Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Didáctica de las Matemáticas
y de las Ciencias

Análisis del pensamiento algebraico de estudiantes de Bachillerato a través de la generalización de patrones

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestra en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias

Presenta

Míriam Ramos Franco

Dirigido por:

Dra. Lilia Patricia Aké Tec

Dra. Lilia Patricia Aké Tec
Presidente

M. en C. Luisa Ramírez Granados
Secretario

M.D.M. Teresa de Jesús Valerio López
Vocal

M.D.M. Carmen Sosa Garza
Suplente

M.D.M. Cecilia Hernández Garcíadiego
Suplente

Centro Universitario, Santiago de Querétaro, Querétaro
Octubre 2023
México

Dedicatoria

A **Dios**, quien me ha bendecido durante toda mi vida.

A mis padres **Octavio e Irma,** a mis hermanos, **Octavio y Javier** por ser personas maravillosas, por darme su amor y apoyo incondicional. Gracias por sus sabios consejos, por animarme a conseguir mis objetivos, por hacerme sentir amada en todo momento. Ustedes son mi inspiración.

A mi novio, **Jorge** por su amor sincero, por estar animándome durante toda la maestría, por hacer de mi estancia en Querétaro una experiencia inolvidable. Gracias por el gran apoyo que me has dado. Alegras mi corazón.

Agradecimientos

A la Universidad Autónoma de Querétaro, por ser mi casa de estudios y por brindarme las oportunidades y herramientas necesarias para fortalecer mi formación como Maestra en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias.

A la Dra. Lilia Patricia Aké Tec, por haber dirigido este proyecto de investigación con un gran compromiso; por motivarme a alcanzar mis objetivos, por compartir conmigo su conocimiento y por su apoyo incondicional a lo largo de todo el proceso de la elaboración de la tesis. Mi admiración y respeto hacia usted.

A las maestras Luisa, Teresa, Carmen y Cecilia, por aceptar ser mis sinodales, por sus aportes valiosos a la tesis y por el apoyo que siempre me brindaron. También agradezco la vocación que muestran al dar sus clases.

A mis maestros de la maestría, por su paciencia y compromiso para compartir su conocimiento y por sus consejos para mejorar la práctica docente.

A la maestra Paty y Luisa, por confiar en mí y brindarme la oportunidad de realizar mi estancia académica en la Facultad de Ingeniería. Experiencia que enriqueció significativamente mi formación profesional.

A José, por ser mi compañero y amigo en la maestría, por el apoyo que me ha brindado.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada para realizar mis estudios de Maestría.

(CVU/Becaria): 1144649

Resumen

El desarrollo del pensamiento algebraico en el Bachillerato es de suma importancia debido a que permite una mejor compresión de situaciones y fenómenos y es base para los estudios en niveles superiores. En matemáticas, la generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes y eficaces de introducir el pensamiento algebraico. Por lo tanto, el presente estudio tiene como objetivo analizar el pensamiento algebraico de estudiantes de Bachillerato a través de la aplicación de una secuencia didáctica sobre generalización de patrones. Como fundamento se utiliza los niveles de demanda cognitiva, las estrategias de generalización de patrones y los niveles de algebrización. El desarrollo del estudio se llevó a cabo con un grupo de 42 estudiantes, pero de acuerdo a la validación de datos, solo se caracterizó el pensamiento algebraico de 22 estudiantes. La investigación se realizó con un enfoque cualitativo, utilizando la ingeniería didáctica como diseño metodológico. La secuencia didáctica se integró por cuatro tareas de patrones figurales; dos de ellas incluyeron patrones lineales y las dos restantes, patrones de crecimiento cuadrático. En cuanto a los resultados obtenidos, se aprecia que a lo largo de la secuencia didáctica emergieron ocho estrategias: conteo, recursiva, multiplicativa con ajuste, explícita, adivinar y comprobar, contextual, fragmentación y aproximación. En cuanto a los niveles de algebrización que alcanzó cada estudiante, se determinaron cuatro categorías de perfiles de pensamiento algebraico, siendo el perfil B2 el más frecuente, con 5 estudiantes que coincidieron en tener un nivel intermedio de algebrización en las dos primeras tareas y en alguna de las tareas de patrones cuadráticos. Como conclusiones se tiene que el tipo de patrón y de consignas influyen en el uso de ciertas estrategias. Además, las tareas favorecieron la necesidad de utilizar literales, por lo que pueden propiciar un sentido a la articulación de la aritmética y el álgebra. Se espera que la información generada sea útil para futuras investigaciones y para los profesores en activo que decidan implementar este tipo de tareas en el aula de clases.

Palabras clave: álgebra, pensamiento, generalización, patrones, bachillerato

Abstract

The development of algebraic thinking in high school is of utmost importance because it allows a better understanding of situations and phenomena and is the basis for studies at higher levels. In mathematics, pattern generalization is considered one of the most important and effective ways to introduce algebraic thinking. Therefore, the present study aims to analyze the algebraic thinking of high school students through the application of a didactic sequence on pattern generalization. As a foundation, the levels of cognitive demand, pattern generalization strategies and levels of algebrization are used. The development of the study was carried out with a group of 42 students, but according to data validation, only the algebraic thinking of 22 students was characterized. The research was carried out with a qualitative approach, using didactic engineering as a methodological design. The didactic sequence was made up of four figural pattern tasks; two of them included linear patterns and the remaining two, quadratic growth patterns. Regarding the results obtained, it can be seen that throughout the didactic sequence eight strategies emerged: counting, recursive, multiplicative with adjustment, explicit, guess and check, contextual, fragmentation and approximation. Regarding the levels of algebraization reached by each student, four categories of algebraic thinking profiles were determined, with profile B2 being the most frequent, with 5 students who had an intermediate level of algebraization in the first two tasks coincidentally and in some of quadratic pattern tasks. The conclusions are that the type of pattern and instructions influence the use of certain strategies. Furthermore, the tasks favored the need of using literals, so they can provide meaning to the articulation of arithmetic and algebra. It is expected that the information generated will be useful for future research and for active teachers who decide to implement this type of tasks in the classroom.

Keywords: algebra, thinking, generalization, patterns, high school

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

Las tareas sobre generalización de patrones son consideradas como como una de las rutas más importantes y eficaces de introducir y desarrollar el pensamiento algebraico de los estudiantes (Radford, 2010; Zapatera, 2018a). Este tipo de tareas consisten en hallar una propiedad común local que luego se generaliza a todos los términos de la secuencia, la regularidad encontrada sirve para determinar una regla general que permita calcular cualquier término de la secuencia (Radford, 2006; 2008).

En México, existen escasos estudios del desempeño de los estudiantes de nivel medio superior al resolver tareas que involucren patrones. Por lo tanto, la presente investigación tiene como objetivo analizar el pensamiento algebraico de estudiantes de Bachillerato a través de la aplicación de una secuencia didáctica sobre tareas de generalización de patrones. Para realizar la caracterización del pensamiento algebraico se consideran principalmente las nociones de el nivel de demanda cognitiva de las consignas, los tipos de estrategias y los niveles de algebrización.

Para abordar el estudio de manera organizada, el documento está dividido en 7 capítulos. En el capítulo 1 se exponen los antecedentes internacionales y nacionales que abarcan investigaciones realizadas desde el nivel educativo básico hasta el superior; en el capítulo 2 se describe el problema y la pregunta de investigación, se definen los objetivos y se justifica la importancia del estudio; en el capítulo 3 se proporciona el marco teórico que permite entender con mayor claridad los conceptos utilizados en esta investigación; en el capítulo 4 se detalla de manera general la metodología que se llevó a cabo para lograr los objetivos; en el capítulo 5 se describe específicamente cómo se realizó el desarrollo de la ingeniería didáctica en sus 4 fases; en el capítulo 6 se presentan y discuten los resultados de acuerdo a las tareas y al desempeño individual del estudiante y por último en el capítulo 7 se concluye y se proporcionan algunas recomendaciones.

Capítulo 1. Antecedentes

En este capítulo se presentan los antecedentes internacionales y nacionales que dan sustento a la investigación. Para una mejor organización, los antecedentes están ordenados de manera ascendente en relación al nivel educativo en el que se llevaron a cabo. Los estudios que se reportan relacionan el pensamiento algebraico y la generalización de patrones. Cabe mencionar que en este capítulo se hace referencia a estrategias específicas que utilizan los estudiantes en las tareas de patrones. Si el lector desea conocer cómo se definen dichas estrategias, se sugiere revisar la sección 3.3.Estrategias de generalización que se encuentra en el capítulo del Marco Teórico.

1.1 Internacionales

A nivel Primaria se han realizado numerosos estudios sobre el álgebra temprana, también conocida como *early algebra*, en donde específicamente se han utilizado tareas sobre generalización de patrones para desarrollar el pensamiento algebraico de los estudiantes en los primeros años de escolaridad (Chimoni et al., 2018; Kieran, et al., 2016; Strachota, 2020). Se destaca el estudio reciente realizado en Colombia por Bautista-Pérez et al. (2021), quienes encontraron que en las tareas de generalización de patrones alrededor del 90% de los alumnos recurrió a estrategias de conteo o a la construcción término a término; mientras que el 10% restante hizo generalizaciones aritméticas, estableciendo relaciones de variación entre los términos de la secuencia. Los autores concluyeron que la mayoría de los estudiantes se ubicó entre los niveles 0 a 2 de algebrización ya que algunos niños lograron utilizar un lenguaje alfanumérico.

En otra investigación realizada en una primaria de España, Zapatera (2018a) reportó que los estudiantes que resolvieron de mejor manera las tareas fueron los que se ayudaron de una representación gráfica para encontrar el patrón y después tuvieron la flexibilidad necesaria para cambiar de estrategias cuando éstas ya no les permitían llegar a su objetivo. Como conclusión, el autor considera que una de las causas de que los alumnos encontraran una dificultad muy alta para expresar de manera algebraica la regla general del patrón puede estar relacionada con el tipo de enseñanza que sigue un plan de estudios que no aborda de manera explícita el álgebra.

En una primaria estadounidense, Lannin et al. (2006) analizaron los factores que posiblemente influyeron en dos alumnos para decidir qué estrategia utilizar en tareas de generalización de patrones. En el caso de la estrategia recursiva, los estudiantes la utilizaron como primera estrategia cuando se les solicitaba hallar un término cercano; la estrategia de objeto-completo fue empleada generalmente después de una estrategia recursiva cuando detectaban que el número de elementos era un múltiplo; y la estrategia explícita fue usada cuando se solicitaba un término lejano. Los autores recomiendan que las tareas inciten el uso de diferentes estrategias para luego analizarlas. También mencionan que una representación visual puede ayudar a los estudiantes a desarrollar reglas explícitas.

A nivel Secundaria, Setiawan et al. (2020) llevaron a cabo una investigación en Indonesia con el objetivo de estudiar las estrategias de generalización de patrones lineales enfocado especialmente a estudiantes con un estilo cognitivo de aprendizaje de dependencia de campo. Los resultados indican que los estudiantes emplearon dos estrategias: la recursiva y la de diferencia. Los autores recomiendan a los profesores cambiar los patrones figurales por patrones numéricos, ya que los alumnos con ese estilo cognitivo prefieren analizar sucesiones numéricas en vez de encontrar generalidades en las figuras.

En una secundaria de Turquía, Akkan et al. (2013) realizaron un estudio comparativo sobre la eficiencia, estrategias y representaciones que utilizan los estudiantes en tareas de generalización de patrones. Los autores reportan que alrededor de un tercio de los estudiantes de mayor grado escolar pudieron expresar la regla del patrón. Así mismo, destacan que los alumnos tienen mayor éxito con patrones lineales que con cuadráticos, y con patrones numéricos en comparación con patrones figurales. Los autores concluyen que al subir de grado los alumnos comienzan a preferir usar símbolos y estrategias explícitas en vez de estrategias recursivas, de conteo, adivinar y comprobar, proporcionales, y multiplicación con diferencia. Además, menciona que los alumnos que utilizan estas últimas estrategias tienden a convertir los patrones figurales en secuencias numéricas.

Es pertinente mencionar, que el número de investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en el nivel Medio Superior se reducen notablemente en comparación con los estudios a nivel Básico, e incluso a nivel Superior (Sibgatullin et al., 2022).

Una de las pocas investigaciones recientes con estudiantes egresados de secundaria, que incluyen la generalización de patrones es la de Gaita y Wilhelmi (2019) quienes determinaron los niveles de algebrización de estudiantes peruanos que previamente habían tenido una formación limitada en expresiones matemáticas formales. En el estudio se reporta que solamente uno de seis estudiantes logró expresar la generalidad en lenguaje alfanumérico, alcanzando un nivel 2 de algebrización (en una escala adaptada por los autores que va de 0 a 3). Los demás estudiantes se ubicaron en el nivel 1. Los autores recomiendan proponer escenarios que permitan determinar el nivel algebraico de estudiantes y al mismo tiempo potencien el desarrollo del pensamiento algebraico.

En España, Cañadas et al. (2008) realizaron una investigación con el objetivo de caracterizar el razonamiento inductivo de estudiantes de Bachillerato a través de la generalización de patrones. Los resultados indican que alrededor del 40% de los alumnos lograron identificar un patrón; 20% consiguió expresar una generalidad, de éstos el 5% lo hizo de manera algebraica mientras que el 95% lo hicieron de manera verbal. Además, 90% utilizó una representación numérica y menos de 1% de los alumnos generalizaron directamente a partir del enunciado. Los autores concluyen que el predominio de la representación numérica puede deberse a la mayor familiaridad que tienen los estudiantes con ese sistema.

Becker y Rivera (2005) llevaron a cabo un estudio sobre generalización de patrones aplicado a estudiantes de una preparatoria estadounidense con el fin de analizar las estrategias utilizadas. Ellos encontraron que el 59% de los alumnos no pudieron generalizar, 18% generalizaron parcialmente y 23% generalizaron correctamente todo. Los autores indican que los estudiantes que usaron una representación numérica generalmente emplearon una estrategia de prueba y error; mientras que los estudiantes que se apoyaron de una representación figural lograron llegar a formar relaciones funcionales. Los autores concluyen que los estudiantes que no pudieron generalizar comenzaron a trabajar con un sistema numérico y no tuvieron la flexibilidad de cambiar de enfoque cuando la estrategia no les estaba funcionando.

Finalmente, a nivel Superior, Zapatera y Callejo (2018) analizaron el conocimiento matemático y la competencia docente (en el contexto particular de la generalización de patrones) de estudiantes en España que se preparan para ser profesores de primaria. Los resultados indican que todos los estudiantes resolvieron correctamente las consignas de términos cercanos, el 5% cometió errores en determinar los términos lejanos, el 20% los cometió en el proceso inverso y el 25% no fue capaz de explicar la regla general debido a que la mayoría se bloqueó al fijar una estrategia recursiva o no discriminaron situaciones de proporcionalidad. Como conclusión los autores mencionan que, al integrar el conocimiento del contenido matemático a enseñar, el conocimiento de los estudiantes y el contenido del currículo en contextos específicos se puede lograr mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los alumnos.

1.2 Nacionales

De manera consistente a los estudios internacionales sobre el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la generalización de patrones, en el territorio mexicano también se han realizado este tipo de investigaciones en niveles escolares que van desde el Básico hasta el nivel Superior.

A nivel primaria se destaca el trabajo de Cetina-Vázquez y Cabañas-Sánchez (2022) quienes investigaron los tipos de estrategias y la forma en la que los alumnos las usaron. Las autoras identificaron que la estrategia más usada fue la funcional ya que la utilizaron para todos los tipos de consignas; la estrategia de conteo fue utilizada por el 88% de los estudiantes para términos inmediatos; la estrategia recursiva se empleó en un 84% para términos inmediatos y cercanos; la estrategia de fragmentar la usaron un 8% para términos lejanos y, por último, 16% utilizó sin éxito la estrategia de diferencia, objeto-completo u otra alterna a la funcional para términos lejanos o para la regla general. Las autoras concluyen que las estrategias estuvieron condicionadas por el tipo de consignas, el tipo de patrón y la forma de razonar del niño.

A nivel secundaria, se cuenta con la investigación de Butto y Rivera (2011) quienes analizaron las estrategias y el nivel de éxito de los estudiantes en la generalización patrones numéricos y figurales. Se reporta que en general, los estudiantes lograron observar similitudes en las figuras y pudieron expresar la generalidad solamente de manera oral, utilizando un lenguaje común. Además, las estrategias que utilizaron demuestran un pensamiento aritmético-aditivo. Las autoras consideran que las ideas pre-algebraicas que fueron evidentes en el estudio demuestran que los alumnos tienen los conocimientos para transitar al pensamiento algebraico usando como vía la generalización.

Similar a lo detectado a nivel internacional, en México también existen pocos estudios de este tipo a nivel Bachillerato. Sobresale el trabajo de Valenzuela y Gutiérrez (2018) cuyo fin fue indagar el tipo de estrategias utilizadas y promover la estrategia visual en tareas de sucesiones de figuras. Los resultados indican que 33% de los estudiantes lograron expresar la regla general utilizando la estrategia de diferencia con factor multiplicativo y ajuste. Asimismo, predominó la estrategia de conteo para obtener valores cercanos en la sucesión. Por otro lado, los autores lograron que 73% de los participantes recurrieran a una estrategia visual en donde el 68% estableció un patrón válido de crecimiento y pudo representarlo mediante una regla verbal. Los autores destacan la eficiencia de la estrategia visual por lo que recomiendan fomentarlo en las escuelas.

En otro estudio realizado con estudiantes de Bachillerato, Chalé (2013) indagó cómo los estudiantes analizan secuencias figurales y expresan algebraicamente un patrón. Los resultados indican que la primera estrategia de los estudiantes surgió de un análisis numérico; sin embargo, al no poder resolverlo de esta forma los estudiantes transitaron a un análisis visual. El autor menciona que el análisis visual emerge como una herramienta que puede dar sentido y significado a los símbolos algebraicos y además concluye que permite:

> Una apreciación local-global dentro de la secuencia, es decir, lo que ocurre dentro de la estructura de un elemento de la secuencia, lo local, es extendido a todos los elementos siguientes, para ser visto como una característica global de todo el patrón de crecimiento. (p. 9).

Por último, a nivel Superior, Ávila et al. (2010) realizaron una investigación con la finalidad de explorar las habilidades de los estudiantes para generalizar patrones cuadráticos. El estudio se llevó a cabo con 6 estudiantes de la licenciatura en matemáticas, de los cuales 4 lograron contestar las consignas de términos cercanos, pero sin encontrar la generalidad; y solo 1 estudiante logró describir algebraicamente la generalidad, teniendo un pequeño error, por no realizar una validación. Los autores concluyen que las habilidades de los alumnos pueden ser modestas en este nivel debido a que ese tipo de actividades no eran contempladas en plan de estudios de Bachillerato.

Los artículos antes mencionados ponen de manifiesto la necesidad de continuar con los estudios sobre el razonamiento algebraico a través de la generalización de patrones, sobre todo en México donde hay escasas investigaciones.

Capítulo 2. Planteamiento del problema

2.1 Descripción del problema y pregunta de investigación

Los errores más comunes que los estudiantes cometen en álgebra están relacionados con el lenguaje algebraico, la generalización de ciertas propiedades y con la percepción de los símbolos y signos (Castro, 2012; García et al., 2014).

En México, de acuerdo con los resultados de la prueba PISA 2018, alrededor del 44% de los estudiantes de 15 años de edad alcanzaron el nivel 2 o superior en matemáticas, este porcentaje se encuentra 32 puntos por debajo del promedio de los países que integran la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Además, solamente el 1% de los estudiantes mexicanos lograron alcanzar el nivel de competencia 5 o superior (siendo 6 el nivel más alto); mientras que en algunos países asiáticos como China y Corea el porcentaje es de 44% a 21% respectivamente (OCDE, 2019).

De acuerdo a lo anterior, no sorprende que las carreras de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas, “STEM” por su acrónimo en inglés, tienen mayores niveles de elección en países asiáticos. Por ejemplo, en China, 47% de sus egresados proviene de carreras STEM; en contraste con México, en donde la proporción desciende a 27% (OCDE, 2015). La importancia de presentar estas cifras radica en que actualmente la mayoría de los países buscan impulsar estas carreras debido a las innovaciones que surgen de ellas y que favorecen el desarrollo económico, tecnológico y científico (Avendaño, 2018).

En específico, el desarrollo del pensamiento algebraico en el Bachillerato es de suma importancia debido a que permite una mejor compresión de situaciones y fenómenos de la vida diaria y es base para los estudios en niveles superiores. No obstante, el desarrollo de este pensamiento a través de tareas sobre generalización de patrones se ha estudiado poco en el nivel medio superior mexicano. Por lo tanto, surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo se desarrolla el pensamiento algebraico de estudiantes de Bachillerato a través de un diseño didáctico sobre generalización de patrones?

Para contestar la pregunta antes planteada se define el siguiente objetivo general y objetivos específicos.

2.2 Objetivo general

Analizar el pensamiento algebraico de estudiantes de Bachillerato a través de la aplicación de una secuencia didáctica sobre generalización de patrones.

2.3 Objetivos específicos

1. Diseñar una secuencia didáctica sobre generalización de patrones geométricos para nivel Bachillerato.

2. Caracterizar el pensamiento algebraico con base en las respuestas de los estudiantes a las tareas sobre generalización de patrones.

2.4 Justificación

En matemáticas, los ejercicios de generalización no solo estimulan a identificar la generalidad; sino a utilizar el lenguaje algebraico adecuado para expresarla y de esta forma poder “actuar” u operar con ella (Rojas & Vergel, 2014). Algunos currículos han introducido el álgebra por otros métodos, por ejemplo, a través del uso de generalización de patrones, donde la aritmética puede ayudar a la comprensión de los símbolos y las transformaciones entre ellos (Banerjee, 2008). La generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes y eficaces de introducir el pensamiento algebraico en la escuela (Radford, 2010; Zapatera, 2018a), porque posibilita a los estudiantes a familiarizarse con situaciones de variación que son sustanciales para dicho pensamiento (Zapatera, 2018b).

Actualmente, tanto a nivel internacional como nacional, existen varios estudios acerca de la implementación de diseños didácticos sobre generalización de patrones en niveles preescolar, primaria y secundaria (Bautista-Pérez et al., 2021; Cañadas et al., 2008; Gaita & Wilhelmi, 2019; Vergel, 2015; Zapatera, 2018a, 2018b). Sin embargo, a pesar de que en México el tema de generalización de patrones se encuentra en el plan de estudios que propone la Dirección General del Bachillerato (2017), se han realizado escasos estudios en dicho nivel, por lo que este trabajo contribuirá a generar nuevo conocimiento en el área.

Se destaca que el análisis del pensamiento algebraico que se realizará en esta investigación permitirá que se detecte cómo la implementación de una secuencia didáctica sobre generalización de patrones puede influir en el tránsito del lenguaje común al lenguaje algebraico y a una mejor comprensión de la simbología y de las equivalencias algebraicas. Por lo tanto, la información generada podrá contribuir a que los profesores activos decidan con mayor confianza incluir este tipo de tareas en el aula de clases y además podrá servir de base para futuras investigaciones en la línea de pensamiento algebraico.

Capítulo 3. Marco teórico

La fundamentación de este proyecto está articulada en cuatro ejes: (a) La generalización de patrones como actividad para el desarrollo del pensamiento algebraico, (b) el análisis de la demanda cognitiva de las tareas, (c) clasificación de las estrategias de generalización y, (d) el modelo de niveles de algebrización. A continuación, se aborda con detalle cada uno de estos puntos y se ejemplifica su uso.

3.1 La generalización de patrones como actividad para el desarrollo del pensamiento algebraico

El **pensamiento algebraico** ha sido definido de diferentes formas de acuerdo al autor que lo describe. En términos generales, se puede decir que el pensamiento algebraico es aquel tipo de razonamiento que involucra esencialmente generalizar, representar, justificar, razonar con relaciones matemáticas, percibir la estructura algebraica, estudiar los cambios entre las cantidades involucradas y operar cantidades indeterminadas de forma analítica (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008; Kieran, 2004; Radford, 2014).

Una definición más extensa del pensamiento algebraico es la propuesta por Chimoni et al. (2018), quienes con base en cuatro dimensiones distintas describen qué involucra el pensamiento algebraico:

1. Estudiar la estructura y las relaciones en tres áreas de contenido básico de álgebra: aritmética generalizada, pensamiento funcional y modelado (Kaput, 2008)
2. Comprender conceptos algebraicos fundamentales, como el signo igual, la igualdad, las ecuaciones, las propiedades de los números, las propiedades de las operaciones, las variables, las cantidades desconocidas, los símbolos, la covariación y la correspondencia
3. Aplicar procesos orientados a la búsqueda de similitudes y diferencias y validación de estructuras y relaciones, tales como percibir, conjeturar, representar, generalizar, justificar y validar.

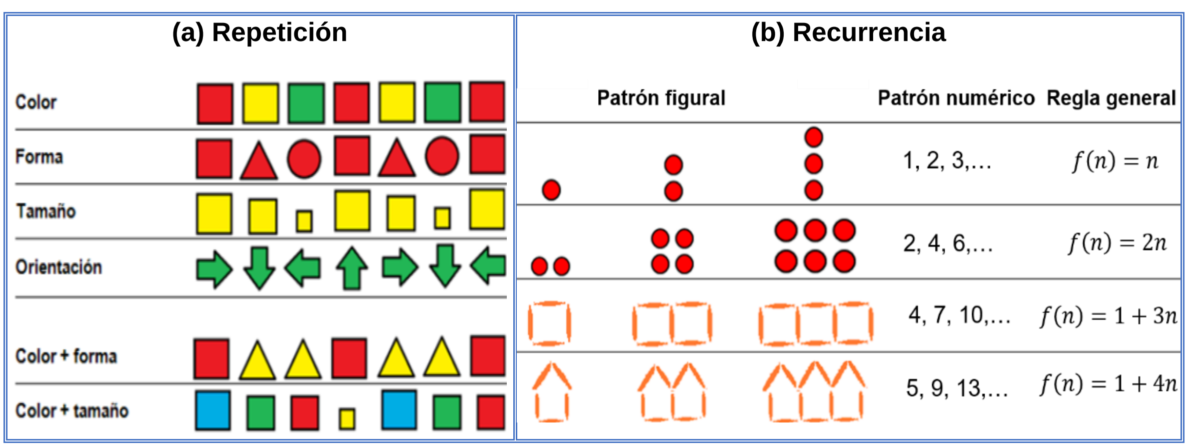
4. Utilizar formas de razonamiento, como el razonamiento abductivo, inductivo y deductivo, que conducen a la extracción de conclusiones. (p.60).

Particularmente, una de las rutas que se utiliza hoy en día para promover el pensamiento algebraico es la generalización de los patrones pues diversos estudios han evidenciado su eficacia (Radford, 2010; Zapatera, 2018a).

Cabe mencionar que los patrones no tienen una definición concreta, debido probablemente a que no es un concepto solamente algebraico. Sin embargo, para fines de esta investigación se entenderá por **patrón** a una sucesión de elementos que se construyen siguiendo una regularidad, la cual proporciona la base necesaria para generar una determinada regla que dicte su comportamiento (Zapatera, 2018b). En ese contexto, la palabra **sucesión** hace referencia a un listado de elementos o sucesos que están organizados de tal forma que alguno de ellos se identifica como el primero, otro como el segundo y así sucesivamente (Hernández & Tapiero, 2014).

Los patrones se pueden clasificar por sus reglas de formación en: **patrones de repetición** o **patrones de recurrencia** (Figura 3.1).

Figura 3.1. *Patrones de repetición y recurrencia*

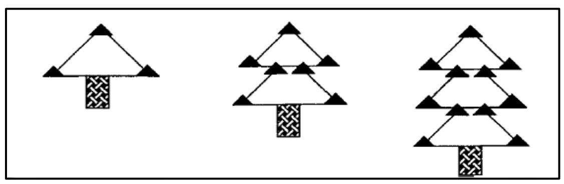


Fuente: adaptado de Zapatera (2018b, pp. 56-57)

En los patrones de repetición los elementos se presentan de forma periódica en función de uno o más atributos como los son: color, tamaño, orientación, forma, entre otros. En los patrones de recurrencia el número de elementos varía de un término a otro; el número de elementos aumenta, o disminuye, de forma progresiva a lo largo de los términos siguiendo una determinada regla.

Los patrones de recurrencia se pueden representar matemáticamente como elementos de una sucesión de números naturales necesariamente, ya que estos elementos están identificados por su posición en ella (posición 1, posición 2, posición 3, etc.). En consecuencia, la regla que dicta el comportamiento del patrón puede ser expresada como una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ donde f es inyectiva. Por ejemplo, obsérvese la siguiente secuencia figural (Figura 3.2):

Figura 3.2. *Patrón de recurrencia*



Fuente: Stacey (1989)

En Figura 3.2 se observa que en la posición 1, el árbol tiene 3 foquitos negros; en la posición 2, el árbol tiene 7 foquitos negros y en la posición 3, el árbol tiene 11 foquitos negros. Entonces, ¿cuántos foquitos habrá en la cuarta posición?, ¿y en la posición n? El comportamiento del incremento en el número de foquitos viene dado por la expresión: $\boldsymbol{f(n) = 4n - 1 \; con \; n} \in \mathbb{N}$

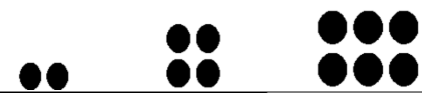
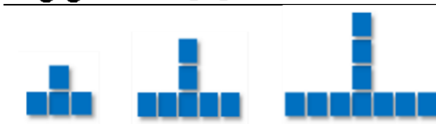
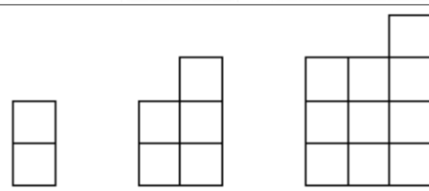
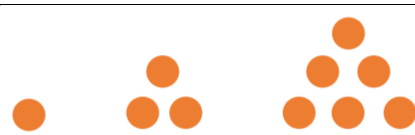
En palabras de Arbona et al. (2017) “un patrón geométrico es una representación gráfica de los términos de una secuencia creciente de números naturales, representación formada por objetos cuya cantidad corresponde al valor del término de la secuencia representado” (p. 40). Los patrones figurales permiten una aproximación inicial, visual e intuitiva. Además, el uso de letras y símbolos pueden adquirir mayor significado (Arbona et al., 2017).

