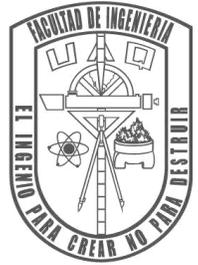




UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA



Propuesta didáctica de Trigonometría mediante el uso del software GeoGebra

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestra en Didáctica de las Ciencias (Matemáticas)

Presenta:

Florencia Díaz Landaverde

Dirigido por:

M.D.M Cecilia Hernández Garciadiego

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Abril 2024
México

La presente obra está bajo la licencia:
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



CC BY-NC-ND 4.0 DEED

Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional

Usted es libre de:

Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

La licenciante no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia

Bajo los siguientes términos:



Atribución — Usted debe dar [crédito de manera adecuada](#), brindar un enlace a la licencia, e [indicar si se han realizado cambios](#). Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciante.



NoComercial — Usted no puede hacer uso del material con [propósitos comerciales](#).



SinDerivadas — Si [remezcla, transforma o crea a partir](#) del material, no podrá distribuir el material modificado.

No hay restricciones adicionales — No puede aplicar términos legales ni [medidas tecnológicas](#) que restrinjan legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia.

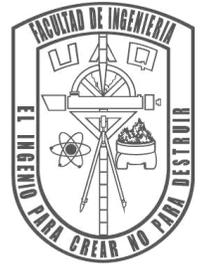
Avisos:

No tiene que cumplir con la licencia para elementos del material en el dominio público o cuando su uso esté permitido por una [excepción o limitación](#) aplicable.

No se dan garantías. La licencia podría no darle todos los permisos que necesita para el uso que tenga previsto. Por ejemplo, otros derechos como [publicidad, privacidad, o derechos morales](#) pueden limitar la forma en que utilice el material.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA



Propuesta didáctica de Trigonometría mediante el uso del software GeoGebra

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestra en Didáctica de las Ciencias (Matemáticas)

Presenta:

Florencia Díaz Landaverde

Dirigido por:

M.D.M Cecilia Hernández Garciadiego

M.D.M Cecilia Hernández Garciadiego
Directora

Firma

M. en C. Luisa Ramírez Granados
Secretario

Firma

M. en C. Iván González García
Vocal

Firma

Dra. Diana del Carmen Torres Corrales
Suplente

Firma

Dr. Alfredo Martínez Uribe
Suplente

Firma

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Abril 2024
México

DEDICATORIAS

A mi familia; Isabella, Jonathan y Antonio, por su paciencia y su comprensión durante este proceso, sin su amor no lo hubiera logrado.

Gracias!

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por nunca soltarme de su mano y dejarme sola.

A Andrea, por siempre darme una palabra de aliento.

A quienes siempre confiaron en mí y estuvieron de manera incondicional en todo momento.

A mi Directora de tesis, la M.D.M Cecilia Hernández Garciadiego, por su apoyo y acompañamiento.

A mis estudiantes de semestre 4-2022, por estar siempre dispuestos a colaborar en las actividades y ser tan entregados.

A mis profesores que fueron partícipes en este proceso.

RESUMEN

La trigonometría es un área donde se encuentra un bajo rendimiento académico y nosotros como profesores de bachillerato y nivel superior nos encontramos con diferentes escenarios en cuanto al rendimiento académico de nuestros alumnos. Este panorama dio pie a considerar actividades que coadyuvaran a la comprensión de los temas. En ese sentido, el presente trabajo tiene como objetivo mejorar la enseñanza-aprendizaje de la Trigonometría utilizando el software GeoGebra, participando para su desarrollo los alumnos de la escuela de Bachilleres del Plantel Concá y alumnos de primer semestre de la Licenciatura en Animación Digital de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro. La muestra estuvo conformada de 29 estudiantes, 20 de nivel medio superior y 9 de nivel superior. Debido a que los estudios descriptivos buscan especificar características de grupos o individuos, el enfoque del presente trabajo es cualitativo descriptivo considerando un diseño experimental de tipo comparativo. Los instrumentos fueron diseñados y se aplicaron en el siguiente orden: cuestionarios del uso de las TIC, prueba diagnóstica, implementación de la propuesta didáctica; sustentada en el marco teórico de las situaciones didácticas de Guy Brousseau y por último la prueba final. La propuesta didáctica consta de dos situaciones, primero el cálculo de las funciones trigonométricas de algunos ángulos con la definición de función trigonométrica mediante el círculo trigonométrico usando la computadora. En segundo lugar, la identificación de las gráficas correspondientes a cada una de las funciones trigonométricas a partir del análisis de sus principales características. Ambas situaciones contemplan actividades desarrolladas con el apoyo del software GeoGebra. A partir de la intervención, los resultados demuestran que el uso del software GeoGebra favorece una mejor comprensión de la trigonometría, específicamente en funciones trigonométricas.

Palabras clave: enseñanza y aprendizaje, GeoGebra, TIC, Trigonometría, TSD.

ABSTRACT

Trigonometry is an area where a low academic performance is found and we as high school and college teachers encounter different scenarios regarding the academic performance of our students. This scenario gave rise to consider activities that will contribute to the understanding of these topics. In this sense, the present work aims to improve the teaching and learning of Trigonometry using GeoGebra software, with the participation of students from the high school of Conca campus and first semester students of the Bachelor's Degree in Digital Animation of the Faculty of Engineering of the Autonomous University of Querétaro. The studied sample consisted of a total of 29 students, 20 high school students and 9 college students. Since descriptive studies seek to specify characteristics of groups or individuals, the statistic analysis of the present work is qualitative descriptive considering a comparative experimental design. The instruments for data collection were designed and applied in the following order: questionnaires on the use of ICT, diagnostic test, implementation of the didactic proposal, based on the theoretical framework of Guy Brousseau's didactic situations, and finally the final test. The didactic proposal consists of two situations, first calculating the trigonometric functions of some angles with the definition of trigonometric function through the trigonometric circle using the computer. Second, identification of graphs corresponding to each of the trigonometric functions from the analysis of their main characteristics. Both situations contemplate activities developed with the support of GeoGebra software. After the intervention, the results show that the use of GeoGebra software contributes to a better understanding of trigonometry, notoriously in trigonometric functions.

Key words: teaching and learning, GeoGebra, ICT, Trigonometry, TSD.

ÍNDICE

I. ANTECEDENTES	1
II. JUSTIFICACIÓN	7
III. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.....	9
3.1. Formulación del problema	14
IV. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....	16
4.1. Situaciones Didácticas.....	18
4.1.1. La Situación Acción.....	18
4.1.2. La Situación de Formulación.....	18
4.1.3. La Situación de Validación.....	18
4.2. Tecnologías de la información y la comunicación.....	19
4.3. Incidencia de las TIC en Matemáticas.....	20
4.4. Recurso didáctico GeoGebra.....	21
4.5. Definiciones conceptuales.....	22
V. HIPÓTESIS Y OBJETIVOS	25
5.1. Hipótesis.....	25
5.2. Pregunta de Investigación.....	25
5.3. Objetivos de la Investigación.....	25
5.3.1. Objetivo General.....	25
5.3.2. Objetivos Específicos.....	25
VI. METODOLOGÍA.....	26
6.1. Enfoque.....	26
6.2. Tipo de Investigación.....	27
6.3. Muestra.....	27
6.3.1 Consideraciones éticas.....	27
6.4. Desarrollo de la metodología.....	28
6.4.1. Técnicas de recolección de Información.....	28
6.4.2. Instrumento de recolección de información.....	29
6.4.3. Prueba diagnóstica.....	29

6.4.4. Diseño e implementación de la propuesta didáctica.....	29
6.4.6. Prueba final.....	32
6.4.7. Lista de cotejo de construcciones con el software GeoGebra.....	32
VII. ANÁLISIS DE DATOS	33
7.1. Respuestas de los alumnos en el cuestionario del uso de las TIC.....	33
7.2. Respuestas de los docentes en el cuestionario del uso de las TIC.....	39
7.3. Respuestas de los estudiantes en la prueba diagnóstica y prueba final.....	43
7.4. Respuestas de los estudiantes en las actividades de la propuesta didáctica.....	47
7.5. Respuestas de las actividades de cierre de la propuesta didáctica.....	72
7.6. Respuestas del uso y manejo del software GeoGebra.....	79
VIII. CONCLUSIONES.....	81
IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	85
X. ANEXOS.....	91

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Desempeño en lectura, matemáticas y ciencias.	10
Figura 2. Porcentajes de estudiantes por nivel de desempeño en la escala global de lectura, matemáticas y ciencias, 2000-2015.	11
Figura 3. Respuestas de los estudiantes respecto al cuestionario de las TIC.	35
Figura 4. Recursos utilizados por los alumnos.	37
Figura 5. Tipos de calculadoras on-line.	37
Figura 6. Tipo de plataforma utilizada durante el desarrollo de las clases.	38
Figura 7. Dispositivo utilizado en el desarrollo de clases.	39
Figura 8. Software matemáticos utilizados en el desarrollo de las clases.	40
Figura 9. Cursos de actualización tomados por los docentes.	41
Figura 10. Nivel de competencia de los docentes en cuanto al uso de las TIC.	42
Figura 11. Valores exactos de funciones trigonométricas de ángulos notables.	44
Figura 12. Valores exactos de funciones trigonométricas.	44
Figura 13. Definición de periodo y amplitud.	45
Figura 14. Promedio de la prueba diagnóstica y prueba final.	46
Figura 15. Comparación del promedio de cada estudiante.	47
Figura 16. Definición de ángulo.	48
Figura 17. Definición no precisa de ángulo.	48
Figura 18. Elementos y medida de un ángulo agudo.	49
Figura 19. Estudiante interactuando con el software GeoGebra.	50
Figura 20. Respuesta de un estudiante respecto a la recta perpendicular en la construcción de un trazo.	51
Figura 21. Construcción del trazo de triángulo rectángulo de acuerdo a la actividad 1.2.	51
Figura 22. Tipos de triángulo de acuerdo a la construcción.	52
Figura 23. Construcción del trazo de la actividad 1.2.	52
Figura 24. Ángulos presentes en un triángulo rectángulo.	53
Figura 25. Identificación de un solo ángulo en un triángulo rectángulo.	53
Figura 26. Construcción del trazo de triángulo rectángulo de acuerdo a la actividad	

1.2.....	54
Figura 27. Determinación de los catetos en un triángulo rectángulo.	55
Figura 28. Identificación de los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo. .	55
Figura 29. Identificación de la hipotenusa.....	56
Figura 30. Relación de los catetos e hipotenusa.	56
Figura 31. Relación entre los lados del triángulo rectángulo.	56
Figura 32. Relación de los ángulos en un triángulo rectángulo.....	57
Figura 33. Relación de ángulos en función de razones trigonométricas.	57
Figura 34. Visualización de las razones trigonométricas en un ángulo complementario.	58
Figura 35. Visualización de la construcción para emitir respuestas.....	58
Figura 36. Definición de un círculo unitario.....	59
Figura 37. Forma simple de caracterizar un círculo unitario.	59
Figura 38. Principales características de un círculo unitario.	59
Figura 39. Presentación de la construcción del círculo unitario.	60
Figura 40. Valor numérico de la abscisa del punto P.....	60
Figura 41. Valor numérico de la ordenada del punto P.....	61
Figura 42. Signo de las funciones trigonométricas en el primer cuadrante.....	61
Figura 43. Relación de ángulos originados al trazar la hipotenusa.....	61
Figura 44. Relación de los ángulos con los signos de las funciones trigonométricas.	62
Figura 45. Definición de ángulo normal.	62
Figura 46. Definición incompleta de ángulo normal.	63
Figura 47. Definición incompleta de ángulo de referencia.	63
Figura 48. Definición de ángulo de referencia.	63
Figura 49. Signos de las funciones.	64
Figura 50. Comportamiento del punto P.	65
Figura 51. Visualización del círculo unitario y posicionamiento del punto P.	65
Figura 52. Posicionamiento del punto P.	66
Figura 53. Cambio del deslizador para modificar el ángulo.	66

Figura 54. Modificación de las razones trigonométricas en función del aumento del ángulo.	66
Figura 55. Posicionamiento del punto P en el círculo unitario.	67
Figura 56. Animación de la función seno.	68
Figura 57. Descripción del comportamiento de la función seno.	68
Figura 58. Descripción del comportamiento del punto D.	68
Figura 59. Descripción del rastro del punto D.	69
Figura 60. Descripción de los puntos mínimos y máximos de la función seno.	69
Figura 61. Concepto de periodo en una función trigonométrica.	70
Figura 62. Concepto informal de periodo en una función trigonométrica.	70
Figura 63. Definición incompleta de amplitud en una función trigonométrica.	71
Figura 64. Definición de amplitud en una función trigonométrica.	71
Figura 65. Características de las funciones trigonométricas.	72
Figura 66. Comprensión de las razones trigonométricas al manipular el triángulo.	73
Figura 67. Apreciación de las razones trigonométricas.	74
Figura 68. Cálculo de los ángulos complementarios del triángulo rectángulo.	74
Figura 69. Cálculo de los valores exactos de las funciones trigonométricas del ángulo notable de 30°	75
Figura 70. Respuestas de la actividad de cierre 2, Situación 2.	78
Figura 71. Uso y manejo del software GeoGebra.	80

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. México y OCDE, medidas de desempeño en PISA, 2000-2015.	11
Tabla 2. Cuestionario del uso de las TIC.	33

I. ANTECEDENTES

Vidal (2006), en el trabajo denominado “Investigación de las TIC en la educación”, lleva a cabo un recorrido en la historia acerca del desarrollo de las nuevas tecnologías en el ámbito educativo, mismo que tiene como finalidad el tener un acercamiento por parte de investigadores en cuanto a esta área, y que, a partir de ello, sea posible divisar líneas de investigación. Se realizó una investigación documental, donde se analizan más de setenta estudios y proyectos, en un periodo de treinta años de aplicación de las tecnologías en la educación. A partir de la revisión en este trabajo, se tiene en cuenta que los primeros antecedentes de la investigación a las TIC (Tecnologías de la Información y Comunicación), fueron en el año de 1918, más adelante, en la década de los 50 se hizo notable el desarrollo de la Tecnología Educativa, siendo entonces que a partir de la década de los años sesenta se consolida el uso de las computadoras en el ámbito educativo.

De acuerdo al trabajo de Vidal (2006), un escenario para llevar a cabo el desarrollo de la investigación es el que se da a partir del proceso de enseñanza-aprendizaje, y un actor importante es el docente, debido a que ejerce la función de plantear estrategias y metodologías; donde su experiencia como partícipe en este proceso es relevante. En este mismo artículo, Vidal (2006) destaca que las TIC se introducen en el ámbito educativo para reforzar lo que ya se tiene, en sí, la forma de integrarlas no es precisamente mediante algún proyecto que las considere para modificar las prácticas, además de que se refleja la falta de apoyo formativo con miras a que haya cambios que favorezcan en la educación.

En la revisión de estos estudios, se constata que efectivamente al hacer uso de las TIC en general, los cambios no son sustantivos tanto en la formación docente, en los centros educativos, como en la metodología empleada, más bien, se da un proceso de adaptación que refiere al potencial en cuanto a la innovación en la enseñanza tradicional.

Otro trabajo de investigación que se relaciona, es el proyecto para obtención de grado de maestría de Herrera (2013), denominado: "Enseñanza de los conceptos básicos de la Trigonometría mediante el uso de la tecnología informática". La investigación de Herrera (2013) expone como se llevó a cabo el diseño e implementación de herramientas didácticas, las cuales se realizaron en el software GeoGebra y en la plataforma Moodle para el desarrollo de unidades básicas de aprendizaje de trigonometría, esto a partir de que se consideró que no se proporcionaban los instrumentos necesarios en el aula en el proceso de aprendizaje.

Es entonces que, en esta investigación, el principal propósito fue facilitar la enseñanza de la graficación de las funciones trigonométricas, con la intención de propiciar una mejor asimilación de los conceptos como ángulos notables, longitud de la circunferencia y radián, los cuales, son básicos en el área de trigonometría con la visión de que los estudiantes tuvieran buenos resultados tanto en la comprensión como en la forma de emplear el conocimiento matemático.

La propuesta de Herrera (2013) se basó en el diseño de herramientas didácticas con la intención de ser usadas en Ambientes Virtuales, así como en unidades de aprendizaje. La investigación se llevó a cabo mediante una investigación de tipo cualitativa, durante un periodo de 20 semanas, con alumnos de 10° de estudiantes de edades entre los 15 y 17 años, de la IE Instituto Universitario de Caldas, Manizales, Colombia. El método fue de tipo exploratorio-descriptivo, en donde se evaluaron variables como la eficiencia de estrategias metodológicas en el aprendizaje significativo y el efecto de estas, así como el grado de motivación en los estudiantes. Para el desarrollo de las actividades acordes a los temas, se llevaron a cabo planeaciones con guías y se diseñaron e implementaron aplicativos, que permitieron identificar que tan importante es hacer uso de los recursos pedagógicos en el aprendizaje de los estudiantes, de modo que, de acuerdo a los resultados se observó que el desempeño fue notable tanto en la interpretación y

construcción de las gráficas de las funciones trigonométricas como en la asimilación de los conceptos básicos de la trigonometría.

Continuando con la revisión bibliográfica, un siguiente trabajo de Díaz (2014), tesis que lleva por título: “ Enseñanza de trigonometría en 4° de la ESO (Escuela Secundaria Obligatoria, opción B) con GeoGebra”, presenta una propuesta didáctica que se basó en el uso del software GeoGebra con el objetivo de favorecer la comprensión de la trigonometría a nivel medio superior y en consecuencia mejorar el proceso de aprendizaje en el área, misma que los estudiantes la consideraban con un grado mayor de dificultad y que a la vez, las matemáticas resultan ser una materia compleja para ellos como alumnos de la ESO. En este proyecto se presenta una propuesta didáctica que consiste en proponer actividades complementarias con el software que facilitarán la comprensión de la trigonometría.

En el marco teórico del trabajo de Díaz (2014) se habla acerca de las normativas en materia de educación, para posteriormente indagar sobre los conflictos psicológicos en el aprendizaje de las matemáticas, primeramente, para luego revisar de manera específica en la trigonometría. En búsqueda de que el aprendizaje sea experimental y sencillo para los alumnos, se analizaron de forma comparativa los principales sistemas de geometría dinámica usados en el ámbito educativo, como Cabri, Sketchpad, Cinderella, etc., y se obtuvo que quien tiene mejores recursos en el área de trigonometría, es el software GeoGebra.

En referencia a la metodología, se hizo una revisión bibliográfica y un estudio de campo, en la primera, se llevó a cabo la lectura de material para delimitar las problemáticas bajo ciertos criterios. El estudio de campo se realizó mediante encuestas, mismas que se realizaron por medio de un cuestionario, diseñado a través de la herramienta SurveyMonkey, aplicándose a los profesores que apoyaban con la materia y también un test a estudiantes de 4° de la ESO.

Las características de la población fueron las siguientes: los alumnos pertenecían al Instituto de Educación Secundaria Gabriel Alonso de Herrera, localizado en el municipio de Talavera de la Reina, en la provincia de Toledo, España. El estudio de campo se realizó como complemento del marco teórico, buscando justificar las investigaciones expuestas que hablaban acerca de las dificultades que tenían los alumnos en la trigonometría en el aula. El trabajo fue realizado en cuatro fases, siendo que en la última se diseñó la propuesta, la cual concretó lo establecido en el objetivo principal. Para concluir, se asumió que el software facilitó al alumno la comprensión de la trigonometría y que mediante la propuesta didáctica se solventaron ciertas dificultades presentadas al abordar el aprendizaje en esta disciplina de las matemáticas.

Por último, y teniendo en cuenta que en algunos libros, no se expone como se da el paso de la razón trigonométrica a lo que es la función trigonométrica, generando una falta de claridad entre los conceptos en los alumnos, Olguín (2016), presentó una propuesta didáctica, la cual es un trabajo de tesis para obtener el grado de maestría, que tuvo como propósito general el diseño de una propuesta que promovía el aprendizaje de las funciones trigonométricas, específicamente del seno y coseno a partir de problemas donde se relacionan diferentes elementos en cuanto a sus construcciones en diferentes tipos de planos (euclidiano y cartesiano).

En el trabajo de Olguín (2016), se llevó a cabo la exploración de lecturas, donde fue evidente ver el objeto matemático con una carencia de su significado, esto no precisamente en los estudiantes, sino también en profesores. En el trabajo de investigación se propuso la implementación una micro ingeniería didáctica, con la intención de favorecer la comprensión de los significados de las funciones trigonométricas, por un lado, como objeto matemático y por otro, en cuanto a sus propiedades. Dicha propuesta, estuvo sustentada bajo el marco teórico de la teoría de situaciones didácticas (TSD), ya que esta teoría se basa en un sistema didáctico (triángulo didáctico) que se conforma por el alumno, el profesor y el saber enseñado,

los cuales tienen interacción entre ellos y a partir de esto, se da pie a la construcción del conocimiento, dando sentido a lo que se aprende a partir de las actividades a realizar, de modo que mediante el aprendizaje se pueden comprender los conceptos matemáticos.

La metodología utilizada por Olgún (2016) es de tipo cualitativa, realizando un estudio de casos, y considerando algunas de las fases de la Ingeniería Didáctica. Dicho trabajo se realizó con el grupo de cuarto año de educación secundaria en el Colegio María Teresa Cancino Aguilar, ubicado en Recoleta, provincia de Santiago, Chile. El grupo estaba compuesto de 16 estudiantes de sexo femenino, con una edad entre 16 a 17 años, el sexo se justificó porque en ese lugar se prestaba un servicio educativo de carácter católico. Es importante señalar que la secuencia didáctica fue aplicada en un tiempo de 95 minutos, lo que normalmente dura una sesión de clases en esa institución educativa.

Para llevar a cabo el diseño de la propuesta se consideraron dos situaciones, primeramente, en la primera situación, se tuvo como objetivo realizar la construcción de la circunferencia trigonométrica con triángulos rectángulos, en donde se utilizó instrumentos como la regla, el transportador y el compás, realizando trazos simétricos y cambiando el ángulo del centro para encontrar las simetrías de un triángulo en el segundo cuadrante, esta situación se desarrolló en tres actividades.

La segunda situación constó de cuatro actividades, que al desarrollarse se construyó la función trigonométrica, considerando la simetría de triángulos y las traslaciones previamente hechas, sin omitir que no solo se utilizaron instrumentos sino también el software GeoGebra. Al llevar a cabo la aplicación de la secuencia, se esperaba que los estudiantes al basarse en el sistema de coordenadas rectangulares generalizaran el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas, así como se establecieran varias diferencias entre razón trigonométrica y función trigonométrica. Como conclusión de este trabajo, se

reconoció que la metodología de enseñanza empleada hizo evidente otra perspectiva en la enseñanza de las funciones trigonométricas que favorecen el sentido y significado del objeto matemático.

II. JUSTIFICACIÓN

En el ámbito educativo, las matemáticas son una de las materias con mayor importancia, ya que se hacen necesarias para que tanto alumnos como docentes puedan tener un conocimiento significativo al profundizar conocimientos en ellas. Como sabemos, en la actualidad la enseñanza tradicional y memorística no tienen un papel relevante en el aula, por eso se hace necesario considerar la innovación educativa, apoyándose en nuevos recursos didácticos e introduciendo las TIC dentro de la educación, entre otras nuevas estrategias didácticas.

Martín (2013) señala que la trigonometría es una rama de las matemáticas que a los estudiantes les resulta difícil de entender. Algunas razones por comprender este tópico, podrían ser su complejidad, la relación que tiene con diferentes tipos de fenómenos y como se interconecta con otras disciplinas. Además de influir las diferentes formas de entender y representar las nociones básicas que se tienen o los modos de aproximación a estas, tal es el caso de la circunferencia unitaria, los tipos de triángulos de acuerdo a sus ángulos, el triángulo rectángulo o las funciones trigonométricas. Con base en esa dificultad, se percibe que un índice elevado de alumnos no logra los aprendizajes requeridos, lo que indica que los alumnos de este nivel no están desarrollando sus capacidades específicas y que a su vez cuando llegan a un nivel educativo superior les parece más complejo comprender cuestiones relacionadas a la trigonometría.

En ese sentido, es importante considerar lo que menciona Marcilla de Frutos (2013), la forma de aprender de los alumnos ha cambiado, y por ello, se hace necesario modificar los métodos para enseñar. Y en estos cambios, es relevante tener en cuenta que existen softwares para el estudio de la matemática en general y para la trigonometría en especial; al hacer uso del GeoGebra es posible descubrir sucesos matemáticos, donde se visualice a la trigonometría de forma más concreta y al mismo tiempo el estudiante fortalezca sus destrezas y habilidades.

Al introducir las TIC en el ámbito educativo se propicia a innumerables oportunidades en cuanto a la innovación educativa para la transformación del espacio educativo y de los procesos de formación de las nuevas generaciones, que cada vez más se requiere formarse como ciudadanos y profesionales.

Esta investigación está planteada en la búsqueda de que a partir de la introducción de las tecnologías se reitere la importancia de la motivación y sea mejor la comprensión de los procedimientos a llevar a cabo. Tal como lo indica Donoso (2011) que el alumno “utilice herramientas y medios como las TIC, que sean de utilidad para comprender la realidad circundante, resolver problemas y manifestar su creatividad”.

La mayoría de los alumnos hoy en día pueden tener acceso a estas herramientas, incluso utilizar aplicaciones en el celular, de modo que es más fácil acceder a ellas, explorarlas para familiarizarse y sobre todo apoyarse en su uso para generar nuevos conocimientos. Y que, además, para complementar y comprender mejor aún la trigonometría, se puedan llevar a cabo prácticas con contenidos de la misma disciplina contribuyendo a su desarrollo y en espera de una mejor comprensión por los alumnos de bachillerato en el Campus Concá de la Universidad Autónoma de Querétaro.

III. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

México es uno de los países que tiene uno de los sistemas educativos más grandes y complejos de los países de la OCDE (Organisation for Economic Co-operation and Development), considerando este escenario, el país ha hecho importantes reformas de políticas en su sistema de competencias; sin embargo, se requiere de tiempo para que muchas de estas reformas maduren y haya resultados alentadores. Por otro lado, ha aumentado el logro educativo en educación media superior y superior, además de ser uno de los países entre la OCDE, que tiene un porcentaje mayor de estudiantes de educación superior que ingresan en áreas relacionadas con ciencias. De acuerdo a la OCDE (2017), México es situado entre los primeros seis países de la OCDE en referencia al rubro de áreas de estudio relacionadas con Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM), esto es debido a que, en el año 2015, un 32 % de los estudiantes de nuevo ingreso a la educación superior optaron por elegir estas áreas, lo cual representa 5 puntos porcentuales más que el promedio de la OCDE.

De acuerdo con los resultados encontrados en OCDE (2017), México tiene retos importantes por afrontar, en cuanto a la mayor parte de los indicadores de desarrollo de habilidades, el país está situado en el 20 % inferior en relación a los demás países de la OCDE. Los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes, PISA (*Programme for International Student Assessment*), dan a saber que, en los estudiantes de 15 años, el rendimiento en lectura, matemáticas y ciencias en comparación al promedio de la OCDE continúa siendo muy inferior.

Aunado a esto, hay un alto grado de deserción escolar de la educación en el nivel medio superior; esto, a pesar del aumento en las tasas de matrícula y del nivel educativo. Sólo el 56 % de estudiantes que oscilan entre los 15-19 años, sobrepasan un nivel superior de educación secundaria, lo cual está considerablemente por debajo de 84 %, que es el promedio de la OCDE. Por otro lado, la población adulta mexicana que tiene al menos educación media superior se

encuentra por debajo del promedio de la OCDE. Así mismo, en cuanto a la educación superior, nuestro país tiene la proporción más baja de población en relación a todos los países de la OCDE.

