



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Doctorado en Ingeniería

Nombre del trabajo

LÍNEAS TRANSVERSALES A FAMILIAS
DE DISCOS HOMOTÉTICOS

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Doctor en Ingeniería

Presenta:

M. en C. Edgar González Arreola

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
7 de mayo de 2024
México

La presente obra está bajo la licencia:
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



CC BY-NC-ND 4.0 DEED

Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional

Usted es libre de:

Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

La licenciante no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia

Bajo los siguientes términos:



Atribución — Usted debe dar [crédito de manera adecuada](#), brindar un enlace a la licencia, e [indicar si se han realizado cambios](#). Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciante.



NoComercial — Usted no puede hacer uso del material con [propósitos comerciales](#).



SinDerivadas — Si [remezcla, transforma o crea a partir](#) del material, no podrá distribuir el material modificado.

No hay restricciones adicionales — No puede aplicar términos legales ni [medidas tecnológicas](#) que restrinjan legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia.

Avisos:

No tiene que cumplir con la licencia para elementos del material en el dominio público o cuando su uso esté permitido por una [excepción o limitación](#) aplicable.

No se dan garantías. La licencia podría no darle todos los permisos que necesita para el uso que tenga previsto. Por ejemplo, otros derechos como [publicidad, privacidad, o derechos morales](#) pueden limitar la forma en que utilice el material.



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Ingeniería Matemática

LÍNEAS TRANSVERSALES A FAMILIAS
DE DISCOS HOMOTÉTICOS

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Doctor en Ingeniería

Presenta:

M. en C. Edgar González Arreola

Dirigido por:

Dr. Jesús Jerónimo Castro

SINODALES

Dr. Jesús Jerónimo Castro

Presidente

Firma

Dr. Francisco Gerardo Jiménez López

Secretario

Firma

Dr. Angélica Rosario Jiménez Sanchez

Vocal

Firma

Dr. Víctor Antonio Aguilar Arteaga

Suplente

Firma

Dr. Roberto Augusto Gómez Loenzo

Suplente

Firma

Dra. María de la Luz Pérez Rea

Directora de la Facultad

Dr. Manuel Toledano Ayala

Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario

Querétaro, Qro.

7 de mayo de 2024

México

AGRADECIMIENTOS

Quiero comenzar agradeciendo a mi esposa Julieta Ortiz Espinoza, a mi hijo Manuel González Ortiz quienes incondicionalmente me han apoyado desde el primer día que formamos esta familia y especialmente durante el desarrollo de este proyecto el cual sin su paciencia, ánimos y empuje no hubiese sido posible.

También quiero agradecer a mis padres José Roberto González Magaña y Luz Arreola Fonceca quienes desde el día que nací siempre han procurado mi bienestar incondicionalmente y ahora también procuran el bienestar de mi familia completa. A ellos debo mi carrera y la posibilidad de alcanzar todos los logros obtenidos en mi vida profesional y personal. Agradezco a mi hermano Rodrigo González Arreola y a mi hermana Itzel González Arreola por su acompañamiento en las diferentes etapas de mi vida como estudiante y ahora como padre y esposo pues siempre están al pendiente del bienestar para mi familia.

Adicionalmente, quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Jesús Jerónimo Castro, por haber depositado su tiempo y confianza en mi persona para llevar a cabo este proyecto, el cual, ayudó a desarrollarme en los aspectos profesional y personal durante esta etapa reciente de mi carrera, abriéndome nuevas oportunidades laborales. Por último agradezco a la Facultad de Ingeniería y a todo su personal docente y administrativo quienes proporcionan los medios para el desarrollo profesional e intelectual de todos sus estudiantes día con día.

ÍNDICE GENERAL

Índice general	III
1. Introducción	1
2. Antecedentes	3
2.1. Justificación	6
2.2. Descripción del problema	6
3. Hipótesis y objetivos	7
3.1. Hipótesis	7
3.2. Objetivos específicos	7
4. Metodología	9
5. Resultados y discusión	11
5.1. Familias σ -disjuntas y la propiedad $T(n)$	12
5.1.1. Resultados auxiliares	14
5.2. Subpolígonos de ancho máximo	18
6. Conclusiones	27

ÍNDICE DE FIGURAS

5.1. Círculos de radio 1 con la propiedad $T(3)$	12
5.2. Familia de discos $(2 - \epsilon)$ -disjuntos con la propiedad $T(3)$ sin línea transversal	14
5.3. Tres conjuntos convexos sin línea transversal	15
5.4. Tres discos en posición crítica	16
5.5. Familia de discos $\sqrt{2} - \epsilon$ -disjuntos con la propiedad $T(4)$ sin línea transversal.	17
5.6. Una propiedad fundamental del triángulo	20
5.7. Cuadrados de ancho 1	21
5.8. Diferentes casos de estudio cuando P es un paralelogramo.	23
5.9. Romboide de ancho 1	24
5.10. Paralelogramos con ancho por AB	25
5.11. Paralelogramo con ancho en la dirección AD	25

RESUMEN

En este trabajo se muestran y prueban los siguientes resultados. Por un lado, sea \mathcal{F} una familia de discos $\sqrt{2}$ -disjuntos con la propiedad de que cada cuatro de ellos tienen transversal común, entonces existe una línea transversal a todos los miembros de \mathcal{F} , más aún, el factor $\sqrt{2}$ es irreducible. Por otro lado, Si Q tiene centro de simetría, entonces $\omega(T) \geq \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(\frac{\pi}{12})} \approx 0,8965$ con la igualdad si y solo si Q es un cuadrado con la longitud de sus lados igual a 1.

(Palabras clave: Transversales, polígonos, líneas, discos)

SUMMARY

This work presents and proves the following results. On one hand, let \mathcal{F} be a family of $\sqrt{2}$ -disjoint disks with the property that every four of them have a common transversal, then there exists a transversal line to all members of \mathcal{F} ; furthermore, the factor $\sqrt{2}$ is irreducible. On the other hand, if Q has a center of symmetry, then $\omega(T) \geq \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(\frac{\pi}{12})} \approx 0,8965$, with equality if and only if Q is a square with side length equal to 1.

(Key words: Transversals, polygons, lines, disks)

I. INTRODUCCIÓN

La Geometría Combinatoria es una rama de las matemáticas que ha cobrado importancia en la última década con el desarrollo tecnológico de los sistemas computacionales. Junto con el desarrollo de las computadoras ha surgido la necesidad de generar algoritmos cada vez más eficientes y rápidos que procesen en tiempo razonable los enormes volúmenes de información que se almacenan en la actualidad. En respuesta a dicha problemática, la Geometría Computacional aporta, entre otras cosas, caracterizaciones de propiedades cualitativas que permiten optimizar costos computacionales.

Una rama relativamente joven de la Geometría Computacional es la Teoría de transversales. El objetivo general de esta teoría es determinar las condiciones necesarias para garantizar la existencia de una línea recta que intersecte a una familia de objetos en el plano o aún más general en cualquier espacio \mathbb{R}^n . Este problema abstracto aparece en múltiples áreas de investigación, de las cuales se pueden mencionar algunos ejemplos típicos:

El problema de la ubicación de la línea de suministros: El objetivo de este problema es: dada una familia finita de puntos en el plano, determinar la línea recta que minimiza la suma de las distancias desde cada uno de los puntos en la familia a dicha recta en forma perpendicular. Este problema lo resolvieron Megiddo y Tamir (1983) encontrando un algoritmo que determina una de las líneas óptimas con un tiempo de cómputo del orden de $O(n^2 \log n)$. Actualmente la comunidad matemática se está enfocando en determinar el algoritmo óptimo para resolver una versión un tanto más complicada de este problema. En esta nueva versión se considera la existencia de regiones en el plano a las cuales se les asignan pesos en cada punto del plano y para determinar la trayectoria se considera el costo de pasar sobre los puntos en función de los pesos previamente asignados. En relación a este problema, Cheung y Daescu (2008) construyeron un algoritmo del orden $O(l^2 n^2)$ que determina el segmento óptimo, donde l es el número de puntos en la familia. Por otro lado, la versión sin pesos de este problema también se utiliza como una alternativa a la regresión lineal en estadística, ya que representa una buena aproximación lineal a la familia de puntos a estudiar (Bern y Eppstein, 2000). Una versión más general de este problema consiste en determinar el hiperplano medio en espacios normados, Martini y Schöbel (1998) publicaron un panorama general de los descubrimientos relacionados con este problema hasta ese momento, además proporcionaron una cualidad geométrica para desarrollar un algoritmo para determinar el hiperplano medio a una familia de puntos dada. Dos años después ellos mismos (Martini y Schöbel, 2000) demostraron que dada una familia de $m \geq n + 1$ copias de un n -politopo con $2r$ vértices, se puede encontrar un hiperplano transversal en tiempo $O(rm)$, si existe un plano transversal a la familia de politopos.

Determinación de visibilidad: En gráficos computacionales 3D, determinar las superficies visibles desde cierto punto de vista es una de las operaciones geométricas más costosas en términos de recursos computacionales. Este problema se resuelve comúnmente con algoritmos que remueven las superficies ocultas en la escena visibles desde el punto de vista del usuario (Teller y Hanrahan, 1993). Por lo tanto, definir las condiciones necesarias para determinar si existe una línea transversal que interseque a una familia de conjuntos en el espacio acercaría al desarrollo de un algoritmo óptimo para la resolución del problema de visibilidad.

Claramente los dos problemas expuestos previamente, se han atacado de diferentes maneras como se muestra en la literatura ya citada, pero tienen una forma de abstracción matemática común, en ambos casos es necesario determinar si existe una línea recta que cumpla ciertas condiciones deseadas. Por un lado en el problema de *determinar la visibilidad* es necesario saber si existe alguna línea recta que interseque a toda la familia de objetos en el ambiente virtual de trabajo. Por otro lado saber la distancia máxima a la que podría estar la línea de suministros desde cada uno de los puntos de la familia ayudaría a reducir la región de búsqueda en el problema de *determinación de la línea de suministros*.

