Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

PROPUESTA DIDÁCTICA CENTRADA EN LA CONSTRUCCIÓN DE OBJETOS PARA LA ASIGNATURA DE ÁLGEBRA LINEAL

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestra en Didáctica de las Matemáticas

Presenta:
Alethia Piñón Jiménez

Dirigido por:
MDM. Teresa de Jesús Valerio López

SINODALES

MDM. Teresa de Jesús Valerio López ______________
Presidente Firma

Dr. Víctor Larios Osorio ______________
Secretario Firma

Dra. Angélica Rosario Jiménez Sánchez ______________
Vocal Firma

MDM. Carmen Sosa Garza ______________
Suplente Firma

MDM. Noemí Gabriela Lara Sáenz ______________
Suplente Firma

Dr. Manuel Toledano Ayala
Director de la Facultad

Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña
Directora de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Noviembre, 2018
México

RESUMEN

Este trabajo presenta una propuesta didáctica centrada en la construcción de objetos, como una estrategia para la asignatura de Álgebra Lineal a través de la realización de diez proyectos de final de tema o subtema, denominados *prácticas* en el desarrollo de esta tesis y que incluyen la construcción de igual cantidad de objetos relativos a los temas; números complejos, matrices y determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y transformaciones lineales. La revisión y el análisis de la literatura sobre la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la materia, aunado a las características propias de la estrategia didáctica a emplear como objetivo del trabajo, conducen a la selección de la Teoría de las Representaciones Semióticas de Raymond Duval como la teoría de base para las actividades que se proponen. Se utilizan diferentes representaciones semióticas de los conceptos en las actividades relativas a cada una de las diez prácticas de la propuesta. La planeación didáctica del trabajo toma como referencia los lineamientos para la instrumentación didáctica por competencias y el programa oficial de estudios del Tecnológico Nacional de México que está diseñado con un enfoque basado en competencias. Se especifican las representaciones semióticas usadas en el desarrollo de las actividades de cada práctica y se incluye el análisis de las aportaciones de cada actividad propuesta al alcance de los indicadores de las competencias genéricas y específicas de los temas. Finalmente, con las diez prácticas del trabajo se cumple con el objetivo de mostrar ampliamente y de manera documentada que es posible utilizar la construcción de objetos en todos los temas de la asignatura de Álgebra Lineal, quedando para trabajos futuros la investigación sobre los resultados de su aplicación en algún grupo de acuerdo a las condiciones de tiempo y características propias de los estudiantes.

(construcción, semióticas, práctica, rúbrica)

SUMMARY

This work presents a didactic proposal focused on the construction of objects, as a strategy for the subject of Linear Algebra through the realization of ten projects of end of topic or subtopic, called practices in the development of this thesis and that include the construction of equal number of objects related to the topics; complex numbers, matrices and determinants, systems of linear equations, vector spaces and linear transformations. The review and analysis of the literature on the problem of teaching and learning of the subject, together with the characteristics of the didactic strategy to be used as an objective of the work, lead to the selection of Raymond's Theory of Semiotic Representations Duval as the basic theory for the activities that are proposed. Different semiotic representations of the concepts are used in the activities related to each of the ten practices of the proposal. The didactic planning of the work takes as reference the guidelines for the didactic instrumentation by competences and the official program of studies of the National Technological Institute of Mexico that is designed with a competency-based approach. The semiotic representations used in the development of the activities of each practice are specified and the analysis of the contributions of each proposed activity is included within the scope of the indicators of the generic and specific competences of the subjects. Finally, with the ten work practices is fulfilled the objective of showing widely and in a documented manner that it is possible to use the construction of objects in all the topics of the subject of Linear Algebra, being for future work the research on the results of its application in some group according to the conditions of time and characteristics of the students.

(construction, semiotics, practice, rubric)

DEDICATORIAS

A mis padres, Oscar y Efigenia por su amor,
comprensión y apoyo recibido a lo largo de toda mi vida.
A mi hermana, Aniela por su amor y cariño incondicional.
A mis tíos, tías, primos y primas de quienes recibo afecto familiar.
A mis abuelos por su amor y sabios consejos.

AGRADECIMIENTOS

A mi directora de tesis, MDM. Teresa de Jesús por su dedicación, tiempo y asesoría para la realización de este trabajo.

A mis revisores; Dr. Víctor, Dra. Angélica, MDM. Carmen y MDM. Noemí, por sus valiosos comentarios, aportaciones y sugerencias para mejorar mi trabajo.

A todos los profesores del programa de la maestría en didáctica de las Matemáticas por contribuir a mi formación académica.

A la Universidad Autónoma de Querétaro por distinguirme con el honor de ser estudiante de la maestría, recibir las atenciones de su personal y permitirme usar sus instalaciones para la realización de esta tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por admitirme como becario y brindarme el apoyo económico.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1. INTRODUCCIÓN

La asignatura de Algebra Lineal es uno de los cursos de matemáticas que se incluyen en todos los planes de estudio de las carreras de ingeniería que se imparten en el Tecnológico Nacional de México (TecNM) y de manera general en los programas de ingeniería de las universidades mexicanas.

En este trabajo de tesis se plantea una propuesta didáctica centrada en la construcción de objetos para el aprendizaje de los temas de esta asignatura, tales como números complejos, matrices y determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y transformaciones lineales.

Se propone la construcción de un total de diez objetos, distribuidos de la siguiente manera; un objeto para el tema de números complejos, cuatro objetos para matrices y determinantes, dos para sistemas de ecuaciones, dos para espacios vectoriales y uno para transformaciones lineales.

La construcción de cada objeto constituye generalmente las primeras dos o tres actividades de un grupo de diez actividades que se proponen como proyecto final de tema o subtema, mismo que en este trabajo se nombra solo como *práctica*, en virtud de que la asignatura se imparte normalmente en los primeros semestres y se deja el término *proyecto* para los de mayor impacto que el estudiante realizará en semestres más avanzados de su carrera. Cada práctica a su vez, tiene un título acorde a las actividades que se le solicitan al estudiante realizar como parte de su proceso de aprendizaje.

Se toma como referencia el programa oficial de estudios del TecNM que está diseñado con un enfoque basado en competencias y por esta razón se incluye para cada tema las competencias específicas y genéricas a desarrollar establecidas en dicho programa. Es decir, se asumen como totalmente adecuadas a los contenidos temáticos de la asignatura, y con base en ellas se proponen las actividades en las prácticas y el consecuente análisis de la pertinencia de las mismas.

Así mismo, para los fines de este trabajo, se incluyen también los llamados indicadores de alcance de las competencias a considerar en la planeación didáctica. Es importante mencionar que, los indicadores que se incluyen en el trabajo son a título personal y que pueden ser diferentes, dependiendo de la interpretación del profesor que imparte la asignatura, aunque lo ideal es que se propongan de manera colegiada por un grupo de profesores.

La teoría de aprendizaje que soporta la planeación de las actividades en el trabajo, es la teoría de las representaciones semióticas, así en cada práctica, para cada concepto matemático involucrado, una vez construido el objeto, las actividades que se proponen se orientan a que el estudiante utilice los objetos construidos para realizar actividades con distintas representaciones semióticas con la intención de propiciar y mejorar su aprendizaje.

Para cada una de las prácticas propuestas, se incluye una sección correspondiente al análisis de las actividades que se proponen, valoradas de acuerdo a sus aportaciones al alcance de las competencias específicas, genéricas, indicadores de alcance, vinculación con el contexto cotidiano del estudiante, uso de las tecnologías de información y comunicación (TIC's).

En el trabajo, se incluye también para fines de la evaluación de las actividades que se proponen, la correspondiente rúbrica de cada práctica, como el instrumento de evaluación del reporte escrito que el estudiante elabora y entrega en un archivo electrónico (en WORD o PDF) o impreso y que contiene el texto y las imágenes que documentan la realización de cada actividad de cada una las prácticas propuestas.

Además, debido al tiempo necesario para realizar las actividades que se proponen, y por el volumen de trabajo que implica su desarrollo, se sugiere que se trabajen las actividades por equipo y en horas distintas a las de la clase, propiciando así el aprendizaje colaborativo.

Finalmente es de resaltar que, es el profesor que imparte la asignatura quien puede seleccionar, adaptar y decidir cuantas prácticas y cuales desea realizar con su grupo de acuerdo a las condiciones de tiempo y características propias de sus estudiantes, la intención de la propuesta de esta tesis es la de mostrar de manera documentada en el contexto de la planeación educativa, que es posible aplicar la construcción de objetos en la didáctica de todos los temas del programa oficial de la asignatura de Álgebra Lineal.

1.1 ANTECEDENTES

Los procesos de enseñanza y aprendizaje en álgebra lineal, para estudiantes de física, ingeniería, matemáticas, pedagogía en ciencias y química, precisan de elementos de las teorías de espacios vectoriales, de coordenadas y de transformaciones lineales.

La enseñanza del álgebra lineal y, sobre todo, las dificultades de los estudiantes cuando intentan aprender los conceptos abstractos de esta disciplina han recibido la atención de varios investigadores. Existen numerosos trabajos de investigación que tratan los distintos aspectos de su enseñanza y aprendizaje (Sierpinska, 2000; Sierpinska et al., 2002; Dorier et al., 1997). La naturaleza epistemológica del álgebra lineal, los problemas con diseños didácticos y el uso de diferentes tipos de lenguajes son algunas de las fuentes de obstáculos que se identifican en estas investigaciones.

Dorier y Sierpinska (2001) sitúan el problema central en que el estudiante tiene que trabajar con conceptos matemáticos de naturaleza general, pero tratados con elementos particulares, además de aprender a escribir demostraciones que no le son explicativas; al no entender su naturaleza general, el estudiante se inclina por procedimientos calculatorios que sabe manejar, pero no siempre entiende (Robinet, 1986; Moore, 1995).

Surgió de ahí el interés por formular propuestas didácticas específicas para el álgebra lineal, entre las que sobresale aquella diseñada con la teoría APOE, en la que se publicaron materiales de enseñanza que ponen de manifiesto la filosofía de los autores acerca de los contenidos a incluir y su organización en un primer curso universitario de álgebra lineal (Weller, Montgomery, Clark, Cottrill,Trigueros, Arnon y Dubinsky, 2002).

En este contexto, en el caso de las carreras de ingeniería, es particularmente importante para el estudiante, encontrar el sentido y la conexión de los temas que estudia en la asignatura de álgebra lineal con su entorno y además que está aplicación sea comprensible para él considerando que la cursa en sus primeros semestres, por tal motivo también resulta de interés una propuesta didáctica orientada hacia la conexión del entorno del estudiante con los temas del curso, como la que se presenta en este trabajo.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior

Tradicionalmente se ha considerado que el ejercicio docente a nivel universitario no se fundamenta en un saber pedagógico, ni didáctico; en su lugar se requieren docentes con desarrollos académicos y científicos en un área determinada del saber. Un indicio de ello es que para seleccionar a los profesores universitarios no es requisito la formación en pedagogía, ni en didáctica, más bien es indispensable la formación como investigadores (González 2009).

Esta concepción lleva a pensar que la práctica docente a nivel superior está centrada en los procesos de enseñanza de los contenidos (los cuales constituyen los conocimientos producidos por otros), desconociendo de este modo los procesos de aprendizaje de los estudiantes (González 2009). Por ello muchas veces la práctica del profesor universitario es inconsciente, es decir, sin reconocer la importancia de su rol en el aprendizaje del estudiante, sin un fundamento pedagógico ni didáctico que respalde su práctica docente y la limitación de lo que hicieron sus profesores cuando él fue estudiante universitario (González 2009)

En el caso de las materias con un nivel de abstracción como es el caso de las matemáticas, es necesario que el docente tenga un adecuado dominio del tema, y utilice todos los recursos y herramientas que tenga a su alcance, o que las genere, de tal manera que le facilite al alumno la comprensión de los temas cuyo nivel de abstracción sea superior, de esta manera conseguir un mejor resultado, logrando que el estudiante comprenda y domine los temas esperados (González 2009).

2.2 Teorías del aprendizaje

La base teórica de conceptos relativos a las teorías de aprendizaje es muy amplia y en esta sección se incluye únicamente información sobre dos de estas teorías. La teoría de las representaciones semióticas es la que se usa como referencia para proponer las actividades de la propuesta didáctica de esta tesis y la teoría APOE se ha incluido para mostrar otra teoría que resulta interesante para realizar un trabajo futuro. Además, en la literatura es mayor la cantidad de trabajos de investigación sobre esta teoría aplicada al aprendizaje del Álgebra Lineal. Sin embargo, para el objetivo de este trabajo, la Teoría de representaciones es más natural y directa porque la construcción de objetos que se propone se logra usando precisamente las diferentes representaciones de un mismo concepto.

2.2.1 Teoría de las Representaciones Semióticas

Para tener acceso al conocimiento matemático es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas, según Raymond Duval creador de esta teoría. El autor sostiene que todo acceso a los objetos matemáticos (ecuaciones, funciones, etc.) pasa necesariamente por las representaciones semióticas. Sin embargo, no se puede confundir nunca un objeto matemático y su representación, el objeto puede tener otras tantas representaciones diferentes de las que uno ve.

El enfoque teórico de Duval afirma que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción humana o a la experiencia intuitiva inmediata. Sosteniendo, por un lado, que la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que aprehensión conceptual y, por otro, que solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Además, afirma que un concepto se va construyendo mediante tareas que impliquen el uso de diferentes sistemas de representación y promuevan la articulación coherente entre representaciones. En la misma obra Duval hace notar que las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma (García 2014).

Hitt (2000) afirma que el conocimiento de un individuo sobre un concepto es estable si es capaz, sin contradicciones, de articular diferentes representaciones de este.

Duval define las representaciones semióticas como producciones humanas constituidas por el empleo de signos y que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significación y de funcionamiento. Un enunciado en lengua natural, una figura geométrica, una gráfica, una expresión algebraica son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes.

Dicho autor señala que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

1. La formación de una representación identificable dentro de un registro dado. Por ejemplo, el enunciado de una frase, la elaboración de un dibujo o esquema, de una gráfica, la escritura de una expresión algebraica, etcétera.

2. El tratamiento de una representación, que es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna de un registro. Por ejemplo, la transformación equivalente de una expresión algebraica.

3. "La conversión de una representación que es la transformación en una representación dentro de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial" (Duval, 1998, p. 175). Por ejemplo, la transformación de una expresión algebraica en una gráfica, o viceversa).

En la actividad matemática es esencial poder movilizar y coordinar varios registros de representación semiótica en una situación, y poder escoger entre un registro y otro.

Duval (1998) da tres razones para justificar lo anterior:

- La conveniencia del tratamiento.
- La complementariedad de los registros. Toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa y de un registro a otro, no son los mismos aspectos del contenido de una situación los que se representan.
- "La conceptualización implica una coordinación de registros de representación. El tener acceso a varios registros es fundamental para no confundir el objeto matemático con sus representaciones, y también para poder reconocerlo en cada una de ellas" (Duval, 1998, pp.181-182).

Duval llama semiosis a la aprehensión de las representaciones semióticas y noesis a la aprehensión conceptual. Afirma que no hay noesis sin semiosis, lo que significa que no hay acceso al objeto matemático sino a través de sus representaciones semióticas.

2.2.2 Teoría APOE

La teoría APOE (acrónimo de las construcciones mentales, acciones, procesos, objetos y esquemas), desarrollada por Dubinsky y el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) es una teoría reconocida en la comunidad de investigación en didáctica de la matemática (Dubinsky, 1991; Arnon y otros, 2014). En ella se toma como punto de partida el mecanismo de abstracción reflexiva propuesto por Piaget para describir la construcción de objetos mentales relacionados con objetos matemáticos específicos.

Las construcciones mentales de la teoría APOE, son acción, proceso, objeto y esquema; donde las acciones son construidas por respuestas repetitivas a un estímulo; los procesos son construidos ya sea al interiorizar acciones o al transformar procesos existentes; los objetos son construidos al encapsular los procesos; y, en la desencapsulación de un objeto, los únicos procesos que un individuo puede obtener son los procesos que fueron encapsulados para construir este objeto (Parraguez, M., & Uzuriaga, V. 2014).

Consideremos un concepto matemático. Un estudiante muestra una construcción *acción* de dicho concepto si las transformaciones (actividad mental reflejada en argumentos observables) que hace sobre el concepto se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son principalmente externos, en el sentido de que cada paso de la transformación requiere realizarse de forma explícita y guiados por instrucciones externas que le entregan indicaciones precisas sobre qué debe hacer.

Cuando las *acciones* se repiten y el estudiante reflexiona sobre ellas y deja de depender de las instrucciones externas adquiriendo control interno sobre lo que hace (o imagina), decimos que el estudiante ha *interiorizado* la *acción* en un *proceso*.

La construcción mental *proceso* se caracteriza por que el estudiante ha alcanzado la capacidad para imaginar la ejecución de los pasos que debe seguir en una actividad matemática, sin tener necesariamente que llevar a cabo cada uno de ellos explícitamente, pudiendo incluso prescindir de alguno; más aún, el estudiante realiza transformaciones a un objeto matemático en la mente, sin la necesidad de ir a través de cada paso (Parraguez, M., Lezama, J., Jiménez, R., 2016).

Por otra parte, dos o más procesos pueden *coordinarse* para construir un nuevo proceso y además dicho proceso puede *revertirse* o *generalizarse*. Si el estudiante estabiliza el dinamismo propio de un *proceso* en un estado sobre el cual puede aplicar *acciones* sin que este se derrumbe, y se logre entender el *proceso* como un todo ligado –de modo que él mismo puede construir transformaciones sobre el objeto matemático–, entonces se dice que ha *encapsulado* el *proceso* en un *objeto* cognitivo

(Parraguez, M., Lezama, J., Jiménez, R., 2016). Además, si se necesita volver desde el objeto al *proceso* que le dio origen, se dice que ha *desencapsulado* el objeto en un *proceso*.

Un *esquema* de un concepto matemático es una colección de *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas* de otros conceptos, relacionados en la mente del estudiante como una estructura cognitiva coherente. Para operar la teoría como marco de investigación se requiere el diseño de un modelo predictivo, llamado descomposición genética (DG), para explicar fenómenos relacionados con el aprendizaje de los conceptos matemáticos. (Parraguez, M., Lezama, J., Jiménez, R., 2016).

2.3 Enfoque educativo basado en competencias

Como se ha mencionado en la introducción de este trabajo la propuesta didáctica toma como referencia el programa oficial de estudios de la asignatura de Álgebra Lineal del TecNM, diseñado con un enfoque por competencias y disponible en la dirección , por lo que en esta sección se incluyen algunas definiciones básicas de competencias, los seis principios educativos vinculados a la planeación didáctica. Así mismo se muestra un mapa conceptual de la planeación por competencias y algunos comentarios sobre la estrategia didáctica utilizada en la propuesta.

El concepto de competencia

Cazares Aponte y Cuevas de la Garza (2010) en su libro definen a la competencia en el ámbito educativo como "una interacción reflexiva y funcional de saberes –cognitivos, procedimentales, actitudinales y metacognitivos- enmarcada en principios morales, que genera evidencias articuladas y potencia actuaciones transferibles a distintos contextos, apoyadas en conocimiento situacional, identificados a través de evidencias transformadoras de la realidad".

En la definición anterior, el término metacognitivo se refiere a que el sujeto que aprende es consciente de cómo y por qué aprendió. El conocimiento situacional se debe a que en la competencia está presente un conocimiento base, pero también un conocimiento que se desarrolla en la propia aplicación o realización de determinada actividad. El enmarcado en principios morales se justifica porque en el contexto educativo la competencia no puede estar ajena a orientaciones de carácter ético determinadas por el bien común. Finalmente la generación de evidencias se debe a que la competencia es invisible, se infiere que se tiene o no a partir de resultados, es decir, en actuaciones cuyas consecuencias son entendidas como evidencias.

Definiciones de competencias en el ámbito de la educación superior

Una *competencia* es una capacidad profesional que implica una construcción intelectual culturalmente diseñada, desarrollada en un proceso formativo. Se puede ver a la competencia como la combinación y desarrollo dinámico de conjuntos de conocimientos, capacidades, habilidades, destrezas y atributos de carácter intelectual y procedimental que se constituyen en un desempeño profesional producto de un proceso educativo.

Competencias profesionales. Se van desarrollando, de manera integral, a lo largo de un programa académico, e interactúan en la realización de la mayoría de las tareas que se le presentan a un sujeto en los diversos campos profesionales.

Competencias específicas. Son aquellas que en su desarrollo definen una cualificación profesional concreta, al sujeto en formación, es decir, Saberes, quehaceres y manejo de tecnologías propias de un campo profesional especifico.

Competencias genéricas. Son aquellas que se pueden aplicar en un amplio campo de ocupaciones, y desempeños profesionales, aportan las herramientas intelectuales y procedimentales básicas que necesitan los sujetos para analizar los problemas, evaluar las estrategias, y aportar soluciones adecuadas.

Principios educativos para la planeación de actividades en base a competencias

La realización de la propuesta didáctica de esta tesis queda ubicada dentro del contexto de la planeación educativa, con particular énfasis en la propuesta de actividades. En la literatura relativa al tema de competencias, en el mismo libro mencionado en el párrafo de la definición anterior de competencia, los autores plantean seis principios educativos para el enfoque de competencias, mismos que se vinculan con la planeación de actividades como se describe a continuación.

Todo tiene que ver

El modelo de planeación debe considerar que todos los componentes de la planeación estén vinculados al desarrollo de las competencias y, por ende, de aprendizajes contextuales, que abonen a la construcción de un alumno ampliamente formado para enfrentar la resolución de problemas concretos, y poder visualizar de manera global la inserción de los mismos. Este principio es fundamental para un proceso formativo eficaz, centrado en la construcción de aprendizajes en la dimensión del saber, saber hacer, saber transferir y saber ser.

La aplicación de este principio permite distinguir cuatro tipos de aprendizaje: innovador, significativo, productivo y de dominio. El aprendizaje innovador habilita para plantear problemas y buscar alternativas de solución a partir de la integración del análisis y la síntesis en forma sucesiva; el aprender significativamente será necesario para utilizar lo aprendido en el abordaje de situaciones nuevas y por tanto, para efectuar nuevos aprendizajes. Aprender productivamente es aprender a producir nuevo saber y ser consciente de que si aprendemos a manejar la información que está en diversas fuentes, podremos socializarla mediante un trabajo grupal. El aprendizaje de dominio es el que se refiere al "dominio" de las destrezas y conceptos, generado dentro del marco de la calidad de la enseñanza.

Hacer consciente lo que hacemos de ordinario: reflexionar

La conciencia y la reflexión permanente son la base del crecimiento, de la mejora, de la retroalimentación y de la visualización de los alcances esperados. Son los elementos que vitalizan la planeación-acción, la autoconciencia de nuestras acciones y la cercanía de nuestros alumnos, al mantenernos en una actitud permanentemente reflexiva sobre la puesta en marcha de nuestra planeación y de los resultados que ésta produce en la pertinencia del proceso formativo.

Cuestionamiento permanente

Por parte de los alumnos porque la habilidad de cuestionarse y cuestionar es una habilidad que tienen que desarrollar, y el docente debe cuestionarse permanentemente sobre lo que planea y las necesidades de adecuación de aquello que planea. ¿Qué resultados estoy obteniendo con mi planeación? ¿Es necesario adecuar algunos enfoques de las competencias de mediación que desarrollo? Son ejemplos de las preguntas típicas del cuestionamiento.

Integración de habilidades de pensamiento

Planear cuáles habilidades de pensamiento serán las que se trabajen dentro del aula y fuera del aula es un acompañante clave para los procesos educativos porque son un medio para alcanzar la capacidad planteada como competencia de un curso. Por ejemplo, en una competencia central de resolución de problemas del entorno se puede trabajar el desarrollo de habilidades de descubrimiento para alcanzar la capacidad esperada, pero la capacidad misma de descubrir alternativas, coherencia, globalidad, situaciones y oportunidades, al ser empleadas como competencias de mediación, se pueden transformar en una competencia central y generar un fin educativo.

Sistematizar

La sistematización permanente de lo que se planea con lo que realmente se hace con los alumnos es un requisito de la eficacia. Escribir las confirmaciones, los comentarios, los fracasos, los datos informativos y las actividades incompletas, las cuestiones que sorprendan al profesor, que lo hagan pensar que las “cosas” debieron haber sido de otra manera, en fin, todo aquello que sea de utilidad para la mejora y reconstrucción de un curso.

Evaluar para reconstruir

Este principio es un fin para mejorar los resultados formativos del binomio maestro-alumno. Toda planeación está sujeta a modificaciones y adaptaciones para lograr una reconstrucción permanente. Con base en la información obtenida de la sistematización se podrán verificar tangiblemente los resultados obtenidos y mejorar el ejercicio docente en lo relativo a la planeación.

Elementos de la planeación por competencias

En la figura 1. Se muestra un mapa conceptual cuyos bloques de conceptos contienen los elementos de la planeación didáctica por competencias. Cabe señalar que el énfasis del contenido de este trabajo se centra en el bloque de propuestas de actividades con sus respectivos instrumentos de evaluación y el correspondiente análisis de la utilidad de las mismas para el alcance de las competencias.

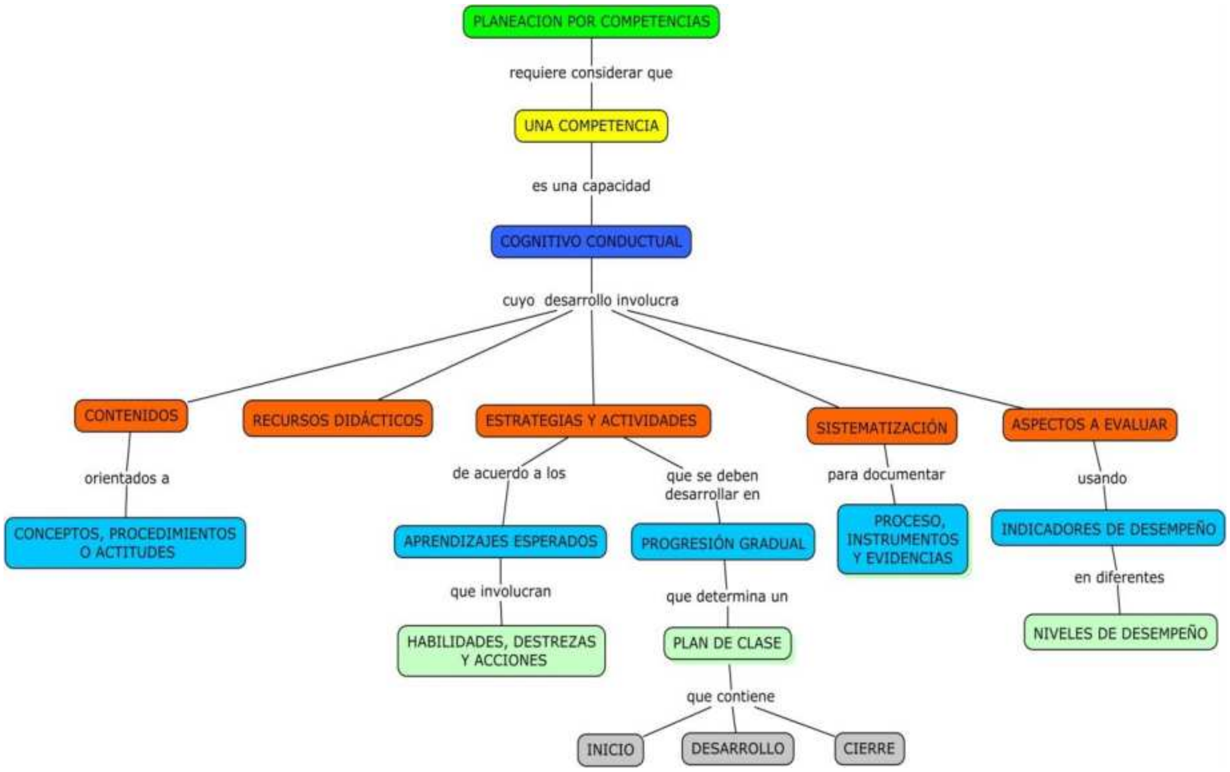


Figura 1. Mapa conceptual de la planeación por competencias.

La construcción de objetos en el contexto de las estrategias didácticas bajo el enfoque por competencias

La construcción de objetos como estrategia didáctica para un enfoque educativo por competencias para educación superior no se encuentra como tal en la literatura (http://www.itesca.edu.mx/documentos/desarrollo_academico/compendio_de_estrategias_didacticas.pdf), la estrategia más próxima a lo que se propone sería el llamado método de proyectos. Esta proximidad se justifica en el sentido de que el objeto que se construye es un producto terminado y que las actividades que se proponen requieren de la aplicación e integración de los conocimientos. Además, algunos autores (LARSON) de textos de matemáticas incluyen lo que denominan proyectos de final de sección que esencialmente son proyectos de final de tema o subtema con actividades cuya realización requiere del dominio y aplicación de los temas en algún problema del contexto de los estudiantes.

No obstante, los argumentos anteriores para ubicar la construcción de objetos dentro de la estrategia de elaboración de *proyectos*, la literatura (http://sitios.itesm.mx/va/dide2/tecnicas_didacticas/aop/proyectos.pdf) reporta que, en el método de proyectos la realización queda más abierta a la iniciativa y capacidades del estudiante y la realización del proyecto no es con instrucciones tan guiadas y orientadas como en la presente propuesta y en ese sentido, entonces el conjunto de actividades que se proponen utilizando el objeto para las actividades o en algunos casos para alcanzar su construcción sería más próxima a llamarse *práctica*.

Por lo anterior, el nombre específico de la estrategia de construcción de objetos no está definido y por lo que queda como un hibrido entre llamarse proyecto o práctica. Aunque, la intención esencial del trabajo es mostrar que es posible aplicar la construcción de objetos en los temas de Álgebra lineal; describir los objetos se proponen, las actividades que se desarrollan en torno a ellos, los instrumentos de evaluación y justificar su pertinencia para el desarrollo de las competencias establecidas en el programa de estudios considerado como una referencia. (http://www.itq.edu.mx/carreras/IngElectrica/p_materias.html)

3. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Esta propuesta didáctica está formada por un total de 10 objetos a construir como actividades centrales correspondientes a los temas de la asignatura de Álgebra Lineal, como se menciona en la introducción. Así mismo, se establecen y desarrollan detalladamente, a manera de ejemplos, una serie de actividades de aprendizaje para cada objeto construido y los programas de cómputo (SAC) se usan solo como herramienta de apoyo para realizar las actividades, comprobar resultados y elaborar el reporte escrito.

La intención didáctica de las actividades centradas en la construcción de objetos, no es aumentar la complejidad de los temas al orientar la didáctica hacia las teorías de aprendizaje que requieren una mejor estructura del conocimiento, por el contrario, lo que se pretende es que, la construcción de los objetos propuestos y la realización de las actividades relacionadas a los mismos, contribuya a la conexión del estudiante con el entorno, le proporcione claridad en la interpretación geométrica de conceptos en el espacio geométrico y haga comprensible los conceptos abstractos.

Es importante señalar que una gran expectativa de esta propuesta es que, la experiencia de construcción y la realización de las actividades asociadas, que se solicitan en relación al objeto construido sirvan como entrenamiento al estudiante para desarrollar las competencias necesarias para plantear y evaluar alternativas de solución de problemas dentro de su área de ingeniería con argumentos técnicos científicos.

3.1 JUSTIFICACIÓN

En los planes de estudio de las carreras del área de ingeniería, usualmente el número de créditos de la asignatura de Álgebra Lineal tiene asociada cierta cantidad de horas prácticas. Es común que las horas prácticas se utilicen para realizar ejercicios y resolver problemas.

Algunas instituciones cuentan en su infraestructura con el denominado *Laboratorio de Matemáticas*, en el cual se realizan prácticas y simulaciones con equipos de cómputo que tienen instalados un conjunto de programas, tales como: Geogebra, Derive, Matlab, u otro similar con poderosas herramientas para realizar gráficas y operaciones de cálculo matemático. Así, las horas prácticas también se usan para desarrollar la habilidad para manejar tales programas.

Además, es frecuente encontrarse con estudiantes que a pesar de estar cursando una carrera universitaria como ingeniería, tecnología o química, le tienen fobia a la matemática, o la consideran ajena a su carrera, sin importancia o sin relación con su programa académico (Uzuriaga, V. & Martínez).

Entre sus argumentos están: la matemática es abstracta, no tiene relación con la realidad, la cotidianidad o la vida diaria y menos está presente en lo que ellos están cursando o van a ejercer en su vida profesional (Uzuriaga, V. & Martínez).

Ahora bien, es cierto que un adecuado laboratorio de matemáticas centrado en el uso de sistemas algebraicos computarizados (SAC) promueve el desarrollo de las competencias específicas y genéricas de la asignatura de Álgebra Lineal. Sin embargo, es de notarse también que, no es suficiente, salvo casos excepcionales, para relacionar la realidad y la cotidianidad de la vida diaria de los estudiantes a los temas de la materia.

De este modo, se justifica la necesidad de elaborar una propuesta didáctica orientada hacia el acercamiento de los temas de álgebra lineal a la realidad y al contexto de los estudiantes, considerando particularmente que, en las carreras de ingeniería esta asignatura se imparte en el segundo o tercer semestre.

En este trabajo se propone usar los SAC solo como una herramienta y centrar la didáctica empleada en la elaboración de maquetas, esculturas, cuadros y en general en la construcción de un objeto, en cuyo proceso de diseño y elaboración, se apliquen los temas tratados en las horas teóricas.

Finalmente, con esta propuesta se espera contribuir a que las expectativas de éxito en el desarrollo de las competencias sean mayores e incluso en una gama más amplia, porque hacer o construir un objeto puede incluir competencias asociadas a lo artístico y a la creatividad.

3.2 HIPÓTESIS

Una adecuada propuesta didáctica centrada en la construcción de objetos como proyecto final de tema o subtema demuestra que es posible aplicar esta estrategia didáctica en asignaturas como álgebra lineal y posibilita la investigación sobre su efectividad en el proceso de aprendizaje.

3.3 OBJETIVOS

Elaborar y documentar una propuesta didáctica que contiene un conjunto de actividades centradas en la construcción de un objeto y sus correspondientes actividades de aprendizaje donde el estudiante aplica sus conocimientos de los temas de Algebra Lineal, tales como: números complejos, matrices y determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y transformaciones lineales.

4. METODOLOGÍA

En los siguientes párrafos se reproducen las actividades que se propusieron en la etapa inicial del trabajo y que se realizaron durante el desarrollo de esta tesis. Al terminar la descripción de las actividades inician las secciones numeradas que corresponden con el desarrollo de la propuesta didáctica.

Investigar en la red sobre publicaciones relacionadas con; la enseñanza y aprendizaje de la materia, propuestas didácticas centradas en la construcción de objetos, y prácticas de algebra lineal para el laboratorio de matemáticas.

A partir de las competencias asociadas a cada uno de los temas, establecer un conjunto de indicadores que muestren, de manera gradual y por etapas, el proceso de construcción del conocimiento y el desarrollo de las mismas, y con base a estos indicadores valorar la aportación de las actividades que se proponen para alcanzarlas. Así mismo, estos indicadores servirán para realizar, cuando así sea el caso, una evaluación comparativa entre lo encontrado en las publicaciones y la presente propuesta para decidir si se modifica o descarta alguna de las actividades que se propongan y hacer las referencias adecuadas.

Considerar inicialmente la construcción de los siguientes diez objetos que se relacionan con los temas mostrados en la tabla 1. Considerando siempre la posibilidad de reemplazar alguna, si fuera necesario por motivos de que en el desarrollo de la tesis se publique algo semejante y con esta acción conservar el carácter original de la propuesta.

OBJETO A CONSTRUIR	TEMA RELACIONADO	DESCRIPCIÓN Y UTILIDAD
Tablero metálico representando al plano complejo	Números complejos	Tablero de lámina lisa y un conjunto de flechas que se fijan en el tablero por acción de imanes para realizar las operaciones con números complejos.
Tablero metálico, piezas móviles para construir polígonos de 3,4,5,.. lados	Matrices y Determinantes	Tablero de lámina con piezas móviles que se fijan por acción de imanes para calcular el área de polígonos por división en triángulos y aplicación del determinante de una matriz de 2 X 2

Escultura de un robot con paralelepípedos	Matrices y Determinantes	Maqueta de una escultura de un robot construido por diferentes paralelepípedos cuyo volumen se calcula aplicando el determinante de una matriz de 3 X 3.
Cajita de mensajes en código	Matrices y determinantes	Cajita de mensajes en código para felicitaciones con distintos motivos o juego de tarjetas con frases de matemáticos ilustres en código, cuyo descifrado requiere la aplicación de la matriz inversa.
Cajita con tarjetas perforadas	Matrices y determinantes	Cajita de tarjetas con perforaciones para efectuar permutaciones y calcular determinantes de hasta de orden 5.
Maqueta de Arcos parabólicos con segmentos rectos	Sistemas de ecuaciones lineales	Maqueta de un domo de armaduras de arcos parabólicos cuyo proceso de diseño y construcción implica la solución de un sistema de ecuaciones lineales.
Icosaedro	Sistemas de ecuaciones lineales	Icosaedro de materiales a elección del estudiante y que se utiliza para actividades de aprendizaje relacionadas con la interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones.
Poliedro en forma de pirámide	Espacios Vectoriales	Poliedro en forma de pirámide para la interpretación geométrica de subespacio vectorial, combinación lineal e independencia lineal.
Torre de un proceso de ortonormalización	Espacios vectoriales	Escultura tipo torre del proceso de ortonormalización de Gram- Schmidt para vectores de tres componentes.
Tablero con una pieza en forma de tortuga	Transformaciones lineales	Tablero con un objeto tridimensional en forma de una tortuga cuya proyección sobre el tablero se mueve y coloca en distintas posiciones para identificar las matrices de las transformaciones lineales correspondientes.

Tabla 1. Descripción de los 10 objetos a construir en la propuesta.

Para cada objeto construido, definir y diseñar las actividades relacionadas que el alumno debe realizar para aplicar la teoría y desarrollar sus competencias sobre los temas.

Para cada actividad definir y realizar las actividades que se sugiere el alumno debe realizar con programas de cómputo, de uso libre, para incorporar el uso de esta tecnología en el desarrollo de las actividades. Documentar la realización de la construcción, los cálculos en las actividades y la elaboración del reporte escrito de cada actividad.

Elaborar un cuadro resumen de los indicadores de alcance de las competencias asociadas a cada actividad propuesta e identificar la teoría de aprendizaje que le corresponde con fines de evaluación de su pertinencia. Establecer las conclusiones del desarrollo de la propuesta y terminar la redacción y documentación de la misma.

4.1 Un objeto a construir, fundamentos y actividades para el tema de Números Complejos

4.1.1 Competencias específicas y genéricas

Competencia específica del tema de números complejos

Utiliza los números complejos, sus representaciones y las operaciones entre ellos para tener una base de conocimiento a utilizar en ecuaciones diferenciales y en diferentes aplicaciones de ingeniería.

Competencias genéricas asociadas al tema

- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis.
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.
- Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente.
- Capacidad de trabajo en equipo.
- Habilidades básicas en el uso de la computadora (uso de Sistemas Algebraicos Computarizados SAC).

Indicadores de alcance de las competencias.

La tabla 2 contiene una propuesta de indicadores que el estudiante debe alcanzar de manera gradual en su proceso de construcción del conocimiento necesario para alcanzar la competencia específica.

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A) Expresa los números complejos en las distintas formas de representación (estándar, trigonométrica, polar y exponencial).	15%
B) Representa gráficamente los números complejos a partir de sus diferentes representaciones.	15%
C) Realiza operaciones con los números complejos (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación) en sus diferentes formas de representación.	40%
D) Resuelve ecuaciones polinómicas que involucren números complejos.	20%
E) Valora la importancia de los números complejos en las aplicaciones actuales en el área de ingeniería y reconoce las aportaciones históricas desde su origen.	10%

Tabla 2. Indicadores de alcance de las competencias del tema de números complejos.

4.1.2 Fundamentos teóricos

En esta sección se incluye la base teórica de los conocimientos sobre el tema de números complejos, que los estudiantes deben de tener para realizar las actividades que se proponen, con el fin de que el profesor, que considere la construcción del objeto que se propone para su clase, tenga la información suficiente para evaluar si los estudiantes poseen los conocimientos previos, y en su caso, complementar con otras estrategias con materiales propios o usando la información que aquí se describe.

Además, como algunas de las actividades se proponen con el uso del programa GEOGEBRA, será necesario que el estudiante descargue el programa previamente y aprenda a utilizarlo, ya sea en clase o consultando videos disponibles en la red.

Interpretación vectorial de números complejos (Spiegel, 2007).

Un número complejo $z = x + iy$ se puede considerar como un vector OP cuyo punto inicial es el origen O y cuyo punto final P es el punto (x, y), como en la figura 2. Algunas veces llamamos $OP = x + iy$ el vector de posición de P.

Dos vectores que tienen la misma longitud o magnitud y dirección, pero con puntos iniciales diferentes, tal como OP y AB en la figura 2, se consideran iguales. Por tanto, escribimos

$$OP = AB = x + iy$$

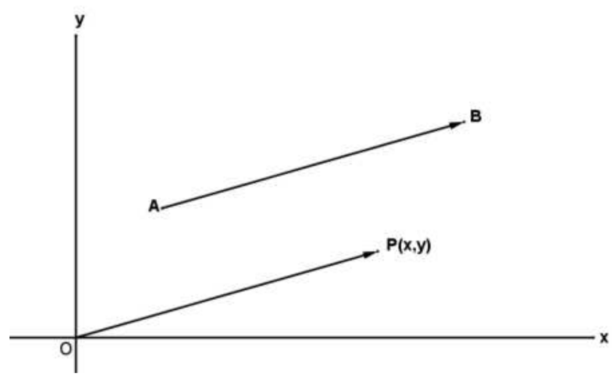


Figura 2. Número complejo como vector

La suma de números complejos corresponde a la ley del paralelogramo para la suma de vectores (fig.3). En este caso, para sumar el número complejo $z_1\ y\ z_2$, completamos el paralelogramo $OABC$ cuyos lados $OA\ y\ OC$ corresponden a $z_1\ y\ z_2$. La diagonal OB de este paralelogramo corresponde a $z_1 + z_2$.

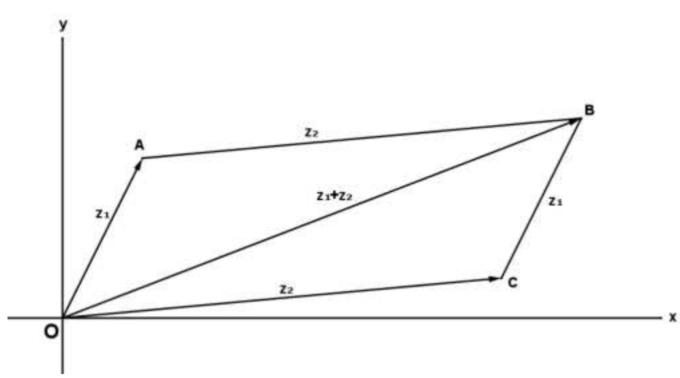


Figura 3. Suma de números complejos

Representación gráfica de números complejos. Vectores

<u>Ejemplo</u>. Efectuar las operaciones indicadas en forma analítica y gráficamente:

a) $(3 + 4i) + (5 + 2i)$,

b) $(6-2i)-(2-5i)$,

c) $(-3+5i)+(4+2i)+(5-3i)+(-4-6i)$

Solución:

a. Analíticamente

$$(3+4i)+(5+2i)=3+5+4i+2i=8+6i$$

Gráficamente. Se representan los dos números complejos por los puntos $P_1\ y\ P_2$ respectivamente, como en la figura 4. Se completa el paralelogramo $OP_1\ y\ OP_2$ como los lados adyacentes.