Una tercera clasificación se da de acuerdo a cómo cambia el valor de los elementos de la secuencia. Se distinguen los **patrones lineales** y los **no lineales** (Tabla 3.1).

En un patrón lineal, los elementos de la secuencia aumentan o disminuyen con base en una función lineal (grado 1), mientras que los patrones no lineales aumentan o disminuyen de manera cuadrática, cúbica, etc.

De acuerdo con las características de los tipos de patrones, en esta investigación se utilizarán 4 patrones figurales de recurrencia, de los cuales 2 son de comportamiento lineal y 2 de crecimiento cuadrático.

Tabla 3.1. *Patrones lineales y cuadráticos*

Tipo de patrón	Patrón figural	Regla general
Lineal		$f(n) = 2n$
		$f(n) = 3n + 1$
Cuadrático		$f(n) = n^2 + 1$
		$f(n) = \frac{n^2 + n}{2}$

Fuente: Chalé (2013); López-Acosta (2016) y Zapatera (2018b)

Ahora bien, la **generalización de patrones** se basa en la observación de una propiedad común local que luego se generaliza a todos los términos de la secuencia. La propiedad común hallada sirve de garantía para determinar una regla que permita calcular cualquier término de la secuencia que permanezca más allá del campo perceptivo (Radford, 2006; 2008). Rivera (2010) señala que la regularidad al ser explicada y justificada a través de una estructura plausible y algebraicamente útil conlleva a la generalización.

Zapatera (2018a) menciona que en los problemas de generalización de patrones figurales se proporcionan los primeros términos de la sucesión $f(1), f(2), f(3)$ para que se pueda detectar la regularidad y después se pide contestar diferentes consignas. Se utilizan principalmente **consignas** de **generalización cercana** en las que se solicita calcular el valor f(n) para n “pequeño”, por ejemplo $n = 5$ y que se puede obtener mediante recuento, haciendo un dibujo o una tabla; tareas de **generalización lejana** en las que se pide calcular el valor de $f(n)$ para n “grande” y que requiere la identificación de un patrón o pauta; **obtención y expresión de la regla general**, de manera verbal y algebraica, que permita calcular el valor de $f(n)$ para cualquier n y por último, una consigna de **inversión del proceso** para hallar el valor de la posición (n), dado el número de elementos.

3.2 Demanda cognitiva de los patrones figurales

La demanda cognitiva hace referencia a la cantidad y complejidad de recursos mentales que son exigidos para llevar a cabo una determinada tarea. Dichos recursos mentales están orientados a procesos de conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis, evaluación, percepción, atención, memoria, y toma de decisiones que se necesitan para procesar la información y resolver problemas (Ramos y Casas, 2018; Sweller, 1994; Wyse y Viger, 2011).

Para valorar la idoneidad y pertinencia de las tareas que se plantean a los estudiantes resulta útil contar con un modelo teórico que permita evaluar la complejidad de resolución. Por ejemplo, si la finalidad es desarrollar la capacidad de pensar y razonar de los estudiantes, sería importante plantear una tarea que tenga el potencial de involucrarlos en un alto nivel de demanda cognitiva (Benedicto et al., 2015; Smith & Stein, 1998).

Benedicto et al. (2015) proponen un nuevo modelo para valorar la demanda cognitiva, específicamente de tareas sobre patrones figurales. Los autores proponen clasificar la demanda cognitiva en nivel bajo, bajo-medio, medio-alto y alto. En cada nivel se analiza el procedimiento, la finalidad, el esfuerzo cognitivo, los contenidos matemáticos implícitos, las explicaciones y las formas de representación de la solución. En la Tabla 3.2 se describen con mayor detalle los niveles y las características de las categorías.

Tabla 3.2. *Análisis de la demanda cognitiva en tareas de patrones geométricos*

Nivel de D. C	Tipo de cuestión	Categoría	Características
BAJO Memorización	Recuento directo	Procedimiento	(1.2) No se resuelven usando algoritmos, sino recurriendo a datos recordados o tomados directamente del enunciado.
		Finalidad	(1.1) Reproducción de elementos (datos, reglas, fórmulas, etc.) previamente aprendidos, recordados o tomados directamente del enunciado.
		Esfuerzo	(1.3) Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo. No son ambiguas. Indican claramente qué hacer
		Contenidos implícitos	(1.4) No tienen conexión con los conceptos o significado subyacente a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo.
		Explicaciones	(1.5) No requieren explicaciones.
		Representación de la solución	(1.6) El enunciado utiliza la representación geométrica y su resolución, en caso de representarse, utilizará la aritmética.
BAJO-MEDIO Algoritmos Sin Conexiones	Término inmediato / Término próximo	Procedimiento	(2.1) Son algorítmicas. Indican expresamente qué algoritmo usar o es evidente por el contexto.
		Finalidad	(2.4) Enfocadas a obtener respuestas correctas, pero no a desarrollar la comprensión matemática.
		Esfuerzo	(2.2) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.
		Contenidos implícitos	(2.3) Existe conexión implícita entre los conceptos o significados subyacentes y los algoritmos usados. A pesar de existir dicha conexión, el estudiante no tiene por qué percatarse de ella para resolver correctamente el problema.
		Explicaciones	(2.5) Explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo usado.
		Representación de la solución	(2.6) En su resolución se pueden utilizar múltiples representaciones (aritmética, diagramas visuales, materiales manipulativos, etc.), pero sólo se usan aquellas que resultan de más ayuda para resolver el problema.

MEDIO-ALTO Algoritmos Con Conexiones	Término próximo / Término lejano	Procedimiento	(3.2) Las cuestiones anteriores de la actividad sirven como sugerencia explícita o implícita de la vía a seguir, que es un algoritmo general con conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes.
		Finalidad	(3.1) Orientan al estudiante a usar algoritmos con el objetivo de que tenga una comprensión más profunda de los conceptos e ideas matemáticos.
		Esfuerzo	(3.4) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Se pueden utilizar algoritmos generales, pero al aplicarlos, hay que prestar atención a la estructura del patrón.
		Contenidos implícitos	(3.5) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos para resolver con éxito la cuestión.
		Explicaciones	(3.6) Explicaciones que hacen referencia a las relaciones subyacentes utilizando casos concretos (posiciones particulares de la serie).
		Representación de la solución	(3.3) La resolución conecta diversas representaciones. Se representan de varias formas y los estudiantes utilizan aquellas que los llevan a un razonamiento más abstracto.
ALTO Hacer Matemáticas	Término General	Procedimiento	(4.1) Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de resolución. (4.5) Requieren que los estudiantes analicen la actividad y examinen restricciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones.
		Finalidad	(4.2) Los estudiantes necesitan explorar y comprender los conceptos, procesos o relaciones matemáticos.
		Esfuerzo	(4.6) Requieren un considerable esfuerzo cognitivo. (4.3) Requieren de los estudiantes autocontrol y autorregulación de los propios procesos cognitivos.
		Contenidos implícitos	(4.4) Requieren que los estudiantes accedan a conocimiento y experiencias relevantes y los usen adecuadamente durante la resolución de la actividad.
		Explicaciones	(4.7) Explicaciones y demostraciones sobre el término general de la serie.
		Representación de la solución	(4.8) En la resolución se utiliza una representación algebraica, que algunas veces puede estar conectada con otras formas de representación.

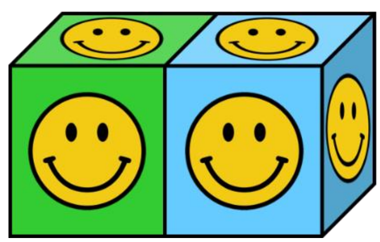
Fuente: Benedicto et al. (2015, pp. 155-156)

Para ejemplificar cómo se determina el nivel de demanda cognitiva de las consignas sobre generalización de patrones, se utilizará una tarea adaptada de Moss y Beatty (2006) exhibida en la Figura 3.3. Posteriormente, la misma tarea servirá para ejemplificar cómo se utilizarán los elementos teóricos restantes: la clasificación de las estrategias para resolver las tareas, y la categorización del nivel de algebrización de cada estudiante de acuerdo a su desempeño en la secuencia didáctica.

Figura 3.3. *Tarea de las pegatinas para ejemplificar los ejes teóricos*

"Las pegatinas"

Una compañía fabrica barras de colores uniendo cubos en una fila. La compañía usa una máquina para etiquetar y poner pegatinas o adhesivos de caritas sonrientes en las barras. La máquina coloca exactamente una pegatina en cada cara, es decir, cada cara expuesta de cada cubo tiene que tener una pegatina. Por ejemplo, una barra de longitud 2 (dos cubos) necesitaría diez pegatinas.



a) ¿Cuántas pegatinas se necesitan para una barra de 3 cubos? Justifica tu respuesta
b) ¿Cuántas pegatinas se necesitan para una barra de 15 cubos? Justifica tu respuesta
c) Con la información previa determina, ¿Cuál es la regla a seguir para hallar el número de pegatinas para una barra de longitud cualquiera? Justifica tu respuesta
d) Si una barra cuenta con 134 pegatinas, ¿Cuántos cubos tiene la barra? Justifica tu respuesta

Fuente: Adaptado de Moss y Beatty (2006, pp. 460-461)

En esta sección, se proporciona la Tabla 3.3 que, utilizando como ejemplo la tarea de Moss y Beatty (2006) (Figura 3.3), muestra la lógica que se seguirá para determinar el nivel de demanda cognitiva de las consignas de las tareas sobre generalización de patrones figurales.

Tabla 3.3. *Muestra de cómo determinar el nivel de demanda cognitiva de las consignas*

Ejemplo de consigna	**Tipo de consigna**	**Principales características**	**Nivel de demanda cognitiva**
a) ¿Cuántas pegatinas se necesitan para una barra de 3 cubos?	Término cercano	Algorítmicas sin conexiones -El algoritmo a usar es evidente por el contexto, generalmente se utiliza una estrategia recursiva o bien un dibujo que permita contar fácilmente los elementos -Puede resolverse sin hacer conexiones entre el número de la posición y el número de pegatinas	**Bajo-medio**
b) ¿Cuántas pegatinas se necesitan para una barra de 15 cubos?	Término lejano	Algorítmicas con conexiones -Se suelen apoyar de la regla recursiva encontrada y a usar la cantidad de pegatinas que ya encontraron para un término cercano, pero ahora hacen conexiones para calcular cuántas pegatinas más se necesitan para una determinada posición -Generalmente hacen generalizaciones aritméticas utilizando una estrategia contextual	**Medio-alto**
c) ¿Cuál es la regla a seguir para hallar el número de pegatinas para una barra de longitud cualquiera?	Término general	Hacer matemáticas -Se requiere un pensamiento complejo y no algorítmico para explorar y comprender los conceptos, procesos o relaciones matemáticos -Se reconoce la generalidad al establecer una conexión estable entre las dos variables -La generalidad se puede expresar en lenguaje algebraico o lenguaje común	**Alto**
d) Si una barra cuenta con 134 pegatinas, ¿Cuántos cubos tiene la barra?	Proceso inverso	Hacer matemáticas -Se requiere tener la regla general y además saber operar con las variables para obtener otra forma de expresión que esté en función de la posición	**Alto**

Fuente: elaboración propia

3.3 Estrategias de generalización

La estrategia hace referencia a la combinación de acciones utilizadas en el proceso de solución, formadas por la ejecución de tareas matemáticas que toman en cuenta las relaciones y los conceptos implicados (Radford, 2006; Rico, 1997).

Con base en la recopilación de diversos trabajos, Akkan (2013) ha propuesto analizar 7 tipos de estrategias que utilizan comúnmente los estudiantes al momento de trabajar con generalización de patrones: conteo, recursiva o aditiva, diferencia, objeto-completo, adivinar y comprobar, contextual y explícita. En la Tabla 3.4 se proporciona la descripción de las estrategias y además se da algunos ejemplos que hacen referencia a la tarea de Moss y Beatty (2006) previamente mencionada (Figura 3.3)

Tabla 3.4. *Estrategias utilizadas en la generalización de patrones con algunos ejemplos*

Estrategia	Descripción
Conteo	Consiste en contar directamente sobre un dibujo o construir la sucesión correspondiente hasta el término requerido. Por ejemplo, se puede calcular el número de pegatinas que tendría una barra de 3 cubos si se hace el dibujo y luego se cuenta cuantas pegatinas tiene dicho dibujo.
Recursiva o aditiva	Incluye el uso del término anterior en un patrón para encontrar el siguiente término o términos. Los estudiantes generalmente tratan de encontrar la diferencia entre los dos términos y añadir esta diferencia al último término para encontrar el siguiente. Por ejemplo, por cada cubo adicional se agregan 5 pegatinas, y se debe quitar una pegatina cuando se agrega el nuevo cubo a la barra, lo que hace un total de 4 pegatinas agregadas para cada cubo.
Diferencia	Consiste en multiplicar la diferencia entre los dos términos consecutivos de la secuencia. Esto ocurre especialmente en la generalización de relaciones lineales. Los estudiantes describen el enésimo término como la multiplicación de la diferencia por el "n" mismo. Se asume de forma implícita que $f(n) = an$. Este enfoque es válido para una secuencia como 3, 6, 9, ... (3n), pero no es válido para el caso de las pegatinas que, en su secuencia de 6, 10, 14, 18 se nota una diferencia de 4 pegatinas; sin embargo, la regla no es $f(n) = 4n$. Sería correcto si se hace una diferencia con ajuste.
Objeto-Completo	Incluye el uso del razonamiento proporcional. Lannin et al. (2006) describen esta estrategia como "usar una porción como una unidad para construir una unidad más grande usando múltiplos de la unidad.

Objeto-Completo	Por ejemplo, una barra de 10 cubos tiene 42 pegatinas, por lo que una barra de 20 de cubos tendría 84 pegatinas, lo cual es incorrecto.
Adivinar y comprobar	Incluye una especie de regla de predicción independientemente de la regla que funcione. Se propone una regla algebraica que representa (simboliza) el estado del problema. Los estudiantes nunca piensan en la validez de la regla durante el proceso.
Contextual	Incluye la configuración de una regla centrada en la información que proporciona el caso. Esta regla se asocia con la técnica de cálculo. Por ejemplo, se identifica que el número de pegatinas se obtiene sumando dos veces el doble de la posición y al final sumando dos, es decir que si se tiene una barra de 11 cubos entonces el número de pegatinas es el resultado de sumar 22+22+2. No se generaliza para n, pero se sabe cómo calcular las pegatinas para una posición específica.
Explícita	Incluye la generalización de la relación entre las dos variables para determinar cualquier valor. Este es el primer paso de un progreso gradual para determinar las funciones mediante el uso de ecuaciones y fórmulas. Cuando se utiliza esta estrategia, se vuelve estable y factible tanto para términos lejanos como cercanos, por lo que ayuda a encontrar el término "n" y establece una regla general. Por ejemplo, se observa que siempre quedan con pegatinas las caras frontal, superior, posterior e inferior de cada cubo, es decir que es constante que cada cubo necesita 4 pegatinas, luego se agregan 2 pegatinas más para los laterales de la barra que se forma. Por lo tanto, la regla explícita es $f(n) = 4n + 2$.

Fuente: adaptado de Akkan (2013).

3.4 Niveles de algebrización

Existen diferentes referentes teóricos bajo los cuales se analiza el razonamiento de los estudiantes en su proceso de generalización y simbolización cuando abordan tareas sobre patrones. En esta investigación utilizaremos los niveles de algebrización y estrategias de generalización que manifiestan los estudiantes.

De acuerdo con Aké y Godino (2018), los niveles de algebrización se pueden categorizar de la siguiente manera:

- Ausencia de razonamiento algebraico (nivel cero). En tareas funcionales, el reconocimiento de la relación de un término con el siguiente no implica la determinación de una regla que generaliza la relación de los casos particulares, se trata de una relación recursiva.

- Nivel incipiente de algebrización (nivel 1). En tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al alfanumérico.
- Nivel intermedio de algebrización (nivel 2). En tareas funcionales se reconoce la generalidad, y se utiliza el lenguaje alfanumérico, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión. El lenguaje simbólico literal que se utiliza está ligada a la información del contexto de la tarea.
- Nivel consolidado de algebrización (nivel 3). En las tareas funcionales se realiza la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones.

En la Tabla 3.5 se utiliza el mismo ejemplo de la tarea de las pegatinas de Moss y Beatty (2006) (Figura 3.3) para ejemplificar el uso de los niveles de algebrización.

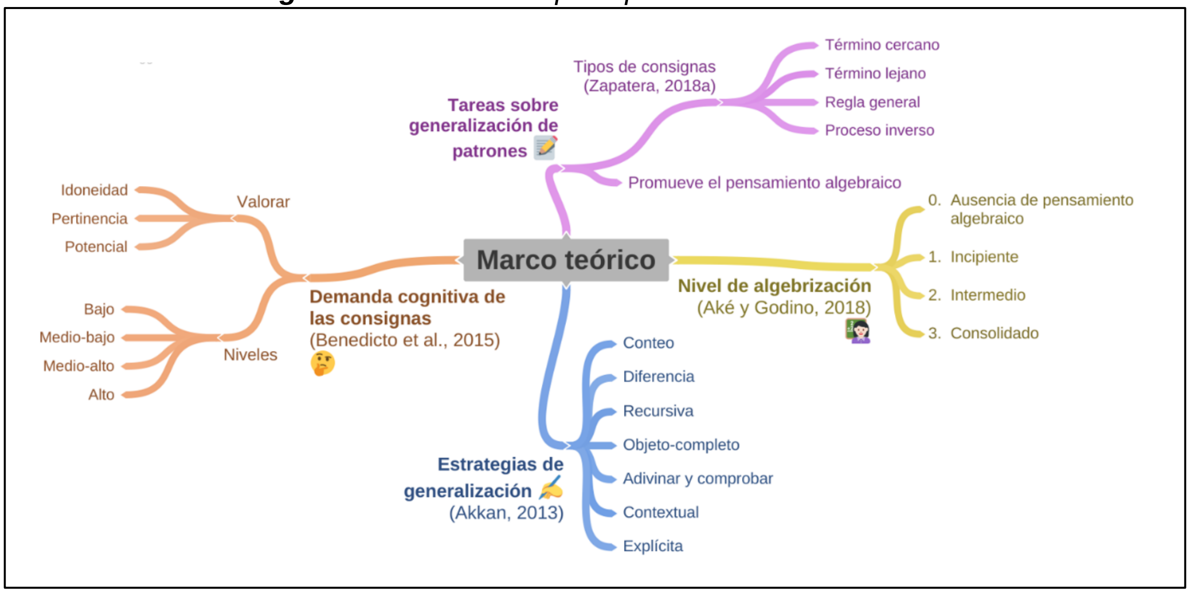
***Tabla 3.5**. Ejemplo de cómo determinar el nivel de algebrización*

Nivel de algebrización	Características
Nivel cero	El estudiante se percata que las pegatinas van aumentando de 4 en 4, ya que para una barra de un cubo hay 6 pegatinas y para una barra de 2 cubos hay 10, por lo tanto, identifica la regla recursiva y va calculando la cantidad de pegatinas a partir del término anterior; o bien, el estudiante realiza dibujos y cuenta las pegatinas.
Nivel 1	El estudiante encuentra la generalidad, pero la expresa en un lenguaje común o aritmético, por ejemplo puede contestar que se ha dado cuenta que cada cubo necesita 4 pegatinas y al final se le agregan dos pegatinas más a los extremos laterales de la barra, entonces si se tiene un barra con 15 cubos, se multiplica por 4 y se le suma las 2 pegatinas de los extremos “15(4)+2”.
Nivel 2	El estudiante logra articular una regla explícita en lenguaje alfanumérico. Por ejemplo: $f(n) = 4n + 2$
Nivel 3	El estudiante expresa la generalidad en lenguaje alfanumérico y además es capaz de transformar la expresión para facilitar el cálculo en un proceso inverso. Por ejemplo, si se nombra a p como el número de pegatinas entonces $n = \frac{p-2}{4}$. Así también, si el estudiante encontró otra forma no estándar de expresar la regla, por ejemplo $f(n) = 6 + (n-1)(4)$ el nivel 3 emerge si llega a simplificar la expresión a $f(n) = 4n + 2$.

Fuente: Elaboración propia

De esta manera, en el presente trabajo se engranan conceptualmente: la generalización de patrones, la demanda cognitiva de las consignas, las estrategias para generalizar y los niveles de algebrización. En la Figura 3.4 se concentran los elementos principales que conforman el marco teórico y que guardan una estrecha relación entre ellas, ya que la demanda cognitiva depende del tipo de consigna, que a su vez, influye en las estrategias a utilizar y por último las estrategias permiten alcanzar diferentes niveles de algebrización.

Figura 3.4. *Elementos principales del marco teórico*



Fuente: Elaboración propia

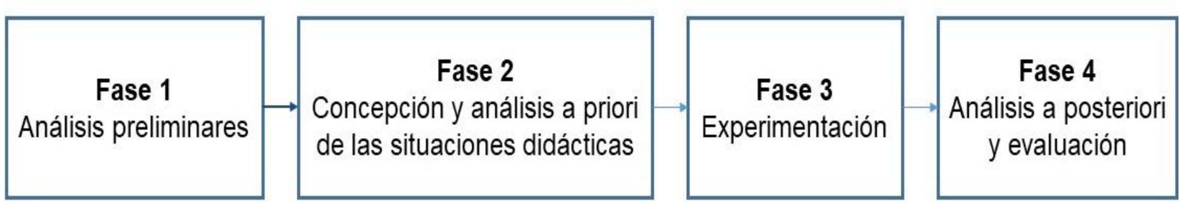
Capítulo 4. Metodología

Esta investigación se realizó con un enfoque cualitativo, utilizando la ingeniería didáctica como diseño metodológico (Artigue, 1995). La ingeniería didáctica surgió a inicios de los años ochenta en el campo de la didáctica de las matemáticas y se refiere a una forma de trabajo didáctico que se compara con la forma de trabajar del ingeniero quien, en palabras de Artigue (1995):

> Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (pp. 33-34)

Este diseño metodológico se distingue por un esquema experimental en clase, fundamentada en la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Además, se caracteriza por realizar el registro mediante estudios de caso, y por implementar una validación interna basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995). La ingeniería didáctica contempla 4 fases: Análisis preliminar, Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, Experimentación y Análisis a posteriori y evaluación. El proceso experimental de la ingeniería didáctica se divide en las 4 fases que se muestra en la Figura 4.1

Figura 4.1. *Fases de la metodología*



Fuente: Artigue (1995)

A continuación, se describen cada una de las fases:

Para la **fase 1. Análisis preliminares**, se toman en cuenta los objetivos específicos de la investigación, siendo los siguientes rubros los que se abordan con más frecuencia:

- Análisis epistemológico de los contenidos (dimensión epistemológica)
- Análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución (dimensión cognitiva)
- Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos (dimensión didáctica)
- Análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

En la **fase 2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas** el investigador decide actuar sobre un determinado número de variables comando del sistema, dichas variables pueden ser variables *macro-didácticas o globales*, (concernientes a la organización global de la ingeniería), o pueden ser variables *micro-didácticas o locales* (referentes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia). Las variables macro-didácticas refieren a la delimitación del número de sesiones para llevar a cabo la experiencia didáctica, la organización del grupo, la organización de los estudiantes en equipos, el número de integrantes para cada equipo, el uso de recursos materiales o tecnológicos para el estudio de los patrones. Por otro lado, las variables micro-didácticas consisten en delimitar aspectos centrales del contenido matemático a desarrollar que permitieron el diseño de la secuencia didáctica.

Esta fase 2 tiene como objetivo determinar en qué, las elecciones hechas, permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Artigue (1995) menciona que este proceso tiene una parte descriptiva y predictiva que se enfoca en una situación a-didáctica que se ha querido diseñar para después aplicar en el aula de clase en donde (p. 45):

- Se describen las selecciones de las variables micro-didácticas (relacionándolas eventualmente con las variables macro-didácticas) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
- Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
- Se prevén los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

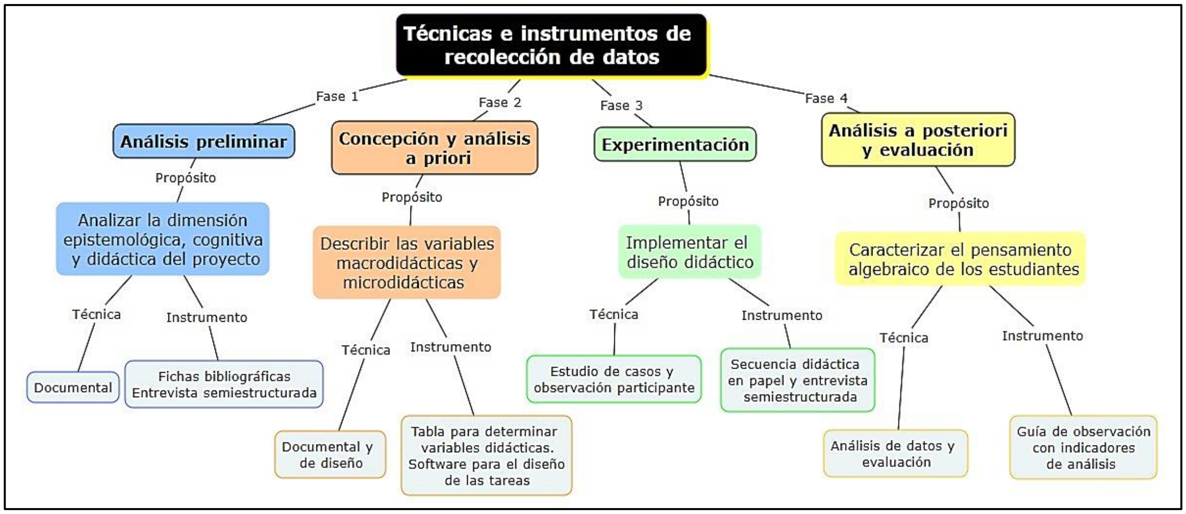
De Faria (2006) explica que la **fase 3**. **Experimentación** involucra:

- Explicitar los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán en la experimentación
- Establecer del contrato didáctico
- Aplicar los instrumentos de investigación
- Registrar las observaciones realizadas durante la experimentación.

Por último, la **fase 4. Análisis a posteriori y evaluación** se basa en el conjunto de datos recogidos en la experimentación para confrontar el análisis a priori con el análisis a posteriori. En esta fase se realiza la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. Es conveniente señalar que debido a que se hace una validación interna no es necesario tener un grupo control para hacer una validación estadística; sin embargo, pueden surgir dificultades debido a las distorsiones que aparecen en la confrontación de los análisis a priori y a posteriori, ya que algunos autores no indagan en las hipótesis aquello que las distorsiones halladas invalidan, esto causa que se limiten a proponer modificaciones de ingeniería que pretenden reducirlas, sin enfocarse en realidad en el proceso de validación (Artigue, 1995).

Para el desarrollo de cada una de las fases antes mencionadas, en la Figura 4.2 se definen las técnicas e instrumentos de investigación utilizados.

Figura 4.2. *Técnicas e instrumentos a implementar en cada fase metodológica*



Fuente: Elaboración propia

4.1 Muestra y contexto

Inicialmente el desarrollo del estudio se llevó a cabo con un grupo de 42 estudiantes que cursaban el segundo semestre en la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro Plantel Sur. La institución se encuentra en una zona urbana del municipio de Querétaro. La muestra se seleccionó de manera intencional y por tanto no aleatoria (Leatham, 2019), es decir, la selección dependió de que la institución, el docente y el grupo decidieran participar voluntariamente. En el caso de los estudiantes, su participación estuvo sujeta al consentimiento informado y autorización de sus tutores.

En la elección de la institución y del grupo de estudiantes también se consideró tener la facilidad de que el director de la escuela brindara las condiciones necesarias para la experimentación en el aula: espacios físicos, horarios de trabajo, grupo de estudiantes y la no intervención del profesor titular en la ingeniería didáctica.

Es importante aclarar que, de acuerdo a la validación de datos, se logró caracterizar el pensamiento algebraico de 22 estudiantes de la muestra descrita, esto debido a que se tuvieron que descartar las secuencias didácticas de los estudiantes que faltaron a alguna sesión y de quienes no brindaron información suficiente para justificar las respuestas y así poder entender la lógica que se siguió para responder las consignas. El conjunto de los 22 estudiantes estaba integrado por 11 mujeres y 11 hombres con una edad promedio de 16 años. Para el análisis de los datos se identificaron a estos 22 estudiantes con la etiqueta E1 hasta la E22.

Después de las especificaciones previas, en el capítulo 5, se desarrollan las fases de la ingeniería didáctica.

Capítulo 5. Desarrollo de la Ingeniería Didáctica

La aplicación de la ingeniería didáctica al tema de la generalización de patrones se presenta a continuación, a partir de la estructura de sus fases.

5.1 Fase 1. Análisis preliminar

En esta fase se realizaron 3 análisis sobre: la dimensión epistemológica del contenido matemático, la dimensión cognitiva de los estudiantes y la dimensión didáctica referente al tipo de enseñanza del docente de matemáticas. Dichos análisis involucran el estudio de algunos elementos históricos, la revisión del programa de estudios de Bachillerato, el análisis del desempeño académico de los estudiantes y una entrevista al docente.

En el **análisis epistemológico** se hizo una revisión de la literatura acerca de algunos acontecimientos relacionados con el origen del concepto de sucesión matemática. Igualmente, en este análisis se proporciona definiciones sobre dicho objeto matemático.

Cabe señalar que no se encontró literatura específica sobre un acercamiento histórico-epistemológico de las sucesiones. No obstante, sí se halló información sobre la historia de las series infinitas, progresiones aritméticas y funciones que implícitamente aportan información sobre la evolución del estudio de las sucesiones.

Existen registros de que en la cultura hindú se utilizaba la idea de sucesión desde hace aproximadamente 2000 años a.C. (De Mora y Ludwika, 2003), pues los versos escritos en el Mandala II del Rigveda (conjunto de himnos dedicados principalmente a los dioses Védicos) dan ejemplo, en el himno 18, del uso de sucesiones que va creciendo de dos en dos y otra que incrementa de diez en diez (ver Figura 5.1).

En la edad de Bronce, la idea de sucesión también fue utilizada por la civilización Harappa en su sistema de pesas, la cual consistía en pesas cúbicas de tamaños graduados que guardan un patrón de crecimiento (Rosas y Molina, 2016).

