 38: Evaluación 2: Ejemplo de problema 1

2. **Contesta la siguiente pregunta y escribe tu explicación.**

a. Un alumno de otro colegio dijo que 12 x 34’600 daba lo mismo que 6 x 17’300. ¿Estás de acuerdo con él?
❍ Sí ¿Por qué?
❍ No ¿Cómo le explicarías por qué no está bien su respuesta?
____
____
____

Figura 39: Evaluación 2: Ejemplo de problema 2

5.2.2 **Procedimientos correctos de los alumnos para anticipar si el producto será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado**

Para resolver resolver este tipo de problemas los alumnos compararon los factores de un cálculo con los del otro cálculo. Una de las actividades para comparar cálculos consistía en un juego de equipos. La actividad consistía en que, después de formar equipos, la docente entregaba a un alumno de cada equipo un cálculo escrito en una hoja. El alumno tenía que comparar este cálculo con otro dado en el pizarrón. Para eso, tenía que elegir bajo qué encabezado de los siguientes –escritos en el pizarrón– debía pegar la hoja con el cálculo: “menos que 12 x 16’100”, “igual a 12 x 16’100” y “más que 12 x 16’100”, y además, debía justificar su respuesta. Si los demás equipos estaban de acuerdo con la respuesta y la justificación, el equipo ganaba un punto y le tocaba a otro equipo. En caso de una respuesta equivocada, la misma se rectificaba entre todos. En la siguiente interacción se muestra cómo Carla comparó los factores de los dos cálculos: reconoció que dos eran iguales y los otros dos diferentes. Después puso en juego una relación de “si el factor de un cálculo es mayor al factor del otro cálculo su producto también va a ser mayor.”

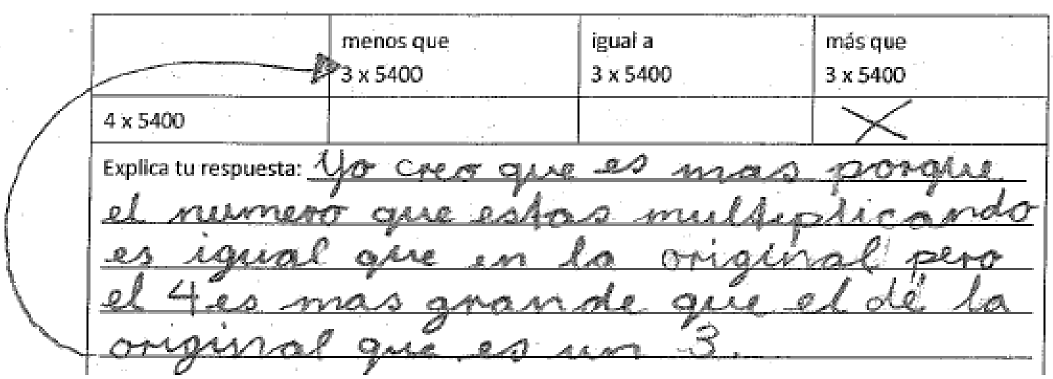
Carla: (Le toca comparar el cálculo 12 x 32’200 con el cálculo 12 x 16’100 Lo pega en la columna “más que” y explica) Pienso que es así porque son más…lo que multiplicas y el mismo número.

M: ¿Dónde está el mismo número y dónde hay más?

Carla: Este es igual (indica el 12) y este es más (indica 32’200).

(Sesión 8, 228 – 229)

En la evaluación de la sesión 10 todos los alumnos lograron resolver correctamente un problema de este tipo en el cual solamente uno de los dos factores era diferente (4 x 5400 en comparación con 3 x 5400). Véamos dos ejemplos, uno de Ana (Figura 40), otro de Heidi (Figura 41). Ana explica: “Yo creo que es mas porque el número que estas multiplicando es igual que en la original pero el 4 es mas grande que el de la original que es un 3.”

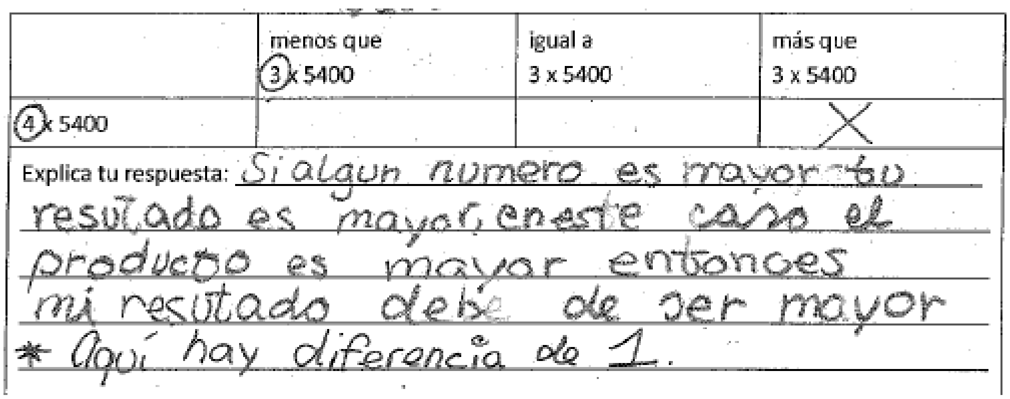


	menos que 3 x 5400	igual a 3 x 5400	más que 3 x 5400
4 x 5400			X

Explica tu respuesta: Yo creo que es mas porque el numero que estas multiplicando es igual que en la original pero el 4 es mas grande que el de la original que es un 3.

Figura 40: Comparar cálculos: multiplicación (Ana)

Heidi escribe: “Si algun numero es mayor, tu resultado es mayor, en este caso el producto es mayor entonces mi resultado debe de ser mayor. Aquí (se refiere al primer factor de cada uno de los cálculos) hay diferencia de 1.”



	menos que 3 x 5400	igual a 3 x 5400	más que 3 x 5400
4 x 5400			X

Explica tu respuesta: Si algun numero es mayor tu resultado es mayor, en este caso el producto es mayor entonces mi resultado debe de ser mayor
* Aquí hay diferencia de 1.

Figura 41: Comparar cálculos: multiplicación (Heidi)

Aunque Ana y Heidi resolvieron de manera correcta el problema, es importante mencionar que Heidi es más explícita en su respuesta; por un lado, explica que entre un factor y otro “hay diferencia de 1”, mientras que Ana escribe solamente que “el 4 es más grande que el 3”; por el otro lado, Heidi no se refiere únicamente del ejemplo en cuestión, sino que generaliza la relación identificada diciendo que “si algún número es mayor, tu resultado es mayor.”

Sin embargo, en la misma evaluación en un problema en el cual los factores de las multiplicaciones están relacionados de la siguiente manera: *2a x 2b* y *a x 2* (12 x 34’600 en comparación con 6 x 17’300), 5 de 20 alumnos contestaron incorrectamente. La dificultad en este problema se analizará más a fondo en el siguiente apartado.

Sintetizando, podemos advertir que para resolver problemas que exigen comparar multiplicaciones, los alumnos recurrieron a comparar los factores de ambos cálculos para después establecer relaciones entre ellos.

5.2.3 Errores y dificultades de los alumnos en los problemas que implican anticipar si el producto será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado

Como ya se ha mencionado, los problemas donde solamente uno de los dos factores era diferente no les presentaron grandes desafíos a los alumnos. Sin embargo, los problemas en los cuales los dos factores eran diferentes fueron efectivamente un problema para una parte del grupo. Esto se puede observar en un ejemplo de la evaluación (12 x 34’600 en comparación con 6 x 17’300) en el cual cada uno de los dos factores de un cálculo era el doble de los factores del otro cálculo. En la Figura 42 se puede ver que la presentación del problema fue diferente a la que se había usado hasta este momento. Aunque esto puede haber influido en las respuestas de los alumnos, consideramos que las dificultades en la resolución del problema estuvieron vinculadas con una confusión respecto a las relaciones.

2. Contesta la siguiente pregunta y escribe tu explicación.

a. Un alumno de otro colegio dijo que 12 x 34’600 daba lo mismo que 6 x 17’300. ¿Estás de acuerdo con él?

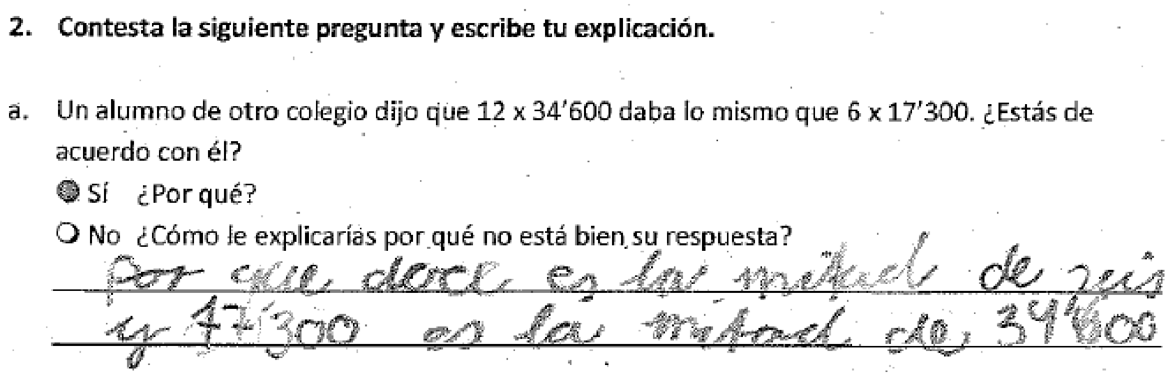
❍ Sí ¿Por qué?

❍ No ¿Cómo le explicarías por qué no está bien su respuesta?

Figura 42: Comparación de cálculo: Evaluación Sesión 10

Los cinco alumnos que contestaron erróneamente al problema identificaron que de un cálculo al otro se dividieron los factores entre dos, como se muestra en los siguientes ejemplos. Esto indica que sí se apropiaron de que hay que fijarse en cómo son diferentes los factores de un cálculo comparado con el otro.

Juan, por ejemplo (Figura 43), tacha la respuesta errónea “sí” (12 x 34’600 da los mismo que 6 x 17’300) y escribe “Porque doce es la mitad de seis y 17’300 es la mitad de 34’600“. De manera parecida Pedro (Figura 44) escribe “Porque la mitat de 12 es 6 y la mitat de 34 es 17 y porque la mitat de 6 es 3, eso hace el mismo resultado."



2. Contesta la siguiente pregunta y escribe tu explicación.

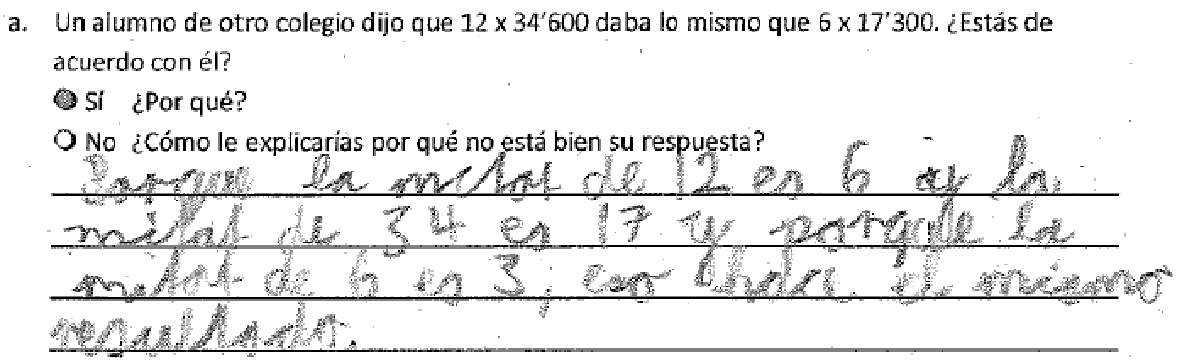
a. Un alumno de otro colegio dijo que 12 x 34'600 daba lo mismo que 6 x 17'300. ¿Estás de acuerdo con él?

● Sí ¿Por qué?

○ No ¿Cómo le explicarías por qué no está bien su respuesta?

Por que doce es la mitad de seis y 17'300 es la mitad de 34'600

Figura 43: Dificultad comparar cálculos: multiplicación (Juan)



a. Un alumno de otro colegio dijo que 12 x 34'600 daba lo mismo que 6 x 17'300. ¿Estás de acuerdo con él?

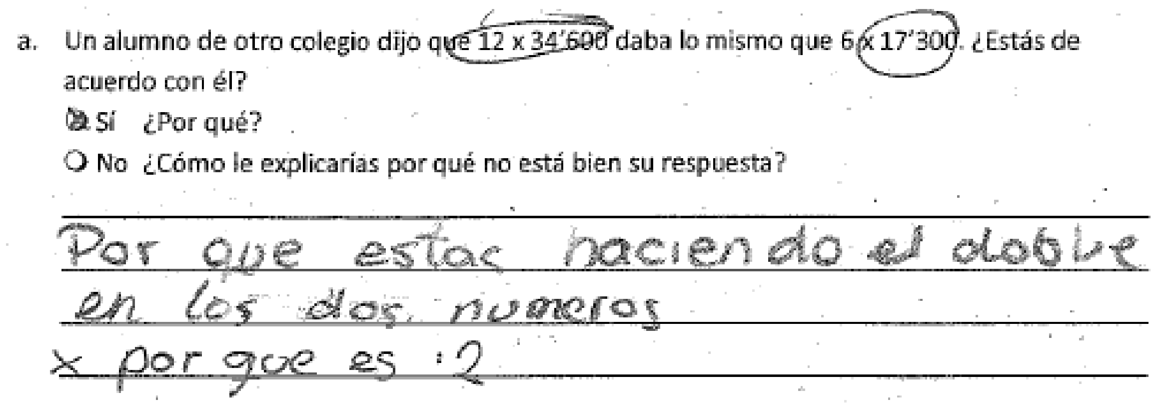
● Sí ¿Por qué?

○ No ¿Cómo le explicarías por qué no está bien su respuesta?

Porque la mitat de 12 es 6 y la mitat de 34 es 17 y porque la mitat de 6 es 3, eso hace el mismo resultado.

Figura 44: Dificultad comparar cálculos: multiplicación (Pedro)

Sin embargo, en sus respuestas se manifiesta que no lograron establecer correctamente las relaciones, puesto que cuatro de los cinco alumnos consideran que si se multiplican los dos factores por el mismo número se mantiene el producto. Al parecer, aplicaron erróneamente a la multiplicación una relación que sí es correcta en la división: si se multiplican el dividendo y el divisor por el mismo número, se mantiene el cociente. Por ejemplo, Heidi (Figura 45) explicó: "Porque estas haciendo el doble de los dos numeros", mientras que Laura (Figura 46) contestó: "Por que 6 por dos 12, 17'300 por dos es 34'600 y si es visebersa también es igual, nos enseñaron que si es haci siempre será igual."



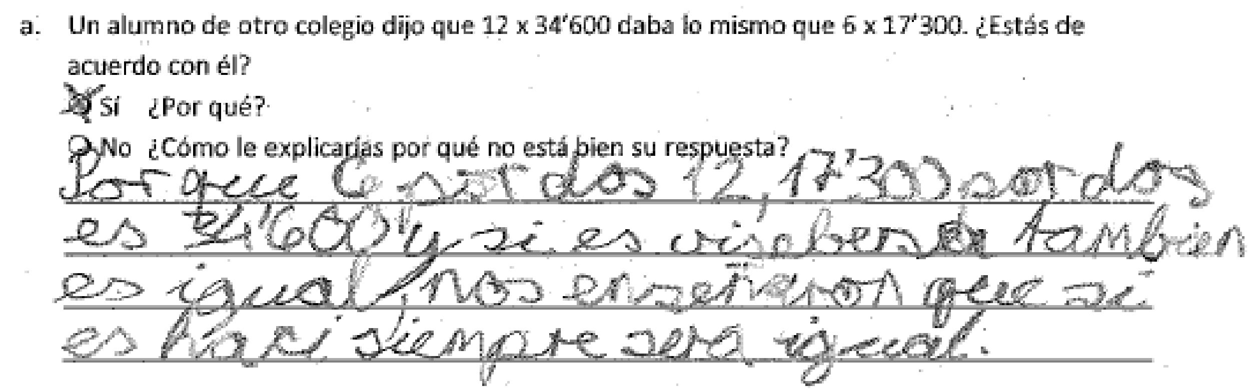
a. Un alumno de otro colegio dijo que 12 x 34'600 daba lo mismo que 6 x 17'300. ¿Estás de acuerdo con él?

Sí ¿Por qué?

No ¿Cómo le explicarías por qué no está bien su respuesta?

Por que estas haciendo el doble en los dos numeros x porque es ÷2

Figura 45: Dificultad comparar cálculos: multiplicación



a. Un alumno de otro colegio dijo que 12 x 34'600 daba lo mismo que 6 x 17'300. ¿Estás de acuerdo con él?

Sí ¿Por qué?

No ¿Cómo le explicarías por qué no está bien su respuesta?

Porque 6 por dos 12, 17'300 por dos es 34'600 y si es visebersa tambien es igual, nos enseñaron que si es hasi siempre sera igual.

Figura 46: Dificultad comparar cálculos: multiplicación

Es importante mencionar que estos errores fueron sistemáticos y subsistieron después de haber institucionalizado las relaciones entre multiplicaciones y divisiones e incluso luego de haber analizado que las relaciones entre multiplicaciones y entre divisiones no son iguales. En el capítulo 5 se analizará cómo se trataron de institucionalizar estas relaciones complejas.

5.2.4 Procedimientos correctos de los alumnos para anticipar si el cociente será mayor, menor o igual al cociente de otro cálculo dado

Si se analizan las discusiones grupales y los procedimientos de los alumnos para resolver los problemas que exigen una comparación de divisiones durante las actividades en parejas y en la evaluación, llama la atención el hecho de que en la división la docente y los alumnos recurren frecuentemente a ejemplos situacionales lo que no había sido el caso en los problemas que solicitan una comparación de multiplicaciones. En un primer momento (Sesión 7, intervención 34) la docente expresa estas relaciones en los siguientes términos: “Porque si tienes menos cosas para repartir, cada uno recibe menos” para resumir porque 300 ÷ 20 da menos que 400 ÷ 20. En la misma sesión (Sesión 7, intervención 42) un alumno recurre a un ejemplo con galletas para explicar por qué 400 ÷ 10 da más que 400 ÷ 20 diciendo que “Es como con galletas. Porque solamente tienes diez amigos da más galletas.” Aparentamente, recurrir a ejemplos situacionales ayuda a los alumnos a mantener el control sobre lo que pasa en el momento de dividir.

Hay otros momentos donde la docente realiza intervenciones dirigidas a que los alumnos puedan recurrir a situaciones concretas cuando ve que tienen alguna dificultad para resolver un problema, como lo muestra la siguiente interacción durante el juego en parejas que se hizo en la sesión 7:

A Pedro le toca el cálculo 73’200 ÷ 7 (en comparación con 72’200 ÷ 8), pone la marca en “menos que” (respuesta errónea)

M: ¿Por qué crees que da menos?

Pedro: Porque aquí tienes más, más que este número (señala el 73’200 y el 72’200) y aquí (señala el divisor 7) es menos. Y creo que da menos. (Mientras que explica, Emma revisa con la calculadora.)

Emma: Espérate. (Anota algo en la hoja de registro)

M: Emma, ¿qué opinas respecto a la explicación de Pedro?

Pedro: No, es igual.

M: ¿Por qué?

Pedro: Porque…

Emma: ¡Espérate, espérate, espérate! (Sigue con la calculadora y tomando notas. Revisando la hoja se ve solamente que apuntó el cociente exacto del cálculo 73’200 ÷ 7 = 10’457.142)

Pedro: Porque aquí hiciste más (se refiere al dividendo) y aquí hiciste menos (se refiere al divisor).

M: Imagínate una situación. En lugar de setenta y dos mil doscientas cosas para repartir tienes más cosas para repartir.

Pedro: Sí.

M: Y estas cosas las repartes a menos niños.

Pedro: Asiente con la cabeza.

M: ¿Cada uno de los niños va a recibir más o menos?

Pedro: Mhhh… más. ¡Entonces es más!

(Sesión 7, intervención 97 – 112)

Esta estrategia de recurrir a situaciones concretas para resolver los problemas que implican una comparación de divisiones, fomentada por algunas intervenciones didácticas, se pudo observar a lo largo de todas las sesiones en actividades grupales, en equipos, en parejas y también individuales. Sin embargo, se observó que hay algunos alumnos como, por ejemplo, Jorge, quien en el siguiente fragmento de una discusión grupal sobre si el cálculo 47’120 ÷ 13 da menos, igual o más que el cálculo 48’120 ÷ 12 prescinde de ejemplos situacionales y establece relaciones únicamente con los datos numéricos:

Jorge: (…) Es lo mismo que Lucas dijo (toma la esponja que tenía Melisa y termina de borrar el dibujo de Lucas.) Vamos… Para que los dos (resultados) estén iguales este (el divisor) tiene que estar dividido entre dos o multiplicado por dos (anota debajo de los divisores 11 y 12: ÷2; x 2) y este (el dividendo) igual.