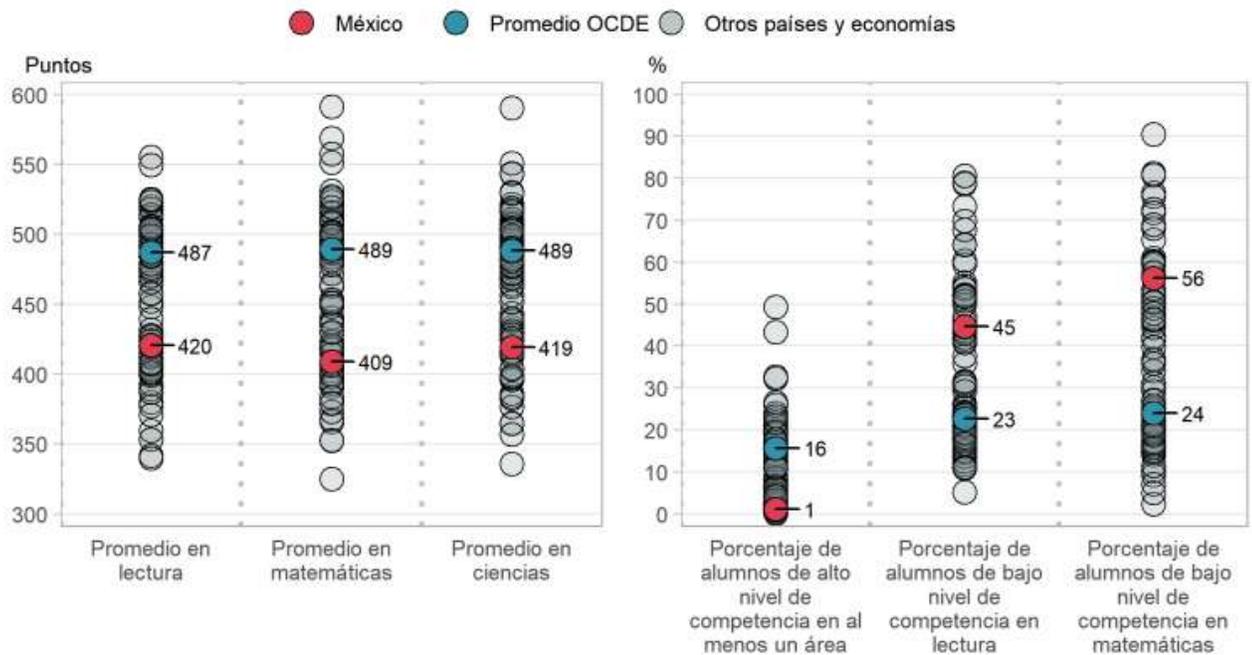


Figura 1. Desempeño en lectura, matemáticas y ciencias.

Fuente: OECD, PISA 2018 Database, Tables I.1 and I.10.1.

Como se aprecia en la figura 1, en las tres áreas, un puntaje más bajo corresponde al obtenido por los estudiantes en México, en relación al promedio de la OCDE. Lo anterior, coincide con lo que dice el informe PISA 2018, el puntaje de los estudiantes mexicanos en cuanto al promedio OCDE las áreas de lectura, matemáticas y ciencias fue bajo. Al menos en un área, solo el 1 % de los estudiantes obtuvo un desempeño en los niveles de competencia 5 o 6, mientras que el promedio de la OCDE corresponde al 16 %, y un porcentaje considerable del 35 % de los estudiantes no obtuvo un nivel 2, que es mínimo de competencia en las 3 áreas (promedio OCDE:13%). Los resultados muestran que en cuanto a matemáticas hay un desempeño deficiente, un alto porcentaje del 56.6 % de los estudiantes corresponde a esto, siguiendo con el área de lectura con un 41.7 % y, por último, el área de ciencias con el 47.8 %.

De acuerdo a Márquez (2017), el sistema educativo está bajo las miradas de la sociedad, ya que al evaluar y comparar los resultados de acuerdo al paso de los años y a las evaluaciones que se han realizado anteriormente, en cada una de las áreas de lectura, matemáticas y ciencias (Tabla 1 y figura 2), se observa que el cambio es mínimo y que nuestro país sigue estando rezagado en relación de los demás países de la OCDE.

Tabla 1. México y OCDE, medidas de desempeño en PISA, 2000-2015.

Fuente: NCES, 2017

	Año	Lectura	Año	Matemáticas	Año	Ciencias
México	2000	422	2003	385	2006	410
	2009	425	2012	413	2015	416
OCDE promedio	2000	494	2003	499	2006	498
	2009	493	2012	496	2015	493

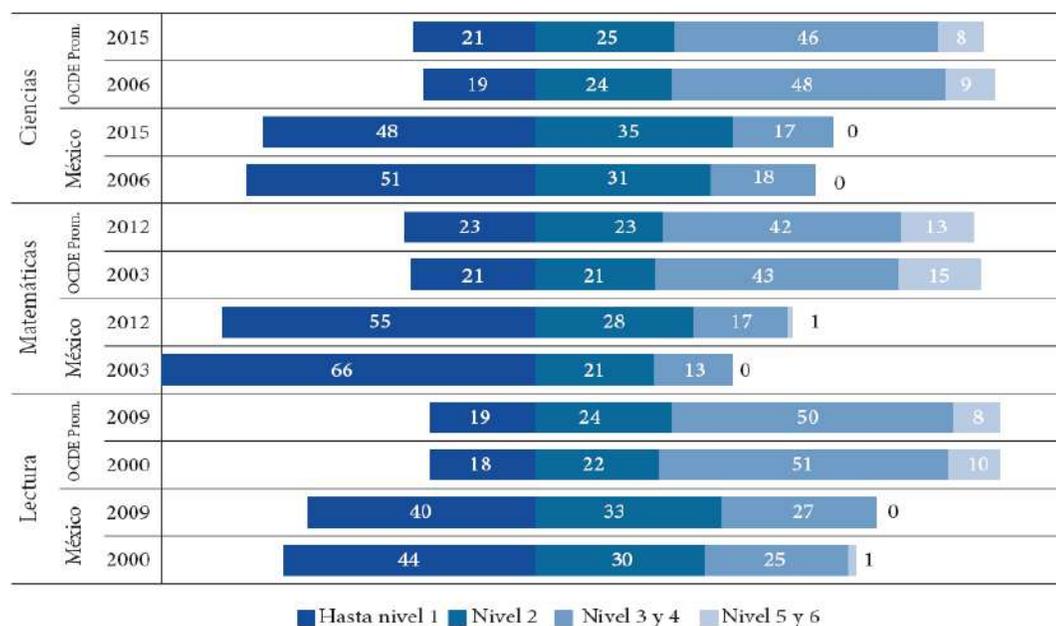


Figura 2. Porcentajes de estudiantes por nivel de desempeño en la escala global de lectura, matemáticas y ciencias, 2000-2015.

Fuente: INEE, Informes PISA, varios años.

Cómo se puede apreciar, en cuanto a la participación de México en PISA, se ha mantenido en comparación con el desempeño promedio en cada una de las áreas. En 2003, en lectura y matemáticas fue muy inferior al de PISA 2018, y superior en PISA 2009 (matemáticas) en comparación con el desempeño en PISA 2018.

Al evaluar estos resultados, se resalta que, a lo largo de la educación formal del estudiante, en cada nivel las matemáticas presentan una dificultad notable para que éste logre un aprendizaje, además de mencionar lo que nos dice Osuna y Díaz (2020), que comúnmente tanto la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina se asocian a dificultades cognitivas y resultados deficientes, lo que propicia a un escenario poco alentador respecto a la misma.

Y en ese sentido, Lamas (2010) afirma que el porcentaje de estudiantes que reprueban es alto, en algunos casos acreditan los cursos sin comprender los procedimientos mínimos y sin tener las nociones básicas necesarias, lo que significa que es notable una crisis en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Estos resultados invitan al docente a reflexionar acerca de su práctica y proponer el diseño de nuevos ambientes, de recursos didácticos y estrategias que favorezcan el aprendizaje, teniendo en cuenta el contexto y necesidad de cada estudiante. Se hace necesario considerarlo, debido a que existen diversos factores desde la cuestión familiar, económica y social, que influyen para que el estudiante logre el aprendizaje requerido.

Por tanto, cuando el profesor reflexiona en el diseño de estrategias, viene a colación el definir el significado de la enseñanza de las matemáticas, la cual se considera como un conjunto de procesos que varían, en donde el profesor planea estrategias y propone situaciones de aprendizaje significativo, situaciones que permiten que los estudiantes desarrollen y fomenten la actividad matemática.

Es así que, mediante el diseño de estas estrategias didácticas, las cuales son propuestas por el profesor, se fortalecen los procesos y tipos de pensamiento matemático, desarrollando competencias por parte de los estudiantes.

Si bien, este desarrollo de competencias es notable a través de los diversos mecanismos de evaluación y con ello se tiene una referencia del nivel que alcanzan los estudiantes, así como percibir las deficiencias en las diferentes áreas evaluadas, y es entonces, que, a partir de estos resultados, mediante la suma de trabajo y voluntad de los actores educativos, sea posible desarrollar e implementar estrategias que favorezcan al proceso de enseñanza de los estudiantes y a la vez se mejoren las dificultades presentadas.

Por tanto, una vez que se centra el hecho de enseñar los contenidos a través de los procesos matemáticos de resolución de problemas, de razonamiento y prueba, así como de comunicación y representación, se desarrolla la competencia matemática. Y a la vez se permite ver como se adquiere y se da el uso del conocimiento matemático en sus diferentes representaciones, ya sea en el hecho de razonar, pensar, relacionar o modelar, etc.

De acuerdo con Alsina, García, y Torrent (2019), el planificar y gestionar la enseñanza de los contenidos permite enfatizar las relaciones que surgen entre ellos, y no solo eso, sino también que hay un progreso del conocimiento de la disciplina y existe una mayor habilidad en la aplicación de conceptos, así como destrezas ante la misma.

De acuerdo a lo que Pozo (1990) menciona: “la educación consiste en adquirir conocimientos que logren llevar al estudiante a cuestionar y generar nuevos aprendizajes de manera que se integren en la vida práctica”, en ese sentido y bajo esa mirada de adquirir nuevos conocimientos y teniendo al alcance la innovación educativa, además de la consideración del avance de la tecnología, se considera

que el software GeoGebra es un gran apoyo en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el área de trigonometría, en estudiantes de nivel medio superior de la escuela de Bachilleres Plantel Conca.

Como se ha mencionado previamente, se considera que existen dificultades muy notables en matemáticas, principalmente en el área de trigonometría, lo cual en parte es por las estrategias y métodos de enseñanza que emplea el profesor, y a razón de las evaluaciones, trabajos, tareas y actividades en el desarrollo de la clase para los estudiantes. Es así que, los estudiantes revelan las dificultades en el aprendizaje que tienen en matemáticas a través de errores que cometen, por lo que se hace necesario detectarlos y hacer un análisis, que permita usarlos de forma positiva y evaluar como influyen para replantear estrategias en el proceso educativo (Del Puerto y Minnaard, 2004).

Pensando en el panorama educativo, como lo indica Gómez (2017):

Es necesario propiciar una mejora constante en la calidad de la educación, asegurando que los alumnos cuenten con las herramientas y capacidades fundamentales para comprender y analizar textos, expresarse por escrito, tener un pensamiento crítico, reflexivo, creativo y propositivo con capacidad de razonamiento matemático que les permita ser ciudadanos activos y participativos.

Por lo que en búsqueda de una mejora y de un aprendizaje significativo se diseñó una propuesta didáctica de trigonometría, la cual reforzará el desarrollo de estrategias de aprendizaje, así como los procesos de pensamiento matemático.

3.1. Formulación del problema

A través de los años, las prácticas docentes han dado resultados no tan favorables

en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y debido a que hay un cambio constante y las tecnologías están evolucionando, se pueden presentar e implementar nuevas estrategias y técnicas a través del uso de softwares educativos. Los blogs, chats, entornos virtuales, internet, foros, material didáctico, mensajerías, softwares interactivos, videos conferencias, wikis, webquest, mensajerías, y otros canales de comunicación y manejo de información contribuyen a la gran diversidad de recursos de las TIC, que sirven de apoyo en los procesos de enseñanza. Por su naturaleza, promueven y facilitan en el espacio educativo el desarrollo de la creatividad, innovación, entornos de trabajo colaborativo, promoción del aprendizaje significativo, activo y flexible (Rodríguez, Romero y Vergara, 2017). Teniendo en cuenta lo anterior, la enseñanza de la trigonometría puede ser potenciada con el uso de herramientas digitales, ya que en la actualidad tienen un papel importante en los métodos de aprendizaje implementados en el ámbito educativo en México.

Debido a que las TIC tiene un gran potencial para desarrollar las habilidades y conocimientos de los estudiantes, se hace relevante que los docentes aprovechen las herramientas digitales para promover el aprendizaje autónomo y significativo, proporcionando tanto al estudiante como al profesor una mayor comprensión de un tema en particular. Buscando que el alumno se involucre aportando ideas propias que de algún modo enriquezcan el tema expuesto y a la vez lo comprendan mejor. Es entonces que, bajo el uso del software, los alumnos podrán comprender y visualizar mejor el área de trigonometría, adquiriendo aprendizajes significativos.

IV. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Este trabajo se basa en la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, que de acuerdo a Olgún (2016), es un referente teórico que además de posibilitar el diseño de una secuencia didáctica también permite la investigación, proporcionando información para el análisis de la misma. En palabras de Rotaèche (2008), en la enseñanza de las matemáticas, de acuerdo a esta teoría, tenemos tres componentes que interactúan de forma cotidiana:

- a) La componente Cognitiva, que se representa por el estudiante, el cual está sumergido en este contexto, y quien requiere construir y hacer suyo el conocimiento a disposición.
- b) La componente Epistemológica, representada por el saber enseñar que tiene su propia naturaleza y es el profesor quien desea enseñar al alumno a través de una situación didáctica diseñada con situaciones a-didácticas, planteadas para producir un aprendizaje.
- c) La componente Didáctica, representada por el profesor quien es el intermediario que facilita la construcción que el alumno hace del conocimiento en juego.

Y dado que en la TSD de Brousseau, intervienen elementos como: el alumno, el profesor y el saber enseñar, y es el segundo elemento quién facilita el medio en el cual el estudiante debiera construir su conocimiento. Por tanto, surge relevancia en considerar lo ya descrito por Rotaèche (2008), que una situación didáctica se considera como la organización del medio, y que quien organiza es el profesor, con la intención de que el estudiante aprenda algo y a su vez comprenda las interacciones entre los actores del sistema didáctico, caracterizadas por los contratos didáctico, pedagógico y escolar.

El contrato didáctico, de acuerdo con Brousseau (2002), es un compromiso

recíproco, entre docente y alumno, el cuál condiciona el comportamiento de los estudiantes cuando están resolviendo un problema. En cuanto al contrato pedagógico, regula los intercambios entre las partes participantes y define respecto al sistema de derechos y obligaciones una duración limitada en comparación del didáctico, que es duradero. Por último, el contrato escolar se refiere a las responsabilidades que tiene cada uno de los integrantes de un proceso educativo.

Teniendo en cuenta que la TSD está sustentada en una concepción constructivista en el sentido piagetiano del aprendizaje. Brousseau (1986), citado por Olguín (2016) afirma:

“El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje” (p.63).

Por otro lado, de acuerdo a Chavarría (2006), la teoría de Brousseau propone situaciones didácticas, las cuales refieren al proceso donde el docente presenta el medio didáctico para que el alumno construya su conocimiento. Es en esta situación, donde se da la interacción de quienes participan en el triángulo didáctico. Y las cuales están orientadas a desembocar en una situación a-didáctica, que no es otra cosa que un proceso donde el estudiante se confronta a un problema presentado y que podrá llevar a cabo la construcción del conocimiento. En este caso, el estudiante resolverá el problema sin la intervención del docente.

4.1. Situaciones Didácticas

4.1.1. La Situación Acción

El estudiante trabaja de forma individual con un problema, pone en práctica sus conocimientos previos y desarrolla un determinado saber. Es decir, el estudiante interactúa con el medio didáctico, para llegar a la resolución de problemas y a la adquisición de conocimientos (Castro, Arteaga y Ricaurte, 2018).

Para que una situación acción desemboque en una situación didáctica, se hace necesario considerar que al formular el problema, éste sea interesante para el estudiante, y que a la vez la respuesta de la pregunta formulada no sea inmediata, así, represente de manera real un problema para el alumno, ya que, recordemos que, en estos momentos, el profesor se aparta del proceso y no existe su intervención. No perdamos de vista que es él quien alista el medio didáctico, propone los problemas y enfrenta al estudiante a ese medio didáctico.

4.1.2. La Situación de Formulación

En esta situación, se da el trabajo en grupo, los alumnos se comunican, compartiendo experiencias en la construcción del conocimiento, teniendo un control de como comunican sus ideas e interactúan con el medio didáctico. Básicamente se enfrenta a un grupo de estudiantes con un problema dado, en donde cada uno de ellos se hace partícipe del proceso.

4.1.3. La Situación de Validación

Después de que los estudiantes han interactuado con el medio didáctico, se evalúa el producto obtenido, validando lo trabajado hasta ese momento y discutiendo con el profesor si el trabajo realizado es correcto o no.

Por último, la institucionalización del saber, representa una actividad de suma importancia en el cierre de una situación didáctica, a pesar, de que no constituye una situación didáctica. Dado que, para entonces, los estudiantes ya han construido su conocimiento, el docente retoma lo que se ha hecho hasta ese punto y efectuado hasta el momento para precisarlo, aportando observaciones y clarificando los conceptos que generaron ciertos problemas en la situación didáctica. Se presentan los resultados en orden, y como se dio la construcción del conocimiento.

4.2. Tecnologías de la información y la comunicación

El uso apropiado de las TIC, además de considerar otras innovaciones pedagógicas y de gestión escolar permite mejorar la práctica docente, incidiendo en la calidad del sistema educativo. Por lo que, las instituciones que contribuyen a la formación de docentes deben plantear diferentes formas de como integrar las TIC en los procesos de enseñanza aprendizaje, en búsqueda de que al incorporarlas se tenga un sentido didáctico-pedagógico, que contribuya a lograr competencias profesionales de los prospectos docentes, teniendo una formación más allá de ser simplemente instrumental, sino con un alcance de complementar, enriquecer y transformar la educación.

Belloch (2012), define las TIC como un conjunto de tecnologías que permiten el acceder, producir, tratar y comunicar información mediante distintos códigos (texto, imagen, sonido). Por lo que existe la conexión entre diferentes medios, como se enuncia en lo siguiente: “En líneas generales se podría decir que las nuevas tecnologías de la información y comunicación son las que giran en torno a tres medios básicos: la informática, la microelectrónica y las telecomunicaciones; pero giran, no sólo de forma aislada, sino lo que es más significativo de manera interactiva e interconectadas, lo que permite conseguir nuevas realidades comunicativas” (Cabero, 1998; Belloch, 2012).

En el ámbito educativo, la incorporación de las TIC se ha convertido en un proceso cuya implicación, no se limita solo al hecho de apoyarse en las herramientas tecnológicas presentes en el ambiente educativo, sino más allá, donde se aprecia una construcción didáctica y la consolidación de un aprendizaje significativo, en un estricto apego pedagógico de la tecnología en la educación (Díaz-Barriga, 2013).

4.3. Incidencia de las TIC en Matemáticas

Además de los grandes avances que ha tenido la tecnología en áreas profesionales como la arquitectura, comunicación e ingeniería, también se ha visto de manera puntual en la educación, como una de las principales herramientas que favorece la formación del estudiante. Específicamente ha tomado fuerza en las matemáticas, al hacer uso de estas herramientas, es común ver el reemplazo de cálculos impresos, que, en consecuencia, se disminuye el error en los resultados y se optimiza el tiempo para realizar dichos cálculos. Es así, que este avance en la educación, y en la enseñanza formal, se requiere tener conocimientos o formarse en tecnología para implementarla como parte de una estrategia de enseñanza-aprendizaje.

La tecnología hace posible que se dé en cierta manera el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, lo que significa que el uso de las TIC fortalece el aprendizaje de la trigonometría, facilitando la comprensión de algunos de sus temas, mediante la interacción que tiene el estudiante entre sus diferentes representaciones verbales, numéricas, algebraicas, etc., las cuales se emplean para conocer mejor su objeto de estudio.

Entonces, bajo esta incidencia en las matemáticas, se tiene conocimiento que hay un inmenso número de software educativo que se emplea en búsqueda de un aprendizaje en la trigonometría; y uno de ellos es el software GeoGebra, considerado como una herramienta que permite mejorar el aprendizaje de forma más activa, desarrollando su capacidad intelectual. Para complementar, Zengin,

Furkan y Kutluca (2011) señalan al hacer uso de este software, los estudiantes crean actividades que presentan diferentes representaciones de conceptos matemáticos vinculados de forma dinámica. Por otro lado, el control del tiempo a emplear y el hecho de que el estudiante logre tener un perfil de sujeto creativo y observador, además de despertar un gusto por otras materias, también es algo donde el software influye.

Como bien se sabe, las diferentes herramientas que existen en el ámbito educativo que favorecen al campo de la trigonometría, que se hace presente en este contexto de cambios tecnológicos, deben estar bien direccionadas para lograr el aprendizaje y garantizar las competencias requeridas en matemáticas de una forma lúdica. Para el estudiante, quien actualmente se encuentra envuelto en el mundo tecnológico, debe resultar motivacional el uso de las TIC, porque, además, le permitirá tener otra visión en cuanto al estudio de las funciones trigonométricas que en la enseñanza tradicional se han abordado con procesos rutinarios que a vista de los estudiantes son poco interesantes, resultando que lo aprendido al respecto se olvide en un tiempo corto (Cardona, 2017).

También, en cuanto a la comprensión de los estudiantes de trigonometría, Zengin *et al.*, (2011) nos hablan acerca de los efectos que presenta GeoGebra como software de geometría dinámica. Así, retomando lo anterior y en relación a esta propuesta como trabajo de investigación, el software GeoGebra se utilizó para el desarrollo de la propuesta didáctica y sirvió de apoyo para el diseño de la misma y el desarrollo de los ejercicios, el cual se utilizó en espera de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría en el alumnado.

4.4. Recurso didáctico GeoGebra

Chancusig *et al.*, (2017) afirman que los recursos didácticos son la vía que se puede considerar como alternativa donde se haga una referencia directa tanto en formarse,

capacitarse e instruirse para la enseñanza, y que durante el proceso de la enseñanza-aprendizaje se logre el objetivo planteado.

Como ya se mencionó el recurso didáctico que se utilizó para el diseño e implementación de la propuesta didáctica es GeoGebra, y considerando lo indicado por Corral (2015), es un software libre de matemática, que permite reunir de forma dinámica distintas disciplinas como el álgebra, la aritmética, cálculo y la geometría. Además, éste software se considera un recurso didáctico potente en la planeación y ejecución de las clases de matemáticas, siendo una herramienta de gran versatilidad al grado de poder realizar ejercicios personalizados (Herrera, 2013).

Dado que es un recurso sencillo, pero potente, las diferentes representaciones que ofrece constan de apreciar sus gráficas en cualquier dimensión y perspectiva, así que al aprovechar esto, se analizó el comportamiento de las funciones, evaluando tanto el dominio, como la amplitud y demás características de las mismas.

4.5. Definiciones conceptuales

- **Aprendizaje**

Este concepto, se ha asociado con cambios relativos que permanecen en la conducta del ser humano, después es concentrado para adquirir conocimientos o habilidades (García, Fonseca y Concha, 2015). Se adquieren nuevas conductas a partir de experiencias previas, y lo que se aprende es conservado por el ser humano, para disponer de él cuando se requiera.

- **Trigonometría**

De acuerdo a Corral (2015), esta rama de las matemáticas se asume como una herramienta matemática que da facultad a la resolución de problemas no solo en el plano, sino también en el espacio. El significado etimológico de la palabra trigonometría es “la medición de triángulos” y se aplica en nuestro contexto cuando

se hace necesario lograr medidas precisas (Gómez, Castañeda, Llorente, et al., 2015), por lo que, en base a esta medición de triángulos, se hace presente la relación que se tiene con las funciones trigonométricas.

- **Función**

Una función matemática se considera como una regla de correspondencia entre cantidades, siempre y cuando a cada elemento de un grupo o conjunto corresponda sólo uno del otro grupo. La importancia de ésta viene a razón del enorme campo de aplicaciones teóricas y prácticas. De ahí entonces que, González (2014) señala que a partir de esta regla de correspondencia se logra presentar la función trigonométrica como la asociación de las proyecciones sobre los ejes coordenados de la relación de identidades trigonométricas.

- **Tecnología multimedia**

Es la utilización que se da en conjunto de varios medios, como texto, imagen, sonido, videos y animaciones que incluso pueden ser interactivos (González, 2013). Es un medio capaz de integrar imágenes (estáticas o dinámicas), sonidos, texto y voz dentro de un entorno, por lo que Ulizarna (1998) indica que la tecnología multimedia, está en un intervalo a la mitad de los medios editoriales tradicionales (texto, gráficos, fotografías) y audiovisuales (animaciones, sonido y vídeo), ya que ambos se emplean entrelazados.

- **Software educativo**

Son programas educativos y didácticos diseñados para computadora, que al considerarse como medio didáctico tienen como propósito específico facilitar y contribuir al proceso de enseñanza-aprendizaje. Es una herramienta pedagógica que se elabora específicamente con ese propósito (Mi portal, 2017), por lo que, de acuerdo a Vidaurre y Vallejos (2015), su incorporación en el área de matemática permitirá la recreación de situaciones de acuerdo al contexto del estudiante y de ese modo hacerla menos abstracta.

Según Carrión *et. al.* (2003), existen dos elementos que deben considerarse en el desarrollo de un software educativo, la estructura y la teoría de aprendizaje. La primera refiere a los modelos de elaboración de software en ingeniería, donde se plantean etapas hacia la producción del conocimiento por parte del estudiante, y, en segundo lugar, las diferentes teorías del aprendizaje como el constructivismo, conductismo y cognitivismo.

V. HIPÓTESIS Y OBJETIVOS

5.1. Hipótesis

Los alumnos de bachillerato comprenden mejor la trigonometría con el apoyo del software GeoGebra.

5.2. Pregunta de Investigación

¿Cómo influye el uso de las herramientas digitales en el proceso enseñanza aprendizaje en el área de trigonometría?

5.3. Objetivos de la Investigación

5.3.1. Objetivo General

- Mejorar la enseñanza aprendizaje de la trigonometría utilizando el software GeoGebra.

5.3.2. Objetivos Específicos

- Manejar conceptos trigonométricos mediante el apoyo gráfico y tecnológico del software.
- Calcular los ángulos con funciones trigonométricas.
- Identificar las gráficas trigonométricas.
- Analizar las gráficas de funciones trigonométricas a partir de sus principales características.

VI. METODOLOGÍA

En este capítulo como lo señala Martín (2013), se caracteriza la investigación, se describe la muestra de los participantes en el presente trabajo, el proceso del diseño de los instrumentos para la obtención de datos, el procedimiento de aplicación e implementación de los instrumentos, y los pasos a seguir para evaluar y analizar los datos obtenidos previamente.

El siguiente proyecto ha sido realizado en las instalaciones del Campus Concá de la Universidad Autónoma de Querétaro, ubicado en la comunidad de Concá, en el municipio de Arroyo Seco y de forma virtual con alumnos de nivel superior del programa educativo Licenciatura en Animación Digital (semestre 1) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro.

6.1. Enfoque

El presente proyecto se realizó bajo el enfoque cualitativo- descriptivo, teniendo en cuenta el objetivo general y los resultados que se obtuvieron a partir del instrumento de evaluación y según Hernández (2010), estos estudios especifican las propiedades más relevantes de las personas, grupos o fenómenos que puedan someterse a un análisis.

Este trabajo, tuvo un diseño experimental de tipo comparativo, en donde se siguieron las etapas que menciona Muñoz (2013), se recogió la información, se organizó, clasificó y comparó para interpretarse e inferir algo acerca del tema de estudio, todo esto con el propósito de apoyarse en las tecnologías para desarrollar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría. Debido a que el investigador es quien plantea el problema, se eligió el enfoque cualitativo, como lo indica León *et al.* (2011), la dirección de las investigaciones de tipo cualitativo va de lo particular a lo general.

6.2. Tipo de Investigación

En la investigación se puso en práctica una propuesta de trabajo que permitió la evaluación y mejora del aprendizaje de la trigonometría en los estudiantes de bachillerato del plantel Concá y de alumnos de semestre 1 de la LAD de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ).

6.3. Muestra

La muestra considerada para la investigación correspondió a alumnos entre los 16 y 18 años de edad, en primer lugar, a 20 estudiantes de la escuela de Bachilleres del plantel Concá de la Universidad Autónoma de Querétaro. También se han considerado 9 estudiantes de semestre 1 de la LAD de la Facultad de Ingeniería de la UAQ, con aproximadamente 18-19 años, teniendo una muestra total de 29 alumnos. También se encuestaron 5 profesores que apoyan en el área matemáticas, los cuáles prestan servicio en la institución educativa, tanto a nivel medio superior como a nivel superior.