II. ANTECEDENTES

Branco Grünbaum fue de los primeros matemáticos en formular uno de los problemas fundamentales de la Teoría de Transversales. Grünbaum (1964) propuso el siguiente problema: Sea $\mathcal{K} = \{x_i + K\}$ una familia de trasladados de un cuerpo en el plano tal que $K = -K$ y cada m miembros de la familia \mathcal{K} tienen una secante común ¿cuál es el mínimo número positivo $\lambda = \lambda(K, m)$ tal que, para cada familia \mathcal{K} que satisface las condiciones anteriores, la familia $\mathcal{K}' = \{x_i + \lambda K\}$ tiene una secante común? A pesar del tiempo que ha transcurrido desde que Grünbaum formuló el problema, aún no se ha podido verificar el valor de λ cuando la familia de convexos está conformada por figuras tan simples como el círculo o el cuadrado, en particular para valores pequeños de m .

Con el afán de expandir la frontera del conocimiento en la Teoría de Transversales, en este proyecto se pretende abordar dos conjeturas propuestas por Jerónimo-Castro y Roldán-Pensado (2011a) las cuales a su vez están motivadas por las siguientes dos conjeturas:

Conjetura 1. Sea $\mathcal{F} = \{x_1 + B, x_2 + B, \dots, x_n + B\}$ una familia finita de trasladados del disco unitario B en el plano, de manera que cada tres miembros de \mathcal{F} tienen una línea transversal común. Entonces existe una línea que interseca a cada miembro de la familia $\mathcal{F}' = \{x_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}B, x_2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}B, \dots, x_n + \frac{1+\sqrt{5}}{2}B\}$.

Es importante recalcar que la conjetura mencionada arriba fue propuesta de manera independiente por V. L. Dol'nikov en su tesis de doctorado en 1972 y también por J. Eckhoff en su tesis de doctorado en 1969 (Eckhoff, 1969). Además de formular la conjetura, Eckhoff (1973) también proporcionó el primer resultado relacionado con la *Conjetura 1* demostrando que el factor de homotecia necesario en la conjetura es a lo más $\lambda = 2$ (usando la notación de Grünbaum). Aunque hay varios resultados parciales, la conjetura aún sigue abierta en su forma general, la cual involucra conjuntos convexos, se dice que un conjunto C es convexo si para todo $a, b \in C$ el segmento $[a, b] \subset C$. Como no es posible concluir la existencia de una línea transversal, dado que de tres en tres miembros de una familia de conjuntos convexos posean línea transversal (ver Figura: 5.1), entonces se busca el menor número de líneas cuya unión interseque a los miembros de la familia. Se tiene entonces la siguiente conjetura propuesta por Eckhoff (1993), la cual también se pretende abordar con una ligera variación en la hipótesis.

Conjetura 2. Sea $\mathcal{F} = \{x_1 + \lambda_1 K, x_2 + \lambda_2 K, \dots, x_n + \lambda_n K\}$ una familia finita de copias homotéticas de una figura convexa K en el plano, de manera que cada tres miembros de \mathcal{F} tienen una línea transversal común. Entonces existe un par de líneas de manera que cada

miembro de la familia \mathcal{F} es intersecado por alguna de las líneas.

Para simplificar la redacción de los problemas en Teoría de Transversales se utiliza la siguiente definición estándar:

DEFINICIÓN 2.1: Dada una familia finita \mathcal{F} de trasladados de una figura convexa K en el plano, se dice que \mathcal{F} posee la propiedad $T(n)$, si cualesquiera n miembros de \mathcal{F} tienen línea transversal. Si existe una línea transversal a todos los miembros de \mathcal{F} , se dice que \mathcal{F} tiene la propiedad T .

Además de proponer el problema en general Grünbaum también proporcionó algunos de los primeros resultados al respecto. El siguiente teorema es uno de estos resultados:

TEOREMA 2.1 (Grünbaum (1958)): Si una familia F de paralelogramos trasladados disjuntos tiene la propiedad $T(5)$, entonces la familia F tiene la propiedad T .

Grünbaum también conjeturó que el resultado anterior sería válido para cualquier convexo en general. Esta conjetura fue demostrada por Tverberg (1989) convirtiéndose en uno de sus resultados más importantes.

TEOREMA 2.2 (Tverberg (1989)): Sea K un conjunto convexo en el plano y $F = \{x_i + K : i \in I\}$ una familia de trasladados de K disjuntos por pares. Si F tiene la propiedad $T(5)$ y consta de al menos 5 copias de K , entonces existe una línea transversal a todos los conjuntos de la familia F .

Dada la complejidad del problema únicamente se han podido lograr resultados parciales, los más importantes se enuncian a continuación:

TEOREMA 2.3 (Santaló (1940)): Sea F una familia de segmentos paralelos en el plano con la propiedad $T(3)$. Entonces, la familia F tiene la propiedad T .

TEOREMA 2.4 (Tverberg (1989)): Sea K un conjunto convexo y sea K' el conjunto convexo centralmente simétrico definido como $K' = \frac{1}{2}(K + (-K))$. Sea $F = \{x_i + K : i \in I\}$ una familia de trasladados de K y $F' = \{x_i + K' : i \in I\}$ la familia de trasladados asociados al convexo K' . Entonces, F y F' tienen las mismas propiedades respecto a separación y líneas transversales.

Este resultado obtenido por Tverber representa una reducción importante en el problema general de transversales pues asegura que es suficiente estudiar a los convexos centralmente simétricos, es decir, que cualquier resultado obtenido para conjuntos centralmente simétricos también será válido para conjuntos no centralmente simétricos.

Con relación a familias de cuadriláteros, Santaló (1940) demostró que para cualquier familia de paralelogramos la propiedad $T(6)$ implica que la familia tiene la propiedad T . Tiempo después Eckhoff (1969) logró demostrar que para una familia F de cuadrados con la propiedad $T(3)$, la constante de homotecia mínima necesaria para que la familia F tenga la propiedad T es $\lambda = 2$. A pesar de que actualmente se tienen estos dos resultados aún no se

han determinado las constantes de homotecia necesarias cuando las familias de cuadriláteros poseen la propiedad $T(4)$ o $T(5)$.

Cheong et al. (2005) demuestran que para un conjunto ordenado de esferas en \mathbb{R}^3 con la propiedad $T(6)$ implica que la familia completa tiene la propiedad T y sin la hipótesis de que el conjunto sea ordenado, prueban que $T(11)$ implica T en esta familia. Bárány et al. (2008) define las condiciones necesarias para la existencia de un hiperplano secante a una familia con d conjuntos convexos en el espacio \mathbb{R}^d de tal manera que la intersección con cada uno de los conjuntos de la familia sea de volumen específico. Heppes (2007) probó que para familias de discos congruentes en el plano con la propiedad $T(3)$ implica que la familia tiene la propiedad T con excepción de a lo más dos discos.

TEOREMA 2.5 (Castro (2007)): Sea $\mathcal{F} = \{x_1 + B, x_2 + B, \dots, x_n + B\}$ una familia finita de trasladados del disco unitario B en el plano, con la propiedad $T(4)$. Entonces, existe una línea que interseca a cada miembro de la familia $\mathcal{F}' = \{x_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}B, x_2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}B, \dots, x_n + \frac{1+\sqrt{5}}{2}B\}$.

Huicochea y Jerónimo-Castro (2009) demostraron que para un conjunto de puntos centralmente simétrico, tales que la distancia entre cualquier par de ellos es de al menos 1 y cada tres de ellos pueden ser cubiertos por una banda de ancho igual a uno, entonces existe una banda de ancho $\sqrt{2}$ que cubre al conjunto de puntos.

TEOREMA 2.6 (Jerónimo-Castro y Roldán-Pensado (2011b)): Sea $\mathcal{F} = \{x_1 + K, x_2 + K, \dots, x_n + K\}$ una familia finita de trasladados de un cuerpo convexo K en el plano, con la propiedad $T(3)$. Entonces existe una línea que interseca a cada miembro de la familia $\mathcal{F}' = \{x_1 + 1,79K, x_2 + 1,79K, \dots, x_n + 1,79K\}$.

Además establecieron que la cota superior para el factor de homotecia cuando la familia tiene la propiedad $T(4)$ es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. También publicaron un resultado más general en el que aseguran que si una familia de bolas cerradas en el espacio \mathbb{R}^d tienen la propiedad $T(d+1)$, entonces es suficiente con inflarlas por un factor menor o igual que 4, y en particular para el plano, si la familia tiene la propiedad $T(4)$ el factor no debe ser mayor que $2\sqrt{2}$. Por otro lado descubrieron que para el caso en el que la familia posee la propiedad $T(3)$ el factor debe pertenecer al intervalo $[\sqrt{3}, 2,8752]$ (Jerónimo-Castro y Roldán-Pensado, 2011a). Heppes y Jerónimo-Castro (2016) determinan las condiciones suficientes, en términos de separación, para que una familia de copias trasladadas de un óvalo con la propiedad $T(4)$ impliquen que la familia completa tiene una transversal. Como resultado más reciente, Jerónimo-Castro (2018) logra demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 2.7: Sea $\mathcal{F} = \{x_1 + K, x_2 + K, x_3 + K, x_4 + K, x_5 + K\}$ una familia de discos en el plano, con la propiedad $T(3)$. Entonces, existe una línea que interseca a cada miembro de la familia $\mathcal{F}' = \{x_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}K, x_2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}K, x_3 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}K, x_4 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}K, x_5 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}K\}$.

II.1. Justificación

A pesar de la existencia de algoritmos para resolver el problema de visibilidad y el problema de la línea de suministros, aún es necesario determinar algoritmos óptimos en tiempo de cómputo. En la tarea de alcanzar estos algoritmos óptimos la Teoría de Transversales, y en general la Geometría Combinatoria, aportan relaciones que vinculan a los problemas ya citados, pues su principal contribución se evidencia cuando aporta caracterizaciones de los objetos de estudio haciendo posible acotar los casos de búsqueda o cantidad de cálculos para resolver los problemas de interés.