Heidi: O entre cuatro, ¿no?

Jorge: Mm, tienen que… los dos tienen que este… o sea estos dos deben de estar multiplicados o divididos, los dos lo mismo. Pero esto (se acerca al lado del pizarrón con las multiplicaciones) es al revés. Éste (señala el primer factor) puede estar multiplicado, pero éste (señala el segundo factor) tiene que estar dividido. Y tiene que estar siempre dividido o multiplicado por el mismo número. Entonces por eso, esto va aquí (mueve el cálculo 47’120 ÷ 13 a la columna “menos que 48’120 ÷ 12”.)

(Sesión 8, intervención 106 – 108)

A continuación, analizaremos los procedimientos de los alumnos frente a los problemas que implican comparar divisiones. Para ello agruparemos los problemas en tres grupos: Los cálculos donde solamente el dividendo es diferente, los cálculos donde solamente el divisor es diferente y los cálculos donde son diferentes el dividendo y el divisor. Los cálculos en los que solamente el dividendo es diferente no presentaron mayor reto para la mayoría de los alumnos, pues rápidamente establecieron la relación de “Si aumenta el dividendo, aumenta el cociente” y “Si disminuye el dividendo, disminuye el cociente”. En la evaluación que se hizo en la sesión 10, diecisiete de veinte alumnos resolvieron correctamente un problema de este tipo. Ocho de veinte alumnos recurrieron a un ejemplo situacional para explicar su respuesta, como por ejemplo Ana (Figura 47) quien escribe: “Yo creo que es mas porque si tienes 4 niños y 3900 dulces a cada niño le tocan mas dulces no como en el de 3700 dulces y 4 ninos pues le toca menos a cada niño.” Seis explicaron recurriendo al contexto numérico (ejemplo Marco, Figura 48): “Al primer número se le suman 200 más entonces es obvio que el resultado será más grande.” Tres combinaron la explicación con contexto numérico con un ejemplo situacional, como por ejemplo Heidi (Figura 49): “Si el dividendo es mayor y el divisor se queda igual tu resultado tiene que ser mayor. El dividendo es mayor entonces reparto mas dulces a mis 4 niños.” Tres alumnos no explicaron su respuesta.

	menos que 3700 : 4	igual a 3700 : 4	más que 3700 : 4
3900 : 4			X

Explica tu respuesta: Yo creo que es mas porque si tienes 4 niños y 3900 dulces a cada niña le tocan mas dulces no como en el de 3700 dulces y 4 ninos pues le toca menos a cada niño.

Figura 47: Comparar cálculos: división (Ana)

	menos que 3700 : 4	igual a 3700 : 4	más que 3700 : 4
3900 : 4			X

Explica tu respuesta: al primer número se le suman 200 más entonces es obvio que el resultado será más grande.

Figura 48: Comparar cálculos: división (Marco)

	menos que 3700 : 4	igual a 3700 : 4	más que 3700 : 4
3900 : 4			X

Explica tu respuesta: Si el dividendo es mayor y el divisor se qoeda igual to resultado tiene qoe ser mayor
* El dividendo es mayor, entonces Les reparto mas dolces a mis 4 ninos.

Figura 49: Comparar cálculos: división (Heidi)

Los problemas en los que solamente el divisor era diferente tampoco representaron dificultad para la mayoría de los alumnos, como puede advertirse en el siguiente fragmento de un juego de comparación de cálculos:

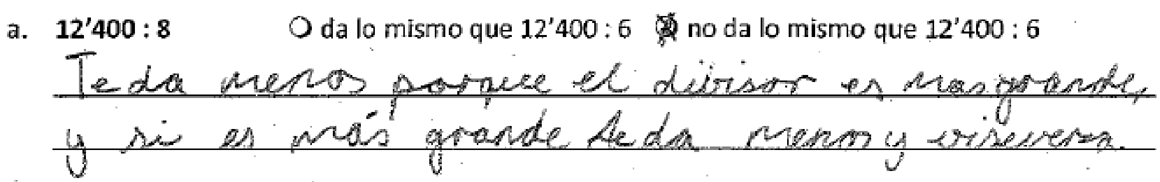
Cálculos a comparar: 48’120 ÷ 11 con 48’120 ÷ 12. (Jorge responde que 48’120 ÷ 11 dará “más que” que 48’120 ÷ 12, lo cual es correcto)

Jorge: *Yo creo que es así porque aquí* (en 48’120), *por ejemplo, con el mismo ejemplo de las galletas, estás dividiendo cuarenta y ocho mil ciento veinte galletas entre doce niños y aquí estás dividiendo cuarenta y ocho mil ciento veinte galletas entre once niños. Entonces, aquí, como son menos niños y son más galletas… pues, son el mismo número de galletas, pero para menos niños, le tocan más galletas a cada niño. Aquí, como son las mismas galletas, pero son más niños, da menos galletas para cada niño.*

Heidi: *¡Bravo!* (Los demás alumnos aplauden.)

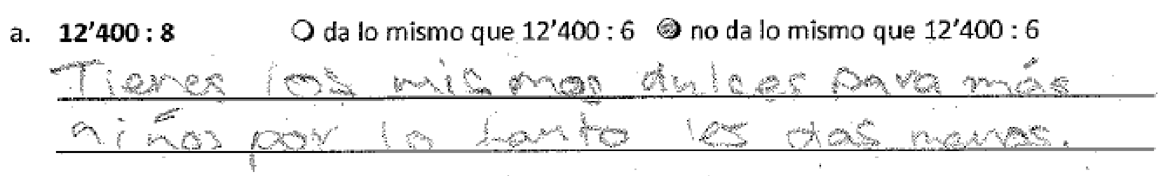
(Sesión 8; Intervención 88 – 89)

También en las explicaciones escritas sobre el mismo tipo de problema se muestra que la mayoría de los alumnos no tuvo ninguna dificultad para identificar las relaciones en los problemas con dividendos diferentes. En la evaluación que se hizo en la sesión 10 los veinte alumnos del grupo resolvieron correctamente un problema de este tipo. Trece de los alumnos explican su respuesta usando términos matemáticos (Figura 50: “Te da menos porque el divisor es mas grande, y si es más grande te da menos y viceversa.”), mientras que cuatro usan un ejemplo situacional (Figura 51: “Tienes los mismos dulces para más niños por lo tanto les das menos.”) y tres no escriben ninguna explicación.


a. 12’400 : 8 ○ da lo mismo que 12’400 : 6 ● no da lo mismo que 12’400 : 6

Te da menos porque el divisor es mas grande, y si es más grande te da menos y viceversa.

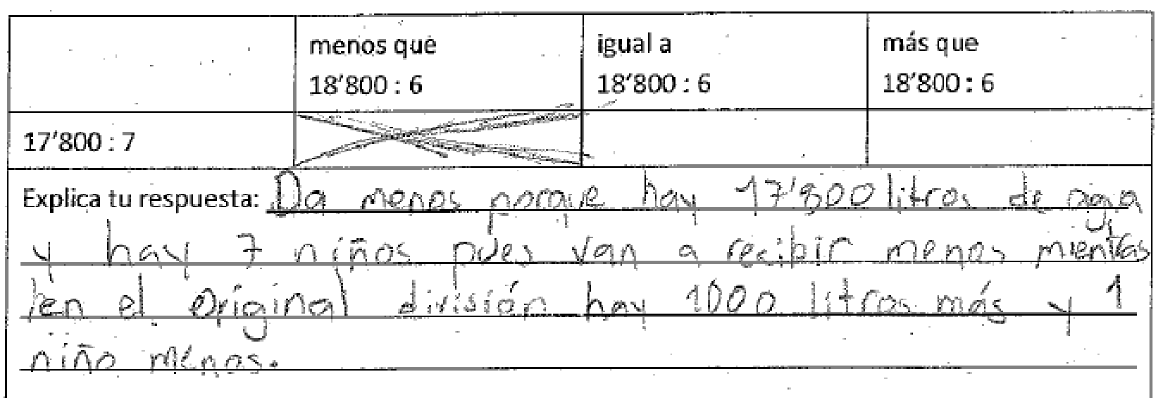
Figura 50: Comparar cálculos: división


a. 12’400 : 8 ○ da lo mismo que 12’400 : 6 ● no da lo mismo que 12’400 : 6

Tienes los mismos dulces para más niños por lo tanto les das menos.

Figura 51: Comparar cálculos: división (David)

Aunque los problemas en los que el dividendo y el divisor eran diferentes presentaron un mayor reto para la mayoría de los alumnos (véase apartado “Errores de los alumnos en los problemas que implican comparar divisiones”), hubo algunos que aplicaron sin dificultad las relaciones establecidas. También en estos problemas algunos justificaron usando ejemplos situacionales; de catorce alumnos que resolvieron correctamente el problema “17’800 ÷ 7 da menos, igual o más que 18’800 ÷ 6”, ocho recurrieron a una explicación con un ejemplo situacional (Ejemplo José, Figura 52: “Da menos porque hay 17’800 litros de agua y hay 7 niños pues van a recibir menos mientras en el original división hay 1000 litros más y un niño menos.”), tres se apoyaron de manera explícita en las relaciones entre dividendo, divisor y cociente y tres no escribieron ninguna explicación.



	menos que 18’800 : 6	igual a 18’800 : 6	más que 18’800 : 6
17’800 : 7	X		

Explica tu respuesta: Da menos porque hay 17'800 litros de agua y hay 7 niños pues van a recibir menos mientras en el original división hay 1000 litros más y 1 niño menos.

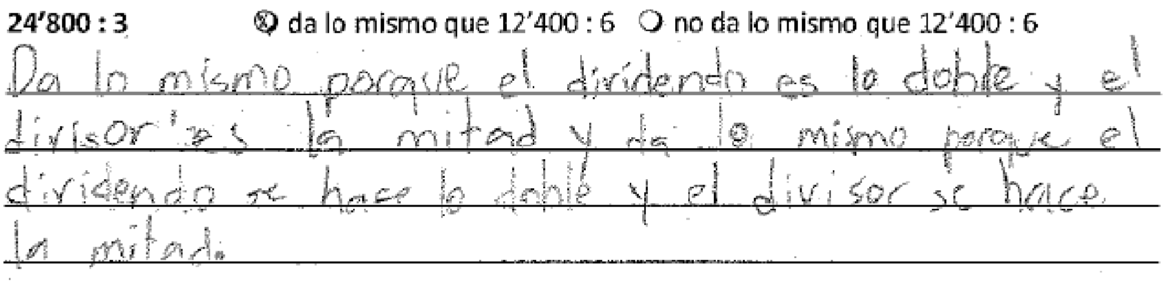
Figura 52: Comparar cálculos: división (José)

Podemos resumir que para resolver problemas que exigen comparar divisiones, la mayor parte de los alumnos recurrió a ejemplos situacionales. En cuanto a las relaciones que establecieron entre dos divisiones resultaron más fáciles los problemas donde solamente se cambiaban o el dividendo o el divisor mientras que causaron más dificultad aquellos en los que se cambiaron el dividendo y el divisor.

5.2.5 Errores y dificultades de los alumnos en los problemas que implican anticipar si el cociente será mayor, menor o igual al cociente de otro cálculo dado

Como se mencionó en el apartado anterior, los problemas donde solamente era diferente el dividendo o el divisor causaron poca dificultad. En cambio, los problemas donde el dividendo y el divisor eran diferentes sí dieron lugar al error. Respecto a estos problemas trabajamos con diferentes variantes: en la primera se multiplican/dividen el dividendo y el divisor por/entre el mismo número (Ejemplo: comparar 24’800 ÷ 6 con 12’400 ÷ 3; el cociente sigue igual), en la segunda se multiplica uno de los dos por un número, mientras que el otro se divide entre el mismo número (Ejemplo: comparar 24’800 ÷ 6 con 12’400 ÷ 12; el cociente aumenta/disminuye) y en la tercera se agregan/quitan mil al dividendo mientras que al divisor se le quita/agrega uno (Ejemplo: comparar 24’800 ÷ 6 con 23’800 ÷ 7).

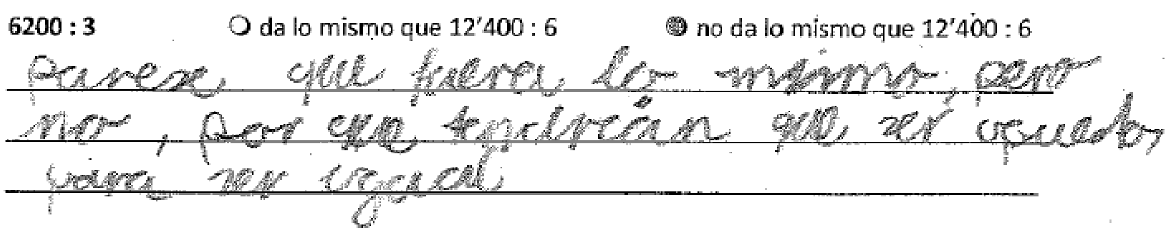
En la evaluación de la sesión 10 se identificó que en las dos primeras variantes hubo errores similares a los que se manifestaron en la comparación de multiplicaciones: aparentemente más de la mitad de los alumnos se confundió en cuanto a las relaciones que se pueden establecer entre dos multiplicaciones y las que se pueden establecer entre dos divisiones. En el problema de decidir si 24’800 ÷ 3 da lo mismo que 12’400 ÷ 6, doce de veinte alumnos dicen, erróneamente, que sí da lo mismo; todos ellos explican su respuesta diciendo que se multiplicó el dividendo por 2 y se dividió el divisor entre 2 y que por eso se compensa. Si bien esa relación es correcta entre dos multiplicaciones (si se multiplica uno de los factores por un número y se divide el otro entre el mismo número, se mantiene el resultado), no aplica entre dos divisiones. Véamos la explicación de José: “Da lo mismo porque el dividendo es lo doble y el divisor es la mitad y da lo mismo porque el dividendo se hace lo doble y el divisor se hace la mitad.”


24'800 : 3 ◉ da lo mismo que 12'400 : 6 ○ no da lo mismo que 12'400 : 6

Da lo mismo porque el dividendo es lo doble y el divisor es la mitad y da lo mismo porque el dividendo se hace lo doble y el divisor se hace la mitad.

Figura 53: Dificultad comparar cálculos: división (José)

Algo parecido surgió en el problema de comparar el cálculo 6200 ÷ 3 con el cálculo 12'400 ÷ 6 que sí da el mismo resultado. Solamente la mitad de los veinte alumnos resolvió de manera correcta este problema; los demás eligieron la opción incorrecta de respuesta y, además, justificaron recurriendo a relaciones erróneas, como lo muestra el siguiente ejemplo de Juan: "Parece que fuera lo mismo, pero no, porque tendrían que ser opuestos para ser igual."


6200 : 3 ○ da lo mismo que 12'400 : 6 ◉ no da lo mismo que 12'400 : 6

Parece que fuera lo mismo, pero no, por que tendrían que ser opuestos para ser igual.

Figura 54: Dificultad comparar cálculos: división (Juan)

También la tercera variante dio lugar a confusión; varios alumnos comentaron que estos problemas daban lo mismo, "porque le quitas uno (que de hecho son 1000) al dividendo y le sumas uno al divisor". Es interesante que, por un lado, los alumnos consideren que con esa modificación se mantiene el resultado; por el otro lado, llama la atención que esta explicación apareció en diferentes momentos de la secuencia. La primera que se identificó fue durante el juego de equipos que se hizo en la octava sesión. Como se recordará este juego se llevó a cabo dos veces, cada vez con una mitad del grupo. La confusión se pudo observar en las dos vueltas del juego, como lo muestran los siguientes fragmentos de interacciones:

Interacción Mitad A:

A Gisela le toca comparar el cálculo 47’120 ÷ 13 con el cálculo 48’120 ÷ 12. Lo pone en “igual a” (el resultado correcto sería "menos que") y explica su decisión:

Gisela: *Porque aquí es uno menos* (de 48’120 a 47’120) *y aquí es uno más* (de 12 a 13). (Se ríe, parece muy insegura.) No sé…

M: Ok, entonces tú dices aquí es uno menos y aquí es uno más, entonces da lo mismo.

Gisela: Creo.

(Sesión 8; Intervención 90 – 92)

En lo que expresa Gisela, “*porque aquí es uno menos y aquí es uno más*” se manifiesta la idea de compensación. Sin embargo, Gisela exterioriza cierta inseguridad. La docente devuelve el problema al grupo, lo que se puede observar a continuación:

M: Ok. ¿Qué dicen los demás? ¿Quién está de acuerdo con Gisela? ¿Quién dice sí, Gisela tiene razón? Uno, dos, tres… (Tres alumnos levantan la mano, en la grabación no se ve quiénes.) ¿Quién dice Gisela no tiene razón? Uno, dos, tres, cuatro (Cuatro alumnos levantan la mano, en la grabación no se ve quiénes.) ¿Quién no está seguro?

Mateo: *Yo.* (Los demás se ríen.)

M: Ok. ¿Quién quiere explicar? (Melisa levanta la mano.) Melisa.

Melisa (Se queda sentada, piensa.) Aja, aja, aja (asiente con la cabeza.)

M: ¿Qué quiere decir esto, Melisa?

Melisa: Que… (Se levanta.) Pienso que Gisela tiene razón, no soy muy inteligente para las matemáticas, pero si este (señala el dividendo 49’120 del cálculo 49’120 ÷ 12) y este es más grande y así (señala el pizarrón con las multiplicaciones, pero no está claro a qué se refiere.), entonces uno está más grande y el otro está más pequeño… y pues creo que los dos dan lo mismo.

(Sesión 8; Intervención 93 – 98)

Melisa apoya lo expresado por Gisela; sin embargo, es menos clara en su explicación: no dice qué tanto más pequeños/más grandes son los números implicados. Después de lo dicho por Melisa quieren participar Lucas y Jorge:

M: (Lucas y Jorge quieren participar.) Ok. Lucas, y después Jorge.
Lucas: (Se levanta.) *Está mal porque…*
Melisa: Ay (con tono triste).
Lucas: *Tienes menos dulces* (dibuja un dulce en el pizarrón, los demás se ríen) *y se los tienes que dar a más niños* (dibuja un niño.)
Melisa: *Ah sí, cierto.* (Se levanta y empieza a borrar el dibujo de Lucas.)
(Sesión 8; Intervención 99 – 103)

Lucas expresa su desacuerdo con lo dicho por Gisela y Melisa y recurre a un ejemplo situacional para justificar su opinión. Aparentemente la explicación de Lucas le parece lógica a Melisa. Enseguida Jorge apoya a Lucas y da una explicación sin recurrir a un ejemplo situacional:

Jorge: Sí, es lo mismo (se levanta.) *Es lo mismo que Lucas dijo* (toma la esponja que tenía Melisa y termina de borrar el dibujo de Lucas.) *Vamos… Para que los dos estén iguales este (el divisor) tiene que estar dividido entre dos o multiplicado por dos* (anota debajo de los divisores 11 y 12: ÷2; x 2) *y este* (el dividendo) *igual.*
Heidi: *O entre cuatro, ¿no?*
Jorge: *Mm, tienen que… los dos tienen que este… o sea estos dos deben de estar multiplicados o divididos, los dos lo mismo. Pero esto* (se acerca al lado del pizarrón con las multiplicaciones) *es al revés. Este* (uno de los factores) *puede estar multiplicado, pero este* (el otro factor) *tiene que estar dividido. Y tiene que estar siempre dividido o multiplicado por el mismo número. Entonces por eso esto va aquí* (mueve el cálculo 47'120 ÷ 13 a la columna "menos".)
(Sesión 8; Intervención 104 – 106)

La explicación de Jorge, además de no usar ningún contexto hipotético real, es más amplia que la de Lucas ya que también menciona que son diferentes las relaciones en las multiplicaciones que en las divisiones. Melisa, a pesar de haber aceptado la explicación con un ejemplo situacional de Lucas, parece volver a entrar en duda con la explicación intramatemática de Jorge:

Melisa: Pero tienes más *dulces* y (en la grabación no se entiende qué más dice. Más alumnos hacen comentarios cortos que no se entienden.)

Jorge: (Parece desesperarse.) *Aquí tienes menos dulces y más niños* (en 47’120 ÷ 13) *y aquí tienes más dulces y menos niños* (en 48’120 ÷ 12).

(Sesión 8; Intervención 107 – 108)

Jorge, a pesar de desesperarse, parece darse cuenta que Melisa necesita el ejemplo referido a un contexto imaginario para entender el problema por lo que recurre a la explicación de Lucas.

M: (Heidi levanta la mano) Heidi.

Heidi: (Se levanta.) *Estoy de acuerdo que este está mal aquí* (Se refiere a que el cálculo 47’120 está mal en la columna “igual a”) *pero es que… es que… estás sumando uno y estás quitando uno, ¡entonces es muy confuso! Entonces lo hice al azar. Pero, estoy de acuerdo con Jorge, es menos.*

(Sesión 8; Intervención 109 – 110)

En lo que expresa Heidi se manifiesta que, a pesar de las explicaciones recibidas, para ella, siguen existiendo cierta confusión e incertidumbre.