La elección de los estudiantes se hizo debido a que se los instrumentos se aplicaron en modalidad presencial y virtual, tanto para los alumnos de bachillerato y nivel superior, respectivamente.

6.3.1 Consideraciones éticas

En un proyecto de investigación cualitativa en cuanto a las consideraciones éticas y como señala Moscoso y Díaz (2018), los testimonios e interpretaciones de los sujetos estudiados son un punto clave para comprender el fenómeno de interés, los cuales se abordan mediante interacciones, por tal, en el proceso investigativo se llevó a cabo: la invitación a participar en la investigación, donde se indicó que la información obtenida, es estrictamente utilizada con fines académicos, cuidando en todo momento el respeto a la persona y el anonimato a la misma, de forma

confidencial y privada como tal, se les entregó un documento para firma de conformidad en cuanto a la información que se obtuvo y ser parte en la investigación.

Por otro lado, se realizó la gestión permisos tanto al coordinador de la escuela de Bachilleres del Plantel Concá como a la profesora en turno de los alumnos de LAD, así como una carta dirigida a los padres de familia o tutores de los alumnos de nivel medio superior, debido a que los participantes en la investigación eran menores de edad, por lo que fue necesario, la autorización de los padres o tutores. En cuanto a los profesores, se les consensó en la aplicación del cuestionario.

6.4. Desarrollo de la metodología

Se llevó a cabo un cuestionario, la cual se aplicó a los estudiantes participantes, misma que fue estructurada para reunir información acerca del uso de las TIC en el desarrollo de la materia de matemáticas.

6.4.1. Técnicas de recolección de Información

En esta investigación se diseñó y aplicó un cuestionario para la obtención de información, mediante una serie de preguntas dirigidas a estudiantes de la Escuela de Bachilleres Plantel Concá, así como alumnos de semestre 1 de la LAD y docentes del área de matemáticas, con la finalidad de evaluar el uso de dichas tecnologías en el desarrollo de las clases. Ambos cuestionarios se elaboraron de acuerdo a la problemática planteada. En seguida se aplicó una prueba diagnóstica para evaluar las condiciones iniciales de los alumnos, posteriormente se implementó la propuesta didáctica. Al final para evaluar si se cumplió con el objetivo se aplicó un instrumento de evaluación, la prueba final, como una segunda prueba que ayudó a comparar el nivel de comprensión en cuanto al tema y en relación al uso del software GeoGebra.

6.4.2. Instrumento de recolección de información

El instrumento de recolección de información fue un cuestionario integrado con un conjunto de preguntas, con la finalidad de proporcionar información y sirva para poder interpretar y estructurar un diagnóstico. El cuestionario aplicado a los alumnos fue sido diseñado considerando aspectos relacionados con las TIC, así como aspectos del desarrollo de las clases de la trigonometría con algún software. Por otro lado, la encuesta dirigida a los docentes solicitó información sobre su formación profesional y la implementación de algún software educativo en el desarrollo de las clases. Ambos cuestionarios se pueden revisar en los anexos 1 y 2.

6.4.3. Prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica (Anexo 3) constó de diez ejercicios, los cuales se propusieron para evaluar los conocimientos previos que tenían los alumnos en cuanto al área de trigonometría, desde lo básico en cuanto a razones hasta llegar a funciones trigonométricas. La estructura de la misma se diseñó bajo el siguiente orden, primeramente, se evaluó lo que tiene que ver con la definición de las razones trigonométricas a partir de los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo, resolviendo estos mediante las mismas razones o por el Teorema de Pitágoras, para dar paso al círculo unitario y las funciones trigonométricas y finalmente características de las funciones trigonométricas.

6.4.4. Diseño e implementación de la propuesta didáctica

El proyecto se centró en una propuesta didáctica que puede ser de utilidad para los docentes que se enfrentan a la enseñanza de la trigonometría en el nivel medio superior y nivel superior, de modo que los alumnos puedan alcanzar las destrezas con un criterio de desempeño. Para el diseño de la propuesta didáctica, se consideraron dos situaciones, las cuáles se estructuran de actividades de inicio, desarrollo y cierre, dichas actividades se propusieron con la intención de llevar al

alumno a comprender el tema de funciones trigonométricas, de manera general y en el orden, se consideró evaluar un ángulo agudo, formular las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo, evaluar un triángulo rectángulo en el círculo unitario, formular las funciones trigonométricas y evaluar características de éstas. Siendo entonces, que en la actividad de inicio había aspectos conceptuales, de evaluar la construcción; en la de desarrollo, actividades detonadoras y en el cierre; actividades diseñadas en applets del mismo software GeoGebra, donde se buscó evaluar si él alumno había comprendido la intención de la actividad general.

La propuesta constó de dos situaciones:

1. “Calcular las funciones trigonométricas de algunos ángulos con la definición de función trigonométrica mediante el círculo trigonométrico usando la computadora”.

Actividad 1: Funciones trigonométricas de un ángulo agudo.

Actividad 2: Definiciones de las funciones trigonométricas en referencia a los lados de un triángulo rectángulo.

Actividad 3: Funciones trigonométricas sobre el círculo trigonométrico.

Como se observa en la primera situación, la finalidad de las actividades propuestas en ella fue que al realizarlas se llegara al cálculo de las funciones trigonométricas de ángulos apoyándose en el círculo unitario, además de que para el desarrollo de las actividades se respondieran preguntas de conceptos y de la propia construcción indicada que ayudara a lograr el objetivo de cada situación.

2. “Identificar las gráficas correspondientes a cada una de las funciones trigonométricas a partir del análisis de sus características particulares”.

Actividad 1: Construcción de las gráficas de las funciones trigonométricas

Actividad 2: Reconocer las características principales de las funciones trigonométricas.

En esta situación, las dos actividades propuestas se realizaron para lograr la

identificación de las funciones trigonométricas, por tanto, se realizó la construcción de cada una de ellas, para posteriormente evaluar sus características principales. En cada una de las situaciones, las actividades propuestas se desarrollaron respetando un orden, correspondiendo al nombre tanto en el desarrollo como en la construcción de acuerdo a como está indicado previamente.

Como bien se ha señalado, el objetivo de este trabajo es evaluar la mejora en la enseñanza-aprendizaje de la trigonometría a través del diseño e implementación de una propuesta didáctica, y en miras a favorecer este proceso, se consideró llevar a cabo la intervención didáctica, proceso en donde el profesor actúa como intermediario y a la vez ofrece ayuda para lograr el aprendizaje del alumno, estimulando y cooperando con él en su propio aprendizaje.

La intervención del profesor es un proceso de investigación, donde quienes intervienen en ella, elaboran y evalúan cómo justificar la práctica en el desempeño de los estudiantes. Como lo menciona Pérez (2014), el principal objetivo del proceso de intervención es la modificación de la práctica, la búsqueda o representación de la innovación que permitan al estudiante el logro del aprendizaje. La importancia de valorar el proceso de aprender a enseñar se hace presente en la formación y práctica del docente, de modo que este se prepare y esté comprometido con su labor, que a través de la reflexión acerca de una intervención didáctica puedan identificar errores y se consideren, con el objetivo de lograr un buen nivel de enseñanza y de aprendizaje.

6.4.5. Plan de desarrollo de actividades de intervención

De acuerdo al Anexo 4, las actividades en cada una de las situaciones se realizaron mediante momentos de inicio, desarrollo y cierre; primeramente, con actividades para introducir conceptos e inducir al alumno a la comprensión del tema. Posteriormente en el desarrollo se realizaron actividades para abordar el tema y

actividades detonadoras de acuerdo al objetivo de la situación. Finalmente, actividades de cierre para evaluar si se cumplió con el objetivo propuesto de cada situación.

6.4.6. Prueba final

En este caso, la prueba final (Anexo 5) se diseñó considerando la misma estructura de la prueba diagnóstica, se indicaron diez ejercicios similares a los ejercicios indicados en la prueba diagnóstica, en el mismo orden, primero se abordó lo referente a razones trigonométricas, luego funciones trigonométricas y, por último, el análisis de las características de las mismas funciones. Se puede observar la prueba final en el Anexo 5 en el presente documento.

6.4.7. Lista de cotejo de construcciones con el software GeoGebra

Para evaluar el uso y manejo del software GeoGebra, se diseñó una lista de cotejo (Anexo 6), donde se evaluaron diferentes criterios a partir de categorías como el uso de las TIC y micro categorías como la habilidad, mayor familiarización, creatividad y optimización.

VII. ANÁLISIS DE DATOS

Este capítulo describe el análisis y los resultados obtenidos a partir de las respuestas emitidas en los cuestionarios del uso de las TIC, tanto de alumnos como de docentes, la prueba diagnóstica, y las actividades que realizaron los estudiantes durante la intervención didáctica, así como las respuestas emitidas en la prueba final.

Como ya se mencionó, el desarrollo de actividades se realizó con estudiantes de bachillerato de diferentes semestres (semestre 4 y 5) y con alumnos de primer semestre de la LAD, en sesiones presenciales y virtuales de 50 minutos, en las que se trabajó la construcción de ángulos, de triángulos rectángulos y la construcción de las gráficas de las funciones trigonométricas.

7.1. Respuestas de los alumnos en el cuestionario del uso de las TIC

El cuestionario de los alumnos (Anexo 1) fue dividido en tres apartados, los cuáles se explicarán de forma detallada de acuerdo al contenido de cada uno.

a) **Apartado 1:** Refiere a cómo el estudiante se apoya y utiliza las TIC para el desarrollo de las clases, a continuación, en la tabla 2 se muestra cada una de las preguntas y para fines de apreciar mejor las respuestas se presentan enumeradas, posteriormente, en la figura 3 es posible apreciar las respuestas que emitieron los estudiantes en función a la escala utilizada.

Tabla 2. Cuestionario del uso de las TIC.

No.	Pregunta
P1	¿Con qué frecuencia haces uso de la tecnología para realizar las actividades académicas?
P2	¿Has tenido alguna experiencia con el uso de software educativo durante tu proceso de aprendizaje?
P3	¿Es más fácil para ti resolver un problema cuando utilizas la tecnología?

P4	¿Utilizas la computadora y/o otras tecnologías de la información cuando realizas presentaciones en clase?
P5	¿Has tenido oportunidad de trabajar en equipo, durante el desarrollo de una clase con el apoyo del uso de recursos tecnológicos?
P6	¿Consideras importante utilizar software educativo para tu aprendizaje?
P7	¿Utilizarías la tecnología para tu formación académica?
P8	¿Utiliza el docente de matemáticas recursos tecnológicos para enseñar temas relacionados con Matemáticas?
P9	¿Has utilizado un software matemático?
P10	¿Has utilizado un calculadora científica online?
P11	¿Has escuchado acerca de software educativo para el aprendizaje de matemáticas?
P12	¿Resuelves los ejercicios planteados utilizando algún software matemático?
P13	¿Te parecen interesantes los programas informáticos de matemáticas?
P14	¿Te parecen de fácil manejo los programas de matemáticas que has utilizado?
P15	¿Consideras que el desarrollo de la materia puede llevarse a cabo utilizando algún software matemático?
P16	¿Consideras que el usar un software matemático tienes un mejor aprendizaje de la materia?
P17	¿Desearías mejorar el manejo de un programa matemático para la resolución de ejercicios trigonométricos?
P18	¿Consideras que el uso de un software matemático te permite desarrollar habilidades y destrezas?

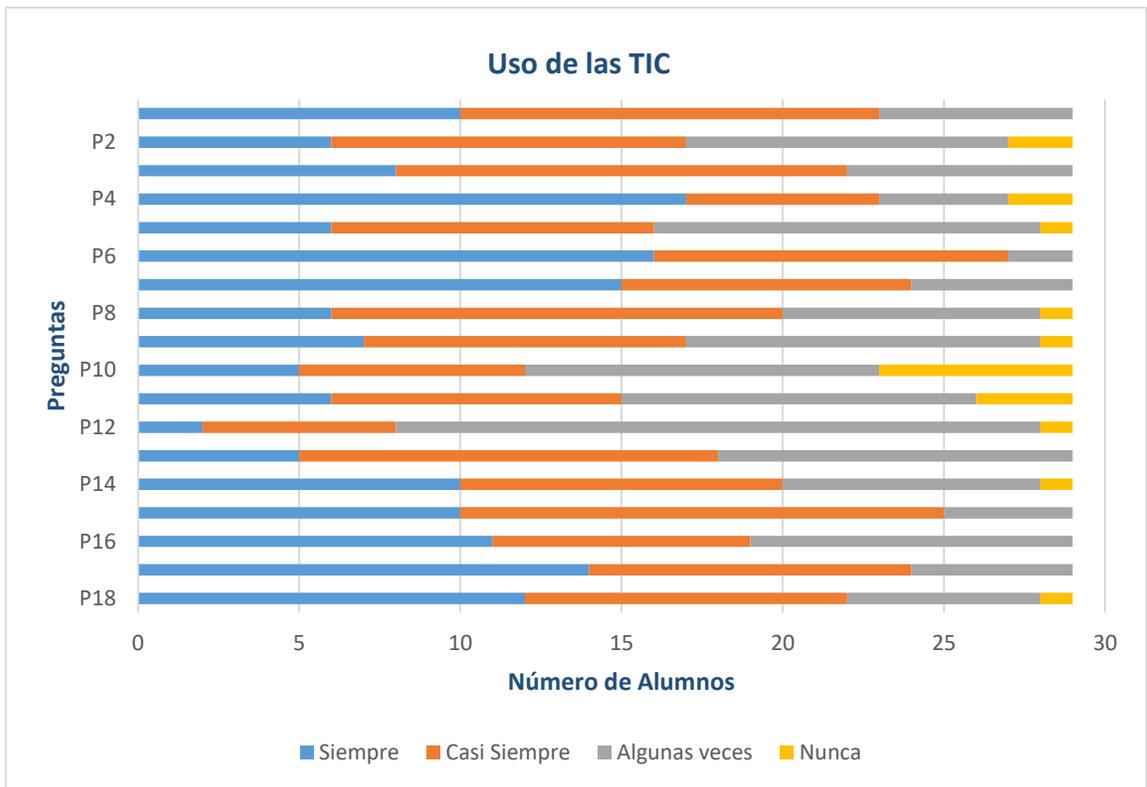


Figura 3. Respuestas de los estudiantes respecto al cuestionario de las TIC.

Como se observa en la figura 3, el 36 % de los estudiantes expresaron que, sí han hecho uso de la tecnología para realizar actividades académicas, considerando que contestaron el cuestionario aún en tiempos de pandemia y que el uso de las herramientas digitales era más constante, un porcentaje aún mayor del 46 % expresó que casi siempre hacían uso de la tecnología.

Por otro lado, es posible ver que también el 50 % considera que casi siempre es más fácil resolver un problema utilizando la tecnología, como se muestra en la pregunta 4, un porcentaje significativo del 60 % hace uso de ella y de las computadoras para actividades de clase.

Un porcentaje elevado correspondiente al 57 % manifiesta que siempre es importante utilizar software educativo para lograr un aprendizaje, y en ese punto, el

39 % casi siempre se apoyaría para el mismo objetivo, así mismo, la mitad de los estudiantes manifiestan que los docentes en el área de matemáticas recurren a los recursos tecnológicos para abordar los temas; sin embargo, el uso de algún software matemático ha sido poco, el 39 % lo ha hecho algunas veces y de forma favorable sólo el 18 % siempre lo ha hecho.

A pesar de que son estudiantes de semestres avanzados en la escuela de bachilleres y de nivel superior, desconocen la existencia de softwares educativos para el aprendizaje de matemáticas, el 32 % algunas veces es sabedor que existen, una minoría que corresponde al 21 % siempre lo tiene en cuenta.

Teniendo en cuenta lo anterior, y lo necesario que se ha vuelto en nuestros tiempos, se considera notablemente (53 %) que el desarrollo de la materia de matemáticas, puede llevarse a cabo utilizando algún software en el área. Por lo que, los estudiantes tienen la disposición para mejorar en el manejo de un programa matemático para la resolución de ejercicios de trigonometría en un 48 %, además de que casi la mitad (46 %) está de acuerdo en que el uso del mismo les permitirá desarrollar sus habilidades y destrezas.

b) **Apartado 2:** En cuanto al recurso que consideran los alumnos más adecuado y fácil de manejo para el desarrollo de las clases, el 48 % considera que la computadora es la más viable. Le siguen las calculadoras con un 37 % y en tercer lugar se encuentran los libros con un 33 % y aunque el hecho de que los programas de cómputo no estén en los primeros lugares, se hizo la misma elección para estos y las presentaciones en diapositivas, como nos muestra la figura 4.

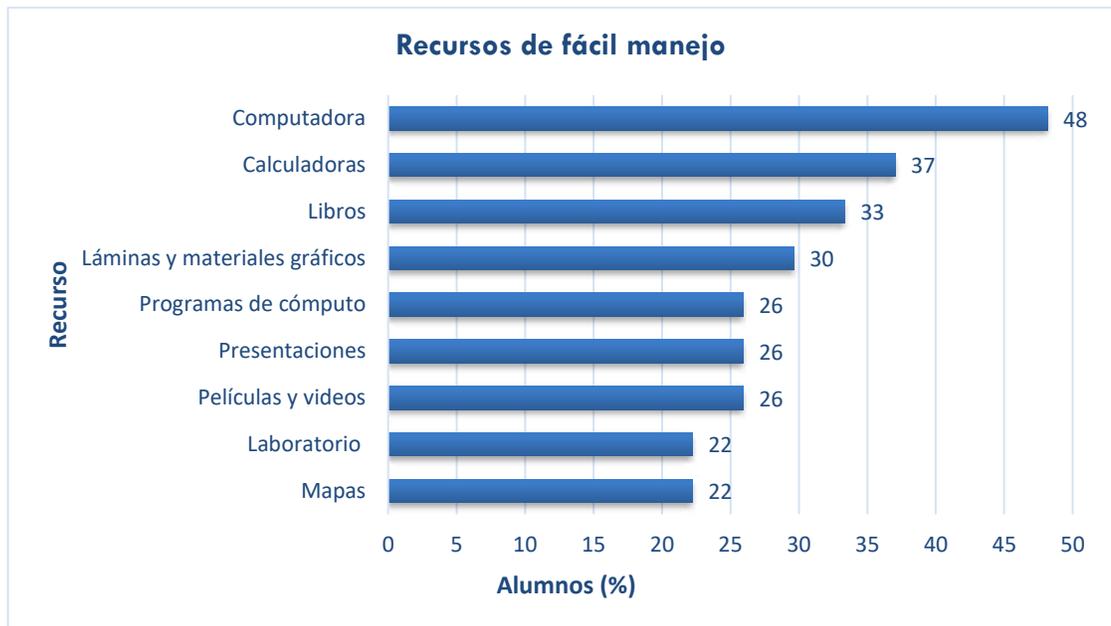


Figura 4. Recursos utilizados por los alumnos.

c) **Apartado 3:** En este punto el cuestionario se refiere a utilizar las TIC específicamente en el área de matemáticas y dispositivo a utilizar para el desarrollo de las clases. Revisando si conocen alguna una calculadora científica on-line, solo el 17 % no tiene noción alguna, y quienes la conocen, han utilizado en mayor medida la calculadora de Mathway y Symbolab, sin embargo, una cuarta parte no ha utilizado alguna, como se muestra en la gráfica inferior.

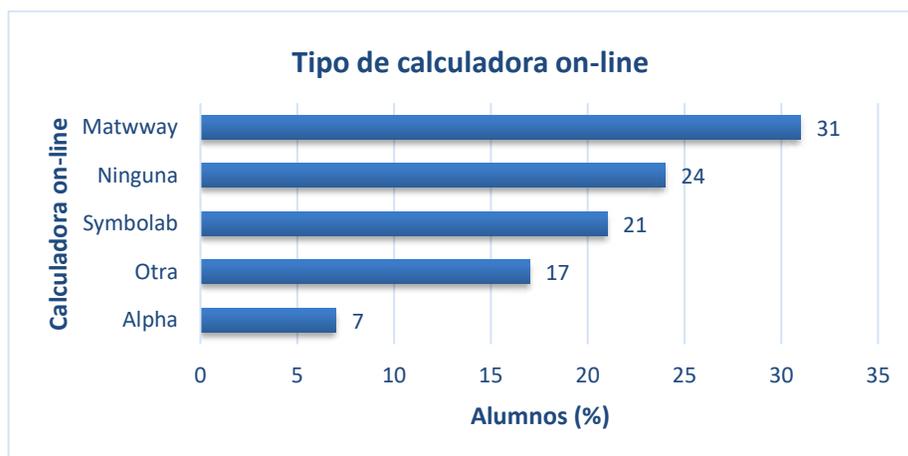


Figura 5. Tipos de calculadoras on-line.

Por otro lado, la totalidad de estudiantes manifestaron que es el GeoGebra, el software matemático que han utilizado los estudiantes en sus clases. Continuando con los datos, y considerando la modalidad de las clases, un 46 % manifestó que la plataforma más utilizada para el desarrollo de las clases fue la plataforma del Campus Virtual de la UAQ, minimizando el uso del WhatsApp con un porcentaje de 21 %, ya que de acuerdo a las condiciones a las que estamos expuestos desde el ámbito de infraestructura, la conexión a internet fue una limitante, por lo que se optó por usar ese medio de comunicación.

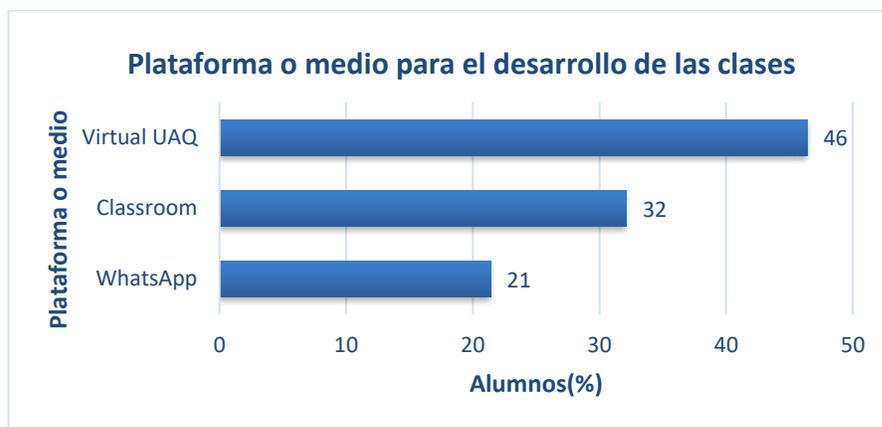


Figura 6. Tipo de plataforma utilizada durante el desarrollo de las clases.

Por último, en la figura 7 se observa que el dispositivo que más se ha utilizado para el desarrollo de las clases, fue la lap top con un 48 %, mientras que el uso de la computadora de escritorio apenas y alcanzó un porcentaje de 21 %, además de usar con menos frecuencia el celular y tabletas.



Figura 7. Dispositivo utilizado en el desarrollo de clases.

7.2. Respuestas de los docentes en el cuestionario del uso de las TIC

Los resultados emitidos por los docentes se analizaron en dos apartados, primeramente, se abordan aspectos de la formación y años de labor y, en segundo lugar, el uso de las TIC. Participaron cinco docentes que apoyan en el área de matemáticas, en nivel de bachillerato en el plantel Concá y de las licenciaturas que se ofertan en el mismo campus.

a) **Apartado 1:** En este punto, quienes participaron son docentes que han apoyado en el área de matemáticas, mismos que se formaron con posgrados que les permiten desempeñar su función en el área y que contribuyen a la formación de los alumnos. El tiempo que han hecho la labor de docencia varía de los tres años hasta los 16 años, ya que no solamente apoyan en las disciplinas del campus Concá, en lo que respecta a nivel medio superior y licenciatura, sino también en nivel básico y medio superior de la región, incluso en otros campus de la misma universidad.

b) **Apartado 2:** El cuestionario refiere al uso de las TIC en su práctica docente, la inclusión de las TIC en la planificación del contenido temático de las materias que imparte resultó favorecedora con miras a mejorar, algunas de las respuestas indican que ha sido satisfactorio, ya que los estudiantes comienzan a familiarizarse con las TIC y a hacer uso de ellas en sus diferentes actividades.

Además de mencionar que han incluido ejercicios didácticos con herramientas interactivas en línea.

Para el caso de los recursos que utiliza para desarrollar sus clases, en su totalidad los docentes acceden a internet y utilizan programas matemáticos, en menor medida, con un 70 % se apoyan mediante presentaciones y calculadoras on-line.

Los docentes manifestaron apoyarse de un software matemático en el desarrollo de sus clases, mientras que una cuarta parte expresó hacerlo con mayor constancia. Como se observa en la figura 8, GeoGebra es el software que se utiliza con mayor frecuencia en comparación con otros software o aplicaciones matemáticas.

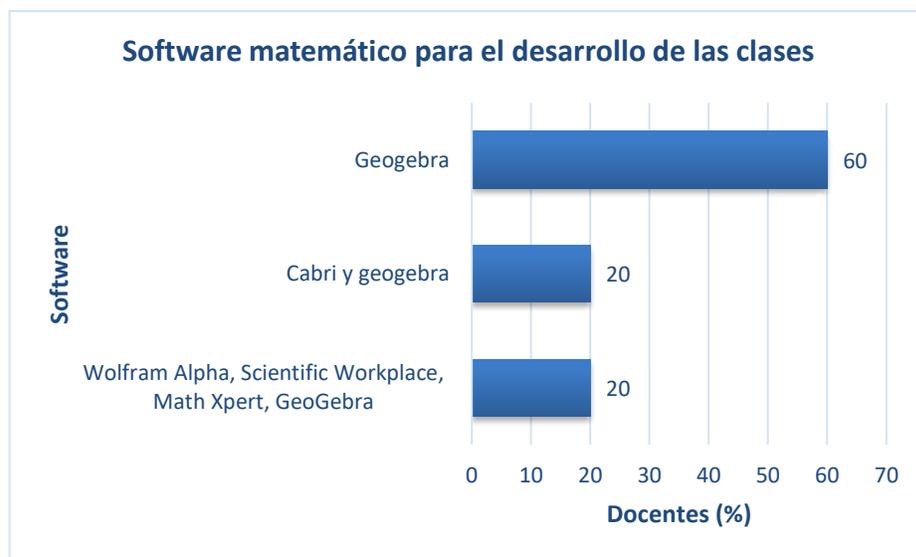


Figura 8. Software matemáticos utilizados en el desarrollo de las clases.

En cuanto a la plataforma a utilizar para comunicarse con los estudiantes, la que mayor se utiliza es classroom, el 40 % opina que es la que más se utiliza y zoom también, de ahí, cada uno tiene respuestas diferentes y eso se explica debido a que los alumnos a los que se les imparte clase están bajo diferentes condiciones y características de su entorno, es entonces, que utilizan el medio que sea más útil para el estudiante y permita la comunicación entre ambos.

Los docentes expusieron que el uso de las TIC facilita el aprendizaje de la materia, porque permite que los estudiantes tengan una mayor diversidad de herramientas que ayuden en el aprendizaje y pueden estar más atentos durante la clase, pueden apoyarse para verificar procedimientos o verificar gráficas, y al saber utilizarlas o estar familiarizados con ellas pueden aprovecharlas de una mejor manera, haciendo interactivo el proceso de enseñanza aprendizaje.

El 80 % de los docentes han llevado cursos de actualización del uso y manejo de las TIC (Fig.9), eso explica que el nivel de competencia que consideran tener en cuanto al uso de las TIC en el ámbito educativo es regular (Fig. 10).