Desde el punto de vista abstracto aún falta cerrar la brecha entre los teoremas que se tienen actualmente en el estado del arte y las Conjeturas 1 y 2, pues las figuras más estudiadas hasta ahora han sido el círculo y el cuadrado. La mayor parte de los resultados que se tienen sobre líneas transversales, se pueden extender para el caso de familias de copias homotéticas de una figura convexa K . Sin embargo, este problema aún no ha sido suficientemente estudiado y como consecuencia de esto se cuenta con muy pocos resultados al respecto. Uno de tales problemas consiste en determinar qué tan alejadas deben estar las copias homotéticas de K con la propiedad de que si de tres en tres de éstas posean una línea transversal entonces exista una línea transversal a todas las copias homotéticas en la familia K . Otro problema sobre líneas transversales trata de encontrar los coeficientes de homotecia mínimos para asegurar que una familia de figuras convexas posee una línea transversal, dado que de tres en tres o de cuatro en cuatro, poseen línea transversal.

II.2. Descripción del problema

En este proyecto se estudian dos problemas: por un lado, el de líneas transversales a copias homotéticas del disco unitario, restringiendo el caso de estudio a familias finitas con la propiedad $T(3)$. Estudiar familias de copias homotéticas al disco unitario representa un aporte a la Teoría de Transversales, ya que esto implica trabajar con conjuntos de cuerpos geométricos no necesariamente iguales, y como se puede ver en la literatura citada, aún no existen propiedades cualitativas que determinen el coeficiente de homotecia mínimo λ necesario para asegurar que la familia de inflados con el factor λ tenga la propiedad T . Cabe resaltar que el coeficiente λ debe ser constante.

Por otro lado, determinar cualidades geométricas de familias homotéticas del disco unitario también permite realizar avances en relación con la Conjetura 2, pues en ésta se plantea el problema de determinar el mínimo número de rectas necesarias para intersecar a todos los elementos de una familia F de copias homotéticas al círculo unitario. Así, motivados por la Conjetura 2, como segundo problema en este proyecto se pretende demostrar que 3 líneas son suficientes en la tesis de la Conjetura 2.

III. HIPÓTESIS Y OBJETIVOS

III.1. Hipótesis

- Sea $\mathcal{F} = \{x_1 + \lambda_1 B, x_2 + \lambda_2 B, \dots, x_n + \lambda_n B\}$ una familia finita de copias homotéticas del disco unitario B en el plano, de manera que cada tres miembros de \mathcal{F} tienen una línea transversal común, entonces existe una línea que interseca a cada miembro de la familia $\mathcal{F}' = \{x_1 + 2\lambda_1 B, x_2 + 2\lambda_2 B, \dots, x_n + 2\lambda_n B\}$

III.2. Objetivos específicos

1. Determinar una definición de ancho adecuada para poder establecer el problema equivalente de calcular el *ancho* del polígono de centros, si se conoce el *ancho* de los subpolígonos.
2. Determinar el factor mínimo para inflar cuatro discos de radio distinto con la propiedad $T(3)$ de tal manera que exista una trasversal a los 4 discos.
3. Traducir los resultados sobre líneas transversales que sean obtenidos, al problema de atrapar puntos por medio de una banda paralela de ancho mínimo.

IV. METODOLOGÍA

Algunos detalles técnicos sobre la metodología a seguir son los siguientes:

1. Se realizó un análisis exploratorio utilizando técnicas de geometría computacional para determinar las características que deben cumplir tres rectas de tal manera que cubran una familia de copias homotéticas dada con la propiedad $T(3)$.
2. Se analizó el problema del factor de homotecia mínimo necesario para garantizar que una familia \mathcal{F} tiene la propiedad T bajo la hipótesis de que \mathcal{F} tiene la propiedad $T(n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, desde el punto de vista del problema de la banda de ancho mínimo. En particular se tiene que la Conjetura 1 es equivalente a la siguiente proposición.

Conjetura A. Sea $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto finito de puntos tal que todo triángulo con vértices en \mathcal{P} tiene ancho menor o igual a 1, entonces se puede cubrir \mathcal{P} con una banda paralela de ancho $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Se realizó un análisis cualitativo para determinar la relación del ancho de una curva con el triángulo de área máxima contenido en la misma.
4. En el problema para trasladados se acotó la región donde pueden estar contenidos todos los centros, esto se hizo considerando el triángulo de área máxima con vértices en el conjunto de centros. Se desarrollará la idea análoga correspondiente al triángulo de área máxima para el caso de copias homotéticas.
5. Se definió una forma adecuada de medir la distancia entre dos copias homotéticas cualesquiera, de una figura convexa. La noción de distancia Euclidiana no parece ser útil para estudiar este problema. Una forma de medir qué tan separadas están dos copias homotéticas es mediante el ángulo que forman las líneas soporte comunes a las figuras, las cuales las dejan en diferente semiplano. De este modo, las dos copias más alejadas son las que tienen asociado el ángulo más pequeño entre las líneas soporte que las separan.

V. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Es común que enunciados similares a las conjeturas antes mencionadas se asocien con el teorema de Helly pues comparten la misma filosofía. El *Teorema de Helly* (1913) es uno de los teoremas más importantes en Geometría Convexa y la Geometría Combinatoria, así como también es uno de los teoremas con mayor número de generalizaciones y aplicaciones. El teorema, en su versión más simple afirma lo siguiente:

TEOREMA 5.1 (Helly): En toda familia \mathcal{F} de conjuntos convexos compactos en \mathbb{R}^n , se cumple que la intersección de todos sus miembros es no vacía siempre y cuando la intersección de cualesquiera $n + 1$ miembros de \mathcal{F} sea no vacía.

Se acostumbra llamar **Teorema tipo Helly** a todo teorema del estilo: *si un conjunto de objetos tiene la propiedad de que cualesquiera m de ellos tienen cierta propiedad P , entonces todos los miembros del conjunto poseen la propiedad Q .*

Una de las variantes del Teorema de Helly relacionada con líneas rectas es de la siguiente forma: *si cualesquiera tres de los puntos son colineales, entonces todos los puntos son colineales.* Lo anterior no es cierto si se cambian puntos por copias trasladadas de algún conjunto convexo, por ejemplo el disco unitario. Como se ve en la Figura 5.1, cualesquiera tres de los discos poseen línea transversal (la tangente común), sin embargo no existe una línea que sea transversal a los cuatro discos al mismo tiempo.

No obstante, si los círculos están suficientemente alejados entre sí, éstos en cierto modo se comportan como puntos, es decir, existe una línea transversal a todos ellos siempre y cuando exista una línea transversal a cualesquiera tres de ellos.

Un problema íntimamente relacionado con determinar el factor más pequeño por el cual inflar una familia de convexos de tal manera que la familia de convexos inflados tenga una transversal es determinar la banda más delgada que asegure contener a cierta familia de puntos en particular. Si se habla de discos en el plano, sería necesario determinar la banda más pequeña que contenga a los centros de los discos. Con relación a este problema también existen diversos resultados, uno de los primeros resultados lo proporciona Lassak en 1989 (Gritzmann y Lassak, 1989) determinando propiedades geométricas relacionadas con el ancho mínimo de politopos en general. Heppes (2005) demuestra que para cada $w \in (0, 1]$ existe un número $N(w)$ tal que cada $T(3)$ -familia de al menos $N(w)$ trasladados de una figura convexa y disjuntos por pares tienen una banda transversal de ancho relativo w .

Por último, otra variante del problema principal que se estudia en este trabajo, es de-

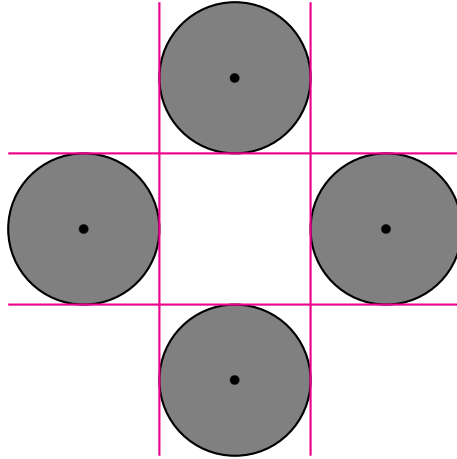


Figura 5.1: Círculos de radio 1 con la propiedad $T(3)$

terminar el círculo que minimiza la distancia a puntos de suministros dados, para más información sobre este tema se pueden consultar las siguientes referencias: Klee et al. (1997), Kramer (2006), Brimberg et al. (2009) y Kramer y Németh (2008).

Para simplificar la redacción de los resultados y conceptos a continuación se introduce la notación estándar que se utiliza comúnmente en la literatura relacionada con Teoría de Transversales. Sea \mathcal{F} una familia finita de conjuntos convexos en el plano. Si cada k miembros de \mathcal{F} tienen transversal, entonces se dice que \mathcal{F} tiene la propiedad $T(k)$ y se escribe $\mathcal{F} \in T(k)$. Si existe una línea que interseca a todos los miembros de la familia \mathcal{F} se dice que \mathcal{F} tiene la propiedad T y se denota como $\mathcal{F} \in T$. Para hacer referencia a copias homotéticas de un conjunto convexo M que contiene al origen, se denota como $\lambda M = \{\lambda x | x \in M\}$.

V.1. Familias σ -disjuntas y la propiedad $T(n)$

Como se menciona previamente en este documento, una de las variantes del problema que se ha trabajado en Teoría de Transversales está relacionado con la estimación del factor de alejamiento entre los conjuntos convexos que conforman a una familia \mathcal{F} con cierta propiedad $T(k)$.

Para formalizar el concepto de alejamiento se dice que una familia \mathcal{F} de copias homotéticas de un convexo M , $\mathcal{F} = \{x_1 + \lambda_1 M, x_2 + \lambda_2 M, \dots, x_n + \lambda_n M\}$, es σ -disjunta para un número σ positivo, si $x_i + \sigma \lambda_i M \cap x_j + \sigma \lambda_j M = \emptyset$, para cualquier par de índices distintos $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

En particular, algunos de los resultados previamente mencionados en este documento se pueden escribir en términos de alejamiento, por ejemplo, en el Teorema 2.2 cuando Tverberg pide que las copias del conjunto convexo sean disjuntas por pares es equivalente a decir que las copias son 1-disjuntas.