Alrededor del 230 a.C. en la antigua Grecia, Arquímedes utilizó la noción de sucesión al recurrir a una serie infinita para determinar el área bajo una curva (Rosas & Molina, 2016). Luego, fue hasta el siglo XVII, cuando Newton se convirtió en el primer matemático que mostró la idea de función para desarrollar series infinitas. Por último, fue Leibniz quien utilizó por primera vez el término “función” en 1673 e introdujo los términos de constante, variable y parámetro (Ponte, 1992).

Figura 5.1. *Idea de sucesión en un verso de la cultura hindú*

Indra, ven hacia aquí con dos corceles castaños,
Ven con cuatro, con seis cuando se te invoca.
Ven tú con ocho, con diez, para beber el Soma.
He aquí el jugo, valiente guerrero, no lo desdeñes
¡OH Indra!, ven tú aquí habiendo enganchado
a tu carro veinte, treinta, cuarenta caballos.
Ven tú con cincuenta corceles bien adiestrados,
Indra, sesenta o setenta, para beber el Soma.

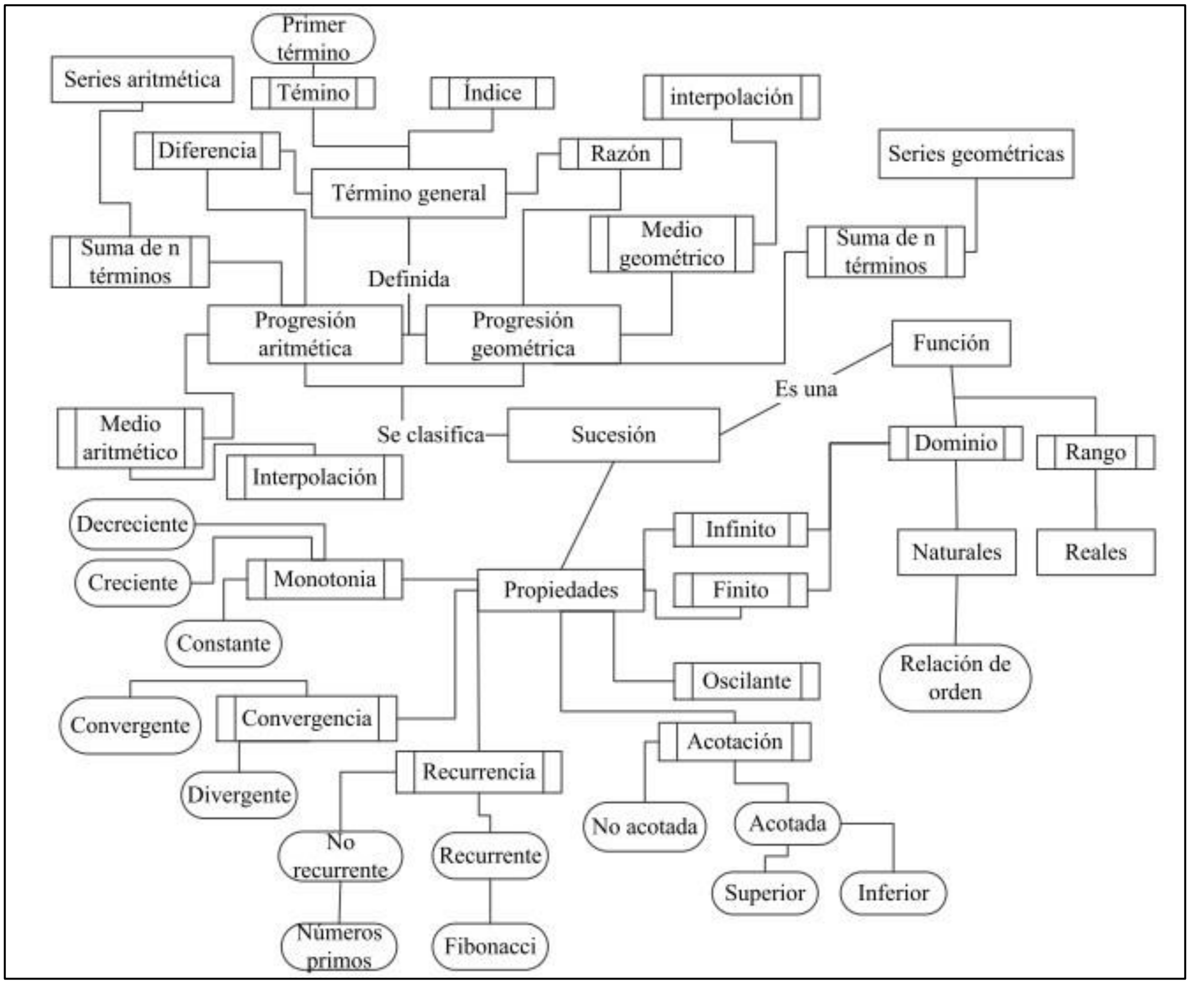
Fuente: De Mora y Ludwika (2003, p. 28)

Por otro lado, en cuanto a las definiciones, es relevante especificar qué se entiende por sucesión y función dado que la noción de patrón se vincula con estos objetos matemáticos. Matemáticamente una sucesión es un conjunto infinito de números escritos en un orden específico, $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ ..., donde cada miembro del conjunto ha sido etiquetado con un número natural en el subíndice, siendo a_1 el primero y, donde a_n representa de manera general, el término n-ésimo (Stewart et al., 2007).

Específicamente, una sucesión de números naturales se puede describir como la aplicación de una función que tiene por dominio y codominio el conjunto de los números naturales (Spivak, 2012). Una función se define como una relación en donde a cada elemento del dominio se le asocia un único elemento del codominio. Por último, una relación matemática es una regla de correspondencia que asocia a los elementos de dos conjuntos (Stewart et al., 2007).

En la Figura 5.2 se despliega un mapa conceptual planteado por Acosta et al. (2018) sobre algunos objetos matemáticos que se relacionan con las sucesiones, así como sus clasificaciones y propiedades.

Figura 5.2. *Objetos matemáticos con los que se vincula la sucesión*



Fuente: Acosta et al. (2018)

Como cierre del análisis epistemológico, conviene señalar que la recurrencia es una herramienta poderosa para generar sucesiones. Por ejemplo, la recurrencia en sucesiones lineales, permite determinar cualquier término de la sucesión como combinación lineal de términos anteriores. Las sucesiones numéricas vistas en términos de relaciones de recurrencia, son prototipos de objetos discretos en matemáticas (Bajo et al., 2019; Cañadas y Castro, 2007).

En lo que respecta al **análisis cognitivo,** se tomó en cuenta que los estudiantes tenían aproximadamente 2 meses de haber regresado a clases presenciales, después de un periodo prolongado de alrededor de 2 años de sesiones virtuales, lo que pudo haber contribuido a tener ciertas deficiencias y dificultades que se evidenció en los resultados de las evaluaciones parciales en la asignatura de matemáticas, particularmente en el tema de radicales, números complejos, ecuaciones de segundo grado y de grado superior, valor absoluto, desigualdades y funciones, pues el promedio grupal fue menor a la calificación aprobatoria (6 en una escala de 0 al 10). Este suceso de descenso del rendimiento académico después de la virtualidad es consistente con lo reportado en otras investigaciones alrededor del mundo (Fitzgerald y Ubarne, 2022; Panagouli et al., 2021; Schult et al., 2022; Uegatani et al., 2021).

Así mismo, se realizó una entrevista semiestructurada al docente de matemáticas (Anexo A) con la finalidad de conocer con mayor detalle el historial del desempeño académico del grupo de estudiantes en esa asignatura. A continuación, se menciona la información principal que se obtuvo en dicha entrevista (las transcripciones naturales de los fragmentos de la entrevista a los que se hace alusión en este análisis se encuentran en el Anexo B).

El docente explica que los errores y dificultades más frecuentes que se detectaron en álgebra están relacionados con la sintaxis algebraica y el uso de los símbolos matemáticos. Por ejemplo, los alumnos comenten el error de omitir el signo igual cuando relacionan variables. También existe errores al identificar el grado de una ecuación y los coeficientes implícitos de las variables. El docente menciona que, estos errores se deben a que aproximadamente un 25% de los estudiantes no aprendieron algunos temas de cursos pasados que son necesarios para el curso actual, tal es el caso de la aplicación correcta de la ley de signos y el uso del lenguaje algebraico.

El docente ha identificado que en tareas que requieren plantear una expresión matemática para resolverla, varios estudiantes del grupo hacen iteraciones aritméticas con los datos y utilizan la estrategia de tanteo para obtener una respuesta, esto debido que los alumnos encuentran complicado transitar del lenguaje común al algebraico.

Por otro lado, el profesor también indicó que el incumplimiento de las tareas y actividades escolares, es la razón principal por la cual los alumnos no logran aprobar el curso, pues al no entregar tareas o solamente copiarlas de otros compañeros, los alumnos no practican. Asimismo, agregó que la pandemia influyó en que la exigencia académica disminuyera y a que los alumnos incrementaran el copiado de tareas y exámenes porque la transferencia de información por celulares y ordenadores era sencilla.

Por último, en el tema específico de las tareas sobre generalización de patrones, el docente explicó que este tipo de tareas son muy útiles para el desarrollo del lenguaje algebraico y modelaje. Sin embargo, durante el curso no realizaron generalizaciones de patrones ya que no estaba incluido en el plan de estudios.

Prosiguiendo con la fase 1 de la ingeniería didáctica, para el **análisis de la dimensión didáctica,** se examinó los programas de estudio de la asignatura de matemáticas del Bachillerato General en México y de manera específica el programa de estudio del Bachillerato de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ). También se utilizó la técnica de entrevista semiestructurada dirigida al docente de matemáticas con el objetivo de indagar sobre su estilo de enseñanza (Anexo C).

En cuanto al análisis de los planes de estudio del primer año de Bachillerato se destaca que, en el plan de estudios de la UAQ (2019a, 2019b), el tema de sucesiones o generalización de patrones no se encuentra de manera explícita en los documentos; no obstante, pueden ser abordados en el primer semestre en la unidad de introducción al álgebra ya que involucra el uso de simbologías y lenguaje algebraico. Asimismo, en la última unidad se estudia el tema de ecuaciones lineales en donde la práctica de despejes de variables se relaciona con la consigna de proceso inverso en las tareas de generalización de patrones. Durante el segundo semestre de matemáticas, se estudian ecuaciones de segundo grado y funciones, temas que también están implicados en las tareas propuestas en esta investigación.

Mientras tanto, en el plan de estudios de la Dirección General del Bachillerato (2017a, 2017b) sí se encuentra explícitamente el tema de sucesiones, éste está ubicado en el bloque III del primer semestre de matemáticas. En este plan de estudios se le asignan 8 horas para abordar el tema de sucesiones y series, teniendo el objetivo de que el alumno resuelva modelos aritméticos, algebraicos y gráficos basándose en el reconocimiento de patrones para relacionar magnitudes constantes y variables de un fenómeno social o natural. Dentro de las habilidades a desarrollar se menciona que se espera que el estudiante sea capaz de deducir valores faltantes de una sucesión y que pueda identificar el patrón. Por último, cabe mencionar que, en el segundo semestre de matemáticas del Bachillerato General, los temas están enfocados a geometría y trigonometría a diferencia del Bachillerato de la UAQ que siguen relacionados con álgebra.

Continuando con el análisis, de la entrevista dirigida al docente (en el Anexo D se encuentran las transcripciones naturales de los fragmentos de la entrevista) se destaca que el profesor hace la planeación por semana eligiendo los ejercicios que utilizará en clase con base en las habilidades y conocimientos que se necesitan para resolverlos, es decir que previo a la clase, el docente resuelve los ejercicios para una mejor selección de éstos. Durante la sesión con los estudiantes, generalmente explica primero los conceptos, luego muestra cómo se resuelven algunos ejercicios relacionados con el tema y finalmente propone otros ejercicios para que los estudiantes los resuelvan. El docente detalló que los ejercicios que plantea a los estudiantes son variados, unos pueden ser resueltos siguiendo los pasos que se explicaron en el ejercicio de muestra, pero otros requieren mayor reflexión.

El docente comenta que la técnica que utiliza para que los estudiantes participen es invitar a los alumnos a pasar al pizarrón a resolver un ejercicio de manera voluntaria. Además, fomenta el trabajo en binas con el objetivo de que entre ellos se apoyen y logren comprender mejor los ejercicios. Cuando trabajan individualmente el profesor recorre los pasillos con el objetivo de ver en las libretas el trabajo del estudiante, si nota que no hay avances, les pregunta si tiene dudas para poder aclararlas. Algunos estudiantes buscan apoyo al final de la clase.

Para finalizar, el docente mencionó que años atrás había propuesto tareas sobre generalización de patrones en la asignatura de cálculo diferencial; sin embargo, en la asignatura de álgebra no lo ha hecho, pero le gustaría implementarlo ya que se ha dado cuenta de que tiene muchos beneficios para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Por otro lado, en el **campo de restricciones** se destaca que la posibilidad de brindar atención personalizada a los estudiantes es reducida debido a que el grupo estaba integrado por 42 estudiantes que simultáneamente se reunían en el aula para tomar las clases, aunado a que el tiempo para ver todos los temas del plan de estudios es justo. En cuanto a los recursos, permanentemente cuentan con un pizarrón blanco, fotocopias, un proyector e internet para el docente.

5.2 Fase 2. Concepción y análisis a priori

En esta fase se determinaron las variables macro-didácticas y micro-didácticas. Como se ha mencionado previamente, las variables macro-didácticas refieren a la delimitación del número de sesiones para llevar a cabo la experiencia didáctica, la organización del grupo, el uso de recursos materiales, entre otros. En cambio, las variables micro-didácticas consisten en delimitar aspectos centrales del contenido matemático a desarrollar, los cuales permiten el diseño de la secuencia didáctica como instrumento adecuado de recolección de datos para caracterizar el pensamiento algebraico de los participantes. De esta manera, se presenta el diseño final de todas las tareas que conforman la secuencia didáctica, así como un análisis de una posible solución a dichas tareas (análisis a priori).

Las decisiones que se tomaron, con base en los resultados del análisis preliminar (apartado 5.1), para establecer las variables macro-didácticas y micro-didácticas que fueron necesarias para realizar el diseño de la secuencia didáctica se exponen en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1. *Determinación de variables macro-didácticas y micro-didácticas*

Variables macro-didácticas	Variables micro-didácticas
Número de sesiones: 4	Tipo de patrones: Figurales de recurrencia
Número de tareas por sesión: 1	Número de tareas de patrones lineales: 2
Número de sesiones por semana: 1	Número de tareas de patrones cuadráticos: 2
Duración de una sesión: 40 minutos	Número de consignas por tarea: 4
Modalidad: Presencial	Tipo de consignas: Cálculo de términos cercanos, términos lejanos, expresión de la regla general y proceso inverso
Número de alumnos por sesión: 42 (grupo completo)	Niveles de demanda cognitiva de las consignas: Bajo-medio, Medio-alto y Alto
Modo de trabajo: Individual con lápiz y papel	Número de tareas que permiten expresar el término general con diferentes expresiones matemáticas: 4 (todas)

Fuente: Elaboración propia

A continuación, se exhibe el diseño final de cada una de las cuatro tareas que integran la secuencia didáctica.

5.2.1. Diseño de las tareas

La secuencia didáctica propuesta está integrada por cuatro tareas sobre generalización de patrones figurales; dos de ellas presentan patrones lineales y las dos restantes, patrones de crecimiento cuadrático. Cada tarea cuenta con cuatro consignas de la misma naturaleza: la primera solicita el término cercano, la segunda al término lejano, la tercera la regla general y, por último, la cuarta consigna invita a realizar un proceso inverso (Zapatera, 2018a). Se estima que 40 minutos son suficientes para poder contestar una tarea.

En esta propuesta se incluyeron únicamente patrones figurales porque se quiso dar un apoyo visual que facilitara encontrar la regla general del patrón y que incluso pudiera dar mayor significado a los símbolos y signos algebraicos.

TAREA 1

El diseño de la tarea que encabeza la secuencia didáctica se muestra en la Figura 5.3. Se decidió iniciar con un patrón lineal, que fue adaptado del trabajo de Chalé (2013), ya que existen reportes de que los estudiantes están más familiarizados con estas formas de crecimiento en comparación con los patrones cuadráticos (Akkan, 2013).

Figura 5.3. *Diseño de la tarea 1 "El caso de las donas"*

"El caso de las donas"

1. ¿Cuántas donas conforman a la figura en la posición 5?
2. ¿Cuántas donas conforman a la figura de la posición 14?
3. ¿Cuál sería la expresión que permita calcular el número de donas que conforman a la figura en la posición n-ésima? Explica cómo has obtenido esta expresión.
4. Si en una figura hay 185 donas, ¿en qué posición se encuentra la figura?

Fuente: Adaptado de Chalé (2013, p.105)

A continuación, se presenta una forma de abordar la tarea 1 "el caso de las donas" que talvez coincida con la estrategia de alguno de los estudiantes.

En la consigna 1 se solicita hallar el número de donas para una posición cercana, por lo que se podría recurrir a una organización tabular, como la que se muestra en la Tabla 5.2, la cual puede facilitar el análisis. En dicha tabla se aprecia que existe una regla recursiva que aumenta de dos en dos, lo que permite dar respuesta a la consigna 1 e incluso a la consigna 2 si la tabla se extiende hasta la posición 14.

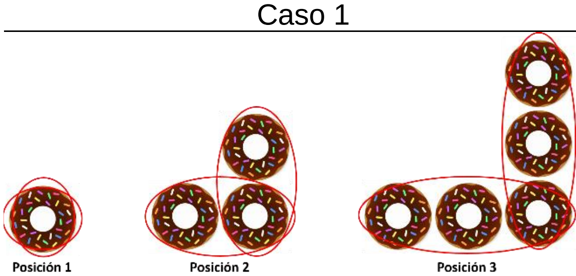
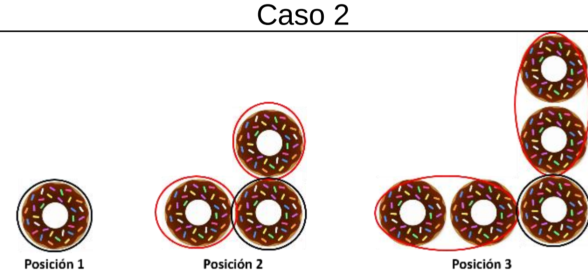
Tabla 5.2. *Organización tabular para la tarea 1*

Posición	**1**	**2**	**3**	4	**5**	6	7	8	9	10	11	12	13	**14**
Número de donas	**1**	**3**	**5**	7	**9**	11	13	15	17	19	21	23	25	**27**

Fuente: Elaboración propia

En cuanto a la consigna 3, cabe señalar que la regla general del patrón se podría deducir directamente de un análisis numérico, apoyándose de la Tabla 5.2; puesto que se advierte que la secuencia del número de donas está conformada por los números impares, es decir $f(n) = 2n - 1$. No obstante, con la finalidad de proporcionar un análisis figural, en la Tabla 5.3 se exhiben dos formas distintas de realizar la descomposición de figuras, las cuales pueden ayudar a encontrar la regla general del patrón y pueden influir en la forma final de expresar algebraicamente el patrón.

Tabla 5.3. *Descomposición figural de la tarea 1*

Caso 1	Caso 2
	
Análisis: Agruapando las donas de manera vertical y horizontal, se observa que el número de donas de cada agrupación coincide con el número de la posición; sin embargo, la dona que está en el cruce se cuenta doble vez. Por lo tanto, para no duplicar el conteo se tiene que restar una dona. Es así como se obtiene la siguiente expresión: $\boldsymbol{f(n) = 2n - 1}$ Con $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$	**Análisis:** Otra forma de analizarlo, es notando que siempre existe una sola dona en el cruce vertical y horizontal y que en los extremos la cantidad varía de acuerdo al número de la posición menos 1, puesto que en la posición 1 hay 0 donas en los extremos; en la posición 2 hay 1 dona en cada extremo; y en la posición 3 hay 2 donas en cada extremo. De aquí que la regla se pueda expresar como: $\boldsymbol{f(n) = 2(n - 1) + 1}$ Con $n \in \mathbb{N}$

Fuente: Elaboración propia

Al obtener la expresión algebraica $f(n) = 2n - 1$ en el caso 1; o bien, $f(n) = 2(n - 1) + 1$ en el caso 2 (Tabla 5.3), se puede dar respuesta a todas las consignas. De este modo, se puede corroborar que en la posición 5 habría: $f(5) = 2(5) - 1 \rightarrow$

$f(5) = 10 - 1 \rightarrow f(5) = \mathbf{9}$. Considerando ahora la expresión del caso 2 para conocer el número de donas de la posición 14 se tiene que: $f(14) = 2(14-1) + 1 \rightarrow f(14) = 26 + 1 \rightarrow f(14) = \mathbf{27.}$

Para finalizar la tarea 1, la consigna 4 incita a transformar la expresión general ya que pide calcular la posición en vez del número de donas. Por lo que se puede realizar lo siguiente: $f(n) = 2n - 1 \rightarrow f(n) + 1 = 2n \rightarrow \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{f(n)+1}}{\mathbf{2}}$**.** Entonces si $f(n) = 185$ se tiene que $n = \frac{185+1}{2} \rightarrow n = \frac{186}{2} \rightarrow \boldsymbol{n} = \mathbf{93}$

TAREA 2

Prosiguiendo con el diseño y análisis de la secuencia didáctica, en la tarea 2 (ver Figura 5.4) se planteó el caso de otro patrón lineal como adaptación del propuesto por López-Acosta (2016).

Figura 5.4. *Diseño de la tarea 2 "El caso de las perlas"*

“El caso de las perlas”

1. ¿Cuántas perlas conforman a la figura de la posición 5?
2. ¿Cuántas perlas conforman a la figura de la posición 13?
3. ¿Cuál sería la expresión que permita calcular el número de perlas que conforman a la figura en la posición n-ésima? Explica cómo has obtenido esta expresión.
4. Si en una figura hay 127 perlas, ¿en qué posición se encuentra la figura?

Fuente: Adaptado de López-Acosta (2016, p. 63)

Como se mencionó con anterioridad, a pesar de que las tareas tienen diferentes patrones, coinciden en la naturaleza de las consignas. Por lo que la forma de abordar la consigna 1 puede ser similar a lo que se hizo en la tarea 1, es decir, mediante una organización tabular para facilitar el análisis (ver Tabla 5.4);

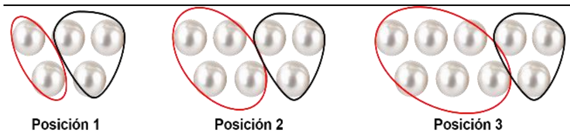
Tabla 5.4. *Organización tabular para la tarea 2*

Posición	**1**	**2**	**3**	4	**5**	6	7	8	9	10	11	12	**13**
Número de perlas	**5**	**7**	**9**	11	**13**	15	17	19	21	23	25	27	**29**

Fuente: Elaboración propia

Para poder encontrar la regla general que es solicitada en la consigna 3, se puede realizar un análisis figural como el que se muestra en la Tabla 5.5, en donde se exponen dos formas distintas de realizar la descomposición de figuras.

Tabla 5.5. *Descomposición figural de la tarea 2*

Caso 1	**Caso 2**
	
Análisis: En este caso se aprecia que hay dos agrupaciones, una variable y la otra constante. En la agrupación que varía se nota que el número de perlas es dos veces el número de la posición, puesto que en la posición 1 hay 2 perlas, en la 2 hay 4 y en la 3 hay 6; mientras que en todos los casos siempre permanecen 3 perlas más. Es así como se obtiene la siguiente expresión: $\boldsymbol{f(n) = 2n + 3}$ Con $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$	**Análisis:** Si se agrupa de esta forma, se puede observar que las perlas de la parte superior se comportan de acuerdo al número de la posición más dos, ya que en la primera hay 1 más dos unidades, en la segunda posición hay 2 más dos unidades y así sucesivamente. Por otro lado, las perlas de la parte inferior aumentan también de acuerdo al número de la posición más 1. De esta manera, la expresión que describe esta descomposición de figuras es: $\boldsymbol{f(n) = (n + 2) + (n + 1)}$ Con $n \in \mathbb{N}$

Fuente: Elaboración propia

Por lo tanto, el término general está dado por $\boldsymbol{f(n) = 2n + 3}$ si se hizo las agrupaciones como en el caso 1; o bien $\boldsymbol{f(n) = (n + 2) + (n + 1)}$ que se obtuvo en el análisis del caso 2 (Tabla 5.5). Teniendo la expresión general se puede dar respuesta a todas las demás consignas. Por lo que se ratifica que en la posición 5 habría: $f(5) = 2(5) + 3 \rightarrow f(5) = 10 + 3 \rightarrow f(5) = \mathbf{13}$. Ahora, utilizando la expresión del caso 2 para la posición 13 se tiene que: $f(13) = (13 + 2) + (13 + 1) \rightarrow f(13) = 15 + 14 \rightarrow f(13) = \mathbf{29.}$

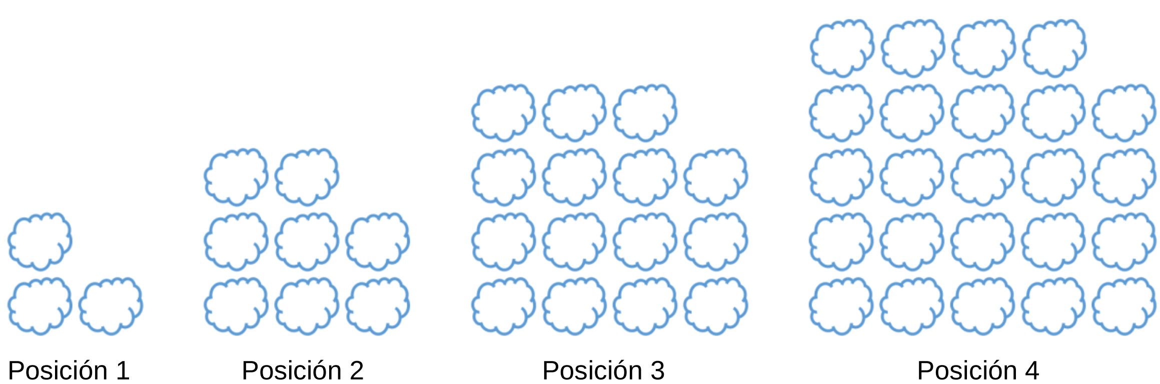
Por último, la consigna 4 invita a realizar un proceso inverso ya que teniendo el número de perlas que es 127 pregunta por la posición que le corresponde, entonces: $f(n) = 127 \rightarrow 127 = 2n + 3 \rightarrow 124 = 2n \rightarrow \mathbf{62} = \boldsymbol{n}$, así, la figura con 127 perlas estaría en la posición 62.

TAREA 3

El diseño de la tarea 3 "El caso de las nubes" (adaptado de Godino et al., 2015) se muestra en la Figura 5.5. La estructura de la figura proporciona visualmente un apoyo para determinar el crecimiento del patrón debido a que el acomodamiento de los elementos se aproxima a formar una superficie cuadrada, de esta manera, la tarea propone un patrón de crecimiento cuadrático. En este caso, se decidió exponer las primeras 4 posiciones porque a diferencia de los patrones lineales, encontrar una regla recursiva no es tan evidente al contar solo con las 3 primeras posiciones.

Figura 5.5. *Diseño de la tarea 3 "El caso de las nubes"*

"El caso de las nubes"



1. ¿Cuántas nubes conforman a la figura en la posición 5?
2. ¿Cuántas nubes conforman a la figura en la posición 14?
3. ¿Cuál sería la expresión que permita calcular el número nubes que conforman a la figura en la posición n-ésima? Explica cómo has obtenido esta expresión.
4. ¿Si tengo una figura con 288 nubes, ¿en qué posición se encuentra la figura?

Fuente: Adaptado de Godino et al.(2015, p. 138)

La solución a las consignas de la tarea 3 (Figura 5.5) se pueden abordar de la siguiente manera:

Para la consigna 1 se puede realizar una organización tabular como la que se muestra en la Tabla 5.6. Dado que no se aprecia una regla recursiva sencilla teniendo solo el número de nubes, se pensó en registrar el incremento de nubes que se da de una posición a la siguiente; por ejemplo, en la posición 1 hay 3 nubes, luego en la posición 2 hay 8 nubes, es decir que el incremento de nubes fue de 5. Asimismo, se observa que entre la posición 2 y 3 existe un incremento de 7 nubes. Siguiendo con esta lógica, en la columna de incrementos se llega a formar la secuencia numérica de 5,7,9 y 11 de donde se nota una regla recursiva que aumenta de dos en dos. Esta regla determina que el incremento de nubes entre la posición 4 y 5 es de 13 nubes, es decir que habrá 35 nubes en la posición 5. Extendiendo la tabla se puede concluir que en la posición 14 habrá 224 nubes lo cual contesta la consigna 2.

Tabla 5.6. *Organización tabular para la tarea 3*

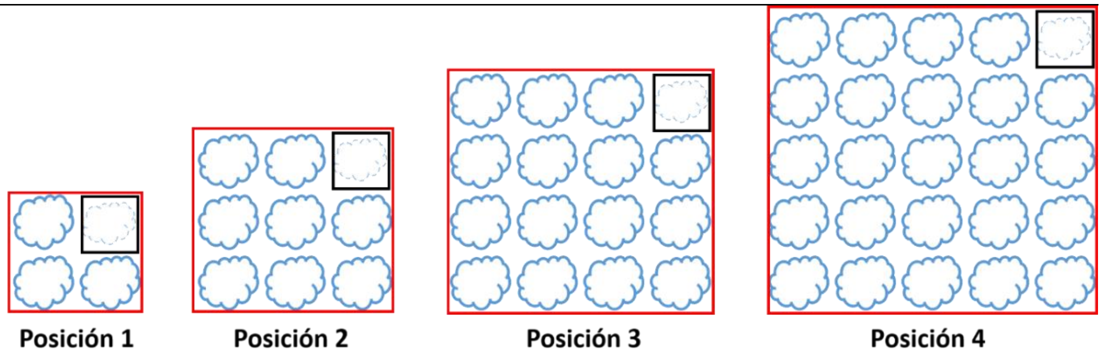
Posición	Número de nubes	Incremento
1	**3**	**5**
2	**8**	**7**
3	**15**	**9**
4	**24**	**11**
5	**35**	13
6	48	15
7	63	17
8	80	19
9	99	21
10	120	23
11	143	25
12	168	27
13	195	29
14	**224**	---

Fuente: Elaboración propia

Para atender lo solicitado en la consigna 3, se propone realizar un análisis figural que ayude a encontrar la regla de patrón. Para dicho análisis se hace una descomposición de figuras que permite hallar regularidades en la secuencia. De manera similar a las tareas anteriores, se presentan dos formas distintas de realizar la descomposición (ver Tabla 5.7).