La misma confusión, provocada por el mismo problema se pudo observar en la otra mitad del grupo, como lo muestran las siguientes interacciones.

Interacción Mitad B:

A Alicia le toca comparar el cálculo 47’120 ÷ 13 con el cálculo 48’120 ÷ 12. Lo pone en “igual a” (el resultado correcto sería "menos que") y explica su decisión:

Alicia: Es igual porque este factor (se refiere al dividendo 47’120) es más pequeño que este (48’120) pero este factor (se refiere al divisor 13) es más grande (lo dice en alemán).

Juan: ¡Es un divisor no un factor!

Alicia: ¡Ah, ah, sí!

M: Explícalo otra vez en español, Alicia, para que todos entiendan lo que dijiste.

Alicia: *Este divisor (47'120) es más chiquito que este (48'120) pero este (señala el divisor 13) está más grande. Entonces yo…bueno, ¿ya entendieron?*

As: *Sí.*

(Sesión 8, intervención 165 - 170)

Alicia, aunque confunde los términos matemáticos "divisor" y "factor", expresa la misma idea de compensación que Melisa en el grupo anterior. Su explicación no es muy clara ni la completa, sin embargo, sus compañeros expresan haberla comprendido.

Laura: *Como si pusieras del trece uno a siete para que queda… para que* (no se entiende en la grabación todo lo que dice, supongo que se refiere a que el divisor trece es uno más grande que el divisor original doce y que el divisor 47 (sin considerar los ceros) es uno más chiquito que el divisor 48.)

Alicia: ¡*Aja!*

(Sesión 8, intervención 171 - 172)

Laura complementa la explicación de Alicia, apoyando la idea de la compensación.

Adrián: *No, ¡está mal!*

M: Pregunta: ¿Quién está de acuerdo con Alicia? Levanten la mano. (Levantan la mano José y Pablo.)

Alicia: *¿Ya? ¿Sólo tres están de acuerdo conmigo?*

M: ¿Quién no está de acuerdo con Alicia? (Levantan la mano Adrián y Pablo.)

Emma: *Yo estoy indecisa.*

(Sesión 8, intervención 173 - 177)

La docente sostiene la incertidumbre por medio de intervenciones diversas de devolución. En este caso solicita a los alumnos que todos se involucren en la resolución del problema por lo que les pide su opinión sobre lo expresado por Alicia. Adrián quiere explicar su desacuerdo.

Adrián:	¿Puedo explicar?
M:	Vas Adrián. Puedes hacerlo en español.
Adrián:	(Se levanta y va al pizarrón, Alicia sigue enfrente del pizarrón.) *Está mal, porque si tú* (le habla directamente a Alicia) *tienes trece niños, pero tienes cuarenta y siete lápices…*
Emma:	*¡Ah, está mal!*
Adrián:	*…tienes menos lápices y más niños entonces, entonces cada niño va a tener menos lápices.*
Juan:	*¡Ah sí, cierto!* (Adrián se sienta, Alicia se queda viendo el pizarrón.)
M:	¿Sí Alicia?
Alicia:	Sí… *pero tú nos dijiste que era… ¿Qué?* (Parece confundida. Cambia el cálculo a la columna "menos" y se sienta.)

(Sesión 8, intervención 178 - 185)

Como lo hizo Lucas en el grupo anterior, Adrián recurre a un ejemplo situacional para justificar su respuesta. Alicia, aunque expresa acuerdo con la explicación de Adrián parece confundida. La maestra sostiene la incertidumbre y la devolución frente a la convicción de que podría haber otros alumnos que no estuvieran de todo convencidos de la respuesta.

M:	Ok, pero creo que José y Blanca todavía no están seguros. Blanca.
Blanca:	Sí estoy segura, pero si fuera igual, tendría que ser por dos y por dos.
M:	Ok, ahí sería lo mismo. José.
José:	(Se levanta y va al pizarrón. Regresa el cálculo a la columna "igual a".) Porque este es mil menos (se refiera a 47'120 en comparación con 48'120), pero este (se refiere a trece en comparación con 12) es uno más...
M:	Entonces, da lo mismo, ¿dices?
	Estamos otra vez indecisos, José dice: Aquí son mil menos (lo anota en el pizarrón, poniendo una flecha con -1000 de 48'120 a 47'120) y aquí es

uno más, entonces da lo mismo. (Matías levanta la mano.) Matías, ¿qué opinas?

Matías: Está bien.

M: ¿Que da lo mismo?

Matías: Sí.

M: ¿Por qué?

Matías: Porque… espera…sí… *porque cuarenta y ocho es cuarenta y ocho, pero baja a cuarenta y siete, pero como que se compensa con el trece que está ahí, porque el otro es doce. Como que se compensa…*

(Sesión 8, intervención 186 - 195)

A pesar de la explicación con un ejemplo situacional de Adrián, José regresa a la idea de la compensación, idea que la docente devuelve al grupo y que Matías apoya. Enseguida Emma quiere participar ya que no está de acuerdo con José y con Matías.

M: ¿Emma?

Emma: Es menos.

M: ¿Por qué?

Emma: Porque, porque…

M: Puedes decirlo en español.

Emma: (No contesta. Blanca levanta la mano.)

M: Blanca.

Blanca: Es menos porque a fuerza tiene que ser por dos y por dos, no puede ser más y menos.

(Sesión 8, intervención 196 - 203)

Blanca expresa que "a fuerza tiene que ser por dos y por dos, no puede ser más y menos." Aunque su respuesta no es completamente correcta (no tiene que ser a fuerza por dos, puede ser multiplicado/dividido por cualquier número), Blanca parece haberse dado cuenta de que no es posible que el resultado de dos divisiones sea igual si los dividendos y los divisores se distinguen por un número que se suma o se resta.

Emma: ¡Ya sé! (se levanta y va al pizarrón.)

Emma: Porque mira, este es más grande que este (se refiere al divisor 13 en comparación con 12) y este (el dividendo) es menos, entonces es lógico que tiene que dar menos.

M: ¿Por qué es lógico?

Emma: ¡Porque así es!

M: ¿Por qué?

Emma: ¡Porque sí! (Cambia el cálculo a la columna "menos que" y se sienta.)

Matías: *¿Por qué dices que sí, si ni siquiera sabes por qué es?*

(Sesión 8, intervención 204 - 210)

Emma expresa que "es lógico" que los dos cálculos no pueden dar lo mismo, sin embargo, no logra justificar su respuesta, lo que Matías cuestiona. Sigue una discusión acalorada en la cual Emma insiste que "Es lógico que no puede dar lo mismo" mientras que Matías vuelve a recurrir a la idea de la compensación.

M: Alicia.

Alicia: *No entiendo a Emma, porque dice es que este es más grande que este, pero este es más chiquito, entonces es muy obvio que tenga que ser menos*. (Dice algo más que no se entiende bien en la grabación. Mientras que Alicia habla, se levanta Matías y regresa el cálculo otra vez a la columna "igual a".)

Matías: *Si quitas el siete* (de 47'120) *y pones el ocho, sería lo mismo. Y si aquí* (divisor) *si le restas uno te da doce, entonces si aquí le restas uno, te da cuarenta y siete y si aquí le sumas uno te da trece. Es como que se compensa el número que…*

Emma: *¡Eso no se puede!*

Juan: *¿Por qué?*

Emma: *¡Es imposible!*

Matías: *¡Es imposible, pero explícame qué tienes que hacer*! (Parece enojado)

Emma: (Se levanta y cambia el cálculo a "menos que", se vuelve a sentar.)

Matías: *A ver, ¡explica! Emma, ¡explica!*

Pablo: *¡No se enojen!*

(Sesión 8, intervención 211 - 220)

Para calmar la situación la docente realiza una intervención en la cual solicita a Adrián que repita su explicación. Esta intervención se apoya en el supuesto de que para algunos alumnos escuchar la explicación contextualizada por parte de su compañero les permitirá entender las relaciones en juego:

M: Un momento, esta mesa, (se refiere a Matías, Alicia y Juan), ¿escucharon la explicación de Adrián o no?
Matías: (No se escucha su respuesta.)
M: Ok, Adrián, ¿podrías volver a explicar?
Adrián: *¡Sí!* (Se levanta y se acerca al pizarrón.)
M: Escuchen bien la explicación de Adrián.
Adrián: *Es menos, porque hazte cuenta que tienes cuarenta y siete lápices, bueno cuarenta y siete mil ciento veinte, pero tienes trece niños, o sea más niños… y menos lápices. Obviamente…*
Matías: *¡Ah claro!*
Adrián: *…si tienes más niños y menos lápices cada uno recibe menos.*
As: *¡Sí!*
M: ¿Convencimos a todos? ¿José?
José: Asiente con la cabeza.
M: ¿Seguros? ¿Alicia? ¿Juan?
As: *¡Sí!*
(Sesión 8, intervención 221 - 235)

En los extractos anteriores podemos identificar que a pesar de los ejemplos situacionales que dieron algunos compañeros, hay otros que volvieron a recurrir a la justificación errónea de la compensación por “quitarle uno al dividendo y sumarle uno al divisor.”

En la novena sesión se retomó el mismo ejemplo del día anterior en el momento de una discusión grupal para elaborar un cartel que resumiera las relaciones entre multiplicaciones y entre divisiones:

M: (…) ¿Qué más podemos anotar? Alicia.
Alicia: Si tienes el primer factor más chiquito…

M: ¿Estás en la multiplicación?

Alicia: Ah, no, si tienes el primer divisor, no… si tienes el divisor más grande y el… (Busca en el cartel con los nombres de las partes de los cálculos) dividendo más pequeño no da el mismo resultado que el cálculo original.

M: Tú, dices si el dividendo… ¿Lo puedes repetir? ¿Es más grande o más pequeño?

Alicia: Si el dividendo es más pequeño y el divisor más grande, no da el mismo resultado.

M: Entonces, por ejemplo, como aquí (señala el cálculo 47’120 ÷ 13.)

Alicia: ¡Aja!

M: Alicia dice: Si el dividendo es más pequeño y el divisor más grande, no da el mismo resultado. En este cálculo, en los dos grupos de ayer hubo discusiones.

As: ¡Sí!

M: ¿Por qué hubo discusiones? ¿Se acuerdan? Porque algunos lo pusieron en medio (se refiere a la columna de “igual a”, pega el cálculo ahí.) ¿Se acuerdan por qué algunos, al principio dijeron que daba lo mismo? Carla.

Carla: (No se entiende bien lo que dice en la grabación.)

M: Exacto, algunos ayer dijeron, aquí hice más uno y acá menos uno (pone flechas con +1/-1 de los números originales a los números del cálculo que se compara) y da lo mismo. Y ahora dice Alicia: No, yo aprendí que no da lo mismo. ¿Podemos, en lugar de solamente anotar que no da lo mismo, decir si da menos o más? José.

José: Da menos.

M: ¿Por qué da menos?

José: Porque el dividendo es menos y el divisor es más. Si tienes más niños y menos lápices cada uno de los niños recibe menos.

M: Bien, entonces José explica con el mismo ejemplo. (Anota el ejemplo y la explicación en el cartel.) José dice: Aquí tenemos menos lápices y más niños. Por eso da… ¿Da qué Pablo? ¿Menos lápices por niños o más lápices por niño? (Le solicita a Pablo que conteste porque lo ve distraído.)

Pablo: Mhhh, menos.

M: Menos. Bien, ¿algo más que podríamos anotar acerca de la división? Melisa.

Melisa: Y si tienes lo contrario, si tienes más en el primero y menos en el segundo, tienes más porque tienes más cosas que dar y menos a quienes repartir.

M: Aja, entonces, tú dices…, vamos a ver un ejemplo. (Señala el cálculo 49’120 ÷ 11)

Melisa: Aja.

M: Lucas, ¿Qué dice Melisa? ¿Qué pasa aquí? (Le solicita que conteste porque lo ve muy cansado.)

Lucas: Que si el dividendo es más grande y el divisor más chiquito no da lo mismo.

M: No da lo mismo. ¿Y da más o menos?

Lucas: Es más.

M: Bien. ¿Quién me puede explicar otra vez con un ejemplo concreto por qué da más? Matías, por ejemplo (le solicita contestar porque le ve distraído).

Matías: ¿Qué?

M: ¿Me puedes explicar con ejemplo concreto porque aquí tiene que dar más?

Matías: Porque el primero número es más grande que este (se refiere al dividendo original)

M: Ahora hazme un ejemplo con algo que puedes repartir. Con galletas, lápices…

Matías: Con pizza.

M: Ok. ¿De qué tienes más?

Matías: Pizzas.

M: ¿Y menos?

Matías: Niños.

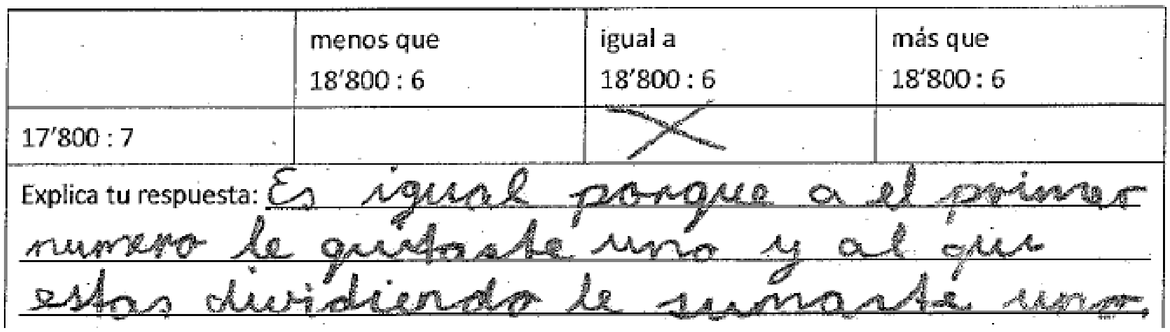
M: ¿Entonces?

Matías: Más.

M: Entonces cada uno recibe más.

(Sesión 9, intervención 64 – 102)

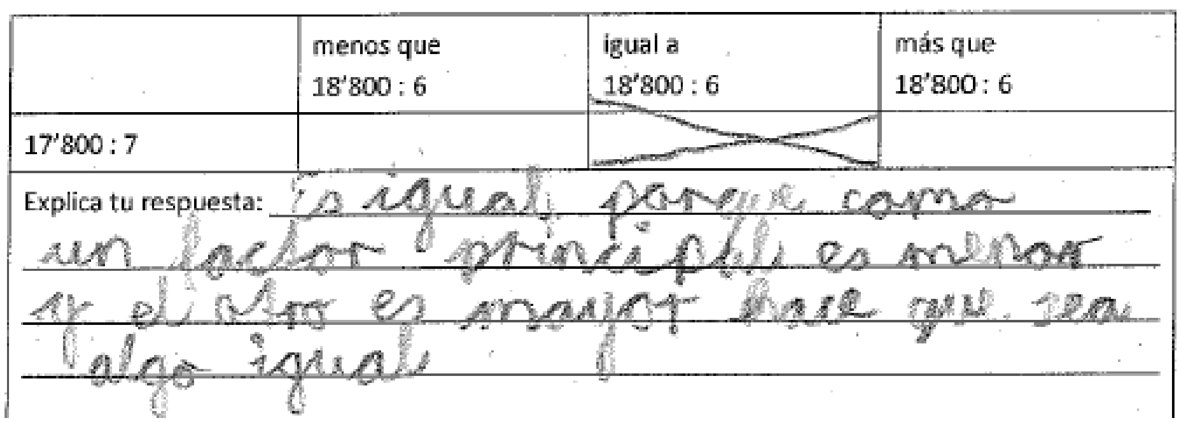
Lo expresado por los alumnos en este momento de la clase hizo pensar a la maestra que los alumnos se habían apropiado de que no existe una “compensación” en este caso. Sin embargo, en la evaluación que se hizo posteriormente en la sesión 10 se pudo identificar que al menos dos alumnos seguían con la misma confusión, como se muestra en lo escrito por Ana: “Es igual porque al primero numero le quitaste uno y al que estas dividiendo le sumaste uno” y por Pedro: “Es igual porque como un factor principal es menor y el otro es mayo hace que sea algo igual.”



	menos que 18’800 : 6	igual a 18’800 : 6	más que 18’800 : 6
17’800 : 7		X	

Explica tu respuesta: Es igual porque a el primer numero le quitaste uno y al que estas dividiendo le sumaste uno.

Figura 55: Dificultad comparar cálculos: división (Ana)



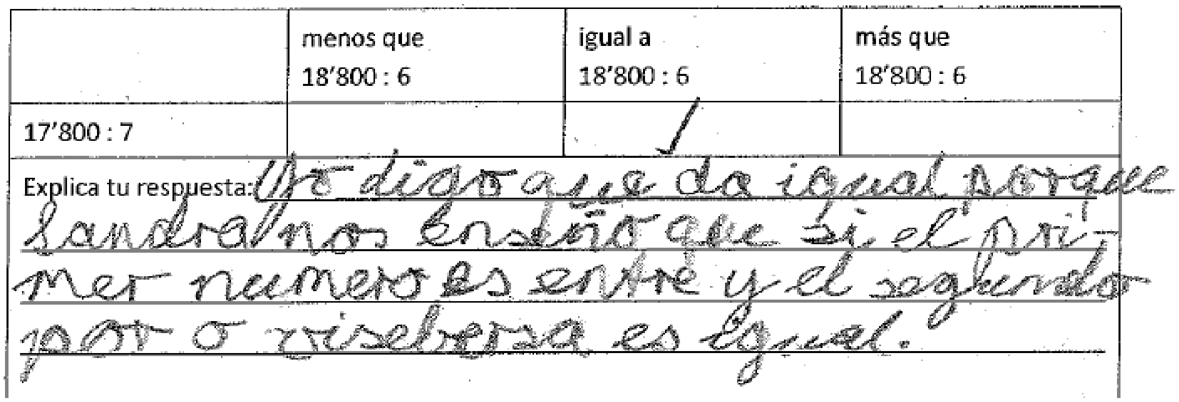
	menos que 18’800 : 6	igual a 18’800 : 6	más que 18’800 : 6
17’800 : 7		X	

Explica tu respuesta: Es igual porque como un factor principal es menor y el otro es mayor hace que sea algo igual.

Figura 56: Dificultad comparar cálculos: división (Pedro)

Catorce de veinte alumnos contestaron de manera correcta el problema de comparar el cálculo 17’800 ÷ 7 con el cálculo 18’800 ÷ 6, tres contestaron que los dos cálculos daban lo mismo, dos contestaron que el segundo daba más que el primero y un alumno no contestó el problema. De los tres alumnos que contestaron erróneamente, Ana y Pedro (Figuras 55 y 56) justificaron con una compensación, mientras que Laura (Figura 57) pareció confundirse entre las relaciones que se pueden establecer entre dos multiplicaciones y las que se establecen entre dos divisiones. Esta última alumna mencionó que “si el primer número es entre y el segundo es por o viceversa es igual”, lo cual sí puede ser correcto en la comparación de dos multiplicaciones (por ejemplo 4 x 2400 = 2 x 4800) pero no en una división

(2400 ÷ 4 < 4800 ÷ 2). Además, en su explicación sobre por qué eligió “igual a 1800 ÷ 6” mencionó una relación multiplicativa que no se encuentra en el problema, como se muestra enseguida: “Yo digo que da igual porque Sandra nos enseño que si el primer numero es entre y el segundo por o visebersa es igual.”



	menos que 18’800 : 6	igual a 18’800 : 6	más que 18’800 : 6
17’800 : 7		/	

Explica tu respuesta: Yo digo que da igual porque Sandra nos enseño que si el pri-mer numero es entre y el segundo por o visebersa es igual.

Figura 57: Dificultad comparar cálculos: división (Laura)

Para resumir, podemos resaltar que las dificultades en los problemas que piden comparar divisiones se vincularon especialmente con las relaciones que se establecieron entre dos cálculos; si bien los alumnos identificaron cómo eran diferentes el dividendo y el divisor de un cálculo y otro (por ejemplo: “se dividió el dividendo entre dos y se multiplicó el divisor por dos”) se confundieron con los efectos que estas diferencias tenían sobre el resultado.

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que establecer relaciones entre dos divisiones, sobre todo cuando variaron simultáneamente el dividendo y el divisor, resultó difícil para los alumnos. Además, se pudo observar que los alumnos recurrieron frecuentemente a ejemplos situacionales, a veces de manera espontánea, a veces después de una invitación de la docente.

5.3 Comentarios

5.3.1 Comentarios sobre los procedimientos correctos, errores y dificultades

El análisis refleja una diversidad de procedimientos, errores y dificultades a los que dieron lugar los problemas planteados.