A continuación, se enuncian los resultados más relevantes en cuanto a factor de aleja-

miento se refiere. Hadwiger et al. (2015) demuestran lo siguiente:

TEOREMA 5.2: Si \mathcal{F} es una familia finita de discos unitarios 2-disjuntos con la propiedad $T(3)$, entonces \mathcal{F} tiene la propiedad T .

Posteriormente Grünbaum (1960) demuestra un refinamiento del resultado anterior.

TEOREMA 5.3: Sea \mathcal{F} una familia de discos congruentes y $\sqrt{2}$ -disjuntos. Si $\mathcal{F} \in T(3)$, entonces $\mathcal{F} \in T$.

Más recientemente, Heppes (2011) demuestra una serie de interesantes resultados, por un lado demostró que para una familia de discos congruentes con la propiedad $T(3)$ es suficiente agregar la hipótesis de que sean $\sqrt{2}$ -disjuntos para garantizar que la familia tiene transversal. Por otro lado demostró que cualquier familia de paralelogramos con la propiedad $T(3)$ deben de satisfacer la condición de ser 2-disjuntos para tener la propiedad T . Adicional a estos dos importantes resultados, Heppes prueba que para cualquier valor $\sqrt{2} \leq \phi \leq 2$ existe una familia \mathcal{F} de trasladados de algún convexo K que satisface $\mathcal{F} \in T(3)$ y que necesita ser ϕ disjunta para garantizar la propiedad T .

Si bien, actualmente existe una amplia lista de resultados que muestran la relación entre el factor de alejamiento y las propiedades geométricas de las familias de conjuntos convexos congruentes con la propiedad $T(3)$, hoy en día no queda claro cuál es el enfoque con el que se deben estudiar las familias conformadas por copias homotéticas de una figura convexa K cuando la familia posee la propiedad $T(3)$. El único resultado que se tiene al día de hoy lo demostraron Hadwiger et al. (2015).

TEOREMA 5.4: Sea \mathcal{F} una familia finita de discos 2-disjuntos. Si $\mathcal{F} \in T(3)$, entonces $\mathcal{F} \in T$.

Como aporte original de este trabajo se demuestra que 2-disjuntos es el valor de alejamiento más pequeño que puede tener una familia de discos homotéticos de tal manera que la propiedad $T(3)$ implique la propiedad T .

Para construir el ejemplo de la Figura 5.2, considere D_1 como el origen en el plano Cartesiano, es decir, D_1 es un disco degenerado a un punto. Sean ℓ_1 y ℓ_2 las líneas a través de D_1 tal que forman un ángulo de 60° con respecto al eje x . Sea D_2 un disco tangente al eje x y a la recta ℓ_2 . Ahora, sea D_3 un disco con centro en $(0, y_0)$, $y_0 > 0$ y tangente a ℓ_1 y a ℓ_2 , así, D_3 se puede escoger tan alejado como se quiera de D_2 escogiendo y_0 lo suficientemente grande. De manera similar se puede escoger un número $x_0 > 0$ lo suficientemente grande para que el disco D_4 con centro en $(x_0, \frac{x_0}{\sqrt{3}})$ y tangente al eje x sea tan alejado como se quiera respecto a D_3 . En conclusión, dado el valor $2 - \epsilon$, y_0 y x_0 se pueden escoger de tal manera que la familia $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ sean $(2 - \epsilon)$ -disjuntos con la propiedad $T(3)$ pero no tengan línea transversal común.

Por otro lado, relajar la hipótesis de la propiedad $T(3)$ sustituyéndola por la propiedad $T(4)$ tampoco ha producido una cantidad significativa de resultados. De nueva cuenta el mejor resultado lo postula Bezdek et al. (2006) estudiando familias de discos congruentes.

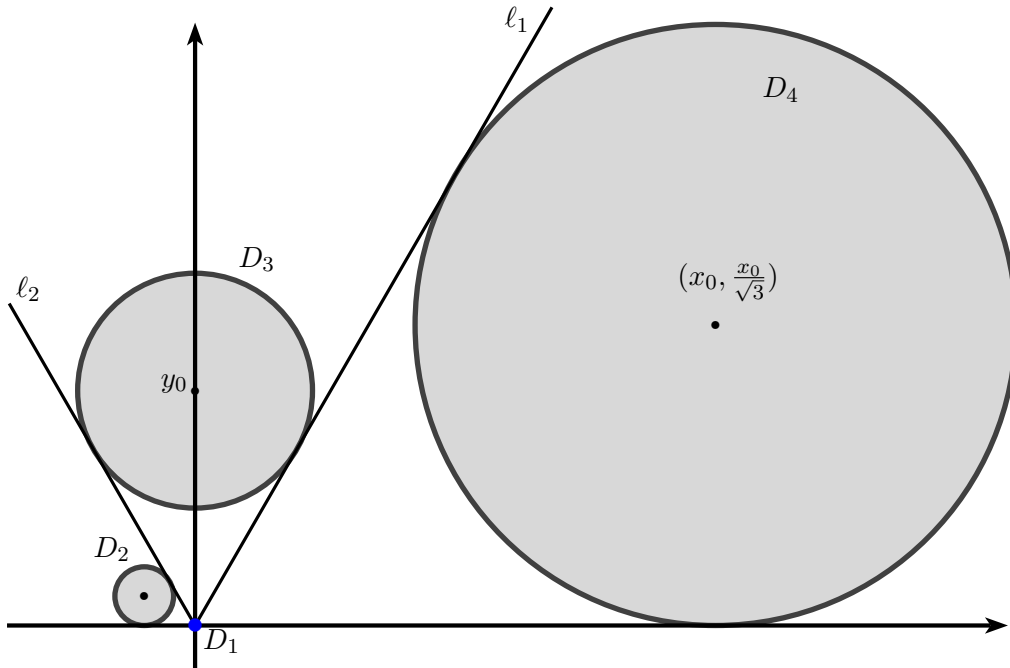


Figura 5.2: Familia de discos $(2 - \epsilon)$ -disjuntos con la propiedad $T(3)$ sin línea transversal

TEOREMA 5.5: Sea \mathcal{F} una familia finita de discos unitarios $\frac{2}{\sqrt{3}}$ -disjuntos. Si $\mathcal{F} \in T(4)$, entonces $\mathcal{F} \in T$.

Como aporte a esta variante del problema en Teoría de transversales se ha logrado probar el siguiente Teorema, el cual representa el resultado principal de nuestra línea de investigación.

TEOREMA 5.6: Sea \mathcal{F} una familia de discos $\sqrt{2}$ -disjuntos. Si $\mathcal{F} \in T(4)$, entonces $\mathcal{F} \in T$.

A continuación se mencionan algunas observaciones y resultados útiles para fundamentar la demostración del teorema anterior.

V.1.1 Resultados auxiliares

Es importante resaltar que en la literatura referente a Teoría de Transversales se tiene establecida la siguiente observación: Dada una terna de conjuntos convexos en el plano, si para cada uno de estos convexos existe una recta que lo separa estrictamente de los otros dos, entonces la terna de conjuntos convexos no tiene transversal común a los tres (ver figura 5.3).

Antes de que en la literatura se explorara la hipótesis de alejamiento entre los conjuntos convexos con alguna propiedad $T(n)$ en particular, Hadwiger et al. (2015), notó que había condiciones de separación que resultaban suficientes para garantizar la existencia de una línea transversal si ya se tenía la propiedad $T(3)$, en particular prueba el siguiente teorema que resulta útil para la demostración del Teorema 5.6.

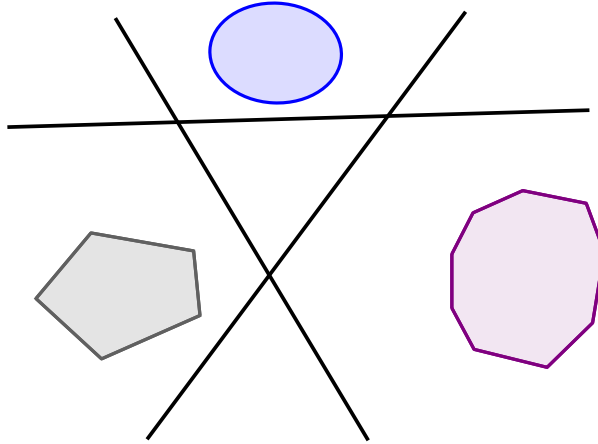


Figura 5.3: Tres conjuntos convexos sin línea transversal

TEOREMA 5.7: Sea \mathcal{F} una familia de conjuntos compactos convexos en el plano con la propiedad $T(3)$. Si existe una línea ℓ tal que cualquier línea paralela a ℓ interseca a lo más un miembro de \mathcal{F} , entonces \mathcal{F} tiene la propiedad T .

DEFINICIÓN 5.1: Sea \mathcal{F} una familia finita de discos. Se dice que \mathcal{F} es una familia crítica si $\mathcal{F} \in T(4)$ pero $\lambda\mathcal{F} \notin T(4)$, para cada $\lambda < 1$.

Esta última definición cobra relevancia gracias al siguiente resultado demostrado por Katchalski (1980).

LEMA 5.1: Si \mathcal{F} es una familia de discos crítica, entonces existen tres discos D_1 , D_2 y D_3 en la familia \mathcal{F} tal que alguna de las transversales a D_1 , D_2 y D_3 es tangente a ellos, los interseca en ese orden y separa a D_2 de D_1 y D_3 .

Así, con estos resultados previos se tiene lo necesario para justificar la demostración del Teorema 5.6.

Demostración Teorema 5.6. Sea \mathcal{F} una familia de discos $\sqrt{2}$ -disjuntos, con la propiedad $T(4)$. Se puede suponer que \mathcal{F} es una familia crítica. Por el Lema 5.1 se sabe que existen tres discos D_1 , D_2 y D_3 en \mathcal{F} tal que dicha terna tiene una tangente común ℓ_2 que los interseca en ese orden y separa a D_2 de D_1 y D_3 . Sean h_1 y h_2 los centros de homotecia entre los pares (D_3, D_2) y (D_2, D_3) respectivamente. Dado que ℓ_2 es una tangente común para D_1 , D_2 y D_3 , ℓ debe contener a h_1 y a h_3 . Por otro lado, dado que los discos en \mathcal{F} satisfacen la condición de ser $\sqrt{2}$ -disjuntos, se tiene que el ángulo que subtienden las tangentes interiores de cualesquiera dos disco en \mathcal{F} es estrictamente menor a 90° por lo tanto si se define a Γ_1 y a Γ_2 como las rectas ortogonales a ℓ_2 que contienen a h_3 y a h_1 , respectivamente, se puede asegurar que Γ_1 y Γ_2 no intersecan algunos de los discos en $\{D_1, D_2, D_3\}$ (ver figura 5.4).