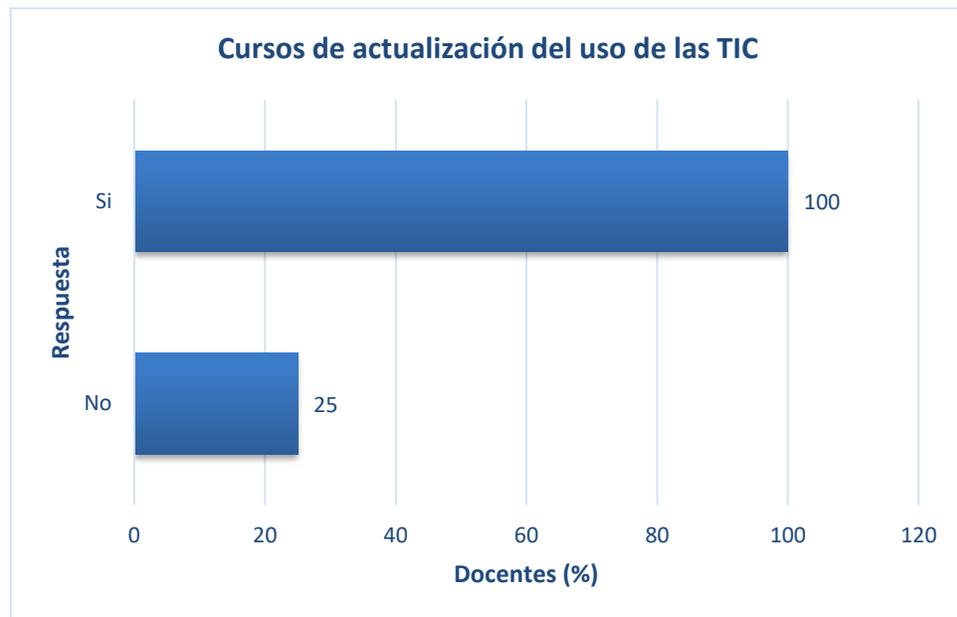


Figura 9. Cursos de actualización tomados por los docentes.

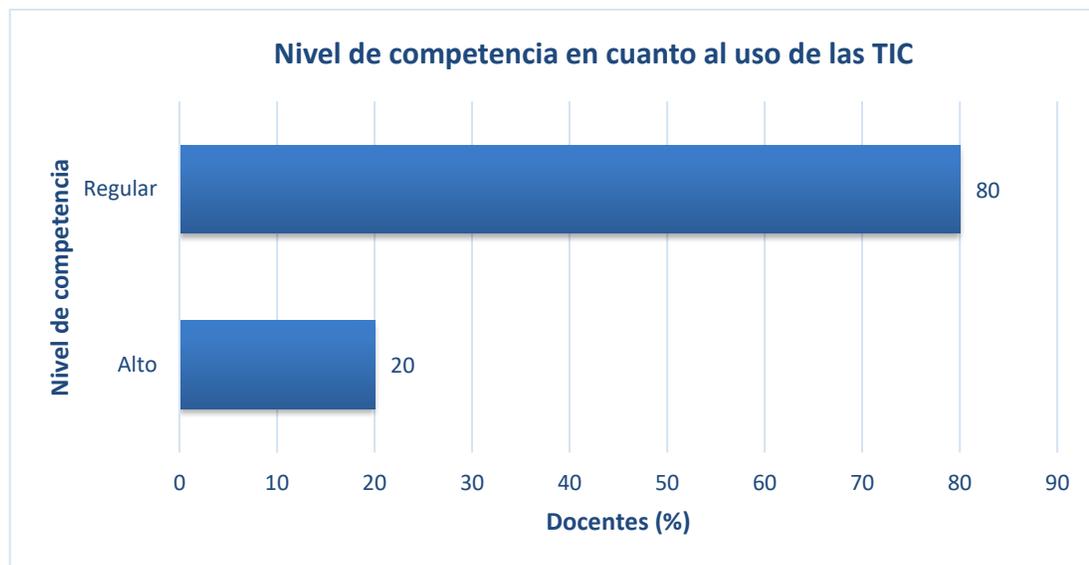


Figura 10. Nivel de competencia de los docentes en cuanto al uso de las TIC.

La mayoría de los docentes consideran realizar tareas con facilidad, tal es el caso de usar procesadores de texto, manejar motores de búsqueda, utilizar software matemático, guardar información, entre otros. Y una minoría, considera tener dificultad en cuanto a la elaboración de presentaciones multimedia y manejo de redes sociales. Los docentes expresaron tener limitantes para abordar temas del contenido de las materias, lo anterior, debido a que consideran no ser expertos en el manejo de las herramientas digitales disponibles y aunado a eso, las limitaciones que existen en cuanto al acceso de internet.

A pesar de que existen diferentes limitaciones, la mayoría de los docentes manifestaron haber tenido buena comunicación con los estudiantes mediante el uso de las TIC que han utilizado en su labor. En los comentarios adicionales, manifestaron el interés por cursos interactivos del uso de herramientas digitales, expresaron que ayudan en la práctica docente y favorecen el aprendizaje, además de que bajo un manejo adecuado pueden implementarse en el ámbito educativo.

7.3. Respuestas de los estudiantes en la prueba diagnóstica y prueba final

La prueba diagnóstica constó de diez ejercicios, en donde se abordaron relaciones de catetos, cálculos de valores naturales de ángulos notables, signos de funciones y gráficas de funciones.

De acuerdo a la escala para valorar las respuestas de los estudiantes, el 10 corresponde al valor más alto, significa que el estudiante contestó correctamente, en un orden descendente se valoraron las respuestas hasta llegar al cero, que se consideró como que los estudiantes no respondieron a la pregunta.

En lo que respecta a la prueba final, el contenido de esta es acerca de las razones trigonométricas, valores exactos de funciones trigonométricas, resolución de triángulo rectángulo, identificación de gráficas de funciones y características de las mismas. Debido a que no todos los alumnos terminaron las pruebas, para el análisis de las respuestas se interpretó mediante gráficas de cuartiles, haciendo comparaciones en cuanto a la mejora o no en ambas pruebas.

Al analizar cada uno de los ejercicios, fue posible apreciar la mejora que hubo, desde hacer la comparación mediante cuartiles como en medianas, datos derivados de las respuestas de los estudiantes. Analizando el ejercicio 1, se pudo apreciar que la media aumentó ligeramente en cuanto a la comprensión de las razones trigonométricas, lo anterior en función de la comparación hecha tanto en la prueba diagnóstica y la prueba final. En el ejercicio 2, se muestra que no hubo una mejora, sino al contrario, de acuerdo a las respuestas emitidas, hubo una disminución en cuanto a la media, en consecuencia, se aprecia en la figura 11 que la mediana también disminuyó notablemente.

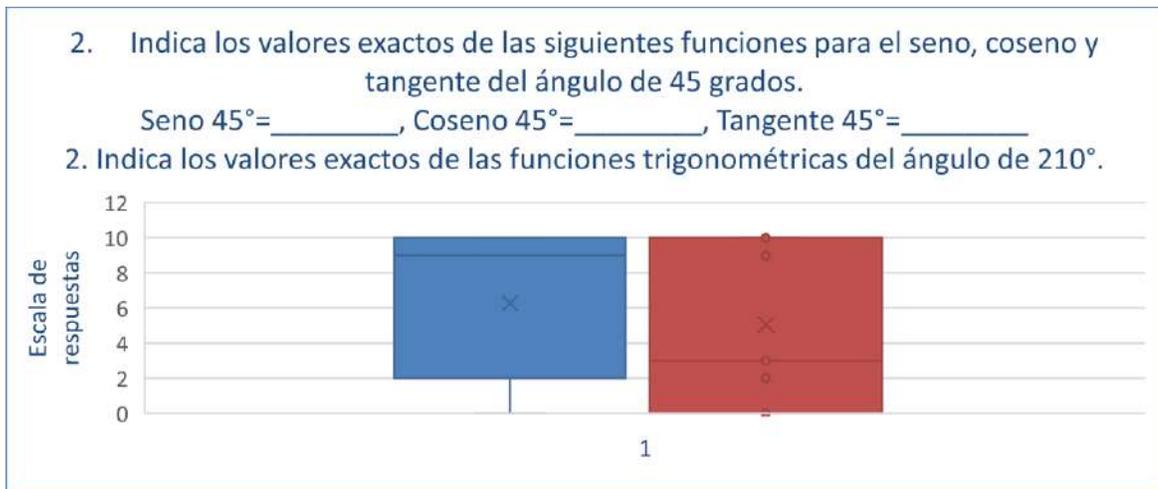


Figura 11. Valores exactos de funciones trigonométricas de ángulos notables.

Continuando con el ejercicio 3, que nos habla acerca de los signos de las funciones en los cuadrantes, para ambas pruebas, la mediana aumentó considerablemente en la prueba final, así como la media tuvo un aumento. En el siguiente ejercicio (4), en la resolución de un triángulo rectángulo, la media alcanzó en la prueba final un valor de 6.72, sobrepasando el valor en la prueba diagnóstica de 6.48.

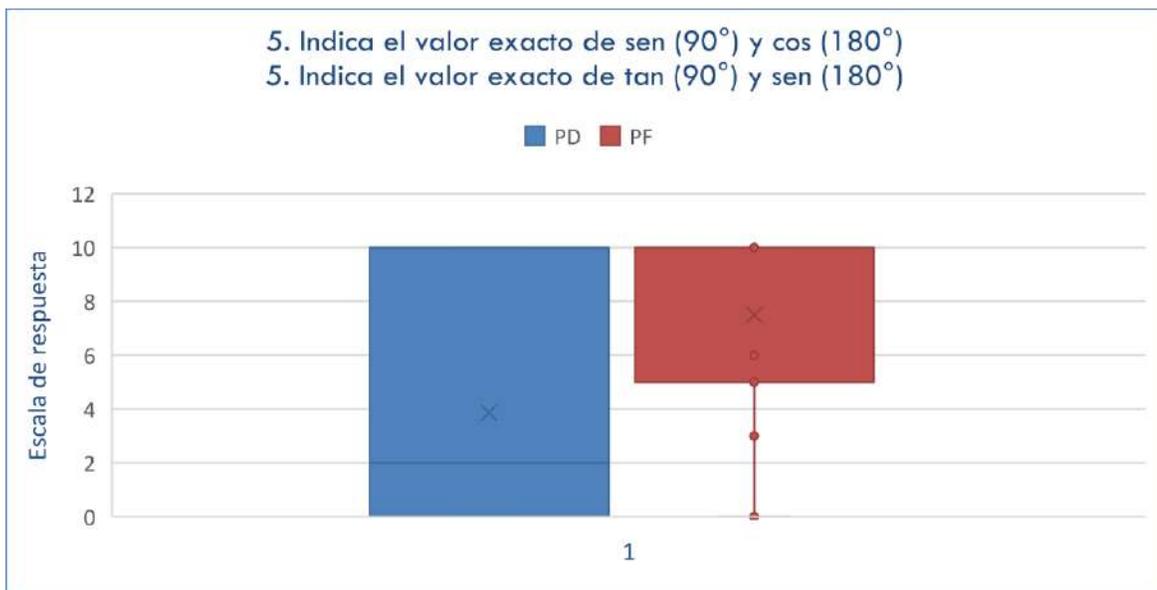


Figura 12. Valores exactos de funciones trigonométricas.

Como se aprecia en la gráfica anterior (Fig. 12), al indicar el valor exacto de algunas funciones trigonométricas, el 75 % de los estudiantes dieron respuestas de 5 a 10, por lo que se aprecia la mejora en la prueba final. Caso contrario, para el ejercicio 6, que expone la resolución de un triángulo rectángulo mediante las razones trigonométricas no hubo una mejora, es probable que el estudiante no comprendió lo solicitado en la prueba final, ya que el ejercicio en particular trataba de plantear las razones a partir de una razón trigonométrica, luego, el estudiante debía resolverlo mediante el Teorema de Pitágoras y a partir de ello, obtener el resto de las razones trigonométricas, de acuerdo a esto, no hubo un resultado favorable.

Se apreció una mejora en cuanto al ejercicio 7, el 50 % de las respuestas, estuvieron por encima del 7, por lo que la media aumentó de 2.62 en la prueba diagnóstica a 6.54 en la prueba final. Un 50 % de los estudiantes, emitieron respuestas con un valor mayor o igual a 6. En cuanto a los conceptos de periodo y amplitud, en el ejercicio 8, mismos que se abordaron en ambas pruebas, estos no difieren, como se aprecia en la figura 13, inicialmente las respuestas emitidas se encontraron en una escala considerablemente baja, mientras que, en la prueba final, se aprecian respuestas valoradas por encima del 7.

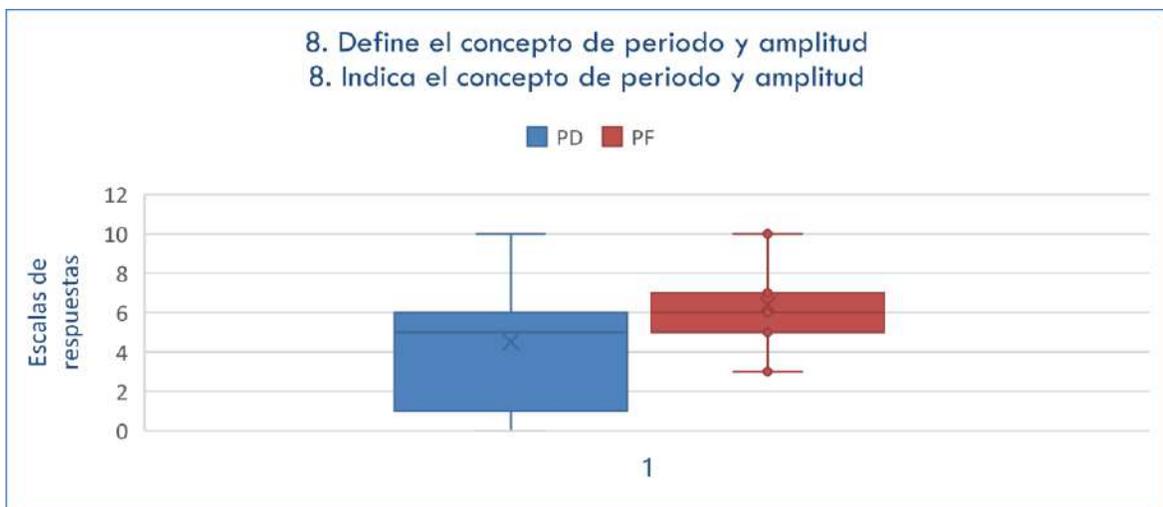


Figura 13. Definición de periodo y amplitud.

En la identificación de las gráficas de las funciones trigonométricas, haciendo referencia al ejercicio 9, hubo una mejora muy notable, en la prueba diagnóstica solo el 25 % obtuvo una calificación mayor a 7.5, inicialmente la media se posicionó en 3.55; mientras que en la prueba final alcanzó una puntuación de 7.5.

Por último, en el ejercicio 10 en la prueba diagnóstica, se da una función trigonométrica y se solicita graficar la amplitud y el periodo, sólo un alumno alcanzó una valoración de 10, el resto tuvieron puntuaciones menores a 5. Ya en la prueba final el 50 % de los estudiantes emitieron respuestas valoradas con puntuaciones de 5 a 10.

Como se observa en la figura 14, al realizar la comparación de ambas pruebas se aprecia que efectivamente hubo un aumento en cuanto a los valores de la prueba diagnóstica, el valor de la media aumentó de 4.70 a 6.50 puntos. Además, que, en la prueba final, el 50 % de los estudiantes tuvieron promedios por encima del 6.0, alcanzando promedios hasta de 9.0.

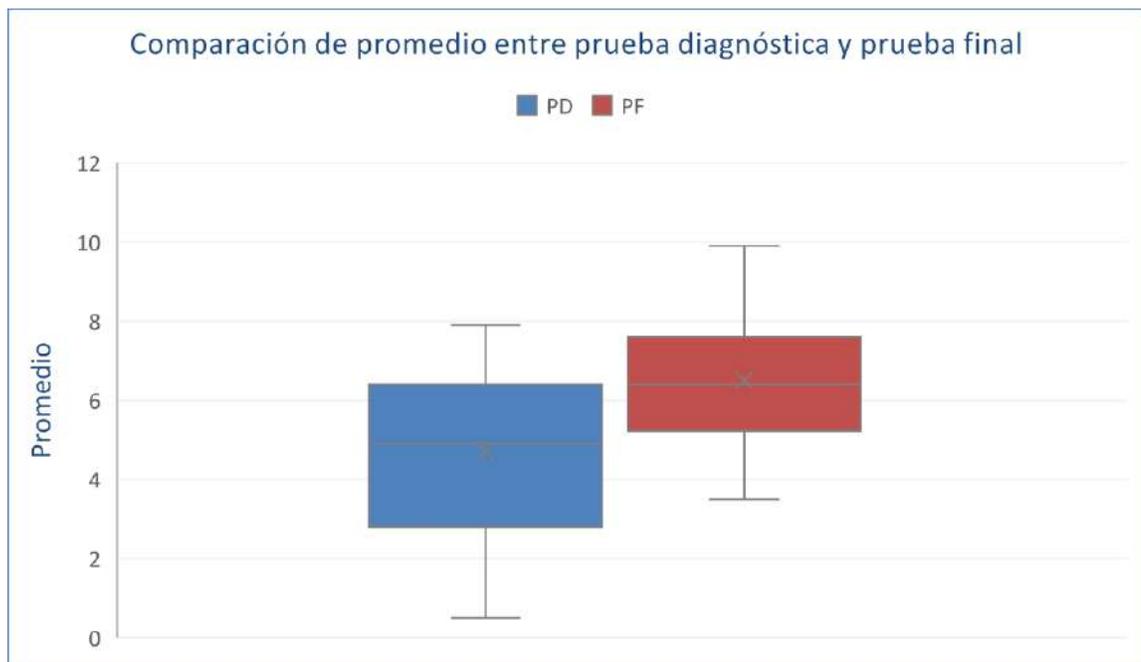


Figura 14. Promedio de la prueba diagnóstica y prueba final.

Por último, se observó que en la prueba final el promedio de cada estudiante fue más alto en comparación de la prueba diagnóstica, en la figura 15, se observa que algunos estudiantes no realizaron la prueba final, debido a que la aplicación de esta fue en modalidad virtual.

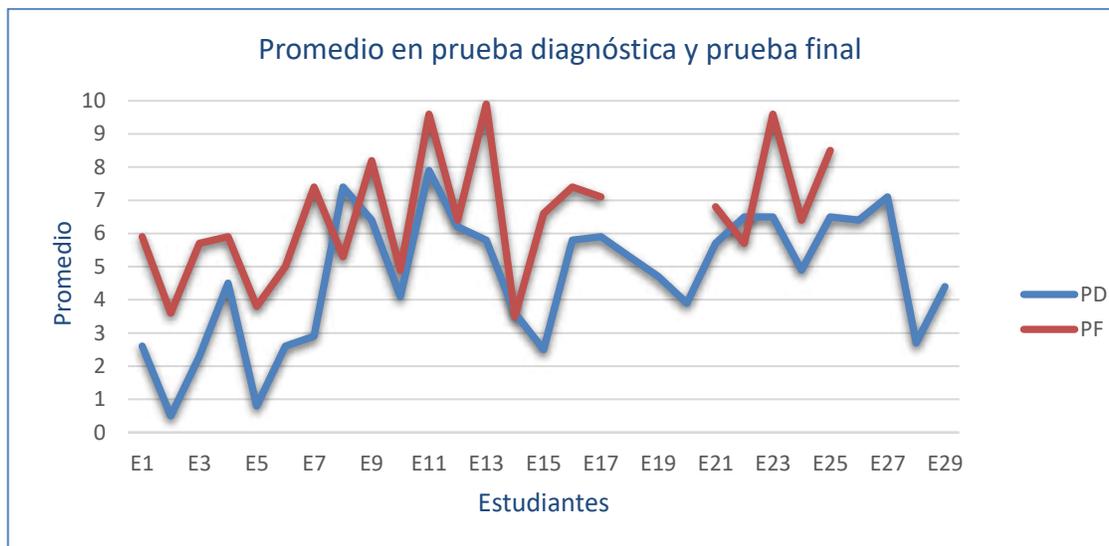


Figura 15. Comparación del promedio de cada estudiante.

7.4. Respuestas de los estudiantes en las actividades de la propuesta didáctica

En este apartado se describen las respuestas emitidas en el desarrollo de las actividades indicadas en la propuesta didáctica. Las actividades se desarrollaron en sesiones como se indicó ya previamente en la metodología.

A continuación, se describen las respuestas emitidas por los estudiantes de forma general, ya que el número de estudiantes que iniciaron las actividades no coincide con quien las terminó, algunas actividades tuvieron una participación casi del 100 % de la muestra, otras fueron entre un 80 % y 90 %.

El análisis de las respuestas emitidas se realizó en el mismo orden de acuerdo a cada una de las actividades en las situaciones indicadas en la propuesta didáctica.

En cada una de las preguntas hechas en la actividad, se indica una clasificación por grupos de acuerdo a las respuestas emitidas, así como algunas figuras que muestran lo contestado por los estudiantes.

Situación 1, Actividad 1.1

a) ¿Cuál es la definición de ángulo?

Al definir el concepto de ángulo, las respuestas se clasificaron en tres grupos:

1. *Mencionaron la existencia de dos rectas que se intersectan y la medida comprendida.*

Como se aprecia en la figura 16, el 53 % de los estudiantes emitieron una respuesta relacionada.

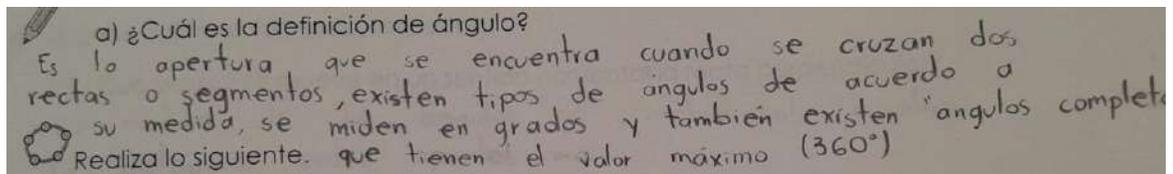


Figura 16. Definición de ángulo.

2. *Expresaron el ángulo como la pendiente de una recta o vector, y considera el ángulo que forma con el eje horizontal.*

Por otro lado, el 20 % de los estudiantes dieron la respuesta en relación al grupo anterior.

3. *Necesitaron asociar el ángulo con una figura geométrica.*

La figura 17 nos muestra que el 13 % emitió una respuesta de acuerdo a este grupo.

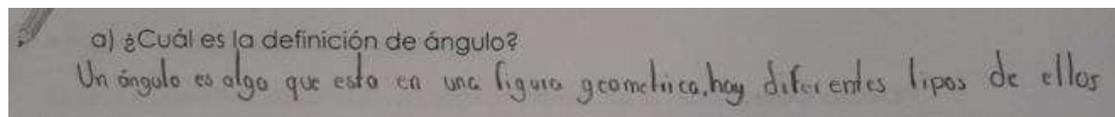


Figura 17. Definición no precisa de ángulo.

b) ¿Cuáles son los elementos y la medida de un ángulo agudo?

1. *Identificaron los elementos de un ángulo agudo y/o su medida, mencionando la intersección de dos rectas.*

Una mayoría del 60 (%) de los estudiantes dieron respuestas correspondientes a este grupo, como se ve en la figura 18.

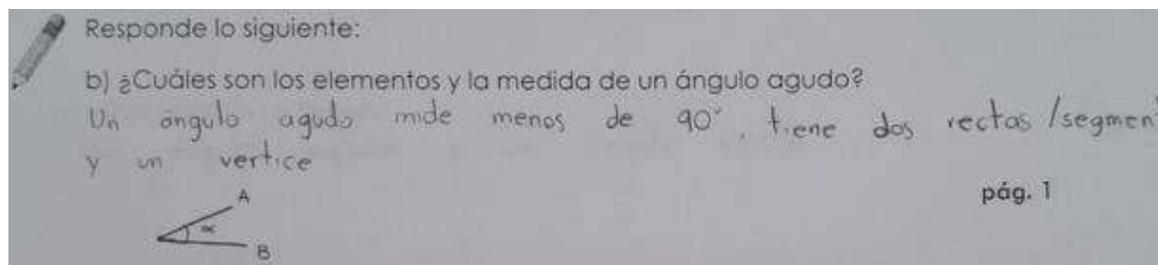


Figura 18. Elementos y medida de un ángulo agudo.

2. *No tuvieron claro cómo se clasifican los ángulos de acuerdo a su medida, hicieron referencia a un triángulo y a un ángulo recto.*

Así, una minoría del 22 %, no tuvo claro cómo se clasifican los ángulos.

3. *Refirieron a la construcción que realiza, sin comprender la pregunta.*

Sólo el 18 % de los estudiantes, dieron respuesta en función de la construcción que realizaron en el software, pero no precisamente comprendieron la pregunta para abordarla a partir de la construcción, de lo que se podía apreciar gráficamente y bajo la interacción con el mismo (Fig. 19).

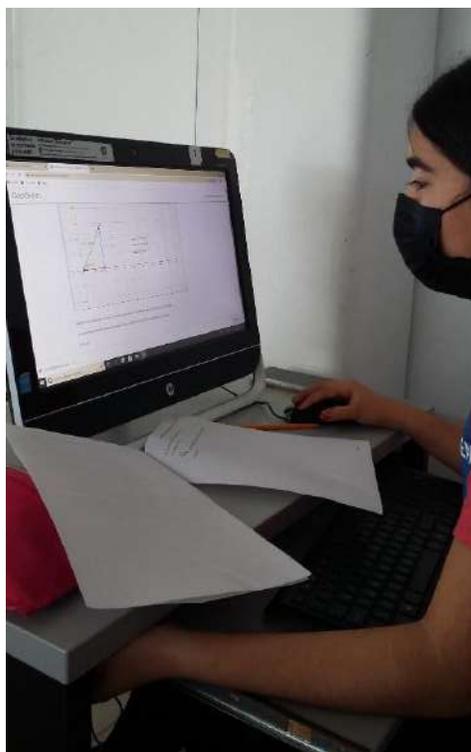


Figura 19. Estudiante interactuando con el software GeoGebra.

c) ¿Qué pasa si se mueve en un sentido horizontal la recta perpendicular?

1. De acuerdo con la construcción, visualizaron que la medida del ángulo se mantiene, no cambia.

Respuesta emitida por más de un 50 % de los estudiantes.

2. Asociaron el desplazamiento de la recta a la construcción del triángulo que se forma y no al ángulo a evaluar.

También de acuerdo a la figura 19, en cuanto a la interacción que se tuvo en la construcción de los trazos, el 38 % de estudiantes dio respuesta correspondiendo a este grupo, como se ve en la figura 20.

c) ¿Qué pasa si se mueve en un sentido horizontal la recta perpendicular?
Cambian las medidas de los lados.

Figura 20. Respuesta de un estudiante respecto a la recta perpendicular en la construcción de un trazo.

3. Se basaron en las medidas de los ángulos.

Sólo el 11 %, opinó en función de las medidas que tomaron los ángulos formados en la construcción hecha, como se ve en la figura 21.

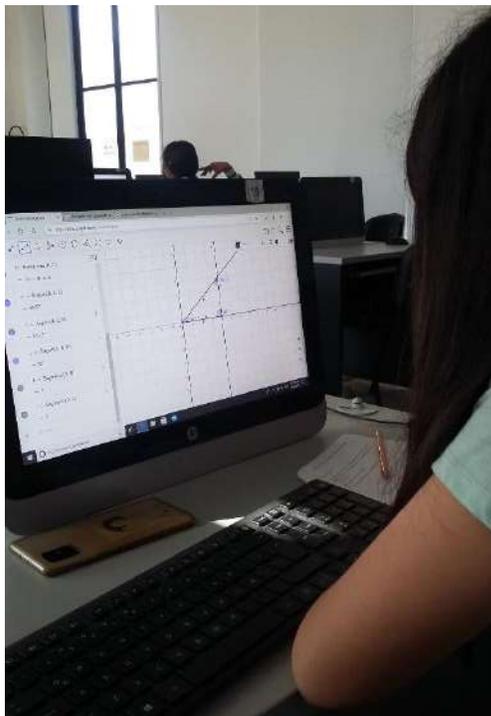


Figura 21. Construcción del trazo de triángulo rectángulo de acuerdo a la actividad 1.2.

d) ¿Qué figura se formó?

1. Identificaron la figura formada por la construcción.

El 86 % dio algunas respuestas como que “era un triángulo, pero más grande” o “triángulo rectángulo, o sólo el término “triángulo”.

2. *No identificaron el tipo de triángulo formado por la construcción.*
(14% de los estudiantes)

e) ¿Qué tipo de triángulo se ha formado?

Correspondiendo a la pregunta anterior, se consideraron los siguientes grupos:

1. *Identificaron el tipo de triángulo de acuerdo a la construcción hecha.*

El 84 % reconoció el triángulo rectángulo.

2. *De acuerdo a la construcción mencionaron otro tipo de triángulo.*

El 15 % mencionó otro tipo de triángulo, lo que significa que no tienen claro la clasificación de los triángulos de acuerdo a sus lados y ángulos (Fig.22).