El punto P representa la suma, $8+6i$, de los dos números complejos dados. Obsérvese la semejanza con la ley del paralelogramo para suma de vectores $OP_1\ y\ OP_2$ para obtener el vector *OP.* Por esta razón, a menudo es conveniente considerar un número complejo $a+bi$ como un vector que tiene componentes a y b en las direcciones de los ejes positivos x y y respectivamente.

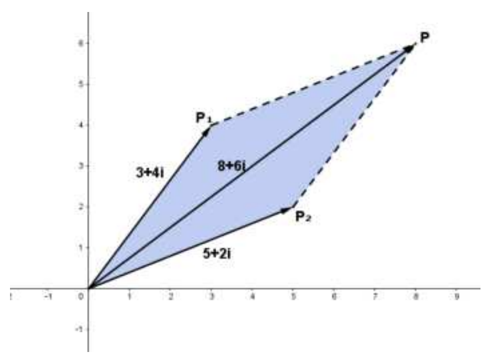


Figura 4. Representación gráfica de la suma de dos números complejos.

b. Analíticamente

$$(6-2i)-(2-5i)=6-2-2i+5i=4+3i$$

Gráficamente. $(6-2i)-(2-5i)=6-2i+(-2+5i)$. Ahora se suma $6-2i\ y\ (-2+5i)$ como en la parte (a). El resultado se indica por *OP* en la figura 5.

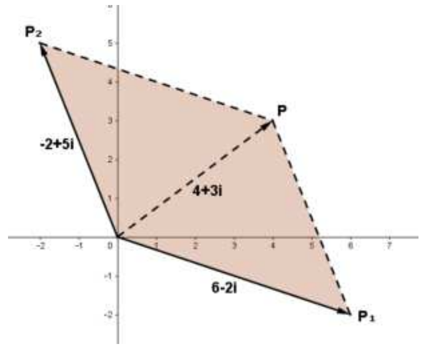


Figura 5. Representación gráfica de la resta de dos números complejos.

c. *Analíticamente*

$$(-3+5i)+(4+2i)+(5-3i)+(-4-6i)=(-3+4+5-4)+(5i+2i-3i-6i)=2-2i$$

Gráficamente. Se representan los números que se suman por z_1, z_2, z_3, z_4 respectivamente, los cuales se muestran gráficamente en la figura 6. Para encontrar la suma requerida se procede como se muestra en la figura 7. En el punto final del vector z_1 se construye el vector z_2. En el punto final de z_2 se construye el vector z_3, y en el punto final de z_3 se construye el vector z_4. La suma requerida, algunas veces llamada resultante, se obtiene construyendo el vector OP desde el punto inicial de z_1 al punto final z_4, o sea $OP = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 2 - 2i$.

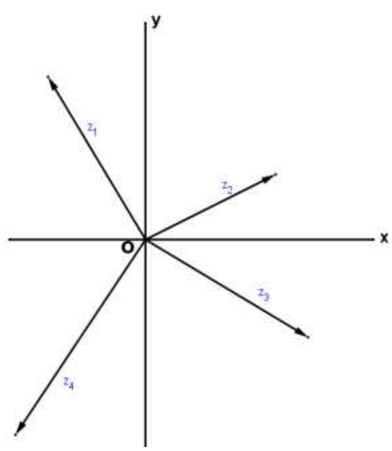


Figura 6. Representación gráfica cuatro números complejos

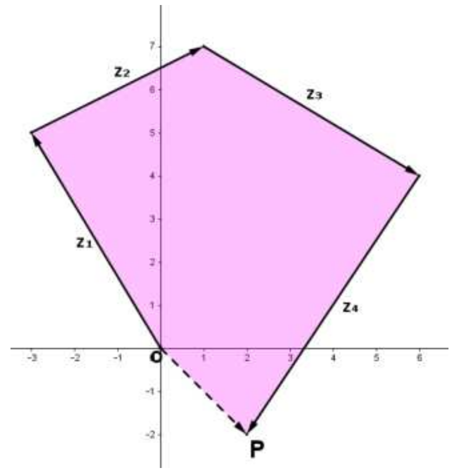


Figura 7. Representación gráfica de la suma de cuatro números complejos.

Productos y cocientes en forma polar

Ejemplo. Determinar de forma analítica y gráficamente los productos y cocientes indicados.

a) $\left(\sqrt{3}+i\right)\left(-\sqrt{3}+3i\right)$

Analíticamente:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)\left(-\sqrt{3}+3i\right) = -3+3\sqrt{3i}-\sqrt{3i}-3 = -6+2\sqrt{3}i$$

Gráficamente:

$$P_1 = \sqrt{3}+i = 2(\cos 30° + i \sin 30°),$$

$$P_2 = -\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}(\cos 120° + i \sin 120°),$$

$$P_3 = P_1 \cdot P_2 = 4\sqrt{3}(\cos 150° + i \sin 150°)$$

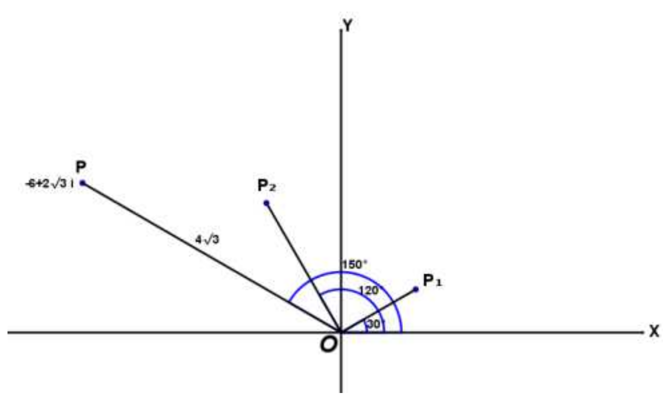


Figura 8. Representación gráfica del producto de números complejos.

b) $\frac{2-2\sqrt{3i}}{1+i}$

Analíticamente:

$$\frac{2-2\sqrt{3}i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{2-2i-2\sqrt{3}i-2\sqrt{3}}{2}=\left(1-\sqrt{3}\right)-\left(1+\sqrt{3}\right)i$$

Gráficamente:

$$P_1=2-2\sqrt{3}i=4(\cos 300°+i\sin 300°),$$

$$P_2=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°),$$

$$P=\frac{P_1}{P_2}=2\sqrt{2}(\cos 255°+i\sin 255°)$$

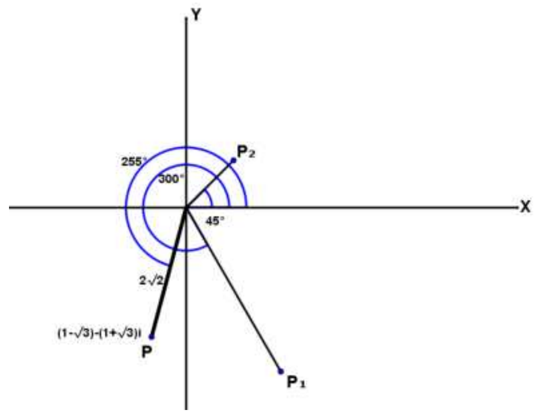


Figura 9. Representación gráfica del cociente de números complejos.

Raíces de los números complejos

Ejemplo. Hallar todas las raíces (z_1, z_2, etc) y representarlas gráficamente:

a) $\sqrt[5]{32(\cos 50°+i\sin 50°)}=2\left(\cos\frac{50°+k\,360°}{5}+i\sin\frac{50°+k\,360°}{5}\right)$

$$z_1\ \ (k=0)=2(\cos 10°+i\sin 10°)$$

$$z_2\ \ (k=1)=2(\cos 82°+i\sin 82°)$$

$$z_3\ \ (k=2)=2(\cos 154°+i\sin 154°)$$

$$z_4\ \ (k=3)=2(\cos 226°+i\sin 226°)$$

$$z_5\ \ (k=4)=2(\cos 298°+i\sin 298°)$$

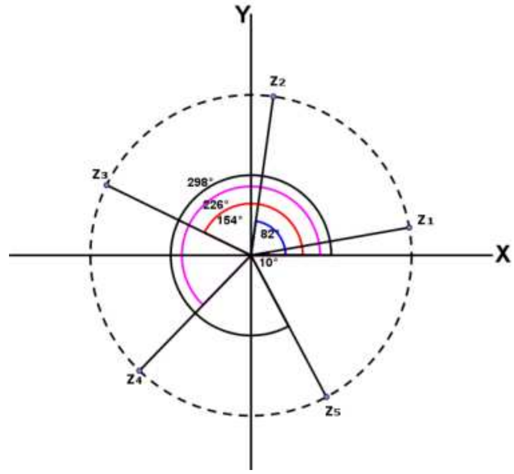


Figura 10. Representación gráfica de las raíces z_1, z_2, z_3, z_4, z_5

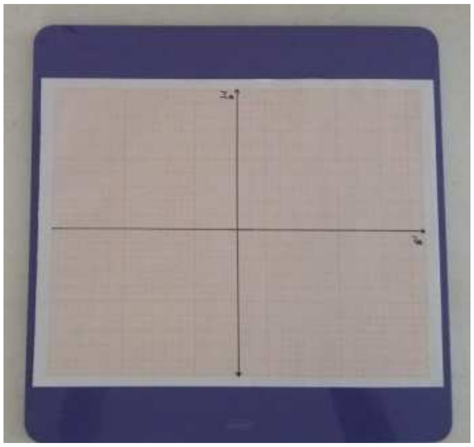
4.1.3 Descripción del objeto propuesto a construir

La teoría de aprendizaje de las representaciones semióticas de Raymond Duval, es la teoría respecto a la cual se desarrollan las actividades a realizar en este trabajo, específicamente para el tema de números complejos, se propone una práctica centrada en la construcción de un tablero metálico cuadriculado, de dimensiones iguales a una hoja de cuadrícula milimétrica tamaño carta, un conjunto de 20 flechas cuyas longitudes varían entre 1 y 16 cm, y un conjunto de 20 sectores circulares de 2 cm de radio y cuyos ángulos varían de 5 a 90 grados.

En este caso, el tablero cuadriculado, se construye sobre una delgada placa metálica lisa y plana, sobre la cual se traza la cuadrícula o bien se pega una hoja de papel de cuadrícula milimétrica. Las flechas se construyen con alambre delgado y rígido que se monta sobre pequeños imanes circulares con el fin de que al colocarse en determinada posición en el tablero, se adhiera al mismo y se mantenga fijo. Sobre el alambre montado en los imanes se coloca una flecha recortada de plástico rígido usando diferentes colores de flecha según sea su longitud.

También, se dibujan sobre hojas de plástico rígido, diferentes sectores circulares de 2 cm de radio con un ángulo de 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 grados, haciendo por duplicado los sectores para cada medida angular. Cada sector circular se recorta y monta sobre pequeños imanes.

La construcción del tablero y los conjuntos de flechas y sectores son las actividades básicas de arranque y una vez hechas, le permitirán al estudiante hacer uso de los mismos para realizar operaciones tales como sumar, restar, multiplicar, dividir y extraer raíces de números complejos en las actividades de la práctica correspondiente al tema.



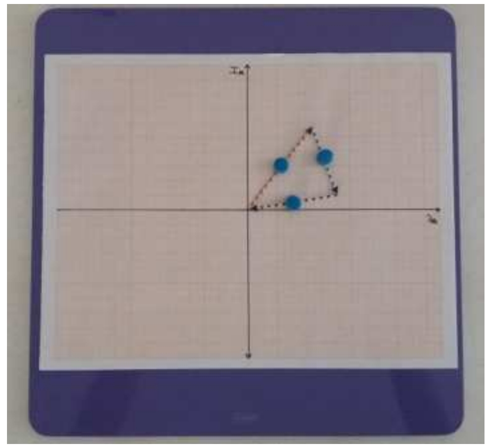


Figura 11. Fotografia de tablero para la práctica de números complejos.

4.1.4 Actividades propuestas y sus desarrollos para el objeto a construir.

PRÁCTICA DE OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS.

Representación gráfica de operaciones con números complejos en un tablero.

1) Sobre una lámina plana y lisa, de dimensiones iguales al de una hoja tamaño carta, trace una cuadrícula con cuadros de 1 cm o bien simplemente pegue sobre la lámina una hoja tamaño carta de papel milimétrico con el objetivo de contar con una cuadrícula apropiada para representar el plano complejo. Seleccione apropiadamente un punto de la cuadrícula como el origen del plano complejo y marque los ejes con sus respectivas unidades los ejes real e imaginario.

2) Construya con alambre delgado y recto flechas en la cantidad y dimensiones dadas en la tabla siguiente

Cantidad	Longitud cm
2	1
4	2
3	3
2	4
2	5
2	6

2	7
1	8
1	9
1	16

Tabla 3. Longitudes de las que flechas para representar números complejos.

Cada flecha debe estar montada sobre pequeños imanes circulares, con el fin de que al colocarse en determinada posición en el tablero, se adhiera al mismo y se mantenga fijo. También, recorte y monte sobre imanes circulares, diferentes sectores circulares de 2 cm de radio con un ángulo de 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 grados, haciendo por duplicado los sectores para cada medida angular.

3) Seleccione un vector de tamaño mediano, de acuerdo al grupo, colóquelo en el tablero de manera que, el extremo sin punta de flecha coincida con el origen del plano complejo, después coloque un segundo vector, de tamaño menor al primero, de manera que, la punta de flecha del primero coincida con el extremo sin flecha del segundo, y finalmente ubique un tercer vector, de tamaño mayor a los anteriores de forma que, el extremo sin punta coincida con el origen del plano complejo y el extremo con punta de flecha coincida con la punta de flecha del segundo vector, formando un triángulo oblicuángulo.

Por inspección de la cuadrícula identifique la parte real e imaginaria de los números complejos z_1, z_2 cuya suma z_3 corresponde con el triángulo construido en este proceso. Registre la posición del triángulo en la cuadrícula con una fotografía y use esta, como imagen necesaria para justificar su respuesta en el archivo en Word del reporte de la práctica realizada.

4) Seleccione un vector de tamaño mediano, de acuerdo al grupo, colóquelo en el tablero de manera que, el extremo sin punta de flecha coincida con el origen del plano complejo, después coloque un segundo vector, de igual o mayor tamaño que primero, de manera semejante al primero solo que en una posición distinta y con un ángulo entre los dos vectores. Después, coloque un tercer vector, del tamaño adecuado, de manera que una los extremos que tienen punta de flecha de ambos vectores formando un triángulo.

Por inspección de la cuadrícula identifique la parte real e imaginaria de los números complejos $z_1,\ z_2$ cuya resta z_3 corresponde con el triángulo construido en este proceso. Registre la posición del triángulo en la cuadricula con una fotografía y use esta, como imagen necesaria para justificar su respuesta en el archivo del reporte de la práctica realizada.

5) Seleccione tres vectores de diferentes longitudes, pero de los de menor tamaño del grupo y colóquelos en el tablero de manera que el extremo sin flecha de cada uno coincida con el origen del plano complejo y que exista un ángulo entre cada par de vectores. Defina estos vectores como $z_1,\ z_2,\ z_3$ siguiendo un orden ascendente de su longitud e identifique por inspección del plano complejo, la parte real e imaginaria de los mismos. Una vez definida la posición y tamaño estos tres vectores, seleccione de los vectores restantes del grupo, el adecuado para que sea un cuarto vector z_4 que represente gráficamente la siguiente operación entre números complejos

$$z_4 = 3z_1 + 2z_2 - z_3.$$

Registre la posición de los primeros tres vectores y la posición del cuadrilátero que representa la operación que se solicita, con las fotografías correspondientes, las cuales deberá usar como imágenes en el reporte escrito.

6) Haga una réplica de las figuras de los puntos 3, 4, 5 y realice a manera de comprobación, las operaciones con el programa de computo GEOGEBRA. Documente y registre la realización de esta parte de la práctica con capturas de pantalla que deberá incluir en el reporte impreso.

7) Seleccione un vector de longitud igual a 2 unidades y ubíquelo en el origen del plano complejo usando uno de los sectores circulares para ubicarlo a un ángulo específico con respecto a la parte positiva del eje real. Repita esta operación con un segundo vector de longitud igual a 8 unidades y use un sector circular diferente para ubicarlo en un ángulo mayor que el del primero.

Determine gráficamente, usando los sectores circulares para las operaciones de multiplicación y división de ángulos y ubique en el tablero los vectores correspondientes a las operaciones de multiplicación y división de estos números complejos usando las reglas para multiplicar y dividir números complejos dados en forma polar. Exprese por inspección del tablero, la forma polar, exponencial y rectangular de todos los números complejos involucrados en estas operaciones. Documente y registre con las fotografías necesarias para mostrar el proceso, mismas que deberá usar en su reporte escrito.

8) Seleccione un vector de 8 unidades de longitud y ubíquelo en el plano complejo con la ayuda de los sectores circulares a un ángulo en grados que sea divisible entre 3. Aplique el teorema de De Moivre para calcular las tres raíces cúbicas del número complejo correspondiente en forma polar, represente gráficamente estos resultados colocando en el tablero los vectores que corresponden con los números complejos de estas raíces, y por inspección del plano obtenga también los resultados en forma rectangular. Registre las posiciones del número complejo y sus tres raíces con una fotografía que deberá incluir en su reporte.

9) Seleccione un vector de longitud igual a 5 y ubíquelo colocando el extremo sin punta de flecha en el origen en el origen del plano complejo y en una posición tal que la parte real e imaginaria del número complejo correspondiente sean números enteros y diferentes de cero. Utilice el otro vector de longitud igual a 5 y colóquelo de manera que represente el conjugado del primero. Después, de manera semejante y sobre el eje real ubique dos vectores correspondientes a números complejos de parte imaginaria igual a cero. Determine la ecuación polinómica de cuarto grado cuyas raíces sean los números representados por los cuatro vectores en el tablero. Registre las posiciones de los números complejos con una imagen que deberá incluir en su reporte para justificar su respuesta.

10) Haga una réplica de la imagen del punto 9 con el programa de computo GEOGEBRA y compruebe resolviendo la ecuación polinómica de su respuesta, que las raíces corresponden con los números complejos de la figura. Documente y registre la realización de esta parte de la práctica con capturas de pantalla que deberá incluir en el reporte impreso.

4.1.5 Instrumentos de evaluación de la construcción y de las actividades propuestas

RÚBRICA PARA EVALUAR LA PRÁCTICA DE NÚMEROS COMPLEJOS

Criterios	Excelente	Notable	Bueno	Suficiente	Insuficiente	Puntos obtenidos
Construcción del tablero para las operaciones.	El tablero metálico construido, cumple con todas las especificaciones de la actividad 1, y las flechas y sectores circulares cumplen con las especificaciones de la actividad 2. **20 puntos**	El tablero metálico, las flechas y sectores cumplen con todas las especificaciones de las actividades 1 y 2, excepto en alguna que no afecta el desarrollo adecuado de la práctica. **18 puntos**	El tablero metálico, las flechas y sectores cumplen con todas las especificaciones de las actividades 1 y 2, excepto en dos de ellas pero que no afecta el desarrollo adecuado de la práctica. **16 puntos**	El tablero metálico, las flechas y sectores cumplen con todas las especificaciones de las actividades 1 y 2, excepto en algunas de estas, pero que no impiden el desarrollo de la práctica. **14 puntos**	No presenta el objeto a construir o el tablero metálico, las flechas y sectores **no** cumplen con las especificaciones de las actividades 1 y 2, mínimas necesarias para realizar las actividades de la práctica. **0 puntos**	
Realiza gráficamente operaciones de suma y resta de complejos en forma rectangular.	Las fotografías del reporte escrito muestran que son correctas todas las respuestas de las actividades 3,4, 5. **20 puntos**	Las fotografías del reporte escrito muestran que son correctas todas las respuestas de las actividades 3 y 4. La respuesta de la 5 **no** está correcta pero se documenta con una fotografía que se acerca al proceso correcto. **18 puntos**	Las fotografías del reporte muestran que las repuestas de la actividad 5 y una cualquiera de las actividades 3 o 4 son correctas. **16 puntos**	Las fotografías del reporte muestran que las respuestas de las actividades 3, 4 son correctas. **14 puntos**	No documenta la realización de las actividades 3, 4, 5 o las fotografías muestran **menos de dos** actividades realizadas correctamente. **0 puntos**	
Realiza gráficamente operaciones de multiplicación y división de números complejos.	Las fotografías del reporte muestran que las respuestas de las operaciones de multiplicación y división de la actividad 7, están correctas en todas sus formas de representación: Rectangular, polar, exponencial. **20 puntos**	Las fotografías del reporte muestran que las respuestas de las operaciones de multiplicación y división de la actividad 7, están todas expresadas en al menos dos formas de representación distintas de manera correcta. **18 puntos**	El reporte muestra que las repuestas de las operaciones de multiplicación y división de la actividad 7, están todas correctas en su forma rectangular. **16 puntos**	El reporte muestra que las respuestas de las operaciones de multiplicación y división están todas correctas en su forma polar. **14 puntos**	No documenta la realización de la actividad 7 o alguna de las respuestas de las operaciones de multiplicación o división es incorrecta. **0 puntos**	
Extrae raíces de números	El reporte muestra: Gráficamente las tres raíces correctas del número e incluye la aplicación del teorema de De Moivre en la actividad 8.	El reporte muestra: Gráficamente las tres raíces correctas del número e incluye la aplicación del teorema de De Moivre en la actividad 8.	El reporte muestra: Gráficamente las tres raíces correctas del número e incluye la aplicación del teorema de De Moivre en la actividad 8.	El reporte muestra: Gráficamente las tres raíces correctas del número e incluye la aplicación del teorema de De Moivre en la actividad 8.	No documenta la realización de las actividades 8, 9, o no tiene al menos una de ellas totalmente correcta y una parte correcta de la otra.	

complejos y resuelve ecuaciones polinómicas.	La gráfica de las cuatro soluciones de una ecuación polinómica y el procedimiento para obtener todos los coeficientes correctos de la ecuación en la actividad 9. **20 puntos**	La gráfica de las cuatro soluciones de una ecuación polinómica y el procedimiento para obtener al menos cuatro de los coeficientes correctos de la ecuación de la actividad 9. **18 puntos**	La gráfica de las cuatro soluciones de una ecuación polinómica y el procedimiento para obtener al menos tres de los coeficientes correctos de la ecuación de la actividad 9. **16 puntos**	La gráfica de las cuatro soluciones de una ecuación polinómica y el procedimiento para obtener al menos correcto un coeficiente de la ecuación en la actividad 9. **14 puntos**	**0 puntos**	
Uso de SAC (Geogebra).	Documenta con capturas de pantalla la realización de las actividades 6 y 10 con el programa Geogebra donde se muestran todos los resultados obtenidos de manera correcta. **20 puntos**	Documenta con capturas de pantalla la realización de las actividades 6 y 10 con el programa Geogebra donde se muestran todos los resultados obtenidos de manera correcta con un solo error en uno de ellos. **18 puntos**	Documenta con capturas de pantalla la realización de las actividades 6 y 10 con el programa Geogebra donde se muestran todos los resultados obtenidos de manera correcta con errores hasta en dos de ellos. **16 puntos**	Documenta con capturas de pantalla la realización de las actividades 6 y 10 con el programa Geogebra donde se muestran todos los resultados obtenidos de manera correcta con errores hasta en tres de ellos. **14 puntos**	No documenta la realización de alguna de las actividades 6, 10 o bien se tienen más de tres errores en los resultados obtenidos. **0 puntos**	
Total puntos obtenidos EQUIPO No. _____ INTEGRANTES: ______________________________ ______________________________ OBSERVACIONES: ______________________________ ______________________________						

4.1.6 Análisis de las aportaciones de las actividades propuestas con la representación semiótica del número complejo como vector en el plano complejo.

- En las actividades 1 y 2, se construye el tablero, las flechas y los sectores circulares necesarios para efectuar operaciones, físicamente y gráficamente, usando la representación semiótica del número complejo como un vector en el plano complejo.

- En la actividad 3, haciendo uso del tablero y el conjunto de flechas se le solicita al estudiante formar físicamente en el tablero un triángulo de vectores e interpretarlo como la suma de dos números complejos, cuya realización implica un mayor dominio de la representación gráfica de la suma de números complejos, ya que se pide una interpretación en sentido inverso al de simplemente sumar dos números dados en forma gráfica, lo que aporta a los indicadores de alcance relativos a la representación gráfica y realización de operaciones de números complejos.

- En la actividad 4, también se solicita formar un triángulo de vectores y se pide al estudiante que lo interprete, pero como una resta de dos números complejos y al igual que en la actividad 3, su realización requiere del estudiante un proceso cognitivo de manera inversa en la operación de resta y por lo tanto se conserva la aportación al indicador relativo a la realización de operaciones.

- En la actividad 5 se solicita formar un polígono con cuatro vectores y se le pide al estudiante que lo interprete como una secuencia de operaciones de tres números complejos, donde se mantiene el proceso cognitivo de manera inversa e incluso ligeramente más compleja debido a un mayor número de vectores en la operación y por la participación de la interpretación gráfica de un número real por un número complejo debido a la secuencia del problema. Su aportación es en los indicadores de alcance relativos a la representación gráfica y la de efectuar operaciones con números complejos.

- La actividad 6 requiere el uso del programa GEOGEBRA en la realización de las operaciones tanto analíticamente como gráficamente, aportando con ello también al desarrollo de la competencia genérica relativa al uso de sistemas algebraicos computarizados (SAC).

- En la actividad 7 se solicita ubicar físicamente dos vectores en el tablero que representan dos números complejos, en el proceso de ubicación se hace uso de los elementos de la forma polar de los números y se pide que se realicen las operaciones de multiplicación y división de estos números complejos dados o propuestos originalmente en su forma polar, ampliando de esta forma la gama de operaciones que se realizan con números complejos en su representación semíotica como vector, aportando a los indicadores de alcance relativos a la representación gráfica y realización de operaciones con números complejos en sus distintas representaciones.

- La actividad 8 se refiere al uso del teorema de De Moivre para calcular las raíces de números complejos, y su aportación es en el indicador relativo a la operación de extracción de raíces de números complejos.

- En la actividad 9 se solicita ubicar cuatro vectores o números complejos, y se pide hallar la ecuación polinómica que tenga por raíces dichos números, por lo que también su realización requiere un proceso cognitivo inverso para que ahora dadas las raíces se determine la ecuación polinómica en lugar de dada la ecuación hallar las raíces. Su aportación es en el indicador relativo a resolver ecuaciones polinómicas, y de utilidad en lo expresado en la competencia específica como las bases para aplicar los números complejos en el proceso de solución de ecuaciones características de ecuaciones diferenciales.

- En la actividad 10 se utiliza el procesamiento simbólico del programa GEOGEBRA para comprobar si las raíces propuestas en el punto 9 corresponden efectivamente a la ecuación polinómica que se proporciona como respuesta de dicho punto y se aporta a la competencia genérica relativa al uso de SAC.

4.2 Cuatro objetos a construir, fundamentos y actividades para el tema de matrices y determinantes

4.2.1 Competencias específicas y genéricas

Competencia específica del tema de matrices y determinantes

Utiliza las matrices, sus propiedades, el determinante y operaciones entre ellas, para resolver problemas de aplicación en las diferentes áreas de las matemáticas y de la ingeniería.

Competencias genéricas asociadas al tema

- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis.
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.
- Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente.
- Capacidad de trabajo en equipo.
- Habilidades básicas en el uso de la computadora (uso de Sistemas Algebraicos Computarizados SAC).

Indicadores de alcance de las competencias

La tabla 4 contiene una propuesta de indicadores que el estudiante debe alcanzar de manera gradual en su proceso de construcción del conocimiento necesario para alcanzar la competencia específica.

Indicadores de alcance de la competencia	Valor del indicador
A) Aplica correctamente las reglas para efectuar las operaciones de suma, resta, multiplicación por un escalar y multiplicación de matrices.	10%
B) Propone y en su caso construye diferentes ejemplos de los tipos de matrices.	10 %

C) Resuelve problemas de aplicación utilizando las operaciones con matrices (suma, resta, multiplicación por un escalar y multiplicación matricial).	20%
D) Utiliza diferentes métodos y propiedades para calcular el determinante y la inversa de una matriz, y los aplica en la solución de problemas.	30%
E) Emplea transformaciones elementales por renglón para construir matrices escalonadas, escalonadas reducidas y obtener inversas usando escalonamiento.	30%

Tabla 4. Indicadores de alcance de las competencias del tema matrices y determinantes.

4.2.2 Fundamentos teóricos

En esta sección se incluye, con el mismo fin ya mencionado en el primero de los temas, la base teórica de los conocimientos que los estudiantes deben de tener sobre el tema de matrices y determinantes para realizar las actividades que se proponen. También se requiere el dominio previo del GEOGEBRA.

Es resaltar que en el contenido de estos fundamentos, se hace énfasis en las diferentes representaciones semióticas del determinante y de la matriz inversa con la intención de que el lector pueda apreciarlas como tales.

Diferentes representaciones semióticas del concepto determinante.

El determinante de orden dos, como parte de una expresión o fórmula para resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos variables (Solar, 1989).

La idea de la representación del concepto de determinante de una matriz de 2x2 como parte de una fórmula general proviene de atribuir el origen de su definición al propósito de obtener una expresión general para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables por sustitución directa de los valores de los coeficientes de las variables y de los términos independientes en dicha fórmula. Este origen de la definición, se explica resolviendo el siguiente sistema para obtener esta fórmula general.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \tag{1}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \tag{2}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (1) por el factor $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ y sumando después este resultado con la ecuación se elimina la primera incógnita y nos queda un sistema equivalente donde se elimina la variable x_1 en la segunda ecuación y nos queda

$$\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} + a_{22}\right)x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 + b_2$$

de donde se despeja la variable

$$x_2 = \frac{-\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 + b_2}{-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} + a_{22}}$$

Simplificando obtenemos

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{3}$$

sustituyendo x_2 en la ecuación (1), y resolviendo para x_1 , se obtiene

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{4}$$

Las expresiones (3) y (4) son fórmulas para obtener por sustitución directa de los valores de los coeficientes de las variables y de los términos independientes, la solución del sistema formado por las ecuaciones (1) y (2).

En las expresiones o fórmulas anteriores ambas tienen el mismo denominador, el cual está expresado en términos de los elementos de la matriz de los coeficientes del sistema.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Al número correspondiente a dicho denominador se le conoce como el determinante de la matriz A y se le denota con det A, esto es:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Otra forma de denotar al determinante de una matriz es escribiendo sus elementos tal y como aparecen en el arreglo, pero reemplazando los paréntesis rectangulares por barras verticales para indicar que se trata de un determinante.

Así, para la matriz anterior se tiene

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{5}$$

siendo esta expresión la definición del determinante de orden dos.

Con esta definición, entonces las expresiones (3) y (4) se pueden escribir como el cociente de dos determinantes

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Debe notarse que las expresiones anteriores se construyen de manera rápida porque solo dependen de los coeficientes del sistema en el denominador y en numerador se colocan los mismos elementos de la matriz de coeficientes pero se reemplaza la columna correspondiente al número de la variable cuyo valor se desea calcular por los términos independientes del sistema. De esta manera, podemos considerar la representación semiótica del determinante de orden dos como parte de una *fórmula* general para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

El área de un paralelogramo en R^2 como un determinante (Beauregard, 1973).

El área de un paralelogramo es el producto de la longitud de su base y su altura. Referente a la figura 12, se observa que el área de un paralelogramo en $\boldsymbol{R}^2$ bosquejado por

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \qquad y \qquad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$$

Y está dada por la formula

$$área = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|(\sin\theta) \tag{6}$$

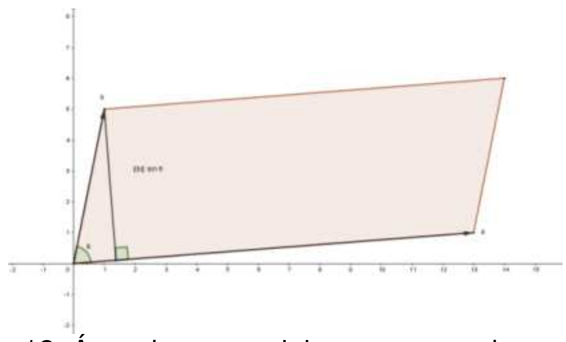


Figura 12. Área de un paralelogramo usando vectores.

Donde θ es el angulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de la ecuación (6) se obtiene

$$(área)^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\sin^2\theta$$

$$(área)^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2(1-\cos^2\theta)$$

$$(área)^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta)^2$$

$$(área)^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$

$$(área)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2$$

$$(área)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

Así se tiene

$$área = |a_1b_2 - a_2b_1| \tag{7}$$

Hay una manera sencilla de recordar la ecuación (7). Considere la matriz cuadrada de números

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Cuya primera fila corresponde a las coordenadas de a y cuya segunda fila corresponde a las coordenadas de b. Esta matriz cuadrada 2×2 (se lee “matriz de 2×2”). De manera similar, una matriz de $n\,x\,n$ es una matriz cuadrada de n^2

números que contiene n filas y n columnas. Asociado con cada matriz cuadrada está un número conocido como su *determinante.*

El determinante de una matriz de 2×2 en la ecuación (8) está definido por

$$det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \qquad (9)$$

Se calcula el determinante de una matriz 2×2 al tomar la diferencia de los productos de los números de las dos diagonales. La ecuación (7) ahora se convierte

$$área = \left| det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right|$$

El determinante de orden tres, como parte de una expresión o fórmula para resolver un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres variables.

La idea de la representación del concepto de determinante de una matriz de 3x3 como parte de una fórmula general se explica resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones para las variables x_1, x_2, x_3

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad \text{(I)}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \qquad \text{(II)}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \qquad \text{(III)}$$

Multiplicando la ecuación (I) por $-a_{23}$ y sumando este resultado con la ecuación (II) multiplicada por a_{13}, se obtiene una ecuación que no contiene a la variable x_3

$$a_{13}a_{21}x_1 - a_{11}a_{23}x_1 + a_{13}a_{22}x_2 - a_{12}a_{23}x_2 = a_{13}b_2 - b_1a_{23}$$

Y nos queda una ecuación en las variables x_1, x_2

$$(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})x_1 + (a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})x_2 = (a_{13}b_2 - b_1a_{23}) \qquad \text{(IV)}$$

Multiplicando la ecuación (I) por $-a_{33}$ y sumando este resultado con la ecuación (III) multiplicada por a_{13} , se obtiene otra ecuación que no contiene a la variable x_3

$$a_{13}a_{31}x_1 - a_{11}a_{33}x_1 + a_{13}a_{32}x_2 - a_{12}a_{33}x_2 = a_{13}b_3 - b_1a_{33}$$

Y que también nos queda únicamente en las variables x_1, x_2

$$(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33})x_1 + (a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})x_2 = (a_{13}b_3 - b_1a_{33}) \qquad \text{(V)}$$

Ahora, de las ecuaciones (IV) y (V), se elimina a variable x_2, multiplicando la ecuación (IV) por $-(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})$ y sumando este resultado con la ecuación (V) multiplicada por $(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})$ se obtiene una ecuación en la variable x_1

$$(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33})x_1 - (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})x_1$$
$$= (a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})(a_{13}b_3 - b_1a_{33}) - (a_{13}b_2 - b_1a_{23})(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})$$

Resolviendo esta ecuación para la variable x_1

$$x_1 = \frac{(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})(a_{13}b_3 - b_1a_{33}) - (a_{13}b_2 - b_1a_{23})(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})}{(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33}) - (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})}$$

Efectuando los productos

$$x_1 = \frac{a_{13}a_{22}a_{13}b_3 - a_{13}a_{22}b_1a_{33} - a_{12}a_{23}a_{13}b_3 + a_{12}a_{23}b_1a_{33} - a_{13}b_2a_{13}a_{32} + a_{13}b_2a_{12}a_{33} + b_1a_{23}a_{13}a_{32} - b_1a_{23}a_{12}a_{33}}{a_{13}a_{22}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{11}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{13}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{11}a_{33} - a_{13}a_{21}a_{13}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{13}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{12}a_{33}}$$

Reduciendo términos semejantes

$$x_1 = \frac{a_{13}a_{22}a_{13}b_3 - a_{13}a_{22}b_1a_{33} - a_{12}a_{23}a_{13}b_3 - a_{13}b_2a_{13}a_{32} + a_{13}b_2a_{12}a_{33} + b_1a_{23}a_{13}a_{32}}{a_{13}a_{22}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{11}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{13}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{13}a_{32}}$$

Extrayendo el factor común $-a_{13}$ en el numerador y en el denominador

$$x_1 = \frac{-a_{13}(-a_{22}a_{13}b_3 + a_{22}b_1a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + b_2a_{13}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32})}{-a_{13}(-a_{22}a_{13}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})}$$

Simplificando nos queda

$$x_1 = \frac{-a_{22}a_{13}b_3 + a_{22}b_1a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + b_2a_{13}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{-a_{22}a_{13}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

Agrupando por pares de términos que tienen factores comunes

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1a_{33} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + b_2a_{13}a_{32} - a_{22}a_{13}b_3}{a_{22}a_{11}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{22}a_{13}a_{31}}$$

Ahora, escribiendo el orden de los factores de los productos de manera que estén en orden natural los primeros subíndices, se obtiene

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{22}a_{11}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{22}a_{13}a_{31}}$$

De manera semejante, se obtienen las expresiones generales para las otras variables

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2b_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 + a_{12}b_2b_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

Al común denominador de las tres expresiones anteriores se le conoce como el determinante de la matriz A de orden 3 x 3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Así, la expresión que define el determinante de orden tres es

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{11}$$

Y de acuerdo a esta definición, la solución del sistema de tres variables, se puede escribir con las siguientes *fórmulas*, donde, cada una de las variables se expresa como el cociente de dos determinantes como sigue

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Este método de solución se le conoce como la *regla de Cramer*, y los resultados se pueden interpretar como *fórmulas* que por sustitución directa de los valores de los coeficientes de las variables y los términos independientes de las ecuaciones del sistema, permiten obtener la solución del sistema, es de notarse que, son relativamente sencillas de recordar y construir, lo que además se complementa con el hecho de que, para el caso de los determinantes de orden dos y tres existen procedimientos eficientes para calcularlos (Sarrus) sin tener que recordar la definición.

El determinante de orden tres como volumen de un cuerpo geométrico denominado paralelepípedo.

El volumen de un paralelepípedo como un determinante de orden tres, se obtiene al considerar el paralelepípedo mostrado en la figura 13 y cuyas aristas son los vectores $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

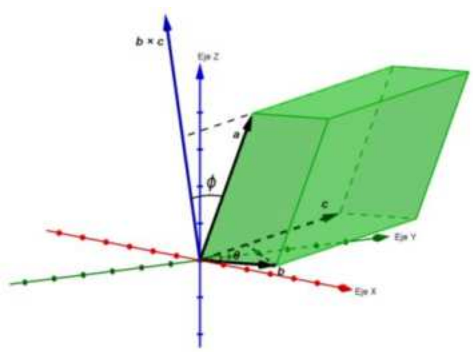


Figura 13. Paralelepípedo cuyas aristas son los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

El volumen de un paralelepípedo es el producto del área de su base por su altura. Si consideramos que la base es el paralelogramo formado con los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ como se muestra en la figura 13. Entonces, el área de la base está dada por el producto de la magnitud del vector $\boldsymbol{b}$ que corresponde con la base del paralelogramo por la altura del paralelogramo, que en este caso corresponde con el cateto opuesto de un triángulo rectángulo cuyo valor de la hipotenusa es la magnitud del vector $\boldsymbol{c}$, por lo que usando el ángulo θ que se indica, el área de la base es

$$área = \|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|\ sen\ \theta$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación anterior

$$(área)^2 = \|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2\ sen^2\ \theta = \|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2\ (1 - cos^2\ \theta)$$

$$(área)^2 = \|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2 - \|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2 cos^2\ \theta$$

$$(área)^2 = \|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2 - (\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|\ cos\ \theta)^2$$

$$(área)^2 = \|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2 - (\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})^2$$

Sustituyendo las magnitudes de los vectores y el resultado del producto escalar

$$(área)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)^2$$

Efectuando el producto que se indica y elevando al cuadrado el trinomio, se obtiene una expresión que simplifica a la suma de nueve términos algebraicos que al agruparse en grupos de tres trinomios cuadrados perfectos nos queda

$$(área)^2 = (b_2^2c_3^2 - 2b_2c_2b_3c_3 + b_3^2c_2^2) + (b_1^2c_3^2 - 2b_1c_1b_3c_3 + b_3^2c_1^2) + (b_1^2c_2^2 - 2b_1c_1b_2c_2 + b_2^2c_1^2)$$

Expresando los trinomios como binomios al cuadrado

$$(área)^2 = (b_2c_3 - b_3c_2)^2 + (b_1c_3 - b_3c_1)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2$$

Extrayendo la raíz cuadrada nos queda el área de la base del paralelepípedo

$$área = \sqrt{(b_2c_3 - b_3c_2)^2 + (b_1c_3 - b_3c_1)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2}$$

La expresión del radical se identifica como la magnitud del vector $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ cuyas componentes por definición del producto vectorial son

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = (b_2c_3 - b_3c_2)\boldsymbol{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\boldsymbol{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\boldsymbol{k}$$

Se selecciona el coeficiente del vector unitario $\boldsymbol{j}$ con el signo negativo porque al hacerlo así, el vector $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ es perpendicular tanto al vector $\boldsymbol{b}$ como al vector $\boldsymbol{c}$, es decir es perpendicular al paralelogramo que constituye la base del paralelepípedo, como se verifica al efectuar el producto escalar del vector $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ con cada uno de los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, y obtener en ambos casos el resultado igual a cero.

$$\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = b_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_2(b_1c_3 - b_3c_1) + b_3(b_1c_2 - b_2c_1) = 0$$

$$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = c_1(b_2c_3 - b_3c_2) - c_2(b_1c_3 - b_3c_1) + c_3(b_1c_2 - b_2c_1) = 0$$

Ahora, si el vector $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ es perpendicular a la base del paralelepípedo y se conoce el ángulo ϕ entre este vector y el vector $\boldsymbol{a}$ como se indica en la figura 13, entonces la altura del paralelepípedo corresponde con la magnitud de la proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre el vector $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, es decir, es la longitud del cateto adyacente al ángulo ϕ de un triángulo rectángulo cuyo valor de la hipotenusa es la magnitud del vector $\boldsymbol{a}$, así la *altura*, en cualquier orientación en el espacio geométrico que pudiera estar el paralelepípedo queda como

$$altura = \pm\,\|\boldsymbol{a}\|\,cos\phi$$

Donde, el signo positivo o negativo se considera según $cos\phi \geq 0$ o $cos\phi < 0$. Conocidas la altura del paralelepípedo y el área del paralelogramo de la base, el volumen es el producto de las mismas

$$volumen = \pm\sqrt{(b_2c_3 - b_3c_2)^2 + (b_1c_3 - b_3c_1)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2}\;\|\boldsymbol{a}\|\,cos\phi$$

$$volumen = \pm\;\|(b_2c_3 - b_3c_2)\boldsymbol{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\boldsymbol{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\boldsymbol{k}\|\|\boldsymbol{a}\|\,cos\phi$$

De la definición del *producto escalar* en términos de las magnitudes de los vectores del producto y el ángulo entre ellos, la expresión del volumen se puede escribir como el producto escalar de los vectores que se indican

$$volumen = \pm\;[(b_2c_3 - b_3c_2)\boldsymbol{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\boldsymbol{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\boldsymbol{k}]\cdot\boldsymbol{a}$$

Sustituyendo las componentes del vector $\boldsymbol{a}$

$$volumen = \pm\;[(b_2c_3 - b_3c_2)\boldsymbol{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\boldsymbol{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\boldsymbol{k}]\cdot(a_1\boldsymbol{i} + a_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})$$

Efectuando el producto escalar

$$volumen = \pm\;[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_{\boldsymbol{2}}(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)]$$

Observando que los seis términos algebraicos que se obtienen al efectuar las operaciones de esta última expresión del volumen, corresponden al determinante cuyos renglones son las componentes de los vectores $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ y considerando además, que la expresión entre paréntesis se obtuvo del producto escalar entre el vector $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ y el vector $\boldsymbol{a}$, entonces

$$volumen = \pm\,(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\,) \cdot \boldsymbol{a} = \pm\,\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\,) = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Remplazando los símbolos de los signos de la expresión anterior por su resultado equivalente en términos de valores absolutos, queda demostrado que el volumen del paralelepípedo es igual al valor absoluto del llamado *triple producto mixto* y de esta manera también que, el valor absoluto de un determinante de orden tres corresponde con dicho volumen.

$$volumen = |\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\,)| = \left| det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right|$$

El determinante de orden tres como una función entre un conjunto de matrices de 3x3 y un conjunto de números reales.