En cuanto a los problemas que exigen anticipar y encuadrar pudimos identificar un predominio de las estrategias que implican redondear para los problemas de multiplicación y buscar números compatibles para los de división. En el redondeo, así como en la búsqueda de números compatibles, pudimos registrar que según las características de los problemas los alumnos recurrieron a cambiar solamente uno de los números implicados o a cambiar los dos. Inferimos de las respuestas de los alumnos la posibilidad de que, para calcular los resultados de multiplicaciones y divisiones, hayan usado la técnica del dígito de la izquierda, aunque no siempre lo hayan explicitado. Además, nos encontramos con el uso de diferentes relaciones para comparar el resultado del cálculo con números redondeados con el cálculo dado como, por ejemplo: "si se aumenta uno o los dos factores, aumenta el resultado" para las multiplicaciones o "si se disminuye el dividendo y aumenta el divisor, disminuye el resultado" en el caso de las divisiones.

Respecto a los errores identificados en estos tipos de problemas fueron más frecuentes los errores en las divisiones que en las multiplicaciones. Los errores que aparecieron frente a las multiplicaciones se vincularon con dificultades en la descomposición del cálculo, así como con una falta de control sobre las repercusiones del redondeo sobre el resultado. Al indagar sobre las dificultades en los problemas que implican anticipar o encuadrar divisiones hallamos dificultades relacionadas con el valor posicional y con las relaciones. En cuanto al uso de estas relaciones podemos resaltar que establecer relaciones entre dos multiplicaciones y entre dos divisiones resultó complejo para la mayoría de los alumnos del grupo, siendo las relaciones entre divisiones más difíciles que aquellas entre multiplicaciones lo que también se reflejó en el tipo de problema de comparar cálculos.

En cuanto a los problemas que involucraron comparar cálculos podemos sintetizar que la comparación de divisiones resultó más compleja que la de multiplicaciones. Para resolver problemas que exigen comparar multiplicaciones podemos advertir que los alumnos recurrieron a comparar los factores de un cálculo con los factores del otro para después establecer las siguientes relaciones que se institucionalizaron a lo largo de la secuencia:

- Si aumenta uno de los factores (manteniendo el otro) o si se aumentan los dos factores, el producto aumenta.
- Si disminuye uno de los factores (manteniendo el otro) o si se disminuyen los dos factores, el producto disminuye.
- Si se multiplica uno de los factores por un número y se divide el otro entre el mismo número, se mantiene el producto.

Las dificultades relevadas ponen en juego justamente estas relaciones. Encontramos que los problemas donde se cambió solamente uno de los factores, no causaron dificultad, mientras que los de cambio en los dos factores sí, sobre todo porque los alumnos se confundieron entre relaciones que son válidas para las multiplicaciones y las que lo son para las divisiones.

Para la resolución de problemas que involucraron comparar divisiones podemos resaltar que la maestra promovió el uso de ejemplos situacionales, recurso en el cual la mayoría de los alumnos se apoyó en varios momentos de la secuencia. Como en las multiplicaciones los estudiantes recurrieron a analizar cómo se modificaban el dividendo y el divisor para después establecer relaciones entre los dos cálculos. En cuanto a las relaciones resultó más fácil establecerlas en problemas donde era distinto solamente o el dividendo o el divisor, mientras que causaron más dificultad aquellos en los que se cambiaban el dividendo y el divisor. Observamos que si bien los alumnos identificaron cómo eran distintios el dividendo y el divisor de un cálculo a otro (por ejemplo: se dividió el dividendo entre dos y se multiplicó el divisor por dos) se confundieron con los efectos que estas diferencias tenían sobre el resultado. Como fue mencionado anteriormente nos encontramos también con confusión respecto a qué relaciones eran válidas para las multiplicaciones y cuáles para las divisiones.

El hecho de que a pesar de que la docente haya realizado diversas intervenciones ligadas a la circulación de estas relaciones e incluso a la insitucionalización, varios alumnos seguían con dificultades, nos indica que estas relaciones son complejas y que se requiere de un trabajo continuo para que los alumnos las puedan no sólo comprender, sino también reutilizar.

5.3.2 Comentarios sobre las justificaciones de los alumnos

En la secuencia se incluyeron intervencions didácticas específicas dirigidas a que los alumnos justificaran sus respuestas. Estas intervenciones tenían el objetivo de que los alumnos aprendan a explicar y justificar sus resultados y de fomentar interacciones entre los alumnos que promovieron avances en sus conceptualizaciones. La solicitud recurrente por parte de la docente de justifcaciones promovió que incluso en interacciones espontáneas entre alumnos fueron ellos mismos quienes le pedían a un compañero que explicara su respuesta:

(Algunos alumnos discuten sobre si 47’120 ÷ 13 da menos, igual o más que 48’120 ÷ 12.)

Matías: Si quitas el siete (de 47’120) y pones el ocho, sería lo mismo. Y si aquí (divisor), si le restas uno te da doce, entonces si aquí le restas uno, te da cuarenta y siete y si aquí le sumas uno te da trece. Es como que se compensa el número que…

Emma: ¡Eso no se puede!

Juan: ¿Por qué?

Emma: ¡Es imposible!

Matías: ¡Es imposible, pero explícame qué tienes que hacer! (Parece enojado)

(Sesión 8; Intervención 215 – 219)

Al analizar las respuestas de los alumnos frente al pedido de explicaciones y justiifaciones se pudieron identificar diferentes tipos de justificaciones que se presentarán a continuación:

Justificación 1: Los alumnos responden a la solicitud de justificación, pero sin dar una explicación. Por ejemplo, ante un pedido de explicación de un resultado se produce el siguiente intercambio:

> José y Lucas, durante una actividad en pareja, no se ponen de acuerdo sobre el resultado del cálculo 42’000 ÷ 30 por problemas con el valor posicional. Se transcribe parte de la interacción:
>
> M: ¿Qué opinas tú, José?
> José: (Se encoge de hombros.)
> M: ¿Ciento cuarenta? ¿Mil cuatrocientos? ¿Catorce mil?
> José: Mil cuatrocientos.
> M: ¿Por qué?
> José: Porque “Yolo”. (“Yolo” es un acrónimo de “you only live once”. En este caso no sabemos si José conoce este significado, podemos interpretar su respuesta de diferentes maneras. Tal vez quiso expresar algo como “porque sí”, “porque así lo pensé”, “porque es obvio”.
>
> (Sesión 11; Intervención 90 – 95)

Justificación 2: Los alumnos responden a la solicitud de justificación usando principios de una justificación, pero basados en experiencias propias (p.ej. “para mí es fácil”) y sin poner en juego relaciones matemáticas. Por ejemplo, frente a un pedido de justificación de una estrategia se produce el siguiente intercambio:

> (Para encuadrar el cociente del cálculo 650’397 ÷ 92 Melisa redondea a 630’00 ÷ 90.)
>
> M: Ok, y Melisa aquí dijo, redondeo más, dijo seiscientos treinta mil. Melisa, ¿por qué tomaste seiscientos treinta?
> Melisa: Porque, mh, sabía que, mh, para mí es fácil la tabla del nueve y sé que es sesenta y tres… pienso… no, sé, pero… no sé (se queda pensando.)
>
> (Sesión 11; Intervención 218 – 219)

Justificación 3: Los alumnos justifican sus repuestas usando ejemplos situacionales y poniendo en juego relaciones matemáticas correctas. Por ejemplo, frente a un pedido de justificación de su opinión, un alumno responde:

(Comparación de cálculos; Jorge explica porque 48'120 ÷ 11 no puede dar lo mismo que 48'120 ÷ 12.)

Jorge: Yo creo que es así porque aquí (en 48'120 ÷ 12), por ejemplo, con el mismo ejemplo de las galletas, estás dividiendo cuarenta y ocho mil ciento veinte galletas entre doce niños y aquí (en 48'120 ÷ 11) estás dividiendo cuarenta y ocho mil ciento veinte galletas entre once niños. Entonces, aquí, como son menos niños y son más galletas… pues, son el mismo número de galletas, pero para menos niños, le tocan más galletas a cada niño. Aquí, como son las mismas galletas, pero son más niños da menos galletas para cada niño.

(Sesión 8; Intervención 88)

Justificación 4: Los alumnos justifican sus respuestas usando relaciones matemáticas correctas con un cierto nivel de generalización. Por ejemplo, frente a un pedido de justificación de su opinión, un alumno responde:

(Comparación de cálculos; Jorge explica porque 47'120 ÷ 13 no puede dar lo mismo que 48'120 ÷ 12.)

Jorge: (Se levanta al pizarrón.) Es lo mismo que Lucas dijo… Vamos… Para que los dos estén iguales este (el divisor) tiene que estar dividido entre dos o multiplicado por dos (anota debajo de los divisores 11 y 12: ÷2; x 2) y este (el dividendo) igual

Heidi: O entre cuatro, ¿no?

Jorge: Mm, tienen que… los dos tienen que este… o sea estos dos (dividendo y divisor) deben de estar multiplicados o divididos, los dos lo mismo. Pero esto (se acerca al lado del pizarrón con las multiplicaciones) es al revés. Este (uno de los factores) puede estar multiplicado, pero este (el otro factor) tiene que estar dividido. Y tiene que estar siempre dividido o multiplicado por el mismo número. Entonces por eso esto va aquí (mueve el cálculo 47'120 ÷ 13 a la columna "menos" que 48'120 ÷ 12.)

(Sesión 8; Intervención 104 – 106)

Mientras que en este capítulo nos enfocamos en las producciones de los alumnos, en el siguiente capítulo se analizarán las intervenciones didácticas a lo largo de la secuencia.

CAPÍTULO 6
ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN: INTERVENCIONES DIDÁCTICAS

Hemos mencionado en el marco teórico el análisis riguroso que la TSD le imprime a los roles del docente. Brousseau (1994) estudia en particular los roles de devolución y de institucionalización que han sido puntos de partida para la anticipación de las clases y son también ahora el marco desde el cual se analizarán las intervenciones de la docente. Si bien a lo largo del capítulo anterior hemos mencionado algunos tipos de intervenciones, en este capítulo analizaremos con mayor profundidad los diferentes tipos de intervenciones didácticas desplegados, sus intenciones y sus efectos. En particular, se analizará qué intervenciones de la docente propiciaron las prácticas matemáticas siguientes:

a) la comparación y justificación de procedimientos y resultados
b) la identificación y el análisis de los errores
c) la sistematización de la producción matemática

Lo anterior tuvo lugar a través de distintas intervenciones didácticas, las cuales se presentaron a lo largo de la secuencia. Presentaremos las más frecuentes de tales intervenciones didácticas que propiciaron uno o varios de los aspectos arriba mencionados:

- promover la presentación y discusión de diferentes procedimientos y resultados, ya sea en parejas, en equipos o en la plenaria
- pedir la justificación de las respuestas
- hacer explícitos conceptos y procedimientos matemáticos a través de:
    - expresión verbal
    - expresión gestual
    - representación gráfica
- devolver al alumno la responsabilidad de hacerse cargo del problema que se le propone
- promover la institucionalización de los saberes matemáticos

Es importante mencionar que estas intervenciones están estrechamente relacionadas entre sí; no son momentos de la clase sino tipos de intervenciones que pueden estar en las mismas fases o momentos de la clase o incluso simultáneamente. A continuación, se abordará cada una de las prácticas arriba mencionadas que, desde el marco teórico señalado en los inicios, se trata de instalar en las aulas para que haya una producción matemática colectiva. Para cada una de ellas se explicitarán las intervenciones didácticas que en ellas tuvieron lugar y se mostrarán ejemplos de lasm intervenciones.

6.1 Intervenciones para propiciar la comparación y justificación de procedimientos y resultados

Consideramos a partir de la vasta producción matemática actual, que comparar y justificar distintos procedimientos es un aspecto relevante y necesario en la clase de matemáticas, puesto que ello contribuye a que los alumnos reflexionen sobre sus propios procedimientos –lo cual demanda todo un trabajo intelectual– y contribuye también al desarrollo de la capacidad para comprender los razonamientos y formas de proceder de sus compañeros, enriqueciendo así su propio repertorio de opciones para proceder ante un determinado problema, como lo señala Saiz (1995):

“El desarrollo de este momento obliga a los alumnos, por un lado, a volver sobre sus procesos, sobre sus propias acciones, a describirlas y a defenderlas y a tomar conciencia de los recursos de los que dispone, de su pertinencia y de su validez; pero también a tratar de comprender los procesos de los demás, de sus argumentos y si es posible, de apropiarse de los procedimientos de sus compañeros, ampliando el campo de sus posibilidades.” (p.3)

Durante la implementación de esta secuencia didáctica identificamos distintos tipos de intervención que promueven la comparación de procedimientos y resultados, a saber:

- Fomentar la presentación y discusión sobre diferentes procedimientos y resultados, ya sea en parejas, en equipos y en la plenaria
- Pedir a los alumnos que se justifiquen las respuestas
- Ayudar a explicitar conceptos y procedimientos matemáticos a través de expresiones verbales, gestuales o gráficas

Para **promover la presentación y discusión de diferentes procedimientos y resultados** se procuró, a largo de la secuencia, implementar momentos durante la clase para revisar entre todos, las respuestas dadas a un problema determinado**.** Por ejemplo, en una actividad de la sesión 3 en la que los alumnos debían encuadrar cálculos, la maestra realizó una intervención en la cual, manteniendo la duda sobre la validez de las respuestas, solicitó al grupo que se haga cargo de revisar si efectivamente cada cálculo estaba colocado en el rango numérico en el que se ubicaba su resultado:

> Cada pareja recibió de la maestra un cálculo escrito en papel y debían decidir en qué rango numérico estaba el resultado y colocar el cálculo en la columna correspondiente de la tabla de rangos de números que estaba en al pizarrón.

M:	Por favor, ¡todos vean el pizarrón! Ayuden a revisar. ¿Tienen la impresión de que alguna de las multiplicaciones está en el lugar equivocado?... ¿Hay unas donde no están seguros?... ¿O qué dirían?... Ana.
Ana:	(Se ríe con Laura). La nuestra.
M:	¿La de ustedes está mal? ¿Cuál fue?
Ana:	(Se levantan Ana y Laura para señalar el cálculo). Nueve por nueve… (Se refieren al cálculo 9 x 9987, está en la columna 1000 a 10’000; respuesta equivocada)
M:	Ok, ¿dónde lo pondrían ahora? (Lo ponen en la columna 10’000 a 100’000; algunos alumnos hacen un comentario, pero en la grabación no se entiende qué dicen.)
M:	Veamos este cálculo. Ese ya lo resolvimos la vez pasada, ¿se acuerdan? Juan no estuvo el lunes, por eso lo voy a quitar otra vez (quita el cálculo de la columna). ¿Cómo podemos estimar este cálculo? Acuérdense de estimar, no de manera exacta… sino ¿qué podemos hacer? Melisa.
Melisa:	Diez por…
M:	Entonces, ¿redondeas el nueve: diez por…? (anota el diez debajo del nueve)
Melisa:	Nueve mil novecientos ochenta y siete. (La maestra anota 9987)
M:	Y entonces, ¿cuánto daría eso?
Melisa:	Noventa y nueve mil ochocientos setenta. (La maestra anota el resultado.)

M:	Ok, es decir (se dirige a Juan que no estuvo la sesión pasada), hacemos más fácil el cálculo, no exacto, pero más fácil. En lugar de calcular nueve por eso (señala 9987) podemos hacer un diez, vemos que da algo con noventa y nueve mil, entonces va aquí (regresa el cálculo a la columna 10’000 a 100’000.) ¿Sí?

Juan:	Ah, ok.

(Sesión 3, intervención 19 – 31)

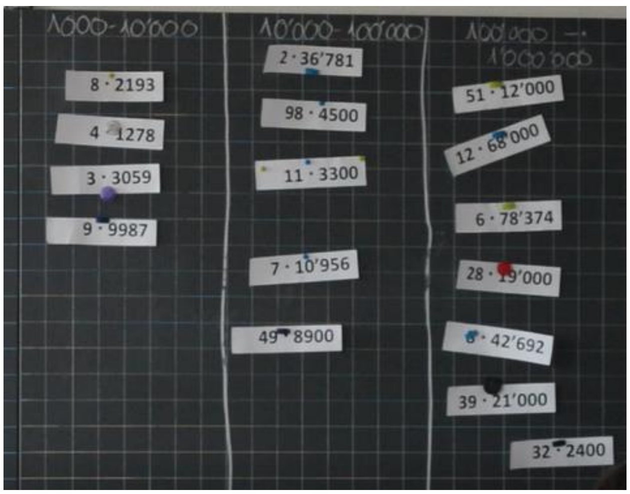


Figura 58: Revisar cálculos: encuadrar

En el ejemplo anterior, revisar los resultados entre todos permitió, además de la presentación de un procedimiento, que la docente pudiera aprovechar las explicaciones de una alumna para poner al corriente a otro alumno que faltó la sesión anterior.

En la siguiente interacción, momento de la misma actividad que el ejemplo anterior, se puede identificar la manera en la cual la docente interviene solicitando a los alumnos que presenten diferentes procedimientos. Además, sin dar pistas sobre cuál es la respuesta correcta, otorga al grupo de alumnos la responsabilidad de opinar y decidir con el objetivo de que los alumnos se den cuenta de que hay diferentes procedimientos válidos.

M: ¿Hay otro cálculo que ven que esté en el lugar equivocado? Alicia.

Alicia: Ocho por dos mil ciento noventa y tres (está en la columna de la izquierda, 1000 a 10'000)

M: (Quita el cálculo) ¿Dónde tendría que ir, en medio o a la derecha?

Alicia: En medio.

M: En medio (pone el cálculo en la parte libre del pizarrón). ¿Cómo lo averiguaron o qué harían? ¿Cuál de los dos números redondearían?… ¿Mateo?

Mateo: ¿Lo puedo escribir?

M: Dímelo.

Mateo: Ocho… (la maestra anota 8 x) dos mil.

M: Dos mil. Entonces dejarías el primer factor, no es tan difícil, y redondearías el segundo hacia abajo (anota 2000). ¿Melisa, qué harías tú?

Melisa: Diez por dos mil ciento noventa y tres.

M: Ok (anota 10 x 2193). Bien. ¿Quién de los dos tiene razón? ¿Melisa o Mateo?

As: Los dos.

M: ¡Los dos!

Marco: Si para ti es fácil…

(Sesión 3, intervención 50 – 63)

La intervención denominada **pedir que se justifiquen las respuestas** tenía el objetivo de que los alumnos aprendieran a explicar y justificar sus resultados y procedimientos. Esta intervención se pudo observar en diferentes momentos de las sesiones, en discusiones grupales o en interacciones entre la maestra y una pareja o un equipo de alumnos. La siguiente conversación es un fragmento de una intervención durante un momento de trabajo en parejas en la sesión 7, donde aun cuando el alumno da una respuesta correcta, la maestra le pide que la justifique. Este tipo de intervenciones, "poner en duda lo correcto" ha sido ya propuesto en Broitman y Kuperman (2004) y tiene la importancia de que además de fomentar una profundización de las explicaciones por parte de los alumnos, a mediano plazo empieza a generar que los alumnos no vinculen que siempre que su maestro pone en duda sus respuestas es porque estas han sido incorrectas:

> Marco debe decidir si el cociente de 72’200 ÷ 7 da “más que”, “menos que” o “igual que” 72’200 ÷ 8; él elige “más que” (respuesta correcta).
>
> M: ¿Por qué crees que da más, Marco?
>
> Marco: Porque son siete personas (se refiere al divisor) pero es el mismo número que aquí (se refiere al dividendo que sigue igual), pero es una persona más (se refiere al divisor 8 en comparación con el divisor 7) y por eso cada uno recibe más.
>
> (Sesión 7, intervención 86 – 88)

En la Sesión 11, esta vez durante una actividad en parejas, la docente invitó a los miembros de una pareja a revisar sus respuestas aun cuando éstas eran correctas; de esa manera animaba al alumno de la pareja que no había dado la respuesta a que se involucrara en la revisión y, además, como lo hemos ya planteado, procuraba que no se instalara la idea de que solamente se ponen en duda las respuestas incorrectas.

> (La maestra comenta con Melisa y Pablo la respuesta que Melisa dio en una de las evaluaciones: estimar si el cálculo 650’379 ÷ 92 da más o menos que 10’000)
>
> M: (…) Ahora dijiste (se refiere a las notas de Melisa en la evaluación): Seiscientos treinta mil entre noventa da siete mil. ¿Ahí estás de acuerdo, Pablo? ¿O hay algún error con los ceros? A la mejor da setecientos o setenta mil, ¿o están seguros con siete mil?
>
> Pablo: (Lo piensa un momento, también Melisa). Está bien.
>
> (Sesión 11, intervención 228 – 229)

La docente también animó a los alumnos a que expresaran y discutieran sus ideas cuando trabajaban en equipo, como se puede observar en la siguiente transcripción:

M: (Antes de un juego de comparar cálculos en equipos la maestra da tiempo para que los alumnos anoten algunas estrategias que les pudieran ayudar durante el juego. Observa que anotan solamente ejemplos de redondeo.) Acuérdense que se va a tratar de ejercicios donde tienen que decir cuál de los dos es más grande o más chiquito (Les muestra dos cálculos, 2 x 48’800 y 4 x 24’400).

Jorge: Es lo mismo.

M: Aja, ¿Y en qué se fijan para decidir? ¿Redondeaste o no?

Jorge: No.