Figura 22. Tipos de triángulo de acuerdo a la construcción.

f) Enuncia los segmentos que se tienen:

1. *Asociaron los segmentos a partir de la construcción hecha y de cómo los identifica en función de los vértices del triángulo.*

El 96 % de los estudiantes dieron respuesta en función de lo que se apreció en la construcción del trazo (Fig. 23).

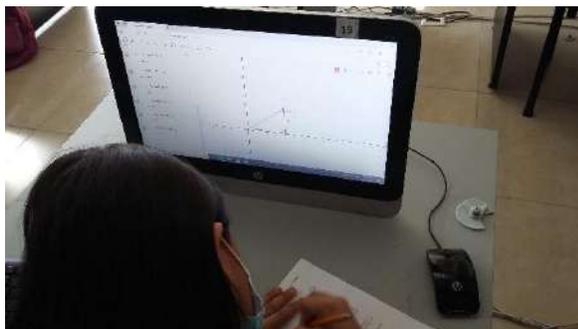


Figura 23. Construcción del trazo de la actividad 1.2

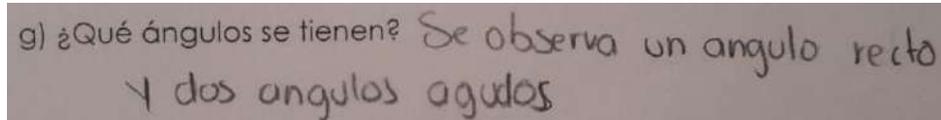
2. *Identificaron los segmentos como los lados del triángulo rectángulo.*

Excepto un alumno, que identificó dichos segmentos como catetos e hipotenusa.

g) ¿Qué ángulos se tienen?

1. *Mencionaron los tipos de ángulos presentes, 2 ángulos agudos y un recto.*

Más de un 40 % de los estudiantes identificaron que se tienen ángulos agudos y uno recto, tal como se ve en la figura inferior.

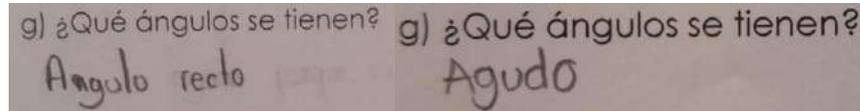


g) ¿Qué ángulos se tienen? Se observa un ángulo recto
y dos ángulos agudos

Figura 24. Ángulos presentes en un triángulo rectángulo.

2. *Identificaron sólo un tipo de ángulo.*

En la figura 25, se aprecia la respuesta de un estudiante que contribuye al 34%, donde identificaron sólo un tipo de ángulo, o que da a saber que, al menos comprenden que se tienen esos tipos de ángulos en un triángulo rectángulo.



g) ¿Qué ángulos se tienen? Ángulo recto

g) ¿Qué ángulos se tienen? Agudo

Figura 25. Identificación de un solo ángulo en un triángulo rectángulo.

3. *Asumieron el concepto de tipos de ángulos como medidas de ángulos, la pregunta no se comprendió como se esperaba.*

El 40 % indicaron respuestas respondiendo con medidas de los ángulos que se tuvieron en la construcción, asumieron el concepto de los tipos de ángulos como medidas de estos, probablemente, la pregunta no se comprendió como se esperaba.

Situación 1, Actividad 1.2

a) ¿Qué tipo de ángulo se tiene?

1. Asociaron el ángulo de acuerdo a su medida.

(96 % de los estudiantes, Fig. 26)

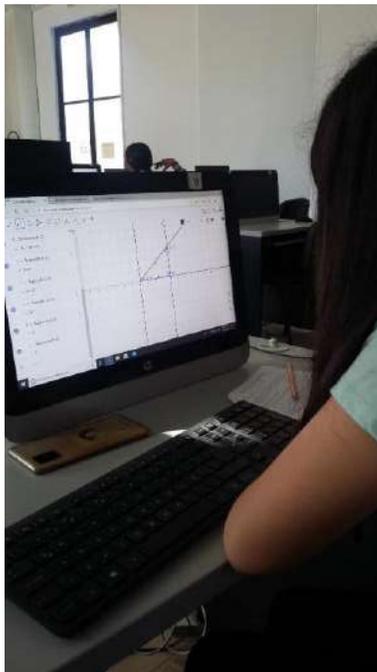


Figura 26. Construcción del trazo de triángulo rectángulo de acuerdo a la actividad 1.2.

2. Identifica el ángulo de acuerdo a la clasificación de la suma de su medida.

A excepción de un solo estudiante, que identificó al ángulo como complementario.

b) ¿Existe una regla para determinar los catetos?

1. Relacionaron la posición del ángulo, los lados del triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras.

El 68 % de los estudiantes relacionaron lo indicado en este grupo.

2. Consideraron la medida del ángulo recto que se forma con los catetos.

Otro 24 % considero que la referencia para los catetos es a partir del ángulo recto, que se forma mediante estos, ambas respuestas escritas se pueden observar en la figura 27.

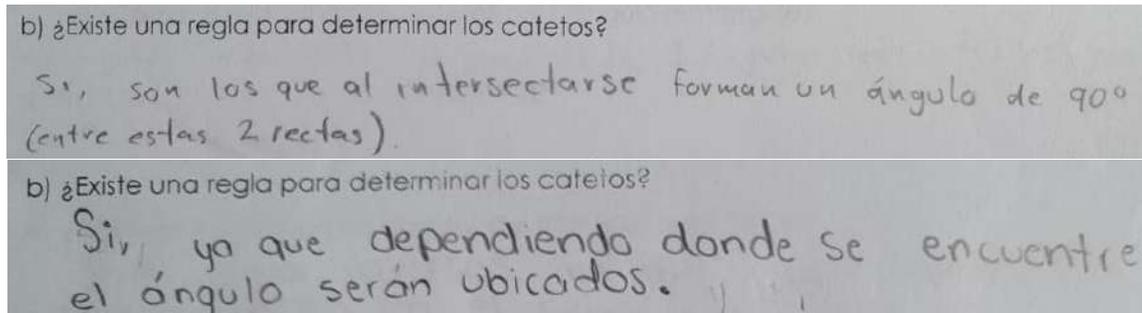


Figura 27. Determinación de los catetos en un triángulo rectángulo.

3. *No comprendieron la pregunta.*

El 8 % corresponde a este grupo.

c) ¿Cómo identificas un cateto y la hipotenusa?

1. *Lo hicieron a partir del posicionamiento de los ángulos del triángulo rectángulo.*

El 16% de los estudiantes contestaron considerando lo indicado por este grupo (Fig. 28).

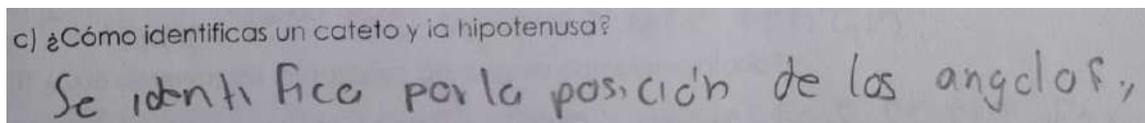


Figura 28. Identificación de los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo.

2. *Identificaron a la hipotenusa como el segmento más largo, el posicionamiento de los lados del triángulo rectángulo.*

Un porcentaje de 84 % hizo referencia a este grupo, como se muestra la respuesta de un estudiante en la figura 29.

c) ¿Cómo identificas un cateto y la hipotenusa?
 La hipotenusa tiene mayor distancia
 y los catetos de acuerdo a donde se encuentre
 el ángulo que me den para identificarlos.

Figura 29. Identificación de la hipotenusa.

d) ¿Cómo se relacionan los catetos y la hipotenusa para formular las razones trigonométricas?

1. *Relacionaron que es en función de la posición que tienen los lados con el ángulo.*

Un 30 % de los estudiantes argumentó que la relación es en función de la posición que tenían los lados con el ángulo (Fig. 30).

Responde lo siguiente:
 d) ¿Cómo se relacionan los catetos y la hipotenusa para formular las razones trigonométricas?
 Se relacionan de una forma opuesta de acuerdo a donde está posicionado el ángulo alfa.

Figura 30. Relación de los catetos e hipotenusa.

2. *Asumieron que la relación se da a partir de las definiciones de las razones trigonométricas.*

El 40 % de los estudiantes emitieron su respuesta a partir de las definiciones de las razones trigonométricas (Fig. 31).

Responde lo siguiente:
 d) ¿Cómo se relacionan los catetos y la hipotenusa para formular las razones trigonométricas?
 Independientemente de las razones trigonométricas, dado su ángulo siempre será el mismo para todas sus razones.
 Las razones "principales" serán seno, coseno y tangente, en lo respecta a cosecante, secante y cotangente se invierten sus razones relativamente, por ejemplo: $\text{sen } 36.87^\circ = \frac{3}{5}$ y $\text{csc } 36.87^\circ = \frac{5}{3}$

Figura 31. Relación entre los lados del triángulo rectángulo.

3. Lo definieron como una operación entre los lados (catetos e hipotenusa) del triángulo rectángulo.

Por otro lado, el 19 % de estudiantes correspondió a este grupo.

e) ¿Cómo se relacionan los ángulos del triángulo rectángulo?

1. Asociaron la relación basándose en la suma de sus medidas como ángulos complementarios.

Un 57 % de estudiantes expusieron las medidas y explicaron como se complementa uno ángulo con el otro para formar un ángulo recto como se muestra en la figura 32.

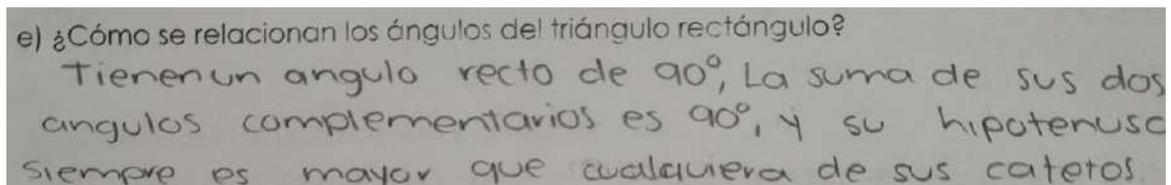


Figura 32. Relación de los ángulos en un triángulo rectángulo.

2. Necesitaron considerar las razones trigonométricas.

Por último, el 43 % emitió respuestas respecto a éste grupo. Ejemplo de ello, es la respuesta que se observa en la figura 33.

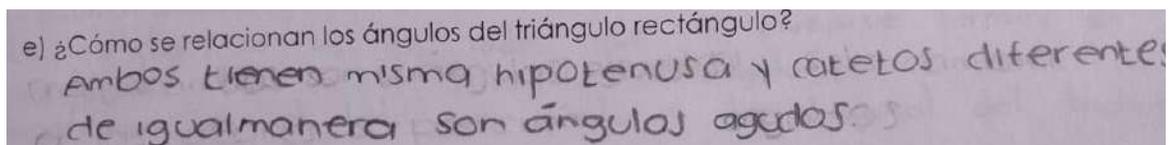


Figura 33. Relación de ángulos en función de razones trigonométricas.

f) ¿Qué observas de las razones del ángulo complementario?

1. Las identificaron a partir de la posición de los lados y del ángulo a evaluar.

La figura 34 muestra una respuesta que contribuye al 47 % de las respuestas de los estudiantes.

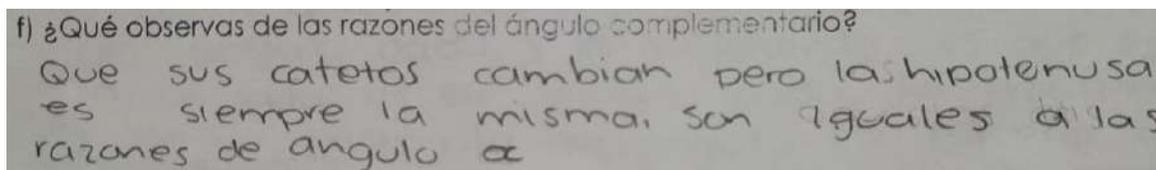


Figura 34. Visualización de las razones trigonométricas en un ángulo complementario.

2. Relacionaron cada razón en función de su definición.

Un porcentaje bajo del 19 % también relacionaron cada razón en función de su definición.

3. Interpretaron la relación a partir de las medidas de los ángulos.

Una minoría del 14 % de estudiantes emitieron su respuesta de acuerdo a la construcción hecha (Fig. 35).

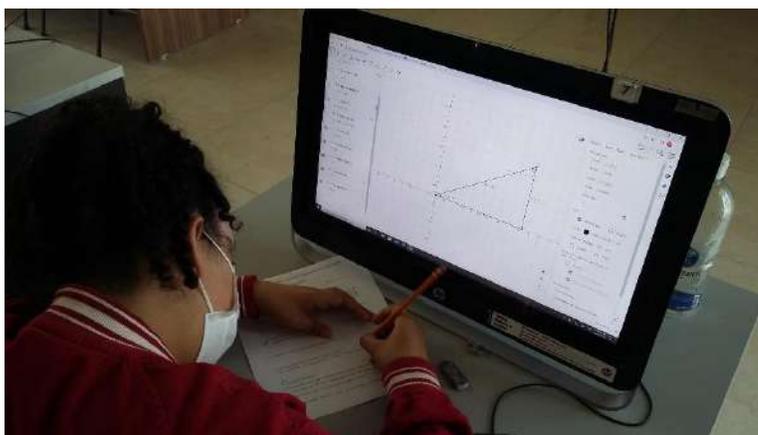


Figura 35. Visualización de la construcción para emitir respuestas.

Situación 1, Actividad 1.3

a) ¿Qué es el círculo unitario?

1. Reconocieron la figura con sus características.

Todos los estudiantes emitieron respuestas describiendo las características y reconociendo la figura como una circunferencia (Fig. 36).

a) ¿Qué es el círculo unitario?
Es una circunferencia en un plano cartesiano O
con un radio de valor 1.

Figura 36. Definición de un círculo unitario.

b) ¿Cuáles son sus principales características?

1. Identificaron las características del círculo unitario.

El 80 % de las respuestas identificaron las características del círculo unitario, de acuerdo a la representación mostrada (Fig. 37), el estudiante asoció la posición del punto y el triángulo que se generó con los segmentos.

b) ¿Cuáles son sus principales características?
Su radio es igual a 1 unidad

Figura 37. Forma simple de caracterizar un círculo unitario.

2. Asociaron la representación con el punto P , las coordenadas y el triángulo que se genera de los segmentos que ayudan a representar el punto.

Haciendo referencia a la construcción del triángulo rectángulo, el 20% mencionaron que el radio no cambió, y aunque los valores de los catetos variaron, el radio se mantuvo igual, identificándolo como la hipotenusa del triángulo formado, tal como la figura 38.

b) ¿Cuáles son sus principales características?
• Mide 1 de radio
• Su radio es igual a la hipotenusa del triángulo

Figura 38. Principales características de un círculo unitario.

c) ¿Qué valor tiene el radio del círculo?

1. Interpretaron el valor del radio y lo asocian con el término “unitario”.

A partir de que el profesor presento el círculo unitario (Fig. 39), la totalidad de los estudiantes interpretaron y reconocieron que el valor del radio es la unidad,

algunas de las respuestas fueron “Tiene una distancia de una unidad del centro de la circunferencia”.



Figura 39. Presentación de la construcción del círculo unitario.

d) ¿Cuál es la abscisa del punto P?

1. Asociaron al coseno como abscisa del punto P.

Un 76 % de los estudiantes asociaron al coseno como abscisa del punto P.

2. De la representación, interpretaron la abscisa con un valor numérico.

Sin embargo, algunos estudiantes (14 %) interpretaron la abscisa con el valor numérico de acuerdo al par ordenado del punto P, como se aprecia en la figura 40.

d) ¿Cuál es la abscisa del punto P? $x = .77$

Figura 40. Valor numérico de la abscisa del punto P.

e) ¿Cuál es la ordenada del punto P?

1. Asociaron al seno como ordenada del punto P.

La mayoría (76 %) de los estudiantes asociaron al seno como ordenada del punto P.

2. De la representación, interpretaron la ordenada con un valor numérico.

Sin embargo, algunos estudiantes, como se ve en la siguiente figura 41, interpretaron la ordenada con el valor numérico de acuerdo a par ordenado del punto P.

e) ¿Cuál es la ordenada del punto P? $y = .65$

Figura 41. Valor numérico de la ordenada del punto P.

f) ¿Qué se observa del signo de las funciones en un primer cuadrante?

1. Relacionaron los signos de los catetos en el cuadrante.

En su totalidad, los estudiantes manifestaron que las funciones eran positivas en el primer cuadrante, tal como se aprecia en la figura 42.

f) ¿Qué se observa del signo de las funciones en un primer cuadrante?
que todos son positivos, ya que sus coordenadas son positivas.

Figura 42. Signo de las funciones trigonométricas en el primer cuadrante.

g) ¿Cómo relacionan los ángulos generados a partir de trazar la hipotenusa del triángulo?

1. Identificaron los diferentes tipos de ángulos que se originan al trazar el segmento como hipotenusa del triángulo.

El 60 % de los estudiantes identificaron los diferentes tipos de ángulos que se originan al trazar el segmento como hipotenusa del triángulo (Fig. 43).

g) ¿Cómo relacionan los ángulos generados a partir de trazar la hipotenusa del triángulo?
La hipotenusa corresponde al lado final del ángulo, por lo que para medir el ángulo se decide que tipo de ángulo se va a tomar para saber de donde empezar hasta llegar a la hipotenusa (lado final).
h) ¿Qué tipos de ángulos se tienen?
g) ¿Cómo relacionan los ángulos generados a partir de trazar la hipotenusa del triángulo? ya que a partir de la hipotenusa se encuentran los catetos adyacentes y opuestos dependiendo el ángulo de referencia.

Figura 43. Relación de ángulos originados al trazar la hipotenusa.

2. Asumieron la relación de ángulos con los signos de las funciones.

Una minoría (23 %) correspondió a este grupo.

3. Refirieron al cuadrante en el que se formó el triángulo.

Sólo el 17 % de estudiantes refirieron al cuadrante en el que se formó el triángulo (Fig. 44).

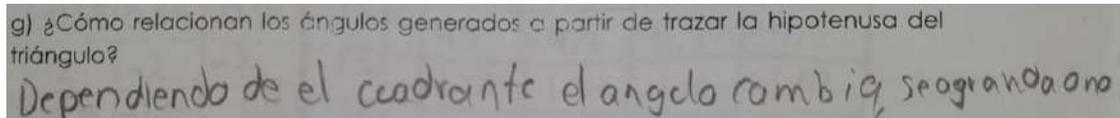


Figura 44. Relación de los ángulos con los signos de las funciones trigonométricas.

h) ¿Qué tipos de ángulos se tienen?

1.- Identificaron los diferentes tipos de ángulos que se generan al evaluar el punto P en los diferentes cuadrantes.

El 84 % de los estudiantes contestaron de forma correcta, identificaron tanto el ángulo normal como el de referencia.

2. No tuvieron claro la definición de los tipos de ángulos que se tienen presentes.

Sin embargo, el resto de los estudiantes contribuyó a esta respuesta.

i) ¿Cuál es el ángulo normal?

1. Lo interpretaron como el ángulo que se mide de las xx' en un sentido antihorario a donde está el lado final del ángulo.

La figura 45 muestra una respuesta que contribuye al 48 % de las respuestas emitidas.

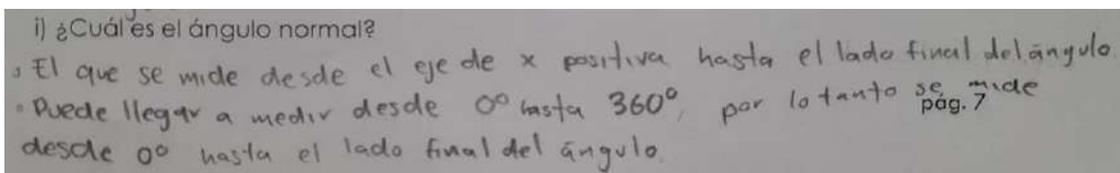


Figura 45. Definición de ángulo normal.

2. Asociaron la definición a la medida del ángulo.

Por otro lado, con una respuesta menos notable (20 %), los estudiantes asociaron la definición a la medida del ángulo y de forma incorrecta lo definieron como un ángulo mayor a 90° .

3. Relacionaron que es un ángulo positivo, pero no precisa donde termina.

Además, también, el 25 % relacionaron su respuesta con este grupo (Fig. 46).

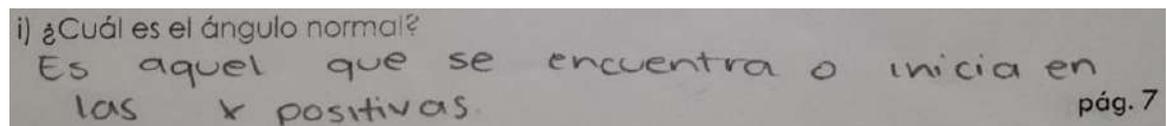


Figura 46. Definición incompleta de ángulo normal.

j) ¿Cuál es el ángulo de referencia?

1. Asociaron el ángulo con una medida menor de 90° y medido en sentido antihorario.

Un porcentaje del 66 %, asoció su respuesta a este grupo, tal como se aprecia en la figura 47.

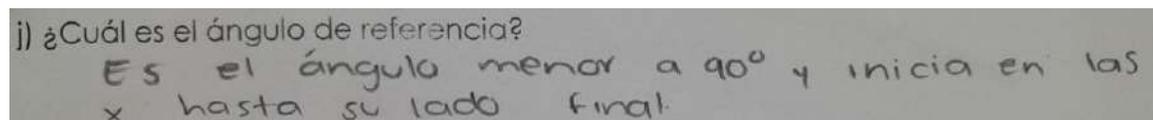


Figura 47. Definición incompleta de ángulo de referencia.

2. Relacionaron el sentido del ángulo desde las xx' .

Un 30 % de los estudiantes relacionó la respuesta, considerando que el ángulo inicia desde el eje de las x como se ve en la figura 48.

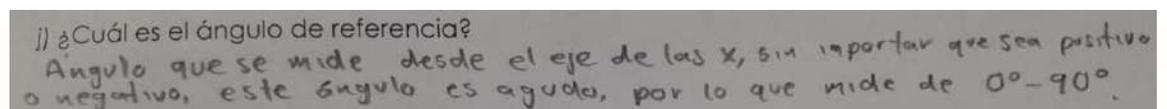


Figura 48. Definición de ángulo de referencia.

3. Interpretaron el ángulo solo por el sentido antihorario.

El 4 % de estudiantes admitió también que el ángulo se medía solo en un sentido antihorario.

k) ¿Cuál es el signo de las funciones en cada cuadrante?

1. *Relacionaron correctamente los signos de los catetos del triángulo rectángulo en el círculo unitario.*

Al evaluar cada una de las funciones trigonométricas y complementar el cuadro indicado en la actividad para todos los signos de las mismas, el 70 % de las respuestas fueron correctas (Fig. 49).

Cuadrante I		Cuadrante II		Cuadrante III		Cuadrante IV	
sen α	+	sen β	+	sen β	-	sen β	-
cos α	+	cos β	-	cos β	-	cos β	+
tan α	+	tan β	-	tan β	+	tan β	-
cot α	+	cot β	-	cot β	+	cot β	-
sec α	+	sec β	-	sec β	-	sec β	+
csc α	+	csc β	+	csc β	-	csc β	-

Figura 49. Signos de las funciones.

2. *Tuvieron dificultades para relacionar los signos de los catetos y definir el signo de las funciones trigonométricas.*

Mientras que el 30 % de los estudiantes tuvieron dificultades en indicarlo correctamente.

Situación 2, Actividad 2.1

a) Al mover el ángulo en el deslizador, ¿qué sucede con el punto P?

1. *Interpretaron que las coordenadas del punto cambian.*

El 10 % de los estudiantes emitieron su respuesta relacionándola con este grupo. Al interactuar con el deslizador en la construcción hecha en el software, los alumnos interpretaron que las coordenadas del punto cambiaban como se observa en la figura inferior.

b) Al mover el ángulo en el deslizador, ¿qué sucede con el punto P?
Disminuye o aumenta según el ángulo en el que se le ponga
y cambia de posición en la circunferencia.

Figura 50. Comportamiento del punto P.

2.-Hicieron referencia que el punto se mueve y cambia de posición en un sentido antihorario.

Aunque no es la forma correcta de decirlo, una mayoría del 90 % hizo referencia a esta respuesta.

Las respuestas emitidas se hicieron en función de la interacción que tuvieron con la construcción y al utilizar el deslizador de acuerdo a lo indicado en la propuesta didáctica (Fig. 51).

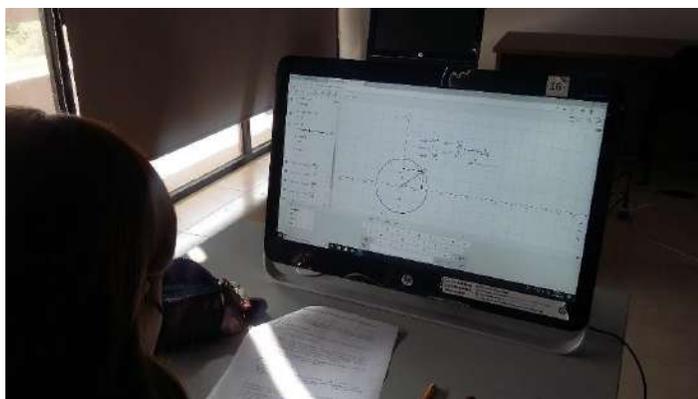


Figura 51. Visualización del círculo unitario y posicionamiento del punto P.

b) ¿Cómo cambia el punto P, a medida que en el deslizador el ángulo α aumenta?

1. Mencionaron que a medida que el ángulo aumenta las coordenadas del punto cambiaban.

En un lenguaje matemático, el total de estudiantes no lo indican tal cual, sino como se indica en la figura 52; sin embargo, dan a saber que conforme el deslizador se modificaba y el ángulo aumentaba, el punto P tenía otras coordenadas.

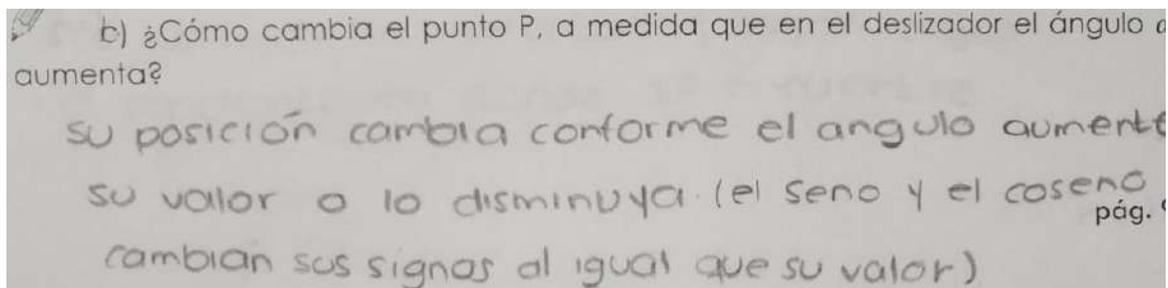


Figura 52. Posicionamiento del punto P.

c) ¿Qué sucede cuando en el deslizador aumenta el ángulo?

1. Asociaron el cambio de los valores de las coordenadas al aumentar el ángulo y evaluarlas en cada cuadrante.

Un valor del 46 % de los estudiantes asociaron su respuesta a este grupo, además de indicar que la referencia del sentido es antihorario y que el cambio de los signos se dio en función de los cuadrantes en los que se encontraba el punto (Fig. 53).

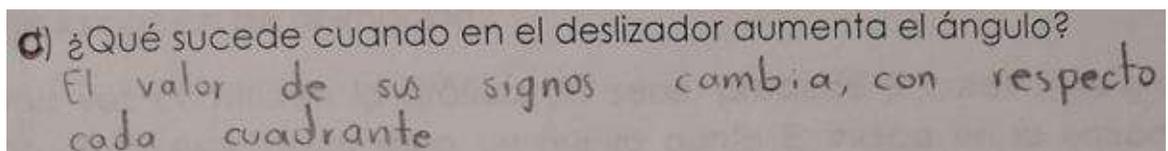


Figura 53. Cambio del deslizador para modificar el ángulo.

2. Identificaron que las coordenadas del punto P tiene nuevas coordenadas.

El resto de los estudiantes (50 %) al interactuar en el software y ver que sucedió con el ángulo, emitieron su respuesta relacionando que, al aumentar dicho ángulo, se modificaron sus razones trigonométricas, es decir, ese cambio se originaba de acuerdo al cuadrante en el que se encontraba el ángulo (Fig. 54).