En la literatura relacionada con el tema de la teoría de determinantes (Álgebra Lineal de José Alejandro Lara Rodríguez y Carlos Jacob Rubio Barrios publicado por Ediciones de la Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, México en el año 2011), podemos encontrar las bases teóricas necesarias para la existencia de lo que se denomina *función determinante*.

Esencialmente esta teoría nos lleva a considerar que la expresión (11) de la definición del determinante de orden tres, es una expresión que define *una función* que establece una correspondencia entre los elementos del conjunto de todas las matrices de orden 3 x 3, con valores en números reales en todos sus elementos, con los elementos de un conjunto de números reales, es decir una función $D\colon\ R^{3\times 3} \to R$ que se define con la regla de correspondencia siguiente

$$D\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Así, la función determinante anterior al evaluarse en la matriz $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ da por resultado un número real

$$D\left(\begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & 9 \end{bmatrix}\right) = 190$$

Misma que tiene por dominio a todo el conjunto de las matrices de orden 3 x 3 y como contradominio o rango al conjunto de números reales. Así, esta otra posible representación semiótica del determinante de orden 3 x 3, nos permite ampliar algunos conceptos sobre funciones a una gama más amplia de las mismas.

Definición de determinante de orden n (Solar, 1989).

La observación y el análisis de la forma de la expresión matemática de las definiciones de los determinantes de orden 2 y 3, nos permite la generalización de esta estructura para definir determinantes de mayor orden. De las expresiones que definen los determinantes de menor orden.

Para $n = 2$ se tiene

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

y para $n = 3$ se tiene

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Se puede observar que en ambos casos:

- El determinante es la suma de $n!$ productos, la mitad de ellos con signo + y la otra mitad con signo -.
- Cada uno de los productos consta de n factores.
- En cada producto hay un elemento de cada renglón y un elemento de cada columna.
- Si los factores se ordenan de tal manera que los primeros subíndices formen una permutación principal (orden natural ascendente), corresponde el signo positivo (+) a los productos cuyos segundos subíndices forman una permutación de clase par y corresponde el signo negativo (–) a los

productos cuyos segundos subíndices forman una permutación de clase impar.

Donde una permutación se dice que es de *clase par* si tiene un número par de inversiones de orden, en caso contrario se dice que es de *clase impar*. A su vez, en una permutación se dice que hay una "inversión" por cada dos números que se encuentren en un orden distinto al natural. Así, por ejemplo, en la permutación del conjunto $\{1,2,3,4\}$, dispuesta en la forma $(3,1,4,2)$ existen 3 inversiones, es decir, podemos encontrar, analizando por pares de izquierda a derecha las siguientes tres parejas

$$(3,1) \quad (3,2) \quad \text{y} \quad (4,2)$$

Donde el primer elemento es mayor que el segundo y aparece antes que éste en la permutación. Por consiguiente la permutación de este ejemplo se clasifica como de *clase impar* y en su caso si la permutación corresponde a los segundos subíndices de los productos involucrados en un determinante de orden 4, el signo correspondiente sería negativo. Lo anterior se resume en la siguiente definición:

Una permutación $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ de un conjunto que tiene n elementos, tiene m inversiones si existen m parejas $(k_i\,,\ k_j)$ tales que

$$i < j \quad \text{y} \quad k_i > k_j$$

Una permutación es de *clase par* si tiene un número par de inversiones; en caso contrario se dice que es de *clase impar*.

<u>Ejemplo</u>. Hacer una lista de al menos 8 de los 24 productos de cuatro factores de la definición del siguiente determinante de orden 4.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Solución.

De las observaciones hechas a la definición de los determinantes de orden 2 y 3, y enlistadas en los párrafos anteriores, se concluye que si determinante es de orden 4, entonces su definición tiene $4!$ productos de cuatro factores, los cuales son de la forma que se indica en la siguiente tabla donde se enlistan los primeros ocho productos de los 24 posibles y se observa que los primeros subíndices forman siempre una permutación principal (orden natural) y los segundos subíndices son 8 de las 24 permutaciones posibles, incluyendo la del orden natural de los números (1,2,3,4).

Producto	Permutación de los segundos subíndices	Número de inversiones	Clase de la permutación	Signo del producto
$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$	$(1,2,3,4)$	0	Par	+
$a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$	$(1,2,4,3)$	1	impar	-
$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$	$(1,3,2,4)$	1	impar	-
$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$	$(1,3,4,2)$	2	Par	+
$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$	$(1,4,2,3)$	2	Par	+
$a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$	$(1,4,3,2)$	3	impar	-
$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$	$(2,1,3,4)$	1	impar	-
$a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$	$(2,1,4,3)$	2	Par	+
……	……	……	……	……

Tabla 5. Algunos productos de un determinante de orden 4.

La *suma* algebraica de la lista completa de los *24 productos***,** considerando el signo correcto del producto, que se indica en la columna del signo de la tabla anterior, corresponde a la *definición del determinante de orden 4*.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + \cdots$$

Para calcular el valor de un determinante con la definición anterior, se procede de la siguiente manera:

Se obtiene el término que corresponde al producto de los elementos de la diagonal principal, con los factores ordenados de tal manera que tanto los primeros como los segundos subíndices estén en orden natural formando una permutación llamada principal.

A partir del término principal se obtienen los demás términos dejando fijos los primeros subíndices y permutando los segundos de todas las maneras posibles. Como de los segundos subíndices hay $n!$ permutaciones diferentes, se obtendrán $n!$ términos, correspondiéndoles el signo + o el signo – según sea la permutación de clase par o de clase impar. La suma algebraica de todos los términos es el valor del determinante.

Definición del determinante de orden n en términos de un desarrollo por cofactores.

Es posible definir el determinante de una matriz de orden n en términos de determinantes de orden $n-1$. Esto se observa, por ejemplo si partimos de la definición del determinante de orden 3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Cuya definición se puede escribir en una forma algebraicamente equivalente

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Con tres términos cuyos productos producen la definición original, y además los factores encerrados entre paréntesis, a su vez se identifican como los determinantes de menor orden que se indican en la siguiente expresión

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Esta forma de la definición del determinante de orden 3, en términos de determinantes de orden 2, se conoce como el *desarrollo por cofactores con* *respecto a la primera fila.* Dando lugar a la definición del concepto de *cofactor* A_{ij}, el cual se define con la expresión

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

Donde el menor M_{ij} es la matriz que se obtiene al omitir el renglón i y la columna j en la matriz original de orden n siendo entonces el menor M_{ij} una matriz de orden $(n-1)$.El factor (-1) elevado a la suma del número del renglón i y la columna j da por resultado el signo correcto del término correspondiente. Así, con la notación y definición anterior del cofactor, el determinante de orden tres con respecto al primer renglón se escribe de la forma siguiente

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Y con un poco más de pasos algebraicos en el proceso, pero conservando la idea principal del caso del determinante de orden 3, es posible demostrar que, para un determinante de orden 4 con respecto a la primera fila nos queda el siguiente desarrollo por cofactores.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

Y finalmente es de notarse que, el desarrollo por cofactores para determinantes de mayor orden es relativamente sencillo de recordar y escribir sin tener que contar con algún formulario de la definición para tal propósito. También un análisis con mayor detalle y con un proceso algebraico ligeramente diferente al que se ha usado para el desarrollo con respecto a la primera fila, demuestra que el desarrollo por cofactores se puede realizar con respecto a cualquier fila o columna obteniendo siempre el mismo valor del determinante. Así por ejemplo, con respecto a la segunda columna el desarrollo por cofactores es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}$$

Ejemplo. Encontrar el determinante de la matriz usando un desarrollo por cofactores con respecto al primer renglón.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 4(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculando por separado los determinantes de orden 3 y sustituyendo los resultados se obtiene

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5(1)(-8) + (-2)(-1))(-22) + 4(1)(10) + (-1)(-1)(36) = -8$$

Determinante de orden n por reducción a una matriz triangular superior y aplicando propiedades de los determinantes.

Con las definiciones anteriores del determinante de orden n se demuestran las propiedades de determinantes apropiadas que mediante su aplicación y un proceso de escalonamiento para reducir una matriz dada de orden n a una matriz triangular superior, permite calcular el valor de un determinante de orden superior de manera más eficiente desde el punto de vista computacional. El siguiente ejemplo muestra cómo se calcula un determinante de orden 3 reduciendo a una matriz triangular y aplicando las propiedades que se mencionan en proceso.

Ejemplo. Obtener el determinante de la siguiente matriz por reducción a una matriz triangular.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución.

Reduciendo la matriz dada a una triangular superior, aplicando operaciones elementales por renglón, como se muestra en el siguiente proceso

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1(-1/2)]{F_2+F_1(3/2)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 11/2 & 23/2 \\ 0 & -5/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

En este proceso el determinante de la matriz original es igual al determinante que se obtiene después de hacer las operaciones elementales que se indican en la expresión anterior debido a la siguiente propiedad de los determinantes:

Propiedad 1. Si se reemplaza un renglón o una columna de una matriz por la suma de este renglón o columna con otro renglón o columna multiplicado por un escalar, el determinante de la matriz que se obtiene es el mismo que el de la matriz sin modificaciones.

Continuando con el proceso de reducción, sumando la fila 3 con la fila multiplicada por el escalar que se indica, se obtiene la matriz triangular superior.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 11/2 & 23/2 \\ 0 & -5/2 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2\left(\frac{5/2}{11/2}\right)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 11/2 & 23/2 \\ 0 & 0 & 126/22 \end{bmatrix}$$

Aplicando la siguiente propiedad correspondiente al determinante de una matriz triangular superior.

Propiedad 2. El determinante de una matriz triangular superior o inferior es igual al producto de los elementos de la diagonal, efectuando este producto se tiene el valor del determinante

$$|B| = 2(11/2)(126/22) = 63$$

Si el determinante es de mayor orden, el proceso de reducción tendrá un mayor número de pasos, pero sigue siendo mucho *más eficiente este método* que los dos anteriores que se han expuesto. Como se habrá notado en el proceso de reducción a triangular los elementos de la diagonal se han dejado diferentes de 1, esto es con el fin de evitar la aplicación de operaciones elementales que si alteran el valor del determinante durante el proceso.

Sin embargo es posible hacer la reducción a triangular dejando todos los elementos de la diagonal iguales a la unidad con signo positivo, con lo que obviamente el determinante de la matriz triangular obtenida será igual a 1, pero en ese caso se deberá considerar los factores que han alterado el valor del determinante original durante el proceso, multiplicando el valor del determinante original por todos estos factores e igualar este resultado a la unidad y resolver la ecuación resultante para determinar el valor correcto del determinante original.

Las siguientes propiedades indican como se modifica el valor del determinante cuando se aplican las otras operaciones elementales por renglón que no se usaron en este ejemplo.

Propiedad 3. El intercambio de cualesquiera dos renglones (o columnas) distintos de la matriz A tiene el efecto de multiplicar el $|A|$ por -1.

Propiedad 4. Si el renglón *i* o la columna *j* se multiplican por un escalar *c*, entonces el $|A|$ se multiplica por *c*.

Inversa de una matriz ((Beauregard, 1973).

Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $x_1, \dots, x_n$ puede ser expresado en forma matricial

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{12}$$

Donde *A* es la matriz de coeficientes de orden $n \times n$, $\boldsymbol{x}$ es el vector columna de las n incógnitas, y $\boldsymbol{b}$ es el vector columna n-dimensional de constantes. La ecuación análoga usando escalares es

$$ax = b \tag{13}$$

Donde $a, b \in R$. Usualmente resolvemos la ecuación (12) para x dividiendo entre a si $a \neq 0$, pero también podríamos pensar en resolver (12) multiplicando por $\frac{1}{a}$. Los pasos del proceso de solución son

$$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}b \quad \text{(multiplicando por } \frac{1}{a}\text{)}$$

$$\left(\frac{1}{a}a\right)x = \frac{1}{a}b \quad \text{(propiedad asociativa de la multiplicación)}$$

$$1 \cdot x = \frac{1}{a}b \quad \text{(propiedad del inverso 1/a)}$$

$$x = \frac{1}{a}b \quad \text{(propiedad del idéntico multiplicativo1)}$$

La ecuación (12), dado que tiene la misma estructura matemática que la ecuación (13), solo que en forma matricial, es lógico pensar que es posible resolverla de manera semejante. Así, la multiplicación matricial es asociativa, y la matriz identidad I de orden $n \times n$, juega el mismo rol para multiplicación de matrices de orden $n \times n$ que el numero 1 juega en la multiplicación de números reales. Lo que es crucial, para completar la solución, es encontrar una matriz C de orden $n \times n$ tal que $CA = I$, de modo que C tenga el mismo rol en el contexto matricial que el que tiene el número $\frac{1}{a}$ para los números reales. Si dicha *matriz existe,* entonces los pasos del proceso de solución de la ecuación (12) son

$C(A\boldsymbol{x}) = C\boldsymbol{b}$ (multiplicando por la matriz C)

$(CA)\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{b}$ (propiedad asociativa de la multiplicación de matrices)

$I\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{b}$ (propiedad del inverso en el contexto matricial $CA = I$)

$\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{b}$ (propiedad del idéntico multiplicativo en el contexto matricial $I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$).

Lo que demuestra que nuestro vector columna $\boldsymbol{x}$ de las incógnitas debe ser igual al vector columna que se obtiene al efectuar el producto matricial $C\boldsymbol{b}$. Hacemos énfasis que la solución anterior solo es posible si existe una matriz C tal que $CA = I$.

<u>Ejemplo</u>.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Entonces existe una C tal que $CA = I$, que se comprueba al efectuar la siguiente multiplicación

$$\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De manera que para la matriz A de este ejemplo la matriz $C = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, es la que verifica la expresión $CA = I$. Desafortunadamente, no es cierto que para cualquier matriz A de orden $n \times n$, se puede encontrar una matriz C de orden $n \times n$ tal que $CA = I$. Por ejemplo, si la j-ésima columna de A tiene todos sus elementos iguales a cero, entonces al efectuar la multiplicación la j-ésima columna de CA también tiene todos sus elementos iguales a cero para cualquier matriz C, entonces $CA \neq I$ para cualquier matriz C. Sin embargo para muchas matrices A importantes, se puede encontrar una matriz C tal que $CA = I$.

Definición. Sea A una matriz de orden $n \times n$. Una matriz C de orden $n \times n$ es una *inversa izquierda* de A si $CA = I$. Una matriz D de orden $n \times n$ es una *inversa derecha* A si $AD = I$.

Ahora demostraremos que, si una matriz cuadrada tiene ambas una inversa izquierda y una inversa derecha, entonces estas inversas coinciden.

Teorema. Si A es una matriz de orden $n \times n$ con una inversa izquierda C y una inversa derecha D entonces $C = D$.

Demostración

Puesto que la multiplicación de matrices es asociativa, tenemos

$$C(AD) = (CA)D.$$

Por otra parte, como D es la inversa derecha de A, tenemos

$$C(AD) = CI = C,$$

Mientras que C es la inversa izquierda de A, tenemos

$$(CA)D = ID = D.$$

Entonces $C = C(AD) = (CA)D = D$, entonces C y D son iguales, es decir la misma matriz, por lo que resulta adecuado usar un solo concepto como la *inversa de la matriz* A.

También la *matriz inversa* se puede interpretar como la matriz que cuando se usa como factor que multiplica a otra matriz que es el resultado de un producto, nos permite deshacer el efecto de una multiplicación anterior, regresándonos el factor que se tenía antes de la primera multiplicación, es decir a manera de ejemplo regresemos al proceso de solución de la ecuación matricial (12)

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

En el lado izquierdo de esta ecuación, se puede considerar que la primera multiplicación de la matriz A por el vector $\boldsymbol{x}$, es una operación que *modifica* al vector $\boldsymbol{x}$ y que para *deshacer el efecto* de esta modificación se requiere realizar una *operación inversa* semejante a la división y que en el contexto matricial es la multiplicación por la inversa C de la matriz A, y para no alterar la condición de igualdad debe hacerse también en el lado derecho la misma operación, completándose el proceso aplicando los pasos anteriormente expuestos debidamente justificados por las propiedades ya mencionadas.

Esta idea de la existencia de una primera multiplicación de matrices que produce un resultado, y una segunda multiplicación por la inversa que la *deshace* y recupera uno de los factores de la primera operación, es de suma utilidad en la aplicación de la inversa de una matriz en el encriptado de mensajes. Sin embargo para que esta aplicación de la inversa se pueda realizar, es claro que se tienen que realizar dos multiplicaciones, una primera que realiza el encriptado ocultando el factor que corresponde al mensaje, y una segunda multiplicación por la inversa de la matriz de encriptado para decodificar el mensaje. También es obvio que la matriz de encriptado debe ser invertible, es decir su inversa debe existir.

Existen diferentes métodos para calcular la *inversa de una matriz*, en el siguiente ejemplo se muestra como calcular la inversa de una matriz de orden 3, usando el método conocido como el de la matriz adjunta.

Ejemplo. Obtener (si existe) la inversa de la siguiente matriz usando la matriz adjunta.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución.

La inversa de la matriz A denotada como A^{-1} usando la matriz adjunta, se calcula con la expresión

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Donde la matriz adjunta de A es la matriz que se obtiene de la transpuesta de la matriz cuyos elementos son los cofactores de la matriz A. Así calculando primero todos los cofactores

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (1)[(4)(3) - (4)(-2)] = 20$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)[(-3)(3) - (4)(1)] = 13$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (1)[(-3)(-2) - (4)(1)] = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)[(1)(3) - (5)(-2)] = -13$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (1)[(2)(3) - 5(1)] = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)[(2)(-2) - (1)(1)] = 5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = (1)[(1)(4) - (5)(4)] = -16$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)[(2)(4) - (5)(-3)] = -23$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (1)[(2)(4) - (1)(-3)] = 11$$

Entonces la matriz adjunta de A es

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 20 & 13 & 2 \\ -13 & 1 & 5 \\ -16 & -23 & 11 \end{bmatrix}^t$$

Calculando el determinante con un desarrollo por cofactores con respecto al primer renglón se tiene

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Sustituyendo los cofactores se obtiene

$$|A| = 2(20) + 1(13) + 5(2) = 63$$

Sustituyendo el determinante y la matriz adjunta en la expresión de la inversa se obtiene

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{63} \begin{bmatrix} 20 & 13 & 2 \\ -13 & 1 & 5 \\ -16 & -23 & 11 \end{bmatrix}^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{63} \begin{bmatrix} 20 & -13 & -16 \\ 13 & 1 & -23 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{20}{63} & \frac{-13}{63} & \frac{-16}{63} \\ \frac{13}{63} & \frac{1}{63} & \frac{-23}{63} \\ \frac{2}{63} & \frac{5}{63} & \frac{11}{63} \end{bmatrix}$$

4.2.3 Descripción de los objetos propuestos a construir

Descripción del primer objeto

Como ya se ha mencionado, la teoría de aprendizaje de las representaciones semióticas de Raymond Duval, es la teoría con respecto a la cual se desarrollan las actividades a realizar en este trabajo, específicamente para el tema de determinantes de orden dos, se propone una práctica centrada en la construcción de un tablero cuadriculado, con un conjunto de piezas triangulares que se unen para formar otros polígonos con un mayor número de lados, cuyas áreas se calculan aplicando determinantes de orden dos.

En este caso, el tablero cuadriculado, se construye sobre una delgada placa metálica lisa y plana de tamaño aproximado al de hoja de papel tamaño carta, sobre la cual se traza la cuadrícula o bien se pega una hoja de papel que ya tenga una cuadrícula de cuadros de un centímetro de lado.

Para la construcción de las piezas triangulares se solicita el uso del programa GEOGEBRA para el trazado inicial, el cual se usa como patrón de dibujo para el trazado de la pieza sobre el material a utilizar para la construcción, que puede ser papel ilustración, triplay de 3mm de espesor, o algún otro a elección de los estudiantes.

Después de recorta la pieza triangular y se le pega o fija un pequeño imán plano de tamaño menor a la pieza. Así mismo, una vez hechas las piezas triangulares, en el desarrollo de la práctica se le solicita al estudiante formar polígonos mediantes la unión de las piezas triangulares adheridas a la placa metálica por la acción del imán, y nuevamente se hace uso del programa GEOGEBRA para hacer el dibujo del polígono colocado en la cuadrícula.

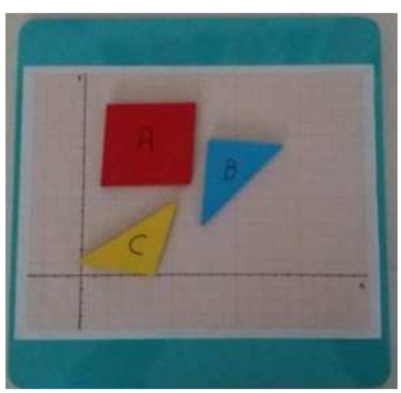


Figura 14. Fotografía ejemplo del objeto terminado

Descripción del segundo objeto

Con el objeto de contribuir a la conexión del concepto matemático denominado determinante de una matriz, con la realidad y el entorno del estudiante y la articulación de este concepto de la asignatura de algebra lineal con otros cursos de matemáticas y tomando como referencia la teoría de aprendizaje de las representaciones semióticas de Raymond Duval, se propone en este trabajo el desarrollo de una práctica centrada en la construcción de una maqueta de un objeto construido a base de paralelepípedos.

En este caso, el objeto a construir se trata de una escultura de un robot, que se pide primeramente representarlo gráficamente usando un sistema de coordenadas tridimensional con la ayuda del programa de computadora GEOGEBRA para graficar los diferentes paralelepípedos que forman parte de la escultura (robot), y obtener la representación semiótica del concepto de determinante en forma de una gráfica de un cuerpo geométrico cuyo volumen corresponde con el determinante de una matriz de 3x3.

Así mismo, en el desarrollo de la práctica, una vez hecha la representación gráfica se solicita el desarrollo del cuerpo en un plano sobre el material a utilizar para la construcción física de los paralelepípedos que al unirse construyen al robot. Aunado a esta construcción, se sugieren una secuencia de actividades usando diferentes representaciones semióticas.

Figura 15. Fotografía lateral del robot.

Descripción del tercer objeto

El objeto que se propone construir para el tema de determinantes de orden n, es una pequeña caja o tarjetero en la cual se depositan aproximadamente 26 tarjetas rectangulares de 9 cm por 5 cm (tamaño estándar de tarjeta) de cartulina u otro material equivalente. Todas las tarjetas tienen una cuadrícula impresa de 4 cm por 4 cm, con cuadros de 1cm.

Una de estas tarjetas contiene escrito en cada cuadro los elementos genéricos (a_{11} ...) de una matriz que se nombra con la letra A, una segunda tarjeta de este grupo contiene los valores específicos de la matriz de orden 4, cuyo determinante se calculará usando las otras veinticuatro para el proceso de cálculo.

Cada una de las otras 24 tarjetas contienen 4 pequeñas perforaciones en las posiciones correspondientes a los cuatro factores de cada uno de los 24 términos de la definición del determinante de orden 4, de manera que al sobreponer cualquiera de estas tarjetas perforadas en la tarjeta que contiene los valores de la matriz A del punto 2, únicamente sean visibles los cuatro elementos que se deben multiplicar en el producto correspondiente. Además, en cada tarjeta con perforaciones se coloca también alguna etiqueta con el signo correcto correspondiente al término del producto de los cuatro factores involucrados, dependiendo si la permutación de los segundos subíndices de los factores involucrados en dicha tarjeta es de clase par o impar.

Figura 16. Fotografías de tarjetas de la práctica de determinante con permutaciones

De esta manera los 24 productos de cuatro factores del determinante de orden 4, se calculan identificando los factores a multiplicar sobreponiendo las tarjetas perforadas sobre la tarjeta que tiene los datos de la matriz que se desea calcular su determinante. Finalmente se efectúa la suma algebraica de los 24 productos calculados y se obtiene el valor del determinante de la matriz A de orden 4.

Descripción del cuarto objeto

El objeto que se propone construir para el tema de la inversa, es una pequeña caja o tarjetero en la cual se depositan aproximadamente 25 tarjetas rectangulares de 9 cm por 5 cm (tamaño estándar de tarjeta) de cartulina u otro material equivalente, que tiene imágenes relacionadas con teoremas o frases de matemáticos en las caras exteriores de la cajita de mensajes.

Todas las tarjetas tienen una cuadrícula impresa de 4 cm por 4 cm, con cuadros de 0.8 cm, excepto las primeras tres del bloque que contienen impreso una tabla de equivalencias entre números enteros y letras del alfabeto y demás símbolos que se emplean en los mensajes a codificar.

También en una de las tarjetas se escriben los elementos de una matriz invertible de orden 5×5 que se usa para el encriptado de mensajes de texto que se convierten a números enteros mediante la tabla de equivalencias. La matriz inversa de esta matriz se deberá calcular y utilizar para deshacer el encriptado de los mensajes.

En el resto de las tarjetas contenidas en el tarjetero se escriben en las cuadrículas los elementos correspondientes a las matrices de orden 5×5 que se obtienen al multiplicar la matriz de encriptado por las matrices que contienen los mensajes de texto previamente convertidos a números enteros mediante la tabla de equivalencias entre letras y símbolos con números enteros, y se deja una tarjeta en blanco para señalar la terminación de los diferentes teoremas o frases.

Para decodificar cada teorema o frase, se deberá multiplicar todas y cada una de las matrices de cada bloque de tarjetas correspondiente a algún teorema o frase por la inversa de la matriz de encriptado, para deshacer el encriptado, y luego usar la tabla de equivalencias para la conversión final a texto.

Figura 17. Tarjetas de encriptados de mensajes usando el concepto de matriz inversa.

4.2.4 Actividades propuestas y sus desarrollos para cada uno de objetos construidos

Para el primer objeto a construir.

PRÁCTICA DE ÁREA CON DETERMINANTES.

Cálculo del área de polígonos por división en triángulos y aplicación del determinante de orden dos

1) Usando el programa GEOGEBRA con el sistema de referencia y las coordenadas que se indican haga una réplica de la figura 18.

2) Sobre una hoja de papel ilustración trace igual cantidad de polígonos idénticos a los de la figura 18. Recorte y pegue a cada polígono un pequeño imán plano, de tamaño menor a la pieza recortada.

3) Sobre una delgada placa metálica de dimensiones iguales a una hoja de papel tamaño carta, trace una cuadrícula con cuadros de un cm, o bien, simplemente pegue una hoja de papel milimétrico de manera que la placa quede con una cuadrícula.

4) Seleccione como origen de un sistema de coordenadas rectangulares, un punto de la cuadrícula ubicado en la esquina inferior izquierda, con respecto a este punto especifique la dirección positiva de los ejes horizontal (eje x) y vertical (eje y).

5) Coloque el paralelogramo que recortó, etiquetado con la letra A en alguna posición de la cuadrícula de la placa y usando el programa GEOGEBRA realice una réplica de la posición en que se encuentra en la cuadrícula de la placa, y calcule el área con las herramientas de cálculo de áreas de polígonos integradas al programa.

6) Determine las componentes o coordenadas de los puntos extremos, con respecto al vértice común de dos vectores que coinciden con dos lados del paralelogramo en dirección y magnitud, y calcule el área usando un determinante de orden dos.

7) Con los triángulos identificados con las letras B y C, forme un cuadrilátero de lados desiguales, uniéndolos por el lado de mayor longitud. Al polígono formado con esta unión, colóquelo en alguna posición de la cuadrícula de la placa y usando el programa GEOGEBRA realice una réplica del mismo de acuerdo a la posición en que se encuentra, y calcule el área del cuadrilátero con las herramientas de cálculo de áreas del propio programa.

8) Compruebe el resultado anterior usando determinantes de orden dos para hallar el área del polígono como la suma de las áreas de los triángulos usados en su formación, y considerando que el área de un triángulo es la mitad del área del paralelogramo correspondiente.

9) Dibuje un pentágono irregular con el programa, determine su área usando el programa y verifique este resultado calculando esta área como la suma del área de tres triángulos usando determinantes de orden dos.

10) Construya los triángulos de manera semejante al punto (b), forme con ellos el pentágono y colóquelo en otra posición de la cuadrícula de la placa y repita el inciso (9).

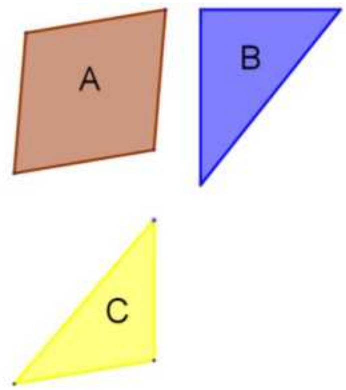


Figura 18. Paralelogramos y triángulos para formar áreas.

Para el segundo objeto a construir.

PRÁCTICA DE VOLÚMENES CON DETERMINANTES.

Cálculo del volumen de una escultura construida con paralelepípedos.

1) Usando el programa GEOGEBRA con el sistema de referencia y las coordenadas que se indican haga una réplica de la figura 19.

Cabeza	(17, 17.5, 20.5), (17, 20, 20.5), (15,17.5, 20.5), (15, 20, 20.5), (17, 17.5, 20.5), (17, 20, 23), (15, 17.5, 23), (15, 26, 23)
Torax	(17, 15.5, 13), (17, 22, 13), (15,15.5, 13), (15, 22, 13), (17, 15.5, 20.5), (17, 22, 20.5), (15, 15.5, 20.5), (15, 22, 20.5)
Brazo izquierdo	(19, 22, 19.5), (19, 23.5, 19.5), (21, 22, 22.5), (21, 23.5, 22), (20, 22, 17.5), (20, 23.5, 17.5), (16, 22,17.5), (16, 23.5, 17.5)
Antebrazo izquierdo	(19, 22, 19.5), (19, 23.5, 19.5), (21, 22, 22.5), (21, 23.5, 22.5), (20, 22, 17.5), (20, 23.5, 17.5), (22, 22, 20.5), (22, 23.5, 20.5)
Puño	(21.75, 22, 22), (21.75, 23.5, 21), (21.25, 22, 22), (21.25, 23.5, 22), (21.75, 22, 22), (21.75, 23.5, 22), (21.25, 22, 23), (21.25, 23.5, 23)
Parte superior pierna izquierda	(19, 19, 7), (19, 22, 7), (17, 19, 13), (17, 22, 13), (15, 19, 13), (15, 22, 13), (17, 19, 7), (17, 22, 7)
Parte inferior pierna izquierda	(18, 19, 1), (18, 22, 1), (19, 18, 7), (19, 22, 7), (17, 19, 7), (17, 22, 7), (16, 19, 1), (16, 22, 1)
Pie izquierdo	(20, 20, 0), (20, 21, 0), (18, 20, 1), (18, 21, 1), (16, 20, 1), (16, 21, 1), (18, 20, 0), (18, 21, 0)
Parte superior pierna derecha	(17, 15.5, 13), (17, 18.5, 13), (15, 15.5, 13), (15, 18.5, 13), (16, 15.5, 7), (16, 18.5, 7), (14, 15.5, 7), (14, 18.5, 7)
Parte inferior pierna derecha	(14, 15.5, 1), (14, 18.5, 1), (12, 15.5, 1), (12, 18.5, 1), (16, 15.5, 7), (16, 18.5, 7), (14, 15.5, 7), (14, 18.5, 7)
Pie derecho	(14, 16.5, 1), (14, 17.5, 1), (12, 16.5, 1), (12, 17.5, 1), (16, 16.5, 0), (16, 17.5, 0), (14, 16.5, 0), (14, 17.5, 1)

Tabla 6. Coordenadas de los vértices de los paralelepípedos del robot.

2) Usando paralelepípedos complete la extremidad que le falta al robot mostrado en la figura 19, considerando que está colocada a la misma altura y de manera simétrica a la otra extremidad.

3) Usando el mismo programa GEOGEBRA dibuje el desarrollo de cada paralelepípedo y use este desarrollo para construir cada uno de ellos en papel (ilustración, cartulina,...). Finalmente pegue las partes y forme la escultura.

4) Asigne una letra que identifique con una etiqueta a cada uno de los paralelepípedos involucrados y haga una tabla que contenga la imagen, descripción verbal de su ubicación, y las coordenadas de cada uno de los vértices.

5) Añada una columna a la tabla anterior que contenga las componentes de tres vectores que tienen un origen común en un vértice, sus direcciones coincidentes con igual cantidad de aristas y sus otros extremos en tres vértices diferentes. Estas componentes corresponden con las coordenadas de los puntos extremos de los vectores con respecto al origen común.

6) Usando los vectores o coordenadas de la columna añadida en la actividad anterior, determine el volumen de cada uno de los paralelepípedos de la escultura calculando determinantes de 3x3 con la regla de Sarrus, o con un desarrollo por cofactores.

7) Si el resultado de algún determinante de la actividad anterior es un número negativo, multiplique uno de los renglones por (-1) para obtener un número positivo como resultado y establezca una conclusión desde el punto de vista geométrico de esos casos.

8) Calcule el volumen total de material necesario para fabricar una pieza de plástico como la escultura (robot).

9) Considerando la definición del determinante de 3 x 3, como la regla de correspondencia que define una función determinante $D\colon R^{3\times3} \to R$, exprese los subconjuntos de $R^{3\times3}$ y de R que corresponden al dominio y al rango respectivamente, para el caso específico de la escultura (robot).

10) Repita los pasos necesarios para construir con paralelepípedos un objeto diferente al robot. Utilice diferentes colores, motivos e imágenes pequeñas para adornarlo con otros elementos creativos de su propio gusto e inspiración.

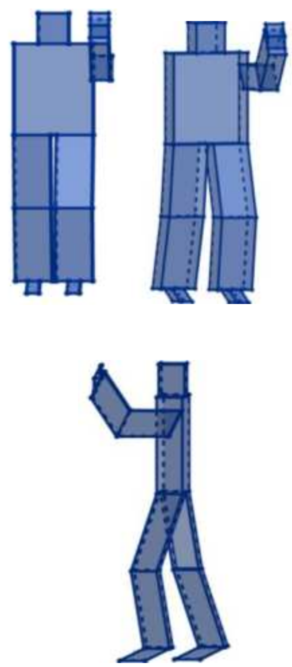


Figura 19. Vistas de la escultura de un robot.

Para el tercer objeto a construir

PRÁCTICA DE DETERMINANTE CON PERMUTACIONES.

Cálculo de determinantes de orden 4 usando plantillas de los términos.

1) Construya una pequeña caja, con su respectiva tapa, de un tamaño tal que sirva para almacenar aproximadamente 26 tarjetas rectangulares de 9

cm por 5 cm. Alineada al centro en cada tarjeta trace una cuadrícula de 4 cm por 4 cm, con cuadros de un 1 cm.

2) En una de las tarjetas, en cada cuadro de la cuadrícula escriba un elemento de una matriz de orden 4 x 4 con sus respectivos subíndices de forma general (a_{11} ...). Haga una lista de los veinticuatro productos de cuatro factores correspondientes a la definición del determinante de orden 4, efectuando las permutaciones de los segundos subíndices hasta completar los veinticuatro. Determine también el signo correcto de cada uno de los productos de cuatro factores analizando si las permutaciones correspondientes de los segundos subíndices son pares o impares.

3) Con base a la lista anterior y haciendo uso de las 24 tarjetas disponibles, en cada una de ellas realice 4 pequeñas perforaciones en las posiciones correspondientes a los cuatro factores que están en cada producto de la lista de veinticuatro, una tarjeta con cuatro perforaciones por cada producto de la lista, de manera que al sobreponer cualquiera de estas tarjetas perforadas en la tarjeta que contiene la matriz A del punto 2, únicamente sean visibles los cuatro elementos que se deben multiplicar en el producto correspondiente.

En cada tarjeta con perforaciones coloque también alguna etiqueta con el signo correcto correspondiente al término del producto de los cuatro factores involucrados.

4) Reemplace la tarjeta de la matriz A por una semejante, que en lugar de elementos generales, contenga elementos específicos de una matriz de orden 4 x 4 con valores enteros, diferentes de cero y hasta de dos dígitos. Determine el determinante sobreponiendo una a una las tarjetas con perforaciones a esta matriz cuyo determinante se desea calcular, y efectuando el producto de los factores visibles en cada caso y considerando este resultado

con el signo indicado en la misma plantilla en el cálculo de la suma total de los veinticuatro productos de cuatro factores correspondientes al determinante.

5) Verifique el resultado del determinante calculado en la actividad anterior usando un desarrollo por cofactores.

6) Compruebe ambos resultados anteriores calculando el determinante por reducción a una matriz triangular superior y aplicando propiedades de los determinantes.

7) Proponer una matriz de orden 5 x 5 en lugar de la de los pasos anteriores y calcule el determinante de esta matriz, haciendo primero un desarrollo por cofactores con respecto a alguna fila o columna, y utilice las plantillas para calcular los cinco determinantes de orden 4 que aparece en el desarrollo por cofactores.

8) Compruebe el resultado del determinante de la actividad del punto 7, por reducción a una matriz triangular superior y aplicando propiedades de los determinantes.

9) Haga una lista, con su respectivo signo correcto, de al menos 20 de los 120 productos de cinco factores que tiene el determinante de orden 5 x 5 y argumente sobre las dificultades del cálculo de determinantes por permutaciones signadas de los segundos subíndices de los factores involucrados y el uso de plantillas semejantes a la de los puntos anteriores de esta actividad.

10) Calcule usando el programa GEOGEBRA todos los determinantes de los puntos anteriores.

Para el cuarto objeto a construir

PRÁCTICA DE ENCRIPTADO DE MENSAJES.

Encriptado de mensajes usando el concepto de matriz inversa.

1) Construya una pequeña caja, con su respectiva tapa, de un tamaño tal que sirva para almacenar aproximadamente 25 tarjetas rectangulares de 9 cm por 5 cm.

2) Investigue en páginas de internet y seleccione tres frases de matemáticos o teoremas sobre el tema de matrices y determinantes, que sean breves, de ser posible, enfocados a la matriz inversa. También elija una imagen representativa de la frase o el teorema y utilícelas para colocarlas, en el tamaño adecuado, en tres de las caras de la caja de tarjetas y use la cara restante para los datos de identificación del autor o autores del trabajo.

3) Elabore una tabla de correspondencia entre las letras del alfabeto y demás signos o símbolos empleados en las frases o teoremas seleccionados en el punto 2, Además, proponga una matriz invertible de orden 5 x 5, cuyos elementos sean números enteros, y que se usará para encriptar las frases o teoremas del punto anterior.

4) Obtener la inversa de la matriz de encriptado que se usará para deshacer el encriptado usando el programa GEOGEBRA.

5) Forme las matrices de orden 5 x 5 necesarias para el texto completo de cada una de las frases o teoremas colocando cada letra o símbolo del texto correspondiente en las posiciones de matrices de 5 x 5 siguiendo el orden de lectura del texto por filas.

6) De acuerdo a la tabla de equivalencias entre símbolos y letras con números enteros convierta cada letra o símbolo a su número entero equivalente y forme las matrices correspondientes a todo el texto de la frase o teorema con matrices de 5 x 5 cuyos elementos sean números enteros.

7) Multiplique cada una de las matrices del punto 6 por la matriz de encriptado, con la ayuda del programa de cómputo GEOGEBRA. Escriba los elementos de las matrices que se obtienen en una tarjeta, usando una para cada matriz y siguiendo un orden de lectura por filas, y colóquelas en el tarjetero (caja) usando una tarjeta sin texto como un separador entre grupos de tarjetas que corresponden con una frase o teorema.

8) Elabore las tarjetas correspondientes a los puntos 3 y 4 y colóquelas al principio del grupo de tarjetas debidamente identificadas.

9) Intercambie su caja de mensajes con otro equipo a su elección y decodifique las frases o teoremas de dicho equipo.

10) Envíe a los integrantes del equipo anterior por vía aplicaciones de telefonía móvil el contenido de las tarjetas, solicitando las decodifiquen y que respondan con los mensajes debidamente decodificados, documentando y registrando el envío y la respuesta obtenida.