Tabla 5.7. *Descomposición figural de la tarea 3*

Caso 1

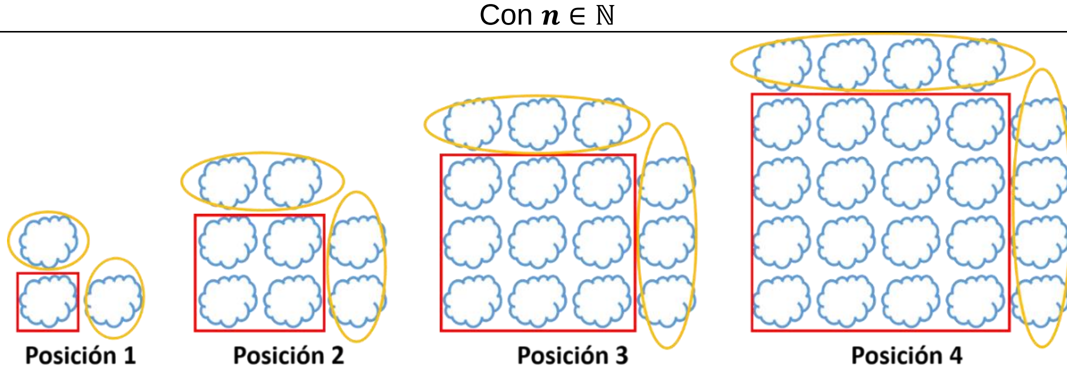


Análisis: Al realizar esta descomposición de figuras se puede notar que se forman cuadrados, lo cual indica que el patrón tiene un crecimiento cuadrático. Asimismo, es evidente que siempre hace falta una nube para completar dicha superficie cuadrada. También se percibe que el número de nubes que forma el lado de cada cuadrado no coincide con el núermo de la posición, pues siempre hay un elemento más. Por ejemplo en la posición 1 el lado del cuadrado está formado por 2 nubes; en la posición 2 el lado contiene 3 nubes y así sucesivamente. De este análisis, se concluye que la regla general está dada por:

$$\boldsymbol{f(n) = (n+1)^2 - 1}$$

Con $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Caso 2



Análisis: De acuerdo a la descomposición, se puede notar que se forman cuadrados, en donde el número de nubes que conforman el lado coincide con la posición. Luego, en el extremo superior y en el extremo derecho de la figura se tienen la misma cantidad de elementos que también coinciden con la posición. Entonces en la posición 1 se tiene $\boldsymbol{1^2}$ nubes dentro del cuadrado, más 1 nube en cada uno de los dos extremos; en la posición 2 existen $\boldsymbol{2^2}$ nubes dentro del cuadrado, más 2 nubes en cada uno en los extremos.
De aquí se obtiene la regla general del patrón que es:

$$\boldsymbol{f(n) = n^2 + 2n}$$

Con $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Fuente: Elaboración propia

Una vez hallada la expresión algebraica $f(n) = (n+1)^2 - 1$ en el caso 1; o bien, $f(n) = n^2 + 2n$ en el caso 2 (Tabla 5.7), se puede dar respuesta a todas las consignas. Por lo tanto, se puede confirmar que en la posición 5 habría: $f(5) = (5+1)^2 - 1 \ \rightarrow\ f(5) = 36 - 1 \ \rightarrow\ f(5) = \mathbf{35}$. Considerando ahora la expresión del caso 2 para conocer el número de nubes de la posición 14 se tiene que: $f(14) = 14^2 + 2(14) \rightarrow f(14) = 196 + 28 \ \rightarrow\ f(14) = \mathbf{224.}$

Para concluir la tarea 3, la consigna 4 solicita encontrar la posición de la figura que está compuesta por 288 nubes. Entonces se tiene que $288 = (n+1)^2 - 1 \ \rightarrow 289 = (n+1)^2$ aplicando raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación se tiene que $\sqrt{289} = \sqrt{(n+1)^2} \rightarrow 17 = n + 1 \rightarrow n = 17 - 1 \rightarrow \boldsymbol{n} = \mathbf{16.}$

TAREA 4

Por último, en la Figura 5.6 se presenta el diseño de la tarea 4 “El caso de las hojas” la cual fue adaptada del trabajo de Kirwan (2015). Esta tarea que finaliza la secuencia didáctica contiene elementos en forma de hojas que están organizadas de tal forma que da un indicio de un crecimiento cuadrático. Al igual que en la tarea 3, se decidió exponer las primeras 4 posiciones porque a diferencia de los patrones lineales, encontrar una regla recursiva no es tan evidente al contar solo con las 3 primeras posiciones.

Figura 5.6. *Diseño de la tarea 4 "El caso de las hojas"*

1. ¿Cuántas hojas conforman a la figura en la posición 5?
2. ¿Cuántas hojas conforman a la figura en la posición 11?
3. ¿Cuál sería la expresión que permita calcular el número hojas que conforman a la figura en la posición n-ésima? Explica cómo has obtenido esta expresión.
4. ¿Si tengo una figura con 422 hojas, ¿en qué posición se encuentra la figura?

Fuente: Adaptado de Kirwan (2015, p. 67)

A continuación, se explica una forma de abordar a cada una de las consignas de la tarea 4:

En la consigna 1 se puede realizar una organización tabular (ver Tabla 5.8) para obtener el número de hojas en la posición 5. Considerando que no se aprecia una regla recursiva sencilla teniendo solo el número de hojas, se ideó registrar el incremento de hojas que se da de una posición a la siguiente; por ejemplo, en la posición 1 hay 8 hojas, luego en la posición 2 hay 14 hojas, es decir que el incremento de hojas es de 6. Asimismo, se observa que entre la posición 2 y 3 existe un incremento de 8 hojas. Siguiendo con este razonamiento, en la columna de incrementos se llega a formar la secuencia numérica de 6,8,10 y 12 de donde se nota una regla recursiva que aumenta de dos en dos. Esta regla determina que el incremento de nubes entre la posición 4 y 5 es de 12 hojas, es decir que habrá 44 hojas en la posición 5. Extendiendo la tabla se puede dar respuesta a la consigna 2 porque se puede determinar que en la posición 11 habrá 158 hojas.

Tabla 5.8. *Organización tabular para la tarea 4*

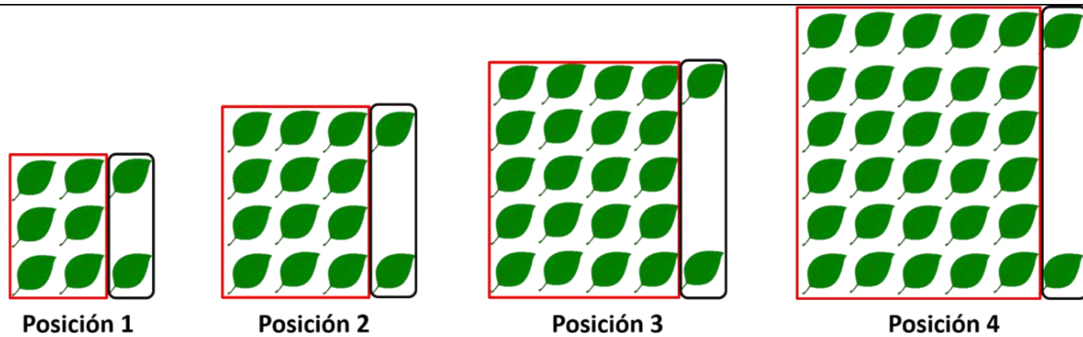
Posición	Número de hojas	Incremento
1	**8**	**6**
2	**14**	**8**
3	**22**	**10**
4	**32**	**12**
5	**44**	14
6	58	16
7	74	18
8	92	20
9	112	22
10	134	24
11	**158**	--

Fuente: Elaboración propia

Con respecto a la consigna 3, se realizó un análisis figural con el objetivo de encontrar la regla de patrón. En la Tabla 5.9 se exhiben y explican dos formas diferentes de hacer la descomposición de figuras para encontrar la regla general.

Tabla 5.9. *Descomposición figural de la tarea 4*

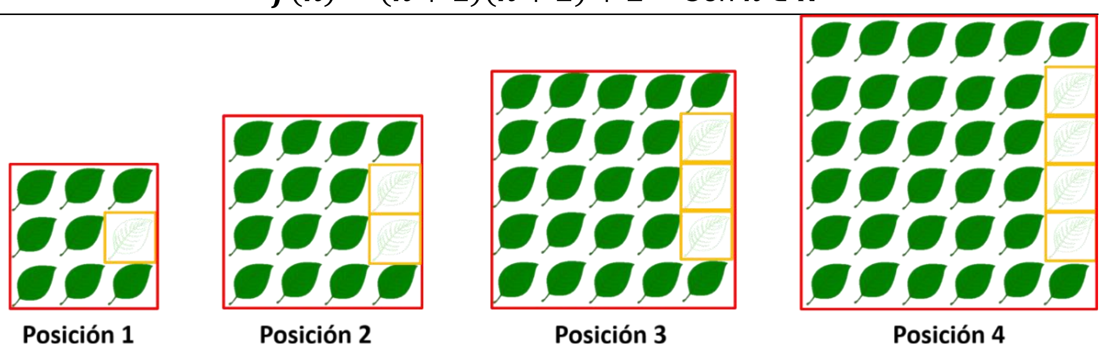
Caso 1



Análisis: En este caso se puede distinguir que el crecimiento es cuadrático debido a que se forma un rectángulo que tiene como “base” el número de la posición más una hoja y de “altura” el número de la posicón más dos hojas, también se persive que existe una constante de dos hojas en el extremo derecho de cada figura. Por ejemplo en la posición 1 se forma un rectángulo de base (1+1) y de altura (1+2) por lo que dentro del rectángulo hay 6 hojas y en el extremo derecho de la figura hay 2 hojas más. De manera similar, en la posición 2 se forma un rectángulo de base (2+1) y altura (2+2) y en el extremo derecho de la figura se vuelve a encontrar las dos hojas adicionales. De aquí que como regla general se tenga:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\boldsymbol{n}+\mathbf{2})+\mathbf{2} \quad \text{Con } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

Caso 2



Análisis: Al realizar de esta forma la descomposición figural, se puede apreciar un crecimiento no lineal ya que se forma un cuadrado. Sin embargo, el número de hojas que conforman el lado del cuadro no coincide precisamente con el número de la posición, sino que está aumentado en dos. Para este caso, también se necesita percibir que al lado derecho del cuadrado siempre le hacen falta hojas y que el número de hojas faltantes coincide con el número de la posición. Tómose como muestra lo que sucede en la posición 1, en donde el lado del cuadro tiene (1+2) hojas, es decir que deberían haber 9 hojas, pero en realidad hay $\boldsymbol{(1+2)^2-1}$. Siguiendo la misma lógica, en la posición 2 hay $\boldsymbol{(2+2)^2-2}$ hojas. De este análisis se concluye que la expresión general que dicta el comportamiento del patrón es:

$\boldsymbol{f(n)=(n+2)^2-n}$ Con $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Fuente: Elaboración propia

Ya que se conoce que la regla general del patrón está dada por la expresión algebraica $\boldsymbol{f(n)=(n+1)(n+2)+2}$, si se hizo las agrupaciones como en el caso 1; o bien por $\boldsymbol{f(n)=(n+2)^2-n}$ que se obtuvo en el análisis del caso 2 (Tabla 5.9) se puede dar solución a todas las consignas. Por lo que se ratifica que en la posición 5 habría: $f(5)=(5+1)(5+2)+2 \rightarrow f(5)=(6)(7)+2 \rightarrow f(5)=42+2 \rightarrow f(5)=\mathbf{44}$. Ahora, utilizando la expresión del caso 2 para la posición 11 se tiene que: $f(11)= (11+2)^2-11 \rightarrow f(11)= 13^2-11 \rightarrow f(11)=169-11 \rightarrow f(11)= \mathbf{158.}$

Finalmente, la consigna 4 estimula a transformar la expresión general ya que pide calcular la posición en vez del número de hojas. Por lo que se puede realizar lo siguiente: $f(n)= (n+1)(n+2)+2 \rightarrow f(n)-2=(n+1)(n+2)$**.** Entonces si $f(n)=422$ se tiene que $422-2=(n+1)(n+2) \rightarrow 420=(n+1)(n+2)$ de aquí se interpreta que se debe encontrar dos números consecutivos tal que su producto sea 420. Para aproximarse se estimó la raíz cuadrada de 420 la cual es 20.49 si se supone que $n+1= 20$ entonces $\rightarrow 420=(20)(21) \rightarrow 420=420$ lo cual es cierto, entonces la suposición hecha es correcta y por lo tanto como $n+1= 20 \rightarrow n= 20-1 \rightarrow n=\mathbf{19}$.

5.3 Fase 3. Experimentación

Esta fase implica el desarrollo de la ingeniería didáctica con una muestra de estudiantes. Por lo tanto, en esta sección se explicita el procedimiento de la aplicación de las tareas.

El estudio se llevó a cabo en el mes de mayo del año 2022 y consistió en la aplicación de la secuencia didáctica que se diseñó en la Fase 2 (apartado 5.2.1.

Diseño de las tareas). La aplicación se efectuó de acuerdo a lo planeado: la secuencia se conformó por 4 tareas que fueron aplicadas una por una durante 4 sesiones (una tarea por sesión). Las sesiones tuvieron una duración de aproximadamente 40 minutos y se realizaron una vez por semana.

Durante las intervenciones se solicitó a los estudiantes resolver las tareas de manera individual sin copiar ni compartir sus respuestas con los demás compañeros. En cuanto a las preguntas que hicieron los estudiantes sobre dudas con las consignas, se tuvo el cuidado de que al momento de responderlas no se diera la respuesta o bien se influenciara en cómo resolver la consigna.

Asimismo, como instrumento de recolección de datos se utilizó una entrevista semiestructura dirigida únicamente a estudiantes cuyos procesos de resolución escrita en las hojas de trabajo no brindaran información suficiente para comprender la lógica y estrategia utilizada.

Las entrevistas se realizaron tres días después de haber terminado de aplicar toda la secuencia didáctica y éstas fueron grabadas en audio.

5.4 Fase 4. Análisis a posteriori y evaluación

En esta fase se presenta el análisis de las producciones escritas de los estudiantes que resolvieron la secuencia didáctica en conjunto con la entrevista que se les hizo. Además, se realiza la confrontación de análisis a priori con el a posteriori. Se trata de la última fase metodológica de la ingeniería didáctica, en la cual se realizó una guía de observación con indicadores para analizar los datos recolectados durante la fase de experimentación y de esta forma poder caracterizar el pensamiento algebraico de los estudiantes con base en las estrategias utilizadas para resolver las consignas (Akkan, 2013) y de acuerdo al nivel de algebrización alcanzado en cada tarea (Aké y Godino, 2018).

En la Tabla 5.10 se expone la guía de observación con indicadores para analizar el trabajo individual de los estudiantes. En la guía se pretende marcar las estrategias utilizadas en cada consigna y luego determinar el nivel de algebrización que el estudiante alcanzó en cada tarea.

Tabla 5.10. *Guía de observación para el análisis de datos*

Código del estudiante ____		***Tarea 1***				***Tarea 2***				***Tarea 3***				***Tarea 4***			
Estrategia	***Indicador principal***	***1***	***2***	***3***	***4***	***1***	***2***	***3***	***4***	***1***	***2***	***3***	***4***	***1***	***2***	***3***	***4***
Conteo	Dibuja los siguientes términos contando sobre el dibujo																
Recursiva	Usa el término anterior para encontrar el siguiente término																
Diferencia	Toma como factor la diferencia entre dos términos consecutivos para expresar la regla																
Objeto-completo	Utiliza una relación proporcional entre la posición y los elementos de la figura																
Adivinar y comprobar	Predice una regla algebraica que represente al patrón																
Contextual	Expresa una regla centrada en la información específica que proporciona el caso																
Explícita	Obtiene la regla general relacionando la posición con el número de elementos																
Otras	Utiliza una estrategia diferente a las mencionadas																
Nivel de algebrización	*Indicador principal*	*Tarea 1*				*Tarea 2*				*Tarea 3*				*Tarea 4*			
0	No relaciona la posición con el número de elementos, utiliza estrategias como la recursiva																
1	Expresa la generalidad en un lenguaje no alfanumérico																
2	Expresa la generalidad en un lenguaje alfanumérico																
3	Transforma la expresión de la regla general																

Fuente: Elaboración propia

La información validada fue registrada en una base de datos de Microsoft Excel y procesados para obtener algunas medidas de tendencia central de acuerdo al tipo de tareas, las estrategias utilizadas y los niveles de algebrización. Por último, los resultados de la caracterización del pensamiento algebraico de los estudiantes de bachillerato fueron contrastados con el análisis a priori y discutidos en relación a otras investigaciones similares a esta.

Los resultados de esta fase 4, es decir, el desglose del análisis de las producciones de los estudiantes, las entrevistas semiestructuradas y la confrontación del análisis a priori con el análisis a posteriori se desarrolla en el capítulo 6 de resultados y discusión.

Capítulo 6. Resultados y discusión

De acuerdo a las respuestas que dieron los estudiantes a cada una de las tareas que integran la secuencia didáctica, se presenta el análisis del pensamiento algebraico de los 22 estudiantes que brindaron información suficiente para poder caracterizar su pensamiento algebraico. Los análisis se agrupan de acuerdo a dos categorías: 1) por tareas, en donde se evidencian distintas estrategias utilizadas por los estudiantes y 2) por individuo, que se refiere al perfil de cada estudiante de acuerdo a las características de su pensamiento algebraico. Los perfiles se centran principalmente en el nivel de algebrización que alcanza el estudiante a lo largo de las 4 tareas de la secuencia didáctica.

6.1 Análisis del pensamiento algebraico de acuerdo a las tareas

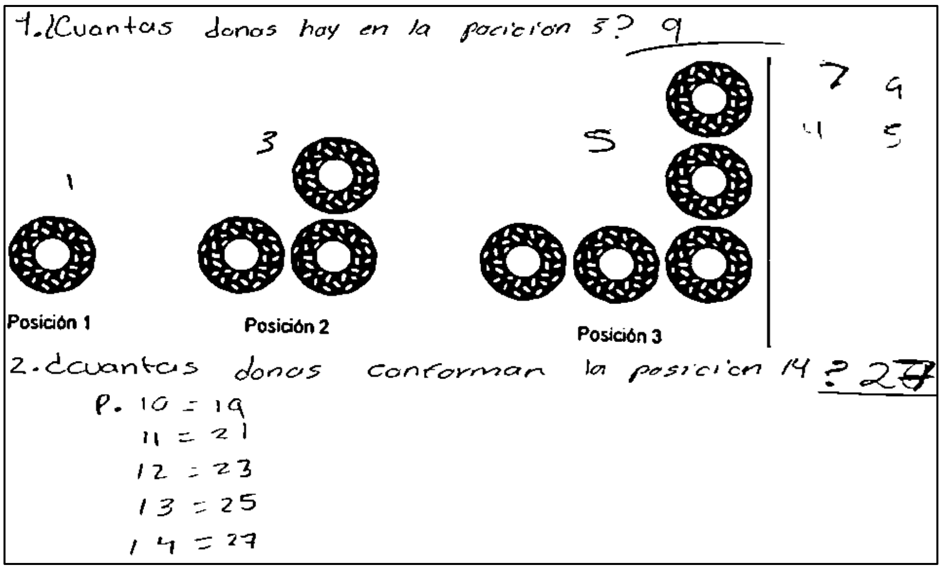
6.1.1. Tarea 1. El caso de las donas

Recordando la tarea 1 (Figura 5.3), en la consigna 1 que es la de hallar un término cercano, todos los participantes la respondieron correctamente. 11 estudiantes utilizaron una estrategia recursiva, 7 de conteo, y 4 explícita. Como se puede observar, dado que la consigna es de un nivel cognitivo bajo-medio, la mayoría no buscó la regla general para resolver la consigna de manera explícita.

En la consigna 2 que corresponde a hallar un término lejano, de nuevo todos los estudiantes la contestaron de manera correcta. En comparación con la consigna 1, se detectó una disminución del número de estudiantes que utilizaron una estrategia de conteo, puesto que únicamente 3 estudiantes siguieron con esta estrategia; 6 estudiantes utilizaron una regla explícita; 12 una regla recursiva; y 1 persona utilizó otra estrategia que, de acuerdo a la literatura, se corresponde con la estrategia de fragmentación que Lannin et al. (2006) la caracteriza cuando “el estudiante se basa en un patrón recursivo para construir una unidad sobre valores conocidos del atributo deseado” (p.6).

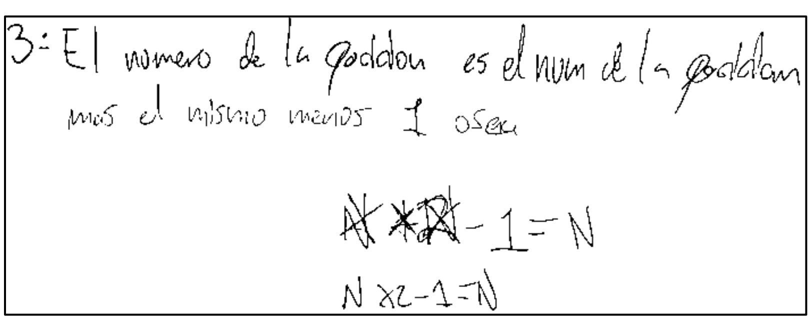
La estrategia de fragmentación fue utilizada por el estudiante con la etiqueta E2O. La Figura 6.1 muestra que E20 partió de una estrategia recursiva que le sirvió en la consigna 1 y luego utilizando el conocimiento de que por cada posición que se aumenta se agregan dos donas, dedujo que si en la posición 5 hay 9 donas, entonces en la posición 10 habrán 9+5(2), es decir 19 donas, finalmente vuelve a utilizar la recursividad para llegar a la posición 14.

Figura 6.1. *Estrategia de fragmentación utilizada por E20*



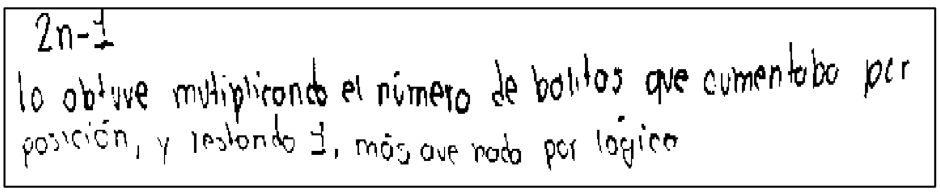
En cuanto a la consigna 3, solamente 2 estudiantes no expresaron de manera correcta la regla general (E18 y E19). E18, de acuerdo a lo que expresa, hace notar que ha encontrado la relación funcional; sin embargo, al momento de expresarlo en lenguaje común y alfanumérico comete el error de igualar la regla general a la misma literal que utilizó, ya que escribe $N \times 2 - 1 = N$ (ver Figura 6.2). Por otro lado, E19 no logra establecer una relación entre el número de la posición y la cantidad de donas, es así que él expresa textualmente “se usa una regla que aumenta 2 donas por figura $x + 2$”.

Figura 6.2. *Error de E18 al expresar la regla general*



Con lo que respecta a las estrategias utilizadas para hallar la regla general, 19 estudiantes utilizaron una estrategia explícita y 2 estudiantes usaron otra estrategia que Stacey (1989) clasifica como lineal y otros autores como Barbosa y Vale (2015); Firdaus et al. (2019) y Valenzuela y Gutiérrez (2018) denominan como multiplicativo con ajuste, dicha estrategia es similar a la estrategia de diferencia explicada por Akkan (2013), pero al final los estudiantes hacen un ajuste para que corresponda al comportamiento del patrón, es decir que la expresión queda de la forma $an + b$, en donde a es la diferencia encontrada en la recursividad, n la posición y b el término independiente que "ajusta" la regla general. En la Figura 6.3 se da un ejemplo de esa estrategia a través de la respuesta de E8.

Figura 6.3. *Estrategia multiplicativa con ajuste utilizada por E8*

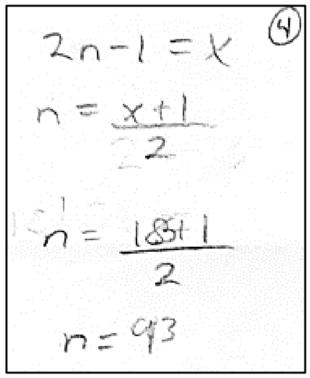


Por último, en la consigna 4 que consiste en realizar un proceso inverso, 21 estudiantes buscaron una estrategia que les permitiera contestarla adecuadamente, de esos estudiantes, 18 lograron contestar la consigna de manera correcta. Solamente 1 estudiante, identificado con la etiqueta E19, no intentó realizar el proceso inverso porque leyó mal y tomó la cantidad de donas como el número de la posición, error que lo llevó a calcular el número de donas para una posición lejana.

Las estrategias que utilizaron los 21 estudiantes para resolver la consigna 4, fueron las siguientes: 9 estudiantes utilizaron una estrategia explícita (ver ejemplo en la Figura 6.4), 5 estudiantes eligieron una estrategia contextual (Figura 6.5) y 7 usaron otra estrategia que consiste en aproximar el número de la posición a la mitad del número de donas (Figura 6.6).

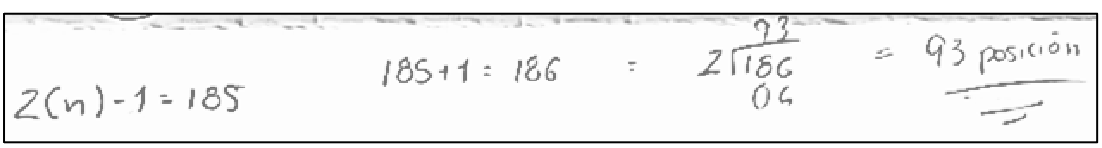
Como se muestra en la Figura 6.4, E2 utiliza una estrategia explícita que consiste en establecer una relación entre el número de la posición y la cantidad de donas. Para indicar la relación, E2 decide utilizar dos variables; n que representa el número de la posición y x que simboliza la cantidad de donas, de esta forma brinda mayor sentido a la situación que se les presenta, dada la naturaleza de esta consigna 3.

Figura 6.4. *Ejemplo de estrategia explícita utilizada por E2*



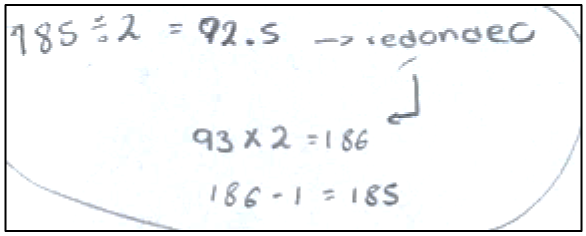
Por otro lado, en la Figura 6.5 se aprecia como E17 realiza el despeje de la literal n de una forma poco convencional, ya que en vez de realizar los siguientes pasos: $2(n) - 1 = 185 \Leftrightarrow 2n = 185 + 1 \Leftrightarrow n = \frac{186}{2}$, el estudiante solo expresa y realiza los cálculos aritméticos. En ningún momento del proceso expresa la literal a despejar, por lo tanto, la estrategia es contextual.

Figura 6.5. *Ejemplo de estrategia contextual utilizada por E17*



En la Figura 6.6 se expone el trabajo de E3 como muestra de una estrategia que no está contemplada dentro de la clasificación de Akkan (2013), y que de ahora en adelante, en esta investigación, se le nombrará “por aproximación”. Dicha estrategia fue usada por 7 estudiantes, de los cuales a 4 les resultó útil porque evaluaron en la regla general el valor aproximado obtenido y cuando el resultado no era el esperado seguían probando con otros valores hasta hallar el correcto. Sin embargo, 3 de los estudiantes que también la utilizaron cometieron el error de no comprobar la veracidad de su respuesta y por lo tanto dieron una respuesta equivocada.

Figura 6.6. *Ejemplo de otra estrategia (por aproximación) utilizada por E3*



Vale la pena señalar cómo los 21 estudiantes, que determinaron correctamente la regla general, hicieron uso del signo igual, ya sea que lo emplearan desde la consigna 3 o bien hasta la consigna 4. En la Tabla 6.1 se proporciona la información de a qué igualaron y la frecuencia con la que se observó el suceso.

Tabla 6.1. *Uso del signo igual en la regla general de la tarea 1*

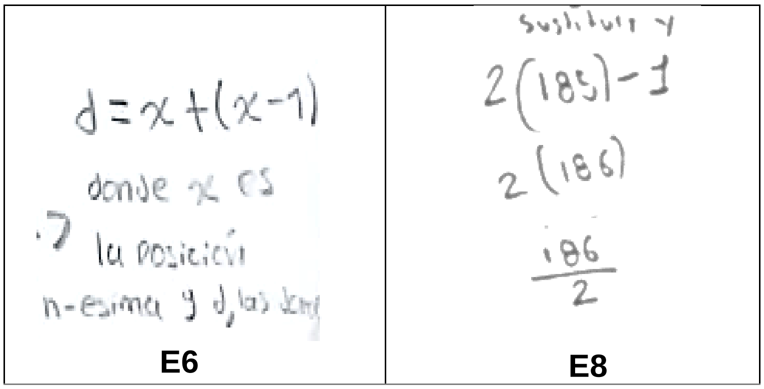
Igualación a:	Frecuencia	Ejemplo
Una literal	3	$2n - 1 = x$
Un enunciado	3	$2n - 1 = número\ de\ donas$
Un número (≠ 0)	2	$2n - 1 = 185$
*A cero	1	$2n - 1 = 0$
*A un espacio en blanco	1	$2n - 1 =$
No igualaron	11	$2n - 1$

*hallazgos vistos exclusivamente en la consigna 3

Los datos concentrados en la Tabla 6.1 revelan que ningún estudiante planteó una relación funcional $f(n)$. Así también, indican que solamente 8 estudiantes emplearon el signo igual en la consigna 3, pero dado el diseño de la consigna 4, se observa que 2 nuevos estudiantes se ven con la necesidad de usar este signo para establecer el caso particular en donde $2n + 1 = 185$.