Por consiguiente, se tiene que Γ_1 y Γ_2 separan a D_1 , D_2 y a D_3 en tres regiones ajenas

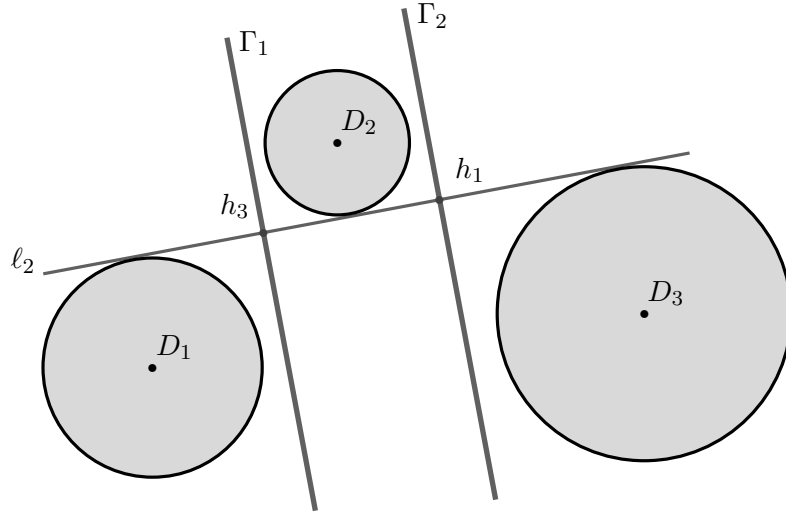


Figura 5.4: Tres discos en posición crítica

del plano, por lo tanto, cualquier transversal que interseque a D_1 , D_2 y a D_3 al mismo tiempo, los debe intersecar en este orden. Lo cual implica que ℓ_2 es la única transversal a D_1 , D_2 y D_3 . Por último, dado que \mathcal{F} tiene la propiedad $T(4)$, se tiene que para cualquier disco $D \in \mathcal{F}$, el conjunto $\{D_1, D_2, D_3, D\}$ tiene la propiedad T , entonces ℓ_2 tiene que intersecar a D . Por lo tanto ℓ_2 es línea transversal común a todos los miembros de \mathcal{F} .

Para ver que el valor $\sqrt{2}$ no se puede reducir se considera el siguiente ejemplo: sea $\delta > 0$ un número lo suficientemente pequeño y sean ℓ_1 y ℓ_2 dos líneas que contienen al origen del plano cartesiano con pendientes $1 + \delta$ y $-(1 + \delta)$, respectivamente. Sea $x_0 < 1$ un número positivo y sea D_1 y D_2 dos discos tangentes a ℓ_1 y ℓ_2 con centros en los puntos $(-x_0, 0)$ y $(x_0, 0)$, respectivamente (ver Figura 5.5). Ahora, sea $y_0 > 0$ un número lo suficientemente grande para que el disco D_3 con centro en $(0, -y_0)$ sea tangente a ℓ_1 y a ℓ_2 y al mismo tiempo las tangentes interiores generadas por D_3 y D_1 subtiendan un ángulo de 90° . Por simetría, se tiene que el ángulo subtendido por las tangentes interiores de los discos D_2 y D_3 también forman un ángulo de 90° . Así, para construir una familia con la propiedad $T(4)$ y $\sqrt{2} - \epsilon$ -disjunta sin línea transversal lo único que resta por hacer es tomar un valor δ adecuado de tal manera que D_1 , D_2 y D_3 sean $(\sqrt{2} - \epsilon)$ -disjuntos. Para completar la familia, sea x_1 un número positivo y sean D_4 y D_5 dos discos con centro en $(-x_1, 1)$ y $(x_1, 1)$, respectivamente, de tal manera que D_4 es tangente a ℓ_2 y D_5 es tangente a ℓ_1 . De nuevo, es posible escoger el valor de x_1 de tal manera que el ángulo entre las tangentes interiores que separan a los discos D_2 y D_5 sea tan cercano como se quiera a 90° . Análogamente para D_4 y D_1 , el ángulo entre sus tangentes interiores es tan cercano a 90° como se quiera. Así, $\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$ son una familia de discos con la propiedad $T(4)$, $(\sqrt{2} - \epsilon)$ -disjunta pero sin línea transversal a toda la familia.

□

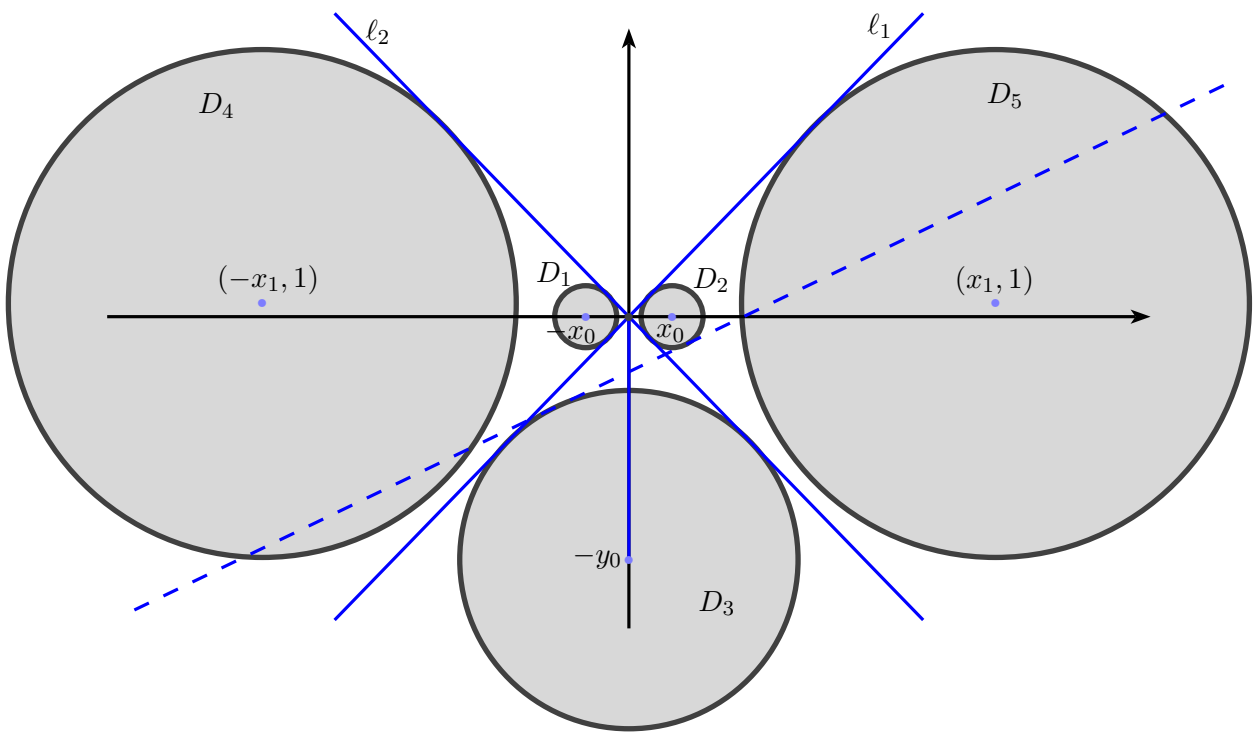


Figura 5.5: Familia de discos $\sqrt{2} - \epsilon$ -disjuntos con la propiedad $T(4)$ sin línea transversal.

V.2. Subpolígonos de ancho máximo

Como se mencionó previamente, el problema de estimar el valor mínimo que puede alcanzar el coeficiente de homotecia λ necesario para garantizar que una familia $\lambda\mathcal{F}$ tenga la propiedad T cuando la familia \mathcal{F} está conformada por discos unitarios y tiene la propiedad $T(n)$, está directamente relacionado con determinar el ancho mínimo necesario de la banda que contiene a una familia de puntos con ciertas características geométricas. Una manera usual de atacar el problema de la banda de ancho mínimo es estimar la proporción del ancho de subpolígonos inscritos contra el ancho del conjunto convexo que los contiene. En particular para generar resultados relacionados con líneas transversales a familias finitas de discos congruentes es suficiente con estudiar el ancho de polígonos.

Como ejemplo particular, cuando se tiene una familia \mathcal{F} conformada por discos de radio 1 con la propiedad $T(3)$, se puede ver que para cualquier terna de discos $\{D_1, D_2, D_3\}$ existe una banda de ancho a lo más 2 que cubre a los centros de éstos (ver Figura ??). Sin embargo, los ejemplos existentes nos indican que una banda de ancho 2 no es suficiente para cubrir al conjunto que contiene a todos los centros de los discos en la familia \mathcal{F} . Por lo tanto, estimar el ancho mínimo de la banda que cubra al conjunto de centros implica directamente una cota al factor de homotecia necesario para garantizar que la familia $\lambda\mathcal{F}$ tenga la propiedad T .

Actualmente existen algunas cotas para el ancho de las bandas que cubren conjuntos de puntos y se presentan bajo la siguiente notación.

DEFINICIÓN 5.2: Dado $K \subset \mathbb{R}^2$, no vacío y convexo, se dice que la línea ℓ_p es una línea soporte de K , si:

- $\ell_p \cap K \neq \emptyset$
- K está contenido en uno de los dos semiplanos definidos por ℓ_p

Con base a la defunción de línea soporte, ahora se puede definir el concepto de ancho para una figura convexa.