4.2.5 Instrumentos de evaluación de la construcción de los objetos y de las actividades propuestas

RÚBRICA PARA EVALUAR LA PRÁCTICA DEL ÁREA CON DETERMINANTES

Criterios	Excelente	Notable	Bueno	Suficiente	Insuficiente	Puntos obtenidos
Construcción del tablero y las figuras geométricas para el cálculo de áreas.	El tablero construido, cumple con todas las especificaciones de las actividades 3 y 4. Construye correctamente el paralelogramo y los dos triángulos de la actividad 2 y los tres triángulos de la actividad 10. **20 puntos**	El tablero y las figuras geométricas construidas cumplen con todas las especificaciones de las actividades 2, 3, 4 y 10, excepto en alguna pero que no afecta el desarrollo adecuado de la práctica. **18 puntos**	El tablero y las figuras geométricas construidas cumplen con todas las especificaciones de las actividades 2, 3, 4 y 10, excepto en dos de ellas pero que no afectan el desarrollo adecuado de la práctica. **16 puntos**	El tablero y las figuras geométricas construidas cumplen con todas las especificaciones de las actividades 2, 3, 4 y 10, excepto en algunas pero que no afectan el desarrollo adecuado de la práctica. **14 puntos**	No presenta el objeto a construir o el tablero y las figuras geométricas construidas **no** cumplen con las especificaciones mínimas necesarias para realizar las actividades de la práctica. **0 puntos**	
Cálculo del área de un paralelogramo usando determinantes.	En el reporte escrito, la fotografía del paralelogramo en el tablero muestra claramente que son correctas todas las coordenadas usadas y el proceso de cálculo del área usando un determinante de orden dos es correcto. **20 puntos**	En el reporte escrito, la fotografía del paralelogramo en el tablero muestra con cierto grado de aproximación que son correctas todas las coordenadas usadas y el proceso de cálculo del área usando un determinante es correcto. **18 puntos**	En el reporte escrito, la fotografía del paralelogramo en el tablero muestra con cierto grado de aproximación que son correctas todas las coordenadas usadas pero el proceso de cálculo del área usando un determinante tiene un solo error. **16 puntos**	En el reporte escrito, la fotografía del paralelogramo en el tablero muestra que una de las coordenadas usadas no está correcta, pero el proceso de cálculo del área usando un determinante es correcto aunque con un dato inconsistente. **14 puntos**	No documenta la realización de las actividad 6, o el reporte tiene errores en las coordenadas usadas **y** en el proceso de cálculo. **0 puntos**	
Cálculo del área de un cuadrilátero usando determinantes.	La fotografía del cuadrilátero de la actividades 7 y 8 muestra claramente que son correctas todas las coordenadas usadas y el proceso de cálculo del área total por división en áreas triangulares aplicando determinantes de orden dos, es correcto **20 puntos**	La fotografía del cuadrilátero de las actividades 7 y 8 muestra con cierto grado de aproximación que son correctas todas las coordenadas usadas y el proceso de cálculo del área total por división en áreas triangulares aplicando determinantes es correcto. **18 puntos**	La fotografía del cuadrilátero de las actividades 7 y 8 muestra con cierto grado de aproximación que son correctas todas las coordenadas usadas pero el proceso de cálculo del área total por división en áreas triangulares presenta algún determinante con errores. **16 puntos**	La fotografía del cuadrilátero de las actividades 7 y 8 muestra que alguna de las coordenadas usadas no está correcta, pero el proceso de cálculo del área total usando determinantes de orden dos es correcto, aunque con un dato inconsistente. **14 puntos**	No documenta la realización de las actividades 7-8, o el reporte tiene errores en las coordenadas usadas **y** en el proceso de cálculo del área total por división en áreas triangulares. **0 puntos**	
Cálculo del área de un polígono	Las imágenes del polígono de las actividades 9 y 10 muestran claramente que son correctas todas las coordenadas usadas y el	Las imágenes del polígono de las actividades 9 y 10 muestran con cierto grado de aproximación que son correctas todas las	Las imágenes del polígono de las actividades 9 y 10 muestran con cierto grado de aproximación que son correctas todas las	Las imágenes del polígono de las actividades 9 y 10 muestran que alguna de las coordenadas usadas no está correcta, pero el	No documenta la realización de las actividades 9 y 10, o el reporte tiene errores en las coordenadas usadas **y** en el proceso de cálculo del	

irregular de cinco lados.	proceso de cálculo por división del área total en áreas triangulares usando determinantes de orden dos es correcto. **20 puntos**	coordenadas usadas y el proceso de cálculo del área total por división en áreas triangulares aplicando determinantes es correcto. **18 puntos**	coordenadas usadas pero el proceso de cálculo del área total por división en áreas triangulares presenta algún determinante con errores. **16 puntos**	proceso de cálculo del área total usando determinantes de orden dos es correcto, aunque con un dato inconsistente. **14 puntos**	área total por división en áreas triangulares. **0 puntos**	
Uso de SAC (GEOGEBRA).	Documenta con fotografías y capturas de pantalla la realización de las actividades 1, 5, 7, 9 con el programa GEOGEBRA donde se muestran todos los resultados obtenidos de manera correcta. **20 puntos**	Documenta con fotografías y capturas de pantalla la realización de las actividades 1, 5,7, 9 con el programa GEOGEBRA donde se muestran todos los resultados obtenidos de manera correcta con un solo error en alguna de las actividades. **18 puntos**	Documenta con fotografías y capturas de pantalla la realización de las actividades 1, 5, 7, 9 con el programa GEOGEBRA donde se muestran todos los resultados obtenidos de manera correcta con un solo error hasta en dos de las actividades. **16 puntos**	Documenta con fotografías y capturas de pantalla la realización de las actividades 1, 5, 7, 9 con el programa GEOGEBRA donde se muestran todos los resultados obtenidos de manera correcta con un solo error hasta en tres de las actividades. **14 puntos**	No documenta la realización de alguna de las actividades 1, 5, 7, 9 o bien se tienen más de tres errores. **0 puntos**	
EQUIPO No. ____ INTEGRANTES: ____________________ ____________________ OBSERVACIONES: ____________________ ____________________					**Total puntos obtenidos**	

RÚBRICA PARA EVALUAR LA PRÁCTICA DE VOLUMENES CON DETERMINANTES

Criterios	Excelente	Notable	Bueno	Suficiente	Insuficiente	Puntos obtenidos
Construcción de la escultura a base de paralelepípedos (robot)	El robot construido, cumple con todas las especificaciones de la actividad 3. Está correctamente armado y pegado de manera rígida y tiene las dimensiones que se solicitan. Usa diferentes colores para pintarlo y se monta en una base también pintada. **20 puntos**	El robot construido, cumple con todas las especificaciones de la actividad 3. Está correctamente armado y pegado de manera rígida y tiene las dimensiones que se solicitan. **18 puntos**	El robot construido, cumple con todas las especificaciones de la actividad 3. Está correctamente armado y pegado de manera rígida y tiene aproximadamente las dimensiones que se solicitan. **16 puntos**	El robot construido, cumple con todas las especificaciones de la actividad 3. Está correctamente armado y pegado de manera rígida. **14 puntos**	No presenta el objeto a construir ó el robot construido **no** cumple con las especificaciones de la actividad 3. . **0 puntos**	

Cálculo del volumen de los paralelepípedos del robot y del volumen total con determinantes de orden 3.	El reporte escrito documenta la realización de las actividades 4, 5, 6,7 y 8. Mostrando que todas las coordenadas, los vectores de las aristas, y el cálculo de los volúmenes con determinantes de orden 3 están correctos. **20 puntos**	El reporte escrito documenta la realización de las actividades 4, 5, 6,7 y 8. Mostrando que todas las coordenadas y los vectores de las aristas están correctos, pero uno de los volúmenes está incorrecto, **18 puntos**	El reporte documenta la realización de las actividades 4, 5, 6, 7 y 8. Mostrando que todas las coordenadas están correctas y pero los vectores de las aristas y el cálculo de volúmenes tienen un solo error. **16 puntos**	El reporte documenta la realización de las actividades 4, 5, 6, 7, y 8. Se tiene un solo error en las coordenadas, en los vectores de las aristas, y en el cálculo de los volúmenes. **14 puntos**	No documenta la realización de alguna de las actividades 4, 5, 6, 7 y 8, o el reporte contiene más de 3 errores en la realización de estas actividades. **0 puntos**	
Cálculo del dominio y el rango de la función determinante del robot.	El reporte documenta la realización de la actividad 9 y todos los elementos de las matrices de orden tres del dominio están correctos y también con todos los resultados del cálculo de los determinantes del rango correctos. **20 puntos**	El reporte documenta la realización de la actividad 9 con todos los elementos del dominio correctos y con un solo elemento del rango incorrecto. **18 puntos**	El reporte documenta la realización de la actividad 9 con solo una matriz del dominio con errores y un solo elemento del rango incorrecto. **16 puntos**	El reporte documenta la realización de la actividad 9 con un solo error en el dominio y hasta con dos elementos del rango incorrectos. **14 puntos**	No documenta la realización de las actividades 9, o el reporte documenta la realización de la misma pero con más de tres errores. **0 puntos**	
Construcción de un objeto libre a base de paralelepípedos	Se documenta con fotografías e imágenes la realización de la actividad 10 y se utilizan solo **paralelepípedos no rectos** en la construcción del objeto y está armado, pintado y con elementos creativos en su diseño y construcción. **20 puntos**	Se documenta con fotografías e imágenes la realización de la actividad 10 y se utilizan solo **paralelepípedos** en la construcción del objeto y está armado, pintado y con elementos creativos en su diseño y construcción. **18 puntos**	Se documenta con fotografías e imágenes la realización de la actividad 10 y se utilizan solo **paralelepípedos** en la construcción del objeto y está armado y pintado. **16 puntos**	Se documenta con fotografías e imágenes la realización de la actividad 10 y se utilizan solo **paralelepípedos** en la construcción del objeto y está armado y pegado como un objeto rígido. **14 puntos**	No documenta la realización de la actividad 10, o el objeto construido no presenta las características de rigidez o no está construido únicamente con paralelepípedos. **0 puntos**	
Uso de SAC (GEOGEBRA).	Documenta con imágenes de la vista gráfica en 3 dimensiones de GEOGEBRA la realización de las actividades 1, 2 donde **se muestra claramente** que la réplica de la figura del robot y la adición de la extremidad se realizó correctamente **20 puntos**	Documenta con imágenes de la vista gráfica en 3 dimensiones de GEOGEBRA la realización de las actividades 1, 2 donde **se muestra** que la réplica de la figura del robot y la adición de la extremidad se realizó correctamente **18 puntos**	Documenta con imágenes de la vista gráfica en 3 dimensiones de GEOGEBRA la realización de las actividades 1, 2 donde **se muestra** que la réplica de la figura del robot y la adición de la extremidad se realizó pero se tiene un solo error. **16 puntos**	Documenta con imágenes de la vista gráfica en 3 dimensiones de GEOGEBRA la realización de las actividades 1, 2 donde **se muestra** que la réplica de la figura del robot y la adición de la extremidad se realizó pero se cometieron dos errores. **14 puntos**	No documenta la realización de alguna de las actividades 1, 2 o bien el reporte muestra que se cometieron tres o más errores en la réplica o en la adición de la extremidad. **0 puntos**	
EQUIPO No. _____ INTEGRANTES: ______________________________ ______________________________ OBSERVACIONES: ______________________________ ______________________________					**Total puntos obtenidos**	

RÚBRICA PARA EVALUAR LA PRÁCTICA DE DETERMINANTES DE ORDEN 4 y 5 CON PERMUTACIONES

Criterios	Excelente	Notable	Bueno	Suficiente	Insuficiente	Puntos obtenidos
Construcción de la caja y las tarjetas para efectuar el cálculo de determinantes de orden 4.	La caja y las tarjetas, cumplen con todas las especificaciones de las actividades 1, 2, 3. Todas las perforaciones en las tarjetas están en la posición correcta y el signo de todos los productos de los factores es el correcto. **20 puntos**	La caja y las tarjetas, cumplen con todas las especificaciones de las actividades 1, 2, 3. Todas las perforaciones en las tarjetas están en la posición correcta, pero uno de los signos de los productos está incorrecto. **18 puntos**	La caja y las tarjetas, cumplen con todas las especificaciones de las actividades 1, 2, 3, aunque existe algún error en las posiciones de las perforaciones en alguna de las tarjetas, y todos los signos están correctos. **16 puntos**	La caja y las tarjetas, cumplen con todas las especificaciones de las actividades 1, 2, 3, aunque existe algún error en las posiciones de las perforaciones en alguna de las tarjetas y un solo signo de los productos está incorrecto. **14 puntos**	No presenta el objeto a construir o la caja y las tarjetas **no** cumplen con las especificaciones de la actividad 1, 2, 3 presentando tres o más errores en las perforaciones o en los signos. **0 puntos**	
Cálculo del determinante de orden 4 usando plantillas para los productos.	El reporte escrito documenta la realización de las actividades 4, 5, 6. Es correcto el cálculo del determinante usando las tarjetas y están correctas las comprobaciones con los métodos de cofactores y por reducción a una matriz triangular. **20 puntos**	El reporte escrito documenta la realización de las actividades 4, 5, 6. Es correcto el cálculo del determinante usando las tarjetas y se tiene algún error en la comprobación con el método de cofactores o en el de reducción a una matriz triangular. **18 puntos**	El reporte escrito documenta la realización de las actividades 4, 5, 6. Es correcto el cálculo del determinante usando las tarjetas y se tiene algún error en la comprobación con ambos métodos. **16 puntos**	El reporte escrito documenta la realización de las actividades 4, 5, 6. Es correcto el cálculo del determinante usando las tarjetas y se tienen algunos errores en la comprobación con ambos métodos. **14 puntos**	No documenta la realización de alguna de las actividades 4, 5, 6 o está **incorrecto** el cálculo del determinante usando las tarjetas como plantillas para los productos. **0 puntos**	
Cálculo del determinante de orden 5 por cofactores y usando las plantillas para los determinantes de orden 4.	Se documenta la realización de las actividades 7 y 8. Es correcto el cálculo del determinante de orden 5 con cofactores y usa las tarjetas para calcular las de orden 4 del desarrollo con los resultados correctos y se comprueba correctamente por reducción a una matriz triangular. **20 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 7 y 8. Es correcto el cálculo del determinante de orden 5 con cofactores y usa las tarjetas para calcular las de orden 4 del desarrollo con los todos los resultados correctos y tiene algún error en el cálculo por reducción a una matriz triangular. **18 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 7 y 8. El cálculo del determinante de orden 5 se realiza por cofactores y usa las tarjetas para calcular las de orden 4 del desarrollo con un solo error en estos resultados, pero el cálculo por reducción a una matriz triangular está correcto. **16 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 7 y 8. El cálculo del determinante de orden 5 se realiza por cofactores y usa las tarjetas para calcular las de orden 4 del desarrollo hasta con 2 errores en estos resultados, pero el cálculo por reducción a una matriz triangular está correcto. **14 puntos**	No documenta la realización de alguna de las actividades 7, 8, o el reporte documenta la realización de las mismas con un total de tres errores o más. **0 puntos**	
Evaluación de la viabilidad para ampliar el empleo directo de plantillas para el determinante de orden 5.	Se documenta la realización de la actividad 9. Están correctos todos los signos de los 20 productos que se solicitan del determinante de orden 5 y argumenta sobre los problemas para elaborar y usar las plantillas para los determinantes de orden 5. **20 puntos**	Se documenta la realización de la actividad 9. Están correctos todos los signos de los 20 productos que se solicitan del determinante de orden 5 y menciona los problemas para elaborar y usar las plantillas para los determinantes de orden 5. **18 puntos**	Se documenta la realización de la actividad 9. Están correctos todos los signos de los 20 productos que se solicitan del determinante de orden 5 y menciona solo un problema para elaborar y usar las plantillas para los determinantes de orden 5. **16 puntos**	Se documenta la realización de la actividad 9. Existe un solo error en los signos de los 20 productos que se solicitan del determinante de orden 5 y menciona solo un problema para elaborar y usar las plantillas para los determinantes de orden 5. **14 puntos**	No documenta la realización de la actividad 9, o se tienen errores en los signos de los productos y no se argumentan ni mencionan los problemas para elaborar y usar plantillas para los determinantes de orden 5. **0 puntos**	

Uso de SAC (GEOGEBRA).	Documenta con imágenes de captura de pantallas del GEOGEBRA la realización de las actividad 10. Se calculan todos los determinantes usados en la práctica y estos resultados coinciden con los obtenidos en las actividades anteriores. **20 puntos**	Documenta con imágenes de captura de pantallas del GEOGEBRA la realización de las actividad 10. Se calculan todos los determinantes usados en la práctica y algún resultado no coincide con los obtenidos en las actividades anteriores. **18 puntos**	Documenta con imágenes de captura de pantallas del GEOGEBRA la realización de las actividad 10. En las capturas de pantalla faltó incluir el cálculo de algún determinante pero los resultados coinciden con los obtenidos en las actividades anteriores. **16 puntos**	Documenta con imágenes de captura de pantallas del GEOGEBRA la realización de las actividad 10. Las imágenes de capturas de pantalla no se leen fácilmente y faltó incluir el cálculo de algún determinante pero los resultados coinciden con los obtenidos en las actividades anteriores. **14 puntos**	No documenta la realización de la actividad 10 o bien el reporte muestra que se omitió el cálculo de algunos determinantes o las capturas de pantalla son ilegibles o los resultados no coinciden con los de las actividades anteriores. **0 puntos**	
Total puntos obtenidos EQUIPO No. _____ INTEGRANTES:____________________ OBSERVACIONES:____________________ ____________________						

RÚBRICA PARA EVALUAR LA PRÁCTICA DE ENCRIPTADO DE MENSAJES USANDO LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Criterios	Excelente	Notable	Bueno	Suficiente	Insuficiente	Puntos obtenidos
Construcción de la caja y las tarjetas para efectuar el encriptado de mensajes	La cajita y las tarjetas, cumplen con todas las especificaciones de las actividades 1, 2. Tiene en **tres** de las caras de la caja imágenes relacionadas de manera precisa a las frases o teoremas seleccionados por el equipo, y en otra de las caras tiene los datos de identificación de los integrantes del equipo **sin errores** u omisiones. **20 puntos**	La cajita y las tarjetas, cumplen con todas las especificaciones de las actividades 1, 2. Tiene en **dos** de las caras de la caja imágenes con una relación precisa con las frases o teoremas del equipo y en otra de las caras tiene los datos de identificación de los integrantes del equipo **sin errores** u omisiones. **18 puntos**	La cajita y las tarjetas, cumplen con todas las especificaciones de las actividades 1, 2. Tiene en tres de las caras de la caja imágenes y al menos **una** de ellas tiene una relación precisa con las frases o teoremas del equipo y en otra de las caras tiene los datos de identificación de los integrantes del equipo **sin errores** u omisiones. **16 puntos**	La cajita y las tarjetas, cumplen con todas las especificaciones de las actividades 1, 2. Tiene en tres de las caras de la caja imágenes y al menos una de ellas tiene una relación precisa con las frases o teoremas del equipo y en otra de las caras tiene los datos de identificación de los integrantes del equipo **con alguna omisión o error**. **14 puntos**	No presenta el objeto a construir o la caja y las tarjetas **no cumplen** con las especificaciones de las actividades 1 y 2. **0 puntos**	
Preparación y elaboración de las tarjetas clave para codificar y decodificar mensajes.	El reporte documenta la realización de las actividades 3, 4 y 8. La tabla de equivalencias es como se indica en la actividad 3 y contiene **letras, números y símbolos matemáticos**, la matriz de encriptado de orden 5×5 tiene solo elementos enteros y el cálculo de la inversa incluye el **proceso con los resultados correctos**. Se elaboraron las tarjetas correspondientes.	El reporte documenta la realización de las actividades 3, 4 y 8. La tabla de equivalencias es como se indica en la actividad 3 y solo contiene **letras y números**, la matriz de encriptado de orden 5×5 tiene solo elementos enteros y el cálculo de la inversa incluye el **proceso con los resultados correctos**. Se elaboraron las tarjetas correspondientes.	El reporte documenta la realización de las actividades 3, 4 y 8. La tabla de equivalencias es como se indica en la actividad 3 y solo contiene **letras y números**, la matriz de encriptado de orden 5×5 tiene solo elementos enteros y **el resultado de su inversa está correcto**. Se elaboraron las tarjetas correspondientes.	El reporte documenta la realización de las actividades 3, 4 y 8. La tabla de equivalencias es como se indica en la actividad 3 y solo contiene **letras**. La matriz de encriptado de orden 5×5 tiene solo elementos enteros y **el resultado de su inversa está correcto**. Se elaboraron las tarjetas correspondientes.	No documenta la realización de alguna de las actividades 3, 4 y 8 o no se cumple lo señalado en la columna de suficiente.	

	20 puntos	18 puntos	16 puntos	14 puntos	0 puntos	
Codificación y encriptado de las tres frases o de los tres teoremas.	Se documenta la realización de las actividades 5, 6 y 7. Es correcta la adaptación del texto al formato de matrices de 5×5 y la codificación a números enteros **es correcta** de acuerdo a la tabla de equivalencia. Los resultados de los productos matriciales del encriptado están correctos. **20 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 5, 6 y 7. Es correcta la adaptación del texto al formato de matrices de 5×5 y la codificación a números enteros de acuerdo a la tabla de equivalencia tiene **un solo error**. Los resultados de los productos matriciales del encriptado están correctos. **18 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 5, 6 y 7. Es correcta la adaptación del texto al formato de matrices de 5×5 y la codificación a números enteros de acuerdo a la tabla de equivalencia tiene **dos errores** en la misma frase o teorema. Los resultados de los productos matriciales del encriptado están correctos. **16 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 5, 6 y 7. Es correcta la adaptación del texto de la frase o del teorema al formato de matrices de 5×5 y la codificación a números enteros de acuerdo a la tabla de equivalencia de la actividad 3 tiene **errores** en una sola frase o teorema. Los resultados de los productos matriciales del encriptado están correctos. **14 puntos**	No documenta la realización de alguna de las actividades 5, 6 y 7, o el reporte muestra que la realización no cumple con lo señalado en la columna de suficiente. **0 puntos**	
Intercambio y decodificación de las frases o teoremas.	Se documenta con fotografías de las cajitas y tarjetas intercambiadas en la actividad 9. Se presenta la tabla de equivalencias. La matriz de encriptado y su inversa están correctas. La decodificación del texto final de las **tres** frases o teoremas del equipo con el que se haya realizado el intercambio es correcta. **20 puntos**	Se documenta con fotografías de las cajitas y tarjetas intercambiadas en la actividad 9. Se presenta la tabla de equivalencias. La matriz de encriptado y su inversa están correctas. La decodificación del texto final de **dos de las tres frases** o teoremas del equipo con el que se haya realizado el intercambio es correcta y la **tercera tiene un solo error**. **18 puntos**	Se documenta con fotografías de las cajitas y tarjetas intercambiadas en la actividad 9. Se presenta la tabla de equivalencias. La matriz de encriptado y su inversa están correctas. La decodificación del texto final de **dos de las tres frases** o teoremas del equipo con el que se haya realizado el intercambio es correcta pero la **tercera tiene errores**. **16 puntos**	Se documenta con fotografías de las cajitas y tarjetas intercambiadas en la actividad 9. Se presenta la tabla de equivalencias. La matriz de encriptado y su inversa están correctas. La decodificación del texto final de **una de las tres frases** o teoremas del equipo con el que se haya realizado el intercambio es correcta pero las **otras dos tienen errores**. **14 puntos**	No documenta con imágenes la realización de la actividad 9, o la decodificación del texto final de las **tres frases o teoremas** en el intercambio de mensajes es **incorrecta**. **0 puntos**	
Uso de WhatsApp y (GEOGEBRA).	Documenta la realización de la actividad 10 con imágenes del envío de las frases o teoremas encriptados a través de WhatsApp. Además, se incluyen las capturas de pantalla del GEOGEBRA para calcular la inversa de la matriz de encriptado de la actividad 4 y **todas** las multiplicaciones del encriptado de la actividad 7 y **todas** las operaciones necesarias para decodificar los mensajes de la actividad 9. **20 puntos**	Documenta la realización de la actividad 10 con imágenes del envío de las frases o teoremas encriptados a través de WhatsApp. Además, se incluyen las capturas de pantalla del GEOGEBRA para calcular la inversa de la matriz de encriptado de la actividad 4 y **todas** las multiplicaciones del encriptado de la actividad 7 y **algunas** de las operaciones necesarias para decodificar los mensajes de la actividad 9. **18 puntos**	Documenta la realización de la actividad 10 con imágenes del envío de las frases o teoremas encriptados a través de WhatsApp. Además, se incluyen las capturas de pantalla del GEOGEBRA para calcular la inversa de la matriz de encriptado de la actividad 4 y **algunas** de las multiplicaciones del encriptado de la actividad 7 y **algunas** de las operaciones necesarias para decodificar los mensajes de la actividad 9. **16 puntos**	Documenta la realización de la actividad 10 con imágenes del envío de las frases o teoremas encriptados a través de WhatsApp. Además, se incluyen las capturas de pantalla del GEOGEBRA para calcular la inversa de la matriz de encriptado de la actividad 4 y **todas** las operaciones necesarias para decodificar los mensajes de la actividad 9. **14 puntos**	No documenta la realización de la actividad 10 o bien el reporte muestra que no se cumple con lo indicado en la columna de suficiente. **0 puntos**	
Total puntos obtenidos EQUIPO No. _____ INTEGRANTES:______________________________ ______________________________ OBSERVACIONES:______________________________ ______________________________						

4.2.6 Aportaciones esperadas de las actividades al alcance de las competencias

Aportaciones esperadas de las actividades, asociadas al primer objeto, al alcance de las competencias.

Análisis de las aportaciones de las actividades propuestas con la representación semiótica del concepto de determinante de orden dos como el área de un paralelogramo.

- La actividad (1) introduce a la representación semiótica del determinante de orden dos a través de la gráfica del objeto denominado paralelogramo con la ayuda del programa GEOGEBRA.

- Las actividades (2, 3 ,4) hacen uso del programa GEOGEBRA como una herramienta, que facilita la construcción del tablero y el conjunto de las piezas triangulares, aportando al desarrollo de la competencia del uso de sistemas algebraicos computarizados, en este caso, incluso en el proceso de armado y construcción de objetos.

- La actividad (5) hace una réplica de la ubicación física del paralelogramo en la pantalla de trabajo del programa GEOGEBRA y profundiza en el uso de las herramientas del mismo para el cálculo de áreas de polígonos, aportando en el desarrollo de la competencia genérica asociada al uso de sistemas algebraicos computarizados (SAC).

- En la actividad (6) se usa la representación semiótica del determinante de orden dos como el área de un paralelogramo, mediante el cálculo del determinante de una matriz de orden 2 x 2, cuyos renglones son las componentes o coordenadas de los puntos extremos, con respecto al vértice común de dos vectores que coinciden con dos lados del paralelogramo en dirección y magnitud.

- En las actividades (7,8) se usa el tablero y las piezas triangulares para construir cuadriláteros que no son paralelogramos, y cuya área se calcula con suma de áreas de los triángulos que lo forman. A su vez cada área triangular, se calcula como el área de la mitad de un paralelogramo, lo que amplía el uso del determinante de orden 2 para calcular áreas, incluso de polígonos irregulares de cuatro lados mediante la división en áreas triangulares.

- Las actividades (9, 10) son actividades integradoras de la práctica, donde se refuerza la representación semiótica del determinante de orden dos como el área de un paralelogramo que dividido entre dos permite hallar el área de un triángulo, y que el área de cualquier polígono se puede dividir en áreas triangulares cuya suma da como resultado el área del polígono.

Aportaciones esperadas de las actividades, asociadas al segundo objeto, al alcance de las competencias.

Análisis de las aportaciones de las actividades propuestas con la representación semiótica del concepto de determinante como volumen de un paralelepípedo.

- La actividad (1a) introduce a la representación gráfica del objeto denominado paralelepípedo con la ayuda del programa GEOGEBRA.

- Las actividades (3, 4) profundizan en la representación gráfica del objeto paralelepípedo como elemento o parte de un objeto más grande que puede tener distintas formas, en nuestro caso el robot. La realización de esta actividad requiere del dominio de la representación gráfica de coordenadas en el espacio y de la aplicación del concepto de líneas o vectores paralelos para inferir y determinar las coordenadas que permiten completar la gráfica del robot con el programa GEOGEBRA.

- La actividad (3) introduce al desarrollo del cuerpo geométrico en una figura plana para su construcción física permitiendo la conexión del concepto matemático con el entorno del estudiante en una actividad.

- La actividad (5) asocia la representación gráfica de un vector en R^3 con las aristas y vértices del paralelepípedo e introduce a la interpretación geométrica del producto mixto de vectores como un volumen de un paralelepípedo que se calcula con un determinante de 3 x 3.

- La actividad (6) determina el volumen de todos los paralelepípedos calculando determinantes 3x3 y tomando el valor absoluto como el volumen correspondiente al cuerpo geométrico, con lo que se enfatiza en la representación semiótica de un determinante de 3x3 como un volumen.

- La actividad (7) permite analizar geométricamente el significado del signo del resultado del determinante de 3x3 y justificar el uso del valor absoluto como equivalente multiplicar por (-1) uno de los renglones a las propiedades de los determinantes para obtener un número positivo como resultado.

- La actividad (8) se vincula a la posible fabricación en molde de una pieza de plástico para hacer conexión con el entorno del estudiante.

- La actividad (9) introduce a la representación semiótica de la definición del determinante como la regla de correspondencia que define una función $D\colon R^{3\times 3} \to R$.

- La actividad (10) es una actividad integradora donde se refuerza la representación semiótica del determinante como volumen y que además de que conecta el concepto determinante con el entorno del estudiante, también le permite desarrollar su creatividad y expresión artística.

Aportaciones esperadas de las actividades, asociadas al tercer objeto, al alcance de las competencias.

Análisis de las aportaciones de las actividades propuestas con la representación semiótica del concepto de determinante de orden n como parte de una fórmula general para resolver un sistema de n ecuaciones con n variables y cuya definición se produce por observación y generalización de las definiciones de los determinantes de orden dos y tres.

- En la actividad (1) se propone la construcción de una pequeña caja que contiene un paquete de 26 tarjetas de 9 x 5 cm, a cada una de las cuales se les traza una cuadrícula de 4 cm por 4 cm, con cuadros de 1 cm y su realización propicia el desarrollo de habilidades constructivas de objetos, e introduce elementos de creatividad.

- Para elaborar la lista de los veinticuatro productos de cuatro factores, que se solicita en la actividad 2, correspondientes a la definición del determinante de orden 4, se requiere haber comprendido y analizado cuidadosamente la estructura de las definiciones previas de los determinantes de menor orden e inferir que en los productos de cuatro factores los primeros subíndices de los elementos involucrados, están en el orden natural, mientras que los segundos subíndices deben ser las veinticuatro permutaciones posibles. Además, se requiere analizar si las permutaciones correspondientes de los segundos subíndices son pares o impares para determinar el signo correcto de cada uno de los productos de cuatro factores. De esta forma, lo que aporta está actividad en la competencia es en el indicador relativo al uso de diferentes métodos para calcular determinantes, en este caso usando la definición en términos de permutaciones signadas.

- En la actividad 3, las perforaciones de las tarjetas justo en las posiciones a los elementos correspondientes a los productos de cuatro factores de la lista de la actividad 2, permiten que, al sobreponerse a una tarjeta que contenga los valores de los elementos cuyo determinante se desea calcular, solo sean visibles los cuatro elementos que se deben multiplicar en los productos involucrados en un determinante de orden 4, y a los cuales se les antepone el signo indicado en la propia tarjeta perforada para efectuar la sumatoria de los veinticuatro productos. Así lo que aporta esta actividad son las tarjetas con perforaciones que facilitarán el cálculo de determinantes de orden 4.

- La actividad 4 es la aplicación de las tarjetas preparadas en la actividad tres en el cálculo de un determinante, mostrando como se pueden obtener los productos involucrados en el cálculo de determinantes mediante una estrategia diferente con la expectativa de hacerlo más rápido, siendo entonces la aportación de esta actividad en el indicador relativo a la utilización de diferentes métodos para calcular determinantes de orden 4.

- En las actividad 5 y 6, se solicita calcular el determinante de la actividad 4 usando un desarrollo por cofactores y por reducción a una matriz triangular con la intención de verificar que el resultado sea el correcto y al mismo tiempo servir de práctica también para estos métodos, desde luego, la aportación de esta actividad es en el indicador relativo al uso de diferentes métodos para calcular determinantes.

- En la actividad 7, se solicita proponer y calcular un determinante de orden 5, aplicando primero un desarrollo por cofactores y después calcular todos los determinantes de orden 4 involucrados con las tarjetas sobrepuestas usadas en la actividad cuatro. Así, en esta actividad se usa un objeto construido para calcular determinantes de orden 4, en un proceso de cálculo de un determinante de orden 5, aportando de esta manera también al desarrollo de habilidades en la solución de problemas por diferentes alternativas.

- En la actividad 8, se solicita calcular el determinante de orden 5 de la actividad anterior, usando una reducción a matriz triangular y aplicando propiedades, con la intención de comprobar el resultado obtenido en la actividad anterior. La realización de la actividad permite efectuar comparaciones en lo relativo al método más apropiado para efectuar el cálculo, siendo está comparación de métodos la principal aportación de esta actividad.

- En la actividad 9, se solicita realizar una lista de al menos 20 de los 120 productos de cinco factores que requiere la definición del determinante de orden 5, con la intención de servir de base para evaluar la viabilidad de construir un objeto semejante al del determinante de orden 4 para el determinante de orden 5, y su aportación es precisamente esta evaluación que propicia el desarrollo de habilidades cognitivas de análisis y síntesis.

- La actividad 10, solicita el uso de las herramientas del programa de computadora GEOGEBRA para calcular determinantes de orden 4 y 5, aportando en el desarrollo de la competencia genérica relativa al uso de sistemas algebraicos computarizados (SAC).

Aportaciones esperadas de las actividades, asociadas al cuarto objeto, al alcance de las competencias.

Análisis de las aportaciones de las actividades propuestas con la representación semiótica del concepto de matriz inversa como el factor para lograr una operación inversa que deshace el efecto de una operación previa de multiplicación de matrices.

- En la actividad (1) se propone la construcción de una pequeña caja que contiene un paquete de tarjetas, y su realización propicia el desarrollo de habilidades constructivas de objetos, e introduce elementos de creatividad, ampliando con ello la gama de competencias involucradas.

- La actividad (2) solicita investigar en páginas de internet frases o teoremas y su realización aporta al desarrollo de la competencias genéricas asociadas al uso de TIC's para la búsqueda y análisis de información sobre temas específicos

- En la actividad (3) se definen todos los elementos necesarios para el encriptado de mensajes, tales como la tabla de equivalencias entre letras y símbolos con números enteros, y la matriz de encriptado. El estudiante al proponer su propia matriz efectúa un proceso cognitivo de selección y toma de decisiones, valorando de mejor forma la operación de multiplicación de matrices en el propósito de encriptar mensajes y al mismo tiempo reconociendo que el destinario del mensaje deberá aplicar la inversa de la matriz de encriptado para decodificar el mensaje.

- La actividad 4, solicita el uso de las herramientas del programa de computadora GEOGEBRA para calcular la inversa de una matriz de orden (5 x 5), aportando en el desarrollo de la competencia genérica relativa al uso de sistemas algebraicos computarizados (SAC).

- En las actividades 5 y 6 se escribe el texto de cada mensaje como renglones de matrices de orden (5 x 5), y se convierten estas matrices de letras y símbolos a matrices de números enteros de acuerdo a la tabla de equivalencias del punto 3, siendo esta la etapa primaria de un proceso de codificación de mensajes, entonces, la realización de la actividad introduce al estudiante a una aplicación de conceptos matemáticos desde una representación semiótica de operaciones en sentido directo para el encriptado y el uso de la operación inversa para deshacerla la operación de encriptado..

- En la actividad 7, se realiza el encriptado de los mensajes mediante la multiplicación de la matriz de encriptado por las matrices que se prepararon en la actividad 6, aportando la vinculación del concepto matemático al contexto del estudiante y de esta manera tener un mejor significado del concepto en su proceso de aprendizaje.

- En la actividad 8 se preparan las tarjetas de la tabla de equivalencias, la matriz de encriptado y su matriz inversa, como parte del grupo de tarjetas contenidas en la cajita del punto 1, con la intención de que dentro de la misma exista toda la información necesaria para decodificar los mensajes de las otras tarjetas, por lo que su aportación consiste en que se trata de una actividad necesaria para llevar a cabo la decodificación de los mensajes.

- El intercambio de las cajitas de mensajes entre los diferentes equipos de trabajo, que se solicita en la actividad 9, es con la intención de propiciar una posible coevaluación y al mismo tiempo conocer las frases o teoremas investigados por otro equipo, mejorando la interacción entre los estudiantes propiciando el aprendizaje colaborativo no solamente entre integrantes de un mismo equipo sino entre los diferentes equipos de trabajo.

- El envío de mensajes encriptados y contenidos en las tarjetas de la cajita de mensajes, que se solicita en la actividad 10, por aplicaciones de telefonía móvil, tiene la intención de aumentar el interés y la motivación de los estudiantes, a través de la integración de tecnologías de información y comunicación en la didáctica del tema.

4.3 Dos objetos a construir, fundamentos y actividades para el tema de sistemas de ecuaciones lineales

4.3.1 Competencias específicas y genéricas

Competencia específica del tema de sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve problemas de aplicación en ingeniería sobre sistemas de ecuaciones lineales para interpretar las soluciones y tomar decisiones con base en ellas. Utilizando los métodos de Gauss, Gauss-Jordan, matriz inversa y regla de Cramer.

Competencias genéricas asociadas al tema.

- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis.
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.
- Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente.
- Capacidad de trabajo en equipo.
- Habilidades básicas en el uso de la computadora (uso de Sistemas Algebraicos Computarizados SAC).

***Indicadores de alcance de las competencias*.**

La siguiente tabla contiene una propuesta de indicadores que el estudiante debe alcanzar de manera gradual en su proceso de construcción del conocimiento necesario para alcanzar la competencia específica.

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A) Identifica un sistema de ecuaciones lineales y lo clasifica de acuerdo a la solución que se obtiene del mismo.	15%
B) Interpreta gráficamente la solución de sistemas de ecuaciones lineales.	15 %
C) Aplica los métodos de Gauss, Gauss-Jordan, matriz inversa y la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones.	30 %
D) Resuelve problemas de aplicación en ingeniería que se modelen matemáticamente con un sistema de ecuaciones lineales.	30 %
E) Utiliza algún programa de computadora (TIC's) para la interpretación geométrica de la solución y la solución de sistemas de ecuaciones lineales usando los métodos de Gauss, Gauss-Jordan, matriz inversa y la regla de Cramer.	10 %

Tabla 7. Indicadores de alcance de las competencias del tema de sistema de ecuaciones lineales

4.3.2 Fundamentos teóricos

Esta sección se incluye también con la intención expuesta en el primer tema aunque en este caso, por razones de extensión, solo se documenta con la información relativa a las representaciones semióticas del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales y se asume que los estudiantes conocen y aplican correctamente los diferentes métodos para resolverlos

Definición y clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

El tema de sistemas de ecuaciones lineales está incluido en la asignatura de Algebra Lineal, el cual forma parte del plan curricular de las carreras del área de ingeniería, y es un tema que se incluye normalmente en el contenido temático de un libro de Algebra Lineal para estudiantes de licenciatura, por lo que la literatura existente en muy vasta, por citar ejemplo: Stanley L. Grossman. Álgebra lineal, 7_a edición.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (14)$$

Donde a_{ij}, b_i son números reales y las x_i son variables. El conjunto solución es el conjunto de valores k_i de las correspondientes variables que satisfacen cada una de las ecuaciones.

Si $b_i = 0$ para $i = 1,2,..,m$ el sistema se denomina sistema homogéneo asociado al sistema (14). La siguiente gráfica muestra la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a su solución.

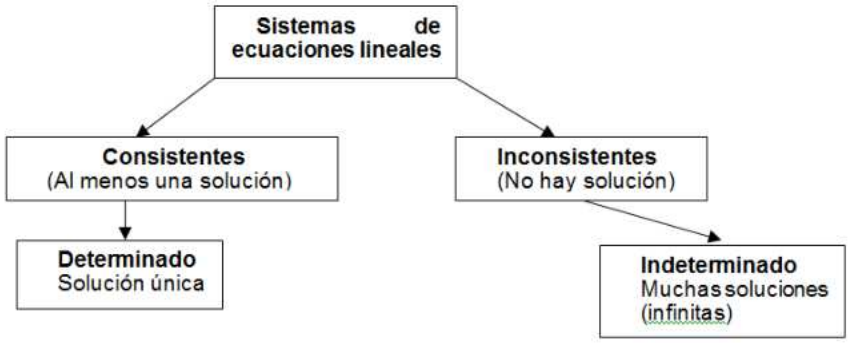


Figura 20. Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales.

Hay diferentes métodos de solución que se tratan ampliamente en la mayoría de los libros de Algebra Lineal, por ejemplo el método de eliminación de Gauss-Jordan. Este método permite resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales para obtener la solución o las soluciones e identificar si se trata de un sistema que no tenga solución. Se sabe también y ahora se comprueba fácilmente con el uso de programas de cómputo que, si graficamos una ecuación lineal de tres variables por ejemplo *x, y, z* el gráfico correspondiente es lo que conceptualmente se denomina un plano en el espacio geométrico tridimensional.

De este modo, como la solución de un sistema es el conjunto de puntos que verifican a todas las ecuaciones (o que pertenecen a todos los planos del sistema) entonces, la solución o las soluciones y la no existencia de la misma, desde el punto de vista geométrico, dependerá de la forma en que estén dispuestos las gráficas de planos en el espacio geométrico.

Diferentes representaciones semióticas de la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

La solución de un sistema de ecuaciones con tres variables como el punto de intersección, la recta de intersección, o la ausencia de puntos comunes de intersección de planos en el espacio.

Representación gráfica de una ecuación lineal de tres variables.

Ejemplo. Graficar la ecuación $-x-y+z=4$.

La gráfica de una ecuación de tres variables como la anterior, es el conjunto de ternas de números (*x*, *y*, *z*), correspondientes a los valores de las variables que verifican la ecuación. Para encontrar estas ternas de números que al sustituirse en la ecuación se satisface la condición de igualdad a 4 (soluciones de la ecuación), una forma de hacerlo es despejar una de las variables y expresarla explícitamente en términos de las otras dos, y luego sustituir los valores supuestos para encontrar el valor correspondiente a la tercera variable.

Es importante mencionar que esto es lo mismo que cuando resolvemos sistemas de ecuaciones de tres variables y en el proceso nos queda como *sistema equivalente* una sola ecuación y tres variables lo que haríamos es suponer valores arbitrarios para dos de las variables y resolver la otra en términos de las supuestas para escribir la *solución general* para que partir de esta obtener las infinitas soluciones. Así, despejando la variable *z* en función de *x* e *y*, obtenemos

$$z=4+x+y$$

Dando valores arbitrarios a las variables *x* e *y*, y sustituyendo en la expresión anterior para obtener el valor de z, se obtiene la siguiente tabla.

X	Y	Z
0	0	4
0	1	5
0	2	6
0	3	7
0	4	8
1	0	5
1	1	6

X	Y	Z
2	3	9
2	4	10
3	0	7
3	1	8
3	2	9
3	3	10
3	4	11

1	2	7
1	3	8
1	4	9
2	0	6
2	1	7
2	2	8

4	0	8
4	1	9
4	2	10
4	3	11
4	4	12

Tabla 8. Puntos (x, y, z) que verifican la ecuación a graficar.

La representación gráfica de las ternas de la tabla 8 en un sistema de coordenadas rectangulares con tres ejes, se muestra en la figura 21.

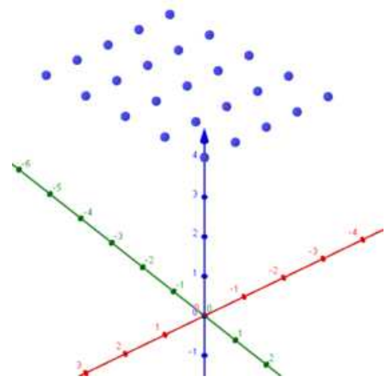


Figura 21. Grafica de las ternas de la tabla 8.

De esta figura, se observa que, la primera fila de puntos, de derecha a izquierda, corresponden a la representación gráfica de las primeras cinco ternas de coordenadas de la tabla y así sucesivamente. Así mismo, si nuestra tabla tuviera una mayor cantidad de ternas, usando incrementos menores en las variables se tendría una mayor concentración de los puntos correspondientes en el espacio geométrico, lo que a su vez permitiría apreciar que la superficie resultante de dicha concentración es una superficie de forma plana, lo que justifica ampliamente que la gráfica de $z = 4 + x + y$ se trata de lo que llamamos conceptualmente como un plano.