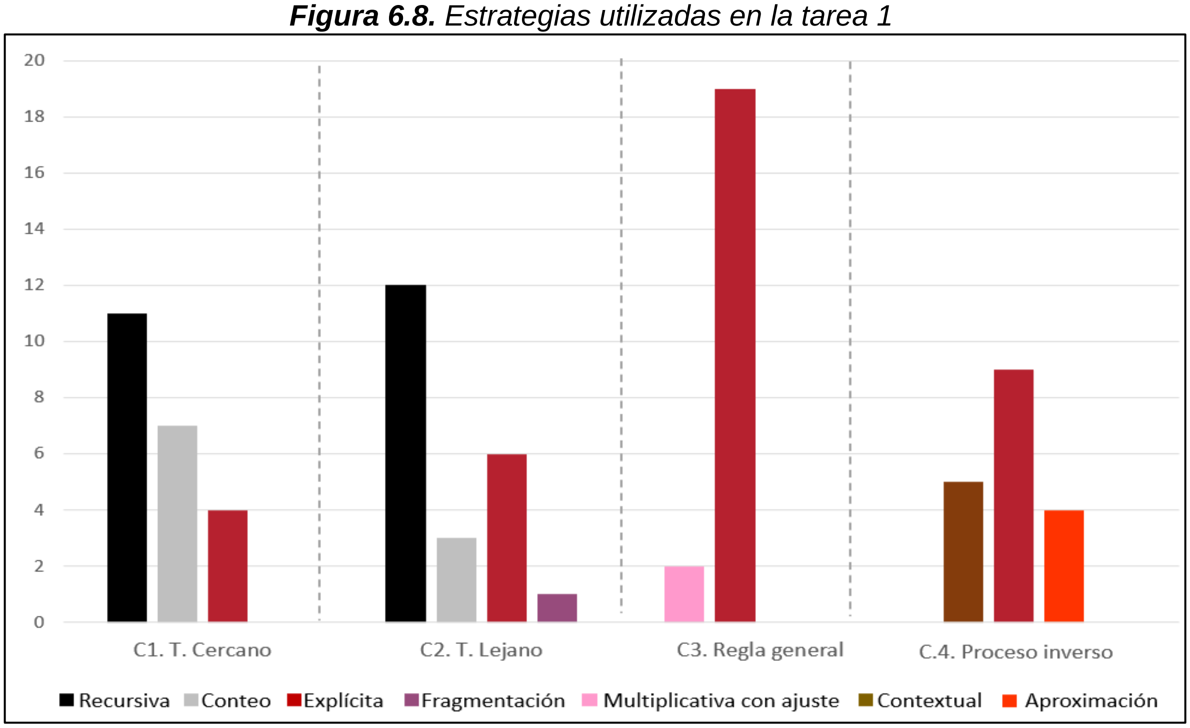
Existen dos casos que llamaron particularmente la atención, respecto a la Tarea 1, que se corresponden con el trabajo de los estudiantes E6 y E8 (ver Figura 6.7). En el caso del estudiante E6 se destaca que fue el único estudiante que definió lo que representa cada literal utilizada. Esto evidencia un uso más formal de la escritura matemática. Por otra lado, el estudiante E8, para dar respuesta a la consigna 4, evaluó el número de donas como si fuera la posición, pero hace lo contrario a lo que le indica su escritura matemática para obtener la respuesta correcta, esto puede indicar que el estudiante E8 tiene claro el procedimiento que debe seguir, pero no sabe como escribirlo adecuadamente.

Figura 6.7. *Casos particulares de la Tarea 1*



Para finalizar, en la Figura 6.8 se proporciona una gráfica de las frecuencias de las estrategias que emergieron en cada consigna de la tarea 1. En dicha gráfica se observar que la estrategia recursiva y de conteo, solo son utilizadas en las primeras dos consignas; mientras que la estrategia explícita es usada en toda la tarea.

Figura 6.8. *Estrategias utilizadas en la tarea 1*



6.1.2. Tarea 2. El caso de las perlas

De acuerdo al análisis de la tarea 2 (recordar el diseño de la tarea 2 en la Figura 5.4), en la consigna 1, que consiste en hallar un término cercano, 21 estudiantes respondieron correctamente; únicamente una estudiante respondió de manera equivocada debido a que, al usar una estrategia recursiva, se saltó la posición 5 e indicó que la cantidad de perlas que correspondía a esa posición se relacionaba con la posición 6, el error perjudicó su respuesta a esta consigna y también a la consigna 2.

En la consigna 1 se observaron 3 estrategias diferentes: la estrategia recursiva que fue utilizada por 14 estudiantes, la de conteo que fue usada por 5, y la estrategia explícita que fue empleada por 3 estudiantes. Esta frecuencia tiene un comportamiento similar a lo observado en la consigna 1 de la Tarea 1, ya que ambas tienen un nivel de demanda cognitiva bajo-medio y son de patrones de crecimiento lineal, por lo tanto, la mayoría de los participantes tampoco buscó la regla general para resolver esta consigna de manera explícita.

A modo de ejemplo de la estrategia de conteo, en la Figura 6.9, se aprecia como los estudiantes E3 y E17 realizaron un dibujo para que al final puedan contar las perlas totales. El estudiante E17 dibuja, sobre la ilustración dada en la posición 3, cuatro perlas más porque notó que por cada posición que se avanza se añade una perla en cada renglón. En contraste, la estudiante E3 construye el dibujo sin seguir la misma forma del patrón figural, lo que causó duda de si empleó una estrategia recursiva y luego de conteo. La duda fue aclarada en la entrevista semiestructurada ya que el estudiante E3 declaró lo siguiente:

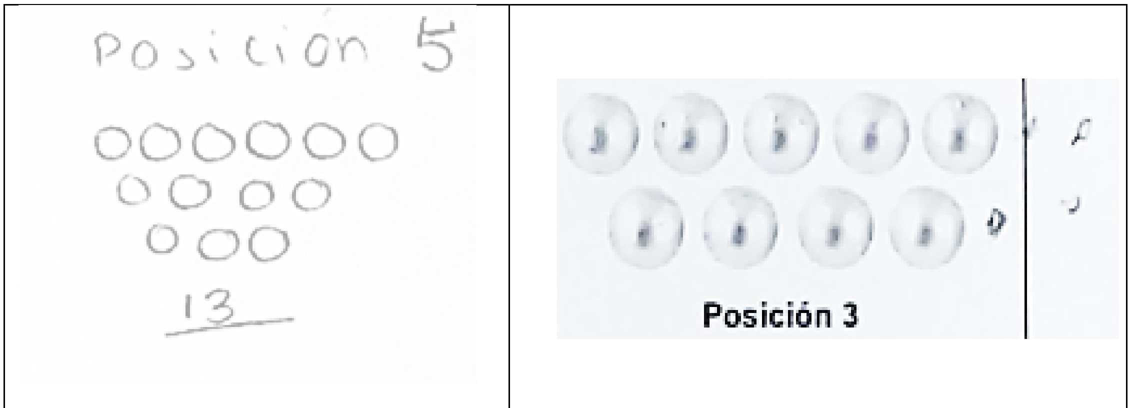
-Entrevistador: ¿Por qué agrupaste las perlas de esa forma?

-E3: Porque iba contando la forma en que se iban agregando. Por ejemplo: en la primera hay 3 arriba y 2 abajo; entonces en la siguiente irían 4 arriba y 3 abajo; y la siguiente 5 arriba y 4 abajo. Siguiendo ese orden fui ordenándolas en triángulo

-Entrevistador: La duda que me surge aquí es ¿por qué en la posición 5 decidiste agruparlo en 3 niveles?

-E3: Porque iba a ser más complicado comenzar a contar, si me seguía con una fila muy larga y si lo agrupaba en grupos más chiquitos podía contar de una manera más fácil…en si no fui siguiendo un orden como tal, porque la figura era más grande

Figura 6.9. *Estrategia recursiva y de conteo empleada por E10 y E3*

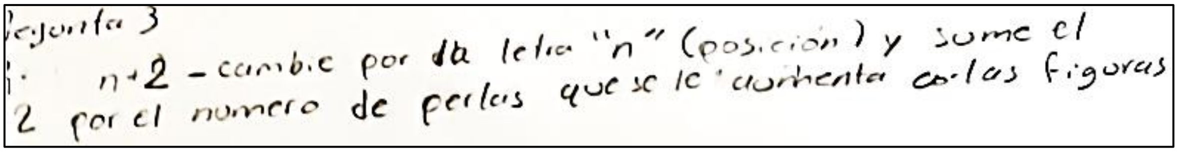


E3 **E17**

En lo que respecta a la consigna 2, que consiste en hallar un término lejano, 21 estudiantes obtuvieron la respuesta correcta, de ellos 1 estudiante utilizó la estrategia de conteo, 5 la recursiva y 15 la explícita. En comparación con la estadística de la consigna 2 de la Tarea 1, hubo un notable incremento del uso de la estrategia explícita, lo cual puede deberse al fortalecimiento que produce la secuencia didáctica o bien a que en este caso el número de elementos a contar en cada posición era mayor que en el caso de las donas.

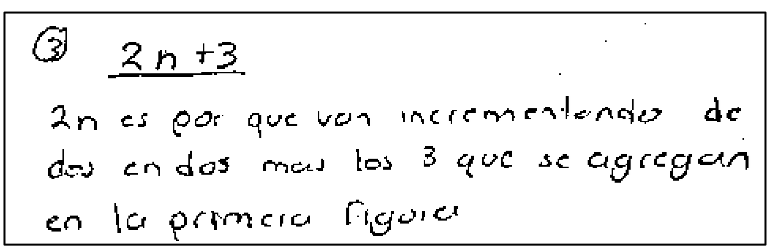
Prosiguiendo con el análisis, en la consigna 3, 20 estudiantes lograron expresar correctamente la regla general del patrón y 2 estudiantes no lograron hallarla porque solamente notaron una regla de recursividad. Por ejemplo, en la Figura 6.10 se puede apreciar como el Estudiante E22 escribe una expresión que no describe el comportamiento del patrón porque la literal "n" realmente no representa el número de la posición sino la cantidad de perlas de la figura anterior referente a la que se quiere calcular.

Figura 6.10. *Regla recursiva descrita por E22*



En cuanto a las estrategias utilizadas para hallar la regla general, 14 estudiantes utilizaron una estrategia explícita; 6 estudiantes utilizaron la estrategia multiplicativa con ajuste, discutida en la sección “6.1.1. Tarea 1. El caso de las donas”; y finalmente 2 estudiantes usaron una estrategia recursiva que no les permitió analizar una relación directa entre el número de la posición y la cantidad de perlas. En comparación con la consigna homóloga de la Tarea 1, se detectó que disminuyó en 5 estudiantes el uso de la estrategia explícita y aumentó en 4 participantes el empleo de la estrategia multiplicativa con ajuste, como ejemplo de esta estrategia se muestra la Figura 6.11, en donde el estudiante E2 explica con lenguaje común que el coeficiente de n es 2 porque las perlas van aumentando de dos en dos, pero ajusta la regla general sumando 3 para que coincida con la cantidad de perlas que hay en la posición 1.

Figura 6.11. *Estrategia multiplicativa con ajuste usada por E2*

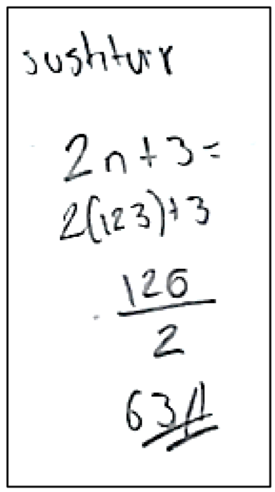


Finalmente, en la consigna 4, que invita a hallar el número de la posición dado cierto número de perlas, 16 estudiantes la respondieron correctamente.

Las causas de los errores de los 6 estudiantes que no contestaron con éxito la consigna 4 fueron los siguientes: E18 leyó mal la instrucción y no hizo el proceso inverso; E7 confundió las cuentas al hacer un procedimiento recursivo muy extenso;

E20 dividió directamente la cantidad de perlas entre 2, pero no comprobó correctamente el resultado; E19 y E22 no contestaron la consigna y E8 (ver Figura 6.12) por error sustituyó 123 en lugar de 127 perlas, lo evaluó como si fuera una posición, pero en el primer paso olvidó que deseaba hacer un proceso inverso, referente a lo que expresó matemáticamente, pues sumó 3, aunque después, hizo lo contrario a lo escrito porque dividió entre 2 en vez de multiplicar, cabe mencionar que este método le había resultado exitoso en la Tarea 1 (Figura 6.7), pero ahora se observa, cómo una expresión inadecuada, la confundió en lo que mentalmente planeaba hacer.

Figura 6.12. *Procedimiento inverso a lo expresado, realizado por E8*



En cuanto a las estrategias utilizadas para contestar correctamente la consigna 4, 11 estudiantes utilizaron una estrategia explícita, 4 una estrategia contextual y 1 estudiante empleó otra estrategia (por aproximación) que ya había sido detectada en la tarea 1 (Figura 6.6). En comparación con el proceso inverso de la tarea 1, hubo una disminución de 6 estudiantes que emplearon la estrategia por aproximación.

En cuanto al uso del signo igual, es interesante analizar cómo los 20 estudiantes, que determinaron correctamente la regla general, hicieron uso del signo igual al responder la consigna 3 o bien cuando contestaron la consigna 4. En la Tabla 6.2 se proporciona la información sobre a qué igualaron y la frecuencia con la que se observó el suceso.

Tabla 6.2. *Uso del signo igual en la regla general de la tarea 2*

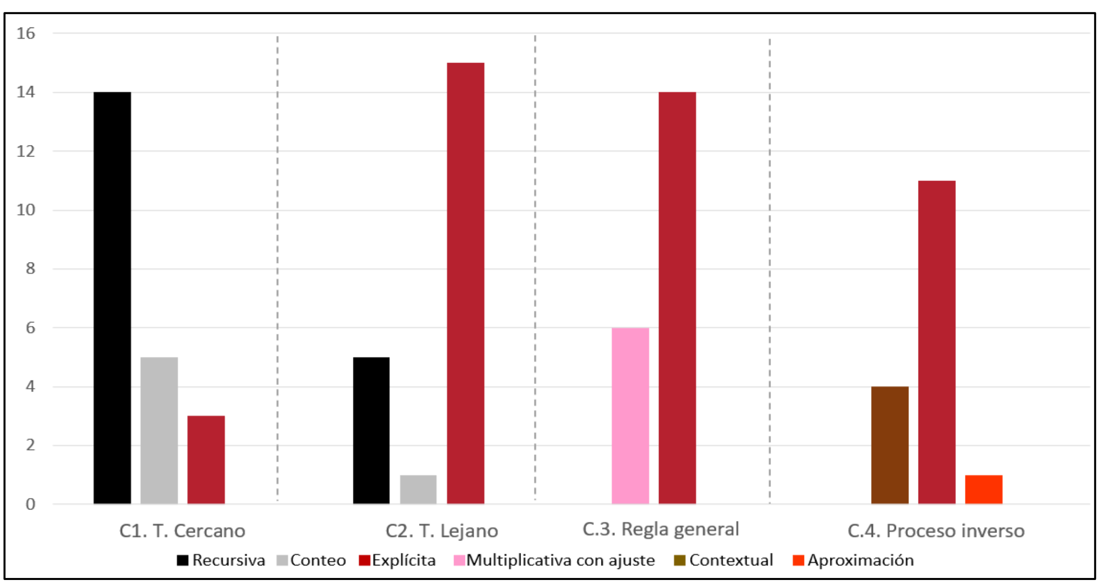
Igualación a:	Frecuencia	Ejemplo
Una literal	4	$2n + 3 = x$
Un enunciado	2	$2x + 3 = \ número\ de\ perlas$
Un número (≠ 0)	4	$2n - 1 = 185$
*A cero	1	$2x + 3 = 0$
*A un espacio en blanco	1	$2n + 3 =$
No igualaron	8	$2n + 3$

*hallazgos vistos exclusivamente en la consigna 3

De acuerdo a los datos concentrados en la Tabla 6.2, se calcula que en la consigna 3, 8 estudiantes utilizaron el signo igual. Luego en la consigna 4, se encontró que 4 estudiantes, que antes no habían establecido una relación de equivalencia, ahora sí emplearon el signo igual para relacionar la regla general que habían hallado con el número de perlas que la consigna 4 les indicaba, a fin de encontrar el número de la posición correspondiente. Este hecho es consistente con lo observado en la Tarea 1 y por lo tanto da mayor soporte a la conjetura de que el diseño de las consignas incita al estudiante a establecer y expresar relaciones entre dos cantidades.

Para finalizar, en la Figura 6.13 se proporciona una gráfica de las frecuencias de las estrategias que emergieron en cada consigna de la tarea 2. En dicha gráfica se observar que en la consigna 1 son pocos los estudiantes que utilizan una estrategia explícita, pero en la consigna 2 aumenta el uso de esta estrategia.

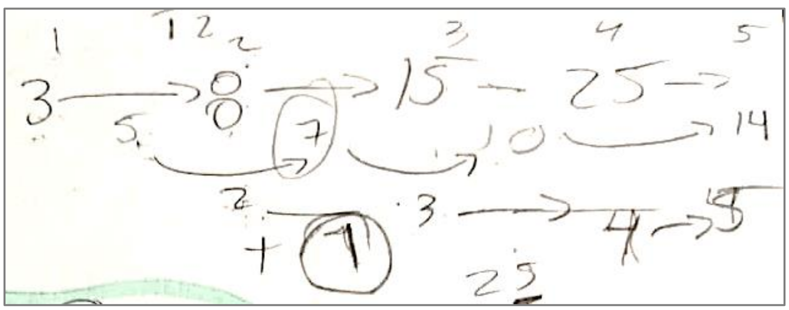
Figura 6.13. *Estrategias utilizadas en la tarea 2*



6.1.3. Tarea 3. El caso de las nubes

Recordando la tarea 3 (Figura 5.5), ahora se analizan las estrategias utilizadas por los estudiantes para contestar preguntas relacionadas con patrones de crecimiento cuadrático. En la consigna 1, que es la de hallar un término cercano, solamente el estudiante E20 respondió de manera incorrecta porque determinó una regla recursiva equivocada, en la Figura 6.14 se puede apreciar que el origen del error se debió a que contó mal el número de nubes de la posición 4 (en vez de 24 contó 25) por lo que argumentó que las nubes que se añaden comienzan con 5, luego se incrementa a 7, después a 10 y en la posición 5 dedujo que serían 14 nubes más.

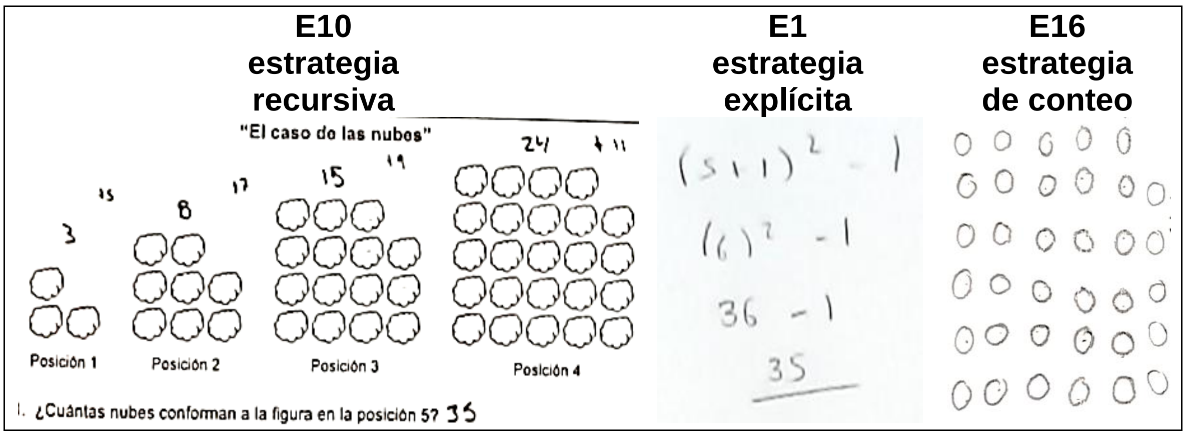
Figura 6.14. *Error de E20 al establecer una regla recursiva*



De los 21 estudiantes que contestaron correctamente la consigna 1, se contabilizaron que 12 estudiantes utilizaron una estrategia recursiva; 7 estudiantes una estrategia explícita y 2 usaron una estrategia de conteo. En la Figura 6.15, se brinda un ejemplo de los 3 tipos de estrategias, en el caso del estudiante E10 se aprecia que determinó correctamente la regla recursiva, pues primero nota que se añaden 5 nubes, luego 7, posteriormente 9 y finalmente deduce que se agregarán 11 nubes; en el caso de E1, primero encuentra la regla general $(n+1)^2 - 1$ y después evalúa con $n = 5$; por último, E16 encuentra el patrón figural para poder construir el dibujo que corresponde a la posición 5 y finalmente cuenta el total de nubes dibujadas.

A pesar de que la consigna 1 tiene un nivel de demanda cognitiva bajo-medio, como la consigna 1 de la tarea 1 y 2 (patrones de crecimiento lineal), se observó que hubo una disminución de alrededor de 5 estudiantes que ya no utilizaron una estrategia de conteo; en contraste, se observó un ligero aumento de 3 estudiantes que usaron una estrategia explícita. Este suceso puede deberse a que la cantidad de elementos es significativamente superior en la tarea 3 y por lo tanto, evitan contar uno por uno y comienzan a buscar desde un principio la regla general del patrón.

Figura 6.15. *Ejemplo de estrategias utilizadas en la consigna 1*

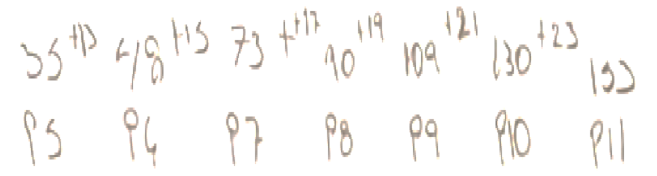


En cuanto a la consigna 2, que solicita hallar el número de nubes para un término lejano, se encontró que 3 estudiantes la contestaron incorrectamente. E10 y E16 se equivocaron en una suma al hacer una estrategia recursiva y E20 de manera explícita determinó una regla general inadecuada. Para ejemplificar, en la Figura 6.16 se evidencia que E10 realiza un procedimiento correcto, pero suma mal 48+15 para encontrar la cantidad de nubes en la posición 7 y por eso no llega a la respuesta correcta para la posición 11; por otro lado, en el caso de E20 hizo falta que validara su conjetura (propuesta de regla general) con otros casos, pues ésta era cierta solo para la posición 1.

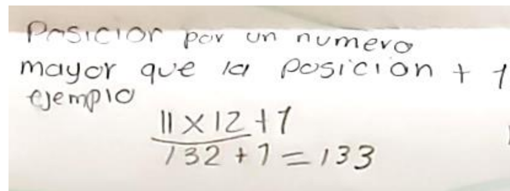
Las estrategias que llevaron a cabo los 19 estudiantes que contestaron exitosamente la consigna 2 fueron: la estrategia explícita, usada por 12 estudiantes; la estrategia recursiva empleada por 5 estudiantes; la estrategia de conteo usada por 1 estudiante y la contextual utilizada también por 1 estudiante. Se percibe que alrededor de 5 estudiantes pasaron de una estrategia recursiva usada en la consigna 1 a una explícita para la consigna 2, como se había mencionado anteriormente, la estructura del patrón cuadrático influye en que los estudiantes no recurran al conteo y conjeturen directamente con alguna regla explícita.

Figura 6.16. *Errores al contestar la consigna 2*

E10

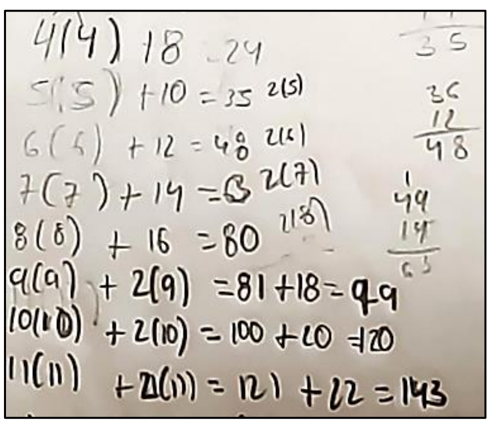


E20



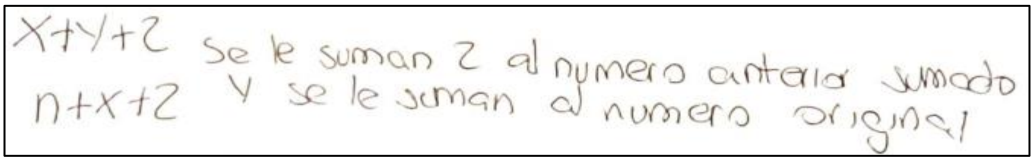
La nueva estrategia que surgió en la consigna 2 fue la contextual utilizada por el estudiante E12, en la Figura 6.17 se observa como el estudiante asocia una operación aritmética específica para cada posición, hasta llegar a la posición 11 que es la solicitada. En este caso el estudiante ya se dio cuenta de cómo es el patrón de crecimiento, sin embargo, aún no lo ha expresado de forma general. Cuando los estudiantes trabajan con la generalización de patrones es común que adviertan el patrón de forma numérica y utilizando (implícitamente) un arreglo tabular.

Figura 6.17. *Estrategia contextual usada por E12*



Prosiguiendo con el análisis de las respuestas a la consigna 3, que consiste en expresar la regla general, 3 estudiantes no la respondieron, de los 19 estudiantes que contestaron la consigna, 3 estudiantes no llegaron a la respuesta esperada. E20 la contestó incorrectamente porque desde la consigna 2, determinó con lenguaje común una regla que solo era válida para la posición 1. E19 y E22 enunciaron una regla recursiva, pero no establecieron una relación entre la cantidad de nubes y la posición. Por ejemplo, en la Figura 6.18, E19 explica que se le suma 2 al número anterior sumado, es decir que el aumento de nubes cambia y por lo tanto escribe dos variables para expresarlo, en este razonamiento el estudiante necesita el valor de la posición anterior para determinar el término siguiente.

Figura 6.18. *Regla recursiva empleada por E19*



Las estrategias que utilizaron los 16 estudiantes que determinaron correctamente la regla general fueron todas explícitas. Es relevante mencionar que en esta tarea se observó 6 formas distintas de expresar la regla general. En la Tabla 6.3 se concentran las expresiones equivalentes encontradas, la frecuencia con la que se usaron y también el número de estudiantes que encontraron esa expresión con un análisis figural o numérico.

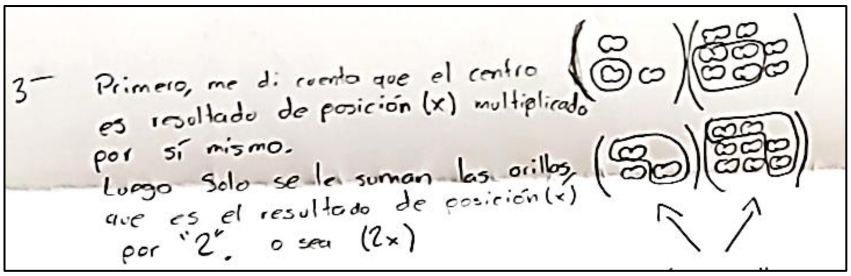
Tabla 6.3. *Tarea 3. Expresiones equivalentes, frecuencia y análisis*

Expresión algebraica	Frecuencia de uso	Frecuencia de análisis figural	Frecuencia de análisis numérico
$\boldsymbol{n(n+2)}$	6	0	6
$\boldsymbol{n^2+2n}$	5	1	4
$\boldsymbol{(n+1)^2-1}$	2	0	2
$\boldsymbol{(n+1)(n+1)-1}$	1	1	0
$\boldsymbol{n(n)+2(n)}$	1	0	1
$\boldsymbol{n+(n(n+1))}$	1	0	1

Los resultados indican que la mayoría de los estudiantes están acostumbrados a realizar un análisis numérico, esto es consistente con la investigación de Cañadas et al. (2008) y Chalé (2013) en donde también se encontraron hechos similares. No obstante, es interesante estudiar el análisis figural que realizaron los estudiantes porque permite entender claramente como los estudiantes se apoyan del lenguaje algebraico para expresar un patrón que han hallado de manera visual.

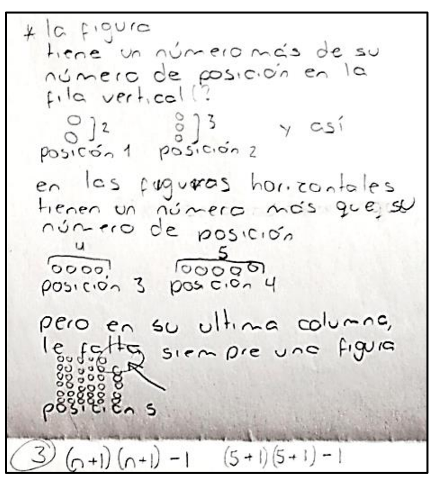
En la Figura 6.19 se evidencia como el estudiante E14 realiza un análisis visual, pues descompone la figura agrupando de dos formas diferentes: primero agrupa las nubes que forman un cuadrado en el centro y después las nubes que se encuentran en las orillas. El estudiante indica que la cantidad de nubes del centro se relaciona con el número de la posición (x) al cuadrado y que las nubes de las orillas se corresponden con el número de la posición por 2. Es así que determina la regla general como $x^2 + 2x$.