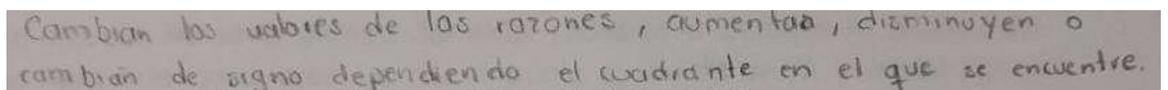


Figura 54. Modificación de las razones trigonométricas en función del aumento del ángulo.

3. Asoció su respuesta respecto a la apertura del ángulo.

Sólo el 4 % correspondió a esto.

d) ¿Qué figura se visualiza con el trazo hecho anteriormente?

1. Reconocieron el tipo de triángulo de acuerdo a sus ángulos.

En su totalidad los estudiantes visualizaron que se formó un triángulo rectángulo, algunos de ellos, escribieron: “un rectángulo”, “triángulo rectángulo” o “triángulos con ángulos rectos”.

e) ¿Qué se puede decir del punto P, a medida que aumenta el ángulo?

1. Asociaron que a medida que el ángulo aumentó, éste tuvo nuevas coordenadas, cambiando su valor en cada cuadrante.

El 83 % de los estudiantes asociaron su respuesta, como se muestra en la figura 55.

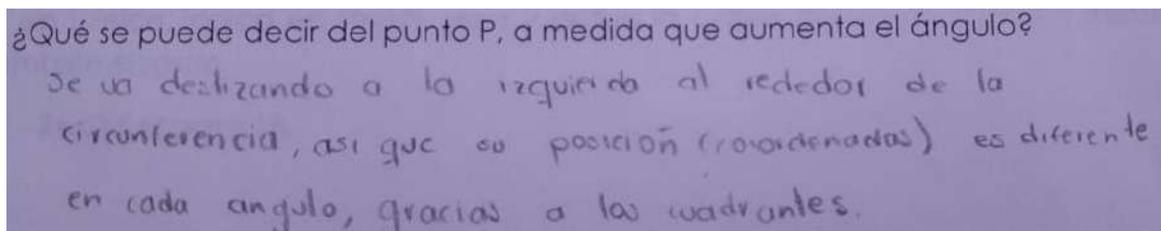


Figura 55. Posicionamiento del punto P en el círculo unitario.

2. Relacionaron el sentido de cómo leer el ángulo al momento de aumentar el ángulo.

A pesar de que para la mayoría fue posible observar que el punto se modificó en función del ángulo en cada cuadrante, una minoría del 17 % sólo referenció que el punto P adquirió otra posición en sentido antihorario sobre la circunferencia.

f) A partir del trazo formado, ¿Qué pasará con el punto D al mover el deslizador?

1. Asociaron que, al aumentar el ángulo, el punto D avanzó arriba abajo, es decir que la trayectoria formada por este fue en forma de onda.

Una vez que los alumnos pudieron observar el rastro y animar la gráfica de la función seno como se observa en las figuras 56 y 57, emitieron respuestas en función de la interacción con el software y de lo que ellos apreciaron en ese momento.



Figura 56. Animación de la función seno.

Se desplaza de manera "curva", cortando al eje x cada ciertos valores, el cual se vuelve algo constante.

Figura 57. Descripción del comportamiento de la función seno.

La figura anterior muestra una respuesta que contribuye sólo a un 41% de los estudiantes que corresponde a este grupo.

2. Tuvieron la noción que el punto D tomó nuevos valores fuera de la circunferencia y teniendo nuevos puntos en referencia al eje de las xx' .

Un 33 % más de estudiantes respondieron asociando su respuesta al grupo, como se observa en la figura 58.

g) A partir del trazo formado, ¿Qué pasará con el punto D al mover el deslizador?
El punto se mueve en la línea de las x en medida lo que el ángulo aumenta.

Figura 58. Descripción del comportamiento del punto D .

3. Reconocieron que el punto D toma nuevas coordenadas.

El resto de estudiantes, solo indicó que el punto tomó nuevas coordenadas, sin describir el comportamiento.

g) ¿Qué se observa?

1. Identificaron que el rastro de este es en forma de ondas y características como puntos máximos y mínimos.

Casi un 60 % de los estudiantes al visualizar el comportamiento del punto D identificaron que el rastro de este es en forma de ondas (Fig. 59).

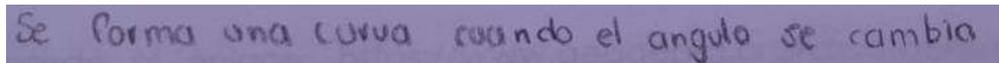


Figura 59. Descripción del rastro del punto D.

Incluso, indicaron algunas características cuando el punto alcanzó el punto máximo y el valor en grados cuando estuvo en su punto mínimo (Fig. 60).

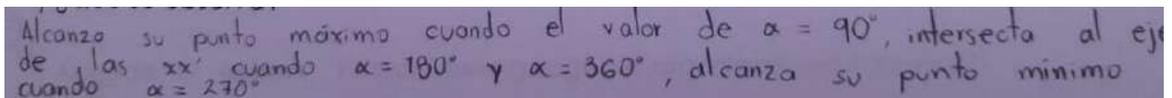


Figura 60. Descripción de los puntos mínimos y máximos de la función seno.

2. Asociaron el rastro con las nuevas coordenadas del punto, sin describir la forma, sino generalizando a una trayectoria de ese punto.

El 26 % de los estudiantes emitió su respuesta correspondiendo a éste grupo.

3. Generalizaron observar una gráfica.

El resto emitió su respuesta de forma general.

h) ¿A qué función corresponde la gráfica generada?

1. Identificaron la gráfica de la función.

La mayoría (94 %) de los estudiantes asumieron que la gráfica correspondía a la función del seno.

2. No comprendieron la pregunta.

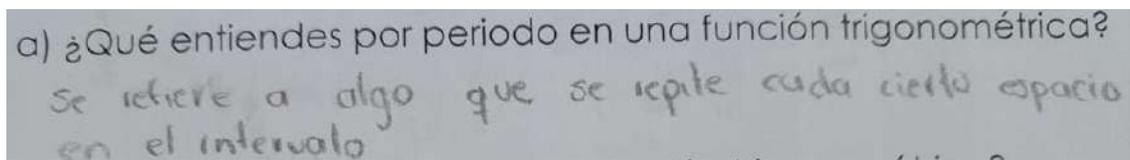
El resto correspondió a esta respuesta.

Situación 2, Actividad 2.2

a) ¿Qué entiendes por periodo en una función trigonométrica?

1. Asociaron el concepto a un tiempo y a un patrón que se repetía.

El 55 % de las respuestas mostraron que se asoció el concepto a un tiempo y a un patrón que se repetía, si bien, la respuesta no es tal cual como se debe expresar en un lenguaje matemático o correctamente (Fig. 61), pero se tiene la idea y se aprecia que intentaron comprender a que se refiere el término al evaluar las funciones trigonométricas.

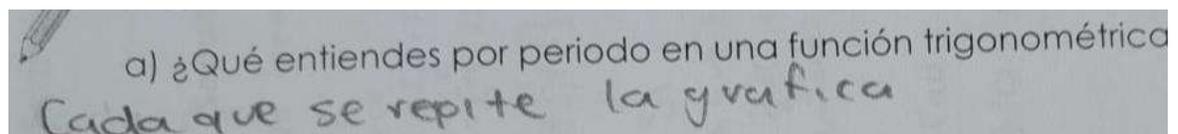


a) ¿Qué entiendes por periodo en una función trigonométrica?
Se refiere a algo que se repite cada cierto espacio en el intervalo

Figura 61. Concepto de periodo en una función trigonométrica.

2. Identificaron el concepto en referencia a un recorrido de un punto a otro.

Mientras tanto, en la figura de abajo, un 22 % de respuestas identificaron el concepto en referencia como se indica en el grupo (Fig. 62).



a) ¿Qué entiendes por periodo en una función trigonométrica?
Cada que se repite la grafica

Figura 62. Concepto informal de periodo en una función trigonométrica.

3. Asoció el concepto con el término constante.

El resto de estudiantes (23 %) expuso su respuesta de esta manera.

b) ¿A qué se le llama amplitud en una función trigonométrica?

1. *Relacionaron el concepto con los puntos mínimos y máximo de la gráfica.*

Un porcentaje correspondiente al 47% relacionó su respuesta, muestra de ello es la siguiente figura.

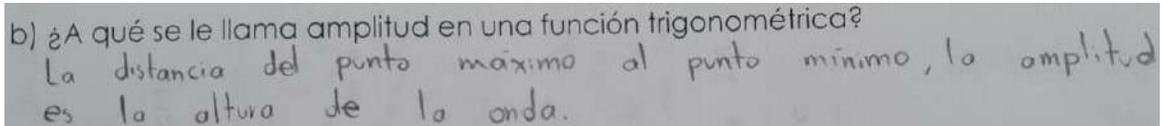


Figura 63. Definición incompleta de amplitud en una función trigonométrica.

2. *Relacionaron el concepto con el tamaño en un sentido vertical, la distancia que existe el eje de las abscisas y la altura de las ondas.*

El resto de los estudiantes, relacionó el concepto como se indica en esta clasificación, como lo indica la respuesta en la figura 64.

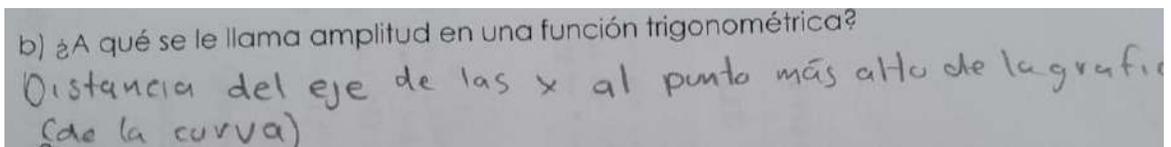


Figura 64. Definición de amplitud en una función trigonométrica.

Análisis de las gráficas de las funciones trigonométricas

1. *Describieron de manera correcta la tabla de las funciones trigonométricas, indicando cada una de las características solicitadas.*

Al analizar las características de las funciones trigonométricas, el 52 % de los estudiantes describieron correctamente las funciones.

2. *Completaron la tabla de las funciones trigonométricas parcialmente y la contestaron de forma incorrecta.*

El resto de los alumnos lo hicieron describiendo de forma incorrecta y no indicando las características, dejando espacios sin responder.

Es importante mencionar que se apreciaron diferentes dificultades sobre todo en cómo indicar el dominio y la amplitud en mayor medida, a su vez también se apreció la falta en cómo justificar porque existen o no asíntotas en las funciones. Las respuestas de los estudiantes ante la actividad, se aprecian en la figura inferior.

Instrucciones: Llena la tabla con la información obtenida a partir del análisis de las gráficas de las funciones trigonométricas.

Pregunta	Seno	Coseno	Tangente	Cosecante	Secante	Cotangente
¿Cuál es el punto máximo y mínimo de la gráfica?	máximo $y=1$ mínimo $y=-1$	máximo $y=1$ mínimo $y=-1$	máximo $=\infty$ mínimo $=-\infty$	no tiene punto máximo ni mínimo	no tiene punto máximo ni mínimo	máximo $=\infty$ mínimo $=-\infty$
¿En qué intervalos la gráfica crece y decrece?	crece de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y de $\frac{3}{2}\pi$ a 2π decrece de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3}{2}\pi$	crece de π a 2π y decrece de 0 a π	crece para todos los números reales del eje de las yy'	crece de 1 a ∞ y de $-\infty$ a $\frac{3}{2}\pi$ decrece de ∞ a 1 y de $-\infty$ a $-\infty$ sobre el eje de las yy'	crece de 1 a ∞ decrece de $-\infty$ a 1 sobre las yy'	decrece para todos los números reales del eje de las yy'
¿Cuál es el dominio de la función?	se extiende desde $-\infty$ al ∞	se extiende desde $-\infty$ al ∞	$\mathbb{R} \setminus [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\pi]$	$\mathbb{R} \setminus [-\frac{\pi}{2}, 2\pi] \setminus [0, \pi, 2\pi]$	$\mathbb{R} \setminus [0, 2\pi] \setminus [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$	$\mathbb{R} \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus [0]$
¿La función tiene asíntotas?	No	No	Si	Si	Si	Si
¿Por qué?	porque esta definida para todos los números reales	porque esta definida para todos los números reales	porque no está definida para valores de $\frac{\pi}{2}$ ni de $\frac{3}{2}\pi$	porque no está definida para valores de 0 , de π ni de 2π	porque no está definida para valores de $\frac{\pi}{2}$ ni de $\frac{3}{2}\pi$	porque no está definida para valores de 0 , de π , ni de 2π
¿Cuál es el periodo de la función?	de 0 a 2π	de 0 a 2π	de 0 a π	de 0 a 2π	de 0 a 2π	Cada π
¿Cuál es la amplitud?	2 unidades	2 unidades	es infinito	no tiene	no tiene	es infinita

Figura 65. Características de las funciones trigonométricas.

7.5. Respuestas de las actividades de cierre de la propuesta didáctica

De acuerdo al diseño de la propuesta didáctica, las actividades de cierre se indicaron al final de las actividades detonadoras, como el término lo indica, se llevaron a cabo en el momento de cierre y se abordaron de forma totalmente virtual mediante el software GeoGebra. Los alumnos siguiendo cada situación y actividad descrita en la propuesta, accedieron a la liga de la actividad (indicada en la

propuesta didáctica) y contestaron o realizaron la actividad, contestando en línea o escribiendo en las hojas proporcionadas. Las actividades de cierre se diseñaron como recursos en la cuenta de GeoGebra y los estudiantes a partir de la liga con un código que se proporcionó las realizaron. A continuación, se describirán la respuesta que hubo al realizar las actividades de cierre.

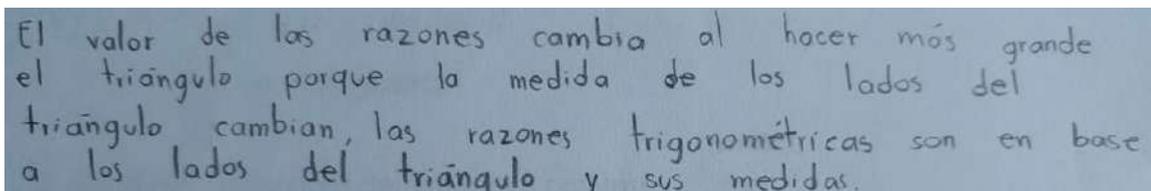
Actividad de cierre 1, Situación 1

Para realizar la actividad, la pregunta fue la siguiente:

¿Al hacer más grande el triángulo, cambió el valor de las razones entre los segmentos formados? ¿Por qué?

1. Asociaron la respuesta en función del cambio de valor del cateto, pero no de la razón, mientras que el ángulo se mantenía.

De las respuestas emitidas el 92 % asoció su respuesta a lo indicado. A pesar de que la respuesta descrita en la figura 66, menciona que efectivamente los lados se modifican, los valores de las razones, no cambiarán.



El valor de las razones cambia al hacer más grande el triángulo porque la medida de los lados del triángulo cambian, las razones trigonométricas son en base a los lados del triángulo y sus medidas.

Figura 66. Comprensión de las razones trigonométricas al manipular el triángulo.

2.- Verificaron que los valores de las razones no se modificaban.

El resto de las respuestas se hicieron en evaluar el valor de las razones trigonométricas (Fig. 67).

1- No
 2- Ya que el ángulo no cambia por lo que las cantidades de la medida de los lados solo se hacen proporcionales al hacer el triángulo más grande, y como para obtener las razones se hace por división, por lo que al cambiar las medidas lo que estamos haciendo es obtener fracciones equivalentes por lo tanto misma razón.

Figura 67. Apreciación de las razones trigonométricas.

Actividad de cierre 2, Situación 1

La indicación en esta actividad de cierre es la siguiente:

Cambia los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo y revisa con la calculadora los valores de los ángulos complementarios, para esto, propone diferentes valores de catetos e hipotenusa y plantea las razones de sen, cos y tan, para los ángulos y, obtén el valor de los ángulos con cualquiera de las razones. Verifica los valores en este recurso.

1. Los valores de los catetos son diferentes y la medida de los ángulos es correcta.

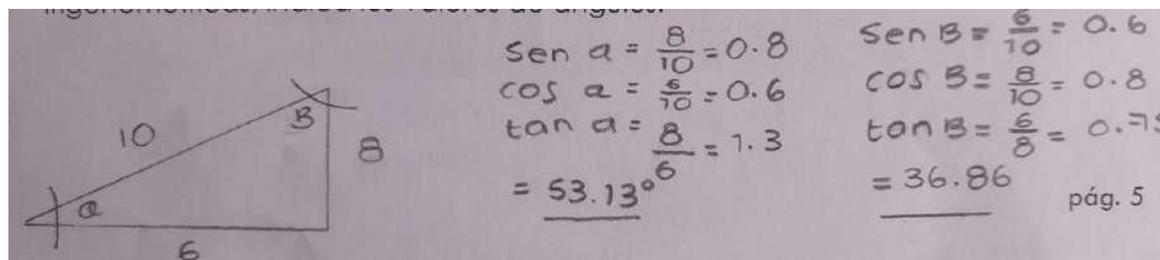


Figura 68. Cálculo de los ángulos complementarios del triángulo rectángulo.

La figura anterior muestra una de las respuestas que contribuye al 71 % de las respuestas, mismas que dan a saber que los estudiantes propusieron valores diferentes de los catetos y obtuvieron de forma correctamente la medida de los ángulos.

2. Propusieron valores de los catetos diferentes y la medida de los ángulos fue incorrecta y/o no obtenida.

Del mismo modo, el resto que corresponde al 29 % de los estudiantes.

Actividad de cierre 3, Situación 1

En esta actividad la indicación es la siguiente:

Verifica que los valores exactos de las funciones para ángulos normales en el II, III y IV cuadrante coinciden sin considerar el signo con los del ángulo normal en el cuadrante I. Indica los valores obtenidos para el ángulo de 30° y el correspondiente ángulo normal en los cuadrantes II, III y IV.

1. Realizaron el cálculo correcto.

En cuanto a esta actividad, el 80 % de los estudiantes comprendieron la indicación, realizaron el cálculo correctamente e indicaron los valores exactos de las funciones, como se observa en la figura 69.

θ	II	III	IV
30°	150° ↑ $180^\circ - \theta$	210° ↑ $180^\circ + \theta$	330° ↑ $360^\circ - \theta$
sen	0.5 ✓	-0.5	-0.5
cos	-0.86 ×	-0.86	0.86
tan	-0.57	0.57	-0.57
csc	2	-2	-2
sec	-1.16	-1.16	1.16
cot	-1.75	1.75	-1.75

Figura 69. Cálculo de los valores exactos de las funciones trigonométricas del ángulo notable de 30° .

2. No asocia el ángulo notable con los ángulos normales de este y no cumple con lo indicado.

En consecuencia, una minoría del 20 % de los estudiantes correspondió a este grupo.

Actividad de cierre 1, Situación 2

La instrucción para esta actividad fue la siguiente:

Realiza la animación de cada una de las gráficas trigonométricas y observa detalladamente cada una de ellas.

Pregunta 1. *¿Qué observas de las gráficas de las funciones trigonométricas?*

1. Al revisar las gráficas de las funciones trigonométricas los estudiantes asociaron el comportamiento de estas con sus características.

Esta respuesta corresponde al 70 %.

2. Generalizaron el comportamiento de las gráficas de las funciones.

El 20 % correspondió a este grupo.

3. El alumno no mostró una comprensión del comportamiento de las gráficas.

Una minoría del 10 %, no mostró una comprensión de cómo describir las gráficas.

Pregunta 2. *¿Cómo puedes diferenciar la función seno del coseno?*

1. Asociaron el comportamiento a sus características, describiendo los puntos por donde intersectan en cuanto a los ejes coordenados, los puntos máximos y mínimos y el periodo de cada función.

Las respuestas emitidas muestran que el 77 % de los estudiantes, asociaron el comportamiento a las características del seno y coseno.

2. Consideraron que tienen el mismo comportamiento una función de la otra.

Un valor relativamente bajo del 9 % correspondió a esta respuesta.

3. Asociaron cada función como una razón trigonométrica, expresando la definición en función a los catetos y la hipotenusa.

El 14 % asoció la respuesta a lo indicado en este punto.

Pregunta 3. Describe el comportamiento de cada grafica de las funciones trigonométricas.

1. Comprendieron el comportamiento de las gráficas y describieron de forma más completa, enunciando sus características.

El 76 % de los estudiantes describieron de forma general, enunciando de cada gráfica, su periodo, intersecciones, si son o no crecientes y la trayectoria de éstas.

2. Describieron de forma simple el comportamiento de cada gráfica.

El 23 % de las respuestas correspondieron a este grupo. describen de forma muy simple el comportamiento de las mismas.

Actividad de cierre 2, Situación 2

En esta actividad, se indicó un cuestionario diseñado acerca de características de las funciones trigonométricas, el cual constó de 5 preguntas, se muestran a continuación las respuestas de los estudiantes:

Pregunta 1. La gráfica mostrada corresponde a la función:

El 83 % de las respuestas fueron correctas, mientras que el resto se indicaron de forma incorrecta.

Pregunta 2. El rango de la función seno es de $-1,1$.

Un porcentaje del 72 % de las respuestas corresponde a la respuesta esperada, indicando verdadero, mientras que el 28 % lo indicó de forma incorrecta.

Pregunta 3. El dominio de la función es "todos los números reales excepto los valores donde el $\cos x$ es igual a 0".

En esta pregunta, se aprecia que el 44 % de las respuestas emitidas fueron de forma correcta, y un alto porcentaje del 56 % eligió otra respuesta, lo cual muestra, que los estudiantes no tienen totalmente claro las características de las funciones trigonométricas.

Pregunta 4. Función que corta el eje y en el punto (0,0).

El 66 % de los estudiantes indicaron de forma acertada la respuesta, indicando el coseno, mientras que el 34 % de las respuestas emitidas indicaron tangente.

Pregunta 5. La gráfica mostrada corresponde a la función:

En ésta pregunta, el 60 % de los estudiantes identificaron acertadamente la gráfica de la función coseno, por el contrario, el 40 % indicó la opción de la función del seno. Dichas respuestas es posible apreciarlas en la figura 70, considerando un criterio de correcta e incorrecta.

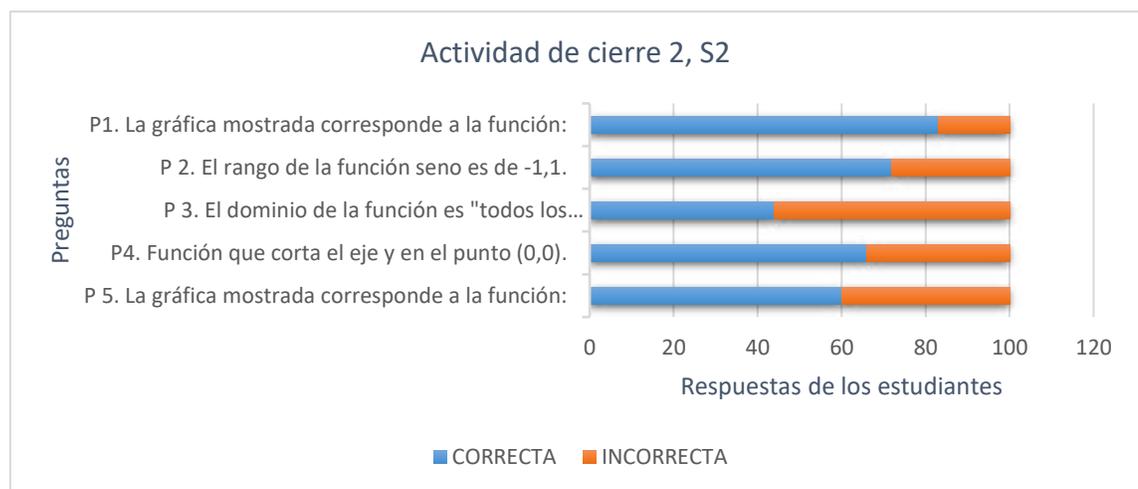


Figura 70. Respuestas de la actividad de cierre 2, Situación 2.

7.6. Respuestas del uso y manejo del software GeoGebra

Para el análisis de las construcciones realizadas por los estudiantes de acuerdo a como se indicaba en el desarrollo de las actividades correspondientes a cada situación en la propuesta didáctica, se utilizó una lista de control (Anexo 6), instrumento con el que se observó el manejo del software tanto en las construcciones como en la graficación de las funciones trigonométricas.

De acuerdo a la propuesta, las construcciones se realizaron en el orden de cada situación y al realizarlas, los estudiantes respondían las preguntas indicadas en cada actividad. En las construcciones hechas, el docente estuvo acompañando a los estudiantes, tanto en las sesiones presenciales como en las virtuales.

La lista de control se utilizó mediante parámetros de SI, CS-Casi Siempre, P-Parcialmente, CN-Casi Nunca y Nunca, de manera que se pudiera evaluar el manejo y uso en cada una de las construcciones.

Evaluando la figura 71, más del 50 % de los alumnos participaron de forma activa en la sesión de la clase durante el desarrollo de las actividades. Por otro lado, el 45 % de los alumnos manejaron con facilidad los comandos del software, por lo que, en consecuencia, un porcentaje elevado del 73 % hizo un buen manejo de la computadora.

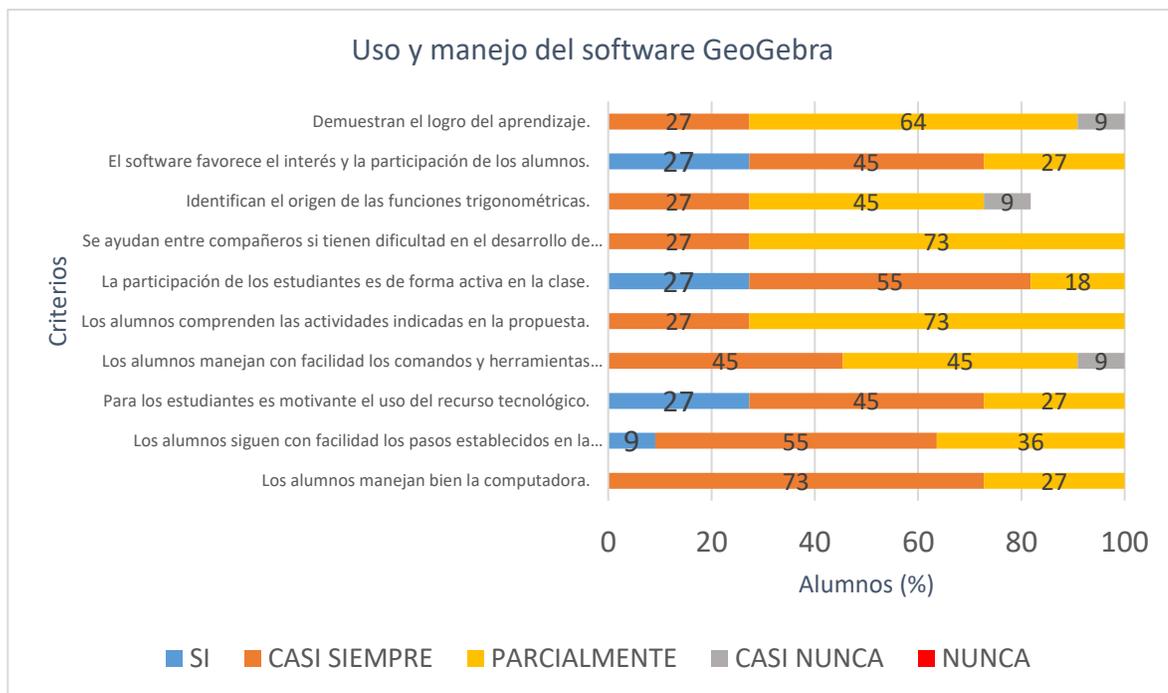


Figura 71. Uso y manejo del software GeoGebra

Al realizar las actividades, su comprensión fue parcial, ya que, si bien la propuesta fue diseñada para que el proceso de enseñanza aprendizaje se diera de forma paulatina y que las actividades se relacionaran para llegar a la graficación de las funciones trigonométricas, pero iniciar desde conceptos básicos como segmentos y ángulos. Dado que es un software que los estudiantes han utilizado anteriormente, no fue tan complejo volver a utilizarlo, en cierto modo, ya estaban un poco familiarizados y eso ayudó a motivarlos e interesarse en conocer más comandos y explorarlo aún más.