Carla: Porque este es la mitad (se refiere a que 2 es la mitad de 4) y este es el doble (se refiere a que 48’800 es el doble de 24’400).

M: Aja, platiquen también sobre estas estrategias. Y si fuera una división, ¿cómo sería? Platíquenlo juntos.

Jorge: (Empieza a escribir, todo el equipo da ideas.)

(Sesión 8, intervención 49 – 55)

Cabe mencionar que la docente puso énfasis en que el trabajo en parejas o en equipos no significaba que un alumno resuelviera una parte de los problemas y el otro la otra parte, sino que se trataba de discutir ideas, procedimientos y respuestas. Este tipo de intervenciones ligadas a la gestión de la clase no solamente buscan organizar el trabajo de los alumnos, sino que pretenden comunicar un modo de trabajar en donde conviven ideas diferentes y se proponen instancias para producir con otros. Lo mismo, sosteniendo la autonomía intelectual en lugar de quedar subsumido a las ideas ajenas por ser expresadas con convicción o por porvenir de alumnos con alto estatus matemático en la clase.

M: ¿Qué hicieron en la primera división (52’000 ÷ 6, ¿da más o menos que 10’000?) para decidir si da menos o más que diez mil? ¿Mateo?

Mateo: Menos.

M: ¿Por qué?

Mateo: Eso lo dijo Pablo (su pareja).

M: Ok. Ya le dije antes a este equipo que trabajo en pareja no significa “yo resuelve uno, el otro…” ¡Pablo! (le llama la atención porque está jugando

> con algo) y después digo “el otro lo hizo”. Trabajo en pareja es si lo platicamos juntos.

(Sesión 1, intervención 151 – 155)

Sin embargo, se pudo observar que discutir los procedimientos en equipos o en parejas fue difícil para la mayoría de los alumnos, ya que frecuentemente sus discusiones se quedaban en la pregunta de quién tenía razón y quién no, pero no en argumentar sus respuestas. Esa observación coincide con lo que reportan Sadovsky, Napp, Novembre y Sessa (2005):

> “…los alumnos tienden a yuxtaponer sus opiniones a las de sus compañeros, sin confrontarlas verdaderamente, sin someterlas a discusión. Lograr la calidad de las puestas en común requiere todo un proceso en el cual se encuentran comprometidos tanto el docente como los alumnos.” (p. 21)

Al parecer, los alumnos no estaban habituados a la práctica de intercambiar y discutir ideas al interior de un equipo o en parejas sin que la maestra guíe esa discusión; al mismo tiempo, es probable que no se hayan previsto con suficiente profundidad las maneras en las que sería posible sostener estos intercambios sin arribar rápidamente a una conclusión.

Otras intervenciones importantes para propiciar la comparación fueron las de **hacer explícitos conceptos y procedimientos matemáticos**. Tales explicitaciones se hicieron a través de la expresión verbal, la expresión gestual o la representación gráfica.

En cuanto a la expresión verbal es importante recordar el contexto lingüístico de la implementación (la clase es en alemán y la lengua materna de los alumnos es el español), por lo cual se identificaron varias intervenciones vinculadas al uso del idioma y mediante las cuales se trataron de clarificar ciertos conceptos y procedimientos matemáticos. Entre ellas se destacan las siguientes:

- pedir a un alumno que tradujera alguna palabra al español
- animar a los alumnos a que contestaran en español
- pedir a un alumno que repitiera en español una idea que ya había expresado en alemán

A continuación, se presenta un ejemplo de cada una de estas intervenciones.

Como se mencionó en al capítulo 3, Metodología, la docente siempre hablaba alemán con los alumnos y hubo muchos momentos en los cuales, aunque se les había dicho a los alumnos que podían contestar en español, ellos dieron sus respuestas en alemán. Para asegurarse de que los alumnos realmente comprendieran algunos términos, en ocasiones la maestra les pedía que tradujeran alguna palabra al español, como lo muestra la siguiente interacción de la sesión 1:

M: (…) Entonces, aquí tenemos un resultado exacto. Y aquí (escribe "estimar" abajo del resultado estimativo) decimos que hicimos una estimación del resultado. Estimar (hace un gesto con la mano derecha para indicar que no es exacto) quiere decir que calculamos más o menos cómo podría ser el resultado. ¿Alguien sabe cómo se llama esto en español?

As: *Calcular, Estimar.*

M: *Estimar*, si averiguas más o menos (mismo gesto para indicar que no es exacto) cuánto te da, pero no de manera exacta.

(Sesión 1, intervención 59 – 61)

La docente animaba a los alumnos a contestar en español sobre todo cuando se daba cuenta de que un alumno tenía dificultades para expresar en alemán alguna idea. Esto fue el caso en el siguiente ejemplo de la sesión 7:

A Mateo le toca comparar si el cálculo 72'200 ÷ 4 de "más que", "menos que" o "igual que" 72'200 ÷ 8. Mateo elige "más que" (respuesta correcta).

M: ¿Por qué da más, Mateo? ¿Qué piensas?

Mateo: Porque aquí son cuatro niños… (se queda pensando)

M: Lo puedes decir en español.

Mateo: *Porque si tienes setenta y dos mil doscientos y se lo das a cuatro niños, es más que si lo das a ocho niños. Pero si es igual, ¿qué hago?* (Se refiere a qué hacer si encuentra un cálculo que da lo mismo que 72’200 ÷ 8)

M: ¿Ya encontraron una que da igual?

Mateo/Pablo: (Niegan con la cabeza.)

M: Sigan y vean si encuentran una que dé lo mismo. (Se refiera a que busquen un cálculo que de lo mismo que 72’200 ÷ 8.)

(Sesión 7, intervención 89 – 96)

Es interesante observar que algunos alumnos retoman esta intervención de la maestra y animan a sus compañeros a expresarse en español, como lo muestra el siguiente ejemplo de una interacción durante la sesión 6:

La maestra pide a los alumnos que comparen el cálculo 4 x 28’600 con el cálculo 8 x 14’300; Lucas contesta:

Lucas: Es lo mismo, porque el ocho… (Se queda pensando.)

Matías: *Dilo en español.*

Melisa: Lo puedes intentar en español.

M: (Asiente con la cabeza.)

Lucas: *Es lo doble de… catorce mil trescientos es veintiocho mil seiscientos (la maestra dibuja una flecha con x 2 de 14’300 a 28’600) y entonces como la mitad de ocho es cuatro (La maestra dibuja una flecha con ÷ 2 de 8 a 4) es igual.*

(Sesión 6, intervención 52 – 56)

Hubo otros momentos en los cuales un alumno pudo expresar bien su idea en alemán, pero la maestra le pidió que la repitiera en español para asegurar que sus compañeros entendieran lo que había dicho, como por ejemplo durante el juego en equipos que se hizo en la sesión 8:

A Alicia le toca comparar el resultado del cálculo 47’120 ÷ 13 con el resultado del cálculo 48’120 ÷ 12. Alicia lo pone en “igual a“ (respuesta errónea) y explica por qué:

Alicia: Es igual porque este factor (se refiere al dividendo 47’120) es más pequeño que este (48’120) pero este factor (se refiere al divisor 13) es más grande.

Juan: ¡Es un divisor no un factor!

Alicia: ¡Ah, ah, sí!

M: Explícalo otra vez en español, Alicia, para que todos entiendan lo que dijiste.

Alicia: Este divisor (se refiere al dividendo 47’120) es más chiquito que este (48’120) pero este (señala el divisor 13) está más grande. Entonces yo…bueno, ¿ya entendieron?

As: Sí.

Laura: *Como si pusieras del trece uno a siete para que queda… para que* (no se entiende en la grabación todo lo que dice, supongo que se refiere a que el divisor trece es uno más grande que el divisor original doce y que el divisor 47 (sin considerar los ceros) es uno más chiquito que el divisor 48.)

Alicia: *¡Aja!*

Adrián: *No, ¡está mal!*

(Sesión 8, intervención 165 – 173)

Además de las intervenciones vinculadas al uso del idioma, se pudieron identificar intervenciones **de expresión verbal** que apuntaban reformular lo dicho por un alumno, con el propósito de dejar más claro lo expresado, como en el siguiente ejemplo:

Marco explica por qué para el cálculo 11 x 6600 eligió que el resultado daría “menos que 100’000” (respuesta correcta).

Marco: Yo marqué menos porque no tomé seis mil seiscientos, sino siete mil, y once por siete mil da siete…, no, setenta y siete mil y eso es menos que cien mil.

M: Ok, es decir Marco redondeó el segundo número, dijo “ahh, seis mil seiscientos para que sea más fácil lo redondeo a siete mil, y veo que once por siete da setenta y siete, y los dos ceros setenta y siete mil, y veo que da menos.” ¿Qué equipos redondearon de manera diferente? Alicia.

Alicia: Yo lo hice de manera diferente: diez por seis da sesenta, me da sesenta mil.

M: Entonces, Alicia redondeó los dos números. En lugar de once dijo “con diez es más fácil”, y en lugar de seis mil seiscientos tomó seis mil, y dijo “me da sesenta mil y es mucho menos que cien mil.”

(Sesión 1, intervención 97 – 100)

Aunque este tipo de intervención ayudó a destacar una idea expresada por algún alumno (en este caso, un procedimiento), uno de los riesgos fue que en varios casos se trataba no solamente de una reformulación de lo dicho por el alumno, sino que se agregó información que originalmente no había sido expresada por ese mismo alumno. Por ejemplo, en el fragmento de arriba, Alicia no mencionó que había redondeado el once al diez para que el cálculo fuera más fácil; sin embargo, la maestra agregó esta información retomando lo dicho por Marco, para subrayar que con este procedimiento se podía facilitar el cálculo.

Además de las intervenciones verbales, la docente, de manera espontánea, **usó diversos gestos para subrayar lo dicho de manera oral**. Estos gestos no habían estado previstos, pero los pudimos identificar en el análisis de los videos. Los más usados a lo largo de la secuencia fueron los siguientes:

- mover levemente de un lado a otra la mano derecha para indicar que una respuesta no es exacta, sino estimativa.

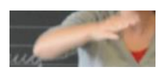


Figura 59: Gesto para indicar "no es exacto"

- hacer un movimiento hacia arriba con la mano derecha para subrayar la palabra “redondear hacia arriba”

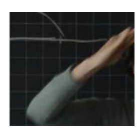


Figura 60: Gesto para la palabra "redondear hacia arriba"

- hacer un movimiento hacia abajo con la mano derecha para subrayar la palabra “redondear hacia abajo”

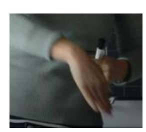


Figura 61: Gesto para la palabra “redondear hacia abajo"

- poner la mano derecha arriba de la mano izquierda y mover ambas hacia el centro para subrayar la palabra “compensar”

Figura 62: Gesto para la palabra "compensar"

- dibujar un círculo para respresentar la palabra “redondear”

Figura 63: Gesto para la palabra "redondear"

El primer gesto se usó para apoyar la comprensión del concepto de “cálculo estimativo”, mientras que el segundo y tercero se usaron para apoyar la comprensión tanto del procedimiento (redondeo) como de las palabras que se usan en alemán para distinguir cuando el redondeo se hace “hacia arriba” (se incrementa la cantidad original) y cuando el redondeo se hace “hacia abajo” (se hace un decremento en la cantidad original). Es pertinente señalar que esa distinción no existe en el español. En lo que se refiere al gesto “compensar”, éste se usó cuando hubo una compensación, como por ejemplo cuando en la comparación entre dos multiplicaciones uno de los factores se duplicaba y el otro se dividía entre dos.

Los gestos también ayudaron a recordar el nombre de algunos procedimientos, como por ejemplo en “redondear”:

M: Bien. ¿Y quién se acuerda cómo llamamos a lo que hizo David? Melisa.

Melisa: Re… (Intenta, pero no se acuerda exactamente de la palabra)

M: (Hace un gesto de un círculo para “redondo” y le ayuda a decir bien la palabra. La misma semejanza que hay en español entre “redondo” y “redondear” también existe en alemán entre “rund” y “runden”.)

Melisa: Redondeó hacia arriba.

(Sesión 3, intervención 40 – 43)

La docente también usó ciertos gestos para explicar vocabulario no matemático que los alumnos no entendían o que no recordaban, como lo muestra el siguiente ejemplo:

La maestra está planteando un problema en alemán:

M: Es decir que estos seiscientos pesos los tiene en su alcancía y va a una juguetería donde quiere comprarse algunas cosas. Ve una pelota, ve un videojuego y ve una cuerda para saltar. (Adrián levanta la mano) ¿Adrián?

Adrián: ¿Qué es "Cuerda para saltar"?

M: (Actúa como si saltara la cuerda).

Adrián: *Cuerda para saltar.* (Dice la palabra en español como para asegurarse de haberla bien entendido.)

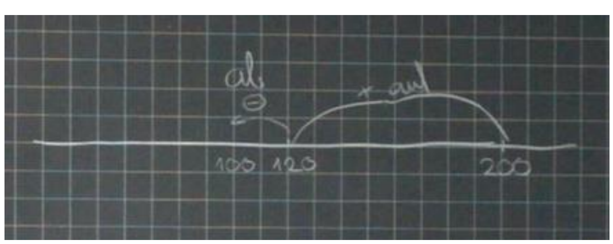
(Sesión1, intervención 5 – 8)

La relevancia de los gestos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de conceptos matemáticos ha sido destacada particularmente por Radford (2008), quien desde el marco de la Teoría de la Objetivación considera a los gestos como fuentes importantes no solamente del desarrollo lingüístico temprano, sino también del pensamiento abstracto. Si bien nuestro estudio no consideró inicialmente abordar los gestos descritos en las páginas anteriores, ni tampoco se inscribe en el marco de tal perspectiva teórica, sería interesante en otro momento, al margen de esta tesis, indagar con más detalle sobre cuáles de los gestos usados por la docente, especialmente los que se refieren a conceptos y a procedimientos matemáticos, fueron retomados por los alumnos para explicar o para justificar sus propios resultados y procedimientos.

Además de los gestos, identificamos diversas **representaciones gráficas** no previstas en la planeación de la secuencoa didáctica que la maestra utilizó para presentar y organizar cierta información matemática. Éstas tenían el objetivo de hacer explícitos conceptos y procedimientos de una manera más visual, vinculando lo expresado verbalmente con la representación gráfica. Estas representaciones se presentaron en todas las sesiones; sin embargo, se usaron más para introducir el concepto del redondeo, para explicar las relaciones entre multiplicaciones y entre divisiones, así como para ayudar a encontrar números compatibles en los problemas que involucran una división.

Por ejemplo, para aclarar una duda de Mateo acerca del redondeo, la docente recurrió a una recta numérica (Figura 64), como lo muestra la siguiente transcripción de un momento de la sesión 3:

> Al final de la sesión 3 la maestra retoma lo que había anotado durante la sesión anterior en un cartel sobre los diferentes tipos de redondeo: redondear hacia abajo, redondear hacia arriba. En el mismo cartel había puesto dos ejemplos: 120 que se redondea hacia abajo a 100 y 290 que se redondea hacia arriba a 300. Mateo parece confundirse y expresa su duda:
>
> Mateo: Yo no entiendo qué es redondear hacia abajo y redondear hacia arriba. (Algunos alumnos se ríen). Entiendo todo, pero eso (se refiere al redondeo hacia abajo y hacia arriba) no lo entiendo (posiblemente la confusión fue por cuestiones de idioma).
>
> M: Bueno, hacia abajo (gesto con la mano hacia abajo) es si tomas un número más pequeño, entonces de 120 le quitas algo, por eso hacia abajo, un número más pequeño. Si lo hiciera en una recta numérica (dibuja una recta en el pizarrón), si tengo el número 120 (escribe el 120 en la recta), si lo redondeo hacia abajo, me da cien (pone una flecha de 120 hacia la izquierda y escribe 100.) Entonces si redondeo hacia abajo tengo un número más pequeño (pone un signo menos en la flecha y escribe “hacia abajo”). Si redondeo el mismo número hacia arriba (dibuja una flecha saliendo del 100 hacia la derecha y escribe “hacia arriba”), agrego algo más (pone un signo más en la flecha), es decir voy hacia arriba a un número más alto y llegaría a doscientos. ¿Sí? Hacia abajo (gesto con la mano hacia abajo), hacia arriba (gesto con la mano hacia arriba)



auf = arriba
ab = abajo

Figura 64: Representación gráfica: Recta numérica

También se usó otra representación gráfica para explicitar las relaciones entre dos multiplicaciones o dos divisiones: la docente recurrió a una representación con flechas, misma que los alumnos ya conocían de la resolución de problemas de proporcionalidad (Figura 65).

		Número de paletas	Precio		
	· 2	1	$ 4	· 2	
· 12		2	$ 8		· 12
		12	$ 48		

Figura 65: Representación gráfica de factores internos

En la siguiente imagen se representa una comparación entre cálculos en el cual uno de ellos fue 8 x 14’300. En la columna izquierda se anotó otro cálculo (7 x 14’300) que da menos que 8 x 14’300, en medio va uno (4 x 28’600) que da lo mismo y en la columna derecha se anotó uno (8 x 15’300) que da más. Las flechas con los signos y números representan las diferencias entre los factores de un cálculo y los factores del otro cálculo. El signo “menos” del factor 8 al factor 7 en la columna de la izquierda, por ejemplo, indica que uno de los factores es uno menor que el otro, mientras que el otro es igual (representado por la flecha con el signo “igual”), por lo que también es menor el producto.

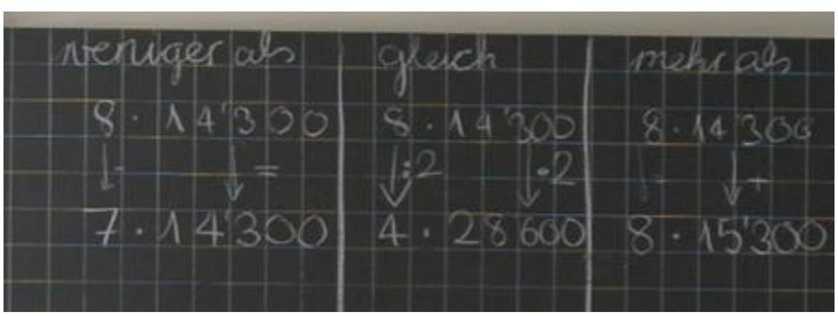
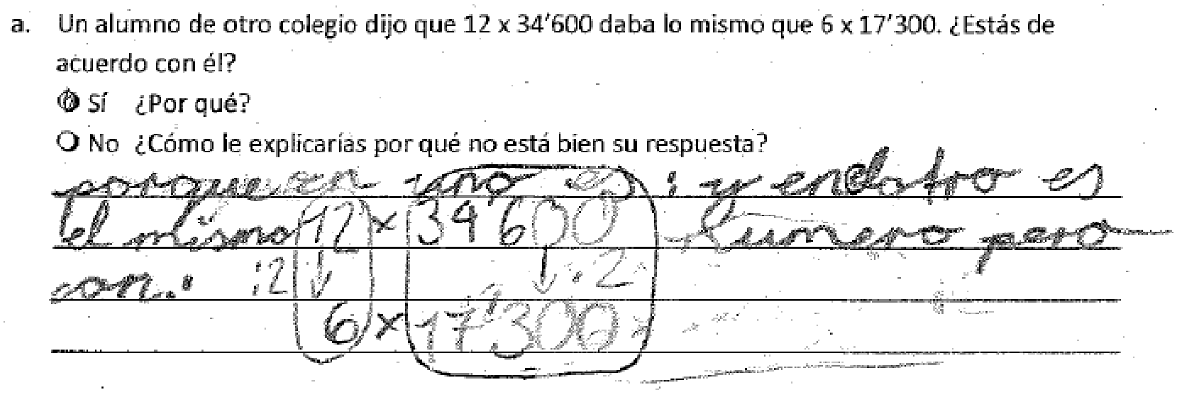


Figura 66: Representación gráfica con flechas: Relaciones multiplicación

Llama la atención que esta manera de representar gráficamente las relaciones entre multiplicaciones y entre divisiones fue retomada también por los alumnos para justificar o para explicar una respuesta o un procedimiento, como por ejemplo por Melisa en la evaluación 2:


a. Un alumno de otro colegio dijo que 12 x 34'600 daba lo mismo que 6 x 17'300. ¿Estás de acuerdo con él?

Sí ¿Por qué?

No ¿Cómo le explicarías por qué no está bien su respuesta?

porque en uno es : y en el otro es el mismo 12 × 34'600 número pero con : 2 ↓ ↓ · 2

6 × 17'300

Figura 67: Representación gráfica con flechas (Melisa)

Otros alumnos recurrieron a una representación parecida cuando explicaron una relación entre dos cálculos en el pizarrón; aunque no dibujaron las flechas, hicieron un movimiento con la mano marcando la dirección de un número al otro, como para representar una flecha.

Es importante mencionar que las intervenciones para **hacer explícitos conceptos y procedimientos matemáticos,** dependiendo del momento en el cual se aplicaron**,** no solamente contribuyeron en la comparación de procedimientos, sino también en la sistematización e institucionalización de saberes matemáticos, como se mostrará en los próximos apartados.