Figura 6.19. *Descomposición figural de E14 "x^2+2x"*



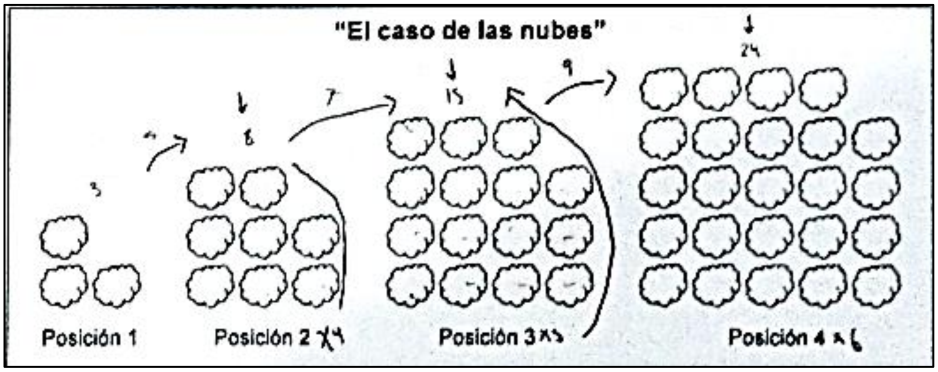
Por otro lado, en la Figura 6.20 se expone como E16 realiza otro tipo de descomposición figural, ya que se percata de que el número de filas verticales es el número de la posición más 1 al igual que las filas horizontales, pero aclara que siempre hace falta una nube en la última columna, por lo tanto, escribe la regla general como $(n + 1)(n + 1) - 1$. En este sentido, la forma en que los estudiantes descomponen la figura influye en la estructura de la regla explícita y emerge la noción de equivalencia de expresiones.

Figura 6.20. Descomposición figural de E16 "(n+1)(n+1)-1"



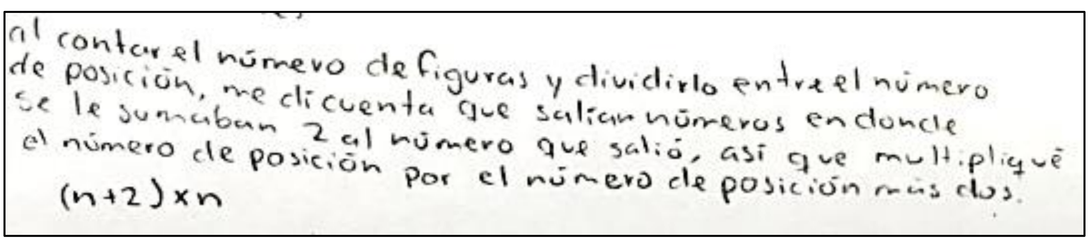
En esta investigación se consideró un análisis numérico si los estudiantes llegaron a expresar la regla general sin dejar evidencia escrita o dibujada de un apoyo visual referente al orden de las figuras. No obstante, se encontraron trabajos que de manera más evidente indicaron un análisis numérico, tal es el caso de E5 quien encontró que el total de nubes era el resultado del producto de la posición por la posición aumentada en 2, es decir, $n(n+2)$ (ver Figura 6.21).

Figura 6.21. *Análisis numérico de E5 "n(n+2)"*



Así también, el estudiante E15 realiza un análisis numérico, pues él explica con lenguaje común que encontró la regla general, $n(n+2)$,dividiendo la cantidad de nubes entre el número de la posición y encontrando que el cociente era el número de la posición más 2 (ver Figura 6.22).

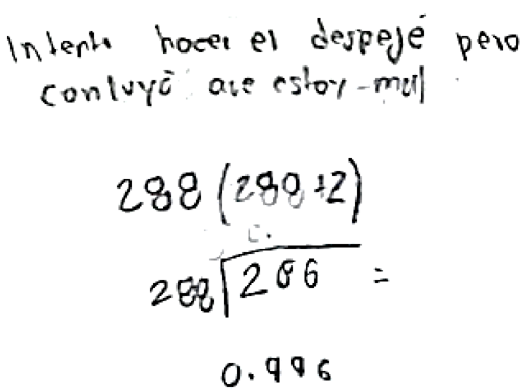
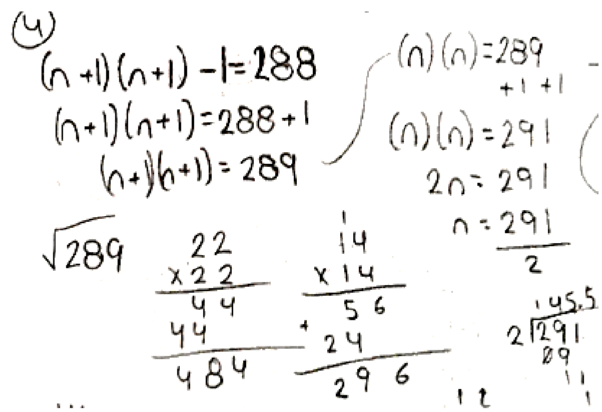
Figura 6.22. Ejemplo de 2 errores al contestar la consigna 4


al contar el número de figuras y dividirlo entre el número
de posición, me dicuenta que salían números en donde
se le sumaban 2 al número que salió, así que multipliqué
el número de posición por el número de posición más dos.
(n+2)xn

Por último, en la consigna 4 que consiste en realizar un proceso inverso, se contabilizaron que 6 de los 22 estudiantes no lograron contestarla correctamente. 3 de ellos no la respondieron y los otros 3 la respondieron de manera incorrecta.

En lo que respecta a la causa de los errores en la consigna 4, E7 se equivocó en una suma al hallar recursivamente la posición 7; E8 colocó la cantidad de nubes como el número de la posición, pero realizó la operación contraria a lo expresado, es decir, dividió obteniendo un resultado erróneo (ver Figura 6.23); y E16 en la primera parte de su procedimiento intentó sacar la raíz cuadrada de 289 porque tenía la expresión correcta $(n+1)(n+1) = 289$, probó calculando el producto de (22)(22) y (14)(14), luego descarta seguir con este método y utiliza la expresión equivocada $(n)(n) = 289 + 1 + 1$, después también confunde que $(n)(n) = \ 2n$ por lo que finaliza con un valor de n erróneo (ver Figura 6.23). Los errores anteriores evidencian la falta de dominio por parte de los estudiantes al realizar transformaciones de expresiones, lo que implica una limitación para el trabajo con expresiones equivalentes.

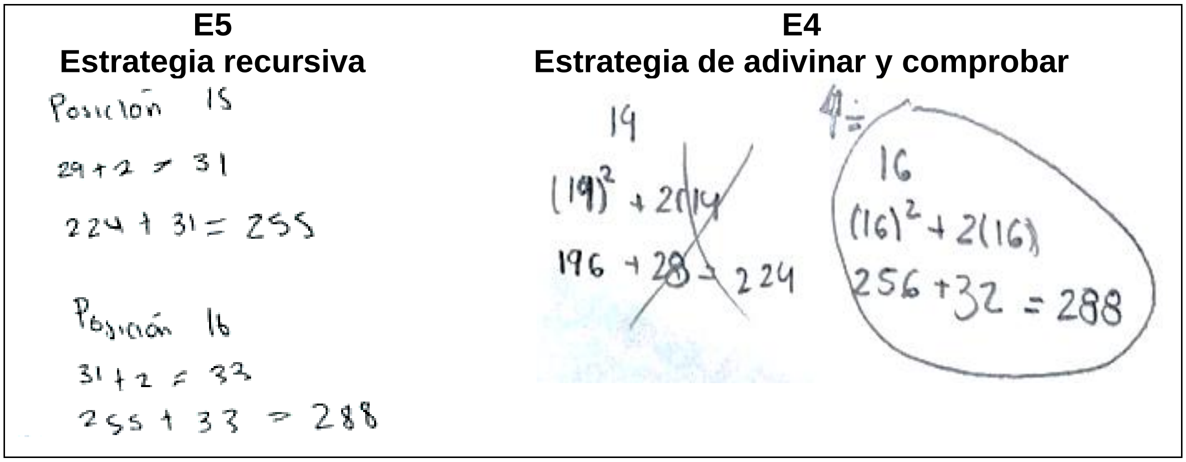
Figura 6.23. *Análisis numérico de E15 "n(n+2)"*

E8 **Error en la expresión**	**E16** **Error en el despeje de n**
	

De los 16 estudiantes que contestaron correctamente la consigna 4, 9 de ellos utilizaron una estrategia de adivinar y comprobar; 4 una estrategia recursiva y 3 una estrategia explícita.

Para ilustrar la estrategia recursiva y la estrategia de adivinar y comprobar, que usaron los estudiantes al responder la consigna 4, se presenta la Figura 6.24. Como se puede apreciar, E5 emplea una estrategia recursiva en donde al llegar a la posición 16 encuentra la cantidad de donas que le indicaba la consigna, para esto tuvo que hacer un listado de la cantidad de nubes en cada una de las posiciones anteriores. En la Figura 6.24 también se aprecia que E4 elige un número de la posición al azar para evaluar en la regla general, como no encuentra el resultado esperado, sigue probando hasta que consigue obtener las 288 nubes.

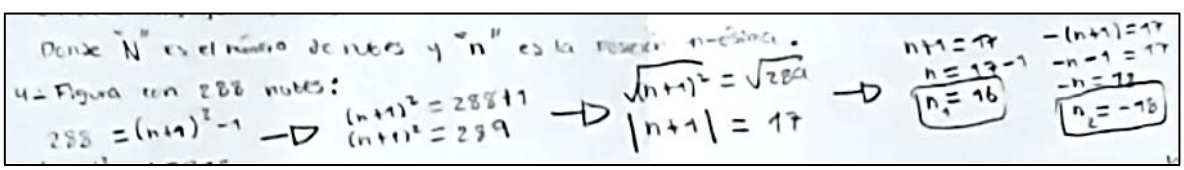
Figura 6.24. *Ejemplo de estrategia recursiva y explícita para la consigna 4*



Ahora bien, en cuanto a la estrategia explícita, los 3 estudiantes despejaron a n con procedimientos diferentes. A continuación, se explica cada uno de los métodos.

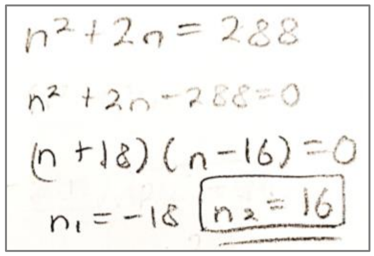
Como se muestra en la Figura 6.25, E6 iguala la regla general "$(n+1)^2 - 1$" a 288 lo que implica que $(n+1)^2 = 289$ por lo tanto saca raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad y encuentra los dos valores de n. Siguiendo la lógica de que la posición es un número positivo, reporta la respuesta final como $n = 16$.

Figura 6.25. *E6 iguala* $(n+1)^2$ *a un término independiente*



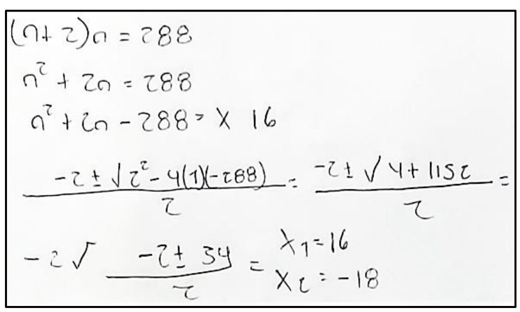
Otro método se aprecia en la Figura 6.26 en donde E2 iguala la regla general que determinó $(n^2 + 2n)$ al número de nubes dadas y luego pasa todos los términos de la igualdad al miembro izquierdo para igualar a cero, después factoriza de manera correcta, eligiendo como respuesta final el valor positivo de n.

Figura 6.26. *E2 factoriza n^2+2n-288=0*



El tercer método se expone en la Figura 6.27 en donde E9 iguala la regla general $n(n+2)$ a 288 y luego la transforma a $n^2 + 2n - 288 = 0$. Por último utiliza la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas y encuentra exitosamente que el valor de n es 16.

Figura 6.27. *E9 resuelve n^2+2n-288=0 con la fórmula general*



En la Tabla 6.4 se concentra la información de cómo usaron el signo igual, en la consigna 3 o 4, los 16 participantes que expresaron correctamente la regla general. En dicha tabla se expone a qué igualaron y la frecuencia con la que se observó el suceso.

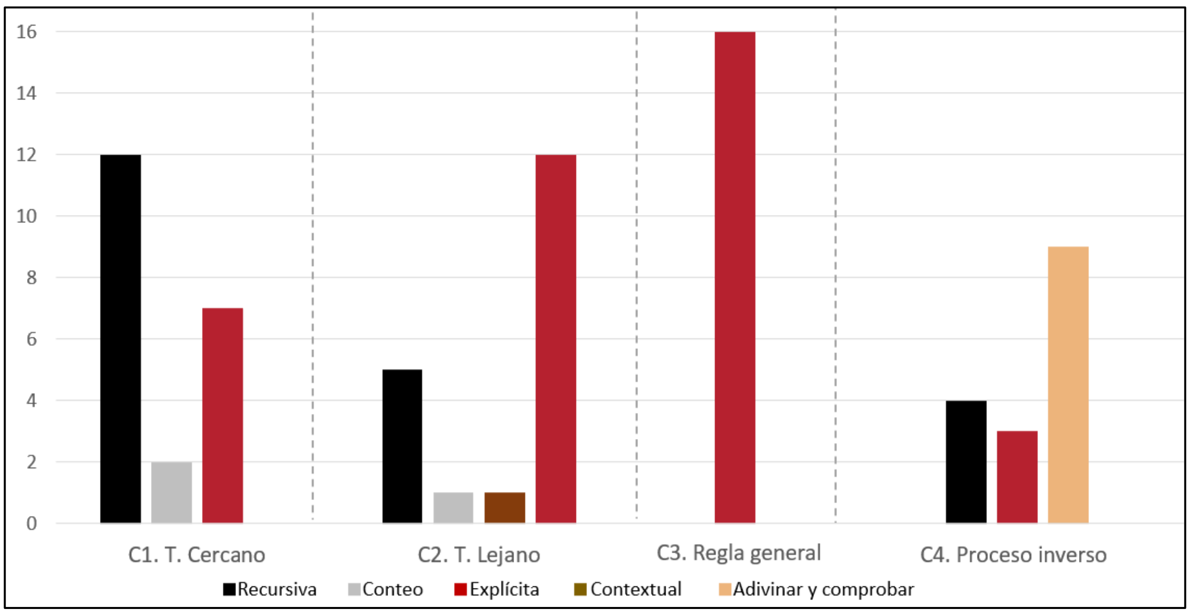
Los datos de la Tabla 6.4 revelan que en la consigna 3 solamente 5 estudiantes emplearon el signo igual, pero dado el diseño de la consigna 4, se observa que 5 nuevos estudiantes se ven con la necesidad de igualar la regla general a un determinado número de nubes que la consigna les indicó.

Tabla 6.4. *Uso del signo igual en la regla general de la tarea 3*

Igualación a:	Frecuencia	Ejemplo
Una literal	2	$N = (n+1)^2 \ -1$
Un enunciado	3	$n(n+2) = número\ de\ nubes$
Un número	5	$(n+1)^2 \ -1 = 288$
No igualaron	6	$n^2 + 2n$

Por último, en la Figura 6.28 se presenta una gráfica de las frecuencias de las estrategias que emergieron en cada consigna de la tarea 3. En dicha gráfica se observar que, a diferencia de las tareas lineales, en esta tarea se empleó la estrategia recursiva para contestar la consigna 4. Asimismo, en esa consigna se observa una disminución del uso de la estrategia explícita.

Figura 6.28. *Estrategias utilizadas en la tarea 3*



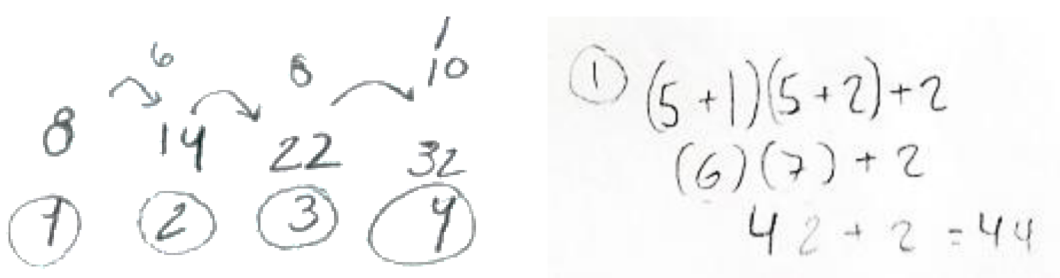
6.1.4. Tarea 4. El caso de las hojas

Recordando la tarea 4 (Figura 5.6) que al igual que la tarea 3, se centra en un patrón de recurrencia cuadrático. En la consigna 1, que consiste en hallar un término cercano, 3 estudiantes respondieron de manera incorrecta. E14 solo comparó las hojas de las primeras dos posiciones y pensó que la diferencia de 6 hojas era constante como si se tratara de un comportamiento lineal, entonces al número de hojas que había en la posición 4 le sumó 6 para encontrar supuestamente la cantidad de hojas de la posición 5., E8 dio una respuesta equivocada porque hizo una conjetura basada en el caso particular de la posición 1 determinando $(2n)(2n+2)$ como regla general, cuando esa regla no es válida para las demás posiciones, por lo que al evaluar la posición 5 en la expresión, el resultado fue incorrecto. Finalmente, E18 encuentra la regla recursiva correcta, pero se confunde y suma 10 hojas en lugar de 12 para avanzar de la posición 4 a la posición 5.

De los 20 estudiantes que contestaron exitosamente la consigna 1, 18 lo hicieron mediante una estrategia recursiva y 2 con una estrategia explícita. En la Figura 6.29 se expone un ejemplo de dichas estrategias. En el caso de E4 se da cuenta de que el número de hojas que se añaden en cada posición varía, ya que primero se adicionan 6, luego 8 y de ahí 10 lo que lo lleva a deducir que en la posición 5 habrá las 32 hojas de la posición 4 más 12 hojas que se añaden de acuerdo a la regla recursiva. En cuanto a la estrategia explícita de E16 se observa que evalúa con $n = 5$ en la regla general $(n+1)(n+2)+2$ que había encontrado desde el principio de la tarea 4.

Figura 6.29. *Ejemplo de estrategia recursiva y explícita empleada por E4 y E16*

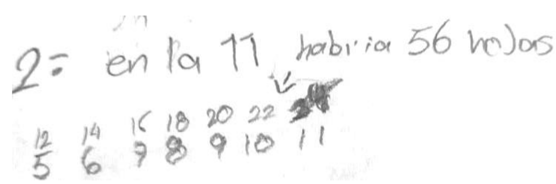
E4 **Estrategia recursiva**	**E16** **Estrategia explícita**



Con lo que respecta al análisis de los resultados en la consigna 2, que solicita hallar un término lejano, se contabilizó que 6 estudiantes dieron una respuesta incorrecta. E8, E14 y E18 siguen presentando el problema detectado en el análisis de la consigna 1 (E8 definió una regla general equivocada, E14 conjeturó de manera errónea que por cada posición que se avanza se añaden 6 hojas y E18 planteó mal una suma al utilizar una estrategia recursiva). Los 3 nuevos errores detectados se explican a continuación.

En la Figura 6.30 se muestra el procedimiento que condujo a E19 y E21 a contestar incorrectamente la consigna 2. E19 realmente calculó el número de hojas para la posición 10 y no para la 11 y E21 a pesar de que relaciona bien la cantidad de hojas a añadirse con la posición, al final suma las posiciones en vez del total de hojas en cada una de ellas. Estas equivocaciones pueden deberse a que ninguno lleva un registro escrito del total de hojas que le corresponde a cada posición, por lo que se evidencia que es útil realizar un trabajo ordenado que incluya los resultados parciales para evitar confusiones al dar la respuesta final, por ejemplo, un arregla tabular que relacione el número de la posición con el número de hojas, es un recurso que apoya a establecer relaciones

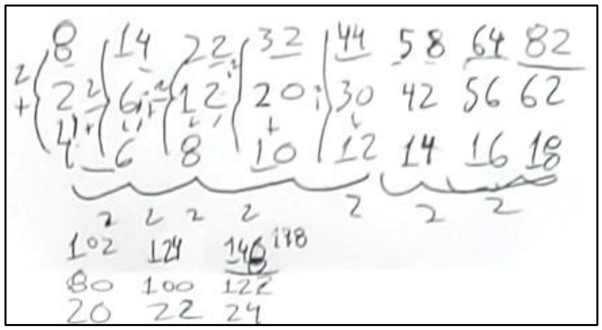
***Figura 6.30**. Error de E19 y E22 al contestar la consigna 2*

E19	E21
Calcula las hojas para otra posición	Suma el número de las posiciones
	

Por último, se encuentra el caso de E7 quien tampoco registra textualmente los números de las posiciones, pero sí anota el total de nubes para cada posición (ver Figura 6.31), el error de este estudiante fue al calcular la cantidad de nubes para la posición 7 ya que se confunde al sumar 58+16 pues escribe 64 en vez de 74, al ser una estrategia recursiva ese error influye negativamente en los resultados para las posiciones posteriores.

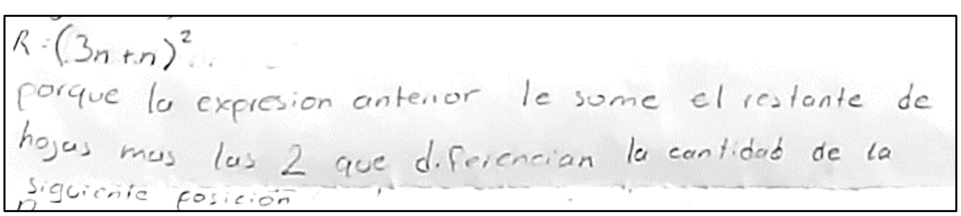
A hora bien, de los 16 estudiantes que calcularon exitosamente la consigna 2, 10 de ellos emplearon una estrategia explícita y los 6 restantes una estrategia recursiva. Se encontró que 8 estudiantes que habían empleado una estrategia recursiva en la consigna 1, al pasar a la consigna 2, cambiaron esa estrategia por una explícita y además en ninguna de las dos consignas se empleó una estrategia de conteo. Este hecho reafirma que la estructura del patrón cuadrático influye en que los estudiantes no deseen recurrir al conteo.

Figura 6.31. *Error aritmético de E7 al contestar la consigna 2*



Prosiguiendo con el análisis de esta tarea, en la consigna 3, la cual invita a expresar la regla general, 9 estudiantes no la respondieron y de los 13 estudiantes que contestaron la consigna, se contabilizó que 2 estudiantes no llegaron a la respuesta correcta. E8 como se ha mencionado en el análisis de la consigna 1 y 2, conjeturó como regla general $(2n)(2n+2)$ que solo es válida para la posición 1; de manera similar E22 conjeturó mal que la regla general es $(3n+n)^2$ lo cual no es válido para ninguna posición, en la Figura 6.32 se observa que E22 justifica su respuesta explicando una técnica de cálculo recursiva que no se relaciona con la regla general que expresa. Estas respuestas nuevamente reafirman que la estructura del patrón influye en la iniciativa por parte del estudiante de conjeturar con estrategias explícitas.

Figura 6.32. *E22 conjetura equivocadamente la regla general*



En esta consigna exactamente la mitad de estudiantes respondieron correctamente la regla general y las 11 estrategias fueron explícitas. En cuanto a las expresiones equivalentes, se observaron 3 formas distintas de expresar la regla general. En la Tabla 6.5 se concentran las expresiones encontradas, la frecuencia con la que se determinaron y también el número de estudiantes que encontraron esa expresión con un análisis figural o numérico.

Tabla 6.5. *Tarea 4. Expresiones equivalentes, frecuencia y análisis*

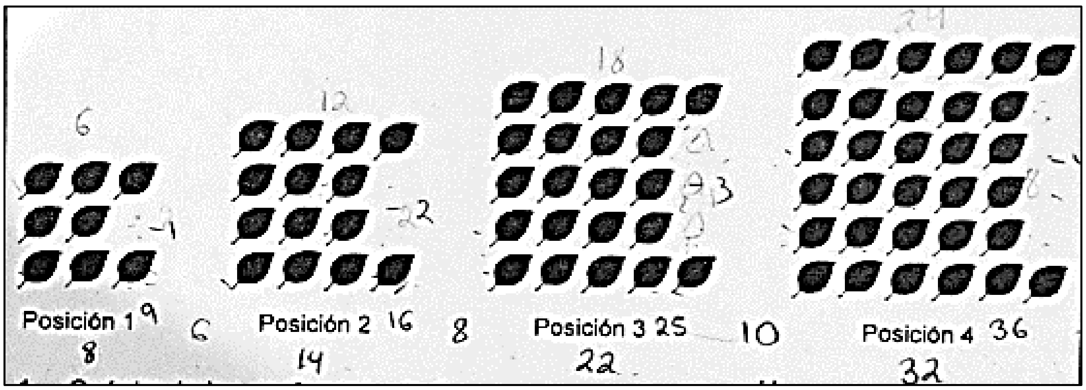
Expresión algebraica	Frecuencia de uso	Frecuencia de análisis figural	Frecuencia de análisis numérico
$(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\boldsymbol{n}+\mathbf{2})+\mathbf{2}$	5	5	0
$(\boldsymbol{n}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{n}$	5	5	0
$\mathbf{3}\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4})$	1	0	1

Es importante aclarar que además de los 10 estudiantes que encontraron la regla general mediante un análisis figural, 2 estudiantes que no pudieron determinar la regla, dejaron evidencia de este tipo de análisis. Como se aprecia en la Figura 6.33, E12 trata de hallar un patrón en el acomodamiento de las hojas; sin embargo, los agrupamientos que hace no muestran una regularidad a través de las 4 posiciones. En cambio, en la Figura 6.34 se evidencia que E3 encuentra el patrón de crecimiento, pero no logra traducirlo a lenguaje algebraico y tampoco lo explica con lenguaje común.

Figura 6.33. *Evidencia de análisis figural de E12 para tratar de encontrar un patrón*

Retomando el hallazgo visual de E3, en la Figura 6.34 es claro que encuentra el patrón porque en la parte inferior escribe números al cuadrado (9, 16, 25 y 36) y además determina el número de hojas que “faltan” para completar la última fila, por eso anota -1, -2, -3 y -4 haciendo la resta de los cuadrados con el número correspondiente de hojas “faltantes” encuentra el número correcto de hojas en cada posición. El detalle está que no logra relacionar matemáticamente esos números (correspondientes al número de hojas) con el número de la posición.

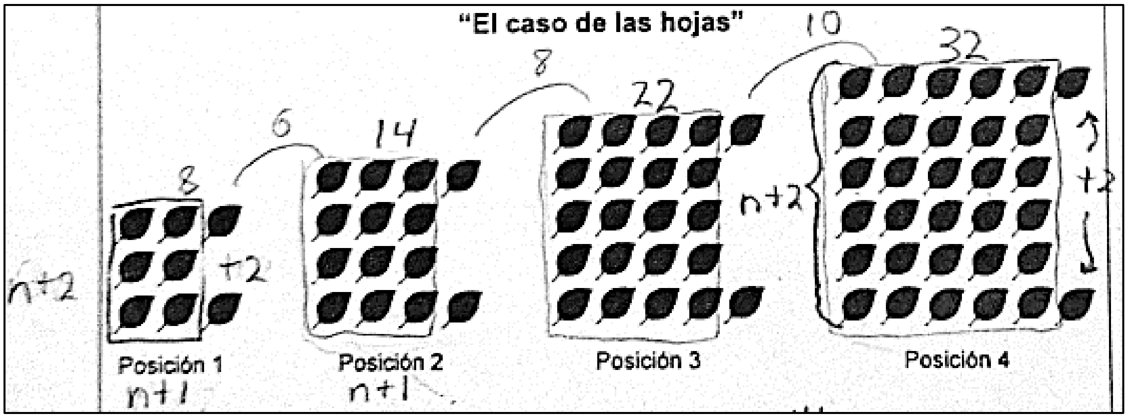
Figura 6.34. *E3 encuentra unicamente de manera visual el patrón de crecimiento*



Contrario a lo observado en la tarea 3, en donde solo 2 estudiantes utilizaron un análisis visual y 14 un análisis numérico, en esta tarea 4 en total 12 estudiantes utilizaron un análisis figural y solamente 1 estudiante un análisis numérico. Lo que indica que el tipo de patrón cuadrático influye en qué tipo de análisis se realiza, como se mencionó anteriormente este patrón tiene una regla general más compleja, pues en su forma desarrollada está determinada por un término cuadrático, otro lineal y uno independiente. Así también a diferencia del patrón cuadrático de la tarea 3 $(n^2 + 2n)$ este patrón no puede ser expresado como un número al cuadrado menos una constante, ni tampoco como el producto directo de dos factores, lo cual implica una mayor dificultad para encontrar una relación puramente numérica entre la cantidad de hojas y el número de la posición.

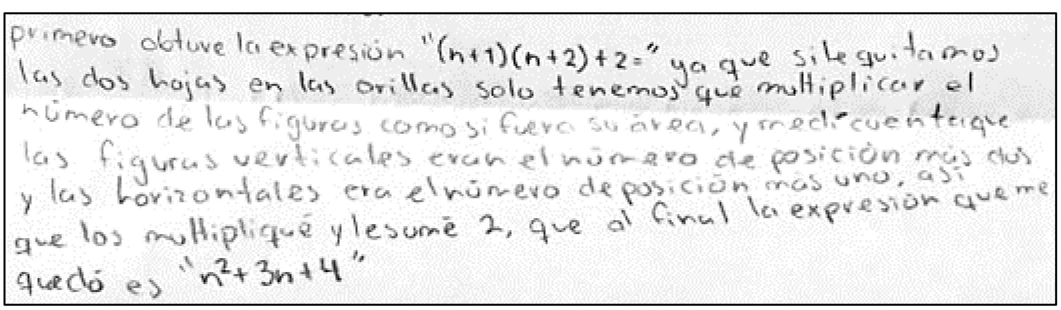
Analizando las descomposiciones figurales de los estudiantes, en la Figura 6.35 se ilustra como E2 agrupa en forma de rectángulos y siempre deja afuera dos hojas. El estudiante da a entender que la base del rectángulo tiene una cantidad de hojas que se relacionan con la posición de la forma $(n + 1)$, mientras que la altura se relaciona con $(n + 2)$ y que se añade constantemente 2 hojas, de esta forma expresa la regla general como $(n + 1)(n + 2) + 2$.