DEFINICIÓN 5.3: Sea K un conjunto convexo y una dirección fija $u \in \mathbb{S}^1$. Se define el ancho del conjunto K en la dirección u , denotado por $\omega(u)$, como la distancia entre las dos líneas soporte de K que son ortogonales a u . Adicionalmente, el ancho de K , denotado por $\omega(K)$ se define como la menor distancia entre todas las posibles direcciones u , es decir, $\omega(K) = \min_{u \in \mathbb{S}^1} \omega(u)$.

DEFINICIÓN 5.4: Dado un cuerpo convexo K y un entero $n \geq 3$, se define el n -ancho de K como $\max_{P \subset K} \omega(P)$, con P n -ágono convexo y se denota como $\omega_n(K)$.

Claramente, el n -ágono P contenido en un convexo K que alcanza el valor $\omega_n(K)$ tiene que ser un polígono convexo inscrito en K .

En la literatura existente, el n -ancho se plantea como una generalización de la función

que calcula el ancho usual en Convexidad, sin embargo, de la manera en que se plateó en la definición anterior no es invariante bajo homotecias por lo que comúnmente se estudia el cociente entre el ancho de K y el n -ancho. Sin embargo, también lo podemos interpretar como una manera de medir la «calidad» con la que un polígono inscrito en un convexo K aproxima a dicho convexo.

DEFINICIÓN 5.5: Para cualquier figura convexa K se define el número λ_n como el cociente

$$\lambda_n(K) = \frac{\omega(K)}{\omega_n(K)}.$$

En particular para nuestro estudio, nos centraremos en acotar superiormente el valor $\lambda_3(K)$. Dado que nuestro interés con respecto a la posible cota de $\lambda_3(K)$ está relacionado con los problemas en Teoría de Transversales, nuestro trabajo se concentrará en estimar el valor de $\lambda_3(P)$ cuando P es un polígono convexo, este valor lo podemos denotar como

$$\Lambda_n(\mathcal{P}) = \sup\{\lambda_n(P) : P \in \mathcal{P}\}$$

donde \mathcal{P} es la familia de polígonos convexo en el plano. Claramente, si $n \geq m$, $\lambda_n(C) \leq \lambda_m(C)$ para cada figura convexa $C \in \mathbb{E}^2$ y por consiguiente $\Lambda_n(\mathcal{K}) \leq \Lambda_m(\mathcal{K})$ para cada familia de convexos \mathcal{K} en \mathbb{E}^2 .

A continuación exponemos las cotas para $\lambda_n(\mathcal{K})$ existentes en la literatura.

Gritzmann y Lassak (1989) proponen múltiples cotas para casos en dimensión d y para familias de conjuntos convexos, sin embargo, uno de los resultados que nos interesa directamente es el siguiente.

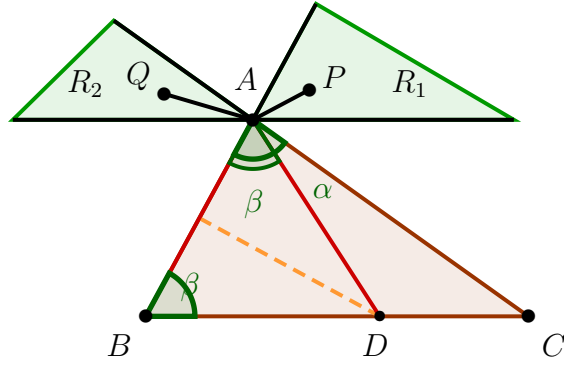
TEOREMA 5.8: Si K es una figura convexa con centro de simetría, entonces $\lambda_3(K) \leq \frac{4}{3}$ con igualdad si y sólo si K es una circunferencia.

Más recientemente, Lassak (2017) demostró que $\Lambda_3(\mathcal{K}^2) \leq \frac{2}{3-\sqrt{3}} \approx 1,577\dots$ y $\Lambda_n(\mathcal{K}^2) \leq \sec \frac{\pi}{2\lfloor n/2 \rfloor}$ donde \mathcal{K}^2 representa la familia de conjuntos convexos en \mathbb{E}^2 . Sin embargo, cabe resaltar que Eggleston y Taylor (1952) desmostaron que $\Lambda_3(\mathcal{W}^2) \leq 1,35297$ donde \mathcal{W}^2 es la familia de figuras convexas de ancho constante. Por otro lado, Gritzmann y Lassak (1989) conjeturaron que en general para cualquier conjunto convexo el valor $\Lambda_3(\mathcal{K}^2) = \frac{3+\sqrt{3}\tan(72^\circ)}{6} \approx 1,388\dots$ podría ser suficiente.

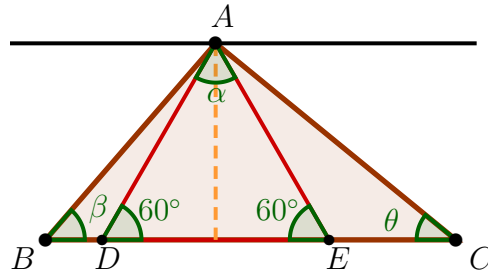
A continuación presentamos dos resultados que refinan los teoremas previamente enunciados para familias de cuadriláteros.

LEMA 5.2: Dada una figura convexa K , el triángulo inscrito T , con $\omega(T) = \omega_3(K)$ cumple alguna de las siguientes condiciones:

- a) La banda paralela soporte de T , con ancho $\omega(T)$, también es soporte de K .



(a) Triángulo con banda soporte en A



(b) Caso del triángulo equilátero

Figura 5.6: Una propiedad fundamental del triángulo

b) T es un triángulo equilátero.

Demostración. Supongamos que el triángulo T tiene como vértices a los puntos $\{A, B, C\}$ y que el ancho de T se alcanza en la dirección del segmento BC . Si $\alpha \geq \beta > 60^\circ$ y se toma al punto D sobre el segmento BC (ver Figura 5.6a), de tal manera que $\triangle ABD$ sea isósceles, se puede asegurar que $D \in \partial K$, pues de lo contrario $\triangle ABD$ se podría extender a un triángulo de ancho mayor, contradiciendo la hipótesis de maximalidad del triángulo T .

Ahora, sea ℓ la línea paralela BC que pasa por A y considere las regiones R_1 y R_2 , como los conos contenidos en el semiplano superior de ℓ y los semiplanos inferiores de las rectas que contienen a los segmentos AB y AD como se muestra en la Figura 5.6a. Si $P \in K \cap R_1$, existe un punto $P' \in PA$ de tal manera que $\triangle P'BD$ tiene un ancho mayor que $\triangle ABC$ y análogamente si $Q \in R_2$. Por lo tanto ℓ tiene que ser línea soporte de K .

En particular, si $BC \subset \partial K$, se tiene que $\omega(K) = \omega(T)$ y $\lambda_3(K) = 1$.

Si $\alpha \geq 60^\circ$ y $\beta \leq 60^\circ$, sucede que $\theta \leq 60^\circ$ y por consiguiente existe un triángulo equilátero con vértice en A , base en el segmento BC y altura igual a $\omega(K)$.

Si K es estrictamente convexo, entonces existe al menos un triángulo equilátero inscrito en K con vértices en A y con lado mayor al segmento AD , lo cuáles es una contradicción a la hipótesis de maximalidad de T , por lo tanto, $BC \subset \partial K$ como se muestra en la figura 5.6b.

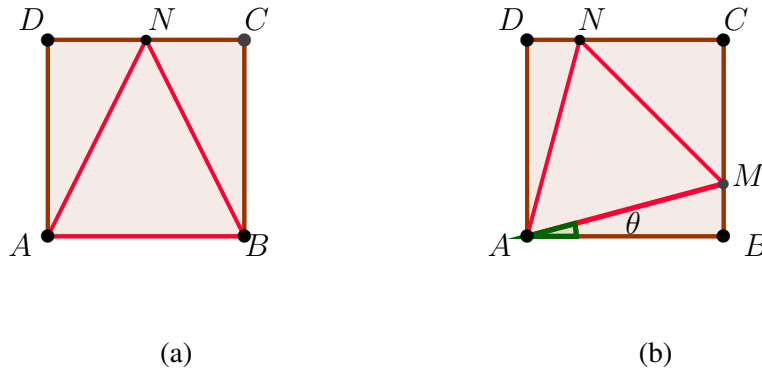


Figura 5.7: Cuadrados de ancho 1

□

Yuan y Ding (2004) encuentran las condiciones necesarias y suficientes para a , b , c y s de tal manera que, para un triángulo con lados a , b , c , exista un cuadrado de lado s que lo circunscriba. En el Lema 5.3, determinan el cuadrado de área mínima, circunscrito a T , cuando existe dicho cuadrado. Del Lema 3 (ver Yuan y Ding (2004)) se implica el siguiente resultado.

LEMA 5.3: Sea T un triángulo equilátero de lado 1 y sea s_0 la longitud del cuadrado más pequeño que contiene a T . Entonces,

$$s_0 = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad (5.1)$$

COROLARIO 5.1: Si P es un cuadrado en el plano. Entonces $\lambda_3(P) = \frac{\sqrt{3}}{2\cos 15^\circ}$.

Demostración. Sea $P = \text{conv}\{A, B, C, D\}$ un cuadrado de lado 1. Por el Lema 5.2, se tiene que no puede existir un triángulo T inscrito en P tal que $\omega(T) = \omega(P)$ (ver figura 5.7a), pues de ser así T tendría que compartir al menos un lado con P y cualquier triángulo inscrito en P con un lado común a P , cumple $\omega(T) < 1$. Por lo tanto el triángulo T inscrito en P de mayor ancho debe ser equilátero.

Ahora, sea $T = \triangle AMN$ el triángulo equilátero más grande inscrito en P (ver figura 5.7b), por el Lema 5.3, se tiene que el ángulo $\theta = \angle MAB$ debe cumplir que $\cos \theta = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$, por lo tanto $\theta = 15^\circ$. Entonces $|AM| = \frac{1}{\cos 15^\circ}$, por lo que $\omega(T) = \frac{\sqrt{3}}{2\cos 15^\circ}$, así $\lambda_3(P) = \frac{2\cos 15^\circ}{\sqrt{3}}$

□

A continuación se enuncia el aporte original desarrollado durante el proyecto con rela-

ción a al problema de la banda de ancho mínimo.