Cabe mencionar que, dado que la superficie de la gráfica es un plano, si unimos con líneas rectas tres puntos cualesquiera que pertenecen al plano, obtendríamos una figura que muestra una *fragmento triangular* de dicho plano.

De este modo se concluye que la gráfica de una *ecuación lineal* en *tres dimensiones* (usando tres ejes) *incluso si no aparecen las tres variables*, es un plano.

Si bien el uso de una tabla extensa permite justificar la conclusión de que se trata de un plano, lo usual es graficar la ecuación en tres dimensiones con la ayuda de algún programa de computadora como se muestra en la siguiente gráfica.

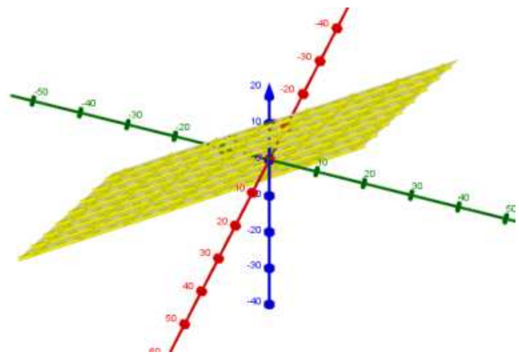


Figura 22. Grafica de la ecuación $-x - y + z = 4$

Ahora bien, una vez que hemos justificado que la gráfica de una ecuación lineal en tres variables (todas a la potencia 1), es un plano en el espacio geométrico tridimensional, podemos hacer uso de esta representación gráfica en la interpretación geométrica de las soluciones de sistemas de ecuaciones de tres variables.

Representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales de tres variables.

En la figura 23 se muestra la gráfica de cuatro planos correspondientes a las ecuaciones del siguiente sistema de cuatro ecuaciones con tres variables.

$$\begin{aligned} 5x \qquad + 3z &= 30 \\ -5y + 3z &= 0 \\ 5y + 3z &= 30 \\ -5x \qquad + 3z &= 0 \end{aligned}$$

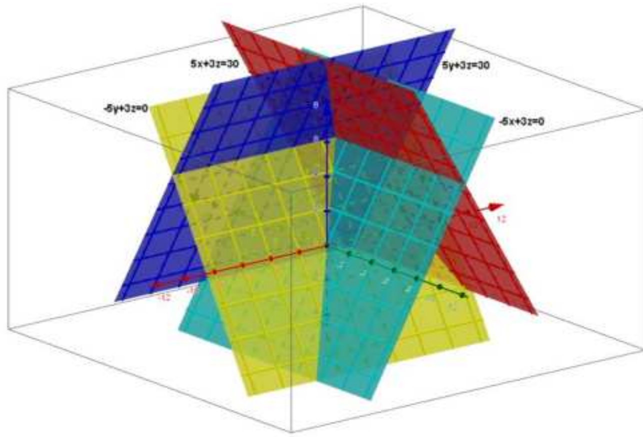


Figura 23. Gráfica de un sistema de cuatro ecuaciones con tres variables.

En esta figura se observa que los cuatro planos tienen un único punto común de intersección cuyas coordenadas son (3, 3, 5), y que en este caso corresponden con la solución única del sistema de ecuaciones. Debe notarse también, que cada ecuación se grafica en tres dimensiones aun cuando no aparecen las tres variables en cada una de ellas, porque el sistema es de tres variables.

La misma figura 23 muestra también, que si consideramos un sistema formado por solo dos ecuaciones de las cuatro anteriores, por ejemplo solo las ecuaciones

$$\begin{aligned} 5x \quad\quad + 3z &= 30 \\ 5y + 3z &= 30 \end{aligned}$$

los planos correspondientes se intersectan en una línea, y en ese caso se trata de un sistema de dos ecuaciones con tres variables que tiene infinitas soluciones.

La solución de un sistema de ecuaciones lineales con tres variables como respuesta a la solución de un problema de un contexto físico o geométrico.

Un sistema de ecuaciones se puede interpretar como el conjunto de ecuaciones lineales que sintetiza la aplicación de leyes físicas para la solución de problemas de contexto físico o bien como el conjunto de ecuaciones que resume en lenguaje algebraico las condiciones matemáticas o geométricas impuestas en el proceso de solución de problemas de contexto matemático. En ambos casos, el sistema de ecuaciones representa el modelo matemático que nos permitirá resolver el problema. A manera de ejemplo se presenta la solución del siguiente problema de contexto matemático.

<u>Ejemplo</u>. Seleccionando un sistema de coordenadas cuyo origen es el vértice A ubicado en la base de la pirámide de la figura 24, obtener la ecuación del plano correspondiente a la cara triangular BCE.

Solución.

Observando la figura 24, las coordenadas de los vértices son A(0,0,0), B(6,0,0), C(6,6,0), D(0,6,0), E(3,3,5).

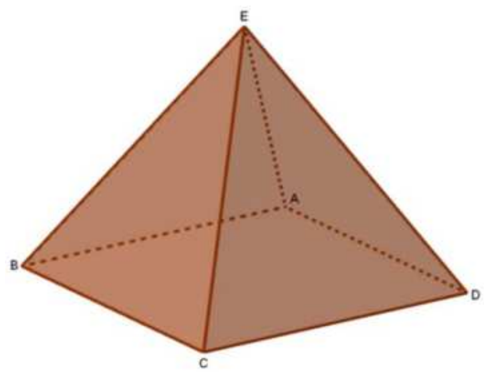


Figura 24. Pirámide de base cuadrada de lado igual a 6 y altura igual a 5

Para obtener la ecuación del plano, se utiliza la forma general de la ecuación de un plano $ax + by + cz = d$, donde $d = 0$ si el plano pasa por el origen.

Así, para la cara correspondiente al triángulo BCE, los puntos B, C, E pertenecen al plano, y estas coordenadas deben verificar la ecuación general, sustituyendo las coordenadas, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a(6) + b(0) + c(0) = d$$
$$a(6) + b(6) + c(0) = d$$
$$a(3) + b(3) + c(5) = d$$

Resolviendo el sistema usando Gauss-Jordan considerando que las variables son a, b, c, la matriz de coeficientes aumentada es

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & d \\ 6 & 6 & 0 & d \\ 3 & 3 & 5 & d \end{bmatrix}$$

Y cuya forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d/10 \end{bmatrix}$$

El sistema equivalente que se obtiene es

$$a = d/6$$

$$b \quad = 0$$

$$c = d/10$$

Sustituyendo en la ecuación general

$$\frac{d}{6}x + 0y + \frac{d}{10}z = d$$

Multiplicando por 30 y dividiendo entre d la ecuación anterior, se obtiene la ecuación del plano correspondiente a la cara BCE.

$$5x + 0y + 3z = 30$$

Ejemplo. Usando la ecuación general de las cónicas, obtener la ecuación de la parábola con eje de simetría paralelo al eje vertical, y que pasa por los puntos

$$P(-15, 10),\ \ Q(0, 14),\ \ R(15,10)$$

Solución:

Ecuación general de las cónicas.

$$\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \qquad (15)$$

En dónde *A, B, C, D, E, y F* son constantes.

Según se ha visto, si la ecuación es de una circunferencia, o los ejes de simetría de las tres cónicas restantes son paralelos a los ejes cartesianos, la ecuación carece del termino en xy, y recíprocamente. En este caso, si:

I. $A = C,$ la ecuación (15) representa una circunferencia.
II. $A = 0,$ o bien $C = 0,$ (15) es la ecuación de una parábola.
III. $A\ y\ C$ son de signos contrarios, (15) es la ecuación de una hipérbola.

Resolviendo en y la ecuación (15), se obtiene:

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BE - 2CD)x + E^2 - 4CF}$$

La naturaleza de la curva depende del coeficiente que tiene el termino x^2 en el radicando, o sea, depende del valor de $B^2 - 4AC$, magnitud llamada discriminante de la ecuación. Si:

1. $B^2 - 4AC = 0$, la cónica es del género parábola;
2. $B^2 - 4AC < 0$, la cónica es del género elipse;
3. $B^2 - 4AC > 0$, la cónica es del género hipérbola.

Cuando se trata de una parábola con eje paralelo al eje vertical, $B = C = 0$, entonces la ecuación anterior se modifica a

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ahora, sustituyendo las coordenadas de P nos queda

$$A(-15)^2 + D(-15) + E(10) + F = 0$$

$$325A - 15D + 10E + F = 0 \qquad (16)$$

Sustituyendo las coordenadas de Q

$$A(0)^2 + D(0) + E(14) + F = 0$$

$$14E + F = 0 \qquad (17)$$

Sustituyendo las coordenadas de R

$$A(15)^2 + D(15) + E(10) + F = 0$$

$$325A + 15D + 10E + F = 0 \qquad (18)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (16), (17) y (18)

$$325A - 15D + 10E + F = 0$$

$$14E + F = 0$$

$$325A + 15D + 10E + F = 0$$

De la matriz de coeficientes aumentada del sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 325 & -15 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 0 \\ 325 & 15 & 10 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Usando el método de Gauss-Jordan se obtiene

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{2275} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14} & 0 \end{array}\right]$$

Cuyo sistema equivalente es

$$A + \frac{2}{2275}F = 0$$

$$D = 0$$

$$E + \frac{1}{14}F = 0$$

De donde se concluye que el sistema tiene infinitas soluciones y hay que suponer un valor arbitrario para alguna variable y resolver para las restantes. Suponiendo el valor arbitrario para la variable $F = a$, la solución general del sistema es

$$A = -\frac{2}{2275}a$$

$$D = 0$$

$$E = -\frac{1}{14}a$$

$$F = a$$

La parábola de coeficiente igual a 1 para y se obtiene haciendo

$$F = a = -14$$

Y sustituyendo este valor supuesto se obtiene

$$A = -\frac{2}{2275}(-14) = \frac{4}{325}$$

$$D = 0$$

$$E = -\frac{1}{14}(-14) = 1$$

De esta forma la ecuación de la parábola es:

$$\frac{4}{325}x^2 + y - 14 = 0 \qquad (19)$$

Escribiendo la ecuación (19) en la forma explícita de *y* en términos de *x*.

$$y = -\frac{4}{325}x^2 + 14$$

4.3.3 Descripción de los objetos propuestos a construir y un posible proceso de construcción

Descripción del primer objeto

El primer objeto a construir de este tema, con materiales propios para elaboración de maquetas, es un icosaedro que mide 9 cm en sus aristas y que tiene todas sus caras lisas y planas, de tal manera que sea posible establecer un sistema de coordenadas para definir todas las coordenadas de sus vértices y considerar que cada una de sus caras es una porción triangular de un plano en el espacio y sea posible con los datos de estas coordenadas obtener la ecuación correspondiente.

En las actividades de esta práctica se seleccionan grupos de caras que se intersectan en un punto, en una línea recta, o que no se intersectan y se forman diferentes sistemas de ecuaciones para demostrar algebraicamente que la solución que se obtiene al resolverlos corresponde con lo que se observa y comprueba físicamente.

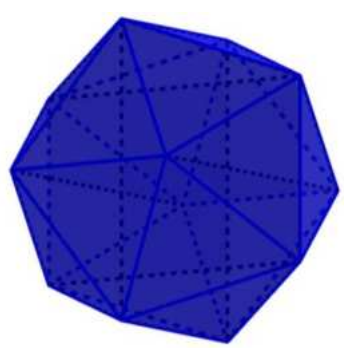


Figura 25. Icosaedro formado por triángulos de 9 cm.

Descripción del segundo objeto

El segundo objeto a construir es la maqueta de un domo que mide 21.6 m de frente por 24.8 m de profundidad, cuyo techo está soportado por armaduras de contorno parabólico. En la construcción se usa una escala de 100 cm en el domo equivalentes a 1 cm con materiales propios para elaboración de maquetas y que pueden ser a elección del estudiante.

Para construir él objeto, es necesario determinar las ecuaciones de las parábolas que forman las armaduras, usando la ecuación general de las cónicas y mediante la formulación de un sistema de ecuaciones lineales cuya solución define los coeficientes de las ecuaciones de las parábolas correspondientes.

Los arcos parabólicos se aproximan a través de segmentos rectilíneos y una distribución simétrica y de secciones aproximadamente iguales, recomendada para una adecuada distribución de esfuerzos, se logra mediante la aplicación de conceptos matemáticos tales como; ecuación de una recta normal a una curva, distancia entre dos puntos, longitud de una curva. Aunque este último se aplica por medición directa sobre el dibujo a escala.

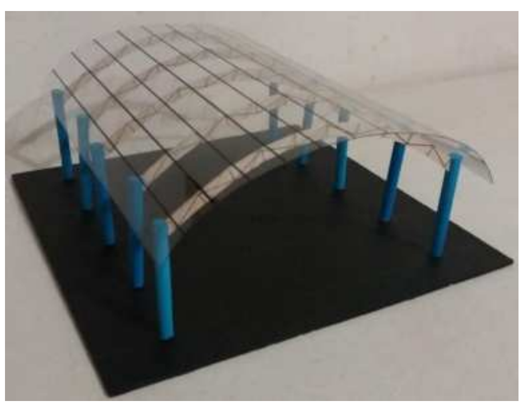


Figura 26. Fotografía de maqueta de arcos parabólicos.

4.3.4 Actividades propuestas y sus desarrollos para cada uno de objetos construidos

Para el primer objeto a construir.

PRÁCTICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

1) Construya un poliedro en forma de un icosaedro que mide 9 cm en sus aristas.

2) Seleccione el centro del poliedro como el origen de un sistema de referencia de coordenadas rectangulares y determine, usando este sistema y efectuando las mediciones de longitud necesarias, las coordenadas correspondientes a cada uno de los vértices.

3) Obtenga una ecuación para cinco de sus caras, que coincidan en un vértice común, considerando que corresponden a una parte triangular de un plano en el espacio.

4) Forme un sistema de ecuaciones lineales con las ecuaciones de las cinco caras, resuelva y verifique que la solución es única y esta corresponde con las coordenadas del vértice correspondiente.

5) Utilice un programa de cómputo para graficar cada una de las ecuaciones de las caras y verifique que las gráficas tienen un único punto en común y que este corresponde con la solución del sistema.

6) Forme un sistema de ecuaciones lineales con las ecuaciones de dos caras adyacentes, resuelva y verifique que el sistema tiene infinitas soluciones.

7) Escriba la solución general del sistema como un conjunto de ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio, donde el parámetro es la variable que se supone arbitraria en la solución general.

8) Utilice un programa de cómputo para graficar las ecuaciones paramétricas y verifique que la gráfica es una recta en el espacio y que está línea recta corresponde con la arista que se encuentra entre las dos caras adyacentes graficando los planos correspondientes.

9) Forme un sistema de ecuaciones lineales con las ecuaciones de dos caras adyacentes y una tercera cara que sea paralela alguna de estas, resuelva y verifique que el sistema no tiene solución.

10) Utilice un programa de cómputo para graficar las ecuaciones de los planos correspondientes a cada una de las caras de la actividad 9 y verifique que no hay puntos que se encuentren en los tres planos, es decir no hay solución.

Para el segundo objeto a construir.

PRÁCTICA DE CONSTRUCCIÓN DE ARCOS PARABÓLICOS

Construcción de arcos parabólicos usando aproximaciones con segmentos rectos.

Se desea construir la maqueta para un domo que mide 20 m de frente, por 24 m de fondo. Las columnas son circulares y miden 8 m de alto con 80 cm de diámetro. Realice los cálculos con las medidas reales en metros y después convierta a una escala de 100 cm de medida real en el domo equivalente a 1 cm en la maqueta. La figura 27, muestra las dimensiones del domo en metros y sus arcos de manera frontal.

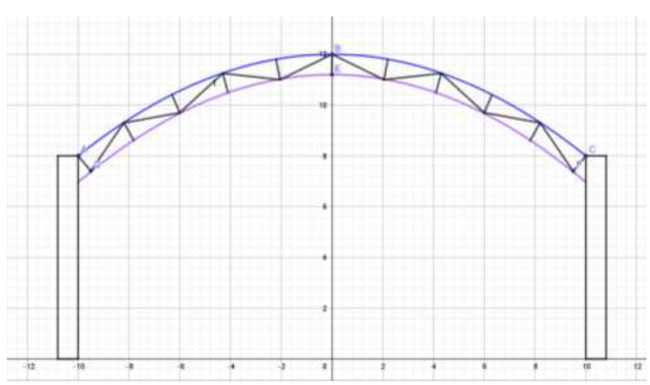


Figura 27. Arco parabólico de la vista frontal del domo.

1) Usando la forma general de las secciones cónicas y seleccionando un sistema de referencia cuyo origen sea el punto medio entre las columnas y ubicado en el piso, determinar la ecuación de la parábola superior de la figura 20, cuyo eje de simetría coincide con el eje vertical y que pasa por los puntos más altos de las columnas y del arco parabólico.

2) Usando el mismo sistema de referencia y con la ayuda de una tabla de coordenadas de los puntos, grafique sobre una hoja de papel milimétrico, de manera más precisa y de acuerdo a la escala dada, la ecuación de la parábola superior del punto número 1.

3) Utilice la ecuación de la parábola para hallar la pendiente de la recta normal a la misma en el punto A (-10,8). Con esta pendiente, obtenga la ecuación de la recta normal a la parábola en dicho punto.

4) La armadura mide 0.8 m entre las dos parábolas (0.8 en la maqueta), por lo que la parábola interna o de menor altura, pasa por el punto E (0, 11.2) y por los puntos D y F de la figura 20. Para hallar las coordenadas del punto D, se condiciona que la distancia del punto A (-10,8) al punto D sea igual al espaciamiento de 0.8 y se sustituye la ecuación de la normal del punto 3 en dicha ecuación, se resuelve y se obtienen dos valores para la incógnita, de las cuales se selecciona aquella que sea consistente con el contexto de la solución. Las coordenadas del punto F se obtienen por simetría.

5) Aplicando la ecuación de las cónicas, obtenga la ecuación de la parábola inferior que pasa por los puntos D, E, F.

6) En la misma hoja milimétrica de la gráfica de la parábola superior grafique la ecuación de la parábola inferior. Grafique también ambas ecuaciones usando el programa GEOGEBRA.

7) Mida la longitud de la parábola superior con un hilo delgado, de color claro, colocado cuidadosamente sobre el contorno de la parábola superior pasando por los puntos A, B, C, divida esta longitud en diez partes iguales, y marque con la ayuda de una regla graduada en cm, las distancias correspondientes en el hilo. Utilice a su vez, las marcas de las distancias en el hilo para marcar, al colocar nuevamente el hilo sobre la gráfica, las distancias correspondientes en la curva sobre la hoja de papel milimétrico. Repita todo el proceso de medición y marcado con la parábola inferior desde el punto D, pasando por E y terminando en F.

8) De izquierda a derecha, una los puntos correspondientes a las marcas del paso anterior con una línea recta y complete el dibujo de la armadura sobre la hoja de papel con trazos rectos como en la figura 20. Para determinar las coordenadas de los puntos D' y F' se sustituyen los valores -10 y 10 respectivamente, en la ecuación de la parábola inferior para hallar la altura de la intersección con las columnas. Con la lectura de coordenadas de los puntos de la armadura mediante la inspección del dibujo en la hoja milimétrica, trace la armadura en vista gráfica del programa GEOGEBRA.

9) Utilice el dibujo, en hoja de papel, de la armadura del paso anterior, como una plantilla que se coloca sobre un material más rígido como papel ilustración, o unicel, para recortar una pieza, aproximando la parte curva de la parábola con segmentos rectos entre los puntos que dividen a las parábolas en diez partes.

10) Repita el punto anterior hasta completar 5 armaduras. Construya las columnas con material a su elección, y con las dimensiones correctas de acuerdo a la escala dada. Complete la estructura del domo, colocando un par de columnas cada 6 m con su correspondiente armadura parabólica, pegue las columnas con las armaduras y finalmente coloque el techo usando de preferencia un material transparente.

4.3.5 Instrumentos de evaluación de la construcción de los objetos y de las actividades propuestas

RÚBRICA DE LA PRÁCTICA DE LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Criterios	Excelente	Notable	Bueno	Suficiente	Insuficiente	Puntos obtenidos
Construcción del icosaedro y medición de las coordenadas	Se documenta con fotografías la realización de las actividades 1 y 2. El poliedro que se presenta mide 9 cm en sus aristas y está correctamente **armado**, **pintado** y pegado de forma rígida. Se indica el sistema de coordenadas que se usa y las coordenadas de todos sus vértices son **correctas**. **20 puntos**	Se documenta con fotografías la realización de las actividades 1 y 2. El poliedro que se presenta mide 9 cm en sus aristas y está correctamente **armado** y pegado de forma rígida. Se indica el sistema de coordenadas que se usa y las coordenadas de todos sus vértices son **correctas**. **18 puntos**	Se documenta con fotografías la realización de las actividades 1 y 2. El poliedro que se presenta mide 9 cm en sus aristas y está correctamente **armado, pintado** y pegado de forma rígida. Se indica el sistema de coordenadas que se usa y se tiene **algún error** en las coordenadas de sus vértices. **16 puntos**	Se documenta con fotografías la realización de las actividades 1 y 2. El poliedro que se presenta mide 9 cm en sus aristas y está correctamente **armado** y pegado de forma rígida. Se indica el sistema de coordenadas que se usa y se tiene **algún error** en las coordenadas de sus vértices. **14 puntos**	No presenta el objeto a construir o no se cumple al menos con lo que se indica en la columna de suficiente. **0 puntos**	
Interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones con solución única.	El reporte escrito documenta la realización de las actividades 3 y 4. Los sistemas de tres ecuaciones usados para obtener los coeficientes de las ecuaciones de las cinco caras están correctos. **Todas** las ecuaciones de las cinco caras están correctas y la solución del sistema formado con estás cinco ecuaciones **coincide** con las coordenadas del vértice donde se intersectan las cinco caras. **20 puntos**	El reporte escrito documenta la realización de las actividades 3 y 4. Los sistemas de tres ecuaciones usados para obtener los coeficientes de las ecuaciones de las cinco caras están correctos. **Todas** las ecuaciones de las cinco caras están correctas y la solución del sistema formado con estás cinco ecuaciones **no coincide** con las coordenadas del vértice donde se intersectan las cinco caras. **18 puntos**	El reporte escrito documenta la realización de las actividades 3 y 4. Los sistemas de tres ecuaciones usados para obtener los coeficientes de las ecuaciones de las cinco caras están correctos. **Cuatro** de las ecuaciones de las cinco caras están correctas y la solución del sistema formado con estás cinco ecuaciones **no coincide** con las coordenadas del vértice donde se intersectan las cinco caras. **16 puntos**	El reporte escrito documenta la realización de las actividades 3 y 4. Los sistemas de tres ecuaciones usados para obtener los coeficientes de las ecuaciones de las cinco caras están correctos. **Tres** de las ecuaciones de las cinco caras están correctas y la solución del sistema formado con estás cinco ecuaciones **no coincide** con las coordenadas del vértice donde se intersectan las cinco caras. **14 puntos**	No se documenta la realización de alguna de las actividades 3 o 4, o no se cumple al menos con lo que se indica en la columna de suficiente. **0 puntos**	
Interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones.	Se documenta la realización de las actividades 6 y 7. Los sistemas de tres ecuaciones usados para obtener los coeficientes de las ecuaciones de las dos caras adyacentes están correctos. Las ecuaciones de las dos caras están correctas y la solución general del sistema formado con las ecuaciones de estas dos caras es correcta y se expresa **como** las ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio y **se especifica** el nombre del parámetro. **20 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 6 y 7. Los sistemas de tres ecuaciones usados para obtener los coeficientes de las ecuaciones de las dos caras adyacentes están correctos. Las ecuaciones de las dos caras están correctas y la solución general del sistema formado con las ecuaciones de estas dos caras es correcta y se expresa **como** las ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio pero **no se especifica** el nombre del parámetro. **18 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 6 y 7. Los sistemas de tres ecuaciones usados para obtener los coeficientes de las ecuaciones de las dos caras adyacentes están correctos. Las ecuaciones de las dos caras están correctas y la solución general del sistema formado con las ecuaciones de estas dos caras es correcta y se expresa de forma que **se observan** las ecuaciones paramétricas de la recta pero no de forma explícita. **16 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 6 y 7. Los sistemas de tres ecuaciones usados para obtener los coeficientes de las ecuaciones de las dos caras adyacentes están correctos. Las ecuaciones de las dos caras están correctas y la solución general del sistema formado con las ecuaciones de estas dos caras es correcta. **14 puntos**	No se documenta la realización de alguna de las actividades 6 o 7, o no se cumple al menos con lo que se indica en la columna de suficiente. **0 puntos**	

Interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones sin solución.	Se documenta la realización de la actividad 9. Los sistemas de tres ecuaciones usados para obtener los coeficientes de las ecuaciones de las dos caras adyacentes y de la cara paralela están correctos. Las ecuaciones de las tres caras están correctas y **se incluye** el proceso de solución del sistema formado con las ecuaciones de estas caras y **se justifica** con argumentos válidos que el sistema no tiene solución. **20 puntos**	Se documenta la realización de la actividad 9. Los sistemas de tres ecuaciones usados para obtener los coeficientes de las ecuaciones de las dos caras adyacentes y de la cara paralela están correctos. Las ecuaciones de las tres caras están correctas y **se incluye** el proceso de solución del sistema formado con las ecuaciones de estas caras y **se justifica** con argumentos válidos que el sistema no tiene solución. **18 puntos**	Se documenta la realización de la actividad 9. Los sistemas de tres ecuaciones usados para obtener los coeficientes de las ecuaciones de las dos caras adyacentes y de la cara paralela están correctos. Las ecuaciones de las tres caras están correctas y **se incluye** el proceso de solución del sistema formado con las ecuaciones de estas caras y **se concluye** que el sistema no tiene solución. **16 puntos**	Se documenta la realización de la actividad 9. Los sistemas de tres ecuaciones usados para obtener los coeficientes de las ecuaciones de las dos caras adyacentes y de la cara paralela están correctos. Las ecuaciones de las tres caras están correctas y **no se incluye** el proceso de solución del sistema formado con las ecuaciones de estas caras pero **se concluye** que el sistema no tiene solución. **14 puntos**	No se documenta la realización de la actividad 9, o no se cumple al menos con lo que se indica en la columna de suficiente. **0 puntos**	
Uso de SAC (GEOGEBRA).	Se documenta con imágenes de GEOGEBRA la realización de las actividades 5, 8 y 10. La gráfica de la actividad 5 muestra **claramente** que hay un solo punto de intersección. En la gráfica de la actividad 8, los planos se intersectan en una recta que corresponde con la arista entre las caras y **coincide** con la gráfica de las ecuaciones paramétricas de la solución general. En la gráfica de la actividad 10, usando **etiquetas**, se muestra **claramente** que no hay puntos que pertenezcan a los tres planos. **20 puntos**	Se documenta con imágenes de GEOGEBRA la realización de las actividades 5, 8 y 10. La gráfica de la actividad 5 muestra **claramente** que hay un solo punto de intersección. En la gráfica de la actividad 8, los planos se intersectan en una recta que corresponde con la arista entre las caras y **coincide** con la gráfica de las ecuaciones paramétricas de la solución general. La gráfica de la actividad 10 **muestra** que no hay puntos que pertenezcan a los tres planos. **18 puntos**	Se documenta con imágenes de GEOGEBRA la realización de las actividades 5, 8 y 10. La gráfica de la actividad 5 **muestra** que hay un solo punto de intersección. En la gráfica de la actividad 8, los planos se intersectan en una recta que corresponde con la arista entre las caras y **coincide** con la gráfica de las ecuaciones paramétricas de la solución general. La gráfica de la actividad 10 **muestra** que no hay puntos que pertenezcan a los tres planos. **16 puntos**	Se documenta con imágenes de GEOGEBRA la realización de las actividades 5, 8 y 10. La gráfica de la actividad 5 **muestra** que hay un solo punto de intersección. En la gráfica de la actividad 8, los planos se intersectan en una recta que corresponde con la arista entre las caras y **no coincide** con la gráfica de las ecuaciones paramétricas de la solución general. La gráfica de la actividad 10 **muestra** que no hay puntos que pertenezcan a los tres planos. **14 puntos**	No documenta la realización de alguna de las actividades 5, 8 y 10, o no se cumple al menos con lo que se indica en la columna de suficiente. **0 puntos**	
Total puntos obtenidos EQUIPO No. _____ INTEGRANTES: ______________________________ ______________________________ OBSERVACIONES: ______________________________ ______________________________						

RÚBRICA PARA EVALUAR LA PRÁCTICA DE CONSTRUCCION DE LA MAQUETA DEL DOMO CON ARCOS PARABÓLICOS

Criterios	Excelente	Notable	Bueno	Suficiente	Insuficiente	Puntos obtenidos
Obtención de la ecuación de la parábola superior y de la	El reporte documenta la realización de la actividad 1 y 3. El sistema de ecuaciones del	El reporte documenta la realización de la actividad 1 y 3. El sistema de ecuaciones del modelo y la ecuación	El reporte documenta la realización de la actividad 1 y 3. El sistema de ecuaciones	El reporte documenta la realización de la actividad 1 y 3. El sistema de ecuaciones	No documenta la realización de alguna o de	

recta normal en un extremo.	modelo y la ecuación de la parábola están correctos. La pendiente de la recta tangente y la normal, en un extremo, y su correspondiente ecuación están correctas. **20 puntos**	de la parábola están correctos. La pendiente de la recta tangente y la normal, en un extremo, es correcta pero la ecuación de la recta normal es incorrecta. **18 puntos**	del modelo y la ecuación de la parábola están correctos. La pendiente de la recta tangente es correcta pero la de la recta normal, en un extremo, es incorrecta. **16 puntos**	del modelo matemático y la ecuación de la parábola están correctos. **14 puntos**	ambas actividades 1 y 3 o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Obtención de la ecuación de la parábola inferior de la armadura.	El reporte documenta la realización de las actividades 4 y 5. Se incluye el **cálculo completo y correcto** de las coordenadas de la parábola inferior que están situados a 0.8 m de la parábola superior medidos sobre las rectas normales en los extremos. El sistema de ecuaciones del modelo y la ecuación de parábola inferior están correctos. **20 puntos**	El reporte documenta la realización de las actividades 4 y 5. Se incluye el **cálculo** de las coordenadas de la parábola inferior que están situados a 0.8 m de la parábola superior medidos sobre las rectas normales en los extremos. El sistema de ecuaciones del modelo y la ecuación de parábola inferior están correctos. **18 puntos**	El reporte documenta la realización de las actividades 4 y 5. Se incluye algún proceso para **estimar** las coordenadas de la parábola inferior que están situados a 0.8 m de la parábola superior medidos sobre las rectas normales en los extremos. El sistema de ecuaciones del modelo y la ecuación de parábola inferior están correctos. **16 puntos**	El reporte documenta la realización de las actividades 4 y 5. El sistema de ecuaciones del modelo y la ecuación de parábola inferior están **correctos** y acordes a los datos usados. **14 puntos**	No documenta la realización de alguna o de ambas actividades 4 y 5 o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Trazado de las gráficas de las parábolas en hojas milimétricas.	Se documenta la realización de las actividades 2 y 6. Las gráficas se trazan manualmente en hoja milimétrica y se **incluye la tabla** de los puntos que se representan para trazarlas. Además se usaron suficientes puntos y ambas curvas de las gráficas son continuas, bien definidas, y del tamaño y grueso de **línea adecuado** a una escala que se indica en el dibujo. **20 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 2 y 6. Las gráficas se trazan manualmente en hoja milimétrica y se **incluye la tabla** de los puntos que se representan para trazarlas. Además se usaron suficientes puntos y ambas curvas de las gráficas son continuas, bien definidas, pero de un tamaño pequeño en proporción al de la hoja o de un grosor de línea **inadecuado** debido a la escala del dibujo. **18 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 2 y 6. Las gráficas se trazan manualmente en hoja milimétrica usando suficientes puntos y ambas curvas de las gráficas son continuas, bien definidas, y del tamaño y grueso de línea **adecuado** a una escala que se indica en el dibujo. **16 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 2 y 6. Las gráficas se trazan manualmente en hoja milimétrica usando suficientes puntos y ambas curvas de las gráficas son continuas, bien definidas, pero de un tamaño pequeño en proporción al de la hoja o de un grosor de línea **inadecuado** debido a la escala del dibujo. **14 puntos**	No documenta la realización de alguna o de ambas actividades 2 y 6 o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	

División de los arcos en partes iguales y dibujo manual de la plantilla para construir las armaduras y su réplica hecha con GEOGEBRA.	Se documenta con imágenes la realización de las actividades 7, 8 y 9. Se incluyen; la división **de los dos** arcos en 10 partes iguales, el dibujo de la plantilla de la armadura en hoja milimétrica con las **medidas correctas** y el **proceso** de construcción de una armadura usando la plantilla. También se incluye la vista gráfica del GEOGEBRA con el dibujo de la armadura con segmentos rectos. **20 puntos**	Se documenta con imágenes la realización de las actividades 7, 8 y 9. Se incluyen; la división **de uno de** dos arcos en 10 partes iguales, el dibujo de la plantilla de la armadura en hoja milimétrica con las **medidas correctas** y el **proceso** de construcción de una armadura usando la plantilla. También se incluye la vista gráfica del GEOGEBRA con el dibujo de la armadura con segmentos rectos. **18 puntos**	Se documenta con imágenes la realización de las actividades 7, 8 y 9. Se incluyen; los **resultados de la división** de los arcos en partes iguales, el dibujo de la plantilla de la armadura en hoja milimétrica con las **medidas correctas** y el **proceso** de construcción de una armadura usando la plantilla. También se incluye la vista gráfica del GEOGEBRA con el dibujo de la armadura con segmentos rectos. **16 puntos**	Se documenta con imágenes la realización de las actividades 7, 8 y 9. Se incluyen; los **resultados de la división** de los arcos en partes iguales, el dibujo de la plantilla de la armadura en hoja milimétrica con las **medidas aproximadamente** correctas y la imagen de una **armadura** construida correctamente. También se incluye la vista gráfica del GEOGEBRA con el dibujo de la armadura con segmentos rectos. **14 puntos**	No se documenta la realización de alguna de las actividades 7, 8 y 9, o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Construcción de la maqueta del domo de arcos parabólicos.	La maqueta del domo construido cumple con todas las especificaciones de la actividad 10. Está correctamente armado y pegado de manera rígida con las dimensiones correctas de acuerdo a la escala que se usa. El techo es transparente y se observan en forma clara las 5 armaduras parabólicas. Las columnas están bien pintadas y la maqueta está montada también en una base pintada. **20 puntos**	La maqueta del domo construido cumple con todas las especificaciones de la actividad 10. Está correctamente armado y pegado de manera rígida con las dimensiones correctas de acuerdo a la escala que se usa. El techo es transparente y se observan en forma clara las 5 armaduras parabólicas. **18 puntos**	La maqueta del domo construido cumple con todas las especificaciones de la actividad 10. Está correctamente armado y pegado de manera rígida con las dimensiones correctas de acuerdo a la escala que se usa. El techo **no es transparente** pero se observan bien las 5 armaduras parabólicas. **16 puntos**	La maqueta del domo construido cumple con todas las especificaciones de la actividad 10. Está correctamente armado y pegado de manera rígida con las dimensiones correctas de acuerdo a la escala que se usa y está montada sobre una base. **14 puntos**	No se presenta físicamente la maqueta del domo para su evaluación o no se documenta con la fotografía de la maqueta, o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Total puntos obtenidos EQUIPO No. _____INTEGRANTES: ______________________________ ______________________________ OBSERVACIONES: ______________________________ ______________________________						

4.3.6 Aportaciones de las actividades, asociadas a las actividades de la práctica, al alcance de las competencias.

Para el primer objeto a construir.

Análisis de las aportaciones de las actividades propuestas con la representación semiótica de la solución de un sistema de ecuaciones con tres variables como el punto de intersección, la recta de intersección, o la ausencia de puntos comunes de intersección de planos en el espacio.

- En la actividad 1 se construye un icosaedro que mide 9 cm en sus aristas que se usa en el desarrollo de la práctica para vincular la representación semiótica del concepto *solución* de un sistema de ecuaciones a este objeto físico. Además, su construcción propicia el desarrollo de habilidades constructivas de objetos e introduce elementos de creatividad.

- En la actividad 2, se establece físicamente el sistema de coordenadas, necesario para vincular el objeto físico con la solución de sistemas de ecuaciones, siendo está una actividad que combinada con las dos siguientes aporta a los indicadores de alcance relativos a la interpretación geométrica y clasificación de ecuaciones de ecuaciones de acuerdo a su solución.

- En la actividad 3, para obtener las ecuaciones de cada una de las cinco caras que se solicitan, el estudiante debe plantear primero un sistema de ecuaciones que verifica las condiciones matemáticas impuestas por las coordenadas de tres vértices y luego aplicar correctamente un método de solución para obtener los coeficientes de las variables en la ecuación del plano, aportando así al alcance de los indicadores relativos a la solución de problemas de aplicación y a la aplicación de diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones.

- En la actividad 4, al formar un sistema de ecuaciones con las ecuaciones de las caras y resolverlo, se aporta a los indicadores señalados en la actividad 3. Además, se verifica físicamente que el sistema tiene solución única y corresponde con el vértice de unión de las cinco caras, y en el contexto hasta es posible tocar la *solución* aportando así también al indicador de la interpretación geométrica de la solución.

- En la actividad 5, al graficar con un programa de cómputo cada una de los ecuaciones correspondientes a las cinco caras también se comprueba gráficamente que el sistema tiene solución única y se aporta al desarrollo de la competencia genérica relativa a la habilidad en el uso de un SAC tanto para graficar como para resolver con las funciones propias del programa.

- La actividad 6, solicita resolver un sistema de ecuaciones formado solo con dos ecuaciones de un par de caras adyacentes, pero con tres variables y se trata de un caso que tiene infinitas soluciones, por lo que su realización aporta al indicador relativo a la aplicación del método adecuado para resolverlo.

- En las actividades 7 y 8, se identifica y grafica la solución general del sistema de la actividad anterior como un conjunto de ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio, relacionando así diferentes conceptos matemáticos. Además, con la gráfica hecha con el programa y físicamente también se comprueba que la solución corresponde con la arista que une las dos caras adyacentes, aportando así, al indicador relativo a la interpretación geométrica de la solución en sus diferentes casos y al desarrollo de la competencia genérica relativa al uso de SAC.

- En las actividades 9 y 10, el sistema que se propone formar y resolver con las dos caras adyacentes y una tercera paralela corresponde a un caso que no tiene solución, hecho que se comprueba con la gráfica del programa y físicamente, con la realización de las mismas, aportando de este modo a todos los indicadores de alcance mencionados anteriormente incluyendo al desarrollo de la competencia genérica relativa al uso de SAC.

Para el segundo objeto a construir.

Análisis de las aportaciones de las actividades propuestas con la representación semiótica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales como respuesta a la solución de un problema de contexto matemático.

- La actividad 1 introduce a la representación semiótica de la solución de un sistema de ecuaciones como respuesta a la solución de un problema de contexto matemático a través de la formulación de un sistema de ecuaciones que resume las condiciones matemáticas impuestas a la parábola superior de la armadura que tiene que pasar por A, B, C de la figura 19.

- La actividad 2 usa la representación de la ecuación parábola como la gráfica de una curva en un plano, complementando la utilidad de diferentes representaciones semióticas de diferentes conceptos en el proceso de solución del problema de contexto matemático.

- En las actividades 3, 4 y 5 se aplican otros conceptos como; la recta normal a una curva con sus diferentes representaciones como ecuación y gráfica de la misma, distancia entre dos puntos, solución de una ecuación de segundo grado de una sola incógnita, cuya respuesta correcta se elige acorde al contexto del problema. Ampliando de esta manera la gama de conceptos involucrados en el proceso e introduciendo aspectos de contextualización en la solución de problemas.

- La actividad 6 introduce el uso del programa GEOGEBRA para hacer la réplica de la figura 20 de la vista frontal del domo, aportando al desarrollo de competencias relativas al uso de SAC.

- Las actividades 7 y 8 aportan al proceso el uso de la gráfica hecha a escala adecuada para medir de manera directa la longitud de las curvas y distribuir de manera simétrica y hacer aproximadamente iguales las 10 secciones de la armadura, por lo que se utilizan habilidades de precisión y exactitud en la medición física de la armadura, hecha a escala, ampliando los recursos utilizados en el proceso de construcción de la aproximación con segmentos rectos de los arcos parabólicos.

- En la actividad 9 se inicia el proceso para pasar del diseño de la armadura en la hoja de papel milimétrico a escala adecuada, a la construcción física de la maqueta del domo aportando al desarrollo de competencias requeridas para transitar del diseño a la construcción de objetos.

- En la actividad 10 se concluye la construcción de la maqueta y permite apreciar y evaluar si la maqueta a escala corresponde a la realidad que se espera del domo. Es decir es la conclusión de todo un proceso, donde se transita de la idea, al diseño aplicando conceptos matemáticos, pasando por la construcción del objeto mismo que se diseña a escala, aportando de esta manera a la competencia específica del tema.

4.4 Dos objetos a construir, fundamentos y actividades para el tema de espacios vectoriales

4.4.1 Competencias específicas y genéricas

Competencia específica del tema espacios vectoriales

Comprende la definición de espacio vectorial como una abstracción para relacionarlo con otras áreas de las matemáticas.

Competencias genéricas asociadas al tema

- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis.
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.

- Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente.
- Capacidad de trabajo en equipo.
- Habilidades básicas en el uso de la computadora (uso de Sistemas Algebraicos Computarizados SAC).

***Indicadores de alcance de las competencias*.**

La siguiente tabla contiene una propuesta de indicadores que el estudiante debe alcanzar de manera gradual en su proceso de construcción del conocimiento necesario para alcanzar la competencia específica.

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A) Analiza el cumplimiento de los axiomas de la suma de vectores y multiplicación por un escalar para determinar si un conjunto es un espacio vectorial o en su caso, si se trata de un subespacio vectorial.	20 %
B) Expresa un vector de un espacio como una combinación lineal de un grupo de vectores y evalúa si un conjunto de vectores de un espacio vectorial es una base.	20 %
C) Aplica conceptos de temas anteriores y los de este tema para obtener o en su caso, seleccionar una base para un espacio vectorial y lo clasifica por su dimensión.	20 %
D) Aplica el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para obtener bases ortonormales.	20 %
E) Resuelve problemas de aplicación de los espacios vectoriales con producto interno.	20 %

Tabla 9. Indicadores de alcance de las competencias del tema espacios vectoriales.

4.4.2 Fundamentos teóricos.

Al igual que los fundamentos de los temas anteriores esta sección se incluye por lo expuesto con anterioridad. Sin embargo, en este caso, hay que resaltar que, el tema en la literatura se trata con diferentes niveles de abstracción y complejidad, por lo que se consideró necesario hacer más extenso el contenido con el fin de incluir la teoría relativa al tema y necesario para realizar las actividades.

Definición de espacios vectoriales y sus propiedades (Grossman, 2007).

Un espacio vectorial V. Es un conjunto de *objetos* matemáticos, llamados *vectores*, junto con la definición de las reglas para efectuar las siguientes dos operaciones; la operación de *suma* de dos de los vectores del conjunto (dos objetos matemáticos), y la operación de *multiplicación* de un escalar por un vector del conjunto (un número por uno de los objetos matemáticos). Las reglas para hacer estas dos operaciones deben verificar las siguientes diez propiedades (también se conocen como axiomas), de las cuales las primeras cinco involucran solo la operación de suma y las restantes incluyen a la operación de la multiplicación por un escalar y en algunos casos ambas operaciones.