Figura 6.35. *Descomposición figural de E2 "(n+1)(n+2)+2"*



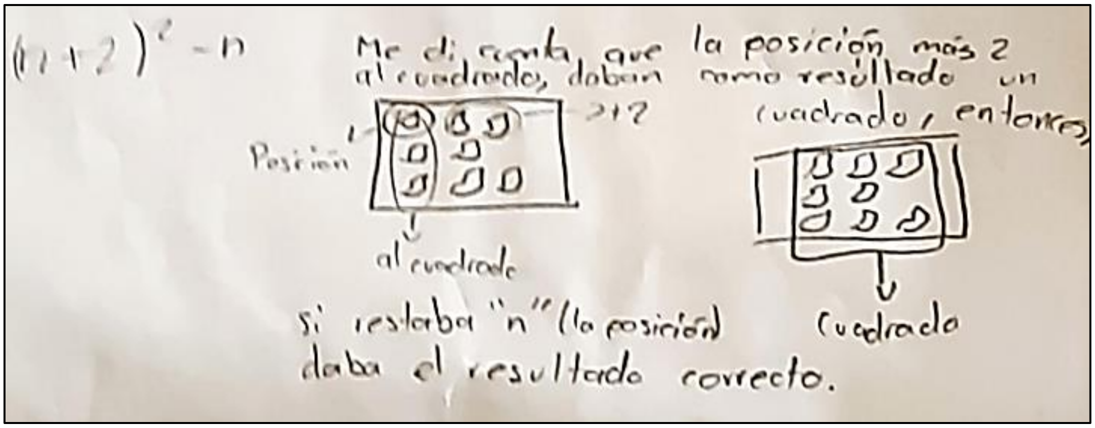
De manera similar, en la Figura 6.36 se aprecia la explicación E15 de como encontró la regla general $(n + 1)(n + 2) + 2$. Parafraseando su respuesta, E15 argumenta con lenguaje común que, excluyendo las 2 hojas de la orilla derecha de la figura, se puede encontrar la cantidad de hojas como si se calculara un área y después añadir al resultado de esa área las 2 hojas que se quitaron al principio. También indica que la regla en su forma desarrollada es $n^2 + 3n + 4$.

Figura 6.36. *Explicación del análisis figural de E15 "(n+1)(n+2)+2"*


primero obtuve la expresión "(n+1)(n+2)+2=" ya que si le quitamos las dos hojas en las orillas solo tenemos que multiplicar el número de las figuras como si fuera su área, y me di cuenta que las figuras verticales eran el número de posición más dos y las horizontales era el número de posición más uno, así que los multipliqué y le sumé 2, que al final la expresión que me quedó es "n^2+3n+4"

Otro tipo de descomposición figural se presenta en la Figura 6.37 en donde se observa que E14 agrupa en un cuadrado todas las hojas y con lenguaje común indica que el lado del cuadrado se corresponde con el número de la posición más 2, pero que se tiene que restar n para encontrar el número correcto de hojas, es así que determina la regla general como $(\boldsymbol{n}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{n}$

Figura 6.37. *Descomposición figural de E14 “(n+1)^2-n”*



En cuanto al único análisis numérico que se encontró en esta tarea, llamó la atención que E16 hallara la regla general de la siguiente forma: $\mathbf{3}\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4})$, ya que parece complicado encontrar una relación entre la cantidad de hojas y el número de la posición que involucra la suma de 3 términos. Por tal motivo se le realizó una entrevista para conocer mejor el procedimiento que siguió. A continuación, se transcribe parte de dicha entrevista:

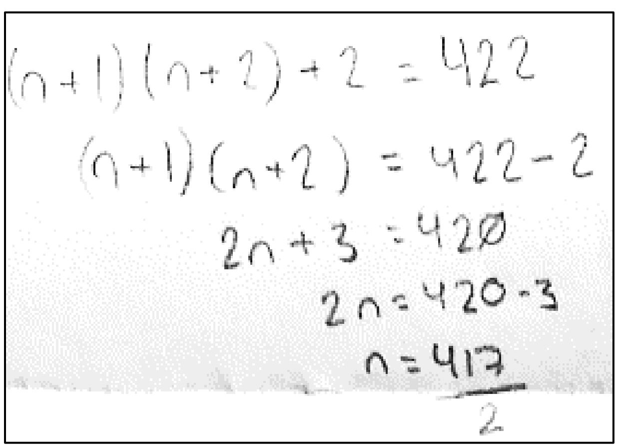
> *-Entrevistador: ¿Cómo obtuviste la expresión* $3n+n^2+4$*?¿te fijaste en la forma de las figuras?*
>
> *-E3: No me fijé en las figuras, sino que de memoria me acordaba de la fórmula que utilicé en la tarea 3 y al tanteo simplemente estuve cambiando el coeficiente de 3n, por ejemplo, le puse primero 2n y también fui cambiado el último número que le sumaba, por ejemplo, probé con 2n+5, hasta que me salió.*
>
> *-Entrevistador: ¿Lo que te sirvió de la tarea 3 fue recordar que había una n al cuadrado?*

-E3: Me sirvió toda la ecuación porque en la tarea 3 era $n^2 + 2n$, lo que hice fue irle aumentado al coeficiente de n y al número que se suma al final.

Como se puede apreciar en el fragmento de la entrevista anterior, E16 también utiliza una estrategia de adivinar y comprobar para obtener la expresión explícita correcta. Lamentablemente no se aclara si talvez por la regla recursiva que indica que la cantidad de hojas que se añaden varía en cada posición dedujo que este patrón también tenía un crecimiento cuadrático como el de la Tarea 3.

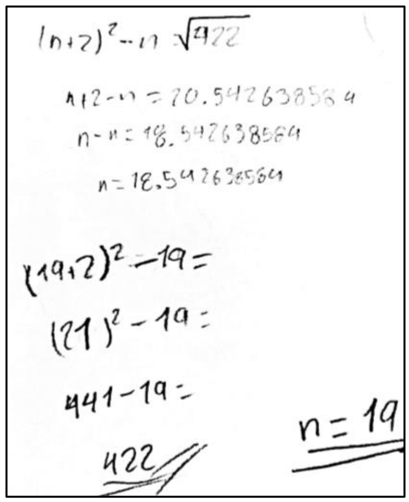
Finalmente, en cuanto a la consigna 4 que promueve realizar un proceso inverso, se contabilizaron que 7 de los 22 estudiantes no la respondieron y 1 estudiante dio una respuesta incorrecta. E19 se equivocó al seguir una estrategia recursiva que contabilizó mal desde la consigna 2, por lo tanto, ese error lo llevó a definir que la posición correspondiente era la 20 en lugar de la 19. Cabe mencionar que a pesar de que E16 encuentra la respuesta correcta utilizando una estrategia de adivinar y comprobar, en su registro en papel se encontró que inició con una estrategia explícita, pero al igual que en la tarea 3, operó el producto como una suma (ver Figura 6.38). Más adelante, al comprobar su resultado en la regla general se dio cuenta que era erróneo y por eso eligió la otra estrategia.

Figura 6.38. *E19 hace una operación incorrecta de un producto*



De los 14 estudiantes que contestaron correctamente la consigna 4, 7 de ellos utilizaron una estrategia de adivinar y comprobar; 4 una estrategia explícita; 2 una estrategia recursiva; y 1 estudiante otra estrategia (por aproximación). En la Figura 6.39 se puede apreciar como E14 calcula directamente la raíz cuadrada de 422 y aproxima el resultado a 19, comprueba evaluando en la regla general y confirma que ha encontrado la respuesta correcta. La estrategia por aproximación no fue utilizada por nadie en la tarea 3.

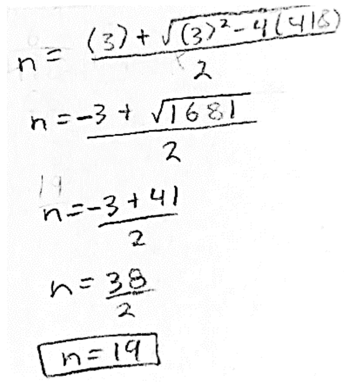
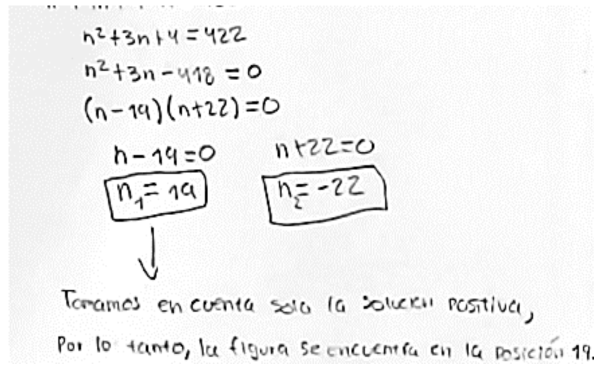
Figura 6.39. *E14 usa otra estrategia (por aproximación) para contestar la consigna 4*



Ahora bien, analizando el trabajo de los 4 estudiantes que emplearon una estrategia explícita, se encontró que todos desarrollaron la expresión a $n^2 + 3n + 4$, luego la igualaron a las 422 hojas, indicadas en la consigna, y finalmente pasaron todos los términos al miembro izquierdo para igualar a cero. Para encontrar el valor de n, 2 estudiantes factorizaron y los otros dos utilizaron la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas. Como muestra de los procedimientos descritos, se presenta la Figura 6.40 en donde E2 utiliza la fórmula general usando solo la suma para que n sea positiva y E9 factoriza y explica porque elige como única respuesta a n=19.

Vale la pena hacer mención de cómo usaron el signo igual los 14 participantes que expresaron correctamente la regla general, ya sea que lo emplearan desde la consigna 3 o bien hasta la consigna 4. En la Tabla 6.6 se expone a qué igualaron y la frecuencia con la que se observó el suceso.

Figura 6.40. *Ejemplo de métodos para hallar el valor de n*

E2	**E6**
Fórmula general	**Factorización**
	

Los datos vaciados en la Tabla 6.6 revelan que en la consigna 3 solamente 3 estudiantes emplearon el signo igual, pero dado el diseño de la consigna 4, se observa que 4 nuevos estudiantes se ven con la necesidad de igualar la regla general a un determinado número de hojas que la consigna les indica. Esta observación sobre la influencia del diseño de la consigna ha sido consistente a lo largo de toda la secuencia didáctica.

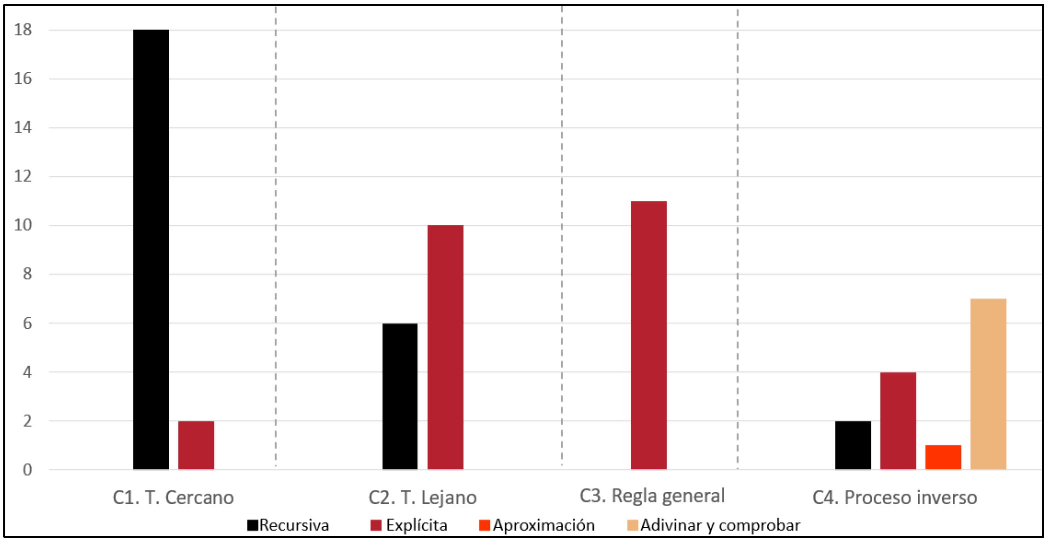
Tabla 6.6. *Uso del signo igual en la regla general de la tarea 4*

Igualación a:	Frecuencia	Ejemplo
Una literal	2	$h = (n+2)^2 - n$
Un enunciado	1	$(n+1)(n+2)+2 = número\ de\ hojas$
Un número	4	$(n+2)^2 - n = 422$
No igualaron	7	$(n+2)^2 - n$

Se señala el hecho de que, de toda la secuencia didáctica, la tarea 4 ha sido la que ha representado un mayor reto para los estudiantes pues solamente la mitad logró determinar correctamente la regla general. Asimismo, fue la tarea que promovió notablemente el análisis figural.

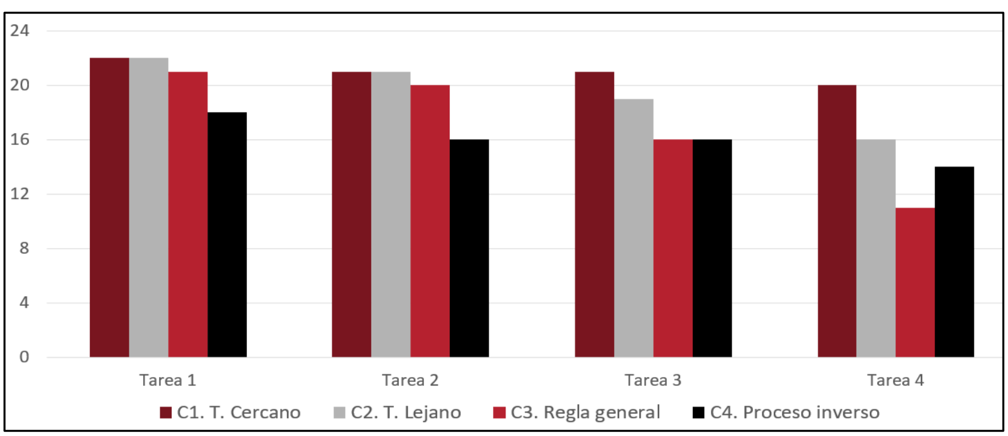
Para cerrar el análisis de la tarea 4, se presenta la Figura 6.41 que corresponde a una gráfica de las frecuencias de las estrategias que emergieron en cada consigna de la tarea. En la gráfica se puede apreciar cuatro estrategias diferentes. Siendo la estrategia de adivinar y comprobar la que se utilizó con más frecuencia para responder la consigna 4.

Figura 6.41. *Estrategias utilizadas en la tarea 4*



Recapitulando la frecuencia con la que los estudiantes respondieron correctamente las consignas de cada una de las tareas de la secuencia didáctica, se brinda la Figura 6.42 en donde se visualiza una comparativa de las tareas. Por ejemplo, se evidencia que la tarea 4 representó un mayor reto ya que en cada una de las consignas disminuyó el número de estudiantes que la contestaron con éxito.

Figura 6.42. *Respuestas correctas a las consignas de las 4 tareas*



6.2 Análisis del pensamiento algebraico por individuo

En esta sección, del análisis y discusión de resultados, se presentan las características principales del pensamiento algebraico de cada uno de los estudiantes a lo largo de toda la secuencia didáctica (secuencia integrada por 4 tareas que incluyen 2 patrones de crecimiento lineal y 2 patrones de crecimiento cuadrático). La caracterización se realiza especialmente a través de los niveles de algebrización (definidos en el apartado 3.4) y adicionalmente se proporcionan características sobre el tipo de análisis utilizados en las tareas de patrones cuadráticos (figural o numérico) y el uso del signo igual para establecer relaciones entre el número de la posición y la cantidad de elementos que le corresponde.

A razón de que se encontraron características similares entre el pensamiento algebraico de los estudiantes, se crearon 4 categorías para clasificar en ellos a cada uno de los 22 estudiantes que se analizaron en esta investigación. Se informa que dentro de las categorías se encuentran perfiles de pensamiento algebraico que permiten hacer más precisa la caracterización del pensamiento.

6.2.1. Categoría A. Estudiantes con diferentes niveles de algebrización en las tareas lineales y con un nivel 0 de algebrización en tareas de patrones cuadráticos

La categoría A se define por una ausencia de razonamiento algebraico (nivel 0) en tareas de patrones cuadráticos. Es decir, que los estudiantes que se encuentran en esta categoría, cuando trabajan con tareas que involucran patrones de crecimiento cuadrático, no logran reconocer la regularidad que guarda el número de la posición con la cantidad de elementos.

Ahora bien, dentro de la categoría A, se distinguen dos tipos distintos de perfiles: el perfil A1 se identifica por la usencia de razonamiento algebraico al resolver tareas de patrones lineales; el perfil A2 se caracteriza por alcanzar mínimamente el nivel incipiente de pensamiento algebraico (nivel 1) en al menos una tarea de patrones lineales.

En la Tabla 6.7 se distingue que de los 4 estudiantes solo E19 tiene el perfil A1, es decir que no logró identificar la regla general en ninguna de las 4 tareas de la secuencia didáctica y por lo tanto no tiene forma de usar el signo igual para establecer relaciones. En el caso particular de este estudiante, se identificó que a lo largo de toda la secuencia didáctica utilizó únicamente estrategias recursivas, que le permitieron dar respuestas correctas a algunas consignas, pero siempre necesitó conocer la cantidad de elementos de una posición anterior a la que le solicitaban, es por eso que se evidencia una usencia de pensamiento algebraico (nivel 0 de algebrización).

Tabla 6.7. Niveles de algebrización de estudiantes con perfiles A

Perfil	Clave	Nivel de algebrización por tarea				Forma de igualar la regla general			
		T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
A1	E19	0	0	0	0	-	-	-	-
A2	E22	3	0	0	0	n	-	-	-
	E18	1	2	0	0	-	-	-	-
	E7	2	2	0	0	-	-	-	-

Abreviaturas: T(tarea), n(número), -(no iguala)

Así también en la Tabla 6.7 se identifica que 3 estudiantes tienen un perfil A2, lo que significa que lograron encontrar una regla general en la tarea 1 o 2, sin embargo, similar al perfil A1, no logran encontrar la regla general en las tareas de patrones cuadráticos. En lo que respecta a cómo usaron el signo igual, se detectó que generalmente los estudiantes no lo usaron en ningún momento, ya que utilizaron estrategias que se enfocan en la técnica de cálculo como las contextuales y la de aproximación. Solamente E22 utilizó el signo igual en la consigna 4 de la tarea 1 para igualar la regla general a un número específico de elementos y después transformó la expresión para despejar el número de la posición, ese procedimiento muestra un nivel consolidado de algebrización (nivel 3) para la tarea 1.

6.2.2. Categoría B. Estudiantes que encontraron la regla general de los dos patrones lineales y presentan un nivel 0 de algebrización en solo una tarea de patrones cuadráticos

La categoría B se distingue por un nivel de algebrización superior a 0 en las dos tareas de patrones lineales y en al menos una tarea de patrones cuadráticos. En otras palabras, los estudiantes que se encuentran en la categoría B, hallaron la regla general en las dos tareas de patrones lineales, y en cuanto a las tareas de patrones cuadráticos, hallaron y expresaron con lenguaje algebraico la regla general de solo un patrón cuadrático, pero no descontextualizaron la regla canónica de la expresión.

Se detalla que dentro de la categoría B, se distinguen 3 tipos de perfiles: el perfil B1 se identifica por tener un nivel incipiente de algebrización (nivel 1) en alguna tarea de patrones lineales; el perfil B2 se caracteriza por tener un nivel intermedio de algebrización (nivel 2) en las dos tareas de patrones lineales; y por último, el perfil B3 se define por aquellos estudiantes que tienen un nivel de algebrización consolidado (nivel 3) en alguna tarea de patrones lineales.

Como se aprecia en la Tabla 6.8, son 9 los estudiantes que tiene un tipo de perfil B. Dado que estos estudiantes hallaron la regla general en una de las tareas de patrones cuadráticos, en dicha tabla se incluye un apartado que indica si hicieron un análisis figural o bien un análisis numérico en las tareas 3 y 4 que son las que incluyen ese tipo de patrones. Se aclara que en las tareas 1 y 2 (patrones lineales), ninguno de los 22 estudiantes realizó descomposiciones figurales que indicaran que se apoyaron de un análisis figural para determinar la regla general y por lo tanto al ser un comportamiento homogéneo no se incluyeron en la tabla.

Únicamente E12 encaja en el perfil B1 (ver Tabla 6.8), ya que no mantuvo como mínimo un nivel 2 de algebrización en las dos tareas de patrones lineales, pues en la tarea 1 encuentra mediante una estrategia contextual la regularidad del patrón, pero no logra expresarla de forma alfanumérica, lo que indica un nivel 1 de algebrización. No obstante, en la tarea 2 demuestra un nivel consolidado de algebrización (nivel 3) porque expresa de forma algebraica la regla general y además la transforma para despejar correctamente la posición en la consigna 4. En cuanto al tipo de análisis en las tareas de patrones cuadráticos, se detecta un análisis numérico en la tarea 3 que le permite hallar y expresar la regla general de forma alfanumérica y en la tarea 4 se aprecia un análisis figural, pero la descomposición que hace de las figuras deja ver que no logró encontrar una regularidad. Finalmente se aprecia que solo igualó a un número en la tarea 2.

Tabla 6.8. Niveles de algebrización de estudiantes con perfiles B

Perfil	Clave	Nivel de algebrización por tarea				Análisis en las tareas		Forma de igualar la regla general			
		T1	T2	T3	T4	T3	T4	T1	T2	T3	T4
B1	E12	1	3	2	0	num	fig	-	n	-	-
B2	E20	2	2	0	2	-	fig	-	-	-	enun
	E21	2	2	2	0	num	-	-	-	-	-
	E8	2	2	2	0	num	-	-	-	literal	-
	E5	2	2	2	0	num	-	-	-	-	-
	E10	2	2	2	0	num	-	-	-	enun	-
B3	E17	2	3	0	2	-	fig	-	n	-	n
	E3	2	3	2	0	num	fig	cero	cero	-	-
	E11	2	3	2	0	num	-	-	enun	-	-

Abreviaturas: T(tarea), num(numérico), fig(figural), n(número) enun(enunciado), -(no hay registros)

El perfil B2 fue el perfil más frecuente, pues 5 estudiantes coincidieron con las características que lo definen, en la Tabla 6.8 se visualiza que estos estudiantes tienen un nivel intermedio de algebrización en las dos primeras tareas y en alguna de las tareas de patrones cuadráticos, esto quiere decir que durante toda la secuencia didáctica estos estudiantes no lograron transformar en expresiones equivalentes las reglas generales encontradas, sin importar si eran lineales o cuadráticas. Además, es consistente que no lograron determinar la regla general de un patrón cuadrático siendo la tarea 4 el patrón que la mayoría no determinó.

En cuanto al tipo de análisis que realizan los estudiantes con perfil B2, se observó que todos utilizaron un análisis numérico para determinar el patrón cuadrático de la tarea 3, mientras que los que hallaron la regla general de la tarea 4 usaron un análisis figural.

En la forma de igualar de los estudiantes con perfil B2 se observa que ningún estudiante utilizó el signo igual en las tareas de patrones lineales, estos estudiantes utilizaron generalmente estrategias explícitas en la consigna 3; mientras que en la consigna 4 de las primeras dos tareas usaron estrategias contextuales y por aproximación. Por otro lado, la mitad de los estudiantes sí utilizaron el signo igual en tareas de patrones cuadráticos, igualando la expresión a una literal que representa la cantidad de elementos o bien a un enunciado, por ejemplo: $n(n+2) = número\ de\ nubes$.

Por último, en el perfil B3 se encuentran 3 estudiantes (ver Tabla 6.8), los cuales se caracterizan por mostrar un nivel intermedio de algebrización en la tarea 1, un nivel consolidado en la tarea 2 y luego el rasgo constante de los perfiles B que radica en presentar una usencia de razonamiento algebraico (nivel 0) en solo una tarea de patrones cuadráticos. En este perfil los estudiantes muestran un progreso al pasar de la tarea 1 a la tarea 2, ya que en ésta última tarea muestran que operan correctamente con expresiones lineales y los 3 estudiantes usan estrategias explícitas en la consigna 4.

En cuanto al tipo de análisis que realizan los estudiantes con perfil B3 para las tareas de patrones cuadráticos, se observó de nuevo que, de acuerdo a la tarea, utilizan un análisis numérico (en la tarea 3) o bien uno figural (en la tarea 4). Llama la atención el caso específico de E3 porque realiza un análisis figural en la tarea 4 en donde deja evidencias aritméticas de haber encontrado la regularidad (ver trabajo de E3 en la sección 6.1.4, Figura 6.34). Sin embargo, no logra expresar la regularidad de forma algebraica o usando lenguaje común, por lo que se considera que no logró expresarla. Así también E3, en las tareas de patrones lineales, iguala la regla general a 0, por ejemplo, en la tarea 1 expresa: 2n-1=0, esto puede deberse a que lo confunde con una ecuación.

Con lo que respecta a la forma de usar el signo igual, en el perfil B3 se observa que todos usan, al menos en una ocasión, el signo igual para relacionar la posición con la cantidad de elementos, ya sea que igualaron a un enunciado a un número específico de elementos.

6.2.3 Categoría C. Estudiantes que generalizaron en las 4 tareas, pero no alcanzaron el nivel 3 de algebrización en tareas de patrones cuadráticos

La categoría C es caracterizada por un nivel intermedio o consolidado de algebrización en las tareas de patrones lineales y un nivel intermedio en las dos tareas de patrones cuadráticos. Esto indica que, los estudiantes que se encuentran en la categoría C, expresaron de forma alfanumérica la regla general de las 4 tareas que integran la secuencia didáctica, pero no lograron descontextualizar las reglas canónicas de expresiones cuadráticas.

Se especifica que dentro de la categoría C, existen 2 tipos de perfiles: el perfil C1, se caracteriza por tener constantemente un nivel intermedio de algebrización (nivel 2) a lo largo de toda la secuencia didáctica; mientras que el perfil C2, se define por tener un nivel consolidado de algebrización (nivel 3) en las dos tareas de patrones lineales y un nivel intermedio (nivel 2) en las dos tareas de patrones cuadráticos.

En la Tabla 6.9, se puede apreciar que son 5 los estudiantes que presentan un perfil tipo C. Solamente el estudiante E4 se identifica con un perfil C1, debido a que es persistente que a lo largo de toda la secuencia didáctica su pensamiento algebraico le permite hallar y expresar todas las reglas generales de forma alfanumérica, pero no logran transformar las expresiones a otras formas equivalentes, es decir que siempre tiene un nivel de algebrización 2. Luego se puede notar que para encontrar la regla general de los patrones cuadráticos el estudiante que tiene el perfil C1 utiliza diferentes tipos de análisis, en la tarea 3 utiliza un análisis numérico y en la tarea 4 un análisis figural. Por último, se señala que el estudiante no hace uso del signo igual en toda la secuencia didáctica porque utiliza estrategias de adivinar y comprobar o contextuales que le permiten realizar un proceso inverso en la consigna 4, sin tener que transformar la regla general que determinó.

Tabla 6.9. *Niveles de algebrización de estudiantes con perfiles C*

Perfil	Clave	Nivel de algebrización por tarea				Análisis en las tareas		Forma de igualar la regla general			
		T1	T2	T3	T4	T3	T4	T1	T2	T3	T4
C1	E4	2	2	2	2	num	fig	-	-	-	-
C2	E14	3	3	2	2	fig	fig	enun	n	n	n
	E1	3	3	2	2	num	fig	n	n	n	n
	E15	3	3	2	2	num	fig	enun	enun	enun	enun
	E16	3	3	2	2	fig	num	e. b	e.b	n	n

Abreviaturas: T(tarea), num(numérico), fig(figural), n(número), enun(enunciado), -(no hay registros), e.b(espacio en blanco, ejemplo $2n - 1 =$).

El perfil C2 representa el tipo de pensamiento algebraico de 4 estudiantes que coincidieron en tener un nivel consolidado de algebrización en las dos primeras tareas, y un nivel intermedio en las dos tareas restantes, esto significa que los estudiantes con un perfil C2 presentan mayor familiaridad en la declaración y denotación de las literales y en el tratamiento algebraico de expresiones lineales, pero en tareas de patrones cuadráticos se observó dificultades para transformar las reglas generales a expresiones equivalentes.

En cuanto al tipo de análisis que realizan los estudiantes con perfil C2, se contabilizó que solo E14 realizó un análisis figural en ambas tareas cuadráticas; E16 realiza un análisis figural en la tarea 3 y, de los 22 participantes es el único que hace un análisis numérico en la tarea 4; por último, dos estudiantes se apoyaron de un análisis numérico en la tarea 3 y un análisis figural en la tarea 4.

Finalmente, en cuanto al uso del signo igual que realizan los estudiantes con perfil C2, se detectó que todos igualaron en cada una de las tareas de la secuencia didáctica, siendo la igualación a un número específico el suceso más frecuente. En particular el estudiante E16 iguala las reglas generales de patrones lineales dejando un espacio en blanco (por ejemplo, en la tarea 1 escribe $2n - 1 =$), luego en las tareas de patrones cuadráticos deja de igualar de esa forma e iguala directamente a una cantidad específica de elementos.

6.2.4 Categoría D. Estudiantes que generalizaron en las 4 tareas y alcanzaron un nivel 3 de algebrización en al menos una tarea de patrones cuadráticos

La categoría D se distingue por un nivel de algebrización consolidado en las dos tareas de patrones lineales y en al menos una tarea de patrones cuadráticos. En otras palabras, los estudiantes que se encuentran en esta categoría, además de expresar de forma alfanumérica la regla general en todas las tareas de la secuencia, también transforman de manera correcta, en al menos 3 tareas, las reglas generales para determinar expresiones equivalentes o para despejar la literal que representa el número de la posición.

Se declara que dentro de la categoría D, se distinguen 2 tipos de perfiles: el perfil D1 se identifica por tener un nivel consolidado de algebrización (nivel 3) en las dos tareas de patrones lineales y en una sola tarea de patrones cuadráticos; el perfil D2 se caracteriza por demostrar constantemente un nivel consolidado de algebrización (nivel 3) a lo largo de toda la secuencia didáctica.

En la Tabla 6.10, se puede apreciar que hay 4 estudiantes que se encuentran en la categoría D. Cabe resaltar que los perfiles tienen en común que en la tarea 3 siempre se realizó un análisis numérico y en la tarea 4 un análisis figural. Asimismo, en estos perfiles todos los estudiantes hacen un uso constante del signo igual.

Únicamente el estudiante E13 se identifica con un perfil D1 (ver Tabla 6.10), esto indica que no mantuvo un nivel 3 de algebrización en toda la secuencia didáctica, dado que en la tarea 3, no logra descontextualizar la regla canónica que determinó como: $n + [n(n + 1)]$ y por lo tanto en la consigna cuatro, que solicita encontrar el valor de n dado determinado número de elementos, solo iguala la expresión a dicha cantidad, pero no transforma la expresión e indica con lenguaje común que no supo cómo resolverla.