6.2 Intervenciones para propiciar el análisis de los errores

Para propiciar el análisis de los errores se recurrió sobre todo a las siguientes intervenciones:

- promover la presentación y discusión de diferentes procedimientos y respuestas
- pedir la justificación de las respuestas.

Como estas intervenciones están estrechamente relacionadas entre sí las analizaremos de manera conjunta.

Hubo momentos en la secuencia en los cuales la docente tomó decisiones sobre el orden de presentación de los resultados por parte de los alumnos. En algunos casos en los que había identificado alguna respuesta errónea, manteniendo la intertidumbre y sin ninguna pista acerca de que era una respuesta incorrecta, invitó a los alumnos autores de dicho error a mostrar primero su producción. Este tipo de intervención está sustentada en considerar los errores como la manifestación de un conocimiento adquirido anteriormente, como se precisó en el marco teórico. En el siguiente ejemplo, tomado de una interacción que tuvo lugar en la primera sesión de la secuencia, la maestra solicitó, en primer lugar, que justificaran su respuesta los alumnos cuyo resultado había identificado como equivocado. Aunque no se analizó en qué consistió el error, la docente no calificó como "bien" o "mal" la respuesta, sino que retomó lo expresado por una alumna y después pidió a quienes no estaban de acuerdo que dieran su opinión. Veamos en el extracto siguiente de qué manera se mantiene la incertidumbre y son los propios alumnos los responsables de expedirse acerca de la anticipación.

M: Vamos a ver el primer problema (11 x 6600 da menos/más que 100'000. La respuesta correcta es "menos que 100 000").
Hagamos como una votación. ¿Qué pareja marcó la respuesta "menos que cien mil"? (7 parejas levantan la mano). ¿Qué equipo marcó que da más? (3 parejas levantan la mano).
Y ahora, justifiquen. Primero los que dijeron que da más. ¿Qué equipos dijeron que da más? (Levantan otra vez la mano, un grupo cambia de opinión). Ok, los dos grupos que…

Cuidado, no porque son menos tienen que estar mal, vamos a ver…

Adrián, Melisa (un equipo), Pedro, Emma (otro equipo), ¿Por qué dijeron que da más que cien mil? Intenten convencer a los demás (la maestra se queda esperando, ninguno de los alumnos mencionados contesta). Explíquennos a todos. ¿Qué pensaron?

Melisa: Es que es un número grande por otro número grande y después redondeé y después…

M: ¿Qué redondeaste?

Melisa: (Hay unos alumnos que se ríen y platican, la maestra les llama la atención). Ya no sé.

M: Entonces, retomo dos cosas: Melisa dice que tiene un número grande y otro número bastante grande y por eso tiene que dar más. Pedro y Emma, ¿qué pensaron ustedes? ¿Igual como Melisa, que son números grandes?

Emma: Sí…

M: Melisa también dijo que redondearon…

Vamos a los equipos que dijeron que da menos. Adrián.

(Sesión 1, intervención 82 – 92)

También en el siguiente ejemplo se puede observar que la docente no calificó la respuesta como correcta o incorrecta, sino que invitó a los alumnos a dar su opinión y a justificarla, preguntándoles quién estaba de acuerdo con Alicia y quién no. Nuevamente podemos identificar este tipo de respuestas como inscriptas en el rol brousseauniano de devolución:

Laura retoma una explicación de Alicia para justificar por qué opina que el cálculo 47’120 ÷ 13 da lo mismo que 48’120 ÷ 12 (respuesta errónea)

Laura: *Como si pusieras del trece uno a siete para que queda… para que* (no se entiende en la grabación todo lo que dice, parece que se refiere a que el divisor 13 es 1 más grande que el divisor original 12, y que el divisor 47, sin considerar los ceros, es 1 menor que el divisor 48.)

Alicia: *¡Aja!*

Adrián: *No, ¡está mal!*

M: Pregunta: ¿Quién está de acuerdo con Alicia? Levanten la mano. (Levantan la mano José y Pablo.)
¿Quién no está de acuerdo con Alicia? (Levantan la mano Adrián y Pablo.)

Emma: *Yo estoy indecisa.*

Adrián: *¿Puedo explicar?*

M: Vas Adrián. Puedes hacerlo en español.

Adrián: (Se levanta y va al pizarrón, Alicia sigue enfrente del pizarrón.) *Está mal, porque si tú* (le habla directamente a Alicia) *tienes trece niños, pero tienes cuarenta y siete lápices…*

Emma: *¡Ah, está mal!*

Adrián: *…tienes menos lápices y más niños entonces, entonces cada niño va a tener menos lápices.*

Juan: *¡Ah sí, cierto!* (Adrián se sienta, Alicia se queda viendo el pizarrón.)

(Sesión 8, intervención 171 – 182)

El siguiente ejemplo de la sesión 8 muestra cómo la docente pide a una alumna que justifique su desacuerdo con la respuesta de uno de sus compañeros; asimismo, se identifica cómo promueve la presentación y discusión de diferentes procedimientos y respuestas. Al resumir las diferentes opiniones de dos alumnos, sin decir cuál de las dos era la correcta, la maestra los invitó a que discutieran esos diferentes puntos de vista:

A Matías le toca comparar el cálculo 47’120 ÷ 12 con el cálculo 48’120 ÷ 12. Primero, lo pega en la columna “menos que”, después lo cambia varias veces de lugar y, finalmente, lo deja en “más que”.

Matías: *Creo… que como es… cuarenta y ocho y este es cuarenta y siete, tú* (maestra) *dijiste que si uno de estos números es menos que ese, es más porque…* (Algunos alumnos asienten con la cabeza, otros no.)

Emma: No, no estoy *de acuerdo.*

M: ¿Por qué no, Emma? Ven al pizarrón y explícanos.

Emma: Creo que da menos porque este (señala el 47’120) es un número más pequeño que este (señala 48’120), pero este (señala el divisor 12) es lo

	mismo, pero creo que como este (47’120) es más pequeño tiene que ir en menos.
M:	Entonces, tenemos dos opiniones, voy a resumir las dos: Emma dice, si el primer número, es decir si el dividendo es más pequeño, el resultado también va a ser más pequeño. Matías dice: No, si el primer número, si el dividendo es más pequeño, el resultado va a ser más grande. Blanca.
Blanca:	Opino lo mismo que Emma, porque, tienes lápices y los repartes al mismo número de personas, doce, pero tienes menos lápices, entonces da menos porque tienes menos cosas.
Emma:	Emma está bien.
M:	Otras opiniones.
As:	No.
M:	¿De acuerdo Matías?
Matías:	Sí.

(Sesión 8, intervención 153 – 163)

En los ejemplos anteriores se puede observar que la docente tomó la producción que no era correcta como punto de partida para generar una discusión sobre las respuestas, lo cual permite que los alumnos identifiquen los errores y discutan en torno a ellos. De esta manera se posibilita que los alumnos tengan herramientas de control, como dicen Sadovsky y otros (2005):

> “Mientras que el error sea sinónimo de anormalidad, de falta, de tiempo perdido, aquel que produce uno va a tratar de disimularlo y aquel que es responsable de la enseñanza va a tratar de impedir que aparezca. Sin embargo, si el error es discutido y analizado –con sumo respeto– por la clase y se explicitan cuáles son las concepciones erróneas que llevaron a producirlo, se brindará a los alumnos herramientas de control.” (p. 22)

6.3 Intervenciones para propiciar la sistematización de la producción matemática

En este apartado revisaremos con más detalle las intervencioens ligadas a los procesos de institucionalización, recuperando algunas de las intervenciones que se presentaron en los apartados anteriores:

- pedir que se justificaran las respuestas
- promover la presentación y discusión de diferentes procedimientos y respuestas
- hacer explícitos conceptos y procedimientos matemáticos a través de la representación gráfica y de expresiones verbales y gestuales

Del mismo modo como en el apartado anterior las analizaremos de manera conjunta por estar muy vinculadas entre sí. En el apartado 4.3.1 ya habíamos mencionado la representación gráfica en la que se usan flechas para ilustrar las relaciones entre multiplicaciones y entre divisiones. Esta intervención ayudó en varios momentos de la secuencia a sistematizar la producción matemática. A continuación, se da un ejemplo, que la maestra hizo en el pizarrón, de esta representación entre dos divisiones. Las flechas con los signos y los números representan los cambios de un dividendo al otro, así como los cambios en el cociente, y ayudan a sistematizar que si se divide o se multiplica el dividendo por algún número (dejando el divisor intacto), el cociente se divide o se multiplica por ese mismo número:

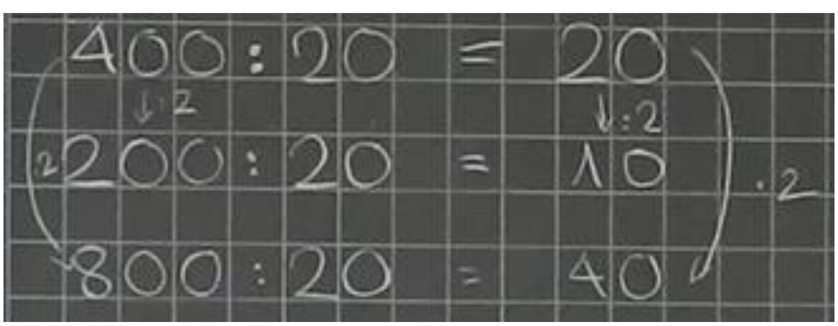


Figura 68: Representación gráfica con flechas: Relaciones división

Además, se identificó otra intervención con el mismo objetivo de la sistematización: **adaptar el grado de complejidad** de los problemas. Podríamos decir que la docente gestionó las variables didácticas en el momento de la clase al darse cuenta de que con los ejemplos previstos los alumnos no entendían el problema. Esto fue el caso, por ejemplo, en las relaciones entre divisiones que, para algunos alumnos, como se reportó anteriormente, resultaron complejas. En la Figura 69 se muestra el cálculo 72’200 ÷8. La maestra preguntó qué iba a pasar con el cociente si se multiplicaban el dividendo y el divisor por 4. Al parecer, la magnitud de los números no permitió a algunos alumnos contestar la pregunta. Por ello, la docente puso un ejemplo más sencillo: 400 ÷ 20 = 20 en comparación con 100 ÷ 5 = 20, lo cual dio oportunidad a los alumnos de identificar que el resultado de una división se mantiene, si el dividendo y el divisor se multiplican por el mismo número. La constatación de esta relación con números más sencillos ayudó a los alumnos a reutilizar lo aprendido en problemas con números más complejos. Esta intervención se puede considerar como otra intervención de devolución en tanto también genera que el alumno tenga la responsabilidad de hacerse cargo del problema que se le propone.

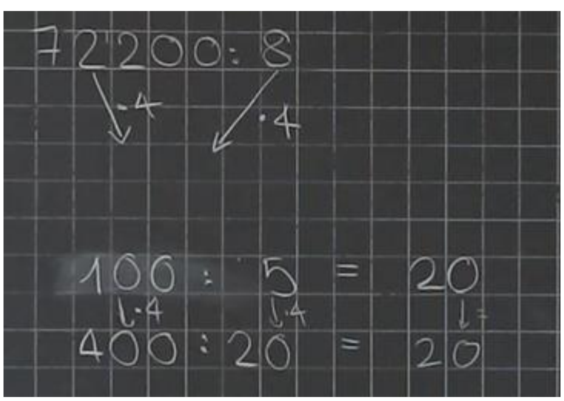


Figura 69: Adaptar grado de dificultad

En resumen, algunas intervenciones anteriormente presentadas que ayudaron a promover la presentación y comparación de resultados, en otros momentos de la secuencia ayudaron también a propiciar la sistematización de la producción matemática. Aparentementa, además, la gestión de las variables didácticas aportó a que los alumnos pudieran transferir lo aprendido en problemas con números sencillos a problemas con números más complejos. Como ya fue mencionado anteriormente, todas estas intervenciones se pueden considerar como elementos que encaminaron la progresiva institucionalización de los saberes matemáticos.

La docente se apoyó también en la **escritura colectiva de carteles** con el objetivo de sistematizar conocimientos matemáticos como, por ejemplo, las diferentes maneras de redondear o las relaciones que se pueden establecer entre dos multiplicaciones o entre dos divisiones. Identificamos tres formas diferentes de llevar a cabo esa institucionalización:

- La maestra guía la discusión en plenaria; es ella quien formula preguntas a los alumnos y quien decide qué se anota en el cartel.
- En parejas los alumnos escriben notas según las indicaciones de la maestra, después le dictan lo que quieren que apunte en el cartel, de tal manera que entre todas las parejas se van haciendo aportaciones. La maestra escribe lo que le dictan los alumnos, haciendo algunos ajustes o precisiones.
- En equipos los alumnos escriben sus propios carteles, según instrucciones de la maestra y, una vez terminados, los presentan a todo el grupo.

El dictado al maestro es un tipo de situación didáctica analizado y promovido para la enseñanza de las prácticas del lenguaje. Existen escasos estudios que han analizado las condiciones didácticas de este tipo de situaciones para la enseñanza de las matemáticas. Sancha (2017) analiza en su tesis situaciones de dictado en 5° grado sobre las fracciones. Señala la necesidad de seguir estudiando con mayor profundidad este tipo de intervenciones para la enseñanza escolar de esta disciplina. A continuación, analizaremos algunos ejemplos de estas intervenciones en nuestra secuencia.

El primer caso tuvo lugar, por ejemplo, en la segunda sesión cuando se registraron las diferentes formas de redondear (redondear hacia arriba/redondear hacia abajo).

En la siguiente transcripción se pueden identificar dos maneras de guiar estrechamente la elaboración del cartel. Primero, la docente les hizo a los alumnos preguntas cerradas, como por ejemplo "¿Es decir redondear hacia arriba o hacia abajo?" Segundo, ella misma propone los ejemplos y decide qué se anota en el cartel, así como la forma de hacerlo.

M: (…) Entonces, redondear… y vimos que hay dos posibilidades: podemos redondear hacia arriba (lo anota en el cartel), por ejemplo, si les doy un número como ciento veinte (lo anota en el cartel) para que sea más fácil calcular con este número. ¿Cómo podrías redondearlo, Adrián?

Adrián: ¿Redondear o redondear hacia arriba?

M: Tú decide, ¿qué harías?

Adrián: Cien.

M: (Anota redondear hacia abajo) ¿Por qué no redondearías hacia arriba este número?

Adrián: Porque es más fácil redondear hacia abajo.

M: Ok, entonces tú dices que ahí redondearías más bien hacia abajo. ¿También porque está más cerca? ¿O porque es más fácil? (La maestra quiere destacar que no se trata solamente de hacer más fácil el cálculo, sino que también hay que cuidar no alejarse demasiado de los números originales.) ¿Y si por ejemplo te doy dos cientos noventa? ¿Qué harías con este número, Heidi?

Heidi: Trescientos.

M: Trescientos, ¿es decir redondear hacia arriba o hacia abajo?

Heidi: Hacia arriba.

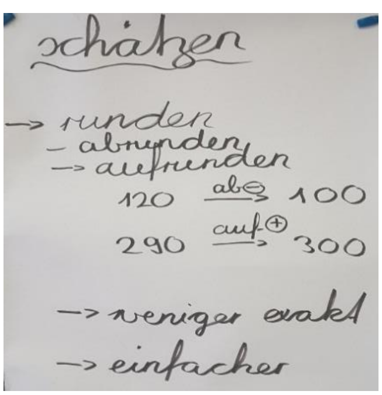
M: Ok, entonces aquí tenemos un ejemplo para redondear hacia abajo y aquí uno para redondear hacia arriba (Anota los dos ejemplos y las correspondientes palabras).

Y, ¿qué nos ayuda eso, si redondeamos números? ¿O cuándo podemos hacer eso, Matías?... ¿Cuándo podemos redondear? … ¿Cuándo te

	ayuda si te doy un cálculo con doscientos noventa y dices: “Ah, pues tomo trescientos”? ¿Por qué?
Matías:	Porque no es… porque son como diez más y…
M:	Ok, así que no es mucho más o mucho menos, es casi lo mismo y ¿Melisa?
Melisa:	Lo puedes usar en más y en por y así es fácil… es menos exacto, pero (En la grabación no se entiende lo que dice)
M:	(anota “menos exacto” en el cartel) Ok, Melisa dijo dos cosas: Eso (señala el ejemplo 10 x 7000 que está en el pizarrón y que son los números redondeados para estimar el cálculo 11 x 6600 que se resolvió antes de elaborar el cartel) es menos exacto que si lo calcularíamos de manera exacta, pero es mucho más fácil (anota “más fácil”). Y la vez pasada dijimos que hay situaciones donde no es importante que calculemos el resultado exacto. (…)

(Sesión 2, intervención 50 – 65)

En esta primera variante parece que el momento de institucionalización sobre el “redondeo” a través de la elaboración de un cartel ayudó a los alumnos, ya que a lo largo de la secuencia los alumnos recurrieron no sólo al uso de este procedimiento, sino que también lo nombraron usando los mismos términos que quedaron plasmados en el cartel. Sin embargo, en esta intervención podemos identificar el riesgo de que, debido a la manera en que se llevó a cabo la gestión, los carteles no representen realmente lo que es importante para los alumnos, sino lo que es relevante para la maestra.



<u>estimar</u>

→ redondear
→ redondear hacia abajo
→ redondear hacia arriba

120 $\xrightarrow{\text{abajo -}}$ 100

290 $\xrightarrow{\text{arriba +}}$ 300

→ menos exacto
→ más fácil

Figura 70: Cartel de institucionalización "schätzen" con traducción

A diferencia del ejemplo mencionado, en la sesión 9 se pudo observar la segunda variante de la elaboración de carteles: la maestra dividió el grupo en parejas y les pidió que anotaran lo más importante de lo que habían aprendido "el día anterior y la semana pasada" (se refiere a los ejercicios relacionados a la comparación de cálculos), para luego hacer un cartel entre todos. Después de la fase de escritura en parejas les propuso que le dictaran lo que querían que se apuntara en el cartel. En el siguiente fragmento de clase se presentan algunas aportaciones de los alumnos que la docente anotó en el cartel, tal como los alumnos las dictaron (a excepción de las expresiones en español, pues la maestra las sustituyó por el alemán). Asimismo, se presentan intervenciones de la maestra en las que pide precisiones o correcciones por parte de los alumnos antes de escribir lo que le dictan:

M: Bien, quisiera… (Toca una campanilla para que todos guarden silencio.) Quisiera que me dicten lo que apuntamos en el cartel. Es decir, díganme qué anotaron, qué consideran importante respecto a estos ejercicios que resolvimos ayer y la semana pasada. Me lo pueden decir en español, por el momento lo anoto en alemán, pero si alguien quiere, después lo puede anotar en español.

Emma: ¿Con una multiplicación o con una división?

M: Empieza con lo que tú quieras. ¿Con qué empiezas? (Emma pasa la hoja con sus notas a Heidi.)

Heidi: *Ok, si tu segundo número es mayor, tu resultado es menor* (Lee lo que habían anotado Emma y ella).

M: Perdón, un momento. ¿Hablas de la división o de la multiplicación?

Heidi: *División.*

M: Ok, si… (Empieza a escribir en el cartel. Pone un título "división" y lo que le dicta Heidi.)

Heidi: Si tu segundo número es mayor, tu resultado es menos.

M: Alguien me puede explicar ¿por qué esto es así? Con un ejemplo… ¿Por qué es así? Blanca.

Blanca: Porque si tienes más niños e igual de lápices para repartir cada uno recibe menos.

M: Ok. Aquí, el segundo número serían los niños a quienes repartes. Y Blanca dice si tengo más niños a quienes reparto algo, cada uno recibe menos. Bien. ¿Alguien se acuerda cómo llamamos al segundo número en la división? Alicia. (Anota el ejemplo que dio Blanca.)

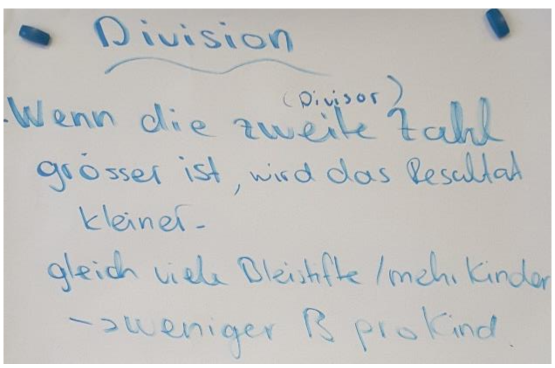
Alicia: (Busca en los carteles que están pegados en el salón). ¿Factor?

M: ¿En la división?

Alicia: ¿Dividor? (Esta palabra no existe en alemán; la palabra correcta sería ”Divisor”)

M: Divisor (Corrige a Alicia y escribe divisor en el cartel, después de “segundo número”) Ok, y el ejemplo, Blanca lo dice con lápices: Aquí tenemos el mismo número de lápices repartidos a más niños y da menos lápices por niño (Anota el ejemplo en el cartel.) Bien, ¿Qué más acerca de la división? Otros equipos anotaron cosas diferentes. O si no lo apuntaron, piénsenselo ahorita, ¿Qué más podemos anotar? Alicia.