1) Si $\boldsymbol{x} \in V$ y $\boldsymbol{y} \in V$**,** entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$
2) Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, entonces $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$
3) Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
4) Si $\boldsymbol{x} \in V$, existe un vector $-\boldsymbol{x} \in V$ tal que $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$
5) Si $\boldsymbol{x} \in V$ y $\boldsymbol{y} \in V$**,** entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
6) Si $\boldsymbol{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\boldsymbol{x} \in V$
7) $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{y}$
8) Si α y β son escalares $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
9) Si α y β son escalares $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$
10) Para cada vector $\boldsymbol{x} \in V$, $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

En estas propiedades es importante observar que, el símbolo V, se usa para nombrar a todo el conjunto (espacio vectorial), mientras que las letras minúsculas en *negritas* tales como **x**, **y**, **z** se usan para nombrar a los *elementos* específicos del conjunto (espacio vectorial). En la literatura del tema, hay autores que prefieren utilizar **u**, **v**, **w** en lugar de **x**, **y**, **z**, o bien la notación de la flecha por encima de la letra $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Independientemente de la notación empleada para el vector, en el contexto del tema, el término vector se usa para *nombrar* a cualquiera de los objetos matemáticos que a continuación se describen.

Vectores de 2, 3, …, n componentes.

El enfoque analítico del estudio de vectores define a un vector como una colección en *n-adas* de números reales. Es decir, si la colección es de 2 números la *n-ada* es una pareja, si es de 3 la *n-ada* es una terna. Si es de 4 es un cuarteto y así sucesivamente. La palabra colección implica más de un número real, aunque se admite como caso especial cuando la llamada colección está compuesta por un solo número real.

De acuerdo a la definición anterior (3, 5) es un vector de 2 componentes la primera componente es el número real 3, y la segunda componente es el número real 5. También es cierto que (3,5) son las coordenadas de un punto en el plano cartesiano, y podría causar alguna confusión al respecto, sin embargo, finalmente es el contexto matemático lo que determina si esta pareja de números reales debe ser considerada como vector o como las coordenadas de un punto en el plano.

De manera convencional en la literatura del tema, se usa una letra en negritas para nombrar o hacer referencia a un vector, así, si escribimos $\boldsymbol{a} = (3{,}5)$, esto significa que $\boldsymbol{a}$ es un vector de dos componentes. De manera semejante un vector $\boldsymbol{b}$ de tres componentes se define con una terna de números $\boldsymbol{b} = (5, 4, 6)$, un vector $\boldsymbol{c}$ de cuatro componentes con un cuarteto de números $\boldsymbol{c} = (2, 4, -5, 8)$ y de manera general un vector $\boldsymbol{x}$ de n componentes se define con $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. También sabemos que una matriz puede tener una única fila o una sola columna y que en tales casos a estas se les denomina vector fila y vector columna respectivamente, de manera que también se admite especificar un vector con un vector columna o fila, así por ejemplo:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{v} = [3 \quad 5 \quad -8] \; , \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

El vector $\boldsymbol{u}$ se define como un vector columna y $\boldsymbol{v}$ como un vector fila, ambos de tres componentes.

Matrices de orden $\boldsymbol{m \times n}$ como vectores en este contexto de espacios vectoriales.

En el contexto del tema de espacios vectoriales, también se les denomina a las matrices que tienen más de una fila o columna con el término *vector*, y esta idea, se explica considerando que una matriz de orden $m \times n$, tiene m renglones y n columnas, entonces la matriz es una colección de m renglones y cada uno de estos a su vez sería tan solo un elemento de dicha colección, así el primer renglón, es la primera componente y así sucesivamente , de manera que la matriz se considera como un vector de *m* renglones cuyos elementos o componentes son por sí mismos vectores de *n* componentes porque cada renglón tiene *n* columnas.

Debe notarse que esta interpretación de una matriz como un vector de vectores, implica que la colección que menciona la definición de un vector se debe ampliar para que dicha colección no solamente sea de números en *n-adas* sino que sean de objetos matemáticos como en la matriz de orden $m \times n$. Por ejemplo la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Es de orden 2 x 3 y es un vector de dos componentes (renglones) donde cada una de estas componentes es por sí mismo un vector de tres componentes (columnas).

Una función como vector en el contexto del tema de espacios vectoriales.

Una función establece una correspondencia entre los elementos de un primer conjunto y los elementos de un segundo conjunto, y del estudio del concepto sabemos que una función se puede definir, con una expresión matemática o en forma de una tabla de valores para establecer la correspondencia, así por ejemplo.

$f(x) = x^2$ para $x = 1,2, \dots, 5$ define una función con una expresión matemática, y otra manera de definir la misma función es con la siguiente tabla

x	$f(x)$
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Tabla 10. Representación en forma de tabla de la función $f(x) = x^2$

Ahora bien, si consideramos que el valor de la variable x corresponde con el número de la componente y el valor de la función como el valor correspondiente a tal componente, entonces la función de este ejemplo se puede considerar como un *vector* de 5 componentes cuyos valores respectivos son los de la función al evaluarse. Es decir hemos usado el valor de la variable para enumerar y hacer referencia de que componente se trata y el valor de la función es el valor de dicha componente. Para extender esta idea para el caso de funciones cuyo dominio sea un conjunto infinito de números reales, solo es necesario conservar el hecho de que la variable independiente x se usa para designar al número de componente y admitir que podemos enumerar la componente con un número real, incluso negativo, aunque parezca un poco raro hablar de la componente 1.1 o de la componente -2.3 por ejemplo, y no únicamente con valores enteros positivos, y concluir que en tal caso el vector tendría una cantidad infinita de componentes, así por ejemplo la función

$$f(x) = x^3$$

Tiene por dominio al conjunto de números reales, por lo que se trata de un *vector* con una *cantidad infinita de componentes* enumeradas en el intervalo continuo desde $(-\infty, \infty)$. Aún en los casos de funciones que tengan un dominio acotado, por ejemplo el intervalo (2, 4), la función tendrá una cantidad infinita de componentes porque entre el 2 y el 4 hay una cantidad infinita de números reales.

De la explicación anterior se concluye entonces que en el contexto del tema, el término *vector* tiene un *significado amplio* y se usa para hacer referencia a cualquiera de los *tres* vectores (objetos matemáticos) que se han tratado en los párrafos anteriores, incluso otros diferentes a los ya que se explicaron, por citar un ejemplo podemos tener un vector columna donde cada elemento del mismo sea una función (otro tipo de vector).

Conservando la idea de que un vector es una colección de objetos matemáticos, donde a su vez cada objeto matemático es otra colección de otro tipo de objetos matemáticos, es posible con la aplicación recurrente de la misma idea en esta forma anidada obtener una gama de vectores mucho más amplia, que va más allá de la intención de introducir al tema de espacios vectoriales, pero muy interesante al reflexionar sobre esta posibilidad.

Identificación de un conjunto dado como un espacio vectorial.

El primer tipo de ejercicio en el estudio del tema consiste en determinar *si* un *conjunto* dado con *sus respectivas reglas*, sea que se den explícitamente o implícitamente, para realizar la suma de sus elementos (vectores) y la multiplicación de uno de ellos (un vector) por un escalar *es* o *no* un *espacio vectorial*. La forma implícita es cuando no se precisan las reglas pero se usan las llamadas reglas habituales conocidas para estas operaciones de acuerdo al tipo de elemento.

En estos tipos de ejercicios hay que considerar que un conjunto dado se puede especificar de varias maneras, pero un elemento clave para resolver este tipo de problemas es primero identificar correctamente cuales son los elementos del conjunto a examinar, de manera que estemos en condiciones de especificar o seleccionar algunos de ellos. Una vez que seleccionamos o calculamos algunos elementos, lo que resta es simplemente verificar si haciendo usando de estos vectores en las propiedades, estas se cumplen *todas,* en ese caso el conjunto dado *es un espacio vectorial*, en caso contrario, con una propiedad que no se cumpla ya no es necesario verificar las demás y se concluye que *no es un espacio vectorial*.

<u>Ejemplo</u>. Determinar si conjunto de todas las matrices de orden 2 x 2 con componentes reales, denotado por $M_{2\times 2}$, con la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales, es un espacio vectorial.

Solución.

Conjunto dado a examinar (V).

En este caso se usa una *descripción verbal* para especificar al conjunto, el cual según el texto del problema es el conjunto de todas las matrices de 2 x 2 con componentes reales, que a su vez de manera convencional se denota con una letra *m* en mayúscula con dos subíndices que indican el orden ($M_{2\times 2}$). De este modo los elementos del conjunto a examinar o vectores del conjunto dado son matrices de 2 x 2.

Reglas de operación a utilizar.

En este caso, el enunciado del problema indica que se usen las *usuales* para el tipo de vector del conjunto dado, o sea las operaciones de suma de matrices y multiplicación de un escalar por una matriz.

Vectores a utilizar en el proceso de verificación de las propiedades o axiomas.

En este ejemplo, directamente de la descripción verbal del conjunto a examinar es posible proponer o definir los vectores a utilizar en las operaciones involucradas en las propiedades.

<u>Verificación del axioma 1 (cerradura bajo la suma).</u>

Si $\boldsymbol{x} \in V$ y $\boldsymbol{y} \in V$ **,** entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$

De manera directa proponemos como un vector o elemento del conjunto a examinar

Sea $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ un elemento que pertenece al conjunto que se examina. Es decir como en este caso el conjunto a examinar es $M_{2\times 2}$, $\boldsymbol{x} \in V$ equivale a escribir $\boldsymbol{x} \in M_{2\times 2}$. De manera semejante proponemos otro vector (otra matriz) del conjunto, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$, por lo que $\boldsymbol{y} \in V$ es equivalente a escribir $\boldsymbol{y} \in M_{2\times 2}$.

Una vez que se proponen los vectores anteriores, para verificar si se cumple o no la propiedad, debemos hacer la suma

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

y analizar si el vector que resulta, este es un vector (matriz) que se encuentra en el conjunto que se examina. Para hacer la suma se debe usar la regla usual para sumar matrices según se indica, en este caso

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}$$

Debido a las reglas definidas para efectuar la suma de matrices del mismo orden, cuando se suman dos matrices se obtiene otra matriz exactamente del mismo orden y afirmamos en este caso entonces que

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M_{2\times 2}$$

Y se concluye que el *axioma (1) se cumple.*

Es necesario comentar que, algunos autores en lugar de usar vectores (matrices en este caso) con *valores numéricos* prefieren usar vectores (matrices en este ejemplo) definidas de manera general, es decir en el procedimiento anterior se usaría

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Como las matrices que se proponen inicialmente y que pertenecen al conjunto a examinar $\boldsymbol{x} \in M_{2\times 2}$ y $\boldsymbol{y} \in M_{2\times 2}$, entonces

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}$$

Así, el análisis sería más general, aunque la conclusión es la misma ya que dadas dos matrices de orden 2 x 2 cuyos elementos son números reales representados de manera general, la suma de ellas debido a la regla de la suma de matrices produce un resultado que es otra matriz, cuyos elementos se obtienen sumando dos números reales, y por las propiedades de los números reales, las suma de dos números reales arbitrarios, es también un número real. De este modo el resultado sigue siendo una matriz de 2 x 2 cuyos elementos son números reales y en consecuencia se verifica que $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in M_{2\times 2}$ y el axioma se cumple.

<u>Verificación de la propiedad 2</u>

Si $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in V$, entonces $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$

Para verificar está propiedad se requieren tres vectores del conjunto que se examina, de este modo se proponen los vectores $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ usados en la verificación del primer axioma y un tercer vector $\boldsymbol{z}$ **.**

Entonces de manera directa seleccionamos que los vectores (matrices) a utilizar son

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 8 & 7\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 10\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}6 & 4\\ -5 & 1\end{bmatrix}$$

Y sustituyendo estos vectores en la expresión de la propiedad 2, hacemos las operaciones en las dos secuencias de cálculo, la indicada del lado izquierdo y con la secuencia del lado derecho, y simplemente verificamos que si ambos resultados son iguales, la propiedad se cumple. En este caso con la regla para sumar matrices es claro que

$$\left(\begin{bmatrix}2 & 5\\8 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\4 & 10\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}6 & 4\\-5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\8 & 7\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}3 & -1\\4 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 4\\-5 & 1\end{bmatrix}\right)$$

Simplificando en el orden que se indica en ambos lados de la ecuación

$$\begin{bmatrix}5 & 4\\12 & 17\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 4\\-5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\8 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9 & 3\\-1 & 11\end{bmatrix}$$

Se obtiene

$$\begin{bmatrix}11 & 8\\7 & 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 8\\7 & 18\end{bmatrix}$$

Como ambos lados dieron el mismo resultado, la *propiedad (2) se cumple*.

Verificación de la propiedad 3

Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

Para verificar la propiedad 3, se *busca* entre los elementos del conjunto dado $M_{2\times 2}$, si existe una matriz cero, que verifique la propiedad, en este caso

La matriz cero o el vector cero es **0** **=** $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ es un elemento del conjunto que se examina y de manera clara, si se sustituye en la operación de suma señalada en la *propiedad (3)*, esta *se cumple* para cualquier matriz (vector) $\boldsymbol{x}$ que se sume con la matriz (vector) cero **0**.

Verificación de la propiedad 4

Si $\boldsymbol{x} \in V$, existe un vector $-\boldsymbol{x} \in V$ tal que $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$.

La verificación de la propiedad 4, se realiza observando que en el conjunto $M_{2\times 2}$, para toda matriz (vector)

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{bmatrix} \text{ , existe una matriz } -\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-x_{11} & -x_{12}\\-x_{21} & -x_{22}\end{bmatrix}$$

es decir, dada una matriz existe en el mismo conjunto de matrices $M_{2\times 2}$ otra matriz con los mismos números solo que con los signos opuestos a los elementos de la matriz original, por lo tanto la *propiedad (4) se cumple*.

Verificación de la propiedad 5

Si $\boldsymbol{x} \in V$ y $\boldsymbol{y} \in V$**,** entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.

Esta es la propiedad conmutativa de la suma de vectores, y podemos simplemente observar que, en nuestro conjunto a examinar, los vectores son matrices de 2x2 y concluir que la propiedad 5 se cumple, porque la suma de matrices con las reglas habituales verifica la propiedad conmutativa.

Verificación de la propiedad 6

Si $\boldsymbol{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\boldsymbol{x} \in V$.

Esta propiedad nos señala que si un vector del conjunto V, se multiplica por un escalar, el resultado de dicha operación, de acuerdo a la regla que se haya definido, debe seguir perteneciendo al mismo conjunto. Aquí es importante señalar que es necesario analizar si se cumple para un escalar positivo, negativo y cero.

Para verificar esta propiedad, consideremos un vector $\boldsymbol{x}$ (una matriz de orden 2×2) que pertenece al espacio vectorial V del conjunto de matrices de orden 2×2 denotado por $M_{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}$. Sea

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Y α un escalar que pertenece al conjunto de números reales R, entonces

$$\alpha\boldsymbol{x} = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Efectuando la operación usando la regla habitual para multiplicar un escalar por una matriz

$$\alpha\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}$$

Observando que la matriz que resulta es de orden 2×2 y que los elementos de la misma son todos números reales debido a que son productos de dos números reales y por las propiedades de los números reales el producto de dos números reales es también un número real y en consecuencia $\alpha\boldsymbol{x} \in M_{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}$ y *se cumple* la propiedad 6 para todo número real, positivo, negativo o cero. Por ejemplo, sea

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Para un escalar positivo $\alpha = 2$

$\alpha\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x} = 2\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 16 & 14 \end{bmatrix}$, entonces $\alpha\boldsymbol{x} \in M_{2\times2}$ y se cumple el axioma para un escalar positivo.

Probando un escalar negativo $\alpha = -2$

$\alpha\boldsymbol{x} = -2\boldsymbol{x} = -2\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ -16 & -14 \end{bmatrix}$, entonces $\alpha\boldsymbol{x} \in M_{2\times2}$ y se cumple el axioma para un escalar negativo.

Probando el escalar igual a cero $\alpha = 0$

$\boldsymbol{\alpha x} = 0\boldsymbol{x} = 0\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $\alpha\boldsymbol{x} \in M_{2\times2}$ y se cumple el axioma para un escalar igual a cero.

<u>Verificación de las propiedades ….7, 8, 9, 10</u>

Habiendo comprendido el significado de los elementos que aparecen en la expresión matemática de las propiedades 7, 8, 9, 10 restantes, y mediante la aplicación de las reglas para las operaciones de suma y multiplicación por un escalar de las matrices, se comprueba que estas propiedades también *se cumplen* y por lo tanto el conjunto dado *si es un espacio vectorial*.

Otros ejemplos de espacios vectoriales.

Dado un conjunto vectores (objetos matemáticos) y las reglas de operación de la suma de dos de sus elementos y la multiplicación de uno de ellos por un escalar, el proceso para determinar si es o no un espacio vectorial como se habrá notado en el ejemplo anterior, es un procedimiento un tanto extenso porque requiere de la verificación de las diez propiedades. Sin embargo, una vez que se ha comprobado que determinado conjunto si es un espacio vectorial, lo conveniente en el contexto del tema, es tomar nota de esta conclusión final para no tener que repetir el proceso en otro momento. Así, con un procedimiento similar al usado en este ejemplo es posible demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales bajo las reglas habituales para realizar la suma y la multiplicación por un escalar, de acuerdo al tipo de vectores que contienen.

- El conjunto denotado por el símbolo R^2 , que se lee como *R* dos, y que se describe en *forma verbal* como el conjunto de *todas las parejas* de números reales y se expresa en *forma matemática* con la expresión
$$R^2 = \{(x, y) : , y \in R\} .$$
- El conjunto denotado por el símbolo R^3 , que se lee como *R* tres, y que se describe en *forma verbal* como el conjunto de *todas las ternas* de números reales y se expresa *en forma matemática* con la expresión
$$R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\} .$$
- El conjunto de todas las matrices de orden *m* x *n* cuyos elementos son números reales, denotado por el símbolo $M_{m\times n}(R)$.
- El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales, denotado por P(R).

Subespacios.

Definición de subespacio. Se dice que un subconjunto H no vacío de un espacio vectorial V es un subespacio de V, si H es por sí mismo un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas para el espacio V.

Teorema. Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si se cumplen las dos reglas de cerradura (axiomas 1 y 6).

1) Si $\boldsymbol{x} \in V$ y $\boldsymbol{y} \in V$, entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ (cerradura bajo la operación de suma).
6) Si $\boldsymbol{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\boldsymbol{x} \in V$ (cerradura bajo la multiplicación por un escalar).

Ejemplo. Determinar si el conjunto de puntos (vectores de tres componentes) que pertenecen al plano $-x-y+z=4$ es un subespacio del espacio vectorial R^3 .

Solución.

Como en este caso, el plano a examinar es un subconjunto de todo el espacio geométrico (espacio vectorial R^3), para determinar si se trata de un espacio vectorial (o si es un subespacio de R^3), es suficiente con verificar las propiedades 1 y 6 (cerraduras bajo la suma y la multiplicación por un escalar).

Subonjunto dado a examinar (H).

En este caso se usa una descripción verbal complementada con una ecuación para especificar al conjunto, el cual es un conjunto de puntos (vectores de tres componentes o coordenadas de puntos en el espacio) del plano que se menciona en él enunciado del problema.

Reglas de operación a utilizar.

En este caso, como el enunciado del problema no indica alguna regla específica para las operaciones de suma de los vectores y multiplicación de un escalar por un vector, se usarán las habituales para la suma de vectores de tres componentes y la de multiplicación de un vector de tres componentes por un escalar.

Vectores a utilizar en el proceso de verificación de las propiedades o axiomas.

En este ejemplo, antes de proponer los vectores a utilizar en la verificación de los axiomas es necesario calcular algunos de ellos. Despejando la variable *z* de la ecuación del plano en función de *x* e *y*, obtenemos

$$z=4+x+y$$

Dando valores arbitrarios a las variables *x* e *y*, y sustituyendo en la expresión anterior para obtener el valor de z, se obtiene la tabla 11 de los vectores o coordenadas de los puntos del plano.

X	y	Z
0	0	4
0	1	5
0	2	6
0	3	7
0	4	8
1	0	5
1	1	6
1	2	7
1	3	8
1	4	9

Tabla 11. Coordenadas (x, y, z) de algunos puntos del plano $-x - y + z = 4$

Verificación del axioma 1 (cerradura bajo la suma).

Si $\boldsymbol{x} \in V$ y $\boldsymbol{y} \in V$, entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$

Tomando dos vectores de la tabla 11.

Sean $\boldsymbol{x} = (0,1,5)$ y $\boldsymbol{y} = (0,2,6)$, vectores o coordenadas de puntos que pertenecen al conjunto (plano) que se examina, entonces

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (0,1,5) + (0,2,6) = (0,3,6)$$

El resultado de la suma no pertenece al plano, porque un punto con dichas coordenadas no se encuentra en la tabla. Se observa que el punto que si se encuentra en la tabla es $(0,3,9)$ cuyas primeras dos componentes coinciden pero es diferente en la tercera coordenada. Por lo tanto $x + y \notin H$ (plano que se examina), y *no se verifica* el primer axioma y el conjunto dado *no es un subespacio* del espacio**.**

La anterior, es una verificación con vectores de componentes numéricas, y se incluye con la intención de facilitar la comprensión de una comprobación general que requiere el uso vectores con componentes genéricas y un proceso algebraico como se demuestra a continuación.

Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, y_1, z_1)$ un vector que pertenece al plano $-x - y + z = 4$ y verifica a la ecuación del mismo, entonces

$$-x_1 - y_1 + z_1 = 4$$

Sea $\boldsymbol{y} = (x_2, y_2, z_2)$ otro vector que también pertenece al plano, entonces

$$-x_2 - y_2 + z_2 = 4$$

Realizando la suma de estos vectores que pertenecen al plano, de acuerdo a la regla habitual para sumar vectores de tres componentes, se obtiene

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \left(x_1,\ y_1, z_1\right) + \left(x_2, y_2, z_2\right) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Si el vector que resulta de la suma anterior de vectores pertenece al plano dado, entonces debe verificar a la ecuación del plano, sustituyendo sus componentes en la ecuación nos queda

$$-\left(x_1 + x_2\right) - (\ y_1 + y_2) + (z_1 + z_2\left.\right) = 4$$

Agrupando los términos, la ecuación anterior se puede escribir como

$$(-x_1 - y_1 + z_1) + (-x_2 - y_2 + z_2) = 4$$

Ahora, considerando las premisas de que los vectores pertenecen al plano dado, entonces, los términos dentro de los paréntesis pueden reemplazarse por su equivalente numérico

$$(4) + (4) = 4$$

De donde se observa que, esta última expresión matemática es una *contradicción* y se concluye que la suma $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ de los vectores *no verifica* la ecuación del plano y en consecuencia, la propiedad de cerradura bajo la suma $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ *no se cumple*, por lo que el plano $-x - y + z = 4$ *no es un subespacio* del espacio vectorial R^3.

Es importante observar en la figura 28, que la gráfica del plano $-x - y + z = 4$ *no pasa por el origen*, y por lo tanto no contiene al vector $(0,0,0)$, y no se cumpliría el axioma 3 $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x})$ que corresponde a la *existencia* del llamado vector cero en dicho plano y en consecuencia directamente de la gráfica del plano podemos afirmar que dado que no pasa por el origen del sistema de coordenadas dicho plano *no es un espacio vectorial.*

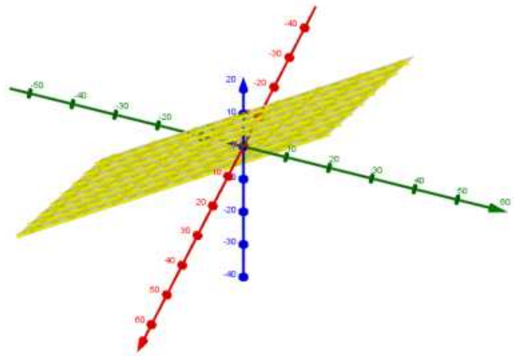


Figura 28. Grafica de la ecuación $-x - y + z = 4$

En el caso de que la gráfica de un plano si pase por el origen, entonces contiene al vector cero y es posible demostrar que dicho plano si es un espacio vectorial, como se muestra en el siguiente ejemplo.

<u>Ejemplo</u>*.* Determinar si el conjunto de puntos (vectores de tres componentes) que pertenecen al *plano* $-5x + 3z = 0$ es un espacio vectorial

Solución.

Conjunto dado a examinar (V).

En este caso se usa una *descripción verbal* complementada con una ecuación para especificar al conjunto, el cual es un conjunto de puntos (vectores de tres componentes o coordenadas de puntos en el espacio) del plano que se menciona en él enunciado del problema.

Reglas de operación a utilizar.

En este caso, como el enunciado del problema no indica alguna regla específica para las operaciones de suma de los vectores y multiplicación de un escalar por un vector, se usarán las habituales para la suma de vectores de tres componentes y la de multiplicación de un vector de tres componentes por un escalar.

Vectores a utilizar en el proceso de verificación de las propiedades o axiomas.

En este ejemplo, antes de proponer los vectores a utilizar en la verificación de los axiomas es necesario calcular algunos de ellos. En este caso, aunque la ecuación no contiene a la variable *y*, el texto del enunciado especifica que se trata de un plano, por lo que debemos considerar que está constituido por un conjunto de puntos en el espacio geométrico que tienen tres coordenadas (vectores de tres componentes). Así, despejando una de las variables en la ecuación del plano $-5x + 3z = 0$ obtenemos

$$z = \frac{5}{3}x$$

Para calcular las coordenadas de algunos puntos del plano, hacemos una tabla de tres columnas suponiendo valores arbitrarios para las variables *x* y también para la variable *y* aunque no aparezca en la ecuación, porque vamos a graficar dicha ecuación en tres ejes (dimensiones).

x	*y*	*Z*
0	0	0
1	1	$5/3$
1	2	$5/3$
1	3	$5/3$
2	1	$10/3$
2	2	$10/3$
2	3	$10/3$
-2	-2	$-10/3$

Tabla 12. Algunos vectores o puntos del plano $-5x + 3z = 0$

Como en este caso, el plano a examinar es un subconjunto de todo el espacio geométrico (espacio vectorial R^3), para determinar si se trata de un espacio vectorial (o si es un subespacio de R^3), es suficiente con la verificación de las propiedades 1 y 6 (cerraduras bajo la suma y la multiplicación por un escalar).

<u>Verificación del axioma 1 (cerradura bajo la suma de vectores).</u>

Si $\boldsymbol{x} \in V$ y $\boldsymbol{y} \in V$, entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$

Tomando dos vectores de la tabla 12.

Sean $\boldsymbol{x} = \left(1,1,\frac{5}{3}\right)$ y $\boldsymbol{y} = \left(1,2,\frac{5}{3}\right)$, vectores o coordenadas de puntos que pertenecen al conjunto (plano) que se examina, entonces

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \left(1,1,\frac{5}{3}\right) + \left(1,2,\frac{5}{3}\right) = \left(2,3,\frac{10}{3}\right)$$

El resultado de la suma si pertenece al plano, porque un punto con dichas coordenadas se encuentra en la tabla 12. Por lo tanto $x + y \in V$ (plano que se examina), y *se verifica* el primer axioma 1.

<u>Verificación del axioma 6 (cerradura bajo la multiplicación por un escalar).</u>

Si $\boldsymbol{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\boldsymbol{x} \in V$

Sea $\boldsymbol{x} = \left(1,1,\frac{5}{3}\right)$ para un valor positivo de $\alpha = 2$

$$\alpha\, \boldsymbol{x} = 2\left(1,1,\frac{5}{3}\right) = \left(2,2,\frac{10}{3}\right)$$

Con un valor negativo de $\alpha = -2$

$$\alpha\boldsymbol{x} = -2\left(1,1,\frac{5}{3}\right) = \left(-2,-2,-\frac{10}{3}\right)$$

Con un valor cero $\alpha = 0$ se obtiene

$$\alpha\boldsymbol{x} = 0\left(1,1,\frac{5}{3}\right) = (0,0,0)$$

Como los tres resultados obtenidos son puntos (vectores) que pertenecen al plano, la propiedad 6 también se cumple, y se concluye que el conjunto de puntos que pertenecen al plano *si es un espacio vectorial*.

Ahora bien, desde el punto de vista gráfico, en la figura 29, el plano pasa por el origen y si contiene al vector cero, y en consecuencia se puede concluir por observación de manera general, que cuando un plano que pasa por el origen es un espacio vectorial (o subespacio de R^3).

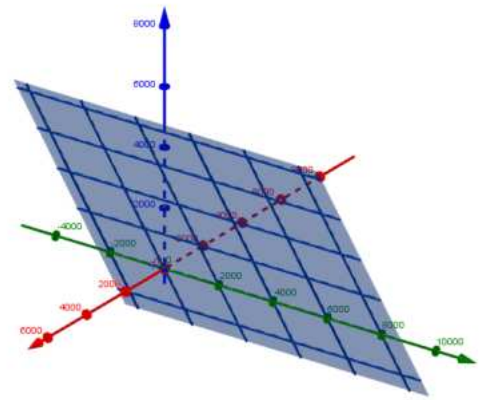


Figura 29. Gráfica del plano $-5x + 3z = 0$

Ejemplo. Forme un sistema lineal de dos ecuaciones y tres variables con las ecuaciones de los planos $-5x + 3z = 0$, $-5y + 3z = 0$. Resuelva el sistema y escriba la solución general en función de una variable arbitraria. Considere que esta solución corresponde con la recta de intersección entre dichos planos y determine por verificación de las propiedades de cerradura si esta recta es un subespacio de R^3.

Solución.

$$-5x \ + 0y \quad + 3z = 0$$
$$0x \ - 5y + \quad 3z = 0$$

Resolviendo el sistema cuya matriz de coeficientes aumentada es

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo por renglones por el método de Gauss-Jordan, nos queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -3/5 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde el sistema equivalente es

$$x \ + 0y \ - (3/5)z = 0$$
$$0x \ + y + \ -(3/5)z = 0$$

Como el sistema equivalente tiene tres variables y solo dos ecuaciones, se trata de un caso que tiene infinitas soluciones y cuya *solución general* se obtiene suponiendo un valor arbitrario para la variable *z* y resolviendo para las otras en términos del valor arbitrario supuesto.

$$x = \frac{3}{5}a$$

$$y = \frac{3}{5}a$$

$$z = a$$

Para examinar si el *conjunto solución* del sistema anterior es un espacio vectorial, es necesario calcular algunos de sus vectores (soluciones particulares del sistema).

Si $a = 0$, entonces la solución particular correspondiente es

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

Para otros valores de a, los resultados se enlistan en la siguiente tabla.

a	*x*	*y*	*z*
0	0	0	0
1	3/5	3/5	1
2	6/5	6/5	2
3	9/5	9/5	3
4	12/5	12/5	4
5	3	3	5

Tabla 13. Algunas soluciones particulares del sistema de ecuaciones.

Con los vectores (x, y, z) de la tabla y con un procedimiento semejante al ejemplo 3, se comprueban los axiomas 1 y 6, y se concluye que el conjunto de las soluciones del sistema *si es un espacio vectorial.*

Ahora, si representamos gráficamente las coordenadas (x, y, z) de la tabla anterior, se obtiene una recta en el espacio como se muestra en la figura 30.

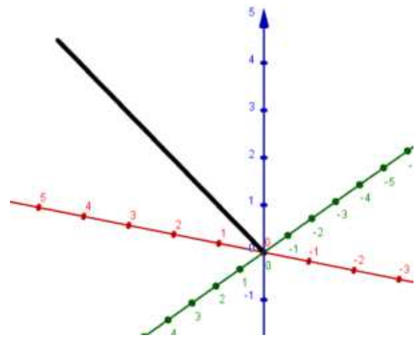


Figura 30. Recta del conjunto solución del sistema de ecuaciones.

En esta gráfica se observa que es una recta que pasa por el origen, y considerando la verificación de los axiomas 1 y 6 que se comprueban algebraicamente con los vectores de la tabla, se concluye que, si la recta de intersección de los planos que forman el sistema *pasa por el origen (0,0,0)*, entonces el *conjunto solución es un espacio vectorial* (o subespacio de R^3).

Dependencia e independencia lineal.

La independencia lineal se refiere a la negación de la dependencia lineal. A su vez el término lineal, está asociado a la forma que adopta la representación gráfica, en un sistema de coordenadas rectangulares, de una función que establece una relación entre dos variables mediante una línea recta, situación que se presenta siempre que la expresión que define matemáticamente a la relación sea igual al producto de una constante c, diferente de cero, por una variable x con un exponente igual a uno como en la ecuación $y = cx$. De esta expresión, se dice que existe una dependencia de tipo *lineal* de la variable y con respecto a la variable x.

En otro caso, con un exponente diferente de cero de la variable x o con una expresión que contenga funciones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas, la representación gráfica no corresponde con una línea recta y se dice que las variables no están relacionadas de forma *lineal* o que una no varía de manera *lineal* con respecto a la otra.

Ahora bien, si la relación es entre tres variables, una en términos de las otras dos, es decir, una variable es dependiente de las otras dos variables que son independientes y a su vez la relación está definida matemáticamente con una expresión que contiene una suma algebraica de las variables independientes a la potencia uno multiplicadas cada una de ellas por un factor constante, como en la ecuación $z = c_1x + c_2y$, se dice que la variable dependiente z se obtiene de una *combinación lineal* de términos algebraicos en las variables x e y.

Esta forma matemática que define la *combinación lineal* se puede trasladar al contexto de los espacios vectoriales dando lugar al concepto de *combinación lineal* de un grupo de vectores de un espacio vectorial.

*Definición***.** Sea V un espacio vectorial y S un conjunto no vacío de V. Se dice que un vector $\boldsymbol{x}$ de V es una combinación lineal de elementos de S, si existe un número finito de elementos $\boldsymbol{y_1}, \dots, \boldsymbol{y_n}$ en S y escalares $a_1, \dots, a_n$ en F tales que $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{y_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{y_n}$. En este caso es común decir que x es una combinación lineal de $\boldsymbol{y_1}, \dots, \boldsymbol{y_n}$.

Ejemplo. Determinar para el grupo de vectores de R^3, si el primer vector puede o no ser expresado como una combinación lineal de los otros dos $\{(-2, 0, 3), (1,3,0), (2,4,-1)\}$.

Sea

$\boldsymbol{x} = (-2, 0, 3)$ El primer vector.

$\boldsymbol{y_1} = (1, 3, 0)$ El segundo vector.

$\boldsymbol{y_2} = (2, 4, -1)$ El tercer vector.

Si $\boldsymbol{x}$ es una combinación lineal de $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$, entonces $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{y_1} + a_2\boldsymbol{y_2}$
Sustituyendo los vectores se tiene

$$(-2, 0, 3) = a_1(1, 3, 0) + a_2\,(2, 4, -1)$$

Efectuando las operaciones

$$(-2,0,3) = (a_1 + 2a_2\,, 3a_1 + 4a_2\,, -a_2\,)$$

Igualando las componentes

$$a_1 + 2a_2 = -2$$

$$3a_1 + 4a_2 = 0$$

$$0a_1 - a_2 = 3$$

Resolviendo el sistema por el método de GAUSS-JORDAN, la matriz de coeficientes aumentada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Cuya reducción a su forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde el sistema equivalente correspondiente nos proporciona los resultados

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = -3$$

Así, el primer vector expresado como una *combinación lineal* del segundo y tercer vector es

$$\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{y_1} - 3\boldsymbol{y_2}$$

Interpretación geométrica de la combinación lineal de vectores del espacio $\boldsymbol{R^3}$

En el caso de los vectores en R^3, que tienen una representación gráfica, la interpretación geométrica correspondiente se obtiene al representar gráficamente la operaciones de multiplicación por un escalar y suma de vectores indicadas en la combinación lineal. Así, en el ejemplo 1, el vector $\boldsymbol{x}$ es la suma vectorial del vector $\boldsymbol{y_1}$ multiplicado por el escalar 4 con el vector $\boldsymbol{y_2}$ multiplicado por el escalar -3, como se muestra en las operaciones de la figura 31.

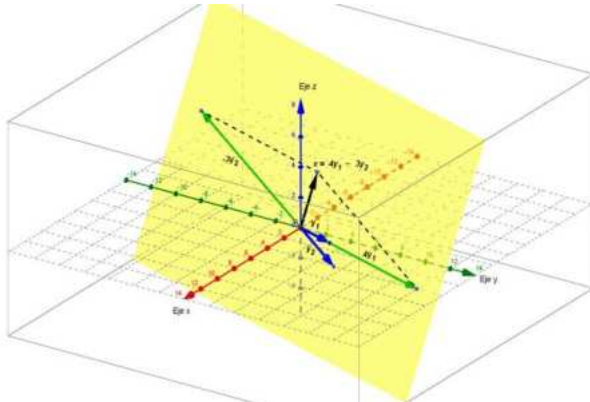


Figura 31. Representación gráfica del vector $\boldsymbol{x} = (-2, 0, 3)$ como la combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{y_1} = (1, 3, 0)$, $\boldsymbol{y_2} = (2, 4, -1)$.

En la figura 31 se representan gráficamente las operaciones con vectores indicadas en la combinación lineal del ejemplo 1 y se observa que el primer vector $\boldsymbol{x}$ del conjunto dado, se encuentra en el mismo plano que el segundo vector $\boldsymbol{y_1}$ y el tercer vector $\boldsymbol{y_2}$. Debido a esta ubicación en el mismo plano es posible expresar el primer vector como el resultado de una combinación lineal de los otros dos vectores $\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{y_1} - 3\boldsymbol{y_2}$.

<u>Ejemplo</u>. Determinar para el grupo de vectores de R^3, si el primer vector puede o no ser expresado como una combinación lineal de los otros dos $\{(3, 4, 1), (1, -2, 1), (-2, -1, 1)\}$.

Sea

$\boldsymbol{x} = (3, 4, 1)$ El primer vector.

$\boldsymbol{y_1} = (1, -2, 1)$ El segundo vector.

$\boldsymbol{y_2} = (-2, -1, 1)$ El tercer vector.

Si $\boldsymbol{x}$ es una combinación lineal de $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$, entonces $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{y_1} + a_2\boldsymbol{y_2}$
Sustituyendo los vectores se tiene

$$(3, 4, 1) = a_1(1, -2, 1) + a_2\,(-2, -1, 1)$$

Efectuando las operaciones

$$(3,4,1) = (a_1 - 2a_2\,, -2a_1 - a_2\,,\ a_1 + a_2\,)$$

Igualando las componentes

$$a_1 - 2a_2 = 3$$

$$-2a_1 - a_2 = 4$$

$$a_1 + a_2 = 1$$

Resolviendo el sistema por el método de GAUSS-JORDAN, la matriz de coeficientes aumentada es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuya reducción a su forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De donde el sistema equivalente correspondiente

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$0 = 1$$

Nos permite identificar que se trata de un sistema que **no tiene solución** porque la tercera ecuación es una contradicción. Así, el primer vector **no puede expresarse** como una *combinación lineal* del segundo y tercer vector. Es decir el primer vector no depende linealmente de los otros vectores porque no se puede expresar en términos de los mismos.

La interpretación geométrica correspondiente a este caso se muestra en la figura 32 donde se observa que el vector $\boldsymbol{x}$, no se encuentra en el mismo *plano* formado por los vectores $\boldsymbol{y_1}$ y $\boldsymbol{y_2}$. Además, cualquier resultado de una combinación lineal de estos últimos dos vectores, quedaría ubicado en el mismo plano formado por ellos, por lo que no sería posible expresar el vector $\boldsymbol{x}$ como el resultado de las operaciones de una *combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{y_1}$ y $\boldsymbol{y_2}$ como se concluyó en el análisis algebraico.

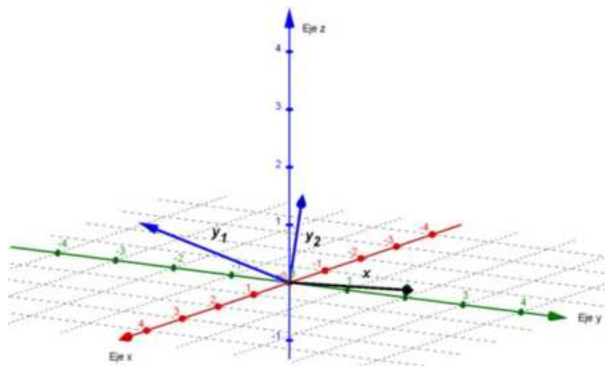


Figura 32. Representación gráfica del conjunto de vectores $\{(3,4,1),(1,-2,1),(-2,-1,1)\}$, donde se observa que el vector $\boldsymbol{x} = (3,4,1)$ no se puede obtener de una *combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{y_1} = (1,-2,1)$ y $\boldsymbol{y_2} = (-2,-1,1)$.

En este ejemplo, se concluye que *no hay una dependencia lineal* entre el primer vector con los otros dos vectores. Es decir, lo que existe es una *independencia lineal* entre el primer vector y los otros dos vectores del conjunto dado, porque no fue posible expresar el primer vector como combinación lineal de los otros dos.

Sin embargo, decir que la independencia lineal es entre *todos* los vectores del conjunto dado, implicaría que ninguno de los tres vectores del conjunto pudiera ser expresado como una combinación lineal de los otros dos. Esta última idea general de la *independencia lineal* de un grupo de vectores de un espacio vectorial se expresa de manera apropiada con la siguiente definición.

Definición. Un subconjunto S de un espacio vectorial V es *linealmente dependiente* si existe un número finito de vectores distintos $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ en S y escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ en F, *no todos cero*, tales que $a_1\boldsymbol{x_1} + a_2\boldsymbol{x_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{0}$. También se puede describir esta situación diciendo que los elementos de S *son linealmente dependientes.* En caso contrario, es decir, cuando los únicos escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ que verifican la ecuación anterior son *todos iguales a cero*, se dice que los vectores $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ *son linealmente independientes* y si estos, son todos los vectores del subconjunto S, entonces se afirma que el subconjunto S es *linealmente independiente***.**

Los siguientes ejemplos muestran la aplicación de esta definición para determinar si un conjunto dado de vectores de un espacio vectorial es linealmente dependiente o independiente.

Ejemplos de un conjunto de vectores en $\boldsymbol{R^3}$.

Ejemplo. Determinar si los vectores del conjunto dado son linealmente dependientes o independientes.

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Solución.

Como son tres vectores, la ecuación vectorial de la definición queda

$$a_1\boldsymbol{x_1} + a_2\boldsymbol{x_2} + a_3\boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{0}$$

Sustituyendo los vectores dados en la ecuación se obtiene

$$a_1\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Multiplicando cada vector columna por los escalares respectivos

$$\begin{bmatrix}1a_1\\2a_1\\-3a_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4a_2\\5a_2\\6a_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2a_3\\1a_3\\0a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Efectuando la suma de los vectores columna

$$\begin{bmatrix}1a_1 + 4a_2 + 2a_3\\2a_1 + 5a_2 + 1a_3\\-3a_1 + 6a_2 + 0a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Como los vectores son iguales, entonces sus componentes uno a uno son iguales, lo que conduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$1a_1 + 4a_2 + 2a_3 = 0$$

$$2a_1 + 5a_2 + 1a_3 = 0$$
$$-3a_1 + 6a_2 + 0a_3 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene, para este caso, la solución única y esta es:

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 0$$

Entonces, los escalares que verifican la ecuación de la definición de dependencia lineal.

$$a_1\boldsymbol{x_1} + a_2\boldsymbol{x_2} + a_3\boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{0}$$

Son todos iguales a cero, se dice que los vectores del conjunto dado son linealmente independientes.