TEOREMA 5.9: Sea P un cuadrilátero convexo tal que todo triángulo inscrito en P tiene ancho menor o igual a 1.

- a) Si P tiene simetría central, $\lambda_3(P) \leq \frac{2\cos(15^\circ)}{\sqrt{3}}$. Con igualdad si y sólo si P es un cuadrado.
- b) Si P tiene simetría axial, $\lambda_3(P) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Demostración. Parte a) del teorema: Cuando un cuadrilátero $P = \text{conv}\{A, B, C, D\}$ de ancho igual a 1 tiene simetría central, únicamente existen dos posibilidades. Por un lado, que P sea una cuadrado, donde ya se sabe que $\lambda_3(P) = \frac{2\cos(15^\circ)}{\sqrt{3}}$ (Corolario 5.1), o que P sea un paralelogramo. A continuación se analiza el caso donde P es una paralelogramo.

Cuando P es un paralelogramo con ancho en la dirección del segmento AB se tiene que $|AD| \leq |AB|$, por lo que es suficiente con analizar los siguientes caso para el ángulo $\alpha = \angle DAB$, i) $\alpha \leq 60^\circ$, ii) $60^\circ < \alpha < 75^\circ$ y iii) $75^\circ < \alpha$.

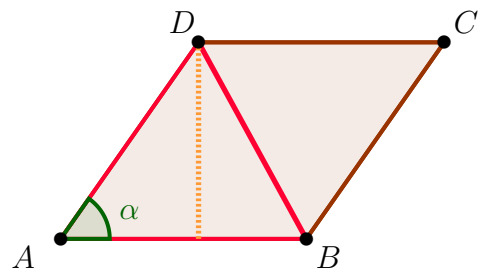
Caso i) Si $\alpha \leq 60^\circ$, se tiene que $\angle ABD \leq \angle ADB$ (ver Figura 5.8a), pues $|AD| \leq |AB|$ lo que implica que $\angle ADB \geq 60^\circ$. Así el ancho del triángulo $\triangle ABD$ se obtiene con la altura desde el vértice D . Por lo tanto, $\lambda_3(P) = 1$.

Caso ii) Si $60^\circ < \alpha < 75^\circ$, se tiene otros dos casos adicionales. Primero, puede suceder que que la mediatriz del lado AD interseque al segmento AB en un punto N como se muestra en la figura 5.8b. En este caso el triángulo isósceles $T = \triangle ADN$ tiene $\omega(T) = 1$, por lo tanto $\lambda_3(P) = 1$.

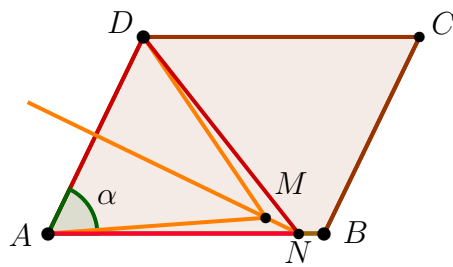
Luego, la segunda opción es que la mediatriz de AD interseque al segmento BC en el punto N (figura 5.8c). En este caso, sea M sobre la mediatriz del segmento AD de tal manera que satisfaga $|AD| = |DM| = |MA|$. Como $\angle ABC > 90^\circ$, se tiene que $|AN| > |AB|$ y como $|AB| > |AD|$, se sigue que $|AN| > |AM|$, pues $|AM| = |AD|$, lo cual implica que $M \in \text{int}P$. Además, $|AD| = \frac{1}{\sin \alpha}$ y como $\alpha < 75^\circ$, se tiene que $|AD| = \frac{1}{\sin \alpha} < \frac{1}{\sin 75^\circ} = \frac{1}{\cos 15^\circ}$; por lo tanto, $\omega(\triangle AMD)$ es mayor o igual al ancho del equilátero más grande que se puede inscribir en el cuadrado de lado 1 (Corolario 5.1). Así $\lambda_3(P) \leq \frac{2\cos 15^\circ}{\sqrt{3}}$.

Caso iii) Si $75^\circ \leq \alpha < 90^\circ$. Sea $M_0 \in AB$ tal que $\angle M_0AB = 75^\circ$ y sea M sobre la mediatriz de AM_0 de tal manera que $\triangle AM_0M$ es un triángulo equilátero (ver figura 5.8d). Como $\omega(P) = 1$ y se obtiene en dirección al segmento AB , se tiene que la distancia desde la recta que contiene al segmento BC , al punto A , es mayor o igual a 1. Dado que la proyección ortogonal M_1 , del punto M sobre el segmento AB , satisface $|M_1A| = 1$; se tiene que $|AN| > |AM|$, donde N es la intersección de la mediatriz por AM_0 y ∂P . Así una vez más, $\omega(\triangle ANM_0) > \omega(\triangle AMM_0) = \frac{\sqrt{3}}{2\cos 15^\circ}$, luego $\lambda_3(P) \leq \frac{2\cos 15^\circ}{\sqrt{3}}$.

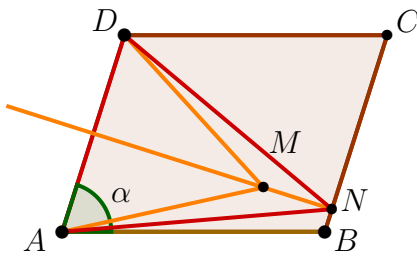
Parte b) del teorema: Cuando el cuadrilátero P tiene eje de simetría, únicamente se tienen dos posibilidades, i) el eje de simetría contiene a dos vértices de P en cuyo caso P es



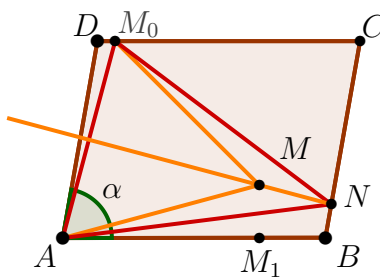
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.8: Diferentes casos de estudio cuando P es un paralelogramo.

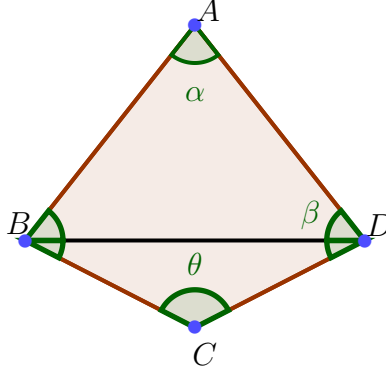


Figura 5.9: Romboide de ancho 1

un romboide (ver figura 5.9) o ii) el eje de simetría es mediatriz en dos aristas de P , lo cual implica que P es un trapecio isósceles (ver figuras 5.10a y 5.10b).

Caso i). Sea P un romboide con vértices $\{A, B, C, D\}$ y con $\omega(P) = 1$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $\alpha \leq \theta$ y que los dos triángulos isósceles que conforman al cuadrilátero P son $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$ respectivamente (ver figura 5.9). Por las condiciones de simetría en el romboide P , únicamente existen dos posibilidades para el ancho de P ; una opción es que $\omega(P)$ se obtenga en la dirección del segmento AB y la segunda es que se obtenga en la dirección del segmento CD .

Si $\alpha \leq 60^\circ$; dado que $\angle BDC \leq \angle ABD$, se tiene que la banda acotada por la línea AB y su paralela por D contienen al cuadrilátero. El ancho de esa banda es la altura desde D hacia AB , es decir, el ancho del triángulo. Lo cual implica que se cumplen las condiciones del Lema 5.2 y se tiene un triángulo isósceles con ancho igual al ancho de P . Esto implica que $\lambda_3(P) = 1$.

Ahora, si $\alpha > 60^\circ$, el ancho de P se puede obtener en la dirección de AB o en la dirección de CD . Si $\omega(P)$ se obtiene en la dirección del segmento AB , la hipótesis de que $\omega(P) = 1$ implica que las distancias $|A, BC| \geq 1$ y $|A, CD| \geq 1$. Por lo tanto, existe al menos un triángulo equilátero T , inscrito en P con vértice en A , base paralela al segmento BD y lado de longitud 1; luego la altura de T al menos mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo tanto $\lambda_3(P) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Por otro lado, si el ancho se obtiene en la dirección del segmento CD , existe un triángulo equilátero T con un vértice en C y base paralela al segmento BD ; una vez más, las aristas de T son de longitud mayor o igual a 1, lo que implica que $\lambda_3(P) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Así, $\lambda_3(P) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ cuando P es un romboide.

Caso ii). Suponga que $P = \text{conv}\{A, B, C, D\}$ es un trapecio isósceles de ancho igual a 1 y con $|AB| > |DC|$.

Si el ancho de P se obtiene en la dirección del segmento AB , $|AD| < |AB|$, por lo tanto existe $N \in AB$ de tal manera que $|AN| = |AD|$ (ver figura 5.10a). Sea ℓ la bisectriz del $\angle DAN$ y $M = \ell \cap \partial P$. En esta construcción se tienen dos, si $M \in DC$ se tiene que el cuadrilátero $P' = \text{conv}\{ANMD\}$ es un romboide de ancho igual a 1; y por el inciso a),

se sabe que $\lambda(P') \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, por lo tanto $\lambda(P) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. El segundo caso es cuando $M \in BC$, en cuyo caso el cuadrilátero $P' = \text{conv}\{A, N, M, D\}$ también cumple que $\omega(P') = 1$, por consiguiente $\lambda_3(P) \leq \lambda_3(P') \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

Si el ancho de P se obtiene en la dirección del segmento AD y paralela por B , entonces $|AB| < |AD|$ (ver figura 5.10b). Por lo tanto, existe $N \in AD$ tal que $|AN| = |AB|$; además, la intersección del segmento BC y la bisectriz del $\angle DAB$ es no vacía, sea M dicha intersección. Así, el cuadrilátero $P' = \text{conv}\{A, B, M, N\}$ es un romboide que satisface $\omega(P') = \omega(P)$, por lo tanto $\lambda_3(P) \leq \lambda_3(P') \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

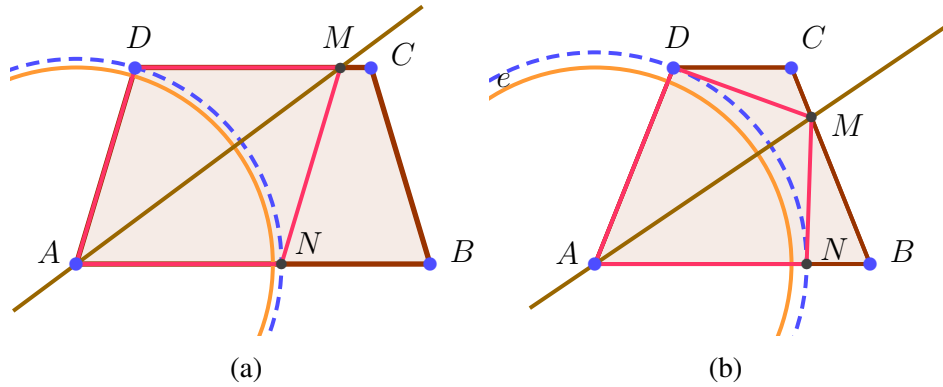


Figura 5.10: Paralelogramos con ancho por AB

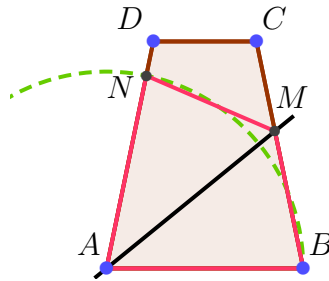


Figura 5.11: Paralelogramo con ancho en la dirección AD .