Referente a cómo el estudiante con el perfil D1 hace uso del signo igual, se resalta que durante toda la secuencia didáctica denotó dos literales. Utilizó una “x” para representar la cantidad de elementos, y una “n” para denotar el número de la posición. Por ejemplo, en la terea 4 relaciona estas dos literales expresando la regla general como $n^2 + 3n + 4 = x$. En cuanto a las estrategias, utilizan estrategias explícitas en cada una de las consignas

Tabla 6.10. *Niveles de algebrización de estudiantes con perfiles D*

Perfil	Clave	Nivel de algebrización por tarea				Análisis en las tareas		Forma de igualar la regla general			
		T1	T2	T3	T4	T3	T4	T1	T2	T3	T4
D1	E13	3	3	2	3	num	fig	literal	literal	literal	literal
D2	E2	3	3	3	3	num	fig	literal	literal	n	n
	E9	3	3	3	3	num	fig	enun	literal	n	n
	E6	3	3	3	3	num	fig	literal	literal	literal	literal

Abreviaturas: T(tarea), num(numérico), fig(figural), n(número), enun(enunciado), -(no hay registros)

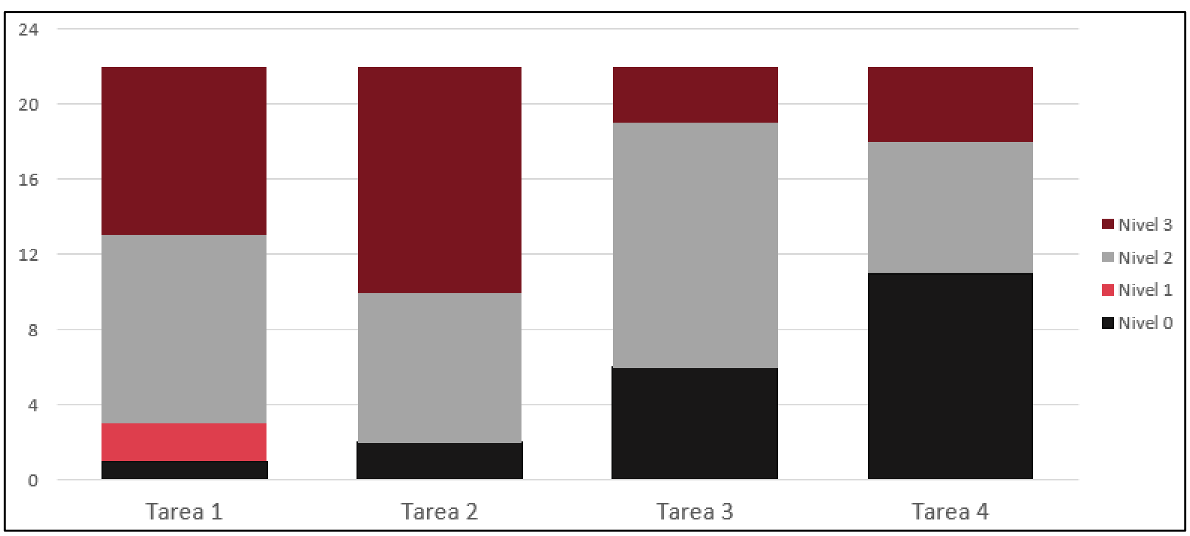
Finalmente, el perfil D2 en el que se encuentran 3 estudiantes, es el perfil que representa un nivel consolidado de pensamiento algebraico que es constante en las 4 tareas que conforman la secuencia didáctica (ver Tabla 6.10). Esto significa que los estudiantes con perfil D2 están familiarizados con la denotación de literales y con el tratamiento algebraico de expresiones lineales y cuadráticas. En el perfil D2 se observa que usan correctamente la formula general para resolver ecuaciones cuadráticas y también tienen habilidad para buscar relaciones numéricas y de esta forma factorizar expresiones cuadráticas. Así también reflejan un lenguaje algebraico más formal que los otros perfiles, pues hacen un uso adecuado del signo igual y de las literales.

Específicamente los estudiantes que tienen un perfil D2 expresan la regla general como una relación entre el número de la posición y la cantidad de elementos. Algunos estudiantes utilizan dos literales, otros igualan hasta el momento en que la consigna les brinda un número concreto de elementos y por ejemplo el estudiante E9 iguala a un enunciado, como en la tarea 1 que expresa que la regla general está dada por $2n - 1 = número\ de\ donas$. Se hace evidente que ningún estudiante llega a establecer una relación funcional $f(n)$ probablemente porque no están familiarizados con este tipo de notación.

Con relación a las estrategias que utilizan los estudiantes con perfil D2, se informa que a diferencia del estudiante E13 que tiene un perfil D1, estos estudiantes tienen en común que no usaron solamente estrategias explícitas en cada una de las consignas, puesto que en la consigna 1 llegan a utilizar estrategias recursivas o de conteo, luego en la consigna 2 se observan estrategias explícitas y recursivas y finalmente en las consignas 3 y 4 usan solo estrategias explícitas. Este hecho puede deberse a que tienen flexibilidad de variar las estrategias dependiendo del nivel de demanda cognitiva de las consignas.

Para cerrar el capítulo de resultados y discusión, se expone la Figura 6.43 en donde mediante una gráfica apilada se muestra la proporción de la cantidad de estudiantes que alcanzaron los diferentes niveles de algebrización en cada una de las tareas. En la gráfica se aprecia que en las tareas de patrones cuadráticos disminuye la cantidad de estudiantes que logran obtener un nivel 3 de algebrización. También se observa que el nivel 0 se determinó con poca frecuencia en las tareas de patrones lineales, pero aumentó notablemente en las tareas de patrones cuadráticos.

Figura 6.43. *Niveles de algebrización alcanzados en cada tarea*



Capítulo 7. Conclusiones y recomendaciones

De acuerdo a los resultados obtenidos, se concluye que el tipo de patrón de las tareas y la naturaleza de las consignas favorecen el uso de ciertas estrategias, porque a lo largo de toda la secuencia didáctica se observó que las estrategias cambiaron según la consigna y el tipo de patrón, es así que en la consigna 1 se hallaron 3 estrategias diferentes: la recursiva, la de conteo y la explícita. En la consigna 2 se encontró mayor variedad, ya que emergieron 2 estrategias adicionales a la consigna 1 que fueron la contextual y la de fragmentación, siendo esta última, una estrategia usada exclusivamente en patrones lineales. En la consigna 3 se detectó la estrategia explícita a lo largo de las 4 tareas, y específicamente en las tareas de patrones, también se observó el uso de la estrategia multiplicativa con ajuste. Por último, en la consiga 4, se contabilizaron 4 tipos de estrategias, dos de ellas: la explícita y por aproximación fueron usadas en ambos tipos de patrones; mientras que la estrategia de adivinar y comprobar y la recursiva fueron usadas solo con patrones cuadráticos.

Dada la frecuencia de respuestas con éxito que dieron los estudiantes a cada una de las cuestiones, se considera que el nivel de demanda cognitiva no solo cambia entre consignas sino también puede variar entre tareas, de acuerdo al tipo de patrón. Esta idea se sustenta en que se observó que los estudiantes tuvieron que hacer un mayor análisis en las consignas de las tareas de patrones cuadráticos en comparación con los lineales. Por ejemplo, la tarea 4 fue la tarea que requirió mayor esfuerzo cognitivo ya que la relación entre la posición y el número de elementos estaba determinada por una expresión cuadrática que de forma desarrollada también contenía un término lineal y uno independiente, eso hacía más complejo el análisis numérico para expresar la regla general y su tratamiento algebraico.

Cabe mencionar que, debido a la evolución de las respuestas del estudiante a las consignas de alta demanda cognitiva, se evidencia que todas las tareas favorecieron la necesidad de utilizar literales para expresar las condiciones de la situación, por lo que pueden propiciar un sentido a la articulación de la aritmética y el álgebra.

Por otro lado, analizar el nivel de algebrización que alcanzaron los estudiantes, brindó información relevante para caracterizar el pensamiento algebraico de los estudiantes, pues mostró si lograron establecer relaciones directas entre cantidades, la forma en que expresaron dichas relaciones y si consiguieron dar un tratamiento algebraico correcto a las expresiones algebraicas que determinaron.

De acuerdo a los perfiles de pensamiento algebraico, se destaca que nivel 1 de algebrización (que se define por encontrar la generalidad expresándola en un lenguaje diferente al alfanumérico) emergió con una frecuencia del 2.3% a lo largo de toda la secuencia didáctica, es decir, se determinó únicamente en 2 de las 88 evaluaciones de nivel de algebrización que se realizaron por cada tarea de los 22 estudiantes. Lo que indica que la cantidad de ocasiones en que los alumnos tratan de definir una regularidad sin usar lenguaje matemático es mínima, esto no quiere decir que los estudiantes dominen el lenguaje algebraico, sino que talvez tienen dificultades o no están acostumbrados a expresar de otras formas los patrones que notan.

A nivel grupal, el 68% de ocasiones se observó que los estudiantes no alcanzaron un nivel consolidado de algebrización, es decir que en la mayoría de veces los estudiantes tienen dificultades en el tratamiento algebraico de expresiones lineales y en mayor medida en expresiones cuadráticas.

En los diferentes tipos de perfiles de pensamiento algebraico se observa un comportamiento similar en el uso del signo igual. Se señala el caso de los estudiantes con perfil tipo A y B (que representan a más de la mitad de los estudiantes) quienes tienden a omitir el signo igual, error que la docente de matemáticas ya había comentado en el análisis preliminar del desarrollo de la ingeniería didáctica. Es decir que este tipo de tareas reflejan varios detalles sobre el desempeño académico que muestran los estudiantes en el aula de clases.

Desde el punto de vista de la docencia, se espera que la información generada en esta investigación sea útil para los profesores en activo que decidan implementar este tipo de tareas en el aula de clases, ya que la demanda cognitiva, las estrategias de generalización y los niveles de algebrización son elementos que pueden ser considerados por el profesor durante su práctica para proponer tareas sobre generalización de patrones en el aula. Tomar en cuenta dichos elementos permitirá que se integren las consignas necesarias de acuerdo a los objetivos que se planteen y se tendrá un modelo para clasificar las estrategias y finalmente para determinar el nivel de algebrización de los estudiantes.

Una recomendación didáctica-pedagógica es la de implementar tareas de patrones cuadráticos si se desea fomentar el uso de expresiones equivalentes, ya que en esta investigación se demostró que las tareas de patrones cuadráticos favorecieron más el uso de estas expresiones en comparación con las lineales.

Referente a los objetivos de esta investigación, se concluye que el diseño de la secuencia didáctica fue adecuado pues incluyeron consignas de diferentes niveles de demanda cognitiva e incitaron el uso de diversas estrategias, incluso surgieron estrategias nuevas como la de aproximación que se detectó en 7 ocasiones y que en la literatura no se ha clasificado como una estrategia específica. Además, la caracterización del pensamiento algebraico de los estudiantes mediante los niveles de algebrización, el tipo de análisis al resolver tareas de patrones cuadráticos y la forma de emplear el signo igual permitieron alcanzar el objetivo general de realizar un análisis del pensamiento algebraico de estudiantes de bachillerato a través de una secuencia didáctica sobre generalización de patones.

Se recalca que a nivel medio superior existen pocos estudios sobre el pensamiento algebraico a través de la generalización de patrones, sobre todo en México, por lo que este trabajo contribuye a esa línea de investigación, exponiendo resultados interesantes sobre cómo se desarrolla el pensamiento algebraico de los estudiantes al resolver tareas de generalización de patrones.

Por otro lado, es importante mencionar que una de las limitaciones de este estudio fue de índole temporal, ya que las entrevistas a los estudiantes se realizaron hasta finalizar la secuencia didáctica y como ya habían pasado semanas desde que contestaron la tarea 1, algunos estudiantes no recordaban con exactitud la lógica que habían seguido y sus respuestas no fueron claras, esto influyó en que análisis la muestra se redujera a 22 estudiantes que sí brindaron suficiente información para caracterizar su pensamiento. Por lo que se recomienda que en futuras investigaciones las entrevistas se realicen al terminar cada tarea.

En lo que respecta a las líneas de investigación que este estudio genera, se destaca la posibilidad de investigar con mayor profundidad si es consistente el hecho de que un patrón cuadrático de forma $ax^2 + bx + c$ propicia constantemente los análisis figurales en vez de los numéricos.

Referencias

Acosta, A., Cuervo, O., Pinzón, M., & Salamanca, S. (2018). *Progresión aritmética*. [Tesis de Maestría,Universidad de los Andes]. R*epositorio institucional de la Universidad de los Andes*. https://repositorio.uniandes.edu.co/handle/1992/33157?show=full

Aké, L. P., & Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educacion Matematica*, *30*(2), 171–201. https://doi.org/10.24844/EM3002.07

Akkan, Y. (2013). Comparison of 6th-8th graders' efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *27*(47), 703–732. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400002

Arbona, E., Beltrán, M. J., Jaime, A., & Gutiérrez, Á. (2017). Aprendizaje del álgebra a través de problemas de patrones geométricos. *Suma*, *86*, 39–46.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. In P. Gomez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33–59). Grupo editorial Iberoamérica.

Avendaño, R. K. C. (2018). *Interés por estudios universitarios en Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM) en bachilleres de Tabasc*o. [Tesis doctoral, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco]. Respositorio Institucional UJAT. http://148.236.18.55/handle/20.500.12107/3106

Ávila, S., López, C., & Luna, J. (2010). La Generalización De Patrones Cuadráticos: Un Estudio Con Alumnos De Licenciatura En Matemáticas. *Culcyt*, *7*(40), 34–40.

Bajo, B. J. M., Gavilán, I. J. M., & Sánchez-Matamoros, G. G. (2019). Caracterización del esquema de sucesión numérica en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *37*(3), 149–167. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2673

Banerjee, R. (2008). *Developing a Learning Sequence for Transiting from Arithmetic to Elementary Algebra* [Tesis doctoral, Tata Institute of Fundamental Research]. Homi Bhabha Centre for Science Education. https://www.hbcse.tifr.res.in/research-development/ph.d.-theses/phd-thesis-banerjee-final-10.10.08.pdf

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization : Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, *10*(1), 57–70.

Bautista-Pérez, J. L., Bustamante-Rosario, M. H., & Amaya, T. (2021). Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas. *Educación Matemática*, *33*(1), 125–152. https://doi.org/10.24844/EM3301.05

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization Strategies of Beginning High School Algebra Students. In H. L. Chick & J. L. Vicent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 121-128). PME.

Benedicto, C., Jaime, A., & Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométrico. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 153–162). SEIEM.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5.* National Council of Teachers of Mathematics.

Butto, C., & Rivera, T. (2011). La generalidad una vía para acceder al pensamiento algebraico: un estudio sobre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo. En Consejo Mexicano de Investigación Educativa A.C (Eds.). *XI Congreso Nacional de Investigación Educativa*, (pp.1–12). COMIE. https://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/docs/area_05/1330.pdf

Cañadas, M. C., Castro, E., & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3o y 4o de educación secundaria obligatoria en el problema de las Baldosas. *PNA*, *2*(3), 137–151.

Cañadas, M., & Castro, E. (2007). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran en razonamiento inductivo. *Indivisa*, *IV*, 13–24.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. In A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75–94). SEIEM.

Cetina-Vázquez, M., & Cabañas-Sánchez, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de Las Ciencias*, *40*(1), 65–86. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3096

Chalé, C. D. S. (2013). El desarrollo del pensamiento algebraico , la visualización en el caso de los patrones. [Tesis de maestría, CINVESTAV]. *Repositorio CINVESTAV*.https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/1008?show=full&locale-attribute=en

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(1), 57–76. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9803-x

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos De Investigación Y Formación En Educación Matemática*, *1*(2), 1–9.

De Mora, J., & Ludwika, M. (2003). *Apuntes para una historia de las matemáticas y astronomía en la india antigua.* Universidad Nacional Autónoma de México

Dirección General del Bachillerato. (2017a). Matemáticas I. *Programa de Estudios*.

Dirección General del Bachillerato. (2017b). Matemáticas II. *Programa de Estudios*.

Firdaus, A. M., Juniati, D., & Wijayanti, P. (2019). Generalization Pattern’s Strategy of Junior High School students based on Gender. *Journal of Physics: Conference Series*, *1417*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1417/1/012045

Fitzgerald, Z., & Ubarne, P. (2022). Creencias acerca de las matemáticas y su aprendizaje en la modalidad virtual en tiempos de pandemia Covid-19 en estudiantes de bachillerato. *Números Revista Didáctica de Matemáticas*, *110*, 7–24. https://www.researchgate.net/publication/359278651_Creencias_acerca_de_las_mat ematicas_y_su_aprendizaje_en_la_modalidad_virtual_ven_tiempos_de_pandemia_Covid-19_en_estudiantes_de_bachillerato

Gaita, R., & Wilhelmi, M. R. (2019). Desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental mediante Tareas de Recuento con Patrones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática,; 33*(63), 269–289. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a13

García, S. J., Segovia, A. I., & Lupiáñez, G. J. L. (2014). El Uso de Las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas. *B Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1545–1566. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, Á., Díaz, C., Estepa, A., Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, L., & Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Ensenanza de Las Ciencias*, *33*(1), 127–150. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1468

Hernández, K., & Tapiero, K. (2014). Desarrollo del razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos - icónicos en estudiantes de educación básica primaria. [Tesis de licenciatura, Universidad del Valle]. *Repositorio Universidad Del Valle*. http://journal.stainkudus.ac.id/index.php/equilibrium/article/view/1268/1127

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). Taylor & Francis Group.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades : What Is It? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Fong, S. (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching.* Springer. https://doi.org/10.1515/9780748670383-006

Kirwan, J. V. (2015). Preservice secondary mathematics teachers' knowledge of generalization and justification on geometric-numerical patterning tasks. [Tesis de doctorado, Illinois State University]. *Librería Illinois State University*, *77*(2-A(E)).

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3–28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

López-Acosta, L. (2016). Generalización de patrones . Una trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional. [Tesis de Maestría, CINVESTAV]. *Repositorio CINVESTAV*.

Moss, J., & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics : Supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*, 441–465. https://doi.org/10.1007/s11412-006-9003-z

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (2015). *Panorama de la educación* 2015. México- Nota Pais. https://www.oecd.org/mexico/Education-at-a-glance-2015-Mexico-in-Spanish.pdf

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2019). Programa para la evaluación internacional de alumnos Pisa 2018-resultados resultados. México- Nota País. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf

Panagouli, E., Stavridou, A., Savvidi, C., Kourti, A., Psaltopoulou, T., Sergentanis, T. N., & Tsitsika, A. (2021). School performance among children and adolescents during covid-19 pandemic: A systematic review. *Children*, *8*(12), 1–12. https://doi.org/10.3390/children8121134

Ponte, J. P. (1992). The History of the Concept of Function and Some Educational Implications. *The Mathematics Educator*, *3*(2), 3–8.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., & Méndez, A. (Eds.). *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Universidad Pedagógica Nacional

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 83–96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2010). Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activities. *PNA*, *4*(2), 37–62. https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257–277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Ramos, L., & Casas, L. (2018). Demanda Cognitiva de Estándares Educativos y Libros de Texto para la Enseñanza del Álgebra en Honduras. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 1134–1151. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a19

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. *EMA*, *1*(1), 4–24.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. In *Educational Studies in Mathematics,* 73(3), 297–328. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9222-0

Rojas, G. P. J., & Vergel, C. R. (2014). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista Científica*, *2*, 688. https://doi.org/10.14483/23448350.7753

Rosas, A. M., & Molina, J. G. (2016). *4000 años de historia de las Series Infinitas* (Primera). Editorial Lectorum, S. A. de C.V.

Schult, J., Mahler, N., Fauth, B., & Lindner, M. A. (2022). Did students learn less during the COVID-19 pandemic? Reading and mathematics competencies before and after the first pandemic wave*School Effectiveness and School Improvement*. An International Journal of Research, Policy and Practice, 33(4), https://doi.org/10.1080/09243453.2022.2061014

Setiawan, Y. E., Purwanto, Parta, I. N., & Sisworo. (2020). Generalization strategy of linear patterns from field-dependent cognitive style. *Journal on Mathematics Education*, *11*(1), 77–94. https://doi.org/10.22342/jme.11.1.9134.77-94

Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V., & Chauzova, V. (2022). A Systematic Review on Algebraic Thinking in Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*(1), 1–15. https://doi.org/10.29333/EJMSTE/11486

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(5), 344–350.

Spivak, M. (2012). *Calculus* (3ra ed.). Reverté.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147–164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

Stewart, J., Hernández, R., & Sanmiguel, C. (2007). *Introduccion al Cálculo* (Vol. 1, Issue 1). Thomson.

Strachota, S. (2020). Generalizing in the context of an early algebra intervention (La generalización en el contexto de una intervención algebraica temprana). *Journal for the Study of Education and Development*, *43*(2), 347–394. https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1732611

Sweller, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. *Learning and Instruction*, *4*(4), 295–312. https://doi.org/10.1016/0959-4752(94)90003-5

Uegatani, Y., Nakawa, N., & Kosaka, M. (2021). Changes to Tenth-Grade Japanese Students' Identities in Mathematics Learning During the COVID-19 Pandemic. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *16*(2). https://doi.org/10.29333/iejme/10905

Universidad Autónoma de Querétaro. (2019a). Matemáticas I-Álgebra. *Programa de Estudios de La Escuela de Bachilleres UAQ*.

Universidad Autónoma de Querétaro. (2019b). Matemáticas II-Álgebra. *Programa de Estudios de La Escuela de Bachilleres UAQ*.

Valenzuela, J., & Gutiérrez, V. E. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. *Educación Matemática*, *30*(2), 49–72. https://doi.org/10.24844/EM3002.03

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9*(3), 193–215. https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220

Wyse, A. E., & Viger, S. G. (2011). How Item Writers Understand Depth of Knowledge. *Educational Assessment*, *16*(4), 185–206. https://doi.org/10.1080/10627197.2011.634286

Zapatera, L. A. (2018a). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *21*(1), 87–114. https://doi.org/10.12802/relime.18.2114

Zapatera, L. A. (2018b). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números Revista Didáctica de Matemáticas*, *97*, 51–67. http://www.sinewton.org/numeros

Zapatera, L. A., & Callejo, de la V. M. L. (2018). El conocimiento matemático y la mirada profesional de estudiantes para maestro en el contexto de la generalización de patrones. Caracterización de perfiles. *Revista Complutense de Educación*, *29*(4), 1217–1235. https://doi.org/10.5209/rced.55070

Anexos

Anexo A. Guion de la entrevista semiestructurada como parte del análisis cognitivo de la fase 1

Objetivo: Conocer el desempeño académico del grupo de estudiantes en la asignatura de matemáticas.

Entrevistado: Docente de matemáticas
Entrevistador: Míriam Ramos Franco

1. ¿Qué errores y dificultades ha identificado como los más frecuentes en álgebra durante este curso de matemáticas?

2. ¿Considera que el grupo tiene los conocimientos previos necesarios para llevar satisfactoriamente este curso de matemáticas? ¿Qué temas deberían fortalecer?

3. ¿Cuáles cree que sean los factores que influyen en que algunos alumnos no logren aprobar el curso?

4. ¿Cómo ha sido el desempeño académico de los estudiantes en tareas que involucran el uso del lenguaje algebraico?

5. ¿Considera que las tareas sobre generalización de patrones podrían favorecer el desarrollo del lenguaje algebraico o podría reducir algunas dificultades en álgebra?

Anexo B. Transcripción natural de fragmentos de la entrevista realizada para el análisis cognitivo de la fase 1

-Entrevistador: ¿Qué errores y dificultades ha identificado como los más frecuentes en álgebra durante el curso?

-Profesora: No manejan bien la sintaxis de los símbolos, por ejemplo, omiten mucho el símbolo de igual. No identifican o utilizan bien el producto, si yo escribo ab muchos no identifican que es un producto. Los exponentes y los coeficientes 1 también les cuesta identificarlos. Todas las cosas que son tácitas, a veces les cuesta identificarlas. Los productos notables no los desarrollan bien, no manejan bien las factorizaciones cuando el coeficiente del término cuadrático es diferente de 1… El error más común, que no es de este curso, sino del anterior es que no se aprendieron bien el lenguaje algebraico, por ejemplo, si yo pongo $-2x + x$ quieren multiplicar los signos…Una cuarta parte del grupo no maneja bien la sintaxis

…

-Entrevistador: maestra, cuando a los estudiantes les ponen un ejercicio que está escrito en lenguaje común y que lo tienen que representar en lenguaje algebraico para resolverlo ¿Qué tal les va?

-Profesora: Muchos resuelven problemas de planteo haciendo una iteración, se ponen a multiplicar o a sumar y restar. No son capaces de escribir la ecuación que represente dicho problema y entonces todo lo hacen por tanteo. Les cuesta mucho trabajo transitar de un lenguaje a otro

…

-Entrevistador: ¿Cuáles cree que sean los factores que influyen en que algunos alumnos no logren aprobar el curso de matemáticas II?

-Profesora: Una es que no se alcanzan a recuperar de sus deficiencias porque a veces son muy graves, no solo la deficiencia viene del curso anterior, sino viene desde la secundaria…pero de los que reprueban, la gran mayoría es por incumplimiento, no ponen atención en clases, no hacen tareas o las copian y entonces no reflexionan.

-Entrevistador: Maestra, ¿ve mayores dificultades y algunas deficiencias que, a lo mejor, puedan estar relacionadas al tiempo que estuvieron llevando clases en línea y al tiempo que se perdió al principio de la pandemia, en comparación con otras generaciones?

-Profesora: Sí hay deficiencias, muchos no hacen tareas, las copian, sobre todo porque es muy fácil pasarse las tareas por WhatsApp, también sucede con los exámenes… aparte traen deficiencias porque también se bajó un poco el nivel de los cursos, al menos en la prepa yo vi que se bajó un poco el nivel al hacer los materiales en línea que no eran muy difíciles…

…

-Entrevistador: ¿Considera que las tareas sobre generalización de patrones podrían favorecer el desarrollo del lenguaje algebraico o podría reducir algunas dificultades en álgebra?

-Profesora: sí, considero que como herramienta es muy buena porque ya vi que se puede utilizar como apoyo para que aprendan lenguaje algebraico…pasan de algo visual a una escritura numérica y luego ya generalizan con escritura algebraica. También la creación de modelos se utiliza mucho para que después ellos planteen la ecuación de un problema.

Anexo C. Guion de la entrevista semiestructurada como parte del análisis didáctico de la fase 1

Objetivo: Conocer el estilo de enseñanza del profesor de matemáticas

Entrevistado: Docente de matemáticas
Entrevistador: Míriam Ramos Franco

1. ¿Cómo lleva a cabo el trabajo cotidiano en una sesión de clases para enseñar matemáticas?

2. ¿Considera que el tiempo del curso es suficiente para ver todos los contenidos del plan de estudios?

3. ¿Cuál es la técnica que utiliza para que los estudiantes participen?

4. ¿Tiene la oportunidad de apoyar en las clases a quienes lo requieren para mejorar su aprendizaje dado el número de estudiantes que conforman el grupo?

5. ¿Qué materiales educativos utiliza como apoyo en el curso de matemáticas?

6. ¿Cómo toma en cuenta la diversidad del alumnado en cuanto a capacidades, distintos niveles cognitivos, ritmos y estilos de trabajo, habilidades y estilos de aprendizaje?

7. ¿Considera adecuadas las tareas sobre generalización de patrones en las clases de matemáticas?

8. ¿Ha implementado este tipo de tareas o le gustaría implementarlas?

Anexo D. Transcripción natural de fragmentos de la entrevista para el análisis didáctico de la fase 1

-Entrevistador: Me gustaría conocer ¿cómo lleva a cabo el trabajo cotidiano en una sesión de clases para enseñar matemáticas?

-Profesora: Se prepara la clase por semana y luego lo desgloso por día, entonces en un día pongo por ejemplo, conceptos y ejercicios... yo ya llevo los problemas que voy a proponer en mi clase, normalmente construyo los problemas de atrás para adelante, es decir, que tipo de soluciones quiero que aparezcan y con esos creo los ejercicios que voy a poner en clases

-Entrevistador: En cuanto a los ejercicios, ¿usted resuelve uno primero y después ellos? ¿o a veces ellos inician a resolver sin modelo previo de cómo hacerlo?

-Profesora: yo los resuelvo primero y luego les pongo otros ejercicios, aunque procuro que algunos ejercicios lleven algo más de lo que yo mostré. Unos ejercicios son muy parecidos, pero otros llevan algo más, de tal manera que ellos se interesen en tratar de resolverlos y no nada más sea algorítmicamente.

…

-Entrevistador: ¿Considera que el tiempo del curso es suficiente para ver todos los contenidos del plan de estudios?

-Profesora: Está muy justo, por ejemplo, si se pierde algún día de clases ya no se recupera porque está muy apretado.

…

-Entrevistador: ¿Cuál es la técnica que utiliza para que los estudiantes participen?

-Profesora: pongo ejercicios y les pido que pasen al pizarrón a los que ya lo hayan resuelto, pero sí doy un tiempo para que la mayoría lo resuelva.

-Entrevistador: ¿Usted decide quién pasa o es voluntario?

-Profesora: Es voluntario, a menos que nadie quiera pasar sí agarro a alguien de la lista, pero por lo regular si pasan voluntariamente. A veces cuando quiero que discutan los pongo en parejas.

…

-Entrevistador: ¿Tiene la oportunidad de apoyar en las clases a quienes lo requieren para mejorar su aprendizaje dado el número de estudiantes que conforman el grupo?

-Profesora: Es muy difícil dedicarme a una persona en particular, me doy cuenta de sus dificultades cuando voy pasando por las filas y si veo que alguien está atorado me detengo con él y le explico, pero realmente no creo alcanzar a cubrir en una sesión a todos los que se hayan quedado con una duda porque son muchos…algunos al final de la clase preguntan sus dudas

…

-Entrevistador: ¿Considera adecuadas las tareas sobre generalización de patrones en las clases de matemáticas?

-Profesora: sí, las tareas no son referentes a un problema cotidiano, pero sí tienen muchos puntos de donde uno puede enlazarse para aplicarlo a muchas cosas.

-Entrevistador: ¿Ha implementado este tipo de tareas, o bien, le gustaría implementarlas a futuro?

-Profesora: No la he implementado, pero sí me gustaría, lo he usado más en otras materias como cálculo diferencial para funciones y series.