En la figura 33 se muestra la representación gráfica de los vectores del conjunto de este ejemplo y se observa gráficamente que la conclusión del análisis algebraico de que son *linealmente independientes* significa que los vectores no están ubicados en un mismo plano.

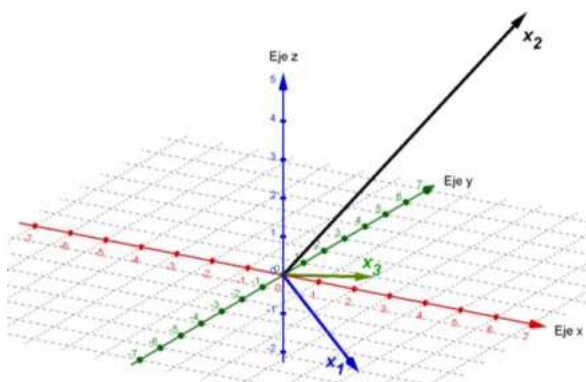


Figura 33. Representación gráfica del ejemplo de los tres vectores que son *linealmente independientes*.

Es importante observar que, el sistema de ecuaciones de la definición es *homogéneo* (los valores del lado derecho en las ecuaciones son todos iguales a 0). Y este tipo de sistemas siempre tienen solución; si es única esta debe ser la trivial (todos los resultados iguales a 0) y el otro caso posible es que tenga infinitas soluciones.

Ejemplo. Determinar si los vectores del conjunto dado son linealmente dependientes o independientes.

$$\left\{\begin{bmatrix}4\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

Solución.

Como son tres vectores, la ecuación vectorial de la definición queda

$$a_1\boldsymbol{x_1}+a_2\boldsymbol{x_2}+a_3\boldsymbol{x_3}=\boldsymbol{0}$$

Sustituyendo los vectores dados en la ecuación se obtiene

$$a_1\begin{bmatrix}4\\2\\-1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}5\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Multiplicando cada vector columna por los escalares respectivos

$$\begin{bmatrix}4a_1\\2a_1\\-1a_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3a_2\\1a_2\\-1a_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5a_3\\1a_3\\-2a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Efectuando la suma de los vectores columna

$$\begin{bmatrix}4a_1+3a_2+5a_3\\2a_1+1a_2+1a_3\\-1a_1-1a_2-2a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Como los vectores son iguales, entonces sus componentes uno a uno son iguales, lo que conduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$4a_1+3a_2+5a_3=0$$

$$2a_1+1a_2+1a_3=0$$

$$-1a_1-1a_2-2a_3=0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones usando el método de Gauss-Jordan se obtiene el siguiente sistema equivalente:

$$1a_1+0a_2-1a_3=0$$

$$0a_1+1a_2+3a_3=0$$

$$0a_1+0a_2+0a_3=0$$

Observando este sistema es claro que, la tercera ecuación es equivalente a $0 = 0$ y el sistema realmente tiene dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que hay que suponer un valor arbitrario para alguna de las variables y resolver para las otras. Haciendo

$$a_3 = a$$

Sustituyendo en la primera y segunda ecuación se obtiene la *solución general* del sistema

$$a_1 = a$$
$$a_2 = -3a$$
$$a_3 = a$$

Entonces, de la solución general del sistema se deduce que, hay una *cantidad infinita de posibles valores* de los escalares que verifican la ecuación de la definición de dependencia lineal $a_1\boldsymbol{x_1} + a_2\boldsymbol{x_2} + a_3\boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{0}$, mismos que se obtendrían al darle cualquier valor específico al valor arbitrario de a (soluciones particulares).

Es decir**,** como existen valores de los escalares a_1, a_2, a_3 *no todos iguales a cero,* se dice que los vectores del conjunto dado *son linealmente dependientes.*

En la figura 34 se muestra la representación gráfica de los vectores del conjunto de este segundo ejemplo y la conclusión del análisis algebraico de que son *linealmente dependientes* significa que los tres vectores están ubicados en un mismo plano como se observa en la gráfica.

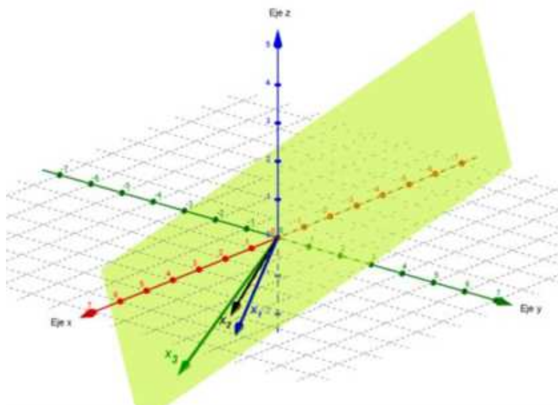


Figura 34. Representación gráfica del segundo ejemplo de los tres vectores que son *linealmente dependientes*.

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt (Grossman, 2007).

Sea *H* un subespacio de dimensión *m* de R^n. Entonces *H* tiene una base ortonormal.

Demostración

Sea $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ una base de *H.* Se probara el teorema construyendo una base ortonormal a partir de los vectores en *S*. Antes de dar los pasos para esta construcción, se observa el hecho de que un conjunto de vectores linealmente independiente no contiene al vector cero.

- *Paso 1. Elección del primer vector unitario.* Sea

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|}$$

Entonces

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \left(\frac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|}\right) \cdot \left(\frac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|}\right) = \left(\frac{1}{|\boldsymbol{v}_1|^2}\right)(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1) = 1$$

De manera que $|\boldsymbol{u}_1| = 1$.

- *Paso 2. Elección de un segundo vector ortogonal a* $\boldsymbol{u}_1$

De acuerdo al teorema; "sea ***v*** un vector diferente de cero. Entonces para cualquier otro vector ***u*** el vector $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v}$ es ortogonal a ***v*"**. En este caso $\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v}$ es la proyección de ***u*** sobre ***v***. Esto se ilustra en la figura 35.

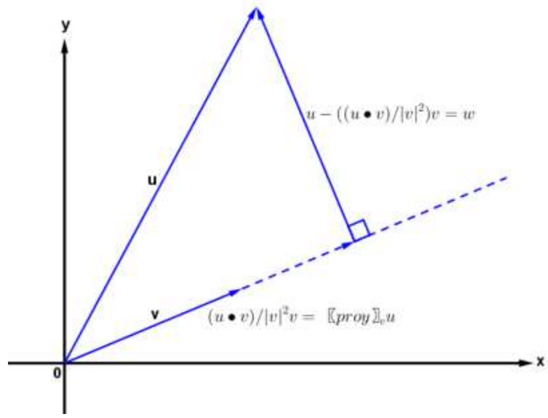


Figura 35. El vector $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}-\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v}$ es ortonormal a $\boldsymbol{v}$

Resulta que el vector ***w*** obtenido es ortogonal a ***v*** cuando ***w*** y ***v*** están en R^n para cualquier $n\geq 2$.

Observe que como $\boldsymbol{u}_1$ es un vector unitario, $\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}_1|}\boldsymbol{u}_1=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$ para cualquier vector ***v***.

Sea

$$\boldsymbol{v}'_2=\boldsymbol{v}_2-(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$$

Entonces

$$\boldsymbol{v}'_2\cdot\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}_1-(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}_1)(\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1)=\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}_1-(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}_1)(1)=0$$

De manera que $\boldsymbol{v}'_2$ es ortogonal a $\boldsymbol{u}_1$. Más aún, por el teorema (Si $S=\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$ es un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero, entonces S es linealmente independiente), $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{v}'_2$ son linealmente independientes; $\boldsymbol{v}'_2\neq 0$ porque de otra manera $\boldsymbol{v}_2=(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1=\frac{(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}_1)}{|\boldsymbol{v}_1|}\boldsymbol{v}_1$, lo que contradice la independencia de $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$.

- *Paso 3. Elección de un segundo vector unitario.*

  Sea

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{\boldsymbol{v}'_2}{|\boldsymbol{v}'_2|}$$

Entonces es evidente que $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ es un conjunto ortonormal.

Suponga que se han construido los vectores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots \boldsymbol{u}_k (k < m)$ y que forman un conjunto ortonormal. Se mostrará cómo construir $\boldsymbol{u}_{k+1}$.

- *Paso 4. Continuación del proceso*

Sea

$$\boldsymbol{v}'_{k+1} = \boldsymbol{v}_{k+1} - (\boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 - \cdots - (\boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{u}_k$$

Entonces para $i = 1,2,\dots,k$

$$\boldsymbol{v}'_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_i - (\boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_1)(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_i) - (\boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_2)(\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_i) - \cdots - (\boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_i) - \cdots - (\boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_k)(\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_i)$$

Pero $\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_i = 0$ si $j \neq i$ y $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_i = 1$. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{v}'_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_i = 0$$

Así, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}'_{k+1}\}$ es un conjunto linealmente independiente, ortogonal y $\boldsymbol{v}'_{k+1} \neq 0$.

- *Paso 5*

Sea $\boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{v}'_{k+1} / |\boldsymbol{v}'_{k+1}|$. Entonces es claro que, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots \boldsymbol{u}_k, u_{k+1}\}$ es un conjunto ortonormal y se puede continuar de esta manera hasta que $k + 1 = m$, con lo que se completa la prueba.

Nota. Como cada $\boldsymbol{u}_i$, es una combinación lineal de vectores $\boldsymbol{v}_i$, gen$\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k\}$ es un subespacio de gen $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_k\}$ y como cada espacio tiene dimensión k, los espacios son iguales.

<u>Ejemplo</u>. Construcción de una base ortonormal en R^3

Construya una base ortonormal en R^3 comenzando con la base

$$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Solución:

Se tiene $|\boldsymbol{v}_1| = \sqrt{10}$, entonces $\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \sqrt{10}\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Como $|\boldsymbol{v}_2'| = \sqrt{11},\ \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$

Continuando, se tiene

$$\boldsymbol{v}_3' = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} - \frac{9}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} \\ \frac{9}{11} \\ \frac{27}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{22} \\ \frac{35}{11} \\ -\frac{21}{22} \end{pmatrix}$$

Por último $|\boldsymbol{v}_3'| = \frac{7\sqrt{110}}{22}$ de manera que $\boldsymbol{u}_3 = \frac{22}{7\sqrt{110}}\begin{pmatrix} \frac{7}{22} \\ \frac{35}{11} \\ -\frac{21}{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{110}} \\ \frac{\sqrt{110}}{11} \\ -\frac{3}{\sqrt{110}} \end{pmatrix}$. Así, una base ortonormal en R^3 es $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{110}} \\ \frac{\sqrt{110}}{11} \\ -\frac{3}{\sqrt{110}} \end{pmatrix} \right\}$.

4.4.3 Descripción de los objetos propuestos a construir

Descripción del primer objeto

Para este tema, se propone construir con papel batería u otro material útil para este propósito, un poliedro en forma de pirámide de base cuadrada de 6 cm de longitud en sus lados y con una altura de 5 cm, el cual se coloca sobre el tablero cuadriculado construido en uno de los temas anteriores, con el propósito de servir de base para establecer un sistema de referencia de referencia tridimensional, colocando solo un tercer eje perpendicular que puede ser una regleta delgada con una graduación en cm, que se fija al tablero, de tal manera que se puedan establecer las coordenadas de todos los vértices de la pirámide y vincular con este objeto, a través de las actividades que se proponen, los conceptos matemáticos del tema de espacios vectoriales.

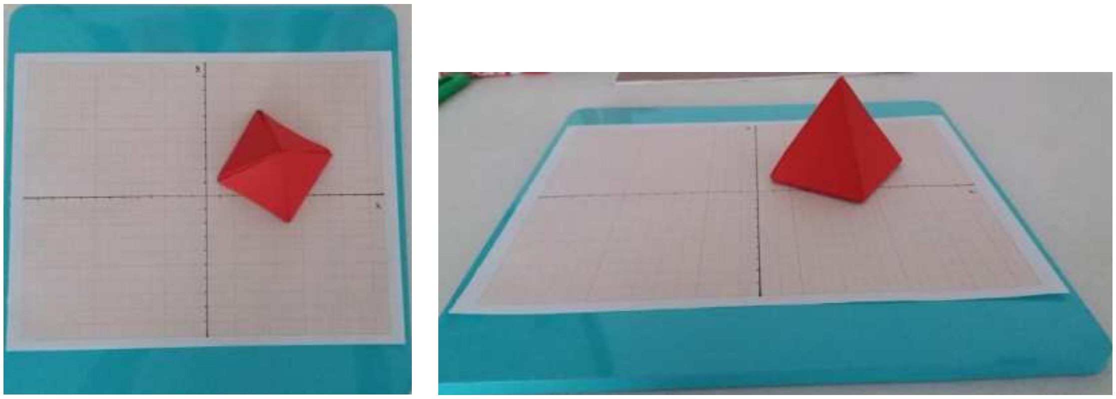


Figura 36. Pirámide a utilizar en la práctica de espacios vectoriales

Descripción del segundo objeto

Como segundo objeto del tema de espacios vectoriales se propone construir una maqueta de una torre que consta de cinco cubos o prismas unidos firmemente. Las aristas de cada uno de ellos forman una estructura rígida y las caras de los cubos o prismas son transparentes de manera que sea posible observar la representación física de los vectores de todo el proceso de ortonormalización.

En el primer nivel o cubo, están los vectores de la base inicial, en los siguientes tres niveles o cubos se ubican, en la orientación adecuada, todos los vectores de los pasos correspondientes al proceso de ortonormalización y en el quinto nivel se encuentran los vectores de la base ortonormal que se obtiene como resultado del proceso.

Figura 37. Maqueta del proceso de ortonormalización de Gram-Schmid

4.4.4 Actividades propuestas y sus desarrollos para cada uno de objetos construidos

Para el primer objeto.

PRACTICA PARA EL TEMA DE ESPACIOS VECTORIALES.

Interpretación geométrica de subespacios, combinación lineal, independencia lineal y bases.

1) Construya un poliedro con papel batería en forma de pirámide regular, cuya base es un cuadrado de 6 cm de lado y la altura es de 5 cm, como se muestra en la figura 38.

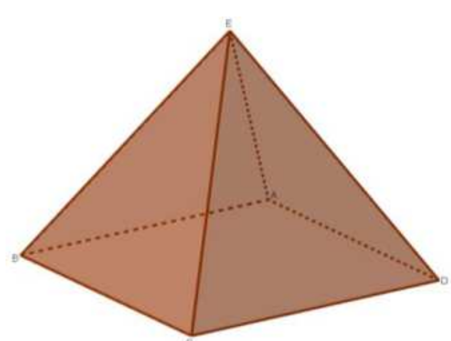


Figura 38. Poliedro de base cuadrada de lado igual a 6 y altura igual a 5

2) Seleccione un sistema de coordenadas tridimensional cuyo origen es uno de los vértices ubicados en la base de la pirámide. De manera tal que, dos de sus ejes (el eje x y el eje y) coincidan con la dirección de dos de los lados del cuadrado de la base y el tercer eje (eje z) sea perpendicular al plano de la base. Identifique con una etiqueta, los puntos de los vértices con las letras A, B, C, D, F. Determine con respecto al sistema de referencia, que haya establecido, las coordenadas correspondientes a cada uno de los vértices.

3) Obtenga las ecuaciones correspondientes a cada una de las caras considerando que cada cara es una parte triangular de un plano en el espacio, con el procedimiento descrito en los fundamentos teóricos del tema de sistemas de ecuaciones lineales.

4) Utilice el programa de cómputo GEOGEBRA para graficar cada una de las ecuaciones de las caras y verifique que la figura obtenida, es semejante a la pirámide, y que muestra cuatro planos que se intersectan en el punto más alto de la pirámide.

5) Determine, por observación de la gráfica del punto 4. ¿Cuáles de los planos son subespacios del espacio vectorial R^3? Justifique brevemente su respuesta y use las ecuaciones para especificar los planos en su respuesta.

6) Determine, por inspección de la gráfica cuáles de las rectas de intersección entre los diferentes planos correspondientes a las caras de la pirámide, son subespacios de R^3. Justifique su respuesta y use las ecuaciones de los planos para especificar la recta de intersección en su respuesta.

7) Seleccione uno cualquiera de los planos de las caras, que *no sea* un *subespacio* de R^3 y demuestre esta conclusión, haciendo uso de la ecuación correspondiente y mediante la verificación de las propiedades de cerradura bajo la suma y de la multiplicación por un escalar.

8) Seleccione dos ecuaciones de dos caras adyacentes y forme un sistema lineal que sea homogéneo y que consta de dos ecuaciones con tres variables. Resuelva el sistema y escriba la solución general en función de una variable arbitraria. Considere que esta solución corresponde con la recta de intersección entre dichos planos y determine por verificación de las propiedades de cerradura, si el conjunto de puntos de esta recta es un subespacio de R^3.

9) Determine las componentes de cuatro vectores que tienen como punto común de origen al vértice que corresponde con el punto más alto de la pirámide y sus extremos en los cuatro vértices restantes. Seleccione uno cualquiera de estos vectores y obtenga su expresión como una combinación lineal de los otros tres vectores restantes. Realice también con el programa GEOGEBRA la representación gráfica del resultado obtenido.

10) Determine si el conjunto formado por los cuatro vectores del punto anterior es una base para el espacio vectorial R^3. Justifique su respuesta verificando si se cumplen las dos condiciones para que un conjunto de vectores sea una base.

Para el segundo objeto.

PRACTICA DEL PROCESO DE ORTONORMALIZACIÓN DE Gram-Schmidt.

Interpretación geométrica del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

1) Proponga tres vectores V_1, V_2, V_3 que no sean unitarios y compruebe analíticamente que cumplen las dos condiciones para ser una base del espacio R^3.

2) Usando el programa GEOGEBRA represente gráficamente los vectores propuestos en tres dimensiones para obtener una gráfica semejante a la figura 39.

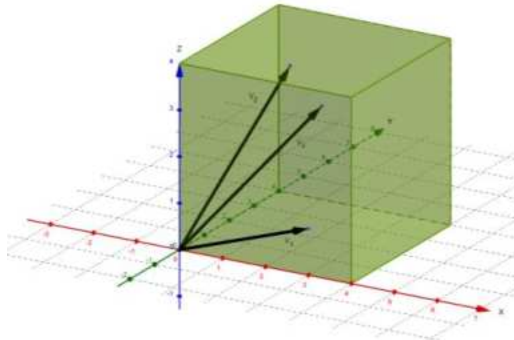


Figura 39. Conjunto de vectores que es una base para el espacio vectorial R^3.

3) Inicie la aplicación del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt al conjunto de vectores propuestos calculando las componentes del primer vector unitario de la base ortonormal U_1 y represente gráficamente este vector en tres dimensiones de manera similar a la figura 40.

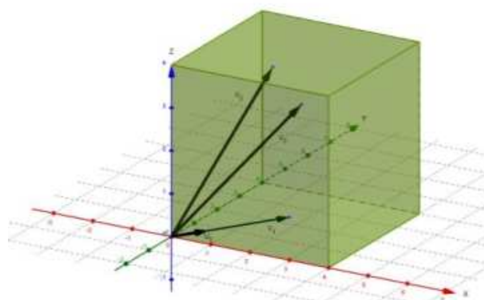


Figura 40. Gráfica con el primer vector U_1 de la base ortonormal.

4) Continúe con la aplicación del proceso de ortonormalización calculando las componentes del segundo vector unitario de la base ortonormal U_2 y represente gráficamente este vector en tres dimensiones de forma semejante a la figura 41.

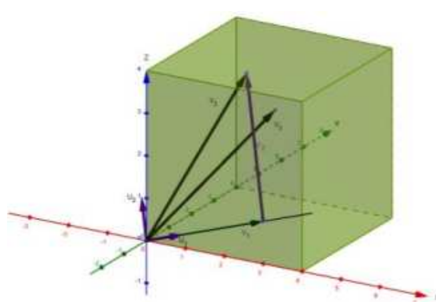


Figura 41. Gráfica que muestra los vectores U_1 y U_2 de la base ortonormal.

5) Siga con la aplicación del proceso de ortonormalización calculando las componentes de las proyecciones del vector V_3 sobre los vectores U_1 y U_2. Represente gráficamente estos vectores para obtener una gráfica similar a la figura 42.

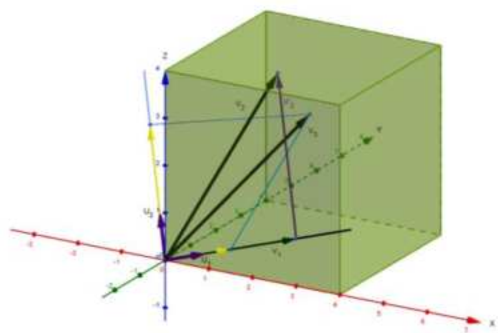


Figura 42. Gráfica que muestra las proyecciones de V_3 sobre los vectores U_1 y U_2.

6) Termine el proceso con el cálculo de las componentes del tercer vector unitario de la base ortonomal U_3 y represente gráficamente este vector para completar la terna de vectores unitarios que constituyen la base ortonormal de manera semejante a la de la figura 43.

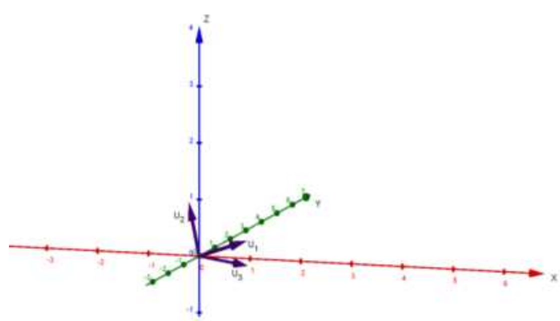


Figura 43. Gráfica de los tres vectores ortonormales que se obtienen del proceso.

7) Comprobar analíticamente que los tres vectores son unitarios y ortogonales entre sí y además cumplen con las dos condiciones de las bases.

8) Construya cinco objetos tipo cubo o prisma de caras transparentes y con una estructura rígida semejante a una réplica física de cada una de las

figuras 1, 2, 3, 4 y 5 que incluya a las flechas que representan a los vectores involucrados en el proceso de ortonormalización en las orientaciones que les corresponden. Una en forma firme y rígida los cinco objetos para formar una torre y así obtener un solo objeto tipo escultura que muestra los pasos del proceso de ortonormalización de Gram-Schimdt. Los materiales a utilizar quedan a elección de quienes construyen pero, las dimensiones de la base del objeto integrado deben ser menores a las de un cuadrado de 30 cm de lado y su altura no debe exceder de 40 cm.

4.4.5 Instrumentos de evaluación de la construcción de los objetos y de las actividades propuestas

RÚBRICA DE LA PRÁCTICA DE LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS SUBSPACIOS, INDEPENDENCIA LINEAL

Criterios	Excelente	Notable	Bueno	Suficiente	Insuficiente	Puntos obtenidos
Construcción de la pirámide y obtención de las coordenadas de los vértices.	Se documenta con imágenes la realización de las actividades 1 y 2. La pirámide tiene las dimensiones indicadas en la actividad 1 y está correctamente armado y pegado en forma rígida. El sistema de referencia se muestra adecuadamente **usando una cuadrícula** según se indica en la actividad 2 y las coordenadas de **todos** los vértices están **correctas**. **20 puntos**	Se documenta con imágenes la realización de las actividades 1 y 2. La pirámide tiene las dimensiones indicadas en la actividad 1 y está correctamente armado y pegado en forma rígida. El sistema de referencia se muestra adecuadamente **usando una cuadrícula** según se indica en la actividad 2, pero **alguna** de las coordenadas está **incorrecta**. **18 puntos**	Se documenta con imágenes la realización de las actividades 1 y 2. La pirámide tiene las dimensiones indicadas en la actividad 1 y está correctamente armado y pegado en forma rígida. El sistema de referencia se selecciona según se indica en la actividad 2, pero **sin usar una cuadrícula** y **alguna** de las coordenadas de los vértices está **incorrecta**. **16 puntos**	Se documenta con imágenes la realización de las actividades 1 y 2. La pirámide tiene las dimensiones indicadas en la actividad 1 y está correctamente armado y pegado en forma rígida. El sistema de referencia **no es** como se indica en la actividad 2, pero **todas** las coordenadas de los vértices están **correctas** con respecto a dicho sistema. **14 puntos**	No presenta físicamente la pirámide para su evaluación o no documenta la realización de alguna de las actividades 1 y 2 o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Obtención de las ecuaciones de las cuatro caras.	El reporte documenta la realización de la actividad 3. Todos los sistemas de ecuaciones de los modelos para obtener las ecuaciones de las **cuatro** caras y **todos** los coeficientes de sus correspondientes ecuaciones están **correctos**. **20 puntos**	El reporte documenta la realización de la actividad 3. Todos los sistemas de ecuaciones de los modelos para obtener las ecuaciones de las **cuatro** caras están **correctos**, pero **una** de las cuatro ecuaciones tiene **algún error** en sus coeficientes. **18 puntos**	El reporte documenta la realización de la actividad 3. Los sistemas de ecuaciones de los modelos para obtener las ecuaciones de **tres** las caras y los coeficientes de sus respectivas ecuaciones están **correctos**. **16 puntos**	El reporte documenta la realización de la actividad 3. Los sistemas de ecuaciones de los modelos para obtener las ecuaciones de **tres** las caras están correctos, pero hay **dos** ecuaciones con **errores** en sus coeficientes. **14 puntos**	No documenta la realización de la actividades 3 o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Identificación geométrica y con propiedades algebraicas de conjuntos que son subespacios.	Se documenta la realización de las actividades 5, 6, 7 y 8. Las respuestas de la identificación geométrica de los planos de las caras que son subespacios están correctas y los argumentos de la justificación son los adecuados. Se identifican correctamente cuales de las rectas de las aristas si son subespacios con argumentos válidos. El plano seleccionado en la actividad 7 no es un subespacio y se demuestra algebraicamente. El sistema formado en la actividad 8 **es homogéneo** y **se demuestra** que la recta de intersección de los planos **es un subespacio**.	Se documenta la realización de las actividades 5, 6, 7 y 8. Las respuestas de la identificación geométrica de los planos de las caras que son subespacios están correctas y los argumentos de la justificación son los adecuados. Se identifican correctamente cuales de las rectas de las aristas si son subespacios con argumentos válidos. El plano seleccionado en la actividad 7 no es un subespacio y se demuestra algebraicamente. El sistema formado en la actividad 8 **no es homogéneo** pero se demuestra que en ese caso, la recta de	Se documenta la realización de las actividades 5, 6, 7 y 8. Las respuestas de la identificación geométrica de los planos de las caras que son subespacios están correctas y los argumentos de la justificación son los adecuados. Se identifican correctamente cuales de las rectas de las aristas si son subespacios con argumentos válidos. El plano seleccionado en la actividad 7 no es un subespacio y se demuestra algebraicamente. El sistema formado en la actividad es **homogéneo**, pero **no se demuestra correctamente** que	Se documenta la realización de las actividades 5, 6, 7 y 8. Las respuestas de la identificación geométrica de los planos de las caras que son subespacios están correctas y los argumentos de la justificación son los adecuados. Se identifican correctamente cuales de las rectas de las aristas si son subespacios con argumentos válidos. El plano seleccionado en la actividad 7 no es un subespacio y se demuestra algebraicamente. La **actividad 8** se documenta pero está totalmente **incorrecta**.	No se documenta la realización de alguna de las actividades 5, 6, 7 y 8 o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente.	

	20 puntos	intersección de los planos **no es un subespacio**. **18 puntos**	la recta de intersección **es un subespacio**. **16 puntos**	**14 puntos**	**0 puntos**	
Combinación lineal de vectores y verificación algebraica de las propiedades de las bases.	Se documenta la realización de las actividades 9 y 10. Las componentes de los cuatro vectores de las aristas, los sistemas de ecuaciones para obtener los coeficientes y la expresión final de la combinación lineal están correctos. Se incluye la verificación algebraica de las **dos condiciones** de las bases y se concluye **correctamente** si los cuatro vectores de la actividad 10 forman una base. **20 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 9 y 10. Las componentes de los cuatro vectores de las aristas, los sistemas de ecuaciones para obtener los coeficientes y la expresión final de la combinación lineal están correctos. Se incluye solo la verificación algebraica de **una** de las dos condiciones de las bases pero se concluye de manera **correcta**. **18 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 9 y 10. Las componentes de los cuatro vectores de las aristas, los sistemas de ecuaciones para obtener los coeficientes y la expresión final de la combinación lineal están correctos. Se incluye la verificación algebraica de las **dos** condiciones de las bases pero se **concluye incorrectamente**. **16 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 9 y 10. Las componentes de los cuatro vectores de las aristas, los sistemas de ecuaciones para obtener los coeficientes y la expresión final de la combinación lineal están correctos. Se incluye solo la verificación algebraica de **una** de las dos condiciones de las bases y se **concluye incorrectamente**. **14 puntos**	No se documenta la realización de alguna de las actividades 9 o 10, o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Uso de SAC. (GEOGEBRA)	Se documenta con imágenes de la vista gráfica del GEOGEBRA la realización de las actividades 4 y 9. En la gráfica de la actividad 4, se **observan claramente** los cuatro planos **con** las etiquetas de sus ecuaciones, el punto de intersección y las rectas de intersección de los planos. En la gráfica de la actividad 9 se muestra mediante un polígono de vectores que uno de ellos es la suma vectorial de los otros. **20 puntos**	Se documenta con imágenes de la vista gráfica del GEOGEBRA la realización de las actividades 4 y 9. En la gráfica de la actividad 4, se **observan claramente** los cuatro planos **sin** las etiquetas de sus ecuaciones, el punto de intersección y las rectas de intersección de los planos. En la gráfica de la actividad 9 se muestra mediante un polígono de vectores que uno de ellos es la suma vectorial de los otros. **18 puntos**	Se documenta con imágenes de la vista gráfica del GEOGEBRA la realización de las actividades 4 y 9. En la gráfica de la actividad 4, se **observan** los cuatro planos, el punto de intersección y las rectas de intersección de los planos. En la gráfica de la actividad 9 se muestra mediante un polígono de vectores que uno de ellos es la suma vectorial de los otros. **16 puntos**	Se documenta con imágenes de la vista gráfica del GEOGEBRA la realización de las actividades 4 y 9. En la gráfica de la actividad 4, se **observan** los cuatro planos, el punto de intersección y las rectas de intersección de los planos. En la gráfica de la actividad 9 se muestra un polígono de vectores en el que **no se aprecia** de manera clara que uno de ellos es suma vectorial de los otros. **14 puntos**	No se documenta con imágenes la realización de alguna de las actividades 4 o 9, o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
EQUIPO No. _____ INTEGRANTES: ____________________ ____________________ OBSERVACIONES: ____________________ ____________________					**Total puntos obtenidos**	

RÚBRICA DE LA PRÁCTICA DEL PROCESO DE ORTONORMALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT

Criterios	Excelente	Notable	Bueno	Suficiente	Insuficiente	Puntos obtenidos
Propuesta del conjunto vectores	Se documenta la realización de la actividad 1. Los vectores propuestos son no unitarios de tres	Se documenta la realización de la actividad 1. Los vectores propuestos son no unitarios de tres	Se documenta la realización de la actividad 1. Los vectores propuestos son no unitarios de tres	Se documenta la realización de la actividad 1. Los vectores propuestos son no unitarios de tres	No se documenta la realización de la actividad 1	

que constituyen una base.	componentes y si forman una base. Se incluye **completa** la verificación analítica de las dos propiedades de las bases y está **correcta**. **20 puntos**	componentes y si forman una base. Se incluye **completa** la verificación analítica de las dos propiedades de las bases con un **solo error** en el proceso. **18 puntos**	componentes y si forman una base. Se incluye **completa** la verificación analítica de las dos propiedades de las bases hasta con **dos errores** en el proceso. **16 puntos**	componentes y si forman una base. Se **incluye** la verificación analítica de las dos propiedades. **14 puntos**	o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Obtención del primero y el segundo vector unitario de la base ortonormal.	Se documenta la realización de las actividades 3 y 4. Se incluye el proceso completo del cálculo de las componentes del primero y el segundo vector unitario y **todas** las componentes están **correctas**. **20 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 3 y 4. Se incluye el proceso completo del cálculo de las componentes del primero y el segundo vector unitario pero **una** componente es **incorrecta**. **18 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 3 y 4. Se incluye el proceso completo del cálculo de las componentes del primero y el segundo vector unitario pero **dos** componentes de un mismo vector están **incorrectas**. **16 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 3 y 4. Se incluye el proceso completo del cálculo de las componentes de los dos vectores unitarios, pero solo uno de ellos está **correcto** y el otro tiene **incorrectas tres** componentes. **14 puntos**	No documenta la realización de las actividades 3 y 4 o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Obtención del tercer vector unitario de la base ortonormal.	Se documenta la realización de las actividades 5, 6 y 7. En la actividad 5 se incluye el proceso del cálculo de las proyecciones del tercer vector sobre los primeros dos vectores unitarios y las respuestas están correctas. En la actividad 6 es correcto el cálculo de la operación vectorial para obtener el tercer vector unitario. En la actividad 7 se verifican las **dos** condiciones de las bases para el conjunto de los tres vectores y **se demuestra** que son unitarios y ortogonales. **20 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 5, 6 y 7. En la actividad 5 se incluye el proceso del cálculo de las proyecciones del tercer vector sobre los primeros dos vectores unitarios y las respuestas están correctas. En la actividad 6 es correcto el cálculo de la operación vectorial para obtener el tercer vector unitario. En la actividad 7 se verifican las **dos** condiciones de las bases para el conjunto de los tres vectores, pero solo **se comprueba una** de las condiciones de ortonormalidad **18 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 5, 6 y 7. En la actividad 5 se incluye el proceso del cálculo de las proyecciones del tercer vector sobre los primeros dos vectores unitarios y las respuestas están correctas. En la actividad 6 es correcto el cálculo de la operación vectorial para obtener el tercer vector unitario. En la actividad 7 se verifican las **dos** condiciones de las bases para el conjunto de los tres vectores, pero **no se comprueban** las condiciones de ortonormalidad. **16 puntos**	Se documenta la realización de las actividades 5, 6 y 7. En la actividad 5 se incluye el proceso del cálculo de las proyecciones del tercer vector sobre los primeros dos vectores unitarios y las respuestas están correctas. En la actividad 6 es correcto el cálculo de la operación vectorial para obtener el tercer vector unitario. En la actividad 7 se verifica **alguna** de las condiciones de las bases para el conjunto de los tres vectores. **14 puntos**	No se documenta la realización de alguna de las actividades 5, 6 y 7, o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
	Se documenta con imágenes de la vista gráfica en tres dimensiones del GEOGEBRA, la realización de las actividades 2, 3, 4, 5 y 6. En la gráfica de la	Se documenta con imágenes de la vista gráfica en tres dimensiones del GEOGEBRA, la realización de las actividades 2, 3, 4, 5 y 6. En la gráfica de la	Se documenta con imágenes de la vista gráfica en tres dimensiones del GEOGEBRA, la realización de las actividades 2, 3, 4, 5 y 6. En la gráfica de la	Se documenta con imágenes de la vista gráfica en tres dimensiones del GEOGEBRA, la realización de las actividades 2, 3, 4, 5 y 6. En la gráfica de la	No se documenta con imágenes la realización de alguna de las actividades	

Uso de SAC. (GEOGEBRA)	actividad 2, se observan los tres vectores que se proponen **con** sus etiquetas de identificación. En las actividades 3, 4, 5 se muestran todos los vectores correspondientes a los pasos del proceso de ortonormalización **con** sus respectivas etiquetas de identificación. En la gráfica de la actividad 6 **se observa** que los vectores son unitarios y ortogonales. **20 puntos**	actividad 2, se observan los tres vectores que se proponen **con** sus etiquetas de identificación. En las actividades 3, 4, 5 se muestran todos los vectores correspondientes a los pasos del proceso de ortonormalización **con** sus respectivas etiquetas de identificación. En la gráfica de la actividad 6 **no se observa** claramente que los vectores sean unitarios y ortogonales. **18 puntos**	actividad 2, se observan los tres vectores que se proponen **con** sus etiquetas de identificación. En las actividades 3, 4, 5 se muestran todos los vectores correspondientes a los pasos del proceso de ortonormalización , pero **sin** sus etiquetas de identificación. En la gráfica de la actividad 6 **no se observa** claramente que los vectores sean unitarios y ortogonales. **16 puntos**	actividad 2, se observan los tres vectores que se proponen pero **sin** sus etiquetas de identificación. En las actividades 3, 4, 5 se muestran todos los vectores correspondientes a los pasos del proceso de ortonormalización , pero **sin** sus etiquetas de identificación. En la gráfica de la actividad 6 **no se observa** claramente que los vectores sean unitarios y ortogonales. **14 puntos**	2, 3, 4, 5 o 6, o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Construcción del objeto (torre) o escultura del proceso de ortonormalización.	Se documenta con fotografías de la torre la realización de la actividad 8. La torre consta de cinco cubos o prismas unidos en forma rígida y cada uno de ellos tiene una estructura rígida con caras transparentes de tal manera que al observar la torre son visibles; los vectores que se proponen inicialmente, los vectores de cada uno de los pasos del proceso y los vectores de la base ortonormal. La estructura está pintada y las flechas de los vectores **están todas** firmemente ubicadas en la orientación correcta y la torre **no excede** las dimensiones indicadas. **20 puntos**	Se documenta con fotografías de la torre la realización de la actividad 8. La torre consta de cinco cubos o prismas unidos en forma rígida y cada uno de ellos tiene una estructura rígida con caras transparentes de tal manera que al observar la torre son visibles; los vectores que se proponen inicialmente, los vectores de cada uno de los pasos del proceso y los vectores de la base ortonormal. La estructura está pintada y las flechas de los vectores **están** firmemente ubicadas pero **una no está** en la orientación correcta y la torre **no excede** las dimensiones indicadas. **18 puntos**	Se documenta con fotografías de la torre la realización de la actividad 8. La torre consta de cinco cubos o prismas unidos en forma rígida y cada uno de ellos tiene una estructura rígida con caras transparentes de tal manera que al observar la torre son visibles; los vectores que se proponen inicialmente, los vectores de cada uno de los pasos del proceso y los vectores de la base ortonormal. La estructura está pintada y las flechas de los vectores **están** firmemente ubicadas pero **dos no están** en la orientación correcta y la torre **no excede** las dimensiones indicadas. **16 puntos**	Se documenta con fotografías de la torre la realización de la actividad 8. La torre consta de cinco cubos o prismas unidos en forma rígida y cada uno de ellos tiene una estructura rígida con caras transparentes de tal manera que al observar la torre son visibles; los vectores que se proponen inicialmente, los vectores de cada uno de los pasos del proceso y los vectores de la base ortonormal. La estructura está pintada y las flechas de los vectores **están** firmemente ubicadas pero **dos no están** en la orientación correcta y la torre **excede** las dimensiones indicadas. **14 puntos**	No se presenta el objeto (torre) físicamente para su evaluación o no se documenta con imágenes la realización de la actividad 8, o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Total puntos obtenidos						

EQUIPO No. _____ INTEGRANTES: ____
____
OBSERVACIONES: ____
____

4.4.6 Aportaciones esperadas de las actividades al alcance de las competencias.

Análisis de las aportaciones de las actividades propuestas con la interpretación geométrica de espacios vectoriales, subespacios, combinación e independencia lineal.

- En la actividad 1 se construye un poliedro en forma de una pirámide con una base cuadrada de 6 cm y una altura de 5 cm, que se usa en el desarrollo de la práctica para vincular los conceptos del tema a este objeto físico. Además, también su construcción propicia el desarrollo de habilidades constructivas de objetos, e introduce elementos de creatividad, ampliando con ello la gama de competencias involucradas.

- En la actividad 2, se establece físicamente el sistema de coordenadas, necesario para vincular el objeto físico con los conceptos matemáticos del tema de espacios vectoriales, siendo está actividad preliminar para el análisis analítico y gráfico que aporta al indicador de alcance relativo a determinar si un conjunto dado es o no un espacio vectorial.

- En la actividad 3, al obtener las ecuaciones de cada una de las caras se relaciona el tema de espacios vectoriales, con las actividades del tema de sistemas de ecuaciones, aportando así a una mejor estructuración del conocimiento sobre los diferentes temas de algebra lineal.

- En la actividad 4, al graficar cada una de los ecuaciones correspondientes a las caras de las pirámides se vinculan los planos abstractos del espacio geométrico con las caras planas de la pirámide, y sirve de preparación para el análisis gráfico que identifica y determina gráficamente si los conjuntos de puntos correspondientes a cada cara física de la pirámide es un subespacio. También aporta al desarrollo de la competencia genérica relativa a la habilidad en el uso de las TIC's.

- Contestar correctamente la pregunta del punto 5, requiere del conocimiento de las características gráficas de un plano que sea un subespacio de R^3 y su aportación es en el indicador de alcance relativo a determinar si un conjunto dado es o no un espacio vectorial.

- Contestar correctamente la pregunta del punto 6, requiere del conocimiento de las características gráficas que debe tener una recta en el espacio geométrico para que sea un subespacio de R^3 y su aportación es en el indicador de alcance relativo a determinar si un conjunto dado es o no un espacio vectorial.

- En la actividad 7, se selecciona una de las caras que por interpretación gráfica no sea un espacio vectorial y se comprueba mediante la aplicación de los axiomas de cerradura, que el conjunto de puntos correspondientes a este plano seleccionado, no es un espacio vectorial, y realizar esta actividad aporta al indicador de alcance relativo a determinar si un conjunto dado es o no un subespacio de R^3.

- En la actividad 8, se verifica que el conjunto solución de un sistema homogéneo es un subespacio de R^3 y a su vez se comprueba analíticamente la conclusión de la interpretación gráfica, aportando en el indicador relativo a la aplicación de las propiedades algebraicas de los subespacios para determinar si un conjunto es o no es un espacio vectorial.

- Para realizar la actividad 9 se requiere del conocimiento y la aplicación del concepto de combinación lineal de vectores, aportando así al indicador de alcance relativo a expresar un vector como una combinación lineal de otros y también al desarrollo de la competencia genérica relativa al uso de las TIC's.

- En la actividad 10, se le solicita al estudiante que determine si un conjunto de vectores coincidentes con las aristas entre las caras de la pirámide constituyen una base para el espacio R^3 , aportando en el indicador relativo a la evaluación de las condiciones que se deben cumplir para que un conjunto de vectores sea una base para un espacio vectorial.

Aportaciones esperadas de las actividades al alcance de las competencias.

Análisis de las aportaciones de las actividades propuestas con la representación gráfica del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

- En la actividad 1, se solicita proponer una base del espacio vectorial R^3 y su realización aporta al indicador del alcance de la competencia relativo a la evaluación de las propiedades de las bases para determinar si un grupo de vectores de un espacio vectorial es una base. Además, el estudiante al proponer su propia base, efectúa un proceso cognitivo de selección y toma de decisiones.