(Sesión 9, intervención 50 – 64)



División

- Si el segundo número (divisor) es más grande, el resultado se hace más pequeño.

mismo número de lápices/más niños

→ menos lápices por niño

Figura 71: Cartel de institucionalización "relaciones división" con traducción

Después de esta interacción se agregaron más puntos que dictaron los alumnos: primero Alicia dictó lo que pasa si disminuye el dividendo y aumenta el divisor. La maestra la ayudó haciendo preguntas para que Alicia precisara el vocabulario matemático, ya que había confundido con los términos factor, dividendo y divisor:

Alicia: Si tienes el primer factor más chiquito…

M: ¿Estás en la multiplicación?

Alicia: Ah, no, si tienes el primer divisor, no… si tienes el divisor más grande y el… (Busca en el cartel) dividendo más pequeño no da el mismo resultado que el cálculo original.

M: Tú, dices si el dividendo… ¿Lo puedes repetir? ¿Es más grande o más pequeño?

Alicia: Si el dividendo es más pequeño y el divisor más grande, no da el mismo resultado.

M: Entonces, por ejemplo, como aquí (señala el cálculo 47’120 ÷ 13 en comparación con 48’120 ÷ 12)

Alicia: ¡Aja!

(Sesión 9, intervención 65 – 71)

Para darle más importancia a este ejemplo de Alicia, la maestra recordó las dificultades que aparecieron en la comparación del cálculo 47’120 ÷ 13 con 48’120 ÷ 12:

M: Alicia dice: Si el dividendo es más pequeño y el divisor más grande, no da el mismo resultado. En este cálculo, en los dos grupos de ayer hubo discusiones.

As: ¡Sí!

M: ¿Por qué hubo discusiones? ¿Se acuerdan? Porque algunos lo pusieron en medio (se refiere a la columna de “igual a”, pega el cálculo ahí.) ¿Se acuerdan por qué algunos, al principio dijeron que daba lo mismo? Carla.

Carla: (No se entiende bien lo que dice en la grabación.)

M: Exacto, algunos ayer dijeron, aquí hice más uno y acá menos uno (pone flechas con de los números originales y los números del cálculo que se comprar) y da lo mismo. Y ahora dice Alicia: No, yo aprendí que no da lo mismo. ¿Podemos, en lugar de solamente anotar que no da lo mismo, decir si da menos o más? José.

José: Da menos.

M: ¿Por qué da menos?

José: Porque el dividendo es menos y el divisor es más. Si tienes más niños y menos lápices cada uno de los niños recibe menos.

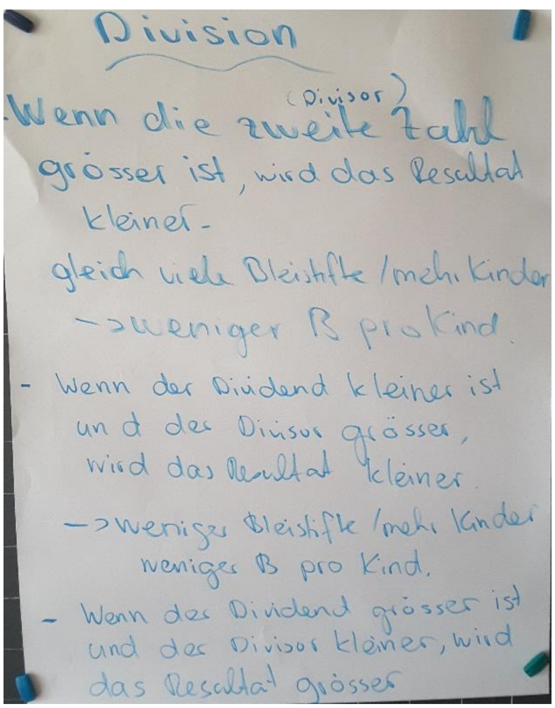
M: Bien, entonces José explica con el mismo ejemplo. (Anota el ejemplo y la explicación en el cartel.) José dice: Aquí tenemos menos lápices y más niños. Por eso da… ¿Da qué Pablo? ¿Menos lápices por niños o más lápices por niño? (Le solicita a Pablo que conteste porque lo ve distraído.)

Pablo: Mhhh, menos.

M: Menos. Bien, ¿algo más que podríamos anotar acerca de la división? (Melisa levanta la mano) Melisa.

(Sesión 9, intervención 72 – 82)

Después se agregaron las propuestas de Melisa y de Lucas. Melisa dijo, apelando al contexto situaciona: “Y si tienes lo contrario, si tienes más en el primero y menos en el segundo, tienes más porque tienes más cosas que dar y menos a quienes repartir.” Lucas expresó la misma idea usando términos matemáticos: “Si el dividendo es más grande y el divisor más chiquito no da lo mismo.” En la Figura 72 se ve la versión final del cartel en el cual se anotaron las relaciones entre dos divisiones.



<u>División</u>

- Si el segundo número (divisor) es más grande, el resultado se hace más pequeño.

mismo número de lápices/más niños

→ menos lápices por niño

- Si el dividiendo disminuye y el divisor aumenta, el resultado disminuye

→ menos lápices/más niños

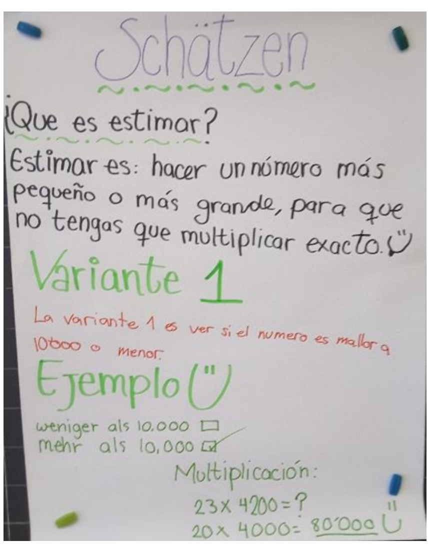
menos lápices por niño

- Si el dividendo aumenta y el divisor disminuye, el resultado aumenta.

Figura 72: Cartel de institucionalización "relaciones división" con traducción

La tercera variante de la elaboración de carteles se aplicó en la penúltima sesión cuando la maestra les dio la siguiente consigna a sus alumnos: “Su tarea de hoy es que, en equipos, escriban sus propios carteles, con lo más importante de lo que aprendieron acerca del tema estimación. Los carteles pueden ser en español, pueden poner ejemplos, pueden escribir oraciones, lo que ustedes consideran que es lo más importante acerca de estos diferentes problemas.” Les precisó que era importante que trabajaran en equipo, que primero tenían que hacer apuntes en una hoja, que le podían preguntar en caso de dudas y que al día siguiente iban a presentar sus carteles a los demás equipos del salón.

Mientras que los alumnos trabajaron en los equipos, la maestra pasó de un equipo a otro para apoyarles. Se pudo observar que varios equipos tenían dificultades para ponerse de acuerdo sobre qué era importante poner en el cartel y sobre la manera de expresarlo. Se identificó que, si bien hubo procedimientos que los alumnos habían podido explicar oralmente en otros momentos de la secuencia, explicarlo por escrito fue una tarea sumamente complicada para los alumnos. A continuación, se presentan dos de los carteles realizados por los alumnos. En el primero, elaborado por Gisela, Laura, Marco y Pedro, se puede observar que redujeron el uso de la estimación únicamente a la multiplicación.



<u>Estimar</u>

<u>¿Qué es estimar?</u>

Estimar es: hacer un número más pequeño o más grande para que no tengas que multiplicar exacto.

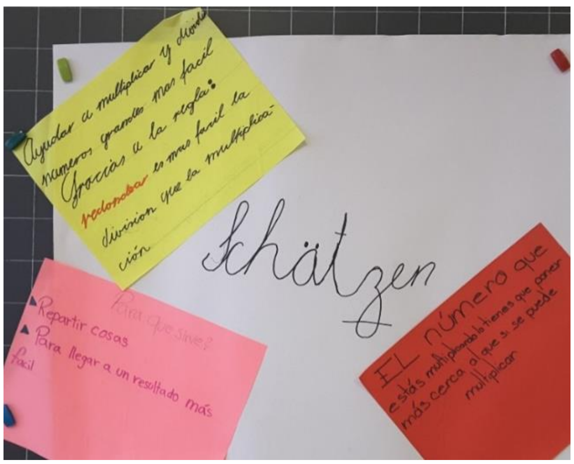
Variante 1
La variante 1 es ver si el número es mayor a 10’000 o menor:

Ejemplo
menos que 10’000 ❍
más que 10’000 ✓

Multiplicación:
23 x 4200 = ?
20 x 4000 = 80’000

Figura 73: Cartel 1 "Estimar" con traducción/transcripción

En el segundo cartel (escrito por Emma, Juan, Lucas y Matías), que se escribió en la misma sesión que el anterior y respondiendo a la misma consigna de “anotar lo más importante de lo que aprendieron acerca del tema estimación”, se identifican explicaciones que resultan confusas y que no parecen representar los conocimientos manifestados por estos alumnos en otros momentos. Escribieron, por ejemplo: “Ayudar a multiplicar y dividir números grandes más fácil. Gracias a la regla: Redondear es más fácil la división que la multiplicación” o “El número que estás multiplicando lo tienes que poner más cerca al que se puede multiplicar.



Estimar

Ayudar a multiplicar y dividir números grandes más fácil. Gracias a la regla: Redondear es más fácil la división que la multiplicación

¿Para qué sirve?

- repartir cosas
- Para llegar a un resultado más fácil

El número que estás multiplicando lo tienes que poner más cerca al que se puede multiplicar.

Figura 74: Cartel 2 "Estimar" con traducción/transcripción

Parecería que en esta última variante de elaboración de carteles hubiera sido necesario un acompañamiento más asertivo de la docente para que los alumnos cuenten con mejores herramientas para realizar la tarea exigida. Como ha sido mencionado en el apartado sobre la comparación de procedimientos, se manifiesta también en esta actividad que a los alumnos les faltó práctica de intercambiar y discutir ideas al interior de un equipo con cierta autonomía.

Al día siguiente de la elaboración de los carteles, los alumnos presentaron sus trabajos y, después, se organizó un momento para analizar las anotaciones realizadas. En este intercambio oral fue posible identificar que los alumnos contaban con conocimientos más detallados que los incluidos en los carteles. A la pregunta de si se podía usar la estimación solamente en las multiplicaciones, por ejemplo, varios alumnos dijeron sin dudar que no, que se podía usar “con todo”, refiriéndose a todas las operaciones.

Debido a la falta de práctica de los alumnos y de la docente en cuanto a las escrituras grupales, en la tercera variante de la elaboración de los carteles no se pudo lograr un producto escrito que reflejara los concocimentos matemáticos construidos a lo largo de la secuencia. Sin embargo, dichas producciones sirvieron como punto de partida para repensar y precisar de manera oral las ideas allí vertidas.

Aunque en este trabajo no nos hayamos enfocado en el análisis de la escritura en clase de matemáticas, es importante señalar la importancia de estas actividades como parte de los procesos de institucionalización. Coincidimos con Sancha (2017) quien considera que la escritura en las clases de matemáticas es indispensable y que por ello se debería incluir en la formación docente:

> “Lograr que los alumnos se apropien de la escritura al servicio de la adquisición de conocimientos – matemáticos, entre otros – constituye un objeto irrenunciable de la escolarización, pero difícilmente se hará posible si esta preocupación no se incluye en las diferentes instancias de formación docente y producción curricular.” (p. 190)

6.4 Comentarios

Como se pudo leer en los apartados anteriores, identificamos una variedad de intervenciones didácticas que contribuyeron a fomentar diferentes prácticas matemáticas, como la comparación y justificación de procedimientos y resultados, la identificación y el análisis de los errores y la sistematización de la producción matemática. Es importante mencionar que estas intervenciones no se usaron de manera aislada, sino que se complementaron unas con otras; por ejemplo, a la hora de la escritura colectiva tuvieron lugar también intervenciones relacionadas con la comparación y difusión de procedimientos, así como las intervenciones que pretenden hacer explícitos conceptos y procedimientos matemáticos. En cuanto a las prácticas matemáticas, estas también se traslaparon, ya que por ejemplo al momento de comparar y justificar procedimientos, también se sistematizaba la producción matemática.

Respecto a a las intervenciones relacionadas con las discusiones grupales y la escritura colectiva, observamos, por un lado, que en algunos momentos la maestra guió demasiado la discusión y que, por otro lado, los alumnos no contaron con herramientas suficientes dadas por la docente para organizar las discusiones al interior de un grupo. Por lo mismo, creemos que en próximas secuencias didácticas similares sería interesante que en el grupo se implementaran más actividades de escritura colectiva, así como de discusión grupal. Sadosvsky y otros (2005) proponen varias actividades con el objetivo de enseñar a los alumnos a estudiar matemáticas. Entre estas actividades se encuentran la elaboración de libros y carpetas, así como las puestas en común y el debate. En cuanto a la elaboración de carpetas comentan:

> "La carpeta es el espacio en el que se deja registro de las interacciones que se producen en la clase a propósito de un saber matemático. Tiene –o debería tener– un valor instrumental importante. Para que este valor instrumental pueda construirse, es necesario que sea el alumno quien elabore y decida cómo incluir en la carpeta los aspectos centrales del trabajo. El problema no se resolvería dictándole al estudiante aquello que el profesor

considera esencial. Lo esencial tiene que estar en la carpeta, pero elaborado por el alumno.” (p. 13)

Además de enfatizar la importancia del registro escrito en las carpetas, destacan también la importancia de la producción colectiva de conclusiones. Ambas estrategias ligadas al estudio de las matemáticas, desde el punto de vista de las autoras, están bajo la responsabilidad del docente:

> “…la obtención de conclusiones por parte de los alumnos no se da de manera espontánea. Los estudiantes, en general, no saben cómo hacerlo. Es tarea del profesor pensar una gestión de la clase que lleve a la obtención de conclusiones. Es él quien tiene que organizar el debate y las puestas en común y quien al finalizar, [sic] es responsable de promover la realización de una crónica y la elaboración de conclusiones a cargo de los alumnos, con una revisión colectiva.” (p. 21)

También Quaranta y Wolman (2003) afirman la idea de que las discusiones grupales tienen que ser sistemáticamente organizadas por el maestro:

> “Los momentos de discusión conforman una de las modalidades que adquiere la interacción entre pares en el aula: se trata de un intercambio entre los alumnos de la clase conducido por el docente. De ninguna manera constituyen “eventos naturales” de la vida en el aula: las discusiones no pueden quedar libradas a las contingencias de una clase o a la espontaneidad de los alumnos. Por el contrario, deben ser organizadas intencional y sistemáticamente por el maestro, a quien le corresponde un papel central e insustituible en su desarrollo.” (p. 189)

Consideramos que futuros estudios sobre la enseñanza del cálculo multiplicativo estimativo deberían incluir más explícitamente instancias de esta naturaleza.

CAPÍTULO 7
CONCLUSIONES

En el presente capítulo procuraremos poner en diálogo las preguntas de investigación con los datos que encontramos y que hemos ido interpretando a lo largo de este estudio. Discutiremos los procedimientos de los alumnos, las intervenciones didácticas y la elección de los problemas, para finalizar con algunas reflexiones sobre los alcances y límites del presente trabajo.

7.1 Conclusiones sobre los procedimientos de los alumnos

Una de nuestras preguntas de investigación fue la siguiente: ¿Qué conocimientos ponen en juego los alumnos durante la resolución de determinados tipos de problemas multiplicativos de cálculo estimativo?

En el capítulo 5 se expuso que pudimos identificar una diversidad de procedimientos, errores y dificultades a los que dieron lugar los problemas planteados.

Uno de los procedimientos más usados para resolver problemas que implican anticipar y encuadrar multiplicaciones fue el redondeo, mientras que para anticipar y encuadrar divisiones fue el de encontrar números compatibles. En los dos procedimientos pudimos identificar que, según las características de los problemas, los alumnos recurrieron a ajustar solamente uno de los números implicados o los dos. Para calcular los resultados de los cálculos con números redondeados, los alumnos utilizaron estrategias de cálculo mental como, por ejemplo, la de considerar solamente los dígitos de la izquierda más significativos.

En cuanto a los errores identificados, fueron más frecuentes los errores en las divisiones que en las multiplicaciones. En las multiplicaciones registramos con mayor frecuencia errores vinculados a la descomposición del cálculo, así como a la falta de control sobre las repercusiones del redondeo en el resultado, mientras que en los problemas que exigen anticipar o encuadrar divisiones hallamos dificultades relacionadas con el valor posicional y con las relaciones entre dos multiplicaciones y dos divisiones.

Respecto a los problemas que piden anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado, estamos en condiciones de afirmar que la comparación de divisiones resultó más compleja que la de multiplicaciones. En los problemas de multiplicación los alumnos compararon los factores de un cálculo con los del otro cálculo, para después establecer relaciones que les permitieran establecer conclusiones respecto al producto. Las dificultades se vinculaban justamente con estas relaciones. Mostramos que los problemas donde era diferente solamente uno de los factores, no causaron dificultad, mientras que donde ambos factores eran diferentes sí resultaron ser un reto, sobre todo porque los alumnos frecuentemente se confundieron entre las relaciones que son válidas para las multiplicaciones y las que lo son para las divisiones.

Para la resolución de problemas que implican una comparación de divisiones, de manera semejante a lo que hicieron en las multiplicaciones, los alumnos recurrieron a analizar las diferencias entre el dividendo y el divisor de un cálculo, con el dividendo y el divisor del otro cálculo para después establecer relaciones entre los dos cálculos. Les resultó más fácil establecer relaciones en problemas donde solamente era diferente el dividendo o el divisor, mientras que causaron más dificultad aquellos en los que eran diferentes ambos. Observamos que si bien los alumnos identificaron qué relación había entre el dividendo y el divisor de un cálculo y el otro (por ejemplo: “se dividió el dividendo entre dos y se multiplicó el divisor por dos”) se confundieron con los efectos que estas diferencias tenían sobre el resultado. Podemos resaltar que para facilitar el trabajo con dichas relaciones la maestra, aunque no estuviera previsto en el análisis *a priori*, promovió el uso de ejemplos con un contexto hipotético real de uso que ayudaran a los alumnos a interpretar las relaciones involucradas. La mayoría de los alumnos se apoyó en este recurso para resolver problemas que exigen una comparación de divisiones en varios momentos de la secuencia, a veces de manera espontánea y otras después de una invitación de la docente.

Se pudo observar también que durante la secuencia hubo alumnos que seguían con dificultades con las relaciones enseñadas, a pesar de haberlas institucionalizado a lo largo de varias sesiones, y a pesar de haber analizado que las relaciones entre multiplicaciones y entre divisiones no son iguales. Esto nos indica que establecer estas relaciones es efectivamente complejo, y que se necesita un trabajo continuo que permita que los conocimientos sobre ese aspecto se puedan consolidar.

Retomando las estrategias identificadas por Reys (1986) que presentamos en el apartado de los antecedentes, podemos afirmar que también los alumnos de nuestro estudio usaron la estrategia del “redondeo”, la de los “números compatibles”, así como la de los “dígitos de la izquierda” para resolver los problemas que les planteamos. También coincidimos con Cortés et al. (2005) quien afirma que la estrategia “dígito de la izquierda” se usa de manera “intuitiva” y correcta por la mayoría de los estudiantes. Además, en nuestro trabajo nos enfocamos en procedimientos que usan los alumnos para comparar dos cálculos, tema que no ha sido estudiado en ninguno de los trabajos expuestos en los antecedentes, pero que consideramos muy importante ya que tiene el potencial de promover el desarrollo del pensamiento algebraico en los alumnos

7.2 Conclusiones sobre las intervenciones didácticas

En el marco teórico mencionamos que Brousseau (1994), dentro de la TSD, estudia los roles del docente, dando una gran importancia a los roles de devolución e institucionalización. Estos aportes han sido puntos de partida para la anticipación de clases y nos sirvieron también para el análisis de las intervenciones de la docente. Nos enfocamos especialmente en analizar qué intervenciones de la docente propiciaron las prácticas matemáticas siguientes:

a) la comparación y justificación de procedimientos
b) la identificación y el análisis de los errores
c) la sistematización de la producción matemática

Identificamos diversas intervenciones que favorecieron los aspectos arriba mencionados, algunas más relacionadas con la devolución, otras con la institucionalización. Es importante mencionar que estas intervenciones están estrechamente relacionadas entre sí.

Para favorecer la comparación y justificación de procedimientos identificamos las siguientes intervenciones: promover la presentación y justificación de diferentes procedimientos y resultados, ya sea an parejas, en equipos y en la plenaria; pedir a los alumnos que justifiquen las resupuesta; hacer explícitos conceptos y procedimientos matemáticos a través de expresiones verbales, gestuales y gráficas. Estas intervenciones, dependiendo del momento en el cual se aplicaron, contribuyeron también en la sistematización e institucionalización de saberes matemáticos.