VIII. CONCLUSIONES

El haber pasado por una pandemia e implementar estrategias en el ámbito educativo ha resultado complejo, debido a las metodologías educativas en la que se ha basado la enseñanza tradicional, se ha hecho necesario crear nuevas estrategias que coadyuven a una mejor comprensión del área y que a la vez éstas favorezcan al alumno en su aprendizaje. El hacer uso de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas ha permitido visualizar que es posible utilizarlas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero implica tomar en cuenta factores externos que influyen para una mejor comprensión.

Por otro lado, en vista de que los estudiantes son quienes construyen su conocimiento, y como lo afirma Castro *et. al* (2018), la TSD como un patrón de enseñanza, está constituida como una herramienta eficaz para potenciar su pensamiento geométrico, esto aunado a la interacción que tienen con el medio. Al llevar a cabo el desarrollo de las actividades propuestas, y ultimar con la construcción y el análisis de las funciones trigonométricas, fue posible evidenciar que el conocimiento se puede construir, y no únicamente es seguir al pie de la letra la instrucción dada por profesor o como se indica en la propuesta, sino a partir también de la interacción con el software y la interacción que se da entre los mismos estudiantes.

La presente propuesta busca que, a partir de abordar y reconocer conceptos de ángulos, segmentos, y de ahí se dé paso a la graficación de funciones trigonométricas, abordando no solo la construcción en el software, sino relacionándola con las principales características de las mismas funciones. Y es entonces que, en ese sentido, de acuerdo a lo planteado en la hipótesis, resultó que efectivamente la implementación de la propuesta didáctica favoreció la comprensión de la trigonometría, específicamente el tema de funciones trigonométricas, tal y como se apreció en la comparación realizada entre la prueba inicial y la prueba final,

además de las actividades de cierre planteadas en las actividades generales de cada situación propuesta.

Ciertamente, al usar las herramientas digitales en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el área de trigonometría, este es favorecido al apoyarse en el software GeoGebra, por un lado, porque es un software amigable y por el otro porque permitió a los alumnos realizar paso a paso cada una de las construcciones, de modo que pudieran apropiarse de su aprendizaje y comprender mejor la actividad.

De este modo, el objetivo del presente trabajo, resulto satisfactorio, ya que, sí hubo una mejora en la enseñanza-aprendizaje de la trigonometría utilizando el software GeoGebra, tal como fue posible evaluar en los puntajes de cada alumno y la comparación de ambas pruebas.

Considero que hay mucho por hacer aún, retomar esta propuesta para que mediante el uso de las TIC se pueda explorar de forma más profunda las características de las funciones trigonométricas y que el estudiante distinga sin ningún problema las gráficas y el comportamiento de estas, así como la descripción puntualmente de sus características. Además, a la vez se apoye en el software para el fortalecer sus conocimientos y habilidades relacionando su uso con los contenidos de las matemáticas.

De acuerdo a lo observado en los resultados en el presente trabajo se coincide con lo indicado en Herrera (2013), se hizo notable el desempeño en como interpretar y construir las gráficas de las funciones trigonométricas, además de como se asimilaron las nociones básicas de la trigonometría, apoyándose en el mismo software e identificando la relevancia de la implementación de los recursos didácticos y pedagógicos en el aprendizaje de los estudiantes.

Por otro lado, retomando lo indicado por Díaz (2014), existe una coincidencia en decir que el software facilitó al alumno la comprensión de la trigonometría y que a través de la propuesta didáctica se solventaron algunas de las dificultades presentadas al abordar la enseñanza-aprendizaje de la trigonometría.

En cuanto a los hallazgos en el desarrollo de este trabajo, se observó que la familiarización con las TIC resultó en grado medio, lo cual significa que, aunque se tiene al alcance el poder utilizar herramientas digitales, no se aprovechan de una mejor manera con la finalidad de favorecer el rendimiento académico. Aunado a esto, un factor que influye para un buen desarrollo de actividades en línea mediante el uso de internet es la falta del mismo, el servicio no es constante y perjudica en cumplir con los objetivos planteados.

De acuerdo a los cuestionarios aplicados a los docentes con la intención de valorar la familiarización y uso de las TIC se pudo observar que los docentes están alejados de considerar a las TIC en nuestra práctica, se reflejó un desconocimiento y poco uso en el desarrollo de clases. Un factor que influye en ello, es que se sigue con las técnicas de una enseñanza tradicional y existe cierta renuencia en conocer más estrategias que favorezcan la labor docente. Por tanto, se hace cada vez más necesario impulsar la formación de la plantilla docente en áreas como el uso de las TIC y de herramientas digitales que estén al alcance y sirvan de apoyo para desarrollar propuestas o estrategias con fines de mejora en la trigonometría.

También es importante valorar la importancia de realizar la implementación en modalidad virtual o presencial, ya que es un factor que influye para evaluar si realmente el alumno es quien dirige y busca apropiarse de su aprendizaje. De lo contrario, el no estar presente en el desarrollo de las actividades genera una falta de compromiso y seriedad ante el objetivo general del presente trabajo. Fue posible evidenciar que, dadas las circunstancias, es preocupante la postura del alumno que toma ante situaciones donde el profesor no es quien guía y dirige la actividad,

además de ser consciente en emitir respuestas que permitan valorar si ha comprendido un tema en específico.

Dentro de las posibles líneas a investigar, como un futuro trabajo, se abre la oportunidad de posibles investigaciones que ayuden a la enseñanza aprendizaje de la trigonometría, específicamente en lo que refiere a las aplicaciones de las funciones trigonométricas.

Al observar las dificultades en el tema de funciones trigonométricas, se debe reflexionar en cuanto a como abordar con anterioridad la trigonometría, evaluar ventajas y desventajas en como desarrollar los contenidos para que el alumno conozca paulatinamente lo referente a esta área, de ese modo no le resulte complejo para su desarrollo cognitivo al momento de abordarlo de acuerdo al plan curricular de la escuela de bachilleres.

En otro aspecto, se observó que aunque las TIC representan una ventaja en el ámbito educativo, influye en gran medida en como los profesores lo ponen en práctica dentro del aula, si bien, aunque se sabe que se apoya la idea de hacer uso de las TIC, hay diferentes factores como la formación docente, el buen uso y manejo de recursos, la disposición de la plantilla docente y demás aspectos, que al usarlos e implementarlos realmente resulten y favorezcan al aprendizaje del alumno, y en ese sentido, se abre una posible investigación abordando lo anterior.

Finalmente, teniendo en cuenta que al construir las gráficas de las funciones trigonométricas y realizar el análisis de las principales características de dichas gráficas sería conveniente dar continuidad en proponer como anclar dichas características para explicar aspectos de la vida cotidiana en relación a algunas otras áreas como la física.

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, Á., García, M., y Torrent, E. (2019). La evaluación de la competencia matemática desde la escuela y para la escuela. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 55, 85–108.
<http://www.fisem.org/www/union/revistas/2019/55/04.pdf>

Belloch, C. (2012). *Tecnologías de la información y comunicación*. 1–7.
<https://www.uv.es/bellochc/pedagogia/EVA1.pdf>

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Ediciones de la Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, (19), (versión en español 1993). Notas de un curso.
http://www.cvrecursosdidacticos.com/web/repository/1462973817_Fundamentos%20de%20Brousseau.pdf

Cabero, J. (1998). *Impacto de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en las organizaciones educativas*. Enfoques en la organización y dirección de instituciones educativas formales y no formales:1–10. Enfoques en la organización y dirección de instituciones educativas formales y no formales: actas de las II Jornadas Andaluzas sobre Organización y Dirección de Centros Educativos, ISBN 84-9216-603-7, págs. 197-206.

Cardona, C. (2017). *Uso de las TIC como una herramienta para la enseñanza de las funciones* (Universidad Nacional de Colombia). Repositorio Universidad Nacional de Colombia.

Carrión *et. al* (2003). La Ingeniería de Software Aplicada al desarrollo de software educativo. Recuperado de: <http://132.248.45.5/enlinea/ponencia/mesa2/patiCM.doc>

- Castro *et. al* (2018). *Situaciones didácticas en la enseñanza de las razones trigonométricas en estudiantes de grado décimo*. (Tesis de maestría). Universidad del Cauca.
- Chancusig et al. (2017). Utilización de Recursos Didácticos Interactivos a través de las Tic' s en el Proceso de Enseñanza Matemática. *Boletín Virtual Redipe*, ISSN- 6(4), 112–134.
- Chavarría, J. (2006, 26 de marzo). Teoría de Situaciones Didácticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. (Presentación de contenido). Seminarios teóricos. Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Año 1, Número 2. Costa Rica,
- Corral, I. (2015). *Trigonometría sin papel*. (Tesis de maestría). Universidad de la Rioja.
- Del Puerto et al. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*. <https://doi.org/10.35362/rie3842646>
- Díaz-Barriga, Á. (2013). TIC en el trabajo del aula. Impacto en la planeación didáctica. *Universia*, IV. <http://ries.universia.net>
- Díaz, M. T. (2014). *Enseñanza de trigonometría en 4º de la ESO con GeoGebra* (Tesis de Maestría). Universidad Internacional de la Rioja. <https://reunir.unir.net/handle/123456789/2426>
- Donoso, C. (2011). Introducción al Nuevo Bachillerato Ecuatoriano. <http://educacion.gob.ec/wpcontent/uploads/downloads/2013/03/SiProfe-BGU-Introduccion.pdf>

- García et al. (2015). Aprendizaje y rendimiento académico en educación superior: un estudio comparado. *Actualidades Investigativas de Educación*, 15(3), 1–26.
- González, D. (2014). *Propuesta didáctica para la comprensión de las funciones trigonométricas mediante el trabajo en grupo en el bachillerato*. (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de México.
- Gómez, M. (2017). Panorama del sistema educativo mexicano desde la perspectiva de las políticas públicas. *Innovación Educativa*, 17(74), 143–163.
- Gómez et al. (2015). La trigonometría como herramienta para medir nuestro entorno. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1, 690–696.
- González, Y. (2013). Multimedia en la educación, una necesidad. *Vida Científica Boletín Científico De La Escuela Preparatoria No. 4*, 1(1).
<https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa4/article/view/1739>
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Herrera, H. (2013). *Enseñanza de los conceptos básicos de la trigonometría mediante el uso de la tecnología informática*. Repositorio Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21149>
- Marcilla de Frutos, C. M. (2013). *Las TIC En La Didáctica De Las Matemáticas* (Universidad de Burgos).
http://riubu.ubu.es/bitstream/10259.1/182/1/Marcilla_de_Frutos.pdf
- Márquez, A. (2017). A 15 años de PISA: Resultados y polémicas. *Perfiles Educativos*, 39(156), 3–15.
<https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2017.156.58280>

- Martín, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica*. (Tesis de maestría). Universidad de Granada. <https://doi.org/10.1530/eje.1.01981>
- Merino, I. C. (2015). *Trigonometría sin papel*. (Tesis de maestría). Universidad de la Rioja.
- Mi portal. (2020). ¿Qué es software educativo?
<http://www.miportal.edu.sv/que-es-software-educativo>
- Moscoso, L., Díaz, Luz. (2018). Aspectos éticos en la investigación cualitativa con niños. *Revista Latinoamericana de Bioética*, vol. 18, núm. 1. Universidad Militar Nueva Granada. <https://doi.org/10.18359/rlbi.2955>
- Muñoz, L. (2013). *El uso de la tecnología en la trigonometría, en algunos libros de texto, para el grado escolar décimo*. (Tesis de maestría). Universidad de Medellín.
- Lamas, H. (2010). Una mirada actual al aprendizaje de las matemáticas. *Revista de Psicología*, 12, 259- 328.
- León Rivera et al. (2011). Importancia de los enfoques cuantitativos y cualitativos de Investigación en Ciencias Sociales. *La Universidad del Valle de México*, 1 - 11.
- OCDE. (2017). *Panorama de la Educación 2017*. Recuperado desde <https://www.oecd.org/education/skills-beyond-school/EAG2017CN-Mexico-Spanish.pdf>
- Olgúin, G. (2016). *Una propuesta didáctica para la construcción de las funciones trigonométricas seno y coseno*. (Tesis de maestría). Universidad de los Lagos, Santiago, Chile. <http://dremat.ulagos.cl/portal/wp-content/uploads/2019/02/Gonzalo-Olgu%C3%ADn.pdf>

- Osuna, C., y Díaz, K. (2019). El logro de los aprendizajes en matemáticas en PISA, ENLACE y PLANEA en adolescentes mexicanos. Un análisis retrospectivo. *Archivos Analíticos de Políticas Educativas*, 28(28). <https://doi.org/10.14507/epaa.28.4617>
- PISA. (2018). *Resultados PISA 2018*. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf
- Pozo, J. I. (1990). Estrategias de aprendizaje. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Compils.), *Desarrollo psicológico y educación, II. Psicología de la Educación*. Madrid: Alianza
- Pérez, A. (2014). La intervención didáctica como alternativa para transformar la práctica. *Educación y Orientación*, (1).
- Rodríguez et al. (2017). Importancia de las Tic en enseñanza de las matemáticas. *Revista MATVA*, 2, 41–49.
- Rotaeché, R. (2008). *La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria*. (Tesis de maestría en Ciencias en Matemática Educativa). Instituto Politécnico Nacional, CICATA. <https://doi.org/10.24844/em2901.07>
- Ulizarna, J. (1998). Tecnologías multimedia en el ámbito educativo. *Pixel-Bit: Revista de Medios y Educación*, 0(10), 4–53. <https://doi.org/10.12795/pixelbit>
- Vidal, M^a.P. (2006). Investigación de las TIC en la educación, *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, 5 (2), 539-552. [http://www.unex.es/didáctica/RELATEC/sumario_5_2.htm]
- Vidaurre, W., y Vallejos, Lady. (2015). *Vidaurre_Vallejos_2015_Software educativo para lograr aprendizajes significativos en el área de mat.pdf*.

Zengin et al. (2011). *The effect of dynamic mathematics software GeoGebra on student achievement in teaching of trigonometry.*
<https://doi.org/doi:10.1016/j.sbspro.2011>

X. ANEXOS

ANEXO 1 CUESTIONARIO PARA LOS ALUMNOS

I. Marca la respuesta según consideres.

Pregunta	Escala				
	Siempre	Casi siempre	Algunas veces	Nunca	No responde
1. ¿Con qué frecuencia haces uso de la tecnología para realizar las actividades académicas?					
2. ¿Has tenido alguna experiencia con el uso de software educativo durante tu proceso de aprendizaje?					
3. ¿Es más fácil para ti dar solución a un problema cuando haces uso de la tecnología?					
4. ¿Utilizas la computadora y/o otras TIC cuando diseñas presentaciones en clase?					
5. ¿Has tenido oportunidad de trabajar en equipo, durante el desarrollo de una clase con el apoyo del uso de recursos tecnológicos?					
6. ¿Consideras importante utilizar software educativo para tu aprendizaje?					
7. ¿Utilizarías la tecnología para tu formación académica?					
8. ¿Recurre el docente de matemáticas a recursos tecnológicos para instruir temas relacionados con el área?					
9. ¿Has utilizado un software matemático?					
10. ¿Has utilizado un calculadora científica online?					
11. ¿Te has enterado de un software utilizado en la educación que se utilice para el aprendizaje de matemáticas?					
12. ¿Resuelves los ejercicios planteados utilizando algún software matemático?					
13. ¿Te parecen interesantes los programas informáticos de matemáticas?					

14. ¿Te parecen de fácil manejo los programas de matemáticas que has utilizado?					
15. ¿Consideras que el desarrollo de la materia puede llevarse a cabo utilizando algún software matemático?					
16. ¿Consideras que el usar un software matemático tienes un mejor aprendizaje de la materia?					
17. ¿Desearías mejorar el manejo de un programa matemático para la resolución de ejercicios trigonométricos?					
18. ¿Consideras que el uso de un software matemático te permite desarrollar habilidades y destrezas?					

II. Ordena del 1 al 9 que recurso te parece adecuado y de fácil manejo para el desarrollo de las clases y que consideres que fomentará el aprendizaje de las matemáticas. Siendo el 1 el valor más importante.

Recursos			
Computadoras		Programas de cómputo	
Libros de textos		Películas y videos	
Presentación en diapositivas		Láminas y materiales gráficos	
Laboratorios virtuales		Calculadoras on-line	
Mapas		Otros	

III. Marca con una tu respuesta.

Pregunta	Respuestas				
	Si	No		No responde	
3.1 ¿Conoces alguna calculadora científica on-line?					
3.2 ¿Qué tipo de calculadora on-line utilizas?	WolframAlpha	Mathway	Symbolab	Ninguna	Otra:___
3.3 ¿Qué software matemático has utilizado?	GeoGebra	Cabri	Mathematics	Ninguno	Otro:___
3.4 Indica la plataforma o medio para el desarrollo de tus clases.	Classroom	Campus Virtual UAQ	Correo Electrónico	Whats App	Otra(o): _____
3.5 Indica el dispositivo utilizado para el desarrollo de tus clases.	Celular	Lap top	Computadora de escritorio	Tableta	Otro:___

ANEXO 2 CUESTIONARIO PARA DOCENTES

Conteste de acuerdo a lo solicitado.

I. Información Básica Profesional

- 1.1 Formación académica: _____
- 1.2 Grado: _____
- 1.3 Edad: _____
- 1.4 Años que lleva ejerciendo la docencia: _____
- 1.5 Nivel educativo donde imparte clase: _____

II. Uso de las TIC

2.1 ¿Cómo ha sido la inclusión de las TIC en la planificación del contenido temático de las materias que imparte?

2.2 ¿Qué recursos utiliza para desarrollar sus clases? Marque con una ✓.

Recurso	Si	No
Pizarra digital		
Proyector		
Acceso a internet		
Programas matemáticos		
Presentaciones		
Calculadora on-line		
Plataforma de aprendizaje		

2.3 ¿Qué tanto ha utilizado software matemático para el desarrollo de sus clases?

2.4 ¿Qué software matemático utiliza para el desarrollo de las clases?

2.5 ¿Qué plataforma utiliza para comunicarse con los alumnos?

Classroom Moodle Correo Whats App Ninguno

2.6 ¿Considera que el uso de las TIC facilita el aprendizaje de la materia?
¿Por qué?

2.7 ¿Qué nivel de competencia considera tener en cuanto al uso de las TIC en el ámbito educativo?

Alto

Regular

Poco

Nada

2.8 ¿Ha tomado algún curso de actualización en el uso de las TIC?

2.9 ¿Cuáles de las siguientes tareas considera que puede realizar?

Marque o .

Tarea	Si <input checked="" type="checkbox"/>	No <input type="checkbox"/>
Usar procesador de textos		
Manejar motores de búsqueda		
Utilizar software matemático		
Guardar información		
Usar internet		
Enviar correos		
Buscar información		
Elaborar presentaciones multimedia		
Manejar redes sociales		
Usar aplicaciones para tareas		
Usar plataformas digitales		

3.0 Respecto al uso de las TIC, ¿ha tenido limitantes para abordar temas del contenido de las materias que imparte?

Explique.

3.1 ¿Ha tenido buena comunicación con los alumnos a través del uso de las TIC?

Comentarios adicionales: _____

ANEXO 3
PRUEBA DIAGNÓSTICA

Código: _____ Fecha: _____

INSTRUCCIONES: Contesta cada uno de los enunciados señalados. Indica el procedimiento de forma clara y ordenada, realiza los trazos o gráficas si es necesario. No se permite el uso de calculadora.

1.- La relación del cateto adyacente al cateto opuesto es la relación trigonométrica correspondiente a la función: _____

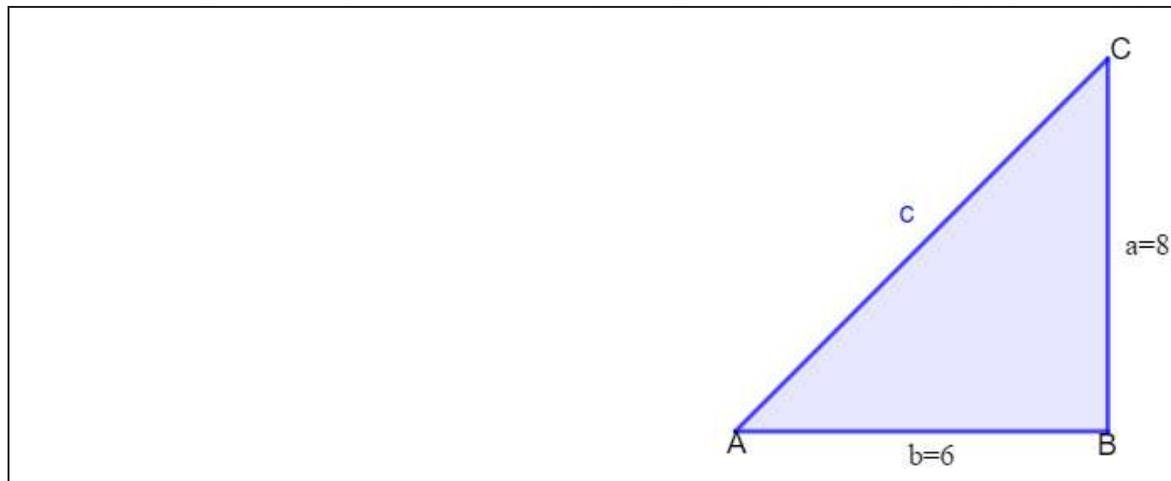
2.- Indica los valores exactos de las siguientes funciones para el seno, coseno y tangente del ángulo de 45 grados.

Seno $45^\circ =$ _____
Coseno $45^\circ =$ _____
Tangente $45^\circ =$ _____

3.- Si el $\text{sen}(\alpha)$ es positivo, indica los cuadrantes en donde el ángulo α puede encontrarse.

--

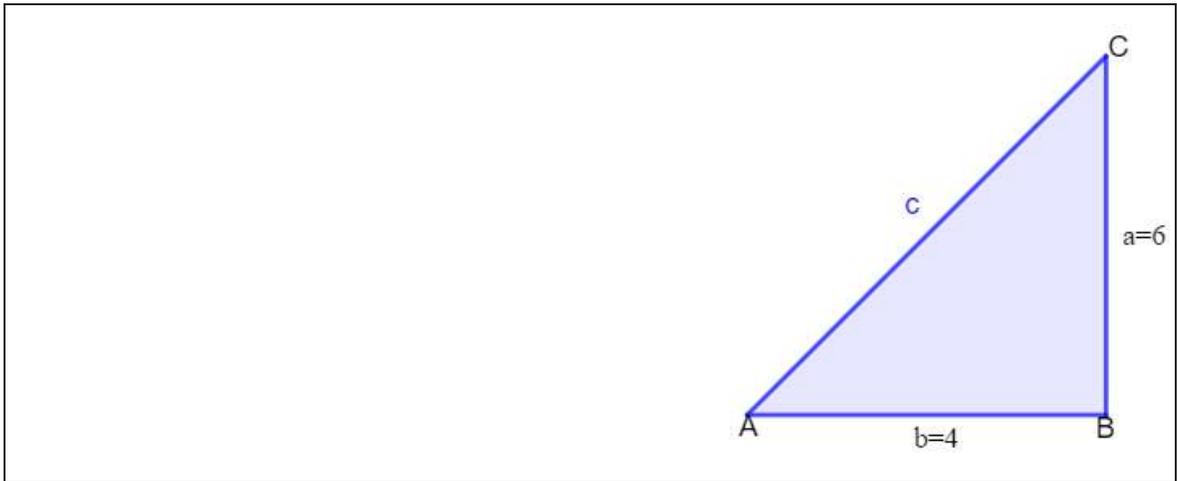
4.- Con el triángulo rectángulo ABC mostrado, $a=8$ y $b=6$, obtén el $\text{sen}(A)$ y la $\text{csc}(A)$.



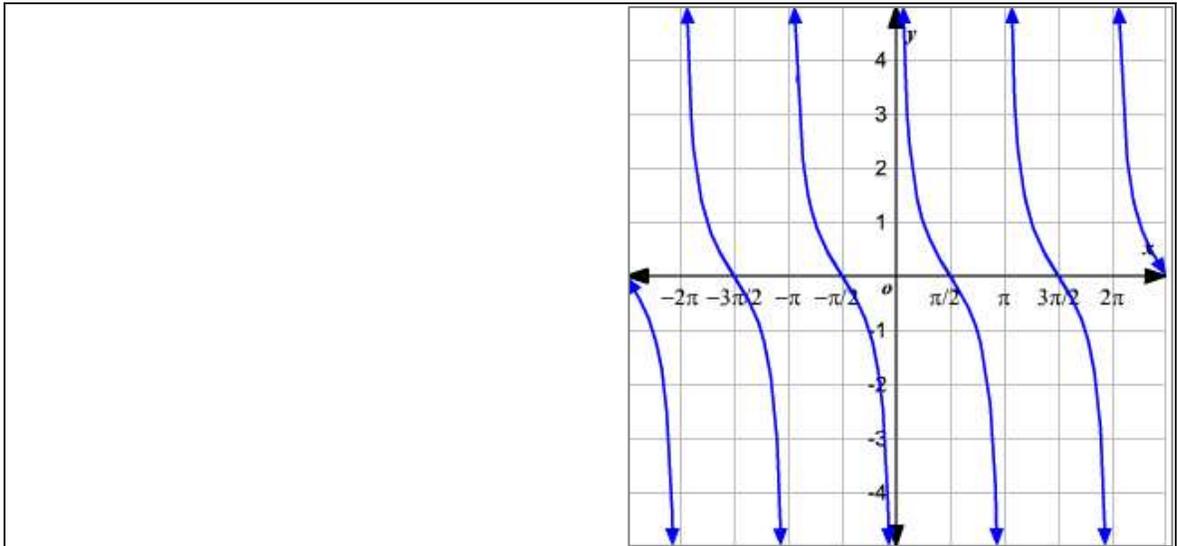
5.- Indica el valor exacto de $\text{sen}(90^\circ)$ y $\text{cos}(180^\circ)$.

--

6.-Resuelve el triángulo rectángulo ABC mostrado e indica las seis razones trigonométricas para el ángulo A.



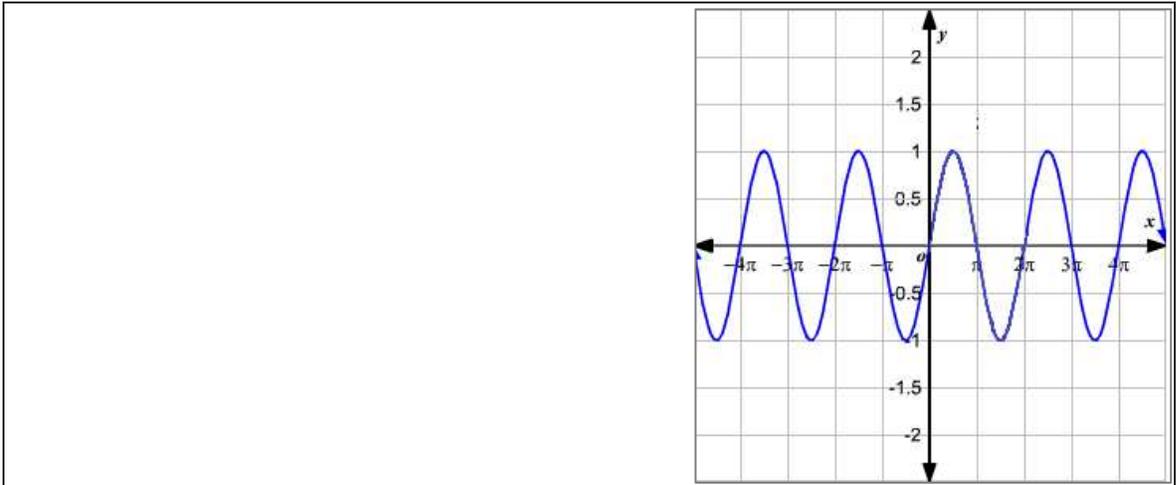
7.- Indica la función a la que corresponda la gráfica de la derecha y argumenta tu elección.