- La actividad 2, solicita la gráfica de la base propuesta inicialmente usando la representación gráfica de un vector en el concepto de una base de un espacio vectorial, por lo que su realización aporta el uso de la representación semiótica gráfica de una base. Además, graficar con GEOGEBRA en la actividad, aporta al desarrollo de la competencia genérica relativa al uso de sistemas algebraicos computarizados (SAC).

- Las actividades 3, 4, 5 y 6, corresponden con los pasos del proceso de ortonormalización y su realización aporta al indicador de alcance relativo a la aplicación del proceso de Gram-Schmidt para obtener bases ortonormales. Además, las gráficas en tres dimensiones que se solicitan con la vista 3D del GEOGEBRA facilitan la comprensión de cada etapa del proceso y al mismo tiempo ayuda al diseño de la torre representativa del proceso, aportando también al desarrollo de la competencia genérica relativa al uso de sistemas algebraicos computarizados (SAC).

- En la actividad 7, se solicita la verificación analítica de las condiciones de ortonormalidad y de las propiedades de las bases para el grupo de vectores que se obtiene del proceso y su realización aporta al indicador de alcance de las competencias relativo a la evaluación de las propiedades para comprobar que los vectores forman una base ortonormal para el espacio vectorial R^3.

- En la actividad 8, se solicita la construcción de un objeto tipo torre compuesta de cinco niveles que permiten observar todos los pasos del proceso de ortonormalizacion y su realización propicia el desarrollo de habilidades de diseño y construcción de objetos, de selección y toma de decisiones e introduce elementos de creatividad, ampliando con ello la gama de competencias que se desarrollan.

4.5 Un objeto a construir, fundamentos y actividades para el tema de Transformaciones lineales

4.5.1 Competencias específicas y genéricas

Competencia específica del tema de transformaciones lineales

Utiliza la definición de transformación lineal y sus propiedades para representarla matricialmente.

Competencias genéricas asociadas al tema

- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis.
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.
- Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente.
- Capacidad de trabajo en equipo.
- Habilidades básicas en el uso de la computadora (uso de Sistemas Algebraicos Computarizados SAC).

Indicadores de alcance de las competencias

La siguiente tabla contiene una propuesta de indicadores que el estudiante debe alcanzar de manera gradual en su proceso de construcción del conocimiento necesario para alcanzar la competencia específica.

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A) Verifica las condiciones de linealidad y determina si una transformación dada es lineal o no lineal.	20%
B) Expresa en forma matricial una trasformación lineal y evalúa las ventajas y limitaciones de esta representación y su relación con otros temas de la asignatura.	20 %
C) Aplica temas anteriores de la asignatura para obtener el núcleo, la imagen, la nulidad y el rango de una transformación lineal.	20 %
D) Resuelve problemas de aplicación de transformaciones lineales de reflexión, dilatación, contracción, rotación.	20 %
E) Utiliza programas de computadora (TIC's) para: obtener el núcleo y la imagen de una transformación lineal, interpretar los resultados de problemas de aplicación de transformaciones lineales.	20%

Tabla 14. Indicadores de alcance de las competencias del tema transformaciones lineales.

4.5.2 Fundamentos teóricos

De manera similar a los temas anteriores, en esta sección se incluye la teoría necesaria como conocimiento previo para realizar las actividades que se proponen.

Transformaciones lineales (Grossman, 2007).

De manera general, una transformación lineal de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W , es una clase especial de funciones. Antes de emitir una definición formal, consideremos la ampliación de la diversidad de funciones. Así, un ejemplo de una función f de una sola variable, que asocia un número real con otro número real, se define con la regla de correspondencia $f(x) = x^2$, y se dice que f es una función del conjunto de números reales R al conjunto de números reales R, y se especifica esto último escribiendo $f: R \to R$

Ahora, un ejemplo de una función g de dos variables independientes, que asocia un par de número reales (o a un vector de dos componentes) con un número real, se define con la regla de correspondencia $g(x, y) = x^2 + y^2$, y se dice que g es una función del conjunto R^2 al conjunto de número reales R, y que se especifica escribiendo $g: R^2 \to R$.

Un ejemplo de una función h, que asocia un par de números reales (o a un vector de dos componentes) con otro vector de dos componentes, se define con la regla de correspondencia $H(x, y) = (x^2 + 2y^2,\ x^2 - 3y^2)$ y se dice que H es una función del conjunto R^2 al conjunto R^2, y que se especifica escribiendo $H: R^2 \to R^2$.

Otro ejemplo de una función F, que asocia un par de número reales (o a un vector de dos componentes) con otro vector de tres componentes, se define con la regla de correspondencia $F(x, y) = (\ x + 3y,\ 2x - 4y,\ x + y)$ y se dice que F es una función del conjunto R^2 al conjunto R^3, y que se especifica escribiendo $F: R^2 \to R^3$.

Las dos últimas funciones se pueden escribir usando vectores columna

$$H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + 2y^2 \\ x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}$$

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y \\ 2x - 4y \\ x + y \end{bmatrix}$$

Este formato como vector columna para especificar la regla de correspondencia es otra forma o notación empleada en la literatura.

Todos los conjuntos mencionados en los párrafos anteriores son espacios vectoriales, por lo que podemos afirmar que estas funciones asocian un elemento o vector de un espacio vectorial V con un elemento o vector de otro espacio vectorial W. También es posible considerar que las funciones anteriores *transforman* un elemento de un espacio vectorial V a otro elemento o vector de un espacio vectorial W.

De este modo, las funciones anteriores se consideran como *transformaciones* y de las cuales solo la última función F se puede clasificar como una *transformación lineal*, de acuerdo a la siguiente definición formal de transformación lineal.

Definición de Transformación Lineal.

Una transformación $T: V \to W$, que se lee T de V en W, es una *transformación lineal* si para todos los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ que pertenecen al espacio vectorial V, y todo escalar α , se verifican las siguientes propiedades, llamadas de linealidad.

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \quad (1)$$

$$\mathrm{T}(\alpha \vec{\mathrm{v}}) = \alpha \mathrm{T}(\vec{\mathrm{v}}) \quad (2)$$

<u>Ejemplo</u>. Determinar si la siguiente transformación $T: R^2 \to R^2$ es lineal.

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + 2y^2 \\ x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}$$

Solución.

Para determinar si la transformación dada es lineal, verificamos las condiciones de linealidad.

Verificando la primera condición de linealidad.

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores del espacio vectorial V que en este caso es el espacio R^2. Entonces, *evaluando* la transformación dada en estos vectores específicos, reemplazando sus componentes en lugar de las variables, se obtiene

$$T(\vec{u}\ ) = T(u_1, u_2) = T\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {u_1}^2 + 2{u_2}^2 \\ {u_1}^2 - 3{u_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{v}\ ) = T(v_1, v_2) = T\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {v_1}^2 + 2{v_2}^2 \\ {v_1}^2 - 3{v_2}^2 \end{bmatrix}$$

Sumando ahora estos resultados nos queda por un lado

$$T(\vec{u}\ ) + T(\vec{v}\ ) = \begin{bmatrix} {u_1}^2 + 2{u_2}^2 \\ {u_1}^2 - 3{u_2}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {v_1}^2 + 2{v_2}^2 \\ {v_1}^2 - 3{v_2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ({u_1}^2 + {v_1}^2) + 2({u_2}^2 + {v_2}^2) \\ ({u_1}^2 + {v_1}^2) - 3({u_2}^2 + {v_2}^2) \end{bmatrix}$$

A su vez, sumando primero los vectores $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1\,,\ u_2 + v_2)$ y evaluando ahora la transformación dada en este vector que se obtiene de la suma, reemplazando estas componentes en lugar de las variables, nos queda

$$T(\ \vec{u} + \vec{v}\ ) = T((u_1 + v_1\,,\ u_2 + v_2) = T\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1 + v_1)^2 + 2(u_2 + v_2)^2 \\ (u_1 + v_1)^2 - 3(u_2 + v_2)^2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, comparando los resultados obtenidos se concluye que

$$\begin{bmatrix} ({u_1}^2 + {v_1}^2) + 2({u_2}^2 + {v_2}^2) \\ ({u_1}^2 + {v_1}^2) - 3({u_2}^2 + {v_2}^2) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} (u_1 + v_1)^2 + 2(u_2 + v_2)^2 \\ (u_1 + v_1)^2 - 3(u_2 + v_2)^2 \end{bmatrix}$$

Porque la suma de cuadrados es diferente del resultado de los binomios al cuadrado y por lo tanto *no se cumple* la condición

$$T(\ \vec{u} + \vec{v}\ ) = T(\vec{u}\ ) + T(\vec{v}\ )$$

Y *la transformación no es lineal*.

<u>Ejemplo</u>. Determinar si la siguiente transformación $T: R^2 \to R^3$ es lineal

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y \\ 2x - 4y \\ x + y \end{bmatrix}$$

Solución.

Verificando la primera condición de linealidad.

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores del espacio vectorial V que en este caso es el espacio R^2. Entonces, *evaluando* la transformación dada en estos vectores específicos, reemplazando sus componentes en lugar de las variables, se obtiene

$$T(\vec{u}\ ) = T(u_1, u_2) = \ T\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + 3u_2 \\ 2u_1 - 4u_2 \\ u_1 + u_2 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{v}\ ) = T((v_1, v_2) = \ T\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + 3v_2 \\ 2v_1 - 4v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix}$$

Sumando ahora estos resultados nos queda por un lado

$$T(\vec{u}\ ) + T(\vec{v}\ ) = \begin{bmatrix} u_1 + 3u_2 \\ 2u_1 - 4u_2 \\ u_1 + u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 + 3v_2 \\ 2v_1 - 4v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1 + v_1) + 3(u_2 + v_2) \\ 2(u_1 + v_1) - 4(u_2 + v_2) \\ (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \end{bmatrix}$$

A su vez, sumando primero los vectores $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1\,,\ u_2 + v_2\,)$ y evaluando ahora la transformación dada en este vector que se obtiene de la suma, reemplazando estas componentes en lugar de las variables, nos queda

$$T(\ \ \vec{u} + \ \vec{v}\ ) = T((u_1 + v_1\,,\ u_2 + v_2\,) = T\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1 + v_1) + 3(u_2 + v_2) \\ 2(u_1 + v_1) - 4(u_2 + v_2) \\ (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \end{bmatrix}$$

Finalmente, comparando los resultados obtenidos se concluye que

$$T(\ \ \vec{u} + \ \vec{v}\ ) = T(\vec{u}\ ) + T(\vec{v}\ )$$

Y entonces se cumple *la primera condición de linealidad.*

Verificando la segunda condición de linealidad.

Sea $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vector del espacio vectorial V que en este caso es el espacio R^2, y α un número real, se desea verificar si

$$T(\ \alpha\,\vec{v}\ \ ) = \alpha T(\vec{v}\ )$$

evaluando o aplicando la transformación dada al vector $\vec{v}$

$$T(\vec{v}\ ) = T(v_1, v_2) = \ T\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + 3v_2 \\ 2v_1 - 4v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por el escalar α.

$$\alpha T(\vec{v}\ ) = \alpha T(v_1, v_2) = \ \alpha T\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} v_1 + 3v_2 \\ 2v_1 - 4v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, v_1 + 3\alpha\, v_2 \\ 2\alpha\, v_1 - 4\alpha\, v_2 \\ \alpha\, v_1 + \alpha\, v_2 \end{bmatrix}$$

Ahora, multiplicando primero por α al vector $\vec{v}$

$$\alpha\,\vec{v} = \alpha(v_1, v_2) = (\alpha v_1, \alpha v_2)$$

Aplicando la transformación al vector $\alpha\vec{v}$, sustituyendo sus componentes en la transformación

$$T(\alpha\,\vec{v}\,) = T(\alpha v_1, \alpha v_2) = T\begin{bmatrix}\alpha v_1\\ \alpha v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha v_1 + 3\alpha v_2\\ 2\alpha v_1 - 4\alpha v_2\\ \alpha v_1 + \alpha v_2\end{bmatrix}$$

Comparando los resultados de las dos secuencias de cálculo se concluye que

$$T(\,\alpha\,\vec{v}\,) = \alpha T(\,\vec{v}\,)$$

Entonces se cumple también la segunda condición y se comprueba que *la transformación si es lineal.*

Representación matricial de una transformación lineal.

Si T es una transformación lineal del espacio vectorial R^n al espacio vectorial R^m, existe una matriz A de orden $m\,x\,n$, llamada *matriz de transformación*, tal que la transformación se puede escribir como $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{x}$ es un vector del espacio vectorial V.

<u>Ejemplo</u>. *E*xpresar la siguiente transformación lineal $T: R^2 \to R^3$ en la forma matricial $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$.

$$T\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x + 3y\\ 2x - 4y\\ x + y\end{bmatrix}$$

Solución.

Como la transformación es de R^2 a R^3, se evalúa la transformación dada en los vectores de la base estándar ordenada del espacio R^2, y cada resultado se toma como una columna de la matriz de la *matriz de transformación* de acuerdo al orden de la base estándar. La base estándar de R^2 es

$$\{(1,0), (0,1)\}$$

o bien

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

Evaluando la transformación para cada vector de la base estándar

$$T(1,0) = T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+3(0)\\2(1)-4(0)\\1+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$T(0,1) = T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0+3(1)\\2(0)-4(1)\\0+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-4\\1\end{bmatrix}$$

Entonces la matriz de transformación se construye tomando los resultados anteriores como columnas y la matriz A de la forma matricial de la transformación es

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -4\\1 & 1\end{bmatrix}$$

Y la forma matricial de la transformación $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ es

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -4\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

Donde se observa que la matriz de transformación es de orden 3 x 2 cuando la transformación es de R^2 a R^3.

Además, como en este ejemplo, la transformación convierte un vector del espacio R^2 a un vector del espacio R^3, y *no* se solicita la matriz de transformación referida a *otras bases distintas de las estándar, la matriz de transformación* se puede obtener por simple inspección, notando que la transformación

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+3y\\2x-4y\\x+y\end{bmatrix}$$

Se escribe, por simple inspección, de acuerdo a la regla de multiplicación de filas por columnas de las matrices como

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -4\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

Transformación de proyección

Sea el vector de componentes (x, y, z) de la figura 44 una transformación de proyección es aquella que "proyecta" este vector sobre el plano xy, y lo convierte a un vector ubicado en el plano xy.

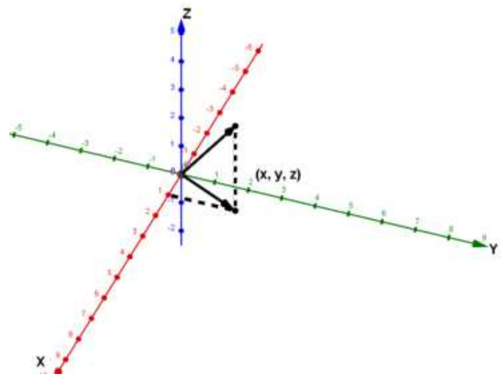


Figura 44. Proyección del vector (x, y, z) sobre el plano xy.

De la figura es claro que el vector que resulta de proyectar (x, y, z) sobre el plano xy es el vector $(x, y, 0)$, entonces la regla de la transformación es

$$T(x, y, z) = (x, y, 0)$$

o bien

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para escribir esta transformación en la forma $T(x) = Ax$ evaluamos la transformación anterior en la base estándar de R^3 porque la transformación es de R^3 en R^3 $(T: R^3 \rightarrow R^3)$ base estándar $\{(1,0,0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

$$T(1, 0, 0) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad T(0, 1, 0) = T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad T(0, 0, 1) = T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomando los resultados como columnas de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow T(x) = Ax \text{ es} \qquad T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Transformación de rotación

Sea el vector de componentes (x, y) de la figura 45 una transformación lineal que convierte este vector a otro vector de la misma magnitud (longitud) pero con un giro de θ grados con respecto al vector (x, y), en el sentido contrario al reloj, es

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformación de rotación

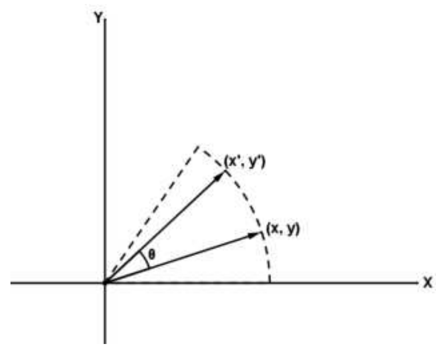


Figura 45. Transformación de rotación

A esta expresión se llega calculando las coordenadas (x', y') aplicando funciones trigonométricas y la geometría de la figura.

<u>Ejemplo</u>. Obtener las componentes del vector que resulta de girar el vector $\vec{V} = (2, 3)$ un ángulo de 30°

$$T(\vec{V}) = T(2,3) = T \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.866)(2) & (-0.5)(3) \\ (0.5)(2) & (0.866)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2232 \\ 3.598 \end{bmatrix}$$

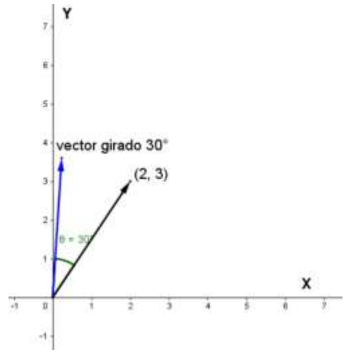


Figura 46. Representación gráfica del vector $\vec{V} = (2, 3)$ con una rotación de 30°

Transformación de Reflexión

Sea el vector de componentes (x, y) de la figura 47, una transformación lineal que produce como resultado una reflexión de este vector (x, y) con respecto al eje vertical, como se observa en la figura 47 es

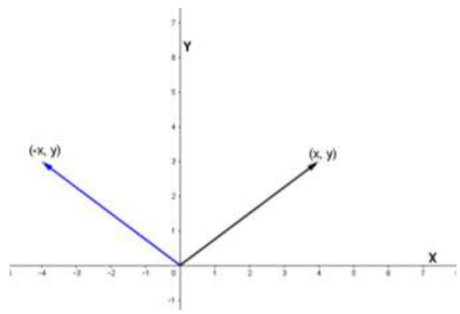


Figura 47. Transformación de reflexión con respecto al eje y.

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformación de reflexión con respecto al eje y, o bien en la forma de producto matricial $T(x) = Ax$

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por ejemplo: Si $\vec{V} = (2, 3)$

$$T(\vec{V}) = T(2, 3) = T\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Donde $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ es un vector reflejado con respecto al eje vertical.

4.5.3 Descripción del objeto a construir y un posible proceso de construcción

En esta práctica se construye un objeto tridimensional primero de manera virtual con el programa GEOGEBRA, y que consiste en un dibujo de una tortuga en tres dimensiones. Posteriormente se construye físicamente el objeto con las dimensiones indicadas en el objeto virtual, usando papel batería u otro a elección del estudiante, y colocando además, en las extremidades de la tortuga pequeños imágenes circulares para que se pueda adherir y fijar sobre un tablero metálico de dimensiones iguales a las de una hoja tamaño carta y que tiene una cuadrícula milimétrica.

Ambos objetos, la tortuga y el tablero con las cuadrícula milimétrica, se usan en el desarrollo de la práctica para colocar la tortuga en el tablero en una posición inicial y moverla a otras posiciones en el mismo solicitándole a los estudiantes identificar y proponer transformaciones lineales de proyección, rotación y de reflexión correspondientes a dichos movimientos.

4.5.4 Actividades propuestas y sus desarrollos para el objeto a construir

PRÁCTICA DEL TEMA DE TRANSFORMACIONES LINEALES.

Aplicación de las transformaciones lineales en el desplazamiento de una tortuga sobre un tablero.

1) Usando el programa GEOGEBRA con el sistema de referencia y las coordenadas que se indican en la tabla 15, haga una réplica de la tortuga de la figura 49.

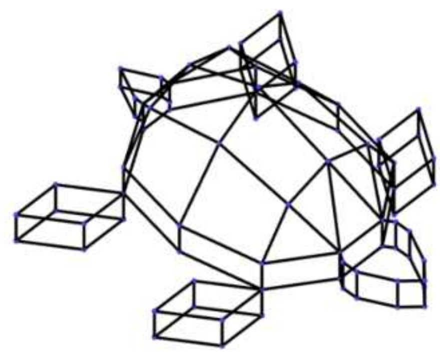


Figura 49. Tortuga a mover en el tablero

x	y	z
0	0	2
0	0	1.3
-0.5	1	2
-0.5	1	1.3
0.5	1	2
0.5	1	1.3
-5	1	1
-5	1	0
-3.5	1	1
-3.5	1	0
3.5	1	1
3.5	1	0
5	1	1
5	1	0
-4	2.5	1
-4	2.5	0
-2.5	2.5	2
-2.5	2.5	1
-1.5	2.5	3.5
0	2.5	4
1.5	2.5	3.5
2.5	2.5	2
2.5	2.5	1
2.5	2.5	0
-0.5	1.3	2
-0.5	1.3	1.3

x	y	z
-0.5	1.3	1
0.5	1.3	2
0.5	1.3	1.3
0.5	1.3	1
4	2.5	1
4	2.5	0
-3	5	2
-3	5	1
-1.5	5	4
0	5	5
1.5	5	4
3	5	2
3	5	1
-3.5	6	1
-3.5	6	0
-5	6	1
-5	6	0
-4	7.5	1
-4	7.5	0
-2.5	7.5	2
-2.5	7.5	1
-2.5	7.5	0
-1.5	7.5	3.5
0	7.5	4
1.5	7.5	3.5
2.5	7.5	2

x	y	z
2.5	7.5	1
2.5	7.5	0
3.5	6	1
3.5	6	1
5	6	1
5	6	0
4	7.5	1
4	7.5	0
-0.8	8.7	2
-0.8	8.7	1
0.8	8.7	2
0.8	8.7	1
-1	9	2
-1	9	1
1	9	2
1	9	1
-1	9.5	2
-1	9.5	1
1	9.5	2
1	9.5	1
-0.5	10.5	2
-0.5	10.5	1
0.5	10.5	2
0.5	10.5	1
0	11	2
0	11	1

Tabla 15. Coordenadas del dibujo de la tortuga.

2) Con la ayuda del programa GEOGEBRA realice el desarrollo correspondiente del objeto tridimensional de la tortuga y luego construya el

objeto con papel batería o algún otro material a su elección, pero de utilidad para las actividades de esta práctica.

3) En la parte inferior de la tortuga pegue tiras de imán plano, de tamaño menor a las longitudes de la tortuga, y que a su vez sirvan de refuerzo para mantener firme las extremidades de la tortuga que haya construido.

4) Sobre una delgada placa metálica de dimensiones iguales a una hoja de papel tamaño carta, trace una cuadrícula con cuadros de 1 cm, o bien, simplemente pegue una hoja de papel milimétrico de manera que la placa quede con una cuadrícula.

5) Seleccione como origen de un sistema de coordenadas rectangulares, un punto de la cuadrícula ubicado en el centro del tablero, con respecto a este punto especifique la dirección positiva de los ejes horizontal (eje *x*) y vertical (eje *y*).

6) Coloque en el tablero a la tortuga en la posición indicada en la figura 50. Exprese en forma matricial una transformación lineal $T: R^3 \to R^3$ para obtener a partir de los puntos o vectores de la figura 49, la proyección de la figura 50.

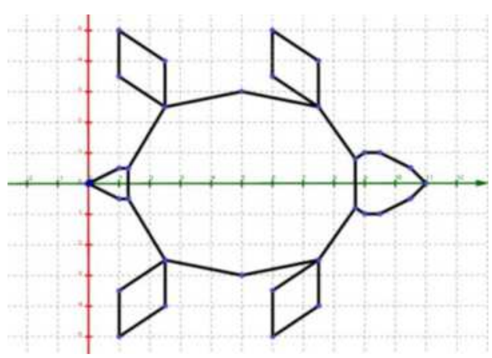


Figura 50. Proyección en el plano xy de la tortuga.

7) Usando el programa GEOGEBRA realice una réplica de la proyección que se obtiene en la cuadrícula de la placa. Documente la

realización de esta parte de la actividad capturando la pantalla y use esta imagen en su reporte escrito.

8) Manteniendo el punto extremo de cola de la tortuga en el origen, proponga una transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2$, expresada en forma matricial, para rotar todo el dibujo de la tortuga de la actividad del punto anterior, hasta una posición tal que, el punto extremo de la cabeza se encuentre en el punto de coordenadas $(9.0107, 6.3093)$. Aplique esta transformación de rotación a todos los puntos necesarios para obtener las coordenadas correspondientes en esta nueva posición, y haga el dibujo de la tortuga en esta posición usando el programa GEOGEBRA.

9) Proponga una transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2$, expresada en forma matricial, para hacer una reflexión del dibujo de la tortuga de la posición inmediata anterior con respecto al eje vertical. Realice un dibujo rápido en esa posición, doblando la hoja y marcando firmemente los puntos desde el reverso de la hoja milimétrica y uniendo con segmentos rectos los puntos marcados.

10) En lugar de hacer la reflexión del punto anterior, proponga una transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2$, expresada en forma matricial, para rotar todo el dibujo de la tortuga de desde la posición del punto 6 hasta la posición del punto 7. Multiplique las dos matrices de las transformaciones de rotación y demuestre que el producto es igual a la matriz de la transformación de reflexión.

4.5.5 Instrumentos de evaluación de la construcción de los objetos y de las actividades propuestas

RÚBRICA DE LA PRÁCTICA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL DESPLAZAMIENTO DE UNA TORTUGA

Criterios	Excelente	Notable	Bueno	Suficiente	Insuficiente	Puntos obtenidos
Construcción de la tortuga y preparación del tablero.	Se documenta con imágenes la realización de las actividades 2 y 3. El objeto (la tortuga) tiene las proporciones indicadas en la tabla de la actividad 1 y está correctamente **armada**, **pintada** y **pegada** en forma rígida. Se mantiene fija en el tablero por la acción de los pequeños imanes de la parte inferior. El tablero metálico es de las dimensiones indicadas y tiene una cuadrícula como se indica en la actividad 3. **20 puntos**	Se documenta con imágenes la realización de las actividades 2 y 3. El objeto (la tortuga) tiene las proporciones indicadas en la tabla de la actividad 1 y está correctamente **armada** y **pegada** en forma rígida. Se mantiene fija en el tablero por la acción de los pequeños imanes de la parte inferior. El tablero metálico es de las dimensiones indicadas y tiene una cuadrícula como se indica en la actividad 3. **18 puntos**	Se documenta con imágenes la realización de las actividades 2 y 3. El objeto (la tortuga) tiene las proporciones indicadas en la tabla de la actividad 1 y está correctamente **armada** y **pegada** en forma rígida. Se mantiene fija en el tablero por la acción de los pequeños imanes de la parte inferior. El tablero metálico **no es** de las dimensiones indicadas pero es **apropiada** para los fines y tiene una cuadrícula como se indica en la actividad 3. **16 puntos**	Se documenta con imágenes la realización de las actividades 2 y 3. El objeto (la tortuga) tiene las proporciones indicadas en la tabla de la actividad 1 y está correctamente **armada** y **pegada** en forma rígida. Se mantiene fija por la acción de los pequeños imanes pero solo en **algunas orientaciones** del tablero. El tablero metálico **no es** de las dimensiones indicadas pero es **apropiada** para los fines y tiene una cuadrícula como se indica en la actividad 3. **14 puntos**	No presenta físicamente la pieza de la tortuga y el tablero para su evaluación o no documenta la realización de alguna de las actividades 2 o 3, o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Transformación lineal de la proyección al plano XY.	El reporte documenta la realización de las actividades 4 y 5. El sistema de coordenadas se muestra en la cuadrícula y está en la posición que se solicita. Es correcta la forma matricial de la transformación lineal de proyección y se incluye la **aplicación** de la transformación para obtener **todas** las coordenadas de los puntos que resaltan en la figura 2 de la proyección al plano. **20 puntos**	El reporte documenta la realización de las actividades 4 y 5. El sistema de coordenadas se muestra en la cuadrícula y está en la posición que se solicita. Es correcta la forma matricial de la transformación lineal de proyección y se incluye la **aplicación** de la transformación para obtener **algunas** las coordenadas de los puntos que resaltan en la figura 2 de la proyección al plano. **18 puntos**	El reporte documenta la realización de las actividades 4 y 5. El sistema de coordenadas se muestra en la cuadrícula y está en la posición que se solicita. Es correcta la forma matricial de la transformación lineal de proyección y se incluye la **aplicación** de la transformación para obtener al menos **una** de las coordenadas de los puntos que resaltan en la figura 2 de la proyección al plano. **16 puntos**	El reporte documenta la realización de las actividades 4 y 5. El sistema de coordenadas se muestra en la cuadrícula y está en la posición que se solicita. Es correcta la forma matricial de la transformación lineal de proyección y solo se obtienen **por inspección** los datos de las coordenadas. **14 puntos**	No documenta la realización de las actividades 4 y 5 o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Transformacione	Se documenta la realización de las actividades 6 y 7. El proceso del cálculo del ángulo de rotación está correcto. La forma matricial de la transformación de rotación es correcta y se aplica a **todos** los puntos de unión para obtener las nuevas	Se documenta la realización de las actividades 6 y 7. El proceso del cálculo del ángulo de rotación está correcto. La forma matricial de la transformación de rotación es correcta y se aplica a **todos** los puntos de unión para obtener las nuevas coordenadas que corresponden	Se documenta la realización de las actividades 6 y 7. El proceso del cálculo del ángulo de rotación está correcto. La forma matricial de la transformación de rotación es correcta y se aplica solo a **algunos** de los puntos de unión para obtener las nuevas	Se documenta la realización de las actividades 6 y 7. El proceso del cálculo del ángulo de rotación está correcto. La forma matricial de la transformación de rotación es correcta y el **dibujo** en la posición rotada es correcto. La forma matricial de la	No se documenta la realización de alguna de las actividades 6 o 7, o no se cumple al menos con lo señalado en la	

s de la rotación y la reflexión de la tortuga.	coordenadas que corresponden con el dibujo correcto en la posición rotada. La forma matricial de la transformación de reflexión es correcta y el dibujo es **correcto** y se obtiene como se **indica** en la actividad 7. **20 puntos**	con el dibujo correcto en la posición rotada. La forma matricial de la transformación de reflexión es correcta y el dibujo es **correcto**. **18 puntos**	coordenadas pero el dibujo es correcto. La forma matricial de la transformación de reflexión es correcta y el dibujo es **correcto**. **16 puntos**	transformación de reflexión es correcta y el dibujo es **correcto**. **14 puntos**	columna suficiente. **0 puntos**	
El producto de las matrices de transformación en la aplicación sucesiva de transformaciones	Se documenta la realización de la actividad 8. El ángulo de rotación para la posición indicada es correcto. La forma matricial de la nueva transformación de rotación es correcta y *se aplica* para comprobar *todas* las coordenadas de los puntos que resaltan en esa posición. Se incluye el producto de las matrices de transformación rotación y reflexión de las dos actividades 6, 7 y se demuestra que es igual a la de la rotación del ángulo mayor. **20 puntos**	Se documenta la realización de la actividad 8. El ángulo de rotación para la posición indicada es correcto. La forma matricial de la nueva transformación de rotación es correcta y *se aplica* para comprobar *algunas* de las coordenadas de los puntos que resaltan en esa posición. Se incluye el producto de las matrices de transformación rotación y reflexión de las dos actividades 6, 7 y se demuestra que es igual a la de la rotación del ángulo mayor. **18 puntos**	Se documenta la realización de la actividad 8. El ángulo de rotación para la posición indicada es correcto. La forma matricial de la nueva transformación de rotación es correcta y *se aplica* para comprobar al menos *una* de las coordenadas de los puntos que resaltan en esa posición. Se incluye el producto de las matrices de transformación rotación y reflexión de las dos actividades 6, 7 y se demuestra que es igual a la de la rotación del ángulo mayor. **16 puntos**	Se documenta la realización de la actividad 8. El ángulo de rotación para la posición indicada es correcto. La forma matricial de la nueva transformación de rotación es correcta. *No se aplica* la transformación, pero se incluye el producto de las matrices de transformación rotación y reflexión de las dos actividades 6, 7 y se demuestra que es igual a la de la rotación del ángulo mayor. **14 puntos**	No se documenta la realización de la actividad 8 o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
Uso de SAC. (GEOGEBRA)	Se documenta con imágenes de la vista gráfica del GEOGEBRA la realización de las gráficas que se solicitan en las actividades 1, 2, 5 y 6. La réplica de la figura 1 de la actividad 1 es *correcta* y se incluyen las figuras del desarrollo de la tortuga que se solicitan en la actividad 2. Es correcta la réplica de la proyección al plano *xy* de la figura 2 de la actividad 5 y el dibujo de la tortuga en la posición rotada de la actividad 6 es **correcto**. **20 puntos**	Se documenta con imágenes de la vista gráfica del GEOGEBRA la realización de las gráficas que se solicitan en las actividades 1, 2, 5 y 6. La réplica de la figura 1 de la actividad 1 tiene un *solo error* y se incluyen las figuras del desarrollo de la tortuga que se solicitan en la actividad 2. Es correcta la réplica de la proyección al plano *xy* de la figura 2 de la actividad 5 y el dibujo de la tortuga en la posición rotada de la actividad 6 es *correcto.* **18 puntos**	Se documenta con imágenes de la vista gráfica del GEOGEBRA la realización de las gráficas que se solicitan en las actividades 1, 2, 5 y 6. La réplica de la figura 1 de la actividad 1 tiene *dos errores* y se incluyen las figuras del desarrollo de la tortuga que se solicitan en la actividad 2. Es correcta la réplica de la proyección al plano *xy* de la figura 2 de la actividad 5 y el dibujo de la tortuga en la posición rotada de la actividad 6 es *correcto.* **16 puntos**	Se documenta con imágenes de la vista gráfica del GEOGEBRA la realización de las gráficas que se solicitan en las actividades 1, 2, 5 y 6. La réplica de la figura 1 de la actividad 1 tiene *dos errores* y se incluyen las figuras del desarrollo de la tortuga que se solicitan en la actividad 2. Es correcta la réplica de la proyección al plano *xy* de la figura 2 de la actividad 5 y el dibujo de la tortuga en la posición rotada de la actividad 6 tiene un *solo error.* **14 puntos**	No se documenta con imágenes la realización de dos de las gráficas que se solicitan en las actividades 1, 2, 5 y 6, o no se cumple al menos con lo señalado en la columna suficiente. **0 puntos**	
EQUIPO No._____ INTEGRANTES: ______________________________ OBSERVACIONES:______________________________					**Total puntos obtenidos**	

4.5.6 Aportaciones esperadas de las actividades al alcance de las competencias.

Análisis de las aportaciones de las actividades propuestas con la aplicación de las trasformaciones lineales al movimiento de una pieza en forma de tortuga sobre un tablero.

- En la actividad 1, se solicita al estudiante una réplica de la figura de una tortuga y la realización de la actividad profundiza en el dominio del programa GEOGEBRA y aporta a la competencia genérica relativa al desarrollo de habilidades en el uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC's).

- En la actividad 2, se le pide al estudiante la construcción del objeto que se ha dibujado en la actividad 1 y su realización propicia el desarrollo de habilidades constructivas de objetos, e introduce elementos de creatividad, ampliando con ello la gama de competencias involucradas.

- En la actividad 3, la preparación y adaptación del tablero cuadriculado que se solicita al estudiante es con la intención de completar los objetos físicos necesarios para la realización de la práctica y una vez hecha la adaptación, es posible hacer una práctica que aporta la vinculación del concepto matemático de transformación lineal con el contexto del estudiante.

- En la actividad 4 se ubica un sistema de coordenadas al centro del tablero y constituye el primer paso para llevar a cabo la aplicación del tema de transformaciones. De esta manera, esta actividad aunque es muy sencilla de realizar es de suma importancia en el contexto de la aplicación como el elemento clave que le permite al estudiante pasar del concepto matemático abstracto al contexto físico.

- En la actividad 5, se le solicita al estudiante realizar físicamente una transformación de proyección del objeto tridimensional (tortuga) sobre el plano del tablero cuadriculado y al mismo tiempo se le pide la expresión que define una transformación lineal para realizar dicha proyección, por lo que su principal aportación es en lo relativo al indicador de la solución de problemas de aplicación de las transformaciones lineales.

- La realización de la actividad 6, es con la intención de realizar físicamente una rotación de un objeto y asociar esta rotación con la aplicación de una transformación lineal, aportando de esta manera al alcance de indicador relativo a la solución de problemas de aplicación de las transformaciones lineales. Además, como se usa el programa GEOGEBRA para aplicar la transformación de rotación a todos los vértices de la tortuga, entonces también se aporta al desarrollo de la competencia genérica relativa al uso de las TIC´s.

- En la actividad 7, tiene la intención de realizar físicamente una transformación lineal de reflexión sobre un objeto aportando también al alcance del indicador relativo a la solución de problemas de transformaciones lineales y a la representación de estas en forma matricial. Además, se muestra como obtener una repuesta rápida y correcta usando un procedimiento alternativo, siempre que la hoja milimétrica no esté tan firmemente pegada y la hoja se pueda doblar para hacer la reflexión.

- La realización de la actividad 8, requiere un mejor dominio de las transformaciones de rotación y reflexión, de tal manera que se pueda llegar a la misma posición y gráfica en el tablero aplicando diferentes transformaciones. Además esta actividad le da significado físico al producto de las matrices de transformaciones que se aplican en forma secuenciada, siendo esto último su principal aportación.

5. CONCLUSIONES

La propuesta contenida en el presente trabajo de tesis, muestra a manera de ejemplos diez prácticas para utilizar una didáctica centrada en la construcción de objetos en los temas de la asignatura de Álgebra Lineal, verificando la hipótesis planteada.

Las competencias específicas y genéricas de cada tema en el presente trabajo, son las establecidas en el programa oficial de estudio, basado en competencias, de la asignatura de Álgebra Lineal del Tecnológico Nacional de México (TecNM), mismas que se consideran como las adecuadas para tomarlas como referencia y orientar la planeación de la didáctica de los temas en este trabajo.

Los indicadores de alcance de las competencias en cada tema son una propuesta personal influenciada por la consulta del formato estandarizado de la instrumentación didáctica que profesores del TecNM de la asignatura han puesto en la red. Aunque se reconoce que lo ideal es la validación institucional a través de cuerpos colegiados.

La propuesta didáctica está basada en la teoría de las representaciones semióticas de los distintos conceptos matemáticos de los cinco temas involucrados en este trabajo, y hasta donde fue posible, por razones de tiempo y profundidad de tratamiento de los temas, se incluyeron actividades en las prácticas relacionadas a las distintas representaciones semióticas de un mismo concepto.

La sección de análisis de las aportaciones de cada una de las actividades en cada una de las diez prácticas que se proponen, reflejan una interpretación personal de mi autoría y al documentarse en forma escrita justifican la inclusión de determinada actividad por su aportación al desarrollo de las competencias usando distintas representaciones semióticas y al mismo tiempo deja abierta la posibilidad a otras opiniones de profesores que impartan la asignatura.

La interpretación geométrica de los diferentes conceptos de los temas es una representación semiótica que se usa con frecuencia en las diferentes prácticas que se proponen, y se asocian a la construcción física de un objeto con la intención de pasar del concepto matemático abstracto al contexto físico mediante el objeto construido y utilizado en el desarrollo de las actividades propuestas.

El uso del programa GEOGEBRA en algunas actividades de cada una de las diez prácticas, aporta de manera constante al desarrollo de la competencia genérica relativa al uso de las tecnologías de información y comunicación, y al mismo tiempo permite usar los SAC no solo como herramienta de cálculo, sino como recurso tecnológico que permite mejorar la didáctica del tema.

Dentro de los trabajos pendientes por realizar, está la aplicación de estas prácticas en diferentes grupos y realizar la documentación de los resultados obtenidos dando lugar a la investigación sobre el uso de esta propuesta didáctica, aunque es importante mencionar que, debido a razones de tiempo disponible para los temas en un programa semestral, el profesor tendrá que seleccionar solo algunas de las prácticas de acuerdo a las características y motivación del grupo hacia las actividades de construcción de objetos.

También queda pendiente por proponer otras prácticas que le permitan al profesor que imparta la asignatura disponer de una gama más amplia de prácticas centradas en la construcción de objetos que aporten a todos los indicadores de todos los temas de la asignatura.

En el ámbito del uso de las tecnologías de la información y comunicación, también es de interés documentar en video, a través de un canal disponible en la red, la construcción de todos los objetos y una breve explicación de lo que el estudiante debe realizar en cada actividad, para usar esta misma didáctica de construcción de objetos para cursos de Álgebra Lineal de educación a distancia.

6. REFERENCIAS

Sierpinska A. (2000) On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. In: Dorier JL. (eds) On the Teaching of Linear Algebra. Mathematics Education Library, vol 23. Springer, Dordrecht

Marcela Parraguez, Javier Lezama & Raúl Jiménez. Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores.

M. Parraguez, and A. Oktaç, Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. Linear Algebra and its Applications, 432(8), 2010.

Uzuriaga, V. & Martínez, A. (2010). Algunas experiencias que han contribuido a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Revista Entre Ciencia e Ingeniería*, Universidad Católica de Pereira. 3 (6):112-128.

Oktaç, Asuman; Trigueros, María ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 13, núm. 4, 2010, pp. 373-385

Isabel Maturana Peña,Marcela Parraguez González ,Miguel Rodríguez Jara Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación lineal María Trigueros Gaisman[1]

Mtro. Natividad Nieto Saldaña, Mtro. Juan de Dios Viramontes Miranda y Mtro. Francisco López Hernández. ¿Qué es matemática educativa?

García, Paola; Vargas, Jorge (2014). *El uso de manipulables para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales y cuadráticas, y de sistemas de ecuaciones lineales en la escuela secundaria.* En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 879-887). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativ

Juan D. Godino indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Nora Ferreyra, Marcelo Lorenzo, Mei Lee, Fabio Prieto, Daniela Scarímbolo y Carlos Parodi ¿Que modelos epistemológicos subyacen en la enseñanza del álgebra universitaria?

Prada, R., Hernández, C.A., Jaimes L.A. (2017). Representaciones semióticas alrededor del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Góndola, Enseñ Aprend Cienc*.

Distéfano, María Laura, Aznar, María Andrea, Pochulu, Marcel David, PRÁCTICAS MATEMÁTICAS Y FUNCIONES SEMIÓTICAS EN LA SIGNIFICACIÓN DE REPRESENTACIONES SIMBÓLICAS DE LA MATEMÁTICA SUPERIORRevista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias [en linea] 2016.

Robinet, J. (1986). Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linèaire. Cahier de Didactique des Mathèmatiques, 29 IREM de Paris VII.

Weller, K., A. Montgomery, J. Clark, J. Cottrill, M. Trigueros, I. Arnon y E. Dubinsky (2002), *Learning Linear Algebra with ISETL*

Grisales-Franco, L. M., & González-Agudelo, E. M. (2009). El saber sabio y el saber enseñado: un problema para la didáctica universitaria. Educación y Educadores, 12(2), 77-86.

Raymond A. Beauregard, John B. Fraleigh, (1973). A First Course in Linear Algebra. Editorial, Houghton Mifflin Company.

Eduardo Solar González, Leda Speziale de Guzmán, (1989). Apuntes de Álgebra Lineal, EDITORIAL LIMUSA, S.A. de C.V.

Murray R. Spiegel, Robert E. Moyer, Tercera Edición . 2007. Álgebra Superior Editorial, McGRAW-HILL.