En cuanto a las intervenciones para propiciar el análisis de los errores se destacan las siguientes: promover la presentación y discusión de diferentes procedimientos y respuestas; pedir la justificación de las respuestas. En estas intervenciones pudimos identificar que la docente tomó producciones incorrectas como punto de partida para generar una discusión de las respuestas, lo cual favorece que los mismos alumnos identifiquen los errores y discutan en torno a ellos.

Como ya hemos mencionado, algunas intervenciones que contribuyeron en la comparación y justificación de procedimientos, así como en la identificación y el análisis de los errores, ayudaron a propiciar, en otros momentos de la secuencia, la sistematización de la producción matemática. Eso fue el caso, por ejemplo, con la intervención de pedir la justificación de respuestas, con la de promover la presentación y discusión de diferentes procedimientos y respuestas y también con la de hacer explícitos conceptos y procedimientos matemáticos. Además de estas intervenciones la docente se apoyó también en la escritura colectiva de carteles. Esta escritura se hizo de tres diferentes maneras:

- La maestra guía la discusión en plenaria; es ella quien formula preguntas a los alumnos y quien decide qué se anota en el cartel.
- En parejas los alumnos escriben notas según las indicaciones de la maestra, después le dictan lo que quieren que apunte en el cartel, de tal manera que entre todas las parejas se van haciendo aportaciones. La maestra escribe lo que le dictan los alumnos, haciendo algunos ajustes o precisiones.
- En equipos los alumnos escriben sus propios carteles, según instrucciones de la maestra y, una vez terminados, los presentan a todo el grupo.

En cuanto a las intervenciones relacionadas a la escritura de carteles para insitucionalizar saberes matemáticos, se pudo identificar une complejidad en dos aspectos: por un lado, en respecto a la exigencia que se presentó a la docente para guiar de manera provechosa las discusiones grupales, por otro lado, relativo a las exigencias hacia los alumnos para expresar sus conocimientos por escrito.

Es importante destacar que las intervenciones mencionadas en los apartados anteriores no se usaron de manera aislada, sino que se complementaron unas con otras; de la misma manera se traslaparon también las prácticas matemáticas; por ejemplo, en el momento de comparar y justificar procedimientos también se sistematizó la producción matemática. Fueron intervenciones que apoyaron a los alumnos a involucrarse en el trabajo matemático y a desarrollar ciertas formas de pensar y de justificar. No obstante, desde nuestro rol de investigadora advertimos la necesidad de ir enriqueciendo y transformando de manera paulatina algunas de esas intervenciones en nuestra propia práctica docente. Nos referimos en particular a las intervenciones relacionadas con la organización de las discusiones grupales y el sostenimiento de la incertidumbre de parte de la docente mientras que los alumnos participan y opinan. Creemos necesario profundizar en los aspectos de la gestión de la clase dirigidos a dar mayor oportunidad a los alumnos para que participen activamente en procesos de formulación y validación de procedimientos.

Otro tipo de intervenciones para las cuales identificamos, a partir de esta investigación, la necesidad de una mayor profundización son aquellas vinculadas a los momentos de insitucionalización en los cuales se busca generar de manera colectiva un registro escrito que sintetice los hallazgos y construcciones en torno a una o más clases. Reconocemos una tensión entre la necesidad de que los alumnos elaboren sus propias conclusiones y la intención de que los conocimientos producidos por los alumnos se acerquen a los saberes disciplinarias. Esta tensión ya había sido identificada por Sancha (2017) quien reconoce la necesidad de profundizar en futuros estudios sobre el dictado al docente en clases de matemáticas.

Como se expuso en los párrafos anteriores, encontramos una variedad importante de intervenciones didácticas. Sin duda, se podrían seguir identificando en las clases observadas en este estudio otras variedades de intervenciones. Sin embargo, por cuestiones de tiempo y de extensión del trabajo, nos hemos enfocado en las que ya se presentaron.

7.3 Comentarios sobre la pertinencia de la elección de los tres tipos de problemas para promover el desarrollo del cálculo estimativo en problemas multiplicativos

Como se planteó en el Capítulo 4, construimos una tipología de problemas de cálculo estimativo compuesta por nueve tipos de problemas; entre ellos se eligieron tres – por cuestiones de tiempo de la enseñanza y tiempo de la investigación – para plantearlos durante la secuencia:

- Anticipar si el producto/cociente es menor, igual o mayor a un número dado (Números dados potencias de 10 y no-potencias de 10)
- Encuadrar el producto/cociente entre números dados (Números dados potencias de 10 y no-potencias de 10)
- Anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado (El cálculo no dado no está resuelto)

Los problemas elegidos dieron lugar a una gran variedad de procedimientos y dificultades, como se expuso en el Capítulo 4. Sin embargo, a lo largo del análisis de los procedimientos y errores de los alumnos durante la secuencia, nos percatamos de que los problemas del tipo “Anticipar si el producto/cociente es menor, igual o mayor a un número dado” así como los del tipo “Encuadrar el producto/cociente entre números dados” dieron lugar al uso de los mismos procedimientos y conllevaron los mismos errores. Tomando esto en cuenta, nos preguntamos si sería más conveniente en futuras implementaciones trabajar únicamente con uno de los dos tipos de problema y, de esta manera, acotar la secuencia. Por otro lado, consideramos que trabajar el mismo contenido con diferentes tipos de problemas permite a los alumnos reutilizar los conocimientos aprendidos en diferentes contextos y, de esta manera profundizar los conocimientos, lo que justificaría seguir implementando los dos tipos de problemas.

Los problemas del tipo “Anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado” resultaron complejos y hasta cierto grado difíciles para los alumnos, pero también sumamente fructíferos para trabajar las relaciones que se pueden establecer entre dos multiplicaciones y entre dos divisiones. Consideramos que este tipo de problemas puede aportar al desarrollo del pensamiento algebraico, sobre todo en cuanto a temas de equivalencia entre dos expresiones y a la posibilidad de tratar relaciones entre expresiones sin exigir un resultado numérico. Sería pertinente revisar si sería más conveniente trabajar este tipo de problema antes que los dos anteriores, ya que si estos se resuelven con el redondeo también es necesario recurrir a las relaciones entre dos cálculos (el dado y el “redondeado”), como se había expuesto en el apartado 4.1. Sugerimos por lo tanto en futuras implementaciones de la secuencia estudiar si las estrategias de comparación entre cálculos se reinvierten en los otros dos tipos de problemas. Diversos trabajos señalan la ausencia en las prácticas escolares clásicas de situaciones que exijan comparar cálculos poniendo en juego un nuevo sentido, desde la prespectiva de los alumnos, del símbolo igual. En la escuela primaria el símbolo igual suele ser presentado para que los alumnos escriban a su derecha el resultado de un cálculo dado. Broitman y Castillo (2017) analizan que la presentación de problemas que exijan la comparación de cálculos desde el primer año de la escuela primaria posibilitaría evitar la reducción de los sentidos de este símbolo.

El presente estudio no pretendió indagar los posibles efectos que podría tener la implementación de la secuencia sobre el uso autónomo (sin que la docente lo proponga) que los alumnos pudieran hacer de la estimación en futuras clases de matemáticas, por ejemplo, para comprobar la validez del resultado obtenido de algún cálculo exacto. Aunque se pudieron observar algunos efectos al respecto, podemos hipotetizar que la inclusión explícita de problemas del tipo “Revisar la validez de resultados” y “Anticipar la cantidad de cifras de un producto/cociente” podría favorecer ese uso autónomo. Por lo mismo, sugerimos que se incluyan estos dos tipos de problemas en próximas implementaciones. Esto se podría hacer, por ejemplo, a través de problemas como los proponen, entre otras, Broitman (2011) y Saiz y Parra (2013). Broitman (2011) presenta un problema en el cual los alumnos, sin hacer la cuenta, tienen que marcar en una lista de cálculos los resultados que les parecen no ser correctos y escribir cómo se dieron cuenta de los errores. Por su lado, Saiz y Parra (2013) plantean un problema que implica anticipar el número de cifras, preguntando si, sin averiguar el resultado exacto se puede saber cuántas cifras tendrán los resultados de cálculos como, por ejemplo, 352 x 12 o 985 x 25.

Consideramos también que, además de desarrollar en la clase secuencias como la que aquí se presentó, convendría incluir algunos problemas de cálculo estimativo de manera cotidiana en ciertas actividades características de la clase de matemáticas; por ejemplo, anticipar resultados antes de calcular con un algoritmo o revisar la validez de resultados obtenidos con calculadora. Tal vez incluso ese tipo de prácticas, combinándolo con los tipos de actividades aquí implementados, podría tener efectos más profundos a largo plazo.

7.4 **Reflexiones finales**

Este trabajo, como lo mostraron los apartados anteriores, nos permitió indagar de manera detallada sobre el funcionamiento de la secuencia didáctica implementada. Queremos plantear algunos posibles aportes de este estudio a las aulas de la educación primaria.

Sabemos que, aunque el cálculo estimativo esté presente en algunos documentos curriculares y en propuestas didácticas, su uso real en las aulas es limitado. Nos parece de suma importancia continuar insistiendo en la necesidad de incluir actividades de cálculo estimativo en las clases habituales de matemáticas a lo largo de la educación primaria. La secuencia elaborada para esta investigación puede servir de punto de partida a maestros, así como a formadores de maestros, para implementar y enriquecer las actividades que se suelen proponer en las aulas.

Cabe recordar que aquellos estudios que desde la Didáctica de las Matemáticas apelan a la metodología de la Ingeniería Didáctica, buscan profundizar en el análisis detallado de las propuestas de enseñanza. En ese sentido, este trabajo podría constituir una fuente más para el diseño futuro de ingenierías didácticas y de esta manera abonar al mejoramiento de la enseñanza del cálculo estimativo. Asimismo, consideramos que el análisis documentado de los conocimientos y de las intervenciones es un aporte para el mejoramiento de las prácticas de enseñanza de las matemáticas, dado que contribuye al análisis de la complejidad de los procesos didácticos.

Hemos hecho hincapié en diversos momentos de la tesis en el doble rol de investigadora y docente. Consideramos que la oportunidad de distanciamiento de la propia práctica ha sido un ejercicio sin duda transformador para el ejercicio de la enseñanza. Por otra parte, como investigadora, frente a la necesidad del análisis de las propias intervenciones, se generó una exigencia de mayor profundización y cuestionamiento que si el docente hubiera sido un tercero que, aún desde una posición de colaborador de la investigación, podría haberse sentido cuestionado como docente al analizar con rigurosidad y honestidad las tensiones propias de objetivar y estudiar su rol. Debemos ser sinceros y reconocer que frente a esta tensión en algunos momentos ha trinufado el rol de investigadora y en otros el rol docente.

Una tensión que no quisiéramos dejar de señalar es la sucedida durante la implementación misma de la secuencia. Mientras desde el rol de investigadora los intercambios y debates eran promotores de material para el análisis, desde el rol docente primaba en algunos momentos la preocupación por la excesiva extensión de los tiempos y el riesgo de no lograr cumplir con el programa oficial de la institución.

Hemos detallado algunos aportes que consideramos se realizan desde esta investigación. Sin embargo, sabemos que quedan pendientes numerosas preguntas. Un aspecto que ya mencionamos en el apartado anterior es el del impacto que tendrá la implementación de la secuencia a largo plazo en las actividades matemáticas de los alumnos. Otro punto en que creemos necesario profundizar, es en cómo construir herramientas con los docentes para que puedan implementar de manera fecunda momentos de discusión grupal, así como situaciones de escritura colectiva, cuya complejidad ya hemos señalado. Tampoco investigamos en qué medida influye el bilingüismo en las producciones matemáticas de los alumnos. Además, sería importante, aunque ya existen algunas investigaciones al respecto, por ejemplo, la de Radford 2009, indagar con más detalle sobre el uso de gestos para explicitar procedimientos y sobre las representaciones gráficas que se utilizan en las clases de matemáticas.

Por último, lograr que los alumnos se apropien de procedimientos de cálculo mental estimativo debería constituir un propósito importante en la enseñanza a nivel primaria. Consideramos que la presente investigación es un primer paso, aunque pequeño, para lograr este objetivo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez, *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un equema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (págs. 33 - 60). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Ávila, A., & Waldegg, G. (1997). *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos.* Ciudad de México: Instituto Nacional para la Educación de los Adultos.

Bildungsdirektion des Kantons Zürich. (2010). *Lehrplan für die Volksschule des Kantons Zürich.* Zürich, Suiza: Lehrmittelverlag Zürich.

Broitman, C. (1999). La noción de obstáculo espistemológico: un problema didáctico. *Trabajo realizado para la Universidad de Buenos Aires. Seminario: Epistemología y Didáctica*. Buenos Aires.

Broitman, C. (2011). *Estrategias de cálculo con números naturales: Segundo ciclo.* Buenos Aires, Argentina: Santillana.

Broitman, C. (2012). *Adultos que inician la escolaridad: sus conocimientos aritméticos y la relación que establecen con el saber y con las matemáticas.* Tesis de Doctorado en Educación. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de la Plata.

Broitman, C. (2013). Introducción. En C. Broitman, *Matemáticas en la escuela primaria: números naturales y decimales con niños y adultos I* (págs. 9 - 46). Buenos Aires: Paidós.

Broitman, C., & Castillo, C. (2017). *Hacia la ampliación de sentidos del símbolo igual en los primeros grados de la escuela primaria. Informe de investigación (Manuscrito no publicado).* Argentina: Universidad Nacional de La Plata.

Broitman, C., & Kuperman, C. (2004). *Interpretación de números y exploración de regularidades en la serie numérica. Propuesta didáctica para primer grado: “La lotería”.* Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires. Facultad de Filosofía y Letras.

Broitman, C., Itzcovich, H., Novembre, A., Escobar, M., Grimaldi, V., Ponce, H., & Sancha, I. (2015). *Los matemáticos de 4°.* Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Santillana.

Broitman, C., Itzcovich, H., Novembre, A., Escobar, M., Grimaldi, V., Ponce, H., & Sancha, I. (2015). *Los matemáticos de 6°.* Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Santillana.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra, & I. Saiz, *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones* (págs. 65-94). Buenos Aires: Paidós.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cortés Flores, J., Backhoff Escudero, E., & Organista Sandoval, J. (2005). Análisis de estrategias de cálculo estimativo en escolares de secundaria considerados buenos estimadores. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 543 - 558.

Díaz Godino, J., Batanero Bernabeu, M., & Cañizares Castellanos, M. (1991). *Azar y Probabilidad: Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Editorial Síntesis, S.A.

Fierro, C., Fortoul, B., & Rosas, L. (1999). *Transformando la práctica docente: una propuesta basada en la investigación-acción.* Barcelona: Paidós.

Fregona, D., & Orús, P. (2011). *La noción del medio en la Teoría de Situaciones Didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemáticas.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Gálvez, G. (1994). La Didáctica de las Matemáticas. En C. Parra, & I. Saíz, *Didáctica de las matemáticas* (págs. 39 - 50). Buenos Aires: Paidós.

Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, É., ... Soto-Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [en linea]*, 9-40.

García, S. (2014). *Sentido numérico. Materiales para Apoyar la Práctica Educativa.* Distrito Federal, México: INEE.

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. (2004). *Diseño Curricular para la Escuela Primaria.* Buenos Aires: Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (2007). *Diseño Curricular para la Educación Primaria.* Buenos Aires: Gobierno de la Provincia de Buenos Aires.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (s.f.). Obtenido de Excale Ciclo 2010-2011: http://www.inee.edu.mx/index.php/bases-de-datos/bases-de-datos-excale/excale-00-ciclo-2010-2011

Kalman, J., & Rendón, V. (2016). Uso de la hoja de cálculo para analizar datos cualitativos. *magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 9 (18)*, 29 - 48.

Keller, B., Keller, R., & Diener, M. (2012a). *Mathematik 1, Arbeitshefte.* Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Keller, B., Keller, R., & Diener, M. (2012b). *Mathematik 2, Themenbuch.* Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Keller, B., Keller, R., & Diener, M. (2015a). *Mathematik 3, Themenbuch.* Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Keller, B., Keller, R., & Diener, M. (2015b). *Mathematik 4, Arbeitsheft, Grössen und Daten.* Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Keller, B., Keller, R., & Diener, M. (2015c). *Mathematik 4, Themenbuch.* Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Keller, B., Keller, R., & Diener, M. (2015d). *Mathematik 5, Themenbuch.* Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Keller, B., Keller, R., & Diener, M. (2016a). *Mathematik 6, Arbeitsheft, Grössen und Daten 1.* Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Keller, B., Keller, R., & Diener, M. (2016b). *Mathematik 6, Themenbuch.* Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Lerner, D. (2005). ¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración. En M. Alvarado, & B. M. Brizuela, *Haciendo Números* (págs. 147 - 197). España: Paidós.

Mason, J. (1995). *Rutas hacia el Álgebra.* Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Ministère de l'Éducation Nationale. (27 de agosto de 2015). *Programmes pours les cycles 2, 3, 4.* Paris: Ministère de l'Éducation Nationale.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. (2005). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Segundo Ciclo EGB/Nivel Primario.* Buenos Aires: Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología.

Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de las situaciones didácticas. En M. P. (Comp.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo del la EGB* (págs. 59 - 71). Buenos Aires: Paidós.

Parra, C. (1994). Cálculo mental en la escuela primaria. En C. Parra, & I. Saíz, *Didáctica de las matemáticas: Aportes y reflexiones* (págs. 219 - 272). Buenos Aires: Paidós.

Quaranta, M. E., & Wolman, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática: Qué, para qué y cómo se discute. En M. Panizza, *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB* (págs. 189-242). Buenos Aires: Paidós.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70(3)*, 111 – 126. Obtenido de Educational Studies in Mathematics.

Reys, B. (1986). Teaching Computational Estimation: Concepts and Strategies. *H. Shoen y M. Zweng, Estimation and Mental Computation, Yearbook, Iowa, NCTM*, 31-44.

Reys, R., Bestgen, B., Rybolt, J., & Wyatt, J. (1982). Processes Used by Good Computational Estimators. *Journal for Research in Mathematics Education, N° 13,*, 183-201.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En A. B. Humberto Alagia, *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática* (págs. 13-68). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sadovsky, P., Napp, C., Novembre, A., & Sessa, C. (26 de 8 de 2005). *Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio: La formación de los alumnos como estudiantes.* Buenos Aires: Secretaría de Educación del BCBA.

Saíz, I. (1995). ¿Confrontación o corrección? *La Educación en nuestras manos. Matemática, N° 4*, 3-7.

Saíz, I., & Parra, C. (2013). *Hacer Matemática 5.* Buenos Aires: Estrada.

Sampieri, R. H., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la Investigación.* México, D.F.: Mc Graw Hill.

Sancha, I. E. (2017). *Escrituras en las clases de matemática para explicitar, reorganizar y sistematizar lo aprendido: Análisis de una secuencia.* Tesis de Maestría. Maestría en Escritura y Alfabetización. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011: Guía para el Maestro. Educación Básica Primaria. Quinto Año.*

Secretaría de Educación Pública. (2015). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado.* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública. (2016). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado.* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública. (2016). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado.* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación, G. (2006). *Cálculo mental con números naturales: apuntes para la enseñanza. Coordinado por Susana Wolman.* Buenos Aires: Gobierno de la CIudad de Buenos Aires.

Segovia, I., & Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 499-536.

Segovia, I., & De Castro, C. (2007). *La Investigación en Estimación en Cálculo.* Obtenido de E-Prints Universidad Complutense Madrid.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E., & Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Síntesis.

Vergnaud, G. (1990). Teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 133 - 170.

ANEXOS

Anexo A. Carta de consentimiento

Querétaro, Qro. a 26 de septiembre de 2016

Estimados Padres de familia de 5° año de Primaria:

Es un gusto saludarles e informarles que estoy estudiando una maestría en "Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas" en la Universidad Autónoma de Querétaro. Mi tesis se titula "Cálculo estimativo en quinto grado de la escuela primaria. Implementación de una secuencia didáctica." La prueba piloto se hizo durante el mes de mayo en el actual grupo de 6° de Primaria, mientras que la implementación de la secuencia final está prevista para los meses octubre/noviembre de este año en el actual grupo de 5° año de Primaria. Por esta razón quisiera pedirles la autorización para tomar fotos y videos a sus hijos durante algunas clases de matemáticas. Para tomar los videos y ayudar a analizar la secuencia, entrarán a las clases mi asesora de tesis, la Dra. Diana Violeta Solares Pineda y una estudiante de la misma maestría, Ariadna Ramírez. Las fotos y grabaciones se usarán únicamente para fines de mi tesis y sin mencionar nombres u otros detalles sobre los alumnos.

Agradezco mucho su apoyo, si tuvieran alguna duda al respecto estoy a sus órdenes.

Atentamente

Sandra Stauffer

✂____

Fotos/videos para tesis de maestría de Sandra Stauffer

❍ Sí autorizo que a mi hija/mi hijo ___________________________ se tomen fotos y videos.

❍ No autorizo que a mi hija/hijo ___________________________ se tomen fotos y videos.

Fecha: ________________________ Firma: _______________________________________

Favor de entregar el talón a más tardar el miércoles 28 de septiembre.