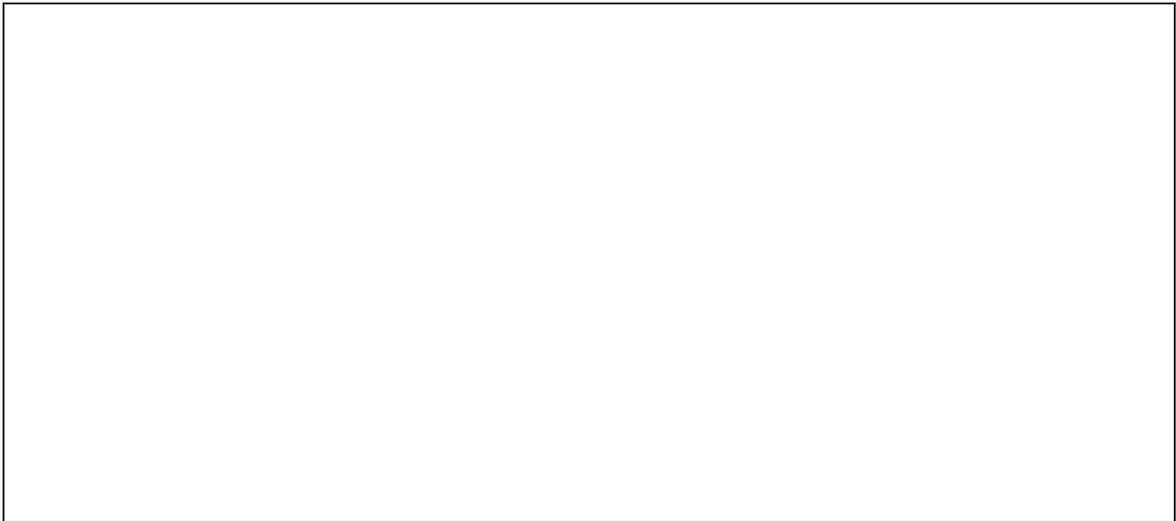
8.- Define el concepto de periodo y amplitud.

Blank space for defining the concepts of period and amplitude.

9.- Indica la función a la que corresponda la gráfica de la derecha y argumenta tu elección.



10.- Dada la función $y = \text{sen}(x)$, gráficala e indica el periodo y la amplitud.



ANEXO 4 SITUACIÓN 1

ACTIVIDAD 1.1

NOMBRE: _____ FECHA: _____



- 1.- Contesta lo siguiente:
a) ¿Cuál es la definición de ángulo?



Realiza lo siguiente.

2.- Abre un archivo nuevo en GeoGebra.

3.- Traza los puntos con coordenadas A (0,0), B (4,0) utilizando el comando , colócalos sobre las coordenadas correspondientes, de esta forma, A queda anclado al origen, B queda anclado al eje x y sólo se puede mover horizontalmente.



4.- Da clic en el comando  y traza una semirrecta, del punto A al punto B, la cual renombra como *li*. Para renombrar, da clic derecho y en renombrar indica el nuevo nombre.

5.- Traza una línea perpendicular a la semirrecta \overrightarrow{AB} , en el punto B. Usa el comando  y da clic en el punto B y la semirrecta \overrightarrow{AB} .

6.- Indica el punto C (4,3), mismo que queda sobre la línea perpendicular.

7.- Traza una semirrecta del punto A al punto C, la cual renombra como *lf*.

8.- Una vez hecho lo anterior, y teniendo el ángulo BAC delimitado por los extremos C y B, indica la medida del ángulo (sentido antihorario) formado entre las dos



semirrectas, para esto usa el comando  y da clic como te indica, primero en *li* y luego en *lf*.

9.- Interactúa moviendo el punto C que está sobre la semirrecta \overrightarrow{AC} para formar distintos ángulos y observa las medidas que toma.



- Responde lo siguiente:
b) ¿Cuáles son los elementos y la medida de un ángulo agudo?



Realiza lo siguiente:

10.- Enseguida, selecciona  Mueve y desliza horizontalmente el punto B y la recta perpendicular sobre el eje de las abscisas (eje x) de un lado hacia otro y observa la medida del ángulo.



A partir del trazo formado, responde:

c) ¿Qué pasa si se mueve en un sentido horizontal la recta perpendicular?



Realiza lo siguiente:

11.- Trazas segmentos usando el comando  , del punto A al punto B (\overline{AB}), del punto A al punto C (\overline{AC}) y del punto B al punto C (\overline{BC}).

12.- Oculta la recta perpendicular trazada previamente y las semirrectas \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} .

13.- Una vez hecho lo anterior, desliza el punto B horizontalmente. También puedes deslizar el punto C verticalmente.



Responde lo siguiente:

d) ¿Qué figura se formó?

e) ¿Qué tipo de triángulo se ha formado?

f) Enuncia los segmentos que se tienen:

g) ¿Qué ángulos se tienen?

14.- Guarda tu archivo en GeoGebra, el título es D_A1_S1.

15.- Realiza lo siguiente:



Accede al enlace: <https://www.geogebra.org/classroom/ch4jq92h>
y responde:

SITUACIÓN 1

ACTIVIDAD 1.2

NOMBRE: _____ FECHA: _____



Realiza lo siguiente:

1.- Abre el archivo guardado como D_A1_S1.
2.- En la construcción que ya se tiene, cambia el nombre de los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} , indicando ahora *ca*, *co*, *hip* respectivamente, cada uno con su nombre y valor (en distancia). Para esto, da clic derecho sobre el segmento y en propiedades modifica el nombre de cada segmento y en etiqueta visible activa nombre y valor.



3.- Indica la medida del ángulo ACB, usa el comando , da clic en el segmento \overline{AC} y \overline{CB} .



Responde lo siguiente:

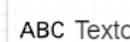
a) ¿Qué tipo de ángulo se tiene?

b) ¿Existe una regla para determinar los catetos?

c) ¿Cómo identificas un cateto y la hipotenusa?



Realiza lo siguiente:

4.- Indica cada razón trigonométrica para el ángulo α . Para $\text{sen } \alpha$, hazlo usando el comando de texto  `ABC Texto`, despliegas el menú de avanzado y en la primera ventana escribes $\text{sen } \alpha =$, α lo seleccionas de la casilla  y busca el objeto α ,

luego seleccionas fórmula Latex en avanzado e indicas $\frac{a}{b}$, quedando

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{b}$$

, a y b , tomarán los nombres de los catetos e hipotenusa dependiendo de la razón. En este caso, a es el cateto opuesto y b la hipotenusa, debes cambiar el valor de a , seleccionando el objeto correspondiente al cateto co y b seleccionando el objeto a la hipotenusa, quedando

$$\text{sen } \alpha = \frac{co}{hip}$$

, das clic en OK y puedes apreciar la razón en el espacio gráfico.



Responde lo siguiente:

d) ¿Cómo se relacionan los catetos y la hipotenusa para formular las razones trigonométricas?



Realiza lo siguiente:

5.- Relaciona las razones trigonométricas a partir del ángulo complementario (ángulo β) en el triángulo rectángulo, para esto realiza el paso 4, recuerda que ambos catetos (ca y co) no son los mismos que para el ángulo α .



Responde lo siguiente:

e) ¿Cómo se relacionan los ángulos del triángulo rectángulo?

f) ¿Qué observas de las razones del ángulo complementario?

6.- Guarda el archivo como D_A2_S1.

7.- Realiza lo siguiente:



Accede al enlace: <https://www.geogebra.org/classroom/xceufaa2> y verifica el valor de los ángulos del triángulo rectángulo a partir de las razones trigonométricas, indica los valores de ángulos:

SITUACIÓN 1

ACTIVIDAD 1.3

NOMBRE: _____ FECHA: _____



1.- Observa el círculo unitario presentado por el profesor.

- a) ¿Qué es el círculo unitario?
- b) ¿Cuáles son sus principales características?
- c) ¿Qué valor tiene el radio del círculo?



2.- Observa el círculo unitario con el triángulo rectángulo presentado por el profesor.

3.- Identifica los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo que está en el círculo y formula las razones trigonométricas. En primer lugar, para formular el seno del ángulo α considera el cateto opuesto que corresponde a la y , mientras que la hipotenusa es igual a 1, quedando de la siguiente manera:

$\text{sen } \alpha = \frac{y}{1} = y$, $\text{cos } \alpha = \frac{x}{1} = x$, enseguida enuncia las demás funciones con x y y .



Indica las funciones restantes:

Función	Denotación
$\text{sen } \alpha$	$\frac{y}{1} = y$
$\text{cos } \alpha$	$\frac{x}{1} = x$
$\text{tan } \alpha$	
$\text{cot } \alpha$	
$\text{sec } \alpha$	
$\text{csc } \alpha$	

- d) ¿Cuál es la abscisa del punto P?
- e) ¿Cuál es la ordenada del punto P?
- f) ¿Qué se observa del signo de las funciones en un primer cuadrante?



3.- Observa el triángulo rectángulo en el círculo unitario, donde el punto P tiene una nueva posición. Verifica el triángulo rectángulo generado a partir del nuevo posicionamiento del punto P en el cuadrante II.

Cuadrante I		Cuadrante II		Cuadrante III		Cuadrante IV	
sen α		sen β		sen β		sen β	
cos α		cos β		cos β		cos β	
tan α		tan β		tan β		tan β	
cot α		cot β		cot β		cot β	
sec α		sec β		sec β		sec β	
csc α		csc β		csc β		csc β	



4.- Observa el triángulo e indica las funciones trigonométricas en referencia al ángulo comprendido entre el radio de valor 1 y el lado sobre el eje de las x.
5.- Luego, realiza lo mismo para el cuadrante III y IV.

Responde lo siguiente:

g) ¿Cómo relacionan los ángulos generados a partir de trazar la hipotenusa del triángulo?

h) ¿Qué tipos de ángulos se tienen?

i) ¿Cuál es el ángulo normal?

j) ¿Cuál es el ángulo de referencia?



k) Indica el signo de las funciones en cada cuadrante:

Cuadrante I		Cuadrante II		Cuadrante III		Cuadrante IV	
sen α		sen β		sen β		sen β	
cos α		cos β		cos β		cos β	
tan α		tan β		tan β		tan β	
cot α		cot β		cot β		cot β	
sec α		sec β		sec β		sec β	
csc α		csc β		csc β		csc β	

6.- Realiza lo siguiente:



Accede al enlace: <https://www.geogebra.org/classroom/mqfa7bws>,
Verifica que los valores exactos de las funciones para ángulos normales en el II, III y IV cuadrante coinciden sin considerar el signo con los del ángulo normal en el cuadrante I.

Indica los valores obtenidos para el ángulo de 30° y el correspondiente ángulo normal en los cuadrantes II, III y IV.

SITUACIÓN 2

ACTIVIDAD 2.1

NOMBRE: _____ FECHA: _____



Realiza lo siguiente.

- 1.- Abre un archivo nuevo en GeoGebra.
- 2.- Construye en GeoGebra una circunferencia de centro y radio, utiliza el



comando , con centro en el origen A (0,0) y radio 1, creando una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

- 3.- Continuando con el trazo, crea un deslizador, usando el comando de deslizador,



da clic en , indica la opción de ángulo y especifica en nombre el ángulo α con un mínimo de 0° y máximo de 360° , así como un incremento de 1° .

- 4.- Enseguida, en la entrada indica el punto $P=(\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$.



Responde lo siguiente:

- b) Al mover el ángulo en el deslizador, ¿qué sucede con el punto P?

- 5.- Continuando con la construcción, en el deslizador indica un ángulo menor a 90° ,

luego traza un segmento del punto A al punto P (\overline{AP}), da clic en  y selecciona los puntos indicados previamente.

- 6.- En seguida, indica la amplitud del ángulo, utiliza el comando , da clic en el eje de las x y el segmento \overline{AP} .

- 7.- Modifica el nombre del ángulo, para esto, entra en propiedades del ángulo generado y da clic en etiqueta visible, de ahí, activa sólo la casilla de valor.



Responde lo siguiente:

- c) ¿Cómo cambia el punto P, a medida que en el deslizador el ángulo α aumenta?

- 8.- Posiciona nuevamente el deslizador con un ángulo α menor a 90° .

- 9.- Luego indica un nuevo punto B en la entrada, el cual indica como $B=(\cos(\alpha), 0)$.

10.- Posteriormente, traza un segmento de recta usando el comando  del punto P al punto B (\overline{PB}).

- 11.- Realiza el paso 9 para un nuevo punto en el eje de las ordenadas (eje y), el cual se llama $C=(0, \text{sen}(\alpha))$.

12.- Repite el paso 10, pero ahora un segmento de recta del punto P al punto C (\overline{PC}).

13.- Para identificar mejor las razones trigonométricas, cambia la visualización de los segmentos por su valor, da clic en propiedades y en etiqueta visible indica valor.

14.- Para visualizar mejor los valores de las funciones trigonométricas, utiliza la entrada , indica cada una de las funciones de la siguiente manera: para el caso del seno, escribe $\text{seno } \alpha$ y queda $a = \text{seno } \alpha$, luego una segunda entrada $\text{cos } \alpha$, y queda $b = \text{cos } \alpha$.

15.- En seguida, usando el comando texto  , se indicará la función de la

siguiente manera: $\text{sen } \alpha = \frac{a}{f}$, por lo que en la vista previa se puede ver el $\text{sen } \alpha = a/f$, siendo estos dos valores de la razón "objetos", debes

seleccionarlos en texto en el ícono de  e indicarlos de acuerdo a la función, esto con el fin de que GeoGebra reconozca los valores en función al trazo que ya se tiene. Así, sucesivamente indica cada función trigonométrica con $\text{sen } \alpha$ y $\text{cos } \alpha$, utilizando a y b, como se indica en el paso anterior.



Responde los siguiente:

d) ¿Qué sucede cuando en el deslizador aumenta el ángulo?

e) ¿Qué figura se visualiza con el trazo hecho anteriormente?

f) ¿Qué se puede decir del punto P, a medida que aumenta el ángulo?



Realiza lo siguiente:

16.- Construye las gráficas de las funciones trigonométricas. Primeramente, crea un nuevo punto D, el cual puedes indicar en la ventana de entrada como

$D = (\alpha, \text{sen}(\alpha))$.



Responde los siguiente:

g) A partir del trazo formado, ¿Qué pasará con el punto D al mover el deslizador?

17.- En seguida, modifica las propiedades del punto D, para esto, da clic derecho en propiedades e indica un color rojo, en estilo indica tamaño del punto de 3, en básico, indica en rótulo $\text{sen } \alpha$ y activa la casilla de rótulo, además la opción de mostrar rastro al dar clic derecho nuevamente en el punto D.

18.- Por último, sitúa el deslizador con un ángulo de 0° , activa la opción de

animación, dando clic derecho sobre el deslizador.



Responde lo siguiente:

h) ¿Qué se observa?

i) ¿A qué función corresponde la gráfica generada?

19.- Para desactivar la opción de animación da clic derecho en el deslizador y te muestra la opción de animación.

20.- Una vez construida la gráfica del seno, procede a construir la gráfica del coseno. Para este caso, crea un nuevo punto E, indica en la entrada como $E=(\alpha, \cos(\alpha))$.

21.- Modifica sus propiedades, indica el trazo de color azul y tamaño del punto de 3, en básico, indica en rótulo $\cos \alpha$ y activa la casilla de rótulo e indica mostrar también el rastro.

22.- Repite el paso 18.

23.- Para generar la construcción de las gráficas de las funciones trigonométricas, realiza los mismos pasos, considerando lo siguiente:

Función trigonométrica	Punto	Indicación en la entrada	Color	Tamaño del punto	Rótulo
$\sin \alpha$	D	$(\alpha, \sin(\alpha))$	Rojo	3	$\sin \alpha$
$\cos \alpha$	E	$(\alpha, \cos(\alpha))$	Azul	3	$\cos \alpha$
$\tan \alpha$	F	$(\alpha, \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha})$	Verde	3	$\tan \alpha$
$\csc \alpha$	G	$(\alpha, \frac{1}{\sin \alpha})$	Rosa	3	$\csc \alpha$
$\sec \alpha$	H	$(\alpha, \frac{1}{\cos \alpha})$	Cian	3	$\sec \alpha$
$\cot \alpha$	I	$(\alpha, \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha})$	Morado	3	$\cot \alpha$

24.- Guarda el archivo como D_A1_S2.

25.- Realiza lo siguiente:



Accede al enlace: <https://www.geogebra.org/classroom/nbvwqhft> y contesta:

SITUACIÓN 2

ACTIVIDAD 2.2

NOMBRE: _____ FECHA: _____



Responde lo siguiente:

- a) ¿Qué entiendes por periodo en una función trigonométrica?
- b) ¿A qué se le llama amplitud en una función trigonométrica?



Realiza lo siguiente:

- 1.- Abre el archivo con título: D_A1_S2.
- 2.- A partir de la construcción de cada una de las gráficas de las funciones trigonométricas, visualiza mediante el comando de animación e indica mostrar rastro de los puntos que dibujan las gráficas de las funciones trigonométricas para el reconocimiento de sus principales características, con la intención de evaluar cada una de ellas. Desactiva todas las demás casillas, dejando sólo la gráfica del seno.
- 3.- Enseguida y habiendo dejado activada la casilla de la función seno, da clic derecho en el deslizador, luego en animación y observa.
- 4.- Realiza lo mismo para las demás funciones y se da respuesta a las preguntas indicadas en la siguiente tabla.



Instrucciones: Llena la tabla con la información obtenida a partir del análisis de las gráficas de las funciones trigonométricas.

Pregunta	Seno	Coseno	Tangente	Cosecante	Secante	Cotangente
¿Cuál es el punto máximo y mínimo de la gráfica?						
¿En qué intervalos la gráfica crece y decrece?						
¿Cuál es el dominio de la función?						
¿La función tiene asíntotas?						
¿Por qué?						
¿Cuál es el periodo de la función?						
¿Cuál es la amplitud?						

5.-Realiza lo siguiente:



Accede al enlace: <https://www.geogebra.org/classroom/wpujehay>

ANEXO 5
PRUEBA FINAL PARA ALUMNOS

Código: _____ Fecha: _____

INSTRUCCIONES: Contesta cada uno de los enunciados señalados. Indica el procedimiento de forma clara y ordenada, realiza los trazos o gráficas si es necesario. No se permite el uso de calculadora.

1.- Enuncia las razones trigonométricas del ángulo α .



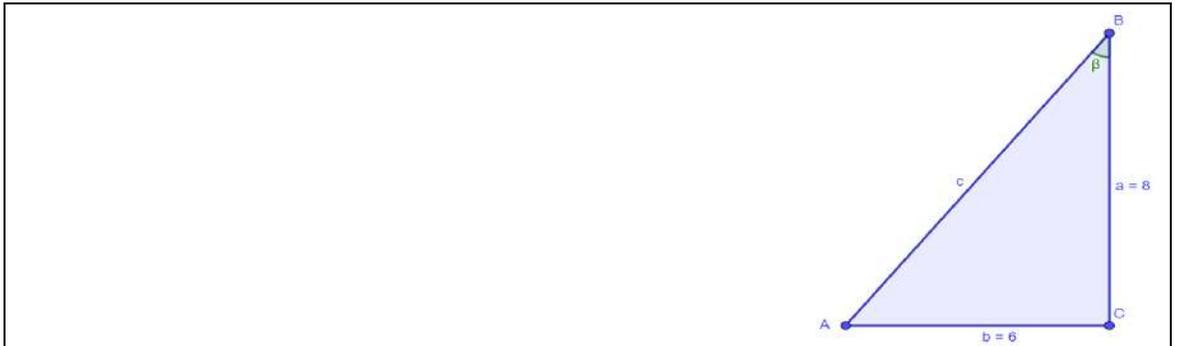
2.- Indica los valores exactos de las funciones trigonométricas del ángulo de 210° .

Empty box for the answer to question 2.

3.- Indica para que cuadrantes el $\cos(\alpha)$ es positivo.

Empty box for the answer to question 3.

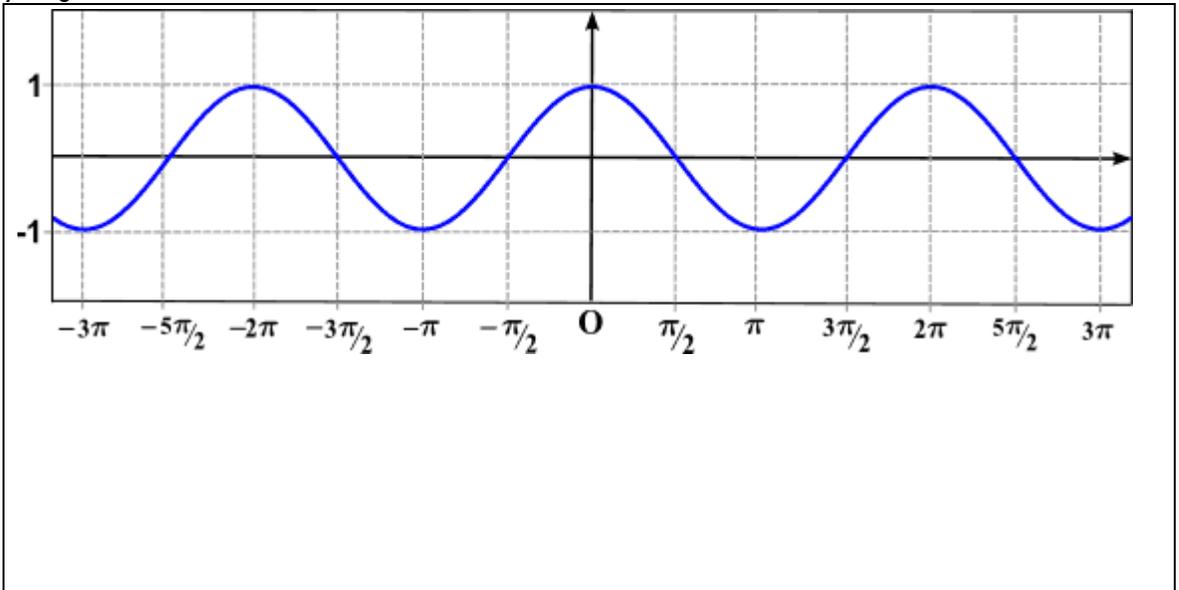
4.- Con el triángulo rectángulo ABC mostrado, $a=8$ y $b=6$, obtén el $\text{sen}(\beta)$ y $\text{cos}(\beta)$.



5.- Indica el valor exacto de $\tan (90^\circ)$ y $\text{sen} (180^\circ)$.

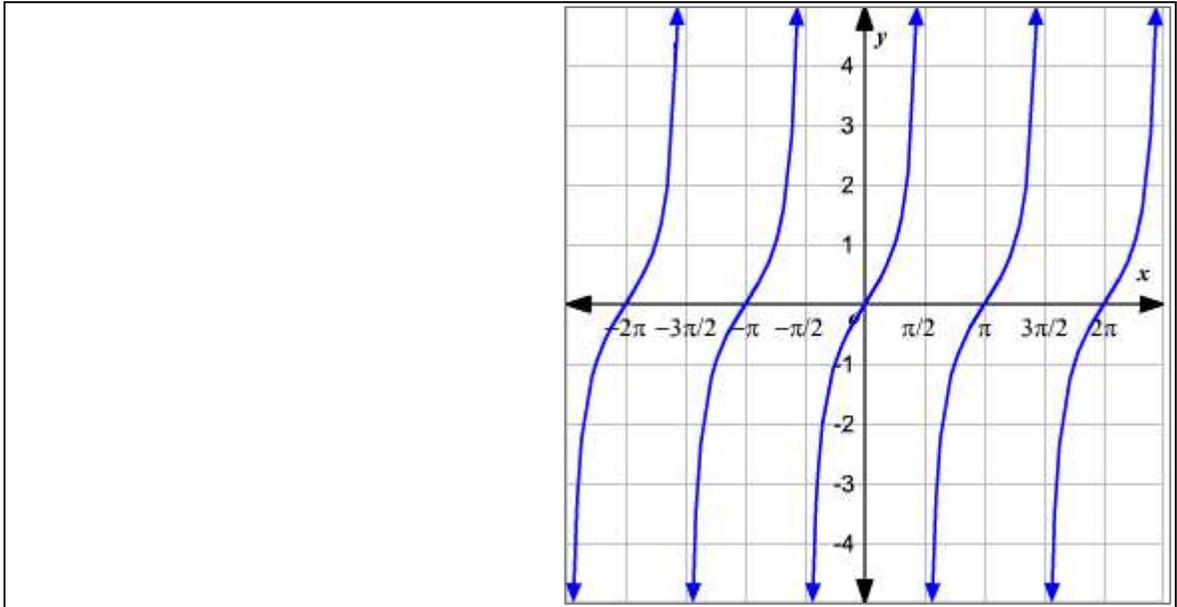
6.- Sea β la medida de un ángulo cuyo lado terminal se ubica en el segundo cuadrante y con un ángulo de referencia de medida θ . Si $\text{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Hallar el valor $\cot \theta$, $\text{sec}\theta$ y $\text{csc}\theta$.

7.- De acuerdo a la imagen, menciona la función a la que corresponda la gráfica de abajo y argumenta tu elección.

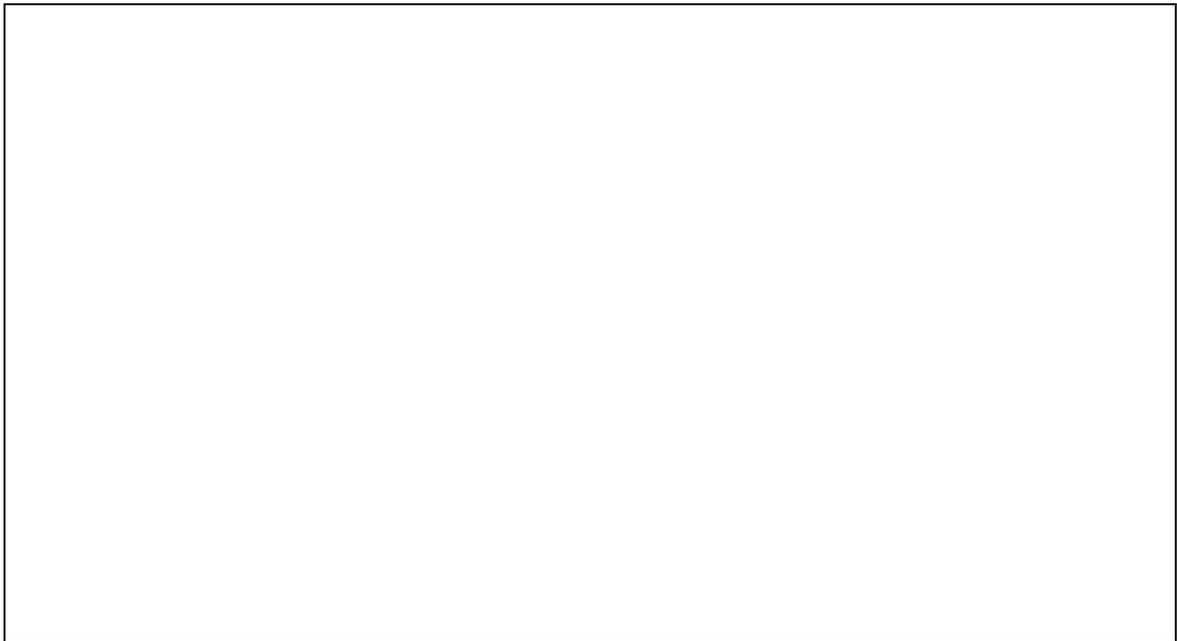


8.- Indica el concepto de periodo y amplitud.

9.- De acuerdo a la gráfica, identifica la función trigonométrica e indica el periodo y para que valores no está definida.



10.- Dada la función $y = 2 \cos(x)$, gráficala y enuncia en que difiere de la gráfica de $\cos x$.



ANEXO 6

LISTA DE CONTROL PARA EL PROCESO DE OBSERVACIÓN EN LAS CONSTRUCCIONES MEDIANTE EL USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA

Área: Trigonometría

Actividad: Elaborar las construcciones propuestas en las actividades.

Recurso: Software GeoGebra

Fecha:

	SI	CS	P	CN	NUNCA
El alumno maneja bien la computadora.					
El alumno sigue con facilidad los pasos establecidos en la propuesta.					
Para el estudiante es motivante el uso del recurso tecnológico.					
El alumno maneja con facilidad los comandos y herramientas del software.					
El alumno comprende las actividades indicadas en la propuesta.					
La participación de los estudiantes es de forma activa en la clase.					
Se ayudan entre compañeros si tienen dificultad en el desarrollo de las actividades.					
Identifican el origen de las funciones trigonométricas.					
El software favorece el interés y la participación de los alumnos.					
Demuestran el logro del aprendizaje.					
*NOTA: SI, CT-CASI SIEMPRE, P-PARCIALMENTE, CN-CASI NUNCA, NO					
Comentarios adicionales:					