□

Respecto a los resultados desarrollados durante la investigación, es importante destacar que uno de los aportes más significativos para la Teoría de Transversales radica en la prueba de que el valor $\sqrt{2}$ es un valor irreducible en las hipótesis del Teorema 5.6. Por lo cual, se puede afirmar que el problema para discos con radios desiguales y la propiedad $T(4)$ está concluido. Sin embargo, el siguiente problema abierto por estudiar tiene dos versiones, por un lado, aún no se determina la cota irreducible para el caso de familias de conjuntos convexos en general y que a su vez posean la propiedad $T(4)$. Por otro lado, queda pendiente la prueba para la Conjetura 1.

Por otra parte, el Teorema 5.9 implica un avance significativo en la Teoría de subpolígonos de ancho máximo pues los valores prepuesto como hipótesis en el teorema no se conocían

previo al desarrollo de esta investigación, resolviendo así, un problema abierto en dicha área. Actualmente, sigue en curso determinar si el valor $\frac{2}{\sqrt{3}}$ en la conclusión del Teorema 5.9 es irreducible y extender el resultado para cuadriláteros en general.

Como trabajo futuro la Conjetura 1 continua abierta como parte del desarrollo en la Teoría de Transversales así como determinar la cota irreducible para el problema de los subpolígonos de ancho máximo. Como ya se mencionó previamente, dichos problemas abiertos siguen teniendo relevancia en diferentes áreas del desarrollo de software pues tanto la Teoría de Transversales como como el problema de los subpolígonos de ancho máximo describen propiedades cualitativas de cuerpos geométricos que modelan diferentes problemáticas del mundo real.

VI. CONCLUSIONES

Como productos de investigación generados durante el desarrollo del proyecto, se logró demostrar dos resultados originales relacionados a la Teoría de transversales, los cuales acortan la brecha entre las Conjeturas 1 y 2 y el estado del arte actual. Dichos resultados, actualmente ya se encuentran publicados en dos revistas de investigación.

Al día de hoy no se presenta evidencia de que la hipótesis propuesta en este proyecto de investigación pueda ser falsa. Al contrario, las propiedades cualitativas que se desarrollan en el presente documento proporcionan evidencia de que la hipótesis es factible. Específicamente, el Teorema 5.6 es el mejor resultado que existe actualmente en Teoría de Transversales y que apunta al objetivo de validar la hipótesis planteada en el proyecto y en consecuencia a demostrar la validez de la Conjetura 1 planteada previamente por Dol'nikov y Eckhoff. Cabe resaltar que el argumento propuesto para el Teorema 5.6 es una demostración original, la cual, por sí sola representa un aporte científico relevante en la Teoría de Transversales. Dicho Teorema fue considerado para publicarse por la Revista *Mathematical Notes*, la cual cumple con los requisitos solicitados por la División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería.

Por otro lado. El Teorema 5.9, proporciona una cota inferior para el factor de homotecia cuando la familia de discos está conformada por exactamente 4 elementos, lo cual, también representa un aporte significativo y original con relación a la hipótesis en cuestión, ya que el factor que se propone en el Teorema 5.9 es una condición necesaria para la existencia de una línea transversal en la familia de discos homotéticos. Dicho resultado, fue considerado por la revista *Results in Mathematics* para ser publicado en una de sus ediciones dada la relevancia del resultado previamente expuesto.

BIBLIOGRAFÍA

- Bárány, I., Hubard, A., y Jerónimo, J. (2008). Slicing convex sets and measures by a hyperplane. *Discrete & Computational Geometry*, 39(1-3):67–75.
- Bern, M. y Eppstein, D. (2000). Multivariate regression depth. pages 315–321.
- Bezdek, K., Bisztriczky, T., Csikós, B., y Heppes, A. (2006). On the transversal helly numbers of disjoint and overlapping disks. 87(1):86–96.
- Brimberg, J., Juel, H., y Schöbel, A. (2009). Locating a minimum circle in the plane. *Discrete Applied Mathematics*, 157(5):901–912.
- Castro, J. J. (2007). Line transversals to translates of unit discs. *Discrete & Computational Geometry*, 37(3):409–417.
- Cheong, O., Goaoc, X., y Holmsen, A. (2005). Hadwiger and helly-type theorems for disjoint unit spheres in \mathbb{R}^3 . In *Proceedings of the twenty-first annual symposium on Computational geometry*, pages 10–15. ACM.
- Cheung, Y. K. y Daescu, O. (2008). Line facility location in weighted regions. In Fleischer, R. y Xu, J., editors, *Algorithmic Aspects in Information and Management*, page 109119. Springer Berlin Heidelberg.
- Eckhoff, J. (1969). *Transversalenprobleme vom gallai'schen type*. Georg-August-Universität Göttingen.
- Eckhoff, J. (1973). Transversalprobleme in der ebene. *Contemporary Mathematics*, 24:191–202.
- Eckhoff, J. (1993). A gallai-type transversal problem in the plane. *Discrete & Computational Geometry*, 9(2):203–214.
- Eggleston, H. G. y Taylor, S. J. (1952). On the size of equilateral triangles which may be inscribed in curves of constant width. s1-27(4):438–448. [_eprint: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms/s1-27.4.438](https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms/s1-27.4.438).
- Gritzmann, P. y Lassak, M. (1989). Estimates for the minimal width of polytopes inscribed in convex bodies. *Discrete & Computational Geometry*, 4(6):627–635.
- Grünbaum, B. (1958). On common transversals. *Archiv der Mathematik*, 9(6):465–469.

- Grünbaum, B. (1960). Common transversals for families of sets. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(4):408–416.
- Grünbaum, B. (1964). Common secants for families of polyhedra. *Archiv der Mathematik*, 15(1):76–80.
- Hadwiger, H., Debrunner, H., y Klee, V. (2015). *Combinatorial geometry in the plane*. Courier Corporation.
- Heppes, A. (2005). The width of the transversal strips of $t(3)$ -families in the plane. *Discrete & Computational Geometry*, 34(3):455–461.
- Heppes, A. (2007). Proof of the katchalski-lewis transversal conjecture for $t(3)$ -families of congruent discs. *Discrete & Computational Geometry*, 38(2):289–304.
- Heppes, A. (2011). Transversals in superdisjoint $t(3)$ -families of translates. 45(2):321–328.
- Heppes, A. y Jerónimo-Castro, J. (2016). $T(4)$ families of φ -disjoint ovals. pages 155–160.
- Huicochea, M. y Jerónimo-Castro, J. (2009). The strip of minimum width covering a centrally symmetric set of points. *Periodica Mathematica Hungarica*, 58(1):47–58.
- Jerónimo-Castro, J. (2018). A conjecture on line transversals to five unit discs. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*.
- Jerónimo-Castro, J. y Roldán-Pensado, E. (2011a). Line transversals to blown up closed balls. *Journal of Geometry*, 100(1):79.
- Jerónimo-Castro, J. y Roldán-Pensado, E. (2011b). Line transversals to translates of a convex body. *Discrete & Computational Geometry*, 45(2):329–339.
- Katchalski, M. (1980). Thin sets and common transversals.
- Klee, V., Lewis, T., y Von Hohenbalken, B. (1997). Apollonius revisited: supporting spheres for sundered systems. *Discrete & Computational Geometry*, 18(4):385–395.
- Kramer, H. (2006). On a special family of compact convex sets in the euclidean plane. *Mathematica Pannonica*, 17(2):255–265.
- Kramer, H. y Németh, A. (2008). Supporting sphere for a special family of compact convex sets in the euclidean space. *Mathematica Pannonica*, 3:12.
- Lassak, M. (2017). Approximation of convex bodies by polytopes with respect to minimal width and diameter. 149(1):21–32.
- Martini, H. y Schöbel, A. (2000). Hyperplane transversals of homothetical, centrally symmetric polytopes. *Periodica Mathematica Hungarica*, 39(1-3):73–81.
- Martini, H. y Schöbel, A. (1998). Median hyperplanes in normed spaces a survey. *Discrete Applied Mathematics*, 89(1):181 – 195.

- Megiddo, N. y Tamir, A. (1983). Finding least-distances lines. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 4(2):207–211.
- Santaló, L. (1940). A theorem on sets of parallelepipeds with parallel edges. *Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral*, 2:49–60.
- Teller, S. y Hanrahan, P. (1993). Global visibility algorithms for illumination computations. pages 239–246.
- Tverberg, H. (1989). Proof of grünbaums conjecture on common transversals for translates. *Discrete & Computational Geometry*, 4(3):191203.
- Yuan, L. y Ding, R. (2004). Triangles in squares. *The Mathematical Gazette*, 88(512):219225.